



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

“Estudio de los efectos de borde de un flujo oscilante
a la salida de un tubo a través del análisis de la masa
añadida.”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

ELIA ECHEVERRÍA ARJONILLA

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS MÁLAGA IGUÍÑIZ



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Estudio de los efectos de borde de un flujo oscilante a la salida de un tubo a través del análisis de la masa añadida

Elia Echeverría Arjonilla
Facultad de Ciencias U.N.A.M.

México D.F., Agosto 2012

Resumen

El propósito del presente trabajo es ayudar a optimizar el funcionamiento de un Sistema de Bombeo por Energía de Oleaje (SIBEO) al estudiar un flujo oscilante a la salida de un tubo.

El flujo de agua a través de este sistema ya se ha modelado previamente al integrar la ecuación de Navier-Stokes sobre una línea de corriente central para un flujo incompresible. En la ecuación resultante aparecen tres términos: en el primero intervienen las diferencias o gradientes de presión, de potencial gravitacional y de energía cinética entre un punto inicial y uno final de la línea de corriente elegida, el segundo es un término relacionado con las pérdidas de energía por los efectos viscosos y el tercero es la integral sobre la línea de corriente de la variación temporal de la norma del campo de velocidades.

El primer término de dicha expresión puede ser evaluado explícitamente porque sólo depende de los valores extremos de la línea elegida y resultan ser conocidos. Sin embargo, los otros dos términos no pueden ser evaluados explícitamente porque no se conoce el campo de velocidades para este flujo. Por lo anterior, ambos términos se modelan haciendo suposiciones sobre la forma funcional del campo y sobre las posibles causas de las pérdidas, introduciendo cuatro parámetros libres que se ajustan para reproducir el desempeño real de la bomba a cualquier razón de flujo. Los resultados han mostrado que este modelo reproduce el comportamiento de la bomba razonablemente.

Respecto al campo de velocidades, en el modelo se supone que dentro del tubo el agua oscila como lo haría un cuerpo rígido. En cambio, en la región que corresponde a la salida del tubo, se considera que los efectos del flujo oscilante todavía se hacen notar en el fluido circundante pero la velocidad del flujo va disminuyendo. Finalmente, a cierta distancia de la boca, se asume que el flujo se muere por completo; o sea, que la velocidad del flujo es nula. La integral sobre la línea de corriente de la variación temporal de la norma de la velocidad en la región que corresponde a la salida del tubo se conoce como masa añadida ya que está relacionada con el fluido fuera del tubo que se ve afectado por el flujo oscilante.

Un resultado observado en el SIBEO es que la forma de la boca del tubo (trompetas de distinta forma y tamaño) afecta el desempeño de la bomba. Analizando la expresión que resulta al integrar la ecuación de Navier-Stokes sobre una línea de corriente central de este flujo, se observa que el primer término no se modifica

al cambiar la forma de la boca del tubo porque depende sólo de los valores extremos de la línea de corriente. Sin embargo, los otros dos términos sí se ven afectados ya que ambos dependen de la línea de corriente elegida y su trayectoria se modifica al cambiar la boca del tubo. Por lo anterior, al medir la masa añadida -que es el pedazo del término inercial que varía al cambiar la forma de la boca del tubo- se puede medir indirectamente el término relacionado con las pérdidas. Si uno aumenta, el otro también y viceversa.

Bajo estas consideraciones, en el presente trabajo se midió la masa añadida para flujos oscilantes en tubos con distintas bocas, con la intención de relacionarlo tanto con el desempeño del tubo en cada caso como de comparar estas mediciones con lo que se obtiene en el modelo ya que se han ajustado los parámetros libres. La finalidad de lo anterior es buscar un criterio para elegir la geometría que minimice la energía disipada y elevar, así, la eficiencia de un SIBEO.

Este trabajo contó con el apoyo del Proyecto DGAPA-UNAM, PAPIIT-IN1188608.

Abstract

The present work addresses the problem of optimizing the performance of a water wave driven pumping system, known as SIBEO, by studying an oscillating flow at the exit of a tube.

The water flow through this system has already been modeled by an integral of the Navier-Stokes equation along a central streamline for an incompressible flow. In the resulting equation there are three terms: the first involves pressure, gravitational potential and kinetic energy differences between two endpoints of the chosen streamline; the second is a term related to energy losses by viscous effects and the third term is the integral along the streamline of the temporal variation of the magnitude of the velocity field.

The first term in this expression can be evaluated explicitly because it only depends on the extreme values of the selected streamline and they are known. However, the other two terms cannot be evaluated explicitly because the velocity field for this flow is unknown. Therefore, both terms are modeled by making assumptions about the functional form of the field and on the possible causes of the losses, introducing four free parameters that are adjusted to reproduce the actual performance of the pump at any flow rate. Experimental observations have shown that this model fits the pump behavior reasonably well.

Regarding the velocity field, the model assumes that the oscillating water in the tube behaves as a rigid body. In the region outside the end of the tube, the effects of the oscillating flow in the surrounding fluid produces a velocity field that decays away from the tube outlet. At some distance from the mouth, it is assumed that flow velocity decays to zero. The integral along the streamline of the temporal variation of the velocity magnitude in the vicinity of the tube outlet is known as added mass, because it is related to the fluid outside the tube that is affected by the oscillating flow.

It is known that the performance of the SIBEO pump depends on the geometry of its receptor tubes mouth. An inspection of the integral expression of the Navier-Stokes equation along a central streamline of this flow shows that changing the shape of the tube's mouth does not modify the first term. However, the other two terms must change because both depend on the flow field at the chosen streamline, and because changing the mouth of the tube modifies the flow and the streamline. These changes must be such that the integral relation is preserved. Therefore, by measuring

the added mass, the inertial term, the losses term can be measured indirectly. If one term increases, so does the other.

Under these considerations, the objective was to measure the added mass of oscillating flows in tubes of different mouth shapes, relate them to the performance of each tube and compare these measurements with those used in the model. The goal is to search for a criterion for choosing the geometry that minimizes the energy dissipation and improves the efficiency of the SIBEO.

This work was supported by DGAPA-UNAM grant PAPIIT-IN1188608.

Agradecimientos

Al Dr. Carlos Málaga por su paciencia y comprensión, pero sobretodo por su rigor científico. Por compartir a través de su trabajo el placer de descubrir y de entender (como dice Feynman).

A la Dra. Catalina Stern, al Dr. Steven Czitrom y al Dr. Arturo Olvera por su apoyo y guía durante todo este proceso. Por su calidad científica y humana.

Al Dr. Lorenzo Martínez por su ayuda para poder realizar y analizar todas las mediciones hechas con la técnica PIV.

A Mariana Centeno, Hiram Hernández y Esteban Prado por la ayuda, ideas y resultados que compartieron conmigo para lograr este trabajo.

A Leandro y a Norma por su agudeza, inteligencia y pasión para enseñar y hacer ciencia y por compartirlo conmigo.

A mi familia por su cariño y apoyo incondicionales.

A Jero por acompañarme y apoyarme cada día.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. El flujo de un fluido viscoso y newtoniano	8
1.2.1. Las ecuaciones de conservación de masa y energía y balance de momento lineal	8
1.2.2. La relación constitutiva de un fluido newtoniano y las ecuaciones de Navier-Stokes	12
1.3. El flujo en el SIBEO y su funcionamiento real	16
1.3.1. El balance del momento lineal a lo largo de una línea corriente en el SIBEO	16
1.3.2. La boca del conducto resonante y la masa añadida	25
2. Planteamiento del problema y de las hipótesis de trabajo	33
3. Desarrollo	37
3.1. Refinamiento del perfil y construcción de difusores	37
3.2. Dispositivo experimental	44
3.2.1. Medición de campos de velocidades utilizando la técnica PIV	46
3.3. Protocolo numérico para medir la masa añadida	57
4. Resultados y análisis	73
4.1. Tiempos de decaimiento de la columna al oscilar libremente en tubos con y sin difusor	73
4.2. Comportamiento real de la masa añadida	74
4.2.1. Evolución temporal de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para una línea central de corriente	79
4.2.2. Evolución y comportamiento de la masa añadida	88
4.3. Efecto de la geometría del difusor	101
5. Conclusiones y perspectivas	121
5.1. Conclusiones	121
5.2. Perspectivas	125

A. Rutinas numéricas	127
A.1. Rutina para calcular el perfil de los difusores	127
A.2. Rutina para calcular la masa añadida	130
A.3. Rutina para interpolar valores del campo de velocidad	142
A.4. Rutina para ver evolución temporal de curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ”	143
A.5. Rutina para visualizar zona de influencia	149
Referencias	151

1

Introducción

1.1. Antecedentes

Hoy en día se reconoce a nivel mundial, tanto en el ámbito científico como en el político y económico, un posible escenario de crisis energética y de calentamiento global como consecuencia del consumo no sustentable de fuentes de energía no renovables; principalmente de combustibles fósiles. También se reconoce como parte de este problema la dependencia generalizada en tecnologías no limpias¹ para la obtención, conversión, almacenamiento, transportación y conservación de este tipo de combustibles [1].

En comparación con la explotación de combustibles fósiles, la explotación de fuentes renovables es aún muy ineficiente y por tanto costosa. En el Informe de 2010 sobre la situación global respecto a la energía hecho por el PNUMA se reporta que en 2009 las fuentes de renovables representaron el 25 % de la capacidad global de la producción de energía eléctrica generada a partir de todas las fuentes incluyendo carbón, el gas y la energía nuclear y el 18 % de la producción global de energía [2]. Por lo anterior, además de promover y fomentar un consumo responsable de las fuentes energéticas, hoy se considera como un asunto prioritario impulsar la exploración y el desarrollo de sistemas que utilicen fuentes renovables de energía y tecnologías limpias [1].

En el Reporte Anual de 2010 de la división de Sistemas de Energía Oceánica de la Agencia Internacional de Energía [3] se menciona, como una de sus metas principales, conjuntar los esfuerzos de los países afiliados para investigar, desarrollar y demostrar la viabilidad de la transición hacia el consumo de energías renovables y de tecnologías limpias a partir de los recursos que proporcionan los océanos y mares.

¹La Agencia Internacional de Energía (IEA) define como fuentes renovables aquellas de las que la energía se deriva de un proceso natural que se repite de manera constante. Estas son: la energía geotérmica, la solar, la hidroeléctrica y la proveniente de mareas, oleaje, biomasa y biocombustibles. Por otro lado, se consideran tecnologías limpias aquellas que permiten la obtención, conversión, almacenamiento, transporte y conservación de la energía produciendo el mínimo impacto posible sobre el medio ambiente; en particular, respecto a las emisiones de CO₂ y gases tipo invernadero (nombrados como GHG por las siglas en inglés de “green house gases”).

Estos recursos son: las mareas, el oleaje, los gradientes de temperatura (tanto los generados por la energía térmica de los océanos como por la energía submarina geotérmica) y los gradientes de salinidad²; es decir, todas aquellas fuentes en las que el agua de los océanos o mares proporcione la fuerza motriz³. En comparación con otras tecnologías de explotación de fuentes renovables, la inversión en tecnología para convertir o utilizar la energía limpia proveniente de los océanos y mares ha sido modesta y a pesar de existir investigaciones y desarrollos tecnológicos desde hace más de 30 años, se considera que se encuentra aún en una etapa temprana de desarrollo [3].

Específicamente, la idea de convertir la energía proveniente del oleaje en otras formas utilizables no es nueva. A pesar de haber reportes de investigaciones y patentes relacionadas con este tipo de energía desde el siglo XVIII, fue en la década de los setentas del siglo pasado que en Europa se comenzó a impulsar de manera seria el estudio y desarrollo de formas de conversión de energía proveniente del oleaje (entre otras) después del incremento dramático de los precios del petróleo en 1973. Durante las últimas cuatro décadas los estudios y el desarrollo tecnológico alrededor de la utilización y conversión de este tipo de energía han atravesado por etapas de entusiasmo, de desilusión y de reconsideración. Sin embargo, los esfuerzos persistentes y la experiencia acumulada durante los últimos años han permitido mejorar el desempeño de los dispositivos desarrollados a tal grado que, como nunca antes, se han acercado a una etapa de explotación comercial (la primera instalación a nivel comercial sucedió apenas en 2008 [4]). Hoy en día se estima que la contribución a nivel mundial de producción de energía eléctrica a través de energía por oleaje pudiera llegar a ser del orden de 2000 TWh por año, que correspondería al 10 % del consumo mundial y hay estimaciones que afirman que, por ejemplo, en el Reino Unido este porcentaje puede alcanzar hasta un 15 o 20 % [4].

La energía que se puede extraer del oleaje proviene originalmente de la energía solar transferida a través de interacciones complejas entre los vientos y la superficie de mares y océanos. Los efectos de la variación de la temperatura en la Tierra como consecuencia del calentamiento solar, combinados con una multitud de fenómenos atmosféricos, provocan corrientes de aire a escala global y estas corrientes, a su vez, están relacionadas directamente con la generación, propagación y dirección del oleaje. Los dispositivos que utilizan o convierten energía proveniente del oleaje deben enfrentar distintas dificultades como un ambiente corrosivo, soportar cargas inmensas bajo condiciones climáticas extremas o funcionar bajo condiciones aleatorias en la entrada de energía de frecuencias de transmisión bajas. Sin embargo, sus ventajas resultan evidentes: si se logra diseñar dispositivos adecuados, la abundancia de recursos y altos flujos de energía en los mares y océanos resultan ideales para la producción económica y viable de energía con bajo impacto ambiental; generando

²Los gradientes de salinidad no sólo se utilizan para la generación de electricidad sino también para el proceso de desalinización del agua del mar.

³La energía eólica producida por turbinas en la superficie de mares y océanos no se considera dentro de este conjunto ya que no son los océanos ni los mares la fuente motriz sino el viento.

empleos y asegurando el suministro de energía en regiones remotas.

En comparación con otro tipo de fuentes renovables, hay una gran variedad de formas para convertir o utilizar la energía del oleaje. Sin embargo, los dispositivos desarrollados hasta el día de hoy que convierten o utilizan este tipo de energía pueden clasificarse en pocos tipos genéricos. Los principales son:

- Dispositivos que basan su funcionamiento en una columna oscilante de agua. En este tipo de dispositivos, el oleaje hace que al agua entre y salga de una cámara llena de aire. El aire desplazado puede utilizarse para mover una turbina que genere electricidad o para bombear agua.
- Dispositivos que basan su funcionamiento en el desbordamiento de agua. Estos dispositivos recolectan en depósitos altos agua proveniente del oleaje incidente. Posteriormente el agua es liberada y, al caer por efecto de la atracción gravitacional, mueve turbinas hidráulicas.
- Dispositivos que funcionan a partir de puntos de absorción. Los puntos de absorción son estructuras que flotan con componentes que se mueven relativamente unas respecto a otras durante el paso de la ola (por ejemplo, una boya flotante dentro de un cilindro fijo). El movimiento relativo se utiliza para hacer funcionar sistemas mecánicos y/o hidráulicos para generar energía eléctrica.
- Dispositivos que utilizan el movimiento horizontal del agua inducido por el oleaje para empujar a un deflector o a un brazo que oscila como un péndulo respecto al frente de onda que puede hacer funcionar también algún sistema mecánico o hidráulico.

En particular, se sabe que la eficiencia del funcionamiento de los dispositivos que funcionan mediante una columna oscilante de agua (llamados en inglés “oscillating water column devices” y abreviados por sus siglas en inglés como OWC) puede incrementarse sustancialmente si el producto final de su funcionamiento es también energía cinética (es decir, si no hay conversión en el tipo de energía) y si operan bajo una condición de resonancia. Por sus características, este tipo de sistemas pueden utilizarse para promover el saneamiento de lagunas costeras, manglares y bahías contaminadas o la acuicultura y la recuperación de lagunas costeras como zonas de crianza [5].

En 1993 Czitrom [6], optimizó el funcionamiento de un sistema de bombeo de agua que utiliza energía del oleaje basado en un diseño propuesto por Carey y Meralta. Dicho sistema se conoce como “Sistema de bombeo por energía de oleaje” -abreviado SIBEO por sus siglas en español- y su optimización se logra mediante un mecanismo de sintonización que le permite al sistema entrar en resonancia con el oleaje existente.

En la figura 1.1 se muestra el esquema de un SIBEO utilizado -por ejemplo- para rellenar una laguna costera o para transportar e introducir en ella larvas de camarón u otro organismo. El sistema está compuesto por un conducto de entrada (llamado

resonante) que está expuesto a la acción de las olas, un conducto de desagüe (llamado exhaustivo) que descarga al cuerpo de agua receptor y un elemento de bombeo entre los dos conductos. Para iniciar su funcionamiento, se eleva agua del mar y del cuerpo de agua receptor mediante la generación de un vacío parcial, hasta un nivel de operación en la cámara de compresión. La señal de presión inducida por el oleaje en la boca del conducto de entrada impulsa un movimiento oscilatorio que derrama agua en la cámara de compresión con el paso de cada ola. El agua derramada no puede regresar al conducto de entrada ya que éste destaca sobre el nivel de agua en la cámara de compresión y se acumula ahí. El agua acumulada en la cámara de compresión fuerza por gravedad un flujo a través del conducto de salida hacia el cuerpo de agua receptor.

Como se puede apreciar, el SIBEO es básicamente un sistema compuesto por dos masas de agua (en los conductos de entrada y de salida), acoplados por un resorte de gas (el aire en la cámara de compresión). Por lo anterior, al igual que cualquier sistema con resortes y masas, tiene una frecuencia natural de oscilación intrínseca que depende del tamaño de las masas (la cantidad de agua en los conductos) y de la dureza del resorte (el volumen de aire en la cámara de compresión). Cuando la frecuencia natural de oscilación del SIBEO coincide con la frecuencia del oleaje, el sistema entra en resonancia, las oscilaciones del agua aumentan su tamaño y el bombeo de agua marina es maximizado [5]. Esta condición se puede mantener para diferentes frecuencias de oleaje variando el volumen de la cámara de compresión, lo cual ajusta la “dureza” del resorte de aire. Dado que el sistema no tiene partes móviles los organismos transportados junto con el agua no son lastimados y es por esto que resulta ideal para la acuicultura.

Con el apoyo de una cooperativa de pescadores, un prototipo de este sistema ya fue probado en una laguna costera del estado de Oaxaca, México, mostrando que puede ser utilizado exitosamente para la reactivación de la crianza y pesca de camarón a un costo bajo [7].

En la figura 1.2, en cambio, se muestra el esquema de un SIBEO utilizado por ejemplo para drenar una laguna costera o una bahía. En este caso la columna oscilante de agua en el conducto resonante, impulsada por el oleaje, sólo se usa para variar el volumen de la cámara de compresión que, a su vez, hace oscilar al agua en el conducto que conecta la bomba con el cuerpo de agua que se desea drenar. En cada oscilación se derrama cierta cantidad de agua hacia un conducto de desagüe. De nuevo, la mayor eficiencia del sistema para drenar agua se obtiene cuando hay resonancia.

En 2000 Czitrom *et al* [5, 7], derivaron las ecuaciones que describen el comportamiento de un SIBEO al modelar su funcionamiento y probaron su validez al integrarlas numéricamente para comparar los resultados con datos que obtuvieron para un prototipo del sistema operando en un tanque de olas. También realizaron un análisis dimensional de dichas ecuaciones, lo cual no sólo incrementó la comprensión de la física involucrada en el comportamiento del sistema, sino que mostró que el prototipo a escala puede tener un desempeño similar a un prototipo funcionando

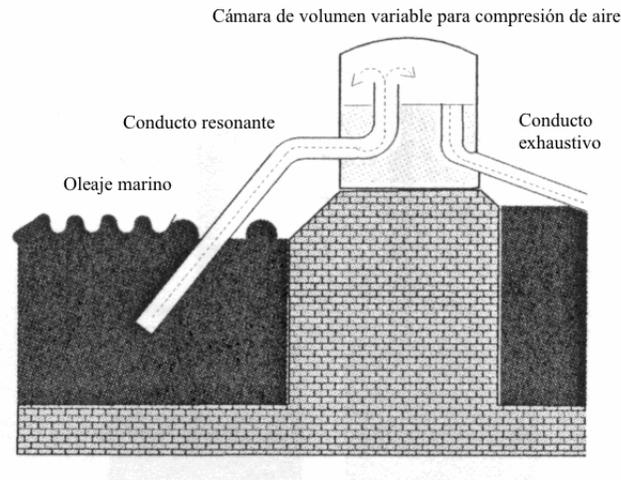


Figura 1.1: Esquematación de un SIBEO para bombear agua del mar u océano hacia una laguna o cuerpo de agua costero.

bajo las condiciones reales de flujo y, por tanto, los resultados obtenidos en el tanque de olas son extrapolables.

Como se verá con mayor detalle en la siguiente sección, el modelo del comportamiento del flujo de agua a través de este sistema puede derivarse al integrar la ecuación de Navier-Stokes para un flujo incompresible sobre una línea de corriente central del conducto resonante y del conducto exhaustivo. En esta expresión se obtiene un término que corresponde a la ecuación de Bernoulli, pero además también aparecen otros términos relacionados con la dependencia temporal del flujo y con la presencia de fuerzas viscosas. Estos últimos términos no se pueden evaluar a menos que se conozca el campo de velocidades y, ya que no es el caso, son modelados haciendo suposiciones sobre la forma funcional del campo y sobre las posibles causas de las pérdidas.

En el modelo propuesto por Czitrom *et al* [5], estas suposiciones introducen cuatro parámetros libres que se deben ajustar para reproducir el desempeño real de la bomba a cualquier razón de flujo. Tres de estos parámetros están relacionados con las posibles causas de pérdida de energía en el sistema y el cuarto parámetro tiene que ver con la forma funcional del campo de velocidades del flujo. La comparación de los resultados obtenidos al integrar numéricamente las ecuaciones que modelan el comportamiento del flujo con los obtenidos al analizar el prototipo funcionando en el tanque de olas muestran que dicho modelo reproduce el comportamiento de la bomba razonablemente. Sin embargo, no se han hecho mediciones experimentales para validar las suposiciones hechas al ajustar los parámetros; en particular en lo concerniente a la forma funcional del campo.

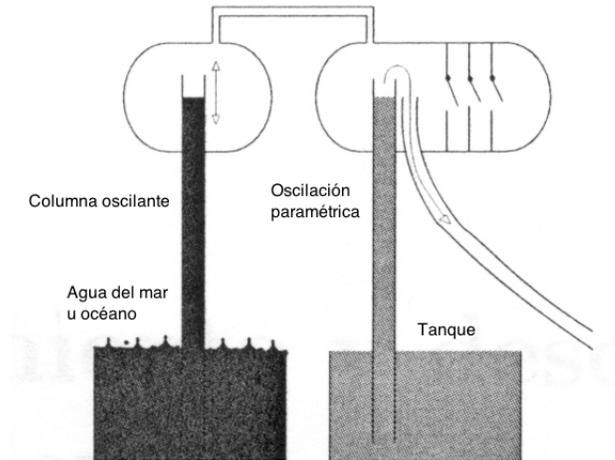


Figura 1.2: Esquemmatización de un SIBEO utilizado para bombear un cuerpo de agua contaminado.

Por otro lado, en 1980 Knott y Mackley [8] mostraron la posibilidad de disminuir las pérdidas de energía de un flujo oscilante al introducir un difusor en forma de trompeta en la boca del tubo. Este resultado está contemplado en el SIBEO ya que la boca del conducto resonante, como se muestra en los esquemas de las figuras 1.1 y 1.2, tiene forma de trompeta.

Czitrom *et al* [7] analizaron flujos oscilantes en tubos con trompeta y sin trompeta en la boca. Usando una trompeta con base en un perfil circular, observaron que el flujo aumentó aproximadamente en 10 % respecto al flujo obtenido en un tubo sin trompeta, mostrando experimentalmente que la presencia de la trompeta aumenta la cantidad de agua bombeada o el flujo. Sin embargo, un análisis perturbativo [5, 7] de los términos no lineales de las ecuaciones que modelan el comportamiento del flujo mostró que las pérdidas por formación de vórtices en la boca del conducto resonante contribuyen significativamente en la limitación del flujo de agua a través de la bomba. Lo anterior les sugirió la necesidad de optimizar el diseño de la boca para disminuir al máximo posible la formación de vórtices.

Posteriormente, Czitrom [9] realizó un análisis teórico para optimizar la geometría de la boca del conducto resonante que disminuyera al máximo posible las pérdidas por formación de vórtices. Considerando que la formación de vórtices está relacionada con una pérdida de balance entre las fuerzas inerciales y las fuerzas centrípetas que actúan sobre los elementos de fluido próximos a la trompeta, impuso la condición de que la razón entre estas fuerzas a lo largo del perfil de la trompeta tuviera un valor constante. Si bien la probabilidad de que se formen vórtices no se anula, con esta condición se busca que la probabilidad de formación de vórtices se mantenga igual a todo lo largo del perfil. Como producto de este análisis Czitrom

obtuvo una ecuación para el perfil de la trompeta en función del diámetro del tubo (el diámetro inicial de la trompeta) y de una constante indeterminada que incluye a la amplitud o al periodo de oscilación del flujo.

Con base en lo anterior, Stern et al [9] construyeron una trompeta con el perfil antes mencionado, para un tubo con diámetro dado y un valor de la constante tal que la trompeta tuviera dimensiones adecuadas respecto al dispositivo experimental con el que contaron. Generando flujos oscilantes, compararon la formación de vórtices en un tubo con esta trompeta con la formación de vórtices tanto en otras trompetas construidas empíricamente como en un tubo sin trompeta. Los vórtices se visualizaron inyectando pintura en dos extremos opuestos de la salida de las trompetas o del tubo, disolviendo pintura en todo el fluido y a través de la técnica “Particle Image Velocymetry” (abreviada PIV por sus siglas en inglés⁴) para distintas amplitudes y frecuencias de oscilación. Los resultados de este estudio mostraron que, al menos dentro de las condiciones de flujo estudiadas ($766 < Re < 7171$ y $341 < Rem < 6756$ ⁵), la trompeta con el perfil propuesto mostró menor formación de vórtices respecto al resto. A pesar de que las condiciones del flujo logrado en el laboratorio fueron muy distintas a las que se tiene en un flujo generado por el oleaje ($Re \simeq 75000$ y $Rem \simeq 294000$), ambas condiciones corresponden a flujos turbulentos por lo que los resultados encontrados pueden considerarse como válidos para la situación real de funcionamiento del SIBEO.

A pesar de los buenos resultados obtenidos con la trompeta construida a partir del perfil mencionado, esta propuesta tiene un inconveniente: en la ecuación del perfil no aparece ningún criterio para decidir en qué altura o a qué diámetro terminar la trompeta, por lo que se toma la decisión de manera arbitraria y no hay forma, más que experimentalmente, de determinar cuál es la mejor opción.

El propósito de este trabajo es, a grandes rasgos, ayudar a optimizar el funcionamiento de un SIBEO al estudiar un flujo oscilante a la salida de un tubo. Como se detalla más adelante, este estudio se centró por un lado en el refinamiento de la propuesta para determinar un perfil de las trompetas que minimice la formación de vórtices en la boca del tubo resonante y en la construcción de algunas de ellas. Por otro lado, se desarrolló y llevó a cabo un protocolo experimental para probar si con estas trompetas hay menor pérdida de energía al generar un flujo oscilante y por tanto pueden mejorar el desempeño de un SIBEO.

⁴Esta técnica se describe posteriormente ya que fue utilizada en la obtención de datos del presente trabajo.

⁵En este trabajo se utilizaron dos números adimensionales para caracterizar los flujos: el número de Reynolds $Re = UD/\nu = 2AD/T\nu$, donde D el diámetro del tubo en la sección recta, U es la velocidad media que es igual al doble de la amplitud A dividida entre el periodo de oscilación T y ν es la viscosidad cinemática del flujo; y el número de Reynolds modificado $Rem = r^2\omega/\nu = D^2\omega/4\nu = 2\pi D^2/4T\nu$, donde r es el radio del tubo, ω es la frecuencia de oscilación del flujo. Este último se utiliza para caracterizar flujos oscilantes. En realidad los números Re y Rem cambian conforme cambia el radio de los difusores, sin embargo decidieron utilizarlos para comparar flujos producidos por el mismo movimiento del pistón que generó los flujos oscilantes.

1.2. El flujo de un fluido viscoso y newtoniano

Como se mencionó en la sección anterior, el funcionamiento de un SIBEO se basa en la oscilación de una o más columnas de agua provocada por una señal de presión inducida por el oleaje. La columna de agua dentro del tubo resonante (por ejemplo) oscila debido a un desequilibrio entre las fuerzas que actúan sobre ella; estas son, el peso de la propia columna, la presión ejercida por el aire de la cámara de compresión y la presión ejercida por el agua en la boca del tubo. Para modelar el comportamiento del agua oscilando se le puede considerar como el flujo de un fluido incompresible que obedece las ecuaciones de Navier-Stokes; esto es, un flujo de un fluido newtoniano viscoso cuyo comportamiento satisface tres ecuaciones que establecen la conservación de la masa y de la energía y un balance entre el cambio en el momento lineal y las fuerzas volumétricas y superficiales que actúan sobre el fluido.

1.2.1. Las ecuaciones de conservación de masa y energía y balance de momento lineal

Para establecer la condición de conservación de la masa en el flujo de un fluido cualquiera se puede partir de la hipótesis del continuo⁶ y considerar una cantidad de masa del fluido cuyo volumen V se escoge de manera arbitraria. Si se sigue este volumen conforme fluye, su forma y tamaño pueden variar pero la masa debe mantenerse igual mientras no haya reacciones nucleares en los átomos y moléculas que lo constituyen. Si el fluido está en una sola fase, esta condición es equivalente de manera matemática a que la derivada material D/Dt de la masa del fluido contenido en V sea igual a cero⁷ Esto es,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0$$

⁶Bajo esta hipótesis la estructura discreta del fluido es ignorada y se asume como un medio continuo en el que cada punto tiene asociado un único valor de cualquiera de las variables de campo como la velocidad, la densidad o la presión. El fluido, visto como materia continua, debe obedecer entonces las leyes de conservación de masa y energía así como una ecuación de movimiento que se deriva del balance entre el cambio del momento lineal y las fuerzas volumétricas y superficiales actuando por unidad de volumen del fluido. Este enfoque es válido mientras la trayectoria libre media de las moléculas sea mucho menor que la menor longitud característica del flujo (como el diámetro del tubo por el cual fluye) de manera que se puedan calcular promedios sobre las moléculas en un “punto” e ignorar la estructura molecular.

⁷La derivada material (o lagrangiana) está relacionada con una elección para describir al flujo llamada “descripción eulerina”, en la cual los campos están referidos a puntos del espacio y no a posiciones de un elemento material del fluido. En esta descripción, las variables independientes son las coordenadas espaciales \vec{x} y el tiempo t . La velocidad $\vec{v}(\vec{x}, t)$ representa entonces la velocidad del elemento de fluido que está pasando por \vec{x} en t . Para calcular la aceleración de un elemento de fluido entonces, por definición, se debe calcular

$$\vec{a}(\vec{x}, t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{v}(\vec{x} + \vec{v}\delta t, t + \delta t) - \vec{v}(\vec{x}, t)}{\delta t} \right],$$

donde ρ es la densidad del fluido. Aplicando el Teorema del transporte de Reynolds [11], esta ecuación puede convertirse en una integral de volumen⁸, obteniéndose que

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) \right] dV = 0$$

donde x_k y u_k son las componentes k-ésimas de los vectores de posición y velocidad respectivamente y se usa la convención de Einstein para la suma sobre índices repetidos.

Ya que el volumen V fue escogido de manera arbitraria, la única forma en la que se puede satisfacer la ecuación anterior para cualquier elección de V es que el integrando se anule; es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0 \quad (1.1)$$

La ecuación (1.1) no sólo expresa de manera matemática la condición para que la masa se conserve. Ya que es una ecuación diferencial parcial, implica también que el campo de velocidades debe ser continuo. Esta ecuación es también conocida como “Ecuación de continuidad”.

donde el primer término del numerador corresponde a la velocidad del elemento de fluido en el instante $t + \delta t$ que estaba en \vec{x} al instante t . Desarrollando en Series de Taylor se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{x}, t) &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\vec{v}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial x_i} v_i(\vec{x}, t) \delta t + \frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) - \vec{v}(\vec{x}, t) \right] \\ &= \frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial x_i} v_i(\vec{x}, t) \delta t + \frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} \delta t = (\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \vec{v}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} \equiv \frac{D}{Dt} \vec{v}(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

A la expresión $\frac{D}{Dt} \vec{v}$ (y su equivalencia) se le conoce como derivada material de la velocidad y refleja el hecho de que en la descripción elegida las variables están referidas a puntos espaciales, por lo que cualquier cambio temporal implica también una variación espacial del elemento de fluido material. En particular si el campo de velocidades está dado por $\vec{v}(\vec{X}(t), t)$, donde $\vec{X}(t)$ es la posición de un elemento de fluido al tiempo t se tiene que $\frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{D}{Dt} \vec{v}$. Razonando de manera análoga se puede mostrar que en la descripción euleriana, la variación temporal desde la perspectiva de la materia de cualquier variable de campo $\vec{\alpha}$ estará dada entonces por su derivada material

$$\frac{D\vec{\alpha}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\alpha}.$$

⁸El Teorema del transporte de Reynolds establece la relación entre la derivada material de la integral de una variable de campo $\vec{\alpha}$ sobre un volumen material (que cambia con el tiempo) y una integral de volumen en cuyo integrando sólo aparecen las derivadas temporales y espaciales (llamadas eulerianas) de dicha variable, a través de la siguiente igualdad

$$\frac{D}{Dt} \int_V \vec{\alpha} dV = \int_V \left[\frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\alpha} \right] dV.$$

Esto es, establece una forma de calcular la variación temporal de una integral cuando tanto el integrando como la región de integración cambian respecto a la variable sobre la que se deriva. Se puede consultar [11] para ver una deducción cuidadosa de este Teorema.

Derivando el producto entre paréntesis, la ecuación (1.1) puede re-escribirse como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

o, identificando a los dos primeros términos como la derivada lagrangiana de la densidad,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \quad (1.2)$$

Se dice que un fluido es incompresible cuando la densidad de un elemento de fluido no se ve afectado por cambios en la presión. Aunque la densidad del fluido en un elemento de masa también puede cambiar como consecuencia de una conducción de calor molecular al elemento, las circunstancias en las cuales dicho efecto puede ignorarse son comunes y cuando se afirma que un fluido es incompresible usualmente implica, en ausencia de una clasificación explícita respecto a la conducción de calor, que la densidad de cada elemento de masa permanece constante [10]. De esta manera, para un fluido incompresible, al seguir el movimiento la razón de cambio de ρ es igual a cero; esto es

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Por la ecuación (1.2), debe satisfacerse entonces que $\rho(\partial u_k / \partial x_k) = 0$. Ya que ρ no puede anularse de manera general, esta última condición es equivalente a que

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (1.3)$$

de tal manera que la ecuación (1.3) es la condición que se satisface para que la masa se conserve si el fluido es incompresible. De manera inversa la ecuación (1.3) puede concebirse como una condición sobre el campo de velocidades que implica que la densidad de los elementos materiales se mantenga constante sin importar qué tan fácilmente se pueda comprimir el material. Por lo anterior, dicha ecuación se interpreta como un “flujo”.

Por otro lado, la segunda Ley de Newton debe cumplirse en cada elemento de masa del fluido; esto es, la razón de cambio del momento del elemento de masa del fluido debe ser igual a la fuerza neta ejercida sobre dicho elemento de masa del fluido. Las fuerzas que pueden actuar sobre un elemento de fluido se clasifican en 1) fuerzas volumétricas o de bulto (como la atracción gravitacional o una fuerza electromagnética) y 2) fuerzas superficiales (como presiones o esfuerzos viscosos). Si \vec{f} es un vector que representa la fuerza volumétrica resultante por unidad de masa, entonces la integral $\int_V \rho \vec{f} dV$ es la fuerza volumétrica externa neta que actúa sobre el elemento de masa de fluido con volumen V . Análogamente si \vec{P} representa la fuerza superficial resultante por unidad de área, la integral $\int_S \vec{P} dS$ es la fuerza superficial externa neta que actúa sobre la superficie S del volumen V . La fuerza neta que actúa sobre el elemento de masa del fluido seguido es, entonces, la suma

de ambas integrales.

Como ya se mencionó, de acuerdo con la segunda Ley de Newton, la fuerza neta debe ser igual a la razón de cambio del momento lineal del elemento de masa en cuestión. El momento lineal de este elemento está dado por la integral $\int_V \rho \vec{u} dV$, donde \vec{u} es el vector que representa la velocidad del flujo, y su razón de cambio es igual a $(D/Dt) \int_V \rho \vec{u} dV$. Por la segunda Ley debe satisfacerse entonces que

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_S \vec{P} dS.$$

Para una superficie orientada de manera arbitraria, cuyo vector unitario normal tiene componentes n_1 , n_2 y n_3 , se puede mostrar que la fuerza superficial \vec{P} está dada por $P_j = \sigma_{ij} n_i$ [10], donde se utiliza la convención de la suma de Einstein y donde σ_{ij} es un tensor de segundo orden, conocido como el “tensor de esfuerzos”⁹. Considerando lo anterior, la conservación de momento se puede expresar usando notación tensorial como

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_j dV = \int_V \rho f_j dV + \int_S \sigma_{ij} n_i dS,$$

o, aplicando el Teorema del transporte de Reynolds en el término del lado izquierdo y el Teorema de Gauss a la integral de superficie del lado derecho, como

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) \right] dV = \int_V \rho f_j dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV.$$

Agrupando todos los términos en una sola integral de volumen se obtiene que

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) - \rho f_j - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \right] dV = 0$$

y de nuevo, dado que V es un volumen escogido de manera arbitraria, para que la igualdad se satisfaga siempre el integrando debe anularse; esto es,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) - \rho f_j - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0.$$

Si se expanden el primer y segundo término del lado izquierdo de esta igualdad se obtiene que

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \rho f_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i},$$

donde el segundo y el tercer término suman cero por la ecuación (1.1) por lo que se

⁹Los esfuerzos son una medida de las fuerzas de contacto por unidad de área que actúan sobre la superficie de un elemento de masa del fluido. En general el vector de esfuerzos depende de la orientación del elemento superficial; por ello se representa mediante la proyección de un tensor de segundo orden σ .

simplifica en la expresión

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \rho f_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}. \quad (1.4)$$

Al expresar de esta forma el balance del momento lineal, se puede reconocer fácilmente la segunda Ley de Newton: el lado izquierdo de la igualdad representa la aceleración del fluido por la densidad y el lado derecho, ambos términos, representan las fuerzas por unidad de volumen que producen dichas aceleraciones.

Por último, se podrían determinar las condiciones necesarias para que la energía se conserve al aplicar la Primera y la Segunda Ley de la Termodinámica. Para ello se debe considerar al elemento de masa del fluido como un sistema termodinámico que originalmente está en reposo y que después de algún cambio vuelve a estarlo. Bajo estas condiciones el cambio en la energía interna del sistema debido al evento debe ser igual a la suma del trabajo neto realizado sobre el sistema durante dicho evento, más el calor transferido. Sin embargo, dado que en el presente trabajo no se utiliza dicha condición y ya que su deducción se puede consultar en cualquier texto que desarrolle los principios básicos de la Mecánica de Fluidos (por ejemplo, [11] o [10]), se omite tal procedimiento y a continuación se muestra la expresión resultante:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \quad (1.5)$$

donde el escalar e representa a la energía interna por unidad de masa y el vector q_j al flujo conductivo de calor que sale del volumen de control (o el volumen del elemento de masa de fluido analizado). Vale la pena resaltar que esta igualdad expresa sólo el balance de la energía interna. La ecuación que determina la evolución de la energía cinética se deriva directamente de la ecuación 1.4. La ecuación (1.5) es conocida simplemente como “ecuación de conservación de la energía”.

Ahora bien, las ecuaciones básicas de conservación o balance (1.1), (1.4) y (1.5) representan cinco ecuaciones escalares que las propiedades del fluido deben satisfacer conforme fluye. Sin embargo, en el caso general, en este sistema de ecuaciones aparecen diecisiete incógnitas: los escalares ρ y e , los vectores u_j y q_j y el tensor σ_{ij} . Por lo tanto, para completar el sistema de ecuaciones de manera que se pueda resolver, se deben especificar (o modelar) tanto el vector q_j como el tensor σ_{ij} con base en ciertas suposiciones fenomenológicas hechas sobre el fluido. Esto se hace a través de las llamadas ecuaciones constitutivas en las cuales el tensor de esfuerzos se relaciona con otro tensor conocido como el “tensor de deformación”, e_{ij} , y el vector de flujo de calor con los gradientes de temperatura.

1.2.2. La relación constitutiva de un fluido newtoniano y las ecuaciones de Navier-Stokes

Para obtener la primera ecuación constitutiva, relacionada con la forma de σ_{ij} , se considera que un elemento de fluido dentro de un flujo puede deformarse (además de

trasladarse) básicamente como se muestra en la figura 1.3. En ella se puede ver que dicho elemento, después de un intervalo δt , además de haberse desplazado puede 1) haber rotado respecto sí mismo y 2) haber modificado su forma o geometría debido a esfuerzos cortantes o deslizamientos. Estos cambios pueden expresarse mediante el tensor de segundo orden

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

donde el primer sumando (la parte antisimétrica del tensor) representa la rapidez de rotación de un elemento del fluido, dentro de un flujo, respecto a sus propios ejes; mientras que el segundo sumando (la parte simétrica del tensor) representa la rapidez de deformación del elemento de masa provocada por las fuerzas superficiales.

Se define, entonces, al tensor de deformación como

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.6)$$

y, como se mencionó anteriormente, está relacionado con las fuerzas por unidad de área y de masa que actúan sobre el elemento de masa del fluido. Dichas fuerzas están representadas por el tensor de esfuerzos σ_{ij} , por lo que cada una de sus componentes se debe poder relacionar con las seis componentes del tensor de rapidez de deformación e_{ij} a través de un conjunto de parámetros.

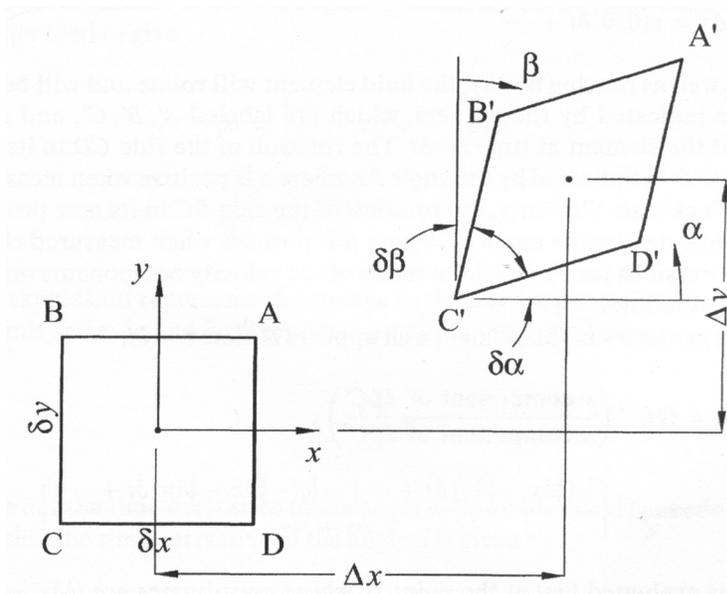


Figura 1.3: Traslación y deformación de un elemento de fluido idealizado en flujo. La deformación puede ser por rotación respecto a sus propios ejes y/o por modificación de su geometría como consecuencia de la acción de esfuerzos cortantes o deslizamientos.

En el modelo newtoniano introduce ciertas suposiciones o postulados acerca de la naturaleza del fluido:

1. Cuando el fluido está en reposo, los esfuerzos son hidrostáticos y la presión ejercida por el fluido es la presión termodinámica. Por lo tanto, cuando el fluido está en reposo debe cumplirse que $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$.
2. El tensor σ_{ij} está relacionado de manera lineal con el tensor e_{ij} y depende sólo de ese tensor.
3. Cuando el fluido rota como cuerpo rígido, no hay fuerzas netas superficiales actuando por lo que el elemento de fluido no se deforma y por tanto tensor e_{ij} debe anularse.
4. No hay direcciones preferenciales en el fluido (o el fluido es isotrópico) por lo que las propiedades del fluido son propiedades puntuales.

La primera condición requiere que el tensor σ_{ij} sea de la forma

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij},$$

donde τ_{ij} sólo depende del movimiento del fluido y es llamado “tensor de esfuerzos viscosos”. La cantidad p representa a la presión termodinámica (que coincide con la mecánica cuando el fluido es incompresible) y δ_{ij} representa una delta de Kronecker. En esta ecuación el tensor τ_{ij} sigue siendo desconocido, pero la condición (2) postula que σ_{ij} , y por tanto τ_{ij} , debe estar linealmente relacionado con e_{ij} . Esta es la característica distintiva de un “fluido newtoniano”, llamado así porque satisface de cierta forma que la aceleración (representada por el tensor de deformación) y la fuerza superficial resultante (representada por el tensor de esfuerzos) son linealmente proporcionales como en la Segunda Ley de Newton. Esta relación no necesariamente debe ser lineal; sin embargo, para la mayoría de los fluidos simples predicciones hechas con base en estas consideraciones coinciden con observaciones experimentales, lo cual sustenta la hipótesis.

Bajo estas consideraciones, las componentes de τ_{ij} se deben poder expresar como una combinación lineal de los elementos del tensor e_{kl} , esto es,

$$\tau_{ij} = \alpha_{ijkl}e_{kl}.$$

En esta ecuación los 81 coeficientes del tensor α_{ijkl} siguen siendo desconocidos pero, imponiendo la condición (4) de isotropía y la condición (3) que implica un tensor simétrico, α debe ser de la forma

$$\alpha_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

donde λ y μ son escalares. Por lo tanto,

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2}[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})] \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right),$$

o desarrollando

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

La relación constitutiva para un fluido newtoniano queda entonces como

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.7)$$

Los coeficientes λ y μ que aparecen en la ecuación anterior no se pueden determinar analíticamente y deben determinarse de manera empírica. Se conoce a μ como la *viscosidad* cortante del fluido y a λ como la viscosidad de bulto o volumétrica. Frecuentemente se usa el coeficiente *viscosidad cinématica* $\nu = \mu/\rho$.

Si se introduce en la ecuación de balance del momento líneal (1.4) la relación constitutiva para un fluido newtoniano (1.7), se obtienen las conocidas ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_i.$$

En muchos casos, y en particular en este trabajo, se asume que el fluido es incompresible y que la viscosidad es constante. Bajo estas suposiciones, el término que contiene a λ se anula por la ecuación de continuidad y la ecuación anterior se simplifica de la siguiente manera

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \rho f_i. \quad (1.8)$$

La ecuación (1.8) conduce a tres ecuaciones vectoriales que debe satisfacer un fluido newtoniano viscoso conforme fluye. Por lo general, se asume que el agua de mar (o el agua dulce utilizada en la parte experimental) se comportan como fluidos incompresibles, newtonianos y viscosos, por lo que deben satisfacer entonces tanto la ecuación de continuidad (1.3) como las ecuaciones de Navier-Stokes (1.8). Cabe mencionar que, para los fines de este trabajo, no se requiere imponer o considerar la condición de balance de energía térmica ya que se hace la hipótesis de que en el flujo dentro del SIBEO no hay variaciones considerables de temperatura.

Como se mencionó en la sección anterior, se requieren dos relaciones constitutivas para completar el sistema de ecuaciones que se establece al imponer las condiciones de conservación o balance de masa, momento y energía a un flujo. En este trabajo no se utiliza la segunda relación, que involucra al vector de flujo de calor q_j con los gradiente de temperatura, ni la consecuente forma que toma la conservación de la energía al considerar que la temperatura no cambia y que la densidad es constante, por lo que las ecuaciones (1.1) y (1.8) representan cuatro ecuaciones cerradas para el campo de velocidad.

1.3. El flujo en el SIBEO y su funcionamiento real

En la sección anterior se presentaron las condiciones que el flujo de un fluido incompresible, viscoso y newtoniano debe satisfacer para que se conserve masa y exista un balance del momento lineal. En esta sección se aplican estas condiciones en el caso particular del flujo en el SIBEO, con la finalidad de modelar el flujo en dicho sistema.

Posteriormente se presentan los resultados de un estudio realizado en el cual se comparó el comportamiento modelado de un SIBEO con el comportamiento real. Como se verá, algunos de los resultados obtenidos arrojan ciertas interrogantes y a partir de ellas se desprende el planteamiento del presente trabajo. Lo anterior con la finalidad de entender más el funcionamiento y mejorar el desempeño del SIBEO.

1.3.1. El balance del momento lineal a lo largo de una línea corriente en el SIBEO

Como se presentó en la sección anterior, la condición que el flujo de un fluido incompresible, newtoniano y viscoso debe satisfacer para que se conserve la masa está expresada a través de la ecuación de continuidad (1.2) y para que haya un balance del momento lineal a través de las ecuaciones de Navier-Stokes (1.8). Expresadas en notación vectorial estas dos ecuaciones toman la forma

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.9)$$

y

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{f}, \quad (1.10)$$

respectivamente.

En particular, la única fuerza volumétrica que actúa sobre el flujo de agua dentro del conducto resonante de un SIBEO es la fuerza de atracción gravitacional. Esta puede ser expresada en términos del gradiente del potencial gravitacional por unidad de masa como $-\nabla\phi$, por lo que la ecuación (1.10) se transforma en

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} - \rho \nabla \phi.$$

Manipulando algebraicamente y utilizando la siguiente identidad vectorial

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right) - \vec{u} \times \vec{\omega},$$

donde $\vec{\omega}$ es la vorticidad del campo \vec{u} definida como $\vec{\omega} \equiv \nabla \times \vec{u}$, la ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right) - \vec{u} \times \vec{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} - \nabla \phi,$$

recordando que $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática. Agrupando convenientemente los términos se obtiene que

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}u^2 \right) - \nu(\nabla^2 \vec{u}) = \vec{u} \times \vec{\omega}, \quad (1.11)$$

donde u representa la norma del campo de velocidades.

Si se considera, ahora, una línea de corriente central del flujo de agua dentro del tubo resonante de un SIBEO, como la mostrada en rojo en la figura (1.4), la ecuación (1.11) se debe satisfacer en cada uno de sus puntos. En particular, al integrar dicha ecuación a lo largo de toda la línea de corriente Γ se obtiene que

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma} \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}u^2 \right) \cdot d\vec{l} - \int_{\Gamma} \nu(\nabla^2 \vec{u}) \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \vec{u} \times \vec{\omega} \cdot d\vec{l},$$

donde el término del lado derecho se anula porque los vectores $\vec{u} \times \vec{\omega}$ y $d\vec{l}$ son perpendiculares, dado que \vec{u} y $d\vec{l}$ son paralelos. Considerando lo anterior resulta que

$$\int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}u^2 \right) \cdot d\vec{l} - \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \nu(\nabla^2 \vec{u}) \cdot d\vec{l} = 0, \quad (1.12)$$

en donde el vector de posición $\vec{x}(l)$ está parametrizado con la longitud de arco l de la curva Γ , de tal manera que $\vec{x}(a)$ y $\vec{x}(b)$ son sus valores extremos.

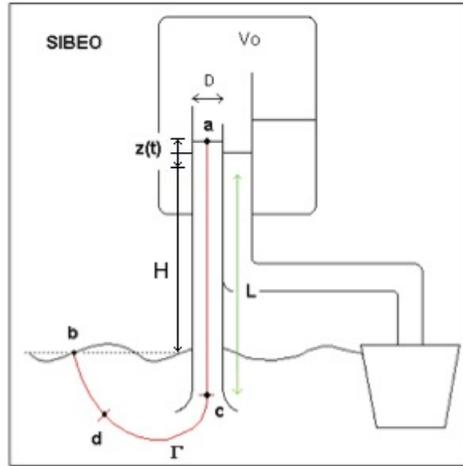


Figura 1.4: Modelo de un SIBEO en el que se muestra una línea de corriente central del flujo en el conducto resonante. V_0 representa el volumen de la cámara de compresión cuando no hay oscilación, D es el diámetro del conducto resonante, L es la altura media de la columna de agua dentro del conducto en la sección que se mantiene recta, $z(t)$ es la altura de la columna que oscila respecto a la altura media y H es la altura media de la columna de agua en el conducto que queda por encima del nivel del mar. Γ representa una línea de corriente central y a, b, c y d son puntos a lo largo de ella.

Integrando el segundo término de la ecuación (1.12) se obtiene que

$$\left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}u^2\right)_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} + \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{l} - \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \nu(\nabla^2 \vec{u}) \cdot d\vec{l} = 0. \quad (1.13)$$

Cabe mencionar que esta expresión conduce a la conocida Ecuación de Bernoulli

$$\left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}u^2\right)_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} = 0$$

cuando el campo de velocidades es estacionario ($\partial \vec{u} / \partial t = 0$), irrotacional ($\nabla \times \vec{\omega} = -\nabla^2 \vec{u} = 0$ ¹⁰) y/o no viscoso ($\nu = 0$). Sin embargo, dado que el flujo de agua en el conducto resonante (o exhaustivo) del SIBEO no es estacionario, ni irrotacional, ni invívido, la ecuación que debe satisfacer es la (1.13).

