UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CLASES NATURALES Y CLASES CONATURALES. RETÍCULAS DE CLASES DE MÓDULOS Y RETÍCULAS DE CLASES DE IDEALES.

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO(A) EN CIENCIAS

PRESENTA:

ALMA VIOLETA GARCÍA LÓPEZ

DIRECTOR DE TESINA:

Dr. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA

MAYO, 2012

Índice general

Introducción

En el presente trabajo consideraremos la clase de R-módulos y estudiaremos subclases de ésta dadas por ciertas propiedades de cerradura. En la primera parte, exploraremos las clases de módulos cerradas bajo submódulos, $R-her$, y principalmente las clases de módulos cerradas bajo cocientes $R-quot$. Este estudio requerirá un tratamiento reticular de las clases, por lo que en cada ocasión se definirá la estructura de (gran) retícula correspondiente, con el orden dado por la inclusión.

Estudiaremos las retículas de pseudocomplementos de $R-her$ y $R-quot$ respectivamente. Ésta úlitma mediante una importante caracterización dada por Rincón, Ríos y Alvarado en [1] conocida como la condición CN.

Otro destacado resultado de estos autores que se presenta en esta tesina es que $R-conat$ de hecho, es una retícula booleana. En esta misma dirección, el estudio clásico de reíticulas de clases de módulos trata de asociar clases de módulos con ciertas clases de conjuntos de ideales del anillo, para obtener entre otras consecuencias, que las clases son cardinables. Tenemos como ejemplo el conocido caso de las teorías de torsión hereditarias $R-tors$ en correspondencia biyectiva con la retícula de filtros de Gabriel del anillo.

En nuestro caso, asociaremos $R-nat$ con la clase de conjuntos de ideales izquierdos que satisfacen tres condiciones de cerradura (a_1, a_3, a_6 según la numeración de Kashu en [3]) que denotaremos como $R-Nat$.

Similarmente describimos la retícula cuyos elementos son filtros de ideales izquierdos. Denotamos por $R-Conat$ el esqueleto de esta retícula. Obtenemos una retícula cuya clase de módulos asociada es una clase conatural en el sentido definido en el primer capítulo. Las retículas $R-conat$ y $R-conat$ no son isomorfas, hecho que observamos al final de esta tesina.

La retícula de clases naturales es muy importante en teoría de módulos principalmente para obtener teoremas de descomposición usando módulos de tipo (ver [10]). Y actualmente se utiliza la retícula de clases conaturales para desarrollar teoría de cotipos [11].

Capítulo 1

Algunas retículas de clases de módulos

1.1. Clases hereditarias

Una clase de R-módulos $\mathcal{H}$ se llama *hereditaria* si es cerrada bajo monomorfismos. Es decir, si $M \in \mathcal{H}$ y hay un monomorfismo de N en M al que denotaremos $N \rightarrowtail M$, entonces $N \in \mathcal{H}$. Denotamos como $R-her$ la clase de todas las clases hereditarias con el orden parcial en $R-her$ dado por la inclusión con operaciones de retícula definidas como sigue:

Si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in R-her$, decimos que $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ si y sólo si $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$. Para una familia $\{\mathcal{H}_\lambda\}_\Lambda$ de clases hereditarias, se define el ínfimo $\bigwedge_\Lambda\{\mathcal{H}_\lambda\} = \bigcap_\Lambda\{\mathcal{H}_\lambda\}$ y el supremo $\bigvee_\Lambda\{\mathcal{H}_\lambda\} = \bigcup_\Lambda\{\mathcal{H}_\lambda\}$ que también son clases hereditarias. Además, como $\{0\}$ y $R-Mod$ son clases hereditarias, tenemos que $0 = \{0\}$ y $1 = R-Mod$. Esto le da a $(R-her, \vee, \wedge, 0, 1)$ estructura de (gran) retícula completa. Dada una clase $\mathcal{A}$ de R-módulos, definimos la clase hereditaria generada por $\mathcal{A}$ como: $\xi_{R-her}(\mathcal{A}) = \{M \in R-Mod \,|\, \exists\, 0 \neq f : M \rightarrowtail A, \text{ para alguna } A \in \mathcal{A}\}$ que es la menor clase hereditaria que contiene a $\mathcal{A}$.

Recordemos que en una retícula $(L, \leq, 0)$ con elemento menor 0, un elemento $c \in L$ es un *pseudocomplemento* para $b \in L$ si $b \wedge c = 0$ y c es máximo con esta propiedad. Si además c es mayor con la propiedad, i.e., si $d \leq c$ para cada d tal que $b \wedge d = 0$, decimos que c es un *pseudocomplemento fuerte* para b.

Denotaremos al pseudocomplemento de $\mathcal{H} \in R-her$ como $\mathcal{H}^{\perp_\leq}$. Demostraremos que el pseudocomplemento de $\mathcal{H}$ existe y es único porque es un pseudocomplemento fuerte.

Teorema 1 $\mathcal{H}^{\perp_\leq} = \{N \in R-Mod| \text{ si } K \in \mathcal{H} \text{ y } f : K \rightarrowtail N \text{ entonces } K = 0\}$

Demostración: Sea $\mathcal{A} = \{N| \text{ si } K \in \mathcal{H} \text{ y } f : K \rightarrowtail N \text{ entonces } K = 0\}$. Observemos que $\mathcal{A}$ es una clase hereditaria pues si $N \in \mathcal{A}$, $N' \leq N$ y $f : K \rightarrowtail N'$ es un monomorfismo con $K \in \mathcal{H}$, entonces la composición con el morfismo inclusión $K \rightarrowtail N' \hookrightarrow N$ es un monomorfismo. Esto implica que $K = 0$ y así $N' \in \mathcal{A}$.

Ahora veamos que $\mathcal{H} \wedge \mathcal{A} = \{0\}$ y $\mathcal{A}$ es mayor con esta propiedad. Si $N \in \mathcal{H} \wedge \mathcal{A}$ entonces el morfismo identidad Id_N es un monomorfismo de un elemento de $\mathcal{H}$ en un elemento de $\mathcal{A}$, por lo tanto $N = 0$. Sea $\mathcal{B} \in R-her$ tal que $\mathcal{H} \wedge \mathcal{B} = \{0\}$. Sean $B \in \mathcal{B}$, $K \in \mathcal{H}$ y un monomorfismo $f : K \rightarrowtail B$, entonces $K \in \mathcal{H} \wedge \mathcal{B} = \{0\}$.Por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Concluimos que es un pseudocomplemento fuerte para $\mathcal{H}$. Notemos que un pseudocomplemento fuerte es un pseudocomplemento. ∎

Describimos ahora el segundo complemento de una clase hereditaria $\mathcal{H}$ como: $(\mathcal{H}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \{N \in R - Mod | \forall\, 0 \neq f : K \rightarrowtail N, K \notin \mathcal{H}^{\perp_\leq}\}$.

Proposición 1 *Si $\mathcal{H} \in R - her$, entonces su segundo complemento*

$$(\mathcal{H}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \{N \in R - Mod \,|\, \forall\, 0 \neq f : K \rightarrowtail N, \exists\, 0 \neq g : U \rightarrowtail K \text{ con } U \in \mathcal{H}\}.$$

Demostración: Del Teorema 1 tenemos $(\mathcal{H}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \{N \,|(K \in \mathcal{H}^{\perp_\leq} \text{ y } f : K \rightarrowtail N) \Rightarrow\ K = 0\}$. Equivalentemente $(\mathcal{H}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \{N \,|\, \forall\, 0 \neq f : K \rightarrowtail N,\ K \notin \mathcal{H}^{\perp_\leq}\}$. Como $K \notin \mathcal{H}^{\perp_\leq}$ si y sólo si existe un monomorfismo no cero $g : U \rightarrowtail K$ con $U \in \mathcal{H}$, podemos concluir que $(\mathcal{H}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \{N \in R - mod \,|\, \forall\, 0 \neq f : K \rightarrowtail N,\ \exists 0 \neq g : U \rightarrowtail K \text{ con } 0 \neq U \in \mathcal{H}\}$. ∎

1.2. Clases naturales

Una clase de R-módulos $\mathcal{N}$ es una *clase natural* si es cerrada bajo submódulos, sumas directas y cápsulas inyectivas. Con estas propiedades se obtiene que también es cerrada bajo extensiones.

Proposición 2 *Toda clase natural $\mathcal{N}$ es cerrada bajo extensiones.*

Demostración: Sea $\mathcal{N}$ una clase natural y $0 \to L \overset{\alpha}{\to} M \overset{\beta}{\to} K \to 0$ una sucesión exacta de módulos con L y K en $\mathcal{N}$. Tomemos $\iota_L : L \rightarrowtail E(L)$, $\iota_K : K \rightarrowtail E(K)$ cápsulas inyectivas. Notemos que $E(L)$, $E(K) \in \mathcal{N}$ y que también $E(L) \oplus E(K) \in \mathcal{N}$. Como $E(L)$ es inyectivo, existe $f : M \to E(L)$ tal que $f \circ \alpha = \iota_L$ que junto con $\iota_k \circ \beta$ y la propiedad universal del producto, hacen que exista un único $g : M \to E(L) \oplus E(K)$ tal que $a \circ f = g$ y $\iota_K \circ \beta = b \circ g$, de manera que los dos cuadrados del siguiente diagrama conmutan. Como ι_L, ι_K y a son monomorfismos, por el lema del quinto se tiene que g también es un monomorfismo. Así $M \in \mathcal{N}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook, "\iota_L"'] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, dotted, "g"] & K \arrow[r] \arrow[d, hook, "\iota_K"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E(L) \arrow[r, "a"'] & E(L) \oplus E(K) \arrow[r, "b"'] & E(K) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

∎

Denotamos como $R-nat$ a la clase de clases naturales en $R-Mod$ en donde definimos el siguiente orden parcial: $\mathcal{N}_1 \leq \mathcal{N}_2$ si y sólo si $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2$. Dada una clase $\mathcal{A} \in R-Mod$ definimos la clase natural generada por $\mathcal{A}$ como $\xi_{R-nat}(\mathcal{A}) = \{M \in R-mod \,|\, \forall\, 0 \neq f : N \rightarrowtail M, \exists\, 0 \neq g : L \rightarrowtail N$ con $0 \neq L \rightarrowtail C, C \in \mathcal{A}\}$.

Para una familia $\{\mathcal{N}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de clases naturales se define el ínfimo $\bigwedge_\Lambda\{\mathcal{N}_\lambda\} = \bigcap_\Lambda\{\mathcal{N}_\lambda\}$ y el supremo $\bigvee_\Lambda\{\mathcal{N}_\lambda\} = \xi_{R-nat}\Big(\bigcup_\Lambda\{\mathcal{N}_\lambda\}\Big) = \{M \,|\forall\, 0 \neq f : N \rightarrowtail M, \exists\, 0 \neq g : L \rightarrowtail N, L \in \bigcup\{\mathcal{N}_\lambda\}\}$. Se prueba que con estas operaciones, se tienen ambas leyes distributivas infinitas y como $\{0\}$ y $R-mod$ son clases naturales, definimos $0 = \{(0)\}$ y $1 = R-Mod$. Para $\mathcal{N} \in R-nat$, la clase $\mathcal{C}_\mathcal{N} = \{M \in R-mod \,|\, \forall\, f : L \rightarrowtail M, L \in \mathcal{N} \Rightarrow L = 0\}$. Es la clase natural que cumple con la propiedad de que $\mathcal{N} \wedge \mathcal{C}_\mathcal{N} = 0$ y $\mathcal{N} \vee \mathcal{C}_\mathcal{N} = 1$, es decir, un complemento para $\mathcal{N}$. Con lo anterior podemos concluir que $R-nat$ es una retícula booleana completa.

