Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias

Homología Relativa, Sistemas Estratificantes y Categorías Trianguladas.

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

p r e s e n t a

Valente Santiago Vargas.

Director de Tesis

Dr. Octavio Medoza Hernández

México, D.F. 2012

Índice general

Agradecimientos

Antes que nada, quiero agradecer a mis padres por todo su cariño y apoyo, por enseñarme a nunca darme por vencido y a perseguir mis sueños.

A mis hermanos por los momentos alegres que hemos vividos juntos.

A mi tutor Octavio Mendoza Hernández que me ha enseñado mucho durante gran parte de mis estudios de matemáticas, por todo el tiempo que me ha dedicado.

A mis sinodales: Raymundo Bautista, Eduardo Do Nascimento, María Jose Souto, Christof Geiss, por haber aceptado ser los revisores de esta tesis y por las valiosas sugeriencias y correciones que hicieron a esta.

Quiero agradecer a la Dra. Corina Sáenz y al Dr. Octavio Mendoza por todo el apoyo que me brindaron para asistir a varios congresos internacionales de Matemáticas.

Quiero hacer un agradecimento especial a mi casa de estudios la UNAM, por haberme brindado todo el conocimiento y tantas alegrías que tuve en sus aulas y tantas vivencias que llevaré conmigo durante toda mi vida.

A todos mis amigos con los que tomé inmumerables tazas de cafe y nos entreteniamos hablando de tantos temas: Carlos, Mauricio y especialmente a Israel.

A mis amigos Julio y Miguel por todos los aventuras que tuvimos cuando estabamos en la Licenciatura.

A Isacc, Rodrigo, Martha y Norberto por todas las tardes de estudio y cafe que tuvimos en la facultad de ciencias.

Quiero agradecer a mi amiga Lizbeth, por todos los momentos alegres que hemos vivido juntos y por compartir conmigo el gusto por las matemáticas y el estudio.

A Adriana y Nancy por compartir conmigo el gusto por el baile.

A mis amigos del doctorado: Luis, Gerardo, por las pláticas de matemáticas que disfrutamos tanto.

Quiero agradecer a todos mis profesores de la facultad de ciencias de quienes aprendí mucho más que matemáticas.

Por último, agradezco al Instituto de Matemáticas de la UNAM por haberme albergado durante todo este tiempo y haberme proporcionado todos los recursos necesarios para mi desarrollo profesional.

Introducción

0.1. Antecedentes del Problema

El álgebra homológica relativa tiene sus inicios a finales de los 50 con los trabajos de G. Hochschild y Butler-Horrocks ver ([36] y [23]). Treinta años mas tarde, en [7] y [8], M. Auslander y O. Solberg, dan un nuevo giro a la teoría original, tomando ventaja de los desarrollos en la teoría de representaciones de álgebras de artin. En este trabajo se establece una relación interesante entre homología relativa y subcategorías contravariantemente finitas. Además, las sucesiones que casi se dividen son utilizadas para expresar relaciones entre inyectivos relativos y proyectivos relativos en términos de la operación $D\mathrm{Tr}$. Con ello, mediante la relativización de los métodos antiguos, Auslander y Solberg encuentran métodos más generales que permiten construir nuevas subca-tegorías contravariantemente finitas y funtorialmente finitas; así como también generalizar al contexto relativo la teoría de módulos inclinantes y coinclinantes, dando nuevas relaciones entre álgebras (ver [7] y [8]).

En los Capítulos 1 y 2, exponemos la teoría de Homología Relativa desarrollada por Auslander-Solberg en [7] y [8] para una álgebra de artin Λ. En [7], se desarrolla la teoría relativa tomando subfuntores aditivos del funtor $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$, dando las versiones relativas de muchos resultados de [4] y [9]. En [8], se desarrolla la teoría relativa de módulos coinclinantes para una álgebra de artin.

Pensando en la solución de la Conjetura de G. Lusztig, E. Cline, B. Parshall y L. Scott introducen en [57] el estudio de una clase de álgebras, las así llamadas álgebras casi-hereditarias. Como es de esperarse, por el nombre, esta clase de álgebras contiene a la clase de las algebras hereditarias.
La clase de álgebras casi-hereditarias son actualmente una herramienta muy importante dentro de la teoría de representaciones de álgebras. Muchas de sus propiedades están relacionadas con el álgebra homológica y la teoría de aproximaciones de Auslander-Buchweitz-Reiten. Para poner un ejemplo, a mediados de los años 80, V. Dlab y C. M. Ringel prueban que la clase de álgebras cuya dimensión global es a lo sumo 2, está contenida dentro de la clase de álgebras casi-hereditarias. Las álgebras casi-hereditarias están relacionadas con un orden parcial definido en el conjunto que indexa a los módulos simples. En [25], V.

Dlab y C.M. Ringel muestran, que sin perder generalidad, se puede restringir al caso de conjuntos linealmente ordenados. Más aún, en dicho trabajo, introducen para una álgebra de artin Λ, los llamados módulos estandar, y muestran como detectar si Λ es casi-hereditaria via la categoría $\mathrm{mod}(\Lambda)$ de Λ-módulos a izquierda finitamente generados. Este primer paso fué muy importante, pues resultó que este tipo de álgebras (en el caso lineal) ya existian en la teoría de representaciones de álgebras solo que no se habian estudiado desde este punto de vista. Así fué, como muchas sub-clases de álgebras pasaron al "reino"de las álgebras casi-hereditarias con respecto a un orden lineal.

Sean Λ una R-álgebra de artin y $\{{}_\Lambda S(i)\}_{i=1}^n$ una familia completa de Λ-módulos simples (no isomorfos dos a dos). Para cada $i \in [1,n] := \{1, 2, \cdots, n\}$, denotaremos por ${}_\Lambda P(i)$ a la cubierta proyectiva del Λ-módulo simple ${}_\Lambda S(i)$. Asociado a un orden lineal $\leq$ en $[1,n]$, se introduce la clase de Λ-módulos estandar ${}_\Lambda\Delta = \{{}_\Lambda\Delta(i) := {}_\Lambda P(i)/U(i)\ :\ i \in [1,n]\}$, donde $U(i)$ es el submódulo de ${}_\Lambda P(i)$ generado por las imágenes $\mathrm{Im}\,(f)$ de los morfismos $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda P(j), {}_\Lambda P(i))$ con $j > i$.
Dada una clase Θ de Λ-módulos, denotaremos por $\mathscr{F}(\Theta)$ a la categoría de los Λ-módulos Θ-filtrados. Esto es, $\mathscr{F}(\Theta)$ es la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son los Λ-módulos M tales que existe una cadena finita de submódulos (i.e. una Θ-filtración)

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M$$

tal que cada cociente M_i/M_{i-1} es isomorfa a un objeto de Θ. En el caso de los módulos estandar, a la clase $\mathscr{F}({}_\Lambda\Delta)$ de los Λ-módulos ${}_\Lambda\Delta$-filtrados, se le conoce también con el nombre de "good modules" (módulos buenos).
La clase de Λ-módulos estandar tiene las siguientes dos propiedades que serán muy importantes cuando veamos a los sistemas estratificantes.

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Delta(j), {}_\Lambda\Delta(i)) = 0$ si $j > i$.

(b) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda({}_\Lambda\Delta(j), {}_\Lambda\Delta(i)) = 0$ si $j \geq i$.

Teorema 1 [26] *(Dlab-Ringel, 1989) Las siguientes condiciones son equivalentes para una R-álgebra de artin Λ.*

(a) Λ es casi-hereditaria con respecto a un orden lineal $\leq$ en $[1,n]$.

(b) ${}_\Lambda\Lambda \in \mathscr{F}({}_\Lambda\Delta)$ y $\mathrm{End}\,({}_\Lambda\Delta(i))$ es un anillo con división, $\forall i \in [1,n]$.

Debido al éxito alcanzado en la teoría de álgebras casi-hereditarias, se intentaron varias posibles generalizaciones. Una de las más importantes ha sido la dada por I. Ágoston, V. Dlab y E. Lukács en [10]

Definición 2 [10]*(Ágoston-Dlab-Lukács, 1998) Λ es **estandarmente estratificada** (ss-álgebra), con respecto a un orden lineal $\leq$ en $[1,n]$, si ${}_\Lambda\Lambda \in \mathscr{F}({}_\Lambda\Delta)$.*

Algunas propiedades interesantes para contrastar son las siguientes:

(1) Si Λ es casi-hereditaria se tiene que $\operatorname{gldim}(\Lambda) \leq 2n-2$. Sin embargo, hay ss-álgebras con dimensión global infinita.

(2) Λ es casi-hereditaria si y sólo si el álgebra opuesta Λ^{op} es casi-hereditaria. En el caso de una ss-álgebra, hay contraejemplos para la equivalencia anterior.

Una de las propiedades mas interesantes de las ss-álgebras es su conexión con la teoría tilting. Dicha conexión fué descubierta por C.M. Ringel en 1991, cuando estudiaba las propiedades homológicas de la categoría $\mathscr{F}({}_\Lambda\Delta)$ en el caso en que Λ es casi-hereditaria. Para esto, C.M. Ringel construyó el llamado “módulo característico” T (el cual es inclinante) asociado a $\mathscr{F}({}_\Lambda\Delta)$, y probó también que el álgebra de endomorfismos $\operatorname{End}_\Lambda(T)$ es casi-hereditaria. Muchos de los resultados de C.M. Ringel, fueron generalizados por I. Ágoston, D. Happel, E. Lukács y L. Unger, en [11], al contexto de las ss-álgebras.
Recordamos, que un Λ-módulo T es inclinante si satisface las siguientes condiciones:
$\operatorname{pd} T < \infty$, $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(T,T) = 0 \ \forall i > 0$, y existe una sucesión exacta larga $0 \to {}_\Lambda\Lambda \to T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_m \to 0$ con $T_i \in \operatorname{add} T$ para $i = 0, 1, \cdots, m$.

Teorema 3 [11, 2.5] *(Ágoston-Happel-Lukács-Unger, 2000) Sea Λ una ss-álgebra con respecto a un orden lineal $\leq$ en $[1,n]$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Existe una única (hasta isomorfismos) familia $\{T(i) \ : \ i \in [1,n]\}$ de Λ-módulos inescindibles y una sucesión exacta, para cada $i \in [1,n]$,
$0 \to {}_\Lambda\Delta(i) \to T(i) \to X(i) \to 0$ *con* $X(i) \in \mathscr{F}(\{{}_\Lambda\Delta(j) \ : \ j < i\})$.

(b) El módulo característico $T := \oplus_{i\in[1,n]} T(i)$ es tilting.

(c) $\mathscr{F}({}_\Lambda\Delta) \cap \{M \ : \ \operatorname{Ext}^1_\Lambda(-,M)|_{\mathscr{F}({}_\Lambda\Delta)}\} = \operatorname{add} T$.

(d) $\operatorname{pd} T = \operatorname{pd} \mathscr{F}({}_\Lambda\Delta)$ *y* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\mathscr{F}({}_\Lambda\Delta), T) = 0$.

(e) El álgebra de endomorfismos $B := \operatorname{End}(T)$ es una ss-álgebra, con respecto al orden opuesto $\leq^{op}$ en $[1,n]$; y el funtor $\operatorname{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda T_{B^{op}}) : \mathscr{F}({}_\Lambda\Delta) \to \mathscr{F}({}_B\Delta)$ es una dualidad de categorías.

La primera noción de sistema estratificante fué introducida por K. Erdmann y C. Sáenz en [28]. La idea básica es generalizar la noción de módulo estandar y la de inclinante caracteristico.

Definición 4 [28, 1.1]*(Erdmann-Sáenz, 2003) Sea $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ una familia de Λ-módulos no nulos, $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$ una familia de Λ-módulos inescindibles, y $\leq$ un orden lineal en $[1,t] := \{1,2,\cdots,t\}$. El triple $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es un* ***sistema estratificante Ext-inyectivo*** *de talla t, en $\operatorname{mod}(\Lambda)$, si satisface las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *si* $j > i$.

(b) Para cada $i \in [1, t]$, *existe una sucesión exacta* $0 \to \Theta(i) \to Y(i) \to Z(i) \to 0$ *de* Λ*-módulos tal que* $Z(i) \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) : j < i\})$;

(c) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-, Y)|_{\mathscr{F}(\theta)} = 0$, *donde* $Y := \oplus_{i\in[1,t]} Y(i)$.

En [47], E. Marcos, O. Mendoza y C. Sáenz, prueban que la siguiente noción de sistema estratificante es equivalente a la de sistema estratificante Ext-inyectivo.

Definición 5 [47, 1.6] *(Marcos-Mendoza-Sáenz, 2004) Un* ***sistema estratificante*** $(\Theta, \leq)$ *de talla* t, *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *consiste de una familia* $\Theta = \{\Theta(i) : i \in [1, t]\}$ *de* Λ*-módulos inescindibles, y un orden lineal* $\leq$ *en* $[1, t]$, *satisfaciendo las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *si* $j > i$,

(b) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *si* $j \geq i$.

Dada la definición de sistema estratificante, una buena pregunta es ver si tales sistemas existen para un álgebra arbitraria Λ. La respuesta es afirmativa. En efecto, para cualquier álgebra Λ, existe al menos un sistema estratificante: el sistema estratificante canónico $({}_\Lambda\Delta, \leq)$ de talla n, donde n es el rango del grupo de Grothendieck del álgebra Λ y $\leq$ es el orden canónico en $[1, n]$.
En [48], E. Marcos, O. Mendoza y C. Sáenz, introducen la noción de sistema estratificante Ext-proyectivo. Mas aún, prueban que dicha noción es equivalente a las otras dos ya dadas de sistema estratificantes. Es decir, una de ellas determina de forma única a las otras dos.

Definición 6 [48, 2.1] *(Marcos-Mendoza-Sáenz, 2005) Sea* $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ *una familia de* Λ*-módulos no nulos y* $\underline{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$ *una familia de* Λ*-módulos inescindibles, y* $\leq$ *un orden lineal en* $[1, t]$. *El triple* $(\Theta, \underline{Q}, \preceq)$ *es un* ***sistema estratificante Ext-proyectivo*** *de talla* t, *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si satisface las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *si* $j > i$.

(b) Para cada $i \in [1, t]$, *existe una sucesión exacta* $0 \to K(i) \to Q(i) \to \Theta(i) \to 0$ *de* Λ*-módulos tal que* $K(i) \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) : j > i\})$,

(c) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q, -)|_{\mathscr{F}(\Theta)} = 0$, *donde* $Q := \oplus_{i\in[1,t]} Q(i)$.

Una de las razones de la importancia de los sistemas estratificantes es que estos producen, tanto, un módulo Ext-inyectivo $Y = \oplus_{i=1}^n Y(i)$, como uno Ext-proyectivo $Q = \oplus_{i=1}^n Q(i)$, tales que las álgebras de endomorfismos $B := \mathrm{End}({}_AY)$ y $C := \mathrm{End}({}_AQ)^{op}$ son estandarmente estratificadas. Más aún, los sistemas estratificantes son una "categorificación" de las ss-álgebras; y en cierta medida, son también una generalización de las categorías de peso máximo, introducidas por Cline-Parshall-Scott en [57], para el caso de conjuntos linealmente ordenados.

Teorema 7 [48, 3.2] *(Marcos-Mendoza-Sáenz, 2005) Sea* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *un sistema estratificante Ext-proyectivo de talla* t, *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y sea* $C := \mathrm{End}({}_\Lambda Q)^{op}$ *con* $Q := \oplus_{i=1}^{t} Q(i)$. *Entonces,* C *es una ss-álgebra y los funtores*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda Q_C, -) : \mathscr{F}(\Theta) \to \mathscr{F}({}_C\Delta) \quad y \quad {}_\Lambda Q_C \otimes_C - : \mathscr{F}({}_C\Delta) \to \mathscr{F}(\Theta)$$

son equivalencias exactas inversas.

0.2. Resumen de Resultados

En el Capítulo 3, generalizamos la teoría de sistemas estratificantes a categorías exactas. Dando la definición de sistema estratificante en una categoría exacta, vemos que determina univocamente un sistema estratificante *Ext* -proyectivo. Se obtiene un objeto $Q = \oplus_{i=1}^{n} Q(i)$, tal que el álgebra de endomorfismos $C := \mathrm{End}({}_A Q)^{op}$ es estandarmente estratificada. También obtenemos un análogo al Teorema 7. Esto nos da una nueva forma de construir álgebras estadarmente estratificadas. Finalmente, en la última parte de este capítulo utilizamos la teoría de [7], para dar un ejemplo de un sistema estratificante en una categoría exacta, que no es sistema estratificante en el sentido clásico.
Hay varias nociones de categorías exactas entre las que destacamos las debidas D. Quillen en [58] y a M. Barr en [12]. En la definición de Quillen (dada en el contexto de categorías aditivas) uno tiene que especificar una clase distinguida de sucesiones cortas (una estructura exacta), para obtener una categoría exacta.

Sobre cualquier categoría aditiva $\mathcal{A}$, la clase de sucesiones exactas que se escinden da la estructura exacta más pequeña en $\mathcal{A}$, es decir, cualquier otra estructura exacta contiene a las sucesiones exactas que se escinden. En general, una estructura exacta consiste de ciertos pares de morfismos, cerrados bajo ciertas condiciones. El lugar común para hacer álgebra homológica es una categoría abeliana, pero se puede ver que a veces las categorías exactas bastan. Una razón mas fuerte es el teorema de inmersión de Gabriel-Quillen, el cual reduce el álgebra homológica en categorías exactas al caso abeliano. Como el nombre de un artículo de P. Freyd lo dice: Relative homological algebra made absolute [30]. El Teorema de Inmersión nos dice que el funtor de Yoneda encaja una categoría exacta pequeña $\mathcal{A}$ de manera fiel y plena en la categoría abeliana $\mathcal{B}$ de funtores exactos a izquierda $F : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow Ab$ tal que su imagen en $\mathcal{B}$ es cerrada por extensiones y tal que una sucesión corta en $\mathcal{A}$ es exacta si y sólo si lo es en $\mathcal{B}$. D. Quillen dice en [58, pag. 92], lo siguiente:

Supongamos que tenemos una categoría exacta $\mathcal{A}$. *Sea* $\mathcal{B}$ *la categoría de funtores contravariantes de* $\mathcal{A}$ *en* Ab, *los cuales son exactos a izquierda. Siguiendo ideas bien conocidas (ver [31]), se puede probar que* $\mathcal{B}$ *es una categoría abeliana y que el funtor de Yoneda* h *encaja* $\mathcal{A}$ *como una subcategoría cerrada por extensiones de* $\mathcal{B}$*; y finalmente una sucesión corta pertenece a* $\mathcal{E}$ *si y sólo si* h *la lleva a una sucesión exacta en* $\mathcal{B}$. *Los detalles serán omitidos, pues no son realmente* *importantes para lo que sigue.*

P. Freyd da un teorema similar, en [30], sin demostración y con suposiciones adicionales. La primera demostración publicada aparece en [45], basada en la teoría de engavillación de Grothendieck-Verdier. Un bosquejo detallado de la prueba afirmada por Quillen, es dada por B. Keller en [43, Apend].
La noción de categoría exacta dada por Quillen, tiene sus antecesores en A. Heller [38], N. Yoneda [66], Butler-Horrocks [23] y S. Mac Lane [46, XII.4]. Las S-categorías quasi-abelianas usadas por Yoneda son categorías exactas en el sentido de Quillen. Un hecho notable, es que Yoneda prueba que el "axioma obscuro" (composición de inflaciones es inflación) se sigue de su definición, ver [66, p.525, corollary], un hecho que es redescubierto 30 años más tarde por B. Keller [43, Apend].
Hay varias razones para estudiar categorías exactas. El hecho de escoger una estructura exacta da más flexibilidad, lo cual es esencial en muchos contextos. Incluso si uno está trabajando con categorías abelianas, a veces es necesario considerar otras estructuras diferentes de la canónica (ver [23]). En la teoría de representaciones, las categorías exactas surgen naturalmente. Por ejemplo, en [34], D. Happel muestra que, en el caso de una categoría exacta de Frobenius, pasando a la categoría estable uno obtiene una categoría triangulada.

Las categorías derivadas fueron inventadas por A. Grothendieck y J. L. Verdier en la década de los años 60. Hoy en día, las categorías derivadas se han convertido en una herramienta importante en muchas ramas de la matemática como: geometría algebraica, geometría algebraica no conmutativa, teoría de representaciones, física-matemática, etc. En un intento de axiomatizar las propiedades de la categoría derivada, Grothendieck-Verdier introdujeron la noción de ca-tegoría triangulada. Durante largo tiempo, las categorías trianguladas se situaron en un extremo del álgebra homológica. Sin embargo, esta visión cambió debido a los trabajos de D. Happel en los años 80, llegando a ser de gran importancia en la teoría de representaciones y en otras áreas como ya comentamos arriba.
La teoría de aproximaciones tiene su origen en el concepto de envolventes inyectivas y ha sido ampliamente aceptada en el contexto de la categoría de módulos. En artículos independientes, Auslander, Reiten y Smalo (para la categoría $\mathrm{mod}(\Lambda)$ de Λ-módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin Λ) y Enochs (para la categoría $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ de Λ-módulos sobre un anillo arbitrario Λ) introdujeron una teoría general de aproximaciones que involucraba precubiertas y preenvolventes (ver [4], [6] y [29]).
En el Capítulo 4, generalizamos la teoría de sistemas estratificantes a categorías trianguladas. Dando la definición de sistema estratificante en una categoría triangulada, vemos que determina univocamente un sistema estratificante Ext -proyectivo. También obtenemos un objeto $Q = \oplus_{i=1}^{n} Q(i)$, tal que el álgebra de endomorfismos $C := \mathrm{End}({}_A Q)^{op}$ es estandarmente estratificada y obtenemos un análogo al Teorema 7. Esto nos da una nueva forma de construir álgebras

estadarmente estratificadas. En este capítulo, se pudo probar el siguiente resultado, análogo al dado por C. M. Ringel en [59, 1].

Teorema 8 *Sea* $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^{n}$ *una familia de objetos en una R-categoría triángulada de artin tal que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma\Theta(i)) = 0$ *para* $j \geq i$. *Entonces* $\mathscr{F}(\Theta)$ *es funtorialmente finita.*

En [37], M. Hashimoto definió el "Contexto de Auslander-Buchweitz" para ca-tegorías abelianas, dando un marco teórico para la teoría de aproximaciones. El punto de partida del trabajo de Hashimoto es la teoría de aproximaciones en categorías abelianas desarrollada por Auslander y Buchweitz en [3]. El trabajo [3], fue el punto de partida para hacer álgebra homológica relativa con respecto a ciertas subcategorías. Lo anterior tuvo aplicaciones a los módulos Cohen-Macaulay sobre anillos conmutativos, a la teoría inclinante, a la teoría de álgebras quasi-hereditarias y grupos reductivos. También se aplicó al estudio de conjeturas homológicas de álgebras de dimensión finita. Por otro lado, en [14], A. Beligiannis generaliza a categorías exactas el trabajo fundamental [3]. En particular, siguiendo las ideas de Hashimoto, Beligiannis introduce el contexto de Auslander-Buchweitz en categorías exactas, que es más general que el caso abeliano.
En el caso de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ (la categoría de Λ-módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin Λ), es importante mencionar el trabajo de Auslander y Reiten [4]. Ellos estudiaron las aproximaciones de módulos usando módulos inclinantes y coinclinantes, demostrando la existencia de una correspondencia biyectiva entre módulos coinclinantes básicos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y ciertas subcategorías precubrientes $\mathcal{X}$ de $\mathrm{mod}(\Lambda)$. El principal objetivo de [4] es explorar la conexión entre la teoría inclinante y los pares de cotorsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.
Recientemente, las categorías trianguladas entraron en la teoría de representaciones de forma relevante y varios autores han estudiado el concepto de aproximación, tanto en el caso abeliano como en el caso triangulado (ver [20],[16], [49] y [50]).

En el Capítulo 5, que forma parte de [51], se desarrolla el análogo de la teoría de aproximaciones en el sentido de Auslander y Buchweitz, para categorías trianguladas. El resultado principal es acerca de un par de $(\mathcal{X}, \omega)$ de clases de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$, donde $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y ω satisface condiciones débiles de cogenerabilidad con respecto a los objetos de $\mathcal{X}$. Siguiendo a Auslander y Buchweitz, consideramos la clase $\mathcal{X}^{\wedge}$ de objetos de $\mathcal{T}$ que admiten una resolución finita a través de objetos de $\mathcal{X}$. Se prueba que cada objeto de $\mathcal{X}^{\wedge}$ admite dos triángulos distinguidos: uno dando una $\mathcal{X}$-aproximación a derecha y el otro dando una $\omega^{\wedge}$-aproximación a izquierda. En este capítulo también es introducida la dimensión $\mathcal{X}$-resolución y es comparada con otras dimensiones relativas.

En el Capítulo 6, que forma parte de [52], el principal objetivo es explorar resultados análogos a los estudiados por Auslander y Reiten en conexión con la teoría inclinante y la teoría de co-t-estructuras, centrándonos en el contexto dado en el capítulo 5. Para esto, utilizamos la teoría desarrollada en el capítulo 5 y centramos nuestra atención en la relación entre los contextos de Auslander-Buchweitz en una categoría triangulada $\mathcal{T}$ y las co-t-estructuras definidas en ciertas subcategorías de $\mathcal{T}$.

La noción de co-t-estructura fue introducida por D. Pauksztello [56] y M. V. Bondarko [17] (bajo el nombre de estructuras con peso). Esta noción da información importante de la categoría triangulada $\mathcal{T}$ y permite la existencia de descomposiones con peso y filtraciones. Además las co-t-estructuras dan ejemplos de teorías de torsión en categorías trianguladas Krull-Schmidt en el sentido de Iyama-Yoshino [40].

Capítulo 1

Homología relativa a la Auslander-Solberg

1.1. Subfuntores del $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$

Durante todo éste capítulo Λ denotará una R-álgebra de artin y $\mathrm{mod}(\Lambda)$ denotará a la categoría de Λ-módulos finitamente generados a izquierda.
Los resultados aquí expuestos fueron extraidos de [7] y [8].

Definición 1.1.1 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías. La categoría **producto** $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ es una categoría cuyos objetos son todos los pares ordenados (A, B) de objetos de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$. El conjunto de morfismos, entre dos pares, está definido por pares ordenados de morfismos*

$$[(A, B), (A', B')]_{\mathscr{A}\times\mathscr{B}} := [A, A']_{\mathscr{A}} \times [B, B']_{\mathscr{B}}.$$

La composición de pares de morfismos es componente a componente; esto es, si $(f, g) : (A, B) \longrightarrow (A', B')$ y $(f', g') : (A', B') \longrightarrow (A'', B'')$ son morfismos en $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, se define $(f', g')(f, g) : (A, B) \longrightarrow (A'', B'')$ como $(f', g')(f, g) = (f'f, g'g)$. Se puede ver fácilmente que con el producto así definido, $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ es en efecto una categoría donde el morfismo identidad $1_{(A,B)}$ es el par $(1_A, 1_B)$.

Definición 1.1.2 *Un **bifuntor** es un funtor covariante cuyo dominio es el producto de dos categorías; esto es, uno de la forma $T : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$.*

Aquí sólo consideraremos bifuntores de la forma $F : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \times \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es la categoría de grupos abelianos Ab o bien es la categoría de conjuntos *Sets*. Decimos que F es aditivo si los funtores $F(C, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ab}$ y $F(-, A) : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ son aditivos, $\forall\, A,\, C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por ejemplo, $F = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ es aditivo.

Definición 1.1.3 *Sea $F : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \times \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{C}$ un funtor. Decimos que $G : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \times \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{C}$ es un* **subfuntor** *de F si existe una transformación natural $\eta : G \longrightarrow F$, la inclusión de G en F tal que, $\forall\, (A, B) \in$*

$(\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \times \mathrm{mod}(\Lambda)$ *y;* $\forall\,(\alpha,\beta) : (A,B) \longrightarrow (A',B')$ *con* $\alpha : A' \longrightarrow A$ *y* $\beta : B \longrightarrow B'$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} G(A,B) \arrow[r, "\eta_{A,B}"] \arrow[d, "G(\alpha,\beta)"'] & F(A,B) \arrow[d, "F(\alpha,\beta)"] \\ G(A',B') \arrow[r, "\eta_{A',B'}"] & F(A',B'), \end{tikzcd}$$

donde $\eta_{A,B} : G(A,B) \longrightarrow F(A,B)$ *es la inclusión como subconjunto. Es decir,* $G(\alpha,\beta) = F(\alpha,\beta)|_{G(A,B)}$.

Definición 1.1.4 *Sea* $F : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \times \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ab}$ *un funtor. Un subfuntor* $G : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \times \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ab}$ *de* F *es un* ***subfuntor aditivo*** *si* G *es aditivo.*

Definición 1.1.5 *Sea* F *un subfuntor de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-) : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \times \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Sets}$*. Una sucesión exacta* $\eta : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, se dice que es* **F*-exacta*** *si* $\eta \in F(C,A)$*.*

Sean $\eta : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\alpha : C' \longrightarrow C$, $\beta : A \longrightarrow A'$ morfismos de Λ-módulos. Denotaremos por $\eta\alpha$ a la sucesión exacta obtenida de η mediante un pull-back por α. Análogamente, denotaremos por $\beta\eta$ a la sucesión exacta obtenida de η mediante un push-out. Así, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\alpha,\beta)(\eta) := \beta(\eta\alpha) = (\beta\eta)\alpha$.

Observación 1.1.6 *Sea* F *un subfuntor de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-) : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \times \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ab}$ *y* $\alpha : C' \longrightarrow C$, $\beta : A \longrightarrow A'$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*.*

(a) Si $\eta \in F(C,A)$ *entonces* $F(\alpha,\beta)(\eta) = \beta(\eta\alpha) \in F(C',A')$*. En particular, se tiene que la clase de sucesiones* F*-exactas es cerrada por pull-backs y push-outs. Esto es, si* η *es* F*-exacta entonces* $\eta\alpha$ *y* $\beta\eta$ *son* F*-exactas.*

(b) La estructura aditiva de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$ *es la llamada suma de Baer. Esto es, para* η, $\eta' \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$ *se define* $\eta + \eta' := \nabla(\eta \oplus \eta')\Delta$ *donde* $\Delta : C \longrightarrow C \oplus C$ *y* $\nabla : A \oplus A \longrightarrow A$ *son los morfismos diagonal y codiagonal, respectivamente. Si* η, η' *son F-exactas, entonces* $\eta + \eta'$ *es F-exacta. En efecto, como* η, $\eta' \in F(C,A)$ *y* $F(C,A)$ *es un subgrupo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$*, se tiene que* $\eta + \eta' \in F(C,A)$*; y por lo tanto* $\eta + \eta'$ *es F-exacta. Es decir, la clase de sucesiones F-exactas es cerrada bajo la suma de Baer.*

Proposición 1.1.7 *Una clase* $\mathscr{C} \subseteq \bigcup_{C,A \in \mathrm{mod}(\Lambda)} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$ *de sucesiones exactas cerrada por suma de Baer, pull-backs y push-outs, define un subfuntor de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-) : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \times \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ab}$*.*

Demostración. Definamos una asignación $F : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \times \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Sets}$ por $F(C,A) := \mathscr{C} \cap \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$; y para $(\alpha,\beta) : (C,A) \longrightarrow (C',A')$, definimos $F(\alpha,\beta) := \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\alpha,\beta)$. Veamos que la asignación F construida arriba, tiene por

codominio a Ab. Y que además $F : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \times \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ab}$ es un subfuntor de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. Para esto hay que ver que $F(C,A)$ es un subgrupo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$ y que $F(\alpha,\beta)$ es un morfismo de grupos (ésta última condición es trivial por la definición de F). En efecto, sean η, $\eta' \in F(C,A)$, como $\mathscr{C}$ es cerrada por suma de Baer, entonces $\eta + \eta' \in F(C,A)$. Dada $\eta : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, el inverso de η, con la suma de Baer, es la sucesión exacta que se obtiene por push-out de η mediante -1_A, es decir, $-\eta := (-1_A)\eta$. Por lo tanto, si $\eta \in F(C,A)$, entonces $-\eta \in F(C,A)$ pues $\mathscr{C}$ es cerrada por push-outs. Por lo tanto, $F(C,A)$ es un subgrupo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$. Finalmente, que el neutro aditivo pertenezca a $F(C,A)$ se sigue de lo anterior, pues si $\eta \in F(C,A)$, entonces $-\eta \in F(C,A)$ y luego $0 = \eta + (-\eta) \in F(C,A)$.
Veamos que si $\eta \in F(C,A)$ y $(\alpha,\beta) : (C,A) \longrightarrow (C',A')$ entonces $F(\alpha,\beta)(\eta) \in F(C',A')$. En efecto, como $F(\alpha,\beta)(\eta) = (\beta\eta)\alpha$ y $\mathscr{C}$ es cerrada por push-outs y pull-backs, se tiene que $F(\alpha,\beta)(\eta) \in F(C',A')$. Por lo tanto, F así definido es un subfuntor de $\mathrm{Ext}_\Lambda(-,-)$, con $\eta_{C,A} : F(C,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$ la inclusión como transformación natural. $\square$

Lema 1.1.8 *Sean* $\eta : 0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to 0$ *y* $\eta' : 0 \to A' \overset{\alpha'}{\to} B' \overset{\beta'}{\to} C' \to 0$ *sucesiones exactas en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y sean* $i_C : C \longrightarrow C \oplus C'$, $i_{C'} : C' \longrightarrow C \oplus C'$, $p_A : A \oplus A' \longrightarrow A$, $p_{A'} : A \oplus A' \longrightarrow A'$ *las inclusiones y proyecciones naturales correspondientes. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\eta = p_A(\eta \oplus \eta')i_C$ *y* $0 = p_{A'}(\eta \oplus \eta')i_C$.

(b) $\eta' = p_{A'}(\eta \oplus \eta')i_{C'}$ *y* $0 = p_A(\eta \oplus \eta')i_{C'}$.

(c) $\eta \oplus \eta' = i_A\eta p_C + i_{A'}\eta' p_{C'}$.

Demostración.

(a) Se puede ver que el siguiente diagrama es conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus A' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, equal] & B \oplus A' \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_3"] & C \arrow[r] \arrow[d, "i_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus A' \arrow[r, "f_4"] & B \oplus B' \arrow[r, "f_5"] & C \oplus C' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $f_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix}$ y $f_5 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $(\eta \oplus \eta')i_C$ es la sucesión del primer renglón del diagrama anterior. Por otro lado, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus A' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p_A"] & B \oplus A' \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "p_B"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde p_B es la proyección correspondiente. Luego, $p_A(\eta\oplus\eta')i_C$ es la sucesión del último renglón del diagrama anterior. Por lo tanto $\eta = p_A(\eta\oplus\eta')i_C$.
Considerando ahora el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A\oplus A' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p_{A'}"] & B\oplus A' \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] & C\oplus A' \arrow[r, "\pi"] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $g = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$; concluimos que $p_{A'}(\eta\oplus\eta')i_C = 0$.

(b) Se prueba como en (a).

(c) Tenemos

$$\begin{aligned}
p_A(\eta\oplus\eta') = p_A(\eta\oplus\eta')1_{C\oplus C'} &= p_A(\eta\oplus\eta')(i_Cp_C + i_{C'}p_{C'}) \\
&= p_A(\eta\oplus\eta')i_Cp_C + p_A(\eta\oplus\eta')i_{C'}p_{C'} \\
&= \eta p_C + 0p_{C'} \\
&= \eta p_C,
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad es por (a). Análogamente, se prueba que $p_{A'}(\eta\oplus\eta') = \eta' p_{C'}$. Por lo tanto, $\eta\oplus\eta' = 1_{A\oplus A'}(\eta\oplus\eta') = (i_Ap_A + i_{A'}p_{A'})(\eta\oplus\eta') = i_Ap_A(\eta\oplus\eta') + i_{A'}p_{A'}(\eta\oplus\eta') = i_A\eta p_C + i_{A'}\eta' p_{C'}$. $\square$

Lema 1.1.9 [7, 1.1] *Sea F un subfuntor de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op}\times\mathrm{mod}(\Lambda)\longrightarrow$ Sets. *Entonces, F es un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda : \mathrm{mod}(\Lambda)^{op}\times\mathrm{mod}(\Lambda)\longrightarrow \mathrm{Ab}$ *si y sólo si la clase de sucesiones F-exactas es cerrada bajo sumas directas finitas.*

Demostración. Dado que F es un subfuntor de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-) : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op}\times\mathrm{mod}(\Lambda)\longrightarrow$ Sets tenemos que, $\forall\,\eta\in F(C,A)$ y $\alpha : C'\longrightarrow C$, $\beta : A\longrightarrow A'$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, se satisface que $F(\alpha,\beta)(\eta) = \beta(\eta\alpha)\in F(C',A')$.
($\Longleftarrow$) Sea $E_0 := 0\in\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$ el neutro aditivo. Veamos que $E_0\in F(C,A)$. En efecto, sean $\eta : 0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$ F-exacta y $0 : A\longrightarrow A$ el morfismo cero. Luego $F(1_C,0)(\eta) = 0\eta\in F(C,A)$, pero $0\eta = E_0$ (ver [55], pag. 167). Por lo tanto $E_0\in F(C,A)$.
Veamos ahora que si $\eta\in F(C,A)$, entonces $-\eta\in F(C,A)$. En efecto, considerando $-1_A : A\longrightarrow A$ tenemos que $F(1_C,-1_A)(\eta) = -1_A\eta\in F(C,A)$, pero $-1_A\eta = -\eta$ (ver [55], pag. 167). Por lo tanto $-\eta\in F(C,A)$.
Veamos que si η, $\eta'\in F(C,A)$ entonces $\eta+\eta'\in F(C,A)$. Considerando los morfismos $\nabla : A\oplus A\longrightarrow A$ y $\Delta : C\longrightarrow C\oplus C$, tenemos que $F(1_C,\nabla) : F(C,A\oplus A)\longrightarrow F(A)$ y $F(\Delta,1_{A\oplus A}) : F(C\oplus C,A\oplus A)\longrightarrow F(C,A\oplus A)$. Por otro lado, como la clase de sucesiones F-exactas es cerrada por sumas directas, tenemos que $\eta\oplus\eta'\in F(C\oplus C,A\oplus A)$. Por lo tanto, $F(1_C,\nabla)F(\Delta,1_{A\oplus A})(\eta\oplus\eta') =$

$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(1_C,\nabla)\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Delta,1_{A\oplus A})(\eta\oplus\eta') = \nabla(\eta\oplus\eta')\Delta = \eta+\eta' \in F(C,A)$. Por lo tanto, F es un subfuntor de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-) : \mathrm{mod}(\Lambda)^{op}\times\mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ab}$.
Veamos ahora que F es aditivo, es decir que, $F(1_C,-) : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ab}$ y $F(-,1_A) : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ son aditivos. En efecto, veamos que $F(1_C,-) : \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(1_C,A),F(1_C,B))$ es un morfismo de grupos abelianos, $\forall A,B\in\mathrm{mod}(\Lambda)$. Sean $\alpha,\alpha' : A\longrightarrow B$ y $\eta : F\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ la inclusión como subfuntor. Luego, tenemos las siguientes igualdades

$$(\mathrm{Ext}^1_\Lambda(1_C,\alpha)+\mathrm{Ext}^1_\Lambda(1_C,\alpha'))\eta_{C,A} = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(1_C,\alpha+\alpha')\eta_{C,A} = \eta_{C,B}F(1_C,\alpha+\alpha'),$$

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(1_C,\alpha)\eta_{C,A} = \eta_{C,B}F(1_C,\alpha),$$
$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(1_C,\alpha')\eta_{C,A} = \eta_{C,B}F(1_C,\alpha').$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\eta_{C,B}F(1_C,\alpha+\alpha') &= (\mathrm{Ext}^1_\Lambda(1_C,\alpha)+\mathrm{Ext}^1_\Lambda(1_C,\alpha'))\eta_{C,A}\\ &= \eta_{C,B}(F(1_C,\alpha)+F(1_C,\alpha')).\end{aligned}$$

Luego, como $\eta_{C,B}$ es un monomorfismo, tenemos que $F(1_C,\alpha+\alpha') = F(1_C,\alpha)+F(1_C,\alpha')$. Por lo tanto $F(1_C,-) : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ab}$ es aditivo. Análogamente $F(-,1_A) : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ es aditivo. Por lo tanto, $F(-,-) : \mathrm{mod}(\Lambda)^{op}\times\mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ab}$ es aditivo.
($\Longrightarrow$) Supongamos que F es un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-) : \mathrm{mod}(\Lambda)^{op}\times\mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ab}$. En particular, $F(C,A)$ es un subgrupo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$, $\forall\, C$, $A\in\mathrm{mod}(\Lambda)$. Consideremos las sucesiones $\eta : 0\longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ y $\eta' : 0\longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C' \longrightarrow 0$, con $\eta\in F(C,A)$ y $\eta'\in F(C',A')$. Como F es un subfuntor de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$, se tiene que $F(p_C,i_A)(\eta) = i_A\eta p_C \in F(C\oplus C',A\oplus A')$ y $F(p_{C'},i_{A'})(\eta') = i_{A'}\eta' p_{C'} \in F(C\oplus C',A\oplus A')$. Por 1.1.8(c), tenemos que $\eta\oplus\eta' = i_A\eta p_C + i_{A'}\eta' p_{C'}$. Por lo tanto $\eta\oplus\eta'\in F(C\oplus C',A\oplus A')$ pues $F(C\oplus C',A\oplus A')$ es un subgrupo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C\oplus C',A\oplus A')$. De donde se sigue F es cerrada por sumas directas finitas de F-sucesiones exactas. $\square$

Corolario 1.1.10 *Una clase $\mathscr{C}\subseteq\bigcup_{C,A\in\mathrm{mod}(\Lambda)}\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$, de sucesiones exactas, induce un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-) : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op}\times\mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ab}$ si y sólo si $\mathscr{C}$ es cerrada por pull-backs, push-outs y sumas directas finitas.*

Lema 1.1.11 [7, 1.2] *Sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. Consideremos $\eta : 0\to A\xrightarrow{\alpha} B\xrightarrow{\beta} C\to 0$ y $\eta' : 0\to A'\xrightarrow{\alpha'} B'\xrightarrow{\beta'} C'\to 0$ sucesiones exactas en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces $\eta\oplus\eta'$ es F-exacta si y sólo si η y η' lo son.*

Demostración. ($\Longleftarrow$) Se sigue de 1.1.9.
($\Longrightarrow$) Por 1.1.8 tenemos que $\eta = p_A(\eta\oplus\eta')i_C$ y $\eta' = p_{A'}(\eta\oplus\eta')i_{C'}$. Como la clase de sucesiones F-exactas es cerrada por pull-backs y push-outs, se sigue que η y η' son F-exactas. $\square$

En todo lo que sigue, para simplificar, denotaremos por (M,N) a $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$, $\forall\, M,N\in\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Definición 1.1.12 *Sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. Definimos la categoría $\mathcal{P}(F)$ de* **F-proyectivos** *como la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son los $P \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tales que la sucesión $0 \to (P,A) \to (P,B) \to (P,C) \to 0$ es exacta en Ab para toda sucesión F-exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$. Dualmente, la categoría $\mathcal{I}(F)$ de* ***F-inyectivos****, es la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son los $I \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ para los cuales, toda sucesión F-exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$ induce la sucesión $0 \to (C,I) \to (B,I) \to (A,I) \to 0$ exacta en Ab.*

Observación 1.1.13 *De la definición se tiene que $\mathcal{P}(\Lambda) \subseteq \mathcal{P}(F)$ y $\mathcal{I}(\Lambda) \subseteq \mathcal{I}(F)$, donde $\mathcal{P}(\Lambda)$ denota a la subcategoría de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ de Λ-módulos proyectivos finitamente generados y $\mathcal{I}(\Lambda)$ denota a la subcategoría de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ de Λ-módulos inyectivos finitamente generados.*

Definición 1.1.14 *Sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. Decimos que F* ***tiene suficientes proyectivos*** *si, $\forall\, A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ existe una sucesión F-exacta $0 \longrightarrow A' \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ con $P \in \mathcal{P}(F)$. Dualmente, se dice que F* ***tiene suficientes inyectivos*** *si, $\forall\, C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ existe una sucesión F-exacta $0 \longrightarrow C \longrightarrow I \longrightarrow C' \longrightarrow 0$ con $I \in \mathcal{I}(F)$.*

Proposición 1.1.15 [7, 1.3] *Sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ y $\eta : 0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to 0$ una sucesión F-exacta. Entonces, $\forall\, M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, tenemos dos sucesiones exactas en Ab*

$$0 \longrightarrow (M,A) \xrightarrow{(M,\alpha)} (M,B) \xrightarrow{(M,\beta)} (M,C) \xrightarrow{\delta} F(M,A) \xrightarrow{F(1_M,\alpha)} F(M,B), \text{ y}$$

$$0 \longrightarrow (C,M) \xrightarrow{(\beta,M)} (B,M) \xrightarrow{(\alpha,M)} (A,M) \xrightarrow{\partial} F(C,M) \xrightarrow{F(\beta,1_M)} F(B,M),$$

donde $\delta(f) := \eta f,\ \forall\, f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,C)$; y $\partial(g) := g\eta,\ \forall\, g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,M)$.

Demostración. Observe que los morfismos de conexión δ y ∂ están bien definidos, pues la clase de sucesiones F-exactas es cerrada por pull-backs y push-outs. Consideremos el siguiente diagrama en Ab

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(M,C) \arrow[r, "\delta'"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,A) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_\Lambda(1,\alpha)"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,B) \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(M,C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, equal] & F(M,A) \arrow[r, "F(1,\alpha)"] \arrow[u, "\eta_{M,A}"] & F(M,B), \arrow[u, "\eta_{M,B}"]
\end{tikzcd}$$

donde el renglón superior es exacto. El primer cuadrado conmuta pues $\mathrm{Im}(\delta') \subseteq F(M,A)$. El segundo cuadrado conmuta pues F es un subfuntor de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. Notemos que $F(1,\alpha) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(1,\alpha)\eta_{M,A} = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(1,\alpha) \mid_{F(M,A)}$ pues $\eta_{M,A}$ es la inclusión natural como subgrupo. Entonces $\mathrm{Ker}(F(1,\alpha)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}^1_\Lambda(1,\alpha)) \cap F(M,A) = \mathrm{Im}(\delta') \cap F(M,A) = \mathrm{Im}(\delta)$. Por lo tanto, tenemos la exactitud en $F(M,A)$. Análogamente se prueba la exactitud de la otra sucesión. $\square$

Corolario 1.1.16 [7, 1.4] *Sea F un subfuntor aditivo de* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(-,-)$*. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $P \in \mathcal{P}(F)$ si y sólo si $F(P,A) = 0,\ \forall A \in \operatorname{mod}(\Lambda)$.

(b) $I \in \mathcal{I}(F)$ si y sólo si $F(C,I) = 0,\ \forall C \in \operatorname{mod}(\Lambda)$.

En particular, se tiene que $\mathcal{P}(F) = \operatorname{add}(\mathcal{P}(F))$ y $\mathcal{I}(F) = \operatorname{add}(\mathcal{I}(F))$.

Demostración.

(a) ($\Longrightarrow$) Sea $\eta : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} P \longrightarrow 0$ F-exacta. Como $P \in \mathcal{P}(F)$, la sucesión $0 \longrightarrow (P,A) \longrightarrow (P,E) \longrightarrow (P,P) \longrightarrow 0$ es exacta. Por lo tanto existe $\theta : P \longrightarrow E$ tal que $\beta\theta = 1_P$; probándose que η se escinde.
($\Longleftarrow$) Sea $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ F-exacta. Por 1.1.15, tenemos la sucesión exacta en Ab

$$0 \longrightarrow (P,A) \longrightarrow (P,B) \longrightarrow (P,C) \xrightarrow{\delta} F(P,A).$$

Luego, como $F(P,A) = 0$, tenemos que la sucesión anterior es exacta. Por lo tanto $P \in \mathcal{P}(F)$.

(b) Se prueba análogamente. $\square$

Proposición 1.1.17 [7, 1.5] *Sean F un subfuntor aditivo de* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *y η : $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta.*

(a) Si F tiene suficientes proyectivos, entonces η es F-exacta si y sólo si $0 \longrightarrow (P,A) \longrightarrow (P,B) \longrightarrow (P,C) \longrightarrow 0$ es exacta, $\forall P \in \mathcal{P}(F)$.

(b) Si F tiene suficientes inyectivos, entonces η es F-exacta si y sólo si $0 \longrightarrow (C,I) \longrightarrow (B,I) \longrightarrow (A,I) \longrightarrow 0$ es exacta, $\forall I \in \mathcal{I}(F)$.

Demostración. Sólo probaremos (a), pues la prueba de (b) es dual. Supongamos que F tiene suficientes proyectivos.
($\Longrightarrow$) Se sigue de la definición.
($\Longleftarrow$) Sea $\eta : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta, y supongamos que la sucesión $0 \longrightarrow (P,A) \longrightarrow (P,B) \longrightarrow (P,C) \longrightarrow 0$ es exacta, $\forall P \in \mathcal{P}(P)$. Consideremos una sucesión F-exacta $\xi : 0 \longrightarrow C' \longrightarrow P \xrightarrow{s} C \longrightarrow 0$ con $P \in \mathcal{P}(F)$. Por lo tanto, existe $t : P \longrightarrow B$ tal que $ft = s$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & P \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\eta = \gamma\xi$. Luego η es F-exacta. $\square$

Lema 1.1.18 [2, 4.2] *Sea* $\eta : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *exacta en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces,* $\forall\, X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,g) : \mathrm{Hom}_\Lambda(X,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(X,C)$ *es un epimorfismo si y sólo si* $\mathrm{Hom}_\Lambda(f,\tau X) : \mathrm{Hom}_\Lambda(B,\tau X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,\tau X)$ *es un epimorfismo, donde* $\tau := \mathrm{DTr}$ *es el trasladado de Auslander-Reiten.*

Notación 1.1.19 *Sean* $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ *clases de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Tenemos la siguiente clase de objetos* $\mathcal{X} \bigoplus \mathcal{Y} := \{X \oplus Y \mid X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\}$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Definición 1.1.20 *Sea* $\mathcal{X}$ *una clase de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Decimos que* $\mathcal{X}$ *es de* **tipofinito** *si* $\mathrm{add}(\mathcal{X}) = \mathrm{add}(M)$ *para algún* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Corolario 1.1.21 [7, 1.6] *Sea* F *un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{I}(F) = \tau(\mathcal{P}(F)) \bigoplus \mathcal{I}(\Lambda)$.

(b) $\mathcal{P}(F) = \tau^{-1}(\mathcal{I}(F)) \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda)$.

(c) Si $\mathcal{P}(F)$ *y* $\mathcal{I}(F)$ *son de tipo finito, entonces el número de inescindibles no isomorfos en* $\mathcal{P}(F)$ *y* $\mathcal{I}(F)$ *son los mismos.*

Demostración.

(a) Veamos que $\tau(\mathcal{P}(F)) \bigoplus \mathcal{I}(\Lambda) \subseteq \mathcal{I}(F)$. Dado que $\mathcal{I}(F) = \mathrm{add}(\mathcal{I}(F))$, basta ver que $\tau(\mathcal{P}(F)) \cup \mathcal{I}(\Lambda) \subseteq \mathcal{I}(F)$. Sea $X \in \tau(\mathcal{P}(F)) \cup \mathcal{I}(\Lambda)$. Si $X \in \mathcal{I}(\Lambda)$, ya acabamos. Supongamos que $X \in \tau(\mathcal{P}(F))$. Luego $X = \tau(Y)$ con $Y \in \mathcal{P}(F)$. Sea $\eta : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ F-exacta. Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_\Lambda(Y,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Y,C)$ es un epimorfismo. Por 1.1.18, tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(B,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,X)$ es un epimorfismo, por lo tanto $X \in \mathcal{I}(F)$. Veamos que $\mathcal{I}(F) \subseteq \tau(\mathcal{P}(F)) \bigoplus \mathcal{I}(\Lambda)$. Sea $Y \in \mathcal{I}(F)$. Dado que $\mathcal{I}(F) = \mathrm{add}(\mathcal{I}(F))$, podemos asumir que Y es inescindible. Si $Y \in \mathcal{I}(\Lambda)$, ya terminamos. Supongamos que $Y \notin \mathcal{I}(\Lambda)$. Sea $X := \mathrm{TrD}(Y)$. Luego, se tiene que $\tau(X) = \tau\tau^{-1}(Y) = Y$. Ahora bien, como $Y \in \mathcal{I}(F)$, entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(B,\tau(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,\tau(X))$ es un epimorfismo. Por lo tanto, de 1.1.18, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(X,C)$ también lo es. Luego $X \in \mathcal{P}(F)$, de donde $\mathcal{I}(F) \subseteq \tau(\mathcal{P}(F)) \bigoplus \mathcal{I}(\Lambda)$; probándose (a).

(b) Dual a (a).

(c) Como Λ es una R-álgebra de artin, tenemos que el número de inescindibles en $\mathcal{P}(\Lambda)$ y $\mathcal{I}(\Lambda)$ son los mismos. Por otro lado, τ es una biyección entre los inescindibles no proyectivos y los inescindibles no inyectivos. Por lo tanto, (c) se sigue de (a) y (b). $\square$

Notación 1.1.22 *Sea* $\mathcal{X}$ *una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Tenemos bifuntores* $F_\mathcal{X}, F^\mathcal{X} : (\mathrm{mod}(\Lambda))^{op} \times \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Sets}$ *dados por las siguientes asignaciones.*

(a) $F_\mathcal{X}(C,A) := \{\, 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(-,B)|_\mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(-,C)|_\mathcal{X}$ *es un epimorfismo*$\}$ *y* $F_\mathcal{X}(\alpha,\beta) := \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\alpha,\beta)$.

(b) $F^{\mathcal{X}}(C,A) := \{\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \ \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(B,-)|_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,-)|_{\mathcal{X}}$ *es un epimorfismo*$\}$ *y* $F^{\mathcal{X}}(\alpha,\beta) := \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\alpha,\beta)$.

Proposición 1.1.23 [7, 1.7,1.8] *Sea* $\mathcal{X}$ *una clase de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces*

(a) $F_{\mathcal{X}}$ *y* $F^{\mathcal{X}}$ *son subfuntores aditivos de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$.

(b) $F_{\mathcal{X}} = F^{\mathrm{DTr}(\mathcal{X})}$

Demostración.

(a) Sólo lo probaremos para $F_{\mathcal{X}}$, pues la prueba para $F^{\mathcal{X}}$ es dual. Por 3.1.8, es suficiente ver que la clase de sucesiones $F_{\mathcal{X}}$-exactas es cerrada por sumas directas finitas, por pull-backs y push-outs. Sean $\eta : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ con $\eta \in F_{\mathcal{X}}(C,A)$ y $t : C' \longrightarrow C$ un morfismo. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\eta t : 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d, "t"] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Sea $\alpha : X \longrightarrow C'$ con $X \in \mathcal{X}$, y consideremos $t\alpha : X \longrightarrow C$. Por lo tanto existe $\gamma : X \longrightarrow B$ tal que $\beta\gamma = t\alpha$ (pues $\eta \in F_{\mathcal{X}}(C,A)$). Por definición de pull-back, existe $\theta : X \longrightarrow E$ tal que $\beta'\theta = \alpha$. Por lo tanto $\eta t \in F_{\mathcal{X}}(C',A)$. Análogamente, si $s : A \longrightarrow A'$ entonces el push-out $s\eta$ también está en $F_{\mathcal{X}}(C,A')$.
Veamos ahora que la clase de sucesiones $F_{\mathcal{X}}$-exactas es cerrada por sumas directas finitas. En efecto, consideremos sucesiones exactas $\eta : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ y $\eta' : 0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$ con $\eta \in F_{\mathcal{X}}(C,A)$ y $\eta' \in F_{\mathcal{X}}(C',A')$. Como $(X,B) \longrightarrow (X,C)$ y $(X,B') \longrightarrow (X,C')$ son epimorfismos $\forall X \in \mathcal{X}$. Entonces $(X, B \oplus B') \longrightarrow (X, C \oplus C')$ es un epimorfismo $\forall X \in \mathcal{X}$. Por lo tanto $\eta \oplus \eta' \in F_{\mathcal{X}}(C \oplus C', A \oplus A')$; probándose que $F_{\mathcal{X}}$ es un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$.

(b) Es inmediato de 1.1.18. $\square$.

Corolario 1.1.24 *Sea* F *un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. *Entonces*

(a) $F = F_{\mathcal{P}(F)}$ *si* F *tiene suficientes proyectivos;*

(b) $F_{\mathcal{P}(F)} = F^{\mathcal{I}(F)}$.

Demostración.

(a) Se sigue de 1.1.17 (a).

(b) Se sigue de 1.1.21 (a) y 1.1.23 (b). $\square$

Proposición 1.1.25 [7, 1.9] *Sea F un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$.

(a) Sea P inescindible no proyectivo. Entonces, $P \in \mathcal{P}(F)$ si y sólo si la sucesión que casi se divide $\eta:\ 0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(P) \longrightarrow E \longrightarrow P \longrightarrow 0$ no es F-exacta.

(b) Sea I inescindible no inyectivo. Entonces, $I \in \mathcal{I}(F)$ si y sólo si la sucesión que casi se divide $\eta:\ 0 \longrightarrow I \longrightarrow E \longrightarrow \mathrm{TrD}(I) \longrightarrow 0$ no es F-exacta.