Regresando a la ecuación (1.13), se observa que el primer término puede ser evaluado si se conocen las condiciones en los extremos a y b de la parametrización de la línea de corriente central mostrada en la figura (1.4). Considérese que a pertenece a la superficie libre entre la columna de fluido que oscila y el aire de la cámara de compresión y que b pertenece a la superficie libre entre el mar y la atmósfera. Si se evalúa en a y b el primer término de la ecuación (1.13) se tiene que

$$\left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}u^2\right)_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} = \left[\frac{p_{atm}}{\rho}\right] - \left[\frac{p_a}{\rho} + g(H + z) + \frac{1}{2}\dot{z}^2\right], \quad (1.14)$$

en donde se están haciendo las siguientes consideraciones: 1) la presión que siente el fluido en \vec{x}_b es igual a la presión atmosférica p_{atm} ; 2) el potencial gravitacional por unidad de volumen del fluido vale cero en $\vec{x}(b)$, esto es, se toma el valor del potencial gravitacional en la superficie del mar como el valor de referencia; 3) la velocidad del flujo se considera despreciable en la superficie del mar, 4) dado que la superficie libre entre la columna y el aire de la cámara de compresión varía como $H + z(t)$, donde H es la altura media de la columna respecto a la superficie del mar que no cambia durante el flujo y $z = z(t)$ es la altura (en coordenadas cilíndricas) de la superficie libre que varía de manera periódica, el potencial gravitacional por unidad de volumen en $\vec{x}(a)$ es igual a $g(H + z)$; y 5) la velocidad del flujo en \vec{x}_a es justo la velocidad con la que oscila la superficie libre entre la columna de agua y la cámara de compresión; es decir, \dot{z} .

Agrupando convenientemente los términos del lado derecho de la ecuación (1.14) se obtiene que

$$\left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}u^2\right)_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} = \left[\frac{p_{atm} - p_a - \rho g H}{\rho}\right] - g z - \frac{1}{2}\dot{z}^2, \quad (1.15)$$

expresión en la que se puede observar la diferencia entre las presiones ejercidas en

¹⁰Esta igualdad es válida considerando que el fluido es incompresible.

los extremos del fluido dentro del conducto resonante en el primer término del lado derecho. De las cantidades que aparecen en este sumando, sólo p_a permanece indeterminada en términos de los datos conocidos del sistema. Para encontrar su valor se toma en cuenta que las oscilaciones de la columna son suficientemente rápidas como para despreciar transferencias de calor entre el aire dentro de la cámara de compresión y sus alrededores, por lo que el cambio del volumen que ocupa el aire mientras que la columna oscila puede considerarse como un proceso adiabático. Por lo anterior, debe cumplirse que $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$, donde γ es el coeficiente de dilatación o compresión adiabática suponiendo que el gas se comporta como un gas ideal y donde los subíndices 1 y 2 hacen referencia a distintos estados de equilibrio cuasiestático del aire en la cámara de compresión. En particular, si consideramos uno de los estados como el estado de equilibrio con $p = p_0$ y $V = V_0$ y el otro estado como un estado cualquiera mientras el flujo de agua oscila con $p = p_a$ y $V = V_a$, debe cumplirse que

$$p_0 V_0^\gamma = p_a V_a^\gamma.$$

De las condiciones bajo las cuales la columna está en equilibrio, se obtiene que $p_0 = p_{atm} - \rho g H$. Por otro lado, el volumen que ocupa el aire dentro de la cámara de compresión mientras el agua oscila puede expresarse como $V_a = V_0 - Az$, dado que $z = z(t)$ y siendo A el área del conducto. Tomando en cuenta lo anterior, la igualdad que debe satisfacerse es

$$(p_{atm} - \rho g H) V_0^\gamma = p_a (V_0 - Az)^\gamma;$$

de donde se puede despejar p_a para sustituirla en la expresión (1.15). Haciendo lo anterior y simplificando se llega a que

$$\left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2} u^2 \right)_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} = - \left(\frac{p_{atm} - \rho g H}{\rho} \right) \left[\left(1 - \frac{Az}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] - gz - \frac{1}{2} \dot{z}^2$$

y si se usa esta equivalencia en la ecuación (1.13) se obtiene que

$$- \left\{ \frac{p_{atm} - \rho g H}{\rho} \left[\left(1 - \frac{Az}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + gz + \frac{1}{2} \dot{z}^2 \right\} + \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{l} - \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \nu (\nabla^2 \vec{u}) \cdot d\vec{l} = 0. \quad (1.16)$$

Ahora bien, los dos términos integrales en la ecuación anterior no se pueden evaluar de manera explícita a menos que se conozca el campo de velocidades \vec{u} . Ya que en general el campo no se conoce, ambos términos se modelan haciendo suposiciones acerca tanto de la forma funcional del campo como de las posibles causas de las pérdidas de energía durante la oscilación del flujo.

Respecto a las pérdidas, Czitrom *et al* en [5] consideraron que éstas pueden deberse a 1) la fricción entre el flujo y las paredes de los conductos, 2) la formación de vórtices en la salida de los conductos y 3) la generación de ondas superficiales que radian o propagan el amortiguamiento de la oscilación. También consideraron que

estas tres formas de pérdidas pueden ser representadas como pérdidas de presión en la misma forma en que se representa a la fricción para un flujo unidimensional dentro de un tubo en la Hidráulica; esto es, como factores proporcionales al valor negativo de la velocidad del flujo. Un análisis dimensional, reportado en ese mismo trabajo, les permitió a los autores obtener que

$$\int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \nu(\nabla^2 \vec{u}) \cdot d\vec{l} \simeq - \left(f \frac{L}{D} + \frac{K}{2} + C_r \right) \dot{z} |\dot{z}|, \quad (1.17)$$

donde los tres sumandos dentro del paréntesis del lado derecho de la igualdad corresponden, en el orden que aparecen, a las tres posibles causas de pérdida asumidas y donde f es el coeficiente de pérdidas por fricción para flujos oscilantes dentro de un tubo, L y D son el largo y el diámetro respectivamente del conducto resonante (o exhaustivo, ver figura 1.4), K es el coeficiente de pérdidas de energía por formación de vórtices y C_r es el coeficiente de amortiguamiento por radiación. De todos los parámetros anteriores sólo L y D quedan determinados por las características particulares del SIBEO, de tal forma que K , f y C_r se consideran como parámetros libres que se ajustan para reproducir el desempeño real de la bomba a cualquier razón de flujo.

Respecto a las suposiciones hechas acerca de la forma funcional del campo de velocidades, resulta conveniente para presentarlas expresar al término de la ecuación (1.16) en el que aparece la variación temporal del campo de velocidades como

$$\int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \hat{u} dl = \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} dl,$$

donde \hat{u} representa el vector unitario en la dirección de la velocidad y u la norma del vector velocidad. Estas expresiones son equivalentes ya que:

- El vector unitario \hat{u} es paralelo o antiparalelo a $d\vec{l}$. Es paralelo cuando el flujo sale del conducto por lo que directamente se satisface que $d\vec{l} = \hat{u} dl$ donde dl representa la longitud de la curva. Es antiparalelo cuando el flujo entra al conducto y en este caso se satisface que $d\vec{l} = -\hat{u} dl$; sin embargo se pueden invertir los límites de integración o recorrer la línea de corriente Γ del punto b al punto a mostrados en la figura 1.4, de tal manera que

$$\int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = - \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \hat{u} dl = \int_{\vec{x}(b)}^{\vec{x}(a)} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \hat{u} dl.$$

- El producto $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \hat{u} dl$ es igual a $\frac{\partial u}{\partial t} dl$ dado que

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \hat{u} dl = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u \vec{u}}{u} \right) \cdot \hat{u} dl = \frac{\partial}{\partial t} (u \hat{u}) \cdot \hat{u} dl = \left(u \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot \hat{u} dl$$

$$= u \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \cdot \hat{u} dl + \hat{u} \cdot \hat{u} \frac{\partial u}{\partial t} dl = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{u} \cdot \hat{u} \right) u dl + \frac{\partial u}{\partial t} dl = \frac{\partial u}{\partial t} dl.$$

La integral se vuelve entonces una integral sobre la línea de corriente parametrizada con la longitud de la curva y por ello los límites de integración son directamente los puntos a y b de la curva.

Con base en esta equivalencia, las suposiciones que Czitrom *et al* hicieron respecto a la variación del campo de velocidades a lo largo de una línea de corriente central del conducto resonante del SIBEO, la línea Γ del esquema 1.4, se muestran en la figura 1.5.

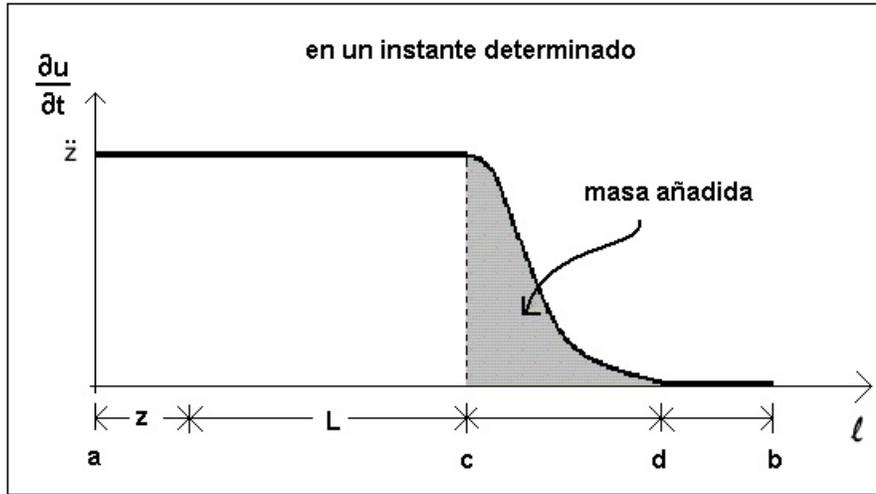


Figura 1.5: Forma supuesta para la variación temporal de la norma de la velocidad a lo largo de una línea de corriente central en el conducto resonante de un SIBEO, en un instante determinado.

En esta figura se puede observar la forma supuesta de $\partial u/\partial t$ como función de la parametrización l de la línea de corriente Γ en un instante particular del flujo. En la primera región de la parametrización de la línea, que va desde a hasta c , la variación de la norma de la velocidad debe ser igual a \ddot{z} ya que dentro del conducto el agua se mueve aproximadamente como un cuerpo rígido¹¹. El largo de esta región es igual a $z + L$ dado que z es una función del tiempo y que se está considerando un instante determinado. Posteriormente, en la región que va de c a d que corresponde al final del conducto, los efectos del flujo oscilante deben notarse aún pero la velocidad -y por tanto, su variación temporal local- debe ir disminuyendo monótonicamente. A

¹¹En realidad, el comportamiento del flujo en esta región es similar al de un flujo de Womersley. Este es un flujo viscoso dentro de un tubo provocado por un gradiente de presión oscilante [12]. Sin embargo, como se verá más adelante, en el modelo propuesto por Czitrom *et al* en [5] y [7] se hace esta aproximación que permite establecer un símil mecánico con el comportamiento de un sistema de masas acopladas a través de dos resortes, con la presencia de dos amortiguadores mediante los cuales se introducen los efectos de disipación.

partir de d y hasta b los cambios en la velocidad deben anularse por completo ya que, como se mencionó anteriormente, no se considera el movimiento de la superficie marina. Considerando el área bajo toda esta curva, se tiene que

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} dl = \int_a^c \frac{\partial u}{\partial t} dl + \int_c^d \frac{\partial u}{\partial t} dl + \int_d^b \frac{\partial u}{\partial t} dl = (z + L)\ddot{z} + \int_c^d \frac{\partial u}{\partial t} dl + 0. \quad (1.18)$$

La integral $\int_c^d \frac{\partial u}{\partial t} dl$, o el área bajo la curva de c a d , no se puede calcular de manera explícita porque no se conoce la forma funcional del decaimiento de $\partial u/\partial t$, pero Ciztrom *et al* asumen que es proporcional a una fracción de la longitud del tubo; es decir,

$$\int_c^d \frac{\partial u}{\partial t} dl = \epsilon L \ddot{z}, \quad (1.19)$$

donde ϵ es una constante. Esta suposición es equivalente a considerar una extensión del conducto en el cual la masa de fluido todavía oscila, razón por la cual a la integral de la ecuación (1.19), y a su supuesta relación con la longitud, se le conoce como “longitud añadida” o “masa añadida” [8]. Introduciendo lo anterior en la ecuación (1.18) y simplificando se llega a que

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} dl = [z + L(1 + \epsilon)] \ddot{z}. \quad (1.20)$$

Finalmente, si se substituyen las equivalencias (1.17) y (1.20) en la ecuación (1.16) se obtiene la expresión final que se debe satisfacer a lo largo de una línea de corriente central del conducto exhaustivo de un SIBEO, bajo las suposiciones mencionadas; esta expresión es

$$\begin{aligned} - \left[\frac{p_{atm} - \rho g H}{\rho} \left(\left(1 - \frac{Az}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right) + gz + \frac{\dot{z}^2}{2} \right] &+ [z + L(1 + \epsilon)] \ddot{z} \\ &+ \left[\frac{K}{2} + f \frac{L}{D} + C_r \right] \dot{z} |\dot{z}| = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

En [5], Czitrom *et al* presentan el modelo del comportamiento tanto para una línea central del flujo en el conducto resonante como para una línea central en el conducto exhaustivo. Ambas expresiones quedan acopladas a través de lo que sucede en la cámara de compresión. En el sistema de ecuaciones resultante, el tipo de flujo dentro de los conductos (laminar o turbulento ¹²) está considerado al modelar, a su vez, al parámetro f , y a través de un análisis dimensional mostraron que el sistema a escala estudiado funciona de manera similar a un sistema a escala real. Encontraron

¹²El número de Reynolds modificado para un flujo oscilante, $Rem \equiv \omega D^2/4\nu$ donde ω es la frecuencia de oscilación de la columna, caracteriza el tipo de flujo observado: si $Rem < 2000$ el flujo es laminar, para valores mayores se observa la transición hasta que para mucho mayores se obtiene un flujo turbulento por completo [5].

también que el comportamiento del SIBEO está bien representado por un sistema de dos masas y dos resortes acoplados con pérdidas no lineales relativamente pequeñas. Además, al linealizar y resolver numéricamente el sistema de ecuaciones asociado, derivaron una fórmula mediante la cual estimar tanto el volumen de aire necesario como la altura umbral¹³ óptima del conducto resonante sobre la posición de equilibrio en la cámara de compresión para que el sistema entre en resonancia y bombee óptimamente. Como consecuencia de lo anterior, desarrollaron un mecanismo de sintonización que permite ajustar el volumen de la cámara de compresión de un SIBEO para entrar en resonancia bajo condiciones variables de oleaje y marea.

Como parte de este mismo trabajo [7], Czitrom y otro grupo de autores llevaron a cabo experimentos con un SIBEO a escala, generando ondas monocromáticas en un canal de prueba. Una comparación entre el comportamiento real del sistema a escala con los resultados obtenidos al integrar numéricamente las ecuaciones que modelan el comportamiento del flujo en él, muestra que el modelo reproduce adecuadamente el comportamiento de la bomba para cualquier razón de flujo.

Para poder integrar numéricamente las ecuaciones del modelo, los autores del trabajo tuvieron que determinar o ajustar previamente los parámetros ϵ , K y C_r . En particular, el valor de ϵ (asociado con la masa añadida) lo obtuvieron al hacer coincidir los valores máximos calculados con el modelo y los observados en la gráfica mostrada en la figura 1.6. En ella, se muestra la razón de flujo Q como función del volumen V_0 que ocupa el aire en la cámara de compresión (la “dureza” del resorte de aire), tanto para el modelo numérico como para el sistema a escala, considerando tres distintas alturas umbral del conducto resonante. Al variar ϵ en el modelo numérico se modifica el volumen de aire al cual ocurre la condición de resonancia; esto es, se modifica la posición del máximo a lo largo del eje de las abscisas. En todos los casos analizados, el valor de ϵ que hace que los máximos de la curva obtenida con el modelo y de la obtenida con los datos observados coincidan es igual a 0,06; lo cual corresponde a considerar un 6% de longitud o masa añadida debido a los efectos de borde de la boca del tubo (siempre y cuando se satisfaga la equivalencia $\int_c^d \frac{\partial u}{\partial t} dl = \epsilon L \ddot{z}$). El valor de los coeficientes K y C_r se obtuvo ajustándolos -de manera conjunta como $K/2 + C_r$ - para hacer coincidir el tamaño de las predicciones obtenidas mediante el modelo numérico con los datos observados en gráficas como la mostrada en la figura 1.7.

Por último, Czitrom *et al* mencionan que la coincidencia entre los resultados obtenidos experimentalmente y los obtenidos con el modelo usando los valores de los coeficientes recién mencionados a cualquier razón de flujo, les sugiere que los coeficientes K y C_r tampoco varían de manera sensible al cambiar el número de Reynolds (Re) y el número de Reynolds modificado (Rem) dentro los rangos analizados en los experimentos realizados. Sin embargo, queda la pregunta de si K , C_r y en particular ϵ variarán o no para flujos en condiciones oceánicas reales¹⁴.

¹³La altura umbral es la altura del conducto que sobrepasa el nivel del agua sobre la cámara de compresión, relacionada con la cantidad de agua derramada en cada oscilación.

¹⁴En los experimentos $Re \equiv DV_{max}/\nu$ fue del orden de 7000 y $Rem \equiv \omega D^2/4\nu$ donde ω es la

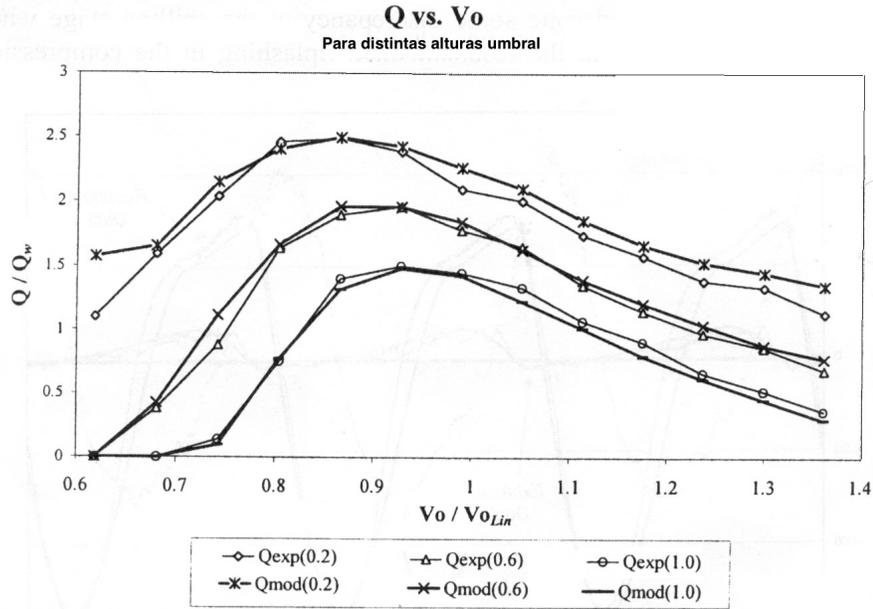


Figura 1.6: Flujos Q_{exp} observado Q_{mod} modelado a través de la bomba vs. el volumen V_0 de la cámara compresión con tres conductos resonante de distintas alturas umbral. El flujo se escala con $Q_w = Aa/T$, el volumen de agua que se mueve por cada periodo de la onda en el conducto resonante de área A y largo igual a la amplitud de la onda a . En las ordenadas, V_0 se escala con el volumen de aire requerido para que haya resonancia V_{0lin} y la altura umbral se escala con la amplitud de la onda a . Tomado de [7].

frecuencia de oscilación de la columna fue del orden de 2000. Considerando al mismo sistema; es decir, con el mismo valor de D , $Re \sim 590000$ y $Rem \sim 205000$ para el flujo en condiciones oceánicas reales.

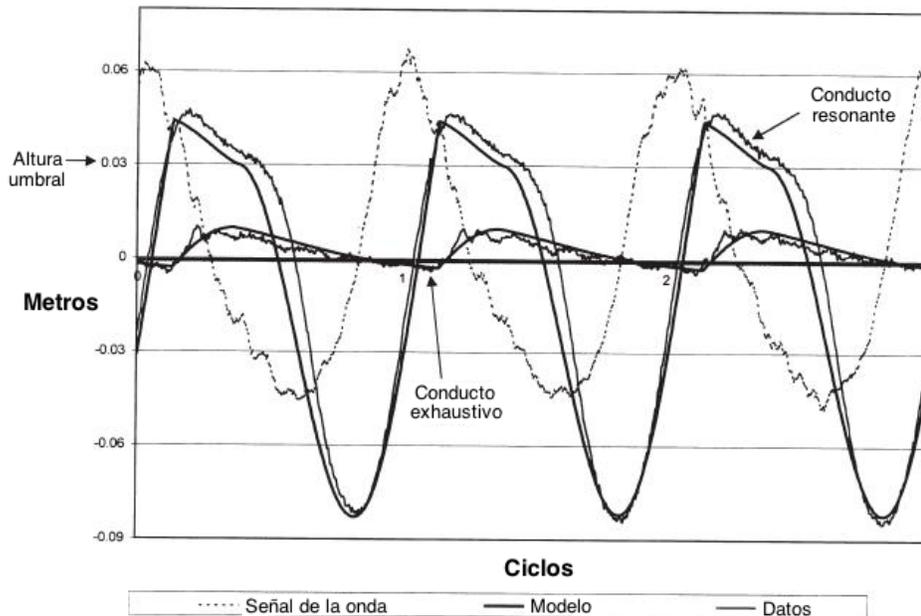


Figura 1.7: Alturas modeladas y reales de las columnas de agua en los conductos resonante y exhaustivo en la cámara de aire del SIBEO y altura de la señal de la onda graficadas respecto al tiempo. El periodo de oscilación de la onda fue de 2.25 s y la altura umbra del conducto resonante de 0.03 m. Tomado de [7].

1.3.2. La boca del conducto resonante y la masa añadida

En los párrafos finales de la sección 1.1 se mencionó que Knott y Mackley [8] mostraron la posibilidad de disminuir las pérdidas de energía de un flujo oscilante al introducir un difusor en forma de trompeta en la boca del tubo. Posteriormente, Czitrom et al [7] analizaron flujos oscilantes en tubos con trompeta y sin trompeta en la boca. En particular, usando una trompeta basada en un perfil circular, observaron que el flujo aumentó aproximadamente en 10% respecto al flujo obtenido en un tubo sin trompeta; mostrando experimentalmente que la presencia de la trompeta aumenta la cantidad de agua bombeada o el flujo. Por lo anterior, Czitrom et al [5, 7] incluyeron una trompeta o difusor en el SIBEO a escala que analizaron (en las figuras 1.1, 1.2 y 1.4 se puede ver esquematizada la boca del conducto resonante en forma de trompeta).

Al hacer un análisis perturbativo de los términos no lineales de las ecuaciones que modelan el comportamiento del flujo en el SIBEO en [5, 7], Czitrom *et al* encontraron que las pérdidas por formación de vórtices en la boca del conducto resonante contribuyen significativamente en la limitación del flujo de agua a través de la bomba y que, por tanto, era necesario optimizar el diseño de la boca para disminuir en lo posible la formación de vórtices.

Como ya se mencionó, en un trabajo posterior Czitrom *et al* [9] obtuvieron una ecuación para el perfil de la trompeta en función del diámetro del tubo y de una constante indeterminada que incluye a la amplitud o al periodo de oscilación del flujo. Esto lo lograron al que la probabilidad de formación de vórtices está relacionada con un balance entre las fuerzas centrípeta e inercial que siente un elemento de fluido, por lo que impusieron la condición de que la razón α entre estas fuerzas mantuviera un valor constante a lo largo del perfil de la trompeta; de tal manera que la probabilidad de formación de vórtices fuera igual en cada punto.

El punto de partida para obtener dicha ecuación es considerar el radio de curvatura a lo largo del perfil de una trompeta, como el mostrado en la figura 1.8.

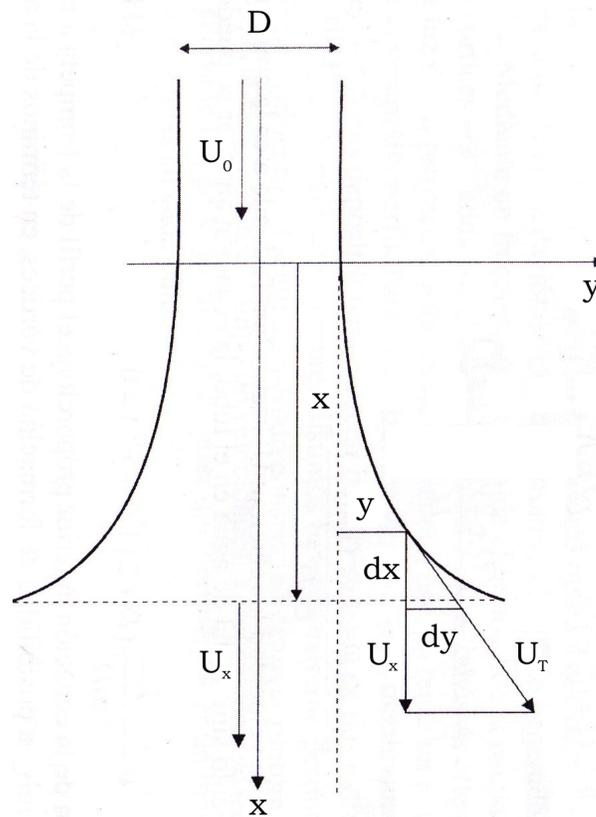


Figura 1.8: Perfil de la trompeta propuesto por Czitrom en [9] para minimizar la formación de vórtices.

En ella, U_0 representa la velocidad del flujo (considerado como ideal) al comienzo de la trompeta, D el diámetro del tubo y T el periodo de oscilación del flujo. Por conservación del flujo en la entrada y en cualquier otro punto (x, y) de la trompeta,

usando coordenadas rectangulares, debe cumplirse que

$$U_0 D^2 = U_x [D + 2y(x)]^2, \quad (1.22)$$

donde U_x es la componente x de la velocidad en un punto (x, y) y $y(x)$ es el perfil de la trompeta; por lo tanto

$$U_x = U_0 \frac{D^2}{[D + 2y(x)]^2}.$$

Por otro lado, si U_T representa la componente tangencial al perfil de la velocidad en un punto (x, y) , la fuerza centrípeta que siente el elemento del fluido que se mueve sobre la trompeta debe ser proporcional a $\rho U_T^2 / \kappa^{-1}$, con κ^{-1} el radio de curvatura ($R = 1/\kappa$), y la inercial a $\rho U_T^2 / L$, con L una longitud característica del movimiento del fluido en ese punto del perfil. Entonces

$$\alpha \equiv \text{fuerza centrípeta/fuerza inercial} = \kappa^{-1} / L.$$

Dado que $L = T U_T$ y $U_T = U_x \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$, usando la ecuación (1.22), se obtiene que

$$L = \frac{U_0 D^2 \sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{(D + 2y)^2},$$

y por tanto

$$\alpha = \frac{U_0 D^2 T \sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{R(D + 2y)^2}. \quad (1.23)$$

A partir de esta expresión se puede despejar κ e igualar el resultado con una expresión del propio radio de curvatura en función de las primeras y segundas derivadas de y como función de x ; esto es

$$\kappa = \frac{d^2 y / dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\alpha (D + 2y)^2}{U_0 D^2 T \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

de donde

$$d^2 y / dx^2 = \frac{\alpha (D + 2y)^2 (1 + (dy/dx)^2)}{U_0 D^2 T}.$$

Finalmente, considerando que $U_0 = (A_{osc})\omega = 2(A_{osc})\pi/T$, donde A_{osc} y ω son respectivamente la amplitud y la frecuencia de oscilación del agua, y usando y'' y y' para representar las derivadas de y como función de x , se llega a que

$$y'' - \frac{\alpha}{2\pi(A_{osc})D^2} (D + 2y)^2 (1 + y'^2) = 0. \quad (1.24)$$

La solución a la ecuación (1.24) proporciona una familia de perfiles de la trompeta en función del parámetro α . Cada uno de ellos mantienen la misma proporción entre

el escalamiento las fuerzas inerciales y las centrípetas para un flujo y un tubo con A_{osc} y D dadas. Sin embargo, en la expresión analítica de cualquiera de estos perfiles no aparece ningún criterio que permita decidir en qué momento terminarlos; esto es, en principio se prolongan indefinidamente. Lo anterior tiene como consecuencia que, al construir trompetas utilizando la ecuación (1.24), no se cuente con un criterio para decidir su largo y por tanto deben truncarse arbitrariamente.

Ahora bien, en la figura 1.4 se puede observar que al modificar el largo y/o la forma de la boca del conducto resonante se modifica también la trayectoria Γ de la línea de corriente que va de \vec{x}_a a \vec{x}_b . Este cambio, en principio, debe afectar a los dos términos integrales en la ecuación (1.13) por su dependencia en Γ . En particular, respecto al término que contiene a la variación temporal del campo en esta ecuación, se puede ver en la figura 1.5 y en la figura 1.9 que este cambio sólo modificaría el área bajo la curva del punto c al punto d de la parametrización; es decir, cambiar el tamaño y/o la forma de la boca del conducto resonante modifica la cantidad expresada en la ecuación (4.1), que como ya se mencionó, se conoce como longitud o masa añadida.

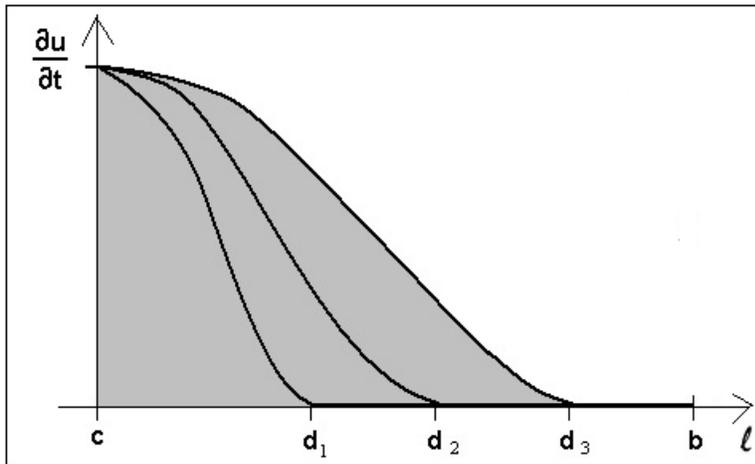


Figura 1.9: Modificación de la curva $\partial u/\partial t$, y del área subyacente, respecto a la parametrización de la línea de corriente Γ , al considerar tres trompetas de distinto tamaño y forma en la boca del conducto resonante.

Antes de cerrar el presente capítulo, cabe mencionar que en el ámbito de la Mecánica de Fluidos la masa añadida se asocia generalmente con el incremento de la inercia del sistema cuando un objeto inmerso en un flujo es acelerado o cuando un flujo es acelerado de manera externa. Este incremento ocurre porque aparecen fuerzas adicionales que se ejercen entre las superficies en contacto con el fluido [10, 13]. Por simplicidad, este efecto puede ser modelado como si cierta cantidad de volumen o de masa extra del fluido se moviera junto con el objeto, en relación al mismo fluido; aunque en realidad todo el fluido se estaría moviendo en cierto grado. El flujo de agua oscilante dentro del conducto resonante, junto con el cuerpo de agua circundante al

conducto, puede analizarse entonces como un problema de movimiento relativo y acelerado entre el fluido y el conducto. Desde esta perspectiva, la masa añadida calculada en la expresión (1.19) es una estimación de la cantidad extra de masa que en total se mueve junto con el fluido que oscila aproximadamente como cuerpo rígido y, por ello, puede interpretarse como si el largo del conducto resonante se extendiera de tal forma que la cantidad extra de masa correspondiente también oscilara aproximadamente como cuerpo rígido.

En el caso de un cuerpo moviéndose dentro de un fluido, se puede pensar en la masa añadida como una cantidad que determina el trabajo necesario para cambiar la energía cinética asociada con el movimiento del fluido [13]. Cualquier movimiento del fluido, como el que se provoca al mover un objeto inmerso en él o cuando el flujo enfrenta obstáculos, implica cierta cantidad de energía cinética E_K asociada. Para un fluido de densidad constante esta cantidad se puede calcular como

$$E_K = \frac{\rho}{2} \int_V (u_i u_i) dV,$$

donde en este caso V representa el dominio o volumen total que ocupa el fluido.

Siguiendo con esta interpretación, si un objeto inmerso en un fluido en reposo se moviera con una velocidad constante U en cierta dirección, la energía cinética E_K del fluido se mantendría constante al transcurrir el tiempo e, inclusive, sería una cantidad proporcional al cuadrado de U . Supóngase, por el momento, que la velocidad en cada punto del fluido relativa al objeto fuera proporcional a U en cada instante. La norma de esta velocidad podría expresarse, entonces, como $u_i u_i = \frac{u_i}{U} \frac{u_i}{U} U^2$ y la energía cinética del fluido sería igual a

$$E_K = \frac{\rho}{2} \int_V \frac{u_i}{U} \frac{u_i}{U} U^2 dV = \frac{\rho}{2} I U^2.$$

La cantidad $I \equiv \int_V \frac{u_i}{U} \frac{u_i}{U} dV$ que aparece en esta última expresión sería invariante y se ve claramente a partir de esta expresión que, mientras U no cambie, E_K se mantendría constante.

Considérese ahora una situación en la cual el objeto se acelerara o desacelerara, suponiendo que lo único que cambia en el tiempo de U es la magnitud pero no la dirección. Dado que U ya no sería constante, el valor de E_K también cambiaría en el tiempo. Si el objeto estuviera acelerándose, la energía cinética aumentaría. Utilizando el Teorema de Trabajo-Energía Cinética, se puede interpretar este cambio de energía como el trabajo adicional que el objeto tendría que haber hecho sobre el fluido para cambiar su energía cinética [13]. La razón de cambio a la cual se requeriría hacer este trabajo extra tendría que ser igual a la razón de cambio de la energía cinética; esto es, igual a dE_K/dt . Por otro lado, este trabajo adicional sería experimentado por el objeto como un fuerza adicional de arrastre de tamaño F_{extra} , paralela y opuesta a su movimiento. La razón de trabajo adicional hecho

sería entonces igual a $-F_{extra}U$ y, por lo anterior,

$$-F_{extra}U = \frac{dE_K}{dt}.$$

Viendo esta expresión, es claro que mientras el flujo cambie de tal forma que I permanezca constante, el tamaño del “arrastre añadido” sería igual a

$$F_{extra} = -\frac{1}{U} \frac{dE_K}{dt} = -\rho I \frac{dU}{dt}. \quad (1.25)$$

Esta fuerza adicional de arrastre tiene la misma forma y signo que la fuerza necesaria para acelerar a un objeto de masa m ; esto es, $m(dU/dt)$. Consecuentemente, resulta conveniente interpretar a la ρI como una masa de fluido (“masa añadida”) que se estaría acelerando junto con el cuerpo. Desde luego, tal masa no podría ser identificada con un volumen específico del fluido ya que todo el fluido se estaría acelerando en cierta medida y la energía cinética del fluido se estaría incrementando.

Es importante mencionar que F_{extra} no sería la única fuerza de arrastre que experimentaría el objeto. Durante la traslación con velocidad uniforme de un objeto en un fluido viscoso real hay un arrastre uniforme asociado con el trabajo necesario para balancear la razón a la que se disipa energía. Al acelerarse el objeto, entonces, habría un arrastre similar, pero no igual, al asociado con el valor instantáneo de U . Más aún, podría haber efectos de retraso asociados con toda la historia previa de la traslación.

Con base en lo anterior, el valor de la masa añadida se puede determinar a partir de la siguiente relación

$$M \equiv \rho I = \rho \int_V \frac{u_i u_i}{U U} dV, \quad (1.26)$$

siempre y cuando se conozca el campo de velocidades u_i relativo a la rapidez del objeto U .

A pesar de que puede sonar como algo lógico, por lo general no hay una correlación entra la masa añadida asociada al movimiento relativo entre un objeto y un fluido y la masa de fluido desplazada por el objeto. Algunos cálculos de la masa añadida para flujos simples muestran que la masa de fluido desplazada no es, ni siquiera, una buena primera aproximación del valor de la masa añadida y resulta que, por lo general, este depende de la dirección de la aceleración [13]. Los mismos datos sugieren que una mejor aproximación para la masa añadida, aunque todavía muy cruda, se obtendría al proyectar el área del objeto en la dirección de la aceleración y considerar la masa del fluido que desplazaría la mitad del volumen de una esfera con la misma área proyectada.

Ahora bien, en los argumentos e interpretaciones mencionados hasta aquí sólo se consideró el movimiento rectilíneo del objeto inmerso en un fluido. Por lo general, la respuesta de un objeto a una fuerza adicional ejercida sobre algún punto de él y en alguna dirección particular no será una aceleración en la misma dirección, sino una aceleración generalizada que incluye una parte traslacional con tres componentes

distintas de cero en cada una de las tres direcciones perpendiculares, a_j con $j=1,2$ y 3 , y una parte rotacional con tres componentes distintas de cero respecto a los ejes principales de rotación, a_j con $j=4,5$ y 6 . En este caso, la masa añadida sería un tensor M_{ij} , con $i,j=1,\dots,6$; que permitiría relacionar las seis componentes de la fuerza generalizada F_i ejercida sobre el objeto por los efectos inerciales del fluido con las seis posibles componentes de la aceleración generalizada ¹⁵,

$$F_i = -M_{ij}a_j.$$

Este tensor debe incluir al tensor de inercia relacionado con la masa del cuerpo para poder completar la formulación de las fuerzas inerciales. La forma de este tensor y el valor particular de alguna de sus componentes, dependerá tanto de la geometría y/o simetrías del objeto como de las características del flujo.

Con base en lo anterior, se puede observar que la definición de masa añadida utilizada por Mackley y Knott [8] y por Czitrom *et al* [5, 7] (que de hecho nombra al término izquierdo de la ecuación 1.19) difiere de la definición de masa añadida utilizada en un ámbito general dentro de la Mecánica de Fluidos recién presentada. A pesar de que ambas definiciones están relacionadas con la cuantificación de los efectos del movimiento relativo entre un flujo y un objeto, no representan la misma cantidad ni se calculan de la misma forma. En el presente trabajo consideramos la definición propuesta originalmente por Mackley y Knott, dado que es la que proponen para nombrar el término que aparece en el modelo del comportamiento del flujo dentro de un sistema como el SIBEO; sin embargo, se considera relevante aclarar la diferencia para evitar confusiones.

¹⁵Las componentes F_i con $i=1,2$ y 3 corresponderían a las tres componentes de la fuerza en las tres direcciones perpendiculares del sistema de referencia y las componentes F_i con $i=4,5$ y 6 corresponderían a las tres componentes de la torca.

2

Planteamiento del problema y de las hipótesis de trabajo

A lo largo del capítulo anterior se describió el funcionamiento de un SIBEO y se presentó el modelo teórico utilizado por Czitrom *et al* [5, 7] para comparar el comportamiento real y el modelado con la finalidad de optimizar su diseño.

En particular, encontraron que usando una boca particular en forma de trompeta en el conducto resonante se incrementa el flujo a través de la bomba y que el valor del parámetro ϵ que hace que el modelo reproduzca adecuadamente el comportamiento real del SIBEO, para cualquier tasa de flujo, es 0.06. Este valor se puede interpretar como una cantidad de agua que se mueve a partir de la sección del conducto que deja de ser recta, por efecto de la oscilación del agua dentro del propio conducto. Como ya se mencionó, esta masa extra se conoce con el nombre de “masa añadida” y, suponiendo que se satisface la relación $\int_c^d \frac{\partial u}{\partial t} dl = \epsilon L \ddot{z}$ esta cantidad de agua sería equivalente a la masa que oscilaría como cuerpo rígido si se extendiera en un 6 % el largo del conducto resonante [8].

En relación con lo anterior, surgen (entre otras) las siguientes tres preguntas: 1) ¿por qué se obtiene un valor constante para la masa añadida a cualquier razón de flujo en el SIBEO, 2) ¿de qué depende este valor? y 3) ¿se satisface la equivalencia $\int_c^d \frac{\partial u}{\partial t} dl = \epsilon L \ddot{z}$?; es decir, ¿la masa añadida escala con el largo del conducto?.

Por lo discutido en la sección 1.3.2, se sabe que al cambiar la forma y el tamaño de la boca del conducto resonante, se modifica la forma de la curva Γ de una línea de corriente central del flujo en el conducto; por lo tanto, al calcular el valor de la masa añadida con la ecuación (1.19) este valor también cambiaría. Se puede inferir, entonces, que el valor de la masa añadida depende de la forma y del tamaño de la boca de la trompeta. Esta inferencia sería consistente con los resultados obtenidos por Czitrom *et al* [7], ya que en los experimentos realizados se utilizó una sola boca en forma de trompeta para el conducto resonante. Sin embargo, en la ecuación (1.19) se observa también que la masa añadida está relacionada con la variación temporal del campo de velocidades a lo largo de la trayectoria Γ , por lo que podría esperarse que los cambios en la amplitud y en la frecuencia de la oscilación -relacionados

con las distintas tasas del flujo- modificarían el valor de la masa añadida y esto, aparentemente, no es así.

Por otro lado, la masa añadida es una cantidad relacionada con un efecto de borde en la boca del conducto por lo que, en principio, no debería estar vinculada con la cantidad de agua que oscila como si fuera un cuerpo rígido dentro del mismo conducto; es decir, la suposición de que escala con el largo del conducto no parece tener un sustento claro respecto a la física del problema.

Un camino para responder la primera pregunta es generar experimentalmente distintas tasas de flujos a través de un conducto con la misma boca (semejante al conducto resonante) y medir el campo de velocidades. Esto se puede hacer variando la amplitud y/o la frecuencia de la oscilación de un flujo oscilante en un tubo y utilizando la técnica “PIV” (Particle Image Velocimetry), descrita con detalle más adelante, para obtener el campo de velocidades en distintos instantes. Con esta información y la ecuación (4.1) se puede calcular explícitamente la masa añadida y, por tanto, el parámetro ϵ ; pero para poder hacer esto se necesita un algoritmo numérico que, con base en el campo de velocidades en un instante t , permita calcular las líneas de corriente, elegir alguna de ellas (como la central de trayectoria Γ), calcular la variación temporal del campo para los puntos pertenecientes a la línea elegida y luego sumar estos valores a lo largo de su trayectoria. Cabe mencionar que para calcular la variación temporal del campo se requiere contar con sus valores a distintos tiempos.

Para responder a la segunda pregunta y explorar la dependencia de la masa añadida tanto en la amplitud y la frecuencia de oscilación como con la geometría de la boca del conducto resonante, se pueden comparar los valores de la masa añadida obtenidos para un mismo flujo oscilante, con amplitud y frecuencia determinada, en tubos con distintas bocas. En particular, resulta interesante comparar el comportamiento de un flujo dado en un tubo sin boca respecto a el comportamiento del mismo flujo en un tubo con distintas bocas en forma de trompeta, llamadas difusores; ya que es esta forma la que incrementa el flujo según los resultados experimentales mencionados. Se puede usar la ecuación que propuso Czitrom en [9] para determinar distintos perfiles y construir las correspondientes trompetas o difusores; sin embargo, como se mencionó en la sección 1.3.2, dicha ecuación no proporciona un criterio para decidir el largo o el tamaño de las trompetas. Por lo anterior, es necesario revisar y refinar los argumentos de deducción de la ecuación del perfil con la finalidad de encontrar dicho criterio.

Finalmente, la tercera pregunta podría responderse comparando los resultados obtenidos a través de las dos exploraciones recién planteadas con los resultados obtenidos por Czitrom *et al* [7].

Por otro lado, la ecuación (1.13) que se satisface a lo largo de una línea de corriente central en el conducto resonante como consecuencia de la conservación del

momento, puede reescribirse de la siguiente manera

$$\left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}u^2\right)_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} + \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \nu(\nabla^2 \vec{u}) \cdot d\vec{l}. \quad (2.1)$$

En esta expresión se observa que un cambio en el largo o en la forma de la boca del conducto no afectaría al primer término del lado izquierdo de la igualdad (el término que correspondería a la ecuación de Bernoulli), ya que este término sólo depende de los valores de la presión, del potencial y de la velocidad evaluados en los extremos de la trayectoria Γ y éstos no cambian al alterar la boca del conducto. Sin embargo, al hacer dicho cambio, los otros dos términos sí se modificarían ya que las integrales en ambos dependen de toda la trayectoria de la línea de corriente. De hecho, dado que el primer término sólo depende de los extremos de la línea de corriente y no de la trayectoria, se puede inferir que un cambio en el sistema que produzca que las pérdidas viscosas aumenten debe implicar también que la masa añadida lo haga. Esta interpretación es consistente con la idea de introducir una trompeta o difusor en la boca del conducto resonante para evitar la formación de vórtices, disminuyendo las pérdidas y obteniendo un mayor flujo; de tal forma que el fluido alterado por el movimiento de oscilación -o masa añadida- resulte menor.

Bajo esta interpretación, el cálculo de la masa añadida resulta ser una forma de medición indirecta de las pérdidas en el sistema. Desde esta perspectiva, al determinar si la masa añadida está relacionada con la amplitud, con la frecuencia y con la geometría de la boca del tubo se podrían encontrar condiciones de optimización del funcionamiento del SIBEO dado que, al introducir cambios que minimicen el valor de la masa añadida, se estarían minimizando también las pérdidas de energía en el sistema.

Con base en todo lo anterior, el planteamiento del presente trabajo fue generar flujos oscilantes de agua en tubos con y sin boca en forma de trompeta para medir la masa añadida y, por ende, sus pérdidas. Estas mediciones se hicieron para:

1. Verificar si existe una correspondencia entre los valores medidos de la masa añadida y las suposiciones hechas acerca de ella en el modelo del flujo del SIBEO; esto es, para verificar si el comportamiento de la variación temporal de la norma de la velocidad como función de la parametrización de la línea de corriente coincide cualitativamente con la gráfica de la figura 1.5 y si efectivamente se satisface la relación de proporcionalidad establecida en la ecuación (1.19).
2. Explorar si el valor de la masa añadida cambia al modificar la amplitud o la frecuencia de los flujos y la geometría de la trompeta para relacionarlos con el “desempeño” del tubo correspondiente (medido como el tiempo de amortiguamiento al dejar oscilar libremente al agua) y compararlos con el valor de la masa añadida que hace que el comportamiento del SIBEO modelado y el real coincidan para cualquier razón de flujo.

Para lograr lo anterior fue necesario:

- revisar y refinar los argumentos utilizados para deducir la ecuación del perfil de la boca en forma de trompeta de manera que la razón entre el escalamiento entre las fuerzas inerciales y centrípetas se mantuviera constante a lo largo de la trompeta pero encontrando un criterio para definir su tamaño,
- construir tres distintas trompetas y ensamblarlas con tubos para asemejar al conducto resonante,
- generar experimentalmente cuatro flujos oscilantes (de diferente amplitud y misma frecuencia) y medir utilizando la técnica PIV el campo de velocidades en distintos tiempos para el tubo sin boca y para los tres tubos con boca en forma de trompeta, y
- desarrollar un algoritmo numérico para calcular la masa añadida en distintos momentos de un flujo oscilante.

En el siguiente capítulo se describe este procedimiento de manera detallada y se muestran los resultados obtenidos junto con su análisis.

3

Desarrollo

3.1. Refinamiento del perfil y construcción de difusores

En la sección 1.3.2 se presentaron los argumentos propuestos por Czitrom *et al* en [9] para deducir los perfiles de las trompetas o difusores que, al conectarse a la boca del conducto resonante, de manera que la razón entre el escalamiento entre las fuerzas inerciales y centrípetas se mantuviera constante a lo largo de toda su extensión. Como ya se mencionó, el problema con esta deducción es que no proporciona un criterio para decidir dónde truncar el perfil definiendo el tamaño de la trompeta.

Como parte de este trabajo, se revisaron dichos argumentos y se refinaron; con lo cual se pudo deducir perfiles en los que la probabilidad de formación de vórtices se sigue manteniendo constante a lo largo de toda su extensión pero que tienen un tamaño definido.

En la deducción hecha por Czitrom *et al*, el punto de partida es considerar que el flujo se conserva en cortes transversales a lo largo de todo el perfil y después imponer una razón constante entre las fuerzas inercial y centrípeta ejercidas sobre un elemento de fluido que viaja paralelo al perfil. El argumento inicial se puede refinar al considerar una sección de casquete esférico en vez de la superficie de un corte transversal plano para cubrir la trompeta, dado que en la primera superficie el flujo en todo momento se puede estimar considerando que es normal al propio casquete. A continuación se explica lo anterior con mayor detalle.

En la figura 3.1 se muestra un corte longitudinal de una trompeta o difusor y el correspondiente perfil propuesto mediante la nueva deducción. El flujo de masa Q se conserva en la superficie C_0 , que corresponde a una sección transversal del tubo donde antes de dejar de ser recto, y en cualquier casquete esférico -como el casquete C_1 - tal que intersecte a la trompeta. Considerando que el perfil debe presentar simetría axial resulta conveniente utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas en vez de cartesianas, en donde la variable y representa la coordenada axial y la variable x la coordenada radial¹. El perfil de la trompeta estará dado, entonces, por una

¹Como se verá en los siguientes capítulos, las coordenadas se eligen de esta manera por consistencia con las elecciones hechas para el análisis de los resultados.

curva $(x(l), y(l))$, donde el parámetro l representa la longitud de arco del perfil de la trompeta.

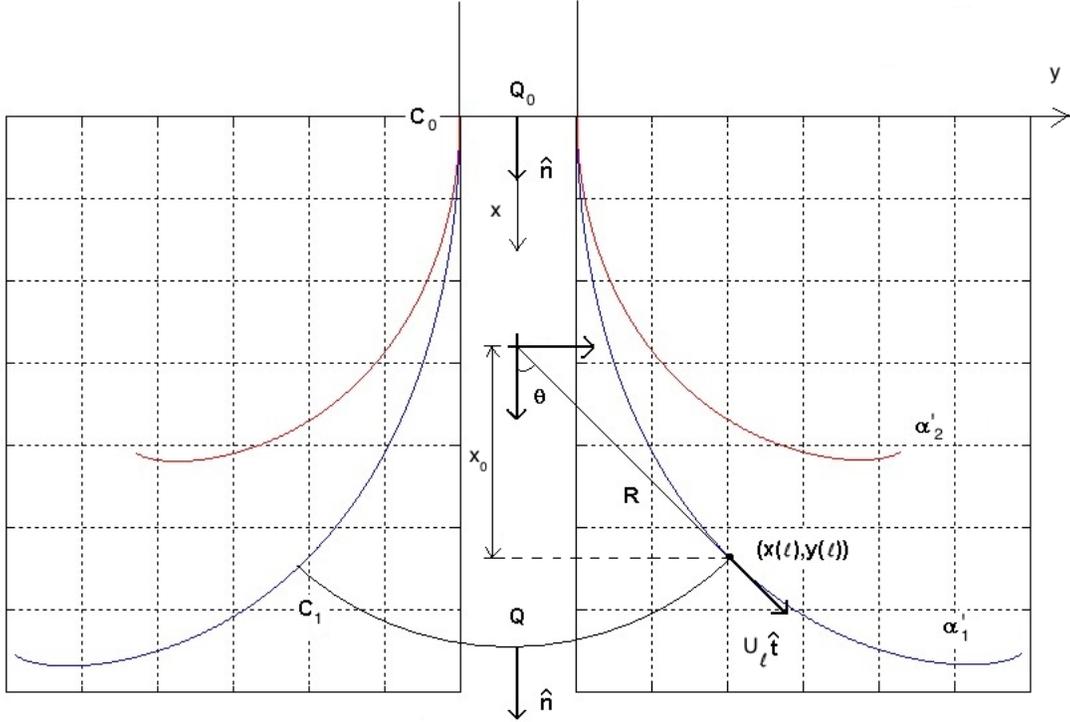


Figura 3.1: Corte longitudinal de dos trompetas o difusores con perfiles obtenidos a partir de la deducción propuesta en este trabajo. En ambos, la razón entre el escalamiento entre las fuerzas inerciales y centrípetas se mantuvo constante a lo largo de toda su extensión y se cuenta con un criterio para establecer su tamaño.

En este esquema, el tubo recto de diámetro D se encuentra en $x < 0$ de modo que el perfil de la trompeta comienza en $x(0) = 0$ y $y(0) = y_0 = D/2$. Suponiendo que el flujo es incompresible e ideal² y que tiene simetría axial, la velocidad del flujo a lo largo del perfil puede escribirse como

$$\vec{U} = U_l \hat{t} = U_l(\dot{x}, \dot{y}),$$

en donde el punto denota la derivada respecto a l y por lo que $\hat{t} = (\dot{x}, \dot{y})$ es un vector

²Si el flujo es ideal implica que no tiene viscosidad, lo cual contradice las consideraciones hechas para el modelo del flujo en un SIBEO. Sin embargo, se puede suponer que los efectos viscosos entre el flujo y la trompeta estarán presentes a lo largo de una capa límite de cierto grosor que es paralela en todo momento a la trompeta. En dicha capa la velocidad del flujo va disminuyendo conforme se acerca a la superficie de la trompeta; hasta anularse al hacer contacto con ella. Pero fuera de dicha capa límite, el flujo se comporta prácticamente como si fuera ideal; es decir, viaja paralelo a la capa límite y a la trompeta, por lo que se puede asumir para fines de la presente deducción como tal y no considerar lo que sucede en la capa límite.

unitario tangente al perfil.

