



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA: INSTITUTO DE GEOFÍSICA

**TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE “MAESTRO EN
CIENCIAS DE LA TIERRA”**

Título de la Tesis: “Aplicación de la transformada ondicular en la descomposición de señales del método electromagnético en el dominio del tiempo”

PRESENTA: Ing. Manuel Alejandro Vázquez Del Moral

TUTORA. Dra. Claudia Arango Galván

Junio 2012

ACKNOWLEDGMENTS

There are many people that participated and helped me to culminate this work. However, I would wish to highlight three of them significantly: Dr. Claudia Arango Galván, Dr. Michel Chouteau and M. Sc. Abderrezak Bouchedda.

Dr. Claudia Arango Galván

I could explain each detail that you improved on me, but that would be so tedious and boring. I'd rather want to thank you for the time you dedicated on me along these two years under your guidance because during this time I have learned more than my five years at the faculty, not only in academic context purely, but also in those features that any professional needs in his working life; probably I'm not an expert writer, but I can sure you that I have improved my skills. Moreover, you helped me to create a link between teacher and student, you gave me the confidence to discuss my thesis topics as colleagues, at least, I felt so. I thank you and I reaffirm my admiration and confidence, this project is finished but I'm sure that we are going to continue seeing each other in the future.

Dr. Michel Chouteau

Thank you for receive me and for your kindness during my stay at the "École Polytechnique de Montréal". Your help was invaluable. Definitely, we couldn't have finished at time without your help. Moreover, I am so grateful for your unconditional help and time that you dedicated on me to give me the opportunity to advance in my studies. I really appreciate having met you. *Ça me fait vraiment plaisir de vous avoir connu.*

M.Sc. Abderrezak Bouchedda

Thank you for help me in an unconditional manner to elaborate this project, definitely your advices on wavelet transform and modeling of electromagnetic

response were the main base to obtain final results of this thesis work. It was a pleasure having met you and shared work and time with you.

Last, but not least, I want to thank to people always were by my side supporting me with those little details that make big differences in my life because those gave me encouragement to go ahead, to wake up and to give all.

TO MY FRIENDS,

I also have to recognize that this road wouldn't have been easy without help from friends and mates, they made days more enjoyable with their chats and jokes. Specially, Sharon Valverde, Patricia Jácome, Guillermo Chávez, John Jairo, Enrique Cárdenas, Javier Vázquez, Miguel Ángel Bonome, Abigail Jiménez, Francisco Ponce, Raúl Ortíz, Carlos Jiménez, Aide López, José Luis Salas, Gonzalo Sansón and Edgar Sagahón. Thank you for sharing your time with me, it has been an honor having met you in this stage of your life, you enrich me with your smart advices and your support.

TO MY GIRLFRIEND

Lisset Hernández, you know I thank you all your support because I never stop to say you, you are a unique and wonderful woman. Spending time with you makes process soft. I love you.

TO MY FAMILY

All of you (mom, dad and brother) known that I don't have anything else to say except I am so lucky to have you near, and how much you help me. I have never hesitated that if I am finishing this stage is thanks to you. Being a copy of all of you makes me immensely happy. I love you.

AGRADECIMIENTOS

Hay muchas personas que participaron y me ayudaron para culminar este trabajo. Sin embargo, desearía destacar a tres de ellas: Dra. Claudia Arango Galván, Dr. Michel Chouteau y el M. en Cs. Abderrezak Bouchedda.

Dra. Claudia Arango Galván

Podría explicarte cada detalle que mejoraste en mi, pero eso sería muy tedioso y aburrido, me gustaría en cambio agradecerte por el tiempo que me dedicaste a lo largo de estos dos años bajo tu tutela, porque en este tiempo pude aprender más de ti que en mis cinco años en la Facultad, no solamente en el contexto académico por si solo, también en esos rasgos que cualquier profesionista necesita en su vida laboral, probablemente no me haya convertido en un escribano pero te aseguro que hasta eso mejoré. Por otro lado, me ayudaste a crear un vínculo entre tutor y estudiante, me diste la confianza para discutir los menesteres de la tesis como colegas, por lo menos, así lo sentí. Te agradezco y reafirmo mi admiración y confianza hacia ti, este proyecto termina pero estoy seguro que nos seguiremos viendo en nuevas cosas en el futuro.

Dr. Michel Chouteau

Gracias por recibirme y por su hospitalidad durante mi estancia en la “École Polytechnique de Montréal”. Su ayuda fue incalculable. Definitivamente, no podríamos haber terminado a tiempo sin usted. Además, estoy muy agradecido por su ayuda incondicional y el tiempo que dedicó para darle avance a mis estudios. Me siento muy honrado por haberlo conocido.

M. en Cs. Abderrezak Bouchedda

Gracias por ayudarme de manera incondicional para elaborar este proyecto, indiscutiblemente tus consejos en transformada ondicular y modelado de

respuestas electromagnéticas fueron la base principal para obtener los resultados finales en este trabajo de tesis. Fue un placer haberlo conocido y compartir el espacio de trabajo y el tiempo a su lado.

Finalmente, pero no menos importante, quiero agradecer a la gente que siempre estuvo a mi lado apoyándome con esos pequeños detalles que hacen grandes diferencias en mi vida porque esos detalles me dan el ánimo para seguir adelante, para levantarme y para dar todo.

A MIS AMIGOS

También tengo que reconocer que este camino no habría sido fácil sin la ayuda de mis amigos y compañeros, hicieron mis días más agradables con sus pláticas y bromas. Especialmente, Sharon Valverde, Patricia Jácome, Guillermo Chávez, John Jairo, Enrique Cárdenas, Javier Vázquez, Miguel Ángel Bonome, Abigail Jiménez, Francisco Ponce, Raúl Ortíz, Carlos Jiménez, Aide López, José Luis Salas, Gonzalo Sansón y Edgar Sagahón. Gracias por compartir su tiempo conmigo, ha sido un gran honor conocerlos en esta etapa de sus vidas, enriquecieron mi vida con sus consejos sabios y su apoyo.

A MI NOVIA

Lisset Hernández, sabes que te agradezco todo tu apoyo porque nunca paro de decírtelo, eres una mujer única y maravillosa. Los tiempos libres que disfruto contigo hacen que los procesos, como este, se pasen fácilmente. Te amo.

A MI FAMILIA

Todos ustedes (mamá, papá y hermano) saben que no tengo nada más que decir, excepto que soy muy afortunado en tenerlos, y cuánto me han ayudado. Nunca he dudado que si ahora estoy terminando esta etapa, es gracias a ustedes. Ser una copia de todos ustedes me hace inmensamente feliz, los amo.

AGRADECIMIENTOS ACADÉMICOS

A los sinodales la Dra. Elsa Leticia Flores Márquez, el Dr. Víctor Manuel Velasco Herrera, el Dr. José Manuel Romo Jones y el Dr. Gonzalo Gálvez Coyt por su ayuda en la revisión y el tiempo dedicado en este trabajo de investigación; su aportación fue muy valiosa y significó una mejoría considerable en el mismo.

Al Programa de Posgrado en Ciencias de la Tierra de la UNAM por el apoyo para el desarrollo de este trabajo.

Al Conacyt, por el apoyo financiero recibido durante el desarrollo de la maestría en el Posgrado en Ciencias de la Tierra de la UNAM a través de la beca y en la estancia académica en la "École Polytechnique de Montréal".

Al Departamento de Geomagnetismo y Exploración del Instituto de Geofísica de la UNAM por brindarme la infraestructura para el desarrollo de mi trabajo de tesis.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN-114811 "Estudio de la dinámica de los procesos volcánicos con el método Transitorio Electromagnético en el Volcán Popocatepetl". Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Investigación realizada como parte de la Iniciativa de Apoyo Complementario a la realización de las Obras Determinadas (IACOD) de la UNAMIA-100812 "Caracterización geofísica de una porción del acuífero de la Cuenca de México en la zona de Ciudad Universitaria".

ABSTRACT

Transient Electromagnetics (TEM) has had substantial development during the last decade that has become an alternative to traditional electrical studies like Vertical Electrical Soundings. Hence the importance of finding some alternative methodologies that improve signal quality to take advantage at maximum.

Basically, TEM involves the induction of electrical currents into the ground through a wire loop (usually square) laying on the surface (transmitter loop, T_x). A steady current flow through T_x loop during a given time and then is abruptly cut off, which produces, according to Faraday's Law, a secondary magnetic field. Consequently, an induced current is generated in the subsurface. This induced current decays due ohmic losses and it is detected by receiver loop (R_x), located on surface, as well.

Nevertheless, TEM is corrupted by different noise sources. The observed signal is frequently affected at the last intervals of measurement because response signal loses amplitude. Thus, the signal-noise ratio becomes poorer at the end of the late-stage, i.e. when the transient effect is ending. However, dealing with these signal perturbations using usual filtering methods it is difficult due to the noise spectral features.

The Wavelet Transform (WT) is a decomposition method in time-frequency domain, it has been used to filter signals through several algorithms due to its ability to detect specific frequency content in determined time intervals.

In this paper was developed an algorithm to filter TEM signals based on two thresholding criteria, taking advantage from the spectral contrasts between decay signal and corrupting noise by using WT as base to decompose, to filter and reconstruction of the signal.

RESUMEN

El Método Transitorio Electromagnético (TEM, por sus siglas en inglés) ha tenido un desarrollo sustancial en la última década lo que ha traído una alternativa a los estudios eléctricos tradicionales como los Sondeos Eléctricos Verticales. Por lo tanto, la importancia de encontrar algunas metodologías alternas que mejoren la calidad de la señal para aprovecharlas al máximo.

Básicamente, el TEM consiste en la inducción de corrientes eléctricas en el terreno a través de una espira de cable (usualmente cuadrada) colocada en la superficie (espira transmisora T_x). Una corriente continua fluye a través de la espira T_x durante un periodo determinado y entonces es abruptamente cortada, lo que produce, de acuerdo con la ley de Faraday, un campo magnético secundario. Consecuentemente, una corriente inducida es generada en el subsuelo. Esta corriente inducida decae debido a las pérdidas óhmicas y es detectada por la espira receptora (R_x), localizada en la superficie, también.

Sin embargo, el TEM es corrompido por diferentes fuentes de ruido. La señal es frecuentemente afectada en los últimos intervalos de medición ya que la señal de respuesta va perdiendo amplitud. Así, la razón señal ruido se va haciendo más pobre al final de la etapa tardía, p. ej. cuando el efecto transitorio está acabando. Sin embargo, tratar con estas perturbaciones de la señal usando los métodos de filtrado usuales es difícil debido a las características espectrales del ruido.

La Transformada Ondicular (T.O.) es un método de descomposición en el dominio tiempo-frecuencia, ha sido utilizado para el filtrado de señales mediante distintos algoritmos por su habilidad para detectar contenidos de frecuencia específicos en determinados intervalos de tiempo.

En este trabajo se desarrolló un programa para el filtrado de las señales basados en dos criterios de "threshold" aprovechando los contrastes espectrales entre la señal de decaimiento y el ruido que la corrompe, usando la T.O. como base para descomponer, filtrar y la reconstrucción de la señal.

CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN	5
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	8
2.1	Teoría Electromagnética	8
2.1.1	Ecuaciones de Maxwell en el Dominio del Tiempo	9
2.1.2	Relaciones Constitutivas.....	10
2.1.3	Ecuaciones de Maxwell en el Dominio de la Frecuencia.....	11
2.2	Sondeo Transitorio Electromagnético	11
2.2.1	Solución a la Ecuación de Onda para un Transitorio EM.....	12
2.2.2	Principios Físicos del TEM.....	13
2.2.3	Curva de Decaimiento e Interpretación	17
2.2.4	Fuentes de Ruido	19
3	TRANSFORMADA ONDICULAR.....	21
3.1	Definición y Atributos de la Transformada Ondicular	22
3.1.1	Características de las Funciones Ondiculares.....	23
3.1.2	Transformada Ondicular Inversa	24
3.1.3	Localización en tiempo-frecuencia.....	24
3.1.4	Transformada Ondicular a Datos Discretos.....	26
3.1.5	Teorema de la Convolución en el dominio de la Transformada Ondicular....	29
3.2	Elección de las Escalas (s).....	30
3.3	Cono de Influencia	31
3.4	Reconstrucción de Señales en el Espacio de la Transformada Ondicular	31
3.5	Funciones Ondiculares.....	33
3.5.1	Mexican-Hat	33
3.5.2	Morlet	35
3.5.3	Paul	37
3.6	Selección de la función ondicular	38
3.6.1	Ortogonal o No-ortogonal	38
3.6.2	Complejas y Reales	39
3.6.3	Ancho de la Ondícula	39
3.6.4	Forma.....	39

4	PROCESADO.....	40
4.1	Algoritmo de Transformación Ondicular	40
4.2	Algoritmo de Filtrado.....	44
4.3	Datos	46
5	ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	50
6	CONCLUSIONES	58
7	BIBLIOGRAFÍA	60
	APÉNDICE 1. Teoría Electromagnética	63
	Ecuaciones de Onda y Solución a la Ecuación de Onda	63
	Potenciales de Schelkunoff.....	66
	APÉNDICE 2. Transformada Ondicular	69
	Antecedentes de la Transformada Ondicular.....	69

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Esquema de la curva de inyección de corriente para el Transmisor (T_x) en periodos " T ".....	14
Figura 2.2 Esquema del arreglo de bobinas para TEM (McNeill, 1994).	15
Figura 2.3 Esquema de las corrientes inducidas por el abrupto corte del campo primario. "Smoke rings" en el tiempo uno (t_1), en el tiempo dos (t_2), y así sucesivamente.	16
Figura 2.4 Esquema de la densidad de corriente inducida en el terreno por una espira (T_x) colocada en superficie para varios tiempos normalizados (t/σ) en un semiespacio conductor. Expandiéndose hacia abajo como aros de humo (smoke-rings) con un ángulo de 30° , aproximadamente (Nabighian y Macnae, 1993).	16
Figura 2.5 Señal de decaimiento de potencial para TEM en una gráfica bilogarítmica. Se pueden observar las 3 etapas del TEM (McNeill, 1994).....	17
Figura 3.1 Capacidad de la T.O. de distinguir los contenidos de frecuencias en tiempo en comparación con la Transformada de Fourier (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1994).	21
Figura 3.2 Representación gráfica del escalamiento de las funciones ondulares y sus picos en el dominio de las frecuencias para una ondícula madre de "Paul". La línea punteada es la parte imaginaria y la línea continua es la parte real para cada una de las ondículas en tiempo.	28
Figura 3.3 Representación gráfica de la T.O. Arriba, el espectro de la T.O., en medio la función analizada, y abajo, la fase de la T.O.....	32
Figura 3.4 Función ondicular "Mexican-Hat", DOG($m=2$). Del lado izquierdo su representación gráfica en tiempo, del lado derecho en frecuencias para una escala $s=1.3$	34
Figura 3.5. Función Ondicular de Morlet ($\omega_0=6$). Del lado izquierdo su representación gráfica en tiempo (línea punteada, parte imaginaria; línea continua, parte real), del lado derecho, su gráfica en frecuencia para una escala $s=4$	35
Figura 3.6 Función Ondicular de Paul ($m=4$). Del lado izquierdo su representación gráfica en tiempo (línea punteada, parte imaginaria; línea continua, parte real), del lado derecho, su gráfica en frecuencia para una escala $s=4$	37
Figura 4.1 Métodos para rellenar las series. La línea roja representa una serie de 64 muestras. Al completar la serie a la siguiente potencia de 2 (128 muestras), se rellena con: ceros (primera gráfica), el valor mínimo (segunda gráfica) y con el espejo de la serie (tercer gráfica).	41
Figura 4.2 Espectro de la Transformada Ondicular de una señal periódica, esquema superior (seno de periodo 10 adyacente a un seno de periodo 1 en la segunda sección de la gráfica); en el esquema intermedio se observa la gráfica de la señal analizada y, en el esquema inferior, la fase de la Transformada Ondicular. Se observan los contenidos altos	

de frecuencia en las áreas correspondientes a estos periodos y enmarcados por elipses verdes, en el espectro.	42
Figura 4.3 Reconstrucción de una señal de decaimiento con distintos intervalos de escalas. La línea roja es la señal y la línea azul es la reconstrucción para los rangos definidos arriba de cada una de las gráficas.....	43
Figura 4.4 Reconstrucción de la señal de decaimiento con todas las escalas. En verde la señal original, y en rojo, la reconstrucción a partir de su T.O (gráfica superior). La gráfica inferior muestra el error en la reconstrucción.....	44
Figura 4.5 Diagrama esquemático de los dos criterios de filtrado. La banda en rojo son los valores que son anulados.	45
Figura 4.6 Esquemas de los procesos de “binning” y “stacking”.	47
Figura 4.7 Forma de la curva de inyección (arriba) y esquema de la respuesta detectada por el receptor Rx (abajo) de acuerdo con la curva de inyección.....	48
Figura 4.8 Modelo de capas utilizado en la generación de la señal de decaimiento sintética.	48
Figura 5.1 Resultados del Threshold 1 aplicado a 6 escalas. La gráfica superior muestra las curvas de error (diferencia entre la señal original y la curva después del filtrado). Las tres gráficas inferiores muestran las áreas de mejoría en color azul y las áreas donde aumento el error en rojo, para los porcentajes señalados arriba de cada una de las gráficas.	52
Figura 5.2 Resultados del Threshold 1 aplicado a 8 escalas. La gráfica superior muestra las curvas de error (diferencia entre la señal original y la curva después del filtrado). Las tres gráficas inferiores muestran las áreas de mejoría en color azul y las áreas donde aumento el error en rojo, para los porcentajes señalados arriba de cada una de las gráficas.	53
Figura 5.3 Resultados del Threshold 2 aplicado a 6 escalas. La gráfica superior muestra las curvas de error (diferencia entre la señal original y la curva después del filtrado). Las tres gráficas inferiores muestran las áreas de mejoría en color azul y las áreas donde aumento el error en rojo, para los porcentajes señalados arriba de cada una de las gráficas.	54
Figura 5.4 Resultados del Threshold 2 aplicado a 8 escalas. La gráfica superior muestra las curvas de error (diferencia entre la señal original y la curva después del filtrado). Las tres gráficas inferiores muestran las áreas de mejoría en color azul y las áreas donde aumento el error en rojo, para los porcentajes señalados arriba de cada una de las gráficas.	55

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Los números de las casillas son el valor del error cuadrático medio (ECM). Se esquematiza mediante un código de colores, los azules representan una disminución del error y los rojos un aumento del error, con respecto del error original (ECM-original).

1 INTRODUCCIÓN

La presente tesis está enfocada en un método para el tratamiento de señales, en este caso particular, en el de una señal de decaimiento del Método Transitorio Electromagnético producida sintéticamente y con la adición de ruido atmosférico también conocido como ruido esférico (TEM, por sus siglas en inglés). Las técnicas de los métodos electromagnéticos han sido desarrolladas ampliamente en las últimas décadas y específicamente, el Método Transitorio Electromagnético ha ocupado un lugar importante entre los métodos más utilizados en la exploración geofísica para distintos fines (e.g. Fitterman y Stewart, 1986; Nabighian y Macnae, 1993; Meju, 1998; Krivochieva y Chouteau, 2002). Por lo tanto, es importante buscar nuevas maneras de mejorar este método con el objetivo de hacerlo más eficaz. Así, en este trabajo, se busca optimizar las señales de decaimiento a partir de un algoritmo basado en una transformada tiempo-frecuencia.

El TEM consiste en inducir corrientes eléctricas en el subsuelo a partir de un campo magnético primario que se genera a partir de una fuente controlada. Las corrientes inducidas se detectan en superficie y, debido a que proceden de una corriente que fue abruptamente cortada, empiezan a decaer con el tiempo debido a pérdidas óhmicas.