Demostración. Sólo probaremos (a), pues la prueba de (b) es dual.
($\Longrightarrow$) Sea $P \in \mathcal{P}(F)$. Si $\eta : 0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(P) \longrightarrow E \longrightarrow P \longrightarrow 0$ es F-exacta, entonces η se parte, lo cual es una contradicción pues η casi se divide. Por lo tanto η no es F-exacta.
($\Longleftarrow$) Sea $\eta : 0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(P) \longrightarrow E \longrightarrow P \longrightarrow 0$ no F-exacta. Supongamos que $P \notin \mathcal{P}(F)$. Entonces, existe una sucesión F-exacta que no se escinde η' : $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$. Luego f no es un split-epi, por lo tanto existe $\gamma : B \longrightarrow E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\eta' : 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & \mathrm{DTr}(P) \arrow[r] & E \arrow[r] & P \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Luego, $\eta = \gamma'\eta'$ y entonces η es F-exacta pues η' lo es, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $P \in \mathcal{P}(F)$. $\square$

Proposición 1.1.26 [7, 1.10] *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que* $\mathcal{X} = \mathrm{add}(\mathcal{X})$. *Entonces* $\mathcal{X} \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda) = \mathcal{P}(F_{\mathcal{X}})$.

Demostración. De la definición de $F_{\mathcal{X}}$ se sigue que $\mathcal{X} \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda) \subseteq \mathcal{P}(F_{\mathcal{X}})$ pues $\mathcal{P}(F_{\mathcal{X}}) = \mathrm{add}(\mathcal{P}(F_{\mathcal{X}}))$.
Sea $M \in \mathcal{P}(F_{\mathcal{X}})$. Veamos que $M \in \mathcal{X} \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda)$. En efecto, dado que $\mathcal{X} = \mathrm{add}(\mathcal{X})$, podemos asumir que M es inescindible. Por lo tanto, basta ver que si $M \notin \mathcal{X} \cup \mathcal{P}(\Lambda)$ entonces $M \notin \mathcal{P}(F_{\mathcal{X}})$. Sea M no proyectivo inescindible con $M \notin \mathcal{X}$. Luego, existe una sucesión $\eta : 0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(M) \longrightarrow E \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$ que casi se divide. Como $M \notin \mathcal{X}$, entonces todo morfismo $f : X \longrightarrow M$ con $X \in \mathcal{X}$ no es split-epi. En efecto, si f lo fuera, entonces $X \simeq M \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Por lo tanto $M \in \mathcal{X}$ pues $\mathcal{X}$ es cerrada por sumandos directos, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, todo $f : X \longrightarrow M$ con $X \in \mathcal{X}$ se factoriza a través de β. De donde se concluye que $\eta \in F_{\mathcal{X}}(M, \mathrm{DTr}M)$. Luego, por 1.1.25, tenemos que $M \notin \mathcal{P}(F_{\mathcal{X}})$; probándose que $\mathcal{X} \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda) = \mathcal{P}(F_{\mathcal{X}})$. $\square$

Proposición 1.1.27 [7, 1.11] *Sea F un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. *Entonces* *(a)* $F \subseteq F_{\mathcal{P}(F)}$,

(b) $F = F_{\mathcal{P}(F)}$ *si y sólo si* $F = F_{\mathcal{X}}$ *para alguna clase* $\mathcal{X}$ *de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que* $\mathcal{X} = \mathrm{add}(\mathcal{X})$.

Demostración.

(a) Sea $\eta : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ con $\eta \in F(C, A)$. Luego $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(P, C)$ es un epimorfismo $\forall P \in \mathcal{P}(F)$; y por lo tanto $\eta \in F_{\mathcal{P}(F)}(C, A)$.

(b) ($\Longrightarrow$) $\mathcal{X} = \mathcal{P}(F)$ satisface tal propiedad (ver 1.1.16).
($\Longleftarrow$) Sea $F = F_{\mathcal{X}}$ con $\mathcal{X} = \mathrm{add}(\mathcal{X})$. Por 1.1.26, tenemos que $\mathcal{P}(F) = \mathcal{X} \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda)$. Luego $F_{\mathcal{X} \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda)} = F_{\mathcal{X}}$. En efecto, tenemos por definición que $F_{\mathcal{X} \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda)}(C, A) \subseteq F_{\mathcal{X}}(C, A)$ pues $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda)$. Veamos la otra contención, sea $\eta : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $\eta \in F_{\mathcal{X}}(C, A)$. Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_\Lambda(X \oplus P, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(X \oplus P, C)$ es un epimorfismo $\forall X \in \mathcal{X}$, $\forall P \in \mathcal{P}(\Lambda)$. De donde, $\eta \in F_{\mathcal{X} \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda)}(C, A)$, probándose que $F = F_{\mathcal{P}(F)}$. $\square$

Definición 1.1.28 *Decimos que* $f : C \longrightarrow X$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *es* ***minimal a izquierda*** *si todo morfismo* $h : X \longrightarrow X$, *con* $f = hf$, *es un automorfismo. Un morfismo* $g : X \longrightarrow C$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *es* ***minimal a derecha*** *si todo morfismo* $h : X \longrightarrow X$, *con* $g = gh$, *es un automorfismo.*

Definición 1.1.29 *Sea* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Un morfismo* $f : M \longrightarrow C$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *es una* ***$\mathcal{C}$-preenvolvente*** *de* M *si* $C \in \mathcal{C}$ *y* $\mathrm{Hom}_\Lambda(f, C') : \mathrm{Hom}_\Lambda(C, C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M, C')$ *es suprayectiva,* $\forall\, C' \in \mathcal{C}$. *Una* $\mathcal{C}$*-preenvolvente* f *de* M, *es una* ***$\mathcal{C}$-envolvente*** *de* M *si* f *es minimal a izquierda. Dualmente,* $g : C \longrightarrow M$ *es una* ***$\mathcal{C}$-precubierta*** *de* M *si* $C \in \mathcal{C}$ *y* $\mathrm{Hom}_\Lambda(C', g) : \mathrm{Hom}_\Lambda(C', C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(C', M)$ *es suprayectiva,* $\forall\, C' \in \mathcal{C}$. *Una* $\mathcal{C}$*-precubierta* g *de* M *es una* ***$\mathcal{C}$-cubierta*** *de* M *si* g *es minimal a derecha.*

Las $\mathcal{C}$-preenvolventes y $\mathcal{C}$-precubiertas son también conocidas como $\mathcal{C}$- aproximaciones a izquierda y a derecha, respectivamente (ver [4]).

Definición 1.1.30 *Una clase* $\mathcal{C}$ *de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *es una* ***clase preenvolvente (envolvente)*** *si cada objeto* $A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *tiene una* $\mathcal{C}$*-preenvolvente (*$\mathcal{C}$*-envolvente). Diremos que* $\mathcal{C}$ *es una* ***clase precubriente (cubriente)*** *si cada objeto* $A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *tiene una* $\mathcal{C}$*-precubierta (*$\mathcal{C}$*-cubierta). Diremos que* $\mathcal{C}$ *es* ***funtorialmente finita*** *si* $\mathcal{C}$ *es precubriente y preenvolvente.*

Teorema 1.1.31 [7, 1.12] *Sea* F *un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) F *tiene suficientes proyectivos si y sólo si* $\mathcal{P}(F)$ *es precubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $F = F_{\mathcal{P}(F)}$.

(b) *F tiene suficientes inyectivos si y sólo si $\mathcal{I}(F)$ es preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $F = F^{\mathcal{I}(F)}$.

Demostración. Sólo probaremos (a), pues (b) es dual.
($\Longrightarrow$) Si F tiene suficientes proyectivos, entonces $\forall\, A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ existe una sucesión F-exacta $\eta: \ 0 \longrightarrow A' \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ con $P \in \mathcal{P}(F)$. Luego el morfismo $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,P)|_{\mathcal{P}(F)} \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(-,A)|_{\mathcal{P}(F)}$ es un epimorfismo. Por lo tanto $\mathcal{P}(F)$ es precubriente. Además por 1.1.24, tenemos que $F = F_{\mathcal{P}(F)}$.
($\Longleftarrow$) Supongamos que $\mathcal{P}(F)$ es precubriente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $F = F_{\mathcal{P}(F)}$. Sea $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Luego existe $\eta_C : 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow P \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$ exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y con f una $\mathcal{P}(F)$-precubierta de C. Por lo tanto, el morfismo $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,P)|_{\mathcal{P}(F)} \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(-,C)|_{\mathcal{P}(F)}$ es suprayectivo y entonces $\eta_C \in F_{\mathcal{P}(F)}(C, \mathrm{Ker}(f)) = F(C, \mathrm{Ker}(f))$. En particular, η_C es F-exacta, de donde concluimos que F tiene suficientes proyectivos. $\square$

Observación 1.1.32 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Por* [6, 7.3], *se tiene que $\mathcal{X}$ es preenvolvente (resp. precubriente) si y sólo si $\tau(\mathcal{X})$ lo es. Lo mismo es válido para $\tau^{-1}(\mathcal{X})$.*

Corolario 1.1.33 *Sea F un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$.

(a) *Si F tiene suficientes inyectivos, entonces $\mathcal{P}(F)$ es preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(b) *Si F tiene suficientes proyectivos, entonces $\mathcal{I}(F)$ es precubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Probemos sólo (a), pues (b) es dual. Si F tiene suficientes inyectivos, por 1.1.31(b), se tiene que $\mathcal{I}(F)$ es preenvolvente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Luego, por 1.1.32, se tiene que $\tau^{-1}(\mathcal{I}(F))$ es prenvolvente. Luego, como $\mathcal{P}(\Lambda)$ es preenvolvente, tenemos por 1.1.21, que $\mathcal{P}(F) = \tau^{-1}(\mathcal{I}(F)) \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda)$ también lo es. $\square$

Corolario 1.1.34 [7, 1.13]*Sea F un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *F tiene suficientes proyectivos e inyectivos.*

(b) *$\mathcal{P}(F)$ es funtorialmente finita en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $F = F_{\mathcal{P}(F)}$.

(c) *$\mathcal{I}(F)$ es funtorialmente finita en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $F = F^{\mathcal{I}(F)}$.

Demostración. Sólo probaremos que (a) es equivalente a (b). Pues la prueba de que (a) es equivalente a (c) es dual.
$(a) \Rightarrow (b)$ Se sigue de 1.1.31(a) y 1.1.33 (a).
$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $\mathcal{P}(F)$ funtorialmente finita y $F = F_{\mathcal{P}(F)}$. Entonces, por 1.1.31(a), tenemos que F tiene suficientes proyectivos. Por otro lado, de 1.1.24(b) se tiene que $F = F_{\mathcal{P}(F)} = F^{\mathcal{I}(F)}$. Luego, por 1.1.31(b), concluimos que F tiene suficientes inyectivos pues $\mathcal{I}(F) = \tau^{-1}(\mathcal{P}(F)) \bigoplus \mathcal{I}(\Lambda)$ es preenvolvente. $\square$

Definición 1.1.35 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Se dice que $\mathcal{X}$ es una* ***clase generadora*** *(resp.* ***clase cogeneradora****) de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *si* $\mathrm{add}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ *y* $\mathcal{P}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X}$ *(resp.* $\mathcal{I}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X}$*).*

Lema 1.1.36 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{X}$ es una clase generadora de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si y sólo si* $\mathcal{P}(F_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$.

(b) $\mathcal{X}$ es una clase cogeneradora de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si y sólo si* $\mathcal{I}(F^{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$.

Demostración. Sólo probemos (a), pues la prueba de (b) es dual.
($\Longrightarrow$) Por 1.1.26, y como $\mathcal{X}$ es una clase generadora, tenemos que $\mathcal{P}(F_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X} \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda) = \mathcal{X}$.
($\Longleftarrow$) Como $F_{\mathcal{X}}$ es un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(-,-)$, por 1.1.16(a), tenemos que $\mathcal{X} = \mathcal{P}(F_{\mathcal{X}})$ cumple que $\mathrm{add}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Por 1.1.26, tenemos que $\mathcal{X} = \mathcal{X} \bigoplus \mathcal{P}(\Lambda)$. Como $\mathrm{add}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$, tenemos que $\mathcal{P}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X}$, probándose que $\mathcal{X}$ es una clase generadora. $\square$

Teorema 1.1.37 [7, 1.14] *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(a) Sea $\mathcal{X}$ una clase generadora de $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces $\mathcal{X}$ es precubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si y sólo si $F_{\mathcal{X}}$ tiene suficientes proyectivos.*

(b) Sea $\mathcal{X}$ una clase cogeneradora de $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces $\mathcal{X}$ es preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si y sólo si $F^{\mathcal{X}}$ tiene suficientes inyectivos.*

(c) Sea $\mathcal{X}$ una clase generadora en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, $F_{\mathcal{X}}$ tiene suficientes inyectivos y suficientes proyectivos si y sólo si $\mathcal{X}$ es funtorialmente finita en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(d) Sea $\mathcal{X}$ una clase cogeneradora en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, $F^{\mathcal{X}}$ tiene suficiente inyectivos y suficientes proyectivos si y sólo si $\mathcal{X}$ es funtorialmente finita en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Sólo demostraremos (a) y (c), pues (b) y (d) son duales.

(a) Como $\mathcal{X}$ es una clase generadora, por 1.1.36(a), tenemos que $\mathcal{P}(F_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$. Entonces, por 1.1.27(b) y 1.1.31(a), $F = F_{\mathcal{X}}$ tiene suficientes proyectivos si y sólo si $\mathcal{P}(F_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$ es precubriente.

(c) Dado que $\mathcal{X}$ es una clase generadora, se tiene por 1.1.36 (a), que $\mathcal{P}(F_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$. Luego, por 1.1.21 (a), concluimos que $\mathcal{I}(F_{\mathcal{X}}) = \tau(\mathcal{X}) \bigoplus \mathcal{I}(\Lambda)$. Por lo tanto, de 1.1.23 (b), concluimos que $F_{\mathcal{X}} = F^{\tau(\mathcal{X})} = F^{\tau(\mathcal{X}) \bigoplus \mathcal{I}(\Lambda)} = F^{\mathcal{I}(F_{\mathcal{X}})}$. Luego, (c) se sigue de sigue de 1.1.34. $\square$

Observación 1.1.38 *Por* [6, 4.2], *tenemos que si $\mathcal{X}$ es de tipo finito, entonces $\mathcal{X}$ es funtorialmente finita. Por lo tanto, si $\mathcal{X}$ es una clase de tipo finito y generadora de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *entonces $F_{\mathcal{X}}$ tiene suficientes proyectivos e inyectivos.*

Teorema 1.1.39 [7, 1.15]

(a) Las aplicaciones $F \mapsto \mathcal{P}(F)$ *y* $\mathcal{X} \mapsto F_{\mathcal{X}}$ *inducen biyecciones inversas entre los subfuntores aditivos* F *de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *con suficientes proyectivos y las clases generadoras y precubrientes en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(b) Las aplicaciones $F \mapsto \mathcal{I}(F)$ *y* $\mathcal{X} \mapsto F^{\mathcal{X}}$ *inducen biyecciones inversas entre los subfuntores aditivos* F *de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *con suficientes inyectivos y las clases cogeneradoras y preenvolventes en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Sólo probaremos (a), pues la prueba de (b) es dual. Sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ con suficientes proyectivos. Por 1.1.31 (a) y 1.1.13, $\mathcal{P}(F)$ es una clase generadora y precubriente. Por otro lado, por 1.1.24, $F = F_{\mathcal{P}(F)}$. Por lo tanto la composición $F \mapsto \mathcal{P}(F) \mapsto F_{\mathcal{P}(F)} = F$ es la identidad.
Sea $\mathcal{X}$ una clase generadora y precubriente de $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Por 1.1.37 (a), $F_{\mathcal{X}}$ tiene suficientes proyectivos. Por otro lado, por 1.1.36 tenemos que $\mathcal{P}(F_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$. Por lo tanto la composición $\mathcal{X} \mapsto F_{\mathcal{X}} \mapsto \mathcal{P}(F_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$ es la identidad. $\square$

1.2. Homología Relativa

Sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. Supongamos que F tiene suficientes proyectivos. Entonces, para todo $A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, existe una sucesión exacta de Λ-módulos de la forma

$$\mathfrak{P}_A : \quad \cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \xrightarrow{d_{-1}} 0,$$

donde $P_i \in \mathcal{P}(F)$, $\forall\, i \geq 0$ y $0 \longrightarrow \mathrm{Im}(d_{i+1}) \longrightarrow P_i \longrightarrow \mathrm{Im}(d_i) \longrightarrow 0$ es F-exacta, $\forall\, i \geq 0$. Tal sucesión exacta será llamada una F-resolución F-proyectiva de A. Si F tiene suficientes inyectivos. Entonces, para todo $A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, existe una sucesión exacta de Λ-módulos de la forma

$$\mathfrak{I}_A : \quad 0 \xrightarrow{g_{-1}} A \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} \cdots \xrightarrow{g_n} I_n \xrightarrow{g_n+1} I_{n+1} \xrightarrow{g_{n+2}} \cdots,$$

donde $I_i \in \mathcal{I}(F)$, $\forall\, i \geq 0$ y $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(g_i) \longrightarrow I_{i-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}(g_{i+1}) \longrightarrow 0$ es F-exacta, $\forall\, i \geq 1$. Tal sucesión exacta será llamada una F-resolución F-inyectiva de A. Denotemos por $\mathfrak{P}^\bullet_A$ y $\mathfrak{I}^\bullet_A$ a los siguientes complejos truncados

$$\mathfrak{P}^\bullet_A : \quad \cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0,$$

$$\mathfrak{I}^\bullet_A : \quad 0 \longrightarrow I_0 \xrightarrow{g_1} \cdots \xrightarrow{g_n} I_n \xrightarrow{g_n+1} I_{n+1} \xrightarrow{g_{n+2}} \cdots.$$

Entonces, como en el caso clásico en que $\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(\Lambda)$, se definen los funtores derivados derechos de $\mathrm{Hom}_\Lambda(C,-)$ (resp. $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,A)$) cuando F tiene suficientes inyectivos (resp. suficientes proyectivos). También si F tiene suficientes proyectivos, podemos definir los funtores derivados de $B \otimes_\Lambda -$, $\forall\, B \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$. Denotaremos por $Com(\mathrm{mod}(\Lambda))$ a la categoría de complejos de Λ-módulos.

Definición 1.2.1 *Sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ con suficientes inyectivos (resp. suficientes proyectivos). Para cada $n \in \mathbb{Z}$, el **n-ésimo funtor F-derivado a derecha** de $\mathrm{Hom}_\Lambda(C,-)$ (resp. $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,A)$), que lo denotaremos por $\mathrm{Ext}^i_F(C,-) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{Ab}$ (resp. $\mathrm{Ext}^i_F(-,A) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{Ab}$), se define como sigue:*

(a) para cada $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\mathrm{Ext}^i_F(C,M) := H^i(\mathrm{Hom}_\Lambda(C,\mathfrak{I}^\bullet_M)$ (resp. $\mathrm{Ext}^i_F(M,A) := H^i(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathfrak{P}^\bullet_M,A))$, donde $H^i : Com(\mathrm{Ab}) \longrightarrow \mathrm{Ab}$ es el i-ésimo funtor de cohomología,

(b) dado $u : M \longrightarrow N$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, existe al menos un $f \in (\mathfrak{I}^\bullet_M, \mathfrak{I}^\bullet_N)_{Com(\mathrm{mod}(\Lambda))}$ (resp. $f \in (\mathfrak{P}^\bullet_M, \mathfrak{P}^\bullet_N)_{Com(\mathrm{mod}(\Lambda))}$) tal que los siguientes diagramas en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "u"'] & I_0^M \arrow[d, "f_0"] \\ N \arrow[r, "g_0'"'] & I_0^N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P_0^M \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[d, "u"] \\ P_0^N \arrow[r, "d_0'"'] & N \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Definimos $\mathrm{Ext}^i_F(C,u) := H^i(\mathrm{Hom}_\Lambda(C,f))$ (resp. $\mathrm{Ext}^i_F(u,A) := H^i(\mathrm{Hom}_\Lambda(f,A)))$.

Observación 1.2.2 *(a) Se puede ver que la definición del funtor $\mathrm{Ext}^i_F(C,-)$ (resp. $\mathrm{Ext}^i_F(-,A)$) no depende de las F-resoluciones F-inyectivas (resp. F-proyectivas) ni de los levantamientos de u escogidos.*

(b) Se puede ver que si F tiene suficientes inyectivos y suficientes proyectivos, entonces $\mathrm{Ext}^i_F(C,A)$ se puede calcular usando F-coresoluciones F-inyectivas o F-resoluciones F-proyectivas y ambas coinciden.

(c) Similarmente al caso de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,A)$, se puede ver que si F tiene suficientes inyectivos o suficientes proyectivos, entonces $\mathrm{Ext}^1_F(C,A) = F(C,A)$.

(d) Si F tiene suficientes inyectivos (resp. suficientes proyectivos) y $\eta : 0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ es F-exacta. Entonces, existen sucesiones exactas largas:

(i) $0 \longrightarrow (C,L) \longrightarrow (C,M) \longrightarrow (C,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(C,L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(C,M) \longrightarrow$

$\mathrm{Ext}^1_F(C,N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^2_F(C,L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_F(C,M) \longrightarrow \dots$

(ii) $0 \longrightarrow (N,A) \longrightarrow (M,A) \longrightarrow (L,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(N,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(M,A) \longrightarrow$

$\mathrm{Ext}^1_F(L,A) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^2_F(N,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_F(M,A) \longrightarrow \dots.$

Notación 1.2.3 *Sean F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$. Para cada $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, consideraremos a las siguientes clases de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$:*

$\mathcal{X}^{_F\perp_i} := \{M \in \operatorname{mod}(\Lambda) : \operatorname{Ext}^i_F(-,M)\mid_{\mathcal{X}} = 0\}$ *y* $\mathcal{X}^{_F\perp_\infty} := \cap_{i>0}\mathcal{X}^{_F\perp_i}$. *Dualmente, se tienen las clases* ${}^{_F\perp_i}\mathcal{X}$ *y* ${}^{_F\perp_\infty}\mathcal{X}$. *En el caso que* $F = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *nos olvidaremos del superíndice* F, *es decir,* $\mathcal{X}^{_F\perp_i} = \mathcal{X}^{\perp_i}$ *y* $\mathcal{X}^{_F\perp_\infty} = \mathcal{X}^{\perp_\infty}$.

Dado un subfuntor F de $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(-,-)$, denotaremos por F^{op} al subfuntor de $\operatorname{Ext}^1_{\Lambda^{op}}(-,-)$ dado por

$$F^{op}(C,A) := \{\eta : 0 \to A \to B \to C \to 0 \mid D(\eta) \in F(D(A), D(C))\},$$

para cada par $A, C \in \operatorname{mod}(\Lambda^{op})$. Es fácil ver que $\mathcal{P}(F^{op}) = D(\mathcal{I}(F))$ y que $\mathcal{I}(F^{op}) = D(\mathcal{P}(F))$.

Definición 1.2.4 *Sea* F *un subfuntor aditivo de* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *con suficientes proyectivos (resp.* F^{op} *con suficientes proyectivos). Para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *y* $A \in \operatorname{mod}(\Lambda)$, $B \in \operatorname{mod}(\Lambda^{op})$ *el* ***n-ésimo funtor* F*-derivado a izquierda*** *de* $-\otimes_\Lambda A$ *(resp.* $B \otimes_\Lambda -$*), que lo denotaremos por* $\operatorname{Tor}^F_i(-,A) : \operatorname{mod}(\Lambda^{op}) \to \operatorname{Ab}$ *(resp.* $\operatorname{Tor}^F_i(B,-) : \operatorname{mod}(\Lambda) \to \operatorname{Ab}$*), se define como sigue:*

(a) para cada $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ *y* $L \in \operatorname{mod}(\Lambda^{op})$ $\operatorname{Tor}^F_i(B,M) := H^i(B \otimes_\Lambda \mathfrak{P}^\bullet_M)$ *(resp.* $\operatorname{Tor}^F_i(L,A) := H^i(\mathfrak{P}^{\bullet,op}_L \otimes_\Lambda A)$ *donde* $H^n : Com(\operatorname{Ab}) \longrightarrow \operatorname{Ab}$ *es el i-ésimo funtor de cohomología y* $\mathfrak{P}^\bullet_M$ *(resp.* $\mathfrak{P}^{\bullet,op}_L$*) es una* F*-resolución truncada de* M *(resp.* L*) en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$ *(resp.* $\operatorname{mod}(\Lambda^{op})$).

(b) dado $u : M \longrightarrow N$ *en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$ *(resp,* $u' : L \longrightarrow R$ *en* $\operatorname{mod}(\Lambda^{op})$*) existe al menos un* $f \in (\mathfrak{P}^\bullet_M, \mathfrak{P}^\bullet_N)_{Com(\operatorname{mod}(\Lambda))}$ *(resp.* $f' \in (\mathfrak{P}^{\bullet,op}_L, \mathfrak{P}^{\bullet,op}_R)_{Com(\operatorname{mod}(\Lambda^{op}))}$*) tal que los siguientes diagramas en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$ *(resp. en* $\operatorname{mod}(\Lambda^{op})$*)*

$$\begin{tikzcd} P_0^M \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[d, "u"] \\ P_0^N \arrow[r, "d_0'"'] & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P_0^L \arrow[r, "h_0"] \arrow[d, "f_0'"'] & L \arrow[d, "u'"] \\ P_0^R \arrow[r, "h_0'"'] & R \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Definimos $\operatorname{Tor}^F_i(B,u) := H^i(B \otimes_\Lambda f)$ *(resp.* $\operatorname{Tor}^F_i(u,A) := H^i(f' \otimes_\Lambda A)$*).*

Observación 1.2.5 *(a) Del hecho que* $\mathcal{P}(F^{op}) = D(\mathcal{I}(F))$, *se tiene que* F^{op} *tiene suficientes proyectivos si y sólo si* F *tiene suficientes inyectivos.*

(b) Se puede ver que la definición de $\operatorname{Tor}^F_i(B,-)$ *(resp,* $\operatorname{Tor}^F_i(-,A)$*) no depende de las resoluciones* F*-proyectivas en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$ *(resp.* F^{op}*-proyectivas en* $\operatorname{mod}(\Lambda^{op})$*) ni de los levantamientos de* u *escogidos.*

(c) Se puede ver que si F *tiene suficientes proyectivos y* F^{op} *tiene suficientes proyectivos, entonces* $\operatorname{Tor}^F_i(B,A)$ *se puede calcular usando resoluciones* F*-proyectivas o resoluciones* F^{op}*-proyectivas y ambas coinciden.*

(d) Si F *tiene suficientes proyectivos (resp.* F^{op} *tiene suficientes proyectivos) y* $\eta : 0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *es* F*-exacta en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$ *(resp. en* $\operatorname{mod}(\Lambda^{op})$*). Entonces, existen sucesiones exactas largas:*

(i) $\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_2^F(B,M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_2^F(B,N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Tor}_1^F(B,L) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^F(B,M) \longrightarrow$

$\mathrm{Tor}_1^F(B,N) \xrightarrow{\delta} B \otimes_\Lambda L \longrightarrow B \otimes_\Lambda M \longrightarrow B \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$

(ii) $\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_2^F(M,A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_2^F(N,A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Tor}_1^F(L,A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^F(M,A) \longrightarrow$

$\mathrm{Tor}_1^F(N,A) \xrightarrow{\delta} L \otimes_\Lambda A \longrightarrow M \otimes_\Lambda A \longrightarrow N \otimes_\Lambda A \longrightarrow 0.$

1.3. Subcategorías Homológicamente finitas

Sea $\mathcal{X}$ una clase generadora y precubriente de $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Para cada $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, existe una sucesión exacta

$$X(C): \cdots \longrightarrow X_2(C) \xrightarrow{f_2(C)} X_1(C) \xrightarrow{f_1(C)} X_0(C) \xrightarrow{f_0(C)} C \longrightarrow 0\ ,$$

tal que $f_i(C) : X_i(C) \longrightarrow \mathrm{Im} f_i(C)$ es una $\mathcal{X}$-cubierta, $\forall i > 0$. Para cada $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$y $n > 0$, sea $\Omega^n_{\mathcal{X}}(C) := \mathrm{Im}(f_n(C))$ y $\Omega^n_{\mathcal{X}}(\mathrm{mod}(\Lambda)) := \{\Omega^n_{\mathcal{X}}(C) \mid C \in \mathrm{mod}(\Lambda)\}$. Observe que en este caso, $F := F_{\mathcal{X}}$ es subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$, con suficientes proyectivos y además $\mathcal{P}(F) = \mathcal{X}$. En particular, la sucesión $X(C)$ es una F-resolución F-proyectiva minimal de C.
En general, sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ con suficientes proyectivos y suficientes inyectivos. Por 1.1.16 y 1.1.34, sabemos que $\mathcal{P}(F)$ (resp. $\mathcal{I}(F)$) es una clase generadora y precubriente (resp. cogeneradora y preenvolvente) de $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Por lo tanto, para $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ existen:

(a) una F-resolución F-proyectiva minimal

$$\mathfrak{P}_M : \quad \cdots \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \xrightarrow{f_{-1}} 0.$$

Para $i \geq 0$, el objeto $\Omega^i_F(M) := \mathrm{Ker}(f_{i-1}) = \mathrm{Im}(f_i)$ es llamado la i-ésima **F-sizigia** de M. Observe que en este caso $\Omega^i_F(M) = \Omega^i_{\mathcal{X}}(M)$, donde $\mathcal{X} = \mathcal{P}(F)$.

(b) una F-coresolución F-inyectiva minimal

$$\mathfrak{I}_M : \quad 0 \xrightarrow{g_{-1}} M \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} \cdots \xrightarrow{g_n} I_n \xrightarrow{g_n+1} I_{n+1} \xrightarrow{g_{n+2}} \cdots.$$

Para $i \geq 0$, el objeto $\Omega^{-i}_F(M) := \mathrm{Coker}(g_{i-1}) = \mathrm{Im}(g_i)$ es llamado la i-ésima **F-cosizigia** de M.

Proposición 1.3.1 [7, 3.2] *Sea $\mathcal{X}$ una clase generadora y funtorialmente finita en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces,*

(a) $\mathcal{X} \bigoplus \Omega^n_{\mathcal{X}}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ *es funtorialmente finita en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, $\forall n \geq 0$;

(b) Para cada $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, existe una $\mathcal{X} \bigoplus \Omega^n_{\mathcal{X}}(\mathrm{mod}(\Lambda))$-precubierta de M de la forma $\Omega^n_F(\Omega^{-n}_F(M)) \oplus X_M \longrightarrow M$ para algún $X_M \in \mathcal{X}$, donde $F = F_{\mathcal{X}}$.

Demostración. Por 1.1.37, sabemos que $F = F_{\mathcal{X}}$ tiene suficientes proyectivos e inyectivos y además $\mathcal{P}(F) = \mathcal{X}$. Procederemos por inducción sobre n.

Sean $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\eta :\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} I \xrightarrow{\beta} \Omega^{-1}_F(M) \longrightarrow 0$ con α minimal a izquierda.

Sea $n = 1$, y consideremos $\xi' :\ 0 \longrightarrow \Omega^1_F(I) \longrightarrow P_I \xrightarrow{f'} I \longrightarrow 0$ con f' una $\mathcal{X}$-cubierta. Haciendo el pull-back del diagrama $M \xrightarrow{\alpha} I \xleftarrow{f'} P_I$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & \xi \arrow[d, phantom, "\vdots"] & \xi' \arrow[d, phantom, "\vdots"] & & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \Omega^1_F(I) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega^1_F(I) \arrow[d] & & \\
\eta' : 0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & P_I \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f'"] & \Omega^{-1}_F(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & I \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \Omega^{-1}_F(M) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Como ξ' es F-exacta, entonces la sucesión exacta $\xi : 0 \longrightarrow \Omega^1_F(I) \longrightarrow Z \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ es F-exacta. Como $P_I \in \mathcal{P}(F) = \mathcal{X}$ y t no necesariamente es minimal, existe una descomposición $P_I = X \oplus X'$ con $X, X' \in \mathcal{X}$ tal que $t|_{X'}$ es la versión minimal a derecha de t y $Z = X \oplus \mathrm{Ker}(t|_{X'})$. Ahora bien, dado que $\mathrm{Ker}(t|_{X'}) = \Omega^1_F(\Omega^{-1}_F(M))$, obtenemos que $Z = X \oplus \Omega^1_F(\Omega^{-1}_F(M)) \in \mathcal{X} \oplus \Omega^1_F(\mathrm{mod}(\Lambda))$. Veamos que f es una $\mathcal{X} \oplus \Omega^1_F(\mathrm{mod}(\Lambda))$-precubierta de M. Como $F = F_{\mathcal{X}}$ y $\xi \in F(M, \Omega^1_F(I))$, entonces $\forall \lambda : X \longrightarrow M$ con $X \in \mathcal{X}$, existe $h : X \longrightarrow Z$ tal que $\lambda = fh$. Por lo tanto, f es una $\mathcal{X}$-precubierta de M. Para ver que f es una $\mathcal{X} \oplus \Omega^1_F(\mathrm{mod}(\Lambda))$-precubierta de M, basta ver que f es una $\Omega^1_F(\mathrm{mod}(\Lambda))$-precubierta de M. Sea $g : B \longrightarrow M$ con $B = \Omega^1_F(A)$ para algún

$A \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & P_I \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f'"] & \Omega_F^{-1}(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] & I \arrow[r, "\beta"] & \Omega_F^{-1}(M) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_F^1(A) \arrow[r, "u"] \arrow[u, "g"] & P_A \arrow[r, "v"] \arrow[u, "g'"] & A \arrow[r] \arrow[u, "g''"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Donde g' existe pues la sucesión inferior es F-exacta y $I \in \mathcal{I}(F)$. Luego de la conmutatividad del primer cuadrado inferior, se sigue la existencia de g''. Dado que $\xi' : \ 0 \longrightarrow \Omega_F^1(I) \longrightarrow P_I \xrightarrow{f'} I \longrightarrow 0$ es F-exacta y $g' : P_A \longrightarrow I$ con $P_A \in \mathcal{P}(F)$, existe $h' : P_A \longrightarrow P_I$ tal que $g' = f'h'$. Por lo tanto, $th' = \beta f'h' = \beta g' = g''v$. Luego existe $h : \Omega_F^1(A) \longrightarrow Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "s"] & P_I \arrow[r, "t"] & \Omega_F^{-1}(M) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_F^1(A) \arrow[r, "u"] \arrow[u, "h"] & P_A \arrow[r, "v"] \arrow[u, "h'"] & A \arrow[r] \arrow[u, "g''"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\alpha f h = f'sh = f'h'u = g'u = \alpha g$; de donde $fh = g$ pues α es un monomorfismo. Por lo tanto f es una $\Omega_F^1(\operatorname{mod}(\Lambda))$-precubierta de M.
Sea $n > 1$. Sea $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$, por inducción tenemos que existe una sucesión F-exacta $\zeta : 0 \longrightarrow N \longrightarrow \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X \xrightarrow{f''} \Omega_F^{-1}(M) \longrightarrow 0$ donde f'' es una $\Omega_F^{n-1}(\operatorname{mod}(\Lambda)) \oplus \mathcal{X}$-precubierta de $\Omega_F^{-1}(M)$ para algún $X \in \mathcal{X}$. Sea

$$\Xi : \ 0 \longrightarrow W \xrightarrow{\varphi} P_{\Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M))} \xrightarrow{\Phi} \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \longrightarrow 0$$

F-exacta con Φ una $\mathcal{X}$-cubierta de $\Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M))$. Como la suma directa de sucesiones F-exactas es F-exacta, tenemos la siguiente sucesión F-exacta

$$\Xi' : \ 0 \longrightarrow W \xrightarrow{\vartheta} Q' \xrightarrow{\Phi'} \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X \longrightarrow 0$$

con $\Phi' = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 1_X \end{pmatrix}$ y $\vartheta = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $Q' := P_{\Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M))} \oplus X$. Como η es F-exacta, considerando el morfismo $f''\Phi' : Q' \longrightarrow \Omega_F^{-1}(M)$ tenemos que existe $\lambda : Q' \longrightarrow I$ tal que $f''\Phi' = \beta\lambda$. Notemos que λ no necesariamente es un epimorfismo, por lo tanto construiremos otro morfismo. Dado que $f' : P_I \longrightarrow I$ es un epimorfismo (ver ξ'), tenemos que $k' := (f', \lambda) : P_I \oplus Q' \longrightarrow I$ es un epimorfismo. Ahora, como ζ es F-exacta, existe $\rho : P_I \longrightarrow \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X$ tal que $t = \beta f' = f''\rho$ (ver η'). Por lo tanto, tenemos la sucesión exacta

$$\Xi'' : \ 0 \longrightarrow K \xrightarrow{p} P_I \oplus Q' \xrightarrow{q} \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X \longrightarrow 0$$

con $q := (\rho, \Phi') : P_I \oplus Q' \longrightarrow \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X$ y $K := \mathrm{Ker}(q)$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & N' \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
\Xi'' : 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "p"] \arrow[d, "k"] & P_I \oplus Q' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "k'"] & \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] & I \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \Omega_F^{-1}(M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0, &
\end{tikzcd}$$

donde todas las sucesiones son F-exactas. En efecto, como $F = F_{\mathcal{X}}$, para ver que Ξ'' es F-exacta, basta verificar que $\forall \mu : W \longrightarrow \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X$ con $W \in \mathcal{X}$ existe $\mu' : W \longrightarrow P_I \oplus Q'$ tal que $\mu = q\mu'$. Sea $\mu : W \longrightarrow \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X$ con $W \in \mathcal{X}$, como Ξ' es F-exacta, existe $\gamma : W \longrightarrow Q'$ tal que $\Phi'\gamma = \mu$. Por lo tanto, definiendo $\mu' := \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$, tenemos que $q\mu' = \mu$. Por lo tanto Ξ'' es F-exacta. Análogamente se prueba que la primera columna del diagrama anterior es F-exacta. Notemos que $Q := P_I \oplus Q' \in \mathcal{X}$ pues cada sumando está en $\mathcal{X}$. Como t no necesariamente es minimal, entonces existe una descomposición de Q como $Q = X_1 \oplus X_2$ con $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, $t|_{X_1}$ minimal a derecha y $t|_{X_2} = 0$. Por lo tanto, $K = \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(q|_{X_1}) \oplus X_2 = \Omega_F^1(\Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X) \oplus X_2$. Se puede ver fácilmente que Ω_F^1 es un funtor aditivo y que $\Omega_F^1(X) = 0$, $\forall X \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $K = \Omega_F^1(\Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M))) \oplus X_2 = \Omega_F^n(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X_2 \in \Omega_F^n(\mathrm{mod}(\Lambda)) \oplus \mathcal{X}$. Sea $0 \longrightarrow \Omega_F^1(M) \longrightarrow P_M \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ una sucesión F-exacta con π una $\mathcal{X}$-cubierta y $P_M \in \mathcal{X} = \mathcal{P}(F)$. Veamos que $(k, \pi) : K \oplus P_M \longrightarrow M$ es una $\Omega_F^n(\mathrm{mod}(\Lambda)) \oplus \mathcal{X}$-precubierta de M. Sea $\psi : Y \longrightarrow M$ con $Y \in \mathcal{X}$ y $i_{P_M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : P_M \longrightarrow Z \oplus P_M$ la inclusión canónica. Dado que π es $\mathcal{X}$-precubierta M, existe $\psi' : Y \longrightarrow P_M$ tal que $\psi = \pi\psi' = (k, \pi) i_{P_M} \psi'$. Por lo tanto (k, π) es una $\mathcal{X}$-precubierta de M. Luego, basta demostrar que si $G : B \longrightarrow M$ con $B \in \Omega_F^n(\mathrm{mod}(\Lambda))$, entonces G se factoriza a tráves de (k, π). Podemos suponer que $B = \Omega_F^n(A)$ con $A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
\Xi'' : 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "p"] \arrow[d, "k"] & Q \arrow[r, "q"] \arrow[d, "k'"] & \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] & I \arrow[r, "\beta"] & \Omega_F^{-1}(M) \arrow[r] & 0 \\
\epsilon : 0 \arrow[r] & \Omega_F^n(A) \arrow[r, "U"] \arrow[u, "G"] & P \arrow[r, "V"] \arrow[u, "G'"] & \Omega_F^{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[u, "G''"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Donde G' existe pues la sucesión inferior es F-exacta y $I \in \mathcal{I}(F)$. Luego de la conmutatividad del primer cuadrado inferior, se sigue la existencia de G''. Como f'' es una $\Omega_F^{n-1}(\mathrm{mod}(\Lambda)) \oplus \mathcal{X}$-precubierta de $\Omega_F^{-1}(M)$, existe $H'' : \Omega_F^{n-1}(A) \longrightarrow \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X$ tal que $G'' = f''H''$. Consideremos el morfismo $H''V : P \longrightarrow \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X$ con $P \in \mathcal{P}(F)$, como Ξ'' es F-exacta, entonces existe $H' : P \longrightarrow Q$ tal que $qH' = H''V$. Luego, existe $H : \Omega_F^n(A) \longrightarrow Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "p"] & Q \arrow[r, "q"] & \Omega_F^{n-1}(\Omega_F^{-n}(M)) \oplus X \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_F^n(A) \arrow[r, "U"] \arrow[u, "H"] & P \arrow[r, "V"] \arrow[u, "H'"] & \Omega_F^{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[u, "H''"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Luego, $\beta k'H' = f''qH' = f''H''V = G''V = \beta G'$, por lo tanto $\beta(k'H' - G') = 0$. Entonces existe $r : P \longrightarrow M$ tal que $\alpha r = k'H' - G'$. Luego, $\alpha(kH - rU) = \alpha kH - \alpha rU = \alpha kH - (k'H' - G')U = \alpha kH - k'H'U + G'U = \alpha kH - k'pH + G'U = \alpha kH - \alpha kH + \alpha G = \alpha G$, como α es un monomorfismo, tenemos que $kH - rU = G$. Como $\Upsilon : 0 \longrightarrow C \longrightarrow K \oplus P_M \xrightarrow{(k,\pi)} M \longrightarrow 0$ es F-exacta, considerando el morfismo $r : P \longrightarrow M$, tenemos que existe $h_0 : P \longrightarrow K \oplus P_M$ tal que $r = (k, \pi)h_0$. Por lo tanto, $-(k,\pi)(h_0U - \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix}) = -(k,\pi)h_0U + (k,\pi)\begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} = -rU + kH = G$. Por lo tanto, $(k,\pi) : K \oplus P_M \longrightarrow M$ es una $\Omega_F^n(\mathrm{mod}(\Lambda)) \oplus \mathcal{X}$-precubierta de M. $\square$

Para demostrar que $\Omega_F^n(\mathrm{mod}(\Lambda)) \oplus \mathcal{X}$ es preenvolvente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, necesitamos del siguiente resultado de [9].

Proposición 1.3.2 [9, 1.2] *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores adjuntos con G adjunto izquierdo y H adjunto derecho. Entonces $\mathrm{Im}(H)$ es preenvolvente en $\mathcal{C}$ y el morfismo unidad $I_{\mathcal{C}} \longrightarrow HG$, dado por la adjunción, nos dá una $\mathrm{Im}(H)$-preenvolvente $C \longrightarrow HG(C)$ para cada $C \in \mathcal{C}$.*

Definición 1.3.3 *Sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ con suficientes proyectivos. La categoría* **F-*estable*** $\underline{\mathrm{mod}}_F(\Lambda)$*, es la categoría cociente de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *módulo $\mathcal{P}(F)$.*

Recordemos que F^{op} denota al subfuntor de $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda^{op}}(-,-)$ dado por

$$F^{op}(C,A) = \{\eta : 0 \to A \to B \to C \to 0 \mid D(\eta) \in F(D(A), D(C)).\}$$

$\forall A, C \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$. Es fácil ver que $\mathcal{P}(F^{op}) = D(\mathcal{I}(F))$.

Observación 1.3.4 *Se puede ver, igual que en los casos clásicos, que para F y F^{op} con suficientes proyectivos, las siguientes condiciones se satisfacen para $n > 0$.*

(a) $\Omega^n_F : \underline{\mathrm{mod}}_F(\Lambda) \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}_F(\Lambda)$ *es un funtor bien definido.*

(b) $\mathrm{Tr}_F : \underline{\mathrm{mod}}_F(\Lambda) \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}_{F^{op}}(\Lambda^{op})$ *es un funtor bien definido, donde* Tr_F *se define como en el sentido clásico del transpuesto* Tr*, nada más que en lugar de tomar una presentación proyectiva minimal de M, se toma una F-presentación proyectiva minimal de M.*

(c) $\mathrm{Tr}_{F^{op}}\Omega^n_{F^{op}}\mathrm{Tr}_F : \underline{\mathrm{mod}}_F(\Lambda) \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}_F(\Lambda)$ *es un adjunto a izquierda de Ω^n_F.*

Corolario 1.3.5 *Sea F un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *con suficientes proyectivos y $n > 0$. Entonces, la clase* $\Omega^n_F(\mathrm{mod}(\Lambda)) \subseteq \underline{\mathrm{mod}}_F(\Lambda)$ *es preenvolvente en* $\underline{\mathrm{mod}}_F(\Lambda)$*.*

Demostración. Se sigue de 1.3.4 y 1.3.2. $\square$

Proposición 1.3.6 [7, 3.4] *Sea $\mathcal{X}$ una clase generadora funtorialmente finita en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces,* $\Omega^n_{\mathcal{X}}(\mathrm{mod}(\Lambda)) \oplus \mathcal{X}$ *es preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*; además* $\forall M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *existe una* $\Omega^n_{\mathcal{X}}(\mathrm{mod}(\Lambda)) \oplus \mathcal{X}$*-preenvolvente de M de la forma* $M \longrightarrow \Omega^n_F(\mathrm{Tr}\Omega^n_{F^{op}}\mathrm{Tr}(M)) \oplus X_M$ *para algún* $X_M \in \mathcal{X}$*.*

Demostración. Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Como $\Omega^n_F(\mathrm{mod}(\Lambda))$ es preenvolvente, existe $Z^M := \Omega^n_F(\mathrm{Tr}\Omega^n_{F^{op}}\mathrm{Tr}(M)) \in \Omega^n_F(\mathrm{mod}(\Lambda))$ y $g : M \longrightarrow Z^M$ una $\Omega^n_F(\mathrm{mod}(\Lambda))$-preenvolvente de M. Por lo tanto, $\forall\, h : A \longrightarrow U$ con $U \in \Omega^n_F(\mathrm{mod}(\Lambda))$, existe $f : Z^M \longrightarrow U$ tal que $h = fg$ en $\underline{\mathrm{mod}}_F(\Lambda)$. Por lo tanto, $h - fg$ se factoriza a tráves de un elemento de $\mathcal{P}(F) = \mathcal{X}$. Sea $g' : M \longrightarrow X_M$ una $\mathcal{X}$-preenvolvente de M. Luego, entonces $(g, g') : M \longrightarrow \Omega^n_F(\mathrm{Tr}\Omega^n_{F^{op}}\mathrm{Tr}(M)) \oplus X_M$ es una $\Omega^n_F(\mathrm{mod}(\Lambda)) \oplus \mathcal{X}$-preenvolvente de M. $\square$

1.4. Construcción de subcategorías homológicamente finitas

Definición 1.4.1 *Sean F un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*.*

*(a) Una $(\mathcal{X}, \mathbf{F})$-**precubierta** de $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, está dada por una sucesión F-exacta* $0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$ *con $X \in \mathcal{X}$ tal que el morfismo* $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, f)|_{\mathcal{X}} : \mathrm{Hom}_\Lambda(-, X)|_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(-, C)|_{\mathcal{X}}$ *es suprayectivo. Si f es minimal a derecha, decimos que $f : X \longrightarrow C$ es una $(\mathcal{X}, \mathbf{F})$-**cubierta** de C.*

(b) *Una* $(\mathcal{X}, \mathbf{F})$-***preenvolvente*** *de* $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, *está dada por una sucesión* F-*exacta* $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} X \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ *con* $X \in \mathcal{X}$ *tal que el morfismo* $\mathrm{Hom}_\Lambda(f, -)|_\mathcal{X} : \mathrm{Hom}_\Lambda(X, -)|_\mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(C, -)|_\mathcal{X}$ *es suprayectivo. Si* f *es minimal a izquierda, decimos que* $f : C \longrightarrow X$ *es una* $(\mathcal{X}, \mathbf{F})$-***envolvente*** *de* C.

(c) *Se dice que* $\mathcal{X}$ *es* $\mathbf{F}$-***precubriente*** *(resp.* $\mathbf{F}$-***preenvolvente****) si todo* $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *tiene al menos una* $(\mathcal{X}, F)$-*precubierta (resp.* $(\mathcal{X}, F)$-*preenvolvente).*

(d) *Se dice que* $\mathcal{X}$ *es* $\mathbf{F}$-***funtorialmente finita*** *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *si* $\mathcal{X}$ *es* F-*precubriente y* F-*preenvolvente.*

(e) *Se dice que* $\mathcal{X}$ *es* $\mathbf{F}$-***homológicamente finita*** *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *si es* F-*precubriente o* F-*preenvolvente.*

Definición 1.4.2 *Sea* F *un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *y* $\mathcal{X}$ *una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Se dice que* $\mathcal{X}$ *es una clase* $\mathbf{F}$-***generadora*** *(resp.* $\mathbf{F}$-***cogeneradora****) de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *si* $\mathcal{X} = \mathrm{add}(\mathcal{X})$ *y* $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{X}$ *(resp.* $\mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{X}$*).*

Proposición 1.4.3 [7, 4.1] *Sea* F *un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *y* $\mathcal{X}$ *una clase de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *cerrada por sumandos directos.*

(a) *Si* $\mathcal{X}$ *es* F-*precubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *entonces* $\mathcal{X}$ *es precubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{X}$.

(b) *Si* $\mathcal{X}$ *es* F-*preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *entonces* $\mathcal{X}$ *es preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{X}$.

Demostración. Sólo probemos (a), pues la prueba de (b) es dual. Sea $P \in \mathcal{P}(F)$, como $\mathcal{X}$ es F-precubriente, existe $\eta :\ 0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow P \longrightarrow 0$ F-exacta con $X \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, η se escinde y entonces $X \simeq P \oplus Y$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada por sumandos directos, tenemos que $P \in \mathcal{X}$; y por lo tanto, $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{X}$. Finalmente, como $\mathcal{X}$ es F-precubriente, se sigue que $\mathcal{X}$ es precubriente. $\square$

Proposición 1.4.4 [7, 4.2] *Sea* F *un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *tal que* $F = F_{\mathcal{P}(F)}$ *y* $\mathcal{X}$ *una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *cerrada por sumandos directos.*

(a) $\mathcal{X}$ *es* F-*precubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si y sólo si* $\mathcal{X}$ *es precubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{X}$.

(b) $\mathcal{X}$ *es* F-*preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si y sólo si* $\mathcal{X}$ *es preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{X}$.

Demostración. Sólo probaremos (a) pues la prueba de (b) es dual, ya que por 1.1.24, sabemos que $F = F^{\mathcal{I}(F)}$.
($\Longrightarrow$) Se sigue de 1.4.3.
($\Longleftarrow$) Sea $f : X \longrightarrow C$ una $\mathcal{X}$-precubierta de C. Como $\mathcal{P}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X}$, tenemos que f es un epimorfismo. Luego, tenemos la sucesión exacta $\eta : 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow$

$X \longrightarrow C \longrightarrow 0$. Ahora bien, dado que $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{X}$, se tiene que la sucesión $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,X)|_{\mathcal{P}(F)} \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(-,C)|_{\mathcal{P}(F)} \longrightarrow 0$ es exacta. Por lo tanto $\eta \in F_{\mathcal{P}(F)}(C, \mathrm{Ker}(f)) = F(C, \mathrm{Ker}(f))$ y entonces η es F-exacta; probándose que $\mathcal{X}$ es F-precubriente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. □

Observación 1.4.5 *Sean F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ y $\mathcal{X}$ una clase de objetos de $\mathrm{mod}(\Lambda)$, cerrada por sumandos directos. Si $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tiene una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta (resp. preenvolvente), entonces M tiene una $(\mathcal{X}, F)$-cubierta (resp. envolvente). En efecto, sea $\eta : 0 \longrightarrow K \longrightarrow X \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ F-exacta tal que f es una $\mathcal{X}$-precubierta. Luego, existe una descomposición $X = X' \oplus X''$ tal que $f|_{X''} = 0$ y $f|_{X'} : X' \longrightarrow M$ es la versión minimal a derecha de M. Dado que $\eta = \eta' \oplus \eta''$, donde η' y η'' son las sucesiones exactas $\eta' : 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f|_{X'}) \longrightarrow X' \longrightarrow M \longrightarrow 0$ y $\eta'' : 0 \longrightarrow X'' \xrightarrow{1} X'' \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$; por 1.1.11, concluimos que η' es F-exacta y así $f|_{X'}$ es una $(\mathcal{X}, F)$-cubierta de M.*

El siguiente resultado es la versión relativa del Lema de Wakamatsu.

Lema 1.4.6 [7, 4.3] *Sean F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$, $\mathcal{X}$ una clase de objetos de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cerrada bajo F-extensiones, y $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una $(\mathcal{X}, F)$-cubierta de C, entonces $F(-, Y_C)|_{\mathcal{X}} = 0$.

(b) Si $0 \longrightarrow C \longrightarrow X^C \longrightarrow Y^C \longrightarrow 0$ es una $(\mathcal{X}, F)$-envolvente de C, entonces $F(Y^C, -)|_{\mathcal{X}} = 0$.

Demostración. (a) Sea $0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$ una $(\mathcal{X}, F)$-cubierta de C y sea $\xi : 0 \longrightarrow Y_C \xrightarrow{g'} B \longrightarrow X \longrightarrow 0$ una sucesión F-exacta con $X \in \mathcal{X}$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Y_C \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & X_C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & X \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Como $\xi : \ 0 \longrightarrow Y_C \xrightarrow{g'} B \longrightarrow X \longrightarrow 0$ es F-exacta y la sucesión η : $0 \longrightarrow X_C \xrightarrow{g} E \longrightarrow X \longrightarrow 0$ es el pushout de ξ, entonces η es F-exacta. Por hipótesis, $\mathcal{X}$ es cerrada por F-extensiones, por lo tanto $E \in \mathcal{X}$ pues X_C, $X \in \mathcal{X}$. Como $f : X_C \longrightarrow C$ es una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta de C, existe $h : E \longrightarrow X_C$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y_C \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & X_C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "h'"] & E \arrow[r] \arrow[d, "h"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_C \arrow[r] & X_C \arrow[r, "f"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como f es minimal a derecha, entonces hg es un automorfismo. Por el Lema del Cinco, tenemos que $h'g'$ es un isomorfismo, por lo tanto, existe $\theta : Y_C \longrightarrow Y_C$ tal que $(\theta h')g' = 1_{Y_C}$. Por lo tanto ξ se escinde y entonces $F(X, Y_C) = 0, \ \forall X \in \mathcal{X}$.
(b) Se prueba análogamente como en (a). $\square$

Definición 1.4.7 *Sean F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ y $\mathcal{C}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.*

*(a) Denotaremos por $\mathrm{Ext}_F(\mathcal{C})$ a la intersección de todas las subcategorías cerradas por F-extensiones que contienen a $\mathcal{C}$. Esto es, $\mathrm{Ext}_F(\mathcal{C})$ es la **cerradura por F-extensiones** de $\mathcal{C}$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.*

*(b) Denotaremos por $\overline{\mathrm{Ext}}_F(\mathcal{C})$ a la intersección de todas las subcategorías plenas de $\mathrm{mod}(\Lambda)$, que son cerradas por sumandos directos, F-extensiones y que contienen a $\mathcal{C}$. Esto es $\overline{\mathrm{Ext}}_F(\mathcal{C})$ es la **cerradura por F-extensiones y sumandos directos** de $\mathcal{C}$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.*

*(c) Una sucesión $\xi : 0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{m-1} \subseteq M_m = M$ de submódulos de M, se dice que es una **F-filtración** de M si las sucesiones $\xi_{i+1} : 0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_{i+1}/M_i \longrightarrow 0$ son F-exactas para $i = 0, 1, \ldots, m-1$.*

*(d) Decimos que $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ **admite una F-filtración** en $\mathcal{C}$ si existe una F-filtración $\xi : 0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{m-1} \subseteq M_m = M$ de M tal que M_{i+1}/M_i es isomorfo a algún objeto de $\mathcal{C}$, para $i = 0, 1 \ldots, m-1$.*

(e) Denotaremos por $\mathscr{F}_F(\mathcal{C})$ a la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son todos los Λ-módulos que admiten una F-filtración en $\mathcal{C}$.