Para determinar el casquete esférico asociado a cualquier punto $(y(l), x(l))$ perteneciente al perfil, se traza una recta que sea tangente al perfil en el punto en cuestión y que intersecte al eje y . La longitud R de esta recta y el punto de intersección con el eje x definen un casquete esférico de radio R , tal que la superficie C_1 que queda dentro de la trompeta define una superficie que intersecta perpendicularmente al perfil.

Si \hat{n} representa al vector normal a la superficie C_1 en el sentido de salida de la trompeta, el flujo de masa Q a través de C_1 es igual a

$$Q = \int_{C_1} \rho \vec{U} \cdot \hat{n} ds. \quad (3.1)$$

En la frontera de la superficie C_1 con el perfil, el vector \hat{n} coincide con el vector tangente $\hat{t} = (\dot{x}, \dot{y})$, por lo que en la intersección $\vec{U} \cdot \hat{n} = U_l$. Considerando lo anterior, se puede estimar el flujo a través de C_1 a partir de la ecuación (3.1), usando coordenadas esféricas y suponiendo que en toda la superficie $\vec{U} \cdot \hat{n} \approx U_l$. Esto es,

$$Q \approx \int_0^{2\pi} \int_0^\theta (\rho U_l) R^2 \sin\theta' d\phi' d\theta' = 2\pi R^2 \rho U_l \int_0^\theta \sin\theta' d\theta' = 2\pi R^2 \rho U_l (1 - \cos\theta),$$

o bien

$$Q \approx 2\pi R^2 \rho U_l \left(1 \mp \sqrt{1 - y^2/R^2} \right);$$

donde el signo “-” corresponde a los valores de θ tales que $0 < \theta < \pi/2$ y el “+” a los valores de θ tales que $\pi/2 < \theta < \pi$. En particular, si $\theta = \pi/2$ resulta que $Q = 2\pi R^2 \rho U_l$, lo cual corresponde al valor del flujo a través de la semiesfera que define el lugar en el perfil donde $\dot{x} = 0$.

Por otro lado, reconociendo que $\tan\theta = \dot{y}/\dot{x} = y/x_0 = y/\sqrt{R^2 - y^2}$, donde x_0 es el punto sobre el perfil en x medido desde el centro de curvatura del casquete C_1 (ver figura 3.1), se obtiene que $R^2 = (y\dot{x}/\dot{y})^2 + y^2$; por lo que la estimación del flujo resulta ser igual a

$$Q \approx 2\pi \rho U_l y^2 \left(\sqrt{(\dot{x}/\dot{y})^2 + 1} \right) \left(\sqrt{(\dot{x}/\dot{y})^2 + 1} \mp \sqrt{(\dot{x}/\dot{y})^2} \right). \quad (3.2)$$

Un cálculo directo permite obtener que $\sqrt{(\dot{x}/\dot{y})^2} = \pm \dot{x}/\dot{y}$. Dado que $\dot{y} > 0$ a lo largo de todo el perfil, esta expresión toma el signo “+” cuando $\dot{x} < 1$ o $\pi/2 < \theta < \pi$ y el signo “-” cuando $\dot{x} > 1$ o $0 < \theta < \pi/2$; de tal forma que la ambigüedad en los signos de la ecuación (3.2) desaparece y resulta que

$$Q \approx 2\pi \rho U_l y^2 \left(\sqrt{(\dot{x}/\dot{y})^2 + 1} \right) \left(\sqrt{(\dot{x}/\dot{y})^2 + 1} - \dot{x}/\dot{y} \right). \quad (3.3)$$

Ahora bien, por conservación de la masa, el flujo a través de la superficie C_1 debe ser igual al flujo a través del corte transversal C_0 en $x = 0$. Como para $x < 0$

se encuentra el tubo recto, el flujo en $x = 0$ puede estimarse como un flujo paralelo al tubo con una velocidad característica U_0 , de manera que

$$Q_0 \approx \rho\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 U_0. \quad (3.4)$$

Igualando los flujos Q y Q_0 , expresados mediante las ecuaciones (3.3) y (3.4) respectivamente, se obtiene que

$$U_l \approx \frac{U_0 D^2}{8y^2 \left(\sqrt{(\dot{x}/\dot{y})^2 + 1}\right) \left(\sqrt{(\dot{x}/\dot{y})^2 + 1} - \dot{x}/\dot{y}\right)}.$$

Al igual que en la deducción del primer perfil propuesto por Czitrom *et al* [9], se considera que todo elemento de fluido que viaja sobre el perfil siente una fuerza centrípeta proporcional a $\rho U_l / \kappa^{-1}$, donde κ^{-1} es el radio de curvatura del perfil en el punto por donde está pasando el elemento de fluido. Para mantener la probabilidad de formación de vórtices constante a lo largo del perfil, esta fuerza se debe balancear con la fuerza inercial ejercida sobre el mismo elemento del fluido y que es proporcional a $\rho U_l / L$ donde L es una longitud característica relacionada con el desplazamiento del propio elemento de fluido. Lo anterior se establece al imponer que la cantidad

$$\alpha \equiv (\rho U_l / \kappa^{-1}) / (\rho U_l / L) = L / \kappa^{-1}$$

sea constante en todo punto sobre el perfil. Además, dado que el flujo oscila con un periodo igual a T , se puede considerar que $L = U_l T$; por lo que

$$\alpha = U_l T / \kappa^{-1}$$

es la cantidad que debe permanecer constante a lo largo del perfil.

Si se considera una sección del perfil cercana a $x = 0$, la curva que define al perfil debe ser una función $y = y(x)$, ya que $\dot{y} = 0$ en $x = 0$. Dado que en dicha sección $\dot{y}/\dot{x} = dy/dx \equiv y'$ y que $\kappa^{-1} = (1 + y'^2)^{3/2} / y''$, se tiene que

$$\alpha = \frac{U_0 D^2 T y'^2 y''}{8y^2 (1 + y'^2)^2 \left(\sqrt{1 + y'^2} - 1\right)}.$$

La ecuación diferencial que define implícitamente al perfil, en donde éste cumple con ser una función $y = y(x)$, se obtiene al despejar de la expresión anterior y'' ; esto es

$$y'' = \frac{4\alpha' y^2}{D^2 y'^2} (1 + y'^2)^2 \left(\sqrt{1 + y'^2} - 1\right), \quad (3.5)$$

donde $\alpha' \equiv 2\alpha / U_0 T$ es una constante indeterminada.

La ecuación (3.5) no se puede resolver numéricamente de manera inmediata ya que $y' = 0$ en $x = 0$ y, por lo tanto, en dicho punto diverge. Sin embargo, cuando

$y' \rightarrow 0$ resulta que $\sqrt{1 + y'^2} \approx 1 + (y'^2/2)$, de modo que la ecuación (3.5) se aproxima a

$$y'' = \frac{2\alpha'y^2}{D^2} (1 + y'^2)^2. \quad (3.6)$$

La solución de esta expresión define una sección del perfil en la que se satisface que $y' \rightarrow 0$. El resto del perfil se deduce considerando a la curva como una función $x = x(y)$ de manera que pueda haber puntos en los que $\dot{x} = 0$. En este caso $\dot{x}/\dot{y} = dx/dy \equiv x'$ y la longitud característica es igual a

$$L = U_l T = \frac{U_0 D^2 T}{8y^2 (\sqrt{1 + x'^2}) (\sqrt{1 + x'^2} - x')}.$$

Por otro lado, para la curva $x = x(y)$ el radio de curvatura está dado por $\kappa = -x'' / (1 + x'^2)^{3/2}$, de manera que al imponer que el cociente $\alpha = L/\kappa^{-1}$ sea constante y despejar a x'' se obtiene que

$$x'' = -\frac{4\alpha'y^2}{D^2} (1 + x'^2)^2 (\sqrt{1 + x'^2} - x'). \quad (3.7)$$

El criterio para truncar esta curva se obtiene al observar en la figura 3.1 que x' (como función de y) tiende a cero conforme se considera una semiesfera que intersecta a la trompeta en un punto cada vez más lejano. Puede observarse inclusive que habrá una semiesfera para la cual x' cambiará de signo. Las siguientes semiesferas, tienen asociados valores de x' cuyo valor absoluto crece rápidamente para que se siga cumpliendo que $\vec{U} \cdot \hat{n} = U_l$. A la par, el radio y la superficie de la semiesfera aumentan rápidamente y tienden a infinito; por lo que el flujo a través de la semiesfera tiende a cero así como U_l . El criterio para truncar la curva se establece, entonces, al identificar el momento en el que x' tiene un aumento abrupto (mayor a cierto número) después de cambiar de signo.

Al resolver numéricamente las ecuaciones (3.6) para el principio del perfil y (3.7) para el resto, se obtiene una familia de curvas en función del valor de la constante α' . La rutina utilizada para ello fue programada en Matlab³ utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden y se pudo ver en el Apéndice A.1 bajo el nombre de "perfil.m". En la figura 3.2 se muestra un ejemplo de los perfiles obtenidos (junto con su reflexión axial) al asignar un valor para la constante α' y puede observarse que, a partir del punto donde la velocidad del flujo que se mueve junto al perfil se anula, éste se ha prolongado mediante una línea recta paralela al eje de simetría. Esta extensión, como se verá más adelante, resultó dar estabilidad al dispositivo experimental y no modifica las condiciones del flujo, ya que el fluido que se mueve paralelo al perfil en el punto donde comienza dicha región debe tener una velocidad muy cercana o igual a cero.

Para construir trompetas o difusores utilizando esta familia de perfiles fue ne-

³Licencia 303823 otorgada a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

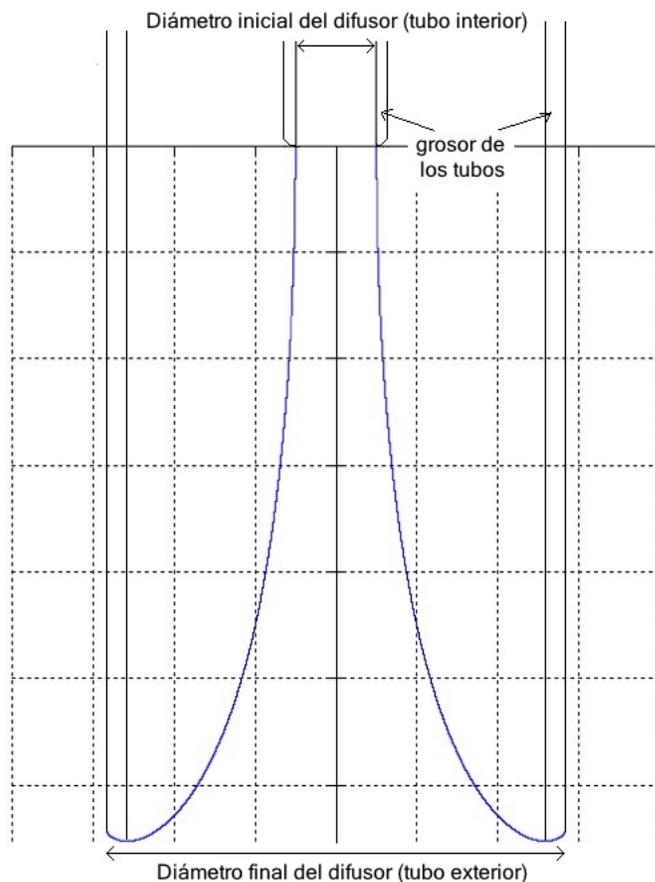


Figura 3.2: Corte transversal de la trompeta o difusor hecho con Pet-g y acoplado tanto a un tubo interior como un tubo exterior, ambos de acrílico.

cesario considerar un material que, a partir de un molde, pudiera tomar la forma deseada. El copoliéster de polietilentereftalato glicol (o PET-G como se le conoce en el mercado) resultó ser un material adecuado para ello ya que es termoformable, liso, transparente y ligero. El molde se puede realizar con una madera densa (caoba, encino o pino) o con MDF⁴, utilizando un escantillón con la forma del perfil y un torno como se muestra en la foto izquierda de la figura 3.3. Ya que se cuenta con el molde se utiliza una termoformadora para que una placa de PET-G tome la forma de trompeta o difusor deseada, como se muestra la foto derecha de la misma figura.

Por último, se ensambla el difusor por la parte superior con un tubo de acrílico cuyo diámetro interno coincide con el diámetro inicial del difusor (llamado tubo interno) y por la parte inferior con otro tubo de acrílico cuyo diámetro externo

⁴El MDF es un tablón hecho de fibras de madera previamente tratadas y aglomeradas con resinas sintéticas mediante fuerte presión y calor hasta alcanzar una densidad media. Se le denomina MDF por las siglas en inglés para “medium density fibreboard”.

coincide con el diámetro final del difusor (llamado tubo externo), como se muestra en la figura 3.2.

Para los fines del presente trabajo, se construyeron tres difusores con un mismo diámetro inicial y distinto diámetro final. Estas dimensiones fueron establecidas considerando tanto las condiciones del dispositivo experimental utilizado para generar los flujos oscilantes en el laboratorio así como los tubos de acrílico existentes en el mercado, de manera que el ensamble del difusor con un tubo interior y otro exterior fuera posible. Lo anterior representó determinar el valor de la constante α' tal que el perfil tuviera los diámetros inicial y final determinados previamente. Para ello se modificó la rutina “perfil.m”, de tal forma que definiendo el diámetro inicial y variando dentro de un intervalo establecido el valor de la constante α' , permitiera obtener un conjunto de correspondientes diámetros finales para poder elegir entre ellos según lo existente.

Con base en lo anterior, se eligió que los difusores tuvieran un diámetro inicial de 1" y diámetros finales de $3\frac{3}{4}$ ", 4" y 6" respectivamente. Después, se determinaron los valores de las constantes α' correspondientes y se dedujo cada uno de los tres perfiles. Finalmente se construyeron los moldes y los difusores. En la figura 3.4 se pueden observar los tres difusores ya ensamblados con los tubos internos y externos de acrílico, acompañados por un tubo (de 1" de diámetro) sin difusor.



Figura 3.3: Corte transversal de la trompeta o difusor hecho con Pet-g y acoplado tanto a un tubo interior como un tubo exterior, ambos de acrílico.

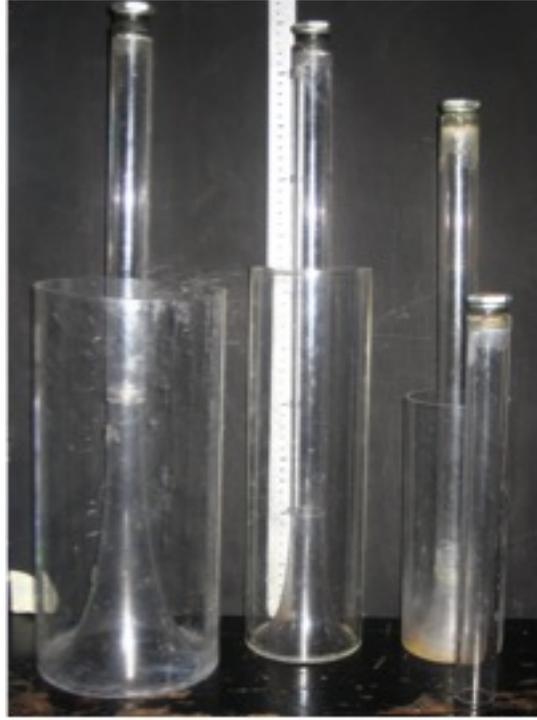


Figura 3.4: Fotografía de los tres difusores hechos con PET-G ensamblados con tubos internos y externos de acrílico y de un tubo sin difusor.

3.2. Dispositivo experimental

Para reproducir flujos oscilantes y analizar los efectos de borde a la salida del tubo sin y con difusores se utilizó el dispositivo experimental mostrado en la figura 3.5, el cual fue construido previamente en el Laboratorio de Acústica de la Facultad de Ciencias de la UNAM [14].

Dicho dispositivo consiste en una pecera con capacidad de $1m^3$, parcialmente llena de agua, y un arreglo electro-mecánico que permite producir flujos oscilantes, de distinta amplitud y frecuencia, a través de un tubo con o sin difusor en la boca parcialmente sumergido en la pecera. Como se muestra en la figura 3.6, la disposición del tubo y la pecera hacen posible iluminar una sección transversal de la boca del tubo mediante una hoja de luz producida con un láser, de tal forma que se pueden tomar imágenes del plano iluminado y aplicar la técnica PIV para medir el campo de velocidades producido por el flujo oscilante en la boca del tubo. Dado que el flujo oscilante generado debe ser axial simétrico respecto al centro del tubo, en principio basta obtener el campo de velocidades sobre un plano transversal como el iluminado (a partir del centro del tubo) para obtener una buena aproximación del campo completo.

Para generar los flujos oscilantes se utiliza un motor de corriente directa que

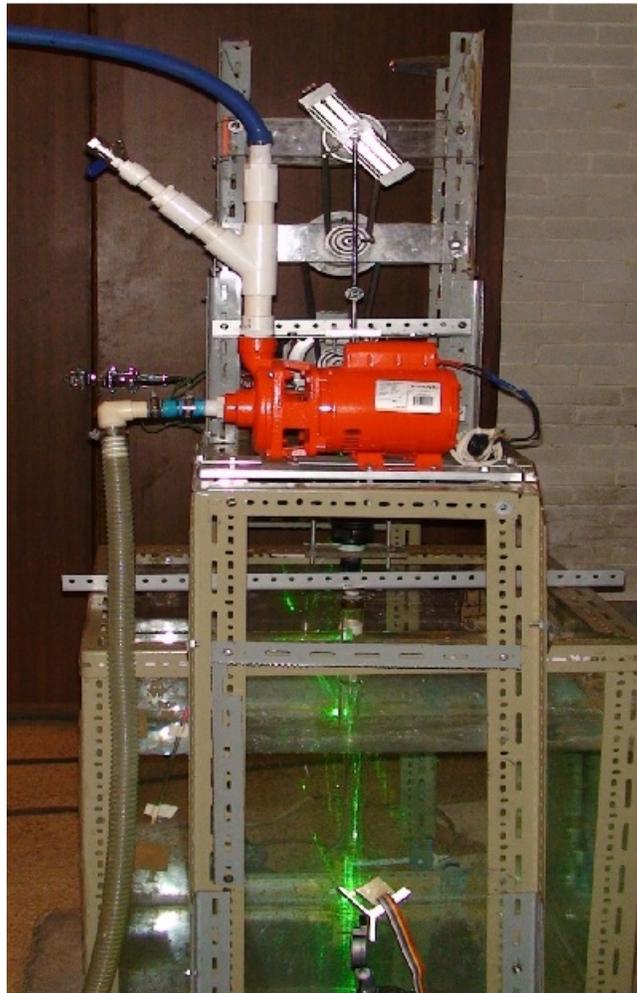


Figura 3.5: Fotografía del dispositivo experimental.

hace girar a un sistema de poleas. Como se muestra en el inciso (a) de la figura 3.7, una de las poleas tiene acoplada una barra giratoria conectada, a su vez, a una biela. La función de la biela, con ayuda de un balero, es transmitir únicamente la componente vertical del movimiento circular de la polea a un pistón que empuja casi de manera armónica a la columna de aire y agua dentro del tubo. La distancia entre el eje de rotación de la barra giratoria y el punto superior de sujeción de la biela puede modificarse en un intervalo de 0 a 100 mm, lo cual permite variar la amplitud de oscilación de la columna de aire y, por tanto, la del agua dentro del tubo también en un intervalo de 0 a 100 mm. Esto se logra mediante el acoplamiento de una barra roscada, engranajes y contrapesos a la barra giratoria; como se muestra en el inciso (b) de la figura 3.7.

El arreglo experimental permite también cambiar la frecuencia de oscilación del

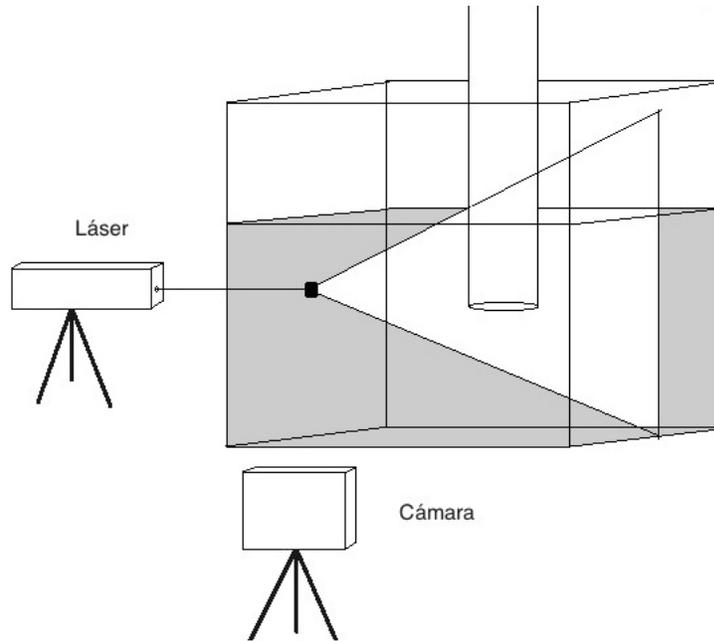


Figura 3.6: Esquema de la disposición del dispositivo para iluminar el flujo oscilante con simetría axial y aplicar la técnica PIV para medir campos de velocidades.

flujo al variar la propia frecuencia de rotación del motor eléctrico mediante un regulador de voltaje. Al hacerlo, varía a su vez la frecuencia de oscilación de las poleas y, por tanto, la del pistón que produce el flujo oscilante de agua a través del tubo. Esta variación puede darse dentro de un intervalo de 0.2 a 2.0 Hz y la oscilación que produce el dispositivo es aproximadamente sinusoidal.

En relación con los propósitos del presente trabajo, se generaron con el dispositivo experimental descrito cuatro flujos oscilantes con distinta amplitud y misma frecuencia (la más baja permitida por el dispositivo) a través de los tres tubos acoplados con los difusores construidos y también a través del tubo sin difusor. La frecuencia de los flujos fue de 0.68 ± 0.06 Hz y las amplitudes exploradas fueron de 35, 50, 65 y 85 ± 5 mm.

A continuación se describe la técnica utilizada para medir los campos de velocidades producidos por los flujos mencionados tanto en la boca del tubo sin difusor como en la boca de los tubos con difusores.

3.2.1. Medición de campos de velocidades utilizando la técnica PIV

Como lo indica el título de la presente sección, la medición de los campos de velocidades instantáneos se hizo utilizando la técnica “Velocimetría por imágenes de partículas”, mejor conocida como PIV por sus siglas en inglés. Con base en la definición operacional de velocidad como el desplazamiento dividido entre el intervalo tiempo de dicho desplazamiento, el procedimiento de esta técnica consiste en medir

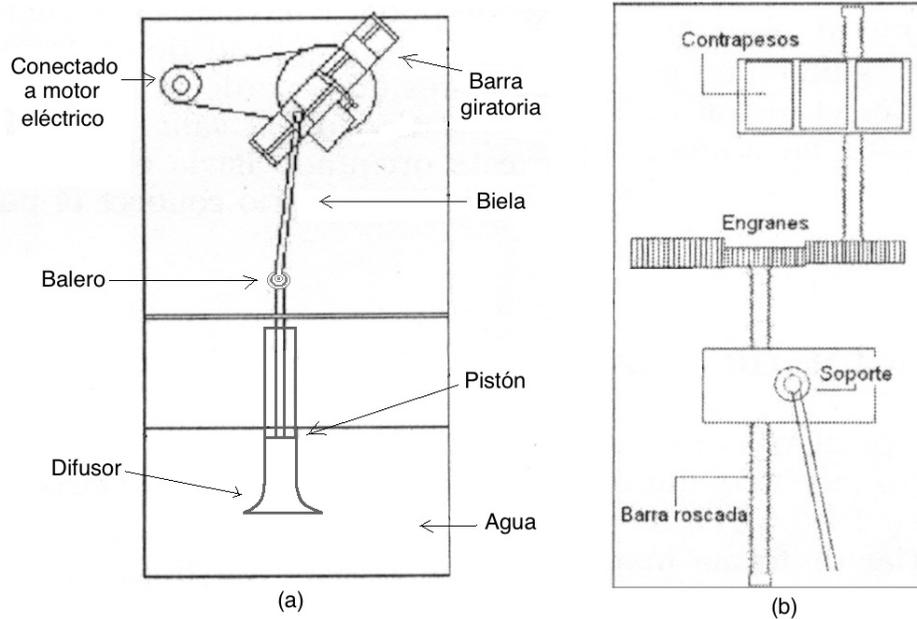


Figura 3.7: (a) Esquema del dispositivo experimental y (b) detalle del arreglo de la barra giratoria que permite variar la distancia del eje de rotación de la barra y el punto superior de sujeción de la biela.

el desplazamiento de algunas partículas añadidas al flujo en un intervalo de tiempo conocido. Las partículas añadidas que siguen al flujo se conocen como “trazadoras” y sus características permiten detectar su movimiento dentro de una sección o área iluminada con una hoja de luz. Esta hoja, producida por un láser y un sistema de componentes ópticos, no se genera de manera continua sino pulsada. Dicha intermitencia produce un efecto estroboscópico que permite capturar la posición de las partículas en distintos instantes y el intervalo de tiempo que pasa entre los pulsos es precisamente el intervalo de tiempo durante el cual suceden los desplazamientos considerados.

Para detectar la posición de las partículas trazadoras iluminadas, como se muestra en la figura 3.8, se coloca un sistema compuesto por una cámara y un dispositivo de carga acoplada⁵ frente a la hoja de luz, formando un ángulo recto. Las posiciones de las partículas trazadoras aparecerán como manchas o puntos luminosos sobre un fondo oscuro en cada cuadro capturado por la cámara. La hoja de luz intermitente y la cámara están sincronizadas de tal forma que las posiciones que tienen las partículas en el instante en que ocurre el primer pulso luminoso son registradas en el primer cuadro capturado por la cámara y las posiciones en el segundo pulso son

⁵Este dispositivo se conoce como CCD por sus siglas en inglés y es un circuito integrado compuesto por millares de unidades fotosensibles que producen un flujo de electrones al ser expuestas a la luz. Este dispositivo se utiliza como el sensor que registra la imagen en las cámaras digitales.

registradas a su vez en el segundo cuadro.

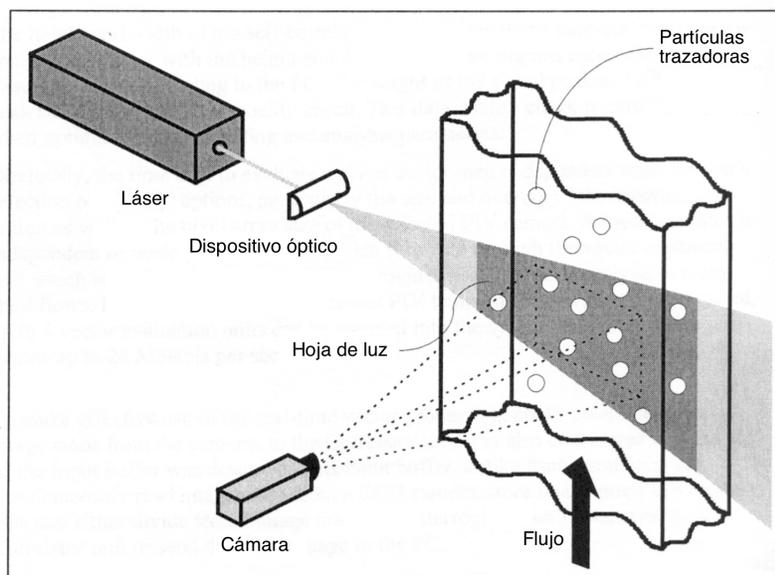


Figura 3.8: Principios básicos de la técnica PIV.

Para obtener resultados confiables con esta técnica de medición, el desplazamiento de las partículas trazadoras debe producirse o mantenerse sobre el área iluminada. Lo anterior implica que el campo de velocidades de los flujos analizados deben de mostrar alguna simetría -de manera que sean flujos bidimensionales- y aprovecharla para la ubicación del plano de luz⁶. Como se mencionó en la sección anterior, los flujos oscilantes analizados en este trabajo presentan una simetría axial respecto al centro del tubo y las trompetas. Mediante el arreglo experimental mostrado en la figura 3.6 se puede generar la hoja de luz de tal manera que ésta coincida con un plano transversal que atraviesa por centro al tubo y las trompetas. Las partículas trazadoras, moviéndose junto con el flujo, permanecen (aproximadamente) dentro del plano iluminado y por tanto la técnica PIV puede aplicarse y proporcionar información válida sobre el flujo oscilante.

Cada imagen tomada con la cámara se divide en regiones rectangulares llamadas celdas de interrogación, como se ilustra en la figura 3.9. La imagen de cada una de estas regiones en el primer y segundo pulso de la hoja de luz se correlaciona para obtener un vector del desplazamiento promedio en la celda. Al hacer lo anterior para todas las celdas de interrogación, se genera un mapa con los vectores del desplazamiento promedio de las partículas en todo el área iluminada y, dividiendo estos vectores entre el intervalo de tiempo conocido entre pulsos, se obtiene un mapa con

⁶Actualmente se puede aplicar esta técnica a flujos cuyos campos no presenten ningún tipo de simetría o que sean tridimensionales. Lo anterior se logra mediante la utilización y ubicación adecuada de dos cámaras.

los llamados vectores de velocidad “en bruto”. Posteriormente, se aplican a estos mapas algoritmos de validación que permiten detectar y eliminar vectores erróneos o atípicos.

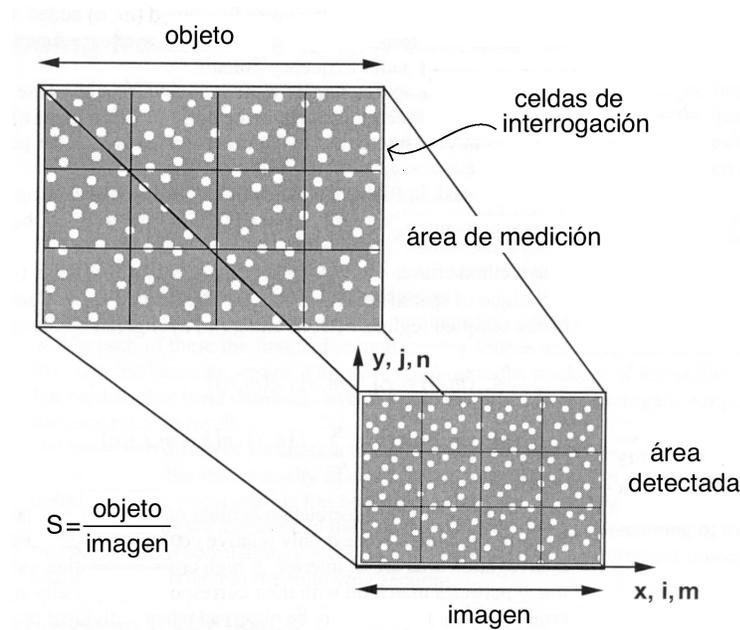


Figura 3.9: División de la imagen en celdas de interrogación y definición del sistema de coordenadas .

La adquisición y procesamiento de los datos se hizo con el sistema “FlowMap” (procesador, láser y cámara) y el software “FlowManager”, de la compañía Dantec Dynamics, montado en el Laboratorio de Combustión de la Facultad de Ciencias de la UNAM [15].

Con la finalidad de lograr la mayor robustez posible, la técnica PIV que utiliza dicho procesador se basa en la determinación del desplazamiento de un grupo de partículas usando algoritmos de correlación FFT⁷, en vez de tratar de identificar partículas individuales y usar otros algoritmos para identificar sus posiciones iniciales y finales. Como ya se había mencionado, las imágenes generadas y procesadas por el “FlowMap” están subdivididas en un cierto número de celdas de interrogación y se correlacionan el primer y segundo cuadro registrado por la cámara para estimar un vector de desplazamiento promedio respecto a cada una de ellas. Esto no requiere el seguimiento de partículas individuales pero demanda, por otro lado, que dentro de cada celda de interrogación haya un número suficiente de partículas como para producir resultados confiables.

Por lo regular, para hacer las correlaciones se utilizan dos técnicas distintas: la autocorrelación y la correlación cruzada. En la mayoría de los casos la correlación

⁷FFT es la forma común de abreviación de “Fast Fourier Transform”.

cruzada genera mejores resultados que la autocorrelación. Para sustentar lo anterior, y dado que la comprensión de los fundamentos del proceso de correlación subyacen al proceso de medición del campo mediante la técnica PIV, se describen a continuación -y a grandes rasgos- ambas técnicas.

Como se muestra en la figura 3.9, el sistema “FlowMap” utiliza un sistema de coordenadas cartesianas de tal forma que el plano XY coincide con la hoja luz. Las parejas de símbolos (i, j) y (m, n) se utilizan para describir las coordenadas de la imagen medida en pixeles o de manera discreta, mientras que la pareja de símbolos (x, y) se utiliza para describir las coordenadas del objeto medido en las unidades del Sistema Internacional (SI). En todos los cálculos, los pixeles se usan como las unidades de medición y los datos reales se obtienen utilizando un factor de escala “ S ” definido como la razón de una longitud real conocida a la longitud correspondiente en la imagen.

Los mapas de cada pareja de imágenes consecutivas son subdivididos, como ya se mencionó, en celdas de interrogación (en función de una resolución escogida) y las distintas celdas forman un arreglo rectangular cuyo centro tiene coordenadas (x, y) en unidades del SI y (i, j) o (m, n) en pixeles o contadores discretos. Si un flujo está presente en el plano iluminado, se puede observar un cambio en la distribución espacial promedio de las partículas trazadoras dentro de estas celdas de interrogación de una imagen a la otra. Este cambio en la distribución espacial puede ser descrito por el modelo de procesamiento de una señal digital lineal esquematizado en la figura 3.10.

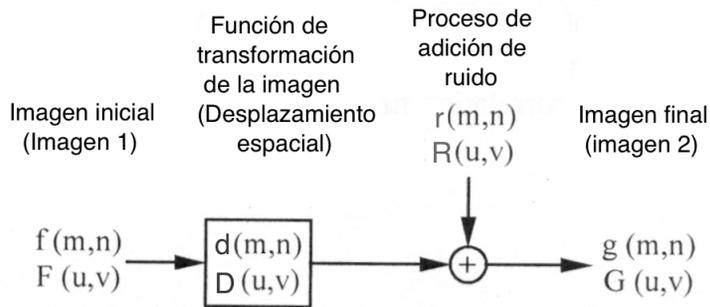


Figura 3.10: Modelo del procesamiento de la imagen.

La función $f(m, n)$ describe la intensidad luminosa dentro de la celda de interrogación grabada al tiempo t y la función $g(m, n)$ al tiempo $t + \Delta t$. Esta última puede considerarse como la salida de un función de transferencia de la imagen $d(m, n)$, tomando como entrada la función $f(m, n)$ y sumando la función ruido $r(m, n)$. Las funciones en mayúscula son las transformadas de Fourier de las funciones correspondientes en minúsculas y (u, v) son las coordenadas en el dominio de las frecuencias

espaciales ⁸.

La función $d(m, n)$ está directamente relacionada con el flujo y el tiempo que pasó entre las dos imágenes grabadas, mientras que $r(m, n)$ es el resultado de las partículas trazadoras que están entrando o saliendo de la celda de interrogación durante el periodo de tiempo que sucede entre las dos imágenes. El propósito de la técnica PIV es la determinación de la función $d(m, n)$ con base en los valores conocidos (al medirlos) de $f(m, n)$ y $g(m, n)$, pero la presencia del ruido complica dicha tarea.

Como ya se mencionó, uno de los métodos estadísticos utilizados para estimar la función $d(m, n)$ es la correlación espacial cruzada. La función de correlación cruzada discreta $\phi_{fg}(m, n)$ de las regiones analizadas $f(m, n)$ y $g(m, n)$ está dada por el valor de expectación

$$\phi_{fg}(m, n) = E[f(m, n), g(m, n)] \equiv \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} f(k, l) \cdot g(k + m, l + n).$$

Por lo general, esta función se normaliza para que obtenga valores entre cero y uno; pero en el contexto de la técnica PIV sólo resultan de interés los niveles relativos de correlación dentro de la celda de interrogación investigada. Un nivel alto de correlación cruzada se obtiene cuando muchas partículas coinciden con sus correspondientes parejas desplazadas espacialmente, mientras que un nivel o un pico bajo se obtiene cuando partículas individuales coinciden con otras partículas. Las primeras se conocen como correlaciones verdaderas y las segundas como correlaciones azarosas.

La entrada o salida a la celda de interrogación de las partículas trazadoras no contribuyen en las correlaciones verdaderas ya que se desconoce la posición inicial o la final de dichas partículas. Sin embargo, sí contribuyen en las correlaciones azarosas y como tales disminuyen la razón entre la señal y el ruido. Este fenómeno se conoce como “pérdida de pares” o “disminución de la señal”. De cualquier manera, el pico más alto de la correlación puede ser considerado con confianza para representar el mejor empate entre las funciones $f(m, n)$ y $g(m, n)$ cuando el número de parejas de partículas es suficientemente alto. La posición del pico en el plano de correlación corresponde directamente al promedio del desplazamiento de las partículas dentro de la celda de interrogación considerada.

Para calcular de manera más eficiente el plano de correlación, se utiliza la Transformada de Fourier rápida (FFT) ya que reduce el número de operaciones necesarias: en vez sumar sobre todos los elementos de la región analizada, se puede llevar a cabo una multiplicación de los complejos conjugados de los correspondientes pares de

⁸Sólo dentro de este contexto se utiliza la pareja de símbolos (u, v) para representar las coordenadas de las celdas de interrogación en el espacio de las frecuencias. En el resto del trabajo o en algunas de las rutinas numéricas desarrolladas se utilizan los símbolos u y v para representar dos de las componentes del campo de velocidad del flujo o únicamente el símbolo u para representar la norma de la velocidad del flujo.

coeficientes de Fourier. El conjunto resultante de coeficientes son transformados de manera inversa para obtener la función de correlación ϕ_{fg} . Este procedimiento se ilustra esquemáticamente en la figura 3.11.

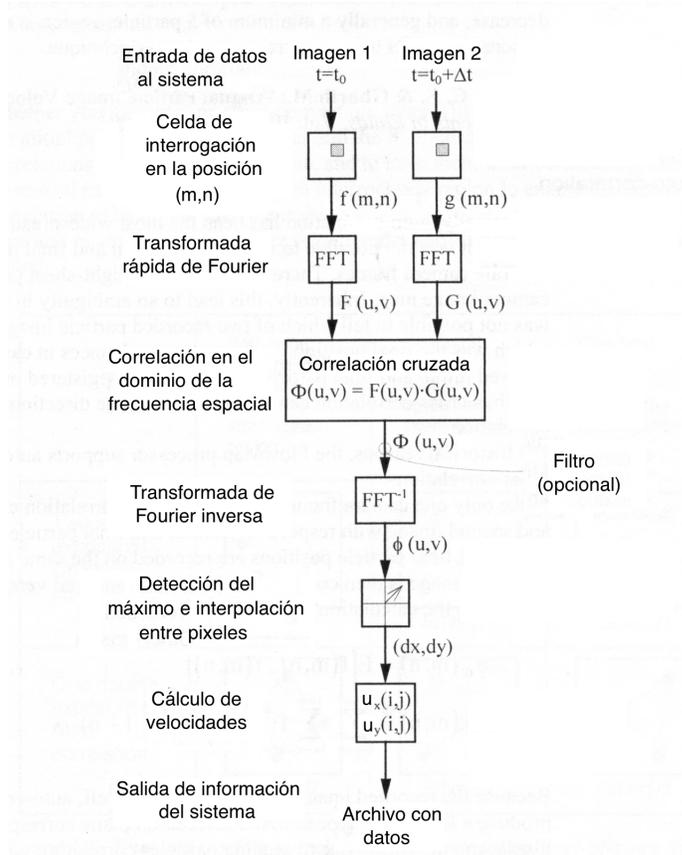


Figura 3.11: Esquema del procesamiento de los datos.

En relación con el uso de la Transformada de Fourier, una de las condiciones necesarias para que esta técnica sea confiable es que, dada la longitud característica L de la celda de interrogación (medida en píxeles), el desplazamiento máximo de las partículas en la imagen -denominado d_{max} - no sea mayor a $L/4$. Esto es

$$d_{max} = \frac{u_{max} \cdot t}{S} \leq \frac{L \cdot d_{pixel}}{4},$$

donde u_{max} es la norma de la velocidad máxima obtenida o posible del flujo analizado, t es el intervalo de tiempo entre pulsos luminosos, S el factor de escala entre las longitudes reales y las de la imagen y d_{pixel} es el factor de conversión entre las longitudes de la imagen medidas en el SI y las medidas en píxeles. Como se puede observar, dicha condición se puede garantizar al ajustar el tiempo entre los pulsos luminosos. Otro factor a considerar es el número de partículas trazadoras que debe

haber en cada celda de interrogación para que haya la mayor cantidad posible de correlaciones verdaderas. Lo anterior se garantiza utilizando un mínimo de 5 partículas por celda y en, tal caso, se pueden aceptar inclusive desplazamientos promedios mayores a $L/4$ ⁹ [15].

El otro método estadístico utilizado para estimar la función $d(m, n)$ es la autocorrelación. Este método ha sido el más utilizado históricamente ya que antes, por razones técnicas, no era posible capturar las posiciones iniciales y finales de las partículas en imágenes independientes. Los pulsos sucesivos de la hoja de luz exponían la posición de las partículas en la misma imagen. Esto conduce inherentemente a una ambigüedad en las mediciones ya que no es posible distinguir cuáles son las posiciones iniciales y cuáles las finales. En los últimos años, el desarrollo tecnológico de las cámaras ha permitido registrar dichas posiciones en cuadros o imágenes separadas y, por tanto, se puede usar la correlación cruzada para evitar la ambigüedad en la dirección de la autocorrelación.

El método de autocorrelación parte, entonces, del hecho de que en la misma imagen están registradas las posiciones iniciales y finales de las partículas. La imagen grabada se correlaciona con versiones “desplazadas” de ella misma y la función ϕ_{fg} se calcula de la misma manera que en la correlación cruzada. Dado que la imagen grabada se correlaciona con ella misma, siempre aparecerá un gran pico central en el plano de correlación que corresponde a un desplazamiento nulo y, por lo tanto, lo anterior no representa necesariamente una velocidad nula.

La autocorrelación resulta más rápida que la correlación cruzada dado que los cálculos son más simples. Sin embargo, al utilizarla aumenta el número de correlaciones azarosas y por tanto la razón entre la señal y el ruido será menor que al utilizar la correlación cruzada. Esto implica la necesidad de tener por lo menos 10 partículas trazadoras en cada celda de interrogación para obtener resultados confiables [15].

Hay distintas maneras de mejorar la técnica de autocorrelación. Sin embargo, su descripción no resulta relevante para este trabajo ya que en él se utilizó la técnica de correlación cruzada. Por lo anterior, basta la descripción general anterior de ambos métodos tanto para justificar la elección del uso de la correlación cruzada (al contar con el dispositivo adecuado) así como para introducir los parámetros que se necesitan considerar para su utilización de manera adecuada: el número mínimo de partículas trazadoras necesario en cada celda de interrogación y el tiempo entre pulsos luminosos para que los desplazamientos promedio queden dentro de las celdas de interrogación.

Una vez que se ha elegido el método de correlación y que se han obtenido mapas de vectores de velocidad “en bruto”, se pueden aplicar tanto algoritmos de validación como filtros para refinar la información obtenida sobre el flujo.

Como se mencionó anteriormente, los valores máximos del ruido dentro de la

⁹Con base en simulaciones hechas con Monte Carlo, el número mínimo de partículas por celda recomendado es de 5 para la correlación cruzada y de 10 para la autocorrelación. Dichas condiciones se obtienen considerando la densidad volumétrica de las partículas trazadoras en el fluido analizado [15].

función de correlación producen vectores “atípicos”. Ya que la técnica PIV implica mediciones instantáneas, toda la información espacial es analizada al mismo tiempo y por tanto hay una probabilidad estadística finita de tener regiones que no aportarán ninguna información relevante. Por lo anterior es necesario validar cualquier mapa de vectores obtenido con esta técnica. El propósito de aplicar una rutina de validación es reconocer los vectores atípicos y, de ser posible, substituirlos. Dicha sustitución no es necesariamente un proceso arbitrario; por ejemplo, se pueden estimar con base en los vectores medidos en la misma zona. El software “Flowmap” permite aplicar cinco tipos de validación:

1. Utilizando la razón entre las alturas de los picos de la correlación: con este método validan o rechazan vectores individuales con base en que la razón entre las alturas del pico mayor y el pico de orden cero (correspondiente al ruido) en el plano de correlación sea mayor o igual a cierto número. Entre más partículas coincidan, la altura del pico mayor será más alta y por ello puede usarse este criterio para validar vectores. Sin embargo, la altura del pico no sólo depende del número de partículas que coincidan sino de la intensidad luminosa en el área de interrogación, por lo que este método es útil si la hoja de luz es uniforme.
2. Definiendo un rango de velocidades permitido: este algoritmo valida o rechaza vectores que están fuera de cierto rango, por lo que es útil cuando se conoce o se cuenta con algún criterio para definir dicho rango.
3. Determinando un promedio móvil (“moving-average”): con esta técnica se validan o rechazan vectores con base en la comparación entre vectores vecinos. Los vectores rechazados pueden ser substituidos por vectores estimados con base en los vectores circundantes. Este tipo de validación implica asumir implícitamente que el campo de velocidades del flujo es continuo.
4. Validando manualmente los mapas de vectores: este tipo de validación permite aceptar o rechazar manualmente vectores considerados bajo algún criterio visual como atípicos.
5. Eliminando áreas que no contienen información válida: este método consiste en introducir una máscara en el mapa de manera que dicha región no sea analizada. Esto puede ser necesario dado que la información proporcionada no sea válida o cierta.

El primer método no se eligió dado que al reflejarse la hoja de luz en la trompeta se produjeron destellos o zonas más luminosas en el plano iluminado, por lo que es muy probable que la iluminación en dicho plano no sea uniforme. El segundo y el cuarto método tampoco fueron elegidos dado que es esperable que por las características del flujo estudiado los valores de velocidad varíen dentro de un margen amplio de valores a velocidad. Por lo anterior, el método de validación adecuado

para fines de este trabajo es el del promedio móvil. Como se justificará en la siguiente sección con mayor detalle, también fue necesario utilizar una máscara para eliminar la información no válida proveniente del área correspondiente al interior de la trompeta.

Al aplicar el método del promedio móvil se compara cada vector con el promedio de los vectores que lo rodean, definiendo el tamaño de la vecindad a considerar. Dado que se asume que el campo es continuo, los vectores vecinos no deben cambiar mucho entre sí o deben estar correlacionados. Por ello, si la norma de la diferencia entre el vector en cuestión y el vector promedio es mayor que cierto número, dicho vector debe ser atípico. La cota para decidir si es atípico, no está definida directamente. Este valor se determina eligiendo un número entre el 0 y el 1 que multiplica al valor máximo de la norma de la diferencia máxima entre cada uno de los vectores del mapa y el vector promedio en función del tamaño de la vecindad considerada. Este número es llamado “factor de aceptación” ya que si se elige igual a 1 todos los vectores serían validados, mientras que si se elige igual a 0 todos los vectores serían rechazados. El factor de aceptación no tiene una interpretación directa en relación con el flujo, por lo que se sugiere elegir un valor entre 0,01 y 0,1 después de experimentar con el flujo estudiado. De cualquier manera, si se elige sustituir a los vectores rechazados, el valor de dicho parámetro no resulta importante. De hecho, resulta ser aún menos importante si se elige sustituir a los vectores rechazados por el vector promedio de la vecindad. Además, este proceso puede refinarse si se itera en un cierto número de ocasiones. Por otro lado, ya que este método se basa en la suposición de que el campo es continuo, al examinar espacialmente a cada vector en relación con sus vecinos, se recomienda garantizar el mayor solapamiento posible entre las vecindades.

Para aplicar el método recién descrito se debe elegir, entonces, el área de validación o el tamaño de la vecindad, el valor del factor de aceptación, el número de iteraciones y si se sustituyen los vectores reconocidos como atípicos incluyendo o no las fronteras. Para la adquisición de datos en este trabajo se consideró una vecindad de 3×3 vectores, un factor de aceptación igual a 0,1, la substitución de los vectores atípicos sin incluir las fronteras (dado que, como se verá en la frontera de los campos estudiados el campo era prácticamente nulo en todos los casos) y la iteración del proceso tres veces.

Por último, el software “Flowmap” permite refinar aún más el proceso descrito anteriormente para adquisición y análisis de los campos de velocidades mediante la aplicación de la “correlación cruzada adaptativa”. Como su nombre lo indica, dicha aplicación también utiliza el método de correlación cruzada, pero lo hace de manera iterativa, cambiando en cada paso el tamaño de las celdas de interrogación. Si se conoce o estima el desplazamiento promedio de las partículas en el flujo, se puede introducir un corrimiento espacial de las celdas de interrogación en la imagen registrada al producirse el segundo pulso del láser respecto a la posición de las celdas de interrogación en la imagen registrada al producirse el primer pulso. Este corrimiento espacial se conoce como “compensación” (offset en inglés) y la idea es

que, al coincidir con el desplazamiento promedio, la mayoría de las partículas que estaban en la primera celda de interrogación (en la imagen registrada al producirse el primer pulso del láser) estarán en la segunda celda (en la imagen registrada al producirse el segundo pulso). Con ello se puede evitar casi por completo la pérdida de información respecto a las partículas que se salen de o entran a las celdas de interrogación durante el intervalo de tiempo que pasa entre que se generan los dos pulsos del láser.

En la correlación cruzada adaptativa se empieza considerando o estimando un cierto valor de “compensación” con base en una primera elección del tamaño de las celdas de interrogación. Después este valor de compensación se aplica a las celdas de interrogación de la imagen registrada al producirse el segundo pulso del láser respecto a la posición de las celdas en la primera imagen. Los vectores de las celdas en la segunda imagen son validados y se utilizan para volver a calcular o estimar el valor de compensación. Este segundo valor de compensación se utiliza de nuevo para desplazar las celdas de la segunda imagen respecto a la posición que tenían en la primera imagen, pero en este segundo paso las celdas son de un tamaño menor. Los vectores en las celdas de la segunda imagen vuelven a validarse y se repite el proceso, refinándose a cada paso el tamaño de las celdas de interrogación.

El mayor beneficio que se puede obtener al aplicar este método de correlación es capturar la imagen de las partículas que se están saliendo de o entrando a las celdas de interrogación durante el intervalo de tiempo que ocurre entre los dos pulsos emitidos por el láser; lo cual permite obtener un mayor número de vectores correctos sin la necesidad de incrementar la densidad de partículas trazadoras en el fluido.

Para que la correlación cruzada adaptativa genere los mejores datos posibles, es necesario ajustar el tiempo entre pulsos del láser de manera que el desplazamiento promedio de las partículas durante ese intervalo sea aproximadamente igual al 30 % del tamaño de la celda de interrogación. Por ejemplo, si se consideran celdas de interrogación de 32×32 píxeles, debe escogerse el tiempo entre pulsos de tal forma que el desplazamiento de las partículas sea aproximadamente de 10 píxeles.

Por lo anterior, los parámetros que se necesitan definir para aplicar la correlación cruzada adaptativa son: 1) el tamaño inicial y final de las celdas de interrogación, 2) el número de pasos de refinamiento, 3) el traslape de las celdas de interrogación (en porcentaje), 4) la elección de mover o sustituir las segundas celdas de interrogación en caso de quedar fuera del área definida como activa en las imágenes, 5) el tamaño del área activa en las imágenes, 6) el tipo de validación definiendo el tamaño de la vecindad a considerar y 6) el intervalo de tiempo entre pulsos definido de manera que el desplazamiento promedio de las partículas no exceda el 30 % del tamaño de la celda de interrogación.

Por las condiciones de los flujos estudiados en este trabajo, se eligió aplicar el método de correlación cruzada adaptativa haciendo las siguientes elecciones:

- El tamaño inicial de las celdas fue igual a 64×64 píxeles y el final de 32×32 píxeles.

- Se aplicaron 3 pasos de refinamiento.
- Las celdas de interrogación se traslaparon un 25 %.
- El área activa de las imágenes fue de 1284×1024 pixeles.
- Se validaron los vectores usando el método de “moving-average” (como se justificó anteriormente), definiendo una vecindad de 3×3 vectores.

