



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DE LA CAMINATA ALEATORIA A LA FÓRMULA DE ITO**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A:**

**RAFAEL MARTÍNEZ SÁNCHEZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
M. EN C. FERNANDO GUERRERO POBLETE**

**2012**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del Jurado

**1. Datos del alumno**

**Martínez  
Sánchez  
Rafael  
55735679  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
099209863**

**2. Datos del tutor**

**M. en C.  
Fernando  
Guerrero  
Poblete.**

**3. Datos del sinodal 1**

**M. en C.  
David Josafat  
Santana  
Cobian.**

**4. Datos del sinodal 2**

**Dr.  
Luis Antonio  
Rincón  
Solís.**

**5. Datos del sinodal 3**

**M. en C.  
Pedro  
Reyes  
Pérez.**

**6. Datos del sinodal 4**

**M. en C.  
Brenda  
Zavala  
López.**

**7. Datos del trabajo escrito**

**De la caminata aleatoria a la formula de Ito  
75 p  
2012**

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>Prefacio</b>	<b>VI</b>
<b>1. La caminata aleatoria</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Caminata en $\mathbb{Z}$ . . . . .	1
1.2.1. La distribución de probabilidad después de $n$ pasos . . . . .	3
1.3. Caminata con una barrera absorbente . . . . .	4
1.3.1. La ruina del jugador . . . . .	7
1.3.2. Duración esperada del juego . . . . .	10
1.4. Variantes de la caminata aleatoria . . . . .	12
<b>2. Movimiento Browniano</b>	<b>15</b>
2.1. Introducción . . . . .	15
2.2. Breve historia del movimiento Browniano . . . . .	15
2.3. El movimiento Browniano, una idea intuitiva . . . . .	19
2.4. Simulación del movimiento Browniano como límite de una caminata aleatoria . . . . .	22
2.5. Definición y propiedades básicas . . . . .	23
2.5.1. Supuestos generales . . . . .	23
2.5.2. Definición . . . . .	27
2.6. Una construcción del movimiento Browniano . . . . .	28
2.7. Construcción de Lévy-Ciesielski . . . . .	31
2.8. Propiedades del movimiento Browniano . . . . .	38
2.9. Propiedades de las trayectorias del movimiento Browniano . . . . .	40
2.10. Motivación a la integral estocástica . . . . .	43
<b>3. Integral de Itô</b>	<b>46</b>
3.1. Introducción . . . . .	46
3.2. Un poco de historia . . . . .	47
3.3. Definición . . . . .	48
3.4. Construcción de la integral de Itô . . . . .	49

3.5. La fórmula de Itô . . . . .	57
<b>A. Programas de simulación del movimiento Browniano</b>	<b>70</b>
A.1. Movimiento Browniano . . . . .	71
A.2. Aproximación de una caminata aleatoria al movimiento Browniano . . . . .	71
A.3. Movimiento Browniano geométrico . . . . .	72
A.4. Movimiento Browniano geométrico . . . . .	72
A.5. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	73
A.6. Puente Browniano . . . . .	73
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# Índice de figuras

1.1. Caminata Aleatoria en $\mathbb{Z}$ . . . . .	1
1.2. Caminata aleatoria con una barrera absorbente . . . . .	5
1.3. Comportamiento de una partícula sobre el eje $x$ en una caminata aleatoria con una barrera absorbente . . . . .	5
1.4. Probabilidades de absorción . . . . .	6
1.5. Caminata aleatoria simétrica . . . . .	12
1.6. Caminata aleatoria irrestricta . . . . .	13
1.7. Caminata aleatoria con un estado absorbente . . . . .	13
1.8. Caminata aleatoria con barreras absorbentes . . . . .	13
2.1. Polen en una partícula de agua . . . . .	15
2.2. Robert Brown . . . . .	16
2.3. Albert Einstein . . . . .	16
2.4. Thorvald Thiele y Louis Bachelier . . . . .	18
2.5. Theodor Svedberg y Paul Ehrenfest . . . . .	18
2.6. Marian Smoluchowski y Jean Perrin . . . . .	19
2.7. Norbert Wiener . . . . .	19
2.8. Simulación del movimiento Browniano . . . . .	20
2.9. Aproximación del movimiento Browniano mediante una caminata aleatoria para $n=10,100,1000,10000$ . . . . .	23
3.1. Bernhard Riemann . . . . .	46
3.2. Thomas Joannes Stieltjes . . . . .	47
3.3. Kiyoshi Ito . . . . .	47
3.4. Henri Lebesgue . . . . .	49
3.5. Movimiento Browniano Geométrico . . . . .	62
3.6. Proceso de Ornstein - Uhlenbeck . . . . .	65
3.7. Puente Browniano . . . . .	67

# Agradecimientos

*A mis padres, por su apoyo, por su ejemplo y por ser mi motivación.*

*A mi hermana, por su ayuda a lo largo de mi vida.*

*A Marysol y Aurora con todo mi cariño.*

*A mis sinodales: Fernando Guerrero Poblete, Luis Antonio Rincón Solís, David Josafat Santana Cobián, Brenda Zavala López y Pedro Reyes, por ayudarme a mejorar este trabajo con sus valiosas observaciones.*

*A mis amigos de la facultad que han compartido parte de su tiempo conmigo. Ustedes que me escucharon y me dieron ánimo cuando lo necesité. Por sus interminables explicaciones, sus bromas y los momentos que pasamos juntos, pero principalmente por brindarme su amistad.*

*A mis amigos de toda la vida, por estar siempre cuando se les necesita sin pedir nada a cambio. Porque la verdadera amistad tiene tantas exigencias que sólo es posible compartirla con algunas personas.*

*A mi muy querida Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM, y a su planta docente que me mostró una visión muy distinta de la vida.*

*A los profesores que confiaron en mí para que fuera su ayudante.*

# Introducción

El objetivo de este trabajo es exponer las características básicas del movimiento Browniano y su importancia en el cálculo estocástico. Se presenta un material en el que se muestra la modelación de dicho movimiento, empezando por la caminata aleatoria y finalizando en la fórmula de Itô.

Se hace una introducción a la discusión acerca de la caminata aleatoria, cuya definición y distintas formas en que aparece o se conoce se presentan en el capítulo 1. Dada la importancia que juega la familia de procesos identificada como caminata aleatoria, se decidió adoptar la estructura de varios autores, es decir, se desarrollaron sus propiedades probabilísticas y algunas de sus aplicaciones más famosas que comúnmente se encuentran en los libros de texto relacionados con el tema.

En el capítulo 2 se resumen los aspectos más importantes del movimiento Browniano, proceso introducido y desarrollado por Robert Brown, Albert Einstein, Nobert Wiener y Louis Bachelier principalmente, quienes desde el enfoque respectivo de su disciplina ofrecieron su correspondiente aportación al tema. Asimismo, se enuncian y demuestran de manera detallada algunos de los resultados más importantes sobre el movimiento Browniano (incluyendo la afirmación de que éste posee trayectorias que no son de variación acotada), del mismo modo y como idea principal, se presenta la construcción de Lévy-Ciesielski.

Finalmente se dedica el capítulo 3 al abordaje de la integral de Itô, esto a partir de la idea de realizar una integral donde el integrando y el integrador son movimientos Brownianos. También, se define la integral de Itô, estudiando algunas de sus propiedades básicas y generalizaciones. Asimismo, se realizan simulaciones del movimiento Browniano geométrico, del proceso de Orstein-Uhlenbeck y del puente Browniano, los cuales son vistos como ejemplos de cómo se utiliza la fórmula de Itô para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas.

# Prefacio

Los procesos estocásticos modelan sistemas dinámicos que evolucionan en el tiempo o en el espacio de manera aleatoria, esto significa que no es posible determinar de antemano cuál será el estado en el que se encontrará el sistema en el futuro. Por lo anterior, un proceso estocástico es una colección infinita de variables aleatorias, cuyo valor en un momento  $t$  representa el estado en que se encuentra el sistema en ese momento.

Los procesos estocásticos pueden ser a tiempo discreto, cuando la colección de variables aleatorias es numerable, o a tiempo continuo, cuando se trata de una colección infinita no numerable. Para el primer caso se hace la suposición de que el estado del sistema se observa al final de intervalos de tiempo definidos de manera predeterminada, por ejemplo, cada hora o cada día o cada mes.

Además de identificar el parámetro temporal es necesario conocer el espacio de estados de un proceso estocástico, es decir, el conjunto de valores que pueden tomar las variables aleatorias de la colección.

Para analizar la evolución del sistema es necesario conocer las probabilidades de que el sistema pase de un estado a otro, es decir, dado que el sistema ha pasado por los estados  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , ¿cuál es la probabilidad de que en el tiempo  $n + 1$  se encuentre en el estado  $x_{n+1}$ ? Para construir estas probabilidades condicionales (llamadas "probabilidades de transición") se requiere, en principio, conocer la distribución conjunta de cualquier subcolección finita de las variables aleatorias consideradas; dicho de otra manera, es necesario adentrarse en la discusión de las características probabilísticas de las variables aleatorias que componen el proceso. Aunque el estudio de estas características puede resultar complicado en general, en este trabajo se estudia el proceso estocástico a tiempo continuo llamado "movimiento Browniano".

En 1900, Louis Bachelier introdujo la generalización en tiempo continuo del paseo aleatorio, o lo que hoy día se conoce como movimiento Browniano. Este hecho ha demostrado tener una grandísima influencia en la modelación de series financieras. No obstante, dicha influencia se manifestó hasta casi un siglo después. En ese mismo año estableció en su tesis doctoral que las variaciones de los precios especulativos se distribuyen de manera gaussiana. Este descubrimiento (el cual consiste en aplicar el movimiento Browniano a la variación de los precios especulativos) se dio décadas antes de que se desarrollara una teoría matemática del mismo, e incluso antes de que los físicos descubrieran su importancia en el movimiento de las pequeñas partículas en suspensión.

El movimiento Browniano, junto con sus transformaciones y generalizaciones (lo cual es una herramienta matemática necesaria para el cálculo estocástico), constituye la piedra angular de la modelación estocástica hoy en día.

Bachelier introdujo dicho movimiento, al que se le denotará como  $W_t$  o  $W(t)$ , como la contrapartida en tiempo continuo de la caminata aleatoria. Para justificar este hecho es necesario notar que aunque las trayectorias muestrales del movimiento Browniano son continuas, no son diferenciables en ningún punto; no obstante, desde un marco conceptual distinto se puede demostrar que es posible construir la derivada de un movimiento Browniano como un proceso estocástico generalizado.

Ahora bien, las propiedades de los movimientos Brownianos son bastante sutiles; la falta de diferenciabilidad en algún punto, a pesar de ser continua, muestra el carácter sumamente irregular que presentan las trayectorias de los movimientos Brownianos. No obstante, estas propiedades básicas no son suficientes para definirlo de manera precisa, por lo que es necesario añadir la independencia de sus incrementos, esto quiere decir que la variación de un movimiento Browniano es independiente de las variaciones del movimiento en instantes pasados, además dichos incrementos se distribuyen de manera gaussiana.

Otra propiedad relevante del movimiento Browniano es su invarianza, la cual constituye un concepto mucho mejor definido en términos determinísticos. Al trabajar con un proceso estocástico se debe buscar la invarianza en las propiedades de su distribución probabilística, de ahí que un movimiento Browniano sea estacionario desde el punto de vista estadístico si la distribución no se ve afectada por traslaciones temporales. La distribución del movimiento Browniano en intervalos de igual longitud es idéntica, la distribución sólo depende del periodo. La distribución del movimiento Browniano también es invariante (salvo constantes de proporcionalidad) ante cambios de escala en el tiempo, es decir, si en un lapso entre dos instantes de tiempo existe una razón de proporcionalidad, entonces la distribución del intervalo mayor se puede obtener como la distribución del intervalo menor multiplicándola por la razón de proporcionalidad.

# Capítulo 1

## La caminata aleatoria

### 1.1. Introducción

En este capítulo se estudian los procesos estocásticos, conocidos como caminatas aleatorias en una dimensión. Se estudia el fenómeno que resulta de las trayectorias que se obtienen de hacer pasos sucesivos con dirección aleatoria hacia la derecha o la izquierda sobre la recta numérica, esto a partir de un punto inicial. Para la elaboración de este capítulo se consultaron principalmente los libros [2], [3], [5] y [6].

### 1.2. Caminata en $\mathbb{Z}$

Una caminata aleatoria simple sobre el conjunto de números enteros  $\mathbb{Z}$  es un proceso estocástico a tiempo discreto  $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ , el cual evoluciona tal como lo muestra la Figura 1.1, esto es, si se parte de que se tiene una partícula situada en el estado 0, al siguiente tiempo puede pasar al estado 1 con probabilidad  $p$  o al estado  $-1$  con probabilidad  $q$ .

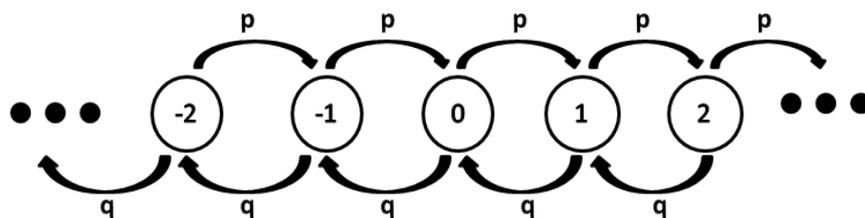


Figura 1.1: Caminata Aleatoria en  $\mathbb{Z}$

Entonces, el proceso  $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  se puede definir como  $X_n \equiv$  la posición de la partícula después de  $n$  saltos. Intuitivamente la posición de la partícula en el instante  $n + 1$  depende sólo de la posición en la que se encuentra en el instante  $n$ , por lo tanto se trata de una cadena de Markov.

El proceso  $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  cambia de un estado a otro en tiempos discretos consecutivos de acuerdo a las siguientes probabilidades de transición:

$$\begin{aligned} P[X_n = j + 1 \mid X_{n-1} = j] &= p, \\ P[X_n = j - 1 \mid X_{n-1} = j] &= 1 - p = q. \end{aligned}$$

Dado que estas probabilidades no dependen de  $n$ , el proceso es estacionario u homogéneo en el tiempo. Si denotamos como  $W_n$  el salto efectuado por la partícula en el movimiento  $n$ , entonces:

$$W_n = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p, \\ -1 & \text{con probabilidad } q, \end{cases} \quad (1.1)$$

así, el proceso se puede escribir como:

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n W_i = X_{n-1} + W_n,$$

donde  $n = 1, 2, \dots$

Por las características del proceso, al ser las  $W_i$ 's independientes, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n W_i\right] = n\mathbb{E}[W], \\ \text{Var}[X_n] &= \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n W_i\right] = n\text{Var}[W], \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde  $W$  se define como en la expresión (1.1), por lo que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W] &= 1p + (-1)q = p - q, \\ \text{Var}[W] &= \mathbb{E}[W^2] - \mathbb{E}^2[W], \\ \mathbb{E}[W^2] &= 1^2p + (-1)^2q = p + q = 1, \\ \text{Var}[W] &= 1 - (p - q)^2 = (p + q)^2 - (p - q)^2 = 4pq. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la ecuación (1.2), la distribución de probabilidad de la caminata aleatoria en el estado  $n$  tiene como media y varianza:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n] &= n(p - q), \\ \text{Var}[X_n] &= 4npq. \end{aligned}$$

Si  $p > \frac{1}{2}$ , entonces se espera un alejamiento del origen en dirección positiva, y en dirección contraria si  $p < \frac{1}{2}$ . Al depender  $Var[X_n]$  del valor de  $n$ , la incertidumbre acerca de dónde se encuentra la partícula aumenta con  $n$ . Si  $p = \frac{1}{2}$ ,  $Var[X_n] = \frac{4n}{4} = n$ , que es el máximo de varianza que se puede alcanzar. El conocimiento de la media y la varianza de la distribución no permite estimar o calcular la distribución de probabilidad, aunque haciendo tender  $n$  a infinito se puede aplicar el teorema central de límite para obtener que  $Z_n = \frac{X_n - n(p-q)}{\sqrt{4npq}}$  se distribuya como normal estándar.

**Ejemplo 1** Considere una caminata aleatoria con  $n = 100$  y  $p = 0.7$ , entonces usando el teorema central del límite se aproximará la probabilidad de que la posición de la partícula en el paso 100 esté entre 35 y 45 posiciones del origen. En efecto, se tiene que  $\mathbb{E}[X_{100}] = 40$  y  $Var[X_{100}] = 84$ , por lo que:

$$\begin{aligned} P[35 \leq X_{100} \leq 45] &\approx P\left[\frac{35 - 40}{\sqrt{84}} \leq Z_{100} \leq \frac{45 - 40}{\sqrt{84}}\right] = \\ P[-0.54554 \leq Z_{100} \leq 0.54554] &= \Phi(0.54) - \Phi(-0.54) = 0.45, \end{aligned}$$

donde  $\Phi$  es la función de distribución de una normal estándar.

### 1.2.1. La distribución de probabilidad después de $n$ pasos

Si se considera el caso en el que la partícula comienza en el estado 0, después da un salto a la derecha con probabilidad  $p$  y un salto a la izquierda con probabilidad  $q$ , entonces  $X_0 = 0$ , por tanto para obtener la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $X_n$  se considera la descomposición dada por:

$$X_n = D_n - I_n, \quad (1.3)$$

donde  $D_n$  es el número de pasos hacia la derecha e  $I_n$  es el número de pasos hacia la izquierda, es decir:

$$n = D_n + I_n, \quad (1.4)$$

por lo tanto, si se suman las ecuaciones (1.3) y (1.4), se obtiene que  $D_n = \frac{1}{2}(n + X_n)$ . Es claro que toma valores enteros cuando  $n$  y  $X_n$  son pares o impares ambos. Hay que considerar la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado  $x$  después de  $n$  pasos, es decir:

$$P[X_n = x] = P\left[D_n = \frac{1}{2}(n + x)\right], \quad (1.5)$$

observe que  $D_n$  se distribuye como una binomial de parámetros  $n$  y  $p$ , ya que se puede identificar como éxito que la partícula se mueva una unidad a la derecha, y como

fracaso, que lo haga hacia la izquierda. Así, sustituyendo en la ecuación (1.5), se tiene que la distribución de probabilidad después de  $n$  pasos es:

$$P[X_n = x] = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+x)} p^{\frac{1}{2}(n+x)} q^{\frac{1}{2}(n-x)}, \quad (1.6)$$

donde  $n$  y  $x$  son ambos pares o impares y  $-n \leq x \leq n$ .

**Ejemplo 2** Se calculará la probabilidad de que el evento  $[X_5 = 3]$  ocurra en una caminata aleatoria sobre  $\mathbb{Z}$  donde  $p = 0.6$ . En este caso, el evento  $[X_5 = 3]$  ocurre cuando se obtienen cuatro éxitos y un fracaso en cualquier orden, por consiguiente, si se utilizan los datos de la ecuación (1.6) se obtiene que:

$$P[X_5 = 3] = \binom{5}{4} p^4 q = 0.259.$$

Observe que la probabilidad  $P[X_n = x]$  de que la caminata termine en la posición  $x$  después de  $n$  pasos, no excluye casos en los que el sistema visite  $x$  antes del paso  $n$ , tal como lo muestra el ejemplo. Una probabilidad relacionada es la que en su primera visita al estado  $x$  ocurre en el paso  $n$ .

### 1.3. Caminata con una barrera absorbente

Ahora se estudiará una variante de la caminata aleatoria. Por ejemplo, una persona alcoholizada que sale de una cantina a cuyo costado izquierdo, exactamente a un paso, hay una zanja profunda que realizaron algunos albañiles en las últimas horas. Él da pasos aleatorios hacia la zanja o en dirección contraria alejándose del mismo, los pasos para alejarse los realiza con probabilidad  $\frac{2}{3}$  y aquéllos que da con dirección hacia la zanja los realiza con una probabilidad de  $\frac{1}{3}$ . ¿Cuál es la probabilidad de que caiga al agujero?

Esto se refiere a una caminata aleatoria con una barrera absorbente (la zanja), ya que una vez que el borracho cae ahí el proceso se termina. Antes de intentar resolver el problema, se encuentra ayuda al observar qué es lo que sucede en los primeros pasos. La Figura 1.2, ilustra cómo el hombre puede caer a la zanja sólo en un número impar de pasos, si se hace la suposición de que el estado 0 representa la zanja y el estado 1 la cantina. En un paso el borracho tiene  $\frac{1}{3}$  de probabilidad de caer. La trayectoria a través de las posiciones  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$  tiene probabilidad  $\frac{2}{27}$ , mientras que la trayectoria  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$  ocurre con probabilidad  $\frac{8}{243}$ . Así, la probabilidad de caer en la zanja se obtiene con la serie  $\frac{1}{3} + \frac{2}{27} + \frac{8}{243} + \dots$

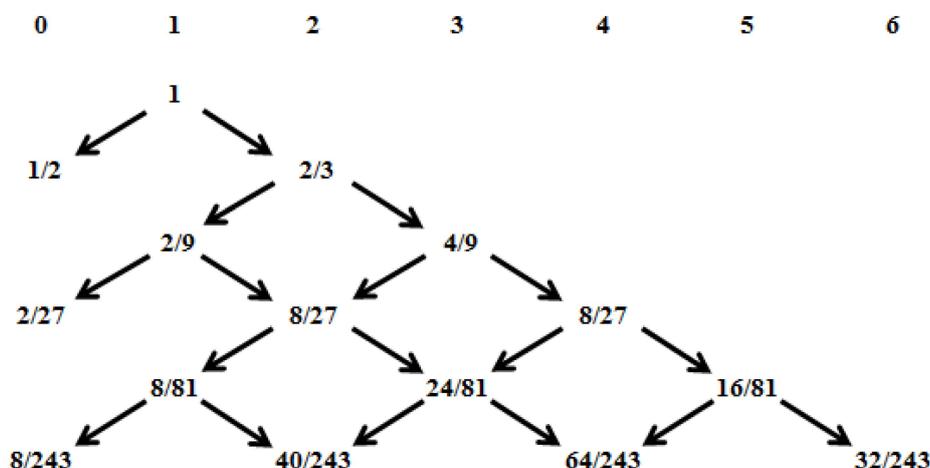
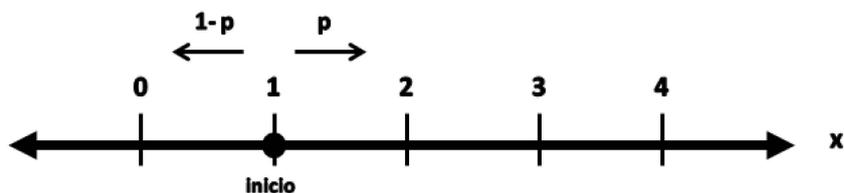


Figura 1.2: Caminata aleatoria con una barrera absorbente

Nuevamente este problema se modelará como el movimiento de una partícula a lo largo del eje  $x$ . Considere una partícula inicialmente en la posición  $x = 1$  en la recta numérica. La estructura del problema sigue siendo la misma si en lugar de considerar  $\frac{2}{3}$  se toma la probabilidad  $p$  si da un paso hacia la derecha y por consiguiente  $q$  como la probabilidad de dar un paso hacia la izquierda. Esto es, la partícula se mueve de la posición  $x = 1$  hacia la posición  $x = 2$  con probabilidad  $p$  o a la posición  $x = 0$  con probabilidad  $q = 1 - p$ , como lo muestra la Figura 1.3. De manera más general, si la partícula está en la posición  $x = n$ , con un  $n$  natural, entonces se mueve a  $x = n + 1$  con probabilidad  $p$  o a  $x = n - 1$  con probabilidad  $q$ . Si la partícula alguna vez arriba a  $x = 0$ , entonces es absorbida y permanecerá en ese estado de ahí en adelante. Así, se busca conocer la probabilidad  $P_1$  de que la partícula llegue a  $x = 0$ , dado que empezó en  $x = 1$ . Naturalmente, el valor de  $P_1$  depende de  $p$ , por lo que parece razonable pensar que si  $p$  está cerca de 1,  $P_1$  es pequeño, pero si  $p$  está cerca de 0,  $P_1$  se encuentra próximo a 1.