Debido a que existen campos electromagnéticos en la Tierra que no pueden ser anulados y que forman parte del ambiente de manera natural, la medición de la interacción entre el subsuelo y las corrientes inducidas se dificulta por la adición de dichos campos naturales (ruido ambiental). El ruido electromagnético que se genera alrededor de la Tierra procede de distintas fuentes como las tormentas eléctricas que acontecen alrededor del planeta, las tormentas solares y su interacción con la ionósfera, y por otro lado, los campos electromagnéticos inducidos por las redes de distribución eléctrica (McNeill, 1994); además, habría que incluir las fuentes secundarias que son inducidas por las fuentes antes mencionadas. Es importante resaltar que para este trabajo en lo posterior se denominará

como ruido a cualquier señal eléctrica y/o magnética ajena a la respuesta ideal del subsuelo relativa al fenómeno de TEM.

La razón entre el ruido y la señal se va volviendo más pobre en cuanto el método mide tiempos más largos lo que provoca una dificultad para la obtención de información del subsuelo, mientras la amplitud del ruido se mantiene aleatoria, al igual que su ocurrencia, la amplitud de la corriente inducida va decayendo de forma exponencial (McNeill, 1994). Los tiempos más largos de medición significan mayor profundidad de investigación y por esta razón es importante aprovechar la mayor cantidad de señal posible.

Algunos métodos han sido desarrollados para buscar la optimización de la señal de decaimiento (Olsen y Hohman, 1992). Los equipos de medición aplican algoritmos que puedan limpiar la señal de ruidos aleatorios; los métodos de “stacking” y “binning” son los algoritmos más utilizados en el procesado de decaimientos de TEM. El desarrollo de tecnologías para la programación permite proponer nuevos algoritmos de filtrado para buscar mejorar, y en el mejor de los casos, sustituir, los previamente realizados.

El algoritmo presentado aquí está basado en la Transformada Ondicular (Wavelet Transform). La Transformada Ondicular se basa en el escalamiento y traslación de una función ondicular. El escalamiento hace que el periodo dominante de la ondícula cambie y por consiguiente su frecuencia; la traslación sirve para desplazar una ondícula de cierta escala a través de todo el tiempo, lo que ayuda a ubicar los contenidos de frecuencia en intervalos definidos de tiempo (Torrence y Compo, 1998a).

El principal objetivo de esta tesis es tratar de mitigar el ruido en las series de decaimiento de TEM con las ventajas de localización en tiempo-frecuencia de un algoritmo de filtrado con Transformada Ondicular, considerando como una hipótesis que el ruido se contiene en las escalas más pequeñas (frecuencias altas) y que existe una diferencia con el espectro de la señal ideal (señal sin ruido). Algunos autores han podido comprobar la eficacia del método para limpiar señales electromagnéticas de otro tipo, como las del Método Magnetotelúrico (Zhang y Paulson, 1997; Trad y Travassos, 2000; Garcia y Jones, 2008), sin

embargo, las características espectrales de ese tipo de señales en comparación con las de TEM no permiten asegurar a simple vista que el método sea igual de efectivo para el caso de las de TEM. Este trabajo muestra la eficacia del método y la serie de desarrollos que se llevaron a cabo para configurar y proponer un algoritmo para filtrar las señales de TEM.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 Teoría Electromagnética

El campo electromagnético (EM) es bien descrito por los vectores de intensidad de campo (\mathbf{e} y \mathbf{h}) y por los vectores de densidad de flujo (\mathbf{d} y \mathbf{b}), para el campo eléctrico y magnético (respectivamente). Para el caso particular de los estudios geofísicos es común manejar los campos con base en sus vectores de intensidad de campo \mathbf{e} (V/m) y \mathbf{h} (A/m). Los campos, en general, son funciones de la posición (x, y, z), y del tiempo (t) o de la frecuencia (f ó ω) (Nabighian y Macnae, 1993).

Algunas consideraciones son útiles para trabajar con los campos EM. Con el objetivo de hacer más sencillas las ecuaciones se realizan algunas simplificaciones. Para comprender y analizar la dinámica de los campos electromagnéticos se han construido una serie de ecuaciones que pueden ser configuradas para ciertos casos particulares, éstas son ecuaciones diferenciales de primer orden. Las ecuaciones que rigen todos los fenómenos electromagnéticos son conocidas como Ecuaciones de Maxwell.

Estas ecuaciones en general son tomadas para medios isótropos, homogéneos, lineales y se considera que las propiedades eléctricas no dependen de la temperatura, el tiempo o la presión. Estas idealizaciones complican la caracterización de medios estratificados y de geometrías complejas, como las que se encuentran comúnmente en la naturaleza. Por esta razón, la solución a problemas con heterogeneidades y anisotropías es mediante la suposición de que el medio es una yuxtaposición de varios medios homogéneos e isótropos. La solución de las ecuaciones se obtiene numéricamente tomando en cuenta las condiciones de frontera (Ward y Hohman, 1989).

Debido a la naturaleza armónica de las ondas electromagnéticas, la solución de las ecuaciones y de las condiciones de frontera se apoya en la dependencia existente entre el tiempo y la frecuencia. Dicha dependencia está dada por el par de la Transformada de Fourier.

2.1.1 Ecuaciones de Maxwell en el Dominio del Tiempo

La experimentación ha demostrado que los campos de los fenómenos electromagnéticos son adecuadamente descritos como:

$$\nabla \times \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0 \quad \text{Ecuación 2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{h} - \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad \text{Ecuación 2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \text{Ecuación 2.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho \quad \text{Ecuación 2.4}$$

Donde \mathbf{e} es la intensidad del campo eléctrico en V/m, \mathbf{b} es la inducción magnética en Tesla, \mathbf{d} es el desplazamiento dieléctrico en C/m², \mathbf{h} es la intensidad del campo magnético en A/m, \mathbf{j} es el vector densidad de corriente en A/m², y ρ es la densidad de carga eléctrica en C/m³. Además, para materiales homogéneos, de conductividad 10^{-4} S/m o mayor, la densidad de carga se disipa en menos que 10^{-6} s, de esta manera para fines de exploración geofísica, en las frecuencias menores que 10^5 Hz se define que $\partial\rho/\partial t \sim 0$ y (Ward y Hohman, 1989),

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{Ecuación 2.5}$$

Es importante señalar que en este trabajo el uso de letras minúsculas se refiere al dominio del tiempo mientras que el uso de las letras mayúsculas el de la frecuencia. Además, las negritas definen elementos vectoriales.

2.1.2 Relaciones Constitutivas

Para poder relacionar las ecuaciones de Maxwell, construidas con las cinco funciones vectoriales, \mathbf{e} , \mathbf{b} , \mathbf{h} , \mathbf{d} y \mathbf{j} , se realiza un procedimiento en el dominio de la frecuencia a través de las ecuaciones constitutivas,

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega, E, r, t, T, P, \dots) \cdot \mathbf{E} \quad \text{Ecuación 2.6}$$

$$\mathbf{B} = \mu(\omega, H, r, t, T, P, \dots) \cdot \mathbf{H} \quad \text{Ecuación 2.7}$$

y

$$\mathbf{J} = \sigma(\omega, E, r, t, T, P, \dots) \cdot \mathbf{E} \quad \text{Ecuación 2.8}$$

Donde ε , μ y σ son los tensores que describen el comportamiento espacial y direccional de la permitividad eléctrica, la permeabilidad magnética y la conductividad eléctrica, respectivamente. Como puede observar, estos tres tensores dependen de distintas variables, y consecuentemente algunas consideraciones son hechas para facilitar el análisis según Ward y Hohman (1989).

- 1) Todos los medios son lineales, homogéneos, isótropos y poseen propiedades eléctricas independientes del tiempo, la presión y la temperatura; así, los parámetros ε , μ , y σ pueden considerarse escalares y no vectores.
- 2) La permeabilidad magnética se asume del mismo valor numérico que la del vacío, es decir: $\mu = \mu_0$ [H/m]

2.1.3 Ecuaciones de Maxwell en el Dominio de la Frecuencia

Aplicando la Transformada de Fourier y sustituyendo algunos términos con base en las ecuaciones constitutivas, se puede llegar a las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia (Ward y Hohman, 1989):

$$\nabla \times \mathbf{E} + \hat{z}\mathbf{H} = 0 \quad \text{Ecuación 2.9}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \hat{y}\mathbf{E} = 0 \quad \text{Ecuación 2.10}$$

Donde:

$$\hat{z} = i\mu\omega \text{ es la impedancia y,}$$

$$\hat{y} = \sigma + i\epsilon\omega \text{ es la admitancia}$$

2.2 Sondeo Transitorio Electromagnético

El Método Transitorio Electromagnético (TEM) es una técnica de exploración geofísica basada en dos principios básicos: el principio de inducción de Faraday, y el decaimiento de corriente provocado por pérdidas óhmicas. Sus características hacen que el método sea de gran utilidad para encontrar la distribución de resistividades eléctricas en el subsuelo. La profundidad de exploración del método es una variable que depende del tiempo de medición, por esta razón se tiene gran versatilidad en este rubro.

Sin embargo, a tiempos más largos de medición la intensidad de la corriente eléctrica medida se vuelve más pequeña por lo que los efectos de campos externos hacen más mella en el registro.

2.2.1 Solución a la Ecuación de Onda para un Transitorio EM

La solución particular de las ecuaciones de Maxwell para un dipolo magnético vertical situado en la superficie de la tierra se puede deducir a partir del desarrollo matemático mostrado en el APÉNDICE 1. Así, la expresión que describe la interacción entre el dipolo y el subsuelo, queda definida mediante la Transformada de Hankel, como:

$$F(\rho, z) = \frac{\hat{z}_0 m}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-u_0(z+h)} + r_{TE} e^{u_0(z-h)}] \frac{\lambda}{u_0} J_0(\lambda\rho) d\lambda \quad \text{Ecuación 2.11}$$

Donde m es el momento magnético del dipolo, $\lambda = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$, $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $u_n = (\lambda^2 - k_n^2)^{1/2}$, J_n es la función de Bessel de orden ' n ', y además, asumiendo que la permeabilidad magnética es la del vacío, el coeficiente de reflexión es $r_{TE} = \frac{\lambda - \hat{u}_1}{\lambda + \hat{u}_1}$. Si se considera el dipolo como una gran espira circular, colocada en la superficie de forma horizontal, y tomando al momento magnético como un diferencial:

$$dm = I\rho' d\phi d\rho' \quad \text{Ecuación 2.12}$$

Entonces, mediante la ecuación del potencial de la interacción entre un dipolo y el subsuelo, y con los respectivos teoremas supuestos por Ward y Hohmann (1989), se puede demostrar que el campo magnético producido por una espira circular se describe con la siguiente ecuación:

$$H_z = \frac{Ia}{2} \int_0^\infty \hat{F}(\lambda, z) \lambda^2 J_1(\lambda a) J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad \text{Ecuación 2.13}$$

$$\text{con: } \hat{F}(\lambda, z) = \frac{1}{u_0} [e^{-u_0(z+h)} + r_{TE} e^{u_0(z-h)}]$$

Esta última ecuación puede simplificarse al tomar las mediciones en el centro de la espira y considerar una Tierra homogénea.

$$H_z = I a \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda + u} J_1(\lambda a) d\lambda \quad \text{Ecuación 2.14}$$

Aplicando la Transformada Inversa de Laplace, a la ecuación anterior, entonces se obtienen las ecuaciones que definen la respuesta transitoria en el dominio del tiempo, es decir, la respuesta al impulso. Las ecuaciones que se obtienen con este proceso son las siguientes:

$$h_z \approx \frac{I \sigma^{3/2} \mu_0^{3/2} a^2}{30 \pi^{1/2}} t^{-3/2} \quad \text{Ecuación 2.15}$$

y,

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} \approx \frac{-I \sigma^{3/2} \mu_0^{3/2} a^2}{20 \pi^{1/2}} t^{-5/2} \quad \text{Ecuación 2.16}$$

El decaimiento de un fenómeno transitorio se puede ver análogo al de unos anillos de humo que se desplazan hacia el centro de la Tierra a una velocidad de $2/(\pi \sigma \mu_0 t)^{1/2}$ y su radio está dado por $(4.37t/\sigma \mu_0)^{1/2}$ (Ward y Hohman, 1989).

2.2.2 Principios Físicos del TEM

Un sondeo de TEM consiste básicamente, en dos bobinas situadas en la superficie del suelo, una de ellas transmisora (T_x) y otra receptora (R_x) (Figura 2.2). Las bobinas, regularmente son cuadradas y de una sola espira. Los cambios en estas dos características son realizados para modificar el momento magnético:

$$M = I n A \quad \text{Ecuación 2.17}$$

Donde “M” es el momento magnético, “n” es el número de espiras, “A” es el área de la bobina, e “I” es la corriente directa aplicada a la bobina (Westergaard, 2003).

La bobina T_x es excitada con una señal periódica consistente en pulsos cuadrados de corriente. Cada periodo se puede dividir en cuatro intervalos de la misma duración. En el primer intervalo no se inyecta corriente a la bobina transmisora; en el segundo se inyecta una corriente “I”; enseguida, en el tercer intervalo, la corriente es abruptamente cortada manteniéndose nula; en el cuarto periodo se vuelve a inyectar la corriente “I” en sentido contrario; este proceso se repite periódicamente (Figura 2.1) (McNeill, 1994).

Debido al abrupto corte de la corriente, se genera un campo magnético primario que empieza a decaer, de acuerdo con la Ley de Faraday (Ecuación 2.1).

El cambio en el campo magnético genera a su vez un pulso de campo eléctrico que produce un flujo de corriente en forma de anillo (“smoke rings”, Figura 2.4) en la vecindad inmediata del transmisor T_x . La corriente empieza a decaer y genera otro pulso de campo magnético que genera más flujo de corriente (corrientes de inducción) pero esta vez con una forma de anillo más grande y a mayor profundidad.

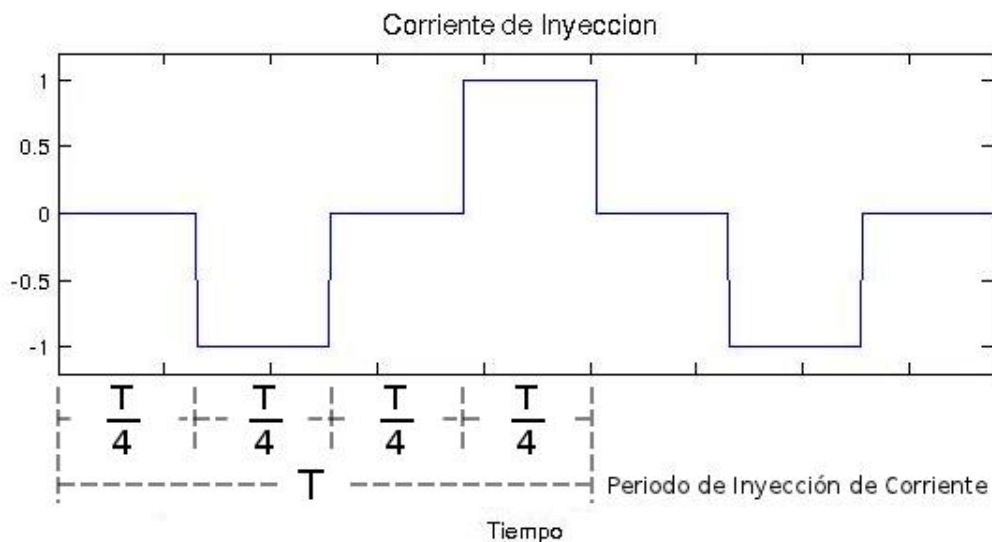


Figura 2.1 Esquema de la curva de inyección de corriente para el Transmisor (T_x) en periodos “T”.

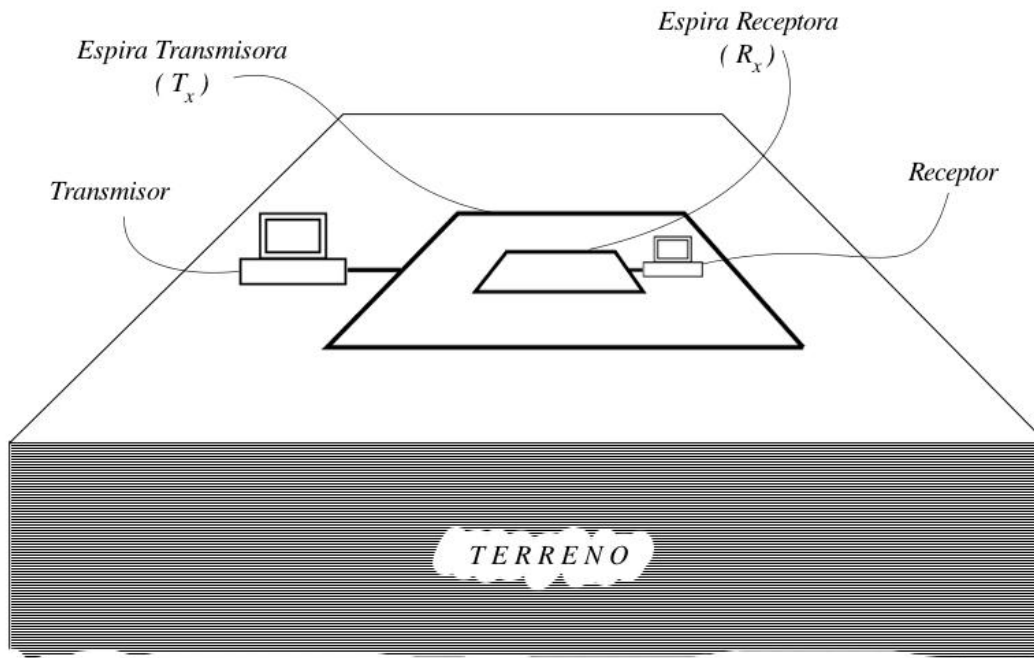


Figura 2.2 Esquema del arreglo de bobinas para TEM (McNeill, 1994).

Las pérdidas óhmicas provocan que los flujos de corriente sigan decayendo y a su vez incita flujos sucesivos, como se observa en la Figura 2.3 (McNeill, 1994) y la Figura 2.4. El decaimiento de la corriente es registrado por la bobina R_x a través del campo magnético que detecta. Las mediciones son grabadas como una serie de decaimientos a través del tiempo. Este fenómeno es complejo y depende de la distribución de la conductividad en el subsuelo (Fitterman y Stewart, 1986).

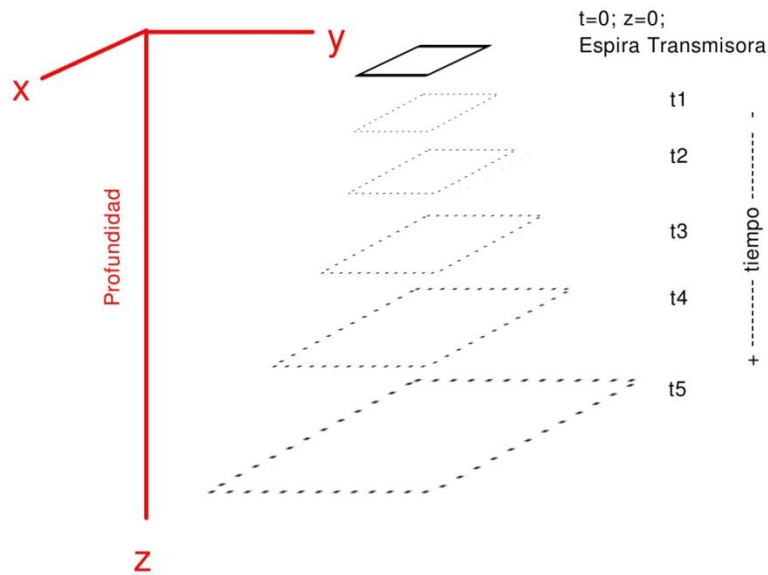


Figura 2.3 Esquema de las corrientes inducidas por el abrupto corte del campo primario. “Smoke rings” en el tiempo uno (t1), en el tiempo dos (t2), y así sucesivamente.