Definición 1.4.8 *Sea $M \in \mathscr{F}_F(\mathcal{C})$. Dada una F-filtración $\xi : 0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{m-1} \subseteq M_m = M$ de M, decimos que $\ell_{F,\xi}(M) := m$ es la **F-longitud relativa** a ξ de M y que $\ell_F(M) := \min\{\ell_{F,\xi}(M) \mid \xi \text{ es una } F-$ filtración de $M\}$ es la **F-longitud** de M.*

Lema 1.4.9 *Sean $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $F = F_{\mathcal{X}}$ *un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. *Entonces* $\mathscr{F}_F(\mathcal{C})$ *es cerrada por* F*-extensiones.*

Demostración. Sea $\eta : \ 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ F-exacta con $A, C \in \mathscr{F}_F(\mathcal{C})$. Probaremos por inducción sobre $n = \ell_F(C)$, que $B \in \mathscr{F}_F(\mathcal{C})$.
Si $C = 0$, se tiene que $A \simeq B$ y en tal caso $B \in \mathscr{F}_F(\mathcal{C})$.
Si $\ell_F(C) = 1$, entonces $C \simeq C' \in \mathcal{C}$. Por lo tanto una F-filtración de B no es más que la filtración de A junto con la inclusión $A \subseteq B$.
Supongamos que $\ell_F(C) > 1$. Consideremos una F-filtración mínima de C, ξ : $0 = C_0 \subseteq C_1 \subseteq \cdots \subseteq C_{n-1} \subseteq C_n = C$. Luego tenemos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & 0 \\
 & & C' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0, &
\end{tikzcd}$$

donde $C' \in \mathcal{C}$ y $\ell_F(C_{n-1}) < \ell_F(C)$. Notemos que la siguiente sucesión $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow 0$ es F-exacta pues es pullback de una sucesión F-exacta. Ahora veamos que $\zeta : \ 0 \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow C' \longrightarrow 0$ es F-exacta. Para esto, como $F = F_{\mathcal{X}}$ basta ver que todo $\gamma : X \longrightarrow C'$ con $X \in \mathcal{X}$ se factoriza a tráves de π. En efecto, sea $\gamma : X \longrightarrow C'$ con $X \in \mathcal{X}$. Como ξ_n : $0 \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow C \xrightarrow{\pi'} X \longrightarrow 0$ es F-exacta, existe $\gamma' : X \longrightarrow C$ tal que $\gamma = \pi'\gamma'$. Por otro lado, η también es F-exacta, por lo tanto existe γ'' : $X \longrightarrow B$ tal que $\gamma' = g\gamma''$. Por lo tanto, $\gamma = \pi'\gamma' = \pi' g\gamma'' = \pi\gamma''$. Por lo tanto ζ es F-exacta.
Ahora bien, por hipótesis de inducción aplicada al primer renglón del diagrama anterior, tenemos que $E \in \mathscr{F}_F(\mathcal{C})$. Por lo tanto, una F-filtración de B está dada una filtración de E y la inclusión $E \subseteq B$, pues ζ es F-exacta y $C' \in \mathcal{C}$. $\square$

Proposición 1.4.10 *Sean $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $F = F_{\mathcal{X}}$ *un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. *Entonces* $\mathrm{Ext}_F(\mathcal{C}) = \mathscr{F}_F(\mathcal{C})$.

Demostración. Es claro que $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{F}_F(\mathcal{C})$, pues para $C \in \mathcal{C}$, la sucesión $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow C \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es F-exacta. Por 1.4.9, tenemos que $\mathscr{F}_F(\mathcal{C})$ es cerrado por F-extensiones. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ cerrada por F-extensiones y que contiene a $\mathcal{C}$. Veamos que $\mathscr{F}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{E}$. En efecto, sea $M \in \mathscr{F}_F(\mathcal{C})$, por lo tanto existe una F-filtración $\xi : 0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{m-1} \subseteq M_m = M$

con $M_{i+1}/M_i \simeq C_i \in \mathcal{C}$ para $i = 0, \ldots, m-1$. Considerando la sucesión F-exacta $\xi_2 :\ 0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_2/M_1 \longrightarrow 0$ donde $M_1, M_2/M_1 \simeq C_1 \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$, tenemos que $M_2 \in \mathcal{E}$. Prosiguiendo de la misma manera, subimos a través de la filtración ξ para concluir que $M_m = M \in \mathcal{E}$. Por lo tanto $\mathscr{F}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{E}$. Probándose que $\mathrm{Ext}_F(\mathcal{C}) = \mathscr{F}_F(\mathcal{C})$. $\square$

Lema 1.4.11 *Sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cerrada por F-extensiones. Entonces la clase*

$$\overline{\mathcal{X}} := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid \textit{existe } M' \in \mathrm{mod}(\Lambda) \textit{ con } M \oplus M' \in \mathcal{X}\}$$

es cerrada por F-extensiones. En particular $\overline{\mathcal{X}} = \mathrm{add}(\overline{\mathcal{X}})$.

Demostración. Sea $\eta : 0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesión F-exacta con $A, C \in \overline{\mathcal{X}}$. Esto es, existen $A', C' \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $A \oplus A'$, $C \oplus C' \in \mathcal{X}$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de pushout

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_A"'] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus A' \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & A' \arrow[r, equal] \arrow[d] & A' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Luego $i_A\eta : 0 \to A \oplus A' \to E \overset{\alpha}{\to} C$ es F-exacta pues es pushout de una F-exacta y $\gamma : 0 \to B \to E \to A' \to 0$ se parte pues es pushout de una que se escinde. Por lo tanto, $E = B \oplus A'$. Consideremos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & C' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \oplus A' \arrow[r] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r] \arrow[d] & C \oplus C' \arrow[r] \arrow[d, "\pi_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus A' \arrow[r] & E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

De donde tenemos que $\xi : 0 \to C' \to E' \to E \to 0$ se escinde pues es pullback de una sucesión que se escinde, por lo tanto $E' = C' \oplus E$. También del diagrama anterior, tenemos que $\nu : 0 \to A \oplus A' \to E' \to C \oplus C' \to 0$ es F-exacta pues es pullback de una sucesión F-exacta ($\nu = (i_A\eta)\pi_C$). Como $\mathcal{X}$ es cerrada por F-extensiones tenemos que $E' \in \mathcal{X}$. Luego $E' \in \mathcal{X}$ y $E' = C' \oplus E = C' \oplus (B \oplus A') = (C' \oplus A') \oplus B$, por lo tanto $B \in \overline{\mathcal{X}}$. $\square$

Corolario 1.4.12 [7, 4.4] *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $F = F_{\mathcal{X}}$ un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. Entonces para toda clase $\mathcal{C}$ de $\mathrm{mod}(\Lambda)$, se tiene que*

$$\overline{\mathrm{Ext}}_F(\mathcal{C}) = \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid \exists M' \in \mathrm{mod}(\Lambda) \text{ con } M \oplus M' \in \mathscr{F}_F(\mathcal{C})\} = \mathrm{add}(\mathscr{F}_F(\mathcal{C})).$$

Demostración. Se sigue de 1.4.10, 1.4.9 y de 1.4.11. $\square$

Notación 1.4.13 *Sea $\mathcal{C}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. Tenemos las siguientes clases*

(a) $\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}) := \mathrm{Ext}_F(\{\mathrm{Ker}(f)$ *tal que* $f : C_M \longrightarrow M$ *es una* $(\mathcal{C}, F)$*-cubierta para algún* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)\})$.

(b) $\mathrm{Coker}_F(\mathcal{C}) := \mathrm{Ext}_F(\{\mathrm{Coker}(f)$ *tal que* $f : M \longrightarrow C^M$ *es una* $(\mathcal{C}, F)$*-envolvente para algún* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)\})$.

(c) ${}^{F\perp}\mathcal{C} := \{X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que* $F(X,-)|_{\mathcal{C}} = 0\}$.

(d) $\mathcal{C}^{F\perp} := \{Y \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que* $F(-,Y)|_{\mathcal{C}} = 0\}$.

Lema 1.4.14 *Sea F subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ tal que $F = F_{\mathcal{X}}$ para alguna clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, para toda sucesión F-exacta*

$$\eta : \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

y para todo $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, existen dos sucesiones exactas

(a)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M,C) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\delta} F(M,A) \xrightarrow{F(1_M,\alpha)} F(M,B) \xrightarrow{F(1_M,\beta)} F(M,C),$$

donde $\delta(f) := \eta f$ es el pullback de η por $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,C)$.

(b)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(C,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(B,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,M) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\delta'} F(C,M) \xrightarrow{F(\beta,1_M)} F(B,M) \xrightarrow{F(\alpha,1_M)} F(A,M),$$

donde $\delta'(f) := f\eta$ es el pushout de η por $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,M)$.

Demostración. Probaremos sólo (a), ya que la prueba de (b) es análoga. Por 1.1.15, basta ver la exactitud en $F(M,B)$.
Como $F(1,\beta)F(1,\alpha) = F(1,\beta\alpha) = F(1,0) = 0$, basta ver que $\mathrm{Ker}(F(1,\beta)) \subseteq \mathrm{Im}(F(1,\alpha))$. En efecto, sea $\xi :\ 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha'} E \xrightarrow{\beta'} M \longrightarrow 0$ F-exacta, esto es $\xi \in F(M,B)$. Si $\xi \in \mathrm{Ker}(F(1,\beta))$, entonces $F(1,\beta)(\xi) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(1,\beta)(\xi) = 0$. Luego, existe una sucesión exacta $\xi' : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} E' \longrightarrow M \longrightarrow 0$ tal que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(1,\alpha)(\xi') = \xi$. Esto es, se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"'] & E' \arrow[r] \arrow[d, "\psi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta"'] & E \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & J \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
 & 0. & & &
\end{tikzcd}$$

Veamos que ξ' es F-exacta. En efecto, como $F = F_{\mathcal{X}}$, tenemos por 1.1.23, que $F = F^{\mathcal{Y}}$ con $\mathcal{Y} := \mathrm{DTr}(\mathcal{X})$. Sea $\gamma : A \longrightarrow Y$ con $Y \in \mathcal{Y}$. Como η es F-exacta, es decir, $\eta \in F(C,A) = F^{\mathcal{Y}}(C,A)$, existe $\gamma' : B \longrightarrow Y$ tal que $\gamma = \gamma'\alpha$. También, como $\xi \in F(M,B)$, existe $s : E \longrightarrow Y$ tal que $\gamma' = s\alpha'$. Luego, $\gamma = \gamma'\alpha = s\alpha'\alpha = s\psi'\psi = (s\psi')\psi$. Por lo tanto, $\xi' \in F^{\mathcal{Y}}(M,A)$. Luego $\xi = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(1,\alpha)(\xi') = F(1,\alpha)(\xi')$; y entonces $\xi \in \mathrm{Im}(F(1,\alpha))$. Probándose que la sucesión es exacta en $F(M,B)$. $\square$

Lema 1.4.15 *Sean $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y $F = F_{\mathcal{X}}$ un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. *Entonces, para cualquier clase de objetos $\mathcal{C}$ en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Las clases $\mathcal{C}^{F\perp}$ y ${}^{F\perp}\mathcal{C}$ son cerradas por F-extensiones.

(b) Si $\mathcal{C}$ es cerrada por F-extensiones, entonces tenemos que $\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}^{F\perp}$ *y* $\mathrm{Coker}_F(\mathcal{C}) \subseteq {}^{F\perp}\mathcal{C}$.

Demostración.

(a) Sean $\eta :\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una sucesión F-exacta con $A,\ C \in \mathcal{C}^{F\perp}$ y $M \in \mathcal{C}$. Luego, por 1.4.14, tenemos la sucesión exacta

$$F(M,A) \longrightarrow F(M,B) \longrightarrow F(M,C)\ .$$

Como $F(M,A) = F(M,C) = 0$, tenemos que $F(M,B) = 0$. Por lo tanto $B \in \mathcal{C}^{F\perp}$. Análogamente, se prueba que ${}^{F\perp}\mathcal{C}$ es cerrada por F-extensiones.

(b) Se sigue de (a) y de 1.4.6. $\square$

Proposición 1.4.16 [7, 4.5] *Sean $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $F = F_{\mathcal{X}}$ *un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$*. Entonces, para cualquier clase de objetos* $\mathcal{C}$ *de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerrada por sumandos directos, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Sea $\mathcal{C}$ una clase F-precubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces, $\mathcal{C}$ es cerrado por F-extensiones si y sólo si* $\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}^{F\perp}$*.*

(b) *Sea $\mathcal{C}$ una clase F-preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces, $\mathcal{C}$ es cerrado por F-extensiones si y sólo si* $\mathrm{Coker}_F(\mathcal{C}) \subseteq {}^{F\perp}\mathcal{C}$*.*

Demostración. Sólo probaremos (a), pues (b) es dual. ($\Longrightarrow$) Se sigue de 1.4.15(b).

($\Longleftarrow$). Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} L \longrightarrow 0$ una sucesión F-exacta con M, $L \in \mathcal{C}$. Notemos que si $Y \in \mathcal{C}^{F\perp}$, entonces por 1.4.14, tenemos que $F(N,Y) = 0$.

Sea $\eta:\ 0 \longrightarrow Y_N \longrightarrow C_N \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ una $(\mathcal{C},F)$-cubierta de N (por 1.4.5, tal sucesión existe). Como $\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}^{F\perp}$, entonces $Y_N \in \mathcal{C}^{F\perp}$. Por lo tanto, $F(N,Y_N) = 0$ y entonces η se escinde. Luego, $C_N \simeq N \oplus Y_N \in \mathcal{C}$ y como $\mathcal{C}$ es cerrada por sumandos directos concluimos que $N \in \mathcal{C}$. $\square$

Proposición 1.4.17 [7, 4.6] *Sean* $F = F_{\mathcal{P}(F)}$ *un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *y $\mathcal{Y}$ una clase de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerrada por F-extensiones. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *El funtor* $F(C,-)\,|_{\mathcal{Y}}\colon \mathcal{Y} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ *es finitamente generado,* $\forall C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$*.*

(b) ${}^{F\perp}\mathcal{Y}$ *es precubriente y un F-generador de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*; y si la siguiente sucesión* $0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *es una ${}^{F\perp}\mathcal{Y}$-cubierta de* $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$*, entonces* $Y \in \mathcal{Y}$*.*

Demostración. $\square$

Proposición 1.4.18 [7, 4.7] *Sean* $F = F_{\mathcal{P}(F)}$ *un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *y $\mathcal{X}$ una clase de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerrada por F-extensiones. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) *El funtor* $F(-,C)|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ *es finitamente generado,* $\forall C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$*.*

(b) $\mathcal{X}^{F\perp}$ *es preenvolvente y un F-cogenerador de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*; y si siguiente sucesión* $0 \longrightarrow C \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow 0$ *es una $\mathcal{X}^{F\perp}$-envolvente de* $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$*, entonces* $X \in \mathcal{X}$*.*

Demostración. $\square$

Sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. Recordemos (ver 1.2.2 (c)), que si F tiene suficientes proyectivos o inyectivos, entonces $F(X,Y) = \mathrm{Ext}^1_F(X,Y)$ para todo $X, Y \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Proposición 1.4.19 [7, 4.8] *Sean F un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *y* $\mathcal{Z}$ *una clase de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerrada por F-extensiones.*

(a) Si $\mathcal{Z}$ es preenvolvente y F tiene suficientes proyectivos, entonces ${}^{F\perp}\mathcal{Z}$ es cerrada por F-extensiones, precubriente, un F-generador en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\mathrm{Ker}_F({}^{F\perp}\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{Z}$.

(b) Si $\mathcal{Z}$ es precubriente y F tiene suficientes inyectivos, entonces $\mathcal{Z}^{F\perp}$ es cerrada por F-extensiones, preenvolvente, un F-cogenerador en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\mathrm{Coker}_F(\mathcal{Z}^{F\perp}) \subseteq \mathcal{Z}$.

Demostración. Sólo probaremos (a), pues (b) es dual.
Por 1.4.15(a), tenemos que ${}^{F\perp}\mathcal{Z}$ es cerrada por F-extensiones. Veamos que ${}^{F\perp}\mathcal{Z}$ es precubriente. Por 1.4.17, basta ver que $F(C,-) = \mathrm{Ext}^1_F(C,-)|_{\mathcal{Z}} : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ es finitamente generado, $\forall C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Como F tiene suficientes proyectivos, para cada $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, existe la sucesión $0 \longrightarrow A \longrightarrow P \longrightarrow C \longrightarrow 0$ F-exacta con $P \in \mathcal{P}(F)$. Por 1.1.16, sabemos que $F(P,M) = \mathrm{Ext}^1_F(P,M) = 0$, $\forall M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Luego, por 1.2.2, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P,-) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,-) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(C,-) \longrightarrow 0.$$

Podríamos pensar que ya acabamos, pero esto no necesariamente es cierto, pues A no necesarimente pertenece a $\mathcal{Z}$. Por lo tanto, reemplazaremos a A, por algo que sí está en $\mathcal{Z}$. Como $\mathcal{Z}$ es preenvolvente, existe una $\mathcal{Z}$-envolvente de A, $0 \longrightarrow A \longrightarrow Z^A \longrightarrow U^A \longrightarrow 0$. Luego, la sucesión $\mathrm{Hom}_\Lambda(Z^A,-)|_{\mathcal{Z}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,-)|_{\mathcal{Z}} \longrightarrow 0$ es exacta. Por lo tanto, la sucesión $\mathrm{Hom}_\Lambda(Z^A,-)|_{\mathcal{Z}} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(C,-)|_{\mathcal{Z}} \longrightarrow 0$ es exacta, de donde concluimos que $\mathrm{Ext}^1_F(C,-)|_{\mathcal{Z}}$ es finitamente generado; probándose que ${}^{F\perp}\mathcal{Z}$ es precubriente.
Como $\mathcal{Z}$ es cerrada por F-extensiones, para ver que $\mathrm{Ker}_F({}^{F\perp}\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{Z}$, basta ver que si $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow C_M \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ es una ${}^{F\perp}\mathcal{Z}$-cubierta de $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, entonces $\mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{Z}$. Pero esto se sigue de 1.4.17(b). $\square$

Sean $\mathcal{Z}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. Es claro que ${}^{F\perp_1}\mathcal{Z} := \{X \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,-)|_{\mathcal{Z}} = 0\} \subseteq {}^{F\perp}\mathcal{Z}$. Luego, tenemos como pregunta natural ¿cuando se tiene la igualdad ${}^{F\perp_1}\mathcal{Z} = {}^{F\perp}\mathcal{Z}$?.

Proposición 1.4.20 [7, 4.9] *Sean $F = F_{\mathcal{P}(F)}$ un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *y $\mathcal{Z}$ una clase de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces ${}^{F\perp}\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$, para toda clase de objetos $\mathcal{C}$ de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerrada por sumandos directos y que satisface las siguientes dos condiciones:*

(a) $\mathcal{C}$ es precubriente y un F-generador en $\mathrm{mod}(\Lambda)$,

(b) si $0 \longrightarrow U_M \longrightarrow C_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una $\mathcal{C}$-cubierta de M, entonces $U_M \in \mathcal{Z}$.

Demostración. Por 1.4.4, la condición (a) implica que $\mathcal{C}$ es F-precubriente en $\text{mod}(\Lambda)$. Sean $X \in {}^{\perp}_{F}\mathcal{Z}$ y $\eta: \ 0 \longrightarrow U_X \longrightarrow C_X \longrightarrow X \longrightarrow 0$ una $(\mathcal{C}, F)$-cubierta de X. Por el inciso (b), tenemos que $U_X \in \mathcal{Z}$. Por lo tanto, η se escinde y entonces $C_X \simeq X \oplus U_X$. Luego como $\mathcal{C}$ es cerrada por sumandos, tenemos que $X \in \mathcal{C}$. Por lo tanto ${}^{\perp}_{F}\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$. $\square$

Proposición 1.4.21 [7, 4.10] *Sean F un subfuntor aditivo de $\text{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ con suficientes proyectivos y $\mathcal{Z}$ una clase preenvolvente en $\text{mod}(\Lambda)$. Entonces, ${}^{\perp}_{F}\mathcal{Z}$ es la menor subcategoría $\mathcal{C}$ de $\text{mod}(\Lambda)$ que satisface las siguientes dos condiciones:*

(a) $\mathcal{C}$ es precubriente y un F-generador en $\text{mod}(\Lambda)$,

(b) si $0 \longrightarrow U_M \longrightarrow C_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una $\mathcal{C}$-cubierta de M, entonces $U_M \in \mathcal{Z}$.

Demostración. Como $\mathcal{Z}$ es preenvolvente, por 1.4.19(a), tenemos que ${}^{\perp}_{F}\mathcal{Z}$ es precubriente, F-generador en $\text{mod}(\Lambda)$ y $\text{Ker}_F({}^{\perp}_{F}\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{Z}$. Luego el resultado se sigue de 1.4.20. $\square$

Proposición 1.4.22 [7, 4.11] *Sean $F = F_{\mathcal{P}(F)}$ un subfuntor aditivo de $\text{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ con suficientes proyectivos y $\mathcal{Z}$ una clase preenvolvente en $\text{mod}(\Lambda)$. Entonces*

$${}^{\perp_1}_{F}\mathcal{Z} = {}^{\perp}_{F}\mathcal{Z}$$

si y sólo si las siguientes dos condiciones se satisfacen:

(a) ${}^{\perp_1}_{F}\mathcal{Z}$ es precubriente y un F-generador en $\text{mod}(\Lambda)$,

(b) si $0 \longrightarrow U_M \longrightarrow C_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una ${}^{\perp_1}_{F}\mathcal{Z}$-cubierta de M, entonces $U_M \in \mathcal{Z}$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Si ${}^{\perp_1}_{F}\mathcal{Z} = {}^{\perp}_{F}\mathcal{Z}$ entonces, por 1.4.20, se satisfacen (a) y (b).
($\Longleftarrow$) Supongamos que ${}^{\perp_1}_{F}\mathcal{Z}$ satisface (a) y (b), Por 1.4.21, tenemos que ${}^{\perp}_{F}\mathcal{Z} \subseteq {}^{\perp_1}_{F}\mathcal{Z}$. Luego ${}^{\perp_1}_{F}\mathcal{Z} = {}^{\perp}_{F}\mathcal{Z}$, pues ${}^{\perp_1}_{F}\mathcal{Z} \subseteq {}^{\perp}_{F}\mathcal{Z}$ siempre se dá. $\square$

Sea $\mathcal{Z}$ una clase preenvolvente en $\text{mod}(\Lambda)$. Si $\mathcal{Z}$ es cerrada por sumandos directos y extensiones, sabemos por [4, 1.9], que ${}^{\perp_1}\mathcal{Z} = \{X \in \text{mod}(\Lambda) \mid \text{Ext}^1_\Lambda(X,-)\mid_{\mathcal{Z}} = 0\}$ es precubriente en $\text{mod}(\Lambda)$. Sin embargo, podría pasar que $\mathcal{Z}$ no sea cerrada por extensiones, pero si por F-extensiones para algún subfuntor aditivo F de $\text{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ con suficientes proyectivos; y en tal caso, por 1.4.21, tendríamos que ${}^{\perp}_{F}\mathcal{Z}$ es precubriente en $\text{mod}(\Lambda)$.

Notación 1.4.23 $\text{Sub}(\Lambda) := \{N \in \text{mod}(\Lambda) \mid N \simeq M \text{ con } M \subseteq \Lambda^n, \ n \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo 1.4.24 *(a) Se sabe que, en general,* $\text{Sub}(\Lambda)$ *no es cerrado por extensiones. De hecho, por [9, 3.5], tenemos que* $\text{Sub}(\Lambda)$ *es cerrada por extensiones si y sólo si* $\text{pd}_{\Lambda^{op}}(I(\Lambda^{op})) \leq 1$*, donde* $I(\Lambda^{op})$ *es la* Λ^{op}*-envolvente inyectiva de* Λ^{op}.

(b) *Si* $F = F^{\mathcal{P}(\Lambda)\cup\mathcal{I}(\Lambda)}$*, no es difícil ver que* $\mathrm{Sub}(\Lambda)$ *es cerrada por* F*-extensiones. Por otro lado, por [6, 4.7] se ve que* $\mathrm{Sub}(\Lambda)$ *es funtorialmente finita. Por lo tanto, por 1.4.19, tenemos que* ${}^{F\perp}(\mathrm{Sub}(\Lambda))$ *es precubriente.*

Notación 1.4.25 *Sea* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$*. Se tienen las siguientes clases de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, para un subfuntor aditivo* F *de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$*.*

(a) $\mathrm{F-Rapp}(\mathcal{C}) := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid M \textit{ tiene una } (\mathcal{C},F)-\textit{cubierta}\}$.

(b) $\mathrm{F-Lapp}(\mathcal{C}) := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid M \textit{ tiene una } (\mathcal{C},F)-\textit{envolvente}\}$.

(c) $\mathrm{F-Fac}(\mathcal{C}) := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid$ *existe una sucesión* $F-$ *exacta* $0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *con* $C \in \mathcal{C}\}$.

(d) $\mathrm{F-Sub}(\mathcal{C}) := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid$ *existe una sucesión* $F-$ *exacta* $0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow C' \longrightarrow 0$ *con* $C \in \mathcal{C}\}$.

Lema 1.4.26 *Sean* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ *clases de objetos con* $\mathcal{A}$ *preenvolvente en* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B}$ *preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces* $\mathcal{A}$ *es preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*.*

Demostración. Sean $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $f : M \longrightarrow B$ una $\mathcal{B}$-preenvolvente de M. Como $B \in \mathcal{B}$, existe una $\mathcal{A}$-preenvolvente $f' : B \longrightarrow A$ de B. Veamos que $f'f : M \longrightarrow A$ es una $\mathcal{A}$-preenvolvente de M. En efecto, sea $\gamma : M \longrightarrow A'$ con $A' \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, como f es una $\mathcal{B}$-preenvolvente de M tenemos que existe $\gamma' : B \longrightarrow A'$ tal que $\gamma = \gamma' f$. Luego, como f' es $\mathcal{A}$-preenvolvente de B tenemos que existe $\gamma'' : A \longrightarrow A'$ tal que $\gamma' = \gamma'' f'$. Por lo tanto $\gamma = \gamma' f = \gamma''(f'f)$ y entonces $\mathcal{A}$ es preenvolvente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. $\square$

Proposición 1.4.27 [7, 4.12] *Sean* $\mathcal{C}$*,* $\mathcal{Z}$ *clases de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerradas por* F*-extensiones y* $\mathrm{F-Sub}(\mathcal{Z})$ *preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces,* $\mathcal{Z}$ *es preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si* $\mathcal{Z}$ *satisface las siguientes dos condiciones:*

(a) $\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}^{F\perp}$,

(b) $\mathrm{F-Fac}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathrm{F-Rapp}(\mathcal{C})$.

Demostración. Por 1.4.26, basta ver que $\mathcal{Z} \subseteq \mathrm{F-Sub}(\mathcal{Z})$ y es preenvolvente en $\mathrm{F-Sub}(\mathcal{Z})$. Notemos que $\mathcal{Z} \subseteq \mathrm{F-Sub}(\mathcal{Z})$, pues dado $Z \in \mathcal{Z}$, $0 \longrightarrow Z \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ es F-exacta. Sea $C' \in \mathrm{F-Sub}(\mathcal{Z})$. Luego existe $\eta : 0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$ F-exacta con $C \in \mathcal{Z}$.
Por definición $C'' \in \mathrm{F-Fac}(\mathcal{Z})$. Como $\mathrm{F-Fac}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathrm{F-Rapp}(\mathcal{C})$, existe $0 \longrightarrow Y_{C''} \longrightarrow C_{C''} \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$ una $(\mathcal{C},F)$-cubierta de C''. Por lo

tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y F-exacto

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & Y_{C''} \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y_{C''} \arrow[d] & \\
\eta' : 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & U \arrow[r] \arrow[d] & C_{C''} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & C' \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Como $Y_{C''} \in \mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{Z}$ y $C \in \mathcal{Z}$, entonces $U \in \mathcal{Z}$ pues $\mathcal{Z}$ es cerrada por F-extensiones. Veamos que η' es una $\mathcal{Z}$-preenvolvente de $C' \in \mathrm{F} - \mathrm{Sub}(\mathcal{Z})$. En efecto, sea $f : C' \longrightarrow U'$ con $U' \in \mathcal{Z}$. Consideremos el pushout

$$\begin{tikzcd}
\eta' : 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & U \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & C_{C''} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\eta'' : 0 \arrow[r] & U' \arrow[r, "\alpha"] & E \arrow[r] & C_{C''} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Luego, como $U' \in \mathcal{Z}$, $C_{C''} \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}^{F\perp}$, tenemos que η' se escinde. Por lo tanto, existe $\alpha' : E \longrightarrow U'$ tal que $\alpha'\alpha = 1_{U'}$. Luego $f = \alpha' h g$, y así g es una $\mathcal{Z}$-preenvolvente de $C' \in \mathrm{F} - \mathrm{Sub}(\mathcal{Z})$. Probándose que $\mathcal{Z}$ es preenvolvente en $\mathrm{F} - \mathrm{Sub}(\mathcal{Z})$. $\square$

Proposición 1.4.28 [7, 4.12] *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{Z}$ clases de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerradas por F-extensiones y* $\mathrm{F} - \mathrm{Fac}(\mathcal{Z})$ *precubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, $\mathcal{Z}$ es precubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si $\mathcal{Z}$ satisface las siguientes dos condiciones:*

(a) $\mathrm{Coker}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{Z} \subseteq {}^{F\perp}\mathcal{C}$

(b) $\mathrm{F} - \mathrm{Sub}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathrm{F} - \mathrm{Lapp}(\mathcal{C})$.

Demostración. Es análoga a la prueba de 1.4.27. $\square$

Lema 1.4.29 [7, 4.13] *Sea F un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *y $\mathcal{C}$, $\mathcal{Z}$ clases de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *tales que $\mathcal{C}$ es cerrada por F-extensiones y F-cubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Si $\mathcal{Z}$ es cerrada por extensiones,* $\mathrm{F} - \mathrm{Sub}(\mathcal{Z})$ *es preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *y* $\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}^{F\perp}$, *entonces $\mathcal{Z}$ es una clase F-preenvolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es F-precubriente, entonces $\mathrm{F}-\mathrm{Rapp}(\mathcal{C}) = \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por lo tanto $\mathrm{F}-\mathrm{Fac}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathrm{F}-\mathrm{Rapp}(\mathcal{C})$. Luego, el resultado se sigue de 1.4.27. $\square$

Proposición 1.4.30 [7, 4.14] *Sean F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ y $\mathcal{C}$ una clase de objetos de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cerrada por F-extensiones. Supongamos que F tiene suficientes inyectivos. Si $\mathcal{Z}$ es cerrada por F-extensiones y un F-cogenerador, entonces $\mathcal{Z}$ es preenvolvente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y un F-cogenerador si $\mathcal{Z}$ satisface las siguientes dos condiciones:*

(a) $\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}^{F\perp}$

(b) $\mathrm{F}-\mathrm{Fac}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathrm{F}-\mathrm{Rapp}(\mathcal{C})$.

Demostración. Supongamos que F tiene suficientes inyectivos. Si $\mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$, entonces $\mathrm{F}-\mathrm{Sub}(\mathcal{Z}) = \mathrm{mod}(\Lambda)$ y claramente $\mathrm{F}-\mathrm{Sub}(\mathcal{Z})$ es preenvolvente. En efecto, sea $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ como F tiene suficientes inyectivos, existe sucesión F-exacta $0 \longrightarrow C \longrightarrow C \longrightarrow C' \longrightarrow 0$ con $I \in \mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{Z}$. Por lo tanto $C \in \mathrm{F}-\mathrm{Sub}(\mathcal{Z})$ y entonces $\mathrm{F}-\mathrm{Sub}(\mathcal{Z}) = \mathrm{mod}(\Lambda)$. Luego, el resultado se sigue de 1.4.27. $\square$

Proposición 1.4.31 [7, 4.14] *Sean F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ y $\mathcal{C}$ una clase de objetos de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cerrada por F-extensiones. Supongamos que F tiene suficientes proyectivos. Si $\mathcal{Z}$ es cerrada por F-extensiones y un F-generador, entonces $\mathcal{Z}$ es precubriente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y un F-generador si $\mathcal{Z}$ satisface las siguientes dos condiciones:*

(a) $\mathrm{Coker}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{Z} \subseteq {}^{F\perp}\mathcal{C}$

(b) $\mathrm{F}-\mathrm{Sub}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathrm{F}-\mathrm{Lapp}(\mathcal{C})$.

Demostración. Es análoga a la prueba de 1.4.30. $\square$

Proposición 1.4.32 [7, 4.15] *Sean F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ con suficientes inyectivos, $\mathcal{C}$ una clase precubriente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ la cual es cerrada por sumandos directos, por F-extensiones y un F-generador. Supongamos que $\mathcal{Z} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ es cerrada por F-extensiones y un F-cogenerador. Entonces, $\mathcal{Z}$ es preenvolvente y un F-generador en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ con ${}^{F\perp}\mathcal{Z} = \mathcal{C}$, si y sólo si $\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}^{F\perp}$.*

Demostración. ($\Longleftarrow$) Si $\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}^{F\perp}$, entonces $\mathcal{C} \subseteq {}^{F\perp}(\mathcal{C}^{F\perp}) \subseteq {}^{F\perp}\mathcal{Z} \subseteq {}^{F\perp}(\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}))$. Veamos que ${}^{F\perp}(\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{C}$. En efecto, sea $M \in {}^{F\perp}(\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}))$ y $\eta :\ 0 \longrightarrow Y_M \longrightarrow C_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$ una $\mathcal{C}$-cubierta de M (ver 1.4.5). Como $\mathcal{C}$ es precubriente y F-generador, entonces por 1.1.31, 1.1.23 y 1.4.4, tenemos que $\mathcal{C}$ es F-precubriente y por lo tanto η es F-exacta. Luego, como $M \in {}^{F\perp}(\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}))$ y $Y_M \in (\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C}))$, entonces η se escinde. Por lo tanto, $M \oplus Y_M \simeq C_M$ y entonces $M \in \mathcal{C}$ pues $\mathcal{C}$ es cerrada por sumandos directos. Por lo tanto, ${}^{F\perp}(\mathrm{Ker}_F(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{C}$ y entonces ${}^{F\perp}\mathcal{Z} = \mathcal{C}$. Por otro lado, como $\mathcal{C}$ es

F-precubriente (ver 1.4.4 y 1.4.5), entonces $\mathrm{mod}(\Lambda) = \mathrm{F} - \mathrm{Rapp}(\mathcal{C})$ y entonces $F - \mathrm{Fac}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathrm{F} - \mathrm{Rapp}(\mathcal{C})$. Por lo tanto, como $\mathcal{Z}$ cerrado por F-extensiones y F-cogenerador, tenemos por 1.4.30, que $\mathcal{Z}$ es preenvolvente y F-cogenerador. $\square$

Capítulo 2

Teoría F-Coinclinante Relativa

2.1. F-pares de cotorsión

A lo largo de este capítulo, Λ denotará a una R-álgebra de artin y F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ de la forma $F = F_\mathcal{Z}$ con $\mathcal{Z}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. En este capítulo desarrollaremos la homología F-relativa en el sentido de Aslander-Buchweitz-Reiten.

Definición 2.1.1 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ clases de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. El par $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es un **par de F-cotorsión** en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si $\mathcal{A} = {}^{F\perp}\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{F\perp}$.*

Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Observe que, si F tiene suficientes proyectivos o inyectivos entonces $\mathcal{X}^{F\perp} = \mathcal{X}^{F\perp_1}$ y ${}^{F\perp}\mathcal{X} = {}^{F\perp_1}\mathcal{X}$. En efecto, se sigue de 1.2.2.

Proposición 2.1.2 *Sea $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ un par de F-cotorsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ son cerrados por sumandos directos y F-extensiones.

(b) $\mathcal{A}$ es una clase F-generadora y $\mathcal{B}$ es una clase F-cogeneradora.

Demostración.

(a) Se sigue de 1.4.15 (a), pues $F = F_\mathcal{Z}$ para una clase $\mathcal{Z}$ de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(b) Por (a), tenemos que $\mathrm{add}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ y $\mathrm{add}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Por otro lado, como $\mathcal{A} = {}^{F\perp}\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{F\perp}$, se tiene que $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{B}$; de donde se sigue (b) (ver 1.4.2). $\square$

Definición 2.1.3 *Sea $M \in$* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Una $(\mathcal{C},F)$-preenvolvente $f : M \longrightarrow C$ de M es* **F-especial**, *si* $\mathrm{Coker}(f) \in {}^{F\perp}\mathcal{C}$*. Dualmente, una $(\mathcal{C},F)$-precubierta $f : C \longrightarrow M$ es* **F-especial** *si* $\mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{C}^{F\perp}$*. Si cada objeto $M \in$* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *tiene una $(\mathcal{C},F)$-preenvolvente especial (resp. envolvente especial) decimos que $\mathcal{C}$ es una clase* ***F-preenvolvente especial*** *(resp.* ***F-envolvente especial****).*
Análogamente, se introducen las nociones de clase ***F-precubriente*** *(resp.* ***F-cubriente) especial****.*

Lema 2.1.4 *Sea $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Consideremos* $\eta : 0 \to L \to M \to N \to 0$ *una sucesión F-exacta. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\eta'' :\ 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(g'') \longrightarrow M'' \xrightarrow{g''} N \longrightarrow 0$ *es F-exacta, donde g'' es la versión minimal a derecha de g (ver [5, 2.2] para la def. de versión minimal).*

(b) Si $\mathcal{C}$ es cerrada por sumandos directos y η es una $(\mathcal{C}, F)$-precubierta, entonces η'' es una $(\mathcal{C}, F)$-cubierta.

Demostración.

(a) Por [5, 2.2], sabemos que existe una descomposición $M = M' \oplus M''$ tal que $g'' := g|_{M''} : M'' \longrightarrow N$ es la versión minimal a derecha de g y $\mathrm{Ker}(g) = M' \oplus \mathrm{Ker}(g'')$. Por lo tanto, η es la suma directa de la siguientes dos sucesiones exactas

$$\eta'' :\ 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(g'') \longrightarrow M'' \xrightarrow{g''} N \longrightarrow 0,$$

$$\eta' :\ 0 \longrightarrow M' \longrightarrow M' \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

Luego, por 1.1.11, tenemos que η'' es F-exacta.

(b) Se sigue de 1.4.5, pues $\mathcal{C}$ es cerrada por sumandos directos. $\square$

Lema 2.1.5 *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de F-cotorsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(a) Si $\mathcal{A}$ es una clase F-precubriente, entonces $\mathcal{A}$ es F-cubriente especial.

(b) Si $\mathcal{B}$ es una clase F-preenvolvente, entonces $\mathcal{B}$ es F-envolvente especial.

Demostración. Sólo probaremos (a), pues (b) es dual. Sea $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow A \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$ una $(\mathcal{A}, F)$-precubierta de X. Por 2.1.2 y 2.1.4, existe $\eta'' :\ 0 \longrightarrow N \longrightarrow A'' \xrightarrow{g''} X \longrightarrow 0$ una $(\mathcal{A}, F)$-cubierta de X. Luego, por 1.4.6, tenemos que $N \in \mathcal{A}^{F\perp}$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es F-cubriente especial. $\square$

El siguiente resultado, es la versión F-relativa del conocido Lema de Salce.

Lema 2.1.6 *Sea F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathfrak{C} = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de F-cotorsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, $\mathcal{A}$ es F-precubriente si y sólo si $\mathcal{B}$ es F-preenvolvente.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ es F-precubriente. Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Como F tiene suficientes inyectivos, existe una sucesión F-exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0\ ,$$

con $I \in \mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{B}$. Por 2.1.5, existe una $(\mathcal{A}, F)$-precubierta de N

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \xrightarrow{\rho} N \longrightarrow 0$$

con $B \in \mathcal{A}^{F\perp} = \mathcal{B}$. Consideremos el pullback de π y ρ.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & M \arrow[r, equal] \arrow[d] & M \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & I \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Como $B, I \in \mathcal{B}$, tenemos que $E \in \mathcal{B}$, pues $\mathcal{B}$ es cerrada por F-extensiones. Consideremos la sucesión F-exacta (pues es pullback de una F-exacta) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\theta} E \xrightarrow{\gamma} A \longrightarrow 0$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, B')$, con $B' \in \mathcal{B}$, a la sucesión anterior tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(E, B') \xrightarrow{\theta^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, B') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(A, B') \ ,$$

con $\theta^* := \mathrm{Hom}_\Lambda(\theta, B')$. Pero $\mathrm{Ext}^1_F(A, B') = F(A, B') = 0$ pues $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de F-cotorsión. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_\Lambda(\theta, B')$ es un epimorfismo, $\forall\, B' \in \mathcal{B}$. De donde concluimos que θ es una $\mathcal{B}$-preenvolvente de M. La otra implicación se hace por argumentos duales. $\square$

Definición 2.1.7 *Una sucesión exacta larga* $0 \longrightarrow X_u \xrightarrow{f_u} \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_0} Y \longrightarrow 0$ *es* ***F-exacta*** *si* $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_i) \longrightarrow X_i \longrightarrow \mathrm{Im}(f_i) \longrightarrow 0$ *es F-exacta para todo i.*

Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Denotaremos por $\mathcal{X}^{(\wedge, F)}$ a la subcategoría de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son aquellos $Y \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ que admiten una $(\mathcal{X}, F)$-resolución finita; esto es, existe una sucesión F-exacta larga $0 \longrightarrow X_u \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ con $X_i \in \mathcal{X}$. Dualmente, $\mathcal{X}^{(\vee, F)}$ es la subcategoría de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son aquellos que admiten una $(\mathcal{X}, F)$-coresolución finita. Como es usual, $\mathrm{pd}\, X$ denotará la dimensión proyectiva de X e $\mathrm{id}\, X$ a la dimensión inyectiva de X.

Definición 2.1.8 *[3] Sean $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *F con suficientes proyectivos e inyectivos y M un objeto de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(a) *Denotamos por* $\mathrm{pd}_{(\mathcal{X},F)}(M) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *a la* ***dimensión proyectiva relativa*** *de* M *con respecto a* $\mathcal{X}$ *y* F. *Esto es,* $\mathrm{pd}_{(\mathcal{X},F)}(M) := \min\{n \mid \mathrm{Ext}^j_F(M,-)\mid_{\mathcal{X}}= 0, \quad \forall j > n \geq 0\}$. *Dualmente,* $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(M) := \min\{n \mid \mathrm{Ext}^j_F(-,M)\mid_{\mathcal{X}}= 0, \quad \forall j > n \geq 0\}$ *es la* ***dimensión inyectiva relativa*** *de* M *con respecto a* $\mathcal{X}$ *y* F.

(b) *Denotaremos por* $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(M) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *a la* ***dimensión*** $(\mathcal{X},\mathbf{F})$-***resolución*** *de* M. *Esto es,* $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(M) := \min\{r \mid$ *existe una sucesión* F*-exacta* $0 \longrightarrow X_r \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *con* $X_i \in \mathcal{X}\}$ *si* $M \in \mathcal{X}^{(\wedge,F)}$, *y* $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(M) := \infty$ *si* $M \notin \mathcal{X}^{(\wedge,F)}$. *Dualmente, denotaremos por* $\mathrm{coresdim}_{(\mathcal{X},F)}(M)$ *a la* ***dimensión*** $(\mathcal{X},\mathbf{F})$-***coresolución*** *de* M.

(c) *Para cualquier clase* $\mathcal{C}$ *de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *definimos* $\mathrm{pd}_{(\mathcal{X},F)}(\mathcal{C}) := \sup\{\mathrm{pd}_{(\mathcal{X},F)}(M) \mid M \in \mathcal{C}\}$ *y* $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(\mathcal{C}) := \sup\{\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(M) \mid M \in \mathcal{C}\}$. *Análogamente, se definen* $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(\mathcal{C})$ *y* $\mathrm{coresdim}_{(\mathcal{X},F)}(\mathcal{C})$.

Definición 2.1.9 *Sean* $\omega \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$. *En lo que sigue introducimos las siguientes nociones.*

(a) ω *es un* $\mathbf{F}$-***cogenerador relativo*** *en* $\mathcal{X}$ *si,* $\forall X \in \mathcal{X}$ *existe una sucesión* F*-exacta* $0 \longrightarrow X \longrightarrow W \longrightarrow X' \longrightarrow 0$ *con* $W \in \omega$ *y* $X' \in \mathcal{X}$.

(b) *Sea* F *con suficientes proyectivos. Decimos que* ω *es* $(\mathcal{X},\mathbf{F})$-***inyectivo*** *si* $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(\omega) = 0$.

(c) ω *es un* $\mathbf{F}$-***generador relativo*** *en* $\mathcal{X}$ *si,* $\forall X \in \mathcal{X}$ *existe una sucesión* F*-exacta* $0 \longrightarrow X' \longrightarrow W \longrightarrow X \longrightarrow 0$ *con* $W \in \omega$ *y* $X' \in \mathcal{X}$.

(d) *Sea* F *con suficientes inyectivos. Decimos que* ω *es* $(\mathcal{X},\mathbf{F})$-***proyectivo*** *si* $\mathrm{pd}_{(\mathcal{X},F)}(\omega) = 0$.

Proposición 2.1.10 [8, 1.7] *Sean* F *con suficientes proyectivos e inyectivos,* $\mathfrak{C} = (\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *un par de* F*-cotorsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{X}$ *es* F*-cubriente especial si y sólo si* $\mathcal{Y}$ *es* F*-envolvente especial.*

(b) *Si* $\mathcal{X}$ *es* F*-cubriente especial en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *entonces* ω *es un* F*-cogenerador relativo en* $\mathcal{X}$ *y un* F*-generador relativo en* $\mathcal{Y}$.

Demostración.

(a) Se sigue de 2.1.5 y 2.1.6.

(b) Supongamos que $\mathcal{X}$ es F-cubriente especial en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Sea $C \in \mathcal{X} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por (a), tenemos que existe una sucesión F-exacta $0 \longrightarrow C \xrightarrow{g} Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ con g una $\mathcal{Y}$-envolvente especial de C y $X^C \in \mathcal{X}$. Luego, por 2.1.2 (a), tenemos que $\mathcal{X}$ es cerrado por F-extensiones y por lo tanto $Y^C \in \omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Análogamente, se ve que ω es un F-generador relativo en $\mathcal{Y}$. $\square$

Definición 2.1.11 *Se dice que un par de F-cotorsión $\mathfrak{C} = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *es* **F-*completo*** *si $\mathcal{A}$ es F-precubriente especial y $\mathcal{B}$ es F-preenvolvente especial.*

Corolario 2.1.12 *Sea F con suficientes proyectivos e inyectivos y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de F-cotorsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Si $\mathcal{A}$ es F-precubriente o bien $\mathcal{B}$ es F-preenvolvente, entonces el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es F-completo.*

Demostración. Se sigue de 2.1.5 y 2.1.10. $\square$

Proposición 2.1.13 [8, 1.8] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *que es F-precubriente, cerrada por F-extensiones y sumandos directos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Entonces $\mathfrak{B}_{\mathcal{X}} := (\mathcal{X}, \mathcal{X}^{F\perp})$ es un par de F-cotorsión completo en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*.*

Demostración. Tenemos que $\mathcal{X} \subseteq {}^{F\perp}(\mathcal{X}^{F\perp})$. Sea $C \in {}^{F\perp}(\mathcal{X}^{F\perp})$. Dado que $\mathcal{X}$ es F-precubriente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, por 1.4.6 y 2.1.4, existe una $(\mathcal{X}, F)$-cubierta $\eta\ :\ 0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{f_C} C \longrightarrow 0$ con $Y_C := \mathrm{Ker}(f_C) \in \mathcal{X}^{F\perp}$. Por lo tanto, la sucesión exacta η se escinde ya que $C \in {}^{F\perp}(\mathcal{X}^{F\perp})$. De donde concluimos que C es un sumando directo de $X_C \in \mathcal{X}$; y entonces $C \in \mathcal{X}$. Lo cual prueba que $\mathcal{X} = {}^{F\perp}(\mathcal{X}^{F\perp})$. Finalmente, la F-completitud del par de F-cotorsión $\mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$ sale 2.1.12. $\square$

2.2. Subcategorías Resolventes Relativas

En toda esta sección F será un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ con suficientes proyectivos e inyectivos.

Definición 2.2.1 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerrada por F-extensiones.*

(a) Decimos que $\mathcal{X}$ es **F-*resolvente***, *si $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{X}$ y para cada sucesión F-exacta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ con B, $C \in \mathcal{X}$ se tiene que $A \in \mathcal{X}$.*

(b) Decimos que $\mathcal{X}$ es **F-*coresolvente***, *si $\mathcal{I}(F) \subseteq \mathcal{X}$ y para cada sucesión F-exacta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ con A, $B \in \mathcal{X}$ se tiene que $C \in \mathcal{X}$.*

(c) Decimos que $\mathcal{X}$ es ***cerrada por* F-*sizigias*** *si $\Omega^1_F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{X}$.*

(d) Decimos que $\mathcal{X}$ es ***cerrada por* F-*cosizigias*** *si $\Omega^{-1}_F(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$.*

Recordemos la siguiente notación (ver 1.2.3)

Notación 2.2.2 *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{X} \subseteq$* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Para cada $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, consideraremos a las siguientes clases de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*:*
$\mathcal{X}^{F\perp_i} := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) : \mathrm{Ext}^i_F(-, M)\ |_{\mathcal{X}} = 0\}$ y $\mathcal{X}^{F\perp_\infty} := \cap_{i>0}\mathcal{X}^{F\perp_i}$. Dualmente, se tienen las clases ${}^{F\perp_i}\mathcal{X}$ y ${}^{F\perp_\infty}\mathcal{X}$.

Recordemos que si F es un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$, con suficientes proyectivos y suficientes inyectivos, por 1.1.16, tenemos que $\mathcal{P}(F) = \mathrm{add}(\mathcal{P}(F))$ y $\mathcal{I}(F) = \mathrm{add}(\mathcal{I}(F))$. Por lo tanto, por 2.1.4, para cada $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ existe una resolución F-proyectiva minimal

$$\mathfrak{P}_M: \quad \cdots \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \xrightarrow{f_{-1}} 0.$$

Para $i \geq 0$, el objeto $\Omega^i_F(M) := \mathrm{Ker}(f_{i-1}) = \mathrm{Im}(f_i)$ es llamado la i-ésima **F-sizigia** de M. Dualmente, M admite una resolución F-inyectiva minimal

$$\mathfrak{I}_M: \quad 0 \xrightarrow{g_{-1}} M \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} \cdots \xrightarrow{g_{n-1}} I_n \xrightarrow{g_n} I_{n+1} \xrightarrow{g_{n+1}} \cdots.$$

Para $i \geq 0$, el objeto $\Omega^{-i}_F(M) := \mathrm{Coker}(g_{i-1}) = \mathrm{Ker}(g_{i+1})$ es llamado la i-ésima **F-cosizigia** de M.

Lema 2.2.3 *(Lema del corrimiento). Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y M, N objetos de $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, $\forall\, k > 0$ y $\forall\, n > 0$, se tienen los siguientes isomorfismos.*

(a) $\mathrm{Ext}^{k+n}_F(M,N) \simeq \mathrm{Ext}^k_F(\Omega^n_F(M), N)$.

(b) $\mathrm{Ext}^{k+n}_F(M,N) \simeq \mathrm{Ext}^k_F(M, \Omega^{-n}_F(N))$.

Notación 2.2.4 *Sea F con suficientes proyectivos e inyectivos. Dada una clase $\mathcal{C}$ de objetos de $\mathrm{mod}(\Lambda)$, para cada $i \in \mathbb{Z}$, se introduce la clase*

$$\Omega^i_F(\mathcal{C}) := \{\Omega^i_F(M) \mid M \in \mathcal{C}\}.$$

Lema 2.2.5 *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{C}$ una clase de objetos de $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) ${}^{F\perp_\infty}\mathcal{C}$ *es F-resolvente y* $\mathcal{C}^{F\perp_\infty}$ *es F-coresolvente.*

(b) $\mathcal{C}$ es cerrada por F-sizigias (respectivamente, F-cosizigias) si $\mathcal{C}$ es F-resolvente (respectivamente, F-coresolvente).

(c) Si $\mathcal{C}$ es cerrada por F-sizigias (respectivamente, F-cosizigias), entonces también lo es $\Omega^i_F(\mathcal{C})$ (respectivamente, $\Omega^{-i}_F(\mathcal{C})$).

(d) $\mathcal{C}^{F\perp_i} = (\Omega^k_F(\mathcal{C}))^{F\perp_{i-k}}$ *y* ${}^{F\perp_i}\mathcal{C} = {}^{F\perp_{i-k}}(\Omega^{-k}_F(\mathcal{C}))$ *para $k < i$.*

Demostración.

(a) Se sigue de la sucesión larga de homología relativa, ver 1.2.2(d).

(b) Supongamos que $\mathcal{C}$ es F-resolvente. Consideremos una resolución F-proyectiva minimal $\mathfrak{P}_M$ de $M \in \mathcal{C}$

$$\mathfrak{P}_M: \quad \cdots \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0.$$

Luego $\Omega^1_F(M) = \mathrm{Ker}(f_0) \in \mathcal{D}$ pues $\mathcal{D}$ es F-resolvente y M, $P_0 \in \mathcal{D}$. Por lo tanto $\Omega^1_F(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$; probándose (b).

(c) Supongamos que $\mathcal{C}$ es cerrada por F-sizigias. Dado $N \in \Omega^i_F(\mathcal{C})$, existe $M \in \mathcal{C}$ y una resolución F-proyectiva minimal $\mathfrak{P}_M$ de M

$$\mathfrak{P}_M : \quad \cdots \xrightarrow{f_{i+1}} P_i \xrightarrow{f_i} P_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0,$$

con $\Omega^i_F(M) := \mathrm{Im}(f_i) = N$. Como $\mathcal{C}$ es cerrada por F-sizigias, tenemos que $W := \Omega^1_F(M) \in \mathcal{C}$. Consideremos una resolución F-proyectiva minimal $\mathfrak{P}_N$ de N

$$\mathfrak{P}_N : \quad \cdots \xrightarrow{f'_{n+1}} P_n \xrightarrow{f'_n} P_{n-1} \xrightarrow{f'_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f'_1} P_0 \xrightarrow{f'_0} N \longrightarrow 0.$$

Luego, concatenando $\mathfrak{P}_N$ con el segmento de $\mathfrak{P}_M$ en el lugar N, tenemos una resolución F-proyectiva minimal $\mathfrak{P}_W$ de W con $\Omega^i_F(W) = \Omega^1_F(N)$. Por lo tanto $\Omega^i_F(\mathcal{C})$ es cerrada por F-sizigias. Dualmente, se prueba que $\Omega^{-i}_F(\mathcal{C})$ es cerrada por F-cosizigias.

(d) Sean $A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $C \in \mathcal{C}$. Por 2.2.3, $\mathrm{Ext}^i_F(C, A) \simeq \mathrm{Ext}^{i-k}_F(\Omega^k_F(C), A)$. Luego $\mathcal{C}^{_F\perp_i} = (\Omega^k_F(\mathcal{C}))^{_F\perp_{i-k}}$.
Dualmente, se prueba que ${}^{_F\perp_i}\mathcal{C} = {}^{_F\perp_{i-k}}(\Omega^{-k}_F(\mathcal{C}))$. $\square$

El siguiente resultado es la versión F-relativa del lema de García Rozas.

Lema 2.2.6 *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de F-cotorsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathcal{A}$ *es F-resolvente.*

(b) $\mathcal{B}$ *es F-coresolvente.*

(c) $\mathrm{Ext}^i_F(A, B) = 0$, $\forall\, i > 0$, $\forall\, A \in \mathcal{A}$ *y* $\forall\, B \in \mathcal{B}$.