Figura 1.3: Comportamiento de una partícula sobre el eje  $x$  en una caminata aleatoria con una barrera absorbente

Si se considera la situación después del primer paso, la partícula se mueve hacia la izquierda a  $x = 1$  con probabilidad  $1 - p$  o se mueve hacia la derecha a  $x = 2$  con probabilidad  $p$ . Sea  $P_2$  la probabilidad de que la partícula sea absorbida por  $x = 0$  cuando comienza en la posición  $x = 2$ , entonces se puede escribir:

$$P_1 = 1 - p + pP_2, \quad (1.7)$$

esto porque  $1 - p$  es la probabilidad de ser absorbida en el primer paso y  $pP_2$  es la probabilidad de ser absorbida después. A su vez, las trayectorias que conducen de  $x = 2$  a  $x = 0$  pueden descomponerse en dos partes independientes, primero debe pasarse de  $x = 2$  a  $x = 1$ , no necesariamente en un paso, después debe pasarse de  $x = 1$  a  $x = 0$  de nuevo, sin que se realice forzosamente en un paso. La probabilidad de la trayectoria  $x = 2$  a  $x = 1$  es justamente  $P_1$ , porque la estructura aquí es casi idéntica a la del sistema original, excepto porque el origen ha sido trasladado un paso hacia la derecha. La probabilidad de la trayectoria  $x = 1$  a  $x = 0$  es también  $P_1$ , esto debido a que es exactamente el problema original. La probabilidad  $P_2$  por consiguiente es  $P_1^2$ , porque los eventos  $A =$  la partícula toma la trayectoria desde  $x = 2$  a  $x = 1$  y  $B =$  la partícula toma la trayectoria desde  $x = 1$  a  $x = 0$  son independientes y  $P(A) = P(B) = P_1$ . Entonces se puede escribir la ecuación (1.7) de la siguiente manera:

$$P_1 = 1 - p + pP_1^2, \quad (1.8)$$

la cual es una ecuación cuadrática en  $P_1$ , y como lo muestra la Figura 1.4, con soluciones  $P_1 = 1$  y  $P_1 = \frac{1-p}{p}$ . En algunos problemas una o ambas soluciones pueden ser apropiadas, esto depende de las circunstancias, por ejemplo, cuando  $p = \frac{1}{2}$  la solución única es  $P_1 = 1$ , si  $p = 0$  sólo tiene sentido la solución  $P_1 = 1$  y esto es natural porque la partícula solamente se mueve hacia el precipicio, mientras que si  $p = 1$ ,  $P_1 = 0$ , ello es así porque la partícula siempre se mueve hacia la derecha. Más aún, si  $p < \frac{1}{2}$  la segunda solución es imposible porque se tendría que  $\frac{1-p}{p} > 1$ , por consiguiente para  $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$  se tiene que  $P_1 = 1$ .

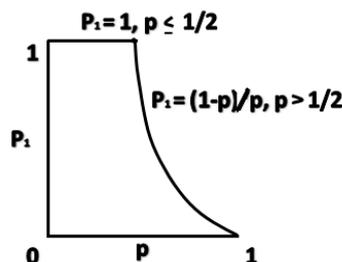


Figura 1.4: Probabilidades de absorción

Además, es claro que  $g(p) = \frac{1-p}{p}$  es una función continua para  $p > \frac{1}{2}$ , por lo tanto la probabilidad  $P_1$  de que la partícula sea absorbida es:

$$P_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq p \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1-p}{p} & \text{si } \frac{1}{2} < p \leq 1. \end{cases}$$

En resumen, si la probabilidad  $p$  de moverse a la derecha en cada paso es menor o igual que  $\frac{1}{2}$ , con probabilidad 1, entonces la partícula será absorbida en algún momento. Si  $p$  es mayor a  $\frac{1}{2}$ , la probabilidad de absorción es menor a 1.

Otra forma que puede tomar el mismo problema es la siguiente: un jugador comienza con una unidad de dinero ( $x = 1$ ) y apuesta indefinidamente contra un casino, con recursos infinitos, un juego con  $p = \frac{1}{2}$  en el cual él gana o pierde una unidad en cada partida. De acuerdo al análisis anterior, con probabilidad 1 perderá todo su dinero en algún momento, situación que resulta un poco sorprendente si se toma en cuenta que  $p = \frac{1}{2}$ . Si la probabilidad de ganar una partida fuera  $p = \frac{2}{3}$ , entonces habría una probabilidad positiva de que no cayera en la bancarrota.

Uno puede comenzar en  $x = m$ , en lugar de  $x = 1$ , y generalizar el resultado anterior para mostrar que la probabilidad de absorción desde la posición  $x = m$  es  $(\frac{1-p}{p})^m$  o 1, esto depende de cómo se escoja  $p$ , más grande o más pequeña que  $\frac{1}{2}$ .

### 1.3.1. La ruina del jugador

Supóngase que un jugador  $A$  apuesta sucesivamente \$1 a un jugador  $B$ . Inicialmente el jugador  $A$  tiene  $k$  pesos y el jugador  $B$  tiene  $a - k$  pesos ( $a > k$ ), en total los dos jugadores tienen un capital de  $a$  pesos. En cada apuesta el jugador  $A$  tiene probabilidad de ganar  $p$  y probabilidad de perder  $1 - p$ , por lo que  $X_n$  representa el capital de  $A$  después de  $n$  juegos, entonces  $X_0 = k$  y si  $X_n = 0$  el jugador se arruina, mientras que si  $X_n = a$ , siempre que  $n \geq a - k$ , entonces  $B$  se arruina y en ambos casos el juego termina. El interés principal es calcular  $P[X_n = 0]$  para algún  $n \geq 1$ .

Si se denota como  $C_k$  al evento consistente en que  $A$  se arruine partiendo de un capital  $k$  y como los sucesos  $X_n = 0$  para  $n = k, k + 1, k + 2, \dots$  son mutuamente excluyentes, entonces:

$$P[C_k] = \sum_{n=k}^{\infty} P[X_n = 0],$$

se puede observar que la suma empieza en  $n = k$ , esto porque  $k$  es el número mínimo de pasos en los que el juego puede terminar, por otro lado, aunque los resultados de cada juego son independientes las variables aleatorias  $X_n$  no lo son, lo cual se debe al carácter secuencial del juego, ya que después de saber cuál es el resultado de cada juego el capital de  $A$  aumenta o decrece en una unidad, este capital se convierte en el mismo con el que se inicia del juego nuevo, así se define  $u_k = P(C_k)$  como la probabilidad

de que  $A$  se arruine al partir de un capital  $k$ , entonces, después de una partida, la probabilidad de ruina es  $u_{k+1} = P(C_{k+1})$  o  $u_{k-1} = P(C_{k-1})$ .

Si se considera el resultado de la partida y se denota como  $D$  el evento de que  $A$  gane y como  $D^c$  el evento de que  $A$  pierda, por el teorema de probabilidad total:

$$P[C_k] = P[C_k | D] P[D] + P[C_k | D^c] P[D^c]. \quad (1.9)$$

Por como se comporta el juego se tiene que:

$$\begin{aligned} P[C_k | D] &= P[C_{k+1}], \\ P[C_k | D^c] &= P[C_{k-1}], \\ P[D] &= p, \\ P[D^c] &= q, \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (1.9) se tiene que:

$$u_k = u_{k+1}p + u_{k-1}q,$$

es decir:

$$pu_{k+1} - u_k + qu_{k-1} = 0, \quad (1.10)$$

la cual es una ecuación en diferencias homogénea de segundo orden.

Para definir completamente la ecuación (1.10), se tienen que establecer las condiciones iniciales. En este caso, si se parte de capital 0 entonces la ruina es segura, esto se expresa así:

$$u_0 = P[C_0] = 1, \quad (1.11)$$

mientras que si se empieza con capital  $a$  la ruina es imposible, es decir:

$$u_a = P[C_a] = 0. \quad (1.12)$$

Una forma de solucionar la ecuación en diferencias es considerando las soluciones de la forma:

$$u_k = Am^k,$$

donde  $A$  es una constante y  $m$  ha de calcularse. Si se sustituye en la ecuación (1.10) se obtiene que:

$$pu_{k+1} - u_k + qu_{k-1} = Am^{k-1} (pm^2 - m + q) = 0,$$

lo anterior es igual a 0, pero sólo que  $Am^{k-1} = 0$  o  $pm^2 - m + q = 0$ , pero el primer caso se descarta al asumir que no se quieren soluciones no triviales. Por lo tanto, la

ecuación característica que se tiene que resolver es  $pm^2 - m + q = 0$ , pero dado que  $p + q = 1$ , entonces se tiene:

$$pm^2 - m + q = (pm - q)(m - 1) = 0,$$

con lo que las soluciones son:

$$m_1 = 1 \text{ y } m_2 = \frac{q}{p}.$$

Se puede demostrar que la solución general de nuestra ecuación es una combinación lineal de estas dos soluciones, es decir:

$$u_k = A_1 m_1^k + A_2 m_2^k = A_1 + A_2 \left(\frac{q}{p}\right)^k, \quad (1.13)$$

aquí  $A_1$  y  $A_2$  son constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales del problema, en este caso si se utilizan las expresiones (1.11) y (1.12), posteriormente se denota como  $s = \frac{q}{p}$  y se sustituye en la ecuación (1.13), se obtiene que:

$$A_1 + A_2 = 1 \text{ y } A_1 + A_2 s^a = 0,$$

esto es:

$$A_1 = -\frac{s^a}{1 - s^a} \text{ y } A_2 = \frac{1}{1 - s^a}.$$

Así, la probabilidad de que el jugador se arruine, dado que empieza a jugar con un capital  $k$ , es la siguiente:

$$u_k = -\frac{s^a}{1 - s^a} + \frac{1}{1 - s^a} s^k = \frac{s^k - s^a}{1 - s^a},$$

esto si  $p \neq \frac{1}{2}$ , pero cuando  $p = q = \frac{1}{2}$  entonces la ecuación tiene dos soluciones iguales y hay que tratar el caso de distinta manera, a continuación se presenta la ecuación característica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_{k+1} - u_k + \frac{1}{2}u_{k-1} &= 0, \\ \frac{1}{2}m^2 - m + \frac{1}{2} &= 0, \\ m^2 - 2m + 1 &= 0, \end{aligned}$$

lo anterior tiene como raíz repetida a  $m_1 = m_2 = 1$ . Para raíces repetidas en ecuaciones en diferencias se prueba que una solución del tipo  $k$ \*raíz es solución, por lo tanto  $k * 1$  es la solución de la ecuación. Entonces, se tiene que de:

$$\frac{1}{2}u_{k+1} - u_k + \frac{1}{2}u_{k-1} = \frac{1}{2}(k+1) - k + \frac{1}{2}(k-1) = 0,$$

la solución general es:

$$u_k = A_1 + A_2 k,$$

con las mismas condiciones iniciales de las expresiones (1.11) y (1.12), se tiene que:

$$u_k = \frac{a - k}{a}.$$

Si se considera el juego desde el punto de vista del jugador  $B$ , la probabilidad de su ruina sería  $v_{a-k}$ . Si se intercambian los papeles de  $p$  y  $q$ , reemplazando  $s$  por  $s^{-1}$  y  $k$  por  $a - k$  entonces  $B$  se arruina con probabilidad:

$$v_{a-k} = \frac{s^k - 1}{s^a - 1},$$

lo anterior cuando  $s = \frac{p}{q} \neq 1$ . En el caso en que  $s = \frac{p}{q} = 1$ , entonces:

$$v_{a-k} = \frac{k}{a}.$$

En cualquiera de los dos casos:

$$v_k + v_{a-k} = 1,$$

explicado de diferente manera, el juego termina cuando alguno de los dos jugadores pierde o cuando uno de los dos gana.

### 1.3.2. Duración esperada del juego

Un aspecto importante del juego es determinar cuántas partidas se esperan realizar antes de terminar dicho juego. Supongamos que se tienen dos variables,  $k$  el capital inicial y  $n$  el número restante de partidas hasta que se termine el juego. Como  $n$  es desconocido se considera que el resultado es una variable aleatoria  $N$ .

Se denotará como  $P[n | k]$  a la probabilidad de que el juego acabe en  $n$  partidas cuando el capital inicial es  $k$ . Como es de esperarse,  $n$  es un número positivo mayor o igual que el mínimo entre  $k$  y  $a - k$ , ya que si un jugador gana (o pierde) en todas las partidas entonces ganaría (o perdería) el juego en  $a - k$  (o  $k$ ) partidas. Así, el número esperado de partidas hasta terminar el juego, o la duración esperada es:

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n P[n | k] = d_k. \quad (1.14)$$

En cada paso, el proceso se moverá desde el estado  $(k, n)$  hasta el estado  $(k + 1, n - 1)$  con probabilidad  $p$ , o al estado  $(k - 1, n - 1)$  con probabilidad  $q$ . esto se realiza por el teorema de la probabilidad total:

$$P[n | k] = P[n - 1 | k + 1]p + P[n - 1 | k - 1]q, \quad (1.15)$$

donde  $n, k \geq 1$ .

Sustituyendo la expresión (1.14) en la ecuación (1.15), se obtiene la duración esperada  $d_k$ , esto es:

$$pd_{k+1} - d_k + qd_{k-1} = -1, \quad (1.16)$$

la cual es una ecuación en diferencias no homogénea de segundo orden, cuyas condiciones iniciales vienen dadas por el hecho de que si  $k = 0$  o  $k = a$ , entonces el juego termina, de manera que la duración esperada es 0, lo cual se expresa:

$$d_0 = d_a = 0. \quad (1.17)$$

En la teoría de ecuaciones en diferencias se determina la solución general de una ecuación no homogénea como la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada y una solución particular de la ecuación no homogénea. En este caso, si  $s = \frac{q}{p} \neq 1$ , la solución de la ecuación homogénea es  $A_1 + A_2s^k$ , mientras que si  $s = \frac{q}{p} = 1$  entonces la solución general es de la forma  $A_1 + A_2k$ .

Se puede encontrar una solución particular, y dado que la parte derecha de la ecuación es  $-1$  se prueba como solución  $d_k = Ck$ , ya que cualquier constante es solución de la ecuación homogénea:

$$pd_{k+1} - d_k + qd_{k-1} - 1 = pC(k+1) - Ck + qC(k-1) + 1 = C(p-q) + 1 = 0.$$

Así, si se toma  $C = \frac{1}{q-p}$ , la solución general de la duración esperada (1.16) es:

$$d_k = A_1 + A_2s^k + \frac{k}{q-p},$$

pero si se consideran las condiciones iniciales (1.17) del problema:

$$A_1 + A_2 = 0 \text{ y } A_1 + A_2s^a + \frac{a}{q-p} = 0,$$

si se despejan estas ecuaciones se obtiene que la duración esperada del juego, cuando  $s = \frac{q}{p} \neq 1$ , es:

$$d_k = \frac{1}{1-2p} \left[ k - \frac{a(1-s^k)}{1-s^a} \right].$$

En el caso de que  $s = \frac{q}{p} = 1$ , la ecuación en diferencias (1.16), se transforma en:

$$d_{k+1} - 2d_k + d_{k-1} = -2,$$

lo anterior es la solución de la ecuación homogénea de la forma  $A_1 - A_2k$ . Así, si se considera una solución particular de la forma  $Ck^2$ :

$$d_{k+1} - 2d_k + d_{k-1} + 2 = C(k-1)^2 - 2Ck^2 + C(k-1)^2 + 2 = 2C + 2 = 0.$$

Tomando  $C = -1$  y por las condiciones iniciales (1.17) se obtiene lo siguiente:

$$d_k = A_1 + a_2k - k^2 = k(a - k).$$

Por ejemplo, si se toma  $k = 10$ ,  $a = 20$  y  $p = \frac{1}{2}$  el número esperado de partidas es de 100. Se tienen diferentes variaciones a este problema, por ejemplo:

1. Cuando el oponente es infinitamente rico, que equivaldría a jugar contra un casino con muchos recursos, esto es con  $a \rightarrow \infty$ .
2. Cuando se considera la probabilidad de un empate, además de sólo ganar o perder.
3. Cuando el número de unidades que se pierde o gana no son siempre iguales entre sí.

#### 1.4. Variantes de la caminata aleatoria

El modelo básico de la caminata aleatoria es el referente al movimiento de una partícula que empieza en el punto  $x = k$  sobre el eje de las abscisas al tiempo  $t = 0$  y que en cada subsecuente tiempo  $t = 1, 2, 3, \dots$  se mueve una unidad a la derecha o a la izquierda con probabilidad  $p$  o  $1 - p$  respectivamente.

Con la misma probabilidad de transición (ir a la derecha o la izquierda), es decir,  $p = q = \frac{1}{2}$ , la caminata aleatoria es *simétrica* con respecto al punto de partida como se muestra en la Figura 1.5.

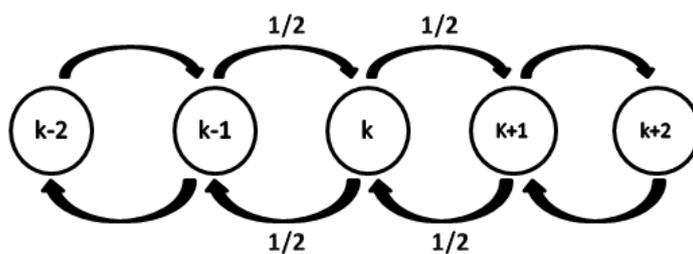


Figura 1.5: Caminata aleatoria simétrica

Si  $p > \frac{1}{2}$ , hay una tendencia de irse hacia la derecha; y si  $p < \frac{1}{2}$  entonces la tendencia es hacia la izquierda.

Puede ocurrir que no se tengan límites en la extensión de la partícula a lo largo del eje  $x$  desde el origen en que empieza a moverse, en este caso se dice que la caminata aleatoria es *irrestringida* y se comporta como lo muestra la Figura 1.6.

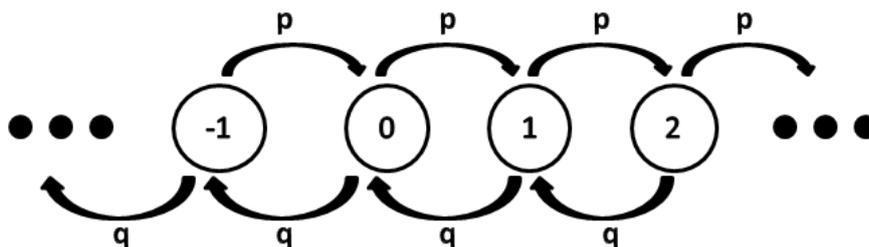


Figura 1.6: Caminata aleatoria irrestricta

Otra posible aplicación consiste en que  $X_n$  representa el tamaño de una población después de  $n$  movimientos, que pueden ser nacimientos con probabilidad  $p$  o muertes con probabilidad  $1 - p$ . Es claro que el proceso debería parar si la partícula alcanza el origen  $x = 0$ . En este caso la caminata aleatoria se dice que es *restringida*, y decimos que  $x = 0$  es una *barrera absorbente* o *estado absorbente*, el comportamiento se muestra en la Figura 1.7.

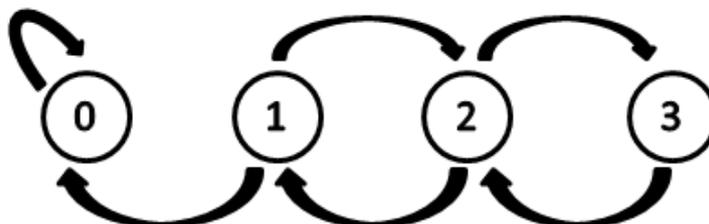


Figura 1.7: Caminata aleatoria con un estado absorbente

De regreso al problema de la fortuna de un jugador, quien empieza a jugar con un capital  $k$  contra un adversario que tiene un capital  $a - k$ , entonces el juego termina si cae en el estado  $x = 0$ , es decir, si el jugador ha perdido todo su dinero o si  $x = a$ , es decir, cuando el jugador ha ganado todo el dinero de su oponente. En este caso existen dos *barreras absorbentes*  $x = 0$  y  $x = k$ , tal como se observa en la Figura 1.8.