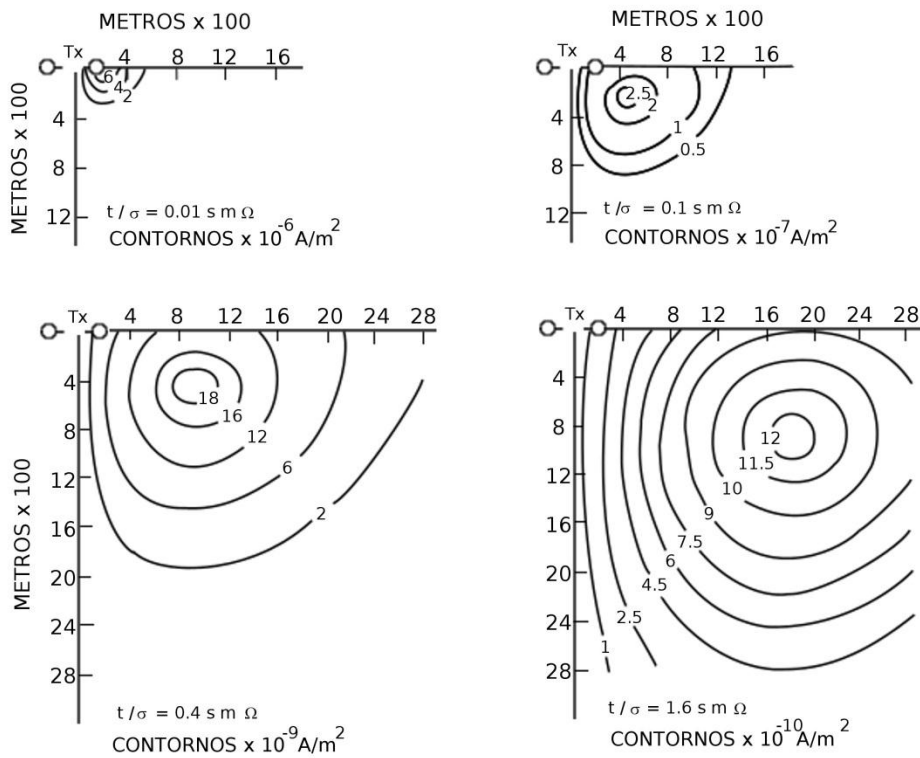


Figura 2.4 Esquema de la densidad de corriente inducida en el terreno por una espira (Tx) colocada en superficie para varios tiempos normalizados (t/σ) en un semiespacio conductor. Expandiéndose hacia abajo como aros de humo (smoke-rings) con un ángulo de 30°, aproximadamente (Nabighian y Macnae, 1993).

2.2.3 Curva de Decaimiento e Interpretación

La curva de decaimiento se divide en 3 etapas con base en los fenómenos físicos y la tendencia que presenta en una gráfica bilogarítmica (Figura 2.5).

2.2.3.1 Etapa Temprana (Early-Time Stage)

Cuando la corriente es cortada, de acuerdo con la Ley de Inducción de Faraday, se generan corrientes en la vecindad del conductor (la bobina T_x). De acuerdo con la aproximación cuasiestática, estas corrientes se localizan solamente en la superficie del conductor. La dirección y la magnitud de la corriente son tales que intentan mantener el campo magnético que las induce. El campo magnético dentro de la bobina no cambia por lo que no induce corrientes. Por el contrario, fuera de la bobina, el campo cambia abruptamente como una función escalón (Nabighian y Macnae, 1993).

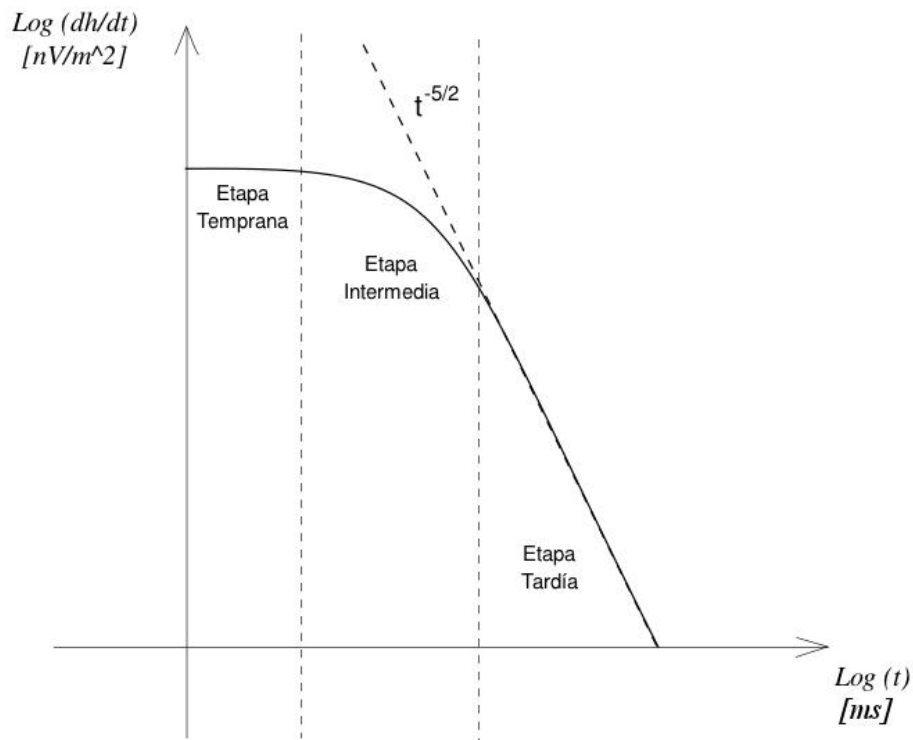


Figura 2.5 Señal de decaimiento de potencial para TEM en una gráfica bilogarítmica. Se pueden observar las 3 etapas del TEM (McNeill, 1994).

2.2.3.2 *Etapa Intermedia (Intermediate-Time Stage)*

Debido a las pérdidas óhmicas, las corrientes en la superficie del conductor comienzan a disiparse. El campo magnético en el interior comienza a decaer, lo que induce corrientes en el interior. Este proceso se repite hasta alcanzar una difusión total del patrón de corrientes (Nabighian y Macnae, 1993).

2.2.3.3 *Etapa Tardía (Late-Time Stage)*

En esta etapa la distribución de las corrientes inducidas es relativamente estable con respecto al tiempo y la corriente en los filamentos del conductor ha alcanzado valores asintóticos (Nabighian y Macnae, 1993).

La respuesta inducida por la espira transmisora en el TEM es una función compleja que depende del tiempo y de la conductividad (inverso de la resistividad). Durante la etapa tardía las matemáticas se simplifican considerablemente y es posible observar que la respuesta se comporta en función de la Ecuación 2.16.

Debido a que $\partial h_z / \partial t$ varía en función de $\sigma^{3/2}$ es posible comprender que es más sensible a los pequeños cambios de conductividad que los métodos de corriente continua convencionales (SEV, calicatas, etcétera). También es posible observar que durante la etapa tardía las medidas de voltaje decaen a razón de $t^{-5/2}$ lo cual es muy rápido. Al paso del tiempo la señal va haciéndose asintótica al eje de las abscisas lo que provoca que las contribuciones de ruido eviten medir correctamente la respuesta (McNeill, 1994).

Análogamente con los sondeos eléctricos, en la Ecuación 2.16 se puede despejar la conductividad y expresarla en función de la resistividad eléctrica para obtener un perfil de “resistividades aparentes” (Westergaard, 2003).

$$\rho_a(t) = \left(\frac{Ia^2}{20 \frac{\partial h_z}{\partial t}} \right)^{1/2} \frac{\mu_0^{5/3}}{\pi^{1/3}} t^{-5/3}$$

Ecuación 2.18

Esta ecuación se cumple todo el tiempo, excepto para las etapas temprana e intermedia donde, por los fenómenos físicos que ocurren ahí, el valor de las resistividades aparentes se sobreestiman debido a que el voltaje en esta etapa es muy bajo. Cuando en un sondeo de un medio estratificado existe alguna capa de resistividad mayor subyaciendo a otra de menor resistividad, las lecturas presentaran un descenso temporal del potencial en la interface (McNeill, 1994).

La medición del decaimiento del campo magnético a través del tiempo se realiza por medio de una sucesión de ventanas a lo largo del tiempo. Las ventanas van adaptando su tamaño al paso del tiempo, siendo desde unos microsegundos hasta llegar al orden de decenas o centenas de milisegundos dependiendo de la profundidad de investigación deseada. Las unidades que mide el receptor son V/m^2 ; sin embargo, como las señales son regularmente muy pequeñas, es común medir en $\mu V/m^2$.

2.2.4 Fuentes de Ruido

Las fuentes de ruido que se presentan en el sondeo de TEM pueden tener distintas características, tanto en el efecto que causarán en la señal transitoria como también su naturaleza y origen (Munkholm y Auken, 1996).

El ruido radiado proviene de señales de radio y transmisiones de radar, sin embargo, los efectos más importantes se deben a las tormentas eléctricas alrededor del mundo. Debido a que las tormentas se presentan de manera aleatoria, la optimización de la señal se puede realizar mediante “stacking” (apilamiento) con varias corridas.

La fuente más común de ruido son los campos magnéticos inducidos por las líneas de corriente de 50/60 Hz. El efecto de éstas se puede detectar como una suma de su tendencia armónica sobre la curva de decaimiento esperada. Es complicado mitigar esta clase de ruido, así que la mejor opción es alejarse lo más posible de la fuente (McNeill, 1994).

El efecto de inducción usualmente no tiene problemas pero no es así cuando existen materiales metálicos. Cuando se tienen materiales metálicos de dimensiones considerables, enterrados en el área de interés, el efecto en la inducción de los mismos provocará ruido en la señal. Este problema se soluciona probando diferentes ubicaciones para la espira receptora.

McNeill (1994) define que existe otro fenómeno donde el suelo se comporta como un capacitor, almacenando y liberando energía a manera de otra fuente; este fenómeno está asociado a una característica electroquímica de los suelos arcillosos; para reducir este efecto es suficiente con colocar la espira receptora fuera de la transmisora.

3 TRANSFORMADA ONDICULAR

La Transformada Ondicular es una transformada integral que usa kernels llamados ondículas. La ventaja principal del análisis de ondículas radica en su propiedad de localización tiempo-frecuencia. En la Figura 3.1 se pueden observar dos diferentes funciones conformadas por funciones periódicas de dos periodos fundamentales, la Transformada de Fourier puede detectar que existen las dos frecuencias, sin embargo los detecta indiscriminadamente y presenta ambos espectros iguales. La Transformada Ondicular en cambio puede percibir los contenidos de frecuencia y su ubicación en tiempo. Esto está relacionado con el uso de kernels a distintas escalas, donde a escalas grandes se pueden caracterizar los rasgos burdos de la señal y a escalas pequeñas, los rasgos finos. También, dentro del proceso de integración del kernel, está intrínseca una traslación del kernel, completando así la caracterización tiempo-frecuencia.

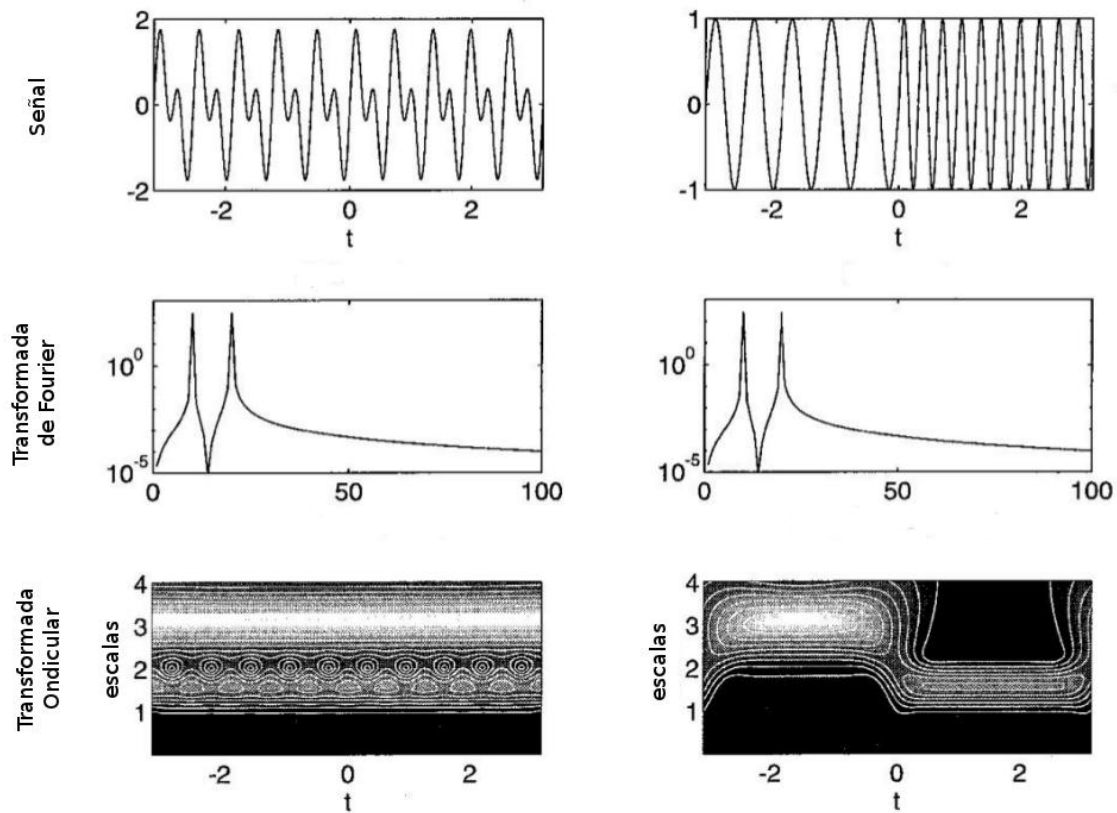


Figura 3.1 Capacidad de la T.O. de distinguir los contenidos de frecuencias en tiempo en comparación con la Transformada de Fourier (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1994).

Dentro del contexto de la Transformada Ondicular es más común darle el nombre de ondícula madre al mencionado kernel.

A partir de que las distintas ondículas madre presentan diferentes características espectrales, es de esperarse que la elección de una u otra ondícula madre contendrá, también, distinto tipo de información.

3.1 Definición y Atributos de la Transformada Ondicular

La Transformada Ondicular presenta varias ventajas sobre otros análisis debido a que obtiene gran cantidad de información espectral de la señal analizada (Moreau et al., 1999). La Transformada Ondicular se desarrolla a partir del producto interno de la señal $f(t)$ con la función $\Psi_{s,t}(u)$:

$$\begin{aligned} W_t(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\Psi_{s,t}(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{1}{\sqrt{s}}\Psi\left(\frac{u-t}{s}\right)du \end{aligned}$$

Ecuación 3.1

Donde $\Psi_{s,t}(u)$ es un conjunto de funciones hijas de una ondícula madre $\Psi_0(t)$ que dependen de un factor de escala, más conocido como parámetro de escala “s”, y “t” es el parámetro de localización o parámetro de traslación. Existen distintas notaciones para la Transformada Ondicular. Sin embargo, para fines prácticos, se utilizará la notación definida por Torrence y Compo (1998a). Al cambiar los valores de “s” la ondícula sufrirá dilataciones ($s>1$) y contracciones ($s<1$); el cambio en el parámetro “t” permitirá el análisis de $f(t)$ en una vecindad alrededor del punto “t”.

Se normalizan las transformadas a cada una de las escalas de tal forma que se cumpla que:

$$\|\Psi_{s,t}\|^2 = \int |\Psi_{s,t}(u)|^2 du = \int |\Psi(t)|^2 dt \quad \text{Ecuación 3.2}$$

O se puede normalizar, también, de la siguiente forma:

$$\int |\Psi(t)|^2 dt = 1 \quad \text{Ecuación 3.3}$$

3.1.1 Características de las Funciones Ondiculares

No se tiene definido un grupo de funciones ondiculares, sin embargo, para que cada función, elegida arbitrariamente, pueda ser utilizada como ondícula, tiene que cumplir dos puntos básicos (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1994):

- 1) Soporte compacto, es decir, decaimiento rápido. Para poder realizar localizaciones eficaces.
- 2) Media cero, condición de admisibilidad.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0 \quad \text{Ecuación 3.4}$$

Aunque los siguientes momentos pueden ser cero también.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \Psi(t) dt = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad \text{Ecuación 3.5}$$

3.1.2 Transformada Ondicular Inversa

No existe una transformación inversa como tal, pero se pueden aplicar deconvoluciones para reconstruir la señal (Kronland-Martinet et al., 1987). La reconstrucción se puede realizar con base en la fórmula:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} s^{-2} Wf(s, u) \Psi_{s,u}(t) ds du \quad \text{Ecuación 3.6}$$

Donde

$$C_\psi = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad \text{Ecuación 3.7}$$

y, $\widehat{\Psi}(\omega)$ representa la Transformada de Fourier de la función ondicular $\Psi_{s,u}(t)$.

3.1.3 Localización en tiempo-frecuencia

El análisis de las desviaciones estándar alrededor de un punto de medición ayudan a definir las ventanas de acción de la Transformada Ondicular.

La equivalencia de la Transformada Ondicular con base en el teorema de Parseval se define como sigue:

$$W_t(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\widehat{\Psi}_{s,t}(\omega)} d\omega \quad \text{Ecuación 3.8}$$

Antes de calcular la desviación estándar se tiene que definir alrededor de qué punto se calculará dicha desviación. Por lo que se puede calcular dicho punto a partir del centro de masa de la función.

$$\omega_{\Psi_{s,t}}^0 = \frac{\int_0^\infty \omega |\widehat{\Psi}_{s,t}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\widehat{\Psi}_{s,t}(\omega)|^2 d\omega} \quad \text{Ecuación 3.9}$$

$$t_0 = \frac{\int_0^\infty u |\Psi_{s,t}(u)|^2 du}{\int_0^\infty |\Psi_{s,t}(u)|^2 du} \quad \text{Ecuación 3.10}$$

De donde se puede calcular la desviación estándar como (Hogg y Craig, 1978):

$$\sigma_{\Psi_{s,t}} = \left(\int_0^\infty (\omega - \omega_{\widehat{\Psi}_{s,t}}^0)^2 |\widehat{\Psi}_{s,t}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Ecuación 3.11}$$

$$\sigma_{\Psi_{s,t}} = \left(\int_0^\infty (u - t_0)^2 |\Psi_{s,t}(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Ecuación 3.12}$$

De las ecuaciones anteriores, se pueden deducir las relaciones que se mantienen a lo largo del plano fase-espacio:

$$1) \sigma_{\Psi_{s,t}} = s \sigma_{\Psi_{1,0}}$$

$$2) \sigma_{\widehat{\Psi}_{s,t}} = \sigma_{\widehat{\Psi}_{1,0}} / s$$

$$3) \omega_{\widehat{\Psi}_{s,t}}^0 = \omega_{\widehat{\Psi}_{1,0}}^0 / s$$

El incremento de “s” provoca una dilatación de función, los valores de $\omega_{\hat{\varphi}_{s,t}}^0$ y $\sigma_{\hat{\varphi}_{s,t}}$ decrecen. En otras palabras, al dilatarse la función, la frecuencia central se mueve hacia las bajas frecuencias y la incertidumbre en frecuencia también baja. El fenómeno es inverso cuando “s” disminuye (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1994).

Las dimensiones de la celda para la Transformada Ondicular, en cada punto:

$$\left(t_0, \omega_{\hat{\varphi}_{s,t}}^0 \right) \quad \text{Ecuación 3.13}$$

vienen dadas como:

$$\left(t_0 \pm s\sigma_{\psi_{s,0}} \times \frac{\omega_{\hat{\varphi}_{1,0}}^0}{s} \pm \frac{\sigma_{\hat{\varphi}_{1,0}}}{s} \right) \quad \text{Ecuación 3.14}$$

A diferencia de la Transformada de Fourier por ventanas, en el caso de la T.O., las celdas de análisis se van adaptando proporcionalmente al cambio de la escala “s” (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1994). La relación de las dimensiones, es decir, el valor del área, siempre se conserva igual. A su vez, se conserva también el principio de incertidumbre (Morlet et al., 1982b).