Como se verá en el capítulo de Resultados y análisis, el tiempo entre pulsos -denotado por el símbolo Δt_p - se estimó por casos, definidos con base en las condiciones del flujo oscilante, y considerando que el desplazamiento promedio de las partículas no fuera mayor a 10 pixeles dada la elección del tamaño final de las celdas de interrogación (una tercera parte de la longitud de las celdas de interrogación escogidas). En cambio el tiempo entre parejas de pulsos fue constante e igual a 0.250 s. Dicho intervalo se denota con el símbolo Δt_r , donde el subíndice r hace alusión al vocablo en inglés “recording”, y está relacionado con un tiempo característico del fenómeno analizado. En todas las mediciones realizadas para el presente trabajo se escogió $\Delta t_r = 0.250$ s (el mínimo posible permitido por sistema “FlowMap”), ya que este tiempo es aproximadamente un cuarto del periodo de la oscilación de los flujos generados (cuya frecuencia de oscilación ω se mantuvo constante y fue igual a $0,68$ Hz) y se obtuvo para cada flujo generado una secuencia de 180 parejas de pulsos. En la figura 3.12 se muestra una representación esquemática de la secuencia de grabación de pares de imágenes y los intervalos de tiempo asociados. Cabe mencionar que, al no contar con un sistema de gatillo para iniciar la grabación de cada secuencia en el mismo momento de la oscilación, no se puede garantizar que las imágenes obtenidas en distintas secuencias retraten al flujo en el mismo instante.

En esta sección se describió el procedimiento seguido para medir los campos de velocidades del flujo estudiado. A continuación se presenta el protocolo desarrollado para medir la masa añadida a partir de los campos de velocidades obtenidos, ya sea tanto de manera experimental aplicando la técnica PIV como a partir de simulaciones numéricas.

3.3. Protocolo numérico para medir la masa añadida

Como se ha descrito a lo largo de las secciones anteriores, la finalidad del presente trabajo es medir la masa añadida de ciertas líneas de corriente de un flujo oscilante a la salida de un tubo. La intención de lo anterior es analizar el comportamiento de dicha cantidad en el tiempo y en relación a la geometría de la boca del tubo, ya que -como se justificó en el Capítulo 2- la masa añadida puede vincularse con las pérdidas de energía de dicho flujo.

Para lograr dicho propósito, se desarrolló un protocolo numérico con el cual determinar valores de masa añadida a partir de los campos de velocidades del flujo estudiado a un tiempo t_i y t_{i+1} , donde $i = 0, 1, 2, \dots, i_{max}$. Al aplicar la técnica PIV

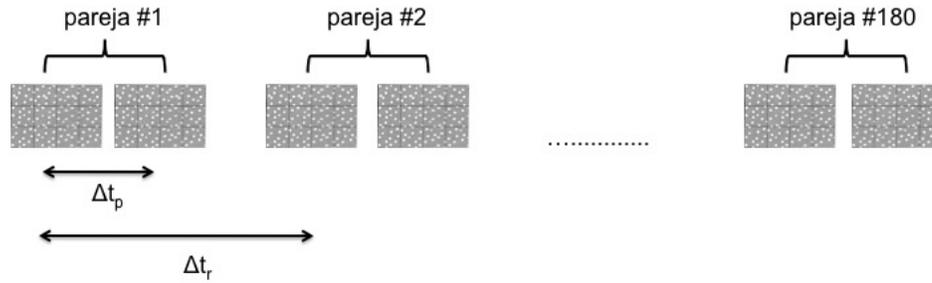


Figura 3.12: Esquema de la grabación de una secuencia de pares de imágenes para aplicar la técnica PIV y los intervalos de tiempo asociados. Δt_p es el intervalo de tiempo que pasa entre cada pareja de imágenes o pulsos y se escoge de manera que las partículas no recorran más de una tercera parte de la longitud de la celda de interrogación en dicho intervalo de tiempo. Δt_r es el intervalo de tiempo que pasa entre las primeras imágenes o pulsos de cada pareja y se escoge de manera que se logre observar el fenómeno a observar en el flujo analizado. Para este trabajo este intervalo se escogió de forma que se capturaran cuatro momentos en cada oscilación.

sobre el flujo analizado se obtiene la componente radial y la componente axial del campo de velocidades, en coordenadas cilíndricas, asociado a los puntos (x, y) de una malla rectangular, para distintos instantes entre los que pasa un intervalo de tiempo constante. Cada nodo de la malla corresponde al centro de las celdas de interrogación de la imagen del flujo en determinado instante y el vector asociado corresponde al vector velocidad promedio (validado y filtrado) de la celda.

Es importante recalcar que, dado el arreglo experimental, se está suponiendo que el flujo presenta simetría axial y que el plano de luz coincide con un plano en el que la componente azimutal φ es constante. Por lo anterior, la propia componente azimutal del campo de velocidades del flujo se considera nula. También vale la pena aclarar que, por simplicidad para presentar los resultados y el análisis subsecuente, durante el resto del trabajo se utilizará el símbolo x para representar la coordenada radial (tradicionalmente denotada con el símbolo ρ), y para representar a la coordenada axial (denotada usualmente con z) y z para representar a la coordenada azimutal (comúnmente denotada con φ)¹⁰.

El protocolo consiste en dos rutinas numéricas desarrolladas para Matlab y se muestran completas en los Apéndices A.2 y A.3¹¹ El protocolo permite visualizar las líneas de corriente del flujo en distintos instantes; de tal manera que se puede

¹⁰En cambio, por las características del análisis mostrado en las secciones 4.2, 3.1, así como en la correspondiente rutina numérica, se utilizó el símbolo x para representar a la coordenada axial y y para la radial.

¹¹La primer rutina mostrada es válida para analizar el flujo oscilante a través del tubo con la trompeta chica en la boca. También se desarrollaron rutinas análogas para el análisis del flujo a través del tubo con las otras dos trompetas en la boca o a través del tubo sin trompeta en la boca. La segunda es una subrutina válida para cualquiera de las anteriores y sirve para interpolar los valores del campo de velocidad en puntos que no pertenecen a la malla.

escoger, en un instante particular, una de ellas que resulte de interés. Por el análisis descrito en los Capítulos 1 y 2 las líneas que resultan de interés son las más cercanas al eje de simetría axial del tubo -o centrales- ya que es más probable que sus extremos hagan contacto con la superficie libre del fluido por dentro y por fuera del tubo¹²; de tal forma que dicho análisis pueda ser aplicado y sus resultados sean válidos (ver figura 1.4).

Una vez elegida una línea de corriente en cierto instante t_i , se calcula con la primer rutina un conjunto de puntos parametrizados con la longitud de la curva $(x(l), y(l))$ que pertenecen a ella (y que no forman parte de la malla necesariamente) para interpolar, con base en la información conocida del campo de velocidades en los puntos de la malla, el valor del campo en cada uno de ellos. Con el mismo procedimiento se calcula el valor del campo de velocidades al tiempo t_{i+1} para el mismo conjunto de puntos $(x(l), y(l))$ pertenecientes a la línea de corriente elegida al tiempo t_i ; de tal manera que se puede estimar la variación temporal de la norma de la velocidad en cada punto de la línea de corriente elegida al tiempo t_i . Con estos datos se obtiene una curva que representa al tiempo t_i la variación temporal de la norma de la velocidad como función de la longitud de la curva. Por último, se integra numéricamente esta curva respecto a longitud de la misma y el resultado es la masa añadida asociada a la línea de corriente elegida al tiempo t_i .

A continuación se describe con mayor detalle y ejemplifica cada uno de los pasos de dicho protocolo:

1. Se cargan los datos del campo de velocidad (ya sean reales o calculados a partir de una simulación numérica) a los tiempos t_i y t_{i+1} ; esto es, se cargan los datos $u_x^t(x, y)$ y $u_y^t(x, y)$ a $t = t_i$ y $t = t_{i+1}$, donde $i = 0, 1, 2, \dots, i_{max}$. Los valores (x, y) de la malla (en mm) están dados por las relaciones

$$x = x_{min} + m \cdot \Delta x$$

$$y = y_{min} + n \cdot \Delta y,$$

donde x_{min} y y_{min} son los valores del origen del sistema de coordenadas que define la malla. En general ambos son igual a cero y representan la esquina inferior izquierda del rectángulo. Los símbolos k y l representan contadores discretos tales que $m = 1, 2, \dots, M$ y $n = 1, 2, \dots, N$, mientras que Δx y Δy representan el incremento horizontal y vertical -respectivamente- entre cada punto de la malla. En las mediciones hechas para el presente trabajo ambos incrementos fueron iguales pero $M > N$; es decir, la malla tiene una forma rectangular. En la figura 3.13 se muestra la foto en un determinado instante del flujo oscilante a través de la trompeta chica, bajo determinadas condiciones

¹²Todas líneas de corriente deben hacer contacto con las superficies libres medias del fluido o cerrarse en sí mismas; sin embargo, debido a los errores numéricos inherentes a las rutinas es posible que al seguir una línea de corriente entre en una zona de recirculación y acabe cerrándose. Es por esto que conviene escoger una línea cercana al eje simetría axial del tubo, ya que es menos probable que -a pesar de los errores numéricos- esto suceda.

de amplitud y frecuencia. En la foto que aparece en esquina superior izquierda se observa el final de la trompeta (aproximadamente la mitad del ancho y una quinta parte del largo) y los puntos luminosos son las partículas trazadoras. En la gráfica mostrada se puede observar el correspondiente campo de velocidades.

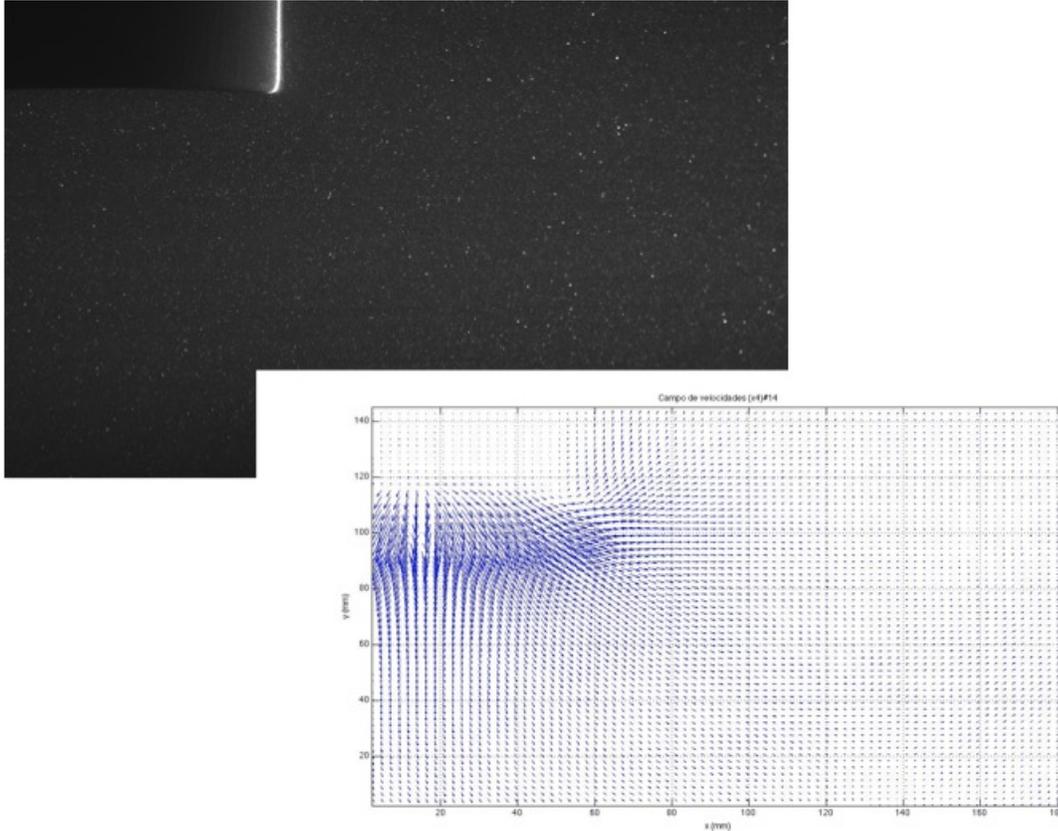


Figura 3.13: En la foto de la esquina superior izquierda se muestra el flujo oscilante a través del tubo con el difusor chico, con amplitud y frecuencia de oscilación de 35 mm y 0.68 Hz respectivamente, en un determinado instante. En la gráfica se muestra el campo de velocidades correspondiente, donde el tamaño y la dirección de las flechas representa el vector velocidad promedio (validado y filtrado) de cada celda de interrogación.

2. Integrando con la regla de Simpson, se calcula la función de corriente $\Psi(x, y)$ y se obtienen las curvas de nivel ($\Psi = \text{constante}$) para visualizar de manera global las líneas de flujo. En la figura 3.14 se pueden observar las líneas de corriente para el mismo campo mostrado en la figura anterior ¹³.

¹³Tanto en esta gráfica como en la mostrada en la figura 3.13 se puede observar que, en la región que corresponde al interior de la trompeta, aparecen vectores no nulos o líneas de corriente cuando

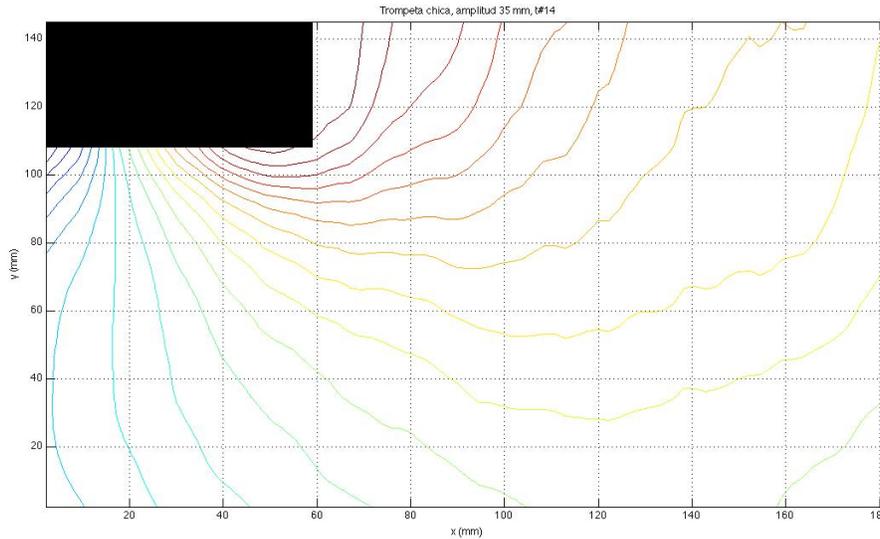


Figura 3.14: Líneas de corriente calculadas al determinar las curvas de nivel de la función de corriente $\Psi(x, y)$. Dicha función se determina a partir de los valores conocidos del campo mediante la aplicación de la regla de Simpson.

3. Con base en la visualización global del campo, la rutina permite elegir una línea de corriente al tiempo t_i para calcular a lo largo de ella la masa añadida. Para esto se especifican los puntos iniciales $(x_{inicial}, y_{inicial})$ al tiempo t_i de la línea elegida. Como ya se mencionó, las líneas que resultan de interés son aquellas cercanas al eje de simetría axial del tubo para garantizar que sus extremos coinciden con la superficie libre del fluido dentro del tubo y fuera del tubo. A estas líneas se les llama centrales.
4. Partiendo del punto $(x_{inicial}, y_{inicial})$ elegido en el tiempo t_i , se utiliza el método de Runge-Kutta de cuarto orden y los valores del campo de velocidad conocidos sobre los puntos de la malla para calcular los puntos $(x(l), y(l))$ que pertenecen a la línea de corriente. Estos puntos se determinan como función de un parámetro l , que corresponde a la longitud de arco de la propia línea. Como se muestra en la figura 3.15, la línea de corriente queda dibujada sobre el campo de vorticidad. Dicho campo se calcula utilizando diferencias finitas y los valores conocidos del campo de velocidad en los puntos (x, y) de la malla al tiempo t_i ¹⁴. Esta información permite identificar zonas de alta vorticidad,

en realidad no se puede obtener información sobre el flujo en esa región a partir de la aplicación de la técnica PIV. Lo anterior es consecuencia de la utilización de los algoritmos de validación y filtro sobre los mapas de campo en bruto; ya que al asumir que el campo es continuo, se suaviza el cambio abrupto entre los valores del campo fuera de la trompeta y dentro.

¹⁴Teniendo en mente que aquí se está utilizando x para representar a la coordenada radial ρ ,

que sugieren a su vez la presencia de vórtices y se puede elegir entonces una línea que no se acerque a dicha región. Sin importar la dirección del flujo en un instante determinado, la línea de corriente se va generando o recorriendo desde la boca de la trompeta hacia afuera.

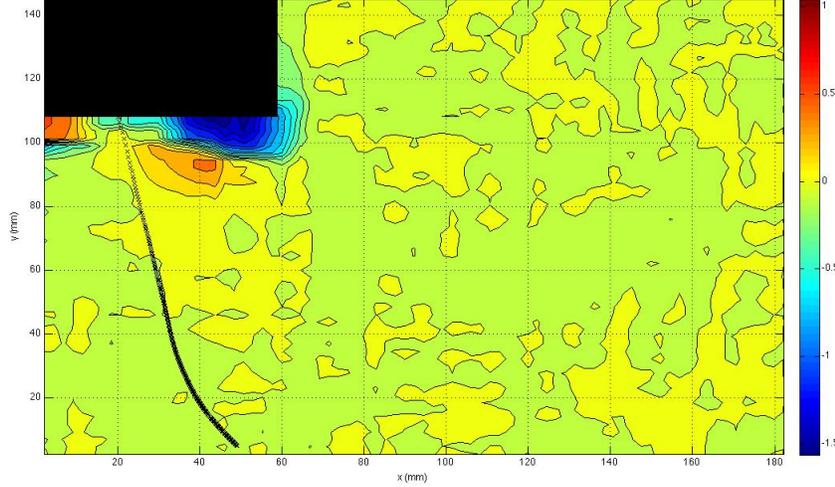


Figura 3.15: Determinación y trazo con cruces de los puntos $(x(l), y(l))$ de una línea de corriente central para calcular sobre ella la masa añadida. En el fondo, las curvas y áreas de distinto color representan el campo de vorticidad asociado al flujo en el mismo instante.

5. Mediante una interpolación lineal, se calculan los valores $u_x^t(x(l), y(l))$ y $u_y^t(x(l), y(l))$, tanto a t_i como a t_{i+1} ¹⁵. A su vez, con estos valores se estima la

y para representar a la coordenada axial z y z para representar a la coordenada azimutal φ ; la vorticidad en coordenadas cilíndricas está definida como

$$\vec{\omega} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{u} = \frac{1}{x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \hat{x} + \frac{1}{x} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \hat{y} - \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{z}.$$

Sin embargo, suponiendo simetría axial resulta que $\vec{u} = (u_x(x, y), u_y(x, y), 0)$ y por tanto

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \hat{z}.$$

Dada la definición del vector vorticidad y comparando con la ecuación (1.6), se puede reconocer que dicho vector es numéricamente el doble de la rapidez angular de un elemento del fluido respecto a sus propios ejes. Usando diferencias finitas, la norma ω del campo de vorticidad se puede estimar a partir de la información discretizada del campo de velocidades a través de la siguiente relación

$$\omega(x_m, y_n) = (u_x(x_m, y_{n+1}) - u_x(x_m, y_n)) - (u_y(x_{m+1}, y_n) - u_y(x_m, y_n))$$

y las áreas de distintos colores corresponden a regiones con un valor constante de esta cantidad.

¹⁵Es importante hacer notar que los puntos $(x(l), y(l))$ al tiempo t_{i+1} no pertenecen necesariamente a una línea de corriente, dado que el campo de velocidades no es estacionario. El cálculo de

variación temporal de la norma de la velocidad u para cada punto perteneciente a la línea de corriente en el tiempo t_i . Esto se hace aproximando la derivada parcial mediante el método de Euler; es decir, como

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{t_{i+1}} - u^{t_i}}{\Delta t}.$$

En la gráfica de la figura 3.16 se muestra el valor de la variación temporal de la norma de la velocidad como función de la longitud de arco de la línea l . En esta

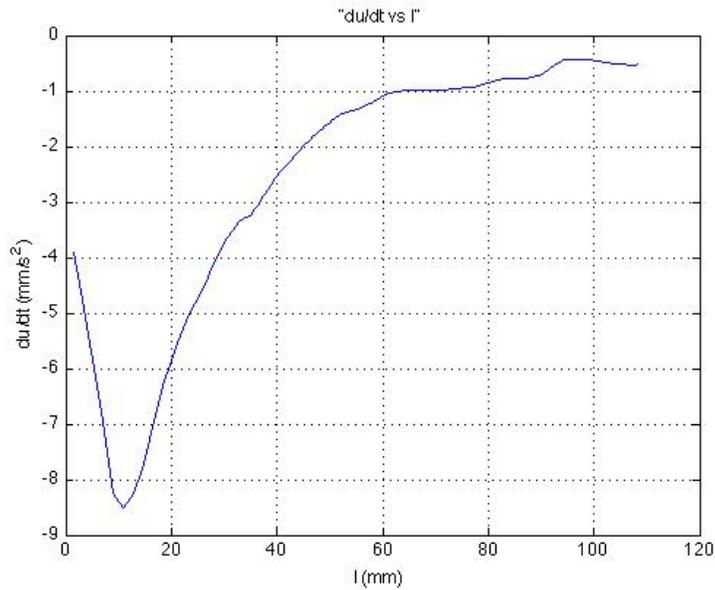


Figura 3.16: Gráfica de la variación de la norma de la velocidad $\partial u/\partial t$ en cada punto $(x(l), y(l))$ de la línea de corriente elegida, como función de la longitud de arco l de la misma línea. Esta cantidad se determina con base en la interpolación de los campos de velocidad conocidos al tiempo t_i y t_{i+1} .

gráfica se puede observar que la cantidad $\partial u/\partial t$ va disminuyendo conforme l crece; es decir, para los puntos que se van alejando cada vez más de la salida de la trompeta. Este comportamiento se asemeja al que se había supuesto para dicha cantidad, como se puede observar al compararlo con el mostrado en la gráfica 1.5, entre los valores c y d de la longitud de arco l . Ambas gráficas difieren en el signo de $\partial u/\partial t$ pero el comportamiento es parecido.

Vale la pena recalcar que el signo de esta cantidad no está relacionado con la dirección del flujo sino con el signo de la aceleración, ya que es una estimación de la variación temporal de la norma de la velocidad sobre cada punto que

los valores $u_x^t(x(l), y(l))$ y $u_y^t(x(l), y(l))$, en t_i y en t_{i+1} se calculan para evaluar el cambio temporal del campo de velocidad en los puntos que pertenecen a la línea de corriente elegida en el tiempo t_i .

pertenece a la línea de corriente en el tiempo t_i . En este caso, dado que todos los valores de esta cantidad son negativos, podría deducirse que el flujo se está desacelerando y que dicha desaceleración va siendo menor conforme se va recorriendo la línea de corriente, alejándose de la boca de la trompeta. Esta situación puede corresponder a un momento en el que pistón que produce el flujo oscilante ya está subiendo, después de haber bajado hasta su punto máximo.

Por otro lado, es importante mencionar que el comportamiento no monotónico de la cantidad $\partial u/\partial t$ entre $l = 0 \text{ mm}$ y $l \simeq 10 \text{ mm}$ en la gráfica mostrada en la figura 3.16 no es correcto. Resulta razonable esperar que el flujo en una línea central (o en líneas que no se cierran) sufra una aceleración o desaceleración que va disminuyendo monotónicamente conforme se aleja del tubo recto. Dicho comportamiento no monotónico inicial es consecuencia de haber aplicado los algoritmos de validación y filtro a los campos de velocidades ya que, como se había mencionado antes, estos suavizan el cambio abrupto entre los valores del campo fuera de la trompeta y dentro.

Para evitar este efecto, se puede elegir que la coordenada $y_{inicial}$ de la línea de corriente analizada no coincida con el límite de la trompeta. Una vez que se ha definido la coordenada $x_{inicial}$, la elección de $y_{inicial}$ puede hacerse identificando el lugar donde la velocidad sea máxima en la región cercana a la trompeta. Por ejemplo, en la figura 3.17 puede verse dicha región ampliada. El borde

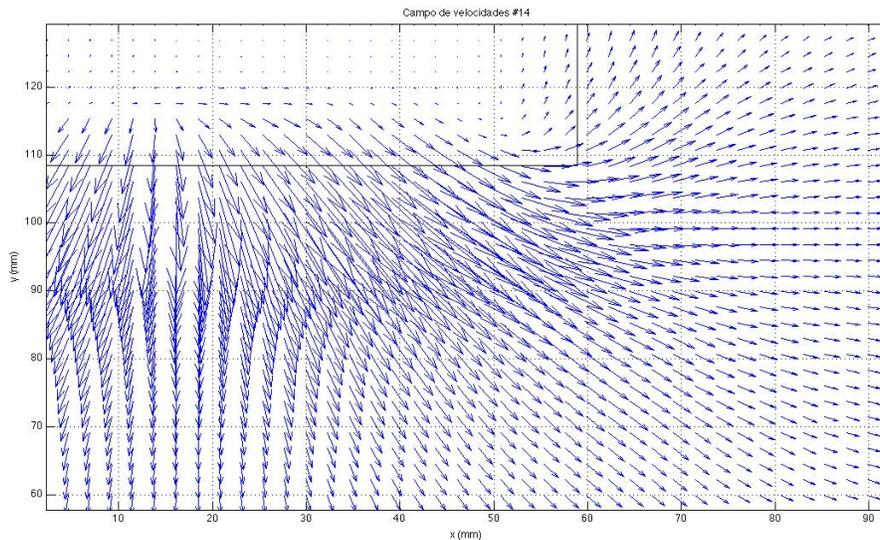


Figura 3.17: Ampliación del campo de velocidades en la boca de la trompeta para el flujo oscilante mostrado en los ejemplos anteriores. El recuadro representa el límite del difusor, por lo que la información del campo dentro no es válida.

de la trompeta está en $y = 108 \text{ mm}$ y la línea de corriente mostrada en la figura 3.15 parte de las coordenadas $x_{inicial} = 20 \text{ mm}$ y $y_{inicial} = 108 \text{ mm}$. Sin embargo, puede observarse que los vectores de velocidad en $x = 20 \text{ mm}$ aumentan su tamaño de $y \simeq 108 \text{ mm}$ a $y \simeq 100 \text{ mm}$ mientras que para y menores disminuye. Justamente esta es la región en la que los algoritmos de validación y filtro suavizan el cambio abrupto del campo entre los valores fuera y dentro de la trompeta, proporcionando información no válida. Si se elige analizar el comportamiento de la línea de corriente a partir de $x_{inicial} = 20 \text{ mm}$ y $y_{inicial} = 100 \text{ mm}$ se evita esta región y se obtiene un comportamiento monotónico para la cantidad $\partial u / \partial t$ respecto a la longitud de la curva l , como se muestra en la figura 3.18. Durante el resto del trabajo se evitó esta región,

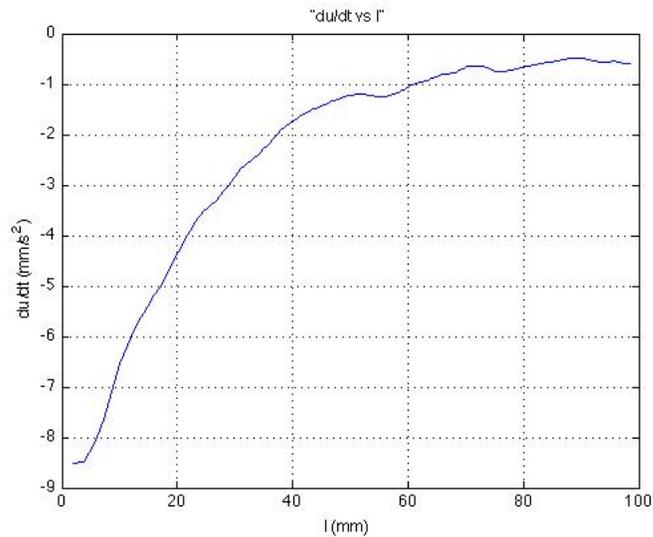


Figura 3.18: Gráfica “ $\partial u / \partial t$ vs l ” de la línea de corriente elegida, partiendo de las coordenadas $x_{inicial} = 20 \text{ mm}$ y $y_{inicial} = 100 \text{ mm}$.

eligiendo el punto inicial de las líneas de corriente analizadas con el criterio recién descrito.

6. Finalmente, se suman los valores estimados de la variación temporal de la norma de la velocidad en cada punto $(x(l), y(l))$ de la línea de corriente escogida a t_i . El resultado de esta operación es precisamente el valor de la masa añadida asociado a esa línea de corriente al tiempo $t = t_i$ y es equivalente a calcular el área bajo la curva de la curva “ $\frac{\partial u}{\partial t}$ vs l ” mostrada en la figura 3.18, evitando la región cercana a la boca de la trompeta. Para el ejemplo considerado, la masa añadida tiene un valor de $-226,7862 \text{ mm}^2/\text{s}^2$.

El protocolo permite realizar este mismo análisis, de manera simultánea, sobre varias líneas de corriente elegidas para el mismo instante t_i . Por ejemplo, para el

mismo campo (o instante) mostrado anteriormente, se puede elegir analizar cinco líneas de corriente con la finalidad de ver el comportamiento de la masa añadida en distintas zonas del flujo. En este caso resulta conveniente observar al mismo tiempo la información obtenida para todas las líneas de corriente, como se muestra en la figura 3.19.

En la gráfica de la esquina superior izquierda de esta figura se pueden observar cinco líneas de corriente trazadas sobre el campo de vorticidad. Para todas las líneas $y_{inicial} = 100 \text{ mm}$, mientras que $x_{inicial}$ va desde 15 mm hasta 55 mm para poder observar su comportamiento y el de la masa añadida desde el centro de la trompeta ($x \simeq 15 \text{ mm}$) hasta el borde ($x \simeq 60 \text{ mm}$). En la gráfica central superior se muestra un mayor número de líneas, calculadas mediante la regla de Simpson, para tener una imagen del comportamiento global del campo en el instante de tiempo observado.

En la gráfica de la esquina superior derecha se muestra el vector velocidad (en mm/s) correspondiente al punto inicial de cada línea de corriente. En el ejemplo mostrado se puede observar que el flujo sale de la trompeta y que va más rápido en el centro de la trompeta con base a la dirección y tamaño de los vectores.

En la esquina inferior izquierda se muestra la cantidad $\partial u / \partial t$ respecto a longitud de arco l de cada línea de corriente. Como todas estas curvas quedan dibujadas con el mismo color, se muestra en la gráfica inferior central la masa añadida (i.e., la integral de cada curva de la gráfica anterior) como función del valor inicial de la cantidad $\partial u / \partial t$ de cada línea de corriente y en la gráfica de la esquina inferior derecha la masa añadida como función del valor de $x_{inicial}$ para cada línea de corriente. Lo anterior con la finalidad de distinguirlas.

En la gráfica (a) de la figura 3.20 se puede observar la misma gráfica inferior izquierda de la figura anterior, pero con mayor detalle. En ella se puede apreciar que 1) los valores máximos de la longitud de arco son distintos para cada línea y 2) que alrededor de $l = 100 \text{ mm}$ el valor de la cantidad $\partial u / \partial t$ es similar y tiende a cero para todas. Lo primero se debe a que, en el ejemplo mostrado, la rutina para calcular cada línea de corriente culmina cuando se alcanza cierta distancia respecto a cualquiera de los bordes de la malla; mientras que lo segundo a que la velocidad del flujo cambia menos (si es que cambia) en las zonas más lejanas respecto a la trompeta. Considerando la masa añadida o la integral de estas curvas, la contribución a la integral para valores de la longitud de arco tales que $l > 100$ resulta nula o por lo menos similar para todas, por lo que no es necesario analizar las líneas hasta que alcancen algún borde de la malla. Como se muestra en la gráfica (b) de la misma figura 3.20, las curvas se pueden truncar en cierto valor de l de manera que la integral bajo ellas se calcule considerando el mismo valor máximo de la longitud de arco.

También vale la pena observar en cualquiera de las dos gráficas de la figura 3.20 el comportamiento no monótono de la cantidad $\partial u / \partial t$ de dos de las curvas. Con base en la información proporcionada por las gráfica central inferior y la de la esquina inferior derecha de la figura 3.19, se puede identificar que estas curvas corresponden a las líneas de corriente más cercanas al borde de la trompeta (o más lejanas respecto al centro). El comportamiento no monótono puede asociarse, viendo la gráfica de

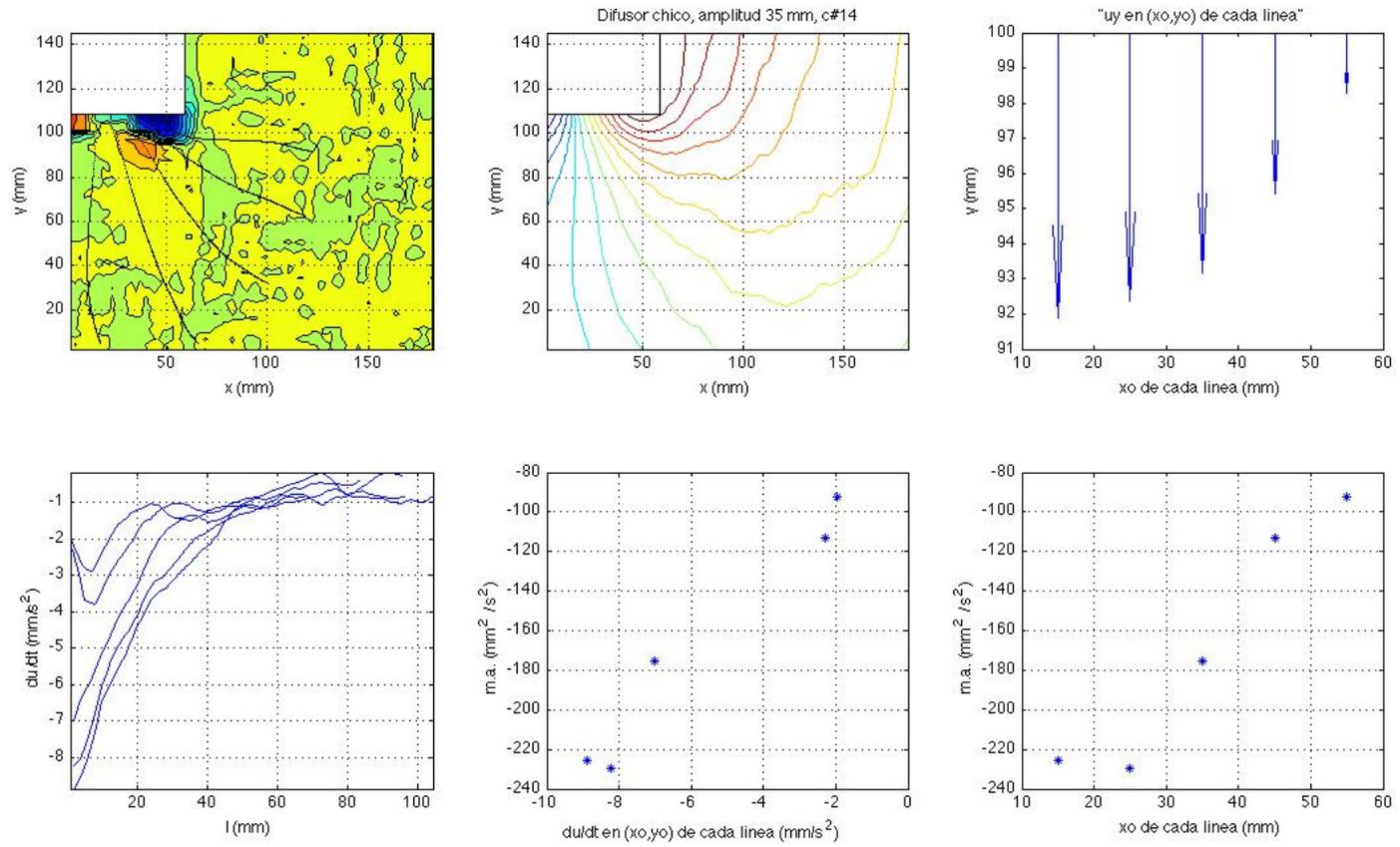


Figura 3.19: Conjunto de gráficas para mostrar el análisis hecho sobre varias líneas de corriente simultáneamente.

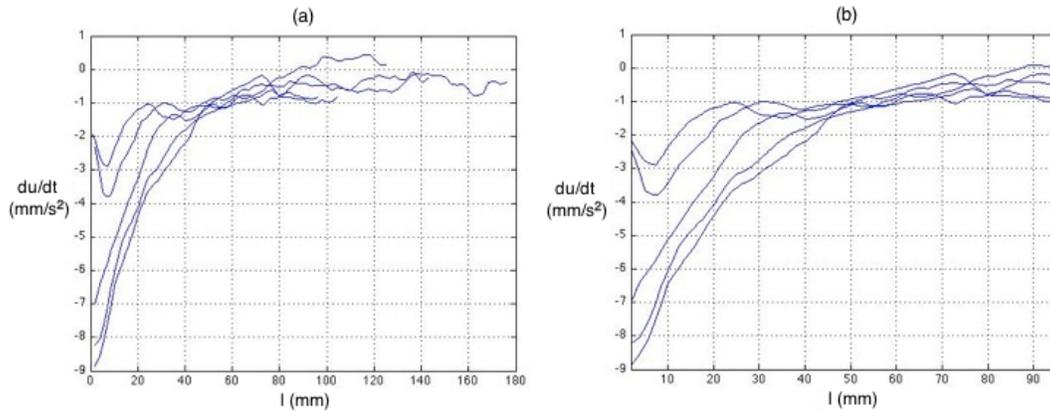


Figura 3.20: Curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para 5 líneas de corriente para el mismo campo instantáneo. En la gráfica del inciso (a) se observa que los valores máximos de la longitud de arco para cada curva son distintos porque las líneas de corriente se prolongan hasta que se acercan a cierta distancia de los límites de la malla, mientras que en la gráfica del inciso (b) se muestran las mismas curvas truncadas hasta el valor $l = 95$ mm.

la esquina superior izquierda, a que ambas atraviesan por zonas donde puede haber recirculación del flujo según lo muestra el campo de vorticidad.

Por último, para analizar el valor de la masa añadida asociado a cada flujo así como el efecto de la geometría de la boca del tubo en los propios flujos, se desarrollaron dos rutinas secundarias que utilizan parte de la información obtenida con el protocolo numérico recién descrito. Éstas se muestran en los Apéndices A.4 y A.5, con los nombres `ma_tch_central.m` y `czi_tch.m` respectivamente.

La primera de ellas permite analizar la evolución temporal de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para una línea de corriente central. Un ejemplo de este análisis se muestra en la figura 3.21. En el inciso (a) se muestran las curvas de sólo 4 instantes, entre cada uno de los cuales pasa 0.250 s; mientras que en el (b) se muestran las curvas en 180 instantes. Se puede observar un comportamiento casi periódico de la curva en su evolución temporal.

La otra rutina fue diseñada con la finalidad de analizar la influencia sobre el flujo de la presencia de un difusor en la boca del tubo. Lo anterior se puede hacer al identificar una zona a partir de la cuál el flujo prácticamente ya no oscila y analizar su relación con el difusor utilizado en la boca del tubo en distintos instantes del flujo. En la rutina esto se hace identificando en distintas líneas de corriente, generadas al mismo tiempo t , el punto sobre cada una de ellas a partir del cual la cantidad $\partial u/\partial t$ (asociado con la aceleración) tiene un valor igual o menor a cierta cota inferior. Por ejemplo, en la figura 3.22 pueden observarse en determinado instante los puntos $(x(l), y(l))$ en donde la cantidad $\partial u/\partial t$ toma un valor igual o menor a una cota inferior, $(\partial u/\partial t)_{min}$, en cada una de las cinco líneas de corriente con coordenada $y_{inicial} = 100$ mm y coordenadas $x_{inicial} = 15, 25, 35, 45$ y 55 mm respectivamente.

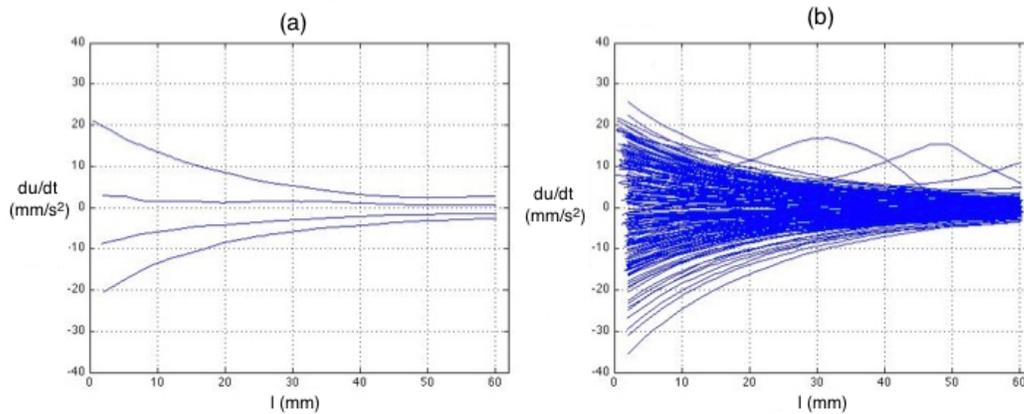


Figura 3.21: (a) Curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ” de la línea central en cuatro distintos instantes, entre cada uno de los cuales pasó $\Delta t = 0,250$ s. b) Las mismas curvas que en el inciso (a) pero para 180 distintos instantes para ver su evolución temporal.

El valor de la cota inferior se definió como el 10 % del valor máximo de la cantidad $\partial u/\partial t$ observado durante todo el flujo estudiado, ya que al analizar las curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para los flujos estudiados, se aprecia que a partir de este valor la contribución al área bajo la curva es casi nula o igual para las distintas líneas de corriente.

Una vez determinados estos puntos, puede identificarse una zona entre el difusor o la trompeta y una curva que los une a los puntos. A esta zona se le llamará en lo que sigue del trabajo zona de influencia. Lo anterior permite a su vez analizar la evolución temporal de dicha zona conforme el propio flujo va oscilando. En la figura 3.23 puede observarse la localización de estos puntos, asociados con las cinco líneas de corriente analizadas, en dieciséis instantes consecutivos, entre los que pasan 0,250 segundos.

Vale la pena aclarar que puede darse el caso en el que la cantidad $\partial u/\partial t$ nunca es menor o igual a la cota mínima definida sobre una línea de corriente particular. Para identificar estos casos, se decidió graficar un punto con coordenadas $(x_{inicial}, 0)$ con el color correspondiente para identificar cuál es la línea en cuestión. Un ejemplo de esta situación se puede observar para los puntos rojo y negro de la gráfica con título “C#0”, en la figura 3.23.

Hasta aquí la descripción de las herramientas desarrolladas para medir la masa añadida de ciertas líneas de corriente de un flujo oscilante a la salida de un tubo y analizar el comportamiento de dicha cantidad en el tiempo y en relación con la geometría de la boca del tubo. A continuación se presentan los resultados obtenidos (y el análisis correspondiente) al estudiar un flujo de frecuencia de oscilación constante, a la salida del tubo, bajo condiciones distintas de amplitud y de geometría en su boca.

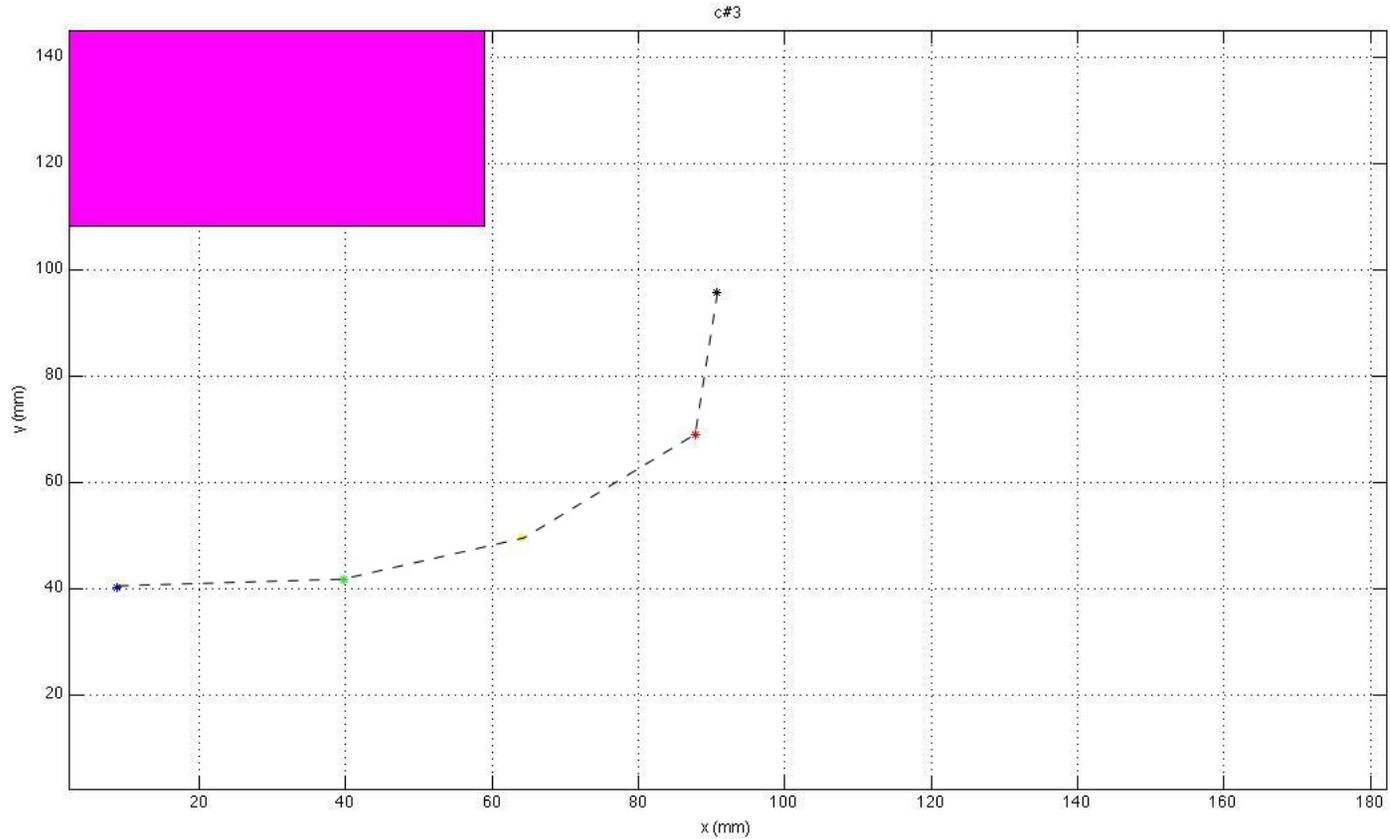


Figura 3.22: Puntos $(x(l), y(l))$ en cada línea de corriente, en un instante dado, a partir de los cuales el valor de $\partial u / \partial t$ es menor o igual a una cota inferior. En este caso tiene un valor de $1,6353 \text{ mm/s}^2$. El punto azul corresponde a la línea cuya $x_{inicial} = 15 \text{ mm}$ (el centro del tubo), el verde a la línea cuya $x_{inicial} = 25 \text{ mm}$, el amarillo a la línea cuya $x_{inicial} = 35 \text{ mm}$, el rojo a la línea cuya $x_{inicial} = 45 \text{ mm}$ y el negro a la línea cuya $x_{inicial} = 55 \text{ mm}$ (en el borde del difusor). El flujo analizado en este ejemplo se obtuvo con el difusor chico en la boca del tubo, una frecuencia de oscilación de 0.68 Hz y una amplitud de 35 mm .

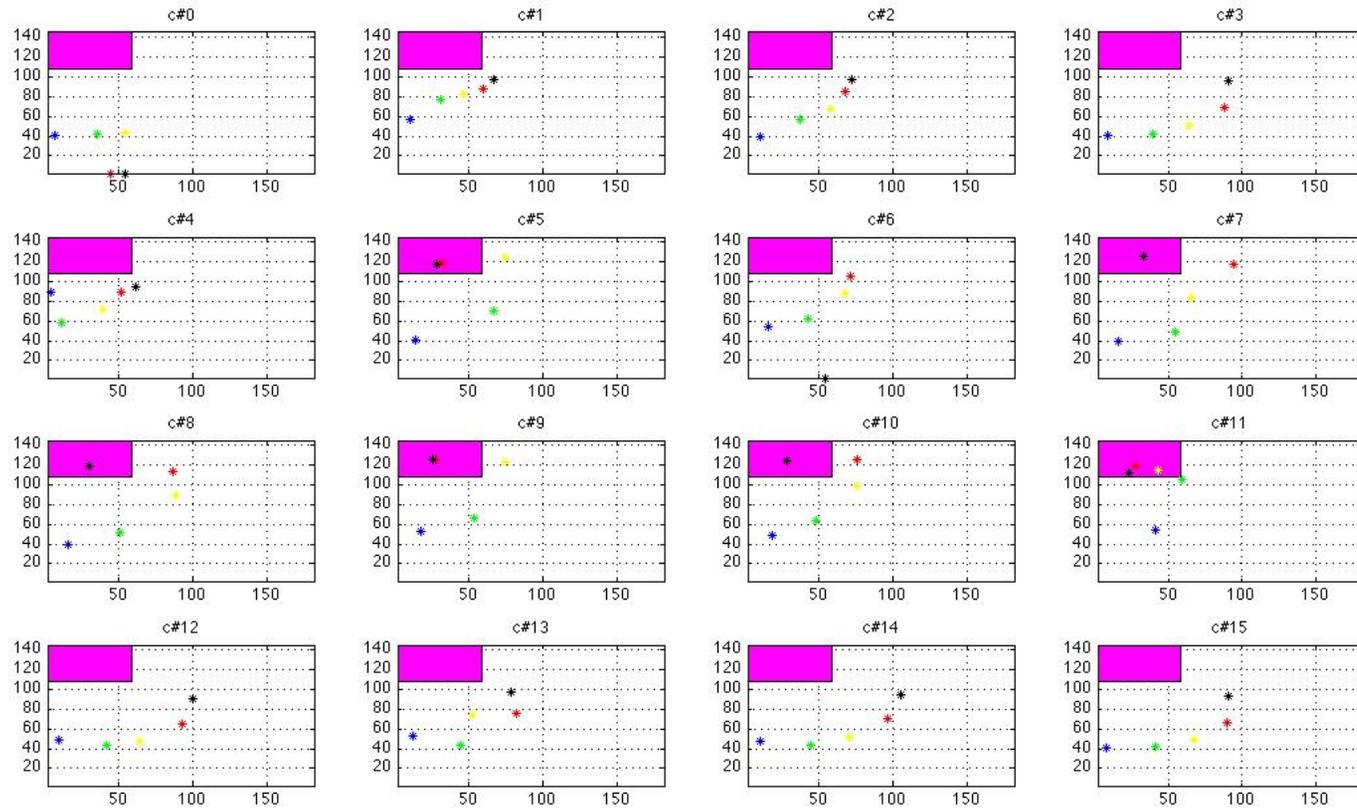


Figura 3.23: Evolución de zona de influencia en 16 instantes consecutivos, entre los que pasan 0.250 s, para el tubo con el difusor o trompeta chica en la boca, oscilando con una frecuencia de 0.68 Hz y una amplitud de 35 mm. El título de cada gráfica en la figura hace referencia al número de campo de velocidades asociado con cada uno de los instantes, numerados consecutivamente.

4

Resultados y análisis

4.1. Tiempos de decaimiento de la columna al oscilar libremente en tubos con y sin difusor

Una vez que se construyeron los tubos con y sin difusor en la boca, se diseñó un sistema para acoplarlos al dispositivo experimental y poderlos intercambiar en función de las mediciones a realizar. Lo primero que se hizo, antes de reproducir flujos oscilantes, fue medir el tiempo en que una columna de agua de misma altura dentro de ellos dejaba de oscilar al no forzarla. Lo anterior se hizo para verificar (en una primera aproximación) uno de los resultados obtenidos en trabajos anteriores; esto es, que al introducir un difusor en la boca del tubo resonante el desempeño de la bomba mejora.

Para medir estos tiempos de decaimiento se llenó la pecera con un nivel de agua suficiente para que cualquiera de los tubos tuviera dentro de él una columna de 10 cm en el estado de equilibrio. En el caso de los tubos con difusor en la boca, esta altura se consideró a partir del lugar donde inicia el perfil del difusor con el propósito de iniciar con una columna de altura similar dentro del tubo en cualquiera de los tres casos. Posteriormente, se elevó la columna de agua otros 10 cm sobre el nivel de equilibrio dentro de los tubos y se soltó para que oscilara libremente. En ausencia de un mecanismo de forzamiento, la altura de la columna de agua fue reduciéndose en cada oscilación hasta dejar de hacerlo en todos los casos. La hipótesis era que debía observarse un mayor tiempo de decaimiento para ambos tubos con difusor en la boca en comparación con el tubo sin él, dado que en este último debe haber una mayor pérdida de energía en cada oscilación.