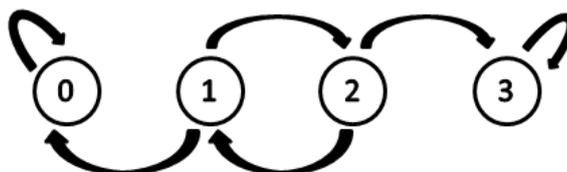


Figura 1.8: Caminata aleatoria con barreras absorbentes

---

Como una extensión de estas ideas, se puede pensar en una partícula en movimiento horizontal que tiene probabilidad positiva de permanecer en su posición, o también introducir transiciones de cierto punto en la línea a algún otro punto, y no nada más, transiciones en una unidad a la derecha o a la izquierda. Otras modificaciones son la adopción de *barreras reflejantes*. Esto es,  $x = 0$  es una barrera reflejante si cuando el proceso llega a ese estado procedente de  $x = 1$ , éste regresa a  $x = 1$  con probabilidad 1. Más aún, se pueden tener *barreras elásticas*, en el cual las barreras reflejantes en el anterior esquema son modificadas para reflejar o absorber con probabilidades  $\delta q$  y  $(1 - \delta) q$ , respectivamente.

## Capítulo 2

# Movimiento Browniano

### 2.1. Introducción

En el presente capítulo se realiza un estudio sobre el modelo matemático conocido como movimiento Browniano. Se trata del ejemplo más importante de un proceso de Markov a tiempo continuo con espacio de estados continuo. En 1827 el botánico Robert Brown observó el comportamiento aleatorio de los granos de polen en una suspensión de agua; a este fenómeno lo denominó movimiento Browniano. 80 años más tarde Albert Einstein desarrolló sus propiedades matemáticas de manera independiente de Brown. Este capítulo se basa principalmente en los siguientes libros [11], [13], [20] y [25].

### 2.2. Breve historia del movimiento Browniano

El movimiento Browniano es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido, por ejemplo, el polen en una gota de agua, tal como se muestra en la Figura 2.1.

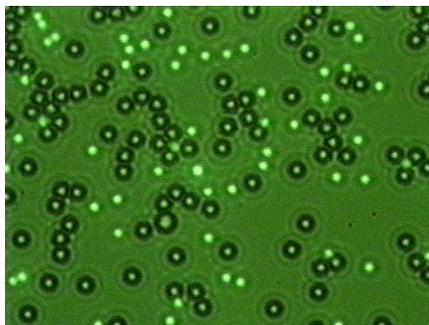


Figura 2.1: Polen en una partícula de agua

Recibe su nombre en honor al escocés Robert Brown, biólogo y botánico que descubrió este fenómeno en 1827.



Figura 2.2: Robert Brown

Él observó que pequeñas partículas de polen se desplazaban en movimientos aleatorios sin razón aparente. En 1785, el mismo fenómeno había sido descrito por Jan Ingenhousz sobre partículas de carbón en alcohol.

El movimiento aleatorio de estas partículas se debe a que su superficie es bombardeada incesantemente por las moléculas del fluido, éstas son sometidas a una agitación térmica. Este bombardeo a escala atómica no siempre es completamente uniforme y sufre variaciones provocando el movimiento observado.

La descripción matemática del fenómeno fue elaborada por Albert Einstein, la cual constituye el primero de sus artículos del Annus Mirabilis (año maravilloso) de 1905. Einstein demostraba la teoría atómica, todavía en disputa a principios del siglo XX, e iniciaba el campo de la física estadística.

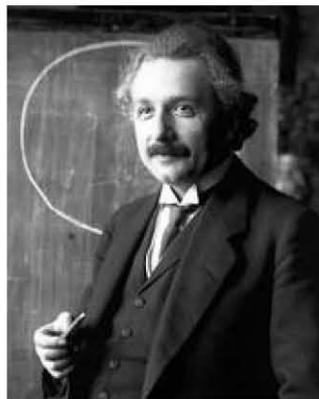


Figura 2.3: Albert Einstein

El poema científico "*Sobre la naturaleza de las cosas*", del romano Lucrecio (60 a.C.), incluye la notable descripción de un movimiento Browniano de partículas de polvo. El autor presentó este hecho como prueba de la existencia de los átomos:

Observa lo que acontece cuando los rayos de sol son admitidos dentro de un edificio y cómo arroja la luz sobre los lugares oscuros. Puedes ver la multitud de pequeñas partículas moviéndose en un sinnúmero de caminos... su baile es una indicación de movimientos subyacentes de materia que son escondidos por nuestra vista... eso origina el movimiento de los átomos en sí mismos (por ejemplo, espontáneamente). Entonces los pequeños organismos que son eliminados del impulso de los átomos son puestos en marcha por golpes invisibles y a su vez en contra de unos diminutos cañones. Así, el movimiento de los átomos emerge gradualmente de un nivel del sentido, que estos cuerpos están en movimiento como vemos en el rayo de sol, movidos por soplos que parecen invisibles.

"*Sobre la naturaleza de las cosas*", Lucrecio.

Jan Ingenhousz describió el movimiento irregular de partículas de carbón pulverizadas en la superficie del alcohol en 1785. No obstante, el descubrimiento del movimiento Browniano se atribuye tradicionalmente al botánico Robert Brown en 1827. Se cree que Brown estuvo estudiando, con ayuda del microscopio, partículas de polen flotando en el agua. Dentro de las vacuolas de los granos de polen observó diminutas partículas con movimientos nerviosos. Al repetir el experimento con partículas de polvo concluyó que el movimiento no se debía a que las partículas de polen estaban vivas, aunque no explicó el origen del movimiento.

El primero en describir matemáticamente el movimiento Browniano en 1880 fue Thorvald Thiele, en un documento sobre el método de los mínimos cuadrados. Fue seguido independientemente por Louis Bachelier, en 1900 en su tesis doctoral sobre teoría de la especulación, en dicha investigación se presenta un análisis estocástico de acciones y opciones de mercados financieros. Sin embargo, fue el estudio independiente de Albert Einstein en su artículo de 1905 (*Über die von der molekularen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen* / Sobre el movimiento requerido por la teoría cinética molecular del calor de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario) demostró la solución a los físicos como una forma indirecta de confirmar la existencia de átomos y moléculas.



Figura 2.4: Thorvald Thiele y Louis Bachelier

En esa época la naturaleza atómica de la materia aún era una idea controvertida. Einstein y Marian Smoluchowski, dedujeron que si la teoría cinética de los fluidos era correcta entonces las moléculas de agua tendrían movimientos aleatorios. Por lo tanto las partículas pequeñas podrían recibir un número aleatorio de impactos, de fuerza aleatoria y de direcciones aleatorias en cortos períodos. Este bombardeo aleatorio por las moléculas del fluido podría ser suficiente para que las partículas pequeñas se moviesen de la manera exacta que Brown había descrito. Theodor Svedberg, hizo demostraciones importantes del movimiento Browniano en coloides, así como Paul Ehrenfest, lo hizo con partículas de plata en la Atmósfera terrestre.



Figura 2.5: Theodor Svedberg y Paul Ehrenfest

Jean Perrin, también realizó experimentos para verificar los modelos matemáticos y al publicar sus resultados finales se puso fin a dos mil años de disputa sobre la realidad de las moléculas y los átomos.

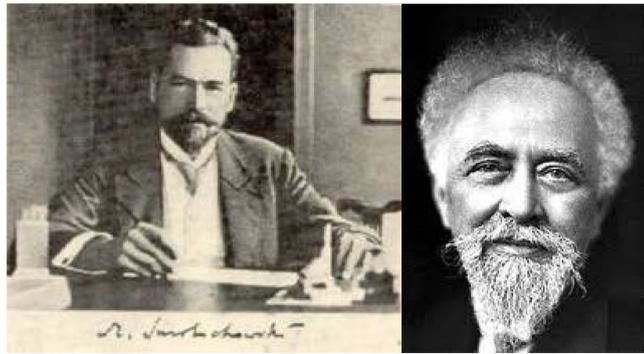


Figura 2.6: Marian Smoluchowski y Jean Perrin

La explicación de este movimiento como ya se mencionó con anterioridad, fue dada por Albert Einstein en 1905 y constituyó la prueba de la teoría molecular, además de establecer el carácter gaussiano de las variables implicadas. Sin embargo una formulación matemática rigurosa del mismo no fue dada hasta una década más tarde por Norbert Wiener. En consecuencia este proceso estocástico es conocido con el nombre de proceso de Wiener o movimiento Browniano en la literatura moderna.

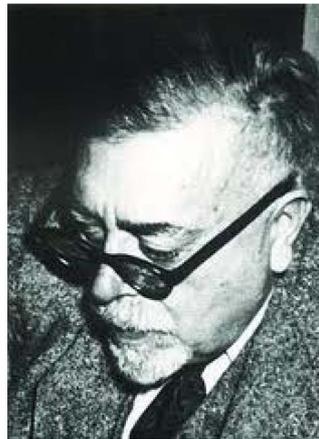


Figura 2.7: Norbert Wiener

### 2.3. El movimiento Browniano, una idea intuitiva

Para fines del presente trabajo se usará este modelo como una aproximación cruda en una dimensión de una difusión o movimiento Browniano, donde la partícula es expuesta a un gran número aleatorio de colisiones moleculares.

Como ya se ha mencionado anteriormente, en 1827 el botánico Robert Brown observó que un grano de polen suspendido en agua se mueve constantemente en una trayectoria aleatoria zigzagueante, tal como lo muestra la Figura 2.8. Por consiguiente se puede ver al movimiento Browniano como el límite de una caminata aleatoria si se considera la proyección sobre el eje  $x$  de la trayectoria de la partícula y se define a  $W(t)$  como la abscisa de la posición de la partícula al tiempo  $t$ , entonces  $\{W(t)\}$  es el proceso que se analizará.

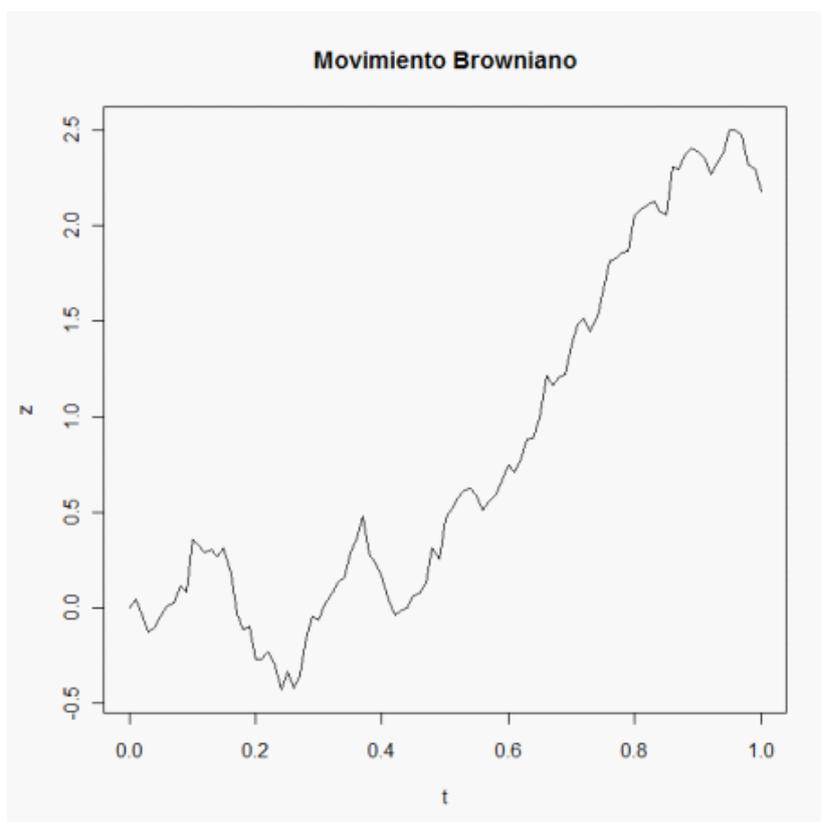


Figura 2.8: Simulación del movimiento Browniano

A continuación se realizará un análisis de la función de densidad de las variables  $W(t)$  que forman el proceso estocástico. Por principio se utilizará un modelo discreto, es decir, suponiendo que la partícula se observa cada  $h$  unidades de tiempo. Debido a que en una dimensión da la impresión de que el grano de polen salta azarosamente hacia un lado y hacia otro, por ejemplo, un movimiento que, comenzando en  $x$ , en cada intervalo de tiempo  $h$  da un salto de una distancia  $d$  hacia la derecha o hacia la izquierda, ambos movimientos con probabilidad  $\frac{1}{2}$ , es decir, se tiene una caminata aleatoria.

Se le nombrará  $W_n$  a la posición de la partícula al tiempo  $nh$  en este modelo discreto. A cada salto de la partícula se le considera como un ensayo Bernoulli, donde el movimiento hacia la derecha representa un éxito y hacia la izquierda representa un fracaso. Sea  $X_n$  la variable aleatoria que cuenta el número de saltos hacia la derecha en  $n$  saltos (por lo que  $n - X_n$  es el número de saltos a la izquierda), entonces  $X_n$  se distribuye como una binomial, esto se expresa de la siguiente manera:

$$P[X_n = k] = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} & \text{si } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La posición final después de  $n$  saltos está dada a continuación:

$$W_n = x + dX_n - d(n - X_n) = x + d(2X_n - n),$$

de lo anterior se obtiene que  $X_n = \frac{1}{2} \left( \frac{W_n - x}{d} + n \right)$ , así por el Teorema de De Moivre-Laplace se obtiene que, a la larga, la siguiente expresión se distribuye como una normal estándar:

$$Z_n = \frac{X_n - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\sqrt{n}},$$

entonces es posible realizar la siguiente operación:

$$\frac{X_n - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} = \frac{\left( \frac{W_n - x}{d} + n \right) \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} = \frac{W_n - x}{d\sqrt{n}}.$$

Ahora, para pasar al caso continuo, se hace tender  $h$  a 0. Para una  $t > 0$  arbitraria, se elige  $h$  de la forma  $h = \frac{t}{n}$ , de manera que al hacer  $h \rightarrow 0$  es lo mismo que hacer  $n \rightarrow \infty$ .

Del modelo físico se sabe que  $d^2$  es proporcional a  $h$ , en particular, tomando unidades adecuadas, se puede suponer que  $d^2 = h$ . Si se le llama  $W(t)$  a la posición de la partícula en el tiempo  $t > 0$  y se considera el movimiento de saltos empezando en  $x$ , se define  $X(t)$  como el número de saltos a la derecha que ha dado la partícula hasta el tiempo  $t$ . Se tiene entonces que:

$$\frac{X_t - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} = \frac{W(t) - x}{d\sqrt{n}} = \frac{W(t) - x}{\sqrt{nh}} = \frac{W(t) - x}{\sqrt{t}},$$

así que, por el Teorema de De Moivre-Laplace, se obtiene:

$$\begin{aligned} P \left[ a < \frac{W(t) - x}{\sqrt{t}} < b \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[ a < \frac{W_n - x}{d\sqrt{n}} < b \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \end{aligned}$$

lo anterior quiere decir que la distribución de  $W(t)$  es normal con parámetros  $\mu = x$  y  $\sigma^2 = t$ .

La colección de variables infinita no numerable  $(W(t))_{t>0}$  es un proceso estocástico a tiempo continuo. Su espacio de estados es también continuo porque  $W(t)$  toma cualquier valor real. Este proceso tiene las siguientes propiedades:

1. En el caso general, cada incremento  $W(s+t) - W(s)$  tiene distribución normal con media cero y varianza  $\sigma^2 t$ . De lo anterior se desprende que la distribución de  $W(t_1) - W(t_2)$  depende sólo de la longitud del intervalo  $t_2 - t_1$  ( y no, por ejemplo, de  $t_1$ ).
2. Para  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < \dots < t_n$  los incrementos  $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  son variables aleatorias independientes, dicho de diferente manera, las variaciones de  $W(t)$  sobre intervalos de tiempo que no se traslapan, son independientes.
3. El desplazamiento  $W(s+t) - W(s)$  es independiente del pasado o alternativamente si se conoce la posición  $W(s) = x$  entonces no se necesita conocer los valores  $W(\tau)$  para  $\tau < s$  porque éstos no tienen ningún efecto en el conocimiento de la ley de probabilidad que gobierna los futuros movimientos  $W(s+t) - W(s)$ .

## 2.4. Simulación del movimiento Browniano como límite de una caminata aleatoria

Como se vio anteriormente, una característica del movimiento Browniano es que se puede ver como el límite de una caminata aleatoria, utilizando el teorema de De Moivre-Laplace, en particular, se puede suponer que la distribución de  $W(t)$  es normal con parámetros  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ . El siguiente código en **R** da una representación gráfica de cuántas variables aleatorias,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , se necesitan para obtener una buena representación del movimiento Browniano. La Figura 2.9, muestra una primera aproximación al movimiento Browniano mediante una caminata aleatoria con  $n = 10, 100, 1000$  y  $10000$  saltos. Se puede observar que las Figuras 2.9 y 2.8 son muy parecidas, es decir, se puede observar el comportamiento a largo plazo de la caminata aleatoria como una buena aproximación al movimiento Browniano.

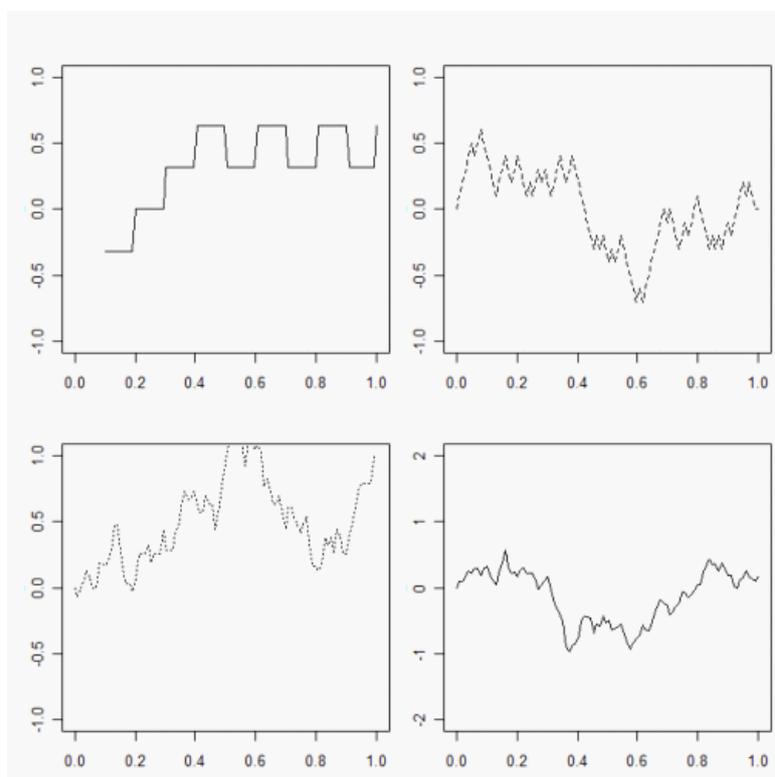


Figura 2.9: Aproximación del movimiento Browniano mediante una caminata aleatoria para  $n=10,100,1000,10000$ .

## 2.5. Definición y propiedades básicas

### 2.5.1. Supuestos generales

**Definición 3** Sea  $\Omega \neq \emptyset$ . Una colección  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Omega$  se llama  $\sigma$ -álgebra de conjuntos si:

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ .
2. Si  $A \in \mathcal{F}$  entonces  $A^c \in \mathcal{F}$ .
3. Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  entonces  $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

**Definición 4** Sea  $\Omega \neq \emptyset$  y  $\mathcal{F}$  una  $\sigma$ -álgebra en  $\Omega$ . La pareja  $(\Omega, \mathcal{F})$  se llama espacio medible

**Definición 5** Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible. Una medida sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  es una función  $\mu$  definida sobre  $\mathcal{F}$  con valores en  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  tal que:

1.  $\mu(A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{F}$ .

2.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
3. Para toda sucesión  $A_1, A_2, \dots$  de conjuntos dos a dos ajenos de  $\mathcal{F}$  :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

La terna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  se llama espacio de medida.

**Definición 6** Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible y  $P$  una medida de probabilidad sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$ . La terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se llama espacio de probabilidad.

**Definición 7** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad y  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ . Definimos

- 1.

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

es decir,  $\omega \in \limsup A_n$  si y sólo si para todo  $n$ , se tiene que  $\omega \in A_k$  para algún  $k \geq n$ .

- 2.

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

es decir,  $\omega \in \liminf A_n$  si y sólo si existe  $k$  tal que  $\omega \in A_k$  para todo  $k \geq n$ .

**Lema 8 (Borel - Cantelli)** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad y  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ .

1. Si  $\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] < \infty$  entonces  $P[\limsup A_n] = 0$ .
2. Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de eventos independientes. Si  $\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] = \infty$ , entonces  $P[\limsup A_n] = 1$ .

**Prueba.** Para la demostración de este lema se puede consultar [3]. ■

**Remark 9** Sea  $X = \{X_t\}_{t \in I}$  un proceso estocástico y sea  $\omega \in \Omega$  fijo. La función  $t \mapsto X_t(\omega)$  se llama trayectoria del proceso estocástico.

**Definición 10** Sea  $I$  un conjunto ordenado de índices. Una filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$  es una familia de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$  tal que  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  para  $s < t$  y  $s, t \in I$ .

**Remark 11** Dado un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in I}$  definido sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se tiene que  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s)$  para  $0 \leq s \leq t$  y  $t \geq 0$  es una filtración en  $(\Omega, \mathcal{F})$ . La filtración  $\{\mathcal{F}_t^X\}$  se llama filtración canónica o natural con respecto a  $\{X_t\}_{t \in I}$ .

Recordemos que si un vector aleatorio  $X$  es medible  $U$  entonces  $U$  contiene toda la información relevante sobre  $X$ . Luego podemos entender a las  $\sigma$ -álgebras como fuentes de información pues éstas nos dicen que eventos se pueden observar y cuales no. Así en una filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$ ,  $\mathcal{F}_t$  modelará que eventos pueden ser observados hasta el tiempo  $t$ . Por esto se dice que las filtraciones nos dan el flujo de información en el tiempo.