3.1.4 Transformada Ondicular a Datos Discretos

El término “función ondicular” es indistintamente utilizado para referirse tanto a las ondículas ortogonales como las no-ortogonales. “Base Ondicular” se refiere solamente a un conjunto ortogonal de funciones. El uso de una base ortogonal implica la aplicación de una Transformada Ondicular Discreta, en cambio, el uso de una ondícula no-ortogonal puede ser aplicado tanto discreta como continua (Torrence y Compo, 1998a).

En este trabajo se aplica una transformada continua a datos discretos. La Transformada Ondicular Continua aplicada a una serie de datos discretos se puede escribir:

$$W_n(s) = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \overline{\Psi_0 \left[\frac{(n' - n)\delta t}{s} \right]} \quad \text{Ecuación 3.15}$$

Donde x_n es la serie de datos discreta y δt es el periodo de muestreo en tiempo de la señal discreta. El subíndice "0" indica que la ondícula Ψ ha sido normalizada. Esta ecuación se ha aplicado, en principio, a datos discretos sintéticos a partir de funciones periódicas conocidas para evaluar el funcionamiento del programa de transformación. Probar el algoritmo con funciones conocidas espectralmente y con la premisa de que existe una equivalencia entre el escalamiento de cada función ondicular y la frecuencia de Fourier (Figura 3.2), ayudó a visualizar previamente donde se debían encontrar los picos altos sobre su T.O. y definir, entonces, si el programa trabajaba correctamente.

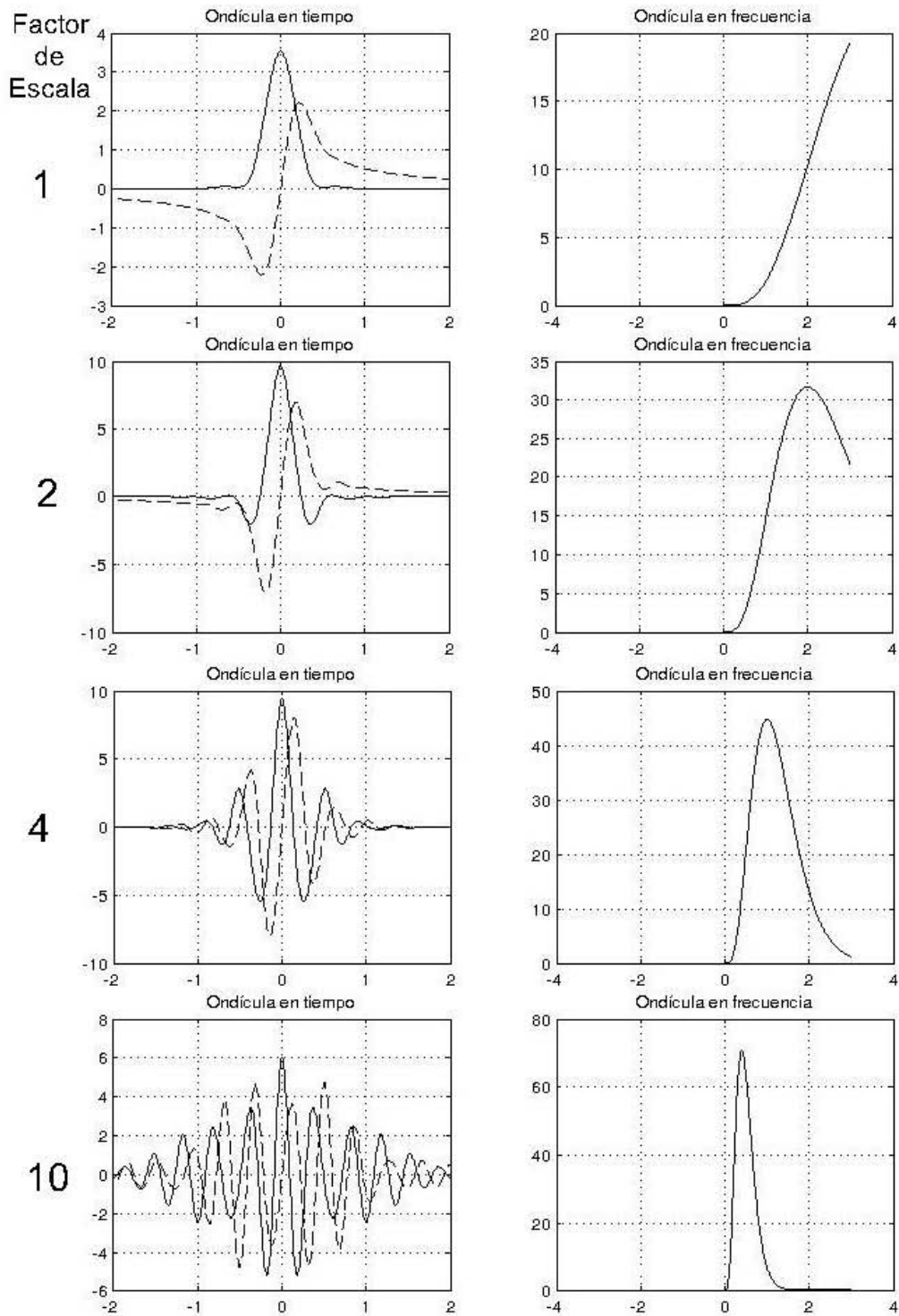


Figura 3.2 Representación gráfica del escalamiento de las funciones ondículas y sus picos en el dominio de las frecuencias para una ondícula madre de "Paul". La línea punteada es la parte imaginaria y la línea continua es la parte real para cada una de las ondículas en tiempo.

3.1.5 Teorema de la Convención en el dominio de la Transformada Ondicular

Torrence y Compo (1998a) establecen que es posible aplicar el teorema de la convolución para un desarrollo más simple y, también, más veloz (en tiempo de cómputo) para aplicar la T.O. Si se definen dos funciones f y g con valores complejos, y además $f^*(t) = \bar{f}(-t)$, donde \bar{f} es el complejo conjugado de f , se puede definir el teorema de la convolución mediante la ecuación siguiente (Kronland-Martinet et al., 1987):

$$(f^* * g)(b) = \int \bar{f}(t - b)g(t)dt = \int e^{ib\omega}F(\omega)G(\omega)d\omega \quad \text{Ecuación 3.16}$$

Al cambiar del espacio del tiempo al espacio de las frecuencias el cálculo de la convolución se vuelve tanto más sencillo como rápido. Entonces, transformando con Fourier la serie de datos x_n con la ayuda de la DFT (Transformada de Fourier Discreta, por sus siglas en inglés), la DFT de x_n es:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i k n / N} \quad \text{Ecuación 3.17}$$

Si la Transformada de Fourier de la función $\Psi_{s,t}(u)$ es $\hat{\Psi}_{s,t}(\omega)$, entonces:

$$\hat{\Psi}_{s_0,t_0}(\omega) = \hat{\Psi}_{s_0,t_1}(\omega) = \hat{\Psi}_{s_0,t_2}(\omega) = \dots = \hat{\Psi}_{s_0}(\omega) \quad \text{Ecuación 3.18}$$

$$\hat{\Psi}_{s,t}(\omega) = \hat{\Psi}_s(\omega) \quad \text{Ecuación 3.19}$$

De lo anterior, la Transformada Ondicular se escribe como (Torrence y Compo, 1998a):

$$W_n(s) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \hat{\Psi}_s(\omega_k) e^{i\omega_k n \delta t} \quad \text{Ecuación 3.20}$$

Es necesario hacer una normalización de las ondículas entre todas las escalas para facilitar la comparación entre las mismas. La normalización se realiza a partir hacer unitaria la energía de cada una de las ondículas a diferentes escalas. Es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}_s(\omega')|^2 d\omega' = 1 \quad \text{Ecuación 3.21}$$

$$\hat{\Psi}_s(\omega_k) = \sqrt{\frac{2\pi s}{\delta t}} \hat{\Psi}_{0,s}(s\omega_k) \quad \text{Ecuación 3.22}$$

3.2 Elección de las Escalas (s)

De manera convencional se construye una serie de escalas como potencias fraccionadas de 2, con base en la ecuación siguiente.

$$s_j = s_0 2^{j \delta j} \quad j = 0, 1, \dots, J \quad \text{Ecuación 3.23}$$

$$J = \delta j^{-1} \log_2(N \delta t / s_0)$$

Donde s_0 es la menor escala que se puede tomar con base en la equivalencia con el periodo de Fourier que es el criterio utilizado para definir el periodo más corto que se puede caracterizar con la Transformada de Fourier y es aproximadamente $2\delta t$. “ J ” determina la escala máxima. Pequeños valores de δj hacen más fina la muestra de escalas (Torrence y Compo, 1998a).

3.3 Cono de Influencia

Debido a que se trata con series finitas y no periódicas, se producen errores al principio y al final de las T.O. ya que la T.O. al igual que la Transformada de Fourier asumen señales cíclicas (Torrence y Compo, 1998a).

El cono de influencia sirve para delimitar una zona en donde los errores provocados por la no-periodicidad de las señales son insignificantes. Evidentemente, cuando la T.O. es aplicada a señales periódicas, estos errores no se manifiestan (Grinsted et al., 2004).

El cono de influencia está relacionado con el ancho de las ondículas. Como el ancho de las ondículas depende de la escala, entre mayor sea la escala, el cono de influencia se cerrará.

3.4 Reconstrucción de Señales en el Espacio de la Transformada Ondicular

Antes de entrar a los detalles de la reconstrucción de las señales a partir de su T.O., es indispensable conocer las características numéricas de la T.O. Aunque existen casos T.O. reales, en general la T.O. se puede dividir en parte real $\Re\{W_n(s)\}$ y su parte imaginaria $\Im\{W_n(s)\}$. La manera en que se representa, aquí, el espectro de potencia es mediante el cuadrado del módulo del valor de la T.O. (Kronland-Martinet et al., 1987) (Figura 3.3).

$$|W_n(s)|^2 = (\Re\{W_n(s)\})^2 + (\Im\{W_n(s)\})^2 \quad \text{Ecuación 3.24}$$

Y la fase como:

$$\tan^{-1} \left[\frac{\Im\{W_n(s)\}}{\Re\{W_n(s)\}} \right] \quad \text{Ecuación 3.25}$$

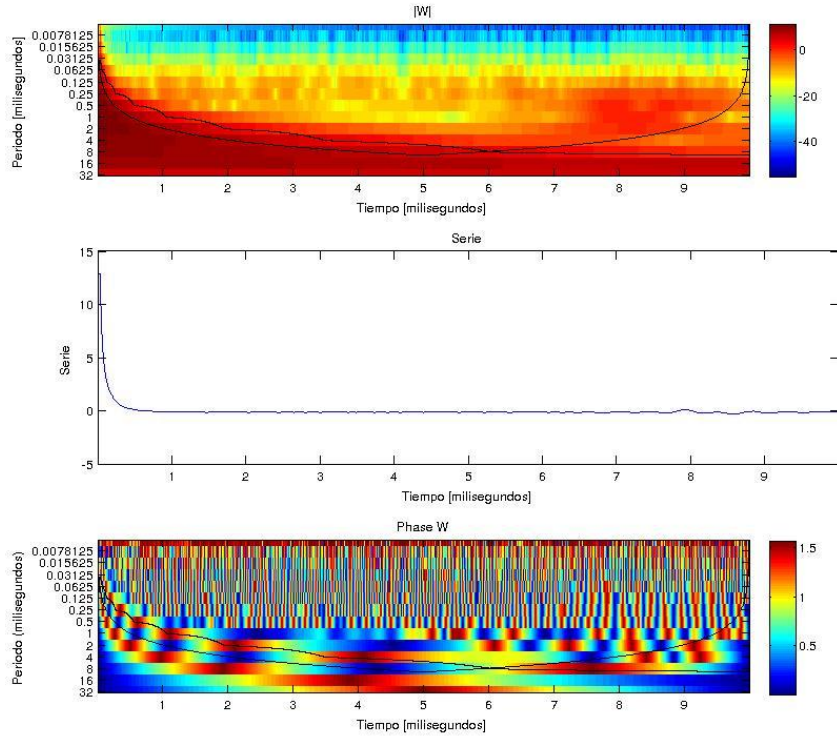


Figura 3.3 Representación gráfica de la T.O. Arriba, el espectro de la T.O., en medio la función analizada, y abajo, la fase de la T.O.

A partir de que la T.O. es la representación de las distintas bandas de frecuencia de una señal a determinados intervalos de tiempo, es posible reconstruir la señal con la suma de los aportes de cada una de las escalas (Losito y Angelini, 2002). El proceso de reconstrucción no es tan sencillo como en el caso de la Transformada de Fourier, donde existe una transformación inversa, sobre todo en el caso de las Transformadas Ondiculares continuas. Las Transformadas Ondiculares Continuas tienen la particularidad, como ya se mencionó, de tener información redundante de la señal.

Para reconstruir la señal a partir de una T.O. con función ondicular continua es necesario aplicar una ondícula diferente a la original. En este caso es posible utilizar:

$$x_n = \frac{\delta_j \delta t^{1/2}}{C_\delta \Psi_0(0)} \sum_{j=0}^J \frac{\Re\{W_n(s_j)\}}{s_j^{1/2}}$$

Ecuación 3.26

El factor $\Psi_0(0)$ remueve la energía escalada mientras que $s_j^{1/2}$ convierte la T.O. en densidad de energía. El C_δ es una constante para cada función ondicular (Torrence y Compo, 1998a).

3.5 Funciones Ondiculares

Como se ha mencionado, se pueden crear funciones ondiculares siempre que cumplan las condiciones mencionadas anteriormente (véase sección 3.1). Tres de las ondículas más utilizadas en distintos ámbitos son la “Mexican-Hat”, la de Morlet y la de Paul. Las características y aplicaciones de las mismas se pueden consultar en Torrence y Compo (1998a), Kumar y Foufoula-Georgiou (1994), Breaker *et al.* (2001), y Goupillaud *et al.* (1984).

Estas tres ondículas fueron las utilizadas en el desarrollo de este trabajo. A continuación se mencionan brevemente algunas de sus características matemáticas. Como ya se indicó, existe una relación entre la frecuencia de Fourier y la escala de la ondícula, esta relación se puede obtener fácilmente al sustituir una función periódica conocida e identificar la escala en donde se tiene el mayor aporte. Para las ondículas utilizadas, la longitud de onda de Fourier está incluida dentro de sus características.

3.5.1 Mexican-Hat

Esta ondícula forma parte del grupo de las derivadas de la Gaussiana (DOG, por sus siglas en inglés). Las ecuaciones que definen, de forma general, el comportamiento de las DOG son:

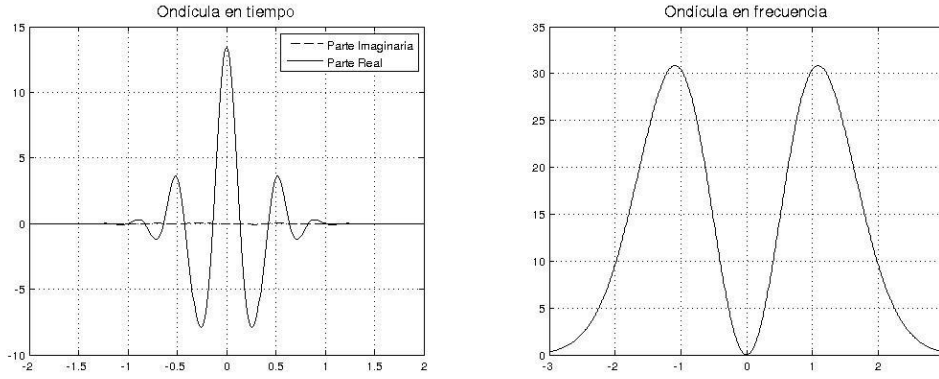


Figura 3.4 Función ondícula "Mexican-Hat", DOG(m=2). Del lado izquierdo su representación gráfica en tiempo, del lado derecho en frecuencias para una escala $s=1.3$.

Ondícula en tiempo:

$$\Psi_0(\eta) = \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{\Gamma(m + \frac{1}{2})}} \frac{d^m}{d\eta^m} \left(e^{-\eta^2/2} \right) \quad \text{Ecuación 3.27}$$

Ondícula en frecuencia:

$$\hat{\Psi}_0(s\omega) = \frac{-i^m}{\sqrt{\Gamma(m + \frac{1}{2})}} (s\omega)^m \left(e^{-(s\omega)^2/2} \right) \quad \text{Ecuación 3.28}$$

Ancho de la ondícula en tiempo:

$$\sqrt{2} s \quad \text{Ecuación 3.29}$$

Longitud de onda de Fourier:

$$\frac{2\pi s}{\sqrt{m + \frac{1}{2}}}$$

Ecuación 3.30

Para obtener las equivalencias de las ecuaciones anteriores para el caso de la Mexican-Hat es suficiente con sustituir $m=2$.

3.5.2 Morlet

La ondícula de Morlet está dada en tiempo por la ecuación (Morlet et al., 1982a):

$$\Psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} \left(e^{-i\omega_0\eta} - e^{-\omega_0^2/2} \right) e^{-\eta^2/2}$$

Ecuación 3.31

Para condiciones donde $\omega_0 \geq 5$, el segundo término de la función dentro del paréntesis se hace insignificante, por lo que es común encontrar las fórmulas, de forma generalizada, de la siguiente manera:

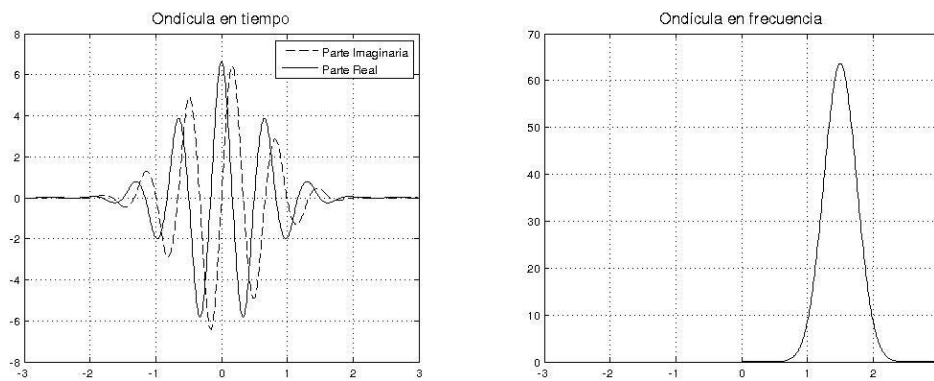


Figura 3.5. Función Ondicular de Morlet ($\omega_0=6$). Del lado izquierdo su representación gráfica en tiempo (línea punteada, parte imaginaria; línea continua, parte real), del lado derecho, su gráfica en frecuencia para una escala $s=4$.

Ondícula en tiempo:

$$\Psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} e^{-i\omega_0\eta} e^{-\eta^2/2} \quad \text{Ecuación 3.32}$$

Ondícula en frecuencia:

$$\hat{\Psi}_0(s\omega) = \pi^{-1/4} H(\omega) e^{-(s\omega - \omega_0)^2/2} \quad \text{Ecuación 3.33}$$

Ancho de la ondícula en tiempo:

$$\sqrt{2} s \quad \text{Ecuación 3.34}$$

Longitud de onda de Fourier:

$$\frac{4\pi s}{\omega_0 + \sqrt{2} + \omega_0^2} \quad \text{Ecuación 3.35}$$

Donde $H(\omega)$ es la función escalón de Heaviside,

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad \text{Ecuación 3.36}$$

De la observación de las ecuaciones de la ondícula de Morlet, se puede deducir fácilmente que el resultado de aplicar la T.O. con esta función ondicular resultará en el espacio de los números complejos. En otras palabras, será posible identificar amplitud y cambio de fase en las señales analizadas.