(d) $\mathrm{Ext}^2_F(A, B) = 0$, $\forall\, A \in \mathcal{A}$ *y* $\forall\, B \in \mathcal{B}$.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (c)$. Sea $A \in \mathcal{A}$. Como F tiene suficientes proyectivos, consideremos una resolución F-proyectiva minimal de A,

$$\mathfrak{P}_A : \quad \cdots \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} A \longrightarrow 0.$$

Como $\mathcal{A}$ es F-resolvente, se tiene que $\Omega^i_F(A) \in \mathcal{A}$, $\forall i \geq 0$. Sea $B \in \mathcal{B}$ y $i \geq 1$. Luego, por 2.2.3, $\mathrm{Ext}^i_F(A, B) \simeq \mathrm{Ext}^1_F(\Omega^{i-1}_F(A), B) = 0$ pues $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de F-cotorsión.
$(d) \Longrightarrow (b)$. Por 2.1.2, sabemos que $\mathcal{B}$ contiene a $\mathcal{I}(F)$ y es cerrada por F-extensiones. Veamos que si $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión F-exacta con A, $B \in \mathcal{B}$, entonces $C \in \mathcal{B}$. En efecto, sea $A' \in \mathcal{A}$, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(A', -)$ a la sucesión anterior tenemos la sucesión exacta $\mathrm{Ext}^1_F(A', B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(A', C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_F(A', A)$. Por hipótesis $\mathrm{Ext}^1_F(A', B) = \mathrm{Ext}^2_F(A', A) = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_F(A', C) = 0\ \forall\, A' \in \mathcal{A}$, es decir, $C \in \mathcal{A}^{_F\perp_1} =$

$\mathcal{B}$.
$(b) \Longrightarrow (c)$. Dual a (a) implica (c).
$(d) \Longrightarrow (a)$. Por 2.1.2, sabemos que $\mathcal{A}$ contiene a $\mathcal{P}(F)$ y es cerrada por F-extensiones. Veamos que si $0 \longrightarrow E \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión F-exacta con D, $C \in \mathcal{A}$, entonces $E \in \mathcal{A}$. En efecto, sea $B \in \mathcal{B}$, aplicando $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,B)$ a la sucesión anterior, tenemos la sucesión exacta $\mathrm{Ext}^1_F(D,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(E,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_F(C,B)$. Por hipótesis $\mathrm{Ext}^1_F(D,B) = \mathrm{Ext}^2_F(C,B) = 0$. Luego $\mathrm{Ext}^1_F(E,B) = 0,\ \forall\, B \in \mathcal{B}$. Es decir, $E \in {}^{F\perp_1}\mathcal{B} = \mathcal{A}$.
$(c) \Longrightarrow (d)$. Trivial. Probándose que las condiciones son equivalentes. $\square$

Definición 2.2.7 *Un par de F-cotorsión $\mathfrak{C} = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *se dice que es* **F-*hereditario*** *si $\mathcal{A}$ es F-resolvente y $\mathcal{B}$ es F-coresolvente.*

Lema 2.2.8 *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{C}$ una clase de objetos de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $\mathcal{C}$ es cerrada por F-sizigias, entonces

- *(a1) $\mathcal{C}^{F\perp_1} = \mathcal{C}^{F\perp_\infty}$ y ${}^{F\perp_1}(\mathcal{C}^{F\perp_1}) = {}^{F\perp_\infty}(\mathcal{C}^{F\perp_\infty})$; y*
- *(a2) el par de F-cotorsión $\mathfrak{B}_\mathcal{C} := ({}^{F\perp_1}(\mathcal{C}^{F\perp_1}), \mathcal{C}^{F\perp_1})$, generado por $\mathcal{C}$, es F-hereditario.*

(b) Si $\mathcal{C}$ es cerrada por F-cosizigias, entonces

- *(b1) ${}^{F\perp_1}\mathcal{C} = {}^{F\perp_\infty}\mathcal{C}$ y $({}^{F\perp_1}\mathcal{C})^{F\perp_1} = ({}^{F\perp_\infty}\mathcal{C})^{F\perp_\infty}$; y*
- *(b2) el par de F-cotorsión $\mathfrak{C}_\mathcal{C} := ({}^{F\perp_1}\mathcal{C}, ({}^{F\perp_1}\mathcal{C})^{F\perp_1})$, cogenerado por $\mathcal{C}$, es F-hereditario.*

Demostración. Afirmamos que si: $\mathcal{C}$ es cerrada por F-sizigias, entonces $\mathcal{C}^{F\perp_1} = \mathcal{C}^{F\perp_\infty}$. En efecto, puesto que $\mathcal{C}^{F\perp_\infty} \subseteq \mathcal{C}^{F\perp_1}$, basta ver que $\mathcal{C}^{F\perp_1} \subseteq \mathcal{C}^{F\perp_\infty}$. Sean $M \in \mathcal{C}^{F\perp_1}$ y $C \in \mathcal{C}$. Consideremos una resolución F-proyectiva minimal $\mathfrak{P}_C$ de C

$$\mathfrak{P}_C : \quad \cdots \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} C \longrightarrow 0.$$

Como $\mathcal{C}$ es cerrada por F-sizigias, tenemos que $\Omega^i_F(C) \in \mathcal{C}\ \ \forall\, i \geq 0$. Luego, por 2.2.3, tenemos que $\mathrm{Ext}^k_F(C,M) \simeq \mathrm{Ext}^1_F(\Omega^{k-1}_F(C), M) = 0,\ \forall\, k > 0$. Por lo tanto $M \in \mathcal{C}^{F\perp_\infty}$. Dualmente, se tiene que: $\mathcal{C}$ cerrada por F-cosizigias implica ${}^{F\perp_1}\mathcal{C} = {}^{F\perp_\infty}\mathcal{C}$; ésto es, vale la primera igualdad de (b1).
Probemos ahora que si $\mathcal{C}$ es cerrada por F-sizigias se concluye que ${}^{F\perp_1}(\mathcal{C}^{F\perp_1}) = {}^{F\perp_\infty}(\mathcal{C}^{F\perp_\infty})$ y (a2). En efecto, ya vimos que $\mathcal{C}^{F\perp_1} = \mathcal{C}^{F\perp_\infty}$ y luego, por 2.2.5(a) y (b), $\mathcal{C}^{F\perp_1}$ es cerrada por F-cosizigias. De donde ${}^{F\perp_1}(\mathcal{C}^{F\perp_1}) = {}^{F\perp_\infty}(\mathcal{C}^{F\perp_\infty})$. Ahora bien, el par de F-cotorsión $\mathfrak{B}_\mathcal{C}$ es F-hereditario por 2.2.6, pues $\mathcal{C}^{F\perp_1} = \mathcal{C}^{F\perp_\infty}$ es F-coresolvente (ver 2.2.5(a)). Finalmente, la prueba de (b2) y la de la segunda igualdad de (b1) es dual. $\square$

Corolario 2.2.9 [8, 2.1] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathscr{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $\mathcal{C}$ es F-resolvente entonces

(a1) $\mathcal{C}^{{}_F\perp_1} = \mathcal{C}^{{}_F\perp_\infty}$ *y* ${}^{{}_F\perp_1}(\mathcal{C}^{{}_F\perp_1}) = {}^{{}_F\perp_\infty}(\mathcal{C}^{{}_F\perp_\infty})$*; y*

(a2) el par de F-cotorsión $\mathfrak{B}_{\mathcal{C}} := ({}^{{}_F\perp_1}(\mathcal{C}^{{}_F\perp_1}), \mathcal{C}^{{}_F\perp_1})$, generado por $\mathcal{C}$, es F-hereditario.

(b) Si $\mathcal{C}$ es F-coresolvente entonces

(b1) ${}^{{}_F\perp_1}\mathcal{C} = {}^{{}_F\perp_\infty}\mathcal{C}$ *y* $({}^{{}_F\perp_1}\mathcal{C})^{{}_F\perp_1} = ({}^{{}_F\perp_\infty}\mathcal{C})^{{}_F\perp_\infty}$*; y*

(b2) el par de F-cotorsión $\mathfrak{C}_{\mathcal{C}} := ({}^{{}_F\perp_1}\mathcal{C}, ({}^{{}_F\perp_1}\mathcal{C})^{{}_F\perp_1})$, cogenerado por $\mathcal{C}$, es F-hereditario.

Demostración. Es inmediato de 2.2.8. □

Proposición 2.2.10 [8, 2.2] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerrada por sumandos directos, F-precubriente y F-resolvente. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathfrak{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{X}^{{}_F\perp_1})$ *es un par de F-cotorsión F-hereditario y F-completo en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(c) Para cada $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, *existe una sucesión F-exacta, única salvo isomorfismos,* $0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *que satisface:*

- *(i) f es una $(\mathcal{X}$,$F)$-cubierta de C,*
- *(ii)* $Y_C \in \mathcal{X}^{{}_F\perp_1}$,
- *(iii) f induce isomorfismos* $\mathrm{Ext}^i_F(X, X_C) \simeq \mathrm{Ext}^i_F(X, C)$, $\forall i > 0$ *y* $\forall\, X \in \mathcal{X}$.

(d) Para cada $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, *existe una sucesión F-exacta, única salvo isomorfismos,* $0 \longrightarrow C \xrightarrow{g} Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0$ *en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *que satisface:*

- *(i) g es una $(\mathcal{X}^{{}_F\perp_1}, F)$-envolvente de C,*
- *(ii)* $X^C \in \mathcal{X}$,
- *(iii) g induce isomorfismos* $\mathrm{Ext}^i_F(Y^C, Y) \simeq \mathrm{Ext}^i_F(C, Y)$, $\forall\, i > 0$ *y* $\forall\, Y \in \mathcal{X}^{{}_F\perp_1}$.

Demostración.

(a) Es consecuencia inmediata de 2.2.9 y de 2.1.13.

(c) La existencia de la sucesión que cumpla (i) y (ii) se sigue de (a) y de 2.1.10.
Veamos que (iii) también se satisface.

Sea $X \in \mathcal{X}$. De la sucesión F-exacta $0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$ obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^i_F(X, Y_C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_F(X, X_C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_F(X, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_F(X, Y_C).$$

Como $Y_C \in \mathcal{X}^{F\perp_1} = \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$, (ver 2.2.9(a)), se tiene que $\mathrm{Ext}^i_F(X, Y_C) = 0$, $\forall\, i > 0$. Por lo tanto $\mathrm{Ext}^i_F(X, X_C) \simeq \mathrm{Ext}^i_F(X, C)$, $\forall\, i > 0$ y $\forall\, X \in \mathcal{X}$.

(d) Dual de (c). □

Definición 2.2.11 *Sea F con suficientes proyectivos e inyectivos. Decimos que $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ es* **F-*autoortogonal*** *si $\mathrm{Ext}^i_F(C, C) = 0$, $\forall i > 0$. Decimos que $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ es* **F-*autoortogonal*** *si $\mathrm{Ext}^i_F(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = 0$, $\forall i > 0$.*

Corolario 2.2.12 [8, 2.3] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cerrada por sumandos directos, F-cubriente y F-resolvente. Entonces, $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$ tiene las siguientes propiedades:*

(a) ω es un F-cogenerador relativo y $(\mathcal{X}, F)$-inyectivo en $\mathcal{X}$;

(b) ω es un F-generador relativo y $(\mathcal{X}^{F\perp_\infty}, F)$-proyectivo en $\mathcal{X}^{F\perp_\infty}$.

Demostración. Por 2.2.10 se tiene que $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^{F\perp_1})$ es un par de F-cotorsión F-hereditario y F-completo. Además por 2.2.9, sabemos que $\mathcal{X}^{F\perp_1} = \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$. Luego, el corolario es consecuencia de 2.1.13 y 2.1.10 (ver 2.2.7). □

Definición 2.2.13 *Sea F con suficientes proyectivos e inyectivos. Definimos la* **F-*dimensión proyectiva relativa*** *y la* **F-*dimensión inyectiva relativa*:** $\mathrm{pd}_F(M) := \mathrm{resdim}_{(\mathcal{P}(F),F)}(M)$ *y* $\mathrm{id}_F(M) := \mathrm{coresdim}_{(\mathcal{I}(F),F)}(M)$.

Observación 2.2.14 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(a) Si $\mathcal{X}$ es cerrada por F-extensiones y $0 \in \mathcal{X}$, entonces $\mathcal{X}$ es cerrada por isomorfismos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(b) Sea $\mathcal{X}$ cerrada por isomorfismos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(C) = 0$ si y sólo si $C \in \mathcal{X}$.

(c) $0 \in \mathcal{X}^{(\wedge,F)}$. En efecto, lo anterior se sigue de la siguiente sucesión F-exacta $0 \longrightarrow X \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$, con $X \in \mathcal{X}$.

Lema 2.2.15 *[50, 2.13] Sea F con suficientes proyectivos e inyectivos. Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ clases de objetos de $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{X}^{(\vee,F)}) = \mathrm{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{X})$.

(b) Si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}^{(\vee,F)}$ entonces $\mathrm{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{Z}) = \mathrm{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{X})$.

(c) Si $\omega \subseteq \mathcal{X} \subseteq \omega^{(\vee,F)}$ entonces $\mathrm{pd}_F(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_F(\omega)$.

Demostración. Sea $M \in \mathcal{X}^{(\vee,F)}$. Probaremos, por inducción sobre $d = \operatorname{coresdim}_{(\mathcal{X},F)}(M)$, que $\operatorname{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(M) \leq \operatorname{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{X})$. Podemos asumir que $\alpha := \operatorname{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{X}) < \infty$ y que $d > 0$.
Si $d = 1$ se tiene una sucesión F-exacta $0 \longrightarrow M \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow 0$ con X_0 y X_1 en $\mathcal{X}$. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_\Lambda(-,Y)$, con $Y \in \mathcal{Y}$, a la sucesión anterior obtenemos la sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}^i_F(X_0,Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_F(M,Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_F(X_1,Y).$$

Como $\operatorname{Ext}^i_F(X_0,Y) = \operatorname{Ext}^{i+1}_F(X_1,Y) = 0$ para $i > \alpha$, tenemos que $\operatorname{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(M) \leq \alpha$. Sea $d \geq 2$. Dado que $d = \operatorname{coresdim}_{(\mathcal{X},F)}(M)$, existe una sucesión F-exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_d \longrightarrow 0$$

tal que $X_i \in \mathcal{X}$ y $\operatorname{coresdim}_{(\mathcal{X},F)}(K_0) = d-1$, donde $K_0 := \operatorname{Im} f_0$. Luego, por hipótesis de inducción, tenemos que $\operatorname{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(K_0) \leq \alpha$.
Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_\Lambda(-,Y)$, con $Y \in \mathcal{Y}$, a la sucesión exacta F-exacta $0 \longrightarrow M \longrightarrow X_0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0$ obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}^i_F(X_0,Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_F(M,Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_F(K_0,Y).$$

Como $\operatorname{Ext}^i_F(X_0,Y) = \operatorname{Ext}^{i+1}_F(K_0,Y) = 0$ para $i > \alpha$, entonces $\operatorname{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(M) \leq \alpha$. Por lo tanto $\operatorname{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{X}^{(\vee,F)}) \leq \alpha$. Puesto que $\operatorname{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{X}) \leq \operatorname{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{X}^{(\vee,F)})$, tenemos entonces que $\operatorname{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{X}^{(\vee,F)}) = \operatorname{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{X})$; probándose (a).
Finalmente, (b) se sigue de (a); y (c) se sigue de (b). $\square$

Lema 2.2.16 *Sea $F = F_{\mathcal{X}}$ un subfuntor aditivo de $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & A \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\beta\alpha"] & & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "I"] & C \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"] & D \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "g"] \arrow[d] & D \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0, & &
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado I es de pullback y pushout. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.

(a) Si la primera columna y el primer renglón son F-exactas, entonces la segunda columna y segundo renglón son F-exactas, es decir, todo el diagrama es F-exacto.

(b) Si la segunda columna y el segundo renglón son F-exactas, entonces el primer renglón y la primera columna son F-exactos, es decir, todo el diagrama es F-exacto.

Demostración. Sólo probemos (a), pues (b) es dual. Veamos que la segunda columna es F-exacta. Como $F = F_{\mathcal{X}}$, tenemos que $F = F^{\mathcal{Y}}$ con $\mathcal{Y} = \tau(\mathcal{X})$ (ver 1.1.23 (b)). Sea $\theta : A \longrightarrow Y$ con $Y \in \mathcal{Y}$. Como la primera columna es F-exacta, existe $\theta' : B \longrightarrow Y$ tal que $\theta = \theta'\alpha$. Luego, como el primer renglón es F-exacto, existe $\theta'' : C \longrightarrow Y$ tal que $\theta' = \theta''\beta$. Por lo tanto, $\theta = \theta''(\beta\alpha)$ lo cual nos dice que la segunda columna es F-exacta. Por último, el segundo renglón es F-exacto pues es pushout de una sucesión F-exacta, probándose (a). $\Box$

Teorema 2.2.17 [3, 1.1] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{X}$ una clase de objetos de* $\operatorname{mod}(\Lambda)$ *cerrada por F-extensiones tal que $0 \in \mathcal{X}$ y ω un F-cogenerador relativo en $\mathcal{X}$. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\forall\, C \in \mathcal{X}^{(\wedge,F)}$, existen sucesiones F-exactas cortas

$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{\varphi_C} C \longrightarrow 0$ *con $Y_C \in \omega^{(\wedge,F)}$, $X_C \in \mathcal{X}$;*

$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\varphi^C} Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0$ *con $Y^C \in \omega^{(\wedge,F)}$, $X^C \in \mathcal{X}$.*

(b) Si ω es $(\mathcal{X}, F)$-inyectivo, entonces

(i) $\varphi_C : X_C \longrightarrow C$ es una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta especial de C, $\forall\, C \in \mathcal{X}^{(\wedge,F)}$;

(ii) $\varphi^C : C \longrightarrow Y^C$ es una $(\omega^{(\wedge,F)}, F)$-preenvolvente especial de C, $\forall\, C \in \mathcal{X}^{(\wedge,F)}$.

Demostración.

(a) Sea $C \in \mathcal{X}^{(\wedge,F)}$. La prueba se hará por inducción sobre $n = \operatorname{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(C)$. Si $n = 0$, por 2.2.14(b), se tiene que $C \in \mathcal{X}$. Entonces tenemos la primera sucesión F-exacta $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow C \longrightarrow C \longrightarrow 0$ pues se escinde y $0 \in \omega^{(\wedge,F)}$. Como ω es un F-cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, la segunda sucesión F-exacta buscada es $0 \longrightarrow C \longrightarrow W \longrightarrow X' \longrightarrow 0$.
Sea $n = \operatorname{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(C) > 0$. Luego, existe una sucesión F-exacta en $\operatorname{mod}(\Lambda)$

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_0} X_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ y $\operatorname{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(K) = n-1$, donde $K := \operatorname{Im}(d_0)$. Como $\operatorname{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(K) = n-1$, por hipótesis de inducción, se tiene que existe la sucesión F-exacta $0 \longrightarrow K \longrightarrow Y^K \longrightarrow X^K \longrightarrow 0$ con $Y^K \in$

$\omega^{(\wedge,F)}$, $X^K \in \mathcal{X}$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y F-exacto (pues es diagrama de pushout)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y^K \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & X^K \arrow[r, equal] \arrow[d] & X^K \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Dado que X_0, $X^K \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrada por F-extensiones, se tiene que $U \in \mathcal{X}$. Podemos tomar a $0 \longrightarrow Y^K \longrightarrow U \longrightarrow C \longrightarrow 0$ como la primera sucesión F-exacta en (a). Ahora, como $U \in \mathcal{X}$ y ω es un F-cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, tenemos la existencia de la siguiente sucesión F-exacta $0 \longrightarrow U \longrightarrow W \longrightarrow X^C \longrightarrow 0$ con $W \in \omega$ y $X^C \in \mathcal{X}$. Para construir la otra sucesión F-exacta buscada, consideremos el siguiente diagrama de pushout, donde el primer renglón y la primera columna son F-exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Y^K \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y^K \arrow[d] & & \\
\eta : 0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & X^C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\eta' : 0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & Y^C \arrow[r] \arrow[d] & X^C \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Luego, por 2.2.16, tenemos que la sucesión de la segunda columna es F-exacta. Es decir $0 \longrightarrow Y^K \longrightarrow W \longrightarrow Y^C \longrightarrow 0$ es F-exacta y además $Y^K \in \omega^{(\wedge,F)}$ y $W \in \omega$. Luego, por definición de $\omega^{(\wedge,F)}$, se tiene que $Y^C \in \omega^{(\wedge,F)}$. Como η' es F-exacta, (pues es pushout de una F-exacta), tenemos que la otra sucesión F-exacta es:

$$\eta' : \ 0 \longrightarrow C \longrightarrow Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0.$$

(b) Supongamos que ω es $(\mathcal{X}, F)$-inyectivo, esto es, $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(\omega) = 0$. En particular, de 2.2.15, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_F(\mathcal{X}, \omega^{(\wedge,F)}) = 0$.

(i) Sea $f : X \longrightarrow C$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ con $X \in \mathcal{X}$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y_C \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y_C \arrow[r] & X_C \arrow[r, "\varphi_C"'] & C \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde el cuadrado de la derecha es un pullback y entonces la sucesión del primer renglón es F-exacta. Por lo tanto, la sucesión superior se escinde pues $\mathrm{Ext}^1_F(\mathcal{X}, \omega^{(\wedge,F)}) = 0$. Luego f se factoriza a través φ_C; demostrándose que φ_C es una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta especial de C.

(ii) Análogo a (i). $\square$

Lema 2.2.18 *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\omega \subseteq \mathcal{X} \subseteq$ $\mathrm{mod}(\Lambda)$ clases de objetos, con $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(\omega) = 0$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) [3, 2.2] $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(\omega^{(\wedge,F)}) = 0$.

(b) [3, 3.7] Si ω es un F-cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, con ω cerrado por sumandos directos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, entonces

$$\omega = \{X \in \mathcal{X} \mid \ \mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(X) = 0\} = \mathcal{X} \cap \omega^{(\wedge,F)}.$$

(c) Existe a lo sumo un F-cogenerador relativo en $\mathcal{X}$ que sea $(\mathcal{X}, F)$-inyectivo y cerrado por sumandos directos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración.

(a) Se sigue del dual de 2.2.15(a).

(b) Sea $X \in \mathcal{X}$. Supongamos que $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(X) = 0$. Como ω es un F-cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, existe una sucesión F-exacta $0 \longrightarrow X \longrightarrow W \longrightarrow X' \longrightarrow 0$ con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$, la cual se escinde pues $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(X) = 0$. Por lo tanto X es un sumando directo de W, de donde se sigue que $X \in \omega$ ya que ω es cerrada por sumandos directos. Recíprocamente, si $X \in \omega$ entonces $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(X) \leq \mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(\omega) = 0$. Lo cual prueba la primera igualdad de (b). Por otro lado, es fácil ver que $\omega \subseteq \mathcal{X} \cap \omega^{(\wedge,F)}$. Sea $X \in \mathcal{X} \cap \omega^{(\wedge,F)}$. Luego, por (a), se tiene que $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(X) = 0$. En particular, de la primera igualdad de (b), se concluye que $X \in \omega$; probándose (b).

(c) Es consecuencia inmediata de la primera igualdad de (b). $\square$

Lema 2.2.19 *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos, $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *una sucesión F-exacta en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces*

(a) $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(B) \leq \max\{\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(A), \mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(C)\}$,

(b) $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(A) \leq \max\{\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(B), \mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(C)+1\}$,

(c) $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(C) \leq \max\{\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(B), \mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(A)-1\}$.

Demostración. La demostración es análoga al caso clásico. $\square$

Proposición 2.2.20 [3, 3.6] *Sean $\omega \subseteq \mathcal{X}$ clases de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *con $\mathcal{X}$ cerrada por F-extensiones y ω un F-cogenerador relativo y $(\mathcal{X}, F)$-inyectivo en $\mathcal{X}$ con ω cerrado por sumandos directos. Entonces,*

$$\omega^{(\wedge,F)} = \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty} \cap \mathcal{X}^{(\wedge,F)}.$$

Demostración. Sea $C \in \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty} \cap \mathcal{X}^{(\wedge,F)}$. Por 2.2.17, existe una sucesión F-exacta $\eta:\quad 0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0$ con $Y_C \in \omega^{(\wedge,F)}$ y $X_C \in \mathcal{X}$. Veamos que $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(X_C) = 0$. En efecto, $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(C) = 0$ pues $C \in \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty}$, y $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(Y_C) = 0$ por 2.2.18(a). Luego de 2.2.19(a) concluimos que $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(X_C) = 0$. Luego, por 2.2.18(b), tenemos que $X_C \in \omega$. Por lo tanto, de la F-sucesión η, concluimos que $C \in \omega^{(\wedge,F)}$.
Sea $C \in \omega^{(\wedge,F)} \subseteq \mathcal{X}^{(\wedge,F)}$. Por 2.2.18(a), tenemos que $\mathrm{id}_{(\mathcal{X},F)}(C) = 0$. Luego $C \in \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty} \cap \mathcal{X}^{(\wedge,F)}$; probándose que $\omega^{(\wedge,F)} = \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty} \cap \mathcal{X}^{(\wedge,F)}$. $\square$

Proposición 2.2.21 [8, 2.4] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos, $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerrada por F-extensiones y $\omega \subseteq \mathcal{X}$ un F-cogenerador relativo y $(\mathcal{X}, F)$-inyectivo en $\mathcal{X}$, con ω cerrado por sumandos directos. Si $\mathcal{X}^{(\wedge,F)} = \mathrm{mod}(\Lambda)$ entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{X}$ es F-precubriente especial en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(b) $\omega^{(\wedge,F)}$ es F-preenvolvente especial en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

(c) $\mathcal{X}^{{}_F\perp_1} = \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty} = \omega^{(\wedge,F)}$ si $\mathcal{X}$ es F-resolvente.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{X}^{(\wedge,F)} = \mathrm{mod}(\Lambda)$.

(a) y (b) Se siguen de 2.2.17.

(c) Supongamos que $\mathcal{X}$ es F-resolvente. Luego, por 2.2.9 se tiene que $\mathcal{X}^{{}_F\perp_1} = \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty}$. Por otro lado, de 2.2.20 se sigue que $\omega^{(\wedge,F)} = \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty} \cap \mathcal{X}^{(\wedge,F)} = \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty} \cap \mathrm{mod}(\Lambda) = \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty}$. $\square$

Lema 2.2.22 *Sean F con suficientes proyectivos y $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ clases de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *tales que* $\mathrm{pd}_{(\mathcal{X},F)}(\mathcal{Y}) = 0$. *Entonces, para cualquier sucesión F-exacta en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{f_n} Y_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{f_2} Y_1 \xrightarrow{f_1} Y_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

con $Y_i \in \mathcal{Y}$, existe un isomorfismo funtorial

$$\mathrm{Ext}^k_F(Z_n, -) \mid_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}^{k+n}_F(M, -) \mid_{\mathcal{X}} \text{ , } \forall\, k > 0.$$

Demostración. Análogo al caso clásico. □

Notación 2.2.23 *Sea F un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$ *con suficientes proyectivos e inyectivos. Tenemos la siguiente clase* $\mathcal{I}^n(F) := \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid \mathrm{id}_F(M) := \mathrm{coresdim}_{(\mathcal{I}(F),F)}(M) \leq n\}$.

Lema 2.2.24 *Sea F con suficientes proyectivos e inyectivos. Entonces* $\mathrm{id}_F(Y) \leq n$ *si y sólo si* $\mathrm{Ext}^i_F(C, Y) = 0$, $\forall\, i > n$ *y* $\forall\, C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Sea $m := \mathrm{id}_F(Y) \leq n$, por lo tanto, existe una sucesión F-exacta

$$\mathfrak{I}_Y : \quad 0 \xrightarrow{g_{-1}} Y \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} \cdots \xrightarrow{g_{m-1}} I_{m-1} \xrightarrow{g_m} I_m \longrightarrow 0,$$

con $I_i \in \mathcal{I}(F)$. Como F tiene suficientes proyectivos e inyectivos, tenemos que $F(C,-) = \mathrm{Ext}^1_F(C,-)$, por lo tanto por 1.1.16, tenemos que $I \in \mathcal{I}(F)$ si y sólo si $\mathrm{Ext}^1_F(C, I) = 0$ $\forall C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por 1.2.2 tenemos que la definición de $\mathrm{Ext}^1_F(C,-)$ no depende de la resolución F-inyectiva tomada. Por lo tanto, considerando la siguiente resolución F-inyectiva de $I \in \mathcal{I}(F)$

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow I \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

tenemos que $\mathrm{Ext}^1_F(C, I) = 0$, $\forall\, i > 0$ y $\forall\, C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. De esta manera se tiene que $\mathrm{id}_{(\mathrm{mod}(\Lambda),F)}(\mathcal{I}(F)) = 0$. Luego, por el dual de 2.2.22, tenemos que $\mathrm{Ext}^k_F(-, I_m)|_{\mathrm{mod}(\Lambda)} \simeq \mathrm{Ext}^{k+n}_F(-, Y)|_{\mathrm{mod}(\Lambda)}$. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^i_F(C, Y) = 0$ $\forall\, i > n$ pues $\mathrm{Ext}^k_F(C, I_m) = 0$, $\forall k > 0$ (ya que $I_m \in \mathcal{I}(F)$).
($\Longleftarrow$) Sea $\mathfrak{I}_Y : \quad 0 \xrightarrow{g_{-1}} Y \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} \cdots \xrightarrow{g_{m-1}} I_{m-1} \xrightarrow{g_m} I_m \longrightarrow \cdots,$ una resolución F-inyectiva minimal de Y. Consideremos $K = \Omega^{-n}_F(Y)$, luego por el dual de 2.2.22, tenemos que $\mathrm{Ext}^k_F(C, K) \simeq \mathrm{Ext}^{n+k}_F(C, Y) = 0$ si $k > 0$, $\forall\, C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_F(C, K) = F(C, K) = 0$, $\forall\, C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y entonces $K \in \mathcal{I}(F)$. De donde concluimos que $\mathrm{id}_F(Y) \leq n$. □

Teorema 2.2.25 [8, 2.5] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos, $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *que es F-resolvente, F-precubriente y cerrada por sumandos directos. Entonces,* $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(\mathrm{mod}(\Lambda)) \leq n$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$ *si y sólo si* $\mathcal{X}^{F\perp_1} \subseteq \mathcal{I}^n(F)$.

Demostración. Sea $\mathcal{Y} := \mathcal{X}^{{}_F\perp_1}$. Por 2.2.10 (a), sabemos que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de F-cotorsión, F-hereditario y F-completo en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.
$(\Longrightarrow)$ Supongamos que $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(\mathrm{mod}(\Lambda)) \leq n$. Entonces, para $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, existe una sucesión F-exacta $0 \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \dots X_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$ con $X_i \in \mathcal{X},\ \forall\, i$. Como $\mathrm{Ext}^i_F(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$, se tiene que $\mathrm{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{X}) = 0$. Luego, por 2.2.22, tenemos que $\mathrm{Ext}^{k+n}_F(C, Y) \simeq \mathrm{Ext}^k_F(X_n, Y) = 0\ \forall k > 0,\ \forall Y \in \mathcal{Y}$, es decir, $\mathrm{Ext}^i_F(-, Y)|_{\mathrm{mod}(\Lambda)} = 0,\ \forall i > n$. Luego, por 2.2.24, tenemos que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{I}^n(F)$.
$(\Longleftarrow)$ Supongamos que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{I}^n(F)$. Por 2.2.24, tenemos que $\mathrm{Ext}^i_F(-, Y)|_{\mathrm{mod}(\Lambda)} = 0,\ \forall\, i > n,\ \forall\, Y \in \mathcal{Y}$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada por sumandos, F-resolvente y F-preenvolvente, se sigue de 2.2.9, que $\mathcal{X} = {}^{{}_F\perp_\infty}\mathcal{Y}$. Sea $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Dado que F tiene suficientes proyectivos, existe una resolución F-proyectiva minimal de C (no necesariamente finita)

$$\mathfrak{P}_C : \quad \cdots \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} C \xrightarrow{f_{-1}} 0,$$

con $P_i \in \mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{X}$ pues $\mathcal{X}$ es F-resolvente. Dado que $\mathrm{pd}_{(\mathcal{Y},F)}(\mathcal{P}(F)) = 0$, por el dual de 2.2.22, tenemos que $\mathrm{Ext}^k_F(\Omega^n_F(C), Y) \simeq \mathrm{Ext}^{k+n}_F(C, Y)\ \ \forall k > 0$, $\forall Y \in \mathcal{Y}$. Ahora bien, como $\mathrm{Ext}^i_F(-, Y)|_{\mathrm{mod}(\Lambda)} = 0,\ \forall\, i > n,\ \forall\, Y \in \mathcal{Y}$, tenemos que $\mathrm{Ext}^k_F(\Omega^n_F(C), Y) = 0\ \forall\, k > 0$. Por lo tanto $\Omega^n_F(C) \in \mathcal{X}$ pues $\mathcal{X} = {}^{{}_F\perp_\infty}\mathcal{Y}$. Luego, de la sucesión $\mathfrak{P}_C$, tenemos que $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X},F)}(\mathrm{mod}(\Lambda)) \leq n < \infty$. $\square$

Lema 2.2.26 [8, 2.6] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{X}$ una clase de objetos F-resolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Si* $0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{\varphi_C} C \longrightarrow 0$ *es una $(\mathcal{X}, F)$-cubierta de C, entonces $Y_C \in \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty}$.*

Demostración. Por 1.4.6 y 2.2.9, tenemos que $Y_C \in \mathcal{X}^{{}_F\perp_1} = \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty}$. $\square$

Proposición 2.2.27 [8, 2.7] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{X}$ una clase de objetos F-resolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Consideremos el siguiente diagrama F-exacto en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & Y_1 \arrow[d] & & Y_3 \arrow[d] & \\
 & X_1 \arrow[d, "f_1"] & & X_3 \arrow[d, "f_3"] & \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0, &
\end{tikzcd}$$

con $X_1, X_3 \in \mathcal{X}$ y $Y_1, Y_3 \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$. Entonces, el diagrama anterior se puede completar al siguiente diagrama conmutativo y F-exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *(es decir, todas las sucesiones son F-exactas)*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d] & Y_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0, &
\end{tikzcd}$$

con $X_2 \in \mathcal{X}$ y $Y_2 \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & Y_3 \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y_3 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\eta_\alpha :\ 0 \longrightarrow Y_3 \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} C_2 \longrightarrow 0$ es F-exacta, pues es el pullback de una sucesión F-exacta. Análogamente, se tiene que $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow E \longrightarrow X_3 \longrightarrow 0$ es F-exacta.
De la sucesión F-exacta $\eta_{f_1} : 0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} C_1 \longrightarrow 0$ obtenemos que $\mathrm{Ext}^1_F(X_3, f_1) : \mathrm{Ext}^1_F(X_3, X_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(X_3, C_1)$ es un isomorfismo pues $Y_1 \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$ y $X_3 \in \mathcal{X}$. Usando dicho isomorfismo, se tiene una sucesión F-exacta $\xi : 0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow 0$ tal que el siguiente diagrama es

conmutativo y exacto en mod(Λ)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Y_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & X_3 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que dicho diagrama es F-exacto. Para lo cual, falta ver que la sucesión $\eta_\beta : 0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\beta} E \longrightarrow 0$ es F-exacta; lo cual se sigue de 2.2.16, pues η_{f_1} y ξ lo son. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en mod(Λ)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Y_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[r, "\alpha\beta"] \arrow[d, "\beta"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Como η_α y η_β son F-exactas, por 2.2.16 (b), tenemos que $\eta_{\alpha\beta} : 0 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\alpha\beta} C_2 \longrightarrow 0$ es F-exacta. Por otro lado, $0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow Y_3 \longrightarrow 0$ es F-exacta, pues es pullback de η_β. Luego el diagrama anterior es F-exacto. Por lo tanto, haciendo $f_2 := \alpha\beta$, los tres diagramas F-exactos anteriores se pueden ensamblar para tener el siguiente diagrama conmutativo y F-exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d] & Y_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^{_F\perp_\infty}$ son cerradas por F-extensiones, entonces $X_2 \in \mathcal{X}$ y $Y_2 \in \mathcal{X}^{_F\perp_\infty}$. $\square$

Lema 2.2.28 *Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ clases de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $F = F_{\mathcal{Y}}$. *Supongamos que la sucesión* $\eta : 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\psi) \longrightarrow X \xrightarrow{\psi} M \oplus M' \longrightarrow 0$, *con* $\psi := \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ *y* $X \in \mathcal{X}$, *es F-exacta. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) La sucesión $\eta' :\ 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *es F-exacta.*

(b) Si η es una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta entonces η' es una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta.

Demostración.

(a) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{Ker}(\psi) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\psi) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \oplus M' \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Luego, como el segundo renglón y la segunda columna son F-exactos y $F = F_{\mathcal{X}}$, por 3.2.30 (b) tenemos que la siguiente sucesión es F-exacta

$$\eta' : \ 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

(b) Como η es una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta, entonces η es G-exacta con $G := F_{\mathcal{X}}$. Luego por (a), tenemos que η' es G-exacto, es decir η' es una $\mathcal{X}$-precubierta. Por (a), η' es F-exacto. Por lo tanto, η' es una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta. $\square$

Proposición 2.2.29 [8, 2.8] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, la cual es cerrada por sumandos directos y F-resolvente. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) La clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *que admiten una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta es cerrada por F-extensiones.*

(b) Supongamos que $\mathrm{mod}(\Lambda) = \overline{\mathrm{Ext}}_F(\{M_1, \ldots, M_n\})$*. Entonces, $\mathcal{X}$ es $(\mathcal{X}, F)$-precubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si y sólo si cada M_i tiene una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta para $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración.

(a) Sea $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow 0$ una sucesión F-exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $f_i : X_i \longrightarrow C_i$ es una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta de C_i con $i = 1, 3$. Dado que $\mathcal{X}$ es cerrada por sumandos directos, podemos asumir que $f_i : X_i \longrightarrow C_i$ es minimal, es decir, una $(\mathcal{X}, F)$ -cubierta para $i = 1, 3$. Luego, de 2.2.26, se obtiene el siguiente diagrama F-exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & Y_1 \arrow[d] & & Y_3 \arrow[d] & \\
 & X_1 \arrow[d, "f_1"] & & X_3 \arrow[d, "f_3"] & \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0, &
\end{tikzcd}$$

con $Y_i \in \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty}$ y $X_i \in \mathcal{X}$ para $i = 1, 3$. Por 2.2.27, existe una sucesión F-exacta $0 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow X_2 \xrightarrow{f_2} C_2 \longrightarrow 0$ con $Y_2 \in \mathcal{X}^{{}_F\perp_\infty}$ y $X_2 \in \mathcal{X}$.

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, -)$, con $X \in \mathcal{X}$, a la sucesión anterior se tiene la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(X, X_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(X, C_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(X, Y_2).$$

Como $Y_2 \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$ se tiene que $\mathrm{Ext}^1_F(X, Y_2) = 0$. Por lo tanto f_2 es una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta de C_2.

(b) Supongamos que $\mathrm{mod}(\Lambda) = \overline{\mathrm{Ext}}_F(\{M_1, \ldots, M_n\})$.
($\Longrightarrow$). Es trivial.
($\Longleftarrow$) Supongamos que M_i tiene una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta para $i = 1, \ldots, n$. Por (a), es fácil ver que si $M \in \mathrm{Ext}_F(\{M_1, \ldots M_n\}) = \mathscr{F}_F(\{M_1, \ldots M_n\})$, entonces M tiene una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta. Sea $M \in \overline{\mathrm{Ext}}_F(\{M_1, \ldots M_n\} = \mathrm{mod}(\Lambda)$. Luego, por 1.4.12, tenemos que existe $M' \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $M \oplus M' \in \mathscr{F}_F(\{M_1, \ldots M_n\})$. Por lo tanto, existe una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta de $M \oplus M'$, $\eta :\ 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\psi) \longrightarrow X \xrightarrow{\psi} M \oplus M' \longrightarrow 0$ con $\psi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Como $F = F_{\mathcal{P}(F)}$, pues F tiene suficientes proyectivos se tiene por 2.2.28 (b) que $\eta' : 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta de M. Por lo tanto, $\mathcal{X}$ es $(\mathcal{X}, F)$-precubriente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. $\square$

Teorema 2.2.30 [8, 2.9] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ la cual es cerrada por sumandos directos, F-resolvente y F-precubriente. Si existe una clase de objetos $\mathcal{C} := \{M_1, M_2, \ldots M_n\}$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $\mathrm{mod}(\Lambda) = \overline{\mathrm{Ext}}_F(\mathcal{C})$ y $f_i : X_i \longrightarrow M_i$ es una $(\mathcal{X}, F)$-cubierta para cada M_i, entonces las siguientes condiciones se satisfacen, donde $\mathscr{B} := \mathrm{Ext}_F(\{X_1, X_2, \ldots X_n\})$.*

(a) $\forall\, M \in \mathrm{Ext}_F(\mathcal{C})$ existe una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con $Y \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$ y $X \in \mathcal{B}$.

(b) $\forall\, M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ existe una $(\mathcal{X}, F)$-cubierta

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con $Y \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$ y $X \in \mathrm{add}(\mathcal{B})$.

(c) $\mathcal{X} = \mathrm{add}(\mathscr{B})$.

Demostración. Recordemos que $\mathrm{Ext}_F(\mathcal{Z}) = \mathscr{F}_F(\mathcal{Z})$ para toda clase de objetos $\mathcal{Z}$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ (ver 1.4.10).

(a) Sea $M \in \mathrm{Ext}_F(\mathcal{C})$. La prueba se hará por inducción sobre la longitud $\ell_F(M)$ de M. Si $\ell_F(M) = 1$, podemos suponer que $M = M_j$ para algún j. Luego, por hipótesis, tenemos una $(\mathcal{X}, F)$-cubierta $\eta : 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_j) \longrightarrow$

$X_j \xrightarrow{f_j} M_j \longrightarrow 0$ tal que $\mathrm{Ker}(f_j) \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$ (ver 2.1.3). En tal caso, la sucesión buscada es η pues $X_j \in \mathscr{B}$.
Sea $\ell_F(M) = m > 1$. Luego, existe una sucesión F-exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M_k \longrightarrow 0$$

con $\ell_F(M') = m-1$ para algún $M_k \in \mathcal{C}$. Por hipótesis de inducción, existe una sucesión F-exacta $0 \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \xrightarrow{f'} M' \longrightarrow 0$ con $Y' \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$ y $X' \in \mathscr{B}$. Consideremos el siguiente diagrama F-exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & Y' \arrow[d] & & Y_k \arrow[d] & \\
 & X' \arrow[d, "f'"] & & X_k \arrow[d, "f_k"] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & M_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0. &
\end{tikzcd}$$

Por 2.2.27, podemos completar el diagrama anterior al siguiente diagrama conmutativo y F-exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Y_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_k \arrow[r] \arrow[d, "f_k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & S_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0, &
\end{tikzcd}$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$. Dado que X', $X_k \in \mathscr{B}$ y $\mathscr{B}$ es cerrado por F-extensiones, se sigue que $X \in \mathscr{B}$. Por otro lado, como $Y \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$, se sigue que $0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ es una $(\mathcal{X}, F)$-cubierta de M.

(b) Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Como $\mathrm{mod}(\Lambda) = \overline{\mathrm{Ext}}_F(\mathcal{C})$, por 1.4.12, existe $M' \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $M \oplus M' \in \mathrm{Ext}_F(\mathcal{C})$. Luego por (a), existe una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \xrightarrow{\psi} M \oplus M' \longrightarrow 0$$

con $Y \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$, $X \in \mathscr{B}$ y $\psi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Luego, por 2.2.28, tenemos que $\eta' : 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una $(\mathcal{X}, F)$-precubierta de M. Luego por 2.1.4(b), existe una $(\mathcal{X}, F)$-cubierta $\xi : 0 \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow M \longrightarrow 0$ de M con X' sumando de $X \in \mathscr{B} \subseteq \mathcal{X}$, es decir $X' \in \mathrm{add}(\mathcal{B})$; y por 1.4.6 y 2.2.9, tenemos que $Y' \in \mathcal{X}^{F\perp_1} = \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$. Por lo tanto ξ es la sucesión buscada.

(c) Dado que $\mathcal{X}$ es cerrada por sumandos directos y F-extensiones, tenemos que $\mathrm{add}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{X}$ (ver 1.4.10 y 1.4.12).
Ahora veamos que $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{add}(\mathcal{B})$. Sea $M \in \mathcal{X}$. Por (b), se tiene una sucesión F-exacta $0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$ con $Y \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$ y $X \in \mathrm{add}(\mathcal{B})$. Por lo tanto, la sucesión anterior se escinde pues $Y \in \mathcal{X}^{F\perp_\infty}$ y $M \in \mathcal{X}$. Luego, M es un sumando directo de $X \in \mathrm{add}(\mathcal{B})$, por lo tanto $M \in \mathrm{add}(\mathcal{B})$. Probándose que $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{add}(\mathcal{B})$. $\square$

Lema 2.2.31 *(a) Sea* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(i) $\mathrm{pd}(C) \leq \sup\{\mathrm{pd}(B), \mathrm{pd}(A) + 1\}$ *y la igualdad se da si* $\mathrm{pd}(A) \neq \mathrm{pd}(B)$.

(ii) $\mathrm{pd}(A) \leq \sup\{\mathrm{pd}(B), \mathrm{pd}(C) - 1\}$ *y la igualdad se da si* $\mathrm{pd}(B) \neq \mathrm{pd}(C)$.

(iii) $\mathrm{pd}(B) \leq \sup\{\mathrm{pd}(A), \mathrm{pd}(C)\}$ *y la igualdad se da si* $\mathrm{pd}(C) \neq \mathrm{pd}(A) + 1$.

(b) Si $C = A \bigoplus B$ *entonces* $\mathrm{pd}(C) = \max\{\mathrm{pd}(A), \mathrm{pd}(B)\}$.

Demostración. Ver por ejemplo [60]. $\square$

Corolario 2.2.32 [8, 2.10] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *la cual es cerrada por sumandos directos, F-resolvente y F-precubriente. Supongamos que* $\mathrm{mod}(\Lambda) = \overline{\mathrm{Ext}}_F(\{M_1, M_2, \ldots M_n\})$, *y sea $f_i : X_i \longrightarrow M_i$ una $(\mathcal{X}, F)$-cubierta de M_i para $i = 1, \ldots, n$. Entonces*

(a) $\forall\, X \in \mathcal{X}$ $\mathrm{pd}(X) < \infty \Longleftrightarrow \forall\, i$ $\mathrm{pd}(X_i) < \infty$,

(b) $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \max\{\mathrm{pd}(X_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Demostración. Sea $\alpha := \max\{\mathrm{pd}(X_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$. Si $\alpha = \infty$, es claro que (a) y (b) se satisfacen. Supongamos que $\alpha < \infty$. Luego, es suficiente probar (b). Sea $\mathscr{B} := \mathscr{F}(X_1, X_2, \ldots, X_t)$. Por 2.2.30(c), sabemos que $\mathcal{X} = \mathrm{add}(\mathcal{B})$. Luego, de 2.2.31(b) se tiene que $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}(\mathscr{B})$.
Veamos que $\mathrm{pd}(\mathscr{B}) = \alpha$. En efecto, sea $M \in \mathscr{B}$. Luego existe una cadena $0 =$

$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$ tal que $M_{i+1}/M_i \simeq X_{j(i)}$ con $1 \leq j(i) \leq t$. Consideremos la sucesión F-exacta $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_2/M_1 \longrightarrow 0$ con $M_1 \simeq X_{j(1)}$ y $M_2/M_1 \simeq X_{j(2)}$. De 2.2.31(a) se sigue que $\mathrm{pd}(M_2) \leq \alpha$. Iterando éste proceso, se tiene que $\mathrm{pd}(M) \leq \alpha$; probándose que $\mathrm{pd}(\mathscr{B}) = \alpha$. $\square$

2.3. Objetos Inclinantes y Coinclinantes Relativos

Recordemos nuevamente, que F denotará un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$, donde Λ es una R-álgebra de artin.

Definición 2.3.1 *Sean $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y F con suficientes proyectivos e inyectivos. Decimos que T es* $\mathbf{F-}$**inclinante** *si satisface que: (a) $\mathrm{Ext}^i_F(T,T) = 0$, $\forall\, i > 0$, (b) $\mathrm{pd}_F(T) < \infty$ y (c) $\mathrm{coresdim}_{(\mathrm{add}(T),F)}(\mathcal{P}(F)) < \infty$.*
Dualmente, se dice que T es $\mathbf{F-}$**coinclinante** *si satisface: (a) $\mathrm{Ext}^i_F(T,T) = 0$, $\forall\, i > 0$, (b′) $\mathrm{id}_F(T) < \infty$ y (c′) $\mathrm{resdim}_{(\mathrm{add}(T),F)}(\mathcal{I}(F)) < \infty$.*

Definición 2.3.2 *Sea ω una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $\mathrm{id}_{(\omega,F)}(\omega) = 0$. Denotaremos por $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ a la clase de objetos $C \in {}^{F\perp_\infty}\omega$ tales que existe una sucesión F-exacta (posiblemente infinita) en $\mathrm{mod}(\Lambda)$*

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow T_0 \xrightarrow{f_0} T_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_n \xrightarrow{f_n} T_{n+1} \longrightarrow \cdots,$$

con $T_i \in \mathrm{add}(\omega)$ y $\mathrm{Im}(f_n) \in {}^{F\perp_\infty}\omega$ $\forall\, n \geq 0$.
Dualmente, definimos ${}_{(\omega,F)}\mathcal{X}$, como la clase de objetos $C \in \omega^{F\perp_\infty}$ tales que existe una sucesión F-exacta (posiblemente infinita) en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\cdots \longrightarrow T_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} T_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_1 \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} C \longrightarrow 0$$

con $T_i \in \mathrm{add}(\omega)$ y $\mathrm{Ker}(f_n) \in \omega^{F\perp_\infty}$ $\forall\, n \geq 0$.

Proposición 2.3.3 [8, 3.1] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y ω una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $\mathrm{id}_{(\omega,F)}(\omega) = 0$. Entonces, $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ es cerrada por F-extensiones, sumandos directos y nucleos de F-epimorfismos (esto es, si $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es F-exacta con B y $C \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$, entonces $A \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$).*

Demostración. Veamos que $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ es cerrada por F-extensiones. En efecto, sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ una sucesión F-exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ con A y $C \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$. Luego las sucesiones $\zeta :\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\xi} T_0 \longrightarrow L \longrightarrow 0$ y $\zeta' :\ 0 \longrightarrow C \xrightarrow{\epsilon} T'_0 \longrightarrow K \longrightarrow 0$ son F-exactas con T_0, $T'_0 \in \mathrm{add}(\omega)$

y L, $K \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$. Consideremos el siguiente diagrama F-exacto (pues es de pushout) en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\xi"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\xi'"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_0 \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & L \arrow[r, equal] \arrow[d] & L \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Como $C \in \mathcal{X}_{(\omega,F)} \subseteq {}^{\perp_\infty}_{F}\omega$, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_F(C, T_0) = 0$. Por lo tanto, la sucesión inferior del diagrama anterior se escinde, de donde obtenemos que $U \simeq T_0 \bigoplus C$. Del Lema de la Serpiente, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\xi'"] \arrow[d, equal] & T_0 \bigoplus C \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "I"] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\delta\xi'"] & T_0 \bigoplus T_0' \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

con $\delta = 1_{T_0} \bigoplus \epsilon$ y $T_0 \oplus T_0' \in \mathrm{add}(\omega)$ pues T_0 y $T_0' \in \mathrm{add}(\omega)$. Luego, el cuadrado I en el diagrama anterior es un pushout.

La sucesión $\Xi\ :\ 0 \longrightarrow T_0 \oplus C \xrightarrow{\delta} T_0 \oplus T_0' \longrightarrow K \longrightarrow 0$ es F-exacta pues es la suma directa de ζ' y la sucesión F-exacta $0 \longrightarrow T_0 \xrightarrow{1} T_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$. Considerando el diagrama anterior, por 2.2.16, tenemos que la siguiente sucesión $\Xi'\ :\ 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\delta\xi'} T_0 \oplus T_0' \longrightarrow V \longrightarrow 0$ es F-exacta, pues el primer renglón y la primera columna son F-exactas. También la siguiente sucesión $\Xi''\ :\ 0 \longrightarrow L \longrightarrow V \longrightarrow K \longrightarrow 0$ es F-exacta, pues es pushout de la

sucesión F-exacta Ξ. Luego, $V \in {}^{\perp_\infty}_{F}\omega$ ya que $L,\ K \in \mathcal{X}_{(\omega,F)} \subseteq {}^{\perp_\infty}_{F}\omega$ pues ${}^{\perp_\infty}_{F}\omega$ es cerrada por F-extensiones. Luego, Ξ' es el inicio de una $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$-coresolución de B.
Consideremos la sucesión F-exacta $\Xi'' :\ 0 \longrightarrow L \longrightarrow V \longrightarrow K \longrightarrow 0$. Como $L,\ K \in \mathcal{X}_{(\omega,F)} \subseteq {}^{\perp_\infty}_{F}\omega$, podemos repetir el proceso, es decir, podemos encontrar un monomorfismo $h : V \longrightarrow W$ con $W \in \operatorname{add}(\omega)$ y con cokernel en ${}^{\perp_\infty}_{F}\omega$. Prosiguiendo así, se construye la sucesión F-exacta deseada. Luego, $B \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$, probándose que $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ es cerrada por F-extensiones.

Antes de probar las dos propiedades de $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ que nos faltan, consideremos la siguiente situación. Sea $\eta :\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una sucesión F-exacta en $\operatorname{mod}(\Lambda)$ con $B \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$.

Luego, existe una sucesión F-exacta $\eta' :\ 0 \longrightarrow B \longrightarrow T_0 \xrightarrow{\lambda''} E \longrightarrow 0$ con $T_0 \in \operatorname{add}(\omega)$ y $E \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$. Por lo tanto, se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\operatorname{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & T_0 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d, "\lambda'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & T_0 \arrow[r, "\lambda''"] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & C \arrow[d] & 0 & 0 & \\
 & 0. & & &
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Veamos que la sucesión $\Gamma :\ 0 \longrightarrow C' \longrightarrow K \xrightarrow{\lambda'} E \longrightarrow 0$ es F-exacta. En efecto, como F tiene suficientes proyectivos e inyectivos, entonces $F = F_{\mathcal{P}(F)}$. Sea $g : P \longrightarrow E$ con $P \in \mathcal{P}(F)$. Como η' es F-exacta, existe $g' : P \longrightarrow T_0$ tal que $g = \lambda'' g' = \lambda'(\lambda g')$. Por lo tanto Γ es F-exacta. Análogamente, se prueba que $\Gamma' :\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow T_0 \longrightarrow K \longrightarrow 0$ es F-exacta. Por otro lado, por el Lema de la Serpiente, se tiene que $C \simeq C'$.
Ahora, veamos que $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ es cerrada por nucleos de F-epimorfismos. En efecto, si en la situación anterior también tenemos que $C \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$, entonces $C' \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$ pues $C \simeq C'$. Luego, se sigue que $K \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$ pues $C', E \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$, Γ es F-exacta y $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ es cerrada por F-extensiones. Por lo tanto, en la sucesión F-exacta Γ' se tiene que $T_0 \in \operatorname{add}(\omega)$ y $K \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$. Entonces, tenemos que $A \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$,

probándose que $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ es cerrada por nucleos de F-epimorfismos.
Finalmente, veamos que $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ es cerrada por sumandos directos. En efecto, supongamos que en la situación anterior, la sucesión F-exacta η, con $B \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$, se escinde. La sucesión $0 \longrightarrow A \bigoplus C \longrightarrow A \bigoplus K \longrightarrow E \longrightarrow 0$ es F-exacta, pues es suma directa de Γ y $0 \longrightarrow A \xrightarrow{1} A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ las cuales son F-exactas. Como $A \bigoplus C \simeq B \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$ y también $E \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$, se tiene que $A \bigoplus K \in \mathcal{X}_{(\omega,F)} \subseteq {}^{F\perp_\infty}\omega$. De donde $K \in {}^{F\perp_\infty}\omega$ pues ${}^{F\perp_\infty}\omega = \mathrm{add}({}^{F\perp_\infty}\omega)$. Se puede repetir éste proceso con K pues $A \bigoplus K \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$. Considerando la sucesión F-exacta Γ', concluimos que $A \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$; probándose que $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ es cerrada por sumandos directos. $\square$

Proposición 2.3.4 *Sea* $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces* $\mathrm{add}(T)$ *es cubriente y envolvente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Como Λ es una R-álgebra de artin, se tiene que $\Gamma = (\mathrm{End}(T))^{op}$ es una R-álgebra de artin. Consideremos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda T_\Gamma, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$. Probaremos solamente que $\mathrm{add}(T)$ es cubriente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$; para lo cual es suficiente ver que $\mathrm{add}(T)$ es precubriente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Sea $X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y sea $\{f_1, \ldots, f_r\}$ un conjunto generador de $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda T_\Gamma, X)$ como Γ-módulo. Veamos que $f := (f_1, \ldots, f_r) : T^r \longrightarrow X$ es una $\mathrm{add}(T)$-precubierta de X. En efecto, sea $g : C \longrightarrow X$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ con $C \in \mathrm{add}(T)$. Luego, existe $C' \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $C \bigoplus C' = T^n$ para alguna n. Sea $\pi_C : T^n = C \bigoplus C' \longrightarrow C$ la proyección natural, y consideremos $g\pi_C = (g'_1, \ldots, g'_n) : T^n \longrightarrow X$. Como $g'_j \in \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda T_\Gamma, X)$, se tiene que $g'_j = \sum_{i=1}^r f_i h_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$, con $h_{ij} : T \longrightarrow T$. Sea $H = (h_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{r\times n}(\mathrm{End}(T))$. Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T^n \arrow[r, "g\pi_C"] \arrow[d, "H"'] & X \\ T^r. \arrow[ur, "f=(f_1,\ldots,f_r)"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, considerando la inclusión canónica $i_C : C \longrightarrow C \bigoplus C' = T^n$ se tiene que $g = (g\pi_C)i_C = (fH)i_C = f(Hi_C)$. Esto prueba que $f := (f_1, \ldots, f_r) : T^r \longrightarrow X$ es una $\mathrm{add}(T)$-precubierta de X. Por lo tanto, $\mathrm{add}(T)$ es cubriente. $\square$

Proposición 2.3.5 *Sean* F *con suficientes proyectivos e inyectivos y* ω *una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerrada por sumandos directos y tal que* $\mathrm{id}_{(\omega,F)}(\omega) = 0$. *Si* $\mathcal{X}_{(\omega,F)}^{(\wedge,F)} = \mathrm{mod}(\Lambda)$ *entonces,* $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ *es* F*-resolvente,* F*-cubriente especial en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\mathcal{X}_{(\omega,F)}^{F\perp_\infty} = \omega^{(\wedge,F)}$.

Demostración. Por 2.3.3, sabemos que $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ es cerrada por F-extensiones, nucleos de F-epimorfismos y sumandos directos. Supongamos que $\mathcal{X}_{(\omega,F)}^{(\wedge,F)} = \mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, para todo proyectivo $P \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, existe una sucesión F-exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow X \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

con $X \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$. Luego como P proyectivo, tenemos que dicha sucesión exacta se escinde y por lo tanto P es un sumando directo de X, de donde $P \in \mathcal{X}_{(\omega,F)}$; obteniéndose que $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{X}_{(\omega,F)}$ y por lo tanto $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ es F-resolvente. Por definición de $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$, y del hecho que $\mathrm{add}(\omega) = \omega$, se ve que ω es un F-cogenerador relativo y $(\mathcal{X}_{(\omega,F)}, F)$-inyectivo en $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ (es decir, $\mathrm{Ext}^i_F(\mathcal{X}_{(\omega,F)}, \omega)$ $= 0$, $\forall\, i > 0$). Finalmente, por 2.2.21, se sigue que $\mathcal{X}_{(\omega,F)}$ es F-precubriente especial en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y que $\mathcal{X}_{(\omega,F)}^{{}_F\perp_\infty} = \omega^{(\wedge,F)}$. $\square$

Teorema 2.3.6 [8, 3.2] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y ω una clase de objetos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cerrada por F-extensiones, sumandos directos y tal que $\mathrm{id}_{(\omega,F)}(\omega) = 0$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ es F-coinclinante, entonces $\mathcal{X}_{(T,F)} = {}^{F\perp_\infty} T$.

(b) Si T es F-coinclinante, entonces $\mathcal{X}_{(T,F)}^{(\wedge,F)} = \mathrm{mod}(\Lambda)$ y se satisface que $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X}_{(T,F)},F)}(\mathrm{mod}(\Lambda)) \leq \mathrm{id}_F(T)$.

(c) Para cualquier Λ-módulo F-inclinante T, se tiene que la clase $(\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}$ es F-coresolvente, F-envolvente y $\mathrm{id}_F((\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}) \leq \mathrm{id}_F(T) < \infty$. Más aun, $(\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)} = \mathcal{X}_{(T,F)}^{{}_F\perp_\infty}$

Demostración.