**Definición 12** *El proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in I}$  es adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$  si para cada  $t \geq 0$ ,  $X_t$  es una variable aleatoria  $\mathcal{F}_t$ -medible.*

**Remark 13** *Todo proceso estocástico  $\{X_t\}$  es adaptado a su filtración canónica o natural  $\{\mathcal{F}_t^X\}$ .*

En lo que sigue utilizaremos como conjunto de índices  $I = [0, T]$  ó  $I = [0, \infty)$  salvo que indiquemos lo contrario. Si hablamos simplemente de un proceso  $\{X_t\}_{t \in I}$  se entenderá que la filtración asociada es la filtración natural ó filtración canónica de  $X_t$ . En lugar de  $\{X_t\}_{t \in I}$  usualmente escribiremos  $\{X_t\}$  o simplemente  $X$ . También lo denotaremos como la función  $I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n : X(t, \omega) = X_t(\omega)$ , es decir, podemos pensar al proceso estocástico como una función aleatoria tal que para cada  $\omega \in \Omega$  este toma el camino muestral  $X(\cdot, \omega) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definición 14** *Sean  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}$  y  $\{Y_t, \mathcal{G}_t\}_{t \in [0, \infty)}$  dos procesos estocásticos. Diremos que  $Y$  es una modificación de  $X$  si se verifica que:*

$$P[\omega \mid X_t(\omega) = Y_t(\omega)] = 1 \text{ para todo } t \geq 0.$$

**Definición 15** *Sean  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}$  y  $\{Y_t, \mathcal{G}_t\}_{t \in [0, \infty)}$  dos procesos estocásticos. Diremos que  $X$  e  $Y$  son indistinguibles si casi todas sus trayectorias coinciden, es decir, si se verifica que:*

$$P[\omega \mid X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ para todo } t \geq 0] = 1.$$

Que  $\{Y_t, \mathcal{G}_t\}_{t \in [0, \infty)}$  sea una modificación de  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}$  no implica que  $Y_t$  sea  $\mathcal{F}_t$ -medible. Para evitar esto, sin embargo, se puede trabajar con la filtración  $P$  aumentada de  $\mathcal{F}_t$ :

$$\mathcal{F}_t^+ = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{N}) \quad t \in [0, \infty),$$

donde  $\mathcal{N} = \{A \mid A \in \mathcal{F} \text{ y } P[A] = 1 \text{ ó } P[A] = 0\}$ .

**Teorema 16** *Sea  $Y$  una modificación del proceso estocástico  $X$ . Si ambos procesos son continuos a.s. entonces  $X$  e  $Y$  son indistinguibles.*

**Prueba.** Sea  $B = \{\omega \mid X(\cdot, \omega) \text{ e } Y(\cdot, \omega) \text{ son continuos}\}$ . Luego  $P[B] = 1$ . Sea  $A_q = \{\omega \mid X_q(\omega) = Y_q(\omega)\}$ , para  $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ . También  $P[A_q] = 1$  y si se hace  $C = B \cap \bigcap_q A_q$  entonces  $P[C] = 1$ . Pero, si  $\omega \in C$  entonces  $X(q, \omega) = Y(q, \omega)$  para todo  $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ , con lo que junto a la continuidad de  $X(\cdot, \omega)$  e  $Y(\cdot, \omega)$  implica que  $X(t, \omega) = Y(t, \omega)$  para todo  $t \geq 0$ . Por lo tanto,  $X$  e  $Y$  son indistinguibles. ■

**Definición 17** Sea  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in I}$  un proceso estocástico de valores reales con  $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ . Diremos que  $X_t$  es

a) Una supermartingala si para todo  $s, t \in I$  con  $s \leq t$

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s \text{ a.s.}$$

b) Una submartingala si para todo  $s, t \in I$  con  $s \leq t$

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s \text{ a.s.}$$

c) Una martingala si para todo  $s, t \in I$  con  $s \leq t$

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \text{ a.s.}$$

Las martingalas discretas son usualmente usadas para modelar juegos de azar: Si la sucesión  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  denota las ganancias de un jugador después de su  $n$ -ésima participación y el juego es justo entonces deberá satisfacer la condición:

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n \text{ a.s.},$$

o sea, deberá tratarse de una martingala. Similarmente si el juego es favorable se deberá tratar de una submartingala y una supermartingala modelará un juego desfavorable. Si esta interesado en martingalas continuas siendo un ejemplo clásico de éstas el movimiento Browniano tal como veremos más adelante cuando se haya definido.

**Lema 18** (Desigualdad de Jensen Condicional). Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad y  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa con  $\mathbb{E}[|\phi(X)|] < \infty$ . Luego para  $t \geq 0$ ,

$$\phi(\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t]) \leq \mathbb{E}[\phi(X) | \mathcal{F}_t] \text{ a.s.}$$

**Prueba.** Para la demostración de este resultado se puede consultar [27]. ■

**Lema 19** Sea  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$  una martingala y  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa con  $\mathbb{E}[|\phi(X_t)|] < \infty$  para todo  $t \in I$ . Luego  $\{\phi(X_t), \mathcal{F}_t\}$  es una submartingala.

**Prueba.** Por la Desigualdad de Jensen Condicional

$$\mathbb{E}[\phi(X_t) | \mathcal{F}_t] \geq \phi(\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]) = \phi(X_s) \text{ a.s para todo } t \geq s. \blacksquare$$

**Teorema 20** Desigualdades de Martingalas Discretas:

a) Si  $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una submartingala, entonces

$$P \left[ \max_{1 \leq k \leq n} X_k \in [\lambda, \mu] \right] \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{\max_{1 \leq k \leq n} X_k \in [\lambda, \mu]\}} X_n^+ dP,$$

para todo  $n = 1, 2, \dots$  y  $\lambda > 0$ . En particular

$$P \left[ \max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \lambda \right] \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E} [X_n^+].$$

b) Si  $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una martingala y  $1 < p < \infty$ , entonces

$$\mathbb{E} \left[ \max_{1 \leq k \leq n} |X_k|^p \right] \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [|X_n|^p],$$

para todo  $n = 1, 2, \dots$

**Prueba.** Se puede consultar en [27]. ■

**Teorema 21** (Desigualdades de Martingalas). Sea  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico con caminos continuos a.s. Entonces

a) Si  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  es una submartingala, entonces

$$P \left[ \max_{0 \leq s \leq t} X_s \geq \lambda \right] \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E} [X_t^+] \text{ para todo } \lambda > 0, t \geq 0.$$

b) Si  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  es una martingala y  $1 < p < \infty$ , entonces

$$\mathbb{E} \left[ \max_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p \right] \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [|X_t|^p] \text{ para todo } t \geq 0.$$

**Prueba.** Se puede consultar en [27]. ■

### 2.5.2. Definición

Las observaciones reales del movimiento de granos de polen a través del microscopio sugieren que el fenómeno satisface las siguientes propiedades:

1. Es continuo.
2. Parece tener desplazamientos independientes en intervalos de tiempo disjuntos.
3. Debido al gran número de colisiones del grano de polen con las moléculas circundantes en longitudes de tiempo no pequeños, y teniendo en cuenta el teorema central del límite, los incrementos pueden modelarse como variables aleatorias gaussianas.

La estructura matemática de un proceso estocástico a tiempo continuo  $\{W_t : t \geq 0\}$  ha resultado adecuada para modelar este tipo de fenómenos. La variable  $W_t$  puede representar la posición de la partícula al tiempo  $t$ . La definición matemática, en el caso unidimensional, es la siguiente:

**Definición 22** Un movimiento Browniano unidimensional de parámetro  $\sigma^2$  es un proceso estocástico  $\{W_t : t \geq 0\}$  con valores en  $R$  que cumple las siguientes propiedades:

1.  $W_0 = 0$  c.s., es decir, el proceso empieza en 0 con probabilidad uno.
2. Las trayectorias  $t \mapsto W_t$  son continuas, esto es,  $P[W \in C[0, \infty)] = 1$ .
3. El proceso  $W_t$  tiene incrementos independientes.
4. La variable  $W_t - W_s$  tiene distribución  $N(0, \sigma^2(t-s))$ , para cualesquiera tiempos  $0 \leq s < t$ .

Las condiciones que aparecen en esta definición son consecuencia directa de las observaciones del fenómeno físico, pero eso no garantiza que tal objeto matemático exista. En 1923 el matemático norteamericano Norbert Wiener demostró la existencia y unicidad de un proceso con tales condiciones. Es por esta razón que a menudo a este proceso también se le llama proceso de Wiener y se le denota por  $\{W_t : t \geq 0\}$ . En sentido estricto, el movimiento Browniano es el fenómeno físico, mientras que su modelo matemático es el proceso de Wiener, aunque es común llamar a ambos procesos con el mismo nombre: movimiento Browniano.

La propiedad uno es meramente una normalización y es conveniente, mas no un requerimiento básico. Si el proceso  $W_t$  satisface los últimos tres postulados, pero no el primero, entonces el proceso  $W_t$  es un movimiento Browniano estándar.

La propiedad dos se sigue de tres y cuatro en el sentido de que da un proceso  $W_t$  que satisface tres y cuatro, pero hay muchas definiciones que incluyen tres, así las propiedades tres y cuatro son las más básicas. La propiedad tres muestra que el comportamiento incremental en un intervalo no afecta dicho comportamiento en otro intervalo disjunto.<sup>1</sup>

## 2.6. Una construcción del movimiento Browniano

Para la construcción del movimiento Browniano se supondrá que se tiene uno y a partir de ahí se intentará reescribirlo usando la normalidad de sus incrementos y de las otras propiedades que posee. Para ello se toman particiones del intervalo  $[0, 1]$ , esto es:

$$P_n : 0 = t_0^n < \dots < t_n^n < 1,$$

tales que  $P_n \subset P_{n+1}$  y  $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$  denso en  $[0, 1]$ , entonces sean:

$$S_n = \{v(t) \in L^2[0, 1] \mid v(t) \text{ es constante en } (t_{i-1}^n, t_i^n]\},$$

<sup>1</sup>Para ver otras definiciones se puede consultar [11], por ejemplo.

para todo  $1 \leq i \leq n$  y tomando  $\{v^{(n)}(t)\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $v^{(1)}(t), \dots, v^{(n)}(t)$  son base ortonormal de  $S_n$  con respecto al producto interno de  $L^2[0, 1]$ :

$$\langle v(t), w(t) \rangle = \int_0^1 v(t) w(t) dt.$$

Definase el siguiente cociente incremental de  $W_t$ :

$$\xi^n(t) = \frac{W(t_i^n) - W(t_{i-1}^n)}{\Delta t_i^n}, \quad (2.1)$$

donde  $t_{i-1} < t \leq t_i$  y  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

Como  $\xi^n(t) \in S_n$  para cada  $\omega \in \Omega$  se puede reescribir la anterior ecuación de la siguiente manera:

$$\xi^n(t) = \sum_{i=1}^n A_i^n v^{(i)}(t),$$

donde  $A_i^n = \langle \xi^n(t), v^{(i)}(t) \rangle$ . Ahora se ve que propiedades tienen estos  $A_i^n$ 's.

**Proposición 23** *Se cumplen las siguientes propiedades para  $A_i^n$ 's:*

- (1)  $\{A_i^n\}_{i=1}^n$  son variables aleatorias independientes con distribución  $N(0, 1)$ ;
- (2)  $A_i^n = A_i^i$ , es decir,  $\langle \xi^n(t), v^{(i)}(t) \rangle = \langle \xi^i(t), v^{(i)}(t) \rangle$  para toda  $n \geq i$ ;
- (3)  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ , con  $A_i = A_i^i$ , es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución  $N(0, 1)$ .

**Prueba.** (1) Se sabe que  $A_i^n = \langle \xi^n, v^{(i)} \rangle = \int_0^1 \xi^n(t) v^{(i)}(t) dt$ , entonces:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \xi^n(t_j^n) v^{(i)}(t_j^n) \Delta t_j^n \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)}{\Delta t_j^n} v^{(i)}(t_j^n) \Delta t_j^n \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)}{\sqrt{\Delta t_j^n}} v^{(i)}(t_j^n) \sqrt{\Delta t_j^n}, \end{aligned}$$

donde  $\frac{W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)}{\sqrt{\Delta t_j^n}}$  se distribuye como  $N(0, 1)$ . Luego, como

$$\left( v^{(i)}(t_1^n) \sqrt{\Delta t_1^n}, \dots, v^{(i)}(t_n^n) \sqrt{\Delta t_n^n} \right)$$

para  $1 \leq i \leq n$  son vectores ortogonales, se tiene que  $A_i^n$  para  $1 \leq i \leq n$  son variables independientes:

$$N\left(0, \sum_{i=1}^n \left(v^{(i)}(t_j^n)\right)^2 \Delta t_j^n\right) = N\left(0, \int_0^1 \left(v^{(i)}(t)\right)^2 dt\right) \sim N(0, 1).$$

(2) Basta ver que  $\langle \xi^{n+1}, v^{(i)} \rangle = \langle \xi^n, v^{(i)} \rangle$  para  $n \geq i$ . Sea  $j_0$  tal que  $P_{n+1} - \{t_{j_0}^{n+1}\} = P_n$ , además supongase sin pérdida de generalidad que  $j_0 = n$ , así  $t_j^{n+1} = t_j^n$  para todo  $0 \leq j \leq n-1$  y  $t_{n-1}^n < t_n^{n+1} < t_n^n$ , por lo cual  $v^{(i)}(t_{n+1}^{n+1}) = v^{(i)}(t_n^n)$ , por lo que:

$$\begin{aligned}
\langle \xi^{n+1}, v^{(i)} \rangle &= \int_0^1 \xi^{n+1}(t) v^{(i)}(t) dt \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{W(t_j^{n+1}) - W(t_{j-1}^{n+1})}{\Delta t_j^{n+1}} v^{(i)}(t_j^{n+1}) \Delta t_j^{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)}{\Delta t_j^n} v^{(i)}(t_j^n) \Delta t_j^n \\
&\quad + \frac{W(t_n^{n+1}) - W(t_{n-1}^n)}{\Delta t_n^{n+1}} v^{(i)}(t_n^n) \Delta t_n^{n+1} \\
&\quad + \frac{W(t_n^n) - W(t_{n+1}^{n+1})}{\Delta t_{n+1}^{n+1}} v^{(i)}(t_n^n) \Delta t_{n+1}^{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)}{\Delta t_j^n} v^{(i)}(t_j^n) \Delta t_j^n + (W(t_n^n) - W(t_{n+1}^{n+1})) v^{(i)}(t_n^n) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)}{\Delta t_j^n} v^{(i)}(t_j^n) \Delta t_j^n = \langle \xi^n, v^{(i)} \rangle.
\end{aligned}$$

(3) Es consecuencia directa de 1 y 2, o bien, se puede consultar [11]. ■

Por lo que,  $\xi^n(t) = \sum_{i=1}^n A_i v^{(i)}(t)$  y es natural preguntarse si la serie converge y si en caso de que el límite exista tener que  $\xi^n(t) = W'(t)$  la derivada del movimiento Browniano. La respuesta es negativa puesto que, como se verá más adelante, el movimiento Browniano no es de variación acotada.

**Proposición 24** *Se define*

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^t v^{(n)}(s) ds$$

para todo  $t \in D = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$  como al principio de ésta sección.

**Prueba.** Para cada  $t \in D$  la serie tendrá sólo sumandos finitos. En efecto, sea  $t \in D$  y  $t = t_{j_0}^{n_0}$ , luego para  $n \geq n_0$ , como  $P_n \supset P_{n_0}$ , existe un  $j_n$  tal que  $t = t_{j_n}^n$ . Como  $\xi^n(s) = \sum_{i=1}^n A_i v^{(i)}(s)$  integrando hasta  $t_{j_n}^n$  se tiene que:

$$W(t) = W(t_{j_n}^n) = \int_0^{t_{j_n}^n} \sum_{i=1}^n A_i v^{(i)}(s) ds = \sum_{i=1}^n A_i \int_0^t v^{(i)}(s) ds,$$

la anterior ecuación vale para toda  $n \geq n_0$  porque la serie termina en  $n_0$ . ■

De la anterior proposición se deduce que la  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^t v^{(n)}(s) ds$  converge uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$  casi donde quiera, entonces por continuidad se tendría que:

$$W(t) = \sum_{i=1}^n A_i \int_0^t v^{(i)}(s) ds \text{ a.e. ,}$$

así se habrá escrito al movimiento Browniano como una serie de funciones con coeficientes aleatorios. Esto es útil porque nos dice cómo construir dichos movimientos en el intervalo  $[0, 1]$ , basta tomar  $\{A_n\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, con distribución  $N(0, 1)$  cualquiera, pues sólo importan sus distribuciones para deducir las propiedades que caracterizan al movimiento Browniano, y tomar

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^t v^{(n)}(s) ds.$$

## 2.7. Construcción de Lévy-Ciesielski

Se tomarán las particiones  $P_k$  sencillas, dadas por los números diádicos<sup>2</sup> de la siguiente forma:

$$P_k = \left\{ \frac{i}{2^{n-1}} \mid 0 \leq i \leq 2^{n-1} \right\} \cup \left\{ \frac{2i-1}{2^n} \mid 1 \leq i \leq k - 2^{n-1} \right\},$$

donde  $2^{n-1} < k \leq 2^n$ . Las  $v^{(k)}$  determinadas por estas particiones tienen nombre y notación propia y se introducirán en la siguiente definición.

**Definición 25** *Las funciones de Haar están dadas por:*

$$\begin{aligned} h_0(t) &= 1 \text{ para } 0 \leq t \leq 1 \text{ y} \\ h_1(t) &= \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{para } \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

y si  $2^n \leq k < 2^{n+1}$  para  $n = 1, 2, \dots$ , entonces

$$h_k(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & \frac{k-2^{n-1}-1}{2^{n-1}} < t < \frac{k-2^{n-1}-\frac{1}{2}}{2^{n-1}}, \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \frac{k-2^{n-1}-\frac{1}{2}}{2^{n-1}} < t < \frac{k-2^{n-1}}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

<sup>2</sup>Sea  $A = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid n \geq 0 \text{ y } 0 \leq k \leq 2^n \right\}$ . A se conoce como el conjunto de los números diádicos. Más aún, se puede sustituir al número 2 por cualquier número primo  $p$ , es decir,  $A = \left\{ \frac{k}{p^n} \mid n \geq 0 \text{ y } 0 \leq k \leq p^n \right\}$ .

Adicionalmente se definen las funciones de Shauder por

$$s_k(t) = \int_0^t h_k(s) ds.$$

**Proposición 26** Las funciones  $\{h_k(t)\}_{k=1}^\infty$  son ortonormales y forman una base de  $L^2[0, 1]$ .

**Prueba.** Se tiene que:

$$\int_0^1 h_k^2(t) dt = 2^{n-1} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) = 1,$$

para  $2^{n-1} < k \leq 2^n$ . Además, note que si  $l > k$ , tienen soportes disjuntos, o bien,  $h_k$  es constante en el soporte de  $h_l$ , en este último caso se tiene que la integral queda de la siguiente manera:

$$\int_0^1 h_l(t) h_k(t) dt = \pm 2^{\frac{n-1}{2}} \int_0^1 h_l(t) dt = 0.$$

Por otro lado, hay que observar que si  $f \in L^2[0, 1]$  y cumple que  $\langle f(t), h_k(t) \rangle = \int_0^1 f(t) h_k(t) dt = 0$  para todo  $k = 0, 1, \dots$  entonces se probará que  $f(t) = 0$  a.s. En efecto, si  $n = 0$  se cumple que  $\int_0^1 f(t) dt = 1$ , de manera similar, si  $n = 1$  la integral queda como  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt$ , y ambas son iguales a cero, dado que  $0 = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$ . Procediendo de forma análoga se deduce que  $\int_{\frac{i}{2^n}}^{\frac{i+1}{2^n}} f(t) dt = 0$  para todo  $0 \leq i < 2^n$ . Por lo que  $\int_r^s f(t) dt = 0$  para todo  $0 \leq r \leq s \leq 1$  racionales diádicos. Por lo tanto  $f(r) = \frac{d}{dr} \int_0^r f(t) dt = 0$  a.s. ■

En los siguientes lemas se probará que la serie  $\sum_{k=1}^\infty A_k s_k(t)$  converge uniformemente.

**Lema 27** Sea  $\{a_k\}_{k=1}^\infty$  una sucesión tal que  $|a_k| = o(k^\delta)$  cuando  $k \rightarrow \infty$  para algún  $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$ . Luego, la serie  $\sum_{k=1}^\infty a_k s_k(t)$  converge uniformemente para  $0 \leq t \leq 1$ .

**Prueba.** Sea  $\epsilon > 0$  y observe que para  $2^{n-1} < k \leq 2^n$  las funciones  $s_k(t)$  tienen soportes disjuntos. Sea  $b_n = \max_{2^{n-1} < k \leq 2^n} |a_k| \leq C 2^{n\delta}$ . Así:

$$\begin{aligned} \sum_{k>2^m} |a_k| |s_k(t)| &= \sum_{n>m} \sum_{2^{n-1} < k \leq 2^n} |a_k| |s_k(t)| \\ &\leq \sum_{n>m} b_n \max_{2^{n-1} < k \leq 2^n} |s_k(t)| \\ &\quad 0 \leq t \leq 1 \\ &\leq C \sum_{n>m} \frac{2^{n\delta}}{2^{\frac{n+1}{2}}} < \epsilon, \end{aligned}$$

para  $m$  suficientemente grande. ■

**Lema 28** Sea  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión de variables aleatorias con distribución  $N(0, 1)$ . Entonces, para casi todo  $\omega$ ,

$$A_k(\omega) = o\left(\sqrt{\log k}\right),$$

cuando  $k \rightarrow \infty$ .

**Prueba.** Para  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} P[|A_k| \geq x] &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4}} ds \\ &\leq C e^{-\frac{x^2}{4}}. \end{aligned}$$

Luego, para  $0 < y < 1$ ,  $P[|A_k| \geq \sqrt{-4 \log y}] \leq Cy$ . Así tomando  $y \approx \frac{1}{k^4}$ ,  $P[|A_k| \geq 4\sqrt{\log y}] \leq C \frac{1}{k^4}$ . Como  $\sum \frac{1}{k^4} < \infty$ , por el lema de Borel-Cantelli  $P[|A_k| \geq 4\sqrt{\log k}] = 0$ , o sea, para casi todo  $\omega$ ,  $|A_k| < 4\sqrt{\log k}$ . ■

**Lema 29**

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k(s) s_k(t) = \min\{s, t\} = s \wedge t \text{ para todo } 0 \leq s, t \leq 1.$$

**Prueba.** Sea  $0 \leq s \leq 1$ , definase

$$\phi_s(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq s, \\ 0 & \text{si } s < r \leq 1, \end{cases}$$

por lo que:

$$\int_0^1 \phi_s(r) \phi_t(r) dr = s \wedge t,$$

y por la proposición anterior,  $\{h_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$  es una base de Hilbert de  $L^2[0, 1]$ , así se tiene que:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \phi_s(r) \phi_t(r) dr \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \phi_s(r) h_k(r) dr \int_0^1 \phi_t(r) h_k(r) dr \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^s h_k(r) dr \int_0^t h_k(r) dr \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k(s) s_k(t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 30** *Existencia de un movimiento Browniano en  $[0, 1]$ . Si  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución  $N(0, 1)$ , entonces:*

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k s_k(t),$$

para  $0 \leq t \leq 1$ ,  $W(t)$  define un movimiento Browniano continuo en  $[0, 1]$ .