Es fundamental tener en cuenta que la ondícula de Morlet no cumple estrictamente con la condición de admisibilidad (Ecuación 3.4). Sin embargo, para valores de $\omega_0 \geq 5$, la corrección de los términos de la T.O. son más pequeños que los errores de redondeo de la computadora, por lo que la ondícula no es afectada pero sí afecta la reconstrucción de la señal (Zhang y Paulson, 1997). Así, la ondícula de Morlet es útil cuando se trabaja en el espacio de la T.O. (espacio tiempo frecuencia) (Breaker et al., 2001), pero tienen deficiencias cuando se trata de reconstruir la señal a partir de su T.O.

3.5.3 Paul

La ondícula de Paul al igual que la de Morlet, es una función ondicular compleja; en consecuencia, se pueden detectar desfases de la señal analizada. Sin embargo, la diferencia primordial que existe entre ambas, es que esta función cumple con el criterio de admisibilidad y con las demás condiciones para poder funcionar eficazmente.

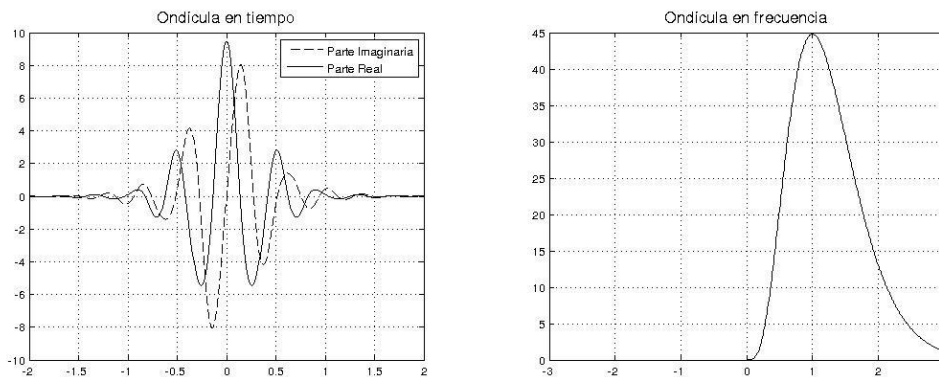


Figura 3.6 Función Ondicular de Paul ($m=4$). Del lado izquierdo su representación gráfica en tiempo (línea punteada, parte imaginaria; línea continua, parte real), del lado derecho, su gráfica en frecuencia para una escala $s=4$.

Ondícula en tiempo:

$$\Psi_0(\eta) = \frac{2^m i^m m!}{\sqrt{\pi(2m)!}} (1 - i\eta)^{-(m+1)}$$

Ecuación 3.37

Ondícula en frecuencia:

$$\hat{\Psi}_0(s\omega) = \frac{2^m}{\sqrt{m(2m-1)!}} H(\omega)(s\omega)^m e^{-s\omega} \quad \text{Ecuación 3.38}$$

Ancho de la ondícula en tiempo:

$$s/\sqrt{2} \quad \text{Ecuación 3.39}$$

Longitud de onda de Fourier:

$$\frac{4\pi s}{2m+1} \quad \text{Ecuación 3.40}$$

3.6 Selección de la función ondicular

Aunque la selección de la ondícula es arbitraria, se tienen algunas características básicas que se pueden considerar para su elección (Torrence y Compo, 1998a), y dependerá de las particularidades y necesidades de cada estudio. Enseguida se enumeran cuatro características que se pueden considerar y algunas ventajas inherentes a ellas.

3.6.1 *Ortogonal o No-ortogonal*

En el análisis ortogonal el número de convoluciones en cada escala es proporcional al ancho de la base ondicular a esa escala. La presentación de los resultados, en el espectro de potencia, tiene la apariencia de bloques discretos y es una representación compacta de la señal (Goupillaud et al., 1984). Por el contrario, el análisis de ondículas no-ortogonales es sumamente redundante a escalas grandes. Las ondículas no-ortogonales son utilizadas para el análisis de series continuas y con comportamientos suaves (Torrence y Compo, 1998a).

3.6.2 Complejas y Reales

Si se desea analizar la fase y la amplitud de una señal, el empleo de una ondícula compleja es la mejor opción. Y, para aislar picos o discontinuidades, una ondícula real es mejor (Kronland-Martinet et al., 1987).

3.6.3 Ancho de la Ondícula

La resolución temporal y en escala están fuertemente ligadas. Una ondícula estrecha en tiempo puede describir detalles finos de la señal en tiempo, sin embargo, su resolución en escala será muy pobre (Goupillaud et al., 1984). Para entender el comportamiento de la ondícula al modificar la escala se puede entender mejor si pensamos en una función impulso y su Transformada de Fourier. La delta de Dirac $\delta(t)$ tiene buena resolución en tiempo, pero su transformada es una línea constante de magnitud unitaria.

3.6.4 Forma

La forma de la ondícula es una decisión que depende de la señal que se analice. Para caracterizar señales con cambios abruptos y repentinos, una función ondicular que tenga cambios abruptos y repentinos; para caracterizar señales de tendencia suave, funciones ondiculares de comportamientos suaves (Torrence y Compo, 1998a).

4 PROCESADO

En relación al ruido utilizado en esta tesis para corromper los decaimientos sintéticos, se consideró que el ruido contenido en la señal se concentraba en las escalas más pequeñas, es decir, frecuencias más altas. Por lo que el algoritmo para limpiar el ruido de la señal de decaimiento, inicialmente, se enfocó en esas escalas para limpiarlas. Además, al tener la versatilidad de una Transformada Ondicular, se definió un criterio que pudiera aprovechar las propiedades de localización en tiempo-frecuencia.

Existe una gran variedad de familias de ondículas que pueden ser utilizadas para el proceso de transformación, y ya que cada autor puede definir por sí mismo un algoritmo para el filtrado, conlleva a una gran variedad de algoritmos con distintas características cada uno.

4.1 Algoritmo de Transformación Ondicular

El programa de transformación está basado en el algoritmo desarrollado por Torrence y Compo (1998a). Este programa realiza la transformación de una serie de datos equidistantes; antes de aplicarle la T.O. se normaliza la serie, restándole la media y dividiéndola entre su desviación estándar. Se utilizó dicho programa porque se tenía acceso al código fuente (Torrence y Compo, 1998b), por lo tanto, modificarlo para adecuarlo al tipo de datos que se estaban utilizando sería un trabajo más sencillo, debido a las características espectrales de un decaimiento de tipo exponencial.

Para disminuir los efectos de borde el programa rellena con ceros las series de datos hasta completar el número de muestras, a la siguiente potencia de 2 (Torrence y Compo, 1998b). Con este mismo objetivo, el de disminuir los efectos de borde, se dieron dos opciones más para el complemento de las señales. Debido a que la señal analizada no es una señal periódica se rellenaron las series con el valor mínimo, por una parte, y con el “espejo” de la señal, por el otro (Figura 4.1).

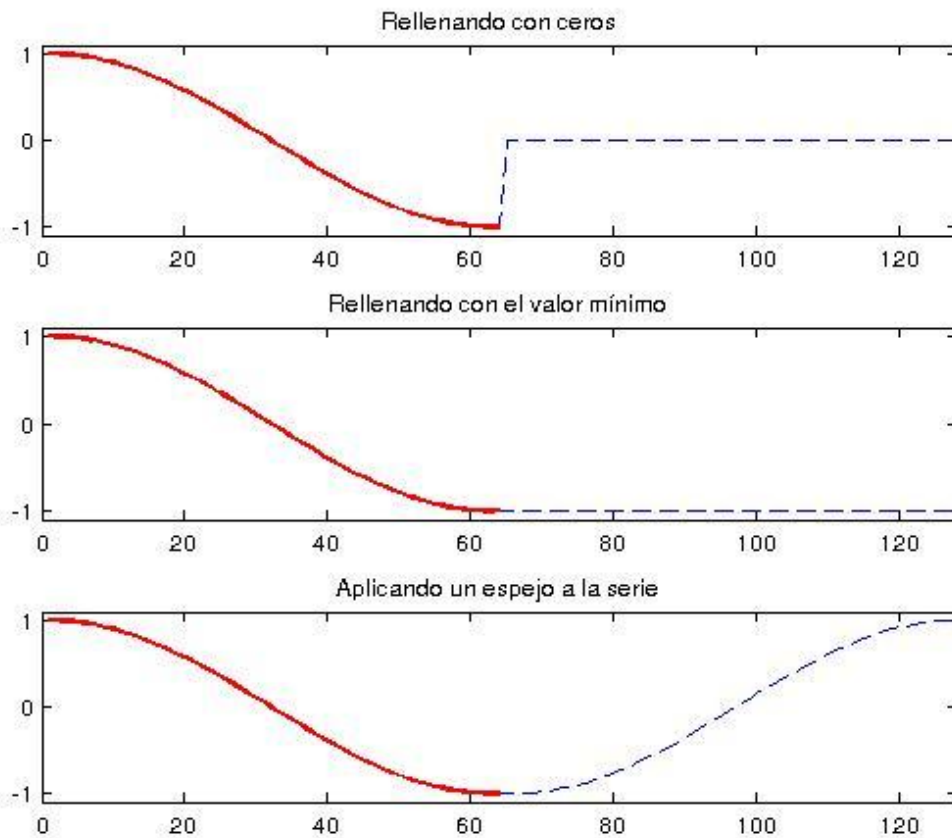


Figura 4.1 Métodos para rellenar las series. La línea roja representa una serie de 64 muestras. Al completar la serie a la siguiente potencia de 2 (128 muestras), se rellena con: ceros (primera gráfica), el valor mínimo (segunda gráfica) y con el espejo de la serie (tercer gráfica).

Con la serie completada, con cualquiera de los métodos descritos en la Figura 4.1, se realiza la Transformada de Fourier sobre la serie. Se puede realizar el completado de la serie debido a que las propiedades de la T.O. y, fundamentalmente, las del proceso de convolución lo permiten (Oppenheim y Schaffer, 1989). Así, mediante el teorema de la convolución (tal como se describe en el apartado 3.1.5, de este trabajo) el método reduce considerablemente el tiempo de cómputo.

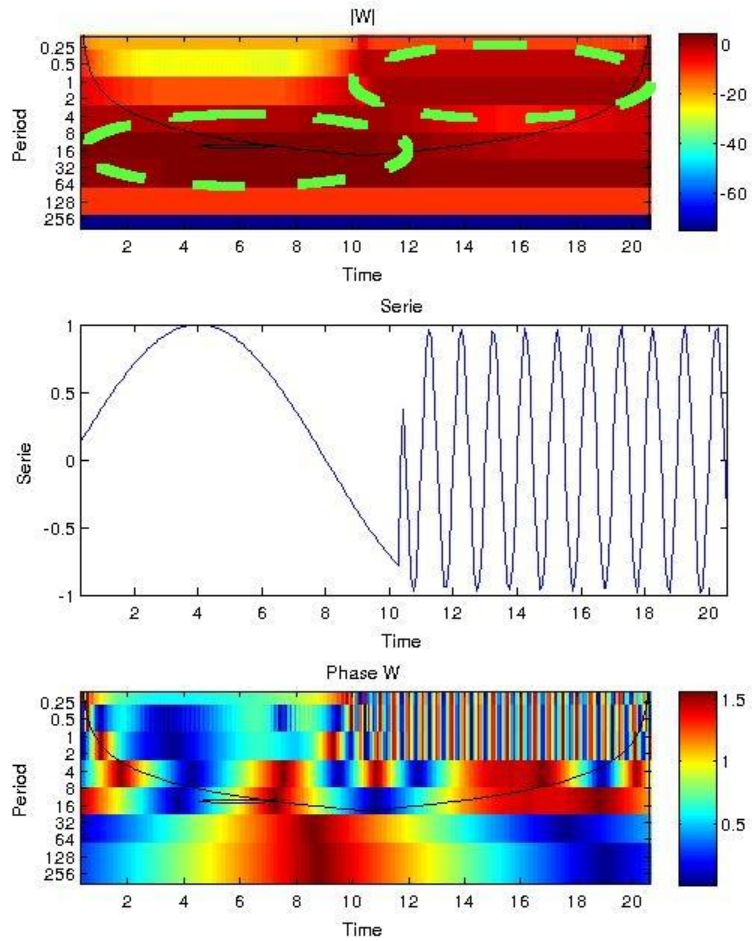


Figura 4.2 Espectro de la Transformada Ondicular de una señal periódica, esquema superior (seno de periodo 10 adyacente a un seno de periodo 1 en la segunda sección de la gráfica); en el esquema intermedio se observa la gráfica de la señal analizada y, en el esquema inferior, la fase de la Transformada Ondicular. Se observan los contenidos altos de frecuencia en las áreas correspondientes a estos periodos y enmarcados por elipses verdes, en el espectro.

Empleando una señal sinusoidal de periodo conocido fue fácil corroborar que el algoritmo de transformación ondicular ubicaba los contenidos de frecuencia en las escalas correspondientes (Figura 4.2).

El algoritmo propuesto en este trabajo tiene la finalidad de filtrar una señal en el dominio tiempo-frecuencia, entonces fue necesario reconstruir la señal desde su T.O. Se elaboró un programa que reconstruyera eficazmente la señal original. Debido a que el programa de transformación se basa en un código previamente compilado, la reconstrucción partió

de los resultados generados por dicho programa. La Ecuación 3.26 parte de los conceptos publicados por Torrence y Compo (1998a) y sirvió para programar el algoritmo de reconstrucción. La eficacia de la reconstrucción fue probada con funciones del tipo de las señales analizadas, en este caso, funciones de decaimiento exponencial a las que se les sumó un ruido aleatorio.

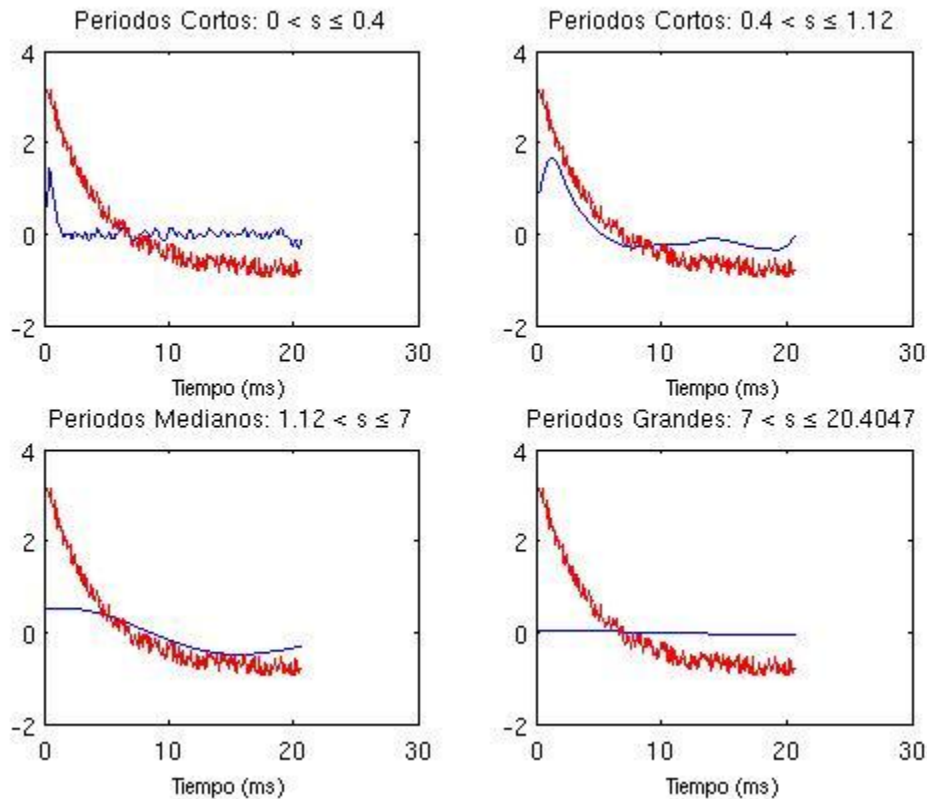


Figura 4.3 Reconstrucción de una señal de decaimiento con distintos intervalos de escalas. La línea roja es la señal y la línea azul es la reconstrucción para los rangos definidos arriba de cada una de las gráficas.

La Figura 4.3 muestra los aportes de cada rango de escalas (señalado arriba de cada gráfica) para la reconstrucción de la señal. Las escalas pequeñas reconstruyen los detalles finos de la señal, mientras que las escalas grandes describen la tendencia o rasgos más globales de la señal. En la Figura 4.4 se muestra la señal reconstruida con los aportes de todas las posibles escalas definidas para esta señal en particular. Cada señal, como en el

caso del análisis de Fourier, tiene un rango de escalas posibles que pueden contribuir para la representación de la señal.

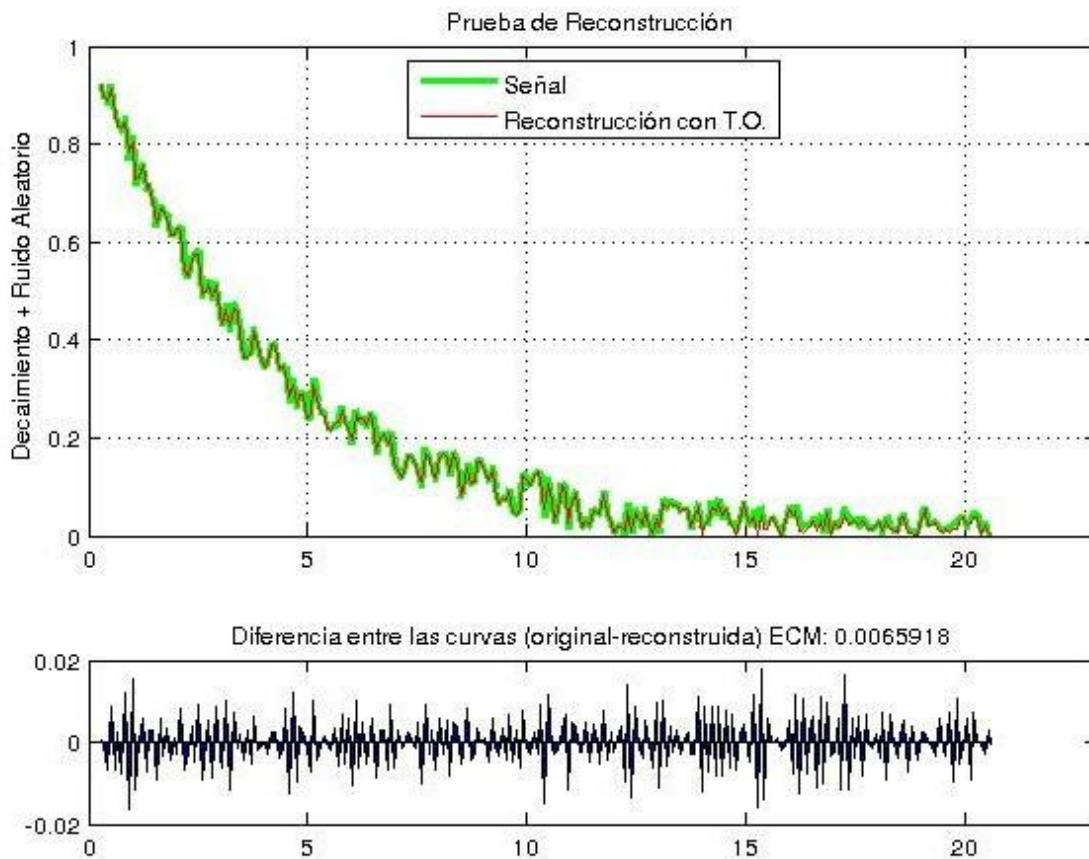


Figura 4.4 Reconstrucción de la señal de decaimiento con todas las escalas. En verde la señal original, y en rojo, la reconstrucción a partir de su T.O. (gráfica superior). La gráfica inferior muestra el error en la reconstrucción.