El tiempo de decaimiento se definió considerando el instante desde el que se soltó la columna de agua para oscilar libremente hasta que dicha columna alcanzó una altura menor o igual a 1 mm sobre el nivel de equilibrio. Para medir este intervalo de tiempo se filmaron digitalmente tres decaimientos de la oscilación para cada tubo; i.e., para el tubo con difusor pequeño en la boca, con el difusor grande en la boca y sin difusor. A partir de cada una de las películas filmadas se generó una secuencia de 30 cuadros fijos por segundo correspondiente a cada movimiento analizado. Obser-

vando dichas secuencias de cuadros fijos se pudo identificar con mayor cuidado tanto el instante en el que se libera la columna como el instante en el que alcanza la altura mínima escogida y, por tanto, el intervalo de tiempo entre uno y otro instante.

Para comparar entre sí los tiempo de decaimiento de estos tres tubos, se calculó el promedio de los tres intervalos de tiempo medidos para cada tubo y se asoció un valor de incertidumbre correspondiente a la diferencia entre las medidas más distintas de cada movimiento analizado. Los resultados obtenidos son:

- Para el tubo sin difusor $t_{decaimiento} = 11,20 \text{ s} \pm 3,07 \text{ s}$
- Para el tubo con el difusor pequeño en la boca $t_{decaimiento} = 14,98 \text{ s} \pm 1,27 \text{ s}$
- Para el tubo con el difusor grande en la boca $t_{decaimiento} = 15,95 \text{ s} \pm 1,13 \text{ s}$

Pese a ser una medición burda y considerando los rangos de incertidumbre obtenidos, se puede observar la confirmación de la hipótesis supuesta: en las trompetas con difusor el tiempo de decaimiento es mayor en comparación con el tubo sin difusor. Lo anterior sugiere -como se esperaba- que el difusor contribuye a disminuir las pérdidas de energía. Sin embargo, con las mediciones realizadas no se puede concluir que hay una diferencia al dejar oscilar el flujo libremente en los tubos con el difusor pequeño y grande en la boca.

4.2. Comportamiento real de la masa añadida

Después de analizar el comportamiento de una columna oscilando libremente en cada uno de los tres tubos en cuestión y de haber encontrado un comportamiento consistente tanto con lo observado en trabajos previos como lo esperado al plantear el problema; se reprodujeron flujos oscilantes bajo el forzamiento de un pistón. Como se ha mencionado a lo largo del trabajo, lo anterior se hizo con la finalidad de estudiar el comportamiento del flujo a la salida de la boca de los tubos; en particular a través de la medición y análisis de la masa añadida asociada a distintos flujos oscilantes en tubos con y sin difusor. La frecuencia de oscilación de los flujos se mantuvo constante, con un valor igual 0.68 Hz, y se consideraron cuatro distintas amplitudes; a saber, $A = 35, 50, 65$ y 85 mm .

Cada uno de los cuatro flujos se generó en el tubo con el difusor pequeño, en el tubo con el difusor grande y en el tubo sin difusor en la boca. Lo anterior se hizo utilizando de manera simultánea el sistema “Flowmap” y el software “FlowManager” para aplicar la técnica PIV a los flujos observados y obtener los campos de velocidades instantáneos. Como ya se mencionó en la sección 3.2.1, para cada flujo y en cada tubo se obtuvo una secuencia de 180 campos instantáneos entre los cuales pasó un intervalo de tiempo de $\Delta t_r = 0.250 \text{ s}$ (i.e., aproximadamente un cuarto del periodo de oscilación).

Con base en la argumentación presentada en la sección 3.2.1, el intervalo de tiempo entre pulsos Δt_p se eligió en cada caso de manera que las partículas no

recorrieran más de una tercera parte de la longitud definida para las celdas de interrogación. Para calcularlo en cada caso, se usó la relación

$$\Delta t_r = d_{max}/u_{max},$$

donde d_{max} es la tercera parte de la longitud de la celda en mm y u_{max} es la velocidad máxima posible en el flujo en cuestión. Para obtener d_{max} se consideró la tercera parte de la longitud escogida de las celdas de interrogación en pixeles ($L_{celda} = 32$ pixeles) y la relación entre pixeles a milímetros. La velocidad máxima u_{max} se estimó a partir del producto de la amplitud y la frecuencia del flujo en cuestión, dado que la columna de agua dentro del tubo oscila de manera similar a como lo haría un cuerpo rígido y es válido suponer que dicho valor es una cota máxima para la norma o la componente vertical de la velocidad del flujo antes de entrar o después de salir del tubo con o sin trompeta. Vale la pena mencionar que tanto d_{max} como u_{max} son cantidades que dependen de las condiciones del flujo (amplitud y frecuencia de oscilación) como de la calibración de la medición (la relación entre pixeles y mm) relacionada a su vez con la posición de la cámara respecto al tubo en la pecera; por lo que la elección del valor de Δt_p como parámetro del sistema “Flowmap” y del software “FlowManager” fue distinta para cada tubo y para cada amplitud explorada.

Una vez que se obtuvieron las secuencias de 180 campos instantáneos con los vectores de velocidad en crudo para cada tubo y para cada una de las cuatro amplitudes mencionadas, se aplicaron los algoritmos de validación, filtro y refinamiento mencionados también en la sección 3.2.1 con la finalidad de obtener campos instantáneos más regulares y continuos. A continuación se muestra una secuencia de cuatro campos instantáneos para cada uno de los tubos y determinada amplitud.

Sobre las secuencias de campos validados y filtrados se aplicó el protocolo numérico descrito en la sección 3.3 para calcular la masa añadida asociada a distintas líneas de corriente y en distintos instantes.

Antes de analizar la evolución temporal de la masa añadida y su relación con la geometría de la boca del tubo, en las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 se muestran -a manera de ejemplo- los resultados obtenidos al aplicar el protocolo para un flujo de misma amplitud y frecuencia en los tres tubos, en determinados instantes de la oscilación. Al no contar con un mecanismo o “gatillo” para iniciar la adquisición de datos para cada flujo en un mismo momento de la oscilación, resulta imposible determinar con precisión el instante respecto al periodo de la oscilación en el que se obtiene cada campo. Por ello y con la finalidad de mostrar campos instantáneos similares respecto al periodo de oscilación, los ejemplos mostrados en estas figuras corresponden al flujo con 35 mm de amplitud y 0.68 Hz en los tres tubos (con y sin difusor) y a instantes en los que el flujo sale del tubo con la velocidad máxima. Lo anterior se puede identificar al observar la gráfica superior derecha de cada figura, en donde se muestra la componente vertical de la velocidad del flujo en el punto en el que se comienza a calcular cada línea de corriente (bajo la boca del tubo), de tal manera

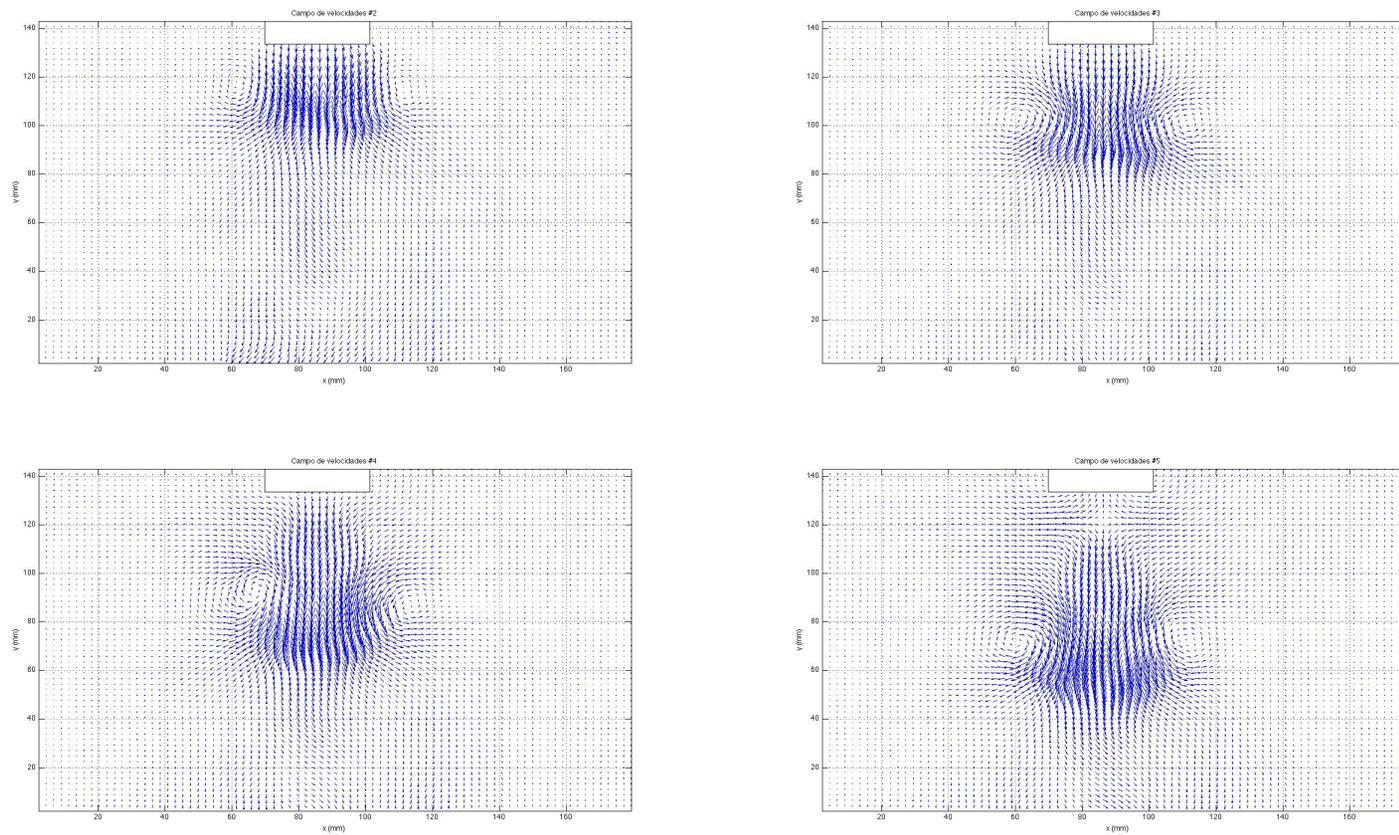


Figura 4.1: Secuencia de cuatro campos para un flujo oscilante de frecuencia 0.68 Hz y amplitud de 35 mm en el tubo sin difusor, con intervalos de tiempo de 0.250 s entre cada uno. Se puede observar la formación de dos vórtices a la salida del tubo que se desprenden casi simultáneamente y viajan hacia abajo. El vector más grande representa una velocidad con una magnitud aproximada de 30 mm/s.

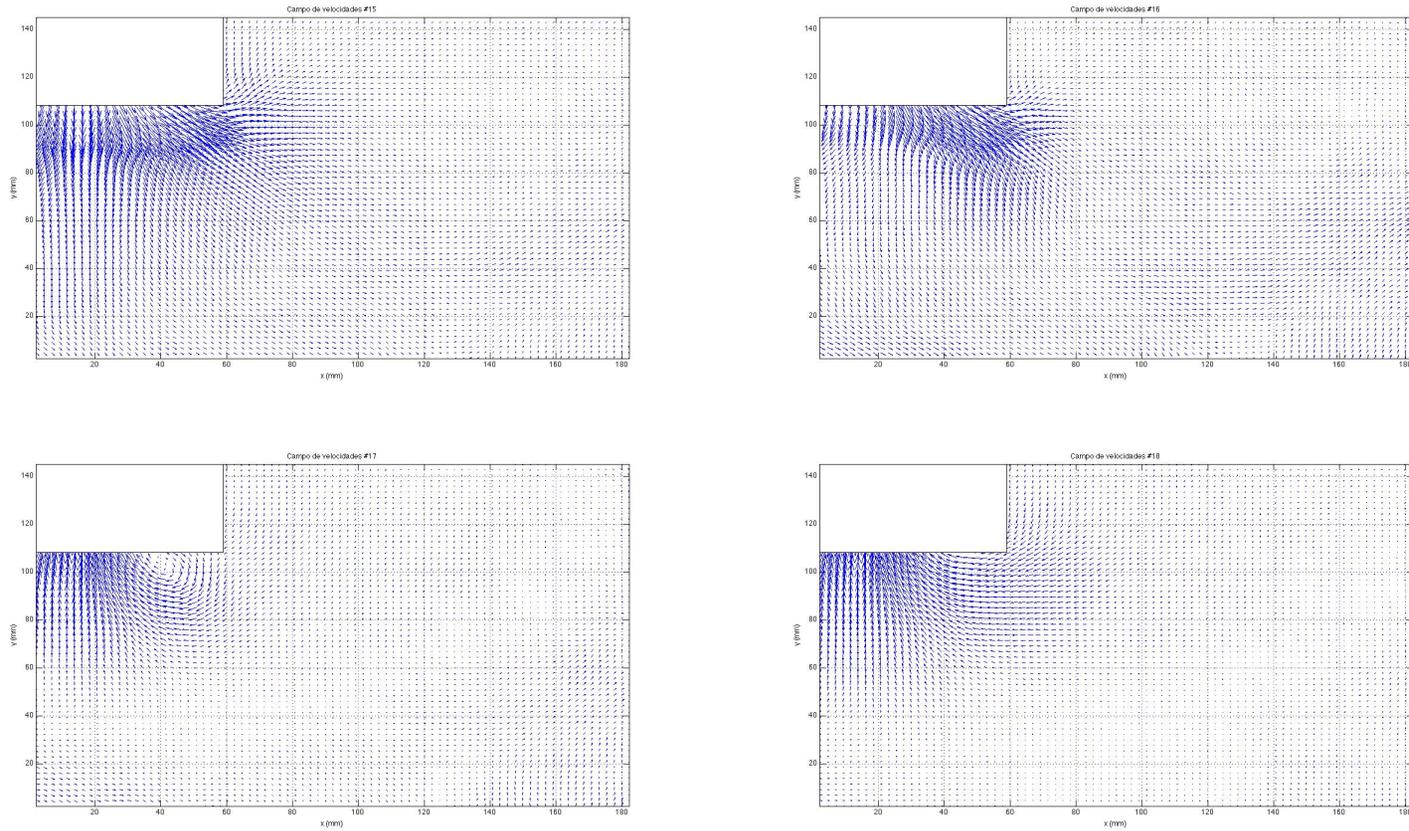


Figura 4.2: Secuencia de cuatro campos para un flujo oscilante de frecuencia 0.68 Hz y amplitud de 35 mm en el tubo con el difusor chico, con intervalos de tiempo de 0.250 s entre cada uno. Se puede observar que, en comparación con un flujo similar en el tubo sin difusor, no se desprende ningún vórtice. El vector más grande representa una velocidad con una magnitud aproximada de 5 mm/s .

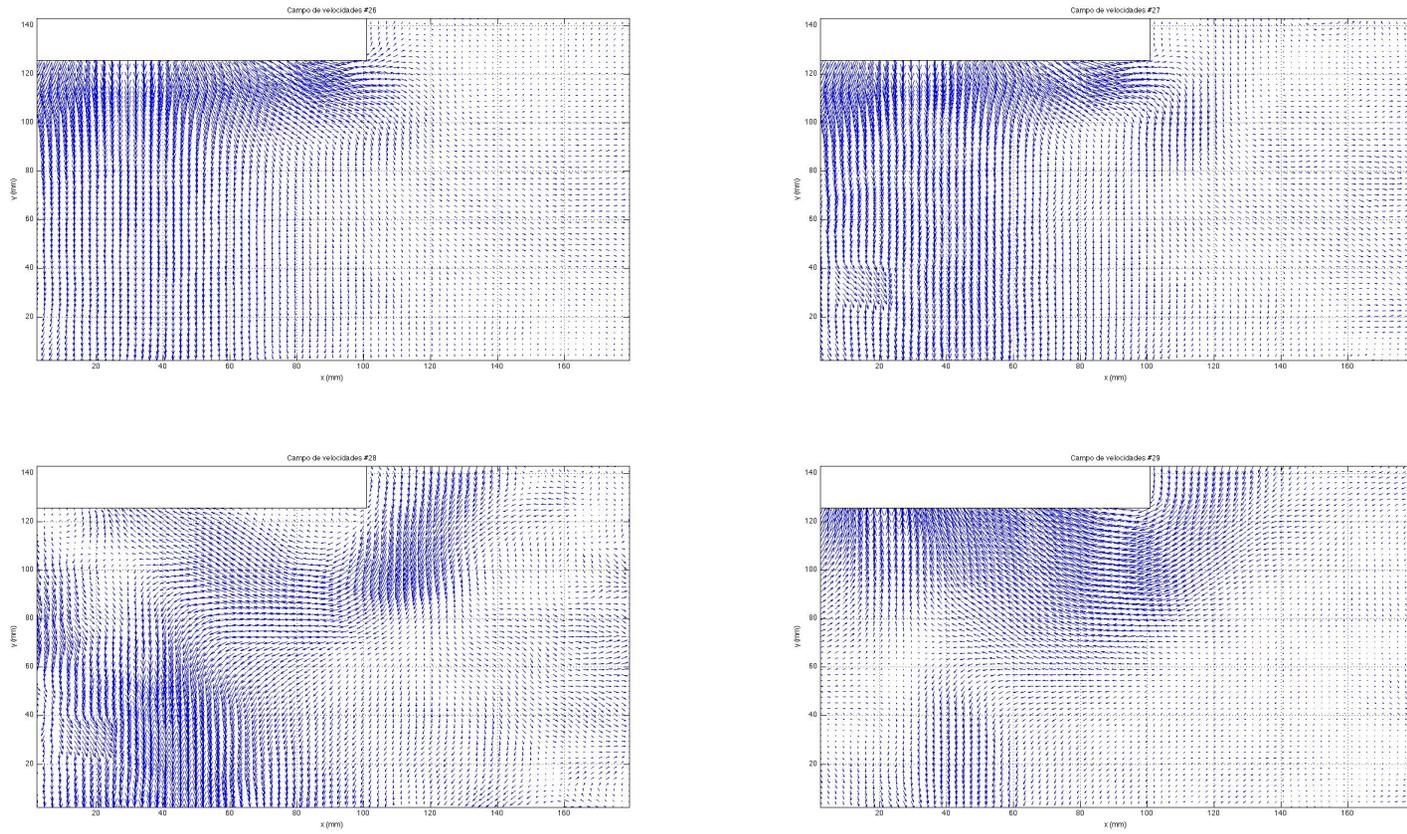


Figura 4.3: Secuencia de cuatro campos para un flujo oscilante de frecuencia 0.68 Hz y amplitud de 35 mm en el tubo con el difusor grande, con intervalos de tiempo de 0.250 s entre cada uno. Se puede observar que tampoco hay desprendimiento de vórtices y que los que se forman en el extremo del difusor son más pequeños comparados con los que se forman en esta misma zona para el tubo con el difusor chico. El vector más grande representa una velocidad con una magnitud aproximada de 3 mm/s.

que en el instante mostrado las cinco componentes alcanzan su valor máximo cuando se compara con los otros instantes de la secuencia temporal.

Comparando los tres conjuntos de gráficas pueden observarse grandes diferencias entre lo que sucede entre el tubo sin el difusor respecto a los dos tubos con difusores. Lo primero que resalta es la diferencia de un orden de magnitud entre los valores máximos de la componente vertical de la velocidad a la salida de los tubos así como un comportamiento y valores completamente diferentes para la cantidad $\partial u/\partial t$ en función de la longitud de arco l de cada línea de corriente. Para el tubo sin difusor esta cantidad no tiene un comportamiento monotónico dado que el flujo se desacelera y acelera de manera continua debido a la formación de vórtices. En cambio, en los tubos con difusor en la boca el comportamiento -al menos en algunos instantes- resulta monotónico, como se supuso inicialmente. Por otro lado, resulta también notable la poca diferencia en estas cantidades (y en estos instantes) para el flujo en el tubo con el difusor pequeño y el difusor grande.

Como se ha mencionado a lo largo del trabajo, los propósitos principales de éste son i) probar las hipótesis formuladas sobre la masa añadida en el modelo del flujo en un SIBEO al compararlas con el comportamiento real y ii) explorar las diferencias entre el comportamiento de flujo con o sin difusor en la boca del tubo, en particular en relación con la masa añadida. Para ello, en concreto, se analizaron los siguientes aspectos: a) la evolución temporal de un segmento de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para la línea central de corriente, para las cuatro amplitudes, en cada uno de los tres tubos, b) la evolución temporal de la masa añadida (la integral de un segmento de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ”) asociada a una línea de corriente central así como de la masa añadida promedio asociada a cinco líneas de corriente, para las cuatro amplitudes, en cada uno de los tres tubos; y c) la relación entre el comportamiento de la masa añadida en relación con la geometría a través de la inspección de la “zona de influencia” en algunos instantes. En las siguientes subsecciones se muestran los resultados de estos tres análisis.

4.2.1. Evolución temporal de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para una línea central de corriente

En la sección 1.3 se describió el modelo teórico del flujo en un SIBEO considerado por Czitrom *et al.* En él se hace la suposición de que la cantidad $\partial u/\partial t$ se comporta como se muestra de nuevo en la gráfica de la figura 4.7.

Como ya se había mencionado, en dicha gráfica se observa el comportamiento supuesto de la cantidad $\partial u/\partial t$ como función de la parametrización l de una línea de corriente central Γ y en un instante particular del flujo. En la región de la parametrización de la línea que va desde a hasta c , la variación de la norma de la velocidad es igual a \dot{z} ya que $z = z(t)$ representa la variación de la altura de la superficie libre media del agua dentro del conducto y dado que el fluido se mueve en esa región aproximadamente como lo haría un cuerpo rígido. El largo de esta región es igual a $z + L$, ya que L es la altura media de la columna de agua que oscila dentro del tubo

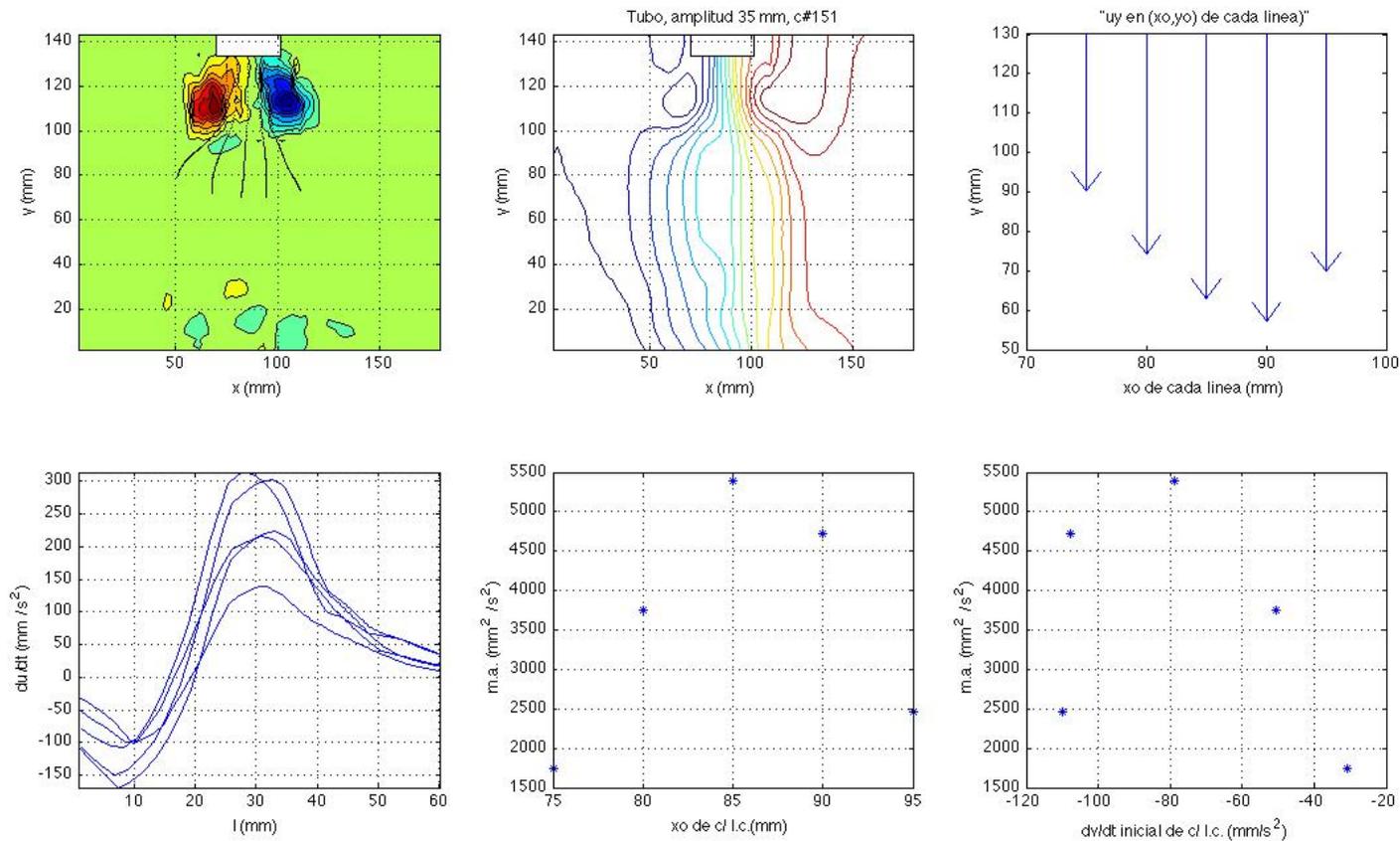


Figura 4.4: Resultados obtenidos al aplicar el protocolo a un campo instantáneo del flujo oscilante de 35 mm de amplitud y 0.68 Hz de frecuencia en el tubo sin difusor. En la gráfica superior izquierda se muestran, sobre el campo de vorticidad, cinco líneas de corriente de misma longitud de arco calculadas a partir del campo de velocidades obtenido con el PIV y al aplicar el método de Runge Kutta. En la gráfica central superior se muestra un mayor número de líneas, calculadas con la regla de Simpson para ver el comportamiento global del campo analizado. En la gráfica de la esquina superior derecha se muestra el vector componente vertical de la velocidad en el punto inicial de cada línea de corriente; en este caso la magnitud del vector más grande es igual a 72,94 mm/s. En la esquina inferior izquierda se muestra la cantidad $\partial u/\partial t$ respecto a longitud de arco l de cada línea de corriente. Como todas estas curvas quedan dibujadas con el mismo color, se muestra en la gráfica inferior central la masa añadida (i.e., la integral de cada curva de la gráfica anterior) como función del valor inicial de la cantidad $\partial u/\partial t$ de cada línea de corriente y en la gráfica de la esquina inferior izquierda la masa añadida como función del valor de $x_{inicial}$ para cada línea de corriente.

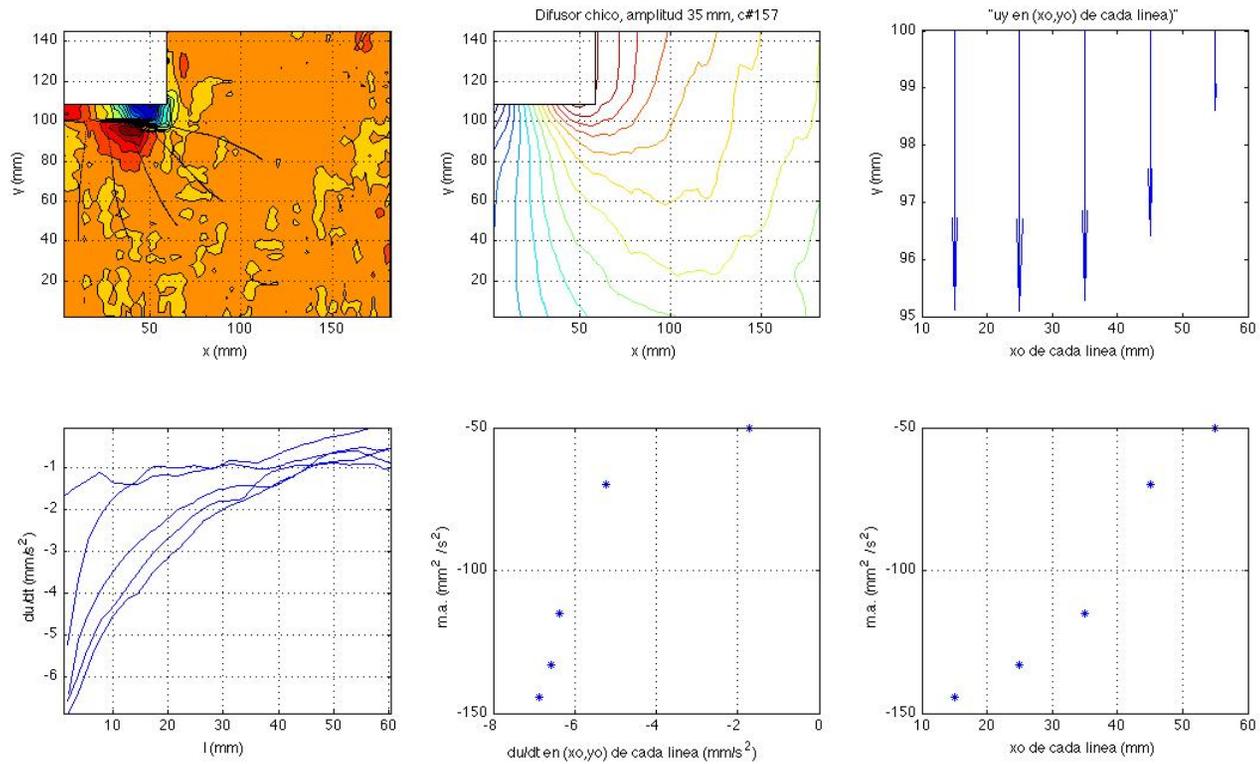


Figura 4.5: Resultados obtenidos con el protocolo numérico respecto a un campo instantáneo del flujo oscilante de 35 mm de amplitud y 0.68 Hz de frecuencia en el tubo con el difusor pequeño en la boca. Para este flujo, la magnitud del vector más grande en la gráfica superior derecha es igual a 4,91 mm/s.

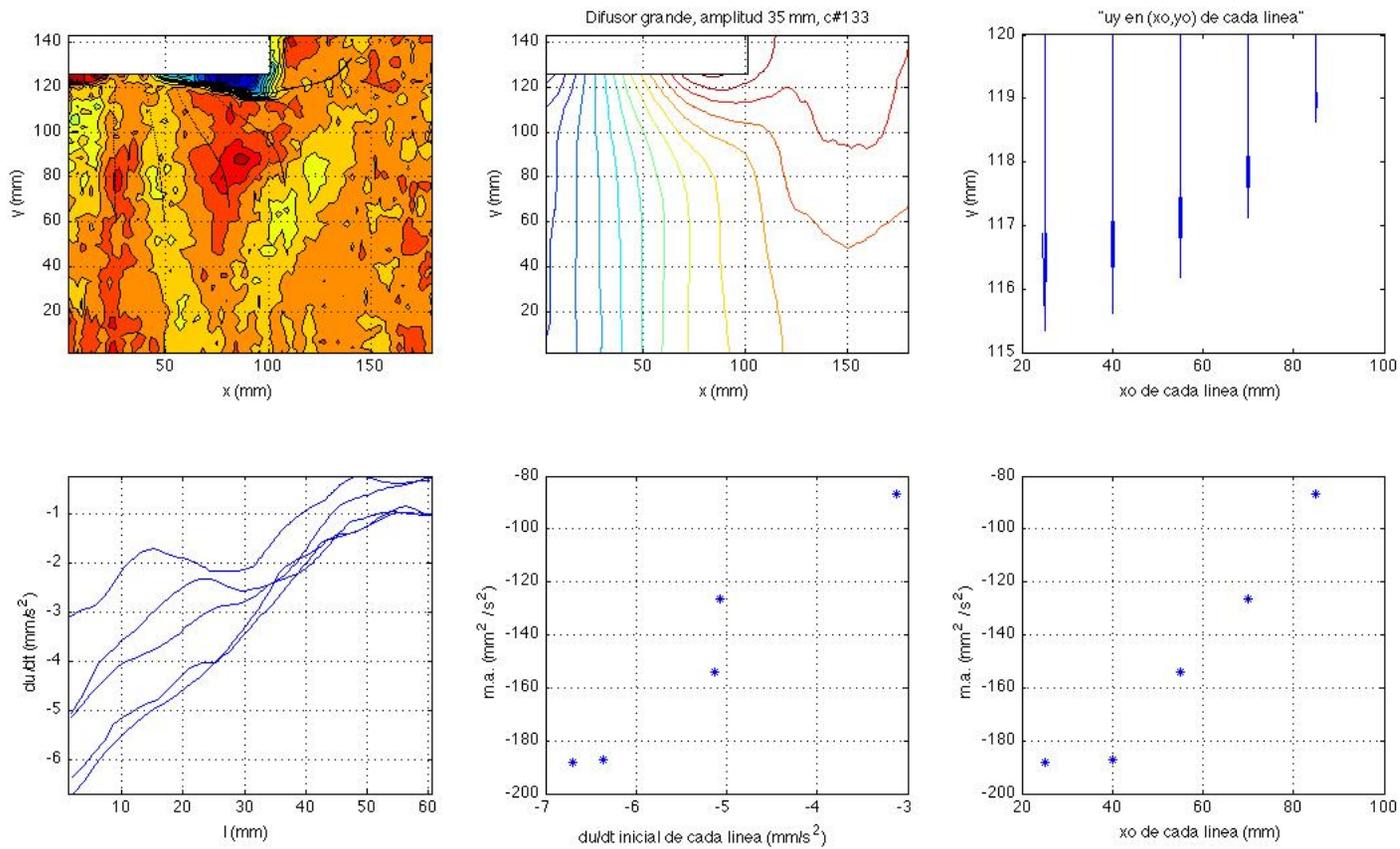


Figura 4.6: Resultados obtenidos con el protocolo numérico respecto a un campo instantáneo del flujo oscilante de 35 mm de amplitud y 0.68 Hz de frecuencia en el tubo con el difusor grande en la boca. Para este flujo, la magnitud del vector más grande en la gráfica superior derecha es igual a 4,66 mm/s .

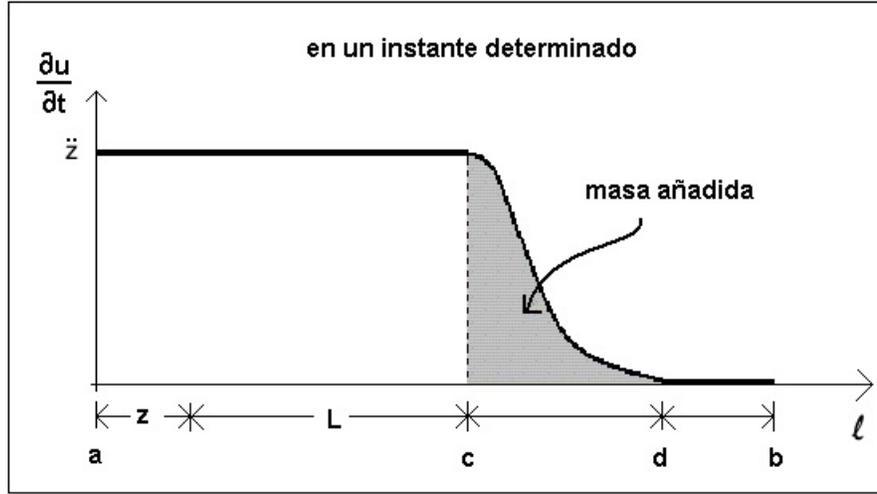


Figura 4.7: Variación temporal de la norma de la velocidad a lo largo de una línea de corriente central en el conducto resonante de un SIBEO .

y que $z = z(t)$ es una función periódica que representa el aumento o la disminución de la altura L por la oscilación de la columna. En la región que va de c a d , y que corresponde al final del conducto, se hace la suposición de que los efectos del flujo oscilante deben notarse aún pero la velocidad -y por tanto, su variación temporal- debe ir disminuyendo monótonicamente. A partir de d y hasta b los cambios en la velocidad deben anularse por completo ya que no se considera el movimiento de la superficie marina. El cálculo del área bajo toda esta curva es igual a

$$\int_{\bar{x}(a)}^{\bar{x}(b)} \frac{\partial u}{\partial t} dl = \int_{\bar{x}(a)}^{\bar{x}(c)} \frac{\partial u}{\partial t} dl + \int_{\bar{x}(c)}^{\bar{x}(d)} \frac{\partial u}{\partial t} dl + \int_{\bar{x}(d)}^{\bar{x}(b)} \frac{\partial u}{\partial t} dl \simeq (z + L)\ddot{z} + \int_{\bar{x}(c)}^{\bar{x}(d)} \frac{\partial u}{\partial t} dl + 0.$$

Al no conocer la forma funcional del campo, la integral o el área bajo la curva de c a d no se puede calcular de manera explícita. Sin embargo, se sabe que está relacionada con los efectos de borde en la boca del conducto; es decir, con el movimiento de una cierta cantidad de agua a partir de la región del conducto que ya no es recta y que se mueve por efecto de la oscilación del agua dentro del conducto. Por ello se le conoce como “masa añadida”.

Como ya se había mencionado, Czitrom *et al* asumieron en [5] y [7] que dicha integral es proporcional a una fracción de la longitud del tubo; es decir,

$$\int_{\bar{x}(c)}^{\bar{x}(d)} \frac{\partial u}{\partial t} dl = \epsilon L \ddot{z}, \quad (4.1)$$

donde L es la longitud del tubo y ϵ es una constante. Esta suposición implica considerar que la masa de fluido que se mueve fuera del tubo por efectos del flujo oscilante es equivalente a cierta cantidad de masa extra que oscilaría dentro del tubo si éste

se extendiera por una fracción determinada.

Considérese, para los fines de análisis del presente capítulo, que la masa añadida satisface la equivalencia

$$\int_{\bar{x}(c)}^{\bar{x}(d)} \frac{\partial u}{\partial t} dl = \beta \dot{z}, \quad (4.2)$$

donde β es una constante (con unidades de longitud). Esto es, que la masa añadida satisface la relación de proporcionalidad con \dot{z} pero no necesariamente escala con la longitud del tubo o conducto.

Dado que el flujo es oscilante, si la forma funcional de la cantidad $\partial u/\partial t$ mantiene un comportamiento monótonico entre los puntos c y d de la parametrización l , se debería observar una evolución temporal de dicha curva como la que se muestra en la gráfica de la figura 4.8.

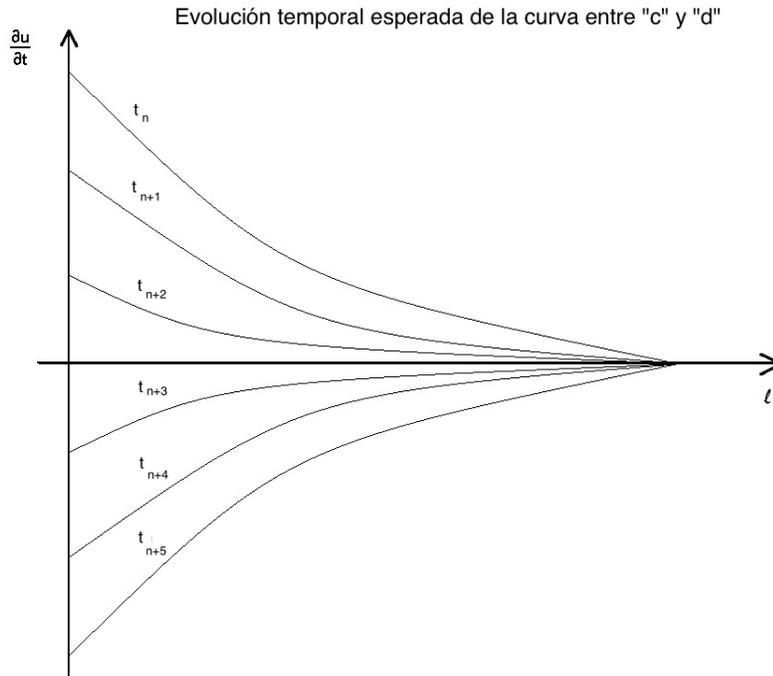


Figura 4.8: Evolución temporal esperada para la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ” considerando que el flujo es oscilante y que mantiene un comportamiento monótonico.

Para probar las hipótesis mencionadas en los párrafos anteriores, se analizó en primer lugar la evolución temporal de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para los cuatro flujos de distinta amplitud en los tres tubos. Las gráficas correspondientes se muestran en las figuras 4.9, 4.10, 4.11.

Lo primero que resalta al comparar estos tres conjuntos de gráficas es la diferencia entre el comportamiento de las curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para el tubo con y sin difusor

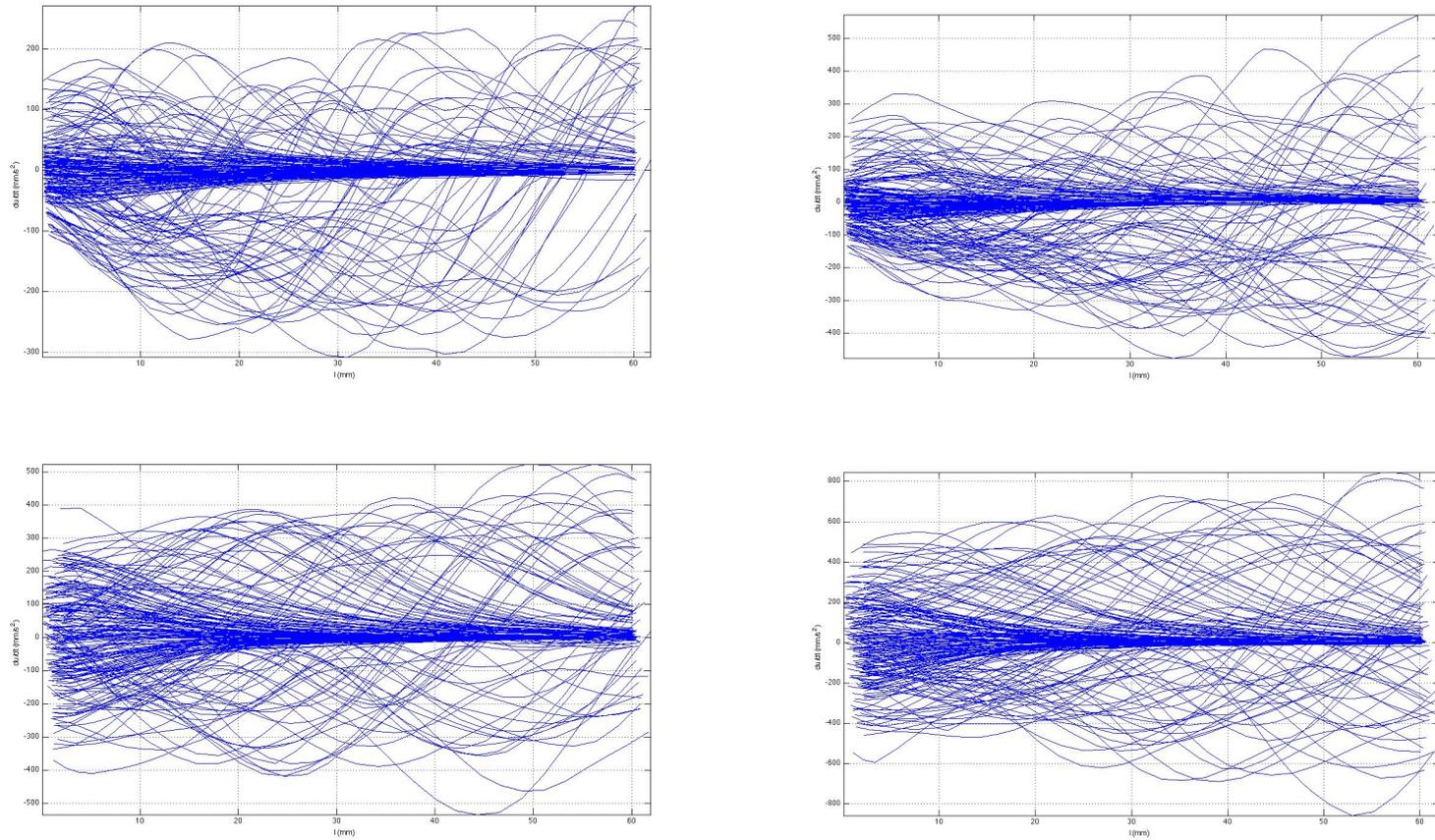


Figura 4.9: Evolución temporal para la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para el flujo oscilante en el tubo sin difusor en la boca, con frecuencia de 0.68 Hz y amplitud de 35 mm para la gráfica superior izquierda, de 50 mm para la gráfica superior derecha, de 65 mm para la gráfica inferior izquierda y de 85 mm para la gráfica inferior derecha. Para cada amplitud, se muestra la curva correspondiente a 178 instantes distintos, entre los que pasan 0.250 s.

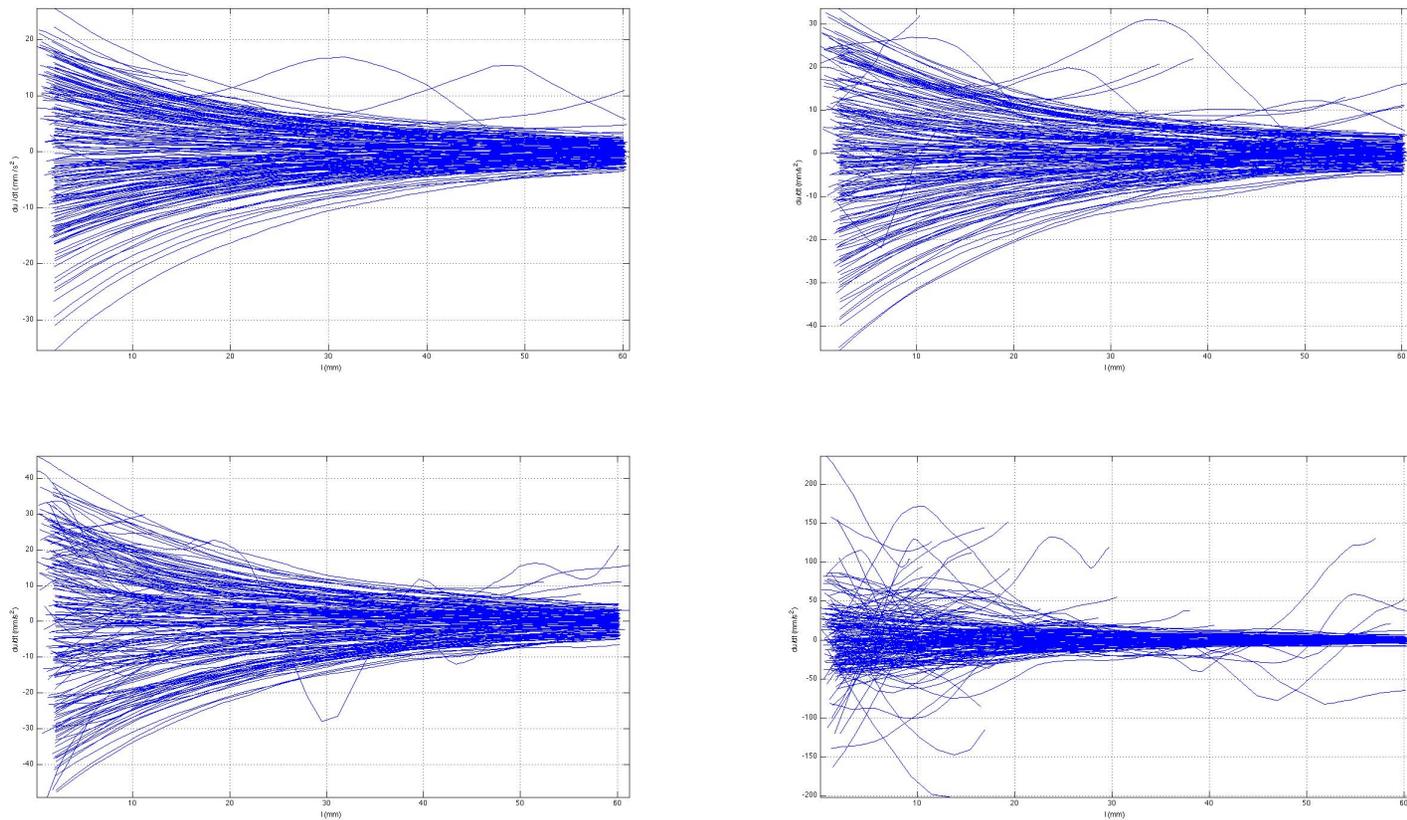


Figura 4.10: Evolución temporal para la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para el flujo oscilante en el tubo con el difusor chico en la boca, con frecuencia de 0.68 Hz y amplitud de 35 mm para la gráfica superior izquierda, de 50 mm para la gráfica superior derecha, de 65 mm para la gráfica inferior izquierda y de 85 mm para la gráfica inferior derecha. Para cada amplitud, se muestra la curva correspondiente a 178 instantes distintos, entre los que pasan 0.250 s.

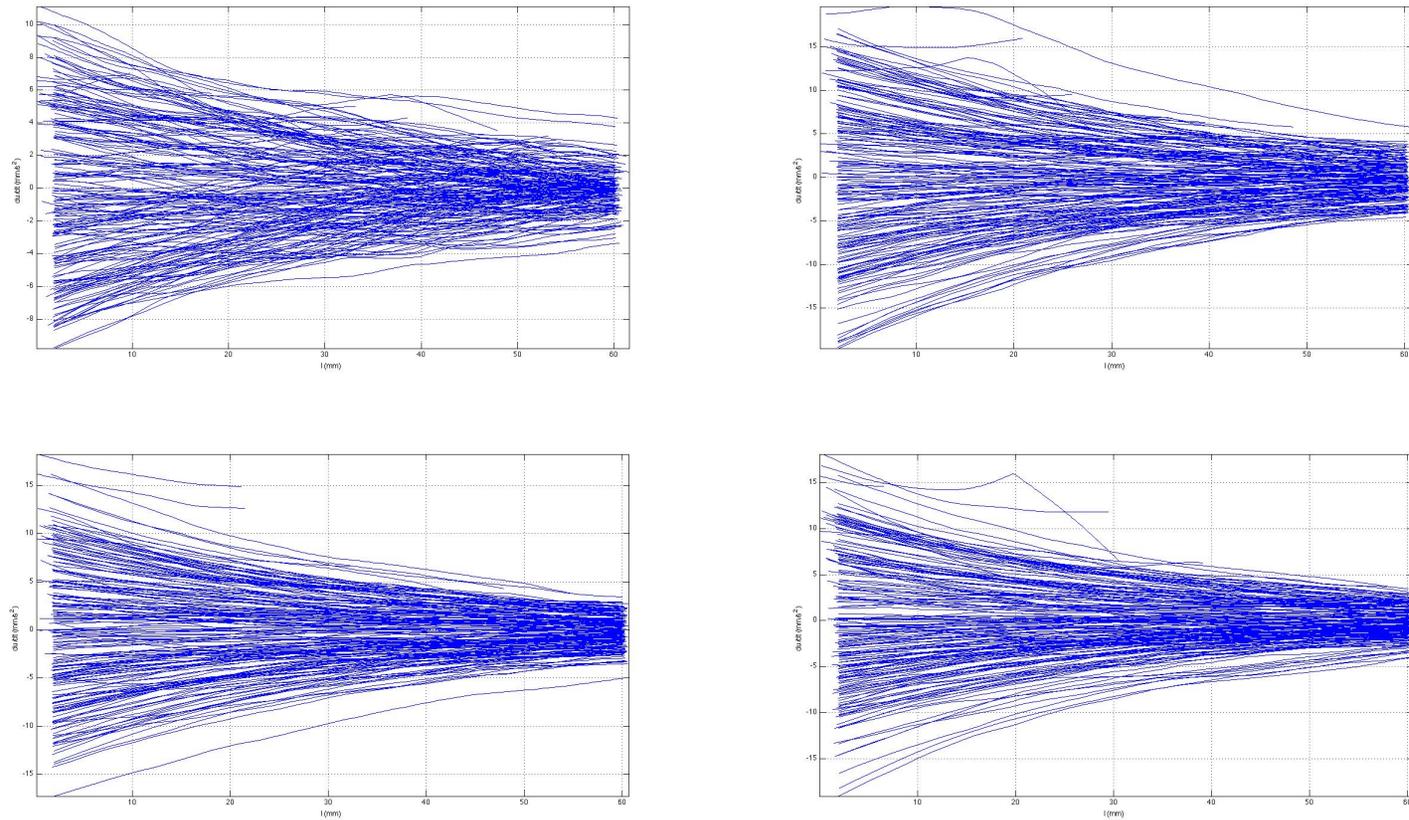


Figura 4.11: Evolución temporal para la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para el flujo oscilante en el tubo con el difusor grande en la boca, con frecuencia de 0.68 Hz y amplitud de 35 mm para la gráfica superior izquierda, de 50 mm para la gráfica superior derecha, de 65 mm para la gráfica inferior izquierda y de 85 mm para la gráfica inferior derecha. Para cada amplitud, se muestra la curva correspondiente a 178 instantes distintos, entre los que pasan 0.250 s.

en la boca. Cuando hay difusor se observa el comportamiento esperado; esto es, las curvas son monotónicas conforme se recorren las líneas de corriente centrales alejándose de la boca del tubo. En cambio, para el tubo sin difusor, se observa que las curvas no se comportan monotónicamente, lo cual sugiere que el flujo se está acelerando y desacelerando conforme se recorren las líneas de corriente centrales alejándose de la boca del tubo; indicando a su vez la presencia de vórtices.