(a) Sea $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ con T un F-coinclinante. En particular, se tiene por definición que $n := \mathrm{id}_F(T) < \infty$ y $\mathcal{X}_{(T,F)} \subseteq {}^{F\perp} T$.
Veamos que ${}^{F\perp_\infty}T \subseteq \mathcal{X}_{(T,F)}$. En efecto, sea $C \in {}^{F\perp_\infty}T$, como F tiene suficientes inyectivos, existe $\Xi : 0 \longrightarrow C \xrightarrow{\mu} I \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$ F-exacta con $I \in \mathcal{I}(F)$. Como $I \in (\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}$, existe una F-resolución finita

$$0 \longrightarrow T_n \xrightarrow{f_n} \cdots \longrightarrow T_1 \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} I \longrightarrow 0$$

con $T_i \in \mathrm{add}(T)$. Sea $\eta :\ 0 \longrightarrow L \longrightarrow T_0 \xrightarrow{f_0} I \longrightarrow 0$ la primera parte de esta sucesión F-exacta. Consideremos el siguiente diagrama de pullback en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\eta' : 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & T_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & C_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & C_0 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Luego η' es F-exacta pues es pullback de una F-exacta. Consideremos la sucesión F-exacta $0 \longrightarrow T_n \longrightarrow T_{n-1} \longrightarrow \mathrm{Im}(f_{n-1}) \longrightarrow 0$. Sea $X \in {}^{F\perp_\infty}T$; aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,-)$ a la sucesión anterior y utilizando la sucesión larga de homología relativa (ver 1.2.2 (d)) y que $T_i \in \mathrm{add}(T)$, se concluye que $\mathrm{Ext}^i_F(X, \mathrm{Im}(f_{n-1})) = 0$, $\forall i > 0$. Procediendo inductivamente, se tiene que $\mathrm{Ext}^i_F(X, \mathrm{Im}(f_1)) = \mathrm{Ext}^i_F(X, L) = 0$, $\forall i > 0$. Por lo tanto si $X = C$, tenemos que la sucesión F-exacta $\eta' : 0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0$ se escinde. Luego, existe $\gamma : C \longrightarrow E$ tal que $\beta\gamma = 1_C$. Entonces, se tiene un monomorfismo $\delta := \alpha\gamma : C \longrightarrow T_0$. Por 2.3.4, existe una $\mathrm{add}(T)$-preenvolvente $\xi : C \longrightarrow T'_0$ de C, así $h := \begin{pmatrix} \delta \\ \xi \end{pmatrix} : C \longrightarrow T_0 \bigoplus T'_0$ es también una $\mathrm{add}(T)$-preenvolvente de C. En efecto, sea $j : C \longrightarrow T'$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ con $T' \in \mathrm{add}(T)$. Entonces existe $\theta : T'_0 \longrightarrow T'$ tal que $j = \theta\xi$. Luego $j = \theta\xi = (\theta\pi_{T'_0})h$, donde $\pi_{T'_0} : T'_0 \bigoplus T_0 \longrightarrow T'_0$ es la proyección canónica; probándose que h es una $\mathrm{add}(T)$-preenvolvente de C. Por otro lado, h es un monomorfismo pues $\pi_{T_0}h = \delta$, δ es un monomorfismo y $\pi_{T_0} : T_0 \bigoplus T'_0 \longrightarrow T_0$ es la otra proyección canónica. Consideremos la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\xi : \ 0 \longrightarrow C \xrightarrow{h} T_0 \bigoplus T'_0 \longrightarrow \mathrm{Coker}(h) \longrightarrow 0 \ .$$

Veamos que ξ es F-exacta. En efecto, del diagrama de pullback anterior, tenemos que $\mu = f_0\alpha\gamma = f_0\delta$, por lo tanto, existe $f'_0 : \mathrm{Coker}(\delta) \longrightarrow C_0$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\Xi' : 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & T_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & \mathrm{Coker}(\delta) \arrow[r] \arrow[d, "f'_0"] & 0 \\
\Xi : 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\mu"] & I \arrow[r] & C_0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, Ξ' es F-exacta, pues es pullback de Ξ. Por otro lado, considerando el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
\xi : 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & T_0 \oplus T_0' \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{T_0}"] & \mathrm{Coker}(h) \arrow[r] \arrow[d, "k"] & 0 \\
\Xi' : 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\delta"] & T_0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\delta) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

con $h := \begin{pmatrix} \delta \\ \xi \end{pmatrix}$ y $\pi_{T_0} := (1,0)$, concluimos que ξ es F-exacta pues es pullback de una F-exacta. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,T)$ a la sucesión F-exacta ξ, se tiene la sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(T_0 \bigoplus T_0', T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(C,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(\mathrm{Coker}(h),T) \; .$$

Como h es una $\mathrm{add}(T)$-preenvolvente de C y $\mathrm{Ext}^1_F(T_0 \bigoplus T_0', T) = 0$, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_F(\mathrm{Coker}(h),T) = 0$. También se tiene la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^i_F(C,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_F(\mathrm{Coker}(h),T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_F(T_0 \bigoplus T_0', T) \; .$$

Como $\mathrm{Ext}^i_F(C,T) = 0 = \mathrm{Ext}^{i+1}_F(T_0 \bigoplus T_0', T)$ para $i > 0$, se concluye que $\mathrm{Coker}(h) \in {}^{F\perp_\infty}T$. Continuando con este proceso, se ve que $C \in \mathcal{X}_{(T,F)}$. Entonces ${}^{F\perp_\infty}T \subseteq \mathcal{X}_{(T,F)}$ y por lo tanto ${}^{F\perp_\infty}T = \mathcal{X}_{(T,F)}$.

(b) Sea $\omega = \mathrm{add}(T)$. Por definición, se ve que $\mathcal{X}_{(\omega,F)} = \mathcal{X}_{(T,F)}$. Luego, por (a) se tiene que $\mathcal{X}_{(\omega,F)} = \mathcal{X}_{(T,F)} = {}^{F\perp_\infty} T$.
Veamos que $\mathrm{mod}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X}^{(\wedge,F)}_{(T,F)}$. En efecto, como F tiene suficientes proyectivos, para $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ consideremos una resolución F-proyectiva minimal de C

$$\mathfrak{P}_C : \quad \cdots \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} C \longrightarrow 0.$$

Luego, por 2.2.3(a), $\mathrm{Ext}^{k+n}_F(C,T) = \mathrm{Ext}^k_F(\Omega^n_F(C),T)$, $\forall\, k > 0$, $\forall\, n \geq 0$. Haciendo $n := \mathrm{id}_F(T) < \infty$ se tiene que $\mathrm{Ext}^{k+n}_F(C,T) = 0$, $\forall\, k > 0$. De donde $\Omega^n_F(C) \in {}^{F\perp_\infty}T = \mathcal{X}_{(T,F)}$ y entonces $C \in \mathcal{X}^{(\wedge,F)}_{(T,F)}$ pues $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{X}_{(T,F)}$; probándose que $\mathcal{X}^{(\wedge,F)}_{(T,F)} = \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X}_{(T,F)},F)}(\mathrm{mod}(\Lambda)) \leq \mathrm{id}_F(T)$.

(c) Sea $\omega := \mathrm{add}(T)$, por (b) tenemos que $\mathcal{X}^{(\wedge,F)}_{(T,F)} = \mathrm{mod}(\Lambda)$. Luego, por 2.2.21, concluimos que $\mathcal{X}^{F\perp_1}_{(T,F)} = \mathcal{X}^{F\perp_\infty}_{(T,F)} = (\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}$. Por 2.3.5, $\mathcal{X}_{(T,F)}$ es F-precubriente y F-resolvente, entonces por 2.2.10 se tiene que $\mathcal{X}^{F\perp_1}_{(T,F)}$ es F-envolvente y F-coresolvente. Como $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X}_{(T,F)},F)}(\mathrm{mod}(\Lambda)) \leq \mathrm{id}_F(T) = n$, por 2.2.25, tenemos que $(\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)} \subseteq \mathcal{I}^n(F)$, probándose (c). $\square$

Lema 2.3.7 [8, 3.3] *Sean* $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $G = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda T_{\Gamma^{op}}) : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$ *y* $H = \mathrm{Hom}_\Gamma(-, {}_\Gamma T_{\Lambda^{op}}) : \mathrm{mod}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda)$ *son funtores adjuntos, es decir, existe un isomorfismo*

$$\varphi : \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(C, {}_\Gamma T_{\Lambda^{op}})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(C, \mathrm{Hom}_\Lambda(A, {}_\Lambda T_{\Gamma^{op}}))$$

funtorial en las variables A *y* C, *dado por* $\varphi(f)(c)(a) = f(a)(c)$, $\forall f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(C, {}_\Gamma T_{\Lambda^{op}}))$.

(b) Si T *es* F*-cotilting, entonces el funtor* $\mathrm{e}_T = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda T_{\Gamma^{op}}) : \mathcal{X}_{(T,F)} \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$ *es* F*-exacto, fiel y pleno.*

Demostración.

(a) Definamos $\psi : \mathrm{Hom}_\Gamma(C, \mathrm{Hom}_\Lambda(A, {}_\Lambda T_{\Gamma^{op}})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(C, {}_\Gamma T_{\Lambda^{op}}))$ dado por $\psi(g)(a)(c) = g(c)(a)$ para $g \in \mathrm{Hom}_\Gamma(C, \mathrm{Hom}_\Lambda(A, {}_\Lambda T_{\Gamma^{op}}))$.
Veamos que $\psi\varphi = 1$. En efecto, Sea $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(C, {}_\Gamma T_{\Lambda^{op}}))$. Luego $\psi(\varphi(f))(a)(c) = \varphi(f)(c)(a) = f(a)(c)$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. Por lo tanto, $\psi(\varphi(f)) = f$, es decir, $\psi\varphi = 1$. Análogamente se ve que $\varphi\psi = 1$.

(b) Sea $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una sucesión F-exacta con A, B $C \in \mathcal{X}_{(T,F)} = {}^{\perp_\infty}_F T$. Luego tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{e}_T(C) \longrightarrow \mathrm{e}_T(B) \longrightarrow \mathrm{e}_T(A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(C, T).$$

Pero $\mathrm{Ext}^1_F(C,T) = 0$, y por lo tanto e_F es F-exacto.
Veamos que e_T es fiel y pleno. Primero, usando que e_T es aditivo y que $\mathrm{e}_T(T) = \Gamma$, se puede ver que $\mathrm{e}_T = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, T) : \mathrm{Hom}_\Lambda(X, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{e}_T(Z), \mathrm{e}_T(X))$ es un isomorfismo $\forall X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\forall Z \in \mathrm{add}(T)$.
Sea $C \in \mathcal{X}_{(T,F)} = {}^{\perp_\infty}_F T$. Entonces, existe una sucesión F-exacta en $\mathcal{X}_{(T,F)}$

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow T_0 \xrightarrow{d} T_1 \longrightarrow \mathrm{Coker}(d) \longrightarrow 0$$

con $\mathrm{Im}(d)$, $\mathrm{Coker}(d) \in {}^{\perp_\infty}_F T$ y $T_0, T_1 \in \mathrm{add}(T)$. Luego, por ser e_T F-exacto, tenemos la siguiente sucesión exacta $0 \longrightarrow (\mathrm{Coker}(f), T) \longrightarrow (T_1, T) \longrightarrow (T_0, T) \longrightarrow (C, T) \longrightarrow 0$. Aplicando, $\mathrm{Hom}_\Gamma(-, \mathrm{Hom}_\Lambda(X, T))$ a esta sucesión, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & ((C,T),(X,T)) \arrow[r] & ((T_0,T),(X,T)) \arrow[r] & ((T_1,T),(X,T)) \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(X,C) \arrow[r] \arrow[u, "f_1"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(X,T_0) \arrow[r] \arrow[u, "f_2"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(X,T_1). \arrow[u, "f_3"]
\end{tikzcd}$$

Como f_2 y f_3 son isomorfismos, pues T_0, $T_1 \in \mathrm{add}(T)$, tenemos que f_1 es un isomorfismo $\forall X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\forall C \in \mathcal{X}_{(T,F)} = {}_F{}^{\perp_\infty}T$. Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,C) \simeq \mathrm{Hom}_\Gamma((C,T),(X,T))$, $\forall X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\forall C \in \mathcal{X}_{(T,F)} = {}_F{}^{\perp_\infty}T$. Por lo tanto, e_T es fiel y pleno. $\square$

Corolario 2.3.8 [8, 3.4] *Sean T un F-cotilting y $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)$. Entonces, la aplicación $\Upsilon : \Lambda \longrightarrow \mathrm{End}_\Gamma(T)$, dada por $\Upsilon(\lambda) := f_\lambda$, donde $f_\lambda(t) := \lambda t$, $\forall\, t \in T$, es un isomorfismo de álgebras de artin.*

Demostración. Como $\Lambda \in \mathcal{X}_{(T,F)} = {}_F{}^{\perp_\infty}T$, por 2.3.7(b), tenemos la siguiente cadena de isomorfismos como Λ-módulos a izquierda

$$ {}_\Lambda\Lambda \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,\Lambda) \xrightarrow{\mathrm{e}_T} \mathrm{Hom}_\Gamma((\Lambda,T),(\Lambda,T)) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Hom}_\Gamma({}_\Gamma T, {}_\Gamma T)\ . $$

Donde $\Phi(a)(\lambda) = \lambda a$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$, $\mathrm{e}_T(f)(g) = gf$, $\forall\, f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,\Lambda)$, $\forall\, g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,T)$; y el último isomorfismo, está dado por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,T) \arrow[r, "\mathrm{e}_{T(f)}"] \arrow[d, "H"', "\sim"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,T) \arrow[d, "H"', "\sim"] \\ {}_\Gamma T \arrow[r] & {}_\Gamma T, \end{tikzcd}$$

donde los mapeos verticales están dados por $g \mapsto g(1)$ para $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,T)$ y sus inversos por $t \mapsto g_t$ con $g_t(\lambda) = \lambda t$. Es decir, $\Psi(t) := (H\mathrm{e}_T(f)H^{-1})(t) = H\mathrm{e}_T(f)(H^{-1}(t)) = (H\mathrm{e}_T(f))(g_t) = H(g_t f) = (g_t f)(1)$. Por lo tanto el isomorfismo de Λ-módulos $\Upsilon := \Psi\mathrm{e}_T\Phi : \Lambda \longrightarrow \mathrm{End}_\Gamma({}_\Gamma T)$ está dado por $\Upsilon(\lambda)(t) = \Psi\mathrm{e}_T\Phi(\lambda)(t) = \Psi(\mathrm{e}_T(\Phi(\lambda)))(t) = (g_t(\Psi(\lambda)))(1) = g_t(\lambda) = \lambda t$. Definiendo $f_\lambda \in \mathrm{End}_\Gamma({}_\Gamma T)$ por $f_\lambda(t) = \lambda t$, $\forall\, t \in T$, tenemos que $f_\lambda = \Upsilon(\lambda)$. Es fácil ver que $\Upsilon(\lambda\lambda') = \Upsilon(\lambda)\Upsilon(\lambda')$, por lo tanto Υ es un isomorfismo de R-álgebras de artin. $\square$

Sea T un F-cotilting. Como ya vimos $\mathcal{X}_{(T,F)} = {}_F{}^{\perp_\infty}T$, y así $\mathcal{P}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X}_{(T,F)}$. Además, sabemos que

$$\mathrm{e}_T = \mathrm{Hom}_\Lambda(-,T) : \mathcal{X}_{(T,F)} \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$$

es fiel y pleno. Por lo tanto se tienen los isomorfismos

$$X \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,X) \simeq \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X,T),\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,T)) \simeq \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X,T),T)$$

$\forall X \in \mathcal{X}_{(T,F)}$. Lo cual muestra que se tiene la siguiente dualidad de categorías

$$\mathrm{e}_T = \mathrm{Hom}_\Lambda(-,T) : \mathcal{X}_{(T,F)} \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)},T),T).$$

Usando el siguiente resultado general, tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)},T) \subseteq \mathrm{mod}(\Gamma)$ y envolvente en $\mathrm{mod}(\Gamma)$. El siguiente resultado es dual a [4, 5.8].

Proposición 2.3.9 [8, 3.5] *Sean Λ y Γ R-álgebras de artin y (G, H) un par de funtores contravariantes adjuntos, donde $G : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$ y $H : \mathrm{mod}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda)$. Sean $\mathcal{Y} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\mathcal{Z} \subseteq \mathrm{mod}(\Gamma)$ tales que $G(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Z}$, $H(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{Y}$ y los morfismos naturales $\beta : 1_{\mathrm{mod}(\Lambda)} \longrightarrow HG$ y $\alpha : 1_{\mathrm{mod}(\Gamma)} \longrightarrow GH$ son isomorfismos cuando se restringen a $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ respectivamente.*

(a) Si $\mathcal{Y}$ es precubriente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, entonces $\mathcal{Z}$ es preenvolvente en $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

(b) Si $\mathcal{Z}$ es precubriente en $\mathrm{mod}(\Gamma)$, entonces $\mathcal{Y}$ es preenvolvente en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. $\square$

Observe que por 2.3.7, los funtores $G = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\Lambda T_{\Gamma^{op}}) : \mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$ y $H = \mathrm{Hom}_\Gamma(-, {}_\Gamma T_{\Lambda^{op}}) : \mathrm{mod}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda)$ son adjuntos que satisfacen las hipótesis de 2.3.9, para $\mathcal{Y} := \mathcal{X}_{(T,F)}$ y $\mathcal{Z} := \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)}, T)$.

Corolario 2.3.10 [8, 3.6] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y T un F-cotilting en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) La subcategoría $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)}, T) \subseteq \mathrm{mod}(\Gamma)$ es preenvolvente en $\mathrm{mod}(\Gamma)$. Los funtores G y H de arriba, inducen dualidades inversas entre $\mathcal{X}_{(T,F)}$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)}, T)$.

(b) La subcategoría $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(F), T)$ es preenvolvente en $\mathrm{mod}(\Gamma)$. Los funtores G y H de arriba inducen dualidades inversas entre $\mathcal{P}(F)$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(F), T)$.

Demostración. (a) Se sigue de 2.3.9 y 2.3.6. Ahora bien, como F tiene suficientes proyectivos, entonces $\mathcal{P}(F)$ es precubriente. Luego (b) se sigue de 2.3.9. $\square$

Proposición 2.3.11 [8, 3.7] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos, T un F-cotilting en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(T)$. Entonces*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(-, T) : \mathrm{Ext}^i_F(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(A, T), \mathrm{Hom}_\Lambda(C, T))$$

es un isomorfismo, $\forall\, A,\, C \in \mathcal{X}_{(T,F)}$ y funtorial en ambas variables.

Demostración. Sean $A,\, C \in \mathcal{X}_{(T,F)}$. Entonces existe una sucesión F-exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow T_0 \xrightarrow{d_0} T_1 \xrightarrow{f_1} T_2 \longrightarrow \cdots$$

donde $\mathrm{Im}(d_i) \in \mathcal{X}_{(T,F)} = {}^{\perp_\infty}_F T$. Por 2.3.7 (b), tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathfrak{P}_{(A,T)} : \ \cdots \longrightarrow (T_2, T) \longrightarrow (T_1, T) \longrightarrow (T_0, T) \longrightarrow (A, T) \longrightarrow 0.$$

Luego, $\mathfrak{P}_{(A,T)}$ es una resolución Γ-proyectiva de (A,T), pues $(T_i,T) \in \mathrm{add}(\Gamma)$. Aplicando $\mathrm{Hom}_\Gamma(-,(C,T))$ a dicha sucesión exacta, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo, donde los morfismos verticales son isomorfismos por 2.3.7

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & ((A,T),(C,T)) \arrow[r] & ((T_0,T),(C,T)) \arrow[r] & ((T_1,T),(C,T)) \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & (C,A) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & (C,T_0) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & (C,T_1) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde la cohomología del renglón superior es $\mathrm{Ext}^i_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,T),\mathrm{Hom}_\Lambda(C,T))$ y la cohomología del renglón inferior es $\mathrm{Ext}^i_F(C,A)$, obteniéndose el resultado deseado. Además, el isomorfismo es funtorial en ambas variables, puesto que el isomorfismo entre los grupos de homomorfismos es funtorial en ambas variables. $\square$

Lema 2.3.12 *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos y T un F-coinclinante en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *con* $\mathrm{id}_F(T) = r$ *y* $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(T)$. *Sea* $C \in \mathrm{mod}(\Gamma)$ *y* $\mathfrak{P}_{(C)}$ *una presentación proyectiva minimal de* C

$$\mathfrak{P}_{(C)} : \ (T_1,T) \xrightarrow{h} (T_0,T) \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

(a) Entonces existe una sucesión exacta $T_0 \xrightarrow{f_1} T_1 \xrightarrow{\beta_1} C_0 \longrightarrow 0$ *con* $\beta_1 = \mathrm{Coker}(f_1)$ *y tal que* $h = (f_1,T)$ *y* $\Omega^2_\Gamma(C) = (C_0,T)$.

(b) Si para $i \geq 2$, $C_{i-2} \xrightarrow{\alpha_i} T_i \xrightarrow{\beta_i} C_{i-1} \longrightarrow 0$ *es una familia de sucesiones exactas tal que* α_i *es una* $\mathrm{add}(T)$*-envolvente. Entonces, definiendo* $f_i := \alpha_i\beta_{i-1} : T_{i-1} \longrightarrow T_i$ *para* $i \geq 2$ *con* β_1 *el morfismo del inciso (a), tenemos una resolución proyectiva de* $\Omega^2_\Gamma(C)$.

Demostración.

(a) Consideremos la presentación proyectiva minimal de C

$$\mathfrak{P}_{(C)} : \ (T_1,T) \xrightarrow{h} (T_0,T) \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

con $T_i \in \mathrm{add}(T)$. Por 2.3.7(b), tenemos que $h = (f_1,T)$ con $f_1 : T_0 \longrightarrow T_1$. Luego, tenemos la siguiente sucesión exacta $T_0 \xrightarrow{f_1} T_1 \xrightarrow{\beta_1} C_0 \longrightarrow 0$ con $C_0 := \mathrm{Coker}(f_1)$. Luego, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (C_0,T) \longrightarrow (T_1,T) \longrightarrow (T_0,T)\ .$$

Por lo tanto $\Omega^2_\Gamma(C) = (C_0,T)$.

(b) Para $i \geq 2$, consideremos las siguientes sucesiones exactas

$$C_{i-2} \xrightarrow{\alpha_i} T_i \xrightarrow{\beta_i} C_{i-1} \longrightarrow 0,$$

donde $C_{i-1} := \mathrm{Coker}(\alpha_i)$ y α_i son add(T)-envolventes. Definiendo $f_i := \alpha_i\beta_{i-1} : T_{i-1} \longrightarrow T_i$ para $i \geq 2$, tenemos el siguiente complejo

$$C_0 \xrightarrow{\alpha_2} T_2 \xrightarrow{f_3} T_3 \xrightarrow{f_4} T_4 \xrightarrow{f_5} T_5 \longrightarrow \cdots .$$

Veamos que el siguiente complejo en mod(Γ) es exacto

$$\mathfrak{P}_{(C_0,T)} : \cdots \longrightarrow (T_4,T) \overset{(f_4,T)}{\longrightarrow} (T_3,T) \overset{(f_3,T)}{\longrightarrow} (T_2,T) \overset{(\alpha_2,T)}{\longrightarrow} (C_0,T) \longrightarrow 0.$$

En efecto, como $f_{i+1}f_i = 0$ tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(f_i,T)\mathrm{Hom}_\Lambda(f_{i+1},T) = 0$ y por lo tanto $\mathrm{Im}(f_{i+1},T) \subseteq \mathrm{Ker}(f_i,T)$. Veamos que $\mathrm{Ker}(f_i,T) \subseteq \mathrm{Im}(f_{i+1},T)$. Sea $\alpha \in \mathrm{Hom}_\Lambda(T_i,T)$ tal que $\alpha \in \mathrm{Ker}(f_i,T)$. Luego, tenemos que $\alpha\alpha_i\beta_{i-1} = 0$ y como β_{i-1} es un epimorfismo, tenemos que $\alpha\alpha_i = 0$. Pero $\beta_i = \mathrm{Coker}(\alpha_i)$, y así, existe $\gamma : C_{i-1} \longrightarrow T$ tal que $\gamma\beta_i = \alpha$. Por otro lado, como α_{i+1} es una add(T)-envolvente, tenemos que existe $\gamma' : T_{i+1} \longrightarrow T$ tal que $\gamma = \gamma'\alpha_{i+1}$. De donde, $\alpha = \gamma\beta_i = \gamma'\alpha_{i+1}\beta_i = \gamma' f_{i+1} \in \mathrm{Im}(f_{i+1},T)$. Como α_2 es una add(T)-envolvente, también se tiene la exactitud en el lugar (C_0,T). Como $(T_i,T) \in \mathrm{add}(\Gamma)$, tenemos que $\mathfrak{P}_{(C_0,T)}$ es una Γ-resolución proyectiva de $\Omega^2_\Gamma(C)$. $\square$

Proposición 2.3.13 [8, 3.8] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos, T un F-coinclinante en* mod(Λ) *con* $\mathrm{id}_F(T)) = r$ *y* $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(T)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $\mathrm{Ext}^i_\Gamma(C,(\mathcal{P}(F),T)) = 0$ *para* $0 < i < r+3$, *entonces* $C \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)},T)$.

(b) ${}^{\perp_\infty}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(F),T)) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)},T)$ *y* $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)},T) \subseteq \mathrm{mod}(\Gamma)$ *es resolvente.*

Demostración. (a) Sea $C \in \mathrm{mod}(\Gamma)$ tal que $\mathrm{Ext}^i_\Gamma(C,(\mathcal{P}(F),T)) = 0$ para $0 < i < r+3$. Consideremos una presentación proyectiva minimal de C

$$\mathfrak{P}_C : \ (T_1,T) \xrightarrow{h} (T_0,T) \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

con $T_i \in \mathrm{add}(T)$. Por 2.3.12(a), tenemos que $h = (f_1,T)$ con $f_1 : T_0 \longrightarrow T_1$ y $\Omega^2_\Gamma(C) = (C_0,T)$ con $C_0 := \mathrm{Coker}(f_1)$. Para $i \geq 2$, consideremos las siguientes sucesiones exactas

$$C_{i-2} \xrightarrow{\alpha_i} T_i \xrightarrow{\beta_i} C_{i-1} \longrightarrow 0$$

donde $C_{i-1} := \mathrm{Coker}(\alpha_i)$ y α_i son add(T)-envolventes. Definiendo $f_i := \alpha_i\beta_{i-1} : T_{i-1} \longrightarrow T_i$ para $i \geq 2$ con $\beta_1 = \mathrm{Coker}(f_1)$, tenemos por 2.3.12(b), una resolución Γ-proyectiva de $\Omega^2_\Gamma(C)$

$$\mathfrak{P}_{(C_0,T)} : \ \cdots \longrightarrow (T_4,T) \xrightarrow{(f_4,T)} (T_3,T) \xrightarrow{(f_3,T)} (T_2,T) \xrightarrow{(\alpha_2,T)} (C_0,T) \longrightarrow 0 .$$

Por lo tanto se tiene que la sucesión

$$\mathfrak{P}_C : \cdots \longrightarrow (T_3, T) \overset{(f_3,T)}{\longrightarrow} (T_2, T) \overset{(\alpha_2\beta_1,T)}{\longrightarrow} (T_1, T) \overset{(f_1,T)}{\longrightarrow} (T_0, T) \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

es una Γ-resolución proyectiva de C, pues $(T_i, T) \in \mathrm{add}(\Gamma)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Gamma(-, (P, T))$ a la sucesión $\mathfrak{P}_C$ con $P \in \mathcal{P}(F)$, tenemos por 2.3.7 el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (C,(P,T)) \arrow[r] & ((T_0,T),(P,T)) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & ((T_r,T),(P,T)) \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & (P,(C,T)) \arrow[r] \arrow[u] & (P,T_0) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & (P,T_r) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales son isomorfismos ya que P, $T_i \in {}^{F\perp_\infty}T$. Como $\mathrm{Hom}_\Gamma((f_n,T),(P,T)) : \mathrm{Hom}_\Gamma((T_{n-1},T),(P,T)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma((T_n,T),(P,T))$, por hipótesis tenemos que

$$\mathrm{Ext}^i_\Gamma(C,(P,T)) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_\Gamma((f_{i+1},T),(P,T)))}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_\Gamma((f_i,T),(P,T)))} = 0$$

para $0 < i < r+3$. Por lo tanto, la sucesión superior del diagrama anterior es exacta, hasta el lugar $r+2$. Luego, la sucesión inferior es exacta hasta el lugar $r+2$. Si $p : (P, T_{r+3}) \longrightarrow \mathrm{Coker}(P, f_{r+3})$ con $p := \mathrm{Coker}(f_{r+3})$, tenemos que $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(P, f_{r+3})$. Por lo tanto, tenemos la siguiente sucesión exacta $\forall\, P \in \mathcal{P}(F)$

$$0 \longrightarrow (P,(C,T)) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (P, T_{r+2}) \longrightarrow (P, T_{r+3}) \longrightarrow \mathrm{Coker}(P, f_{r+3}) \longrightarrow 0.$$

Si $P = \Lambda$, tenemos que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow (C,T) \xrightarrow{\lambda_0} T_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_{r+2} \xrightarrow{f_{r+3}} T_{r+3} \longrightarrow \mathrm{Coker}(f_{r+3}) \longrightarrow 0.$$

Como $f_i = \alpha_i\beta_{i-1}$ para $i \geq 2$ y β_{i-1} es un epimorfismo, entonces $\mathrm{Coker}(f_i) = \beta_i$ para $i \geq 2$ y también por la construcción $\beta_1 = \mathrm{Coker}(f_1)$. Sea $\beta_0 : T_0 \longrightarrow C_{-1}$ el cokernel de λ_0 y $C_{-2} := (C,T)$. Por lo tanto, para $0 \leq i \leq r+3$, tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow C_{i-2} \xrightarrow{\lambda_i} T_i \xrightarrow{\beta_i} C_{i-1} \longrightarrow 0$$

con $\lambda_i = \mathrm{Ker}(\beta_i)$. Veamos que para $2 \leq i \leq r+3$ se tiene que $\lambda_i = \alpha_i$. En efecto, como $\beta_i = \mathrm{Coker}(\alpha_i)$, basta ver que α_i es un monomorfismo. Como α_i es una $\mathrm{add}(T)$-envolvente, existe $\delta_i : T_i \longrightarrow T_i$ tal que $\lambda_i = \delta_i\alpha_i$. Por lo tanto α_i es un monomorfismo pues λ_i lo es. Luego, para $0 \leq i \leq r+3$ tenemos la siguientes sucesiones exactas

$$\eta_i :\ 0 \longrightarrow C_{i-2} \xrightarrow{\alpha_i} T_i \xrightarrow{\beta_i} C_{i-1} \longrightarrow 0,$$

con $\lambda_i = \alpha_i$ para $2 \leq i \leq r+3$. Veamos que η_i son F-exactas para $0 \leq i \leq r+1$. Como $F = F_{\mathcal{P}(F)}$, por 1.1.17, basta ver que

$$0 \longrightarrow (P, C_{i-2}) \longrightarrow (P, T_i) \longrightarrow (P, C_{i-1}) \longrightarrow 0$$

es exacta $\forall\, P \in \mathcal{P}(F)$. Veamos primero que η_{r+1} es F-exacta. Dado que $f_i = \alpha_i \beta_{i-1}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
(P,T_r) \arrow[rr, "(P,f_{r+1})"] \arrow[dr, "(P,\beta_r)"'] & & (P,T_{r+1}) \arrow[rr, "(P,f_{r+2})"] \arrow[dr, "(P,\beta_{r+1})"'] & & (P,T_{r+2}) \\
& (P,C_{r-1}) \arrow[ur, "(P,\alpha_{r+1})"] & & (P,C_r). \arrow[ur, "(P,\alpha_{r+2})"] &
\end{tikzcd}$$

Usando que $\operatorname{Ext}^{r+2}_{\Gamma}(C,(P,T)) = 0$ y (P,α_{r+3}) es un monomorfismo, tenemos que $\operatorname{Im}(P,f_{r+2}) = \operatorname{Ker}(P,f_{r+3}) = \operatorname{Ker}(P,\beta_{r+2}) = (P,C_r)$, por lo tanto (P,β_{r+1}) es un epimorfismo. Análogamente, se tiene que (P,β_r) es un epimorfismo. Entonces, del diagrama anterior, se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow (P, C_{r-1}) \longrightarrow (P, T_{r+1}) \longrightarrow (P, C_r) \longrightarrow 0$$

es exacta. Luego $\eta_r :\ 0 \longrightarrow C_{r-1} \xrightarrow{\alpha_r} T_{r+1} \xrightarrow{\beta_r} C_r \longrightarrow 0$ es exacta. De la misma forma se demuestra que η_i son F-exactas para $0 \leq i \leq r+1$. Como $\operatorname{add}(T)$ es cerrada por F-extensiones y α_i son envolventes, por 1.4.6, tenemos que $\operatorname{Ext}^i_F(C_i,T) = 0$ para $1 \leq i \leq r$. De las sucesiones F-exactas η_i, tenemos que $\operatorname{Ext}^j_F(C_{i-2},T) \simeq \operatorname{Ext}^{j+1}_F(C_{i-1},T)$ para $j \geq 1$. Por lo tanto, $\operatorname{Ext}^i_F(C_r,T) \simeq \operatorname{Ext}^1_F(C_{r+1-i},T)$ para $i \geq 1$. Como $1 \leq r+1-i \leq r$ si $0 < i < r+1$, se tiene que $\operatorname{Ext}^1_F(C_{r+1-i},T) = 0$ si $0 < i < r+1$. Por lo tanto $\operatorname{Ext}^i_F(C_r,T) = 0$ para $0 < i < r+1$. Por otro lado, como $\operatorname{id}_F(T) = 0$, tenemos que $\operatorname{Ext}^i_F(C_r,T) = 0$ para $i \geq r+1$. Por lo tanto $C_r \in {}^{F\perp_\infty}T = \mathcal{X}_{(T,F)}$. Por 2.3.6, $\mathcal{X}_{(T,F)}$ es F-resolvente y como C_r, $T_{r+1} \in \mathcal{X}_{(T,F)}$, tenemos que $C_i \in \mathcal{X}_{(T,F)}$ para $-2 \leq i \leq r$. Luego, $C_{-2} = (C,T) \in \mathcal{X}_{(T,F)}$ y también $C_{-1} \in \mathcal{X}_{(T,F)} = {}^{F\perp_\infty}\ T$, es decir, $\operatorname{Ext}^1_F(C_{-1},T) = 0$. Por lo tanto, de las sucesiones F-exactas, η_0 y η_1, tenemos las dos sucesiones exactas siguientes

$$0 \longrightarrow (C_{-1},T) \longrightarrow (T_0,T) \longrightarrow ((C,T),T) \longrightarrow 0\ ,$$

$$0 \longrightarrow (C_0,T) \longrightarrow (T_1,T) \longrightarrow (C_{-1},T) \longrightarrow 0.$$

De esta manera obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & (C_0,T) \arrow[r] & (T_1,T) \arrow[r, "(f_1,T)"] \arrow[d, equal] & (T_0,T) \arrow[r] \arrow[d, equal] & ((C,T),T) \arrow[r] & 0 \\
\mathfrak{P}_C : & & \cdots \arrow[r] & (T_1,T) \arrow[r] & (T_0,T) \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[u, "\Phi"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto Φ es un isomorfismo, es decir, $C \simeq (C,(C,T))$ y entonces $C \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)},T)$ pues $C \in \mathcal{X}_{(T,F)}$.

(b) Veamos que ${}^{\perp_\infty}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(F),T)) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)},T)$. En efecto, consideremos $(X,T) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)},T)$. Entonces, por 2.3.11, $\mathrm{Ext}^i_\Gamma((X,T),(P,T)) \simeq \mathrm{Ext}^i_F(P,X) = 0$ pues $P \in \mathcal{P}(F)$ y $P,X \in \mathcal{X}_{(T,F)}$. Luego $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)},T) \subseteq {}^{\perp_\infty}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(F),T))$. Veamos la otra contención. Sea $C \in {}^{\perp_\infty}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(F),T))$, por lo tanto $\mathrm{Ext}^i_\Gamma(C,(\mathcal{P}(F),T)) = 0$, $\forall\, i > 0$ y entonces por (a), tenemos que $C \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)},T)$. De lo anterior, se tiene que ${}^{\perp_\infty}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(F),T)) \subseteq \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)},T)$; probándose la igualdad. Por lo tanto, tenemos que la subcategoría ${}^{\perp_\infty}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(F),T)) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{X}_{(T,F)},T)$ es resolvente. $\square$

Lema 2.3.14 [8, 3.9] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos, T un F-coinclinante en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(T)$. *Entonces, la función*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_\Lambda(T,\omega) \otimes \mathrm{Hom}_\Lambda(X,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(X,\omega),$$

dada por $\Phi(f \otimes g) := fg$ *es un isomorfismo,* $\forall\, \omega \in (\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}$ *y* $\forall\, X \in \mathcal{X}_{(T,F)}$ *el cual es funtorial en ambas variables.*

Lema 2.3.15 [8, 3.10] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos, T un F-coinclinante y* $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(T)$ *con* $r = \mathrm{id}_F(T)$. *Entonces*

$$\mathrm{id}_\Gamma(\mathrm{D}(T,(\mathrm{add}(T)))^{(\wedge,F)}) \leq r.$$

En particular, $\mathrm{id}_\Gamma(T) \leq r$.

Lema 2.3.16 [8, 3.12] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos, T un F-coinclinante en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *con* $\mathrm{id}_F(T)) = r$ *y* $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(T)$. *Sea* $C_0 \in \mathrm{mod}(\Gamma)$ *tal que existe una sucesión exacta* $T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$ *con* $T_i \in \mathrm{add}(T)$. *Si* $\{\eta_i : C_{i-2} \xrightarrow{\alpha_i} T_i \xrightarrow{\beta_i} C_{i-1} \longrightarrow 0\}_{i\geq 2}$ *es una familia de sucesiones exactas tal que* α_i *es una* $\mathrm{add}(T)$*-envolvente, entonces*

(a) $C_0 \in \mathcal{X}_{(T,F)}$ *si* $\mathrm{id}_F(T) < 2$,

(b) $C_{r-2} \in \mathcal{X}_{(T,F)}$ *si* $\mathrm{id}_F(T) \geq 2$.

Proposición 2.3.17 [8, 3.11] *Sean F con suficientes proyectivos e inyectivos, T un F-coinclinante con* $r := \mathrm{id}_F(T)$ *y* $\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(T)$. *Entonces*

$$(\mathcal{X}_{(T,F)},T)^\wedge = \mathrm{mod}(\Gamma) \text{ y } \mathrm{resdim}_{(\mathcal{X}_{(T,F)},T)}(\mathrm{mod}(\Gamma)) \leq \max\{r,2\}.$$

Demostración. Sea $C \in \mathrm{mod}(\Gamma)$. Consideremos una presentación proyectiva minimal de C

$$\mathfrak{P}_C : (T_1,T) \xrightarrow{h} (T_0,T) \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

con $T_i \in \mathrm{add}(T)$. Por 2.3.12(a), tenemos que $h = (f_1,T)$ con $f_1 : T_0 \longrightarrow T_1$ y $\Omega^2_\Gamma(C) = (C_0,T)$ con $C_0 := \mathrm{Coker}(f_1)$.

Si $r = 0$, T es F-inyectivo y entonces $\mathrm{mod}(\Lambda) = {}^{F\perp_\infty} T = \mathcal{X}_{(T,F)}$. Luego de la sucesión $\mathfrak{P}_C$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (C_0, T) \longrightarrow (T_1, T) \longrightarrow (T_0, T) \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Como $\mathrm{mod}(\Lambda) = \mathcal{X}_{(T,F)}$, se tiene (C_0, T), (T_1, T), $(T_0, T) \in (\mathcal{X}_{(T,F)}, T)$. Por lo tanto, $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X}_{(T,F)},T)}(\mathrm{mod}(\Gamma)) \leq 2$ y en este caso ya acabamos.
Sea $r \geq 1$. Para $i \geq 2$, consideremos las siguientes sucesiones exactas

$$C_{i-2} \xrightarrow{\alpha_i} T_i \xrightarrow{\beta_i} C_{i-1} \longrightarrow 0,$$

donde $C_{i-1} := \mathrm{Coker}(\alpha_i)$ y α_i son $\mathrm{add}(T)$-envolventes. Definiendo $f_i := \alpha_i \beta_{i-1} : T_{i-1} \longrightarrow T_i$ para $i \geq 2$ con $\beta_1 = \mathrm{Coker}(f_1)$, tenemos por 2.3.12(b), una resolución Γ-proyectiva de $\Omega^2_\Gamma(C)$

$$\mathfrak{P}_{(C_0,T)} : \cdots \longrightarrow (T_4, T) \xrightarrow{(f_4,T)} (T_3, T) \xrightarrow{(f_3,T)} (T_2, T) \xrightarrow{(\alpha_2,T)} (C_0, T) \longrightarrow 0\ .$$

Por lo tanto se tiene que la sucesión

$$\mathfrak{P}_C : \cdots \longrightarrow (T_3, T) \overset{(f_3,T)}{\longrightarrow} (T_2, T) \overset{(f_2,T)}{\longrightarrow} (T_1, T) \overset{(f_1,T)}{\longrightarrow} (T_0, T) \longrightarrow C \overset{h}{\longrightarrow} 0,$$

es una Γ-resolución proyectiva de C pues $(T_i, T) \in \mathrm{add}(\Gamma)$. Como $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, T)$ es exacto a izquierda y β_{i-1} es un epimorfismo, se tiene que $\Omega^k_\Gamma(C) := \mathrm{Ker}(f_{k-1}, T)$ $\simeq (\mathrm{Coker}(f_{k-1}), T) \simeq (\mathrm{Coker}(\alpha_{k-1}), T) \simeq (C_{k-2}, T)$ para $k \geq 2$. Entonces, para $i \geq 1$, tenemos las sucesiones exactas

$$\eta_i :\ 0 \longrightarrow \Omega^i_\Gamma(C) \longrightarrow (T_{i-1}, T) \longrightarrow \Omega^{i-1}_\Gamma(C) \longrightarrow 0\ .$$

Sea $\omega \in (\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}$. Aplicando $\mathrm{Hom}_\Gamma(-, D(T,\omega))$ a η_i, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^j_\Gamma(\Omega^i_\Gamma(C), D(T,\omega)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{j+1}_\Gamma(\Omega^{i-1}_\Gamma(C), D(T,\omega)) \longrightarrow 0,$$

pues como (T_{i-1}, T) es Γ-proyectivo se tiene que $\mathrm{Ext}^j_\Gamma((T_{i-1}, T), D(T,\omega)) = \mathrm{Ext}^{j+1}_\Gamma((T_{i-1}, T), D(T,\omega)) = 0$. Por lo tanto se tiene que, $\forall\, j \geq 1$ y $\forall\, i \geq 1$, el isomorfismo $\mathrm{Ext}^j_\Gamma(\Omega^i_\Gamma(C), D(T,\omega)) \simeq \mathrm{Ext}^{j+1}_\Gamma(\Omega^{i-1}_\Gamma(C), D(T,\omega))$. Luego, tenemos que $\mathrm{Ext}^j_\Gamma(\Omega^i_\Gamma(C), D(T,\omega)) \simeq \mathrm{Ext}^{j+i}_\Gamma(\Omega^0_\Gamma(C), D(T,\omega)) \simeq \mathrm{Ext}^{j+i}_\Gamma(C, D(T,\omega))$. De donde

$$\mathrm{Ext}^1_\Gamma(\Omega^i_\Gamma(C), D(T,\omega)) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_\Gamma(C, D(T,\omega)).$$

Por 2.3.15, tenemos que $\mathrm{id}_\Gamma(\mathrm{D}(T,\omega)) \leq r$. Luego, si $i \geq r$, obtenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Gamma(\Omega^i_\Gamma(C), D(T,\omega)) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_\Gamma(C, D(T,\omega)) = 0$. Por lo tanto, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Gamma(-, D(T,\omega))$ a η_i, para $i \geq r+1$, tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$\xi : 0 \longrightarrow (\Omega^{i-1}_\Gamma(C), D(T,\omega)) \longrightarrow ((T_i, T), D(T,\omega)) \longrightarrow (\Omega^i_\Gamma(C), D(T,\omega)) \longrightarrow 0$$

para $i \geq r+1$. Entonces, para $i \geq r$, tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow (\Omega^i_\Gamma(C), D(T,\omega)) \longrightarrow ((T_i,T), D(T,\omega)) \longrightarrow ((T_{i+1},T), D(T,\omega)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow ((T_{i+2},T), D(T,\omega)) \longrightarrow \cdots$$

con

$$((\beta_i,T), D(T,\omega)) : (\Omega^i_\Gamma(C), D(T,\omega)) \longrightarrow ((T_i,T), D(T,\omega)) \quad \text{y}$$
$$((f_{i+i},T), D(T,\omega)) : ((T_i,T), D(T,\omega)) \longrightarrow ((T_{i+1},T), D(T,\omega)).$$

Por otro lado, tenemos que $B' := \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda T_\Gamma, {}_\Lambda\omega) \in \mathrm{mod}(\Gamma^{op})$ y si $C' := I_0(\mathrm{top}(R) \in \mathrm{mod(R)})$ es la envolvente inyectiva de top(R). Entonces, por adjunción (ver [60], pag 37), tenemos $\forall A' \in \mathrm{mod}(\Gamma)$ un isomorfismo funtorial

$$\tau : \mathrm{Hom}_R(B' \otimes_\Gamma A', C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(A', \mathrm{Hom}_R(B', C')).$$

Como $\Omega^i_\Gamma(C) \simeq (C_{i-2}, T)$ si $i \geq 2$. Entonces, por 2.3.14 y adjunción, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto para $i \geq r$ y $i \geq 2$,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\Omega^i_\Gamma(C), D(T,\omega)) \arrow[r] & ((T_i,T), D(T,\omega)) \arrow[r] & \cdots. \\
0 \arrow[r] & D((T,\omega) \otimes_\Gamma \Omega^i_\Gamma(C)) \arrow[r] \arrow[u] & D((T,\omega) \otimes_\Gamma (T_i,T)) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
0 \arrow[r] & D((C_{i-2},\omega)) \arrow[r] \arrow[u] & D((T_i,\omega)) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, si $i \geq \max\{r, 2\}$, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\Xi : \ \cdots \longrightarrow (T_{i+2},\omega) \xrightarrow{(f_{i+2},\omega)} (T_{i+1},\omega) \xrightarrow{(f_{i+1},\omega)} (T_i,\omega) \xrightarrow{(\alpha_i,\omega)} (C_{i-2},\omega) \longrightarrow 0.$$

Luego se obtiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
(T_{i+2},\omega) \arrow[rr, "(f_{i+2}{,}\omega)"] \arrow[dr, "(\alpha_{i+2}{,}\omega)"'] & & (T_{i+1},\omega) \arrow[rr, "(f_{i+1}{,}\omega)"] \arrow[dr, "(\alpha_{i+1}{,}\omega)"'] & & (T_i,\omega) \\
& (C_i,\omega) \arrow[ur, "(\beta_{i+1}{,}\omega)"] & & (C_{i-1},\omega). \arrow[ur, "(\beta_i{,}\omega)"] &
\end{tikzcd}$$

Como Ξ es exacta, tenemos que $\mathrm{Im}(f_{i+2},\omega) = \mathrm{Ker}(f_{i+1},\omega) = (\mathrm{Coker}(f_{i+1}),\omega) \simeq (\mathrm{Coker}(\alpha_{i+1}),\omega) \simeq (C_i,\omega)$ y entonces (α_{i+2},ω) es un epimorfismo. Por lo tanto, se obtienen las siguientes sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow (C_{i-1},\omega) \xrightarrow{(\beta_i,\omega)} (T_i,\omega) \xrightarrow{(\alpha_i,\omega)} (C_{i-2},\omega) \longrightarrow 0,$$

para $i \geq \max\{r,2\}$ y $\forall \omega \in (\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}$. Como T es un F-coinclinante, tenemos que $\mathcal{I}(F) \subseteq (\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}$. Por lo tanto

$$0 \longrightarrow (C_{i-1},I) \longrightarrow (T_i,I) \longrightarrow (C_{i-2},I) \longrightarrow 0$$

es exacta, $\forall\, I \in \mathcal{I}(F)$. Ahora bien, usando que F tiene suficientes inyectivos, por 1.1.17, tenemos que

$$\xi_i : \ 0 \longrightarrow C_{i-2} \longrightarrow T_i \longrightarrow C_{i-1} \longrightarrow 0$$

es F-exacta para $i \geq \max\{r, 2\}$. Por otro lado, dado que $(\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)} = (\mathcal{X}_{(T,F)})^{F\perp_\infty} = ({}^{F\perp_\infty}T)^{F\perp_\infty}$ y $T \in {}^{F\perp_\infty}T$, tenemos que $\mathrm{Ext}^j_F(T, \omega) = 0$, $\forall\, j \geq 1$, $\forall\, \omega \in (\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}$. Por lo tanto, aplicando $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \omega)$ a ξ_i, con $\omega \in (\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}$, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (C_{i-1}, \omega) \longrightarrow (T_i, \omega) \longrightarrow (C_{i-2}, \omega) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_F(C_{i-1}, \omega) \longrightarrow 0$$

pues $T_i \in \mathrm{add}(T)$. De donde se sigue que

$$\mathrm{Ext}^1_F(C_{i-1}, \omega) = 0, \quad \forall\, i \geq \max\{r, 2\}.$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \omega)$ a ξ_i, con $\omega \in (\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}$ y $i \geq \max\{r, 2\}$, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^j_F(T_i, \omega) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j_F(C_{i-2}, \omega) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{j+1}_F(C_{i-1}, \omega) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{j+1}_F(T_i, \omega).$$

Pero $\mathrm{Ext}^j_F(T_i, \omega) = \mathrm{Ext}^{j+1}_F(T_i, \omega) = 0$ pues $T_i \in \mathrm{add}(T)$. Por lo tanto, tenemos que $\mathrm{Ext}^j_F(C_{i-2}, \omega) \simeq \mathrm{Ext}^{j+1}_F(C_{i-1}, \omega)$ $\forall\, j \geq 1$, $\forall\, i \geq \max\{r, 2\}$.
Sea $m := \max\{r, 2\}$. Buscamos el mínimo n tal que $\mathrm{Ext}^j_F(C_n, \omega) = 0$ para $0 < j < r + 1$. Entonces $\mathrm{Ext}^j_F(C_n, \omega) \simeq \mathrm{Ext}^{j-1}_F(C_{n-1}, \omega) \simeq \mathrm{Ext}^1_F(C_{n-(j-1)}, \omega)$. De esta manera, se debe tener que $n \geq m + (j - 1)$ para $0 < j < r + 1$. Por lo tanto, el mínimo que cumple tales condiciones es $n = m + r - 1$. Luego, $\mathrm{Ext}^j_F(C_{m+r-1}, \omega) \simeq \mathrm{Ext}^1_F(C_{m+(r-j)}, \omega) = 0$ para $0 < j < r + 1$ y $\omega \in (\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}$. Por otro lado, por 2.3.6 (d), tenemos que $\mathrm{id}_F(\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)} \leq \mathrm{id}_F(T) = r$, y así, $\mathrm{Ext}^j_F(C_{m+r-1}, \omega) = 0$ para $j \geq r + 1$. Entonces, con todo lo hecho anteriormente, concluimos que

$$\mathrm{Ext}^j_F(C_{m+r-1}, \omega) = 0, \quad \forall\, j \geq 1 \quad \forall\, \omega \in (\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}.$$

Por lo que, $C_{m+r-1} \in {}^{F\perp_\infty}((\mathrm{add}(T))^{(\wedge,F)}) = \mathcal{X}_{(T,F)}$. Como $\mathrm{add}(T) \subseteq \mathcal{X}_{(T,F)}$, pues $\mathcal{X}_{(T,F)} = {}^{F\perp_\infty}T$, tenemos que en la sucesión F-exacta

$$\xi_{m+r} : \ 0 \longrightarrow C_{m+r-2} \longrightarrow T_{m+r} \longrightarrow C_{m+r-1} \longrightarrow 0$$

T_{m+r}, $C_{m+r-1} \in \mathcal{X}_{(T,F)}$. Luego, como $\mathcal{X}_{(T,F)}$ es F-resolvente, tenemos que $C_{m+r-2} \in \mathcal{X}_{(T,F)}$. Prosiguiendo de igual manera con las sucesiones F-exactas, ξ_i con $m \leq i \leq m + r$, concluimos que $C_{i-2} \in \mathcal{X}_{(T,F)}$ para $m \leq i \leq m + r$. Por lo tanto, $\Omega^i_\Gamma(C) = (C_{i-2}, T) \in (\mathcal{X}_{(T,F)}, T)$ si $m \leq i \leq m + r$. Por lo tanto, en la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (C_{m-2}, T) \longrightarrow (T_{m-1}, T) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (T_1, T) \longrightarrow (T_0, T) \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

tenemos que $(C_{m-2}, T) = \Omega^m_\Gamma(C) \in (\mathcal{X}_{(T,F)}, T)$ y como $T_i \in \mathcal{X}_{(T,F)} = {}^{F\perp_\infty}T$ también $(T_i, T) \in (\mathcal{X}_{(T,F)}, T)$. Concluyendo finalmente que $\mathrm{resdim}_{(\mathcal{X}_{(T,F)}, T)}(C) \leq m = \max\{r, 2\}$. $\square$

Capítulo 3
Categorías exactas

3.1. Preliminares

Durante todo este capítulo $\mathcal{A}$ denotará a una categoría aditiva cualquiera.

Definición 3.1.1 *Un par de morfismos (i,d) que se pueden componer* $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$ *en* $\mathcal{A}$*, es llamado* ***par exacto*** *si* i *es el kernel de* d *y* d *es el cokernel de* i*.*

Decimos que dos pares exactos (i,d), (i',d') son isomorfos, esto es $(i,d) \simeq (i',d')$, si existen isomorfismos $\alpha : X \longrightarrow X'$, $\beta : Y \longrightarrow Y'$ y $\gamma : Z \longrightarrow Z'$ en $\mathcal{A}$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[d, "\gamma"] \\ X' \arrow[r, "i'"] & Y' \arrow[r, "d'"] & Z'. \end{tikzcd}$$

Definición 3.1.2 *Sea* $\mathcal{E}$ *una clase de pares exactos* $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$*, la cual es cerrada por isomorfismos. Los morfismos* i *y* d *que aparecen en un par* (i,d) *en* $\mathcal{E}$ *son llamados una* ***inflación*** *y* ***deflación*** *de* $\mathcal{E}$*, respectivamente. Al par* $(i,d) \in \mathcal{E}$ *lo llamaremos* ***par*** $\mathcal{E}$***-exacto*** *o* ***conflación****. La clase* $\mathcal{E}$ *se dice que es una* ***estructura exacta*** *en* $\mathcal{A}$ *y el par* $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ *es una* ***categoría exacta*** *si los siguientes axiomas se satisfacen.*

(E0) El morfismo identidad del objeto cero $1_0 : 0 \longrightarrow 0$ *es una deflación*

(E1) La composición de dos deflaciones es una deflación.

(E2) Para cada morfismo $f : Z' \longrightarrow Z$ *y cada deflación* $d : Y \longrightarrow Z$*, existe un diagrama de pullback*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & Z' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "d"] & Z \end{tikzcd}$$

tal que d' es una deflación.

(E2)^{op} *Para cada $f : X \longrightarrow X'$ y cada inflación $i : X \longrightarrow Y$, existe un diagrama de pushout*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "f'"] \\ X' \arrow[r, "i'"] & Y', \end{tikzcd}$$

donde i' es una inflación.

Definición 3.1.3 *Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva decimos que en $\mathcal{A}$ los* ***idempotentes se escinden*** *si para cada idempotente $e = e^2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X)$, existen morfismos $\mu : Y \longrightarrow X$ y $\rho : X \longrightarrow Y$ tal que $\mu\rho = e$ y $\rho\mu = 1_Y$.*

Observación 3.1.4 *Sea una categoría $\mathcal{A}$ en la que los idempotentes se escinden. Si $e : X \longrightarrow X$ es un idempotente, entonces $\mathrm{Ker}(e)$ y $\mathrm{Ker}(1_X - e)$ existen y además $X = \mathrm{Ker}(e) \oplus \mathrm{Ker}(1_X - e)$.*

B. Keller, demostró que si $\mathcal{A}$ es una categoría en la que los idempotentes se escinden, la definición anterior es equivalente a la siguiente (ver apéndice de [27]).

Definición 3.1.5 *Sea $\mathcal{E}$ una clase de pares exactos $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$, la cual es cerrada por isomorfismos. La clase $\mathcal{E}$ se dice que es una* ***estructura exacta*** *en $\mathcal{A}$ y el par $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ es una* ***categoría exacta*** *si los siguientes axiomas se satisfacen.*

(Ex1) *Coincide con (E1) de 3.1.2.*

(Ex2) *Coincide con (E2) de 3.1.2.*

(Ex3) *Las identidades son deflaciones. Si la composición de es una deflación, entonces d es una deflación.*

(Ex3)^{op} *Las identidades son inflaciones. Si la composición ji es una inflación, entonces i es una inflación.*

Lema 3.1.6 *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta. Entonces, cualquier isomorfismo $f : A \longrightarrow B$ es una deflación.*

Demostración. Es fácil ver que para todo $Z \in \mathcal{A}$ el siguiente es un diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "1_Z"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, "1_0"] & 0. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, por E2, 1_Z es una deflación. Sea $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo. Por lo tanto, existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $fg = 1_B$ y $gf = 1_A$. Veamos que el siguiente diagrama es de pullback

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "1_A"] & A. \end{tikzcd}$$

En efecto, sean $\lambda : X \longrightarrow B$ y $\lambda' : X \longrightarrow A$ tal que $g\lambda = 1_A\lambda'$. Luego, tenemos que $\lambda = f\lambda'$. Por lo tanto, el cuadrado anterior es un pullback ya que f es un isomorfismo. Entonces, por $E2$, tenemos que f es una deflación. $\square$

Lema 3.1.7 *Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta y $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$ en $\mathcal{A}$.*

(a) Si $i = \mathrm{Ker}(d)$ y d es una deflación, entonces $(i, d) \in \mathcal{E}$.