En adelante mostraremos algunos resultados de [1] que relacionan $R-her$ con $R-nat$.

Teorema 2 *Si $\mathcal{H} \in R-her$, entonces su pseudocomplemento $\mathcal{H}^{\perp_\leq}$ es una clase natural.*

Demostración: $\mathcal{H}^{\perp_\leq}$ es cerrada bajo submódulos por la demostración del Teorema 1. Supongamos que $N \in \mathcal{H}^{\perp_\leq}$ y $f : K \rightarrowtail E(N)$ con $K \in \mathcal{H}$. Como $f(K) \cap N \leq f(K)$ y $f(K) \in \mathcal{H}$, entonces $f(K) \cap N \in \mathcal{H}$. De $f(K) \cap N \leq N$ con $N \in \mathcal{H}^{\perp_\leq}$ concluimos que $f(K) \cap N = 0$. Como $N \leq_{es} E(N)$, tenemos que $K \cong f(K) = 0$. Por lo tanto $E(N) \in \mathcal{H}^{\perp_\leq}$.

Sean $\{N_\lambda\}_\Lambda$ una familia de elementos de $\mathcal{H}^{\perp_\leq}$, $0 \neq K \leq \bigoplus_\Lambda\{N_\lambda\}$ y supongamos que $K \in \mathcal{H}$. Sea $0 \neq x \in K$ tal que $x = n_{\lambda_1} + \cdots + n_{\lambda_j}$ con j mínima. Observemos que si $x = n_{\lambda_1} \in N_{\lambda_1} \in \mathcal{H}^{\perp_\leq}$ entonces $0 \neq Rx \leq K \in \mathcal{H}$ que contradice que N_{λ_j} no tiene submódulos distintos de cero en $\mathcal{H}$. Entonces debemos suponer que $j > 1$.

De la expresión de x es claro que $(0 : x) \subseteq (0 : n_{\lambda_k})$ para todo $k \in \{1, \ldots, j\}$. Si $r \in (0 : n_{\lambda_k})$ tal que $r \notin (0 : n_{\lambda_l})$, entonces $0 \neq rx = rn_{\lambda_1} + \cdots + rn_{\lambda_l} + \cdots + rn_{\lambda_j}$ es un elemento distinto de cero en K con $j-1$ sumandos, lo que contradice la minimalidad de j. Por lo tanto $(0 : n_{\lambda_k}) = (0 : n_{\lambda_l})$ para todo $l, k \in \{1, \ldots, j\}$, de donde se sigue que $(0 : n_{\lambda_k}) \subseteq (0 : x)$. Como $(0 : x) = (0 : n_{\lambda_k})$ tenemos $Rx \cong R/(0 : x) \cong R/(0 : n_{\lambda_k}) \cong Rn_{\lambda_k} \in \mathcal{H}^{\perp_\leq}$ pues cada $Rn_{\lambda_k} \leq N_{\lambda_k}$. Así $Rx \in \mathcal{H}^{\perp_\leq}$ en contradicción con que $Rx \leq K \in \mathcal{H}$, entonces $K = 0$ y $\bigoplus_\Lambda\{N_\lambda\} \in \mathcal{H}^{\perp_\leq}$. ∎

Corolario 1 *Si $\mathcal{H} \in R-her$, entonces $(\mathcal{H}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} \in R-nat$.*

Estudiaremos la relación entre los pseudocomplementos $\mathcal{N}^{\perp_{R-nat}}$ y $\mathcal{N}^{\perp_\leq}$ de $\mathcal{N} \in R-nat$

Lema 1 *Si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G} \in R-her$ cumplen que $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ entonces $\mathcal{G}^{\perp_\leq} \leq \mathcal{H}^{\perp_\leq}$.*

Demostración: Sea $N \in \mathcal{G}^{\perp_\leq}$. Si $f : K \rightarrowtail N$ es un monomorfismo con $K \in \mathcal{H}$. Entonces $K \in \mathcal{G}$. Como $N \in \mathcal{G}^{\perp_\leq}$ entonces $K = 0$. Por lo tanto $N \in \mathcal{H}^{\perp_\leq}$. ■

Observemos que si $\mathcal{H} \in R-her$ entonces $\mathcal{H} \leq (\mathcal{H}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ pues se tiene que $\mathcal{H} \wedge \mathcal{H}^{\perp_\leq} = \{0\}$ y $(\mathcal{H}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ es mayor con esta propiedad. Si aplicamos el argumento a $\mathcal{H}^{\perp_\leq}$, tenemos que $\mathcal{H}^{\perp_\leq} \leq (\mathcal{H}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq \perp_\leq}$. Mas aún, por el lema anterior se tiene que $\mathcal{H}^{\perp_\leq \perp_\leq \perp_\leq} \leq \mathcal{H}^{\perp_\leq}$ y por lo tanto $\mathcal{H}^{\perp_\leq} = \mathcal{H}^{\perp_\leq \perp_\leq \perp_\leq}$.

Proposición 3 *Si $\mathcal{N}$ es una clase natural, entonces $\mathcal{N} = (\mathcal{N}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$.*

Demostración: De la observacióon anterior tenemos que $\mathcal{N} \leq (\mathcal{N}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$. Probaremos la otra contención. Sea $N \in (\mathcal{N}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$. Para el monomorfismo identidad Id_N existe $g : U \rightarrowtail N$ con $0 \neq U \in \mathcal{N}$. Tomemos una familia $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ independiente máxima de submodulos de N que están en $\mathcal{N}$. Como $\mathcal{N}$ es una clase natural, $\bigoplus_\Lambda \{U_\lambda\} \in \mathcal{N}$ y como es una familia independiente maxima, entonces $\bigoplus_\Lambda U_\lambda$ es esencial en N. De modo que sus cápsulas inyectivas coinciden, así $N \leq_{es} E(N) = E(\bigoplus_\Lambda U_\lambda) \in \mathcal{N}$. Como $\mathcal{N}$ es hereditaria, concluimos que $N \in \mathcal{N}$. ■

Proposición 4 *Dada $\mathcal{H} \in R-her$, entonces su segundo pseudocomplemento $(\mathcal{H}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ es la menor clase natural que contiene a $\mathcal{H}$, es decir, la clase natural generada por $\mathcal{H}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{N}$ una clase natural tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{N}$. Por el Lema 1, $\mathcal{N}^{\perp_\leq} \leq \mathcal{H}^{\perp_\leq}$, entonces $(\mathcal{H}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} \leq (\mathcal{N}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \mathcal{N}$. Por lo tanto $(\mathcal{H}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ es la clase natural generada por $\mathcal{H}$. ■

Proposición 5 *Si $\mathcal{N} \in R-nat$, entonces $\mathcal{N}^{\perp_{R-nat}} = \mathcal{N}^{\perp_\leq}$. i.e., su pseudocomplemento en $R-nat$ coincide con su pseudocomplemento en $R-her$.*

Demostración: Sea $\mathcal{N} \in R-nat$, entonces $\mathcal{N}^{\perp_{R-nat}}$ es la clase natural máxima con la propiedad de $\mathcal{N} \wedge \mathcal{N}^{\perp_{R-nat}} = 0$; en particular es una clase hereditaria, entonces $\mathcal{N}^{\perp_{R-nat}} \subseteq \mathcal{N}^{\perp_\leq}$. Además, por el Teorema 2, $\mathcal{N}^{\perp_\leq}$ es una clase natural, por lo tanto $\mathcal{N}^{\perp_\leq} \subseteq \mathcal{N}^{\perp_{R-nat}}$. ■

Definición: El *esqueleto* de una (gran) retícula pseudocomplementada es la clase de todos sus pseudocomplementos. Denotamos al esqueleto de una clase $\mathcal{A} \subseteq R-mod$ como $Skel(\mathcal{A})$.

El siguiente teorema relaciona las dos clases de modulos que hemos estudiado.

Teorema 3 *$R-nat$ es el esqueleto de $R-her$.*

Demostración: Si $\mathcal{N} \in R-nat$, entonces $\mathcal{N} = (\mathcal{N}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ que es un pseudocomplemento de $R-her$. Si tomamos un pseudocomplemento de $\mathcal{H} \in R-her$, entonces $\mathcal{H}^{\perp_\leq} \in R-nat$. ■

1.3. Clases cohereditarias

Decimos que una clase de R-módulos es *cohereditaria* si es cerrada bajo cocientes. Denotamos como $R-quot$ a la clase de todas las clases cohereditarias.

Definimos un orden natural en $R-quot$ dado por: $\mathcal{Q}_1 \leq \mathcal{Q}_2$ si y solo si $\mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{Q}_2$. Se prueba que $(R-quot, \leq, \wedge, \vee)$ es una gran retícula completa que ademas es un marco (cumple con leyes distributivas infinitas). Con ínfimo y supremo para una familia de clases cohereditarias $\{\mathcal{Q}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ definidos como: $\bigwedge_\Lambda\{\mathcal{Q}_\lambda\} = \bigcap_\Lambda\{\mathcal{Q}_\lambda\}$ y $\bigvee_\Lambda\{\mathcal{Q}_\lambda\} = \bigcup_\Lambda\{\mathcal{Q}_\lambda\}$, $0 = \{0\}$ y $1 = R-Mod$ que también son cohereditarias.

Proposición 6 *Si $\mathcal{A} \subseteq R-Mod$, entonces la clase cohereditaria generada por $\mathcal{A}$ denotada por $\xi_{R-quot}(\mathcal{M})$ es la clase $\mathcal{B} = \{N \in R-mod \,|\, \exists\, 0 \neq g : M \twoheadrightarrow N,\, M \in \mathcal{A}\}$.*

Demostración: Observemos que si $0 \neq M \in \mathcal{A}$, entonces el morfismo identidad Id_M es un epimorfismo no cero que prueba que $M \in \mathcal{B}$, así que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Veamos que $\mathcal{B}$ es cohereditaria. Sea $N \in \mathcal{B}$ y un epimorfismo $0 \neq f : N \twoheadrightarrow L$. Como $N \in \mathcal{B}$, existe un epimorfismo no cero $g : M \twoheadrightarrow N$ con $M \in \mathcal{A}$, entonces $f \circ g : M \twoheadrightarrow L$ es un epimorfismo no cero, por lo tanto $L \in \mathcal{B}$.

Si $\mathcal{Q}$ es una clase cohereditaria que contiene a $\mathcal{A}$ y $N \in \mathcal{B}$, entonces existe un epimorfismo $0 \neq g : M \twoheadrightarrow N$ con $M \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}$, entonces $N \in \mathcal{Q}$. Por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Q}$ y concluimos que $\mathcal{B} = \xi_{R-quot}(\mathcal{A})$. ∎

Proposición 7 *Si $\mathcal{Q} \in R-quot$, entonces $\mathcal{Q}$ tiene un único pseudocomplemento en $R-quot$ descrito como $\mathcal{Q}^{\perp_\twoheadrightarrow} = \{N \in R-Mod | f : N \twoheadrightarrow C$, con $C \in \mathcal{Q}, \Rightarrow\ C = 0\}$. $\mathcal{Q}^{\perp_\twoheadrightarrow}$ es un pseudocomplemento fuerte.*

Demostración: Llamemos $\mathcal{A}$ a la clase de la derecha. Observemos primero que $\mathcal{A}$ es cohereditaria. Si $0 \neq g : N \twoheadrightarrow M$ con $N \in \mathcal{A}$, probaremos que $M \in \mathcal{K}$. Si $f : M \twoheadrightarrow C$ es un epimorfismo con $C \in \mathcal{Q}$, entonces la composición $f \circ g$ es un epimorfismo de N en C, por lo que $C = 0$ y así $M \in \mathcal{A}$.