4.2 Algoritmo de Filtrado

El algoritmo de filtrado utilizado para reducir el ruido a la señal fue un criterio de umbral (conocido por su nombre en inglés, threshold), considerando que el espectro del ruido se comportaba diferente en amplitud y en frecuencia que la tendencia de la señal. El criterio fue adaptativo para cada escala de la T.O., descrito de manera más concisa: a cada escala el valor del umbral iba cambiando en relación con su valor máximo.

Para ejecutar el programa, se fija un umbral porcentual (threshold, en inglés). En cada una de las escalas se busca el valor máximo, ese valor máximo se considera el 100%, y con el umbral porcentual se define la línea de referencia para el corte.

Se programaron dos opciones diferentes que se denominan: threshold 1 y threshold 2. El threshold 1 consiste en anular los puntos por debajo del umbral (porcentaje de corte) y, en el criterio de threshold 2 se anulan los puntos por encima de él (Figura 4.5).

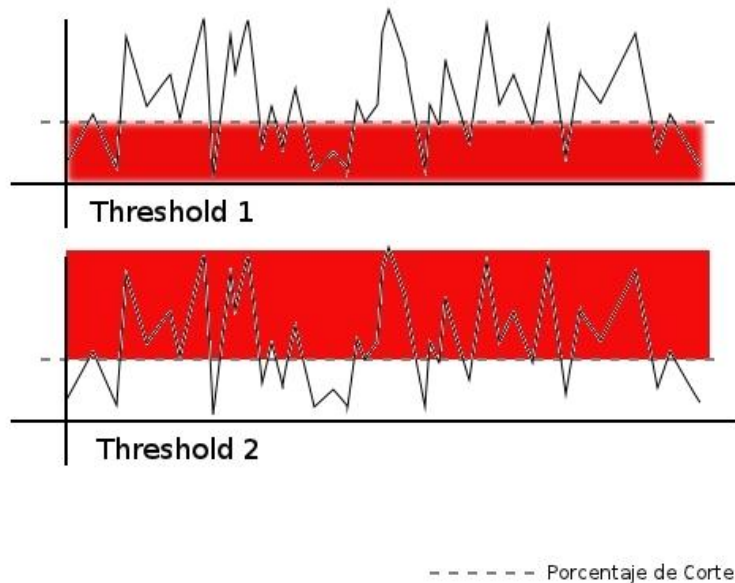


Figura 4.5 Diagrama esquemático de los dos criterios de filtrado. La banda en rojo son los valores que son anulados.

Es importante mencionar que el programa también tiene la posibilidad de que el usuario defina a qué escalas aplicar el criterio. En este trabajo se utilizaron las escalas más pequeñas (frecuencias altas), porque se planteó desde el principio que los efectos del ruido se encontraban en estas escalas. Esta característica, junto con la mencionada en el párrafo anterior, representan de manera importante las ventajas que tiene el utilizar la T.O. En la Figura 4.3 se puede observar, de manera esquemática, como contribuyen las diferentes escalas a la reconstrucción de la señal y de sus detalles.

4.3 Datos

Originalmente se pensó utilizar el algoritmo sobre datos provenientes de una consola TerraTEM existente en el Posgrado en Ciencias de la Tierra (UNAM). Sin embargo, las señales obtenidas por el equipo TerraTEM, en su forma más cruda, tienen un preprocesado. Los preprocesos más comunes, utilizados en datos de TEM, son el “binning” y el “stacking” (Monash Geoscope, 2006). Estos procesos pueden ser realizados en diferente orden según las consideraciones de cada software en la consola.

Se realizaron algunas pruebas a los datos que se obtuvieron de la consola TerraTEM, sin embargo, no parecía tener un efecto positivo considerable, debido a que las curvas no tenían la suficiente información para ser filtradas, ya que habían sido previamente sometidas al proceso de “stacking” y “binning”. Por esta razón y porque es difícil acceder a los datos crudos del equipo, se optó por crear una señal sintética por medio de un modelador matemático.

El programa EMgui es un software que tiene la capacidad de construir las respuestas electromagnéticas de un medio dado, además de poder invertir los datos de métodos electromagnéticos (<http://p223suite.sourceforge.net/>). El programa fue utilizado para simular los decaimientos sintéticos con base en las características del equipo (EMgui tiene la ventaja de poder configurar la forma de la curva de inyección de corriente así como las características del receptor, R_x , como su frecuencia de muestreo e intervalo de medición). Se utilizaron parámetros en el programa para producir señales similares a las medidas por el equipo TerraTEM. El equipo inyecta una corriente en forma de onda cuadrada (Figura 4.7) y se mide a razón de 0.002 milisegundos (500 kHz), de forma estándar.

Se creó un modelo de capas para generar una respuesta electromagnética de acuerdo con las configuraciones antes mencionadas. Aunque el modelo no es relevante, debido a que no es el objetivo de este trabajo, se presenta en la Figura 4.8.

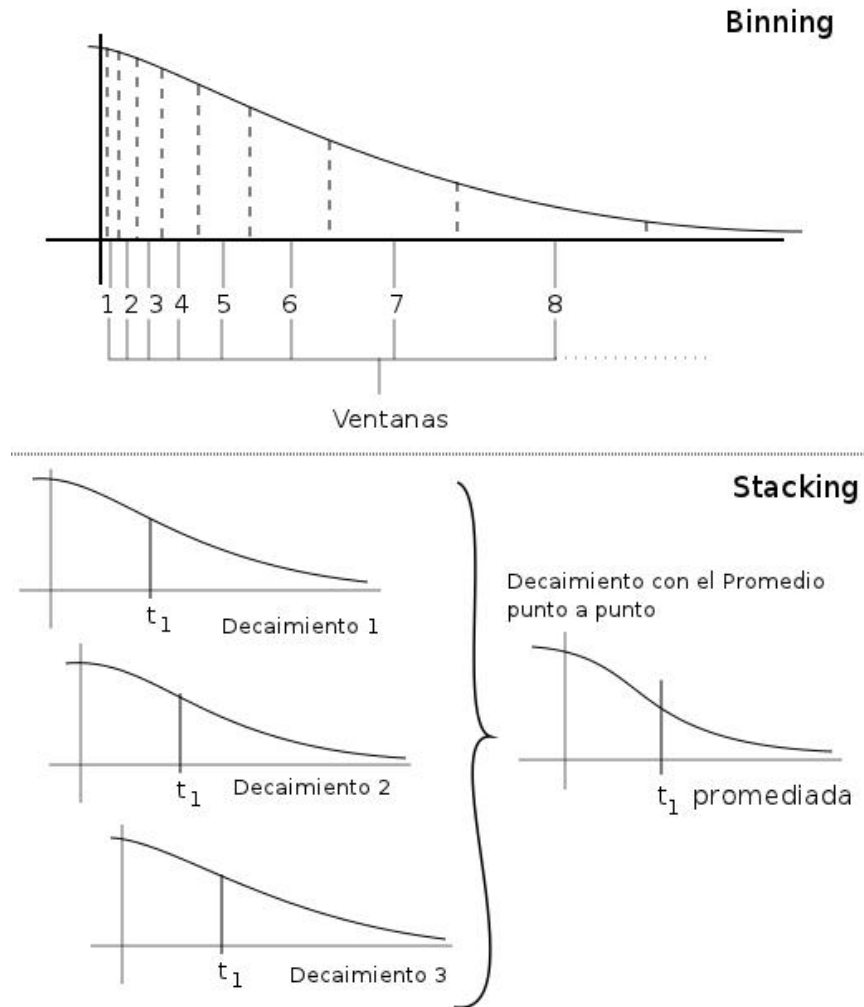


Figura 4.6 Esquemas de los procesos de "binning" y "stacking".

Se generó una serie tiempo buscando reproducir la respuesta cruda (sin preproceso de binning y stacking) a partir de la teoría, tal como se puede observar en la Figura 4.7, esto generó una respuesta cruda ideal. Al tener la serie ideal, para completar una serie ruidosa, se adicionó una señal de ruido atmosférico (esférica), medida previamente con un equipo MegaTEM (<http://www.fugroairborne.com/services/geophysicalservices/bysurvey/-electromagnetics/fixed-wing-electromagnetic/megatem>).

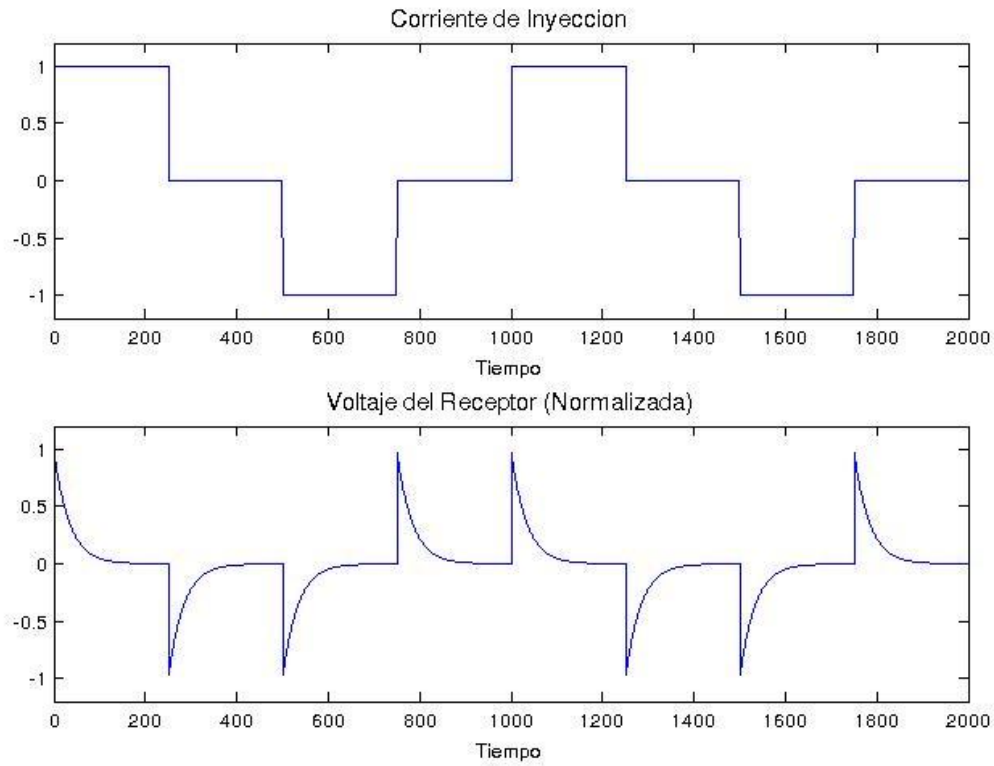


Figura 4.7 Forma de la curva de inyección (arriba) y esquema de la respuesta detectada por el receptor Rx (abajo) de acuerdo con la curva de inyección.

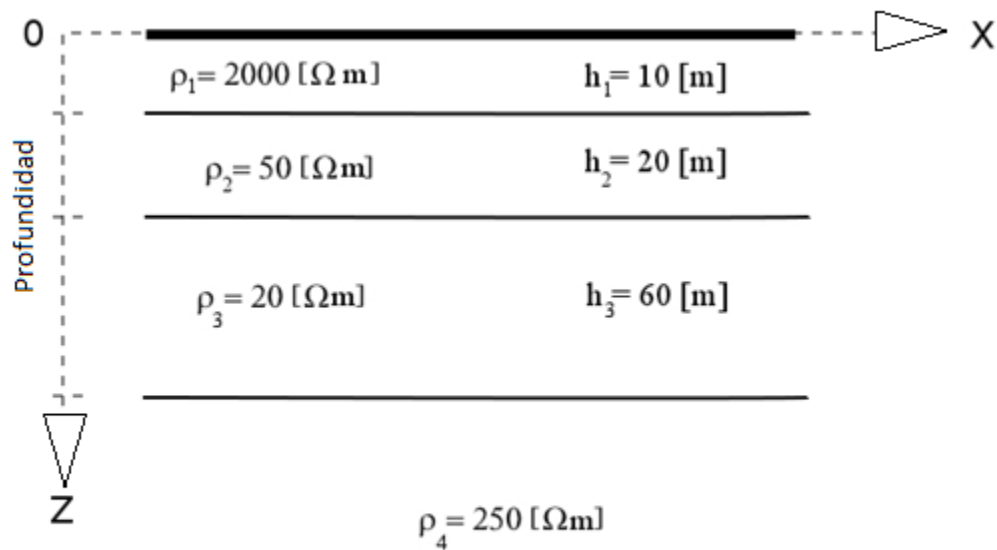


Figura 4.8 Modelo de capas utilizado en la generación de la señal de decaimiento sintética.

La serie cruda fue procesada antes y después de ser sometida a los métodos de stacking y binning, y así generar el registro final regularmente encontrado en las consolas de TEM para poder ser comparado. Además se realizó el proceso sobre cada serie y así comparar los resultados sobre la curva ideal.

El generar una señal sintética tiene la ventaja de poder ser comparada con una curva ideal al final del filtrado.

5 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El análisis de señales mediante la T.O. representa una gran ventaja porque localiza contenidos de frecuencia en intervalos de tiempo determinados. El ruido esférico utilizado aquí, en este trabajo, para corromper la señal sintética es proveniente de tormentas eléctricas y fenómenos electromagnéticos atmosféricos (Sección 2.2.4). Además, es necesario considerar que una señal de decaimiento contiene una gran cantidad de frecuencias que ayudan a describir el comportamiento de su tendencia, y el ruido se presenta de forma aleatoria en frecuencia, tiempo y amplitud, entonces al aplicar un filtro como los del dominio de Fourier se pierde eficacia por dos principales razones: primero, al filtrar las frecuencias de los pulsos de ruido es probable que también se vayan armónicos relacionados con la tendencia de la señal, y segundo, es posible que el ruido de la señal esté contenido en más de una frecuencia y no se podrá quitar con un filtrado tan simple. Entonces, la localización de anomalías en tiempo-frecuencia ayuda a limpiar contenidos anómalos de frecuencia en determinados intervalos de tiempo.

Aplicar el método sobre la serie completa para después ser procesada por binning y stacking no generó un resultado diferente que la serie sometida al binning y stacking solamente. En cambio, se consideró que los puntos fuertes de este método es el de filtrar cada decaimiento independiente, sin la necesidad de crear varios decaimientos para ser comparados entre sí (como necesita el método de stacking), y, además, se tiene la ventaja de tener un algoritmo matemático para filtrar las señales a partir de criterios espectrales y no solamente estadísticos. Enseguida se muestran los resultados obtenidos a partir de esta última metodología.

Se aplicaron ambos criterios de filtrado mencionados en la sección 4.2 (threshold 1 y threshold 2). Las pruebas con los diferentes valores de umbral y tomando distinta cantidad de escalas para el filtrado se presentan de forma esquemática y resumida con a continuación, con base en los mejores resultados y los más significativos.

Los algoritmos descritos en el capítulo anterior se aplicaron para probar el efecto que causan sobre los resultados de filtrado. Las curvas de error fueron calculadas como la diferencia entre la curva analizada (curva original o la curva después del filtrado) y la curva ideal. La forma de medir la eficacia del filtrado se hizo mediante diferencias entre las curvas de error; para poder visualizar las mejorías en la señal con respecto del error original se utilizaron las gráficas por áreas. Las áreas positivas de las gráficas (en azul) simbolizan una mejoría de la señal, es decir, la curva después del filtrado sobre esos puntos se acercó más a la curva ideal; las áreas rojas, en cambio, se refieren a un aumento del error, es decir, que la curva después del filtrado se alejó de la curva ideal más que la curva original (de la Figura 5.1 a la Figura 5.4). Se aplicaron pruebas sobre distintos valores del umbral para cada uno de los criterios y tomando distinto número de escalas, partiendo desde la escala más pequeña hasta incluir todas. A continuación se muestran las gráficas que exponen de manera tangible la evolución en el filtrado de la señal junto con el valor de su error cuadrático medio (ECM).

Al aplicar el criterio a la escala más pequeña no se observó un efecto positivo en la señal. Ninguno de los dos criterios independientemente del valor del umbral utilizado no disminuyeron el ruido en la señal, este efecto puede estar relacionado al periodo de muestreo de la señal de MegaTEM utilizada para corromper la señal ideal (1/23040 segundos).

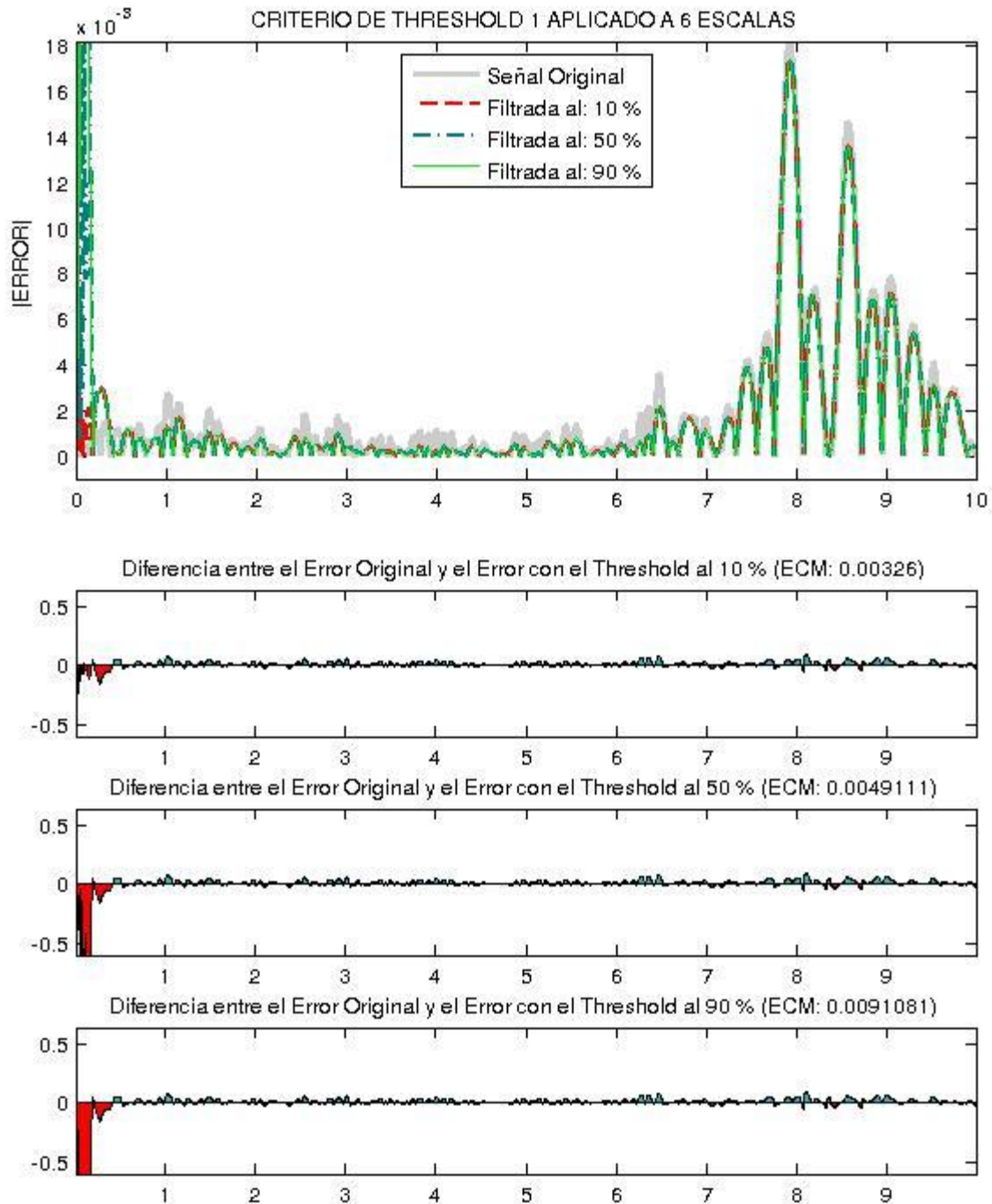


Figura 5.1 Resultados del Threshold 1 aplicado a 6 escalas. La gráfica superior muestra las curvas de error (diferencia entre la señal original y la curva después del filtrado). Las tres gráficas inferiores muestran las áreas de mejoría en color azul y las áreas donde aumento el error en rojo, para los porcentajes señalados arriba de cada una de las gráficas.