(b) Si $d = \mathrm{Coker}(i)$ y i es una inflación, entonces $(i, d) \in \mathcal{E}$.

Demostración. (a) Como d es una deflación, existe una conflación $X' \xrightarrow{i'} Y \xrightarrow{d} Z$. Dado que $i = \mathrm{Ker}(d)$, existe un isomorfismo $\lambda : X' \longrightarrow X$ tal que $i' = i\lambda$. Luego, $d = \mathrm{Coker}(i)$ pues $d = \mathrm{Coker}(i')$ y λ es un isomorfismo. Por lo tanto, (i, d) es un par exacto. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\lambda"] & Y \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "d"] & Z. \end{tikzcd}$$

Luego, $(i, d) \in \mathcal{E}$ pues $\mathcal{E}$ es cerrada por isomorfismos. La prueba de (b) es análoga. $\square$

Lema 3.1.8 *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i'"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & Z' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "d"] & Z, \end{tikzcd}$$

donde el cuadrado derecho es un pullback. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Si $i = \mathrm{Ker}(d)$ entonces $i' = \mathrm{Ker}(d')$.

(b) Si $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ es una categoría exacta y $(i, d) \in \mathcal{E}$, entonces $(i', d') \in \mathcal{E}$.

Demostración.

(a) Se sigue de [55, 13.1].

(b) Por $E2$, d' es una deflación. Luego (b), se sigue de (a) y de 3.1.7(a). $\square$

Lema 3.1.9 *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en* $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f'"'] & Z \arrow[d, equal] \\ X' \arrow[r, "i'"] & Y' \arrow[r, "d'"] & Z, \end{tikzcd}$$

donde el cuadrado izquierdo es un pushout. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Si $d = \operatorname{Coker}(i)$ *entonces* $d' = \operatorname{Coker}(i')$.

(b) Si $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ *es una categoría exacta y* $(i, d) \in \mathcal{E}$, *entonces* $(i', d') \in \mathcal{E}$.

Demostración. Se deja a cargo del lector. $\square$

Lema 3.1.10 *Sea* $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ *una categoría exacta. Si* $0 \xrightarrow{0_{0,B}} B \xrightarrow{d} C$ *es una conflación, entonces* d *es un isomorfismo.*

Demostración. Como $(0_{0,B}, d) \in \mathcal{E}$, en particular tenemos que $d = \operatorname{Coker}(0_{0,B})$. Por otro lado, $1_B = \operatorname{Coker}(0_{0,B})$, entonces existe un isomorfismo $\lambda : B \longrightarrow C$ tal que $d = \lambda 1_B = \lambda$, probándose el resultado. $\square$

Lema 3.1.11 *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en* $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha'"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"] & D \arrow[d, equal] \\ E \arrow[r, "h"] & F \arrow[r, "g"] & D, \end{tikzcd}$$

donde el cuadrado I es un pushout. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Si h *es un monomorfismo,* $\alpha = \operatorname{Ker}(\alpha')$ *y* $\beta = \operatorname{Ker}(k)$, *entonces* $\gamma = \operatorname{Ker}(f)$.

(b) Si $\alpha' = \operatorname{Coker}(\alpha)$ *entonces* $f = \operatorname{Coker}(\gamma)$.

(c) Si $k = \operatorname{Coker}(\beta)$ *y* α' *es un epimorfismo, entonces* $g = \operatorname{Coker}(h)$.

Demostración.

(a) Veamos que $\mathrm{Ker}(f) = \gamma$. Sea $\lambda : W \longrightarrow C$ tal que $f\lambda = 0$. Por lo tanto, $k\lambda = gf\lambda = 0$. Por la propiedad universal de $\mathrm{Ker}(k) = \beta$, tenemos que existe un único morfismo $\lambda' : W \longrightarrow B$ tal que $\lambda = \beta\lambda'$. Ahora bien $h\alpha'\lambda' = f\beta\lambda' = f\lambda = 0$, pero como h es un momomorfismo, tenemos que $\alpha'\lambda' = 0$. Por la propiedad universal de $\mathrm{Ker}(\alpha') = \alpha$, tenemos que existe un único $\lambda'' : W \longrightarrow A$ tal que $\lambda' = \alpha\lambda''$. Por lo tanto, $\gamma\lambda'' = \beta\alpha\lambda'' = \beta\lambda' = \lambda$. Del hecho que $\gamma = \beta\alpha$ es un monomorfismo se concluye que λ'' es único. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(f) = \gamma$.

(b) Se sigue del dual de [55, 13.1]. Pero incluimos una prueba aquí. Veamos que $f = \mathrm{Coker}(\gamma)$. En efecto, sea $\varphi : C \longrightarrow Z$ tal que $\varphi\gamma = \varphi\beta\alpha = 0$. Como $\alpha' = \mathrm{Coker}(\alpha)$, entonces existe un único $\varphi' : E \longrightarrow Z$ tal que $\varphi'\alpha' = \varphi\beta$. Como el cuadrado I es un pushout, existe un único morfismo $\mu : F \longrightarrow Z$ tal que $\varphi = \mu f$. La unicidad del morfismo μ sale del hecho que si $\mu' : F \longrightarrow Z$ es otro morfismo tal que $\varphi = \mu' f$, entonces $\mu' h\alpha' = \mu' f\beta = \varphi\beta = \varphi'\alpha'$ y como α' es un epimorfismo, entonces $\mu' h = \varphi'$ y entonces por la propiedad universal del pushout, tenemos que $\mu = \mu'$. Por lo tanto $f = \mathrm{Coker}(\gamma)$.

(c) Primero, por el dual de [55, 7.1], tenemos que f es un epimorfismo. Sea $p : F \longrightarrow L$ tal que $ph = 0$. Entonces $(pf)\beta = 0$ y como $k = \mathrm{Coker}(\beta)$, tenemos que existe un morfismo $q : D \longrightarrow L$ tal que $pf = qk = qgf$. Luego $p = qg$, pues f un epimorfismo. Por otro lado, como $k = gf$ y k es un epimorfismo, entonces g es un epimorfismo. Por lo tanto, la factorización de p a través de g es única, probándose que $g = \mathrm{Coker}(h)$. $\square$

Observación 3.1.12 *En el lema anterior, con las hipótesis dadas, no es posible demostrar que* $h = \mathrm{Ker}(g)$.

Lema 3.1.13 *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en* $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "I"] & E \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "\beta\alpha=\gamma"] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "gf"] & G \arrow[d, "g"] \\
& D \arrow[r, equal] & D,
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado I es un pullback. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Si α' *es un epimorfismo,* $f = \mathrm{Coker}(\gamma)$ *y* $g = \mathrm{Coker}(h)$, *entonces* $gf = \mathrm{Coker}(\beta)$.

(b) Si $h = \mathrm{Ker}(g)$ *entonces* $\beta = \mathrm{Ker}(gf)$.

(c) Si $\gamma = \mathrm{Ker}(f)$ *y* h *es un monomorfismo, entonces* $\alpha = \mathrm{Ker}(\alpha')$.

Demostración. Se sigue de 3.1.11, aplicando el principio de dualidad. $\square$

Los siguientes dos lemas son importantes; y sus demostraciones son duales una de la otra. Sin embargo, escribimos las dos pruebas que dá B. Keller, ya que tienen ideas interesantes.

Lema 3.1.14 [27, Apend] *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta. Consideremos un dia-grama en $\mathcal{A}$ de la siguiente forma*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f'"'] & Z \arrow[d, equal] \\ X' \arrow[r, "i'"] & Y' \arrow[r, "d'"] & Z, \end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones. Entonces, el siguiente diagrama

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} i \\ f \end{pmatrix}} Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f', & i' \end{pmatrix}} Y'$$

es una conflación. En particular, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "f'"'] \\ X' \arrow[r, "i'"] & Y' \end{tikzcd}$$

es un cuadrado de pull-back y push-out.

Demostración. Como $i' = \mathrm{Ker}(d')$ y $i = \mathrm{Ker}(d) = \mathrm{Ker}(d'f')$, por [55, 13.2], tenemos que el cuadrado izquierdo es un pullback. Por lo tanto, es fácil ver que $\begin{pmatrix} i \\ f \end{pmatrix}$ es el kernel de $\begin{pmatrix} -f', & i' \end{pmatrix}$. Veamos que $\begin{pmatrix} -f', & i' \end{pmatrix}$ es una deflación. En efecto, es fácil ver que el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} Y \oplus X' \arrow[r, "\begin{pmatrix} -f', & i' \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} -1, & 0 \end{pmatrix}"'] & Y' \arrow[d, "d'"] \\ Y \arrow[r, "d"] & Z. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, por $E2$, tenemos que $\begin{pmatrix} -f', & i' \end{pmatrix}$ es una deflación. Luego, por 3.1.7, el siguiente diagrama

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} i \\ f \end{pmatrix}} Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f', & i' \end{pmatrix}} Y'$$

es una conflación. $\square$

Lema 3.1.15 [43, Apend] *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta. Consideremos un dia-grama en $\mathcal{A}$ de la siguiente forma*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i'"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & Z' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "d"] & Z \end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones. Entonces, el siguiente diagrama

$$Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} d' \\ f' \end{pmatrix}} Z' \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f, & d \end{pmatrix}} Z$$

es una conflación. En particular, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & Z' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "d"] & Z \end{tikzcd}$$

es un cuadrado de pull-back y push-out.

Demostración. Por 3.1.9, y $(E2)^{op}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo, donde los renglones y columnas son conflaciones

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i'"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & Y \arrow[r, "d"] \arrow[d, "j'"] & Z \arrow[d, equal] \\ Y' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "d'"'] & E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"] & Z \\ Z' \arrow[r, equal] & Z', & \end{tikzcd}$$

donde el cuadrado I es un pushout. Como $i = 1_Y i = f'i'$ y I es un pushout, tenemos que existe un único morfismo $\lambda : E \longrightarrow Y$ tal que $\lambda j' = 1_Y$ y $\lambda j = f'$. Definamos $g : E \longrightarrow Z' \oplus Y$ por $g = \begin{pmatrix} -e' \\ \lambda \end{pmatrix}$. Consideremos $j'f' - j : Y' \longrightarrow E$. Entonces $(j'f' - j)i' = j'f'i' - ji' = j'i - ji' = 0$. Como $d' = \mathrm{Coker}(i')$, existe un único morfismo $h : Z' \longrightarrow E$ tal que $j'f' - j = hd'$. Definamos $\psi : Z' \oplus Y \longrightarrow E$ por $\psi = \begin{pmatrix} h, & j' \end{pmatrix}$. Veamos que ψ es el inverso de g. En efecto, $\psi g = -he' + j'\lambda : E \longrightarrow E$. Pero, tenemos que $(-he' + j'\lambda)j = -he'j + j'\lambda j = -hd' + j'f' = j$ y $(-he' + j'\lambda)j' = -he'j' + j'\lambda j' = j'$. Como I es un pushout y $1_E : E \longrightarrow E$ es el único morfismo tal que $j = 1_E j$ y $j' = 1_E j'$, tenemos que $1_E = -he' + j'\lambda = \psi g$. Por otro lado $g\psi = \begin{pmatrix} -e'h & e'j' \\ \lambda h & hj' \end{pmatrix}$. Pero $-e'hd' = -e'(j'f' - j) = e'j = d'$ y

$\lambda hd' = \lambda(j'f' - j) = \lambda j'f' - \lambda j = 1_Y f' - f' = 0$ y como d' es un epimorfismo, tenemos que $e'h = 1_{Z'}$ y $\lambda h = 0$. También como $e'j' = 0$ y $\lambda j' = 1_Y$, concluimos que $g\psi = 1_{Z'\oplus Y}$. Notemos que $ehd' = e(j'f'-j) = ej'f'-ej = ej'f' = df' = fd'$ y como d' es un epimorfismo, tenemos que $eh = f$. Por lo tanto, tenemos las siguientes igualdades $gj = \begin{pmatrix} -e'j \\ \lambda j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d' \\ f' \end{pmatrix}$ y $e\psi = \big(eh,\ ej'\big) = \big(f,\ d\big)$. Luego, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d' \\ f' \end{pmatrix}"] & Z' \oplus Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} f, & d \end{pmatrix}"] & Z,
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales son isomorfismos. Por lo tanto, $\begin{pmatrix} -d' \\ f' \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}(\big(f,\ d\big))$ y $\mathrm{Coker}\Big(\begin{pmatrix} -d' \\ f' \end{pmatrix}\Big) = \big(f,\ d\big)$. Como $\mathcal{E}$ es cerrada por isomorfismos, el siguiente par exacto

$$Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d' \\ f' \end{pmatrix}} Z' \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f, & d \end{pmatrix}} Z$$

es una conflación. $\square$

Lema 3.1.16 [43, Apend] *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta y $Y' \xrightarrow{e} Y \xrightarrow{d} Z$ en $\mathcal{A}$. Si el morfismo d tiene kernel y la composición de es una deflación, entonces d es una deflación.*

Demostración. Sea $de : Y' \longrightarrow Z$ una deflación. Es decir, se tiene la siguiente conflación

$$X' \xrightarrow{i'} Y' \xrightarrow{de} Z.$$

Por 3.1.8 y $(E2)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & W \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "d"] \\
X' \arrow[r, "i'"] & Y' \arrow[r, "de"] & Z,
\end{tikzcd}$$

donde $(j, d') \in \mathcal{E}$ y el cuadrado derecho es un pull-back. Luego por 3.1.15, tenemos la siguiente conflación

$$W \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d' \\ f \end{pmatrix}} Y \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} d, & de \end{pmatrix}} Z.$$

Sea $\psi := \begin{pmatrix} 1_Y & -e \\ 0 & 1_{Y'} \end{pmatrix} : Y \oplus Y' \longrightarrow Y \oplus Y'$. Es fácil ver que $\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1_Y & e \\ 0 & 1_{Y'} \end{pmatrix}$. Por lo tanto ψ es un isomorfismo; y entonces una deflación por 3.1.6. Por $E1$, te-nemos que $\big(d,\ 0\big) = \big(d,\ de\big)\psi$ es una deflación. Sea $i : X \longrightarrow Y$ el kernel de d. Es fácil ver que $\mathrm{Ker}\big(\big(d,\ 0\big)\big) = i \oplus 1_{Y'}$. Por lo tanto, por 3.1.7, tenemos la siguiente conflación

$$X \oplus Y' \xrightarrow{i \oplus 1_{Y'}} Y \oplus Y' \xrightarrow{(d,\ 0)} Z.$$

Consideremos el siguiente diagrama, donde el primer cuadrado es un push-out

$$\begin{tikzcd} X \oplus Y' \arrow[r, "i\oplus 1_{Y'}"] \arrow[d, "(1,\ 0)"] & Y \oplus Y' \arrow[r, "(d,\ 0)"] \arrow[d, "(1,\ 0)"] & Z \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "d"] & Z. \end{tikzcd}$$

Luego, como $i \oplus 1_{Y'}$ es una inflación, por $E2^{op}$, tenemos que i es una inflación. Como $d = \mathrm{Coker}(i)$, pues $\big(d,\ 0\big) = \mathrm{Coker}(i \oplus 1_{Y'})$, entonces por 3.1.7 $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$ es una conflación. Por lo tanto, d es una deflación. $\square$

Corolario 3.1.17 [27, Apend] *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta en la cual los idempotentes se escinden. Si la composición de es una deflación, para algún morfismo e, entonces d es una deflación.*

Demostración. Sea $de : Y' \longrightarrow Z$ una deflación. Es decir, se tiene la siguiente conflación

$$X' \xrightarrow{i'} Y' \xrightarrow{de} Z.$$

Por $(E2)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo de pullback en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "d"] \\ Y' \arrow[r, "de"] & Z. \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del pullback, existe $s : Y' \longrightarrow W$ tal que $fs = 1_{Y'}$ y $d's = e$. Luego, $h := sf : W \longrightarrow W$ es un idempotente. Por 3.1.4, tenemos que $\mathrm{Ker}(sf)$ existe. Pero $\mathrm{Ker}(sf) = \mathrm{Ker}(f)$ pues s es un monomorfismo. Sea $j : U \longrightarrow W$ con $j = \mathrm{Ker}(f)$. Veamos que $d'j : U \longrightarrow Y$ es el kernel de d. En efecto, $d(d'j) = defj = 0$. Sea $\lambda : Z \longrightarrow Y$ tal que $d\lambda = 0$, entonces por la propiedad universal del pullback, existe $\lambda' : Z \longrightarrow W$ tal que $f\lambda' = 0$ y $d'\lambda' = \lambda$. Como $j = \mathrm{Ker}(f)$, existe $\lambda'' : Z \longrightarrow U$ tal que $\lambda' = j\lambda''$. Por lo tanto $\lambda = d'\lambda' = (d'j)\lambda''$. Luego $d'j = \mathrm{Ker}(d)$ y por 3.1.16, tenemos que d es una deflación. $\square$

Proposición 3.1.18 [43, Apend] *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta en la cual los idempotentes se escinden. Entonces, la composición de dos inflaciones es una inflación.*

Demostración. Sean $i : X \longrightarrow Y$ y $j : Y \longrightarrow Y'$ dos inflaciones. Consideremos la siguiente conflación $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$. Por $E2^{op}$ y 3.1.9, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "d"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "d'"] & W \arrow[d, equal] \\ Z \arrow[r, "k"] & Z' \arrow[r] & W, \end{tikzcd}$$

donde el cuadrado izquierdo es un pushout y los renglones son conflaciones. Luego, por 3.1.14, se tiene que $\big(d',\ k\big) : Y' \oplus Z \longrightarrow Z'$ es una deflación. Es fácil ver que el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} Y' \oplus Y \arrow[r, "1 \oplus d"] \arrow[d, "\big(0,\ 1\big)"'] & Y' \oplus Z \arrow[d, "\big(0,\ 1\big)"] \\ Y \arrow[r, "d"] & Z. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $1_{Y'} \oplus d = \begin{pmatrix} 1_{Y'} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ es una deflación. Dado que

$$\big(d',\ k\big) \begin{pmatrix} 1_{Y'} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \big(d',\ kd\big).$$

Por $E1$ tenemos que $\big(d',\ kd\big) = d'\big(1_{Y'},\ j\big)$ es una deflación. Por lo tanto, por 3.1.17, concluimos que d' es una deflación.
Ahora bien, por $E2^{op}$, sabemos que k es una inflación, en particular, k es un monomorfismo. Luego, por 3.1.11, tenemos $\mathrm{Ker}(d') = ji$. Dado que d' es una deflación, de 3.1.7 se tiene que el siguiente par exacto

$$X \xrightarrow{ji} Y' \xrightarrow{d'} Z'$$

es una conflación. Por lo tanto, ji es una inflación. $\square$

Proposición 3.1.19 [27, 1.1] *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta en la cual los idempotentes se escinden. Entonces, el par $(\mathcal{A}^{op}, \mathcal{E}^{op})$ es una categoría exacta, donde $\mathcal{A}^{op}$ es la categoría opuesta de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{E}^{op}$ consiste de los pares (d, i) tal que $(i, d) \in \mathcal{E}$.*

Demostración. Por 3.1.7 y (E0), se tiene que 1_0 es una inflación; y por lo tanto se satisface (E0) en $\mathcal{A}^{op}$. Finalmente, por 3.1.18, se satisface (E1) en $\mathcal{A}^{op}$.
$\square$

Lema 3.1.20 *Sea $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ una categoría exacta. Entonces, para todo $A, C \in \mathcal{A}$, el siguiente par es una conflación*

$$\eta : A \xrightarrow{i_A} A \oplus C \xrightarrow{\pi_C} C,$$

donde $i_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\pi_C = \begin{pmatrix} 0, & 1 \end{pmatrix}$.

Demostración. Es fácil ver que $i_A = \mathrm{Ker}(\pi_C)$ y $\pi_C = \mathrm{Coker}(i_A)$. Por otro lado, $pi_C i_C = 1_C$ con $i_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego, por 3.1.6, 3.1.16, tenemos que π_C es una deflación. Por 3.1.7, tenemos que

$$\eta : A \xrightarrow{i_A} A \oplus C \xrightarrow{\pi_C} C,$$

es una conflación. $\square$

Lema 3.1.21 *Sean $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ una categoría exacta en la cual los idempotentes se escinden. Consideremos dos conflaciones $\eta : A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\alpha'} E$ y $\eta' : B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{k} D$. Entonces, se puede construir el siguiente diagrama conmutativo $\mathcal{E}$-exacto, es decir, donde los renglones y columnas son conflaciones*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\gamma"] & \\
B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha'"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"] & D \arrow[d, equal] \\
E \arrow[r, "h"] & F \arrow[r, "g"] & D.
\end{tikzcd}$$

Además, el cuadrado I es un pull-back y un push-out.

Demostración. Por el axioma $(E2)^{op}$ de categorias exactas y 3.1.9, podemos construir el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\gamma"] & \\
B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha'"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"] & D \arrow[d, equal] \\
E \arrow[r, "h"] & F \arrow[r, "g"] & D,
\end{tikzcd}$$

donde $\xi : E \xrightarrow{h} F \xrightarrow{g} D$ es una conflación y el cuadrado I es un pushout. Veamos ahora que $\xi' : A \xrightarrow{\gamma} C \xrightarrow{f} F$ es una conflación. En efecto, por 3.1.18 tenemos que $\gamma = \beta\alpha$ es una inflación. Por otro lado, por 3.1.11 (b), $f = \mathrm{Coker}(\gamma)$. De donde, por 3.1.7 (b), tenemos que ξ' es una conflación. Luego por 3.1.15, el cuadrado I es un pullback y un pushout. $\square$

Lema 3.1.22 *Sea* $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ *una categoría exacta en la cual los idempotentes se escinden. Consideremos dos conflaciones* $\eta : E \xrightarrow{h} G \xrightarrow{g} D$ *y* $\eta' : A \xrightarrow{\gamma} C \xrightarrow{f} G$*. Entonces, se puede construir el siguiente diagrama conmutativo* $\mathcal{E}$*-exacto, es decir, donde los renglones y columnas son conflaciones*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "I"] & E \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "\gamma"] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "gf"] & G \arrow[d, "g"] \\ & D \arrow[r, equal] & D. \end{tikzcd}$$

Además, el cuadrado I es un pullback y un pushout.

3.2. Teoría relativa en categorías exactas

En esta sección, fijaremos una categoría exacta $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ en la cual los idempotentes se escinden. Para objetos A, $C \in \mathcal{A}$ denotaremos por $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C,A)$ al conjunto de todos los pares exactos $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{d} C$ en $\mathcal{E}$ módulo la relación de equivalencia, la cual es definida en la forma usual. Esto es, dos conflaciones (i,d) y (i',d') son equivalentes si existe un diagrama conmutativo de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "d'"] & C. \end{tikzcd}$$

Lema 3.2.1 [27, Apend] *Consideremos un diagrama conmutativo en* $\mathcal{A}$*, de la siguiente forma*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "d'"] & C, \end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones. Entonces f *es un isomorfismo.*

Demostración. Por 3.1.14, tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "i'"] & B' \end{tikzcd}$$

es un pushout. Por otro lado, como $1_B i = i 1_A$, por la propiedad universal del pushout existe $g : B' \longrightarrow B$ tal que $gf = 1_B$. Análogamente, usando que

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, equal] \\ B' \arrow[r, "d'"] & C \end{tikzcd}$$

es un pullback (ver 3.1.15) se tiene que existe un $g' : B' \longrightarrow B$ tal que $fg' = 1_{B'}$. Veamos que $g = g'$. En efecto, $g' = (gf)g' = g(fg') = g$. Probándose el resultado. □

Lema 3.2.2 *Sea $\eta : A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ una conflación. Entonces, para toda $A' \in \mathcal{A}$, tenemos que los siguientes diagramas*

$$A \oplus A' \xrightarrow{f_1} B \oplus A' \xrightarrow{(\beta,0)} C,$$

y

$$A' \oplus A \xrightarrow{g_1} A' \oplus B \xrightarrow{(0,\beta)} C,$$

con $f_1 := \alpha \oplus 1_{A'}$ y $g_1 := 1_{A'} \oplus \alpha$ son conflaciones.

Demostración. Sólo trataremos el primer diagrama. Dado que $f_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1_{A'} \end{pmatrix} :$ $A \oplus A' \longrightarrow B \oplus A'$, es fácil ver que el siguiente par es exacto

$$A \oplus A' \xrightarrow{f_1} B \oplus A' \xrightarrow{(\beta,0)} C.$$

Como $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : B \longrightarrow B \oplus A'$ es tal que $(\beta, 0)p = \beta$ y β es una deflación, se sigue por 3.1.17, que $(\beta, 0)$ es una deflación. Por lo tanto, resultado se sigue de 3.1.7(a). □

Lema 3.2.3 *Sean $\eta : A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ y $\eta' : A \xrightarrow{\alpha'} D \xrightarrow{\beta'} C$ elementos en $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C, A)$. Entonces $\eta \oplus \eta' \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C \oplus C, A \oplus A)$.*

Demostración. En efecto, tenemos el siguiente par exacto

$$\eta \oplus \eta' : \quad A \oplus A \xrightarrow{f} B \oplus D \xrightarrow{g} C \oplus C,$$

donde $f := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix}$ y $g := \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}$. Notemos que $h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1_D \end{pmatrix} :$ $A \oplus D \longrightarrow B \oplus D$ y $k = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix} : A \oplus A \longrightarrow A \oplus D$ son tales que $f = hk$. Por 3.2.2, h y k son inflaciones. Por 3.1.18, tenemos que $f = hk$ es una inflación. Luego, por 3.1.7 (b), concluimos que $\eta \oplus \eta' \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C \oplus C, A \oplus A)$. □

Definición 3.2.4 *Sea* $\eta : A \longrightarrow B \longrightarrow C$ *una conflación en* $\mathcal{A}$ *y* $\alpha : C' \longrightarrow C$*,* $\beta : A \longrightarrow A'$ *morfismos. Denotaremos por* $\eta\alpha$ *(resp.* $\beta\eta$*) a la conflación obtenida de* η *mediante un pull-back (resp. push-out) por* α *(resp.* β*). Así, defi-nimos*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(\alpha, \beta)(\eta) := \beta(\eta\alpha).$$

Observación 3.2.5 *Por 3.1.8 y 3.1.9, las operaciones anteriores están bien definidas. Más aun, se puede probar que* $\beta(\eta\alpha) = (\beta\eta)\alpha$ *en* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C, A)$*.*

Lema 3.2.6 *Sean* $\eta : A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ *y* $\eta' : A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C'$ *conflaciones. Entonces, cualquier diagrama conmutativo de la forma*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma_1"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma_2"] & C \arrow[d, "\gamma_3"] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C',
\end{tikzcd}$$

se descompone como en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma_1"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\lambda_1"] & C \arrow[d, equal] \\
A' \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d, "\lambda_2"] & C \arrow[d, "\gamma_3"] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C',
\end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones y $\gamma_2 = \lambda_2\lambda_1$*. En particular,* $\eta'\gamma_3 = \gamma_1\eta$*.*

Demostración. Por 3.1.9, tenemos el siguiente diagrama conmutativo de pushout

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma_1"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\lambda_1"] & C \arrow[d, equal] \\
A' \arrow[r, "\alpha''"] & D \arrow[r, "\beta''"] & C
\end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones. Como $\alpha'\gamma_1 = \gamma_2\alpha$, por la propiedad universal del pushout, existe un único morfismo $\lambda_2 : D \longrightarrow B'$ tal que $\alpha' = \lambda_2\alpha''$ y $\gamma_2 = \lambda_2\lambda_1$. Luego, como $\beta'' = \mathrm{Coker}(\beta'')$, existe $\psi : C \longrightarrow C'$ tal que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d, "\lambda_2"] & C \arrow[d, "\psi"] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C',
\end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones. Veamos que $\psi = \gamma_3$. En efecto,

$$\psi\beta = \psi\beta''\lambda_1 = \beta'\lambda_2\lambda_1 = \beta'\gamma_2 = \gamma_3\beta;$$

y como β es un epimorfismo, tenemos que $\psi = \gamma_3$. Luego, juntando los dos diagramas anteriores tenemos la descomposición deseada. $\square$

Lema 3.2.7 *Para cada par C, $A \in \mathcal{A}$ se tiene que* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C, A)$ *es un grupo abeliano bajo la suma de Baer.*

Demostración. Sean $\eta : A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$, $\eta' : A \xrightarrow{\alpha'} D \xrightarrow{\beta'} C$ dos elementos de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C, A)$. Por 3.2.3, $\eta \oplus \eta' \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C \oplus C, A \oplus A)$. Por 3.1.8 y 3.1.9, tenemos que $\nabla(\eta \oplus \eta')\Delta \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C, A)$, donde $\Delta : C \longrightarrow C \oplus C$ y $\nabla : A \oplus A \longrightarrow A$ son los morfismos diagonal y codiagonal, respectivamente. Por lo tanto, definimos

$$\eta + \eta' := \nabla(\eta \oplus \eta')\Delta.$$

La prueba de que esta operación así definida nos da un grupo abeliano, en el caso de categorías abelianas, se puede ver en [55]. Mas aún, la misma prueba es válida para el caso de una categoría exacta. Para conveniencia del lector, haremos un esquema de la prueba en los siguientes renglones.

(i) Conmutatividad:
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{cccccc} \eta \oplus \eta' : & A \oplus A & \longrightarrow & B \oplus D & \longrightarrow & C \oplus C \\ & \downarrow{\scriptstyle \tau_1} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_2} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_3} \\ \eta' \oplus \eta : & A \oplus A & \longrightarrow & D \oplus B & \longrightarrow & C \oplus C \end{array}$$

donde los renglones son conflaciones y cada τ_i está representado por la matriz $\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Por 3.2.6, tenemos que $(\eta' \oplus \eta)\tau_3 = \tau_1(\eta \oplus \eta')$. Además, tenemos que $\nabla\tau_1 = \nabla$ y $\tau_3\Delta = \Delta$. Por lo tanto $\eta + \eta' = \nabla(\eta \oplus \eta')\Delta = (\nabla\tau_1)(\eta \oplus \eta')\Delta = \nabla(\tau_1(\eta \oplus \eta'))\Delta = \nabla((\eta' \oplus \eta)\tau_3)\Delta = \nabla(\eta' \oplus \eta)\tau_3\Delta = \nabla(\eta' \oplus \eta)\Delta = \eta' + \eta$.

(ii) Existencia del neutro aditivo.
Veamos que el par que se escinde

$$E_0 : A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{\pi} C,$$

donde $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\pi = (0,\ 1)$, es el neutro aditivo. Primero, por 3.1.20, tenemos que $E_0 \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C, A)$. Sea

$$\eta : A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

un elemento de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C, A)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} E_0 \oplus \eta : & A \oplus A \arrow[r] \arrow[d, "\nabla"] & (A \oplus C) \oplus B \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & C \oplus C \arrow[d, equal] \\ \nabla(E_0\eta) : & A \arrow[r, "\mu"] & C \oplus B \arrow[r, "\delta"] & C \oplus C \end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones (ver 3.2.3 y 3.1.9); y $\mu := \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\delta := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ y $\gamma := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\lambda"] & C \arrow[d, "\Delta"] \\ A \arrow[r, "\mu"] & C \oplus B \arrow[r, "\delta"] & C \oplus C \end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones y $\lambda := \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$. Por 3.1.15, el cuadrado derecho es un pullback y entonces el renglón superior, del diagrama anterior, representa a $(\nabla(E_0\eta))\Delta$, es decir, $\eta = E_0 + \eta$. Por lo tanto, E_0 es el neutro aditivo.

(iii) Inversos aditivos:
Ahora veamos que el inverso aditivo de η es $(-1_A\eta)$. Primero notemos que: si $0 : A \longrightarrow A$ es el morfismo cero, entonces $0\eta = E_0$. En efecto, consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "0"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"] & C \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, "i"] & A \oplus C \arrow[r, "\pi"] & C \end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones y $\psi := \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$. Por 3.1.14, tenemos que el cuadrado izquierdo del diagrama anterior es un pushout; y así $0\eta = E_0$. Entonces $E_0 = 0\eta = (1_A + (-1_A))\eta = 1_A\eta + (-1_A\eta) = \eta + (-1_A\eta)$. Por lo tanto, $(-1_A\eta)$ es el inverso aditivo de η.

(iv) Asociatividad.
La asociatividad se sigue de varias identidades entre Δ y ∇. Ver [55, 1.5] pag. 166. $\square$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Un funtor $F : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow C$ es llamado un bifuntor. Decimos que un bifuntor F es aditivo si los funtores inducidos $F(C, -)$

y $F(-,A)$ son aditivos para todos los objetos A y C en $\mathcal{A}$. Sea $F : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow C$ un bifuntor. Un subfuntor $G : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow C$ de F es aditivo si G es un bifuntor aditivo.
Tenemos que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ define un funtor aditivo $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ donde Ab denota a la categoría de grupos abelianos.

Definición 3.2.8 [27] *Sea F un subfuntor de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$. *Un par exacto $(i,d) : A \stackrel{i}{\longrightarrow} B \stackrel{d}{\longrightarrow} C$ en $\mathcal{E}$, se dice que es **par F-exacto** si $(i,d) \in F(C,A)$. Denotaremos por $\mathcal{E}_F$ a la clase de todos los pares F-exactos.*

Observación 3.2.9 *$\mathcal{E}_F \subseteq \mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_F$ es cerrada por isomorfismos.*

Observación 3.2.10 *Sean F un subfuntor de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ *y $\alpha : C' \longrightarrow C$, $\beta : A \longrightarrow A'$ en $\mathcal{A}$.*

(a) Si $\eta \in F(C,A)$ entonces $F(\alpha,\beta)(\eta) = \beta(\eta\alpha) \in F(C',A')$. En particular, se tiene que la clase de pares F-exactos es cerrada por pull-backs y push-outs. Esto es, si η es F-exacta entonces $\eta\alpha$ y $\beta\eta$ son F-exactas.

(b) Si η, η' son F-exactas, entonces $\eta + \eta'$ es F-exacta. En efecto, como η, $\eta' \in F(C,A)$ y $F(C,A)$ es un subgrupo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C,A)$*, se tiene que $\eta+\eta' \in F(C,A)$; y por lo tanto $\eta+\eta'$ es F-exacta. Es decir, la clase de sucesiones F-exactas es cerrada bajo la suma de Baer.*

Proposición 3.2.11 [27] *Una clase de conflaciones $\mathscr{C} \subseteq \bigcup_{C,A\in\mathcal{A}} \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C,A)$, la cual es cerrada por suma de Baer, pull-backs y push-outs, define un subfuntor de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$.

Demostración. Definamos una asignación $F : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ por $F(C,A) := \mathscr{C} \cap \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C,A)$; y para $(\alpha,\beta) : (C,A) \longrightarrow (C',A')$, definimos $F(\alpha,\beta) := \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)$. Veamos que la asignación F construida arriba, tiene por codominio a Ab. Y que además $F : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ es un subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$. Para esto hay que ver que $F(C,A)$ es un subgrupo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C,A)$ y que $F(\alpha,\beta)$ es un morfismo de grupos (ésta última condición es trivial por la definición de F). En efecto, sean η, $\eta' \in F(C,A)$, como $\mathscr{C}$ es cerrada por suma de Baer, entonces $\eta + \eta' \in F(C,A)$. Dada $\eta :\ A \longrightarrow B \longrightarrow C$, el inverso de η, con la suma de Baer, es la conflación que se obtiene por push-out de η mediante -1_A, es decir, $-\eta := -1_A\eta$. Por lo tanto, si $\eta \in F(C,A)$, entonces $-\eta \in F(C,A)$ pues $\mathscr{C}$ es cerrada por push-outs. Por lo tanto, $F(C,A)$ es un subgrupo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C,A)$.
Veamos que si $\eta \in F(C,A)$ y $(\alpha,\beta) : (C,A) \longrightarrow (C',A')$ entonces $F(\alpha,\beta)(\eta) \in F(C',A')$. En efecto, como $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'},\beta)\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(\alpha,1_A)$ y $\mathscr{C}$ es cerrada por push-outs y pull-backs, se tiene que $F(\alpha,\beta)(\eta) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)(\eta) \in F(C',A')$. Por lo tanto, F así definido es un subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$, con $\eta_{C,A} : F(C,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C,A)$ la inclusión como subgrupo. $\square$

Lema 3.2.12 *Sean $\eta : A \stackrel{\alpha}{\to} B \stackrel{\beta}{\to} C$ y $\eta' : A' \stackrel{\alpha'}{\to} B' \stackrel{\beta'}{\to} C'$ conflaciones en $\mathcal{A}$; y sean $i_C : C \longrightarrow C \oplus C'$, $i_{C'} : C' \longrightarrow C \oplus C'$, $p_A : A \oplus A' \longrightarrow A$, $p_{A'} : A \oplus A' \longrightarrow A'$ las inclusiones y proyecciones naturales correspondientes. Entonces, las siguientes igualdades se satisfacen.*

(a) $\eta = p_A(\eta \oplus \eta')i_C$ *y* $0 = p_{A'}(\eta \oplus \eta')i_C$.

(b) $\eta' = p_{A'}(\eta \oplus \eta')i_{C'}$ *y* $0 = p_A(\eta \oplus \eta')i_{C'}$.

(c) $\eta \oplus \eta' = i_A\eta p_C + i_{A'}\eta' p_{C'}$.

Demostración.

(a) Por 3.2.3 y 3.2.2 se obtiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \oplus A' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, equal] & B \oplus A' \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_3"] & C \arrow[d, "i_C"] \\
A \oplus A' \arrow[r, "f_4"] & B \oplus B' \arrow[r, "f_5"] & C \oplus C',
\end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones, $f_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix}$ y $f_5 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}$. Por 3.1.15, $(\eta \oplus \eta')i_C$ es la conflación del primer renglón del diagrama anterior. Por otro lado, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \oplus A' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p_A"] & B \oplus A' \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "p_B"] & C \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C,
\end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones y p_B es la proyección correspondiente. Luego, por 3.1.14, $p_A(\eta \oplus \eta')i_C$ es la conflación del último renglón del diagrama anterior. Por lo tanto $\eta = p_A(\eta \oplus \eta')i_C$. Considerando ahora el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \oplus A' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p_{A'}"] & B \oplus A' \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, equal] \\
A' \arrow[r, "i"] & C \oplus A' \arrow[r, "\pi"] & C,
\end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones por 3.1.20 y 3.2.2, $g = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$; concluimos por 3.1.14 que $p_{A'}(\eta \oplus \eta')i_C = 0$.

(b) Se prueba como en (a).

(c) Tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} p_A(\eta \oplus \eta') = p_A(\eta \oplus \eta')1_{C\oplus C'} &= p_A(\eta \oplus \eta')(i_C p_C + i_{C'} p_{C'}) \\ &= p_A(\eta \oplus \eta') i_C p_C + p_A(\eta \oplus \eta') i_{C'} p_{C'} \\ &= \eta p_C + 0 p_{C'} \\ &= \eta p_C, \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad es por (a). Análogamente, se prueba que $p_{A'}(\eta \oplus \eta') = \eta' p_{C'}$. Por lo tanto $\eta \oplus \eta' = 1_{A\oplus A'}(\eta \oplus \eta') = (i_A p_A + i_{A'} p_{A'})(\eta \oplus \eta') = i_A p_A(\eta \oplus \eta') + i_{A'} p_{A'}(\eta \oplus \eta') = i_A \eta p_C + i_{A'} \eta' p_{C'}$. $\square$

Lema 3.2.13 [27, 1.2] *Sea F un subfuntor de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}} : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow$ Sets*. Entonces, F es un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}} : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow$ Ab *si y sólo si la clase de pares F-exactos $\mathcal{E}_F$ es cerrada por sumas directas finitas.*

Demostración. Dado que F es un subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow$ Sets, tenemos que $\forall\, \eta \in F(C, A)$ y $\alpha : C' \longrightarrow C$, $\beta : A \longrightarrow A'$ en $\mathcal{A}$, se satisface que $F(\alpha, \beta)(\eta) = \beta(\eta\alpha) \in F(C', A')$.
($\Longleftarrow$) Sea $E_0 := 0 \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C, A)$ el neutro aditivo. Veamos que $E_0 \in F(C, A)$. En efecto, sean $\eta :\ A \longrightarrow B \longrightarrow C$ F-exacta y $0 : A \longrightarrow A$ el morfismo cero. Luego $F(1_C, 0)(\eta) = 0\eta \in F(C, A)$, pero $0\eta = E_0$ (ver 3.2.7). Por lo tanto $E_0 \in F(C, A)$.
Veamos ahora que, si $\eta \in F(C, A)$ entonces $-\eta \in F(C, A)$. En efecto, considerando $-1_A : A \longrightarrow A$ tenemos que $F(1_C, -1_A)(\eta) = -1_A\eta \in F(C, A)$, pero $-1_A\eta = -\eta$ (ver 3.2.7). Por lo tanto $-\eta \in F(C, A)$.
Veamos que, si η, $\eta' \in F(C, A)$ entonces $\eta + \eta' \in F(C, A)$. Considerando los morfismos $\nabla : A \oplus A \longrightarrow A$ y $\Delta : C \longrightarrow C \oplus C$, tenemos que $F(1_C, \nabla) : F(C, A \oplus A) \longrightarrow F(A)$ y $F(\Delta, 1_{A\oplus A}) : F(C \oplus C, A \oplus A) \longrightarrow F(C, A \oplus A)$. Por otro lado, como la clase $\mathcal{E}_F$ es cerrada por sumas directas finitas, tenemos que $\eta \oplus \eta' \in F(C \oplus C, A \oplus A)$. Por lo tanto $F(1_C, \nabla)F(\Delta, 1_{A\oplus A})(\eta \oplus \eta') = \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_C, \nabla)\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(\Delta, 1_{A\oplus A})(\eta \oplus \eta') = \nabla(\eta \oplus \eta')\Delta = \eta + \eta' \in F(C, A)$. Luego, F es un subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow$ Ab.
Veamos ahora que F es aditivo, es decir que, $F(1_C, -) : \mathcal{A} \longrightarrow$ Ab y $F(-, 1_A) : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow$ Ab son aditivos. En efecto, veamos que $F(1_C, -) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(F(1_C, A), F(1_C, B))$ es un morfismo de grupos abelianos, $\forall A, B \in \mathcal{A}$. Sean $\alpha, \alpha' : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{A}$, y $\eta : F \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ la inclusión como subfuntor. Luego, tenemos las siguientes igualdades

$$(\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_C, \alpha) + \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_C, \alpha'))\eta_{C,A} = \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_C, \alpha + \alpha')\eta_{C,A} = \eta_{C,B} F(1_C, \alpha + \alpha'),$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_C, \alpha)\eta_{C,A} = \eta_{C,B} F(1_C, \alpha),$$
$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_C, \alpha')\eta_{C,A} = \eta_{C,B} F(1_C, \alpha').$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \eta_{C,B} F(1_C, \alpha + \alpha') &= (\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_C, \alpha) + \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_C, \alpha'))\eta_{C,A} \\ &= \eta_{C,B}(F(1_C, \alpha) + F(1_C, \alpha')). \end{aligned}$$

Luego, como $\eta_{C,B}$ es un monomorfismo, tenemos que $F(1_C, \alpha+\alpha') = F(1_C, \alpha)+F(1_C, \alpha')$. Por lo tanto $F(1_C, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ es aditivo. Análogamente $F(-, 1_A) : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ es aditivo. Por lo tanto, $F(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ es aditivo.
($\Longrightarrow$) Supongamos que F es un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$. En particular, $F(C, A)$ es un subgrupo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C, A)$, $\forall\, C,\ A \in \mathcal{A}$. Consideremos los pares exactos $\eta :\ A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ y $\eta' :\ A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C'$, con $\eta \in F(C, A)$ y $\eta' \in F(C', A')$. Como F es un subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$, se tiene que $F(p_C, i_A)(\eta) = i_A \eta p_C \in F(C \oplus C', A \oplus A')$ y $F(p_{C'}, i_{A'})(\eta') = i_{A'}\eta' p_{C'} \in F(C \oplus C', A \oplus A')$. Por 3.2.12(c), tenemos que $\eta \oplus \eta' = i_A \eta p_C + i_{A'}\eta' p_{C'}$. Por lo tanto $\eta \oplus \eta' \in F(C \oplus C', A \oplus A')$ pues $F(C \oplus C', A \oplus A')$ es un subgrupo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C \oplus C', A \oplus A')$. Probándose que $\mathcal{E}_F$ es cerrada por sumas directas finitas de F-sucesiones exactas. $\square$

Corolario 3.2.14 *Una clase de conflaciones $\mathscr{C} \subseteq \bigcup_{C,A \in \mathcal{A}} \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C, A)$, induce un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ si y sólo si $\mathscr{C}$ es cerrada por pull-backs, push-outs y sumas directas finitas.*

Lema 3.2.15 [7, 1.2] *Sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$. Consideremos $\eta : A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C$ y $\eta' : A' \overset{\alpha'}{\to} B' \overset{\beta'}{\to} C'$ dos conflaciones. Entonces $\eta \oplus \eta'$ es F-exacta si y sólo si η y η' lo son.*

Demostración. ($\Longleftarrow$) Se sigue de 3.2.13.
($\Longrightarrow$) Por 3.2.12 tenemos que $\eta = p_A(\eta \oplus \eta')i_C$ y $\eta' = p_{A'}(\eta \oplus \eta')i_{C'}$. Como la clase $\mathcal{E}_F$ es cerrada por pull-backs y push-outs, se sigue que η y η' son F-exactas.
$\square$

Lema 3.2.16 *Sea F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ y $\eta : A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{d} C$ un par F-exacto. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Para cada $C' \in \mathcal{A}$, existe una sucesión exacta en Ab

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', C)$$

$$\xrightarrow{\delta} F(C', A) \xrightarrow{F(1_{C'}, i)} F(C', B),$$

donde $\delta(f) := \eta f$ y ηf es el pullback de η por $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', C)$.

(b) Si $F = \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$, se tiene la sucesión exacta en Ab

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', C)$$

$$\xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C', A) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, i)} \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C', B) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, d)} \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C', C).$$

Demostración. (a) Como i es el kernel de d, se tiene que i es un monomorfismo; y por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_{C'}, i)$ es un monomorfismo.
Ahora, veamos que la sucesión es exacta en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', B)$. Como $di = 0$, se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_{C'}, d)\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_{C'}, i) = 0$; de donde se sigue que $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_{C'}, i)) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_{C'}, d))$. Del hecho que $i = \mathrm{Ker}(d)$, se sigue que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_{C'}, d)) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_{C'}, i))$.
Veamos la exactitud en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', C)$. Primero, como F es un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ y η es F-exacta, se tiene $\mathrm{Im}(\delta) \subseteq F(C', A)$ (pues los pares F-exactos son cerrados por pullbacks). Sea $f : C' \longrightarrow C$ tal que $\delta(f) = 0$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y F-exacto

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"] & C' \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "d"] & C. \end{tikzcd}$$

Como $\delta(f) = 0$, el par F-exacto $\delta(f) :\ A \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{d'} C'$ se escinde. Por lo tanto, existe $h : C' \longrightarrow B'$ tal que $1_{C'} = d'h$, de donde tenemos que $d(f'h) = fd'h = f(1_{C'}) = f$, y así concluimos que $\mathrm{Ker}(\delta) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_{C'}, d))$. Ahora veamos que $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_{C'}, d)) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta)$. En efecto, sea $f : C' \longrightarrow C$ con $f \in \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_{C'}, d))$. Entonces, existe $j : C' \longrightarrow B$ tal que $f = dj$. Como F es un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$, todos los pares exactos (en particular, las conflaciones) que se escinden son F-exactos. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y F-exacto

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] \arrow[d, equal] & A \oplus C' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & C' \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "d"] & C \end{tikzcd}$$

con $k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $q = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$. Por lo tanto, por 3.2.9 y 3.1.15, el cuadrado derecho del diagrama anterior es un pullback. Entonces $\delta(f)$ está representada por el par F-exacto $A \xrightarrow{k} A \oplus C' \xrightarrow{p} C'$ probándose que $\delta(f) = 0$.
Por último, verifiquemos la exactitud en $F(C', A)$. Para esto, veamos primero que $\mathrm{Ker}(F(1_{C'}, i)) \subseteq \mathrm{Im}(\delta)$. En efecto, sea $\eta : A \xrightarrow{\alpha} B' \xrightarrow{\beta} C'$ un par F-exacto. Luego, $F(1_{C'}, i)(\eta)$ está representado por el par F-exacto inferior del siguiente diagrama F-exacto de pushout (ver 3.1.14)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"] & B' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & C' \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "\alpha'"] & B'' \arrow[r, "\beta'"] & C'. \end{tikzcd}$$

Si $F(1_{C'}, i)(\eta) = 0$ tenemos que el par F-exacto $B \xrightarrow{\alpha'} B'' \xrightarrow{\beta'} C'$ se escinde. Por lo tanto, existe $\lambda : B'' \longrightarrow B$ tal que $1_B = \lambda\alpha'$. Se sigue que $\lambda\gamma\alpha = \lambda\alpha' i =$

$1_B i = i$. Luego $(d\lambda\gamma)\alpha = di = 0$; y como $\beta = \text{Coker}(\alpha)$, tenemos que existe $f : C' \longrightarrow C$ tal que el siguiente diagrama conmuta y es F-exacto

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\lambda\gamma"] & C' \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "d"] & C. \end{tikzcd}$$

Lo cual nos dice, por 3.1.15, que $\eta = \delta(f)$. Por lo tanto $\text{Ker}(F(1_{C'}, i)) \subseteq \text{Im}(\delta)$. Ahora veamos la otra contención. Sea $\eta : A \xrightarrow{\alpha} B' \xrightarrow{\beta} C'$ un par F-exacto tal que $\eta \in \text{Im}(\delta)$. Luego, existe un diagrama conmutativo y F-exacto de pullback de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f'"] & C' \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "d"] & C. \end{tikzcd}$$

Veamos que $F(1_{C'}, i)(\eta)$ se escinde. Tenemos que $F(1_{C'}, i)(\eta)$ está representado por el par F-exacto inferior del siguiente diagrama F-exacto de pushout

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"] & B' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & C' \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "\alpha'"] & B'' \arrow[r, "\beta'"] & C'. \end{tikzcd}$$

Como $f'\alpha = 1_B i$, por la propiedad universal del pushout, existe $\theta : B'' \longrightarrow B$ tal que $\theta\alpha' = 1_B$. De donde tenemos que $F(1_{C'}, i)(\eta) : B \xrightarrow{\alpha'} B'' \xrightarrow{\beta'} C'$ se escinde. Luego $\text{Im}(\delta) \subseteq \text{Ker}(F(1_{C'}, i))$.
(b) Por (a), sólo basta verificar la exactidud en $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(C', B)$. Sea $\eta : B \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} C'$ una conflación tal que $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, d)(\eta) = 0$. Por 3.1.21, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] & A \arrow[d, "\alpha i"] & \\ B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, phantom, "I"] & X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & C' \arrow[d, equal] \\ C \arrow[r, "\alpha'"] & C \oplus C' \arrow[r, "\beta'"] & C' \end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son conflaciones. Observe que $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, d)(\eta)$ está representado por $\xi : C \xrightarrow{\alpha'} C \oplus C' \xrightarrow{\beta'} C'$, donde $\alpha' = \begin{pmatrix} 1_C \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta' = (0, 1_{C'})$ y $\gamma = \begin{pmatrix} \theta \\ \beta \end{pmatrix}$. Del diagrama anterior, se concluye que $\theta\alpha = d$ y que

$\eta' : A \xrightarrow{\alpha i} X \xrightarrow{\gamma} C \oplus C'$ es una conflación. Consideremos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & C' \arrow[d, "k"] \\ A \arrow[r, "\alpha i"] & X \arrow[r, "\gamma"] & C \oplus C', \end{tikzcd}$$

donde $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dado que $\beta'\gamma = \beta$ y $\beta' k = 1_{C'}$, tenemos que $\beta h = \beta'\gamma h = \beta' k g = g$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & C' \arrow[d, equal, "1_{C'}"] \\ B \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "\beta"] & C', \end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones. Por lo tanto, la conflación $\zeta : A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} C'$ es tal que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, i)(\zeta) = \eta$; probándose que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, d)) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, i))$.
Veamos que $\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, i)) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, d))$. En efecto sea $\eta : B \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} C'$ una conflación tal que $\eta \in \mathrm{Im}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, i))$. Entonces, existe $\eta' \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C', A)$ tal que $\eta = i\eta' = \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, i)(\eta')$. Por lo tanto $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, d)(\eta) = d(i\eta') = (di)\eta' = 0\eta' = E_0$, donde E_0 es el neutro aditivo en $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C', C)$ (ver 3.2.7). Próbandose que $\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, i)) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_{C'}, d))$. $\square$

Definición 3.2.17 *Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta, $T : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ un funtor aditivo y F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$. Decimos que*

*(a) T es **$\mathcal{E}_{\mathbf{F}}$-cerrado por la derecha** si para todo $A \in \mathcal{A}$ y todo par e-exacto $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$ en $\mathcal{E}_F$, se tiene que la sucesión $T(A, X) \xrightarrow{T(A,i)} T(A, Y) \xrightarrow{T(A,d)} T(A, Z)$ es exacta en* Ab.

*(b) T es **$\mathcal{E}_{\mathbf{F}}$-cerrado por la izquierda** si para todo $A \in \mathcal{A}$ y todo par e-exacto $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$ en $\mathcal{E}_F$, se tiene que la sucesión $T(Z, A) \xrightarrow{T(d,A)} T(Y, A) \xrightarrow{T(i,A)} T(X, A)$ es exacta en* Ab.

*(c) T es **$\mathcal{E}_{\mathbf{F}}$-cerrado** si es $\mathcal{E}_F$-cerrado por la izquierda y la derecha.*

Observación 3.2.18 *Hemos preferido llamar a $T : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow$* Ab*, $\mathcal{E}_F$-cerrado, en lugar de $\mathcal{E}_F$-exacto (que sería mas natural), por que $\mathcal{E}_F$ no necesariamente es una estructura exacta en $\mathcal{A}$; y además generaliza la definición de cerrado de [23]. Mas adelante, veremos cuando $\mathcal{E}_F$ es una estructura exacta en $\mathcal{A}$.*

Definición 3.2.19 [23] *Una clase de morfismos $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ es una* ***f.class****, si las siguientes condiciones se satisfacen.*

(A) *$\mathcal{M}$ contiene a todas las inflaciones y deflaciones que son morfismos cero. Esto es, si el morfismo cero $0_{A,B} : A \longrightarrow B$ es una inflación o deflación, entonces $0_{A,B} \in \mathcal{M}$*

(B) *Si $\alpha \in \mathcal{M}$ y $\alpha = \sigma\beta\tau$, para algunos isomorfismos σ y τ, entonces $\beta \in \mathcal{M}$.*

(C) *$\alpha \in \mathcal{M}$ si y sólo si* $\operatorname{Ker}(\alpha)$ *y* $\operatorname{Coker}(\alpha)$ *existen, son inflación y deflación, respectivamente; y además pertenecen a $\mathcal{M}$.*

(D1) *Si β y $\alpha\beta$ son inflaciones y $\alpha\beta \in \mathcal{M}$, entonces $\beta \in \mathcal{M}$.*

(D2) *Si α y $\alpha\beta$ son deflaciones y $\alpha\beta \in \mathcal{M}$, entonces $\alpha \in \mathcal{M}$.*

Lema 3.2.20 *Sea $\mathcal{M}$ una clase de morfismos de $\mathcal{A}$. Entonces, $\mathcal{M}$ es una f.class si y sólo si se cumplen los axiomas B, C, D1 y D2 anteriores y el axioma A', donde*
(A') Si $0_{0,A} : 0 \longrightarrow A$ es una inflación (respectivamente, $0_{B,0} : B \longrightarrow 0$ es una deflación), entonces $0_{0,A} : 0 \longrightarrow A$ (respectivamente, $0_{B,0} : B \longrightarrow 0$) pertenece a $\mathcal{M}$.