Si existe $M \in \mathcal{A} \wedge \mathcal{Q}$, entonces el epimorfismo tiene que ser cero; veamos que $\mathcal{A}$ es mayor con esta propiedad. Sea $\mathcal{R}$ una clase cohereditaria tal que $\mathcal{R} \wedge \mathcal{Q} = 0$, $M \in \mathcal{R}$ y un epimorfismo $f : M \twoheadrightarrow C$ con $C \in \mathcal{Q}$. Como $\mathcal{R}$ es cohereditaria, $C \in \mathcal{R} \wedge \mathcal{Q}$, por lo tanto $C = 0$, entonces $M \in \mathcal{A}$ probando la contención $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. Así $\mathcal{A} = \mathcal{Q}^{\perp_\twoheadrightarrow}$ y además es un pseudocomplemento fuerte ∎

Teorema 4 *Si $\mathcal{Q} \in R-quot$ entonces $(\mathcal{Q}^{\perp_\twoheadrightarrow})^{\perp_\twoheadrightarrow}$ es la clase de módulos N tales que todo cociente no cero M de N tiene un cociente no cero en $\mathcal{Q}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{Q} \in R-quot$. Aplicando la Proposición 7 a $\mathcal{Q}^{\perp_\twoheadrightarrow}$, tenemos que $(\mathcal{Q}^{\perp_\twoheadrightarrow})^{\perp_\twoheadrightarrow} = \{N \,|\, f : N \twoheadrightarrow M$, con $M \in \mathcal{Q}^{\perp_\twoheadrightarrow}\ \Rightarrow\ M = 0\} = \{N \,|\, \forall\, 0 \neq f : N \twoheadrightarrow M, M \notin \mathcal{Q}^{\perp_\twoheadrightarrow}\}$. Pero

$M \notin \mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow}$ si y sólo si existe un epimorfismo no cero $g : M \twoheadrightarrow L$ con $L \in \mathcal{Q}$. Concluímos que $(\mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow} = \{N \in R-mod \,|\, \forall\, 0 \neq f : N \twoheadrightarrow M, \exists\, 0 \neq g : M \twoheadrightarrow L$ con $L \in \mathcal{Q}\}$. ∎

Corolario 2 *Si $\mathcal{Q} \in R-quot$, entonces $\mathcal{Q} \subseteq (\mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{Q} \in R-quot$ y $N \in \mathcal{Q}$. Entonces para todo epimorfismo no cero $f : N \twoheadrightarrow M$, $0 \neq M \in \mathcal{Q}$, entonces el epimorfismo no cero Id_M prueba que $N \in (\mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$. ∎

Lema 2 *Si $\mathcal{Q}, \mathcal{R} \in R-quot$ son tales que $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$, entonces $\mathcal{R}^{\perp\twoheadrightarrow} \subseteq \mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow}$.*

Demostración: Sea $N \in \mathcal{R}^{\perp\twoheadrightarrow}$ y $f : N \twoheadrightarrow M$ con $M \in \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$, entonces $f : N \twoheadrightarrow M \in \mathcal{R}$ por lo tanto $M = 0$ y tenemos que $N \in \mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow}$. ∎

1.4. Clases conaturales

Denotamos $R-conat$ al esqueleto de $R-quot$. A los elementos de $R-conat$ los llamaremos *clases conaturales*.

Definición: Sea $\mathcal{A}$ una clase de módulos. Decimos que $\mathcal{A}$ satisface la condición (CN) si:
$M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall\, 0 \neq f : M \twoheadrightarrow N$, existen $0 \neq g : N \twoheadrightarrow K$ y $0 \neq h : A \twoheadrightarrow K$ con $A \in \mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\forall 0\neq f"] & N \neq 0 \arrow[d, two heads, "0\neq g"] \\ \exists A \arrow[r, two heads, "0\neq h"] & K \neq 0 \end{tikzcd} \qquad \Leftrightarrow \qquad M \in \mathcal{A}$$

Teorema 5 *Sea $\mathcal{A} \subseteq R-mod$. Entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{A} \in R-conat$*
2. *$\mathcal{A}$ satisface la condición CN*
3. *$\mathcal{A} \in R-quot$ y $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$*
4. *$0 \neq M \in \mathcal{A}$ si y sólo si para todo $f : M \twoheadrightarrow N$, existe $0 \neq g : N \twoheadrightarrow L$ con $L \in \mathcal{A}$.*

Demostración: $(3 \Rightarrow 1)$ Si $\mathcal{A}$ satisface 3, entonces es el pseudocomplemento de una clase cohereditaria, por lo que $\mathcal{A} \in R-conat$.

$(1 \Rightarrow 2)$ Si $\mathcal{A} \in R-conat$, es decir $\mathcal{A} = \mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow}$ para alguna $\mathcal{Q} \in R-quot$. Demostraremos que $\mathcal{A}$ cumple la condición CN. Sea $0 \neq f : M \twoheadrightarrow M'$. Supongamos que $M' \in \mathcal{Q}$ y que existen epimorfismos no cero $h : M' \twoheadrightarrow K$ y $g : A \twoheadrightarrow K$ con $A \in \mathcal{A}$ y $K \neq 0$. Como $A \in \mathcal{A} = \mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow} = \{N |$ si $0 \neq f : N \twoheadrightarrow C \Rightarrow C \notin Q\}$ y $g \neq 0$ entonces $K \notin \mathcal{Q}$. Por otro lado, como $M' \in \mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow}$ y

$h \neq 0$, entonces $K \in \mathcal{Q}$ contradiciendo que $K \neq 0$. Por lo tanto $M \in \mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow} = \mathcal{A}$ lo que prueba que $\mathcal{A}$ cumple la condición (CN).

$(2 \Rightarrow 3)$ Supongamos 2 y probemos que $A \in R-quot$. Sea $C \in \mathcal{A}$ y $f : C \twoheadrightarrow B$ un epimorfismo no cero. Si $g : B \twoheadrightarrow K$ es un epimorfismo no cero, así $g \circ f$ es también un epimorfismo no cero. Entonces existen epimorfismos no cero $h : K \twoheadrightarrow L$ y $r : A \twoheadrightarrow L$ con $A \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{A}$ satisface (CN) tenemos que $B \in \mathcal{A}$, por lo tanto $\mathcal{A} \in R-conat$. Ahora por el Corolario 2, $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$. Para la otra contención, si $C \in (\mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$, entonces cualquier cociente distinto de cero de C comparte un cociente distinto de cero con los elementos de $\mathcal{A}$. Entonces, por (CN) tenemos que $C \in \mathcal{A}$.

Con esto, 1, 2 y 3 son equivalentes.

$(2, 3 \Rightarrow 4)$ Supongamos 3. Entonces $\mathcal{A}$ es cerrado bajo cocientes. Si $M \in \mathcal{A}$, entonces para todo epimorfismo no cero $f : M \twoheadrightarrow N$, tenemos que $N \in \mathcal{A}$. Así, hay epimorfismos $g = Id_N$ y $h = Id_N$ con $N \in \mathcal{A}$. Recíprocamente si para todo epimorfismo no cero $f : M \twoheadrightarrow N$, existen epimorfismos no cero $g : N \twoheadrightarrow K$ y $h : A \twoheadrightarrow K$ con $A \in \mathcal{A}$, entonces $K \in \mathcal{A}$ y se cumple 4.

$(4 \Rightarrow 3)$ Una clase que satisface 4 es cerrada bajo cocientes, entonces $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{A}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$. Ahora si $f : M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo no cero, existe $g : N \twoheadrightarrow L$ no cero con $L \in \mathcal{A}$, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "f"] & N \arrow[d, two heads, "0 \neq g"] \\ L \arrow[r, two heads, "I_L"] & L \end{tikzcd}$$

Muestra que $\mathcal{A}$ satisface (CN). ∎

Teorema 6 *Si $\mathcal{C} \in R - conat$, entonces $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cocientes, extensiones y cubrimientos superfluos (i.e., si $f : M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo con $Ker(f) \ll M$ con $N \in \mathcal{C}$, entonces $M \in \mathcal{C}$).*

Demostración: Si $\mathcal{C} \in R-conat$ entonces por el Teorema 5, $\mathcal{C}$ es una clase cohereditaria, es decir, cerrada bajo cocientes.

Consideremos la sucesión exacta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ con A, C en $\mathcal{C}$. Probaremos que $B \in \mathcal{C}$. Si $h : B \twoheadrightarrow U$ es un epimorfismo distinto de cero, entonces:

Si $h \circ f = 0$, por la propiedad universal del conúcleo existe $l : C \to U$ tal que $l \circ g = h$, entonces U es un cociente de C. Por 4. del Teorema 5, U tiene un cociento distinto de cero en $\mathcal{C}$ que también es un cociente de B.

Si $h \circ f \neq 0$, entonces $A \xrightarrow{f} B \overset{h}{\twoheadrightarrow} U \overset{p}{\twoheadrightarrow} U/h \circ f(A)$ es un epimorfismo distinto de cero con $A \in \mathcal{C}$. Luego $U/h \circ f(A)$ tiene un cociente distinto de cero en $\mathcal{C}$, que también es cociente de B. Por 4. del Teorema 5, $B \in \mathcal{C}$ por lo tanto $\mathcal{C}$ es cerrada bajo extensiones.

Ahora, sea $g : B \twoheadrightarrow C$ un epimorfismo con $C \in \mathcal{C}$ y $Ker(g)$ superfluo en B. Usaremos la sucesión exacta $0 \to Ker(g) \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ para probar que $B \in \mathcal{C}$. Sea $h : B \twoheadrightarrow U$ un epimorfismo distinto de cero. Si $h \circ f = 0$, entonces por la propiedad universal del conúcleo existe $h' : C \twoheadrightarrow U$ tal que $h = g \circ h'$. Como $C \in \mathcal{C}$, entonces $U \in \mathcal{C}$ que es un cociente de B.

Si $h \circ f \neq 0$, entonces $h \circ f$ no es un epimorfismo pues de serlo, $B = Im(f) + Ker(h) = Ker(g) + Ker(h)$ y como $Ker(g)$ es superfluo en B, tendríamos que $Ker(h) = B$ contradiciendo que $h \neq 0$. Si consideramos $A \xrightarrow{f} B \overset{h}{\twoheadrightarrow} U \overset{p}{\twoheadrightarrow} U/h \circ f(A)$ volvemos a la situación anterior pues por la propiedad universal del conúcleo, existe $h' : C \twoheadrightarrow U/Im(h \circ f)$ i.e.,$U/h \circ f(A)$ es un cociente distinto de cero de B en $\mathcal{C}$.

■

1.4.1. $R - conat$ es una (gran) retícula distributiva y complementada

Lema 3 *Sea $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ una familia de clases conaturales, entonces $\bigcap_{i \in I}\{\mathcal{C}_i\} \in R - conat$.*

Demostración: Claramente $\bigcap_I\{\mathcal{C}_i\}$ es cerrada bajo cocientes. Probaremos que $\bigcap_I\{\mathcal{C}_i\}$ satisface 4 del Teorema 5. Supongamos que $M \in R - mod$ satisface que para todo $0 \neq f : M \twoheadrightarrow N$ existe $g : N \twoheadrightarrow L$ no cero con $L \in \bigcap_I\{\mathcal{C}_i\}$. Como $\bigcap_I\{\mathcal{C}_i\} \subseteq \mathcal{C}_i$ para toda $i \in I$. Como cada $\mathcal{C}_i$ es cerrada bajo cocientes, entocnes $M \in \mathcal{C}$, por lo tanto $M \in \bigcap_I\{\mathcal{C}_i\}$. ■

Para una clase cohereditaria $\mathcal{Q}$, denotamos como $\xi_{R-conat}(\mathcal{Q})$ a la clase conatural generada por $\mathcal{Q}$. Mas adelante, en la siguiente sección, se definirá la clase conatural generada por una clase de módulos no necesariamente cohereditaria.