**Prueba.**  $W(t)$  cumple con las condiciones de la definición de un movimiento Browniano. Es claro que  $W(0) = 0$  a.s. Se verá que  $W(t) - W(s) \sim N(0, 1)$  para  $0 \leq s \leq t \leq 1$ . En efecto, utilizando su función característica:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( e^{i\lambda(W(t)-W(s))} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( e^{i\lambda \sum_{k=1}^{\infty} A_k (s_k(t) - s_k(s))} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( e^{i\lambda \sum_{k=1}^n A_k (s_k(t) - s_k(s))} \right) \text{ por continuidad} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left( e^{i\lambda A_k (s_k(t) - s_k(s))} \right) \text{ por independencia} \\ &= \prod_{k=1}^n e^{-\frac{\lambda^2}{2} (s_k(t) - s_k(s))^2} \text{ pues } A_k \sim N(0, 1) \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (s_k(t) - s_k(s))^2} \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(t) - 2s_k(t)s_k(s) + s_k^2(s)} \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2} (t - 2s + s)} \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2} (t-s)}, \end{aligned}$$

luego, por unicidad de las funciones características se tiene que  $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$ . Por último, veamos la independencia,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( e^{i \sum_{j=1}^m \lambda_j (W(t_j) - W(t_{j-1}))} \right) = \prod_{j=1}^m e^{-\frac{\lambda_j^2}{2} (t_j - t_{j-1})} \quad (2.2) \\ &= \prod_{j=1}^m \mathbb{E} \left( e^{i \lambda_j (W(t_j) - W(t_{j-1}))} \right). \end{aligned}$$

Una vez probado esto se tendrá, por la unicidad de las funciones características, que:

$$\begin{aligned} & F_{W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})} (x_1, \dots, x_m) \\ &= F_{W(t_1)} (x_1) \cdots F_{W(t_m) - W(t_{m-1})} (x_m), \end{aligned}$$

para todo  $(x_1, \dots, x_m) \in R^m$ , por lo cual,  $W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$  serán independientes. Ahora se hará una prueba la ecuación 2.2. Por simplicidad se hará

sólo para  $m = 2$ .

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left( e^{i[\lambda_1 W(t_1) + \lambda_2 (W(t_2) - W(t_1))]} \right) \\
&= \mathbb{E} \left( e^{i[\lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} A_k s_k(t_1) + \lambda_2 (\sum_{k=1}^{\infty} A_k s_k(t_2) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k s_k(t_1))]} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( e^{i[\lambda_1 \sum_{k=1}^n A_k s_k(t_1) + \lambda_2 (\sum_{k=1}^n A_k s_k(t_2) - \sum_{k=1}^n A_k s_k(t_1))]} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left( e^{i[\lambda_1 A_k s_k(t_1) + \lambda_2 (A_k s_k(t_2) - A_k s_k(t_1))]} \right) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[\lambda_1 s_k(t_1) + \lambda_2 (s_k(t_2) - s_k(t_1))]^2} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[\lambda_1^2 s_k^2(t_1) + \lambda_2^2 (s_k(t_2) - s_k(t_1))^2 + \lambda_1 \lambda_2 s_k(t_1) (s_k(t_2) - s_k(t_1))]} \\
&= e^{-\frac{1}{2}[\lambda_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(t_1) + \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} (s_k(t_2) - s_k(t_1))^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{k=1}^{\infty} s_k(t_1) (s_k(t_2) - s_k(t_1))]} \\
&= e^{-\frac{1}{2}[\lambda_1^2 t_1 + \lambda_2^2 (t_2 - t_1)]}. \blacksquare
\end{aligned}$$

**Teorema 31** *Existencia de un movimiento Browniano en  $[0, \infty]$ . Si  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tiene definido una sucesión de  $N(0, 1)$  independientes, entonces existe un movimiento Browniano en  $[0, \infty)$  definido en el espacio.*

**Prueba.** Como se puede reindexar las variables  $N(0, 1)$  para obtener una sucesión de sucesiones de variables aleatorias  $N(0, 1)$ , entonces es posible por el Teorema 30, construir una sucesión  $W^n(t)$  de movimientos Brownianos independientes. Luego, pegando los bordes inductivamente se tiene que  $W(t) = W(n-1) + W^n(t - (n-1))$  para  $n-1 \leq t \leq n$ , es un movimiento Browniano en  $[0, \infty)$ . ■

Usando un razonamiento similar se pueden construir  $m$  movimientos Brownianos unidimensionales  $W_j(t)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , independientes. Luego  $W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))$  es un movimiento Browniano  $m$  dimensional respecto a la filtración  $\mathcal{F}_t^W$ .

Ahora bien, todo movimiento Browniano tiene una modificación continua. En efecto, la modificación verifica algo más fuerte, es uniformemente Hölder continua para cada exponente  $\gamma < \frac{1}{2}$ .

**Definición 32** *Una función  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es (uniformemente) Hölder continua con exponente  $\gamma$  si existe una constante  $K$  tal que:*

$$|f(s) - f(t)| \leq K |t - s|^\gamma \text{ para todo } s, t \in [0, T].$$

**Teorema 33 Kolmogorov-Chentsov.** Sea  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  un proceso estocástico tal que:

$$\mathbb{E} \left( |X_t - X_s|^\beta \right) \leq C |t - s|^{\lambda + \alpha} \text{ para } 0 \leq s, t \leq T,$$

donde  $\alpha, \beta > 0$ ,  $C \geq 0$ . Luego, existe una modificación continua  $\tilde{X}_t$  de  $X_t$ , la cual para cada  $0 \leq \gamma \leq \frac{\alpha}{\beta}$  es uniformemente Hölder continua con exponente  $\gamma$ , o sea, que para casi todo  $\omega$  existe  $K = K(\omega, \gamma, T)$  tal que:

$$\left| \tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega) \right| \leq K |t - s|^\gamma \text{ si } 0 \leq s, t \leq T.$$

**Prueba.** Sin pérdida de generalidad se supone que  $T = 1$ . Sea  $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$  y sean:

$$A_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} \left\{ \left| X_{i/2^k} - X_{(i-1)/2^k} \right| > \frac{1}{2^{k\gamma}} \right\}, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} P(A_k) &\leq \sum_{i=1}^{2^k} P \left( \left| X_{i/2^k} - X_{(i-1)/2^k} \right| > \frac{1}{2^{k\gamma}} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{2^k} \mathbb{E} \left( \left| X_{i/2^k} - X_{(i-1)/2^k} \right|^\beta \right) \left( \frac{1}{2^{k\gamma}} \right)^{-\beta} \\ &\leq C \sum_{i=1}^{2^k} \left( \frac{1}{2^k} \right)^{1+\alpha} \left( \frac{1}{2^{k\gamma}} \right)^{-\beta} \\ &= C \frac{1}{2^k (\alpha - \gamma\beta)}, \end{aligned}$$

luego, como  $(\alpha - \gamma\beta) > 0$  se tiene que  $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$ . Por lo que, por el lema de Borel Cantelli,  $P(A_k) = 0$ , es decir, existe  $\Omega^*$  con  $P(\Omega^*) = 1$  tal que para  $\omega \in \Omega^*$  se tiene que:

$$\left| X_{i/2^k}(\omega) - X_{(i-1)/2^k}(\omega) \right| \leq \frac{1}{2^{k\gamma}} \text{ para todo } 1 \leq i \leq 2^k,$$

y esto para  $k \geq k(\omega)$ . Luego, para  $K_1 = K_1(\omega)$  suficientemente grande:

$$\left| X_{i/2^k}(\omega) - X_{(i-1)/2^k}(\omega) \right| \leq \frac{K_1}{2^{k\gamma}} \text{ para todo } 1 \leq i \leq 2^k. \quad (2.3)$$

Así, para  $k \geq 1$  esta última desigualdad implica que  $X$  es Hölder continua sobre el conjunto  $D$  de los racionales diádicos en  $[0, 1]$ . Sea  $\omega \in \Omega^*$  y  $t_1, t_2 \in D$  tales que  $0 < t_2 - t_1 < 1$ . Ahora se toma  $k \geq 1$  tal que:

$$\frac{1}{2^k} \leq t < \frac{1}{2^{k-1}} \text{ para } t = t_2 - t_1,$$

entonces, como  $\frac{1}{2^k} \leq t$  se puede escribir a  $t_1$  y a  $t_2$  como:

$$t_1 = \frac{i}{2^k} - \frac{1}{2^{p_1}} - \cdots - \frac{1}{2^{p_r}} \quad (k < p_1 < \cdots < p_r),$$

$$t_2 = \frac{j}{2^k} + \frac{1}{2^{q_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{q_n}} \quad (k < q_1 < \cdots < q_n),$$

con  $i \leq j$ . Además, como  $t < \frac{1}{2^{k-1}}$  se tiene que  $\frac{j-i}{2^k} < \frac{1}{2^{k-1}}$  por lo cual  $j = i$ , o bien,  $j = i + 1$ . Ahora, si se usa la ecuación (2.3) se obtiene que:

$$\left| X_{i/2^k}(\omega) - X_{j/2^k}(\omega) \right| \leq K_1 \left| \frac{i-j}{2^k} \right|^\gamma \leq K_1 t^\gamma,$$

más aún:

$$\begin{aligned} & \left| X \left( \frac{i}{2^k} - \frac{1}{2^{p_1}} - \cdots - \frac{1}{2^{p_l}}, \omega \right) - X \left( \frac{i}{2^k} - \frac{1}{2^{p_1}} - \cdots - \frac{1}{2^{p_{l-1}}}, \omega \right) \right| \\ & \leq K_1 \left( \frac{1}{2^{p_l}} \right)^\gamma, \end{aligned}$$

para  $l = 1, \dots, r$  y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left| X_{t_1}(\omega) - X_{i/2^k}(\omega) \right| & \leq K_1 \sum_{l=1}^r \left( \frac{1}{2^{p_l}} \right)^\gamma \\ & \leq \frac{K_1}{2^{k\gamma}} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^\gamma} \right)^l \\ & \leq K_2 t^\gamma, \end{aligned}$$

donde  $K_2 = K_2(\omega, \gamma)$ . Similarmente se deduce  $\left| X_{t_2}(\omega) - X_{j/2^k}(\omega) \right| \leq K_2 t^\gamma$ . Luego, sumando las estimaciones hechas, se obtiene que:

$$\left| X_{t_1}(\omega) - X_{t_2}(\omega) \right| \leq K_1 + K_2 \leq t^\gamma. \quad (2.4)$$

Lo siguiente es definir a  $\tilde{X}_t$ . Para  $\omega \notin \Omega^*$  se toma  $\tilde{X}_t(\omega) = 0$ . Para  $\omega \in \Omega^*$ , si  $t \in D$  se utiliza  $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$  y así por la desigualdad (2.4),  $\tilde{X}_t(\omega)$  queda uniformemente continua en  $D$ , luego si  $t \in [0, 1] \setminus D$  es posible definir  $\tilde{X}_t(\omega)$  de modo que quede continua en  $[0, 1]$ . Por continuidad se tiene que para  $\omega \in \Omega^*$ ,

$$\left| \tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega) \right| \leq K |t - s|^\gamma \quad \text{para } 0 \leq s, t \leq 1.$$

Para ver que  $\tilde{X}_t$  es una modificación de  $X_t$  primero se observa que para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$P(|X_t - X_s| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_t - X_s|^\beta)}{\epsilon^\beta} \leq C \epsilon^{-\beta} |t - s|^{1+\alpha},$$

así se concluye que  $X_s \xrightarrow{s \rightarrow t} X_t$  en probabilidad. Ahora sí, es visible que son una modificación de la otra. Sea  $t \in [0, 1]$ , más aún, se puede suponer que  $t \in [0, 1] \setminus D$ . Entonces sea  $\{t_k\} \subset D$  tal que  $t_k \rightarrow t$ , luego, por continuidad, se tiene que  $X_{t_k} = \tilde{X}_{t_k} \rightarrow \tilde{X}_t$  a.s., pero por lo demostrado anteriormente,  $X_{t_k} \rightarrow X_t$  en

probabilidad. Por lo tanto, es posible concluir que  $\tilde{X}_t = X_t$  a.s. Para terminar, observar que para cada  $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$  se han construido extensiones continuas  $\tilde{X}_t$ , pero como todas son modificaciones entre sí se concluye, por el teorema anterior, que son indistinguibles entre sí, de esta manera se concluye la demostración. ■

**Corolario 34** *Si  $W_t$  es un movimiento Browniano, entonces  $W_t$  tiene una modificación uniforme Hölder continua en  $[0, T]$  para cada  $\gamma < \frac{1}{2}$ .*

**Prueba.** Para  $p \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( |W(t) - W(s)|^{2p} \right) \\ &= (\sqrt{t-s})^{2p} E \left( \left( \left| \frac{W(t) - W(s)}{\sqrt{t-s}} \right|^2 \right)^p \right) \\ &= C(m, p) (t-s)^p, \end{aligned}$$

luego, por el teorema de Kolmogorov-Chenstov,  $W(t)$  tiene una modificación uniformemente Hölder continua en  $[0, T]$  para cada:

$$0 < \gamma < \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p},$$

como esto vale para cada  $p \geq 1$ , y como dos modificaciones continuas de  $W(t)$  son indistinguibles, por el Teorema 16, entonces  $W_t$  tiene una modificación uniforme Hölder continua en  $[0, T]$  para cada  $\gamma < \frac{1}{2}$ . ■

Gracias a este resultado, al trabajar con movimientos Brownianos, siempre será posible suponer la hipótesis de continuidad de Hölder.

## 2.8. Propiedades del movimiento Browniano

En el movimiento Browniano estándar cada variable aleatoria  $W_t$  tiene distribución  $N(0, t)$ , y por lo tanto  $\mathbb{E}(W_t) = 0$  y  $Var(W_t) = \mathbb{E}(W_t^2) = t$ . En particular  $\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = t - s$ , para  $0 \leq s < t$ .

**Proposición 35** *El movimiento Browniano es un proceso de Markov.*

**Prueba.** Para cualquier tiempo  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ , y para cualquier evento  $A$  en  $\mathbb{R}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
 & P [W_{t_{n+1}} \in A \mid W_{t_1} = x_1, \dots, W_{t_n} = x_n] \\
 = & \frac{p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) p(t_{n+1} - t_n, x_n, A)}{p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)} \\
 = & P(t_{n+1} - t_n, x_n, A) \\
 = & P(t_{n+1} - t_n, x_n, A) \frac{P(t_n, 0, x_n)}{P(t_n, 0, x_n)} \\
 = & P [W_{t_{n+1}} \in A \mid W_{t_n} = x_n]. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Como una consecuencia del hecho de que los incrementos de este proceso son independientes, demostraremos a continuación la propiedad de martingala.

**Proposición 36** *El movimiento Browniano es una martingala continua.*

**Prueba.** Cada variable aleatoria  $W_t$  es integrable y el proceso es adaptado a su filtración natural. Para cualesquiera tiempos  $s, t \geq 0$  tales que  $s < t$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(W_t \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W_t - W_s + W_s \mid \mathcal{F}_s) \\
 &= \mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_s \mid \mathcal{F}_s) \\
 &= \mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s = W_s. \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 37** *Sea  $W_t$  un movimiento Browniano. Se verá que el proceso:*

$$Z_t = \begin{cases} tW_{1/t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

*es un movimiento Browniano. Claramente,  $Z_t$  es continuo para  $t > 0$  y  $Z_0 = 0$ . Por la ley de los grandes números para el movimiento Browniano se sigue que:*

$$Z_t = \frac{W_{1/t}}{1/t} \longrightarrow 0 = Z_0,$$

*con probabilidad uno cuando  $t$  tiende a cero. Es decir,  $Z_t$  es continua en cero. Por otro lado, si  $0 < s < t$ , entonces se demostrará que el incremento  $Z_t - Z_s$  se distribuye como una normal con media cero y varianza  $t - s$ . En efecto:*

$$Z_t - Z_s = tW_{1/t} - sW_{1/s} = -s(W_{1/s} - W_{1/t}) - (t - s)W_{1/t},$$

*Lo anterior sigue una distribución normal con media  $\mathbb{E}[Z_t - Z_s] = 0$  y  $\text{Var}[Z_t - Z_s] = (-s)^2 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right) + \frac{(t-s)^2}{t} = t - s$ . Se verá ahora que dos incrementos*

consecutivos no están correlacionados entre sí. Si  $0 \leq s \leq t \leq u$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 u - s &= \text{Var}(Z_u - Z_s) = \text{Var}[(Z_u - Z_t) + (Z_t - Z_s)] \\
 &= \text{Var}(Z_u - Z_t) + \text{Var}(Z_t - Z_s) + 2\text{Cov}(Z_u - Z_t, Z_t - Z_s) \\
 &= u - t + t - s + 2\text{Cov}(Z_u - Z_t, Z_t - Z_s) \\
 &= u - s + 2\text{Cov}(Z_u - Z_t, Z_t - Z_s).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\text{Cov}(Z_u - Z_t, Z_t - Z_s) = 0$ . Además, incrementos que no se intersectan, no son correlacionados, en efecto, si  $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
 v - s &= \text{Var}(Z_v - Z_s) \\
 &= \text{Var}[(Z_v - Z_u) + (Z_u - Z_t) + (Z_t - Z_s)] \\
 &= \text{Var}(Z_v - Z_u) + \text{Var}(Z_u - Z_t) + \text{Var}(Z_t - Z_s) \\
 &\quad + 2\text{Cov}(Z_v - Z_u, Z_u - Z_t) + 2\text{Cov}(Z_u - Z_t, Z_t - Z_s) \\
 &\quad + 2\text{Cov}(Z_v - Z_u, Z_t - Z_s) \\
 &= v - u + u - t + t - s + 2\text{Cov}(Z_v - Z_u, Z_t - Z_s) \\
 &= v - s + 2\text{Cov}(Z_v - Z_u, Z_t - Z_s),
 \end{aligned}$$

lo que implica que  $\text{Cov}(Z_v - Z_u, Z_t - Z_s) = 0$ , es decir, todos los incrementos son mutuamente no correlacionados.

## 2.9. Propiedades de las trayectorias del movimiento Browniano

Antes de establecer las siguientes propiedades, es necesario recordar la definición de variación de una función. Sea  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  una partición del intervalo  $[a, b]$ , y defina  $\Delta t = \max\{t_{i+1} - t_i : i = 0, \dots, n-1\}$ . La variación de una función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es el número:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|.$$

Cuando este número es finito se dice que la función tiene variación finita en dicho intervalo. Análogamente, la variación cuadrática es:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|^2.$$

A continuación se demostrará que sobre un intervalo de tiempo acotado  $[a, b]$  casi todas las trayectorias del movimiento Browniano tienen variación no acotada, es decir,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| = \infty, \text{ c.s.},$$

lo cual es importante tener en cuenta dado que no se pueden usar las trayectorias brownianas como funciones integradoras en el sentido de Riemann-Stieltjes. Se calculará la variación cuadrática del movimiento Browniano sobre  $[a, b]$ .

**Proposición 38** *La variación cuadrática de una trayectoria del movimiento Browniano sobre el intervalo  $[a, b]$  es la longitud del intervalo, es decir:*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 = b - a, \text{ en el sentido de } L_p^2.$$

**Prueba.** Sea  $\{P_n\}$  una sucesión de particiones finitas del intervalo  $[a, b]$ ,  $\Delta t_i$  como en (2.1) y  $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \sum_i (\Delta W_i)^2 - (b - a) \right|^2 \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{i,j} (\Delta W_i)^2 (\Delta W_j)^2 \right) - 2(b - a) \mathbb{E} \left( \sum_i (\Delta W_i)^2 \right) + (b - a)^2 \\ &= \sum_i \mathbb{E} (\Delta W_i)^4 + \sum_{i \neq j} \mathbb{E} (\Delta W_i)^2 (\Delta W_j)^2 - 2(b - a) \sum_i (\Delta t_i) + (b - a)^2 \\ &= \sum_i 3(\Delta t_i)^2 + \sum_{i \neq j} \Delta t_i \Delta t_j - (b - a)^2 \\ &= \sum_i 2(\Delta t_i)^2 + \left( \sum_i \Delta t_i \right)^2 - (b - a)^2 \\ &= \sum_i 2(\Delta t_i)^2 \leq 2(b - a) \max_{0 \leq i < n} \Delta t_i \rightarrow 0. \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposición 39 Variación del movimiento Browniano.** *La variación de una trayectoria del movimiento Browniano sobre el intervalo  $[a, b]$  es infinita, casi seguramente, es decir:*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| = \infty, \text{ c.s.}$$

**Prueba.** Para cada  $n$  natural sea  $P_n$  la partición uniforme del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, es decir, cada incremento  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  tiene longitud  $(b - a)/n$ .

Entonces se tiene la estimación siguiente:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta W_i|^2 \leq \left( \max_{0 \leq i < n} |\Delta W_i| \right) \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta W_i|. \quad (2.5)$$

Sea  $\{P_{n_k}\}$  una subsucesión de particiones uniformes de  $\{P_n\}$  tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta W_i|^2 = b - a, \text{ c.s.}$$

Por otra parte, como las trayectorias del movimiento Browniano son continuas casi seguramente, entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \max_{0 \leq i < n_k} |\Delta W_i| \right) = 0, \text{ c.s.}$$

Así, haciendo uso de estos dos últimos resultados en la ecuación (2.5) se tiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta W_i| = \infty, \text{ c.s.,}$$

por lo que se puede concluir que el límite superior es infinito casi seguramente. ■

A continuación se visualizará que para cualquier tiempo  $t_0 \geq 0$  fijo pero arbitrario, con probabilidad uno, la trayectoria  $t \mapsto W_t$  no es diferenciable en  $t_0$ .