Demostración. Suponiendo los axiomas B, C y D, veremos que los axiomas A y A' son equivalentes. En efecto, claramente A implica A'. Veamos que los axiomas A' y B implican el axioma A. En efecto, sea $0_{A,B} : A \longrightarrow B$ un morfismo cero que es inflación. Luego, por ser morfismo cero, tenemos que existen únicos $0_{A,0} : A \longrightarrow 0$ y $0_{0,B} : 0 \longrightarrow B$ tales que $0_{A,B} = 0_{0,B}0_{A,0}$. Ahora bien, dado que $0_{A,B} : A \longrightarrow B$ es un inflación, existe una conflación $A \xrightarrow{0_{A,B}} B \xrightarrow{h} C$ con $0_{A,B} = \operatorname{Ker}(h)$. En particular $0_{A,B}$ es un monomorfismo. Ahora veamos que $0_{0,A}0_{A,0} = 1_A$. En efecto $0_{A,0}0_{A,A} = 0_{A,0} = 0_{A,0}1_A$; y como $0_{A,0}$ es un momomorfismo, entonces $1_A = 0_{A,A}$. Por lo tanto, $0_{0,A}0_{A,0} = 0_{A,A} = 1_A$; y dado que $0_{A,0}0_{0,A} = 1_0$, se sigue que $0_{A,0}$ es un isomorfismo con inversa $0_{0,A}$. Del hecho que $h = \operatorname{Coker}(0_{A,B})$ y $0_{A,0}$ es un epimorfismo, es fácil ver que el siguiente par es exacto

$$(0_{0,B}, h) : 0 \xrightarrow{0_{0,B}} B \xrightarrow{h} C.$$

Es decir, que $0_{0,B} = \operatorname{Ker}(h)$ y que $h = \operatorname{Coker}(0_{0,B})$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "0_{A,B}"] \arrow[d, "0_{A,0}"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & C \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r, "0_{0,B}"] & B \arrow[r, "h"] & C. \end{tikzcd}$$

Como la clase $\mathcal{E}$ es cerrada por isomorfismos, tenemos que $0 \xrightarrow{0_{0,B}} B \xrightarrow{h} C$ es una conflación. Luego $0_{0,B}$ es una inflación. Por (A'), tenemos que $0_{0,B}$ pertenece a $\mathcal{M}$. Por otro lado, $0_{0,B} = 1_B 0_{A,B} 0_{0,A}$ donde 1_B y $0_{0,A}$ son isomorfismos. Por B, tenemos que $0_{A,B}$ pertenece a $\mathcal{M}$. □

Definición 3.2.21 [23] *Una clase $\mathcal{M}$ de morfismos de $\mathcal{A}$ es una* ***h.f.class*** *si es una f.class y satisface los siguientes axiomas.*

(E1) Si α y β son inflaciones en $\mathcal{M}$ y $\alpha\beta$ está definida, entonces $\alpha\beta \in \mathcal{M}$

(E2) Si α y β son deflaciones en $\mathcal{M}$ y $\alpha\beta$ está definida, entonces $\alpha\beta \in \mathcal{M}$.

Notación 3.2.22 [23] *Sea $\mathcal{M}$ una f.class en $\mathcal{A}$. Para cada $A, C \in \mathcal{A}$, se define $\mathbf{F}_{\mathcal{M}}\ (C, A)$ como el subconjunto de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C, A)$ cuyos elementos pueden ser representados por una conflación $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$, donde α y β pertenecen a $\mathcal{M}$. Esto es, se tiene la siguiente clase $F_{\mathcal{M}}$ de conflaciones asociada a la clase $\mathcal{M}$ $\mathbf{F}_{\mathcal{M}} := \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{E} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{M}\}$.*

Proposición 3.2.23 *Sea $\mathcal{M}$ una f.class en $\mathcal{A}$. Entonces, la clase $F_{\mathcal{M}}$ es un subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow Sets$, donde para cada par de morfismos $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$ se define $F_{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) := \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(\alpha, \beta)$.*

Demostración. Basta ver que si $\eta \in F_{\mathcal{M}}(C, A)$ y $\alpha : C' \longrightarrow C$, $\beta : A \longrightarrow A'$ en $\mathcal{A}$, entonces $\beta(\eta\alpha) \in F_{\mathcal{M}}(C', A')$. En efecto, sea $\eta : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ con $\eta \in F_{\mathcal{M}}(C, A)$. Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo de pullback

$$\eta\alpha : \begin{tikzcd} A \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & C' \arrow[d, "\alpha"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C, \end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones. Dado que w y $\gamma w = f$ son inflaciones y $f \in \mathcal{M}$, por el axioma $D1$, se tiene que $w \in \mathcal{M}$. Ahora bien, como $\eta\alpha$ es una conflación, tenemos que $w = \mathrm{Ker}(h) \in \mathcal{M}$ y $\mathrm{Coker}(h) = 0_{C',0} \in \mathcal{M}$ (por axioma A). Luego, por el axioma C se tiene que $h \in \mathcal{M}$. Por lo tanto $\eta\alpha \in F_{\mathcal{M}}(C', A)$ pues w, $h \in \mathcal{M}$. Un argumento dual, muestra que $\beta(\eta\alpha) \in F_{\mathcal{M}}(C', A')$. Por lo tanto $F_{\mathcal{M}}$ define un subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow Sets$. $\square$

Notación 3.2.24 [23] *Sea F un subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow Sets$. Definimos la clase $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}$ cuyos morfismos son las inflaciones y deflaciones de todos los pares F-exactos junto con todos los morfismos $\alpha \in \mathcal{A}$, tales que $\mathrm{Ker}(\alpha)$ y $\mathrm{Coker}(\alpha)$ existen y pertenecen a pares F-exactos.*

Lema 3.2.25 [23] *Sea F un subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$. Si $\alpha \in \mathcal{M}_F$ y $\alpha = \sigma\beta\tau$, para algunos isomorfismos σ y τ, entonces $\beta \in \mathcal{M}_F$.*

Demostración. Sean $\alpha : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{M}_F$ y $\sigma : B' \longrightarrow B$ y $\tau : A \longrightarrow A'$ isomorfismos y $\beta : A' \longrightarrow B'$ en $\mathcal{A}$, tal que $\alpha = \sigma\beta\tau$. Supongamos que α es la inflación del par F-exacto $\eta : A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{d} C$. Es fácil ver que el siguiente par $A' \xrightarrow{\beta} B' \xrightarrow{d\sigma} C$ es exacto, es decir, que $\beta = \mathrm{Ker}(d\sigma)$ y $d\sigma = \mathrm{Coker}(\beta)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tau"] & B \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\sigma^{-1}"] & C \arrow[d, equal] \\ A' \arrow[r, "\beta"] & B' \arrow[r, "d\sigma"] & C. \end{tikzcd}$$

Por 3.2.9, tenemos que $A' \xrightarrow{\beta} B' \xrightarrow{d\sigma} C$ es un par F-exacto, y así $\beta \in \mathcal{M}_F$. Si α es una deflación de un par F-exacto, procediendo por dualidad, se prueba que $\beta \in \mathcal{M}_F$.
Ahora supongamos que α es tal que $\mathrm{Ker}(\alpha)$ y $\mathrm{Coker}(\alpha)$ existen y pertenecen a un par F-exacto. Como $\beta = \sigma^{-1}\alpha\tau^{-1}$, se puede ver que $\mathrm{Ker}(\beta)$ y $\mathrm{Coker}(\beta)$ existen, $\mathrm{Ker}(\beta) \simeq \mathrm{Ker}(\alpha)$ y $\mathrm{Coker}(\beta) \simeq \mathrm{Coker}(\alpha)$. Entonces, por lo hecho anteriormente, $\mathrm{Ker}(\beta)$ y $\mathrm{Coker}(\beta)$ pertenecen a $\mathcal{M}_F$. Por lo tanto $\beta \in \mathcal{M}_F$. $\square$

Proposición 3.2.26 [23] *Si F es un subfuntor de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow$ *Sets, entonces $\mathcal{M}_F$ es una f.class.*

Demostración. Como $F(A,0)$ y $F(0,A)$ son no vacíos, el axioma A' (ver 3.2.20) se satisface. Por 3.2.25, y la construccción de $\mathcal{M}_F$, (B) y (C) se satisfacen. Veamos que (D1) se satisface. Sea $\beta : A \longrightarrow B$ un inflación y $\alpha : B \longrightarrow C$ un morfismo en $\mathcal{A}$ tal que $\gamma = \alpha\beta$ es una inflación en $\mathcal{M}_F$. Luego, tenemos el par F-exacto $\eta : A \xrightarrow{\gamma} C \xrightarrow{\gamma'} E$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha"] & D \arrow[d, "\alpha'"] \\ A \arrow[r, "\gamma"] & C \arrow[r, "\gamma'"] & E, \end{tikzcd}$$

donde el primer renglón es una conflación, el segundo es un par F-exacto y α' es el morfismo inducido por la propiedad universal de $\mathrm{Coker}(\beta)$. Por 3.1.15, el cuadrado derecho del diagrama anterior es un pullback. Por lo tanto, $F(\alpha', 1_A)(\eta) \in F(D,A)$ está representado por el par F-exacto $\eta\alpha' : A \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{\beta'} D$. Por lo tanto $\beta \in \mathcal{M}_F$. Análogamente se demuestra (D2). $\square$

Proposición 3.2.27 [23] *Existe una biyeción entre las f.classes y los subfuntores F de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow$ *Sets dada por $\mathcal{M} \mapsto F_{\mathcal{M}}$, con inversa $F \mapsto \mathcal{M}_F$.*

Demostración. Sea F un subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$. Veamos que $F(C,A) = F_{\mathcal{M}_F}(C,A)$ para $A, C \in \mathcal{A}$. En efecto, dada una conflación $\eta : A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$, se tiene que: $\eta \in F(C,A) \iff \alpha,\ \beta \in \mathcal{M}_F \iff \eta \in F_{\mathcal{M}_F}(C,A)$. Por lo tanto $F = F_{\mathcal{M}_F}$.

Ahora, probaremos que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{F_{\mathcal{M}}}$ para una f.class $\mathcal{M}$. Veamos primero que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_{F_{\mathcal{M}}}$. Sea $\alpha : B \longrightarrow E$ un morfismo en $\mathcal{M}$. Entonces, por (C), tenemos que $i = \mathrm{Ker}(\alpha) : A \longrightarrow B$ y $d' = \mathrm{Coker}(\alpha) : E \longrightarrow G$ existen y pertenecen a $\mathcal{M}$; y además, tenemos las conflaciones

$$\eta : A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{d} C \qquad \eta' : D \xrightarrow{i'} E \xrightarrow{d'} G.$$

De nuevo por (C), los morfismos d y d', pertenecen a $\mathcal{M}$. Luego, por definición de $F_{\mathcal{M}}$, tenemos que $\eta \in F_{\mathcal{M}}(C, A)$ y $\eta' \in F_{\mathcal{M}}(G, D)$. Entonces, por definición de $\mathcal{M}_{F_{\mathcal{M}}}$, se concluye que $\alpha \in \mathcal{M}_{F_{\mathcal{M}}}$.
Veamos la otra contención. Sea $\alpha : B \longrightarrow E$ un morfismo en $\mathcal{M}_{F_{\mathcal{M}}}$. Tenemos dos casos:

(a) α es una inflación (resp. deflación) de un par $F_{\mathcal{M}}$-exacto. En el caso que sea una inflación, tenemos un par $F_{\mathcal{M}}$-exacto $\eta : B \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{d} G$. Lo cual, por definición de $F_{\mathcal{M}}$, se sigue que $\alpha \in \mathcal{M}$. Análogamente, si α es una deflación, se tiene que $\alpha \in \mathcal{M}$.

(b) $\alpha : B \longrightarrow E$ es un morfismo tal que $i = \mathrm{Ker}(\alpha) : A \longrightarrow B$ y $d' = \mathrm{Coker}(\alpha) : E \longrightarrow G$ pertenecen a pares $F_{\mathcal{M}}$-exactos. Entonces, por (a), tenemos que i, d' pertenecen a $\mathcal{M}$. Luego por (C), tenemos que $\alpha \in \mathcal{M}$.

Lo anterior, muestra que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{F_{\mathcal{M}}}$; probándose la proposición. $\square$

Lema 3.2.28 [23] *Consideremos el siguiente diagrama en* $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\gamma"] & \\
B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha'"'] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"] & D \arrow[d, equal] \\
E \arrow[r, "h"] & F \arrow[r, "g"] & D,
\end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son deflaciones. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$*, a dicho diagrama, se obtienen los siguientes diagramas*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, D) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(X, B) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, F) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,g)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, D) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(X, E),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(X, A) \arrow[r, "\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(X,\alpha)"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(X, B) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, F) \arrow[r, "\delta'"] & \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(X, A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(X, C),
\end{tikzcd}$$

en los cuales los dos morfismos $\delta\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,g)$, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(X,\alpha)\delta' : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,F) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(X,B)$ *coinciden. Es decir si* $\eta : B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{k} D$ *y* $\zeta : A \xrightarrow{\gamma} C \xrightarrow{f} F$ *son las conflaciones del diagrama de arriba, entonces* $\eta(g\lambda) = \alpha(\zeta\lambda)$ *para todo* $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,F)$.

Demostración. Sea $\lambda : X \longrightarrow F$ un morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,F)$. Luego $\delta\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,g)(\lambda)$ está representado por la conflación $\eta' : B \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\varphi'} X$ del siguiente diagrama conmutativo de pullback

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "t"] & X \arrow[d, "g\lambda"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r, "k"] & D. \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Por otro lado, tenemos los siguientes dos diagramas conmutativos de pullback y pushout

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & W \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "s"] & X \arrow[d, "\lambda"] \\ A \arrow[r, "\gamma"] & C \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"] & W \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "p"] & X \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "\theta"] & Z \arrow[r, "\theta'"] & X, \end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(X,\alpha)\delta'(\lambda)$ está representado por la conflación $\xi : B \xrightarrow{\theta} Z \xrightarrow{\theta'} X$ inferior del segundo diagrama. Del primer diagrama, tenemos que $\lambda\mu' = fs$. Por lo tanto $(g\lambda)\mu' = (gf)s = ks$. Por la propiedad universal del pullback, del diagrama (3.1), existe un único $\psi : W \longrightarrow Y$ tal que $t\psi = s$ y $\varphi'\psi = \mu'$. Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha''"] & W \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\psi"] & X \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[r, "\varphi'"] & X, \end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones y α'' es inducido por la propiedad universal de $\mathrm{Ker}(\varphi')$. Ahora, veamos que $\alpha = \alpha''$. En efecto, $\beta\alpha'' = t\varphi\alpha'' = t\psi\mu = s\mu = \gamma = \beta\alpha$. Como β es un monomorfismo, tenemos que $\alpha = \alpha''$. por lo tanto, se tiene que η' satisface el diagrama de pushout de ξ. Por lo tanto, η' y ξ son equivalentes en $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(X,B)$. Probándose el lema. $\square$

En el siguiente resultado, usaremos las condiciones $(E1)$ y $(E2)$, dadas en 3.2.21; y la proposición 3.2.27.

Proposición 3.2.29 [23, Theorem 1.1] *Sea* F *un subfuntor de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow Sets$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) F *es un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ *si la clase* $\mathcal{M}_F$ *de la definición 3.2.24, satisface la condición* $(E1)$ *o bien la* $(E2)$.

(b) *F es un subfuntor $\mathcal{E}_F$-cerrado por la derecha si y sólo si la clase $\mathcal{M}_F$ satisface $(E1)$.*

(c) *F es un subfuntor $\mathcal{E}_F$-cerrado por la izquierda si y sólo si la clase $\mathcal{M}_F$ satisface $(E2)$.*

Demostración.

(a) Supongamos que la clase $\mathcal{M}_F$ satisface $(E1)$. Sean $\eta : A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ y $\eta' : A \xrightarrow{\alpha'} D \xrightarrow{\beta'} C$ elementos de $F(C, A)$. La suma está definida por $\eta + \eta' := \nabla(\eta \oplus \eta')\Delta$, donde $\Delta : C \longrightarrow C \oplus C$ y $\nabla : A \oplus A \longrightarrow A$ son los morfismos diagonal y codiagonal, respectivamente. Como F es un subfuntor del $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow Sets$, para ver que $\eta + \eta'$ pertenece a $F(C, A)$, basta ver que $\eta \oplus \eta'$ pertenece a $F(C \oplus C, A \oplus A)$. Por 3.2.9 y 3.2.3, tenemos la siguiente conflación

$$\eta \oplus \eta' : \quad A \oplus A \xrightarrow{f} B \oplus D \xrightarrow{g} C \oplus C,$$

donde $f = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix}$ y $g = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}$. Notemos que $h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1_D \end{pmatrix} :$ $A \oplus D \longrightarrow B \oplus D$ y $k = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix} : A \oplus A \longrightarrow A \oplus D$ son tales que $f = hk$. Veamos que $k \in \mathcal{M}_F$. En efecto, por 3.2.2, tenemos la siguiente conflación

$$A \oplus A \xrightarrow{k} A \oplus D \xrightarrow{(0,\beta')} C.$$

Sea $p := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : D \longrightarrow A \oplus D$. Dado que $(0, \beta')p = \beta'$ y $(0, \beta')$, β' son deflaciones y $\beta' \in \mathcal{M}_F$, entonces por (D2) se tiene que $(0, \beta') \in \mathcal{M}_F$. Luego, por (C), tenemos que $k \in \mathcal{M}_F$. Análogamente, se prueba que $h \in \mathcal{M}_F$. Por lo tanto, por (E1), tenemos que $f = hk \in \mathcal{M}_F$. Entonces, por (C), tenemos que $g \in \mathcal{M}_F$. Por lo tanto, $\eta \oplus \eta'$ pertenece a $F(C \oplus C, A \oplus A)$; probándose que F es un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$. Análogamente se prueba que F es un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ si la clase $\mathcal{M}_F$ satisface (E2).

(b) ($\Longleftarrow$) Supongamos que la clase $\mathcal{M}_F$ satisface $(E1)$. Veamos que F es un funtor $\mathcal{E}_F$-cerrado por la derecha. Sea $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ un par exacto en $\mathcal{E}_F$. Veamos que $F(X, A) \overset{F(1_X,\alpha)}{\longrightarrow} F(X, B) \overset{F(1_X,\beta)}{\longrightarrow} F(X, C)$ es exacta. Para esto basta ver que $\mathrm{Ker}(F(1_X, \beta)) \subseteq \mathrm{Im}(F(1_X, \alpha))$. En efecto, sea $\eta : B \xrightarrow{\alpha'} E \xrightarrow{\beta'} X$ en $F(X, B)$ tal que $F(1_X, \beta)(\eta) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_X, \beta)(\eta) = \beta\eta = 0$. Como $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_X, \beta)$ es exacto (ver 3.2.16), existe una conflación $\eta' : A \xrightarrow{\lambda} E' \xrightarrow{\lambda'} X$ tal que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_X, \alpha)(\eta') = \eta$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo de pullback

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"] & E' \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\gamma"] & X \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "\alpha'"] & E \arrow[r, "\beta'"] & X. \end{tikzcd}$$

Como las inflaciones α y α' están en $\mathcal{M}_F$, pues pertenecen a pares F-exactos. Por $(E1)$, tenemos que $\alpha'\alpha = \gamma\lambda \in \mathcal{M}_F$. Luego, como λ es una inflación y $\gamma\lambda$ es una inflación en $\mathcal{M}_F$, entonces por (D1), tenemos que $\lambda \in \mathcal{M}_F$. Luego, por (C), tenemos que $\lambda' \in \mathcal{M}_F$. Por lo tanto, η' es un par F-exacto y es tal que $F(1_X, \alpha)(\eta') = \eta$; probándose que F es $\mathcal{E}_F$-cerrado por la derecha.
$(\Longrightarrow)$ Supongamos ahora que F es $\mathcal{E}_F$-cerrado por la derecha. Veamos que la clase $\mathcal{M}_F$ satisface la condición $(E1)$. En efecto, sean $\alpha : A \longrightarrow B$ y $\beta : B \longrightarrow C$ dos inflaciones en $\mathcal{M}_F$. Por 3.1.21, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha'"'] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"] & D \arrow[d, equal] \\ E \arrow[r, "h"] & G \arrow[r, "g"] & D, \end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son conflaciones. Veamos que $\xi : A \xrightarrow{\gamma} C \xrightarrow{f} G$ es un par F-exacto. Consideremos los pares F-exactos $\zeta : A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\alpha'} E$ y $\eta : B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{k} D$. Por 3.2.28, tomando $X = G$, tenemos que $\eta g = \delta\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, g)(1_G) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(G, \alpha)\delta'(1_G) = \alpha(\xi 1_G) = \alpha\xi$. Como $\eta \in F(D, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, D)$, entonces $\alpha\xi = \eta g \in F(G, B)$. Ahora bien, dado que F es $\mathcal{E}_F$-cerrado por la derecha, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, E) \xrightarrow{\delta} F(G, A) \xrightarrow{F(1_G, \alpha)} F(G, B) \xrightarrow{F(1_G, \alpha')} F(G, E)\ .$$

Como $F(1_G, \alpha')(\alpha\xi) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_G, \alpha')(\alpha\xi) = \alpha'(\alpha\xi) = (\alpha'\alpha)\xi = 0\xi = 0$, existe un par F-exacto $\xi' : A \xrightarrow{\varphi} Z \xrightarrow{\varphi'} G$ tal que $F(1_G, \alpha)(\xi') = \alpha\xi' = \alpha\xi$. Es decir, $0 = \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_G, \alpha)(\xi - \xi')$. Dado que la siguiente sucesión es exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, E) \xrightarrow{\quad\delta\quad} \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(1_G, \alpha)} \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(G, B),$$

existe $h : G \longrightarrow E$ tal que $\zeta h = \delta(h) = \xi - \xi'$. Como ζ es un par F-exacto, tenemos que ζh es un par F-exacto; y como también ξ' es F-exacto, entonces ξ es F-exacto, pues $F(G,A)$ es un subgrupo de $\operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}(G,A)$. Por lo tanto $\gamma = \beta\alpha$ es una inflación en $\mathcal{M}_F$; probándose (b). $\square$

Sea F subfuntor aditivo de $\operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$. Recordemos (ver 3.2.8), que $\mathcal{E}_F$ denota a la clase de pares F-exactos.

Proposición 3.2.30 *Sean F un subfuntor aditivo de $\operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ que es $\mathcal{E}_F$-cerrado y el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\beta\alpha"] & \\ B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "I"] & C \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"] & D \arrow[d, equal] \\ E \arrow[r] & G \arrow[r, "g"] & D, \end{tikzcd}$$

en una categoría exacta $\mathcal{A}$ en la cual los idempotentes se escinden, donde los renglones y columnas son conflaciones. Entonces, el cuadrado I es un pullback y pushout; y se satisfacen las siguientes condiciones.

(a) Si la primera columna y el primer renglón son F-exactas, entonces la segunda columna y segundo renglón son F-exactas, es decir, todo el diagrama es F-exacto.

(b) Si la segunda columna y el segundo renglón son F-exactas, entonces el primer renglón y la primera columna son F-exactos, es decir, todo el diagrama es F-exacto.

Demostración. Que I sea un pullback y pushout se sigue de 3.1.15 y 3.1.14. Por otro lado, (a) se sigue de 3.1.21, 3.2.29(b) y del hecho de que el pullback y pushout de F-pares exactos es F-exacto. Finalmente, (b) se sigue de (a) por dualidad. $\square$

Proposición 3.2.31 [27, 1.4] *Sea F un subfuntor aditivo del* $\operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) La clase $\mathcal{E}_F$ es una estructura exacta en $\mathcal{A}$.

(b) F es $\mathcal{E}_F$-cerrado por la izquierda.

(c) F es $\mathcal{E}_F$-cerrado por la derecha.

(d) F es $\mathcal{E}_F$-cerrado.

Demostración. Sea F un subfuntor aditivo de $\operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$. Como la clase $\mathcal{E}_F$ es cerrada por pullbacks y pushouts, los axiomas $E2$ y $(E2)^{op}$ se satisfacen. Como $F(0,0)$ es un subgrupo de $\operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}(0,0)$, tenemos que $F(0,0)$ contiene a todos los pares exactos que se escinden que empiezan y terminan en 0. Luego el siguiente par es F-exacto $0 \xrightarrow{1_0} 0 \xrightarrow{1_0} 0$. Por lo tanto, $1_0 : 0 \longrightarrow 0$ es una deflación,

satisfaciendose $E0$.
$(a) \iff (b)$. Por 3.2.29 (c), tenemos que $\mathcal{E}_F$ satisface $E1$ si y sólo si F es $\mathcal{E}_F$-cerrado por la izquierda.
$(b) \implies (c)$ Supongamos que F es $\mathcal{E}_F$-cerrado por la izquierda. Luego, tenemos que $\mathcal{E}_F$ es una estructura exacta en $\mathscr{A}$. Por 3.1.18, tenemos que la composición de dos inflaciones en $\mathcal{E}_F$ es una inflación. Luego, por 3.2.29 (b), tenemos que F es $\mathcal{E}_F$ cerrado por la derecha.
$(b) \implies (d)$ Supongamos que F es $\mathcal{E}_F$-cerrado por la izquierda. Sabemos que ser cerrado por la izquierda implica ser cerrado por la derecha, por lo tanto, F es $\mathcal{E}_F$-cerrado por izquierda y derecha, es decir, es $\mathcal{E}_F$-cerrado.
Las implicaciones restantes se siguen por dualidad, usando 3.1.19. $\square$

Como consecuencia de 3.2.31 y 3.2.29, tenemos la siguiente caracterización de las estructuras exactas en categorías abelianas.

Corolario 3.2.32 [27, 1.6] *Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, entonces cualquier estrutura exacta $\mathcal{E}$ en $\mathcal{A}$ es de la forma $\mathcal{E}_F$ para algún subfuntor aditivo cerrado de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(-,-)$.

Demostración. Consideremos la estructura exacta $\mathcal{E}'$ que hace a $\mathcal{A}$ una categoría abeliana; es decir $\mathcal{E}'$ consta de todas las sucesiones exactas en $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{E}$ una estructura exacta en $\mathcal{A}$. Entonces, sabemos que los pares exactos en $\mathcal{E}$ son cerrados por isomorfismos, pullbacks y pushouts. Entonces, $\mathcal{E}$ define un subfuntor $F_{\mathcal{E}} : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow Sets$ de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(-,-)$. Como $\mathcal{E}$ es una f.class, por 3.2.27 tenemos que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{F_{\mathcal{E}}}$. Como $\mathcal{E}$ satisface $E1$ y $E2$, por 3.2.29, tenemos que $F_{\mathcal{E}}$ es un subfuntor $\mathcal{E}_{F_{\mathcal{E}}}$-cerrado y aditivo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(-,-)$, probándose el resultado. $\square$

Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{A}$. Definimos bifuntores $F_{\mathcal{X}}, F^{\mathcal{X}} : (\mathcal{A})^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ dados por las siguientes asignaciones.

(a) $F_{\mathcal{X}}(C,A) := \{A \longrightarrow B \longrightarrow C \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,B)|_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,C)|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0 \text{ es exacto}\}$ y $F_{\mathcal{X}}(\alpha,\beta) := \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)$.

(b) $F^{\mathcal{X}}(C,A) := \{A \longrightarrow B \longrightarrow C \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,-)|_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,-)|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0 \text{ es exacto}\}$ y $F^{\mathcal{X}}(\alpha,\beta) := \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(\alpha,\beta)$.

Luego, tenemos el siguiente resultado que generaliza a 1.1.23 (también ver [7, 1.7,1.8]).

Proposición 3.2.33 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos de $\mathcal{A}$. Entonces $F_{\mathcal{X}}$ y $F^{\mathcal{X}}$ son subfuntores aditivos de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$.

Demostración. La misma demostración de 1.1.23 funciona. $\square$

Proposición 3.2.34 [27, 1.7] *El subfuntor aditivo $F_{\mathcal{X}}$ (resp. $F^{\mathcal{X}}$) de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ *es $\mathcal{E}_{F_{\mathcal{X}}}$-cerrado (resp. $\mathcal{E}_{F^{\mathcal{X}}}$-cerrado) para cualquier clase de objetos $\mathcal{X}$ de $\mathcal{A}$.*

Demostración. La prueba de 1.4.14, funciona en este caso. □

La situación clásica de esta construcción es el siguiente. Sea Λ una R-álgebra de artin, considerando a $\mathrm{mod}(\Lambda)$ con su estructura abeliana y para una clase de objetos $\mathcal{X}$ de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ se definen $F^{\mathcal{X}}$ y $F_{\mathcal{X}}$ como arriba. Entonces, muchos de los resutados de [6] que fueron desarrollos en el capítulo 1, caen en el contexto de una categoría exacta.

Tenemos las siguientes inclusiones de subfuntores aditivos de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-) : (\mathcal{A})^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$:

$$\{F_{\mathcal{X}} \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}\} \subseteq \{\text{subfuntores cerrados}\} \subseteq \{\text{todos los subfuntores}\}$$

En [27], se ve que la última inclusión es propia, es decir, no todos los subfuntores aditivos son cerrados. Recordemos (ver 1.1.12), que dado un subfuntor aditivo F de $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(-,-)$, denotamos por $\mathcal{P}(F)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ consistiendo de módulos P tal que $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(P,-)$ es exacta sobre todas las sucesiones F-exactas. Tenemos el sigiente resultado que caracteriza a los subfuntores cerrados de $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Recordemos que Λ es de tipo finito si en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ existen un número finito de Λ-módulos inescindibles salvo isomorfismos.

Proposición 3.2.35 [27, 1.8] *Sea Λ una R-álgebra de artin de tipo finito. Si F es un subfuntor aditivo cerrado de $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(-,-)$, entonces $F = F_{\mathcal{P}(F)}$.*

Demostración. Ver [27, 1.8]. □

3.3. R-categorías de artin

Sean R un anillo conmutativo artiniano y $\mathcal{A}$ una categoría. Recordemos que $\mathcal{A}$ es una R-categoría si la composición de morfismos en $\mathcal{A}$ es R-bilineal. Esto es, para cada par de objetos X, $Y \in \mathcal{A}$, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ es un R-módulo; y las siguientes igualdades se satisfacen

$$f(rg+h) = r(fg) + fh,$$

$$(rg+h)t = r(gt) + ht,$$

donde f, g, h y t son morfismos en $\mathcal{A}$, cuyas composiciones están definidas y $r \in R$.
Observe que, en una R-categoría $\mathcal{A}$, para cada $X \in \mathcal{A}$ el conjunto de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$ es una R-álgebra de manera natural.

Definición 3.3.1 *Una* **R-*categoría exacta*** *es un par $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ donde: $\mathcal{A}$ es una R-categoría, en la cual los idempotentes se escinden; y $\mathcal{E}$ es una estructura exacta en $\mathcal{A}$.*

Observación 3.3.2 *De 3.1.19, se sigue que el par $(\mathcal{A}^{op},\mathcal{E}^{op})$ es una R-categoría exacta.*

En todo lo que sigue, $\mathcal{A}$ denotará a una R-categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$. Además, para cada $t \in \mathbb{N}$, consideraremos el conjunto $[1, t] := \{1, 2, \cdots, t\}$.

Notación 3.3.3 *En toda esta sección, cuando digamos que un subfuntor aditivo F de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ es* ***cerrado****, nos referiremos a que F es $\mathcal{E}_F$-cerrado.*

Definición 3.3.4 *Sea $\mathcal{A}$ una R-categoría.*

(a) Decimos que $\mathcal{A}$ es **Hom-*finita*** *, si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ es un R-módulo finitamente generado para cada X, $Y \in \mathcal{A}$.*

(b) Decimos que $\mathcal{A}$ es ***Krull-Schmidt****, si cualquier objeto $X \in \mathcal{A}$ admite una descomposición finita $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ tal que cada X_i es inescindible y el anillo de endomorfismo $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X_i)$ es local.*

Definición 3.3.5 *Decimos que una categoría $\mathcal{A}$ es una* ***R-categoría de artin*** *si las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{A}$ es una R-categoría.

(b) $\mathcal{A}$ es Hom-finita.

(c) $\mathcal{A}$ es Krull-Schmidt.

Definición 3.3.6 *Decimos que una categoría $\mathcal{A}$ es una* ***R-categoría exacta de artin*** *si $\mathcal{A}$ es una R-categoría de artin y $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ es exacta para alguna estructura exacta $\mathcal{E}$.*

Ejemplo 3.3.7 *Sea Λ una R-álgebra de artin. Entonces $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es una R-categoría exacta de artin.*

Notación 3.3.8 *Sea Γ un anillo asociativo. Denotaremos por $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ a la categoría de Γ-módulos a izquierda (no necesariamente finitamente generados) y por $\mathrm{proj}(\Gamma)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ cuyos objetos son los Γ-módulos proyectivos finitamente generados.*

Proposición 3.3.9 [44, 1.3.1] *Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva en la cual los idempotentes se escinden. Dado un objeto X con $\Gamma := \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)^{op}$, el funtor evaluación $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Gamma)$ induce una equivalencia $\mathrm{add}(X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{proj}(\Gamma)$.*

El siguiente resultado, es bien conocido.

Proposición 3.3.10 [65, A.1] *Una categoría aditiva $\mathcal{A}$ es Krull-Schmidt si y sólo si los idempotentes en $\mathcal{A}$ se escinden y $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$ es un anillo semiperfecto para cada $X \in \mathcal{A}$.*

Proposición 3.3.11 *Sean $\mathcal{A}$ una R-categoría artin, $A \in \mathcal{A}$ y $\Gamma := \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A)^{op}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Γ *es una R-álgebra de artin.*

(b) El funtor de evaluación en A, $\mathfrak{e}_A := \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$*, está bien definido e induce una equivalencia de categorías* $\mathrm{add}(A) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{proj}(\Gamma)$.

Demostración.

(a) Para $f \in \mathfrak{e}_A(X)$ y $\lambda^{op} \in \Gamma$, definimos $\lambda^{op} \bullet f := f\lambda$. es fácil ver que esto define una estructura de Γ-módulo a izquierda en $\mathfrak{e}_A(X)$.
Notemos que, como $\mathcal{A}$ es una R-categoría de artin Hom-finita, entonces Γ es una R-álgebra de artin. En efecto, como $\mathcal{A}$ es Hom-finita, se tiene que $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A)$ es un R-módulo finitamente generado y también $r(fg) = (rf)g = f(rg)$, $\forall f, g \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A)$ y $\forall r \in R$ ya que $\mathcal{A}$ es una R-categoría. Definimos $\varphi : R \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A)$, por $\varphi(r) := r1_A$. Se verifica directamente que φ es un morfismo de anillos y que $\mathrm{Im}(\varphi)$ está contenida en el centro de $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A)$. Por lo tanto $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A)$ es una R-álgebra de artin, de donde Γ es una R-álgebra de artin.

(b) Por 3.3.10 y 3.3.9, tenemos un funtor $\mathfrak{e}_A := \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Gamma)$, Veamos que podemos restringir el codominio de $\mathfrak{e}_A$ a $\mathrm{mod}(\Gamma)$. En efecto, para $X \in \mathcal{A}$ tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ es un R-módulo finitamente generado, es decir, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X) = \langle f_1, f_2, \dots f_n \rangle_R$ como R-módulo con $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$. Entonces, para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ se sigue que $f = \sum_{i=1}^{n} r_i f_i$. Pero $r_i f_i = r_i(f_i 1_A) = f_i(r_i 1_A) = f_i(r_i 1_{\mathrm{End}(A)}) = (r_i 1_{\mathrm{End}(A)}) \bullet f_i$ donde, $\lambda_i := (r_i 1_{\mathrm{End}(A)}) \in \Gamma$. Luego $_\Gamma(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)) = \langle \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \rangle_\Gamma$ como Γ-módulo, de esta manera podemos restringir el codominio de $\mathfrak{e}_A$. Esto es, $\mathfrak{e}_A := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$ está bien definido. La última parte de (b) se sigue de 3.3.9. $\square$

Corolario 3.3.12 *Sean* $\mathcal{A}$ *una R-categoría exacta de artin,* $A \in \mathcal{A}$ *y* $\Gamma := \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A)^{op}$*. Entonces, el funtor evaluación* $e_A : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$ *cumple que:*

$$e_A : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma}(e_A(Z), e_A(X))$$

es un isomorfismo, $\forall Z \in \mathrm{add}(A)$ *y* $\forall X \in \mathcal{A}$.

Demostración. Se sigue de 3.3.11. $\square$

3.4. Objetos filtrados en una categoría exacta

Sean $M \in \mathcal{A}$ y F un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$. Decimos que M admite una F-filtración si existe una sucesión de parejas F-exactas

$$\{\xi_i : M_{i-1} \to M_i \to X_i\}_{i=1}^{m}$$

tal que $M_0 = 0$ y $M_m = M$. Dada una clase de objetos $\mathcal{C}$ en $\mathcal{A}$, se dice que M tiene una F-filtración en $\mathcal{C}$ (o bien que M es F-filtrado en $\mathcal{C}$) si existe una F-filtración de M

$$\{\xi_i : M_{i-1} \to M_i \to X_i\}_{i=1}^{m}$$

con $X_i \simeq C_i \in \mathcal{C}$ para $i = 1, \ldots, m$. Denotaremos por $\mathscr{F}_F(\mathcal{C})$ a la clase de objetos en $\mathcal{A}$ que son F-filtrados en $\mathcal{C}$.

Definición 3.4.1 *Sea $M \in \mathscr{F}_F(\mathcal{C})$. Dada una F-filtración de M en $\mathcal{C}$*

$$\xi : \quad \{\xi_i : M_{i-1} \to M_i \to X_i\}_{i=1}^m.$$

(a) Decimos que la **F-*longitud relativa*** *a ξ de M es $\ell_{F,\xi}(M) := m$ y que la* **F-*longitud*** *de M es $\ell_F(M) := \min\{\ell_{F,\xi}(M) \mid \xi$ es una F-filtración de $M\}$,*

(b) Para $C \in \mathcal{C}$, definimos por $[M : C]_\xi := n$ a a la ***multiplicidad relativa*** *a ξ de M donde n es el número de X_i que aparecen en la filtración ξ, que son isomorfos a C.*

Recordemos que la clase F-perpendicular izquierda de $\mathcal{C}$ es

$${}^{F\perp}\mathcal{C} := \{X \in \mathcal{A} \mid F(X, C) = 0 \quad \forall\, C \in \mathcal{C}\}.$$

En todo lo que sigue, F denotará a un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$, donde $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ es una R-categoría exacta.

Definición 3.4.2 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{A}$. Decimos que $\mathcal{X}$ es* ***cerrada por*** **F-*extensiones*** *si para cada par F-exacto $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\alpha'} C$ con $A, C \in \mathcal{X}$, se tiene que $B \in \mathcal{X}$.*

Proposición 3.4.3 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos de $\mathcal{A}$. Si F es cerrado entonces la clase $\mathscr{F}_F(\mathcal{X})$ es cerrada por F-extensiones y sumas directas finitas.*

Demostración. Sea $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ un par F-exacto con $A, C \in \mathscr{F}_F(\mathcal{X})$.
La prueba se hará por inducción sobre $n = \ell_F(C)$.
Si $C = 0$, se tiene que $A \simeq B$ y en tal caso $B \in \mathscr{F}_F(\mathcal{X})$.
Si $\ell_F(C) = 1$, entonces $C \simeq X \in \mathcal{X}$. Por lo tanto una F-filtración de B en $\mathcal{X}$, no es más que el par F-exacto $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ junto con los pares F-exactos de la F-filtración de A en $\mathcal{X}$.
Supongamos que $\ell_F(C) > 1$. Consideremos una F-filtración mínima de C en $\mathcal{X}$, $\{\eta_i : C_{i-1} \longrightarrow C_i \longrightarrow X_i\}_{i=0}^n$. Luego, 3.1.22 y 3.2.30 (b) tenemos siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
& X_n \arrow[r, equal] & X_n
\end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son F-exactos y $\ell_F(C_{n-1}) < \ell_F(C)$. Por hipótesis de inducción, aplicada al primer renglón del diagrama anterior, tenemos que

$B_{n-1} \in \mathscr{F}(\mathcal{X})$. Por lo tanto, una $\mathcal{X}$-filtración de B está dada por el par F-exacto $B_{n-1} \longrightarrow B \longrightarrow X_n$ junto con los pares F-exactos de la F-filtración de B_{n-1} en $\mathcal{X}$.
Ahora veamos que $\mathscr{F}_F(\mathcal{X})$ es cerrado por sumas directas finitas. Sólo basta hacerlo para dos objetos. En efecto, sean $A, B \in \mathscr{F}_F(\mathcal{X})$. Por 3.1.20, tenemos el siguiente par F-exacto $A \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow B$. Luego, como $\mathscr{F}_F(\mathcal{X})$ es cerrado por extensiones, tenemos que $A \oplus B \in \mathscr{F}_F(\mathcal{X})$. $\square$

Proposición 3.4.4 *Sean F cerrado, $T : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ un funtor $\mathcal{E}$-cerrado y G un subfuntor aditivo $\mathcal{E}_F$-cerrado de T. Sean $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ clases de objetos en $\mathcal{A}$. Si $G(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = 0$ entonces $G(\mathscr{F}_F(\mathcal{Y}), \mathscr{F}_F(\mathcal{Z})) = 0$*

Demostración. Sean $N \in \mathscr{F}_F(\mathcal{Y})$ y $M \in \mathscr{F}_F(\mathcal{Z})$. Probaremos por inducción sobre $\ell_F(N)$, que $G(N, M) = 0$. Podemos asumir que $M \neq 0$ y $N \neq 0$.
Sea $\ell_F(N) = 1$. Entonces $N \simeq Y \in \mathcal{Y}$. Haremos inducción sobre $\ell_F(M)$; si $\ell_F(M) = 1$, entonces $M \simeq Z$ con $Z \in \mathcal{Z}$ y por lo tanto $G(N, M) \simeq G(Y, Z) = 0$.
Sea $\ell_F(M) = m > 1$. Luego, existe un par F-exacto

$$\eta_m : \quad M_{m-1} \longrightarrow M \longrightarrow Z_m$$

tal que $M_{m-1} \in \mathscr{F}_F(\mathcal{Z})$, $Z_m \in \mathcal{Z}$ y $\ell_F(M_{m-1}) = m-1$. Entonces, por hipótesis de inducción $G(Y, M_{m-1}) = 0$. Aplicando $G(Y, -)$ al par F-exacto η_m, tenemos la sucesión exacta

$$G(Y, M_{m-1}) \longrightarrow G(Y, M) \longrightarrow G(Y, Z_m).$$

Como $G(Y, M_{m-1}) = G(Y, Z_m) = 0$, concluimos de la sucesión exacta anterior que $G(N, M) \simeq G(Y, M) = 0$.
Supongamos que $\ell_F(N) > 1$. Luego, existe un par F-exacto

$$\eta_n : \quad N_{n-1} \longrightarrow N \longrightarrow Y_n$$

tal que $N_{n-1} \in \mathscr{F}_F(\mathcal{Y})$, $Y_n \in \mathcal{Y}$ y $\ell_F(N_{n-1}) = n-1$. Aplicando $G(-, M)$ al par F-exacto η_n, tenemos la sucesión exacta

$$G(Y_n, M) \longrightarrow G(N, M) \longrightarrow G(N_{n-1}, M).$$

Por inducción, tenemos que $G(Y_n, M) = G(N_{n-1}, M) = 0$, por lo tanto $G(N, M) = 0$. $\square$

Corolario 3.4.5 *Sean F cerrado y $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ clases de objetos en $\mathcal{A}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $F(\mathscr{F}_F(\mathcal{Y}), \mathscr{F}_F(\mathcal{Z})) = 0$ *si* $F(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = 0$.

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}_F(\mathcal{Y}), \mathscr{F}_F(\mathcal{Z})) = 0$ *si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = 0$.

Demostración. Se sigue de que F y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, -)$ son $\mathcal{E}_F$-cerrados y de 3.4.4.
$\square$

Corolario 3.4.6 *Sean F cerrado y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ una clase de objetos en $\mathcal{A}$. Entonces* ${}^{F\perp}\mathcal{C} = {}^{F\perp}(\mathscr{F}_F(\mathcal{C}))$.

Demostración. Veamos que ${}^{F\perp}\mathcal{C} \subseteq {}^{F\perp}(\mathscr{F}_F(\mathcal{C}))$. En efecto, sea $Y \in {}^{F\perp}\mathcal{C}$. Por 3.4.5 (a), tenemos que $F(Y, \mathscr{F}_F(\mathcal{C})) = 0$, pues $F(Y, \mathcal{C}) = 0$. Por lo tanto, $Y \in {}^{F\perp}(\mathscr{F}_F(\mathcal{C}))$. Por otro lado, como $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{F}_F(\mathcal{C})$, se tiene que ${}^{F\perp}(\mathscr{F}_F(\mathcal{C})) \subseteq {}^{F\perp}\mathcal{C}$. $\square$

Observación 3.4.7 *Recordemos que un monomorfismo (resp. epimorfismo) $\alpha : A \longrightarrow B$ (resp. $\beta : C \longrightarrow D$) en $\mathcal{A}$, es un F-mono (resp. F-epi) si $A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow$* $\mathrm{Coker}(\alpha)$ *(resp.* $\mathrm{Ker}(\beta) \longrightarrow C \xrightarrow{\beta} D$*) es un par F-exacto.*

Lema 3.4.8 *Sean $\mathcal{A}$ una categoría exacta en la cual los idempotentes se escinden y F cerrado. Consideremos $Z \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} \theta_1$ y $Y \xrightarrow{i'} X \xrightarrow{d'} \theta_2$ pares F-exactos. Si $F(\theta_2, \theta_1) = 0$ entonces existen dos pares F-exactos $Z \longrightarrow W \longrightarrow \theta_2$ y $W \longrightarrow X \longrightarrow \theta_1$.*

Demostración. Por 3.1.21, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] & Z \arrow[d, "i'i"] & \\ Y \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "d"] & X \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "\beta"] & \theta_2 \arrow[d, equal] \\ \theta_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & C \arrow[r, "\alpha_2"] & \theta_2, \end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son conflaciones. El par $\eta : Z \xrightarrow{i'i} X \xrightarrow{\beta} C$ es F-exacto, por 3.2.30. También, el par $\eta' : \theta_1 \xrightarrow{\alpha_1} C \xrightarrow{\alpha_2} \theta_2$ es F-exacto, pues es pushout de una sucesión F-exacta. Además, η' se escinde pues $F(\theta_2, \theta_1) = 0$. Luego, existen $\beta_2 : \theta_2 \longrightarrow C$ y $\beta_1 : C \longrightarrow \theta_1$ tales que $\beta_1\alpha_1 = 1_{\theta_1}$ y $\alpha_2\beta_2 = 1_{\theta_2}$. Por lo tanto, tenemos el siguiente par F-exacto que se escinde

$$\xi : \theta_2 \xrightarrow{\beta_2} C \xrightarrow{\beta_1} \theta_1.$$

Por 3.1.22, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \arrow[r] \arrow[d] & \theta_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\ Z \arrow[r, "i'i"] & X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\pi"] & C \arrow[d, "\beta_1"] \\ & \theta_1 \arrow[r, equal] & \theta_1, \end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son conflaciones. Por 3.2.30 (b), tenemos que; como el renglón de enmedio η es F-exacto, entonces $\xi' : Z \longrightarrow W \longrightarrow \theta_2$ y $\xi'' : W \longrightarrow X \longrightarrow \theta_1$ son pares F-exactos. Por lo tanto, los pares F-exactos buscados son ξ' y ξ''. $\square$

Lema 3.4.9 *Sean $\mathcal{A}$ una categoría exacta, en la cual los idempotentes se escinden, F cerrado y $\theta \in \mathcal{A}$ tal que $F(\theta, \theta) = 0$. Consideremos una sucesión de pares F-exactos de la siguiente forma*

$$\{\eta_j : M_{j-1} \longrightarrow M_j \longrightarrow \theta\}_{j=1}^{n}.$$

Entonces, para cada $k \in [1, n]$, existe un par F-exacto de la forma:

$$\xi_k : M_0 \longrightarrow M_k \longrightarrow \theta^k .$$

Demostración. Por inducción sobre k. Para $k = 1$, definimos $\xi_1 := \eta_1$. Supongamos que tenemos ξ_{k-1}. Por 3.1.21 y 3.2.30, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y F-exacto

$$\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & M_0 \arrow[d] & \\
M_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & M_k \arrow[r] \arrow[d] & \theta \arrow[d, equal] \\
\theta^{k-1} \arrow[r] & L_k \arrow[r] & \theta.
\end{tikzcd}$$

Como $F(\theta, \theta) = 0$, el par F-exacto inferior del diagrama anterior se escinde; y así $L_k \simeq \theta^k$. Por lo tanto, el par F-exacto de la segunda columna del diagrama anterior es el buscado, esto es,

$$\xi_k : M_0 \longrightarrow M_k \longrightarrow L_k. \ \square$$

Proposición 3.4.10 *Sean $\mathcal{A}$ una categoría exacta, en la cual los idempotentes se escinden y F cerrado. Consideremos una familia $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ de objetos en $\mathcal{A}$; y un orden lineal $\leq$ en $[1, t]$ tal que $F(\Theta(j), \Theta(i)) = 0, \ \forall\, j \geq i$. Si $M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$ y ξ es una F-filtración de M en Θ, con $\ell_{F,\xi}(M) = n$, entonces existe una F-filtración η de M en Θ y una familia Ξ de pares F-exactos tales que:*

(a) $m(i) := [M : \Theta(i)]_\xi = [M : \Theta(i)]_\eta, \qquad \forall\, i \in [1, t]$,

(b) *η está ordenada, i.e, $\eta = \{\eta_i : M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow \Theta(k_i)\}_{i=1}^{n}$ con $M_0 := 0$ y $k_n \leq k_{n-1} \leq \cdots \leq k_1$ en $([1, t], \leq)$.*

(c) $\Xi = \{\Xi_i : M'_{i-1} \longrightarrow M'_i \longrightarrow \Theta(\lambda_i)^{m(\lambda_i)}\}_{i=1}^d$, *donde* $\{\Theta(\lambda_i)\}_{i=1}^d$ *es el conjunto de los* $\Theta(j)$ *distintos que aparecen en la* F*-filtración* ξ*; y además,* $M'_0 = 0$ *y* $\lambda_d < \lambda_{d-1} < \cdots < \lambda_1$ *en* $([1,t], \leq)$,

Demostración. Podemos asumir que $M \neq 0$, pues en este caso, el resultado es trivial.

(a) y (b) Sea $\xi := \{\xi_i : M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow \Theta(k_i)\}_{i=1}^n$ la F-filtración dada, de M en Θ. Procederemos por inducción sobre $n := \ell_{F,\xi}(M)$. Si $n = 1$, tenemos que la F-filtración $\eta := \xi$ satisface lo deseado. Sea $n \geq 2$. Dado que $\xi' := \xi - \{\xi_n\}$ es una F-filtración de M_{n-1} en Θ y $\ell_{F,\xi'}(M_{n-1}) = n-1$, se tiene por inducción que existe una F-filtración de M_{n-1} en Θ

$$\eta' = \{\eta'_i : M'_{i-1} \longrightarrow M'_i \longrightarrow \Theta(k'_i)\}_{i=1}^{n-1},$$

satisfaciendo que $k'_{n-1} \leq k'_{n-2} \leq \cdots \leq k'_1$ y $[M_{n-1} : \Theta(i)]_{\xi'} = [M_{n-1} : \Theta(i)]_{\eta'}$, $\forall\, i$. Si $k_n \leq k'_{n-1}$, tenemos que $\eta := \eta' \cup \{\xi_n\}$ satisface lo requerido. Supongamos que $k'_{n-1} < k_n$; y sea $l := \max\{m \in [1, n-1] \mid k'_{n-m} < k_n\}$. Observe que la F-filtración $\eta' \cup \{\xi_n\}$ es casi la que buscamos, el único par F-exacto que no tiene multiplicidad ordenada es precisamente el ξ_n. Esto se arregla aplicando, l-veces, 3.4.8 a $\eta' \cup \{\xi_n\}$.

(c) Por (b), existe una F-filtración ordenada de M en Θ

$$\eta = \{\eta_i : M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow \Theta(k_i)\}_{i=1}^n,$$

con $k_n \leq k_{n-1} \leq \cdots \leq k_1$ en $([1,t], \leq)$ y $M_0 := 0$. Para $i \in [1,n]$, agrupamos los k_i que son los mismos y los renombramos por λ_i.
Sean $\Theta(\lambda_1), \ldots, \Theta(\lambda_d)$ los diferentes $\Theta(j)$ que aparecen en la filtración η con $\lambda_d < \lambda_{d-1} < \cdots < \lambda_1$ en $([1,t], \leq)$. Definamos $s(i) := m(\lambda_i) = [M : \Theta(\lambda_i)]$ y $\alpha(i) := \sum_{j=1}^i s(i)$ y $\alpha(0) := 0$.
Dividamos la filtración η en las siguientes partes

$$\{\eta_i : M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow \theta(\lambda_l)\}_{\alpha(l-1)}^{\alpha(l)-1},$$

con $l \in [1,d]$. Por 3.4.9, para cada $l \in [1,d]$, tenemos el siguiente par F-exacto

$$\Xi_l : \quad M_{\alpha(l-1)} \longrightarrow M_{\alpha(l)} \longrightarrow \theta(\lambda_l)^{s(l)}.$$

Definiendo $M''_i := M_{\alpha(i)}$ para $i \in [1,d]$, tenemos la filtración $\Xi = \{\Xi_i\}_{i=1}^d$, la cual satisface las propiedades requeridas. □

Definición 3.4.11 *Sea* $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^n$ *una familia de objetos en una categoría exacta* $\mathcal{A}$*. Los objetos* Θ-**proyectivos** *en* $\mathcal{A}$ *es la clase* $\mathcal{P}(\Theta) := {}^{F\perp}(\mathscr{F}(\Theta))$*. Dualmente, los objetos* Θ-**inyectivos** *en* $\mathcal{A}$ *es la clase* $\mathcal{I}(\Theta) := (\mathscr{F}(\Theta))^{F\perp}$.

Notemos que por 3.4.6 y su dual, tenemos que $\mathcal{P}(\Theta) = {}^{F\perp}\,\Theta$ y $\mathcal{I}(\Theta) = \Theta^{F\perp}$.

3.5. Sistemas estratificantes en categorías exactas

Definición 3.5.1 *Un* **F-*sistema estratificante*** *(F-ss)* ***de talla*** *t, en una R-categoría exacta $\mathcal{A}$, consiste de: un subfuntor aditivo cerrado F de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ y un par $(\Theta, \leq)$, donde $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ es una familia de objetos no nulos en $\mathcal{A}$ y $\leq$ es un orden lineal en $[1,t]$, satisfaciendo las siguientes condiciones.*

(a) $\Theta(i)$ *es inescindible,* $\forall i \in [1,t]$.

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *si* $j > i$.

(c) $F(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *si* $j \geq i$.

Definición 3.5.2 *Un* **F-*sistema estratificante Ext-proyectivo*** *(F-epss)* ***de talla*** *t, en una R-categoría exacta $\mathcal{A}$, consiste de: un subfuntor aditivo cerrado F de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ y de un triple $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$, donde $\underline{Q} := \{Q(i)\}_{i=1}^{t}$ es una familia de objetos inescindibles en $\mathcal{A}$, $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ es una familia de objetos no nulos en $\mathcal{A}$ y $\leq$ es un orden lineal en $[1,t]$, satisfaciendo las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *si* $j > i$.

(b) Para cada $i \in [1,t]$, existe un par F-exacto,

$$K(i) \xrightarrow{\alpha_i} Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Theta(i),$$

tal que $K(i) \in \mathscr{F}_F(\{\Theta(j) \mid j > i\})$.

(c) $Q := \bigoplus_{i=1}^{t} Q(i) \in {}^{F\perp}\Theta = \mathcal{P}(\Theta)$.

Observación 3.5.3 *De la definición de F-epss de talla t, se ve que $Q(t) \simeq \Theta(t)$.*

Observación 3.5.4 *Sea $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un F-epss de talla t en una R-categoría exacta $\mathcal{A}$. Entonces $F(\underline{Q}, \mathscr{F}_F(\Theta)) = 0$.*

Demostración. Se sigue de 3.4.5 (a) pues $F(\underline{Q}, \Theta) = 0$. $\square$

Definición 3.5.5 *Un* **F-*sistema estratificante Ext-inyectivo*** *(F-epss)* ***de talla*** *t, en una R-categoría exacta $\mathcal{A}$, consiste de: un subfuntor aditivo cerrado F de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ y de un triple $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$, donde $\underline{Y} := \{Y(i)\}_{i=1}^{t}$ es una familia de objetos inescindibles en $\mathcal{A}$, $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ es una familia de objetos no nulos en $\mathcal{A}$ y $\leq$ es un orden lineal en $[1,t]$, satisfaciendo las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *si* $j > i$.

(b) Para cada $i \in [1,t]$, existe un par F-exacto,

$$\Theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \xrightarrow{\beta_i} Z(i),$$

tal que $Z(i) \in \mathscr{F}_F(\{\Theta(j) \mid j < i\})$.

(c) $Y := \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i) \in {\Theta^{F}}^{\perp} = \mathcal{I}(\Theta)$.

Observación 3.5.6 *Un triple* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *es un sistema estratificante ext-inyectivo de talla t en una categoría exacta* $\mathcal{A}$ *si y sólo si* $(\Theta^{op}, \underline{Y}^{op}, \leq^{op})$ *es un sistema ext-proyectivo en* $\mathcal{A}^{op}$. *Por lo tanto, cada resultado de sistemas ext-proyectivos puede ser transferido a un sistema ext-inyectivo. Entonces, sólo trabajaremos con sistemas ext-proyectivos.*

Lema 3.5.7 *Sea* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *un F-epss de talla t en una R categoría exacta de artin* $\mathcal{A}$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K(j), \Theta(i)) = 0$ *si* $j \geq i$.

(b) Para $j \geq i$, *se tiene que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\beta_j, \Theta(i)) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(j), \Theta(i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), \Theta(i))$$

es un isomorfismo y $F(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$.

(c) Los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, -) : \mathscr{F}_F(\Theta) \longrightarrow \mathrm{mod}(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(Q)^{op})$ *y* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(i), -) : \mathscr{F}_F(\Theta) \longrightarrow \mathrm{mod}(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(Q(i))^{op})$ *son exactos.*

(d) Para cada $M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$ *y cada* $i \in [1, t]$, *la multiplicidad* $[M : \Theta(i)]$ *no depende de la* F*-filtración de* M *en* Θ.

Demostración.

(a) Se sigue de 3.4.5(b) pues $K(j) \in \mathscr{F}_F(\{\Theta(m) \mid m > j\})$ con $j \geq i$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(m), \Theta(i)) = 0$ para $m > i$.