Proposición 8 *Si $\mathcal{Q} \in R - quot$, entonces $\xi_{R-conat}(\mathcal{Q}) = (\mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$.*

Demostración: Por el Corolario 2, $\mathcal{Q} \subseteq (\mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow} \in R - conat$. Si $\mathcal{K}$ es una clase conatural que contiene a $\mathcal{Q}$, entonces por el Lema 2, $\mathcal{K}^{\perp\twoheadrightarrow} \subseteq \mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow}$. Además por el Teorema 5, $\mathcal{K} \in R - quot$ y $\mathcal{K} = (\mathcal{K}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$. Por lo tanto $\mathcal{Q} \subseteq (\mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow} \subseteq (\mathcal{K}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow} = \mathcal{K}$ y así $(\mathcal{Q}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$ es la menor clase conatural que contiene a $\mathcal{Q}$. ■

Daremos a $R - conat$ estructura de retícula $(R - conat, \leq, \wedge, \vee)$ con el orden natural $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2$ si y sólo si $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$; $\mathbf{0} = \{0\}$ y $\mathbf{1} = R - mod$. Dada una familia de clases conaturales $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$, se definen: $\bigwedge_{i \in I}\{\mathcal{C}_i\} = \bigcap_{i \in I}\{\mathcal{C}_i\}$ y $\bigvee_{i \in I}\{\mathcal{C}_i\} = \xi_{R-conat}\left(\bigcup_{i \in I}\{\mathcal{C}_i\}\right)$.

Proposición 9 *Si $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ es una familia de clases conaturales, entonces $\bigvee_{i \in I}\{\mathcal{C}_i\} =$
$\{N \in R - mod \,|\forall\, 0 \neq f : N \twoheadrightarrow M \,\exists 0 \neq g : M \twoheadrightarrow M' \neq 0,$ con $M' \in \mathcal{C}_i$, para alguna $i \in I\}$.*

Demostración: Desarrollemos la definición del Teorema 4 $\bigvee_{i \in I}\{\mathcal{C}_i\} = \xi_{R-conat}(\bigcup_{i \in I}\{\mathcal{C}_i\}) = \left((\bigcup_{i \in I}\{\mathcal{C}\}_i)^{\perp\twoheadrightarrow}\right)^{\perp\twoheadrightarrow} = \{N \in R - mod|\forall\, 0 \neq f : N \twoheadrightarrow M, \exists 0 \neq g : M \twoheadrightarrow M'$ con $M' \in \bigcup_I\{\mathcal{C}_i\}\}$. ■

Proposición 10 *$R - conat$ es una (gran) retícula complementada.*

Demostración: Afirmamos que para una clase $\mathcal{C} \in R - conat$, la clase $\mathcal{C}^{\perp\twoheadrightarrow}$ es su complemento en $R - conat$. Supongamos que no es así, i.e., existe $0 \neq N \in R - mod$ tal que $N \notin \mathcal{C} \vee \mathcal{C}^{\perp\twoheadrightarrow}$. Por la Proposición 9 debe existir un epimorfismo $0 \neq f : N \twoheadrightarrow M$ tal que para todo cociente no cero de M, $g : M \twoheadrightarrow M' \neq 0$, $M' \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{\perp\twoheadrightarrow}$. Pero si $M' \notin \mathcal{C}^{\perp\twoheadrightarrow}$, entonces existe $C \neq 0$ y un epimorfismo no cero $h : M' \twoheadrightarrow C$. Entonces hay un epimorfismo no cero $h \circ g : M \to C$ con $C \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{\perp\twoheadrightarrow}$ contradiciendo que M no tiene cocientes no cero en $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{\perp\twoheadrightarrow}$. Por lo tanto $\mathcal{C} \vee \mathcal{C}^{\perp\twoheadrightarrow} = 1$ y podemos denotar al complemento de $\mathcal{C}$ en $R - conat$ como $\mathcal{C}^{\perp\twoheadrightarrow}$. Mas aún, para $\mathcal{C} = \left(\mathcal{C}^{\perp}\right)^{\perp}$ se tiene que $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = 0$ si y sólo si $\mathcal{D} \leq \mathcal{C}^{\perp\twoheadrightarrow}$ para toda $\mathcal{D} \in R - Conat$. ■

El siguiente resultado nos servirá para demostrar la distributividad en $R - conat$.

Proposición 11 *Son equivalentes para $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{L} \in R - conat$:*

1. $\mathcal{C} \wedge \mathcal{L} \leq \mathcal{D}$
2. $\mathcal{C} \wedge \mathcal{L} \wedge \mathcal{D}^{\perp\twoheadrightarrow} = \{0\}$.

Demostración: Si $M \in \mathcal{C} \wedge \mathcal{L} \wedge \mathcal{D}^{\perp\twoheadrightarrow}$, por 1 tenemos que $M \in \mathcal{D}^{\perp\twoheadrightarrow} \wedge \mathcal{D} = \{0\}$ y así vale 2.

Supongamos 2 y supongamos que $M \in \mathcal{C} \wedge \mathcal{L}$, entonces $M \notin \mathcal{D}^{\perp\twoheadrightarrow}$, así, M tiene un cociente $N \neq 0$, $N \in \mathcal{D}$. Como la misma conclusiíon podemos obtener de cualquier cociente de M, entonces por 4. del Teorema 5, concluímos que $M \in \mathcal{D}$. ■

De la equivalencia anterior obtenemos que $\left(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}^{\perp\twoheadrightarrow}\right)^{\perp\twoheadrightarrow}$ es la mayor clase conatural $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{C} \wedge \mathcal{L} \leq \mathcal{D}$. Es decir, $\left(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}^{\perp\twoheadrightarrow}\right)^{\perp\twoheadrightarrow}$ es un complemento de $\mathcal{C}$ relativo a $\mathcal{D}$. Denotaremos a este elemento como $\mathcal{L}_{\mathcal{D}:\mathcal{C}}$.

Proposición 12 *$R - conat$ es una retícula distributiva.*

Demostración: Consideremos la siguente situación: $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) := \mathcal{D}$. Como $\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \leq \mathcal{D}$ y $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \leq \mathcal{D}$, por la definición de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}:\mathcal{C}}$ tenemos $A \leq \mathcal{L}_{\mathcal{D}:\mathcal{C}}$ y $\mathcal{B} \leq \mathcal{L}_{\mathcal{D}:\mathcal{C}}$. Por lo tanto $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \leq \mathcal{L}_{\mathcal{D}:\mathcal{C}}$, entonces $\mathcal{C} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq \mathcal{C} \wedge \mathcal{L}_{\mathcal{D}:\mathcal{C}} \leq \mathcal{D} = (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$. La otra desigualdad siempre se tiene. ■

Con los resultados anteriores tenemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 7 *$R - conat$ es una (gran) retícula completa, distributiva y complementada.*

Finalizaremos esta sección con un teorema que plantea la situación en que $R - quot$ coincide con su esqueleto.

Teorema 8 *Son equivalentes para un anillo R*

1. *$R-quot$ es distributiva y complementada.*
2. *$R-quot = R-conat$.*
3. *R es el anillo trivial.*

Demostración: $(1 \Rightarrow 2)$ Si suponemos 1, entonces todo elemento de $R-quot$ es un complemento (pues es el complemento de su complemento). Por lo que $R-quot \subseteq R-conat \subseteq R-quot$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Supongamos ahora que $R-quot = R-conat$, entonces para una clase de representantes de clases de isomorfismo de R-módulos simples, $R-simp$, las retículas generadas correspondientes $\xi_{R-quot}(R-simp)$ y $\xi_{R-conat}(R-simp)$ son iguales. Como $R-simp$ es cerrada bajo cocientes, $R-simp \cup \{0\} = \xi_{R-quot}(R-simp) = \xi_{R-conat}(R-simp) = \{M \in R-mod | \forall\, 0 \neq f : M \twoheadrightarrow N, \exists\, 0 \neq g : N \twoheadrightarrow S, S \in R-simp\}$ por el Teorema 4 y la Proposición 8. Reescribiendo esta última clase tenemos que $R-simp \cup \{0\} = \{M \in R-mod\,|\,\forall\, 0 \neq f : M \twoheadrightarrow M/K, \exists\, 0 \neq g : M/K \twoheadrightarrow M/\mathfrak{m},$ con $K \leq M$ y $\mathfrak{m} \leq M$ máximo$\}$. Esta es la clase de R-módulos tales que cada uno de sus submódulos propios están contenidos en un submódulo máximo. Esta clase se denota como $R-max$.

Por otro lado, la clase de R-módulos finitamente generados es subclase de $\xi_{R-conat}(R-simp)$ porque los finitamente generados tienen algún cociente simple. Por lo tanto la clase de los R-móodulos finitamente generados es igual a $R-simp \cup \{0\}$. En particular, si $0 \neq R$, como R es finitamente generado tenemos que $R \oplus R$ es finitamente generado pero no puede ser simple. Por lo tanto $R = 0$, el anillo trivial.

$(3 \Rightarrow 1)$ Si $R = 0$, entonces $R-quot$ es trivialmente distributiva y complementada. ∎

1.4.2. $R-conat$ es una retícula Booleana.

En esta sección demostraremos que $R-conat$ es cardinable (es decir, está en correspondencia biyectiva con un conjunto) y como consecuencia de la sección anterior tendremos que es una retícula Booleana completa.

Observemos que para una clase de módulos $\mathcal{A} \subseteq R-mod$, la clase conatural generada por $\mathcal{A}$, $\xi_{R-conat}(\mathcal{A})$ es $\{M \in R-Mod | \forall\, 0 \neq f : M \twoheadrightarrow N,$ existen epimorfismos no cero $N \twoheadrightarrow K$ y $A \twoheadrightarrow K$ con $A \in \mathcal{A}\}$.

Definición: Decimos que dos clases $\mathcal{Q}, \mathcal{R} \in R-quot$ comparten cocientes no nulos si existen $M \in \mathcal{R}$, $N \in \mathcal{Q}$ y epimorfismos no cero $f : M \twoheadrightarrow K$ y $g : N \twoheadrightarrow K$.

Proposición 13 *$\mathcal{R}$, $\mathcal{Q} \in R-quot$ comparten cocientes si y sólo si $\xi_{R-conat}(\mathcal{Q}) \wedge \xi_{R-conat}(\mathcal{R}) \neq 0$.*

Demostración: Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{Q}$ comparten un cociente K, tenemos que $K \in \xi_{R-conat}(\mathcal{Q}) \wedge \xi_{R-conat}(\mathcal{R})$. Sea $0 \neq A \in \xi_{R-conat}(\mathcal{R}) \wedge \xi_{R-conat}(\mathcal{Q})$. Como $A \in \xi_{R-conat}(\mathcal{Q})$, para todo epimorfismo no cero $a : A \twoheadrightarrow B$, existen $b : B \twoheadrightarrow K$ y $n : N \twoheadrightarrow K$ con $N \in \mathcal{Q}$. Ahora como $A \in \xi_{R-conat}(\mathcal{R})$ y $b \circ a \neq 0$, entonces $K \in \xi_{R-conat}(\mathcal{R})$, por lo que debe existir un cociente no cero $k : K \twoheadrightarrow K'$ y un $M \in \mathcal{R}$ tal que K' sea cociente de M, digamos $m : M \twoheadrightarrow K'$. Entonces tenemos epimorfismos no cero m y $k \circ n$ que hacen a K' un cociente común de $M \in \mathcal{R}$ y $N \in \mathcal{Q}$. ∎

Definición: Sea $M \in R-mod$ y $\mathcal{C} \in R-conat$, denotamos $Sub_{\mathcal{C}}(M)$ la familia de submódulos de M que pertenecen a $\mathcal{C}$.