El otro aspecto que resalta de la misma comparación, es la diferencia en el rango de valores que toma para cada tubo y cada amplitud la cantidad $\partial u/\partial t$, relacionada con la aceleración del flujo. Se puede observar una diferencia de aproximadamente un orden de magnitud entre los valores que toma dicha cantidad en el tubo sin difusor en la boca (entre -500 y $+500$ mm/s^2) respecto a los que toma en los dos tubos con difusor (entre -50 y $+50$ mm/s^2). A su vez, para cada tubo y amplitud, puede observarse que los valores de $\partial u/\partial t$ aumentan conforme la amplitud del flujo oscilante lo hace. Por último vale la pena notar la diferencia entre los valores de $\partial u/\partial t$ en el tubo con el difusor pequeño en la boca y el tubo con el difusor grande. En el primer caso el valor de $\partial u/\partial t$ oscila entre -50 y $+50$ mm/s^2 para la mayor amplitud, mientras que para el tubo con el difusor grande en la boca y la misma amplitud oscila entre -20 y $+20$ mm/s^2 . Esto sugiere que el flujo a la salida del tubo con el difusor grande en la boca está menos acelerado (ya sea que está entrando o saliendo) que en la salida del tubo con el difusor pequeño.

Los resultados anteriores indican, como se analizará en el capítulo de Conclusiones y perspectivas con mayor detalle, que la presencia del difusor efectivamente tiene el efecto de desacelerar monotónicamente y suavizar el comportamiento del flujo (al menos para líneas de corriente centrales) en la forma cualitativa que se supuso al modelarlo y que la forma del perfil del difusor considerado favorece dicho comportamiento.

Por lo pronto, relacionado con los resultados observados en estas gráficas, se puede analizar la evolución temporal de la cantidad “masa añadida”, es decir, de la integral bajo la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ” asociada con una línea de corriente central. En la siguiente sección se presenta dicho análisis.

4.2.2. Evolución y comportamiento de la masa añadida

En la sección anterior se analizó la evolución temporal de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para un flujo oscilante de misma frecuencia y cuatro amplitudes diferentes en el tubo sin difusor, con difusor chico y con difusor grande en la boca. Este comportamiento puede observarse en las figuras 4.9, 4.10, 4.11 respectivamente. En esta sección se analizará la evolución temporal de la masa añadida asociada a líneas de corriente centrales para los mismos casos.

Como se retomó en la sección anterior, se le llama masa añadida a la integral de la curva $\partial u/\partial t$ respecto a la longitud de la línea de corriente parametrizada l , entre el punto c y el punto d de la gráfica mostrada en la figura 4.7. Este nombre proviene de la consideración de que dicha integral está relacionada con cierta cantidad de

agua que se mueve fuera del conducto por efectos del flujo oscilante dentro del mismo. En particular, se puede suponer que satisface la equivalencia establecida en la ecuación 4.2, en donde se considera que dicha integral es proporcional a la cantidad \ddot{z} (hipótesis más general que la asumida por Ciztrom *et al* al suponer que es equivalente a $\epsilon L \ddot{z}$).

Cabe mencionar que, con base en los resultados mostrados en la figuras 4.9, 4.10 y 4.11 se infiere que la hipótesis planteada en la ecuación 4.2 (y también en la ecuación 4.1) sólo es válida para los tubos con difusor. Dicha inferencia se desprende de observar que en el tubo sin difusor, al seguir la mayoría de las líneas de corriente, el error numérico hace que entren en zonas en las que empiezan a girar alrededor de un punto indicando la presencia de vórtices. En estos casos es difícil hallar líneas que conecten las superficies libres del fluido, inclusive en la zona cercana al eje se simetría axial del tubo.

Ya se había mencionado que, al aplicar la técnica PIV a los flujos oscilantes reproducidos en el laboratorio -en particular en los tubos con difusor-, se obtuvieron secuencias temporales de los campos de velocidades instantáneos de los flujos correspondientes. En dichos campos, se identificaron líneas de corriente centrales (aquellas que conectan -como se muestra en la figura 4.7- las superficies libres del fluido¹) y se determinó el valor de la cantidad $\partial u / \partial t$ parametrizada con la longitud de arco de cada línea de corriente l .

Para cada uno de estos flujos (y en cada instante) se puede determinar, entonces, la masa añadida calculando directamente el área bajo la curva “ $\partial u / \partial t$ vs l ” y -con estos resultados- evaluar la hipótesis planteada en la ecuación 4.1. Con esta finalidad en mente, se exploró la evolución temporal de la masa añadida para los cuatro flujos oscilantes analizados en los tubos con difusor y su relación con el largo del tubo considerando (como ya se argumentó, en el tubo sin difusor este análisis carece de sentido).

En las gráficas mostradas en las figuras 4.12 a 4.19, se puede observar la evolución temporal de la masa añadida calculada para una línea de corriente central en cada uno de los cuatro flujos generados experimentalmente en los tubos con los difusores pequeño y grande en la boca. La línea de corriente seleccionada en cada caso se escogió de manera que entrara o saliera de la boca del tubo por el punto más cercano posible al eje de simetría axial del propio tubo; garantizando así la condición que la define como central.

Observando el comportamiento de la evolución temporal de las curvas “ $\partial u / \partial t$ vs l ” en las gráficas de las figuras 4.9, 4.10 y 4.11 y de la masa añadida (la integral bajo cada curva “ $\partial u / \partial t$ vs l ”) en las gráficas anteriores, se puede suponer que el término izquierdo de la ecuación (4.2) es una función periódica de la forma

$$\int_{\vec{x}(c)}^{\vec{x}(d)} \frac{\partial u}{\partial t} dl \approx A^* \text{sen}(\omega t), \quad (4.3)$$

¹Cabe aclarar que esta condición se satisface sobre todo para líneas de corriente cercanas al eje axial del tubo, pero no únicamente, como se muestra posteriormente en esta misma sección.

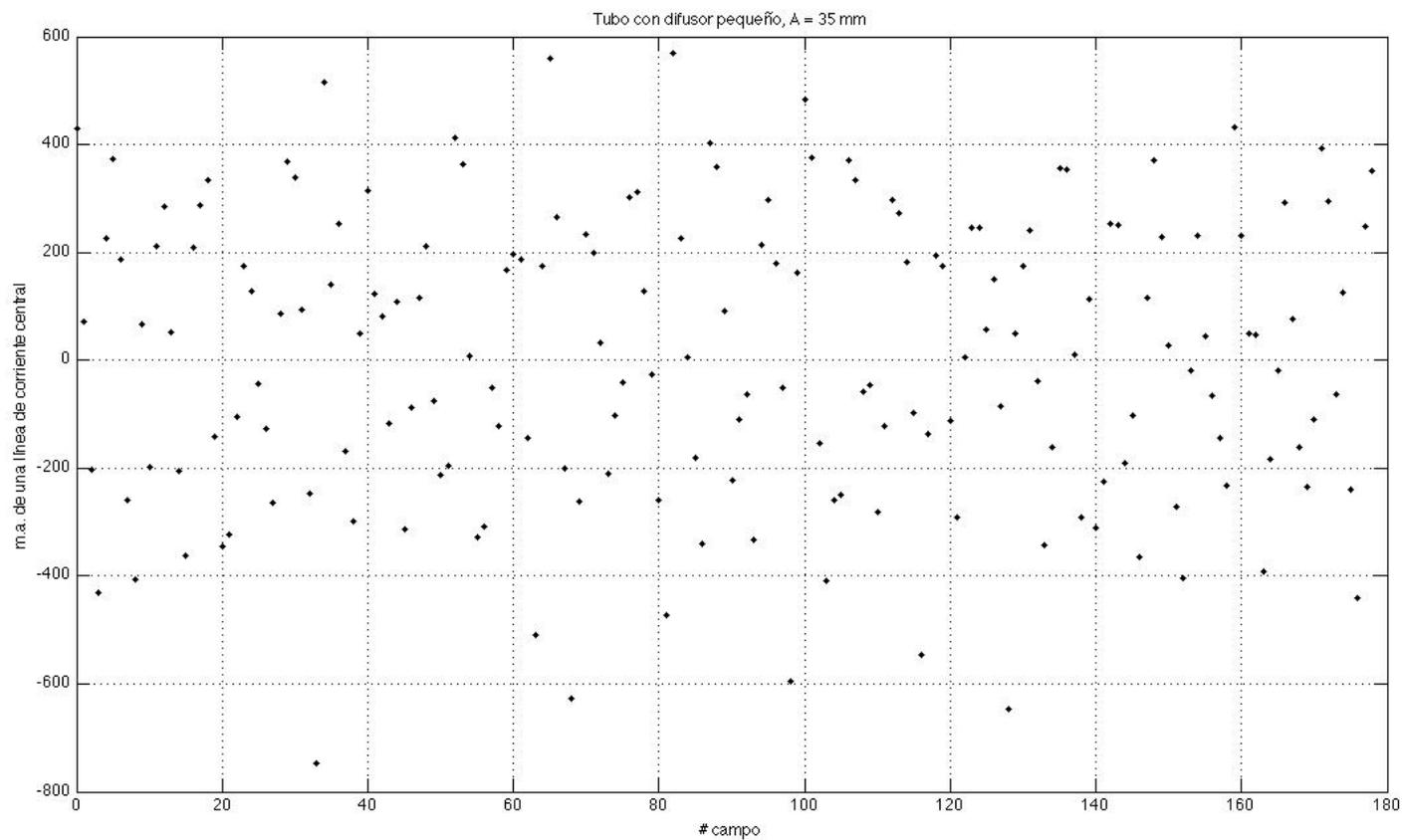


Figura 4.12: Valor de la masa añadida (integral de la curva " $\partial u/\partial t$ vs l ") para el flujo oscilante en el tubo con el difusor pequeño en la boca, con frecuencia de 0.68 Hz y 35 mm de amplitud, en 178 instantes distintos y consecutivos, entre los que pasan 0.250.

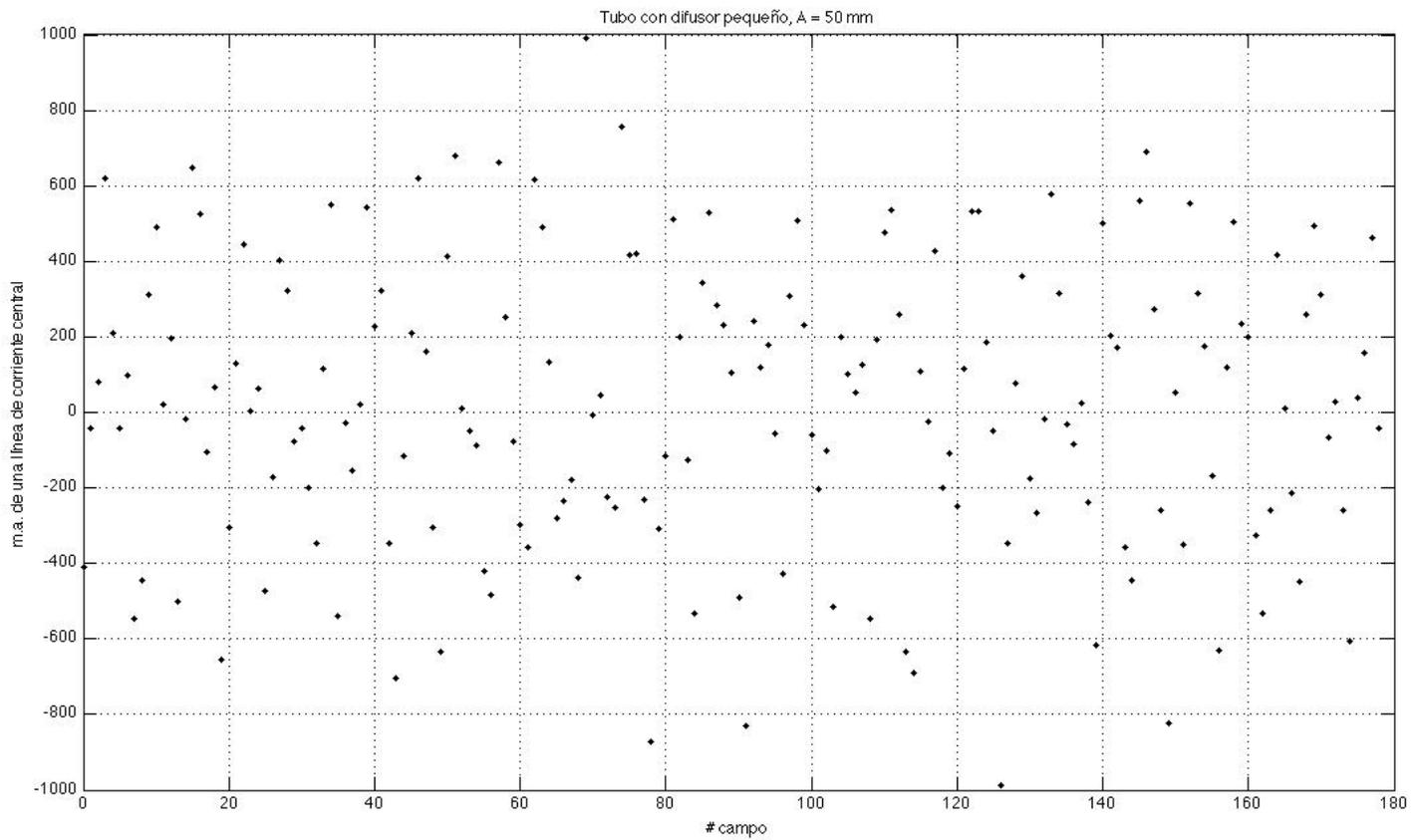


Figura 4.13: Valor de la masa añadida (integral de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ”) para el flujo oscilante en el tubo con el difusor pequeño en la boca, con frecuencia de 0.68 Hz y 50 mm de amplitud, en 178 instantes distintos y consecutivos, entre los que pasan 0.250.

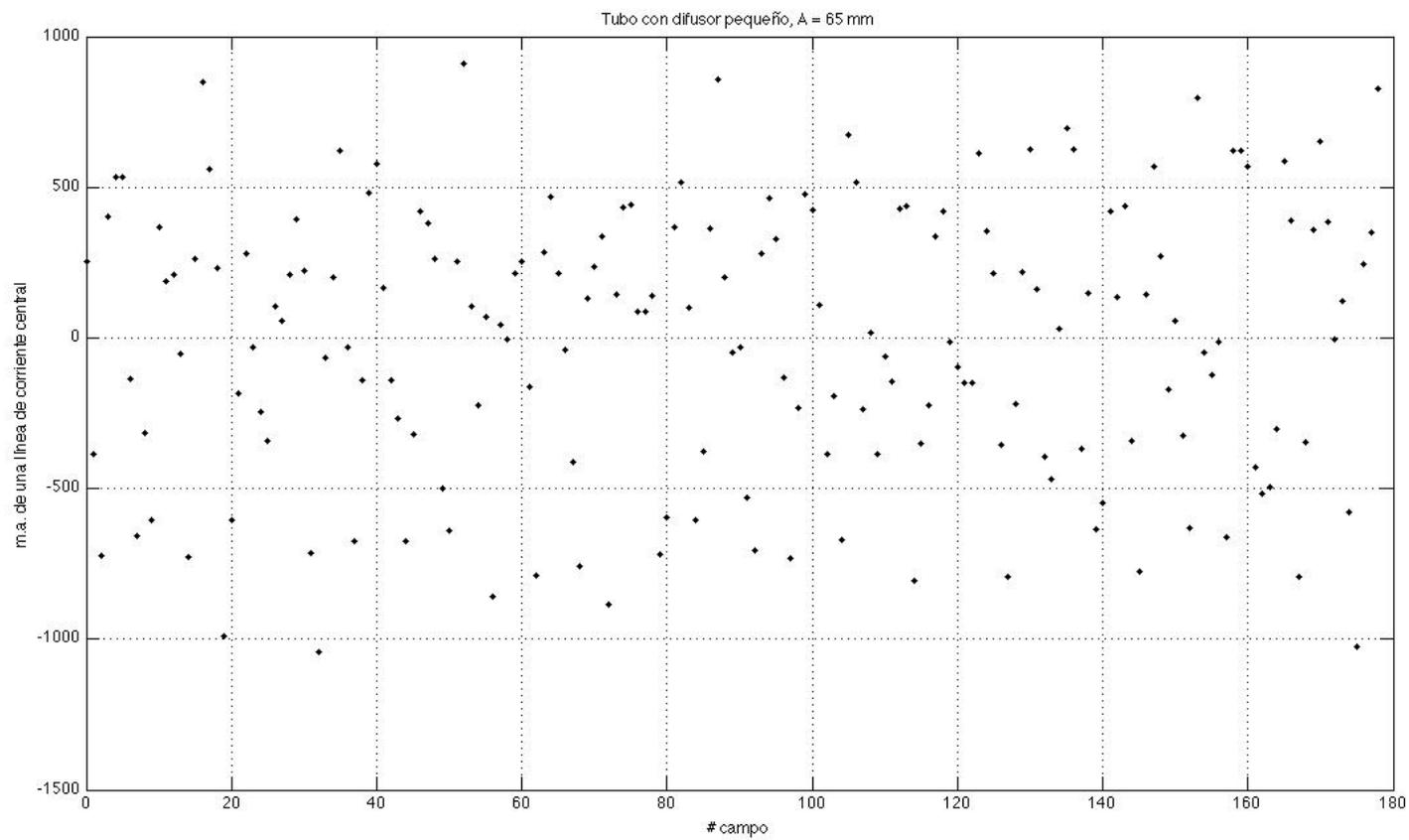


Figura 4.14: Valor de la masa añadida (integral de la curva " $\partial u/\partial t$ vs l ") para el flujo oscilante en el tubo con el difusor pequeño en la boca, con frecuencia de 0.68 Hz y 65 mm de amplitud, en 178 instantes distintos y consecutivos, entre los que pasan 0.250.

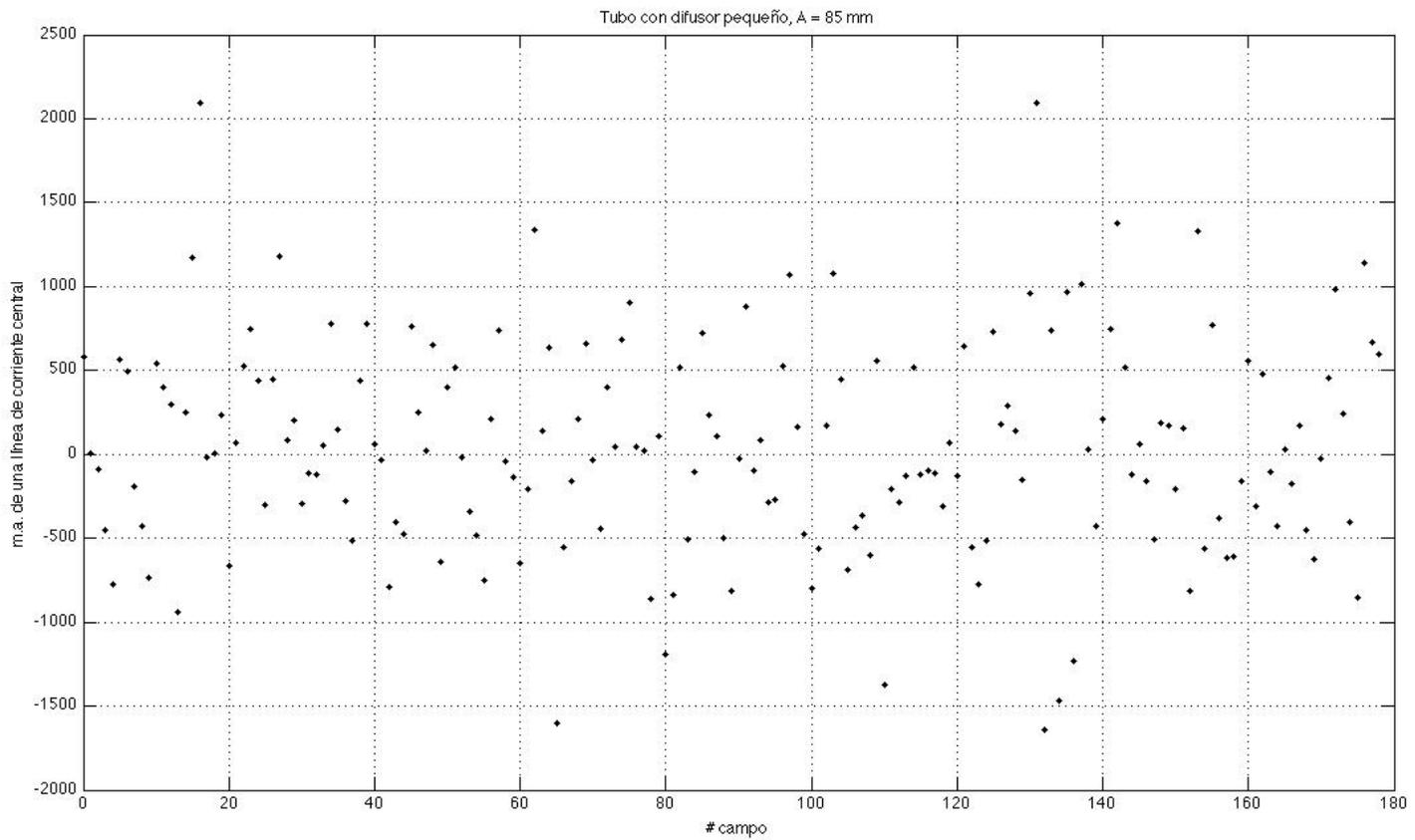


Figura 4.15: Valor de la masa añadida (integral de la curva " $\partial u/\partial t$ vs l ") para el flujo oscilante en el tubo con el difusor pequeño en la boca, con frecuencia de 0.68 Hz y 85 mm de amplitud, en 178 instantes distintos y consecutivos, entre los que pasan 0.250.

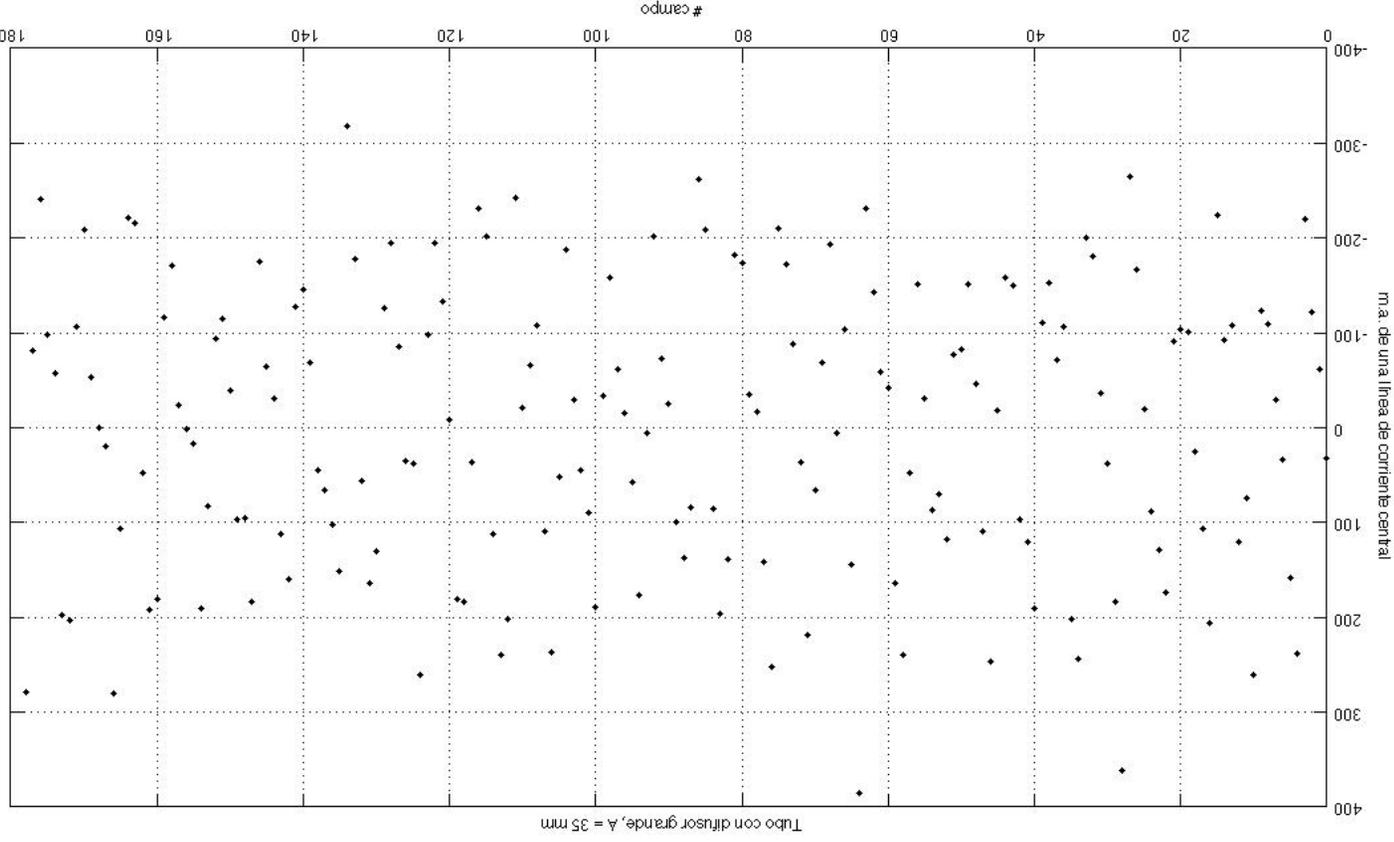


Figura 4.16: Valor de la masa añadida (integral de la curva " $\partial u/\partial t$ vs t'' ") para el flujo oscilante en el tubo con el difusor grande en la boca, con frecuencia de 0.68 Hz y 35 mm de amplitud, en 178 instantes distintos y consecutivos, entre los que pasan 0.250.

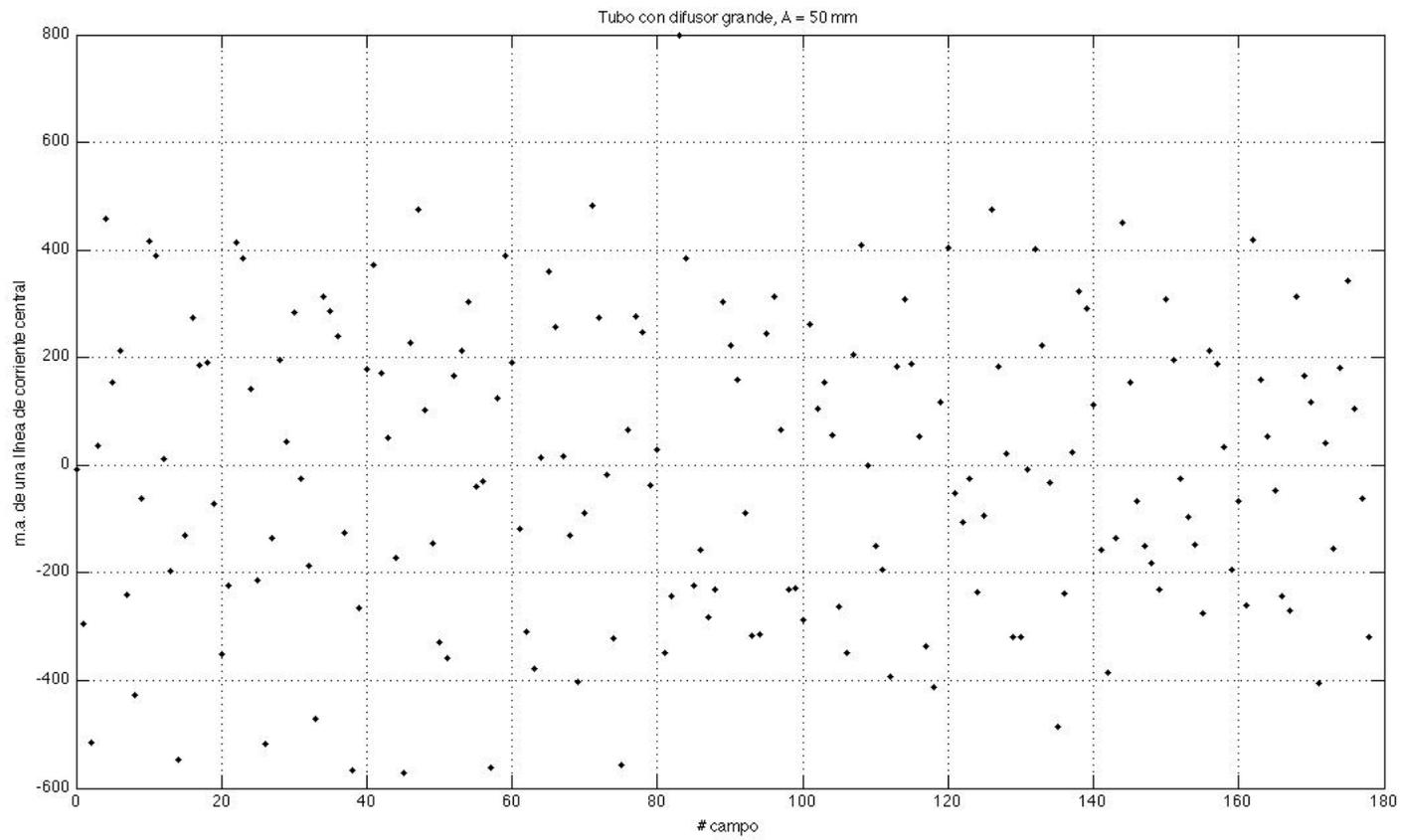


Figura 4.17: Valor de la masa añadida (integral de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ”) para el flujo oscilante en el tubo con el difusor grande en la boca, con frecuencia de 0.68 Hz y 50 mm de amplitud, en 178 instantes distintos y consecutivos, entre los que pasan 0.250.

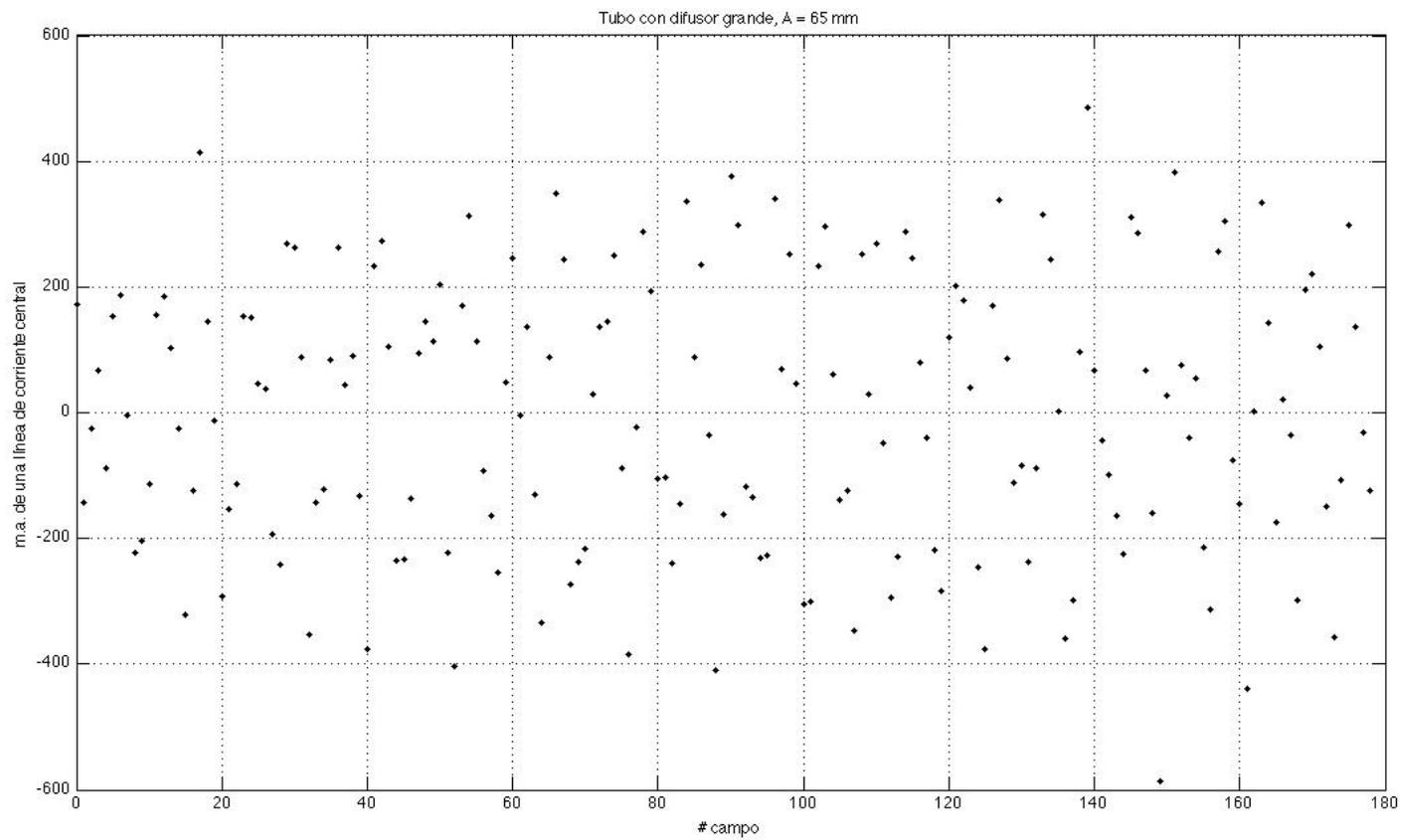


Figura 4.18: Valor de la masa añadida (integral de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ”) para el flujo oscilante en el tubo con el difusor grande en la boca, con frecuencia de 0.68 Hz y 65 mm de amplitud, en 178 instantes distintos y consecutivos, entre los que pasan 0.250.

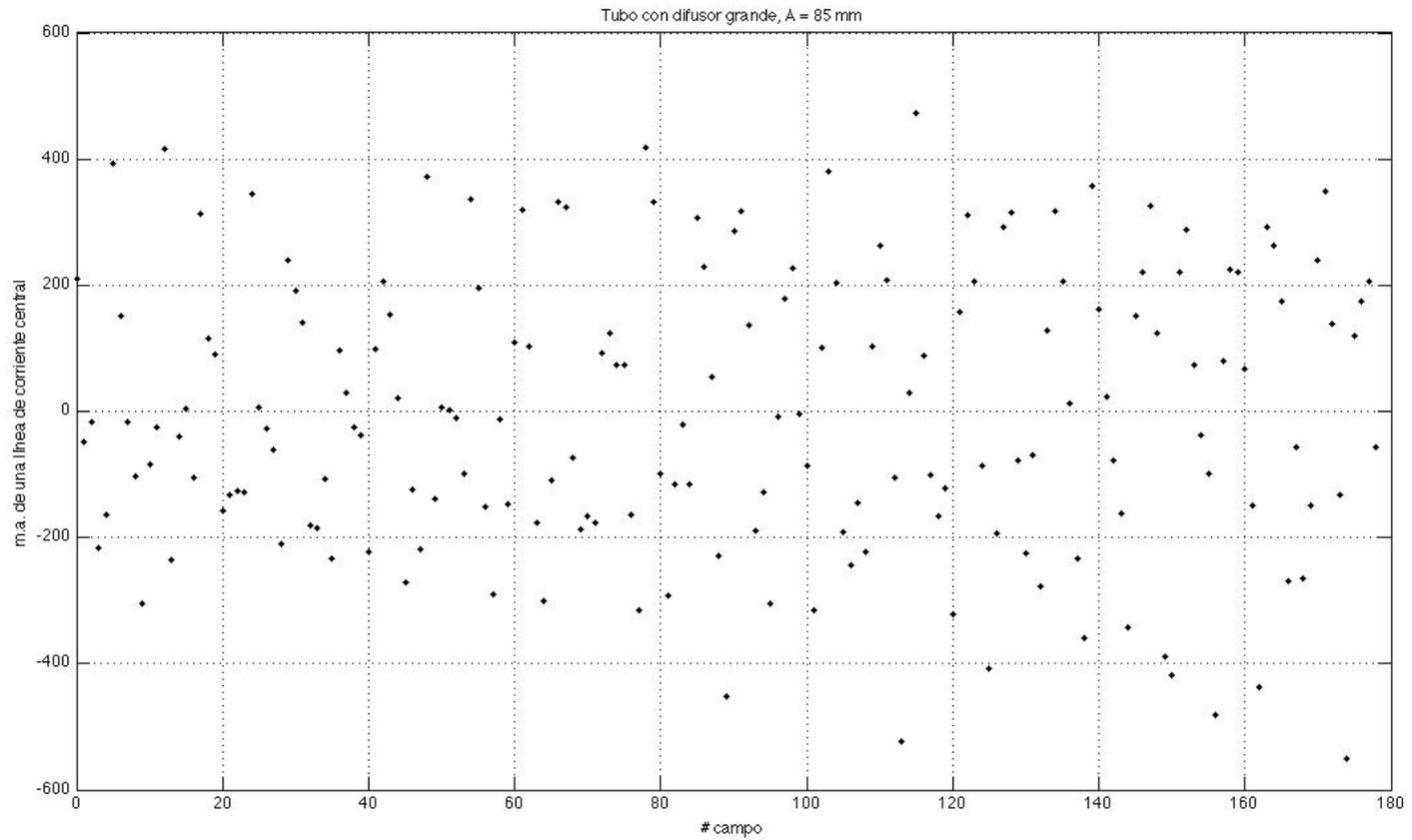


Figura 4.19: Valor de la masa añadida (integral de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ”) para el flujo oscilante en el tubo con el difusor grande en la boca, con frecuencia de 0.68 Hz y 85 mm de amplitud, en 178 instantes distintos y consecutivos, entre los que pasan 0.250.

donde A^* correspondería al máximo del valor absoluto que toma la masa añadida para cada uno de los flujos; es decir, el máximo del valor absoluto encontrado en cada una de las gráficas de las figura 4.12 a 4.19. Por otro lado ω coincidiría con la frecuencia de oscilación del flujo correspondiente. Para ver el comportamiento periódico de esta cantidad con mayor claridad, en la figura 4.20 se muestra un detalle de la evolución temporal del valor de la masa añadida, para el tubo con el difusor grande en la boca y 35 mm de amplitud.

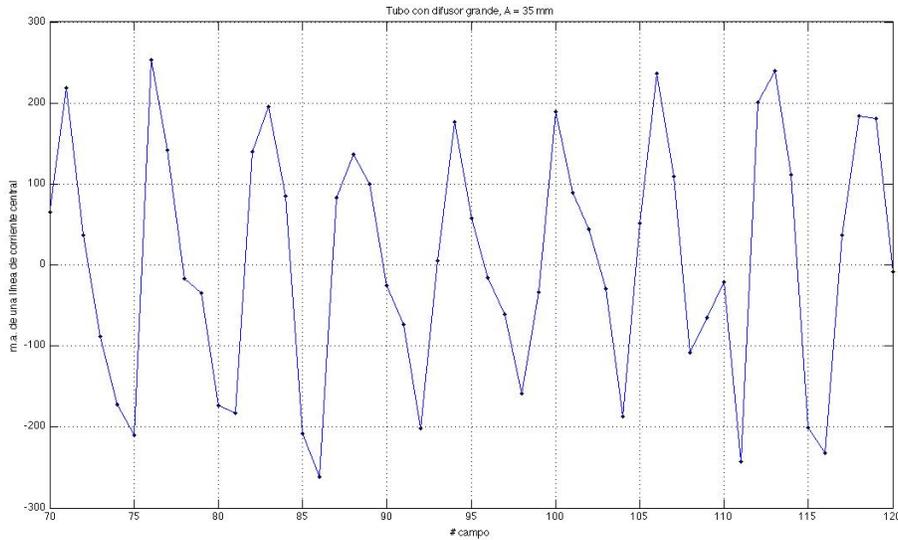


Figura 4.20: Detalle de la evolución temporal del valor de la masa añadida (integral de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ”) para el flujo oscilante en el tubo con el difusor grande en la boca, con frecuencia de 0.68 Hz y 35 mm de amplitud, en 50 instantes distintos y consecutivos, entre los que pasan 0.250 s. Se observa un comportamiento periódico.

En cambio, en el lado derecho de la ecuación (4.2) aparece la cantidad \ddot{z} ; es decir, la segunda derivada temporal de la altura de la columna de agua dentro del tubo como función del tiempo. Se sabe que esta cantidad se comporta también como una función periódica de la forma

$$\ddot{z}(t) = A\omega^2 \text{sen}(\omega t),$$

donde A y ω son la amplitud y frecuencia de oscilación del flujo. Considerando esta forma funcional para \ddot{z} , el lado derecho de la ecuación (4.2) puede escribirse como

$$\epsilon L \ddot{z} = \beta A \omega^2 \text{sen}(\omega t). \quad (4.4)$$

Por lo tanto, si se satisface la ecuación (4.2), los lados derechos de las ecuaciones

(4.3) y (4.4) también deben ser iguales. Esto es,

$$A^* \text{sen}(\omega t) = \beta A \omega^2 \text{sen}(\omega t);$$

de donde

$$\beta = \frac{A^*}{A \omega^2}. \quad (4.5)$$

En particular, si $\beta = \epsilon L$ esta misma ecuación permite obtener el valor de ϵL y por tanto de ϵ .

En la tabla 4.1 se muestra el valor de la cantidad β obtenido mediante la ecuación (4.5) para cada uno de los cuatro flujos en cada tubo con difusor.

Tubo / amplitud (mm) / β (mm)	35	50	65	85
Con difusor pequeño	35.28	42.90	30.24	53.20
Con difusor grande	23.64	40.33	34.77	19.20

Tabla 4.1: Valor de la cantidad β para cada flujo en los tubos con difusor. La frecuencia de oscilación de todos los flujos fue de 0.68 Hz.

Se puede asociar un valor de incertidumbre promedio para los valores correspondientes al difusor pequeño de $\pm 22,42 \text{ mm}$ y para el difusor grande de $\pm 16,97 \text{ mm}$, considerando la propagación -a su vez- de los valores de incertidumbre para A^* , A y ω . En particular, el valor de incertidumbre asociado a A^* se obtuvo analizando el comportamiento periódico de la cantidad masa añadida en las gráficas 4.12 a 4.19 e identificando que el valor máximo de la oscilación en cada periodo difiere del valor máximo de dicha cantidad en todas las oscilaciones observadas.

Como se puede observar, estos resultados no muestran una relación directa con la amplitud para cada difusor, al menos en el rango explorado. Sin embargo, parecen ser similares y del mismo orden para cada difusor, por lo que podría inferirse que el valor de β está asociado al difusor; por lo menos dentro del margen de error de los experimentos realizados y para los rangos de amplitud y frecuencia explorados. Por otro lado parecen ser consistentes con el efecto esperado para cada difusor: la masa añadida y el valor de β es menor para el difusor grande. Lo anterior también es consistente con las observaciones sobre los tiempos de decaimiento libre para un flujo oscilante en el tubo con cada difusor, sugiriendo que el difusor grande atenúa en mayor grado los efectos de borde y la disipación.

En la sección 1.3 se mencionó que uno de los resultados reportados por Czitrom *et al* en [7] fue que el modelo del flujo en el SIBEO, desarrollado por los mismos autores reproduce adecuadamente el comportamiento real de un SIBEO a escala para cualquier razón de flujo. Para poder comparar el comportamiento predicho por el modelo con el observado en el SIBEO a escala tuvieron que determinar o ajustar previamente el valor de los parámetros libres del modelo, ϵ , κ y C_r en la ecuación (1.21). En particular, considerando en el modelo que la masa añadida o la integral $\int_{\bar{x}(c)}^{\bar{x}(d)} \frac{\partial u}{\partial t} dl$ es igual a $\epsilon L \ddot{z}$, el valor de ϵ se obtuvo al hacer coincidir el valor máximo

Tubo / amplitud (mm) / ϵ	35	50	65	85
Con difusor pequeño	0.18	0.21	0.15	0.27
Con difusor grande	0.12	0.20	0.17	0.15

Tabla 4.2: Valor de ϵ considerando $L \simeq 200 \text{ mm}$ y que $\beta = \epsilon L$ para los dos tubos con difusor. La frecuencia de oscilación de todos los flujos fue de 0.68 Hz.

de la razón de flujo calculado con el modelo y el observado en el sistema a escala (i.e, el valor de resonancia). En todos los casos analizados (con $L = 4000 \text{ mm}$), el valor de ϵ que hizo que dichos máximos coincidieran fue igual a 0,06; lo cual -bajo la hipótesis de que la masa añadida es igual a $\epsilon L \dot{z}$ - correspondería a considerar que la cantidad extra que se mueve por los efectos de borde en la boca del conducto resonante es equivalente a tener un flujo que oscila como si fuera cuerpo rígido en un conducto 6 % más largo. El valor de β asociado para al trabajo de Czitrom *et al* sería de $0,06 \times 4000 \text{ mm} = 240 \text{ mm}$.

Para comparar resultados y explorar la hipótesis de que la masa añadida escala con la longitud del conducto, resulta de interés determinar el valor de ϵL asociado a los flujos estudiados en el presente trabajo. Aunque no se determinó con exactitud el valor de la altura media L de cada columna de agua que osciló como cuerpo rígido dentro de los tres tubos; se puede estimar el valor que tendría ϵ considerando el valor obtenido para β y que el valor de L fue aproximadamente de 200 mm para todos los flujos. Dicha estimación se muestra en la tabla 4.2 para cada caso.

Se puede también asociar un valor de incertidumbre promedio para los valores de ϵ correspondientes al difusor pequeño de $\pm 0,12$ y para el difusor grande de $\pm 0,09$, considerando la incertidumbre de β y L (que se consideró de $\pm 10 \text{ mm}$).

Observando los valores de la tabla 4.2, la inferencia más viable parece ser otra vez que el valor de ϵ sea característico del difusor utilizado y no que sea una cantidad relacionada con las características del flujo: no se observa una relación creciente ni decreciente respecto a la amplitud. Sin embargo, bajo la interpretación de ϵL como la masa añadida o extra que oscila -además de la que lo hace aproximadamente como cuerpo rígido-; estos resultados implicarían que con el difusor pequeño se tendría una masa extra oscilando correspondiente a un tubo en promedio $\sim 20\%$ más largo (i.e., $40 \pm 24 \text{ mm}$ más largo); mientras que con el difusor grande correspondería a un tubo en promedio $\sim 15\%$ más largo (i.e., $30 \pm 18 \text{ mm}$ más largo).

Bajo la misma interpretación, el resultado reportado por Czitrom *et al* en [7] de una masa añadida de 6%, estaría relacionado con el difusor que utilizaron en sus experimentos. La geometría de dicho difusor haría que la influencia del flujo oscilante fuera mucho menor que la observada con los difusores utilizados en el presente trabajo.

Inclusive, los valores de la masa añadida obtenidos en el presente trabajo están subestimados por lo que los valores de ϵ asociados a cada difusor son mayores. En la figura 4.7 se puede observar que la masa añadida corresponde al área bajo la curva

“ $\partial u/\partial t$ vs l ” entre los puntos c y d de una línea de corriente central parametrizada; esto es, desde el punto de la línea en el que el tubo deja de ser recto (punto c) hasta el punto donde el campo de velocidades se anula (punto d) siguiendo la línea de adentro hacia afuera del tubo (ver figura 1.4). La información que se obtuvo experimentalmente de los campos de velocidades para el presente trabajo, permitió seguir las líneas de corriente centrales sólo a partir del punto en el que salen del difusor; es decir, a la derecha del punto c en la gráfica 4.7. Por lo tanto, a las curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ” obtenidas les falta el segmento correspondiente al interior del difusor y, como consecuencia, los valores de masa añadida (o áreas bajo la correspondiente curva) obtenidos tienen un valor menor al que deberían de tener.

Considerando lo anterior y la interpretación de la masa añadida como la masa de fluido extra que se movería como cuerpo rígido, los difusores en el presente trabajo tendrían el efecto de hacer que mucho más masa del fluido se moviera por efecto de la oscilación, en contraste con el difusor utilizado por Czitrom *et al.* Estos resultados sugieren que la cantidad $\int_{\bar{x}(c)}^{\bar{x}(d)} \frac{\partial u}{\partial t} dl$ no escala con el largo del tubo L .

En el capítulo de Conclusiones y perspectivas se discuten las implicaciones de estos resultados pero, antes de pasar a ello, se presentan algunos resultados correspondientes al efecto de la geometría del difusor en el flujo a la salida de los tubos.

4.3. Efecto de la geometría del difusor

En las secciones precedentes se mostró que el comportamiento observado para las curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ” en los flujos estudiados coincide con el comportamiento supuesto sólo en los tubos con difusor. Como consecuencia de lo anterior, para los flujos en los tubos con difusores fue posible calcular la masa añadida de una línea de corriente central así como el promedio de la masa añadida de cinco líneas de corriente saliendo o entrando por distintas regiones de cada tubo. Los resultados obtenidos sugieren que el valor de la masa añadida depende del difusor utilizado, más que de las propiedades del flujo oscilante para las amplitudes y la frecuencia explorada.

El hecho de que el comportamiento observado para las curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ” en el tubo sin difusor no coincida con el supuesto en el modelo del flujo tiene como consecuencia que el cálculo de la masa añadida utilizando la ecuación (4.1) no tenga sentido para los flujos en el tubo sin difusor. Como se mencionó anteriormente, la forma funcional de las curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ” mostradas en las gráficas de la figura 4.9 corresponde a un flujo que se acelera y desacelera continuamente, indicando la presencia de vórtices. Dicho de otra forma, hay vórtices que se desprenden y viajan alejándose de la boca del tubo.

Considerando los resultados mencionados, se puede inferir inmediatamente que uno de los efectos del difusor sobre el flujo oscilante es disminuir la formación de vórtices y atenuar su efecto sobre el fluido circundante. Este efecto de atenuación puede analizarse con mayor detalle al identificar la “zona de influencia” del flujo oscilante, definida en la sección 3.3 para los distintos flujos en los tubos con y sin

difusor en la boca.

Como se describió en dicha sección, la rutina `czy_tch.m` (mostrada en el apéndice A.5) fue diseñada para determinar la zona o región fuera de tubo en la cual se perciben los efectos del flujo oscilante. Esta zona se define identificando en distintas líneas de corriente parametrizadas con la longitud de arco, el valor del parámetro para el cual la variación temporal de la velocidad de flujo tiene un valor menor o igual a cierta cota mínima, $(\partial u/\partial t)_{min}$. Al unir imaginariamente dichos puntos, se identifica una región a partir de la cual el flujo prácticamente ya no oscila.

Específicamente, la rutina identifica en cada una de cinco líneas de corriente recorridas simultáneamente, el punto $(x(l), y(l))$ a partir del cual la cantidad $|\partial u/\partial t|$ tiene un valor menor o igual al 10 % del valor máximo que toma la misma cantidad en esas cinco líneas de corriente durante toda la secuencia temporal del flujo estudiado². Este valor se escogió al observar que a partir de él (aproximadamente) la contribución al área bajo las curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ” es casi nula en cualquier instante para las distintas líneas de corriente. Cabe recalcar que lo anterior sólo se observa para los flujos en los tubos con difusor, dado que en el tubo sin difusor la cantidad $\partial u/\partial t$ no tiene un comportamiento monótono decreciente como función de la longitud de la curva l y, por tanto, el hecho de que tome un valor menor o igual al de la cota mínima para cierta l no garantiza que esta condición se satisfaga para el resto de la curva (como era de esperarse).

En las figuras 4.21 a 4.36 se muestra la zona de influencia para 16 instantes de los cuatro flujos analizados en los tubos con difusor. En cada gráfica se observan cinco asteriscos de colores que corresponden a los puntos, en cada línea de corriente, a partir de los cuales la cantidad $\partial u/\partial t$ es menor o igual a la cota mínima definida. Para el tubo con el difusor chico en la boca, los asteriscos de color azul pertenecen a la línea de corriente que se recorre a partir del punto $(x_i = 15mm, y_i = 100mm)$, los verdes a la línea que se recorre a partir del punto $(25mm, 100mm)$, los amarillos a la línea que se recorre a partir del punto $(35mm, 100mm)$, los rojos a la línea que se recorre a partir del punto $(45mm, 100mm)$ y los negros a la línea que se recorre a partir del punto $(55mm, 100mm)$. Para el tubo con el difusor grande en la boca, los asteriscos de color azul pertenecen a la línea de corriente que se recorre a partir del punto $(25mm, 120mm)$, los verdes a la línea que se recorre a partir del punto $(40mm, 120mm)$, los amarillos a la línea que se recorre a partir del punto $(55mm, 120mm)$, los rojos a la línea que se recorre a partir del punto $(70mm, 120mm)$ y los negros a la línea que se recorre a partir del punto $(85mm, 120mm)$. Los instantes mostrados corresponden a la mitad de las secuencias temporales de cada flujo para garantizar que los flujos estuvieran lejos de la condición inicial. Entre ellos pasa 0.250 s y en total abarcan aproximadamente dos periodos de la oscilación del flujo. Por lo anterior cada fragmento de secuencia es

²En la rutina numérica, las líneas de corriente se recorren siempre desde la boca del tubo hacia afuera, a pesar de que el flujo pueda estar entrando o saliendo. Por ello se dice que la zona de influencia queda definida identificando el punto $(x(l), y(l))$ “a partir del cual” el valor de $|\partial u/\partial t|$ es menor o igual al valor de la cota mínima establecida, recorriendo cada línea de corriente desde la boca del tubo hacia el exterior.

representativa de cada flujo.