**Proposición 40** *Sea  $t_0 \geq 0$  fijo pero arbitrario. Con probabilidad uno, el movimiento Browniano  $W_t$  no es diferenciable en  $t_0$ .*

**Prueba.** Es fácil mostrar que  $W_{t+t_0} - W_{t_0}$  es también un movimiento Browniano, por lo que se demostrará la no diferenciable de  $W_t$  en  $t = 0$ . Se presenta que con probabilidad 1, para cada número natural  $n$  existe  $t$  en el intervalo  $[0, 1/n^2]$  tal que  $|\frac{1}{t}W_t| > n$ , lo cual implicará que  $W_t$  no es diferenciable en  $t = 0$ . Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina el evento  $A_n = \{|\frac{1}{t}W_t| > n, \text{ para algún } t \in [0, 1/n^2]\}$ , así, se ha construido una sucesión decreciente de eventos, es decir,  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ , tal que:

$$\begin{aligned} P(A_n) &\geq P\left(\left|\frac{1}{1/n^4}W_{1/n^4}\right| > n\right) \\ &= P\left(|W_{1/n^4}| > \frac{1}{n^3}\right) \\ &= P\left(|n^2W_{(1/n^4)(1)}| > \frac{1}{n}\right) \\ &= P\left(|W_1| > \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 1 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

porque  $\frac{1}{c}W_{c^2t}$  también es un movimiento Browniano para cualquier  $c > 0$ . Por lo tanto,  $P(A_1) \geq P(A_2) \geq \dots \geq 1$ , es decir,  $P(A_n) = 1$  para cualquier  $n \geq 1$ . Por consiguiente, para cada  $t_0 \geq 0$ , el conjunto de trayectorias  $t \mapsto W_t$  que no son diferenciables en  $t_0$  tiene probabilidad uno. ■

### Movimiento Browniano geométrico

Aun cuando el movimiento Browniano es una de las bases en la construcción de los modelos de riesgos financieros y económicos, éste no puede, por sí mismo, representar el comportamiento de todas las variables financieras que se modelan en finanzas. Los precios de los activos, por ejemplo, no son descritos apropiadamente por el movimiento Browniano estándar, ya que los precios no parten de cero. Sus incrementos podrían tener medias distintas de cero, o bien podrían tener varianzas que no necesariamente son proporcionales al tiempo. En general, los precios de los activos comienzan en valores distintos de cero, tienen incrementos con medias diferentes de cero, varianzas que no son proporcionales al tiempo y covarianzas diferentes de cero.

El movimiento Browniano geométrico se obtiene por una transformación exponencial del movimiento Browniano estándar. Es decir, si  $W_t$  es un movimiento Browniano estándar,  $\mu$  es constante (tendencia),  $\sigma$  es una constante positiva (volatilidad) y  $S_0$  es un precio inicial conocido, entonces el siguiente proceso es llamado un movimiento Browniano geométrico:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}, \quad (2.6)$$

dicho proceso es utilizado frecuentemente para describir el cambio porcentual (rendimiento) del precio de un activo. Si a la ecuación (2.6) se le aplica el logaritmo natural, se tiene que:

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t,$$

es decir, la distribución la distribución de  $\ln(S_t)$  es normal con:

$$\mathbb{E}[\ln(S_t)] = \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t,$$

asimismo:

$$\text{Var}[\ln(S_t)] = \sigma^2 t.$$

## 2.10. Motivación a la integral estocástica

Se considerará el movimiento Browniano estándar  $\{W_t\}_{t \geq 0}$ , definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , y una partición tal que  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$  del intervalo  $[0, t]$ , donde  $t_i = \frac{it}{n}$ , de tal manera que  $t_i - t_{i-1} = \frac{it}{n} - \frac{(i-1)t}{n} = \frac{1}{n}t$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Para una comprensión adecuada es necesario considerar la siguiente sucesión de variables aleatorias:

$$V_n = \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Se quiere encontrar  $V_t$  tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ (V_n - V_t)^2 \right] = 0. \quad (2.7)$$

Considérese a:

$$V_t = t = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \right],$$

en este caso, la ecuación (2.7) se transforma en el error cuadrático medio, es decir,  $\mathbb{E} \left[ (V_t - \mathbb{E}[V_t])^2 \right]$ . Además:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ (V_n - t)^2 \right] \quad (2.8) \\ = & \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^4 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\Delta W_{t_i})^2 (\Delta W_{t_j})^2 + t^2 - 2t \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 \right], \quad (2.9) \end{aligned}$$

donde  $\Delta W_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ , los cuales por ser independientes cumplen que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ (\Delta W_{t_i})^2 (\Delta W_{t_j})^2 \right] &= (t_i - t_{i-1}) (t_j - t_{j-1}), \\ \mathbb{E} \left[ (\Delta W_{t_i})^4 \right] &= 3 (t_i - t_{i-1})^2, \end{aligned}$$

por lo que la ecuación (2.8) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ (V_n - t)^2 \right] &= 3 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_{i-1}) (t_j - t_{j-1}) \\ &+ t^2 - 2t \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

pero como  $t_i - t_{i-1} = \frac{it}{n} - \frac{(i-1)t}{n} = \frac{1}{n}t$ , para toda  $i$ , entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 3 (t_i - t_{i-1})^2 &= n3 \left( \frac{t}{n} \right)^2 = \frac{3}{n}t^2, \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_{i-1}) (t_j - t_{j-1}) &= \binom{n}{2} \left( \frac{t}{n} \right)^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2n}, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ (V_n - V_t)^2 \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 - t \right]^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3t^2}{n} + t^2 - \frac{t^2}{n} + t^2 - 2t^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}t^2 = 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, es posible escribir este último límite como:

$$\int_0^t (dW_s)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 = t, \quad (2.10)$$

aquí la convergencia es en media cuadrática, es decir,  $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ . Haciendo un abuso de notación, la ecuación (2.10) se puede reescribir como  $(dW_t)^2 = dt$ , o bien,  $\int_0^t (dW_s)^2 = t$ .

## Capítulo 3

# Integral de Itô

### 3.1. Introducción

El cálculo estocástico se basa en el concepto de integral estocástica, es decir, la construcción de una integral en la que el término con respecto al que se integra es un proceso estocástico, por consecuencia es necesario plantear y resolver integrales estocásticas. Por lo tanto, es conveniente definir en cierto sentido integrales del siguiente tipo:

$$\int_0^t f(s, \omega) dW_s, \quad (3.1)$$

de tal manera que dicha integral exista y sea coherente.

El hecho de que el movimiento Browniano es de variación no acotada, lleva a que no se pueda interpretar dicha integral en el sentido usual de una integral de Riemann-Stieltjes.



Figura 3.1: Bernhard Riemann

Se utilizó [21] para el desarrollo del capítulo, ya que muestra en una forma concisa y clara el tema de la integral de Itô.



Figura 3.2: Thomas Joannes Stieltjes

### 3.2. Un poco de historia

Históricamente, el concepto de integral para el caso en que el integrador es un movimiento Browniano cuando el integrando es un conjunto de funciones aleatorias con determinadas propiedades fue desarrollado por Kiyoshi Itô en 1944, en un artículo titulado "*Stochastic Integral*" publicado en los "Proceedings de la Academia Imperial de Tokio", aunque como Shiryaev constató y el propio Itô reconoció, el primero en definir la integral estocástica fue Norbert Wiener en 1934 para integrandos no aleatorios suaves y de cuadrado integrable.



Figura 3.3: Kiyoshi Ito

En palabras de Mandelbrot, la manera de definir la integral estocástica es:

“...si [el integrador] estuviera reducido a un número de saltos, tal integral sería simplemente una suma de variables aleatorias. De otra manera, [la integral estocástica] se construye con la ayuda de sumas aleatorias auxiliares de la misma manera que una integral ordinaria se construye con la ayuda de sumas auxiliares”.

Por tanto una integral estocástica se define como el límite, en cierto sentido, de una suma de variables aleatorias. La integral estocástica una vez definida es una integral que básicamente conserva las propiedades de una integral ordinaria, de hecho es un operador lineal. Íntimamente relacionado con este concepto está el relacionado con la ecuación diferencial estocástica. Básicamente una ecuación diferencial estocástica es una generalización del concepto de ecuación diferencial ordinaria, es un modelo en el que la variación en tiempo continuo, o diferencial, del proceso solución o variable dependiente de la ecuación diferencial estocástica, se descompone en la parte de variación debida a la variación del tiempo, lo que correspondería a una ecuación diferencial ordinaria, y por otro lado a la parte debida a la variación en tiempo continuo de un movimiento Browniano, lo que le confiere el calificativo de estocástico a la ecuación diferencial.

### 3.3. Definición

Se quiere definir la integral estocástica:

$$\int_0^t X_s dW_s,$$

para ello es necesario recurrir a distintos pasos, primero se definirá para procesos simples y después, por aproximación, para procesos más generales.

Se considera el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Si  $F$  es una función de distribución diferenciable (con derivada continua) entonces, si  $X$  es una función medible, la siguiente integral puede ser calculada con la ayuda de la función de densidad:

$$\int_0^t X(s) dF = \int_0^t X_s f(s) ds,$$

caso contrario, esta integral puede ser calculada como una de Lebesgue-Stieltjes, por ejemplo, de ser  $X$  continua se tendría que:

$$\begin{aligned} & \int_0^t X(s) dF \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n X\left(\frac{(k-1)t}{n}\right) \left(F\left(\frac{kt}{n}\right) - F\left(\frac{(k-1)t}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Esto se puede generalizar al caso en el que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico con trayectorias  $t \mapsto X_t(\omega)$  medibles. Sea  $\{A_t\}_{t \geq 0}$  un proceso creciente ( $A_0(\omega) = 0$  para  $\omega \in \Omega$ , y los caminos  $t \mapsto A_t(\omega)$  son crecientes, continuos por la derecha y  $\mathbb{E}[A_t] < \infty$  para todo  $t \geq 0$ ), luego para cada  $\omega \in \Omega$  se puede calcular la siguiente integral como una de Lebesgue-Stieltjes:

$$I_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega) dA_s(\omega).$$

Se puede probar, bajo ciertas hipótesis sobre  $X_t$ , que  $I_t(\omega)$  es  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -medible. Luego  $I_t$  es un nuevo proceso estocástico. Este tipo de integral se puede generalizar para  $A_t$  con caminos de variación acotada en  $[0, T]$ .

Para definir la integral se podría intentar precizarla para cada  $\omega$  usando una función de densidad, pero  $W_t(\omega)$  resulta no diferenciable. Entonces sería posible probar la definición de Lebesgue-Stieltjes, pero tampoco funcionaría debido a que las trayectorias de  $W_t$  no son de variación acotada en el intervalo  $[0, T]$ , y por lo tanto no diferenciable en ningún punto.



Figura 3.4: Henri Lebesgue

### 3.4. Construcción de la integral de Itô

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad y  $\mathcal{F}_t$  una filtración asociada al movimiento Browniano  $W_t$ . Recordando la idea de que las  $\sigma$ -álgebras contienen información probabilística acerca de las variables aleatorias, se puede expresar el hecho de que el integrando  $X_t$  pueda depender del movimiento Browniano  $W_t$ , diciendo que  $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in I}$  sea un proceso estocástico.

**Definición 41** Un proceso estocástico  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  será llamado un proceso simple si existen  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ ,  $p \in \mathbb{N}$  y variables aleatorias  $\xi_i$   $\mathcal{F}_{t_i}$ -medibles,  $i = 1, \dots, p$  y  $\xi_0$  variable aleatoria  $\mathcal{F}_0$ -medible, todas acotadas de modo que  $X_t(\omega)$  se puede escribir como:

$$X_t(\omega) = X(t, \omega) = \xi_0(\omega) I_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^p \xi_i(\omega) I_{(t_{i-1}, t_i]}(t),$$

los caminos  $X(t, \cdot)$  del proceso simple  $X_t$  son funciones escalonadas continuas por la izquierda.

**Definición 42** Sea  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  un proceso simple. Ahora se da paso para definir la integral estocástica  $I_t(X)$  para  $t \in (t_k, t_{k+1}]$  como:

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dW_s = \sum_{1 \leq i \leq k} \xi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \xi_{k+1} (W_t - W_{t_k}),$$

o más general para  $t \in [0, T]$ :

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dW_s = \sum_{1 \leq i \leq p} \xi_i (W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}).$$

**Teorema 43** (Propiedades elementales de la integral estocástica). Sea  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  un proceso simple. Entonces se tiene que:

1.  $\{I_t(X)\}_{t \in [0, T]}$  es una martingala continua con respecto a  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ .
2.  $\mathbb{E} \left( \left( \int_0^t X_s dW_s \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left( \int_0^t X_s^2 dW_s \right)$  para  $t \in [0, T]$ .

**Prueba.** (1) La continuidad se asume a partir de la continuidad de  $W_t$ . Entonces para probar que  $\mathbb{E}(I_t(X) | \mathcal{F}_s) = I_s(X)$  para  $t > s$ , considerese a  $t \in (t_{l-1}, t_l]$  (si fuera  $s = 0$  se procede igual) y adicionalmente la hipótesis sin pérdida de generalidad de que  $k > l$ , así:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(I_t(X) | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E} \left( I_s(X) + \Phi_l (W_{t_l} - W_s) + \sum_{i=l+1}^{k-1} \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_k (W_t - W_{t_{k-1}}) | \mathcal{F}_s \right) \\ &= I_s(X) + \mathbb{E}(\Phi_l (W_{t_l} - W_s) | \mathcal{F}_s) + \sum_{i=l+1}^{k-1} \mathbb{E}(\Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) | \mathcal{F}_s) \\ & \quad + \mathbb{E}(\Phi_k (W_t - W_{t_{k-1}}) | \mathcal{F}_s), \end{aligned}$$

ahora se observa que:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(\Phi_l(W_{t_i} - W_s) \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \sum_{i=l+1}^{k-1} \mathbb{E}(\Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(\Phi_k(W_t - W_{t_{k-1}}) \mid \mathcal{F}_s) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

en efecto, se realizará el cálculo en el caso de  $B$  solamente, los otros dos casos restantes son similares. Sea  $i \geq l + 1$ , luego para  $t_{i-1} \geq s$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(\Phi(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(\Phi_i E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_s) = 0.
\end{aligned}$$

(2) Sin pérdida de generalidad, se toma  $t = t_k$ , luego:

$$\mathbb{E}(I_t^2(X)) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right),$$

ahora, si  $j \neq i$ , se dice  $j > i$ , entonces  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  es independiente de  $\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$ . Luego:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})) \\
&= \mathbb{E}(\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})) \mathbb{E}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = 0,
\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(I_t^2(X)) &= \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(\Phi_i^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2) \\
&= \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(\Phi_i^2) \mathbb{E}((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2) \\
&= \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(\Phi_i^2) (t_i - t_{i-1}) = \mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^2 ds\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

**Proposición 44** Si  $W_t, \widetilde{W}_t$  son dos movimientos Brownianos independientes definidos en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y  $X_t, \widetilde{X}_t$  dos procesos simples, entonces

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s dW_s \int_0^t \widetilde{X}_s d\widetilde{W}_s\right) = 0 \text{ para } t \in [0, T].$$

**Prueba.** Tenemos que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \int_0^t X_s dW_s \int_0^t \tilde{X}_s d\tilde{W}_s \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^k \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \sum_{j=1}^k \tilde{\Phi}_j (\tilde{W}_{t_j} - \tilde{W}_{t_{j-1}}) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^k \mathbb{E} \left( \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \tilde{\Phi}_j (\tilde{W}_{t_j} - \tilde{W}_{t_{j-1}}) \right), \end{aligned}$$

ahora se da paso a analizar los sumandos, si  $i \neq j$ , se dice  $j > i$ , entonces  $\tilde{W}_{t_j} - \tilde{W}_{t_{j-1}}$  es independiente de  $\Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \tilde{\Phi}_j$ . Luego:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \tilde{\Phi}_j (\tilde{W}_{t_j} - \tilde{W}_{t_{j-1}}) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \tilde{\Phi}_j \right) \mathbb{E} \left( \tilde{W}_{t_j} - \tilde{W}_{t_{j-1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Si en cambio,  $i = j$ , como  $\Phi_i \tilde{\Phi}_i$  es independiente de  $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) (\tilde{W}_{t_j} - \tilde{W}_{t_{j-1}})$ , se concluye que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \tilde{\Phi}_i (\tilde{W}_{t_j} - \tilde{W}_{t_{j-1}}) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \Phi_i \tilde{\Phi}_i \right) \mathbb{E} \left( (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) (\tilde{W}_{t_j} - \tilde{W}_{t_{j-1}}) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \Phi_i \tilde{\Phi}_i \right) \mathbb{E} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \mathbb{E} (\tilde{W}_{t_j} - \tilde{W}_{t_{j-1}}) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathbb{E} \left( \int_0^t X_s dW_s \int_0^t \tilde{X}_s d\tilde{W}_s \right) = 0$  para  $t \in [0, T]$ . ■

**Proposición 45** (1) *Se pueden definir integrales con límites generales:*

$$\int_t^T X_s dW_s = \int_0^T X_s dW_s - \int_0^t X_s dW_s,$$

para  $t \leq T$ .

(2) *Linealidad de la integral estocástica. Sean  $X$  e  $Y$  procesos simples y  $a, b \in \mathbb{R}$ , luego:*

$$I_t (aX + bY) = aI_t (X) + bI_t (Y).$$

**Prueba.** Para una demostración de este resultado puede consultarse [11], o bien [25]. ■

Ahora se analizan para qué tipos de procesos  $\{(X_t, F_t)\}_{t \in I}$  se definirá la integral estocástica. Dado que se están usando procesos simples  $G_t$  para las aproximaciones,

éstas tendrán como valor límite al integrando  $X_t$ . Ahora, si se observan a los procesos  $G_t$  como funciones:

$$\begin{aligned} [0, \infty) \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (s, \omega) &\longmapsto X_s(\omega), \end{aligned}$$

entonces resultan medibles en  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Luego, de aquí se concluye que también  $X_t$  debe ser medible en  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Definición 46** Sea  $\{(X_t, F_t)\}_{t \in [0, \infty)}$  un proceso estocástico. Este proceso es medible si la siguiente aplicación resulta medible en  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\begin{aligned} [0, \infty) \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (s, \omega) &\longmapsto X_s(\omega). \end{aligned}$$

**Definición 47** Sea  $\{(X_t, F_t)\}_{t \in [0, \infty)}$  un proceso estocástico. Este proceso es progresivamente medible si para todo  $t \geq 0$  en la siguiente aplicación es medible en  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\begin{aligned} [0, t] \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (s, \omega) &\longmapsto X_s(\omega). \end{aligned}$$

**Teorema 48** Si los caminos del proceso estocástico  $\{(X_t, G_t)\}_{t \in [0, \infty)}$  son continuos por la derecha (o por la izquierda), entonces el proceso es progresivamente medible.

**Prueba.** Para una demostración de este resultado puede consultarse [11], o bien [25]. ■

**Definición 49** Se denotará por  $L^2[0, T]$  al espacio de todas las funciones real-valuadas, medibles tal que:

$$\begin{aligned} L^2[0, T] &= L^2([0, T], \Omega, \mathcal{F}) \\ &= \left\{ \{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in [0, T]} \mid \mathbb{E} \left( \int_0^T X_t^2 dt \right) < \infty \right\}, \end{aligned}$$

donde se considera a la siguiente seminorma:

$$\|X\|_T^2 = \mathbb{E} \left( \int_0^T X_t^2 dt \right).$$

La razón por la que es elegida esta seminorma es por la siguiente propiedad de los procesos simples:

$$\|I(X)\|_L^2 = \mathbb{E} \left( \left( \int_0^T X_s dW_s \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left( \int_0^T X_s ds \right) = \|X\|^2,$$

para la cual la aplicación:

$$X \mapsto I(X),$$

esta restringida a los procesos simples, para los únicos que ya se han definido, por lo que resulta ser una isometría llamada Isometría de Itô. Esta isometría es la que va a permitir definir la integral estocástica en todo el espacio  $L^2[0, T]$  recién definido. Para ello primero se dará paso para ver que todo proceso  $X \in L^2[0, T]$  puede ser aproximado por procesos simples, para luego definir la integral estocástica de  $X$  como el valor límite de las integrales simples, al cual existirá y será único por la completitud de  $L^2(\Omega)$  y la isometría mencionada. Similarmente se define  $L^p[0, T]$  para  $p \geq 1$ .

**Teorema 50** Dado  $X \in L^p[0, T]$  con  $p \geq 1$ , existe una sucesión  $X^m$  de procesos simples con

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \int_0^T (X_s - X_s^m)^p ds \right) = 0.$$

**Prueba.** Sea  $X \in L^p[0, T]$  continuo y acotado. Considere a:

$$X_t^m(\omega) = X_0(\omega) 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^m X_{(i-1)T/m} 1_{((i-1)T/m, iT/m]}(t),$$

entonces se mostrará que  $X_t^m(\omega) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} X(\omega)$  para todo  $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ , con lo cual, la convergencia deseada queda como consecuencia del teorema de convergencia dominada. En efecto, si  $X \in L^p[0, T]$  es sólo acotado y se define a  $G_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega) ds$ , la cual es  $\mathcal{F}_t$  medible, para  $m \in \mathbb{N}$  con  $m$  suficientemente grande tal que  $t - 1/m \geq 0$ , el siguiente proceso es continuo y acotado:

$$\tilde{X}_t^m = \frac{G_t(\omega) - G_{t-1/m}(\omega)}{1/m},$$

luego por el teorema anterior resulta progresivamente medible y así pertenece a  $L^p$ . Por el teorema de diferenciación de Lebesgue se tiene que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{X}_t^m = X_t(\omega),$$

para todo  $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ , salvo un conjunto de medida cero. Luego, por el teorema de convergencia acotada,  $\mathbb{E} \left( \int_0^T (X_t - X_t^m)^p dt \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ . Con lo que ahora se puede elegir una subsucesión  $X^n = X^{m_n}$  de procesos simples con  $\mathbb{E} \left( \int_0^T |X_t^n - X_t|^p dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Sea ahora  $X \in L^p[0, T]$  cualquiera. Ahora se define lo siguiente:

$$\tilde{X}_t^m(\omega) = X_t(\omega) 1_{(|X_t| \leq m)}(\omega),$$

estos procesos están acotados y como  $|\tilde{X}_t^m| \leq |X_t|$ , por el teorema de convergencia dominada:

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T |\tilde{X}_t^m - X_t|^p dt \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Ahora, se puede elegir una subsucesión  $X^n = X^{m_n}$  de procesos simples tal que:

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T |X_t^n - X_t|^p dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

y se aplica lo anterior. ■

**Definición 51** Sea  $X \in L^2[0, T]$  y  $\{X^m\}$  una sucesión de procesos simples tales que  $\|X - X^m\| \rightarrow 0$ . Luego, se define la **integral estocástica de Itô** como:

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dW_s = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t X_s^m dW_s,$$

para  $0 \leq t \leq T$  y donde el límite es tomado en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Proposición 52** La integral estocástica está bien definida.