Lema 4 *Sea E un cogenerador inyectivo para $R-Mod$, entonces para cada $\mathcal{C} \in R-conat$, se tiene que $\xi_{R-conat}(Sub_{\mathcal{C}}(E)) = \mathcal{C}$.*

Demostración: Sea $M \in \xi_{R-conat}(Sub_{\mathcal{C}}(E))$, entonces para todo epimorfismo no cero $f : M \twoheadrightarrow N$ existen $0 \neq K$, $n : N \twoheadrightarrow K$, $A \in Sub_{\mathcal{C}}(E)$ y $b : A \twoheadrightarrow K$. Como $A \in Sub_{\mathcal{C}}(E)$, en particular $A \in \mathcal{C}$ y como $\mathcal{C}$ cumple la condición (CN) por ser una clase conatural, tenemos que $M \in \mathcal{C}$.

Ahora si $M \in \mathcal{C}$, y $f : M \twoheadrightarrow N$ es un cociente no cero, entonces $N \in \mathcal{C}$. Como E es un cogenerador inyectivo, existe $0 \neq e : N \to E$. Así $e(N)$ es un submódulo de E y también un cociente de N, por lo tanto $e(N) \in Sub_{\mathcal{C}}(E)$, lo que prueba que $M \in \xi_{R-conat}(Sub_{\mathcal{C}}(E))$ ∎

Teorema 9 *$R-conat$ es cardinable*

Demostración: Sea E un cogenerador inyectivo de $R-Mod$. Consideremos la asignación $\Phi : R-conat \to \wp(\wp(E))$ tal que $\mathcal{C} \mapsto Sub_{\mathcal{C}}(E)$. Por el Lema 4 tenemos que Φ es inyectiva. Por lo tanto $R-conat$ es cardinable ∎

Con los teoremas 7 y 9 concluímos que $R-conat$ es una retícula Booleana completa.

Capítulo 2

Conjuntos de ideales izquierdos de R y su relación con clases de módulos

En el estudio de clases de módulos, se relacionan algunos tipos de clases con conjuntos de ideales izquierdos del anillo. En adelante construiremos conjuntos de ideales de R asociados a $R-nat$ y $R-conat$ respectivamente y veremos como se corresponden sus propiedades en los conjuntos de ideales.

Conviene establecer un poco de notación. Si R es un anillo con uno, denotamos con $\mathbb{L}({}_RR)$ la retícula de ideales izquierdos de R. Si $I \leq R$ es un ideal izquierdo de R, definimos el ideal *trasladado* de I por un elemento $a \in R$ como el ideal izquierdo $(I : a) = \{b \in R \,|\, ba \in I\}$. Observemos que $a \notin I$ si y sólo si $(I : a) \neq R$. Si $ma \in M$ es un elemento de un R-modulo M, el ideal $(0 : m) = \{b \in R \,|\, bm = 0\}$ se llama el ideal *anulador* de m.

El siguiente par de operadores nos ayudarán a relacionar clases de módulos con conjuntos de ideales del anillo. Para una clase $\mathcal{A} \subseteq R-mod$ y un conjunto de ideales $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}({}_RR)$ definimos:

$$\Gamma(\mathcal{A}) = \{(0 : m) \,|\, m \in M,\ M \in \mathcal{A}\}$$

$$\Delta(\mathcal{E}) = \{M \in R-mod \,|\, (0 : m) \in \mathcal{E}, \forall m \in M\}$$

Notemos que si $M \in \mathcal{A}$ entonces para todo $m \in M$, $(0 : m) \in \Gamma(\mathcal{A})$, por lo tanto $M \in \Delta\Gamma(\mathcal{A})$ y así $\mathcal{A} \subseteq \Delta\Gamma(\mathcal{A})$. Por otro lado si $M \in \Delta(\mathcal{E})$ entonces todo anulador de $m \in M$, $(0 : m) \in \mathcal{E}$, por lo tanto $\Gamma\Delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}$. Observemos que Γ y Δ preservan el orden dado por la inclusión pues si tenemos un par de clases de módulos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ tales que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y un anulador $(0 : m) \in \Gamma(\mathcal{A})$ con $m \in M$ y $M \in \mathcal{A}$ entonces $M \in \mathcal{B}$, por lo tanto $(0 : m) \in \Gamma(\mathcal{B})$. Ahora, dados dos conjuntos de ideales izquierdos tales que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ y $M \in \Delta(\mathcal{E})$, entonces para todo $m \in M$, el anulador $(0 : m) \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, así $M \in \Delta(\mathcal{F})$ y así $\Delta(\mathcal{E}) \subseteq \Delta(\mathcal{F})$.

2.1. Clases y conjuntos cerrados

Definición: Una clase de R-módulos $\mathcal{K}$ es cerrada si $\mathcal{K} = \Delta\Gamma(\mathcal{K})$. Un conjunto de ideales iaquierdos de R, $\mathcal{E}$ es cerrado si $\mathcal{E} = \Gamma\Delta(\mathcal{E})$.

Proposición 14 *$\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}(_RR)$ es cerrado si y sólo si satisface:*

(a_1) *Si $I \in \mathcal{E}$ entonces $(I : a) \in \mathcal{E}$ para todo $a \in R$. Es decir, todo conjunto cerrado está determinado por los trasladados de sus elementos.*

Demostración: Sea $\mathcal{E}$ un conjunto cerrado e $I \in \mathcal{E}$. Como $\mathcal{E} = \Gamma\Delta(\mathcal{E})$ entonces $I = (0 : m)$ para algún $m \in M$ con $M \in \Delta(\mathcal{E})$. Sea $a \in R$. Veremos que $(I : a) \in \mathcal{E}$ para todo $a \in R$. Como $am \in M$, entonces $(I : a) = ((0 : m) : a) = (0 : am) \in \mathcal{E}$.

Recíprocamente si cada que $I \in \mathcal{E}$, se tienen también todos los trasladados $(I : a)$ en $\mathcal{E}$, demostraremos la contención $\mathcal{E} \subseteq \Gamma\Delta(\mathcal{E})$. Consideremos al R-módulo $_RM = R/I$. Observemos que $I \in \mathcal{E}$ anula a todo $\bar{m} \in R/I$, mas aún, el anulador de un elemento $\bar{m} \in R/I$ es $(0 : \bar{m}) = (I : m)$ que es un elemento de $\mathcal{E}$. Esto implica que $R/I \in \Delta(\mathcal{E})$. En particular para $a = 1$ tenemos que $I = (I : 1) = (0 : \bar{1}) \in \Gamma\Delta(\mathcal{E})$. ∎

Proposición 15 *Una clase $\mathcal{K} \subseteq R - Mod$ es cerrada si y sólo si satisface:*

(A_1) *$M \in \mathcal{K}$ si y solo si $Rm \in \mathcal{K}$ para todo $m \in M$ y $\mathcal{K}$ es cerrado bajo copias isomorfas. Es decir, toda clase cerrada esta determinada por sus cíclicos.*

Demostración: Supongamos que una clase de módulos $\mathcal{K}$ es cerrada. Sea $M \in \mathcal{K} = \Delta\Gamma(\mathcal{K})$. Entonces para todo $m \in M$, el anulador $(0 : m) \in \Gamma(\mathcal{K})$, i.e., $(0 : m) = (0 : n)$ para alguna $n \in N$ con $N \in \mathcal{K}$. Por lo tanto $Rm \cong Rn \in \mathcal{K}$. Como $\mathcal{K}$ es cerrado bajo isomorfismos, entonces $Rm \in \mathcal{K}$ para todo $m \in M$. Ahora supongamos que para todo $m \in M$ el módulo cíclico Rm pertenece a $\mathcal{K}$. Veamos que $M \in \mathcal{K}$. Como $Rm \in \Delta\Gamma(\mathcal{K})$ entonces los anuladores de elementos de Rm están en $\Gamma(\mathcal{K})$, es decir, $(0 : rm) \in \Gamma(\mathcal{K})$ para todo $r \in R$. En particular si $r = 1$ tenemos que $(0 : m) \in \Gamma(\mathcal{K})$ para todo $m \in M$, esto prueba que $M \in \Delta\Gamma(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$.

Recíprocamente si suponemos que $M \in \mathcal{K}$ si y sólo si $Rm \in \mathcal{K}$ para todo $m \in M$ y $\mathcal{K}$ es cerrado bajo isomorfismos, basta probar que $\Delta\Gamma(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$. Sea $M \in \Delta\Gamma(\mathcal{K})$, entonces para todo $m \in M$, $(0 : m) \in \Gamma(\mathcal{K})$, es decir, $(0 : m) = (0 : n)$ para $n \in N$ con $N \in \mathcal{K}$. Como para toda $n \in N$, $Rn \in \mathcal{K}$ por hipótesis y como Rm es isomorfo a Rn entonces $Rm \in \mathcal{K}$ para toda $m \in M$. Por lo tanto $M \in \mathcal{K}$. ∎

Observemos que toda clase cerrada $\mathcal{K}$ es hereditaria pues si $N \leq M$ con $M \in \mathcal{K}$ entonces $Rm \in \mathcal{K}$ para toda $m \in M$, en particular para toda $n \in N$, lo que implica que $N \in \mathcal{K}$.

Proposición 16 *Los operadores Γ y Δ definen una biyección que preserva el orden entre la clase de clases cerradas de $R - mod$ y los cojnuntos cerrados de $\mathbb{L}(_RR)$. Mas aún, si $\mathcal{K}$ se corresponde con $\mathcal{E}$, entonces $I \in \mathcal{E}$ si y solo si $R/I \in \mathcal{K}$*

Demostración: Dada una clase cerrada $\mathcal{K}$ de R-módulos, $\mathcal{K} = \Delta\Gamma(\mathcal{K})$, si hacemos $\mathcal{F} = \Gamma(\mathcal{K})$ tenemos que $\mathcal{F} = \Gamma(\mathcal{K}) = \Gamma\Delta(\mathcal{F})$, por lo tanto $\mathcal{F}$ es un conjunto cerrado. Si $\mathcal{E}$ es un conjunto cerrado y $\mathcal{A} = \Delta(\mathcal{E})$ entonces $E = \Gamma(\mathcal{A})$ y por lo tanto $\mathcal{A} = \Delta(\mathcal{E}) = \Delta\Gamma(\mathcal{A})$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado.

Ahora si $\mathcal{E} = \Gamma(\mathcal{K})$, $\mathcal{K} = \Delta(\mathcal{E})$ e $I \in \mathcal{E}$ entonces $I = (0 : m)$ para algun $m \in M$ con $M \in \mathcal{K}$. De la demostración de la Proposicióin 14 tenemos que $I = (0 : \bar{1})$ para $\bar{1} \in R/I \in \Delta(\mathcal{E}) = \mathcal{K}$. Recíprocamente si $R/I \in \mathcal{K}$ entonces para todo $\bar{m} \in R/I$, $(I : m) = (0 : \bar{m}) \in \Gamma(\mathcal{K})$, en particular para $\bar{m} = \bar{1}$, $I = (I : 1) \in \Gamma(\mathcal{K}) = \mathcal{E}$ ∎

2.2. La retícula $R - Cl$

En adelante denotaremos como $R - Cl$ a la clase de conjuntos cerrados contenidos en $\mathbb{L}({}_RR)$ distinguiendo de la clase de clases cerradas de R-módulos denotada por $R - cl$.