También se muestra en una gráfica -para cada flujo generado y difusor- la zona de influencia más amplia encontrada en los 16 instantes mostrados. La mayor amplitud o extensión se observa en instantes en los cuales el campo de velocidades está completamente ordenado; esto es, en los que la mayoría de los vectores indican que el flujo está saliendo o entrando del tubo. Por lo tanto esta región es la que sugiere, al menos de forma cualitativa, la zona influencia del difusor para cada flujo.

Comparando las zonas de influencia obtenidas para el tubo con el difusor pequeño en la boca en los 16 instantes con cada flujo, se observa que conforme aumenta la amplitud del flujo las regiones más amplias son menos frecuentes, aunque su extensión es similar. Lo mismo se observa para el tubo con el difusor grande en la boca, sugiriendo de nuevo que la zona de influencia, al igual que la masa añadida, está relacionada con el difusor más que con el flujo en los rangos explorados.

Por otro lado, comparando las zonas de influencia más amplias de los flujos en el tubo con el difusor pequeño con las de los flujos en el tubo con el difusor grande, se observa que para estos últimos la zona de influencia está más cercana a la boca de la trompeta; confirmando que el efecto de atenuación sobre el flujo de este difusor es mayor que el que tiene el difusor pequeño. Esto significa que el flujo, en los instantes que está ordenado, está menos acelerado en una región más cercana a la boca del tubo con el difusor grande. Estos resultados son congruentes con los obtenidos para la masa añadida, ya que ambos sugieren que el difusor grande atenúa más el efecto del flujo oscilatorio sobre el fluido circundante además de evitar la formación y el desprendimiento de vórtices. Lo anterior es consecuente con los resultados obtenidos en la sección 4.1, ya que se observa que el tiempo de decaimiento del flujo oscilando libremente fue mayor para el tubo con el difusor más grande sugiriendo que en dicho flujo hay menos pérdidas de energía asociadas con la fricción entre el fluido, el tubo y el difusor, con la formación de vórtices y con el amortiguamiento por la radiación.

Con estos resultados se concluye esta sección, en la que se analizó el efecto de la geometría de los difusores en los flujos oscilantes. También con estos resultados se concluye el capítulo en el que se presentaron y analizaron los resultados experimentales obtenidos. Sólo resta para finalizar el trabajo la presentación de las conclusiones y perspectivas del mismo.

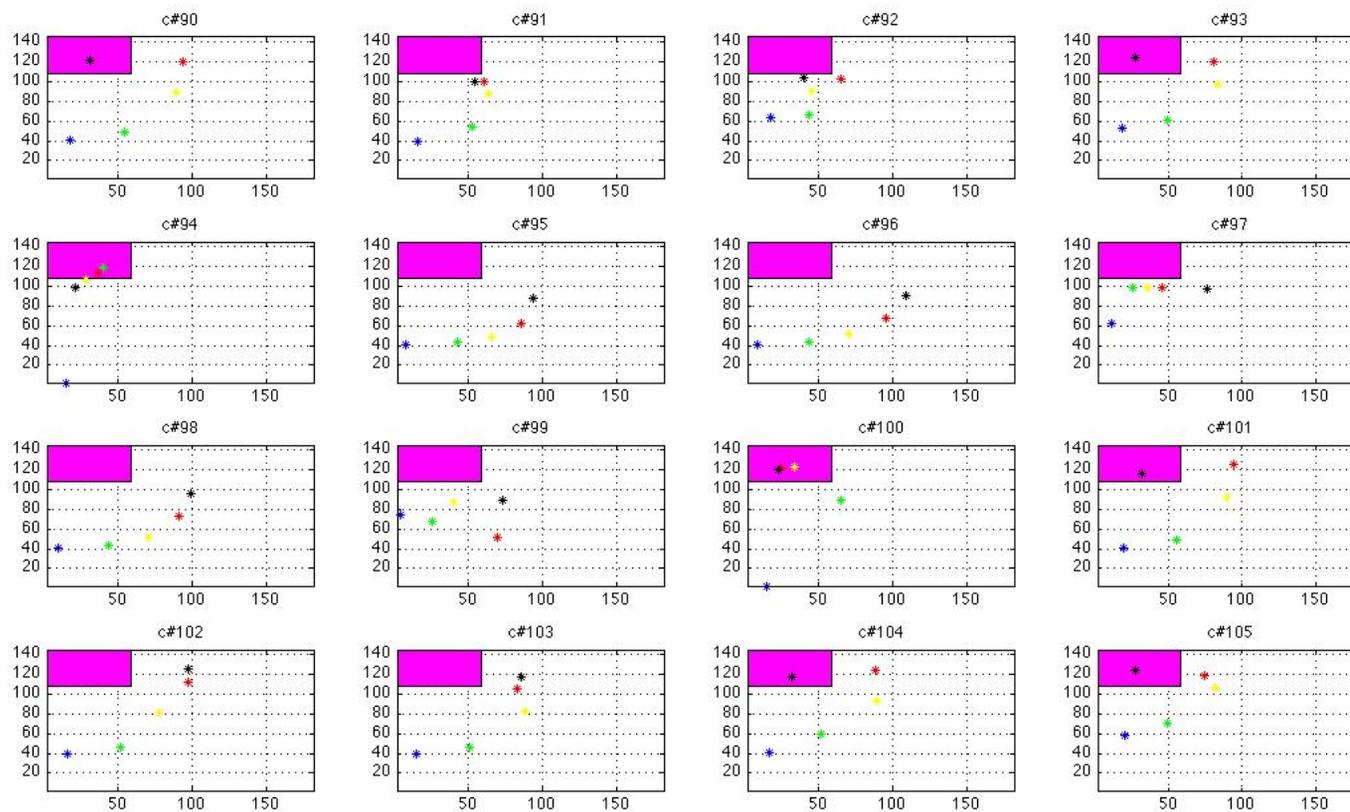


Figura 4.21: Zona de influencia del difusor chico, para 16 distintos instantes, cuando el flujo oscilatorio tiene una frecuencia de 0.68 Hz y una amplitud de 35 mm.

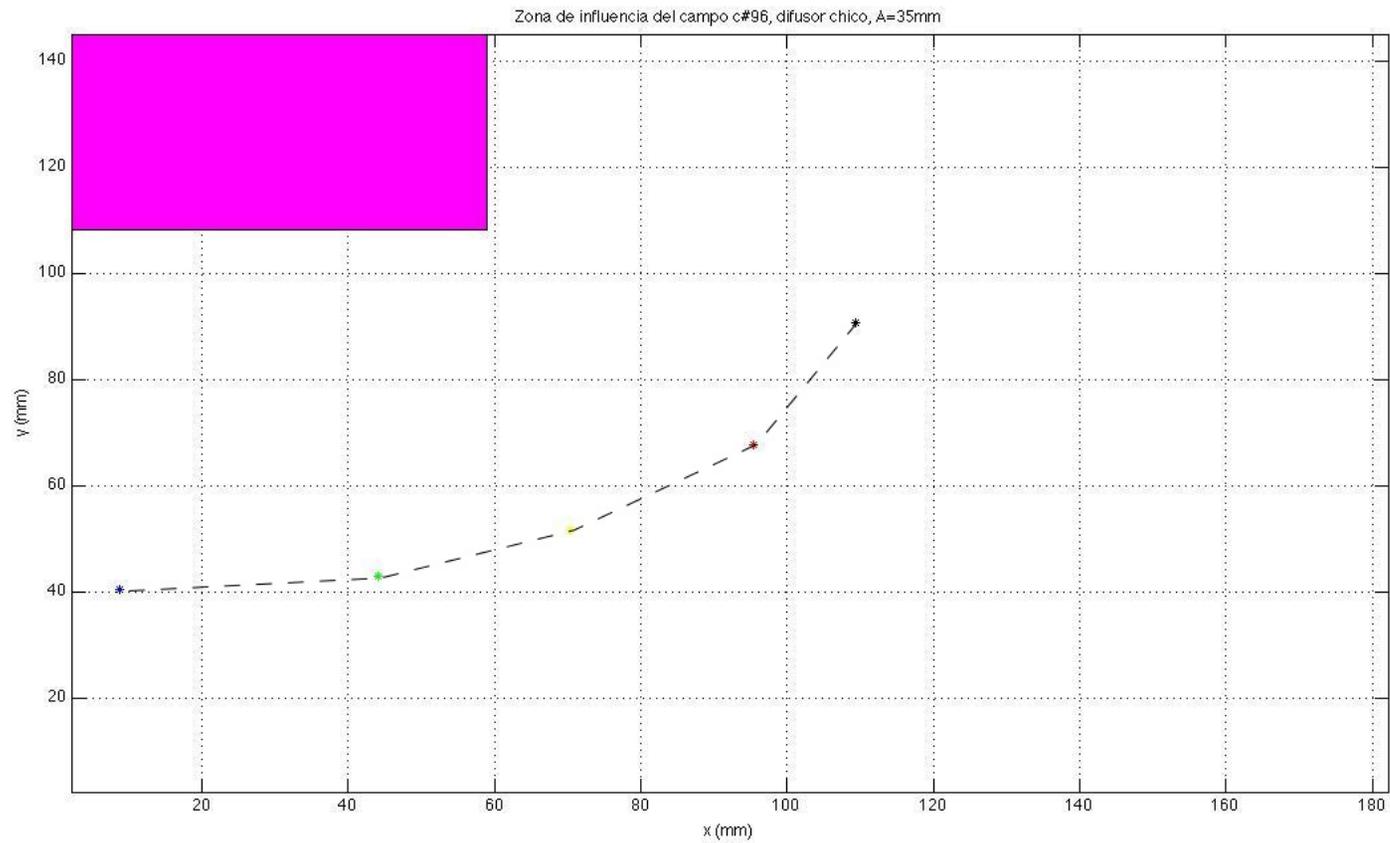


Figura 4.22: Se muestra el campo #96 del flujo oscilatorio con el difusor chico, frecuencia 0.68 Hz y una amplitud de 35 mm para observar la zona de influencia con mayor detalle.

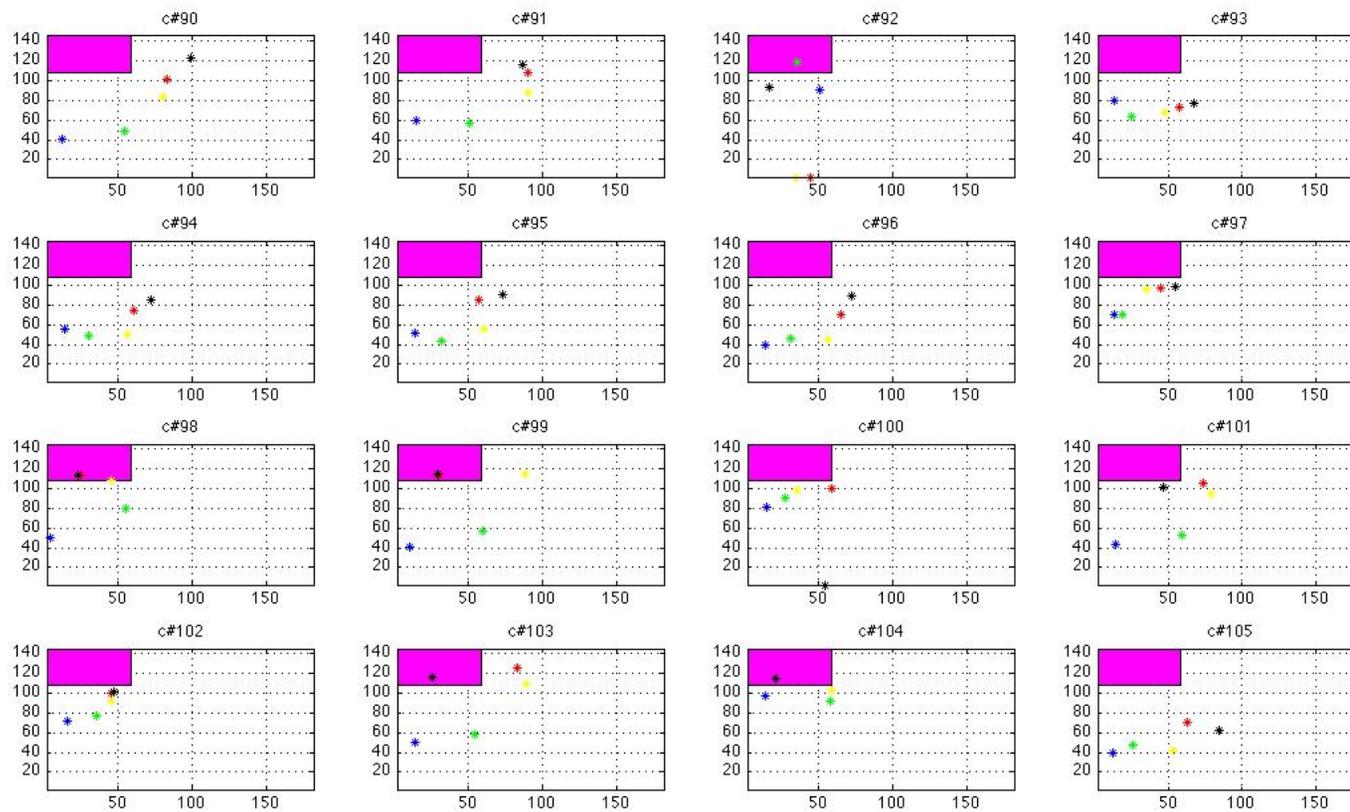


Figura 4.23: Zona de influencia del difusor chico, para 16 distintos instantes, cuando el flujo oscilatorio tiene una frecuencia de 0.68 Hz y una amplitud de 50 mm.

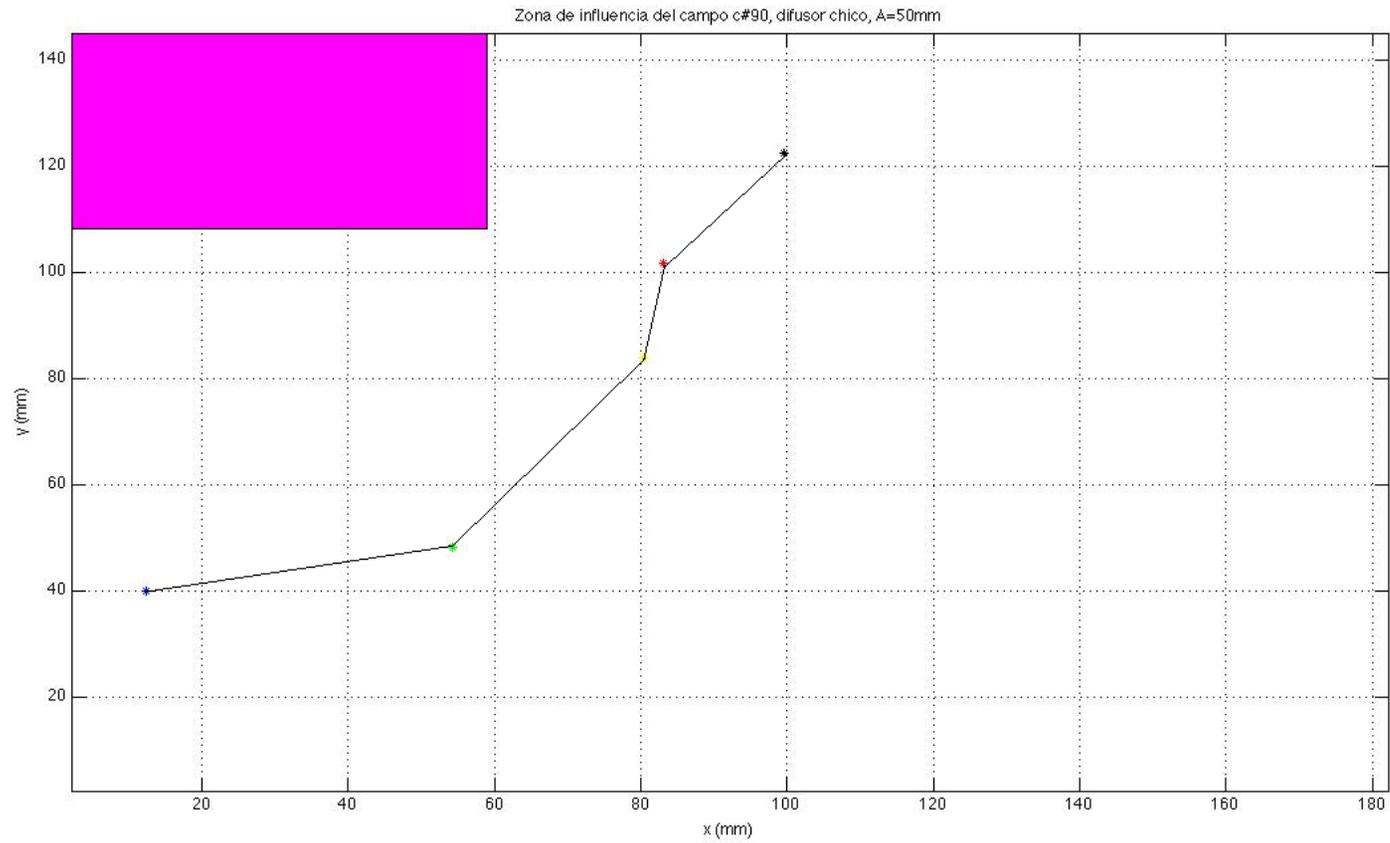


Figura 4.24: Se muestra el campo #90 del flujo oscilatorio con el difusor chico, frecuencia 0.68 Hz y una amplitud de 50 mm para observar la zona de influencia con mayor detalle.

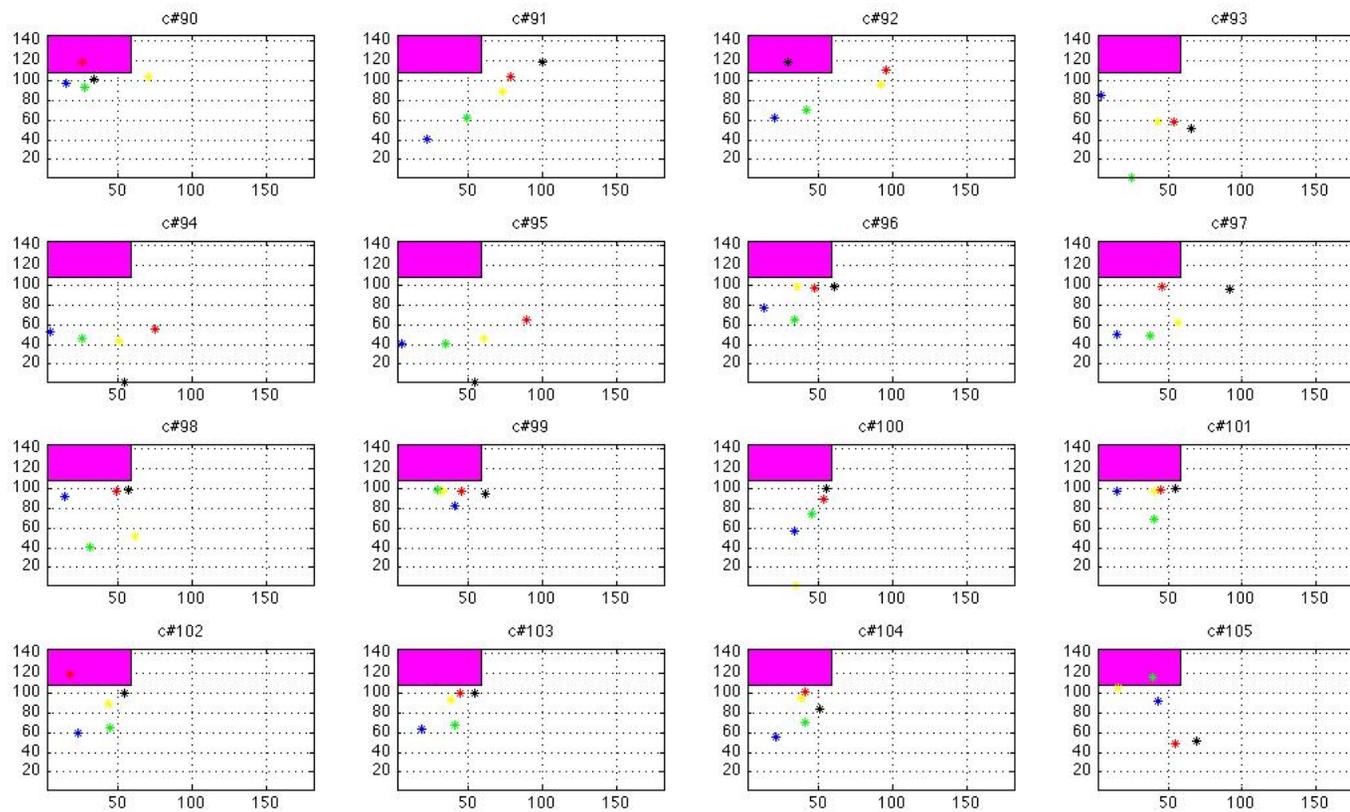


Figura 4.25: Zona de influencia del difusor chico, para 16 distintos instantes, cuando el flujo oscilatorio tiene una frecuencia de 0.68 Hz y una amplitud de 65 mm.

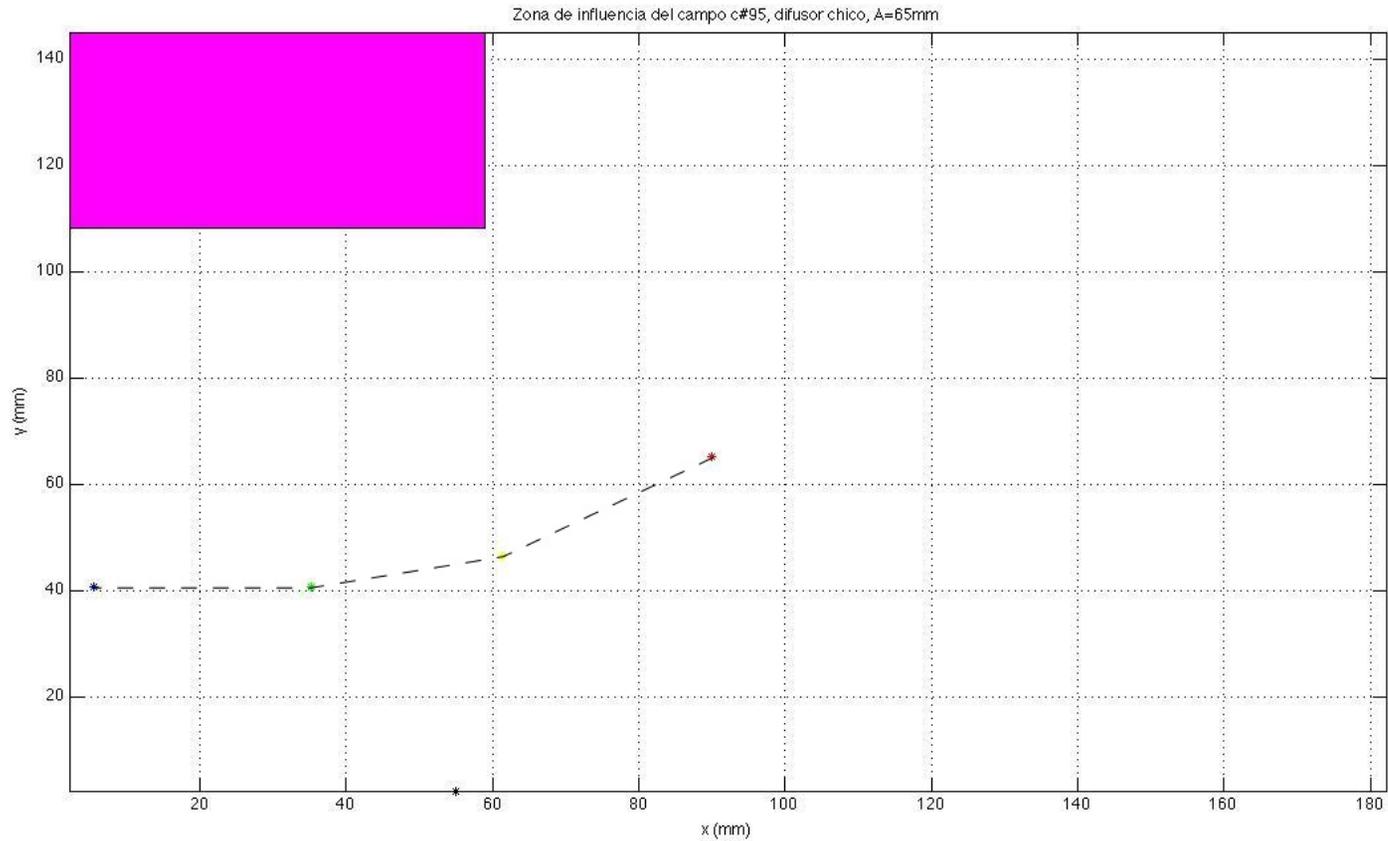


Figura 4.26: Se muestra el campo #95 del flujo oscilatorio con el difusor chico, frecuencia 0.68 Hz y una amplitud de 65 mm para observar la zona de influencia con mayor detalle. Cabe resaltar que en este caso el asterisco negro aparece en el punto $(x = 55mm, y = 0mm)$ ya que en ningún punto de la curva explorada se alcanza el valor de la cota mínima.

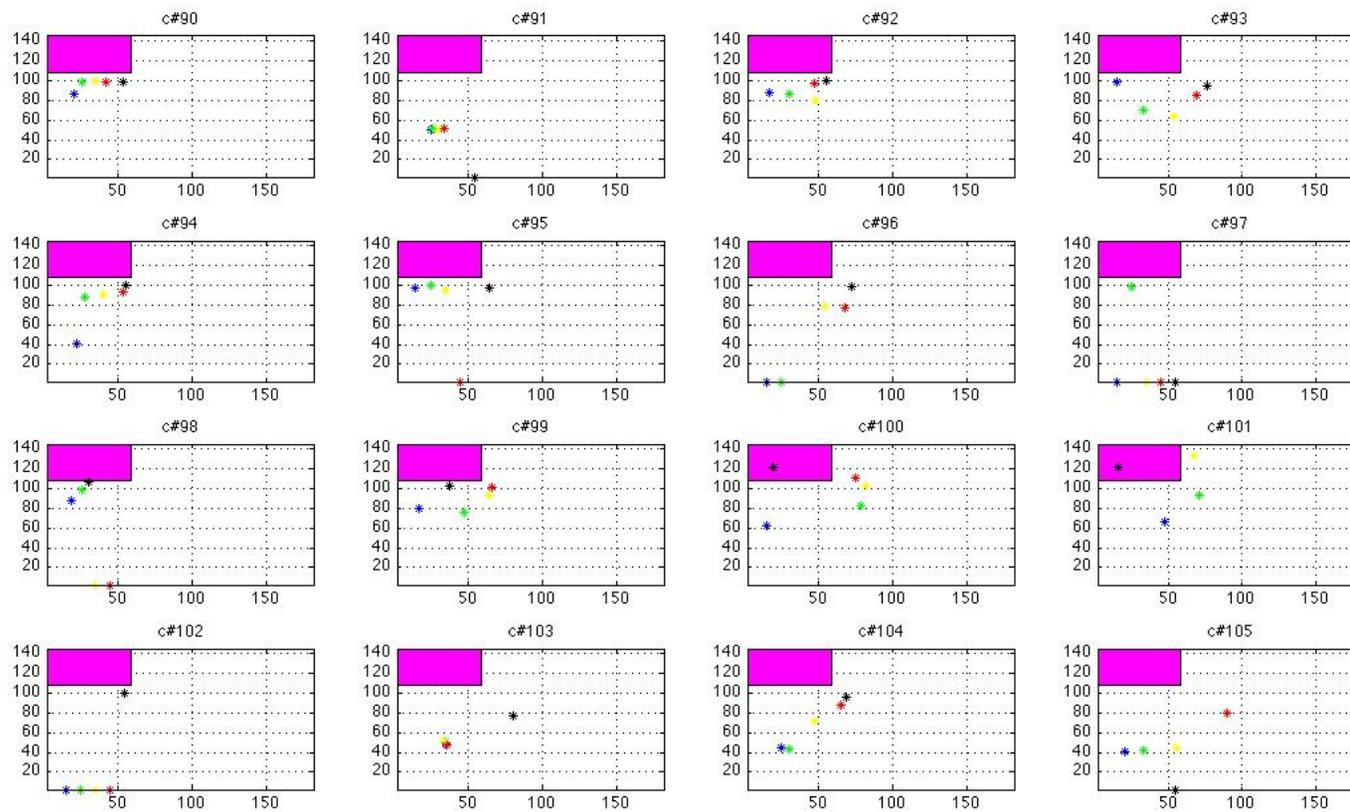


Figura 4.27: Zona de influencia del difusor chico, para 16 distintos instantes, cuando el flujo oscilatorio tiene una frecuencia de 0.68 Hz y una amplitud de 85 mm.

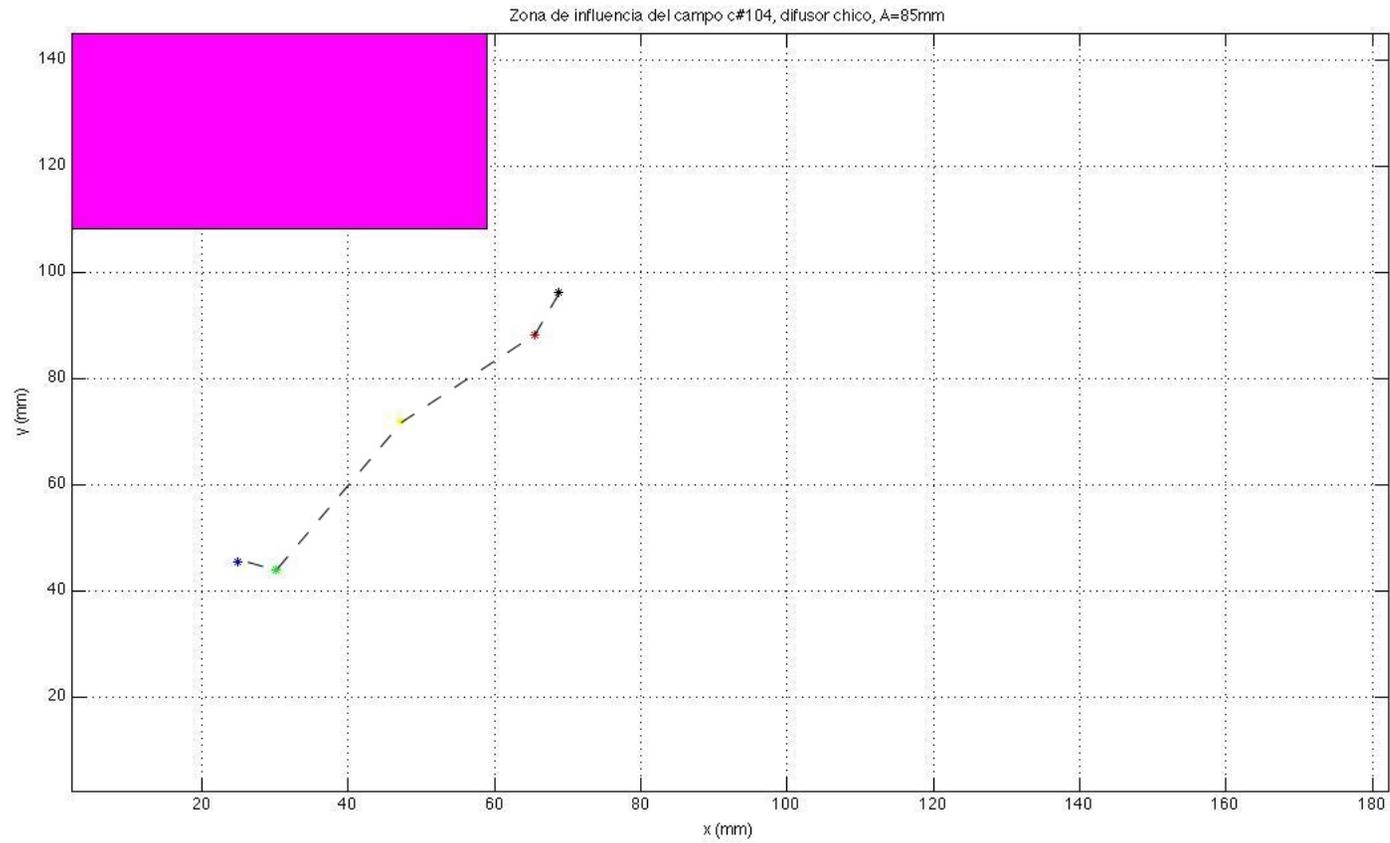


Figura 4.28: Se muestra el campo #104 del flujo oscilatorio con el difusor chico, frecuencia 0.68 Hz y una amplitud de 85 mm para observar la zona de influencia con mayor detalle.

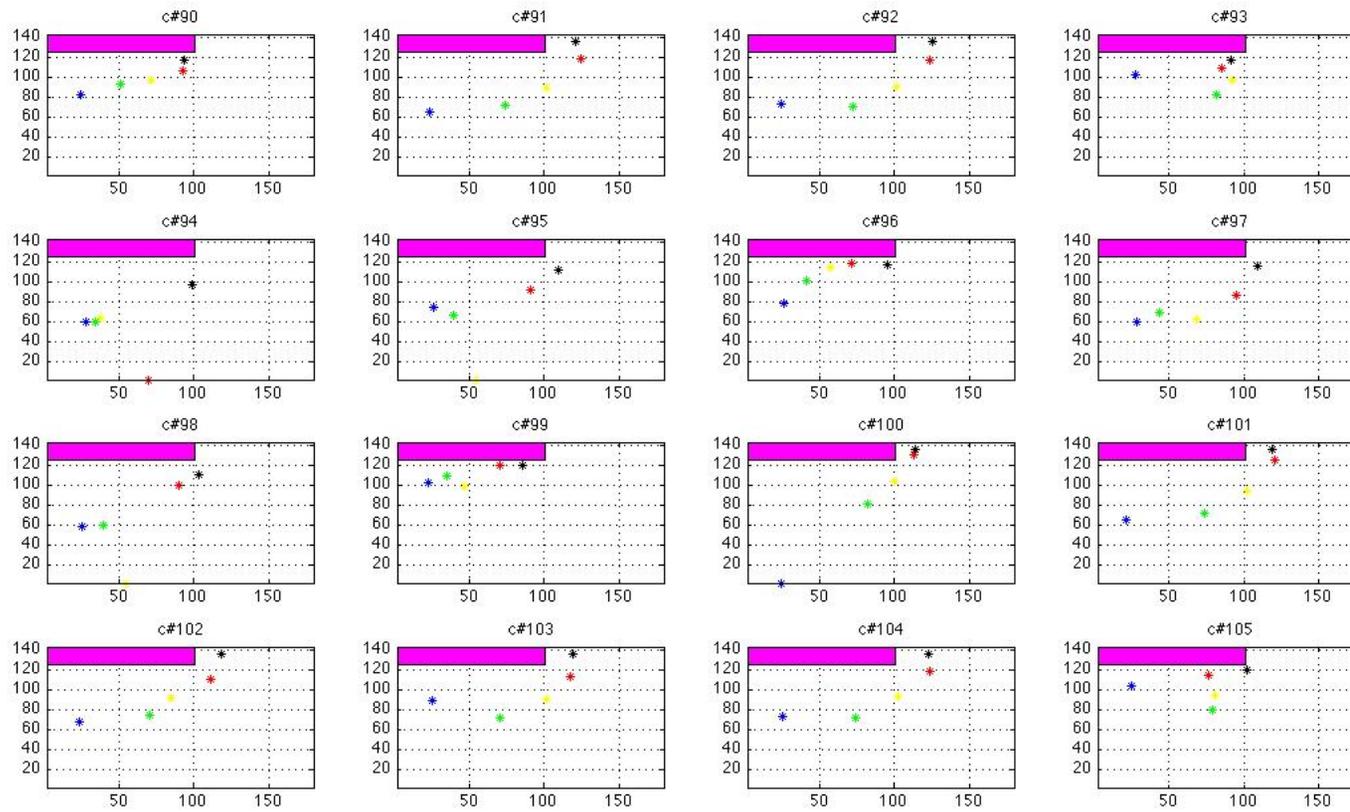


Figura 4.29: Zona de influencia del difusor grande, para 16 distintos instantes, cuando el flujo oscilatorio tiene una frecuencia de 0.68 Hz y una amplitud de 35 mm.

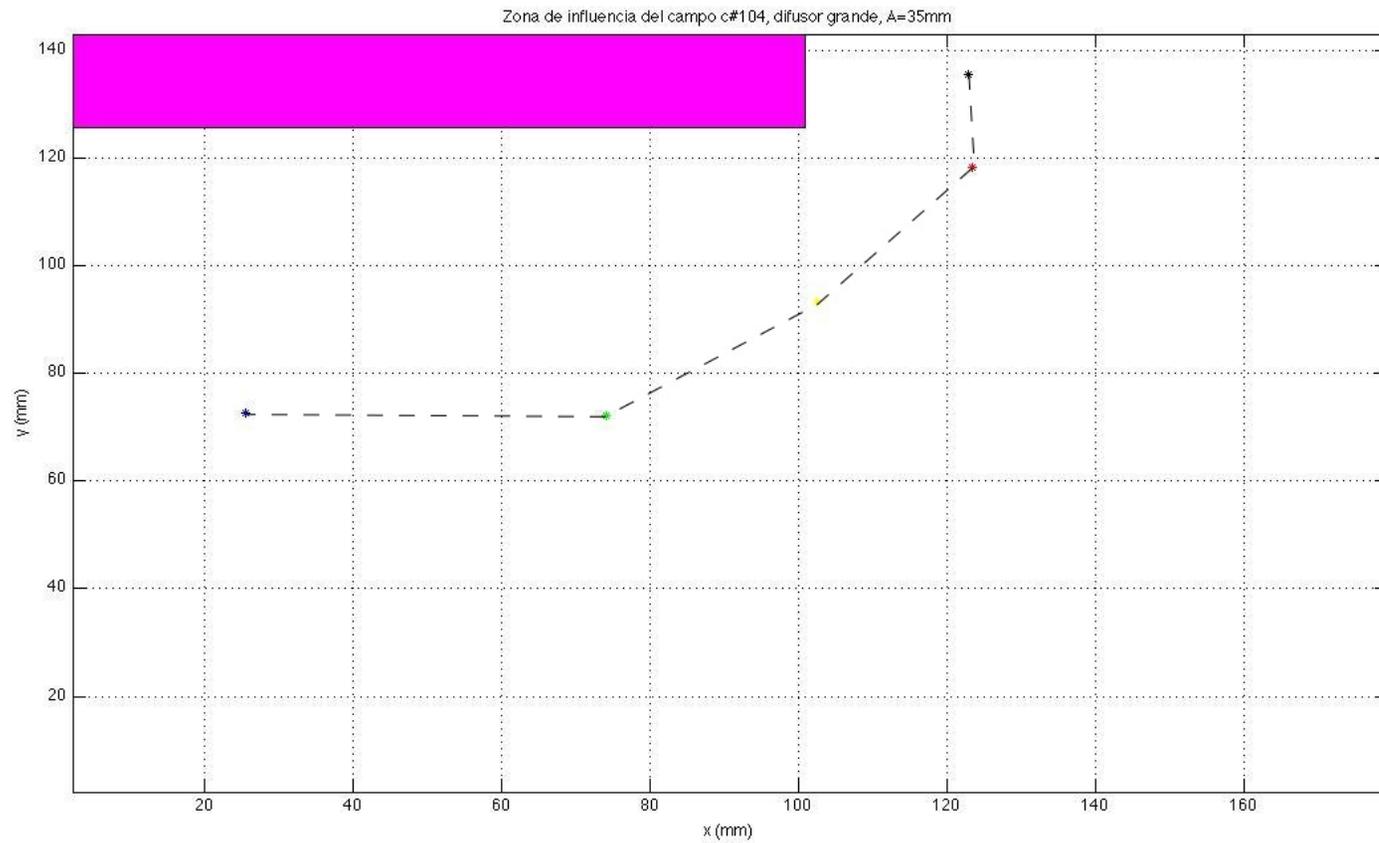


Figura 4.30: Se muestra el campo #104 del flujo oscilatorio con el difusor grande, frecuencia 0.68 Hz y una amplitud de 35 mm para observar la zona de influencia con mayor detalle.



Figura 4.31: Zona de influencia del difusor grande, para 16 distintos instantes, cuando el flujo oscilatorio tiene una frecuencia de 0.68 Hz y una amplitud de 50 mm.

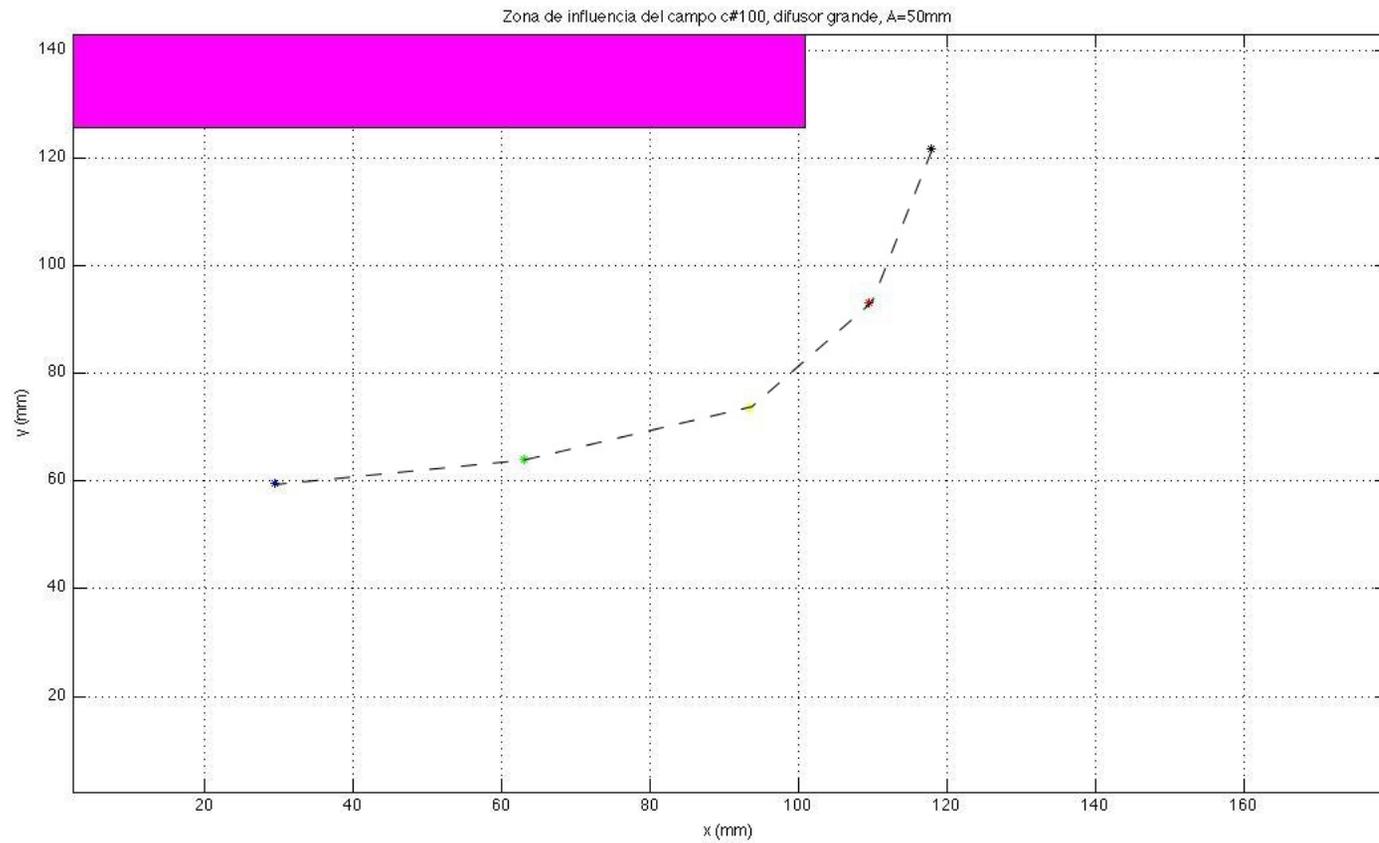


Figura 4.32: Se muestra el campo #100 del flujo oscilatorio con el difusor grande, frecuencia 0.68 Hz y una amplitud de 50 mm para observar la zona de influencia con mayor detalle.



Figura 4.33: Zona de influencia del difusor grande, para 16 distintos instantes, cuando el flujo oscilatorio tiene una frecuencia de 0.68 Hz y una amplitud de 65 mm.

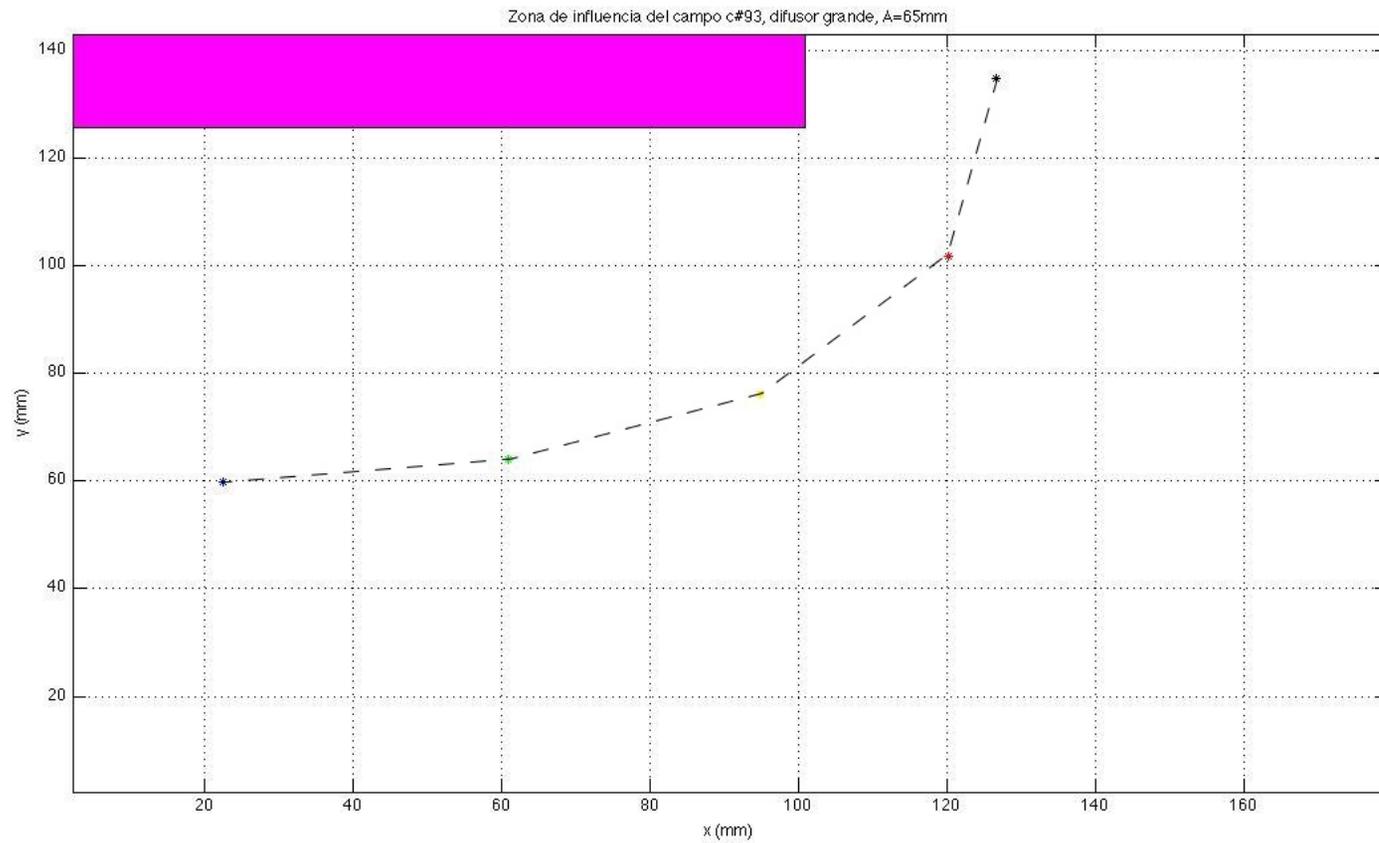


Figura 4.34: Se muestra el campo #93 del flujo oscilatorio con el difusor grande, frecuencia 0.68 Hz y una amplitud de 65 mm para observar la zona de influencia con mayor detalle.

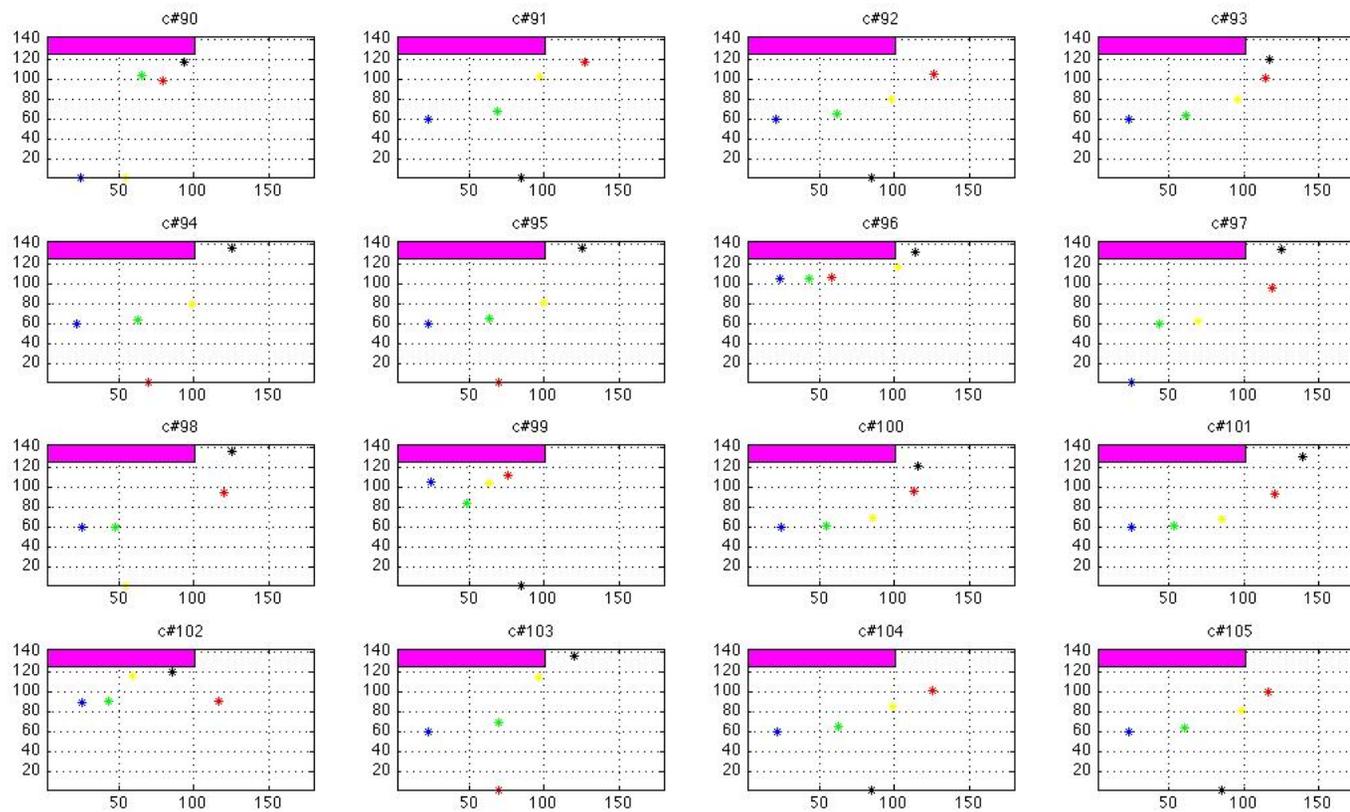


Figura 4.35: Zona de influencia del difusor grande, para 16 distintos instantes, cuando el flujo oscilatorio tiene una frecuencia de 0.68 Hz y una amplitud de 85 mm.