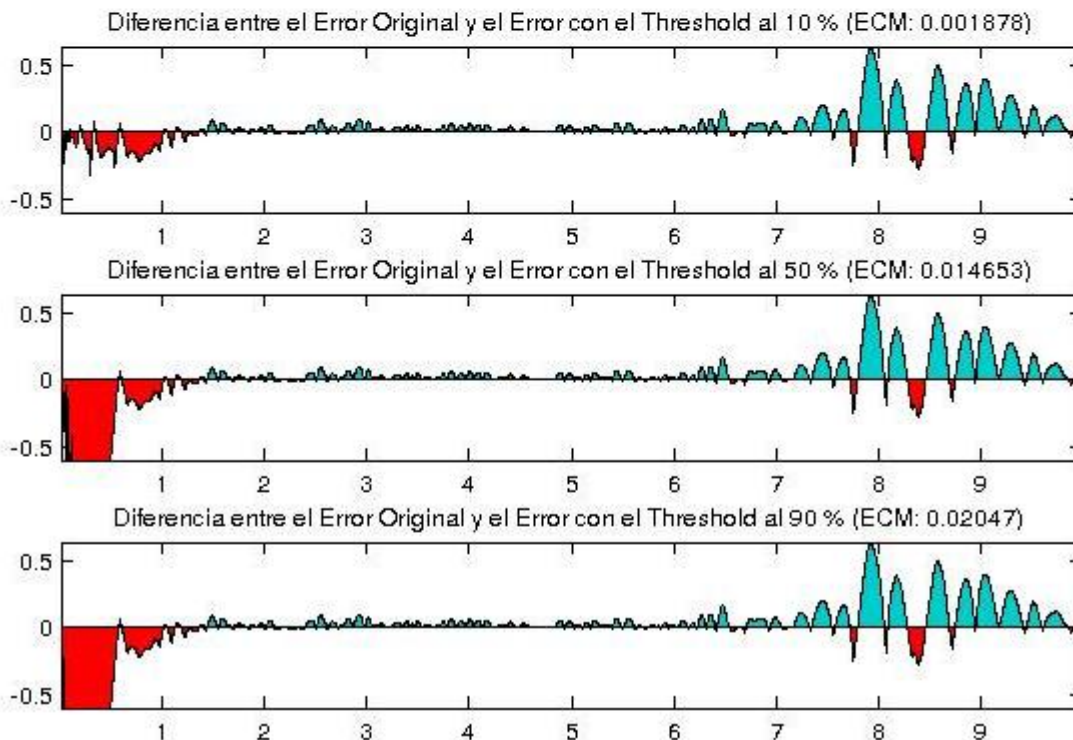
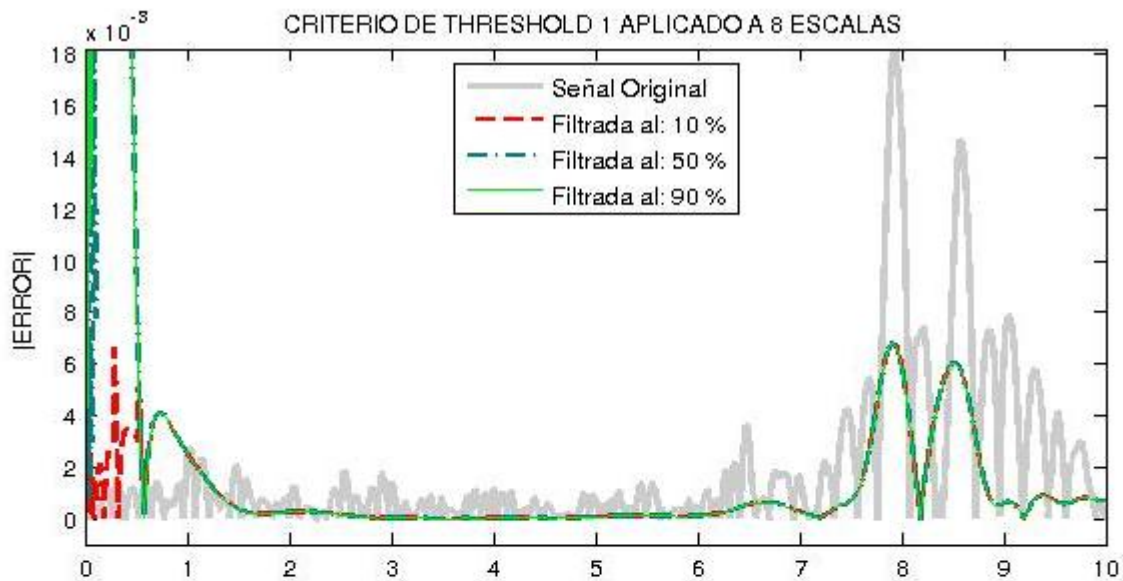


Figura 5.2 Resultados del Threshold 1 aplicado a 8 escalas. La gráfica superior muestra las curvas de error (diferencia entre la señal original y la curva después del filtrado). Las tres gráficas inferiores muestran las áreas de mejora en color azul y las áreas donde aumento el error en rojo, para los porcentajes señalados arriba de cada una de las gráficas.

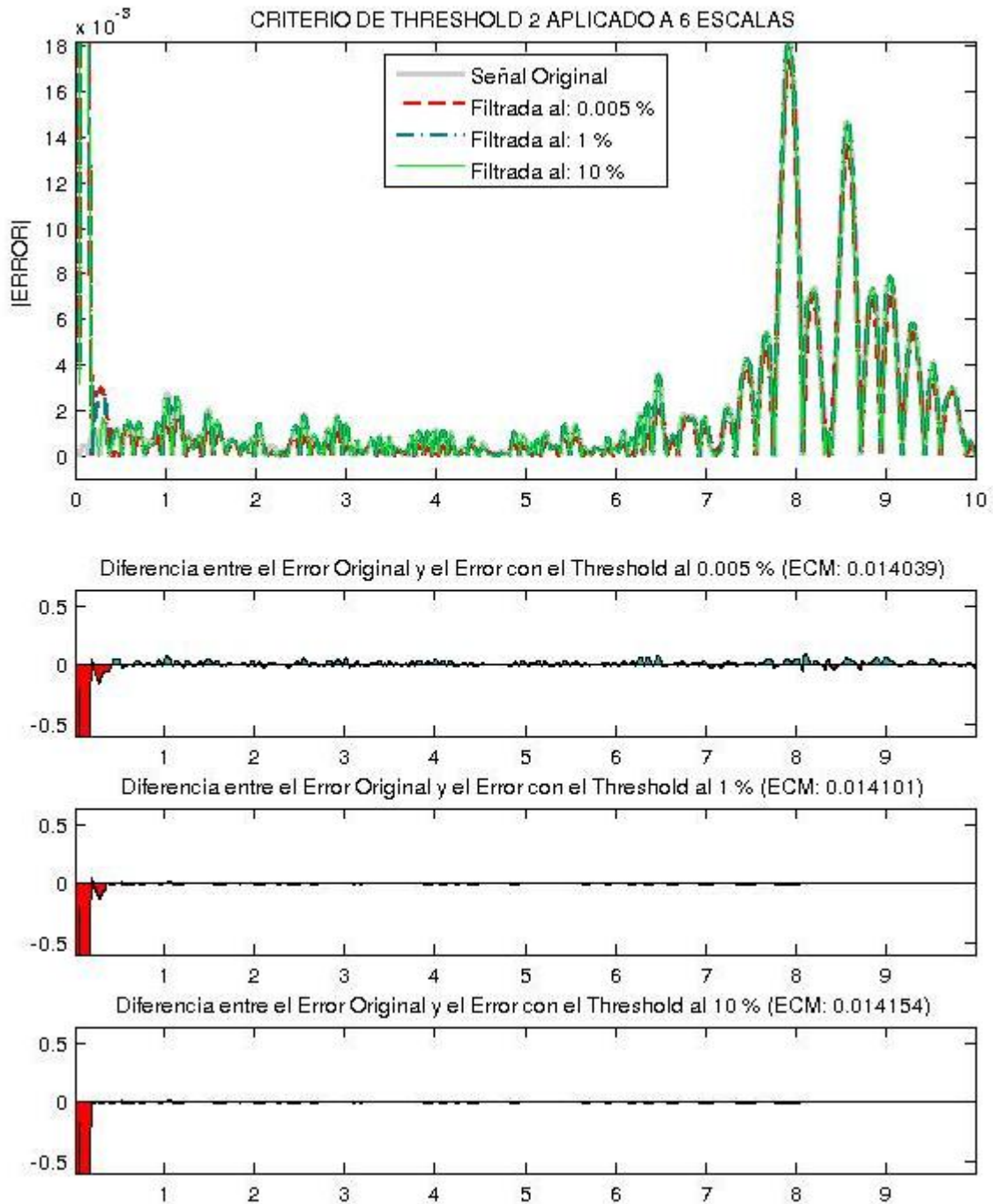


Figura 5.3 Resultados del Threshold 2 aplicado a 6 escalas. La gráfica superior muestra las curvas de error (diferencia entre la señal original y la curva después del filtrado). Las tres gráficas inferiores muestran las áreas de mejoría en color azul y las áreas donde aumento el error en rojo, para los porcentajes señalados arriba de cada una de las gráficas.

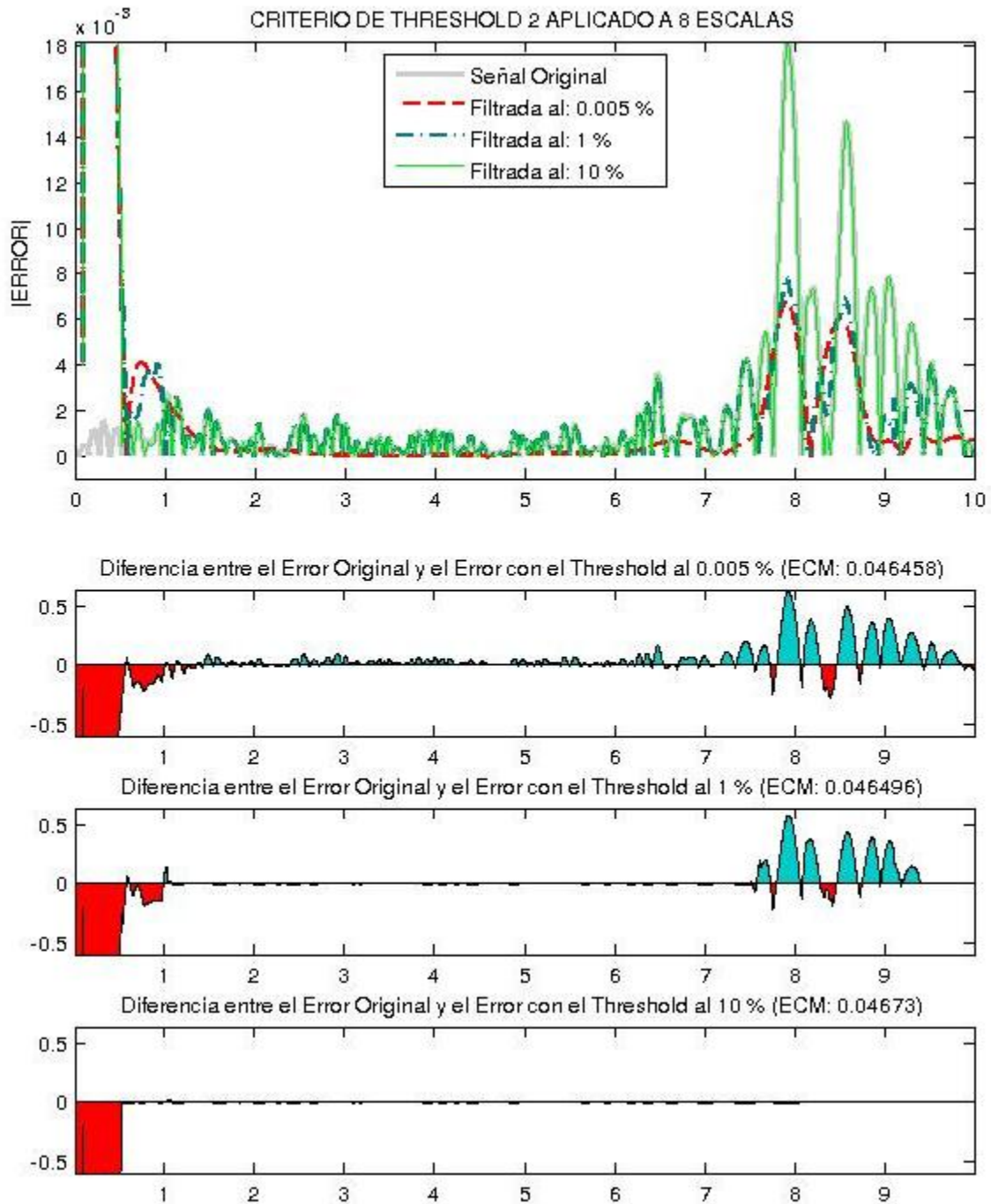


Figura 5.4 Resultados del Threshold 2 aplicado a 8 escalas. La gráfica superior muestra las curvas de error (diferencia entre la señal original y la curva después del filtrado). Las tres gráficas inferiores muestran las áreas de mejora en color azul y las áreas donde aumento el error en rojo, para los porcentajes señalados arriba de cada una de las gráficas.

	Threshold 1			Threshold 2		
	10 %	50 %	90 %	0.005 %	1.0 %	10 %
1 Escala	0.0034837	0.0034857	0.0034862	0.0035029	0.0035029	0.0035029
6 Escalas	0.0032600	0.0049111	0.0091081	0.0140390	0.0141010	0.0141540
8 Escalas	0.0018780	0.0146530	0.0204700	0.0464580	0.0464960	0.0467300
ECM_{original} = 0.0034757						

Tabla 1. Los números de las casillas son el valor del error cuadrático medio (ECM). Se esquematiza mediante un código de colores, los azules representan una disminución del error y los rojos un aumento del error, con respecto del error original (ECM-original).

Al tomar seis escalas, el cambio es más evidente aunque no contundente. El cambio más significativo se puede observar en los primeros tiempos del decaimiento (primeros 0.4 milisegundos) como un aumento del error debido a la afectación del criterio sobre la tendencia de la señal ideal, principalmente. Este aumento se ve principalmente sobre el criterio de threshold 2 y puede ser observado en la Figura 5.3 en los primeros 0.5 milisegundos de las tres gráficas inferiores. Sin embargo este efecto se ve empalmado en ambos criterios y en relación al valor del umbral utilizado, lo que se corrobora al analizar la Figura 5.1 donde se observa un incremento en el error con el porcentaje de 50 y 90 por ciento. El criterio de threshold 2 aplicado a seis escalas reveló sus mejorías después de los 0.5 milisegundos pero solamente con el porcentaje de corte al 0.005; antes de ese tiempo se observan, únicamente, aumentos en el error reflejados en la tendencia de la señal para todos los valores del umbral mostrados. El criterio de threshold 1 utilizando seis escalas (Figura 5.1), muestra mejorías con todos los porcentajes después de los 0.5 milisegundos, en comparación con el threshold 2, utilizando el mismo número de escalas.

Con el criterio de filtrado aplicado a las ocho escalas más pequeñas, se observaron mejores resultados que al utilizar solamente seis. Sin embargo, las gráficas que corresponden al criterio de threshold 2 no muestran una mejoría de la señal en comparación con el aumento del error como se puede observar en la Figura 5.4. Con este criterio se puede detectar una mejoría drástica con el porcentaje al 0.005% (en comparación con los otros porcentajes, Figura 5.4). Sin embargo, esta mejoría (entre los 7 y 10 milisegundos) también es acompañada con un aumento del error en la parte inicial

de la señal, lo que se puede observar comparando las áreas azules y rojas de la figura correspondiente. Al comparar el error cuadrático medio de la señal original ($ECM_{original}=0.0034757$) se puede observar que los ECM aumentan para las señales filtradas; con el mismo criterio y tomando el mismo número de escalas, la señal con el menor error es la del umbral al 0.005% donde se obtiene un valor de $ECM=0.046458$, lo que significa un aumento del error si se compara con el error original.

Con el threshold 1 y tomando las 8 escalas más pequeñas se obtuvieron los mejores resultados (Figura 5.2). Con este criterio, el de threshold 1, se pudieron obtener mejorías en la señal al disminuir el efecto del ruido y además, sin sacrificar, como en el caso del criterio de threshold 2, la tendencia de la señal. Esa pérdida en la tendencia de la señal se puede observar en los incrementos del error, que son detectados como áreas de color rojo en las tres gráficas inferiores de la figura. Si se observan los valores del ECM, mostrados en la Tabla 1, también se detecta una mejoría en relación a este valor. Se presenta un aumento en la amplitud del error de los primeros 1.5 milisegundos. A partir de los 1.5 milisegundos hasta los 7 milisegundos se observó una clara mejoría de la señal, acercándose a la ideal considerablemente, sobre todo con el 10% de umbral. Posterior a esos 7 milisegundos también se puede observar una mejoría; el análisis de las gráficas muestra que no es sustancial como en la sección intermedia (de los 1.5 a los 7 milisegundos), sin embargo, los datos mejoran. Esto resulta positivo debido a que las mejorías en la relación señal-ruido se tienen a partir de los 1.5 milisegundos y ésta es la parte de la señal donde se tienen más afectaciones por ruido en la adquisición de la señal.

Las pruebas se realizaron aumentando o disminuyendo el porcentaje de corte y buscando, en cada caso, los mejores resultados en consideración de su ECM (Tabla 1) y sus gráficas de error con áreas de colores.

6 CONCLUSIONES

Las señales de TEM presentan ruido debido a diversas contribuciones electromagnéticas del medio que se manifiesta como error en la observación, así como se mencionó en el capítulo 2.2.4. El ruido de tipo esférico, una fuente de ruido frecuente, tiene la peculiaridad de presentarse aleatoriamente en frecuencia y tiempo. De esta manera se buscó una estrategia para abordar dicho problema y aquí se presentan los resultados obtenidos para disminuir las contribuciones de ruido presentes en esta señal en particular.

Los criterios de filtrado previos al análisis son: el espectro del ruido se encuentra localizado en las frecuencias más altas y, existe una diferencia energética entre el ruido y la señal de interés.

La T.O. constituyó una herramienta apropiada debido a sus características de localización en tiempo-frecuencia, a diferencia de los métodos tradicionales como el análisis de Fourier, donde las frecuencias son localizadas sin discriminar los rangos de tiempo en los que están contenidas. El desarrollo de este trabajo demostró que la T.O. puede ser utilizada como base de filtrado para localizar contenidos anómalos de frecuencias, pero además, perdiendo menos información que con los otros métodos.

Las bondades que presenta la T.O. permitieron realizar un programa para filtrar las señales de TEM. Con base en las hipótesis previas se definieron los dos criterios de filtrado: donde se cortan las energías más bajas (threshold 1) y en el otro, las más altas (threshold 2).

Con ambos criterios fue posible constatar que al tomar solamente la primera escala y variando los umbrales, el ruido no presentaba variaciones. Sin embargo, los resultados obtenidos al tomar paulatinamente más escalas para el filtrado, señalaron que altas amplitudes de la descomposición están más ligadas a la tendencia de la señal que al ruido; al remover las amplitudes altas por encima del umbral la tendencia de la señal empieza a modificarse lo que aumenta el error en los primeros 0.5 milisegundos.

A partir de los resultados anteriores, se pueden generar las conclusiones de este trabajo. La amplitud del ruido es baja y el ruido se encuentra contenido en toda la señal para todo el tiempo. Además, en el dominio de la frecuencia, al agregar paulatinamente escalas al filtrado se pudo identificar que el ruido de la señal se encuentra concentrado en las escalas más pequeñas (frecuencias más altas) y no está acotado en una sola frecuencia.