Dotaremos a $R - Cl$ con una estructura de retícula dada por la relaciíon inclusión y con operaciones definidas como sigue. Para una familia $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, definimos el ínfimo $\bigwedge_\Lambda \mathcal{E}_\lambda = \bigcap_\Lambda \mathcal{E}_\lambda$ y el supremo $\bigvee_\Lambda \mathcal{E}_\lambda = \bigcup_\Lambda \mathcal{E}_\lambda$ en $R - Cl$. Como consecuencia de estas definiciones, la retícula $(R-Cl, \leq, \wedge, \vee)$ satisface ambas leyes distributivas infinitas. Además como elemento menor tenemos a $0 = \{{}_RR\}$ que es cerrado pues es cerrado bajo trasladados y $1 = \mathbb{L}({}_RR)$ como elemento mayor. Con esto, $R-Cl$ es un marco y por lo tanto cada elemento $\mathcal{E} \in R-Cl$ tiene un pseudocomplemento al que denotaremos como $\mathcal{E}^{\perp_{Cl}}$ y caracterizaremos mas adelante.

Proposición 17 *Sea $\mathcal{E}$ un conjunto cerrado de ideales, entonces su pseudocomplemento es*

$$\mathcal{E}^{\perp_{Cl}} = \{I \in \mathbb{L}({}_RR) \,|\, (I : a) \notin \mathcal{E} \,\forall a \in R - I\}$$

Demostración: Llamemos $\mathcal{F}$ al conjunto del lado derecho y observemos que $\{R\} \in \mathcal{F}$. Probemos primero que $\mathcal{F}$ cumple la condición (a_1), i.e., si $I \in \mathcal{F}$ entonces $(I : a) \in \mathcal{F}$ para toda $a \in R$. Para esto tenemos dos casos; si $a \in I$ entonces $R = (I : a) \in \mathcal{F}$. Si $a \notin I$ entonces $(I : a) \notin \mathcal{E}$ por definición. Veamos que $(I : a) \in \mathcal{F}$. Sea $a' \in R - (I : a)$, entonces $a'a \notin I$ y como $I \in \mathcal{F}$ tenemos que $(I : a'a) \notin \mathcal{E}$, por lo tanto $(I : a) \in \mathcal{F}$. Se sigue de la Proposicion 14 que $\mathcal{F}$ es un conjunto cerrado.

Es claro de la definición de $\mathcal{F}$ que $\mathcal{E} \wedge \mathcal{F} = \{R\}$. Supongamos que $\mathcal{E}' \in R - Cl$ cumple que $\mathcal{E} \wedge \mathcal{E}' = \{R\}$. Si $I \in \mathcal{E}'$ con $I \neq R$ entonces $I \notin \mathcal{E}$ y para toda $a \notin I$ el trasladado $(I : a) \in \mathcal{E}'$ por ser un conjunto cerrado. Como $(I : a) \neq R$ y $(I : a) \notin \mathcal{E}$, entonces $I \in \mathcal{F}$. Así $\mathcal{E}' \leq \mathcal{F}$, i.e., $\mathcal{F}$ no sólo es el máximo conjunto cerrado que satisface $\mathcal{E} \wedge \mathcal{F} = \{R\}$, además es un pseudocomplemento fuerte ∎

Proposición 18 *Si $\mathcal{E} \in R - Cl$, entonces su segundo pseudocomplemento es $(\mathcal{E}^{\perp_{Cl}})^{\perp_{Cl}} = \{I \in \mathbb{L}(_RR) \,|\, \forall a \notin I, \exists\, b \notin (I : a)$ tal que $((I : a) : b) \in \mathcal{E}\}$.*

Demostración: Por lo anterior, $(\mathcal{E}^{\perp_{Cl}})^{\perp_{Cl}} = \{I \in \mathbb{L}(_RR) \,|\, (I : a) \notin \mathcal{E}^{\perp_{Cl}}\, \forall a \in R - I\}$. Basta observar que $(I : a) \notin \mathcal{E}^{\perp_{Cl}}$ si y solo si existe $b \in R - (I : a)$ tal que $((I : a) : b) \in \mathcal{E}$. ■

2.3. Conjuntos naturales

Definición: Un conjunto $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}(_RR)$ es *natural* si satisface las condiciones:

(a_1) Si $I \in \mathcal{E}$ entonces $(I : a) \in \mathcal{E}$ para todo $a \in R$.
(a_3) Si $I, J \in \mathcal{E}$ entonces $I \cap J \in \mathcal{E}$.
(a_6) Si $J \subseteq I$, $(J; i) \in \mathcal{E}\, \forall i \in I$ e $I/J \leq_{es} R/J$ entonces $J \in \mathcal{E}$.

Proposición 19 *Toda clase natural de módulos es una clase cerrada.*

Demostración: Sea $\mathcal{N} \in R - nat$ y M un módulo. Si $M \in \mathcal{N}$, entonces $Rm \in \mathcal{N}$ para todo $m \in M$ por ser $\mathcal{N}$ cerrada bajo submódulos. Recíprocamente, si $Rm \in \mathcal{N}$ para todo $m \in \mathcal{N}$, sea $\{Rm\}_{m \in X}$ con $X \subseteq M$ una familia independiente máxima de submódulos cíclicos de M. Como la familia es independiente máxima, $\bigoplus_X Rm$ es esencial en M. Por la cerradura de $\mathcal{N}$ bajo sumas directas tenemos que $\bigoplus_X Rm \in \mathcal{N}$. Entonces $E(M) \cong E(\bigoplus_X Rm) \in \mathcal{N}$. Como $\mathcal{N}$ es cerrada bajo submódulos, concluímos que $M \in \mathcal{N}$. ■

Introduciremos la siguiente notación. Denotaremos como $\mathbb{L}_{a_i}$ a la subclase de $\mathbb{L}(_RR)$ que satisface la condición a_i para $i = 1, 3, 6$ y 2 que definiremos mas adelante. Observemos que $\mathbb{L}_{a_1}$ coincide con $R - Cl$, de modo que por la Proposición 14, Γ y Δ inducen un isomorfismo entre clases cerradas de módulos y conjuntos de ideales que satisfacen a_1. Además por la Proposición 19 tenemos que $\Gamma(\mathcal{N}) \in \mathbb{L}_{a_1}$ para toda clase natural $\mathcal{N}$. Para el siguiente resultado, denotemos como $\mathcal{L}_{\oplus}$ la clase de clases de módulos cerradas bajo sumas directas.

Lema 5 *Los operadores Δ y Γ determinan una biyección entre las clases $R - cl \cap \mathcal{L}_{\oplus}$ y $\mathbb{L}_{a_1,a_3}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{N} \in R - cl \cap \mathcal{L}_{\oplus}$. En particular $\mathcal{N}$ es cerrada, entonces $\Gamma(\mathcal{N}) \in \mathbb{L}_{a_1}$. Veamos que $\Gamma(\mathcal{N}) \in \mathbb{L}_{a_3}$. Sean $I, J \in \Gamma(\mathcal{N})$, por la correspondencia dada por la Proposición 16 tenemos que R/I, $R/J \in \mathcal{N}$, entonces $R/(I \cap J) \cong R/I \oplus R/J \in \mathcal{N}$ lo que implica que $I \cap J \in \Gamma(\mathcal{N})$, así $\Gamma(\mathcal{N}) \in \mathbb{L}_{a_1,a_3}$.

Sean $\mathcal{E} \in \mathbb{L}_{a_1,a_3}$ y $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de elementos de $\Delta(\mathcal{E})$. Tomemos $x = n_{\lambda_1} + \cdots + n_{\lambda_k} \in \bigoplus_\Lambda N_\lambda$ con $n_{\lambda_i} \in N_{\lambda_i}$. Como cada anulador $(0 : n_{\lambda_i}) \in \mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ satisface a_3, entonces $(0 : x) = \bigcap_{i=1}^{k} (0 : n_{\lambda_i}) \in \mathcal{E}$, por lo tanto $\bigoplus_\Lambda N_\lambda \in \mathcal{E}$. ■

Proposición 20 *Los operadores Γ y Δ determinan una biyección entre la clase de conjuntos naturales de $\mathbb{L}(_RR)$ tambien denotada $\mathbb{L}_{a_1,a_3,a_6}$, y $R-nat$.*

Demostración: Sean $\mathcal{E} \in \mathbb{L}(_RR)$ y $\mathcal{N} \in R-mod$ que se corresponden mediante Γ y Δ, es decir $\mathcal{E} = \Gamma(\mathcal{N})$ y $\mathcal{N} = \Delta(\mathcal{E})$. Probaremos que $\mathcal{N} \in R-nat$ si y solo sí $\mathcal{E} \in \mathbb{L}_{a_1,a_3,a_6}$.

Supongamos primero que $\mathcal{N} \in R-nat$, entonces por el lema anterior tenemos que $\mathcal{E} = \Gamma(\mathcal{N}) \in \mathbb{L}_{a_1,a_3}$. Resta probar que $\mathcal{E}$ satisface a_6. Consideremos ideales $I, J \in \Gamma(\mathcal{N})$ tales que $J \subseteq I$, $(J : i) \in \mathcal{E}$ para todo $i \in I$ y $I/J \leq_{es} R/J$. Para todo $\bar{i} \in I/J$, como $(J : i) = (0 : \bar{i}) \in \mathcal{E}$, entonces $I/J \in \mathcal{N}$ y como $\mathcal{N}$ es cerrada bajo capsulas inyectivas y submódulos, entonces $R/J \in \mathcal{N}$, esto implica que $J \in \mathcal{E}$ por lo tanto $\mathcal{E} \in \mathbb{L}_{a_1,a_3,a_6}$.

Ahora supongamos que $\mathcal{E} \in \mathbb{L}_{a_1,a_3,a_6}$. Por el Lema 5 tenemos que $\Delta(\mathcal{E}) = \mathcal{N} \in R-cl \cap \mathcal{L}_{\oplus}$. Sea $M \in \mathcal{N}$, veremos que $E(M) \in \mathcal{N}$ probando que para todo $x \in E(M)$ el anulador $(0 : x) \in \mathcal{E}$.

Sea $0 \neq x \in E(M)-M$, entonces por la esencialidad de M en $E(M)$ existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in M$, es decir el ideal $I = (M : x)$ es distinto de cero. Observemos también que la esencialidad implica que para $0 \neq Rx \leq E(M)$, el submódulo $Rx \cap M = Ix$ es distinto de cero. Sea $J = (0 : x)$, note que $J \subseteq I$, entonces para todo $i \in I$, $ix \in M$ y el ideal $(J : i) = ((0 : x) : i) = (0 : ix) \in \mathcal{E}$. Demostremos que $I/J \leq_{es} R/J$. Sea I'/J un ideal no cero de R/J. Consideremos $h \in I' - J$. Como $hx \neq 0$, tenemos que $0 \neq Rhx \leq E(M)$ y como M es esencial en $E(M)$, $Rhx \cap M \neq 0$. Entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq rhx \in M$, es decir, $rh \in (M : x) \cap I' = I \cap I'$ pero $rh \notin J$. Esto prueba que $\{0\} \neq (I \cap I')/J \cong I/J \cap I'/J$. Como $\mathcal{E}$ satisface a_6, entonces $(0 : x) \in \mathcal{E}$ para todo $x \in E(M)$. Por lo tanto $E(M) \in \mathcal{N}$. ■

Demostraremos que los operadores pseudocomplemento $(\_)^{\perp}$ en las retículas $R-Cl$ y $R-cl$ son compatibles con los operadores Γ y Δ de la siguiente manera.