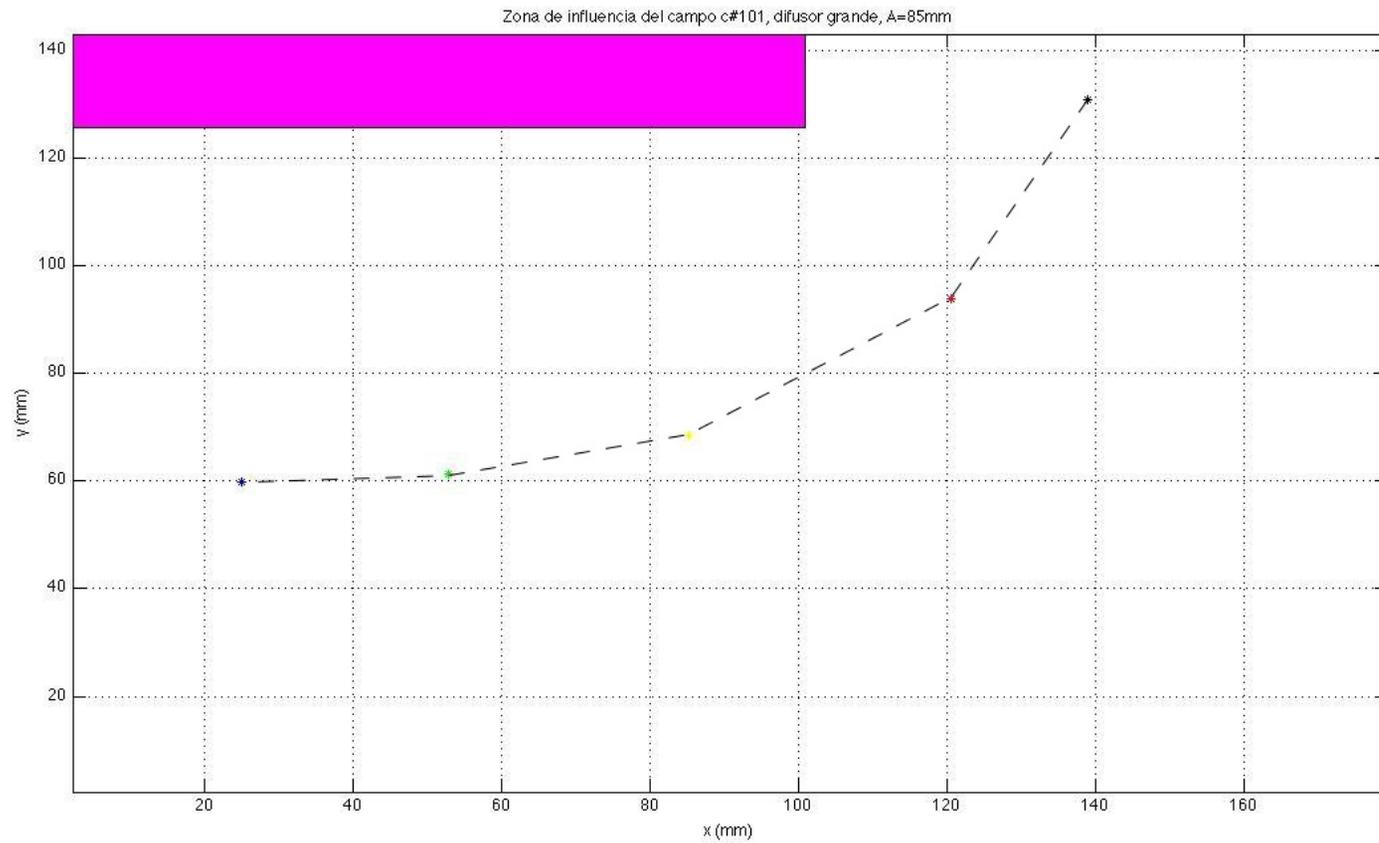


Figura 4.36: Se muestra el campo #101 del flujo oscilatorio con el difusor grande, frecuencia 0.68 Hz y una amplitud de 85 mm para observar la zona de influencia con mayor detalle.

5

Conclusiones y perspectivas

Para finalizar este trabajo se presentan, en secciones separadas, las conclusiones alcanzadas con base en los resultados experimentales obtenidos y las perspectivas para trabajos futuros que se desprenden del análisis de las mismas. Esta separación tiene como finalidad presentar primero el contraste entre los resultados obtenidos con las preguntas e hipótesis formuladas en el planteamiento del trabajo, para identificar qué preguntas se contestaron (y cuál es su respuesta) y cuáles hipótesis parecen confirmarse. Una vez hecho esto, se pueden reconocer las preguntas que quedaron sin respuesta u otras preguntas que surgieron a partir de los resultados; lo cual conduce al planteamiento de otros trabajos y al reconocimiento de posibles aplicaciones de los resultados obtenidos en el presente trabajo en otras indagaciones relacionadas.

5.1. Conclusiones

En el capítulo 2, se expuso el planteamiento del presente trabajo. Ésta parte de dos de las conclusiones a las que llegaron Czitrom *et al* después de contrastar el modelo del flujo en el SIBEO [5] con algunos resultados experimentales [7]. Dichas conclusiones son que la introducción de una boca en forma de trompeta (o difusor) en el conducto resonante incrementa el flujo a través de la bomba y que el valor del parámetro ϵ que hace que el modelo reproduzca adecuadamente el comportamiento real del SIBEO, para cualquier tasa de flujo, es 0.06. Como se ha mencionado a lo largo de este trabajo, dicho valor -bajo una hipótesis particular- se puede interpretar como la cantidad extra de fluido que se mueve fuera del conducto por efecto de la oscilación y que es equivalente a la masa de agua que oscilaría al extender la longitud del conducto un 6 %.

Respecto a lo anterior, en el presente trabajo se formularon las siguientes preguntas: 1) ¿por qué se obtiene un valor constante para la masa añadida a cualquier razón de flujo en el SIBEO?, 2) ¿de qué depende este valor? y 3) ¿se satisface la equivalencia $\int_c^d \frac{\partial u}{\partial t} dl = \epsilon L \ddot{z}$?; es decir, ¿la masa añadida escala con el largo del conducto?.

A partir de lo discutido en la sección 1.3.2, se puede inferir directamente que la

forma y el tamaño de la boca del conducto resonante deben influir en el valor de la masa añadida (calculada con la ecuación 1.19) dado que la trayectoria Γ de una línea central del flujo en el conducto se modifica en función de la forma y el tamaño de la trompeta. Esta inferencia es consistente con los resultados obtenidos por Czitrom *et al* en [7], ya que en sus experimentos sólo utilizaron una trompeta o difusor para el conducto resonante. Pero, por otro lado, en la ecuación (1.19) se observa que la masa añadida está relacionada con la variación temporal del campo de velocidades a lo largo de la trayectoria Γ . Por lo anterior y en principio, podría esperarse que las características del flujo (como la amplitud y la frecuencia de la oscilación) influyeran en el valor de la masa añadida; aunque los resultados reportados por Czitrom *et al* sugieren lo contrario.

Para responder la primera pregunta se generaron experimentalmente distintos flujos oscilantes (manteniendo la misma frecuencia y cambiando la amplitud) a través de un tubo con la misma boca en forma de trompeta y se midieron los campos de velocidades instantáneos utilizando la técnica PIV. Con base en esta información y en la ecuación (4.1), se desarrolló un algoritmo numérico que permitió calcular explícitamente la masa añadida y, por tanto, el parámetro ϵ asociado a cada flujo generado.

Para responder la segunda pregunta y explorar la dependencia o independencia de la masa añadida en las variables del sistema, se compararon valores de la masa añadida obtenidos para un mismo flujo oscilante, con amplitud y frecuencia determinada, en tubos con distintas bocas en forma de trompeta (o difusores). Para ello se revisaron y refinaron los argumentos con los que Czitrom en [9] determinó el perfil del difusor que usaron en sus experimentos, dado que su deducción no proporcionaba un criterio para decidir el largo o el tamaño de las trompetas. Con base en una nueva deducción desarrollada como parte del presente trabajo y mediante la cual el largo de las trompetas queda definido, se construyeron dos difusores de diferente tamaño para analizar el comportamiento de los flujos oscilantes en la boca de los tubos con y sin difusor.

La tercera pregunta se responde con base en los resultados obtenidos en las preguntas anteriores y en la comparación con los resultados obtenidos por Czitrom *et al*.

De manera más específica, se generaron experimentalmente flujos oscilantes de agua en tubos con y sin difusor en la boca con la finalidad de:

- Verificar si existe una correspondencia entre los valores medidos de la masa añadida y las suposiciones hechas acerca de ella en el modelo del flujo del SIBEO; esto es, verificar si el comportamiento de la cantidad $\partial u / \partial t$, parametrizada con la longitud de la curva l , coincide cualitativamente con la gráfica de la figura 1.5 y si efectivamente se satisface la relación de proporcionalidad establecida en la ecuación (1.19).
- Explorar si el valor de la masa añadida cambia al modificar la amplitud o la frecuencia de los flujos y la geometría de la trompeta para relacionarlos con

el “desempeño” del tubo correspondiente (medido como el tiempo de amortiguamiento al dejar oscilar libremente al agua) y compararlos con el valor de la masa añadida que hace que el comportamiento del SIBEO modelado y el real coincidan para cualquier razón de flujo.

Los resultados mostrados en la sección 4.2 indican que el comportamiento de la cantidad $\partial u/\partial t$ coincide cualitativamente con la gráfica de la figura 1.5 sólo para los tubos con difusor en la boca. Esto se debe a que en el tubo sin difusor, la formación y el desprendimiento de vórtices hace que dicha cantidad no se comporte de manera monótonica como función de la longitud de la línea de corriente central, recorrida desde la boca del tubo hacia afuera.

Los resultados de la misma sección sugieren que, para los flujos en los tubos con difusor, la masa añadida se comporta efectivamente como una función periódica y parece satisfacer una relación de proporcionalidad como la propuesta en la ecuación (4.2) con la cantidad \tilde{z} para cada difusor; independientemente de las características del flujo (al menos en el rango analizado).

Respecto a los valores de la constante de proporcionalidad β para los tubos con difusor resulta que:

1. Los valores de β obtenidos con los tubos utilizados en los experimentos realizados para este trabajo -de alrededor de 200 mm de largo-, son del mismo orden que el valor de β ($=\epsilon \cdot L$) para el tubo utilizado por Czitrom *et al* -de 4000 mm de largo, un orden de magnitud mayor- ; siendo que los diámetros de los tubos, la amplitud y frecuencia de los flujos en ambos casos fueron del mismo orden y sólo se diferenciaron ampliamente en el largo del tubo¹. Por lo anterior, se puede concluir que la constante β no escala con el largo; es decir, no es igual a ϵL y que los efectos de borde están relacionados únicamente con la geometría local del difusor. De hecho, dicha suposición resulta cuestionable considerando que la masa añadida está relacionada con los efectos de borde a la salida del conducto o del tubo, por lo que el largo del tubo no debería afectar dicho comportamiento. Una de sus implicaciones sería que la influencia de la columna de agua oscilante sobre el flujo circundante se incrementarían de manera proporcional conforme lo hiciera el largo del conducto; independientemente de la amplitud o del radio del mismo.
2. Para el tubo con el difusor grande los valores de la masa añadida y de β son menores que para el tubo con el difusor chico; sugiriendo que el difusor grande atenúa más la formación de vórtices y de aceleración del flujo a la salida del tubo. Los resultados de la secciones 4.1, 4.2 y 4.3 sugieren, en conjunto, que

¹En el trabajo de Czitrom *et al* los flujos generados tuvieron amplitudes cercanas a 50 mm y frecuencias de oscilación del orden de 0.44 Hz, mientras que en el presente trabajo se reprodujeron flujos con amplitudes entre 35 mm y 85 mm y frecuencia de oscilación de 0.68 mm. El largo y diámetro de los conductos resonantes (o su equivalente en el dispositivo experimental utilizado para el presente trabajo) fueron $L = 4000 \text{ mm}$ y $D = 50 \text{ mm}$ en el estudio de Czitrom *et al* y $L \sim 200 \text{ mm}$ y $D \sim 25,4 \text{ mm}$ en el presente.

con el difusor grande se generan menos vórtices a la salida del la boca del tubo (el tiempo de decaimiento de la oscilación libre es ligeramente mayor), que no se desprenden y que el flujo está menos acelerado y más ordenado (la zona de influencia aparece más cerca de la boca del tubo).

Siguiendo con el argumento, en la sección 2 se mostró la deducción de la ecuación que establece las condiciones que se deben mantener para que exista un balance de momento a lo largo de una línea de corriente central en el conducto resonante del SIBEO (1.13). Dicha ecuación se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}u^2\right)_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} + \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \nu(\nabla^2 \vec{u}) \cdot d\vec{l}. \quad (5.1)$$

Escrita así, la expresión anterior permite identificar que un cambio en el largo o en la forma de la boca del conducto no afecta al primer término del lado izquierdo de la igualdad, ya que éste sólo depende de los valores de la presión, del potencial gravitacional y de la velocidad evaluados en los extremos de la trayectoria Γ que no se modifican al alterar la boca del conducto. Sin embargo, el mismo cambio sí afectaría -al menos en una parte- a los otros dos términos ya que las integrales en ambos dependen de la trayectoria sobre la línea de corriente. Por lo tanto, dado que el primer término sólo depende de los extremos de la línea de corriente y no de la trayectoria, se deduce que el cambio que produzca un aumento en el segundo término o en la masa añadida producirá consecuentemente un aumento en el término del lado derecho o en las pérdidas y viceversa.

Considerando lo anterior, el cálculo de la masa añadida es una medición indirecta de las pérdidas en el sistema. Los resultados mostrados en la sección 4.2 sugieren entonces que las pérdidas en el tubo sin difusor son mayores que en los tubos con difusor y, aparentemente, en el tubo con el difusor chico mayores que en tubo con el difusor grande. Esto tiene sentido ya que el perfil de los difusores se determinó al imponer un balance entre las fuerzas centrípetas e inerciales para el fluido (pensado como ideal) moviéndose en la frontera del difusor. Para el difusor grande esta condición se mantiene por más tiempo, haciendo menos abrupto el cambio para el fluido al entrar o salir del tubo, lo cual es congruente con observar menos pérdidas de energía.

Con base en la misma interpretación anterior y dado que la masa añadida parece no depender de las características del flujo sino del difusor, se puede concluir que las condiciones de optimización del funcionamiento del SIBEO se obtendrían al introducir el difusor que minimizara el valor de la masa añadida, ya que con ello se estarían minimizando las pérdidas de energía en el sistema, siempre y cuando no haya desprendimiento de vórtices.

Por último, en la sección 1.3 se presentó la condición

$$\begin{aligned}
 - \left[\frac{p_{atm} - \rho g H}{\rho} \left(\left(1 - \frac{Az}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right) + gz + \frac{\dot{z}^2}{2} \right] + [z + L(1 + \epsilon)] \ddot{z} \\
 + \left[\frac{\kappa}{2} + f \frac{L}{D} + C_r \right] \dot{z} |\dot{z}| = 0,
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

que se debe cumplir a lo largo de una línea de corriente central del conducto resonante del SIBEO. Para obtenerla, Czitrom *et al* introdujeron hipótesis sobre la forma en la que varía la cantidad $\partial u / \partial t$ a lo largo de la línea de corriente y sobre la forma funcional de las pérdidas. En particular estas hipótesis están relacionadas con la introducción de cuatro parámetros libres: ϵ relacionado con la masa añadida, f es un coeficiente asociado a las pérdidas por fricción para flujos oscilantes dentro de un tubo, κ es el coeficiente de perdidas de energía por formación de vórtices y C_r es el coeficiente de amortiguamiento por radiación. En dicho modelo del flujo, estos cuatro parámetros se consideran parámetros libres que se ajustan para reproducir el desempeño real de la bomba a cualquier razón de flujo y que, en principio, son independientes entre sí.

Como ya se mencionó, la primera implicación de los resultados de este trabajo sobre dicho modelo sería que el término $\epsilon L \ddot{z}$ debería sustituirse por $\beta \ddot{z}$, donde la forma funcional o la dependencia de β quedaría por determinarse.

La segunda implicación sería que, después de las exploraciones anteriores, es probable que aparezca un parámetro libre relacionado con la masa añadida. Dicho parámetro, entonces, no sería necesariamente independiente de los parámetros f , κ y C_r , como se supone en principio en el modelo considerado por Czitrom *et al*. Si se encontrara una relación de este parámetro con la geometría del difusor, al considerar de nuevo que la masa añadida y las pérdidas no son independientes entre sí con base en la ecuación (5.1), implicaría que los otros parámetros también deberían estarlo.

5.2. Perspectivas

Con base en lo señalado en la sección anterior quedan sin responder, fundamentalmente, las siguientes dos preguntas:

1. ¿de qué depende o con qué está relacionado la constante de proporcionalidad β ? Es decir, cómo depende del flujo y de la geometría del tubo y/o del difusor la masa añadida. La relevancia de esta pregunta reside en el hecho de que se mostró que la masa añadida puede considerarse como una medida indirecta de las pérdidas y, por tanto, un difusor que minimice la masa añadida minimiza las pérdidas.
2. ¿cuál es la relación entre la cantidad β y los parámetros f , κ y C_r ? De nuevo, dado que se mostró que la masa añadida es una medida indirecta de las pérdidas

y que su valor queda definido al utilizar un difusor específico, implica que la elección del difusor no sólo define el valor de β sino también de f , κ y C_r .

Teniendo en mente el propósito de optimizar el comportamiento del SIBEO, ambas preguntas pueden responderse si se utilizan los datos experimentales obtenidos en este trabajo para validar simulaciones numéricas de los flujos oscilantes en el conducto resonante. Lo anterior permitiría probar, entonces, geometrías y tamaños de difusores en la boca del conducto para encontrar cual de ellas minimiza la masa añadida y las pérdidas. Las mismas simulaciones permitirían también explorar la relación entre los parámetros del modelo al cambiar la geometría y el tamaño del difusor.

Apéndice A

Rutinas numéricas

A.1. Rutina para calcular el perfil de los difusores

A continuación se muestra la rutina para Matlab que permite determinar los puntos (x, y) que definen el perfil de una trompeta o difusor utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver las ecuaciones que definen implícitamente al perfil; estas son (3.6) y (3.7).

Los parámetros de la rutina son el diámetro inicial del difusor D , el valor del paso utilizado por el método de Runge-Kutta de cuarto orden h y el valor de la constante α' . Modificando esta misma rutina, se puede variar dentro de un intervalo definido de valores el parámetro α' para obtener distintos diámetros finales del perfil.

```
perfil.m

format long
Archgr1 = input ( 'Nombre del archivo donde guardar los datos: ', 's' );
fid = fopen( [ Archgr1 '.txt'], 'wt' );
D = input( 'Valor del diametro inicial de la trompeta D=' );
yno = D/2;
xno=0;
ypno=0;
h = input( 'Valor de incremento en el paso h= ' );
alfa = input( 'Valor de parametro alfa=' );

xn=xno;
yn=yno;
ypn=ypno;
i=1;
while ypn <= 0.1
    x = xn;
    y = yn;
    yp = ypn;
```

```

g = alfa*(y^2)*[1+(yp^2)]^2;
g = g/[2*(D/2)^2];

g0 = h*g;

x = xn+(0.5)*h;
y = yn+(0.5)*h*ypn;
yp = ypn+(0.5)*g0;
g = alfa*(y^2)*[1+(yp^2)]^2;
g = g/[2*(D/2)^2];

g1 = h*g;

x = xn+(0.5)*h;
y = yn+(0.5)*h*ypn +(0.25)*h*g0;
yp = ypn+(0.5)*g1;
g = alfa*(y^2)*[1+(yp^2)]^2;
g = g/[2*(D/2)^2];

g2 = h*g;

x = xn+h;
y = yn+h*ypn +(0.5)*h*g1;
yp = ypn+g2;
g = alfa*(y^2)*[1+(yp^2)]^2;
g = g/[(D/2)^2];

g3 = h*g;

xn = xn+h;
yn = yn+h*ypn+h*(g0+g1+g2)/6;
ypn = ypn+(g0+2*g1+2*g2+g3)/6;

fprintf(fid,'%f',i);
fprintf(fid,'\t%6.7f',xn);
fprintf(fid,'\t%6.7f',yn);
fprintf( fid, '\n' );

i=i+1;
end;

xpn = 1/ypn;
j=i;

```

```

while xn > 0
  y = yn;
  x = xn;
  xp = xpn;
  g = alfa*(y^2)*[1+(xp^2)]^2*[sqrt(1+(xp^2))-xp];
  g = -g/[(D/2)^2];

  g0 = h*g;

  y = yn+(0.5)*h;
  x = xn+(0.5)*h*xpn;
  xp = xpn+(0.5)*g0;
  g = alfa*(y^2)*[1+(xp^2)]^2*[sqrt(1+(xp^2))-xp];
  g = -g/[(D/2)^2];

  g1 = h*g;

  y = yn+(0.5)*h;
  x = xn+(0.5)*h*xpn +(0.25)*h*g0;
  xp = xpn+(0.5)*g1;
  g = alfa*(y^2)*[1+(xp^2)]^2*[sqrt(1+(xp^2))-xp];
  g = -g/[(D/2)^2];

  g2 = h*g;

  y = yn+h;
  x = xn+h*xpn +(0.5)*h*g1;
  xp = xpn+g2;
  g = alfa*(y^2)*[1+(xp^2)]^2*[sqrt(1+(xp^2))-xp];
  g = -g/[(D/2)^2];

  g3 = h*g;

  yn = yn+h;
  xn = xn+h*xpn+h*(g0+g1+g2)/6;
  xpn = xpn+(g0+2*g1+2*g2+g3)/6;

  fprintf(fid,'%f',j);
  fprintf(fid,'\t%6.7f',xn);
  fprintf(fid,'\t%6.7f',yn);
  fprintf( fid, '\n' );

  j=j+1;

```

```
end;
fclose( fid );
```

A.2. Rutina para calcular la masa añadida

A continuación se muestra la rutina para Matlab que carga los valores de los campos instantáneos de velocidades (obtenidos mediante la técnica PIV) y que permite para el tubo con el difusor pequeño:

- Visualizar el comportamiento global de los campos instantáneos al mostrar el campo de vorticidad (calculado a través de diferencias finitas) y algunas de las líneas de corriente del flujo (determinadas como las curvas de nivel de función corriente calculada con Regla Simpson.
- Determina el valor de $\partial u/\partial t$ como función de la longitud de la curva l para cinco líneas de corriente parametrizadas, utilizando los datos del campo de velocidades instantáneo en cuestión (a t) y del siguiente (a $t + 0,250$ s). Los puntos $(x(l), y(l))$ que pertenecen a cada línea de corriente al tiempo t se calculan usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden e interpolando linealmente. Todas las líneas de corriente tienen la misma longitud a menos que alcance la frontera de la malla.
- Determina la masa añadida, o la integral, de las cinco curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ”, en el instante en cuestión.
- Repite este proceso para una secuencia temporal determinada. En cada instante t de la secuencia se muestra una figura con seis gráficas. En ella se observa a) en la gráfica superior izquierda el campo de vorticidad, b) en la gráfica superior central 15 las líneas de corriente, c) en la gráfica superior derecha la componente vertical del campo de velocidades en la boca del tubo para identificar el momento de la oscilación, d) en la gráfica inferior izquierda las curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para las cinco líneas de corriente, e) en la gráfica inferior derecha muestra el valor de la masa añadida e función del valor de la cantidad $\partial u/\partial t$ al inicio de cada línea de corriente y f) en la gráfica inferior derecha se muestra el valor de la masa añadida como función de la coordenada x inicial de cada línea de corriente.
- Con base en los resultados obtenidos en toda la secuencia temporal, se calcula el valor máximo que alcanza la cantidad $\partial u/\partial t$ durante toda la secuencia y en las cinco líneas de corriente analizadas, con la finalidad de determinar la cota mínima -el 10 % de dicho valor- para establecer la zona de influencia.
- Se calcula el punto (x, y) en cada línea de corriente a partir del cual la cantidad $\partial u/\partial t$ es menor o igual a la cota mínima que define la zona de influencia.

Los datos están en mm, seg y mm/seg y los parámetros de la rutina son la secuencia de campos a analizar (relacionado también con e flujo analizado). Hay una rutina análoga a esta para el tubo con el difusor grande.

```
ma_tch.m

clear all;
close all;

archcomun = input( 'Parte comun del nombre de los archivos:', 's');
namin = input( 'Numero del primer archivo del conjunto a analizar=');
namax = input( 'Numero del ultimo archivo del conjunto a analizar=');

archsaldida = input( 'Nombre del archivo donde guardar los datos:', 's');
fid = fopen( [archsaldida '.txt'], 'wt' );

%Numero de curvas de nivel para función corriente y para vorticidad
n=15;

%Longitud máxima de de las líneas de corriente
svectmax=60;

%Valores iniciales para las líneas de corriente (depende de difusor)
xoinicial=15;
xofinal=55;
xopaso=10;
yoinicial=100;

imin=1;
jmin=1;
imax = 79;
jmax = 63;

xmin =2.30544;
ymin =2.30544;
xmax =182.13;
ymax =145.243;

%Incremento en mm
hx = xmax/imax;
hy = ymax/jmax;

for i=1:imax,
    x(i)=xmin+(i-1)*hx;
```

```
end;

for j=1:jmax;
    y(j)=ymin+(j-1)*hy;
end;

ivec=imin:1:imax;
jvec=jmin:1:jmax;

%Datos de la máscara (relacionado con difusor)
xmmin = xmin;
ymmin = 108.4;
ancho = 58.9-xmmin;
alto = ymax-ymmin;

for na=namin:namax,
    na

    nomarch = [archcomun sprintf('%04d',na)];
    eval ( ['load ' nomarch '.txt'] );
    nomarchp = [archcomun sprintf('%04d',na+1)];
    eval ( ['load ' nomarchp '.txt'] );

    close all;
    clear i;
    clear j;
    clear um;
    clear vm;
    clear ump;
    clear vmp;
    clear psisa;
    clear psisb;
    clear vort;
    clear xvectborde;
    clear yvectborde;
    clear uborde;
    clear vborde;
    clear xpmatriz;
    clear ypmatriz;
    clear dvnmatriz;
    clear tt;
    clear ttreng;
    clear ttcolumn;
```

```

clear absdvn;
clear maxabsdvn;
clear czi;

for j=1:jmax,
    for i=1:imax,
        eval( ['um(j,i)= ' nomarch '( ((j-1)*imax)+i , 9 );'] );
        eval( ['vm(j,i)= ' nomarch '( ((j-1)*imax)+i , 10 );'] );
        eval( ['ump(j,i)= ' nomarchp '( ((j-1)*imax)+i , 9 );'] );
        eval( ['vmp(j,i)= ' nomarchp '( ((j-1)*imax)+i , 10 );'] );
    end;
end;

%Cambio velocidad de m/s a mm/s
u=1000*um;
v=1000*vm;
up=1000*ump;
vp=1000*vmp;

%Cálculo de la vorticidad al tiempo t
for i=1:imax-1,
    for j=1:jmax-1,
        vort(j,i)=(u(j+1,i)-u(j,i))-(v(j,i+1)-v(j,i));
    end;
end;
for i=2:imax,
    vort(jmax,i)=(u(jmax,i)-u(jmax-1,i))-(v(jmax,i)-v(jmax,i-1));
end;
for j=2:jmax,
    vort(j,imax)=(u(j,imax)-u(j-1,imax))-(v(j,imax)-v(j,imax-1));
end;
vort(jmax,1)=(u(jmax,1)-u(jmax-1,1))-(v(jmax,2)-v(jmax,1));
vort(1,imax)=(u(2-1,imax)-u(1,imax))-(v(1,imax)-v(1,imax-1));

%Subrutina para sacar funcion psi, ver líneas de corriente
%y escoger varias:
h = 1;
psiso = 0;

%Cálculo "psisa": psi calculada con simpson variando renglones,
% i.e. variando j
psisa(1,1)=psiso;

```

```

%Cálculo de primera columna de psisa
psisa(3,1)=psisa(1,1)+(1/3)*h*(u(1,1)+4*u(2,1)+u(3,1));
psisa(4,1)=psisa(1,1)+(3/8)*h*(u(1,1)+3*u(2,1)+3*u(3,1)+u(4,1));
psisa(2,1)=psisa(4,1)-(1/3)*h*(u(2,1)+4*u(3,1)+u(4,1));
for j=5:jmax,
    psisa(j,1)=psisa(j-2,1)+(1/3)*h*(u(j-2,1)+4*u(j-1,1)+u(j,1));
end;
%Primer renglon de psisa
psisa(1,3)=psisa(1,1)-(1/3)*h*(v(1,1)+4*v(1,2)+v(1,3));
psisa(1,4)=psisa(1,1)-(3/8)*h*(v(1,1)+3*v(1,2)+3*v(1,3)+v(1,4));
psisa(1,2)=psisa(1,4)+(1/3)*h*(v(1,2)+4*v(1,3)+v(1,4));
for i=5:imax,
    psisa(1,i)=psisa(1,i-2)-(1/3)*h*(v(1,i-2)+4*v(1,i-1)+v(1,i));
end;

%Cálculo de psisa(j,i) variando renglones a partir de psisa(1,i)
for i=1:imax,
    psisa(3,i)=psisa(1,i)+(1/3)*h*(u(1,i)+4*u(2,i)+u(3,i));
    psisa(4,i)=psisa(1,i)+(3/8)*h*(u(1,i)+3*u(2,i)+3*u(3,i)+u(4,i));
    psisa(2,i)=psisa(4,i)-(1/3)*h*(u(2,i)+4*u(3,i)+u(4,i));
    for j=5:jmax,
        psisa(j,i)=psisa(j-2,i)+(1/3)*h*(u(j-2,i)+4*u(j-1,i)+u(j,i));
    end;
end;

figure(1);
subplot(2,3,2);
contour(x,y,psisa,n);
axis([xmin xmax ymin ymax]);
rectangle('Position',[xmmin,ymmin,ancho,alto],
    'Curvature',[0,0],'FaceColor','w');
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
xlabel('x (mm)');
ylabel('y (mm)');
title([' Difusor chico, amplitud 35 mm, c#' num2str(na) ]);
drawnow;

figure(1);
subplot(2,3,1);
contourf(x,y,vort,n);
axis([xmin xmax ymin ymax]);
rectangle('Position',[xmmin,ymmin,ancho,alto],
    'Curvature',[0,0],'FaceColor','w');

```

```
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
xlabel( 'x (mm)' );
ylabel( 'y (mm)' );
drawnow;
hold on;

normcamp = (u.^2+v.^2).^(0.5);
vnmax = max(max(normcamp));
hmax = max(hx,hy);
dsmax = hmax/vnmax;
ds=dsmax;

wo=1;

for m = xoinicial:xopaso:xofinal,
    xo = m
    yo = yoinicial;

    w = wo;
    ioinicial=round(((xo-xmin)/hx)+1);
    joinicial=round(((yo-ymin)/hy)+1);
    aa=u(joinicial,ioinicial);
    bb=v(joinicial,ioinicial);
    aabb=(aa^2+bb^2)^(0.5);
    uborde(w)=0;
    vborde(w)=bb;
    xvectborde(w)=m;
    yvectborde(w)=yo;

    so = 1;
    svecti = 0;

    clear svect;
    clear dvn;
    clear delta;
    clear idvn;
    clear xp;
    clear yp;
    clear nds;
    clear s;

    figure(1);
    subplot(2,3,1);
```

```

plot(xo,yo,'k');
drawnow;
hold on;

if bb < 0,
while svecti < svectmax && xo > 5 && xo < 175 && 5
< yo && yo < 140 && so < 300,
    s = so
    svecto = svecti

    k1x = ds*iw(xo,yo,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,u);
    k1y = ds*iw(xo,yo,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,v);

    k2x = ds*iw(xo+0.5*k1x,yo+0.5*k1y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,u);
    k2y = ds*iw(xo+0.5*k1x,yo+0.5*k1y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,v);

    k3x = ds*iw(xo+0.5*k2x,yo+0.5*k2y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,u);
    k3y = ds*iw(xo+0.5*k2x,yo+0.5*k2y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,v);

    k4x = ds*iw(xo+k3x,yo+k3y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,u);
    k4y = ds*iw(xo+k3x,yo+k3y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,v);

    xs = xo+(1/6)*(k1x+2*k2x+2*k3x+k4x);
    ys = yo+(1/6)*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y);

    xp(s)=xs;
    yp(s)=ys;
    xpmatriz(s,w)=xp(s);
    ypmatriz(s,w)=yp(s);
    delta(s)=((xs-xo)^2+(ys-yo)^2)^(0.5);
    svect(s)= svecto + delta(s);

    xo = xs;
    yo = ys;
    so = s+1;
    svecti = svect(s);

    figure(1);
    subplot(2,3,1);
    plot(xo,yo,'k');
    drawnow;
    hold on;
end;

```

```

%Subrutina para calculo de ux(x(1),y(1)) y uy(x(1),y(1))
%para t y t+0.250s
nds = so;
l = sum(delta);
for s=1:nds-1,
    upara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,u);
    vpara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,v);

    uppara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,up);
    vppara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,vp);
end;

%Subrutina para calcular masa añadida
vn=(upara.^2+vpara.^2).^0.5;
vnp=(uppara.^2+vppara.^2).^0.5;

%Delta t=0.250s
for s=1:nds-1,
    dvn(s)=(vnp(s)-vn(s))/(0.250);
    dvnmatriz(s,w)=dvn(s);
end;

figure(1);
subplot(2,3,4);
plot( svect, dvn );
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
set(gca,'XDir','normal','YDir','normal');
xlabel( 'l (mm) ' );
ylabel( 'du/dt (mm/s^2)' );
drawnow;
axis tight;
hold on;

for r=1:nds-2,
    idvn(r)=(0.5)*(delta(r+1))*(dvn(r+1)+dvn(r));
end;

ma=sum(idvn);

figure(1);
subplot(2,3,6);
plot( m, ma, '*' );

```

```

set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
set(gca,'XDir','normal','YDir','normal');
xlabel( 'xo de cada línea (mm)' );
ylabel( 'm.a. (mm^2 / s^2)' );
drawnow;
hold on;

figure(1);
subplot(2,3,5);
plot( dvn(1), ma, '*' );
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
set(gca,'XDir','normal','YDir','normal');
xlabel( 'du/dt en (xo,yo) de cada línea (mm/s^2)' );
ylabel( 'm.a. (mm^2 / s^2)' );
drawnow;
hold on;
else
while svecti < svectmax && xo > 5 && xo < 175 && 5
< yo && yo < 140 && so < 300,
s = so
svecto = svecti

k1x = ds*iw(xo,yo,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-u);
k1y = ds*iw(xo,yo,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-v);

k2x = ds*iw(xo+0.5*k1x,yo+0.5*k1y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-u);
k2y = ds*iw(xo+0.5*k1x,yo+0.5*k1y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-v);

k3x = ds*iw(xo+0.5*k2x,yo+0.5*k2y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-u);
k3y = ds*iw(xo+0.5*k2x,yo+0.5*k2y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-v);

k4x = ds*iw(xo+k3x,yo+k3y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-u);
k4y = ds*iw(xo+k3x,yo+k3y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-v);

xs = xo+(1/6)*(k1x+2*k2x+2*k3x+k4x);
ys = yo+(1/6)*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y);

xp(s)=xs;
yp(s)=ys;
xpmatriz(s,w)=xp(s);
ypmatriz(s,w)=yp(s);
delta(s)=((xs-xo)^2+(ys-yo)^2)^(0.5);
svect(s)= svecto + delta(s);

```

```

        xo = xs;
        yo = ys;
        so = s+1;
        svecti = svect(s);

        figure(1);
        subplot(2,3,1);
        plot(xo,yo,'k');
        drawnow;
        hold on;
end;

%Subrutina para cálculo de ux(x(1),y(1)) y uy(x(1),y(1))
%para t y t+0.250s
nds = so;
l = sum(delta);
for s=1:nds-1,
    upara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,u);
    vpara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,v);

    uppara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,up);
    vppara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,vp);
end;

%Subrutina para calcular masa añadida
vn=(upara.^2+vpara.^2).^0.5;
vnp=(uppara.^2+vppara.^2).^0.5;

%Delta t=0.250s
for s=1:nds-1,
    dvn(s)=(vnp(s)-vn(s))/(0.250);
    dvnmatriz(s,w)=dvn(s);
end;

figure(1);
subplot(2,3,4);
plot( svect, dvn );
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
set(gca,'XDir','normal','YDir','normal');
xlabel( 'l (mm)' );
ylabel( 'du/dt (mm/s^2)' );
drawnow;

```

```

axis tight;
hold on;

for r=1:nds-2,
    idvn(r)=(0.5)*(delta(r+1))*(dvn(r+1)+dvn(r));
end;

ma=sum(idvn);

figure(1);
subplot(2,3,6);
plot( m, ma, '*' );
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
set(gca,'XDir','normal','YDir','normal');
xlabel( 'xo de cada línea (mm)' );
ylabel( 'm.a. (mm^2 / s^2)' );
drawnow;
hold on;

figure(1);
subplot(2,3,5);
plot( dvn(1), ma, '*' );
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
set(gca,'XDir','normal','YDir','normal');
xlabel( 'du/dt en (xo,yo) para cada línea (mm/s^2)' );
ylabel( 'm.a. (mm^2 / s^2)' );
drawnow;
hold on;
end;
wo=w+1;
end;

tt=size(dvnmatriz);
ttreng=tt(1);
ttcolum=tt(2);
absdvn=abs(dvnmatriz);
maxabsdvn=max(max(absdvn));
czi=0.1*maxabsdvn;
for ww=1:ttcolum,
    for ss=1:ttreng,
        if ((absdvn(ss,ww)<=czi) && (absdvn(ss,ww)~=0))==1,
            fprintf( fid, '%f', na);
            fprintf( fid, '\t%f', ww);

```

```

    fprintf( fid, '\t%f', ss);
    if ss==1
        fprintf( fid, '\t%f', absdvn(ss,ww));
        fprintf( fid, '\t%f', xpmatriz(ss,ww) );
        fprintf( fid, '\t%f', ypmatriz(ss,ww) );
        fprintf( fid, '\n' );
        break;
    else
        fprintf( fid, '\t%f', absdvn(ss-1,ww));
        fprintf( fid, '\t%f', xpmatriz(ss-1,ww) );
        fprintf( fid, '\t%f', ypmatriz(ss-1,ww) );
        fprintf( fid, '\n' );
        break;
    end;
elseif ((absdvn(ss,ww)<czi) && (absdvn(ss,ww)==0))==1,
    fprintf( fid, '%f', na);
    fprintf( fid, '\t%f', ww);
    fprintf( fid, '\t%f', ss);
    if ss==1
        fprintf( fid, '\t%f', absdvn(ss,ww));
        fprintf( fid, '\t%f', xpmatriz(ss,ww) );
        fprintf( fid, '\t%f', ypmatriz(ss,ww) );
        fprintf( fid, '\n' );
        break;
    else
        fprintf( fid, '\t%f', absdvn(ss-1,ww));
        fprintf( fid, '\t%f', xpmatriz(ss-1,ww) );
        fprintf( fid, '\t%f', ypmatriz(ss-1,ww) );
        fprintf( fid, '\n' );
        break;
    end;
end;
end;
if all(absdvn(1:ttreng,ww)>czi);
    xczi=xoinicial+10*(ww-1);
    fprintf( fid, '%f', na);
    fprintf( fid, '\t%f',ww);
    fprintf( fid, '\t%f', 0);
    fprintf( fid, '\t%f', 0);
    fprintf( fid, '\t%f', xczi);
    fprintf( fid, '\t%f', ymin);
    fprintf( fid, '\n' );
end;

```

```

end;

figure(1);
subplot(2,3,3);
quiver(xvectborde, yvectborde, uborde, vborde, 0);
title( '"uy en (xo,yo) de cada línea"' );
xlabel( 'xo de cada línea (mm)' );
ylabel( 'y (mm)' );
drawnow;

pause;
end;
fclose( fid );

```

A.3. Rutina para interpolar valores del campo de velocidad

Esta es una subrutina que se utiliza en la rutina `match.m` para interpolar (de manera lineal) los valores del campo en los puntos (x, y) que no pertenecen a la malla. Los parámetros son los valores del campo de velocidad instantáneo que se quiere interpolar en los nodos de la malla espacial.

```

function[winterp]=iw(x,y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,w)

%Para determinar nodos: 1) conversión de posiciones a contadores
ifinal = ceil(((x-xmin)/hx)+1);
iinicial = floor(((x-xmin)/hx)+1);

jfinal = ceil(((y-ymin)/hy)+1);
jinicial = floor(((y-ymin)/hy)+1);

xfinal = xmin+(ifinal-1)*hx;
xinicial = xmin+(iinicial-1)*hx;

yfinal = ymin+(jfinal-1)*hy;
yinicial = ymin+(jinicial-1)*hy;

%Cálculo de lados para rectángulos de interpolación
a = x-xinicial;
b = xfinal-x;
c = y-yinicial;
d = yfinal-y;

```

```
winterp=((b*d)/(hx*hy))*w(jinicial,iinicial)
+((d*a)/(hx*hy))*w(jinicial,ifinal)
          +((b*c)/(hx*hy))*w(jfinal,iinicial)
+((a*c)/(hx*hy))*w(jfinal,ifinal);
```

A.4. Rutina para ver evolución temporal de curvas “ $\partial u/\partial t$ vs l ”

En esta sección se muestra una rutina, esencialmente igual a match.m, que muestra la evolución temporal de la curva “ $\partial u/\partial t$ vs l ” para la línea de corriente central. Sus parámetros de nuevo son valores de los campos de velocidad en los tiempos de la secuencia temporal que se quiere analizar.

```
clear all;
close all;

archcomun = input( 'Parte comun del nombre de los archivos:', 's' );
namin = input( 'Numero del primer archivo del conjunto a analizar=' );
namax = input( 'Numero del ultimo archivo del conjunto a analizar=' );

%Numero de curvas de nivel para funcion corriente y para vorticidad
n=15;

%Longitud máxima de las líneas de corriente
svectmax=60;

%Valores iniciales para las líneas de corriente (depende del difusor)
xoinicial=15;
xofinal=15;
xopaso=1;
yoinicial=100;

imin=1;
jmin=1;
imax = 79;
jmax = 63;

xmin =2.30544;
ymin =2.30544;
xmax =182.13;
ymax =145.243;
```

```

%Incremento en mm
hx = xmax/imax;
hy = ymax/jmax;

for i=1:imax,
    x(i)=xmin+(i-1)*hx;
end;

for j=1:jmax;
    y(j)=ymin+(j-1)*hy;
end;

ivec=imin:1:imax;
jvec=jmin:1:jmax;

%Datos de la máscara (depende del difusor)
xmmin = xmin;
ymmin = 108.4;
ancho = 58.9-xmmin;
alto = ymax-ymmin;

to=1;
for na=namin:namax,
    na
    t=to;

    nomarch = [archcomun sprintf('%04d',na)];
    eval ( ['load ' nomarch '.txt'] );
    nomarchp = [archcomun sprintf('%04d',na+1)];
    eval ( ['load ' nomarchp '.txt'] );

    clear i;
    clear j;
    clear um;
    clear vm;
    clear ump;
    clear vmp;
    clear psisa;
    clear psisb;
    clear vort;
    clear xvectborde;
    clear yvectborde;
    clear uborde;

```

A.4. RUTINA PARA VER EVOLUCIÓN TEMPORAL DE CURVAS “ $\partial U/\partial T$ VS L ” 145

```
clear vborde;
clear xmatriz;
clear ymatriz;
clear tt;
clear ttreneg;
clear ttcolum;
clear absdvn;
clear maxabsdvn;
clear czi;

for j=1:jmax,
    for i=1:imax,
        eval( ['um(j,i)= ' nomarch '( ((j-1)*imax)+i , 9 );'] );
        eval( ['vm(j,i)= ' nomarch '( ((j-1)*imax)+i , 10 );'] );
        eval( ['ump(j,i)= ' nomarchp '( ((j-1)*imax)+i , 9 );'] );
        eval( ['vmp(j,i)= ' nomarchp '( ((j-1)*imax)+i , 10 );'] );
    end;
end;

%Cambio velocidad de m/s a mm/s
u=1000*um;
v=1000*vm;
up=1000*ump;
vp=1000*vmp;

normcamp = (u.^2+v.^2).^(0.5);
vnmax = max(max(normcamp));
hmax = max(hx,hy);
dsmax = hmax/vnmax;
ds=dsmax;

wo=1;

for m = xoinicial:xofinal,
    xo = m;
    yo = yoinicial;

    w = wo;
    ioinicial=round(((xo-xmin)/hx)+1);
    joinicial=round(((yo-ymin)/hy)+1);
    aa=u(joinicial,ioinicial);
    bb=v(joinicial,ioinicial);
    aabb=(aa^2+bb^2)^(0.5);
```

```

uborde(w)=0;
vborde(w)=bb;
xvectborde(w)=m;
yvectborde(w)=yo;

so = 1;
svecti = 0;

clear svect;
clear dvn;
clear delta;
clear idvn;
clear xp;
clear yp;
clear nds;
clear s;

if bb < 0,
while  svecti < svectmax && so < 350
    && xo > 5 && xo < 175 && 5 < yo && yo < 135,
        s = so;
        svecto = svecti;

    k1x = ds*iw(xo,yo,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,u);
    k1y = ds*iw(xo,yo,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,v);

    k2x = ds*iw(xo+0.5*k1x,yo+0.5*k1y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,u);
    k2y = ds*iw(xo+0.5*k1x,yo+0.5*k1y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,v);

    k3x = ds*iw(xo+0.5*k2x,yo+0.5*k2y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,u);
    k3y = ds*iw(xo+0.5*k2x,yo+0.5*k2y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,v);

    k4x = ds*iw(xo+k3x,yo+k3y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,u);
    k4y = ds*iw(xo+k3x,yo+k3y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,v);

    xs = xo+(1/6)*(k1x+2*k2x+2*k3x+k4x);
    ys = yo+(1/6)*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y);

    xp(s)=xs;
    yp(s)=ys;
    xpmatriz(s,w)=xp(s);
    ypmatriz(s,w)=yp(s);
    delta(s)=((xs-xo)^2+(ys-yo)^2)^(0.5);

```

A.4. RUTINA PARA VER EVOLUCIÓN TEMPORAL DE CURVAS “ $\partial U/\partial T$ VS L ” 147

```
    svect(s)= svecto + delta(s);

    xo = xs;
    yo = ys;
    so = s+1;
    svecti = svect(s);

end;

%Subrutina para cálculo de ux(x(1),y(1)) y uy(x(1),y(1))
%para t y t+0.250s
nds = so;
l = sum(delta);
for s=1:nds-1,
    upara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,u);
    vpara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,v);

    uppara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,up);
    vppara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,vp);
end;

%Subrutina para calcular masa añadida
vn=(upara.^2+vpara.^2).^(0.5);
vnp=(uppara.^2+vppara.^2).^(0.5);

%Delta t=0.250s
for s=1:nds-1,
    dvn(s)=(vnp(s)-vn(s))/(0.250);
    dvnmatriz(s,t)=dvn(s);
end;

for r=1:nds-2,
    idvn(r)=(0.5)*(delta(r+1))*(dvn(r+1)+dvn(r));
end;

ma=sum(idvn);
else
while svecti < svectmax && so < 350 && xo > 5
    && xo < 175 && 5 < yo && yo < 135,
        s = so;
        svecto = svecti;

k1x = ds*iw(xo,yo,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-u);
```

```

k1y = ds*iw(xo,yo,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-v);

k2x = ds*iw(xo+0.5*k1x,yo+0.5*k1y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-u);
k2y = ds*iw(xo+0.5*k1x,yo+0.5*k1y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-v);

k3x = ds*iw(xo+0.5*k2x,yo+0.5*k2y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-u);
k3y = ds*iw(xo+0.5*k2x,yo+0.5*k2y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-v);

k4x = ds*iw(xo+k3x,yo+k3y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-u);
k4y = ds*iw(xo+k3x,yo+k3y,xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,-v);

xs = xo+(1/6)*(k1x+2*k2x+2*k3x+k4x);
ys = yo+(1/6)*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y);

xp(s)=xs;
yp(s)=ys;
xpmatriz(s,w)=xp(s);
ypmatriz(s,w)=yp(s);
delta(s)=((xs-xo)^2+(ys-yo)^2)^(0.5);
svect(s)= svecto + delta(s);

xo = xs;
yo = ys;
so = s+1;
svecti = svect(s);

end;

%Subrutina para cálculo de ux(x(1),y(1)) y uy(x(1),y(1))
%para t y t+0.250s
nds = so;
l = sum(delta);
for s=1:nds-1,
    upara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,u);
    vpara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,v);

    uppara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,up);
    vppara(s)=iw(xp(s),yp(s),xmin,ymin,xmax,ymax,hx,hy,vp);
end;

%Subrutina para calcular masa añadida
vn=(upara.^2+vpara.^2)^(0.5);
vnp=(uppara.^2+vppara.^2)^(0.5);

```

```

        %Delta t=0.250s
        for s=1:nds-1,
            dvn(s)=(vnp(s)-vn(s))/(0.250);
            dvnmatriz(s,t)=dvn(s);
        end;

        for r=1:nds-2,
            idvn(r)=(0.5)*(delta(r+1))*(dvn(r+1)+dvn(r));
        end;

        ma=sum(idvn);
    end;
    wo=w+1;
end;

figure(1);
plot( svect, dvn);
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
set(gca,'XDir','normal','YDir','normal');
xlabel( 'l (mm) ' );
ylabel( 'du / dt ( mm / s^2 )' );
axis tight;
drawnow;
hold on;

to=t+1;
end;

```

A.5. Rutina para visualizar zona de influencia

Esta rutina para Matlab retoma los resultados obtenidos con `match.m` para graficar la zona de influencia en cada instante de una secuencia temporal determinada. Esto es, grafica el punto (x, y) en cada línea de corriente explorada en la rutina `match.m` a partir del cual la cantidad $\partial u / \partial t$ es menor o igual a una cota mínima definida también en la rutina `match.m`.

```

clear all;
close all;

```

```

Archex = input ( 'Nombre del archivo donde estan los datos: ', 's' );
eval ( ['load ' Archex '.txt'] );

```

```

eval( ['size(' Archex ');'] );
tmax = (ans(1))/5
xmax = (ans(2))

for t=1:tmax,
    for xo=1:5,
        eval( ['xzi(t,xo)= ' Archex '( (t-1)*5+xo , 5 );'] );
        eval( ['yzi(t,xo)= ' Archex '( (t-1)*5+xo, 6 );'] );
    end;
end;

xmin =2.30544;
ymin =2.30544;
xmax =182.13;
ymax =145.243;

%Datos máscara (correspondientes al difusor pequeño)
xmmin = xmin;
ymmin = 108.4;
ancho = 58.9-xmmin;
alto = ymax-ymmin;

for t=1:tmax,
    c=t-1;
    figure(1);
    subplot( 4 , 4 , t );
    plot(xzi(t,1),yzi(t,1),'*b');
    axis([xmin xmax ymin ymax]);
    rectangle('Position',[xmmin,ymmin,ancho,alto],
        'Curvature',[0,0],'FaceColor','m');
    set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
    title( [' c#' num2str(c) ] );
    drawnow;
    hold on;
    plot(xzi(t,2),yzi(t,2),'*g');
    drawnow;
    hold on;
    plot(xzi(t,3),yzi(t,3),'*y');
    drawnow;
    hold on;
    plot(xzi(t,4),yzi(t,4),'*r');
    drawnow;
    hold on;

```

```
plot(xzi(t,5),yzi(t,5),'*k');  
drawnow;  
hold on;  
end;
```


Referencias

- [1] Energy Technology Perspectives 2008, OCDE-IEA,
<http://www.iea.org/textbase/nppdf/free/2008/etp2008.pdf>.
- [2] Renewables 2010 Global Status, REN21,
<http://www.ren21.net/REN21Activities/Publications/GlobalStatusReport/GSR2010/tabid/5824/Default.aspx>.
- [3] Annual Report 2009, OES-IEA,
http://www.iea-oceans.org/_fich/6/Annual_Report_2009_v2.pdf.
- [4] Clément, A. et al. **2002**, *Wave energy in Europe: current status and perspectives*. Renewable and Sustainable Energy Reviews 6, p.p. 405-431.
- [5] Czitrom, S.P.R., Godoy, R., Prado, E., Pérez, P., Peralta-Fabi, R. **2000**, *Hydrodynamics of an oscillating water column seawater pump. Part I: Theoretical aspects*. Ocean Engineering 27, p.p. 1181-1198.
- [6] Czitrom S.P.R. Prado, E., **1999**, *Design optimisation of a wave driven seawater pump*. Proceedings of the 18th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Canada.
- [7] Czitrom, S.P.R., Godoy, R., Prado, E., Olvera, A., Stern, C. **2000**, *Hydrodynamics of an oscillating water column seawater pump. Part II: tuning to monochromatic waves*. Ocean Engineering 27, p.p. 1199-1219.
- [8] Knott, G. F. y M. R. Mackley. **1980**, *On eddy motions near plates and ducts, induced by water waves and periodic flows*. Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. 294A, (1412), p.p. 599-623.
- [9] Stern, C. y S.P.R. Czitrom, **2000**, *Intake Design of a Wave-driven Seawater Pump to Suppress Vortex Formation*. Proceedings of the Fourth European Wave Energy Conference, Dinamarca, p.p. 125-129.
- [10] Batchelor, G. K. "An introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press, London, 1974.
- [11] Currie, I. G. "Fundamental Mechanics of Fluids", 3ra edición, Taylor & Francis, E.U., 2003.

- [12] Zamir, M. "The physics of the pulsatile flow", AIP Press (Springer-Verlag), N.Y., 2000.
- [13] Brennen, C. E. "A review of added mass and fluid inertial forces", Naval Civil Engineering Laboratory, California, 1982.
- [14] Centeno, M. "Influencia de la Amplitud y la Frecuencia de Oscilación en los patrones de Flujo a la Salida de un Difusor", Tesis para obtener el grado de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2010.
- [15] "FlowManager software and Introduction to PIV instrumentation (Software User's guide)", 5ta edición, Dantec Dynamics, Dinamarca, 2002.