**Prueba.** Por la isometría de Itô:

$$\|I_t(X^m) - I_t(X^n)\|_L = \|I_t(X^m - X^n)\| = \|X^m - X^n\|,$$

para  $0 \leq t \leq T$ , con lo cual  $I_t(X^m)$  es una sucesión de Cauchy en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y por lo tanto, existe su límite  $I_t(X)$ . Ahora se verá que el límite  $I_t(X)$  es independiente de la sucesión que lo aproxima. En efecto, si  $X^m, Y^m \in L^2$  son procesos simples tales que  $\|X - X^m\| \rightarrow 0$  y  $\|Y - Y^m\| \rightarrow 0$ , e  $I_t(X), I_t'(X)$  son los límites en  $L^2$  de  $I_t(X^m)$  e  $I_t'(Y^m)$  respectivamente, entonces:

$$\begin{aligned} & \|I_t(X) - I_t'(X)\|_L \\ & \leq \|I_t(X) - I_t(X^m)\|_L + \|I_t'(X) - I_t(Y^m)\|_L + \|I_t(X^m) - I_t(Y^m)\|_L \\ & = A + B + \|X^m - Y^m\| \\ & \leq A + B + \|X^m - X\| + \|Y^m - X\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

donde  $A = \|I_t(X) - I_t(X^m)\|_L$ ,  $B = \|I_t'(X) - I_t(Y^m)\|_L$  y con lo cual  $I_t(X) = I_t'(X)$  a.s. ■

**Ejemplo 53** Se encontrará el límite de la sucesión  $V_n = \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$  en  $L^2$ , para  $n = 1, 2, \dots$ . En este caso se tiene que  $f(t_{i-1}) = W_{t_{i-1}}$ , por lo que  $V_n$  es

claramente una variable aleatoria. Así:

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ (W_{t_{i-1}} + W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - W_{t_{i-1}}^2 - (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2 - (\Delta W_{t_i})^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ W_t^2 - \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 \right], \end{aligned}$$

por lo cual,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} \left[ W_t^2 - \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 \right] - \frac{1}{2} (W_t^2 - t) \right] = 0,$$

es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \frac{1}{2} (W_t^2 - t),$$

es decir,

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} (W_t^2 - t).$$

### Propiedades de la integral estocástica

Las propiedades básicas de la integral de Itô son resumidas en el siguiente teorema, sólo se mencionan algunas de ellas aquí.

**Teorema 54** Sean  $X$  y  $Y$  procesos, entonces:

a) La integral  $I_t$  es lineal, es decir, para  $c, b$  constantes y para cualesquiera procesos  $X$  y  $Y$ , se cumple que:

$$\int_0^\infty (cX_s + bY_s) dW_s = c \int_0^\infty X_s dW_s + b \int_0^\infty Y_s dW_s, \text{ c.s.}$$

b) Cumple con la propiedad de martingala, es decir:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t X_s dW_s \mid F_r \right] = \int_0^r X_s dW_s, \text{ para } r \leq t.$$

c) Tiene la propiedad de isometría:

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^\infty X_t dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty X_t^2 dW_t \right].$$

d) Tiene esperanza cero, es decir, para cualquier proceso  $X_s$ :

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t X_s dW_s \right) = 0, \text{ c.s.}$$

e)  $\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^\infty X_t dW_t \right) \left( \int_0^\infty Y_t dW_t \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty X_t Y_t dW_t \right]$

**Prueba.** Se prueba usando las aproximaciones por procesos simples y la propiedad de linealidad, o bien, puede consultarse [6], [11], [13], [14] y [15], por ejemplo. ■

### 3.5. La fórmula de Itô

Casi siempre una integral de Riemann no se calcula a partir de la definición, en lugar de ello existen fórmulas bien conocidas para calcular integrales. La misma situación se presenta para integrales estocásticas, en casos muy raros se calculan éstas a través de su definición. La fórmula de Itô es la herramienta fundamental para este tipo de integrales. Aun cuando una ecuación diferencial estocástica es la notación simplificada de una integral estocástica, las reglas que se establecen con la notación diferencial y los resultados que a partir de ellas se desprenden son consistentes con las propiedades de la integral estocástica. Asombrosamente, la diferencial estocástica permite, en muchos casos, obtener resultados de manera más rápida y sencilla sobre la integral estocástica. Se enuncia a continuación una versión simple de la fórmula de Itô. En lo sucesivo se hará referencia a las siguientes espacios de funciones. Una función real de variable real es de clase  $C^1$  cuando es diferenciable y su derivada es continua. Análogamente, una función es de clase  $C^2$ , si es dos veces diferenciable y su segunda derivada es una función continua.

**Teorema 55 (Fórmula de Itô I)** Sea  $f(x)$  una función de clase  $C^2$ . Entonces:

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds.$$

**Prueba.** Para ver una demostración de este teorema se puede consultar [11], [13], [14], [21], [25], o bien, [29]. ■

Una forma de obtener este resultado es usando el teorema de Taylor. Para una función  $f(x)$  suficientemente suave, se tiene que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x),$$

donde:

$$R(x) = \int_{x_0}^x f''(t)(x-t) dt = \int_0^1 (1-\theta) f''(x_0 + \theta(x-x_0))(x-x_0)^2 d\theta,$$

por lo tanto, si  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  es una partición de  $[0, t]$  entonces:

$$\begin{aligned} & f(W_t) - f(W_0) \\ &= \sum_{k=1}^n [f(W_{t_k}) - f(W_{t_{k-1}})] \\ &= \sum_{k=1}^n f'(W_{t_{k-1}}) \Delta W_t + \int_0^1 (1-\theta) \sum_{k=1}^n f''(W_{t_{k-1}} + \theta \Delta W_t) (\Delta W_t)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Al tomar el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  las sumas convergen casi seguramente y entonces se obtiene la igualdad:

$$\begin{aligned} & f(W_t) - f(W_0) \\ &= \int_0^t f'(W_s) dW_s + \int_0^1 (1-\theta) \left( \int_0^t f''(W_s) ds \right) d\theta \\ &= \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds. \end{aligned}$$

Esta última ecuación es una versión estocástica de la regla de la cadena del cálculo diferencial usual, y es común escribirla en su forma diferencial del siguiente modo:

$$df(W_t) = f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt.$$

**Ejemplo 56** Sea  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ . Entonces por la fórmula de Itô tenemos que

$$\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}W_0^2 = \int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t 1 ds,$$

es decir:

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

**Definición 57** Sean  $b(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  dos funciones de  $[0, T] \times \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . Una ecuación estocástica es una ecuación de la forma:

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad (3.2)$$

definida para valores de  $t$  en el intervalo  $[0, T]$ , y con condición inicial la variable aleatoria  $X_0$  que se supone  $\mathcal{F}_0$ -medible e independiente del movimiento Browniano. La ecuación (3.2) se interpreta como la ecuación integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad (3.3)$$

en donde la primera integral es en el sentido de Riemann, mientras que la segunda es una integral estocástica. Al proceso  $X_t$  se le llama proceso de Itô.

En la ecuación (3.3),  $b(t, x)$ ,  $\sigma(t, x)$  y  $X_0$  son conocidos mientras la incógnita es el proceso  $X_t$ . La función  $b(t, x)$  es llamada coeficiente de tendencia o deriva (drift en inglés) mientras que  $\sigma(t, x)$  es el coeficiente de difusión. Bajo este contexto, para la solución de este sistema se deben pedir condiciones en los coeficientes, lo cual conduce a ver el siguiente:

**Teorema 58 (existencia y unicidad)** Si los coeficientes  $b(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  de la ecuación (3.2) satisfacen la condición de Lipschitz en la variable  $x$  :

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K |x - y|^2,$$

y la condición de crecimiento en  $x$  :

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K (1 + |x|^2),$$

para alguna constante  $K > 0$ , entonces existe un proceso estocástico  $\{X_t\}$  solución de la (3.2) que es adaptado a la filtración, tiene trayectorias continuas, es uniformemente acotado en  $L^2(P)$  y además es único en el sentido de indistinguibilidad. En tal caso a tal solución se le llama solución fuerte de la ecuación estocástica.

**Prueba.** La demostración es semejante al caso determinista, y hace uso del método de iteraciones de Picard. Mediante este método se define la sucesión de procesos:

$$\begin{aligned} X_t^{(0)} &= X_0, \\ X_t^{(n+1)} &= X_0 + \int_0^t b(s, X_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dW_s. \end{aligned}$$

Es necesario verificar que los integrandos son efectivamente susceptibles de ser integrados respecto de la diferencial respectiva. Para comprobar que tal sucesión de procesos es convergente se demuestra que, con probabilidad uno, esta sucesión constituye una sucesión de Cauchy en el espacio de funciones continuas  $C[0, T]$  respecto de la norma uniforme  $\|X\| = \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|$ . Dado lo anterior, existe entonces un proceso continuo  $X$ , tal que con probabilidad uno,  $X_t^{(n)}$  converge a  $X_t$  de manera uniforme en el intervalo  $[0, T]$ . Adicionalmente puede demostrarse que el proceso límite es  $L^2$ -acotado en  $[0, T]$  y que la convergencia  $X_t^{(n)} \rightarrow X_t$  también es válida en  $L^2(P)$ . También debe demostrarse que el proceso límite es efectivamente solución de la ecuación estocástica. Para ello se toma el límite en la ecuación que define las iteraciones, y se verifica la convergencia uniforme en  $[0, T]$  con probabilidad uno, término a término. ■

Observe que el teorema anterior no establece la forma de encontrar la solución a una ecuación estocástica dada, sino que asegura únicamente la existencia de dicha solución. La siguiente versión de la fórmula de Itô es un resultado bastante útil para resolver algunas ecuaciones estocásticas y generaliza la versión anteriormente enunciada.

**Teorema 59 (Fórmula de Itô II)** Si  $\{X_t\}$  es un proceso de Itô dado por (3.2) y  $f(t, x)$  es una función de clase  $C^1$  en  $t$  y de clase  $C^2$  en  $x$ , entonces el proceso  $Y_t = f(t, X_t)$  es también un proceso de Itô y satisface la ecuación estocástica:

$$dY_t = f_t(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) (dX_t)^2. \quad (3.4)$$

Observe que como las derivadas involucradas son funciones continuas, las integrales estocásticas resultantes están bien definidas.

**Prueba.** Para ver una demostración de este teorema se puede consultar [11], [13], [14], [21], [25], o bien, [29]. ■

Los subíndices indican derivada y (3.2) se substituye en (3.4) usando la siguiente tabla de multiplicación de McKean o también llamadas reglas empíricas de diferenciación estocástica:

×	dt	dW <sub>t</sub>
dt	0	0
dW <sub>t</sub>	0	dt

Esto se debe a que, por ejemplo, en el cálculo de variables reales, si  $t$  es una variable independiente, se tiene que el cuadrado de una cantidad infinitesimal,  $(dt)^2$ , es una cantidad despreciable y se escribe:

$$(dt)^2 = 0,$$

en otras palabras, si algo es pequeño, entonces su cuadrado es todavía más pequeño. De hecho,  $(dt)^\alpha = 0$  si  $\alpha > 1$ . La regla central del cálculo estocástico, que hace la distinción con el cálculo de variables reales, es que el cuadrado de una cantidad infinitesimal normal es significativo. Específicamente, se tiene que si  $W_t$  es un movimiento Browniano estandarizado, entonces:

$$(dW_t)^2 = dt, \quad (3.5)$$

y formalmente el cálculo estocástico produce:

$$\int_0^t (dW_s)^2 = \int_0^t ds = t, \quad (3.6)$$

lo cual se denota en forma más simple como (3.5). Asimismo, obsérvese que:

$$(dt)(dW_t) = (dt)(dt)^{1/2} = (dt)^{3/2},$$

la cual es de nuevo una cantidad despreciable, es decir:

$$(dt)(dW_t) = 0.$$

**Ejemplo 60** Considérese el proceso  $X_t = W_t$  y la función  $f(t, x) = tx$ , entonces:

$$d(f(t, W_t)) = f_t(t, W_t) dt + f_x(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t) (dW_t)^2,$$

es decir:

$$d(tW_t) = W_t dt + t dW_t,$$

en otras palabras, esta última ecuación es la forma diferencial de

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds.$$

**Ejemplo 61** El segundo ejemplo que se desarrolla tiene como propósito mostrar que las reglas del cálculo diferencial de variables reales no se preservan en el cálculo estocástico, debido esencialmente a que  $(dW_t)^2 = dt$ , además se presenta al movimiento Browniano geométrico como solución de una ecuación diferencial estocástica. El movimiento Browniano geométrico es el proceso solución de la ecuación estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad (3.7)$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ . Si  $y = \ln S_t$ , entonces  $\frac{\partial y}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2}$  y  $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ . El comportamiento del movimiento Browniano geométrico se puede observar en la Figura 3.5. De la aplicación del lema de Itô en su forma diferencial (3.4), se tiene:

$$d \ln S_t = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \quad (3.8)$$

Observese que:

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \\ &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt, \end{aligned} \quad (3.9)$$

si  $x$  fuese una variable real,  $d \ln x = dx/x$ , sin embargo, si  $S_t$  sigue un movimiento Browniano geométrico, esta regla no se cumple, ya que se tiene un término adicional, a saber,  $\frac{1}{2} \sigma^2 dt$ , como lo muestra la expresión (3.9). La correspondiente integral estocástica de la representación (3.8) está dada por:

$$\begin{aligned} \ln S_t &= \ln S_0 + \mu \int_0^t du - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t (dW_u)^2 + \sigma \int_0^t dW_u \\ &= \ln S_0 + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t, \end{aligned}$$

es decir, la solución a la ecuación (3.7) es:

$$S_t = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right].$$

En la Figura 3.5, se presentan cuatro gráficas de la simulación del movimiento Browniano geométrico para distintos parámetros:

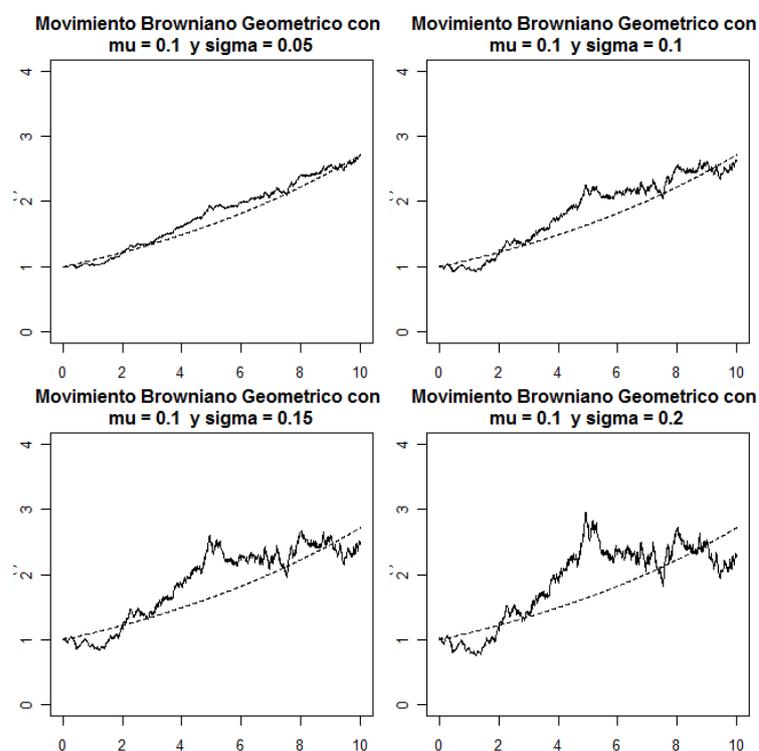


Figura 3.5: Movimiento Browniano Geométrico

**Ejemplo 62** Se demostrará que el proceso  $X_t = \frac{W_t}{1+t}$  es la solución de la ecuación diferencial estocástica  $dX_t = -\frac{X_t}{1+t}dt + \frac{1}{1+t}dW_t$ , con condición inicial  $X_0 = 0$ . En efecto, sea  $f(t, x) = \frac{x}{1+t}$ . El proceso  $X_t = f(t, W_t)$  cumple la condición inicial y por la fórmula de Itô satisface la ecuación:

$$\begin{aligned} dX_t &= f_t(t, W_t) dt + f_x(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t) dt \\ &= -\frac{W_t}{(1+t)^2} dt + \frac{1}{1+t} dW_t \\ &= -\frac{X_t}{1+t} dt + \frac{1}{1+t} dW_t. \end{aligned}$$

**Proposición 63** Para el movimiento Browniano geométrico se cumple lo siguiente:

1.  $\mathbb{E}(S_t) = S_0 e^{\mu t}$ .
2.  $\text{Var}(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$
3.  $\text{Cov}(S_t, S_r) = S_0^2 e^{\mu(r+t)} (e^{\sigma^2 r} - 1)$ , para  $0 \leq r \leq t$ .

**Prueba.** Se usará el hecho de que la función generadora de momentos de la distribución  $N(\mu, \sigma^2)$  es  $M(s) = \exp(\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2)$ . Para la esperanza se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_t) &= \mathbb{E}\left(S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right]\right) \\ &= S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] \mathbb{E}(\exp(\sigma W_t)) \\ &= S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] \exp\left[\frac{1}{2}t\sigma^2\right] \\ &= S_0 e^{\mu t}.\end{aligned}$$

Ahora para la varianza:

$$\begin{aligned}\text{Var}(S_t) &= \text{Var}\left(S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right]\right) \\ &= S_0^2 \exp\left[2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] \text{Var}(\exp(\sigma W_t)) \\ &= S_0^2 \exp\left[2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] [\mathbb{E}(\exp(2\sigma W_t)) - \mathbb{E}^2(\exp(\sigma W_t))] \\ &= S_0^2 \exp\left[2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] \left[\exp\left(\frac{1}{2}t(2\sigma)^2\right) - \exp\left(2\left(\frac{1}{2}t\sigma^2\right)\right)\right] \\ &= S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).\end{aligned}$$

Finalmente, para la covarianza primero se calculará  $\mathbb{E}(S_t S_r)$ . Es claro que  $W_t + W_r = 2W_r + (W_t - W_r)$ , siendo estos sumandos independientes, entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_t S_r) &= \mathbb{E}\left(S_0^2 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t+r) + \sigma(W_t + W_r)\right]\right) \\ &= S_0^2 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t+r)\right] \mathbb{E}(\exp[\sigma(W_t + W_r)]) \\ &= S_0^2 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t+r)\right] \mathbb{E}(e^{2\sigma W_r}) \mathbb{E}(e^{\sigma(W_t - W_r)}) \\ &= S_0^2 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t+r)\right] e^{2r\sigma^2} e^{\frac{1}{2}(t-r)\sigma^2} \\ &= S_0^2 \exp[\mu(t+r) + r\sigma^2].\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(S_t, S_r) &= \mathbb{E}(S_t S_r) - \mathbb{E}(S_t) \mathbb{E}(S_r) \\ &= S_0^2 e^{\mu(t+r) + r\sigma^2} - S_0^2 e^{\mu(t+r)} \\ &= S_0^2 e^{\mu(t+r)} (e^{r\sigma^2} - 1). \blacksquare\end{aligned}$$

A continuación se presenta la definición del proceso de Ornstein-Uhlenbeck y se obtiene su solución con base en el lema de Itô.

Este modelo fue propuesto por Ornstein y Uhlenbeck para modelar la velocidad del movimiento difuso de una partícula en intervalos de tiempo pequeños.

**Definición 64** Sean  $\alpha$  y  $\sigma$  dos constantes positivas. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck es aquel que se refiere a  $X_t$  solución de la ecuación estocástica:

$$dS_t = -\alpha S_t dt + \sigma dW_t. \quad (3.10)$$

La variable  $S_t$  se interpreta como la velocidad de la partícula al tiempo  $t$ . La parte determinista  $-\alpha S_t$  corresponde a la fuerza de fricción, y el sumando  $\sigma dW_t$  es un ruido aleatorio. Se encontrará la solución de esta ecuación.

Se considera una solución de la forma:

$$S_t = a(t) \left[ S_0 + \int_0^t b(s) dW_s \right], \quad (3.11)$$

en donde  $a(t)$  y  $b(t)$  son funciones diferenciables. Derivando de la expresión (3.11) y usando la fórmula de Itô (3.7) se obtiene:

$$\begin{aligned} dS_t &= a'(t) \left[ S_0 + \int_0^t b(s) dW_s \right] dt + a(t) b(t) dW_t \\ &= \frac{a'(t)}{a(t)} S_t dt + a(t) b(t) dW_t, \end{aligned}$$

lo cual implica que las funciones  $a(t)$  y  $b(t)$  deben cumplir las ecuaciones  $\frac{a'(t)}{a(t)} = -\alpha$ , y  $a(t) b(t) = \sigma$ . Suponiendo  $a(0) = 1$  se obtiene  $a(t) = \exp(-\alpha t)$ , y  $b(t) = \sigma \exp(\alpha t)$ , con lo que substituyendo en la fórmula (3.11), se obtiene que:

$$S_t = S_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s. \quad (3.12)$$

En la Figura 3.6, se presentan cuatro gráficas de la simulación del proceso de Ornstein-Uhlenbeck para distintos parámetros, en ella se observa que se trata de un proceso estocástico que, a grandes rasgos, describe la velocidad de una partícula bajo la influencia de la fricción. El proceso es estacionario, Gaussiano y Markoviano, y es el único proceso no trivial que satisface estas tres condiciones. Con el tiempo, el proceso tiende a desviarse hacia su media a largo plazo, es decir es un proceso con reversión a su media.

El proceso puede ser considerado como una modificación de una caminata aleatoria en tiempo continuo, en la que las propiedades del proceso han sido cambiadas de modo que hay una tendencia de moverse hacia una posición central, con una mayor atracción cuando el proceso está más lejos del centro.