Proposición 21 *Si $\mathcal{K} \in R-cl$ y $\mathcal{E} \in R-Cl$ se corresponden mediante la biyección de la Proposición 16, es decir, $\Gamma(\mathcal{K}) = \mathcal{E}$ y $\Delta(\mathcal{E}) = \mathcal{K}$. Entonces $\Gamma(\mathcal{K}^{\perp}) = \mathcal{E}^{\perp}$ y $\Delta(\mathcal{E}^{\perp}) = \mathcal{K}^{\perp}$.*

Demostración: Sea $I \in \Gamma(\mathcal{K}^{\perp})$, entonces $I = (0 : m)$ para algún $m \in M$ con $M \in \mathcal{K}^{\perp}$. Para demostrar que $I \in \mathcal{E}^{\perp}$ debemos probar que para toda $a \in R - I$, el ideal trasladado $(I : a) \notin \mathcal{E}$. Supongamos que existe $a \in R - I$ tal que $(0 : am) = ((0 : m) : a) = (I : a) \in \mathcal{E}$, entonces por la Proposición 16, $R/(I : a) = R/(0 : am) \cong Ram \in \mathcal{K}$ contradiciendo que $M \in \mathcal{K}^{\perp}$, pues al ser esta última una clase cerrada, contiene a todos los submódulos cíclicos de M. Por lo tanto $(I : a) \notin \mathcal{E}$ para todo $a \in R - I$.

Sea $I \in \mathcal{E}^{\perp}$, consideremos el módulo $M = R/I$ y observemos que $I = (0 : \bar{1})$ con $\bar{1} \in M$. Resta probar que $M \in \mathcal{K}^{\perp}$. Si $M \notin \mathcal{K}^{\perp}$, existiría un submódulo no cero J/I de M en $\mathcal{K}$. Entonces para $0 \neq \bar{a} \in J/I$, se tiene que $R/(I : a) \cong R\bar{a} \in K$ pues $\mathcal{K}$ es cerrada. Entonces por la correspondencia de la Proposición 16, $(I:a) \in \mathcal{E}$ en contradicción con que $I \in \mathcal{E}^{\perp}$. Por lo tanto $M \in \mathcal{K}^{\perp}$ y podemos concluir que $\Gamma(\mathcal{K}^{\perp}) = \mathcal{E}^{\perp}$.

Probaremos ahora la otra igualdad. Sea $M \in \Delta(\mathcal{E}^{\perp})$, entonces para toda $m \in M$, el anulador $(0:m) \in \mathcal{E}^{\perp}$. Si M tuviera un submódulo propio $N \leq M$ en $\mathcal{K}$, entonces para todo $n \in N$, $R/(0:n) \cong Rn \in \mathcal{K}$. Como $(0:n) \in \mathcal{E} \wedge \mathcal{E}^{\perp}$ tenemos que $n = 0$, por lo tanto $M \in \mathcal{K}^{\perp}$.

Si $M \in \mathcal{K}^{\perp}$, veamos que para toda $m \in M$, el anulador $(0:m)$ pertenece a $\mathcal{E}^{\perp}$. Supongamos que existe $m \in M$ tal que $(0:m) \notin \mathcal{E}^{\perp}$, entonces existe un elemento $a \in R - (0:m)$ tal que $(0:am) = ((0:m):a) \in \mathcal{E}$. Como $\mathcal{E} = \Gamma(\mathcal{K})$, tenemos $Ram \cong R/(0:am) \in \mathcal{K}$ contradiciendo que $M \in \mathcal{K}^{\perp}$. Por lo tanto $(0:a) \in \mathcal{E}^{\perp}$ para todo $m \in M$. Es decir $\Delta(\mathcal{E}^{\perp}) = \mathcal{K}^{\perp}$. ■

Proposición 22 *Si el conjunto $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}({}_RR)$ es cerrado, entonces $\mathcal{E}^{\perp_{Cl}}$ es un conjunto natural.*

Demostración: Como $\mathcal{E}$ es cerrado, entonces $\mathcal{K} = \Delta(\mathcal{E})$ es una clase cerrada de módulos, entonces por el Teorema 2, $\mathcal{K}^{\perp}$ es una clase natural. De las Proposiciones 16 y 21 se sigue que $\mathcal{E}^{\perp} = \Gamma(\mathcal{K}^{\perp})$ es un conjunto natural. ■

Proposición 23 *Si $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}({}_RR)$ es un conjunto cerrado, entonces $(\mathcal{E}^{\perp_{Cl}})^{\perp_{Cl}}$ es el menor conjunto natural que contiene a $\mathcal{E}$. Mas aún $\mathcal{E} = (\mathcal{E}^{\perp_{Cl}})^{\perp_{Cl}}$ si y solo sí $\mathcal{E}$ es un conjunto natural.*

Demostración: Sabemos por la Proposición 4 que $(\mathcal{K}^{\perp})^{\perp}$ es la menor clase natural que contiene a $\mathcal{K} = \Delta(\mathcal{E})$. Supongamos que $\mathcal{F}$ es un conjunto natural que contiene a $\mathcal{E}$. Entocnes $\mathcal{K} = \Delta(\mathcal{E}) \subseteq \Delta(\mathcal{F})$. que es una clase natural que contiene a $\mathcal{K}$, así $\Delta((\mathcal{E}^{\perp})^{\perp}) = (\mathcal{K}^{\perp})^{\perp} \subseteq \Delta(\mathcal{F})$, esto implica que $(\mathcal{E}^{\perp})^{\perp} \subseteq \mathcal{F}$. ■

Denotaremos como $R-Nat$ la clase de conjuntos naturales de $\mathbb{L}({}_RR)$ con estructura de retícula dada por la inclusión y operaciones de retícula dadas como sigue. Para una familia $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tenemos $\bigwedge_\Lambda \mathcal{E}_\lambda = \bigcap_\Lambda \mathcal{E}_\lambda$ y supremo $\bigvee_\Lambda = \bigcup_\Lambda \{\mathcal{F} \in R-Nat \,|\, \mathcal{E}_\lambda \subseteq \mathcal{F}, \forall\, \lambda \in \Lambda\}$. Sabemos además que Δ y Γ determinan una biyección entre $R-nat$ y $R-Nat$, entonces de la Proposición 21 junto con el Teorema 3 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3 *La retícula $R-Nat$ es el esqueleto de $R-Cl$. En particular, $R-Nat$ es un retícula booleana.*

2.4. Filtros de ideales izquierdos de R

Definición: Un conjunto de ideales izquierdos $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}({}_RR)$ se llama *filtro* si satisface:

(a_2) $I \in \mathcal{E}$, $I \subseteq J \in \mathbb{L}({}_RR)$ entonces $J \in \mathcal{E}$ para todo $a \in R$. Es decir, $\mathcal{E}$ es cerrado bajo superideales.

Denotamos como $R - Filt$ a la familia de filtros de $\mathbb{L}({}_RR)$ y la dotaremos con estructura de retícula como sigue: Para una familia de filtros $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se define el ínfimo $\bigwedge_\Lambda \mathcal{E}_\lambda = \bigcap_\Lambda \mathcal{E}_\lambda$ y el supremo $\bigvee_\Lambda \mathcal{E}_\lambda = \bigcup_\Lambda \mathcal{E}_\lambda$ que son también filtros pues uniones e intersecciones de conjuntos de ideales que satisfacen (a_2) también satisfacen esa propiedad. Ademas por la definición conjuntista de estas operaciones, tenemos ambas leyes distributivas infinitas y como $1 = \mathbb{L}({}_RR)$ y $0 = \{{}_RR\}$ son filtros, tenemos que $(R - Filt, \subseteq, \wedge, \vee, 0, 1)$ es una retícula completa. Dado un conjunto de ideales izquierdos $\mathcal{F}$, se define el filtro generado por $\mathcal{F}$ como $\xi_{R-Filt}(\mathcal{F}) = \{J \in \mathbb{L}({}_RR) | \, I \subseteq J, \, I \in \mathcal{F}\}$. Y cada conjunto en $R - Filt$ tiene un único pseudocomplemento que estudiaremos a continuación.

Para $\mathcal{E} \in R - Filt$, definimos el conjunto $\mathcal{E}^\top = \{I \in \mathbb{L}({}_RR) \,|\, \text{si } I \subseteq J, \, J \in \mathcal{E} \text{ entonces } J = R\}$. Es decir, el conjunto de ideales izquierdos de R que no tienen superideales propios en $\mathcal{E}$. Claramente $R \in \mathcal{E}^\top$ para toda $\mathcal{E}$ pues R es el mayor ideal.

Proposición 24 *Para todo $\mathcal{E} \in R - Filt$, el conjunto $\mathcal{E}^\top$ es su pseudocomplemento en $R - Filt$.*

Demostración: En efecto, $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\top = \{R\}$. Veamos que $\mathcal{E}^\top$ es filtro. Sea $I \in \mathcal{E}^\top$ y J un superideal de I, entonces $J = R \in \mathcal{E}^\top$, por lo tanto $\mathcal{E}^\top \in \mathbb{L}_{a_2}$. Ahora si $\mathcal{F} \in R - Filt$ es un conjunto tal que $\mathcal{E} \wedge \mathcal{F} = \{R\}$ pero $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{E}^\top$, entonces existe $I \in \mathcal{F}$ tal que $I \neq \mathcal{E}^\top$, i. e., existe un superideal propio $J \in \mathcal{E}$ de I. Entonces tenemos una contradicción pues $J \in \mathcal{E} \wedge \mathcal{F} = \{{}_RR\}$. Por lo tanto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}^\top$ y así $\mathcal{E}^\top$ es el pseudocomplemento de $\mathcal{E}$ en $R - Filt$, que además es pseudocomplemento fuerte. ■

Proposición 25 *Si $\mathcal{E}$ es un filtro, entonces su segundo pseudocomplemento $(\mathcal{E}^\top)^\top$ se describe como el conjunto de ideales $I \in \mathbb{L}({}_RR)$ tales que todo superideal propio de I tiene un superideal propio en $\mathcal{E}$.*

Demostración: Por definición $(\mathcal{E}^\top)^\top = \{I \in \mathbb{L}({}_RR) | \text{ si } I \subseteq J, \, J \in \mathcal{E}^\top \text{ entonces } J = R\} = \{I \in \mathbb{L}({}_RR) | \text{ si } I \subseteq J \subsetneq R \text{ entonces } J \notin \mathcal{E}^\top\}$. Pero $J \notin \mathcal{E}^\top$ si y sólo si existe un superideal propio de J en $\mathcal{E}$, es decir, $(\mathcal{E}^\top)^\top = \{I \in \mathbb{L}({}_RR) \,|\, \forall\, J\, (I \subseteq J \subsetneq R)\, \exists K (J \subseteq K \subsetneq R), \, K \in \mathcal{E}\}$. ■

Como consecuencia, todo filtro $\mathcal{E}$ está contenido en su segundo pseudocomplemento pues si $I \in \mathcal{E}$, entonces para todo superideal J de I, se tiene que $J \in \mathcal{E}$, en particular si J es propio. Por lo tanto $I \in \mathcal{E}^{\top\top}$.

Lema 6 *Si $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in R - Filt$ son tales que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{F}^\top \subseteq \mathcal{E}^\top$.*

Demostración: Si $I \in \mathcal{F}^\perp$, entonces para todo superideal J de I en $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ se tiene $J = R$, entonces $I \in \mathcal{E}^\top$. Mas aún, por este mismo argumento se tiene que $\mathcal{E}^{\top\top} \subseteq \mathcal{F}^{\top\top}$. ■

2.5. Conjuntos conaturales

Decimos que un conjunto de ideales es *conatural* si es de la forma $\mathcal{E}^{\top}$ para algún conjunto $\mathcal{E} \in R-Filt$. Denotaremos como $R-Conat$ a la familia de conjuntos conaturales, que caracterizaremos mediante la condición (CN) para conjuntos de ideales similarmente al Teorema 5.