Al utilizar el criterio de threshold 1 se consiguió disminuir la amplitud del ruido en la señal, en su mayoría, sin perder la tendencia de la señal, y conservando, por consiguiente, la mayor parte de información de interés, lo que demuestra que la energía del ruido es menor que la de la señal de interés a diferencia del criterio de threshold 2 en donde al cortar la energía más alta no se observa el mismo efecto.

Con el algoritmo, desarrollado en este trabajo de tesis, se logró disminuir la amplitud del ruido. Se concluyó que la mejor configuración para el algoritmo, y para el filtrado de esta señal en específico, se alcanzó con el criterio de threshold 1, con un umbral de 10% y aplicado a las 8 escalas más pequeñas. Al filtrar no se logró evitar tener algunos problemas en la tendencia de la señal.

Los criterios de filtrado mostrados aquí son solamente un método propuesto. Las ventajas que tiene la T.O. permiten generar otros algoritmos de filtrado con otros criterios. Por otro lado, este mismo algoritmo es susceptible de mejoras, agregando otros criterios u otros procesos. Sin embargo, los resultados obtenidos en esta tesis son alentadores para continuar con esta línea de trabajo y, por otro lado, comprueba la validez del análisis con ondículas para el tratamiento de señales del tipo de las utilizadas aquí. Es importante señalar que este tipo de análisis debe ser aplicado con el conocimiento de que las señales de TEM implican una descomposición complicada, sobre todo en los bordes cuando se trata de señales no periódicas.

7 BIBLIOGRAFÍA

- Breaker, L. C., Liu, P. C. y Torrence, C. (2001). "Intraseasonal oscillations in sea surface temperature, wind stress, and sea level off the central California coast". Continental Shelf Research **21**: 727-750.
- Chatfield, C. (1995). The Analysis of Time Series: An Introduction. Chapman & Hall/CRC. Bath, United Kingdom, 283 p.
- Fitterman, D. V. y Stewart, M. T. (1986). "Transient electromagnetic sounding for groundwater". Geophysics **51**(4): 995-1005.
- Garcia, X. y Jones, A. G. (2008). "Robust processing of magnetotelluric data in the AMT dead band using the continuous wavelet transform". Geophysics **73**(6): F223-F234.
- Goupillaud, P., Grossman, A. y Morlet, J. (1984). "Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis". Geoexploration **23**: 85-102.
- Grinsted, A., Moore, J. C. y Jevrejeva, S. (2004). "Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series". Nonlinear Processes in Geophysics **11**: 561-566.
- Hogg, R. V. y Craig, A. T. (1978). Introduction to Mathematical Statistics. Macmillan. Iowa, USA, 438 p.
- Krivochieva, S. y Chouteau, M. (2002). "Whole-space modeling of a layered earth in time-domain electromagnetic measurements". Journal of Applied Geophysics **50**: 375-391.
- Kronland-Martinet, R., Morlet, J. y Grossman, A. (1987). "Analysis of sound patterns through wavelet transforms". International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence **1**(2): 273-302.
- Kumar, P. y Foufoula-Georgiou, E. (1994). Wavelet Analysis in Geophysics: An Introduction. En: E. Foufoula-Georgiou y P. Kumar (1994). Wavelets in Geophysics. Texas, USA, Academic Press. **4**: 1-43.
- Losito, G. y Angelini, R. (2002). "Physical parameters activating electrical signal distortions in polluted soils". Annals of Geophysics **45**(2): 207-217.
- Mari, J. L., Glangeaud, F. y Coppens, F. (1999). Signal Processing for Geologists and Geophysicists. Éditions Technip. Paris, Francia, 458 p.
- McNeill, J. D. (1994). "TN-27, Principles and Applications of Time Domain Electromagnetic Techniques for Resistivity Sounding". Geonics Limited: 15.

- Meju, M. A. (1998). "Short Note: A simple method of transient electromagnetic data analysis". Geophysics **63**(2): 405-410.
- Moreau, F., Gibert, D., Holschneider, M. y Saracco, G. (1999). "Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Basic Theory". Journal of Geophysical Research **104**(B3): 5003-5013.
- Morlet, J., Arens, G., Fourceau, E. y Giard, D. (1982a). "Wave propagation and sampling theory-Part I: Complex signal and scattering In multilayered media". Geophysics **47**(2): 203-221.
- Morlet, J., Arens, G., Fourceau, E. y Giard, D. (1982b). "Wave propagation and sampling theory-Part II: Sampling theory and complex waves". Geophysics **47**(2): 222-236.
- Munkholm, M. S. y Auken, E. (1996). "Electromagnetic Noise Contamination on Transient Electromagnetic Soundings in Culturally Disturbed Enviroments". Journal of Enviromental and Engineering Geophysics **1**(2): 119-127.
- Nabighian, M. N. y Macnae, J. C. (1993). Time Domain Electromagnetic Prospecting Methods. En: M. N. Nabighian Electromagnetic Methods in Applied Geophysics, Society of Exploration Geophysicists. **2**: 427-520.
- Olsen, K. B. y Hohman, G. W. (1992). "Short Note: Adaptive noise cancellation for time-domain EM data". Geophysics **57**(3): 466-469.
- Oppenheim, A. V. y Schafer, R. W. (1989). Discrete-Time Signal Processing. Prentice Hall. New Jersey, USA, 879 p.
- Torrence, C. y Compo, G. P. (1998a). "A Practical Guide to Wavelet Analysis". Bulletin of the American Meteorological Society **79**(1): 61-78.
- Torrence, C. y Compo, G. P. (1998b). "A Practical Guide to Wavelet Analysis". Fecha de consulta: Febrero, 2011. <<http://paos.colorado.edu/research/wavelets/>>
- Trad, D. O. y Travassos, J. M. (2000). "Wavelet filtering of magnetotelluric data". Geophysics **65**(2): 482-491.
- Ward, S. H. y Hohman, G. W. (1989). Electromagnetic Theory for Geophysical Applications. En: M. N. Nabighian (2006). Electromagnetic Methods in Applied Geophysics, Society of Exploration Geophysicists. **1**: 131-311.
- Westergaard, J. A. (2003). "Integrated interpretation of Transient Electromagnetic and Seismic Data". Tesis de Maestría. Earth Sciences, University of Aarhus. 114 p.

Zhang, Y. y Paulson, K. V. (1997). "Enhacement of Signal-to-Noise Ratio in Natural-source Transient Magnetotelluric Data with Wavelet Transform". Pure and Applied Geophysics **149**(2): 405-419.

APÉNDICE 1. Teoría Electromagnética

Ecuaciones de Onda y Solución a la Ecuación de Onda

Las ecuaciones de onda son nombradas así por la importancia que tienen en la caracterización de la propagación de cualquier fenómeno ondulatorio. Para obtener la solución a la ecuación de onda, es necesario seguir varios pasos, sin embargo, aquí se muestran los más importantes (Ward y Hohman, 1989).

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}) + \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{Ecuación 7.1}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) - \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right) = \nabla \times \mathbf{j} \quad \text{Ecuación 7.2}$$

Asumiendo que el medio no contiene cargas libres ($dq/dV = 0$) por lo que $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$; y $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$ porque no existen monopolos magnéticos. Además de aplicar las respectivas relaciones constitutivas e igualdades de operadores vectoriales se llega a que las ecuaciones de onda para los campos magnético y eléctrico en el tiempo son:

$$\nabla^2 \mathbf{e} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = 0 \quad \text{Ecuación 7.3}$$

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0 \quad \text{Ecuación 7.4}$$

Y a partir de ellas, mediante la Transformada de Fourier con respecto del tiempo, se obtienen las ecuaciones de onda en el dominio de la frecuencia (también conocidas como ecuaciones homogéneas de Helmholtz):

$$\nabla^2 \mathbf{E} + (\mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega)\mathbf{E} = 0 \quad \text{Ecuación 7.5}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + (\mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega)\mathbf{H} = 0 \quad \text{Ecuación 7.6}$$

Ward y Hohman (1989) establecen que en la aproximación cuasiestática las corrientes de desplazamiento se pueden considerar nulas y además, aplicando la ley de Snell, y debido al contraste de conductividad entre el aire y el medio, el ángulo de refracción, al cual se propagan las ondas en el medio, es nulo (propagación vertical), independientemente del ángulo de incidencia, por lo que $\mu\epsilon\omega^2 \ll \mu\sigma\omega$. Así, la constante de propagación k (Ward y Hohman, 1989),

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega \quad \text{Ecuación 7.7}$$

queda de la forma,

$$k^2 = -i\mu\sigma\omega \quad \text{Ecuación 7.8}$$

Entonces, al sustituir el nuevo valor de la constante de propagación k en la Ecuación 7.5 y la Ecuación 7.6,

$$\nabla^2 \mathbf{e} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = 0 \quad \text{Ecuación 7.9}$$

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0 \quad \text{Ecuación 7.10}$$

Y en el dominio de la frecuencia como sigue. Para fines de la teoría electromagnética, la solución de las ecuaciones de onda se realiza sobre las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia (sección 2.1.1).

$$\nabla^2 \mathbf{E} - i\mu\sigma\omega\mathbf{E} = 0 \quad \text{Ecuación 7.11}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - i\mu\sigma\omega\mathbf{H} = 0 \quad \text{Ecuación 7.12}$$

Así, mediante las condiciones de frontera adecuadas (Ward y Hohman, 1989), se puede llegar a la solución para ambos casos (campo eléctrico y campo magnético).

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0^+ e^{-i(kz-\omega t)} + \mathbf{e}_0^- e^{-i(kz+\omega t)} \quad \text{Ecuación 7.13}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0^+ e^{-i(kz-\omega t)} + \mathbf{h}_0^- e^{-i(kz+\omega t)} \quad \text{Ecuación 7.14}$$

Donde $k = \alpha - i\beta$ y, α y β son reales. Además, \mathbf{e}_0^+ y \mathbf{e}_0^- son las amplitudes iniciales de la propagación de onda eléctrica en la dirección positiva y negativa del eje "z", respectivamente, lo mismo que para \mathbf{h}_0^+ y \mathbf{h}_0^- . Las componentes horizontales se vuelven nulas debido a la incidencia de onda plana.

Para el caso cuasiestático, $\alpha = \beta = \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)^{1/2}$, por lo que la propagación en un semiespacio está descrita por:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0^+ e^{-\alpha z} e^{-\beta z} e^{i\omega t} \quad \text{Ecuación 7.15}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0^+ e^{-\alpha z} e^{-\beta z} e^{i\omega t} \quad \text{Ecuación 7.16}$$

Otra forma de escribir el vector solución para el campo magnético y eléctrico en la ecuación de onda es la forma matricial siguiente,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0^+ \\ \mathbf{h}_0^+ \end{pmatrix} \frac{(\mu\sigma)^{1/2} z}{2\pi^{1/2} t^{3/2}} e^{-\frac{\mu\sigma z^2}{4t}}$$

Ecuación 7.17

Entonces, al derivar la Ecuación 7.17 con respecto del tiempo “t” y de la distancia “z” (profundidad), se puede entonces caracterizar la amplitud del campo a través del tiempo y del espacio. A partir lo anterior se puede concluir que los campos varían de forma similar con respecto del tiempo y del espacio, y que dicha variación alcanza un punto máximo que puede ser encontrado igualando la derivada a cero (Ward y Hohman, 1989).

Potenciales de Schelkunoff

Hasta el momento se ha desarrollado la teoría EM de un semiespacio donde no existen fuentes magnéticas o eléctricas cercanas, las fuentes se han tomado lo suficientemente lejanas para asumir la incidencia de onda plana. La solución de las ecuaciones de Maxwell y de onda cuando hay presencia de fuentes en el medio se realizan con la ayuda de los potenciales de Schelkunoff (Ward y Hohman, 1989). Las ecuaciones de Maxwell quedan entonces expresadas como:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \hat{z}\mathbf{H} = -\mathbf{J}_m^S$$

Ecuación 7.18

$$\nabla \times \mathbf{H} - \hat{y}\mathbf{E} = -\mathbf{J}_e^S$$

Ecuación 7.19

Estas ecuaciones sirven para describir el comportamiento de cada uno de los campos para cuando la divergencia del campo no es cero, es decir, existen fuentes dentro del medio. El término \mathbf{J}_m^S es una corriente magnética y \mathbf{J}_e^S es una corriente eléctrica.

Si se considera que las fuentes que producen los campos eléctricos y magnéticos son de naturaleza eléctrica y magnética (Ward y Hohman, 1989), entonces se tiene:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_e \quad \text{Ecuación 7.20}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_e \quad \text{Ecuación 7.21}$$

Donde los subíndices 'm' y 'e' indican que los campos son producidos por una fuente primaria magnética o eléctrica, respectivamente. Así, la Ecuación 7.18, se puede escribir de las 2 siguientes maneras, para fuentes magnéticas:

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = -\mathbf{J}_m^S - \hat{\mathbf{z}}\mathbf{H}_m \quad \text{Ecuación 7.22}$$

y para las fuentes magnéticas las corrientes eléctricas no se consideran, y por lo tanto:

$$\nabla \times \mathbf{H}_m = -\hat{\mathbf{y}}\mathbf{E}_m \quad \text{Ecuación 7.23}$$

La divergencia que exista entre los campos producidos por fuentes magnéticas estará ligada a la presencia de corrientes de la misma naturaleza del campo por lo tanto el campo eléctrico, como se mencionó antes, no tendrá ligado a sí mismo corrientes magnéticas.

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_m = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_m^S}{\hat{\mathbf{z}}} \quad \text{Ecuación 7.24}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_m = 0 \quad \text{Ecuación 7.25}$$

El campo eléctrico, en este caso, puede ser representado como espiras de una función vectorial F, por lo tanto:

$$\mathbf{E}_m = -\nabla \times \mathbf{F}$$

Ecuación 7.26

Con base en las premisas anteriores y un análisis similar sobre los campos eléctricos y magnéticos producidos por fuentes eléctricas, se puede entonces llegar a las ecuaciones de Helmholtz no homogéneas (Ward y Hohman, 1989):

$$\nabla^2 F + k^2 F = -J_m^S$$

Ecuación 7.27

$$\nabla^2 A + k^2 A = -J_e^S$$

Ecuación 7.28

Donde, $k^2 = -\hat{y}\hat{z}$, variables que se definen en la sección 2.1.3.

Los potenciales calculados por Ward y Hohman (1989), quedan expresados en función de 'x' y 'y', como sigue:

$$A = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_p e^{-u_0 h} (e^{-u_0 z} + r_{TM} e^{u_0 z}) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Ecuación 7.29

$$F = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_p e^{-u_0 h} (e^{-u_0 z} + r_{TE} e^{u_0 z}) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Ecuación 7.30

APÉNDICE 2. Transformada Ondicular

Antecedentes de la Transformada Ondicular

Para la caracterización espectral de señales uno de los análisis más utilizados es el relacionado con la Transformada de Fourier. El análisis de Fourier tiene propiedades y limitaciones características. El principal uso de este análisis es para encontrar los contenidos de frecuencia de señales mediante su descomposición en términos de señales periódicas (senos y cosenos) (Chatfield, 1995).

Al analizar una serie transitoria de decaimiento exponencial, el análisis de Fourier se ve restringido por las limitaciones propias de la transformada de Fourier. Para analizar series que tienen un contenido espectral variable a lo largo de su extensión se desarrolló una técnica para analizar los contenidos de frecuencia a distintos intervalos de tiempo mediante el uso de ventanas de “corte”. Este análisis se conoce como Transformada de Fourier por ventanas y es la base de la Transformada Ondicular.

Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier es una transformación matemática que, para aplicaciones prácticas, va del dominio del tiempo al de la frecuencia y viceversa. La Transformada de Fourier se define (Mari et al., 1999):

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{Ecuación 7.31}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} dt \quad \text{Ecuación 7.32}$$

La transformación aplica, para cada frecuencia ω , el elemento complejo $e^{-i\omega t}$ a la función $f(t)$ y, con ello obtiene una amplitud y una fase para cada ω .

Transformada de Fourier por ventanas

La Transformada de Fourier por ventanas (WFT, por sus siglas en inglés) parte de la aplicación de una función ventana que sirve para analizar por secciones una señal. Este caso particular de Transformada de Fourier está definida de la siguiente manera (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1994).

$$\begin{aligned} Gf(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(u-t)e^{-i\omega u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g_{\omega,t}(u) du \end{aligned} \quad \text{Ecuación 7.33}$$

Donde $g_{\omega,t}(u)$ es el kernel de integración

$$g_{\omega,t}(u) = g(u-t)e^{-i\omega u} \quad \text{Ecuación 7.34}$$

Así, entonces, se puede hacer una representación en el plano tiempo-frecuencia a partir del par (ω, t) .

La WFT cumple la conservación de la energía, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Gf(\omega, t)|^2 d\omega dt \quad \text{Ecuación 7.35}$$

La reconstrucción de la señal original a partir de la WFT se puede obtener a partir de la fórmula.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Gf(\omega, t)g(u - t)e^{i\omega t} d\omega du \quad \text{Ecuación 7.36}$$

Localización en tiempo-frecuencia de la WFT

Para entender el concepto y la representación de las frecuencias y el tiempo para cada una de las ventanas es necesario entender algunas propiedades de la WFT.

A partir del teorema de Parseval se puede escribir la ecuación como:

$$Gf(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega') \overline{\hat{g}_{\omega, t}(\omega')} d\omega' \quad \text{Ecuación 7.37}$$

Donde $\hat{f}(\omega')$ y $\hat{g}_{\omega, t}(\omega')$ son las Transformadas de Fourier de $f(u)$ y $g_{\omega, t}(u)$, respectivamente; además, la barra arriba de $\hat{g}_{\omega, t}(\omega')$ indica el complejo conjugado de la misma. Las desviaciones estándar representan, en este caso y de manera práctica, la dispersión de las funciones $|g_{\omega, t}|$ y $|\hat{g}_{\omega, t}|$ alrededor de t y ω , respectivamente. Entonces, para obtener la desviación estándar en el plano fase-espacio (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1994):

$$\sigma_g = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u - t)^2 |g_{\omega, t}(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2 g(u)^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Ecuación 7.38}$$

$$\sigma_{\hat{g}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega' - \omega)^2 |\hat{g}_{\omega, t}(\omega')|^2 d\omega' \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Ecuación 7.39}$$

Con base en el principio de incertidumbre (Morlet et al., 1982b) los productos de σ_g^2 y $\sigma_{\hat{g}}^2$ cumplen:

$$\sigma_g^2 \sigma_{\hat{g}}^2 \geq \frac{\pi}{2}$$

Ecuación 7.40

Si se aplica la transformación de Gabor (Goupillaud et al., 1984), es decir, cuando en la WFT, la función ventana utilizada es la función Gaussiana:

$$g(t) = \pi^{-1/2} e^{-t^2/2}$$

Ecuación 7.41

Al elegir una función ventana $g(t)$, las desviaciones estándar σ_g y $\sigma_{\hat{g}}$, se establecen para todo el plano fase-espacio. En otras palabras, las desviaciones estándar se conservan iguales, independientemente de la posición (t_0, ω_0) que se esté analizando. Por lo que la WFT tiene dos principales limitaciones (Kumar y Foufoula-Georgiou, 1994):

- 1) Si la señal contiene una componente transitoria más pequeña que σ_g , entonces no se podrán localizar las componentes más pequeñas que lo que permita σ_g .
- 2) Si la señal posee rasgos importantes a diferentes intervalos, no se podrá encontrar una $g(t)$ óptima que pueda localizarlos.

Estas limitaciones hacen que se vuelva un problema analizar las señales de forma eficaz. Debido a que la elección de las ventanas se realiza de forma arbitraria no es posible asegurar que con los tamaños de ventanas elegidas se puedan detectar los distintos contenidos de frecuencia. En comparación con este método, la Transformada Ondicular presenta una gran ventaja debido a su dependencia con la frecuencia y el tiempo, y además, a la relación que guardan las resoluciones en ambos espacios a partir del principio de incertidumbre.