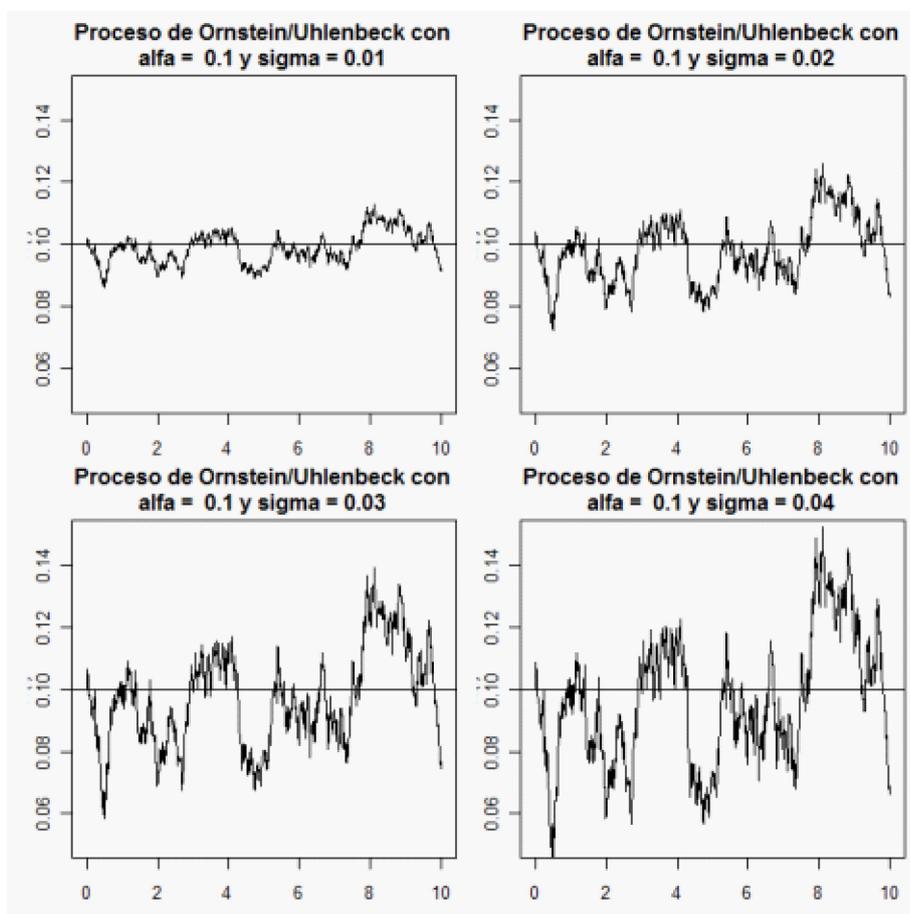


Figura 3.6: Proceso de Ornstein - Uhlenbeck

**Proposición 65** Para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck se cumple lo siguiente:

1.  $\mathbb{E}(S_t) = S_0 e^{-\alpha t}$ .
2.  $\text{Var}(S_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t})$ .
3.  $\text{Cov}(S_t, S_r) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha \min\{t,r\}})$ .

**Prueba.** Tomando esperanza en la ecuación (3.12) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(S_t) &= \mathbb{E}\left(S_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\right) \\
 &= S_0 e^{-\alpha t} + \mathbb{E}\left(\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\right) \\
 &= S_0 e^{-\alpha t},
 \end{aligned}$$

la última igualdad se da del hecho que la integral estocástica es una martingala que inicia en cero. Para el cálculo de la varianza de  $S_t$  se hará uso de la isometría de Itô.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(S_t) &= \sigma^2 \text{Var} \left( \int_0^t e^{-\alpha(t-r)} dW_r \right) \\
 &= \sigma^2 \mathbb{E} \left( \int_0^t e^{-\alpha(t-r)} dW_r \right)^2 \\
 &= \sigma^2 \left( \int_0^t e^{-2\alpha(t-r)} dr \right) \\
 &= \sigma^2 e^{-2\alpha t} \left[ \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha r} \right]_0^t \\
 &= \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}).
 \end{aligned}$$

Para la covarianza primero se considera que  $0 \leq r \leq t$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(S_t, S_r) &= \mathbb{E}(S_t S_r) - \mathbb{E}(S_t) \mathbb{E}(S_r) \\
 &= \mathbb{E} \left[ \left( S_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right) \left( S_0 e^{-\alpha r} + \sigma \int_0^r e^{-\alpha(r-u)} dW_u \right) \right] \\
 &\quad - S_0^2 e^{-\alpha(t+r)} \\
 &= \sigma^2 \mathbb{E} \left( \int_0^t e^{-\alpha(t-r)} dW_r \int_0^r e^{-\alpha(r-u)} dW_u \right),
 \end{aligned}$$

la primera integral puede descomponerse en la suma de dos integrales, una sobre el intervalo  $[0, r]$  y otra sobre  $(r, t]$ . Dada la propiedad de incrementos independientes del movimiento Browniano, el segundo sumando desaparece. De modo que, por la isometría de Itô, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(S_t, S_r) &= \sigma^2 \mathbb{E} \left( \int_0^r e^{-\alpha(r-u)} dW_u \right)^2 \\
 &= \sigma^2 \int_0^r e^{-\alpha(r-u)} du \\
 &= \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha r}),
 \end{aligned}$$

el otro caso es completamente análogo, obteniendo finalmente como resultado que la  $\text{Cov}(S_t, S_r) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha \min\{t, r\}})$ . ■

Ahora se presenta el puente Browniano sobre el intervalo  $[0, 1]$ , donde en los extremos de este intervalo el proceso se hace cero.

**Definición 66** *El puente Browniano, en el intervalo  $[0, 1]$  es aquel proceso  $\{S_t\}$  que es solución de la ecuación estocástica:*

$$dS_t = -\frac{S_t}{1-t} dt + dW_t, \quad (3.13)$$

donde  $t \in [0, 1)$  y  $S_0 = 0$ .

En la Figura 3.7, se presentan cuatro gráficas de la simulación de un puente Browniano para distintos parámetros:

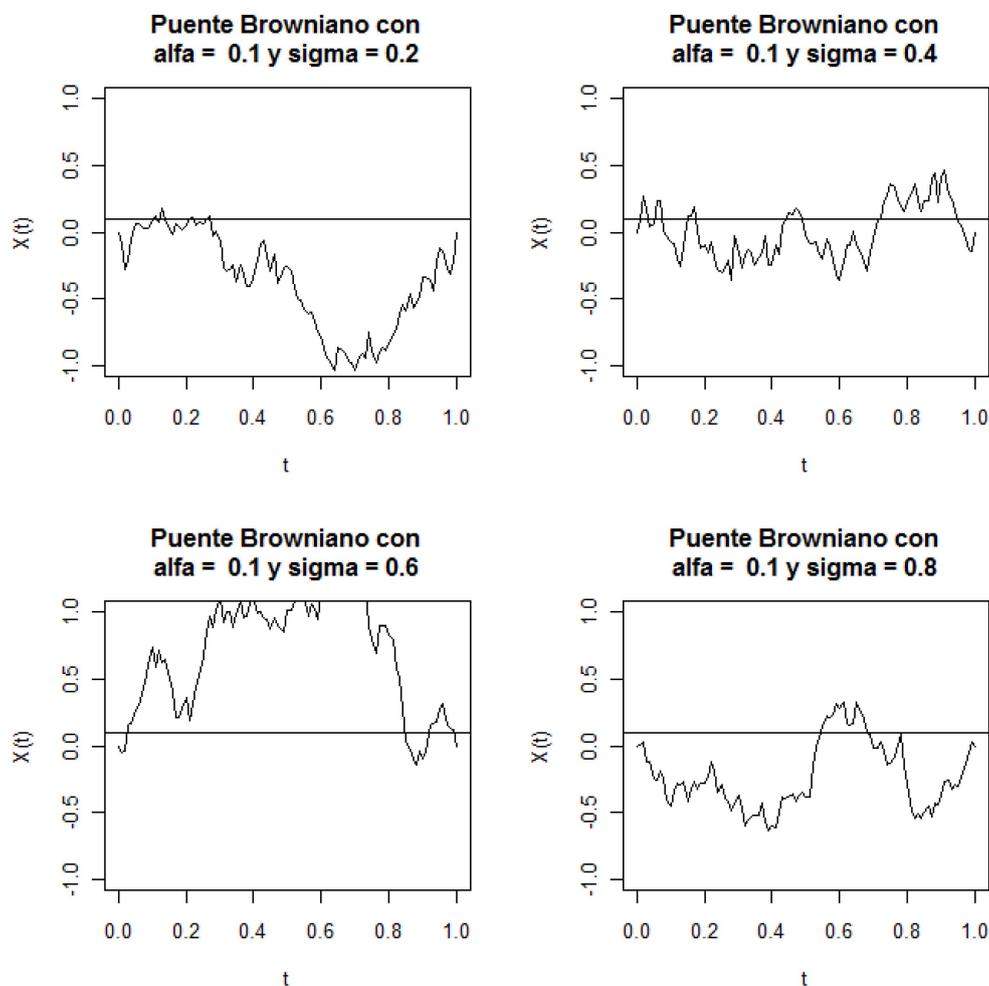


Figura 3.7: Puente Browniano

Para encontrar la solución a la ecuación (3.13) se propone una solución de la forma:

$$S_t = a(t) \left[ S_0 + \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s \right], \quad (3.14)$$

donde  $a(t)$  y  $b(t)$  son dos funciones diferenciables y  $S_0 = 0$ . Derivando se obtiene que:

$$\begin{aligned} dS_t &= a'(t) \left[ S_0 + \int_0^t b(s) dW_s \right] dt + a(t) b(t) dW_t \\ &= \frac{a'(t)}{a(t)} S_t dt + a(t) b(t) dW_t, \end{aligned}$$

igualando los coeficientes se obtienen las ecuaciones  $\frac{a'(t)}{a(t)} = -\frac{1}{1-t}$  y  $a(t)b(t) = 1$ . Suponiendo que  $a(0) = 1$  se obtiene que  $a(t) = 1-t$  y por lo tanto  $b(t) = \frac{1}{1-t}$ . Por lo que substituyendo en la solución (3.14), se obtiene que la solución a la ecuación diferencial estocástica (3.13), es:

$$S_t = (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s.$$

**Proposición 67** *Para el puente Browniano se cumple lo siguiente:*

1.  $\mathbb{E}(S_t) = 0$ .
2.  $Var(S_t) = t(1-t)$ .
3.  $Cov(S_t, S_r) = r(1-t)$ , para  $0 \leq r \leq t$ .

**Prueba.** Para la esperanza se tiene que la integral es una martingala continua que inicia en cero, por lo tanto  $\mathbb{E}(S_t) = 0$ , para la varianza, utilizando la isometría de Itô, se tiene que:

$$\begin{aligned} Var(S_t) &= (1-t)^2 Var\left(\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s\right) \\ &= (1-t)^2 \mathbb{E}\left(\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s\right)^2 \\ &= (1-t)^2 \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\frac{1}{1-s}\right)^2 d_s\right) \\ &= (1-t)^2 \left[\frac{1}{1-s}\right]_0^t \\ &= t(1-t), \end{aligned}$$

por último, sea  $0 \leq r \leq t$ , entonces:

$$\begin{aligned} Cov(S_t, S_r) &= \mathbb{E}(S_t S_r) - \mathbb{E}(S_t) \mathbb{E}(S_r) \\ &= (1-r)(1-t) \mathbb{E}\left(\int_0^r \frac{1}{1-u} dW_u \int_0^t \frac{1}{1-u} dW_u\right), \end{aligned}$$

la segunda integral puede descomponerse en la suma de dos integrales, una sobre el intervalo  $[0, r]$  y otra sobre el intervalo  $(r, t]$ . Dada la propiedad de incrementos independientes del movimiento Browniano, el segundo sumando desaparece. De modo que, por la isometría de Itô, se puede concluir que:

$$\begin{aligned} Cov(S_t, S_r) &= (1-r)(1-t) \mathbb{E}\left[\left(\int_0^r \frac{1}{1-u} dW_u\right)^2\right] \\ &= (1-r)(1-t) \int_0^r \left(\frac{1}{1-u}\right)^2 du \\ &= (1-r)(1-t) \left[\frac{1}{1-u}\right]_0^r \\ &= r(1-t). \end{aligned}$$

Como era de esperarse, la varianza se anula en los extremos del intervalo pues allí el proceso es cero con probabilidad uno. Obsérvese además que la varianza se hace máxima exactamente en la mitad de dicho intervalo. ■

## Apéndice A

# Programas de simulación del movimiento Browniano

El movimiento Browniano puede considerarse como el límite de caminatas aleatorias. Sea  $[0, T]$  un intervalo de tiempo. Considérese  $n$  variables aleatorias  $\xi_1, \dots, \xi_n$  independientes, idénticamente distribuidas, centradas y de varianza  $\frac{T}{n}$ . Se forman las sumas parciales:

$$R_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

El teorema central del límite dice que cuando  $n$  tiende a infinito, la sucesión  $R_n$  converge hacia una  $N(0, T)$ .

Ahora se considera el proceso estocástico continuo  $S_n(t)$  construido por interpolación lineal a partir de los valores:

$$S_n\left(\frac{kT}{n}\right) = R_k, \quad k = 0, \dots, n,$$

es decir, se colocan las sumas parciales  $R_1, R_2, \dots$  en los instantes  $\frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, \frac{3T}{n}, \dots$

Se verifica una versión funcional del teorema central del límite, conocida con el nombre de principio de invarianza de Donsker, que dice que la sucesión de procesos estocásticos  $S_n(t)$  convergen hacia el movimiento Browniano en  $[0, T]$ .

También puede realizarse una simulación de las trayectorias brownianas mediante series de Fourier con coeficientes aleatorios. La representación de Paley-Wiener del movimiento Browniano es:

$$B_t = Z_0 \frac{t}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \frac{\sin(nt/2)}{n}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

donde las  $Z_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  son variables aleatorias independientes que se distribuyen como una  $N(0, 1)$ . La serie converge uniformemente en  $[0, 2\pi]$ , para cada  $\omega$ , casi seguramente.

Para utilizar esta fórmula en la simulación de las trayectorias brownianas se debe elegir el número  $M$  de funciones trigonométricas y el número  $N$  de puntos de discretización de las funciones:

$$Z_0 \frac{t_j}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^M Z_n \frac{\sin(nt_j/2)}{n},$$

donde  $t_j = \frac{2\pi j}{N}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ .

A partir de lo anterior, se muestran los programas de simulación de los procesos estocásticos vistos a lo largo de la tesis; cuyo trabajo se realizó en el software estadístico *R*.

### A.1. Movimiento Browniano

```
#Simulación simple de un movimiento Browniano
N<-100
T<-1
Deltat<-T/N
z<-numeric(N+1)
t<-seq(0,T,length=N+1)
for (i in 2:(N+1))
z[i]<-z[i-1]+rnorm(1)*sqrt(Deltat)
plot(t,z,type="l",main="Movimiento Browniano")
z<-c(0,cumsum(sqrt(Deltat)*rnorm(N)))
```

### A.2. Aproximación de una caminata aleatoria al movimiento Browniano

```
#Aproximación del movimiento Browniano
mediante una caminata aleatoria n=10
par(mfrow = c(2,2), mar=c(2,2,1,1), oma=c(1,1,0,0), mgp=c(2,1,0))
old.par <- par(mfrow=c(2,2),mar=c(2,2,3,1))
mediante una caminata aleatoria n=10
n<-10
T<-1
t<-seq(0,T,length=100)
S<-cumsum(2*(runif(n)>0.5)-1)
z<-sapply(t,function(x) ifelse(n*x>0,S[n*x],0))
z<-as.numeric(z)/sqrt(n)
plot(t,z,type="l",ylim=c(-1,1))

#Aproximación del movimiento Browniano
mediante una caminata aleatoria n=100
n<-100
S<-cumsum(2*(runif(n)>0.5)-1)
z<-sapply(t,function(x) ifelse(n*x>0,S[n*x],0))
z<-as.numeric(z)/sqrt(n)
plot(t,z,type="l",ylim=c(-1,1),lty=2)

#Aproximación del movimiento Browniano
mediante una caminata aleatoria n=1000
n<-1000
```

```
S<-cumsum(2*(runif(n)>0.5)-1)
z<-sapply(t,function(x) ifelse(n*x>0,S[n*x],0))
z<-as.numeric(z)/sqrt(n)
plot(t,z,type="l",ylim=c(-1,1),lty=3)
```

```
#Aproximacion del movimiento Browniano
mediante una caminata aleatoria n=10000
n<-10000
S<-cumsum(2*(runif(n)>0.5)-1)
z<-sapply(t,function(x) ifelse(n*x>0,S[n*x],0))
z<-as.numeric(z)/sqrt(n)
plot(t,z,type="l",ylim=c(-2,2))
```

### A.3. Movimiento Browniano geométrico

```
#Movimiento Browniano geometrico
r<-1
sigma<-0.5
S0<-10
N<-100
T<-1
Deltat<-T/N
z<-numeric(N+1)
t<-seq(0,T,length=N+1)
for (i in 2:(N+1))
z[i]<-z[i-1]+rnorm(1)*sqrt(Deltat)
S<-S0*exp((r-(sigma^2)/2)*t+sigma*z)
plot(t,S,type="l",main="Movimiento Browniano Geometrico")
```

### A.4. Movimiento Browniano geométrico

```
MBGderiva<-function(x,mu=0.1) {mu*x}
MBGvolatilidad<-function(x,sigma=0.1) {sigma*x}
Tmax<-10
Nsim<-1000
dt<-Tmax/Nsim
tvector<-dt*0:Nsim
dW<-sqrt(dt)*rnorm(Nsim)
X<-0:Nsim
X[1]<-1
mu<-0.1
par(mfrow=c(2,2))
for(j in 1:4){
sigma<-0.05*j
title<-paste("Movimiento Browniano geometrico con
```

```

mu =",round(mu,2)," y sigma =", round(sigma,2))
for(i in 1:Nsim) {X[i+1]<-X[i]+MBGderiva(X[i],mu)*dt+MBGvolatilidad
(X[i],sigma)*dW[i]}
plot(tvector,X,type='l',xlab="t",ylab="X(t)",ylim=c(0,4),main=title)
points(tvector,X[1]*exp(mu*tvector), type='l', lty=2)}

```

### A.5. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

```

OUderiva<-function(x,alfa=0.1,kappa=1) {kappa*(alfa-x)}
OUvolatilidad<-function(x,sigma=0.02) {sigma}
Tmax<-10
Nsim<-1000
dt<-Tmax/Nsim
tvector<-dt*0:Nsim
dW<-sqrt(dt)*rnorm(Nsim)
X<-0:Nsim
alfa<-0.1
kappa<-1
X[1]<-alfa
par(mfrow=c(2,2))
for(j in 1:4){
sigma<-0.01*j
title<-paste(Proceso de "Ornstein/Uhlenbeck con
alfa = ", round(alfa,2), "y sigma =", round(sigma,2))
for(i in 1:Nsim) {X[i+1]<-X[i]+OUderiva(X[i],alfa,kappa)
*dt+OUvolatilidad(X[i],sigma)*dW[i]}
plot(tvector,X,type='l',ylim=c(0.05,0.15),xlab='t',
ylab='X(t)',main=title)
abline(h=alfa)}

```

### A.6. Puente Browniano

```

#Puente Browniano
library(sde)
alfa<-0.1
par(mfrow=c(2,2))
for(j in 1:4){
sigma<-0.01*j
title<-paste("Puente Browniano con
alfa = ", round(alfa,2),"y sigma =", round(sigma,2))
plot(BBridge,type='l',ylim=c(0.05,0.15),xlab='t',
ylab='X(t)',main=title)
abline(h=alfa)}

```

# Bibliografía

- [1] Caballero, M., Rivero, V., Uribe, G., Velarde, C. *Cadenas de Markov. Un Enfoque Elemental.*, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.
- [2] Carrasco, G., *Notas Procesos Estocásticos 1*, 2007.
- [3] Chung, K., *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes*, Springer Verlag, 2003.
- [4] Cox D., Miller H., *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman and Hall, 1978.
- [5] Durrett, R., *Essentials of Stochastic Processes*, Springer Verlag, 1999.
- [6] Durrett, R., *Stochastic Calculus: A Practical Introduction*, CRC Press, 1993.
- [7] Hoel, P., Port, S., Stone, C., *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin, 1972.
- [8] Feller, W., *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, Volumen 1, Limusa, 1957.
- [9] Feller, W., *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, Volumen 2, Limusa, 1957.
- [10] Grimmett, G., Stirzaker, D., *Probability and Random Processes*, John Wiley & Sons, 2001.
- [11] Karatzas, I., Shreve, E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag, 1991.
- [12] Lefebvre, M., *Applied Probability and Statistics*, Springer Verlag, 2006.
- [13] McShane, E., *Stochastic Calculus and Stochastic Models*, Academic Press, 1974.
- [14] Mishura, Y., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Springer Verlag, 2008.
- [15] Meshane, E., *Stochastic Calculus and Stochastic Models*, Academic Press, 1974.
- [16] Norris J., *Markov Chains*, Cambridge University Press, 1997.
- [17] Oksendal, B., *Stochastic Differential equations: An Introduction with Applications*, Springer Verlag, 1998.

- 
- [18] Papoullis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw Hill, 1991.
- [19] Parzen, E., *Stochastic Processes*, Holden Day, 1962.
- [20] Prokhorov, Y., *Stochastic Calculus*, Springer Verlag, 1998.
- [21] Rincón, L., *Introducción a los Procesos Estocásticos*, Prensas de Ciencias, 2012.
- [22] Ross, S., *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, 1996.
- [23] Ross, S., *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 2000.
- [24] Shreve, S., *Stochastic Calculus for Finance*, volumen 1, Springer Verlag, 1991.
- [25] Steele, M., *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer Verlag, 2001.
- [26] Taylor, H., Karlin, S., *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, 1994.
- [27] Taylor, H., Karlin, S., *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press, 1994.
- [28] Bhat, U., *Elements of Applied Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, 1972.
- [29] Venegas, F., *Riesgos Financieros y Económicos: Productos Derivados y Decisiones Económicas bajo Incertidumbre*, Thompson, 2006.
- [30] R Development Core Team (2012). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <http://www.R-project.org>.