Definición: $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}({}_RR)$ tiene la condición (CN) si y solo si:

Un ideal $I \in \mathcal{E}$ si y sólo si para todo superideal propio $J \supseteq I$ existe un superideal propio $K \supseteq J$ en $\mathcal{E}$.

Es decir, $I \in \mathcal{E}$ si y sólo si $\forall(I \subseteq J \subsetneq R)$, $\exists K \in \mathcal{E}(J \subseteq K \subsetneq R)$. Observemos que la condición (CN) se resume en: $I \in \mathcal{E}$ si y sólo si $I \in (\mathcal{E}^{\top})^{\top}$ (Proposición 25).

Teorema 10 *Son equivalentes para un conjunto de ideales $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}({}_RR)$:*

1. $\mathcal{E} \in R - Conat$
2. $\mathcal{E}$ *satisface la condición* (CN).
3. $\mathcal{E} \in R - Filt$ *y* $\mathcal{E}^{\top\top} \subseteq \mathcal{E}$

Demostración: Supongamos que $\mathcal{E} \in R - Conat$ es un conjunto conatural, es decir, existe $\mathcal{F} \in R - Filt$ tal que $\mathcal{E} = \mathcal{F}^{\top}$. Como $\mathcal{F}^{\top} \in R - Filt$, $\mathcal{F}^{\top} \subseteq (\mathcal{F}^{\top})^{\top\top}$. También $\mathcal{F}\mathcal{F}^{\top\top}$ por lo que $\mathcal{F}^{\top\top\top} \subseteq \mathcal{F}^{\top}$. Por lo tanto $\mathcal{E}^{\top\top} = \mathcal{F}^{\top\top\top} = \mathcal{F}^{\top} = \mathcal{E}$.

Ahora si $\mathcal{E}$ satisface (CN) entonces $\xi_{R-Filt}(\mathcal{F})^{\top\top} = \mathcal{E}$, es decir, $\mathcal{E}$ es el pseudocomplemento de una clase cocerrada, por lo tanto $\mathcal{E} \in R - Filt$ y además $\mathcal{E}^{\top\top} \subseteq \mathcal{E}$.

Supongamos que $\mathcal{E} \in R - Filt$ y $\mathcal{E}^{\top\top} \subseteq \mathcal{E}$ entonces $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\top\top}$, es decir, $\mathcal{E}$ es un pseudocomplemento de una clase cocerrada, por lo tanto $\mathcal{E} \in R - Conat$. ∎

Las siguientes dos proposiciones traducen las propiedades del Teorema 6.

Proposición 26 *Todo conjunto conatural $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}({}_RR)$ satisface la condición*

(a_5) *Si $I \in \mathcal{E}$, $J \in \mathbb{L}({}_RR)$, $J \subseteq I$ y el trasladado $(J : i) \in \mathcal{E}$ para toda $i \in I$, entonces $J \in \mathcal{E}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{E} \in R-Conat$, sean $I \in \mathcal{E}$, $J \in \mathbb{L}({}_RR)$, $J \subseteq I$ con $(J : i) \in \mathcal{E}$ para toda $i \in I$. Demostraremos que $J \in \mathcal{E}^{\top\top}$. Sea $K \supseteq J$ un superideal propio, veamos que $K \in \mathcal{E}$. Tenemos dos casos posibles, si $I + K = R$ y si $I + K \neq R$. En el primer caso, para cada $r \in R$ podemos escribir $r = i + k$ con $i \in I$ y $k \in K$. Entonces $(K : r) = (K : i + k) = (K : i)$. En particular para $r = 1$, si $1 = i + k$ se tiene que $K = (K : 1) = (K : i) \supseteq (J : i) \in \mathcal{E}$ y como $\mathcal{E}$ es un filtro, entonces $K \in \mathcal{E}$. Por otro lado, si $I + K \neq R$, éste es un superideal propio de $I \in \mathcal{E}$, entonces $I + K \in \mathcal{E}$. Pero también es un superideal propio de J. Por lo tanto $J \in \mathcal{E}^{\top\top}$. ∎

Proposición 27 *Todo conjunto conatural $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}({}_RR)$ satisface la condición*

$(a_6)^*$ *Si $I \in \mathcal{E}$, $J \in \mathbb{L}({}_RR)$, $J \subseteq I$ y $I/J \ll R/J$ (i.e., I/J es superfluo en R/J), entonces $J \in \mathcal{E}$.*

Demostración: Primero observemos que $I/J \ll R/J$ significa que si $I + K = J$ con $J \subseteq K$ entonces $K = R$. Ahora, si $I \in \mathcal{E}$ y $I/J \ll R/J$, demostraremos que $J \in \mathcal{E}^{\top\top}$. Sea K un superideal propio de J. Como $I/J \ll R/J$ se tiene que $I + K \neq R$ y como $I \subseteq I + K$ entonces $I + K \in \mathcal{E}$ y también es un superideal propio de K. Por lo tanto $J \in \mathcal{E}^{\top\top} = \mathcal{E}$. ∎

2.5.1. $R - Conat$ es una retícula

Lema 7 *La interseccion de toda familia $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de conjuntos conaturales es un conjunto conatural.*

Demostración: Sea $\mathcal{E} = \bigcap_\Lambda \mathcal{E}_\lambda$, veamos que $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\top\top}$. $\mathcal{E} \in R - Filt$ pues una intersección de conjuntos que satistacen a_2, satisface también a_2. Sea $I \in \mathcal{E}^{\top\top}$, entonces todo superideal propio $J \supseteq I$ tiene un superideal propio $K \in \mathcal{E}$, así $K \in \mathcal{E}_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto $I \in \mathcal{E}_\lambda^{\top\top} = \mathcal{E}_\lambda$ pues toda $\mathcal{E}_\lambda$ es conatural. ∎

Lema 8 *La clase conatural generada por un filtro $\mathcal{E}$ denotada como $\xi_{R-Conat}(\mathcal{E})$ coincide con su segundo pseudocomplemento en $R - Filt$.*

Demostración: Por el Teorema 10 tenemos que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^{\top\top}$ es un conjunto conatural, entonces $\xi_{R-Conat}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}^{\top\top}$. Veamos que $\mathcal{E}^{\top\top} \subseteq \xi_{R-Conat}(\mathcal{E})$. En general, si $\mathcal{F}$ es un conjunto conatural que contiene a $\mathcal{E}$, entonces $\mathcal{E}^{\top\top} \subseteq \mathcal{F}^{\top\top} = \mathcal{F}$. Así $\mathcal{E}^{\top\top} = \xi_{R-Conat}(\mathcal{E})$. ∎

Los lemas previos nos permiten definir estructura de reícula en $R - Conat$ con el orden dado por la inclusión y con operaciones definidas como $\bigwedge_\Lambda \mathcal{E}_\lambda = \bigcap_\Lambda \mathcal{E}_\lambda$ y supremo $\bigvee_\Lambda \mathcal{E}_\lambda = \xi_{R-Conat}(\bigcup_\Lambda \mathcal{E}_\lambda)$. Con $0 = \{{}_RR\}$ y $1 = \mathbb{L}({}_RR)$.

Proposición 28 *Para toda familia de conjuntos conaturales $\{\mathcal{E}_\lambda\}_\Lambda$ se tiene que $\bigvee_\Lambda \mathcal{E}_\lambda = (\bigcup_\Lambda \mathcal{E}_\lambda)^{\top\top}$ $= \{I \in \mathbb{L}({}_RR) | \forall J \supseteq I, J \neq R, \exists K \supseteq I, K \neq R$ tal que $K \in \mathcal{E}_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda\}$.*

Demostración: Desarrollemos la definición dada por la Proposición 25.
$(\bigcup_\Lambda \mathcal{E}_\lambda)^{\top\top} = \{I \in \mathbb{L}({}_RR) \,|\, \forall\, J\, (I \subseteq J \subsetneq R)\, \exists K (J \subseteq K \subsetneq R),\, K \in \bigcup_\Lambda \mathcal{E}_\lambda\} =$
$\{I \in \mathbb{L}({}_RR) \,|\, \forall\, J\, (I \subseteq J \subsetneq R)\, \exists K (J \subseteq K \subsetneq R),\, K \in \mathcal{E}_\lambda,$ para alguna $\lambda \in \Lambda\}$. ∎

Corolario 4 $R - Conat = Skel(R - Filt)$. *En particular $R - Conat$ es una retícula booleana.*

La siguiente proposición nos plantea la situación en la que $R - Filt$ es su propio esqueleto.

Proposición 29 *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

1. $R-Filt$ *es una retícula booleana.*
2. $R-Filt = R-Conat$.
3. ${}_RR$ *es un módulo simple, es decir* $\mathbb{L}({}_RR) = \{0,_R R\}$

Demostración: Si $R-Filt$ es complementada y $\mathcal{E} \in R-Filt$, como los complementos son únicos, $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\top\top}$, entonces $R-Filt \subseteq R-Conat$.

Supongamos que $R-Filt = R-Conat$, entonces todo conjunto conatural es igual a su doble pseudocomplemento, en particular $\mathcal{E} = Max({}_RR) \cup \{{}_RR\}$ donde $Max({}_RR)$ es el conjunto de ideales máximos de R. Como $\mathcal{E}^{\top\top} \subseteq \mathcal{E}$, si un ideal I tiene la propiedad de que todo superideal propio J de I tiene un superideal propio en $Max({}_RR)$, entonces $I \in \mathcal{E}$, es decir I es máximo. Así todos los ideales de R son máximos, por lo tanto R es simple. Ahora, suponiendo que R es simple, entonces $\mathbb{L}({}_RR) = \{0, R\}$ y trivialmente $R-Filt = R-Conat$. ■

Note que en contraste con el hecho de que $R-Nat$ y $R-nat$ son isomorfas, $R-conat$ y $R-Conat$ no lo son. Para esto basta comparar la Proposición 29 con el Teorema 4.

Bibliografía

[1] A. Alvarado, H. Rincón and J. Ríos, On the lattices of natural and conatural classes in $R-mod$, *Communications in Algebra*. **29**(2) 2001, 541-556.

[2] A.I. Kashu, On natural and conatural sets of left ideals of a ring, *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova, Matematica*. **54** (2) 2007, 25-32.

[3] A.I. Kashu, On natural classes of R-modules in the langage of ring R, *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova, Matematica*. **45** (2) 2004, 95-101.

[4] A.I. Kashu, On the lattice of closed classes of modules, *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova, Matematica*. **48** (2) 2005, 43-50.

[5] A.I. Kashu, Closed classes of left-Λ modules and closed sets of left ideals of ring Λ, *Mat. Zametki* **5** (3) 1969, 381–390.

[6] A. Alvarado, H. Rincón and J. Ríos, On some lattices of module classes, *Journal of Algebra and Its Applications*. **5**(1) 2006, 105-117.

[7] Y. Zhou, The lattice of natural classes of modules, *Communications in Algebra.* **24**(5) 1996, 1637-1648.

[8] F.W. Anderson, K.R. Fuller., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.

[9] B. Stenström., *Rings of Quotients*, Grundlehren der math. Wissenschaft, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1975, 82-113

[10] J. Dauns, Y.Zhou., *Classes of modules*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2006.

[11] A. Alvarado, H. Rincón, J. Ríos and B. Tomé, On conatural types and cotype submodules *International electronic Journal of Algebra*. **11** 2012, 61-81.