(b) Sea $j \geq i$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \Theta(i))$ al par F-exacto

$$K(j) \longrightarrow Q(j) \xrightarrow{\beta_j} \Theta(j),$$

obtenemos por 3.2.16 (a), la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(j), \Theta(i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), \Theta(i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K(j), \Theta(i))$$
$$\longrightarrow F(\Theta(j), \Theta(i)) \longrightarrow F(Q(j), \Theta(i)) \longrightarrow$$

Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K(j), \Theta(i)) = 0$ y $F(Q(j), \Theta(i)) = 0$, obtenemos que $F(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ y que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\beta_j, \Theta(i)) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(j), \Theta(i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), \Theta(i))$$

es un isomorfismo.

(c) Sea $L \longrightarrow M \longrightarrow N$ un par F-exacto con $L, M, N \in \mathscr{F}_F(\Theta)$. Por 3.2.16, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, N) \longrightarrow F(Q, L).$$

Por 3.5.4, tenemos que $F(Q, L) = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, -) : \mathscr{F}_F(\Theta) \longrightarrow \mathrm{mod}(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(Q)^{op})$ es exacto. Análogamente, se prueba que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(i), -)$ es exacto.

(d) Sea $0 \neq M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$ y $\mathrm{d}_{ji} := \ell_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), \Theta(i)))$. Por (b), tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(j), \Theta(i)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), \Theta(i))$ si $j \geq i$. Claramente, se tiene que $d_{ii} \neq 0$ pues $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(i), \Theta(i)) \neq 0$. Pero $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ si $j > i$ (ver 3.5.2), de donde tenemos que $\mathrm{d}_{ji} = 0$ si $j > i$. Por lo tanto, la matriz $D := [d_{ji}]$ es triangular superior y $\det(D) = \Pi_{i=1}^{n} d_{ii} \neq 0$.
Como $M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$, existe una F-filtración ξ de M

$$\{\xi_k : M_{k-1} \to M_k \to \Theta(i_k)\}_{k=1}^{m}$$

con $M_0 = 0$ y $M_m = M$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), -)$ al par F-exacto

$$\xi_m : \quad M_{m-1} \longrightarrow M \longrightarrow \Theta(i_m)$$

tenemos por (c), la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), M_{m-1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), \Theta(i_m)) \to 0.$$

Por lo tanto, $\ell_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), M)) = \ell_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), M_{m-1})) + \mathrm{d}_{j,i_m}$. Del par F-exacto $\xi_{m-1} : \quad M_{m-2} \longrightarrow M_{m-1} \longrightarrow \Theta(i_{m-1})$, tenemos que $\ell_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), M_{m-1})) = \ell_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), M_{m-2})) + \mathrm{d}_{j,i_{m-1}}$. Por lo tanto, $\ell_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), M)) = \ell_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), M_{m-2})) + \mathrm{d}_{j,i_m} + \mathrm{d}_{j,i_{m-1}}$. Siguiendo así, tenemos que $c_j := \ell_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q(j), M)) = \sum_{k=1}^{t} m_\xi(k) d_{jk}$, donde $m_\xi(k)$ es la multiplicidad de $\Theta(k)$ en M relativo a la F-filtración ξ. Sean $X := (m_\xi(1), m_\xi(2), \ldots, m_\xi(t))^t$ y $C := (c_1, c_2, \ldots, c_t)^t$ renglones columna. Entonces, las igualdades anteriores, se pueden escribir como una ecuación matricial $D \cdot X = C$. Como $\det(D) \neq 0$, existe una única solución al sistema anterior y por lo tanto $m_\xi(k)$ sólo depende de los c_j y $d_{j,i}$ y no de la filtración ξ. $\square$

Notación 3.5.8 *Sea $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un F-epss de talla t en una R categoría exacta de artin $\mathcal{A}$. Para $M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$, denotaremos por $[M : \Theta(i)]$ a la* ***multiplicidad*** *de $\Theta(i)$ en M para alguna F-filtración ξ (por 3.5.7 (d), no depende de la F-filtración tomada).*

Corolario 3.5.9 *Sea $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un F-epss de talla t en una R-categoría exacta de artin $\mathcal{A}$. Entonces $[Q(i) : \Theta(i)] = 1,\ \forall\, i \in [1, t]$ y $Q(i) \not\simeq Q(j)$ para $i \neq j$.*

Demostración. Veamos que $[Q(i) : \Theta(i)] = 1,\ \forall\, i$. En efecto, por 3.5.2 (b), tenemos el par F-exacto

$$K(i) \longrightarrow Q(i) \longrightarrow \Theta(i)$$

con $K(i) \in \mathscr{F}_F(\{\Theta(k) \mid k > i\})$. Luego, por 3.5.7 (d), del par F-exacto anterior se concluye que $[Q(i) : \Theta(i)] = 1$.
Ahora bien, sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$. Por lo tanto, del par F-exacto dado en 3.5.2 (b) para $Q(j)$; y de nuevo por 3.5.7 (d), se tiene que $[Q(j) : \Theta(i)] = 0$ pues $Q(j) \in \mathscr{F}_F(\{\Theta(k) \mid k \geq j\})$ y $j > i$. En particular, $\Theta(i)$ es factor de composición de $Q(i)$ pero no de $Q(j)$; probándose que $Q(i) \not\simeq Q(j)$ para $i \neq j$. $\square$

Corolario 3.5.10 *Sea $(\Theta, \underline{Q}, \preceq)$ un F-epss de talla t en una R-categoría exacta de artin $\mathcal{A}$. Entonces, para cada $i \in [1,t]$, el par F-exacto $K(i) \xrightarrow{\alpha_i} Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Theta(i)$ de 3.5.2, satisface que $\beta_i \neq 0$.*

Demostración. De 3.5.7 (b), tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\beta_i, \Theta(i))$ es un isomorfismo. Por lo tanto, como $\Theta(i) \neq 0$, se sigue que $1_{\Theta(i)} \neq 0$ y así obtenemos que $\beta_i = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\beta_i, \Theta(i))(1_{\Theta(i)}) \neq 0$. □

Lema 3.5.11 *Sea $\mathcal{A}$ una R-categoría de artin. Entonces cada morfismo $\beta : Q \longrightarrow M$ en $\mathcal{A}$, con $\beta \neq 0$ y Q inescindible, es minimal a derecha.*

Demostración. Sea $f : Q \longrightarrow Q$ tal que $\beta f = \beta$. Luego $\beta = \beta f^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$. Dado que $\beta \neq 0$, tenemos que $f^n \neq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$. Como Q es inescindible y $\mathcal{A}$ es Krull-Schmidt, entonces $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(Q)$ es una R-álgebra de artin local (ver 3.3.11). Luego, $\mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(Q))$ es nilpotente y coincide con los elementos no invertibles de $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(Q)$. Como $f^n \neq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$, entonces $f \notin \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(Q))$. Por lo tanto, f es invertible. □

Proposición 3.5.12 *Sea $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un F-epss de talla t en una R-categoría exacta de artin $\mathcal{A}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Para cada $i \in [1,t]$, $\beta_i : Q(i) \longrightarrow \Theta(i)$ es una $\mathcal{P}(\Theta)$-cubierta de $\Theta(i)$.

(b) Sea $(\Theta, \underline{Q'}, \leq)$ otro F-epss de talla t en $\mathcal{A}$. Entonces, para cada $i \in [1,t]$, existe un isomorfismo $\rho_i : Q(i) \longrightarrow Q'(i)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Q(i) \arrow[rr, "\rho_i"] \arrow[dr, "\beta_i"'] & & Q'(i) \arrow[dl, "\beta'_i"] \\ & \Theta(i). & \end{tikzcd}$$

Demostración.

(a) Por 3.5.10 y 3.5.11, tenemos que β_i es minimal a derecha. Veamos que β_i es una $\mathcal{P}(\Theta)$-precubierta. En efecto, sea $f : X \longrightarrow \Theta(i)$ con $X \in {}^{F\perp}\Theta$. Consideremos el par F-exacto $\eta_i : K(i) \longrightarrow Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Theta(i)$ de 3.5.2 (b), aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ a η_i, tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Q(i)) \xrightarrow{(X,\beta_i)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \Theta(i)) \longrightarrow F(X, K(i)).$$

Como $X \in {}^{F\perp}\Theta$ y $K(i) \in \mathscr{F}(\Theta)$, por 3.4.6, tenemos que $F(X, K(i)) = 0$. Por lo tanto, β_i es una $\mathcal{P}(\Theta)$-cubierta de $\Theta(i)$.

(b) Es consecuencia inmediata de (a). □

Lema 3.5.13 *Sean $\mathcal{A}$ una categoría exacta, en la cual los idempotentes se escinden y F cerrado. Consideremos un diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$ de la siguiente forma*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[d, "\alpha'"'] & & A'' \arrow[d, "\alpha''"] \\
B' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta"'] & B'' \arrow[d, "\beta''"] \\
C' \arrow[r, "h"] & C \arrow[r, "h'"] & C'',
\end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son F-exactas. Entonces, el diagrama anterior, se puede completar al siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha"'] & A'' \arrow[d, "\alpha''"] \\
B' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta"'] & B'' \arrow[d, "\beta''"] \\
C' \arrow[r, "h"] & C \arrow[r, "h'"] & C'',
\end{tikzcd}$$

con renglones y columnas F-exactas.

Demostración. Por 3.2.6, los dos cuadrados del primer diagrama anterior nos dán el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\Delta"'] & B'' \arrow[d, equal] \\
C' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\zeta"'] & B'' \arrow[d, "\beta''"] \\
C' \arrow[r, "h"] & C \arrow[r, "h'"] & C'',
\end{tikzcd}$$

donde los renglones son conflaciones y $\beta = \zeta\Delta$. Por 3.1.21 y 3.2.30, tenemos el siguiente diagrama F-exacto

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha'"'] & A' \arrow[d, "g\alpha'"] & \\
B' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\Delta"'] & B'' \arrow[d, equal] \\
C' \arrow[r, "\lambda"] & E \arrow[r, "\pi"] & B''.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto Δ es un F-epi. Por otro lado, del siguiente diagrama F-exacto de pullback

$$(\star)\quad \begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\pi"] & C \arrow[d, "h'"] \\ A'' \arrow[r, "\alpha''"] & B'' \arrow[r, "\beta''"] & C'', \end{tikzcd}$$

concluimos que ζ es un F-epi. Por lo tanto $\beta = \zeta\Delta$ es un F-epi pues F es cerrado (ver 3.2.29 (c)). Entonces, tenemos el siguiente diagrama F-exacto

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[d, "\alpha"'] & A'' \arrow[d, "\alpha''"] \\ B' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta"'] & B'' \arrow[d, "\beta''"] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \arrow[r, "h'"] & C''. \end{tikzcd}$$

Del diagrama $(\star)$ de arriba, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$, con renglones F-exactos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \arrow[d, equal] \\ A'' \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\pi"] & C \arrow[d, "h'"] \\ A'' \arrow[r, "\alpha''"] & B'' \arrow[r, "\beta''"] & C''. \end{tikzcd}$$

Como $\alpha = \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Ker}(\zeta\Delta)$ y $\gamma = \mathrm{Ker}(\zeta)$, entonces por [55, 13.2], tenemos que existe un único $f' : A \longrightarrow A''$ tal que el cuadrado superior izquierdo del diagrama anterior es un pullback. Consideremos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha"] & A'' \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "g\alpha'"] & B \arrow[r, "\Delta"] & E. \end{tikzcd}$$

Por 3.1.8 (b) y como los pares F-exactos son cerrados por pullbacks, tenemos que $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{f'} A''$ es F-exacta, pues $A' \xrightarrow{g\alpha'} B \xrightarrow{\Delta} E$ es F-exacta. Finalmente, $\alpha f = g\alpha'$ y $\alpha'' f' = (\pi\gamma)f' = \pi(\gamma f') = \pi(\Delta\alpha) = (\pi\Delta)\alpha = g'\alpha$; probandóse el lema. $\square$

Sea $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un F-epss de talla t en una R-categoría exacta de artin $\mathcal{A}$. Extendemos naturalmente el orden $\leq$ de $[1, t]$, al conjunto $\langle 1, t\rangle := [1, t] \cup \{\pm\infty\}$, de forma tal que $-\infty < i < +\infty$, $\forall\, i \in [1, t]$. Ahora bien, para cada $M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$, el soporte de M en $[1,t]$ es el conjunto $\mathrm{Sop}\,(M) := \{i \in [1,t] \mid [M:\Theta(i)] \neq 0\}$. Luego, usando el soporte, se introducen las funciones $\max, \min : \mathscr{F}_F(\Theta) \to \langle 1,t\rangle$, como sigue: $\min(0) := +\infty$, $\max(0) := -\infty$; y para $0 \neq M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$, $\min(M) := \min(\mathrm{Sop}\,(M), \leq)$ y $\max(M) := \max(\mathrm{Sop}\,(M), \leq)$.

Teorema 3.5.14 *Sean $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un F-epss de talla t, en una R-categoría exacta de artin $\mathcal{A}$, $M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$ con $i := \min(M)$. Entonces, existe un par F-exacto en $\mathcal{A}$*

$$N \longrightarrow Q_0(M) \xrightarrow{\epsilon_M} M,$$

tal que:

(a) $N \in \mathscr{F}_F(\Theta)$ *y* $Q_0(M) \in \mathrm{add}(\bigoplus_{j\geq i} Q(j))$,

(b) $\min(M) < \min(N)$ *si* $M \neq 0$,

(c) $\epsilon_M : Q_0(M) \longrightarrow M$ *es una* $\mathcal{P}(\Theta)$*-precubierta de* M.

Demostración. Si $M = 0$ el par cero $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ es el deseado. Por 3.5.7 (b) y 3.4.10 (c), existe un par F-exacto $N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} \Theta(i)^{m_i}$ con $N \in \mathscr{F}(\Theta)$ y $\min(M) < \min(N)$, donde $m_i = [M : \Theta(i)]$.
Si $i = \min(M) = t$, tenemos que $N = 0$; de donde por 3.1.10, tenemos que ψ es un isomorfismo. Por lo tanto, concluimos que el par F-exacto buscado es

$$\eta :\ 0 \longrightarrow \Theta(t)^{m_i} \xrightarrow{1} \Theta(t)^{m_i}$$

pues $Q(t) \simeq \Theta(t)$ (ver 3.5.3) y $\eta \in F(\Theta(t)^{m_i}, 0)$.
Sea $i = \min(M) < t$. Si $N = 0$, $M \simeq \Theta(i)^{m_i}$ y entonces, por 3.2.15 y 3.5.2 (b), tenemos el siguiente par F-exacto

$$K(i)^{m_i} \longrightarrow Q(i)^{m_i} \longrightarrow \Theta(i)^{m_i}.$$

Como la suma directa de precubiertas es una precubierta; por 3.4.3 y 3.5.12 (a), tenemos que el par F-exacto anterior satisface las condiciones requeridas.
Supongamos que $N \neq 0$. Como $\min(M) < \min(N)$, por hipótesis de inducción, existe un par F-exacto

$$N' \longrightarrow Q_0(N) \xrightarrow{\epsilon_N} N$$

tal que $k := \min(N) < \min(N') =: i'$, $Q_0(N) \in \mathrm{add}(\bigoplus_{j\geq k} Q(j))$ y $\epsilon_N : Q_0(N) \longrightarrow N$ es una $\mathcal{P}(\Theta)$-precubierta de N. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & K(i)^{m_i} \arrow[r, equal] \arrow[d] & K(i)^{m_i} \arrow[d] \\
N \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\theta"] \arrow[dr, phantom, "X"] & Q(i)^{m_i} \arrow[d, "\beta_i^{m_i}"] \\
N \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r, "\psi"] & \Theta(i)^{m_i},
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado X es un pullback. El diagrama anterior es F-exacto, pues el segundo renglón y la segunda columna son F-exactos. Como $N \in \mathscr{F}_F(\Theta)$, entonces $F(Q(i), N) = 0$; de donde el primer par F-exacto, del diagrama anterior se escinde. Luego, existe $i_2 : Q(i)^{m_i} \longrightarrow E$ tal que $\beta_i^{m_i} = \psi\theta i_2$. Sea $\alpha := \theta i_2$; y consideremos $\epsilon := (\varphi\epsilon_N, \alpha) : Q_0(N) \bigoplus Q(i)^{m_i} \longrightarrow M$. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama F-exacto

$$\begin{tikzcd}
Q_0(N) \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\epsilon_N"] \arrow[dr, phantom, "I"] & Q_0(M) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\epsilon"] \arrow[dr, phantom, "II"] & Q(i)^{m_i} \arrow[d, "\beta_i^{m_i}"] \\
N \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r, "\psi"] & \Theta(i)^{m_i},
\end{tikzcd}$$

donde $Q_0(M) := Q_0(N) \bigoplus Q(i)^{m_i}$, $j_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Los cuadrados I y II, del diagrama anterior, conmutan por la propiedad universal de ϵ. Por 3.5.13, podemos completar a un diagrama F-exacto

$$\begin{tikzcd}
N' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & K(i)^{m_i} \arrow[d] \\
Q_0(N) \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\epsilon_N"] & Q_0(M) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\epsilon"] & Q(i)^{m_i} \arrow[d, "\beta_i^{m_i}"] \\
N \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r, "\psi"] & \Theta(i)^{m_i}.
\end{tikzcd}$$

Veamos que

$$\zeta : \quad P \longrightarrow Q_0(M) \xrightarrow{\epsilon} M$$

es el par F-exacto buscado. En efecto, $Q_0(M) \in \text{add}(\bigoplus_{j\geq i} Q(j))$ pues $Q_0(N) \in \text{add}(\bigoplus_{j\geq k} Q(j))$ con $i = \min(M) < \min(N) = k$ y $Q(i)^{m_i} \in \mathscr{F}_F(\Theta(j) \mid j \geq i)$. Considerando el par F-exacto del primer renglón del diagrama anterior, tenemos que $P \in \mathscr{F}_F(\Theta(j) \mid j > i)$ pues $\mathscr{F}_F(\Theta)$ es cerrada por F-extensiones y $K(i)^{m_i} \in \mathscr{F}_F(\Theta(j) \mid j > i)$ y $N' \in \mathscr{F}_F(\Theta(j) \mid j > i')$ con $i < k < i'$. Por lo tanto $i = \min(M) < \min(P)$.
Veamos finalmente que ϵ es una $\mathcal{P}(\Theta)$-precubierta de M. Sea $X \in {}^{F\perp}\Theta$, aplicando el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ a ζ, tenemos la sucesión exacta

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Q_0(M)) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, M) \longrightarrow F(X, P) \; .$$

Por 3.4.6, tenemos que ${}^{F\perp}\Theta = {}^{F\perp}(\mathscr{F}_F(\Theta))$. Por lo tanto $F(X, P) = 0$ pues $P \in \mathscr{F}_F(\Theta)$. Luego, ϵ es un $\mathcal{P}(\Theta)$-precubierta de M. $\square$

Corolario 3.5.15 *Sea* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *un* F*-epss de talla* t*, en una* R*-categoría exacta de artin* $\mathcal{A}$ *y* $Q := \bigoplus_{i=1}^{t} Q(i)$*. Entonces, para* $M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$*, tenemos que* $\text{resdim}_{\text{add}(Q)}(M) \leq t$*. Es decir, existen pares* F*-exactos* $\{K_{j+1} \longrightarrow Q_j \longrightarrow K_j, 0 \leq j \leq t-1\}$ *tal que* $K_j \in \mathscr{F}_F(\Theta)$*,* $\forall j$*,* $K_0 = M$ *y* $Q_j \in \text{add}(Q)$ $\forall j$*.*

Demostración. Se sigue de 3.5.14. $\square$

Corolario 3.5.16 *Sea* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *un* F*-epss de talla* t*, en una* R*-categoría exacta de artin* $\mathcal{A}$*. Entonces*

$$\mathrm{add}(Q) = \mathscr{F}_F(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta)$$

Demostración. Es claro que $\mathrm{add}(Q) \subseteq \mathscr{F}_F(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta)$. Sea $M \in \mathscr{F}_F(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta)$. Por 3.5.14, existe un par F-exacto en $\mathcal{A}$

$$\eta : N \longrightarrow Q_0(M) \xrightarrow{\epsilon_M} M$$

donde $Q_0(M) \in \mathrm{add}(Q)$ y $N \in \mathscr{F}_F(\Theta)$. Luego, el par exacto anterior se escinde y entonces $M \in \mathrm{add}(Q)$; probándose el resultado. $\square$

3.6. Existencia de F-epss asociada a un F-ess

Definición 3.6.1 *Sea* $\mathcal{A}$ *una* R*-categoría exacta de artin. Decimos que* $\mathcal{A}$ *es* **Ex$_\mathcal{E}$*-finita*** *si* $\mathrm{Ext}_\mathcal{E}(C, A)$ *es un* R*-módulo finitamente generado para todo* $A, C \in \mathcal{A}$*. Esto es, tenemos el siguiente funtor* $\mathrm{Ext}_\mathcal{E}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{mod}(R)$*. En este caso, un subfuntor aditivo* F *de* $\mathrm{Ext}_\mathcal{E}(-,-)$ *es un* ***R-subfuntor*** *si* $F(C, A)$ *es un* R*-submódulo de* $\mathrm{Ext}_\mathcal{E}(C, A)$*,* $\forall A, C \in \mathcal{A}$*.*

Ejemplo 3.6.2 *Sea* Λ *una* R*-álgebra de artin. Es bien conocido que* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *es una* R*-categoría exacta de artin que es* Ext_Λ*-finita y que cualquier subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}_\Lambda(-,-)$ *es un* R*-subfunctor (ver apéndice).*

Lema 3.6.3 *Sean* $\mathcal{A}$ *una* R*-categoría exacta de artin* $\mathrm{Ext}_\mathcal{E}$*-finita y* F *un* R*-subfuntor cerrado de* $\mathrm{Ext}_\mathcal{E}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow Ab$*. Entonces* $F(C, A)$ *es un* R*-módulo finitamente generado para* $A, C \in \mathcal{A}$*.*

Demostración. Como R es artiniano tenemos que R es noetherino, luego todo R-submódulo de un R-módulo finitamente generado es finitamente generado, probándose el resultado. $\square$

Lema 3.6.4 *Sean* $\mathcal{A}$ *una* R*-categoría exacta de artin Ext-finita,* F *un* R*-subfuntor cerrado de* $\mathrm{Ext}_\mathcal{E}(-,-)$ *y* $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ *tales que* $F(C, A) \neq 0$*. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Existe un par F*-exacto en* $\mathcal{A}$ *que no se escinde*

$$\eta_{C,A} : \quad A^n \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} C,$$

y tal que $\delta : \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(A^n, A) \longrightarrow F(C, A)$ *es suprayectiva, donde* $n := \ell_R(F(C, A))$*.*

(b) Si $F(A, A) = 0$ *entonces* $F(E, A) = 0$*.*

Demostración.

(a) Por 3.6.3, sabemos que $F(C,A)$ es R-finitamente generado. Sea $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ una familia de R-generadores en $F(C,A)$. Consideremos los pares F-exactos correspondientes

$$\eta_i: \ A \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C \ \text{ para } \ i=1,\dots,n.$$

Luego, por 3.2.13, $\xi: \ A^n \longrightarrow \oplus_{i=1}^n B_i \longrightarrow C^n$ es un par F-exacto, donde $\xi = \oplus_{i=1}^n \eta_i$. Sea $\Delta: C \longrightarrow C^n$ el morfismo diagonal. Tomando pullback, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} \eta: \ A^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "K"] & C \arrow[d, "\Delta"] \\ A^n \arrow[r] & \oplus_{i=1}^n B_i \arrow[r] & C^n, \end{tikzcd}$$

donde los renglones son F-exactos Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "K"] & C \arrow[d, "\Delta"] \\ A^n \arrow[r] \arrow[d, "\pi_i"] & \oplus_{i=1}^n B_i \arrow[r] \arrow[d, "\pi_i'"] & C^n \arrow[d, "\pi_i''"] \\ A \arrow[r] & B_i \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

donde π_i, π_i' y π_i'' son las proyecciones canónicas correspondientes a las sumas directas. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y F-exacto

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_i"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_i' K"] & C \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r] & B_i \arrow[r] & C. \end{tikzcd}$$

Es decir, tenemos que $\eta_i = \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(C, \pi_i)(\xi) = \delta(\pi_i)$. Por lo tanto δ : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A^n, A) \longrightarrow F(C,A)$ es suprayectiva.

(b) Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A)$, al par F-exacto $\eta_{C,A}$ del inciso (a), tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A^n, A) \xrightarrow{\delta} F(C,A) \longrightarrow F(E,A) \longrightarrow F(A^n, A) \ .$$

Como $F(A^n, A) = 0$ y δ es suprayectivo, tenemos que $F(E,A) = 0$. $\square$

Lema 3.6.5 *Sean $\mathcal{A}$ una R-categoría exacta de artin, F un R-subfuntor aditivo cerrado de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ *y* $\eta: \; A \xrightarrow{s} B \xrightarrow{g} C$ *un par F-exacto que no se escinde tal que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,C) = 0$ *y C es inescindible. Entonces, existe un par F-exacto* $A' \longrightarrow B' \longrightarrow C$ *que no se escinde tal que B' es inescindible, A' es un sumando directo de A y B' es un sumando directo de B.*

Demostración. Sea $\alpha(B)$ el número de sumandos directos inescindibles que aparecen en una descomposición de B en suma directa de inescindibles. La prueba se hará por inducción sobre $\alpha(B)$. Si $\alpha(B) = 1$, no hay nada que probar. Sea $\alpha(B) > 1$. Consideremos una descomposición $B = B_1 \oplus B_2$ con B_1 inescindible. Luego η, se puede ver como sigue:

$$\eta: \; A \xrightarrow{\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{(g_1,\, g_2)} C \,.$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,C)$ a η, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,C) \xrightarrow{(g,C)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,C) \,.$$

Luego, como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,C) = 0$, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(g,C)$ es un isomorfismo. Consideremos $(g_1, 0) : B \longrightarrow C$ y $(0, g_2) : B \longrightarrow C$. Por lo tanto, existen f, $f' : C \longrightarrow C$ tales que $f(g_1, g_2) = (g_1, 0)$ y $f'(g_1, g_2) = (0, g_2)$. En particular, se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} fg_1 &= g_1, & (3.2)\\ fg_2 &= 0, & (3.3)\\ f'g_1 &= 0, & (3.4)\\ f'g_2 &= g_2. & (3.5) \end{aligned}$$

Ahora bien, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(g,C)(f + f') = (f + f')(g_1, g_2) = f(g_1, g_2) + f'(g_1, g_2) = (g_1, 0) + (0, g_2) = (g_1, g_2)$, y como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(g,C)(1_C) = (g_1, g_2)$, concluimos que

$$f + f' = 1_C.$$

Veamos que f y f' son idempotentes. Para esto, veamos primero que $ff' = f'f = 0$. En efecto, consideremos $ff' : C \longrightarrow C$. Entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(g,C)(ff') = ff'(g_1, g_2) = f(0, g_2) = (0, fg_2) = (0, 0)$, donde la última igualdad es por (3.3); y como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(g,C)$ es un isomorfismo, se tiene que $ff' = 0$. Análogamente, considerando $f'f : C \longrightarrow C$ tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(g,C)(f'f) = f'f(g_1, g_2) = f'(g_1, 0) = (f'g_1, 0) = (0, 0)$, por lo tanto $f'f = 0$.
Dado que $f + f' = 1_C$, se tiene que $f^2 + ff' = f$, de donde $f^2 = f$. Análogamente, se prueba que $f'^2 = f'$. Como $\mathcal{A}$ es Krull-Schmidt y C es inescindible, tenemos que $f = 0$ ó $f' = 0$. Por lo tanto, de las igualdades (3.2) y (3.5), tenemos que $g_1 = 0$ ó $g_2 = 0$.

Sean $j_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : B_1 \longrightarrow B_1 \oplus B_2$, $j_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : B_2 \longrightarrow B_1 \oplus B_2$, $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \end{pmatrix} : B_1 \oplus B_2 \longrightarrow B_1$ y $\pi_2 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \end{pmatrix} : B_1 \oplus B_2 \longrightarrow B_2$ las inclusiones y proyecciones correspondientes.
Supongamos que $g_1 = 0$. Como $(0, g_2) = g_2\pi_2$ y $(0, g_2)$ es un F-epimorfismo, entonces g_2 es un F-epimorfismo. Luego, existe un par F-exacto $\xi : \quad K \xrightarrow{f_2} B_2 \xrightarrow{g_2} C$. Por otro lado, como $g_2\pi_2 s = 0$, $(0, g_2)j_1 = 0$, $(0, g_2)j_2 f_2 = 0$ y $j_2(0, g_2) = g_2$, existen $p_2 : A \longrightarrow K$, $i_1 : B_1 \longrightarrow A$ y $i_2 : K \longrightarrow A$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo y F-exacto

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[d, "j_1"] & \\
A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p_2"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, "(0,g_2)"] \arrow[d, "\pi_2"] & C \arrow[d, equal] \\
K \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "i_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "j_2"] & C \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "s"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, "(0,g_2)"] & C.
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Sean $G = \begin{pmatrix} s_1 \\ p_2 \end{pmatrix} : A \longrightarrow B_1 \oplus K$ y $H = \begin{pmatrix} i_1, & i_2 \end{pmatrix} : B_1 \oplus K \longrightarrow A$. Veamos que η es isomorfa a $B_1 \oplus K \xrightarrow{\Psi} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{(0,g_2)} C$, donde $\Psi := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}$. Por el diagrama anterior, se puede construir el siguiente diagrama comnmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "G"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, "(0,g_2)"] \arrow[d, equal] & C \arrow[d, equal] \\
B_1 \oplus K \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "H"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, "(0,g_2)"] \arrow[d, equal] & C \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "s"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, "(0,g_2)"] & C.
\end{tikzcd}$$

Como $s = \mathrm{Ker}((0, g_2))$, tenemos que $1_A : A \longrightarrow A$ es el único morfismo tal que $s = s1_A$, por lo tanto tenemos que $HG = 1_A$. Por otro lado, considerando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "i_2"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "j_2"] & C \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p_2"'] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, "(0,g_2)"] \arrow[d, "\pi_2"] & C \arrow[d, equal] \\ K \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C; \end{tikzcd}$$

y dado que $\pi_2 j_2 = 1_{B_2}$ y $1_K : K \longrightarrow K$ es el único morfismo tal que $f_2 = f_2 1_K$, tenemos que $p_2 i_2 = 1_K$. Por otro lado, como $f_2 p_2 i_1 = \pi_2 s i_1 = \pi_2 j_1 = 0$ y f_2 es un monomorfismo, entonces $p_2 i_1 = 0$. Por lo tanto, de las igualdades anteriores; y de las que se obtienen del diagrama conmutativo (1.6), tenemos que $GH = 1_{B_1 \oplus K}$. Por lo tanto η es isomorfa a $B_1 \oplus K \xrightarrow{\Psi} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{(0,g_2)} C$. Luego el par F-exacto $\xi : K \xrightarrow{f_2} B_2 \xrightarrow{g_2} C$ cumple que K es sumando directo de A, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K, C) = 0$ y $\alpha(B_2) < \alpha(B)$. Por hipótesis de inducción se tiene el resultado.
Supongamos $g_2 = 0$. Como $(g_1, 0) = g_1 \pi_1$ y $(g_1, 0)$ es un F-epimorfismo, entonces g_1 es un F-epimorfismo. Luego, existe par F-exacto $\xi' : M \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{g_1} C$. Análogo al caso anterior, se prueba que ξ' es sumando directo de η. Por lo tanto, en este caso el par F-exacto buscado es ξ' $\Box$

Teorema 3.6.6 *Sean $\mathcal{A}$ una R-categoría exacta de artin, F un R-subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$, $(\Theta, \leq)$ un F-ss (ver 3.5.1) de talla t en $\mathcal{A}$ con $\leq$ el orden natural en $[1,t]$, $t > 1$ y $1 \leq i \leq t$. Entonces, para cada k con $1 \leq k \leq t - i$, existe un par F-exacto*

$$\xi_k : \quad V_k \longrightarrow U_k \longrightarrow \Theta(i),$$

que satisface las siguientes condiciones:

(a) U_k es inescindible,

(b) $V_k \in \mathscr{F}_F(\{\Theta(j) \mid i < j \leq i + k\})$,

(c) $F(U_k, \Theta(j)) = 0$ para $i \leq j \leq i + k$.

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre k.
Sea $k = 1$. Si $F(\Theta(i), \Theta(i+1)) = 0$, el par F-exacto buscado es

$$0 \longrightarrow \Theta(i) \xrightarrow{1} \Theta(i).$$

Supongamos que $F(\Theta(i), \Theta(i+1)) \neq 0$. Por 3.6.4(a), existe un par F-exacto

$$\xi : \quad \Theta(i+1)^n \longrightarrow E \longrightarrow \Theta(i)$$

que no se escinde. Además, por 3.6.4(b), tenemos que $F(E, \Theta(i+1)) = 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \Theta(i))$ a ξ, tenemos la sucesión exacta

$$F(\Theta(i), \Theta(i)) \longrightarrow F(E, \Theta(i)) \longrightarrow F(\Theta(i+1)^n, \Theta(i)).$$

Dado que $F(\Theta(i), \Theta(i)) = F(\Theta(i+1)^n, \Theta(i)) = 0$, concluimos de la sucesión anterior que $F(E, \Theta(i)) = 0$. Además, como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(i+1)^n, \Theta(i)) = 0$, por 3.6.5, concluimos que existe un par F-exacto

$$\xi' : \; \Theta(i+1)^m \longrightarrow U_1 \longrightarrow \Theta(i)$$

con $m \leq n$ y U_1 un sumando directo inescindible de E. Por lo tanto $\xi_1 := \xi'$ satisface las condiciones requeridas. Supongamos ahora que existe un par F-exacto

$$\xi_k : \quad V_k \longrightarrow U_k \longrightarrow \Theta(i)$$

con las propiedades requeridas. Construiremos ξ_{k+1}, apartir de ξ_k, como sigue: Si $F(U_k, \Theta(i+k+1)) = 0$, el par F-exacto $\xi_{k+1} := \xi_k$ tiene las características deseadas.

Supongamos que $F(U_k, \Theta(i+k+1)) \neq 0$. Entonces, por 3.6.4(a), existe un par F-exacto

$$\eta : \quad \Theta(i+k+1)^a \longrightarrow U \longrightarrow U_k \; ,$$

que no se escinde; y por 3.6.4(b), tenemos que $F(U, \Theta(i+k+1)) = 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \Theta(j))$ a η, con $i \leq j \leq i+k$, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$F(U_k, \Theta(j)) \longrightarrow F(U, \Theta(j)) \longrightarrow F(\Theta(i+k+1)^a, \Theta(j)).$$

Por hipótesis de inducción, tenemos que $F(U_k, \Theta(j)) = 0$ y también $F(\Theta(i+k+1), \Theta(j)) = 0$ por definición de sistema estratificante pues $i+k+1 > j$. Por lo tanto $F(U, \Theta(j)) = 0$ para $i \leq j \leq i+k$. De esto; y por la igualdad del parrafo anterior, tenemos que $F(U, \Theta(j)) = 0$ para $i \leq j \leq i+k+1$. Por 3.4.5(b), tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(i+k+1)^a, U_k) = 0$ pues $U_k \in \mathscr{F}_F(\{\Theta(j) \mid i \leq j \leq i+k\})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Theta(i+k+1), \Theta(j)) = 0$ si $i+k+1 > j$. Por lo tanto, por 3.6.5, existe un par F-exacto

$$\eta' : \quad \Theta(i+k+1)^d \longrightarrow U_{k+1} \longrightarrow U_k$$

con $d \leq a$ y U_{k+1} sumando directo inescindible de U. Luego, por 3.1.22, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
\Theta(i+k+1)^d \arrow[r] \arrow[d, equal] & V_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{k+1}"] & V_k \arrow[d, "\mu_k"] \\
\Theta(i+k+1)^d \arrow[r] & U_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & U_k \arrow[d] \\
 & \Theta(i) \arrow[r, equal] & \Theta(i),
\end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son conflaciones. Por 3.2.30, tenemos que todo el diagrama anterior es F-exacto. Como $V_k \in \mathscr{F}_F(\{\Theta(j) \mid i < j \leq i+k\})$ se tiene, por 3.4.3, que $V_{k+1} \in \mathscr{F}_F(\{\Theta(j) \mid i < j \leq i+k+1\})$. Además $F(U_{k+1}, \Theta(j)) = 0$ para $i \leq j \leq i+k+1$ pues U_{k+1} es sumando directo inescindible de U. Por lo tanto, el par F-exacto buscado es el de la primera columna del diagrama anterior, es decir, $\xi_{k+1}: \quad V_{k+1} \xrightarrow{\mu_{k+1}} U_{k+1} \longrightarrow \Theta(i)$. □

Corolario 3.6.7 *Sean F un R-subfuntor de* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ *y* $(\Theta, \leq)$ *un F-sistema estratificante de talla t en una R-categoría exacta de artin $\mathcal{A}$. Entonces, existe una única familia salvo isomorfismos $\underline{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^{t}$ tal que $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ es un F-epss de talla t en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Supondremos por simplicidad, que $\leq$ es el orden natural en $[1,t]$. Para $i < t$, definimos $\eta_i := \xi_{t-i}$ donde ξ_{t-i} son los pares F-exactos de 3.6.6

$$\xi_{t-i}: \quad V_{t-i} \longrightarrow U_{t-i} \longrightarrow \Theta(i).$$

Definiendo $K(i) := V_{t-i}$ y $Q(i) := U_{t-i}$, tenemos que $K(i) \in \mathscr{F}_F(\{\Theta(j) \mid j > i\})$ y $F(Q(i), \Theta(j)) = 0$ para $j \geq i$. Del par F-exacto ξ_{t-i}, tenemos que $Q(i) \in \mathscr{F}_F(\{\Theta(j) \mid j \geq i\})$. Entonces, por 3.4.5 (a) y 3.5.1 (c), tenemos que $F(Q(i), \Theta(r)) = 0$ para $r \leq i$. Por lo tanto $Q(i) \in {}^{\perp}_{F}\Theta$.

Para $i = t$, tomamos el par F-exacto $0 \longrightarrow \Theta(t) \xrightarrow{1} \Theta(t)$, y definimos $Q(t) := \Theta(t)$ y $K(t) := 0$, entonces éste par F-exacto cumple las condiciones requeridas. □

3.7. El álgebra asociada a un F-epss

Sea Λ una R-álgebra de artin. Para $M, N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\mathrm{Tr}_M(N)$ es la **traza** de M en N, esto es, $\mathrm{Tr}_M(N)$ es el Λ-submódulo de N generado por las imágenes de todos los morfismos de M a N. Recordemos la definición de los Λ-módulos estandar. Sea n el rango del grupo de Grothendieck $\mathrm{K}_0(\Lambda)$. Fijemos un orden lineal en $[1,n]$, un conjunto de representantes ${}_{\Lambda}\mathcal{P} = \{{}_{\Lambda}P(i) \mid i \in [1,n]\}$ que contiene a cada isoclase de Λ-módulos inescindibles proyectivos y un conjunto de representantes ${}_{\Lambda}\mathcal{S} = \{S(i) = \mathrm{top}(P(i)) \mid i \in [1,n]\}$ de Λ-módulos simples. Definamos $P^{>i} := \oplus_{j>i}\, {}_{\Lambda}P(j)$, el conjunto de **$\Lambda$-módulos estandar** es ${}_{\Lambda}\Delta = \{{}_{\Lambda}\Delta(i) \mid i \in [1,n]\}$, donde ${}_{\Lambda}\Delta(i) :={}_{\Lambda} P(i)/\mathrm{Tr}_{P^{>i}}(P(i))$. Entonces, ${}_{\Lambda}\Delta(i)$ es el cociente mas grande de ${}_{\Lambda}P(i)$ con factores de composición los ${}_{\Lambda}S(j)$ con $j \leq i$. Sea $\mathscr{F}({}_{\Lambda}\Delta)$ la subcategoría de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ que consiste de los Λ-módulos que tienen una ${}_{\Lambda}\Delta$-filtración, esto es, una filtración $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots M_s = M$ con factores M_{i+1}/M_i isomorfo a un módulo en ${}_{\Lambda}\Delta$. El álgebra es **estandarmente estratificada** con respecto al orden lineal $\leq$ en $[1,n]$ si $\mathrm{proj}(\Lambda) \subseteq \mathscr{F}({}_{\Lambda}\Delta)$ (ver 3.3.8).
Recordemos la definición de **sistema estratificante clásico**.

Definición 3.7.1 [47, 1.6] *Un **sistema estratificante** $(\Theta, \leq)$ **de talla** t, en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *consiste de una familia $\Theta = \{\Theta(i) \ : \ i \in [1,t]\}$ de Λ-módulos inescindibles, y un orden lineal $\leq$ en $[1,t]$, satisfaciendo las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *si* $j > i$,

(b) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *si* $j \geq i$.

Observación 3.7.2 *Se puede ver que $({}_\Lambda\Delta, \leq)$ es un sistema estratificante clásico en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Recordemos la definición de **sistema estratificante Ext-proyectivo**.

Definición 3.7.3 [48, 2.1] *Sea $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ una familia de Λ-módulos no nulos y $\underline{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$ una familia de Λ-modulos inescindibles, y $\leq$ un orden lineal en $[1,t]$. El triple $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ es un **sistema estratificante Ext-proyectivo de talla** t, en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *si satisface las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *si* $j > i$.

(b) Para cada $i \in [1,t]$, existe una sucesión exacta $0 \to K(i) \to Q(i) \to \Theta(i) \to 0$ de Λ-módulos tal que $K(i) \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) : j > i\})$,

(c) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Q, -)|_{\mathscr{F}(\Theta)} = 0$, *donde* $Q := \oplus_{i\in[1,t]} Q(i)$.

Observación 3.7.4 (a) *Recordemos que de la definición de los Λ-módulos estandar, tenemos la siguiente suceción exacta en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$0 \longrightarrow U(i) \longrightarrow {}_\Lambda P(i) \longrightarrow {}_\Lambda\Delta(i) \longrightarrow 0,$$

donde $U(i) := \mathrm{Tr}_{P>i}(P(i))$. Se puede ver que el triple $({}_\Lambda\Delta, \underline{Q}, \leq)$ con $\underline{Q} = \{{}_\Lambda P(i)\}_{1=1}^n$ es un sistema estratificante ext-proyectivo.
(b) *Para $M \in \mathscr{F}({}_\Lambda\Delta)$, se prueba que para cada $i \in [1,n]$ la multiplicidad de ${}_\Lambda\Delta(i)$ en M, $[M : {}_\Lambda\Delta(i)]$, no depende de la filtración tomada; y entonces $\ell_{{}_\Lambda\Delta}(M) = \sum_{i=1}^n [M : {}_\Lambda\Delta(i)]$ está bien definida.*

Proposición 3.7.5 *Sean $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un F-epss de talla t, en una R-categoría exacta de artin $\mathcal{A}$, $A := \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(Q)$ $e_Q := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q,-) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{mod}(A)$ y ${}_AP(i) := e_Q(Q(i))$ para cada $i \in [1,t]$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) La familia ${}_AP := \{{}_AP(i) \mid i \in [1,t]\}$ es un conjunto de representantes de A-módulos proyectivos inescindibles. En particular A es básica y $\mathrm{rk}K_0(A) = t$.

(b) $e_Q(\Theta(i)) \simeq {}_A\Delta(i)$, $\forall i \in [1,t]$, donde ${}_A\Delta$ es calculada usando ${}_AP$ y el orden dado $\leq$ en $[1,t]$.

(c) El par $(A, \leq)$ es una álgebra básica estandarmente estratificada.

(d) $e_Q : \mathscr{F}_F(\Theta) \longrightarrow \mathscr{F}({}_A\Delta)$ es una equivalencia exacta de categorías

Demostración. Por 3.5.7(c), tenemos que el funtor $\mathrm{e}_Q = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{mod}(A)$ es exacto.
(a) Se sigue de 3.5.9 y 3.3.12.
(b) y (c). Sea $i \in [1, t]$. Por 3.5.2 (b) y 3.5.14, tenemos dos pares exactos

$$\eta_i : K(i) \xrightarrow{\alpha_i} Q(i) \longrightarrow \Theta(i),$$

$$\eta_i' : K' \longrightarrow Q' \xrightarrow{\lambda_i} K(i),$$

donde $K(i), K' \in \mathscr{F}_F(\{\Theta(j) \mid j > i\})$ y $Q' \in \mathrm{add}(\oplus_{j>i} Q(j))$. Aplicando el funtor $\mathrm{e}_Q = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, -)$ a los pares exactos η_i y η_i', tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$ (pues e_Q es exacto en $\mathscr{F}_F(\Theta)$)

$$\epsilon_i : \mathrm{e}_Q(Q') \overset{\mathrm{e}_{Q(\gamma_i)}}{\longrightarrow} {}_A P(i) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(\Theta(i)) \longrightarrow 0,$$

donde $\gamma_i := \alpha_i \lambda_i$. Afirmamos que

$$\mathrm{Im}(\mathrm{e}_Q(\gamma_i)) = \mathrm{Tr}_{\oplus_{j>i} {}_A P(j)}({}_A P(i)) =: U(i).$$

En efecto, usando que $\mathrm{e}_Q(Q') \in \mathrm{add}(\oplus_{j>i\, A} P(j))$, se sigue que $\mathrm{Im}(\mathrm{e}_Q(\gamma_i)) \subseteq \mathrm{Tr}_{\oplus_{j>i\, A} P(j)}({}_A P(i))$. Para ver la otra inclusión, sea $j > i$ y consideremos un morfismo $f :_A P(j) \longrightarrow_A P(i)$. Por 3.5.2, 3.3.12 y 3.5.7 (c), tenemos que $\mathrm{Hom}_A({}_A P(j), \mathrm{e}_Q(\Theta(i))) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathrm{e}_Q(Q(j)), \mathrm{e}_Q(\Theta(i))) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q(j), \Theta(i)) = 0$, donde la última igualdad se da por 3.5.7 (b). Entonces f se factoriza a tráves de $\mathrm{e}_Q(\gamma_i)$; probándose la afirmación. Luego $\mathrm{e}_Q(\Theta(i)) \simeq_A \Delta(i)$.
Por otro lado, de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow U(i) \longrightarrow_A P(i) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(\Theta(i)) \longrightarrow 0,$$

tenemos que ${}_A P(i) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$ pues $U(i) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$, $\mathrm{e}_Q(\Theta(i)) \simeq_A \Delta(i)$ y $\mathscr{F}({}_A\Delta)$ es cerrada por extensiones; probándose que A es un álgebra estandarmente estratificada.
(d) Como $\mathrm{e}_Q = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{mod}(A)$ es un funtor exacto, tenemos que probar que $\mathrm{Im}(\mathrm{e}_Q) \subseteq \mathscr{F}({}_A\Delta)$ y que la restricción $\mathrm{e}_Q : \mathscr{F}_F(\Theta) \longrightarrow \mathscr{F}({}_A\Delta)$ es fiel pleno y denso. Veamos que $\mathrm{Im}(\mathrm{e}_Q) \subseteq \mathscr{F}({}_A\Delta)$. Sea $0 \neq M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$. Probaremos, por inducción sobre $\ell_F(M)$, que $\mathrm{e}_Q(M) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$.
Si $\ell_F(M) = 1$ entonces $M \simeq \Theta(i)$ para algún i. Luego, por (b), $\mathrm{e}_Q(M) \simeq {}_A\Delta(i) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$.
Sea $\ell_F(M) > 1$. Como $M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$, existe una Θ-filtración

$$\eta := \{\eta_l : \quad M_{l-1} \longrightarrow M_l \longrightarrow \Theta(j_l)\ \}_{l=1}^{m}$$

tal que $M_0 := 0$ y $M_m = M$. Consideremos el par F-exacto $\eta_m : M_{m-1} \longrightarrow M \longrightarrow \Theta(j_m)$, con $M_{m-1} \in \mathscr{F}(\Theta)$ y $\ell_F(M_{m-1}) = \ell_F(M) - 1$. Aplicando e_Q a η_m, tenemos por 3.5.7(c), la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{e}_Q(M_{m-1}) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(M) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(\Theta(j_m)) \longrightarrow 0.$$

Por inducción $\mathrm{e}_Q(M_{m-1}) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$; y como $\mathrm{e}_Q(\Theta(j)) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$, tenemos que $\mathrm{e}_Q(M) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$ pues $\mathscr{F}({}_A\Delta)$ es cerrada por extensiones.
Ahora, veamos que el funtor e_Q es fiel y pleno. Por 3.5.15, para $M \in \mathscr{F}(\Theta)$, tenemos una familia de pares F-exactos $\{\eta_k : \ K_{j+1} \longrightarrow Q_j \longrightarrow K_j \ , 0 \leq j \leq t-1\}$ tal que: $K_j \in \mathscr{F}_F(\Theta)$ $\forall j$, $K_0 := M$ y $Q_j \in \mathrm{add}(Q)$ $\forall j$. Aplicando e_Q a η_0 y η_1, tenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{e}_Q(K_1) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(Q_0) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(M) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{e}_Q(K_2) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(Q_1) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(K_1) \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, $\mathrm{e}_Q(Q_1) \xrightarrow{f} \mathrm{e}_Q(Q_0) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(M) \longrightarrow 0$ es exacta. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_A(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & {}_A(Q_0,N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & {}_A(Q_1,N) \arrow[d, "\alpha_3"] \\
0 \arrow[r] & {}_A(\mathrm{e}_Q(M),\mathrm{e}_Q(N)) \arrow[r] & {}_A(\mathrm{e}_Q(Q_0),\mathrm{e}_Q(N)) \arrow[r] & {}_A(\mathrm{e}_Q(Q_1),\mathrm{e}_Q(N)),
\end{tikzcd}$$

donde α_2 y α_3 son isomorfismos pues Q_0, $Q_1 \in \mathrm{add}(Q)$ (ver 3.3.12). Por lo tanto, del Lema del Cinco, α_1 es un isomorfismo; probándose que e_Q es fiel y pleno.
Veamos ahora que e_Q es denso, por inducción sobre $\ell_{{}_A\Delta}(M)$ (ver 3.7.4).
Sea $0 \neq M \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$.
Si $\ell_{{}_A\Delta}(M) = 1$, existe i tal que $M \simeq {}_A\Delta(i) \simeq \mathrm{e}_Q(\Theta(i))$.
Sea $\ell_{{}_A\Delta}(M) = m > 1$. Como $M \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$, tenemos la siguiente filtración:

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \dots M_{m-1} \subseteq M_m = M$$

con $M_1 \simeq {}_A\Delta(i)$ para algún i. Luego, podemos considerar la siguiente filtración de $M/{}_A\Delta(i)$

$$0 = M_1/{}_A\Delta(i) \subseteq M_2/{}_A\Delta(i) \subseteq M_3/{}_A\Delta(i) \cdots \subseteq M_{m-1}/{}_A\Delta(i) \subseteq M/{}_A\Delta(i)$$

con $M_{k+1}/{}_A\Delta(i)/M_k/{}_A\Delta(i) \simeq M_{k+1}/M_k \simeq {}_A\Delta(i_k)$ para $k = 1, 2 \dots m-1$. Por lo tanto $M/{}_A\Delta(i) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$. Luego, tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$

$$0 \longrightarrow {}_A\Delta(i) \longrightarrow M \longrightarrow M/{}_A\Delta(i) \longrightarrow 0,$$

donde $\ell_{{}_A\Delta}(M/{}_A\Delta(i)) = \ell_{{}_A\Delta}(M) - 1$. Luego, por inducción, tenemos que existe $0 \neq Z \in \mathscr{F}_F(\Theta)$ tal que $\mathrm{e}_Q(Z) \simeq M/{}_A\Delta(i)$. Por 3.5.14, existe un par F-exacto $\eta_Z :$ $Z' \xrightarrow{u} Q_0(Z) \xrightarrow{\epsilon_Z} Z$ con $Z' \in \mathscr{F}(\Theta)$, de donde se obtiene la sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$

$$0 \longrightarrow \mathrm{e}_Q(Z') \xrightarrow{\mathrm{e}_Q(u)} \mathrm{e}_Q(Q_0(Z)) \xrightarrow{\mathrm{e}_Q(\epsilon_Z)} \mathrm{e}_Q(Z) \longrightarrow 0\,.$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathrm{e}_Q(Z') \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mu"] & \mathrm{e}_Q(Z') \arrow[d, "\mathrm{e}_{Q(u)}"] & \\
\eta: \quad 0 \arrow[r] & {}_A\Delta(i) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\lambda"] & \mathrm{e}_Q(Q_0(Z)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{e}_{Q(\epsilon_Z)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}_A\Delta(i) \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{e}_Q(Z) \simeq M/{}_A\Delta(i) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

La sucesión η, del diagrama anterior, se escinde pues $\mathrm{e}_Q(Q_0(Z))$ es proyectivo. Por lo tanto $C \simeq {}_A\Delta(i) \bigoplus \mathrm{e}_Q(Q_0(Z)) \simeq \mathrm{e}_Q(\Theta(i) \bigoplus Q_0(Z))$, $i_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $p_2 = (0,1)$. Luego, $\mu = \begin{pmatrix} \varphi \\ \mathrm{e}_Q(u) \end{pmatrix}$ con $\varphi : \mathrm{e}_Q(Z') \longrightarrow \mathrm{e}_Q(\Theta(i))$. Como $\mathrm{e}_Q \mid_{\mathscr{F}_F(\Theta)}$ es pleno, existe $h : Z' \longrightarrow \Theta(i)$ tal que $\mathrm{e}_Q(h) = \varphi$. Así, $\mu = \begin{pmatrix} \mathrm{e}_Q(h) \\ \mathrm{e}_Q(u) \end{pmatrix} = \mathrm{e}_Q \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$. Luego, como $(0,1)\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} = u$ y u es una inflación, por el axioma $Ex3^{op}$ de categorías exactas, tenemos que $\Psi := \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$ es una inflación. Ahora, como F es subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$, tenemos por 3.2.19 y 3.2.27 que, como u es un F-monomorfismo, entonces Ψ es un F-monomorfismo. Luego, existe un par F-exacto $\xi : \quad Z' \xrightarrow{\Psi} \Theta(i) \bigoplus Q_0(Z) \longrightarrow X$ en $\mathcal{A}$. Podemos construir el siguiente diagrama conmutativo y F-exacto, donde α es inducido por la propiedad de $\mathrm{Coker}(\Psi)$

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, equal] & \Theta(i) \bigoplus Q_0(Z) \arrow[r] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, phantom, "I"] & X \arrow[d, "\alpha"] \\
Z' \arrow[r, "u"] & Q_0(Z) \arrow[r, "\epsilon_Z"] & Z.
\end{tikzcd}$$

Por lo que, de 3.1.15, se sigue que el cuadrado I es un pullback. Luego, podemos completar al siguiente diagrama donde los renglones y la primera columna son

F-exactos

$$\begin{tikzcd} & \Theta(i) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\gamma"] & \Theta(i) \arrow[d, "j"] \\ Z' \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, equal] & \Theta(i)\bigoplus Q_0(Z) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "\alpha"] \\ Z' \arrow[r, "u"] & Q_0(Z) \arrow[r, "\epsilon_Z"] & Z \end{tikzcd}$$

con $i := (0, 1)$. Como F es cerrado, por 3.2.29, tenemos que $\epsilon_Z i = \alpha\varphi$ es un F-epimorfismo. Por 3.2.19 y 3.2.27, tenemos que α es un F-epimorfismo. Luego como $j = \mathrm{Ker}(\alpha)$, tenemos que la segunda columna del diagrama anterior es un par F-exacto. Como Z, $\Theta(i) \in \mathscr{F}_F(\Theta)$, tenemos que $X \in \mathscr{F}_F(\Theta)$, pues $\mathscr{F}_F(\Theta)$ es cerrada por F-extensiones. Aplicando e_Q a ξ, tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$

$$0 \longrightarrow \mathrm{e}_Q(Z') \xrightarrow{\mathrm{e}_{Q(\Psi)}} \mathrm{e}_Q(\Theta(i) \bigoplus Q_0(Z)) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(X) \longrightarrow 0.$$

Pero $\mathrm{e}_Q(\Psi) = \mu$ por lo que $\mathrm{e}_Q(X) \simeq \mathrm{Coker}(\mu) = M$. Por lo tanto e_Q es denso. □

Proposición 3.7.6 *Sean $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un F-sistema proyectivo de talla t, en una R-categoría exacta $\mathcal{A}$ de artin; y $Q := \bigoplus_{i=1}^{t} Q(i)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathscr{F}_F(\Theta)$ es cerrado por sumandos directos.

(b) $\Theta(i)$ es inescindible para cada $i \in [1, t]$.

(c) Para cada objeto $M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$, existe un un par exacto $Z \longrightarrow Q_M \longrightarrow M$ en $\mathscr{F}_F(\Theta)$ tal que $Q_M \longrightarrow M$ es una $\mathrm{add}(Q)$-cubierta de M y $\min(M) < \min(Z)$ si $M \neq 0$.

Demostración. Sea $A := \mathrm{End}_T(Q)^{op}$. Sabemos por 3.7.5 que $\mathrm{e}_Q : \mathscr{F}_F(\Theta) \longrightarrow \mathscr{F}({}_A\Delta)$ es una equivalencia exacta de categorías, A es un álgebra estandarmente estratificada y $\mathrm{e}_Q(\Theta(i)) \simeq_A \Delta(i)$, $\forall i$.
(a) Como $\mathscr{F}({}_A\Delta)$ es cerrada por sumandos directos (ver [11]), entonces esta propiedad se puede trasladar a $\mathrm{e}_Q(\Theta)$ usando la equivalencia e_Q y que $\mathrm{mod}(A)$ y $\mathcal{A}$ son categorías Krull-Schmidt.
(b) Como ${}_A\Delta_i$ es inescindible y $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\Theta(i)) \simeq \mathrm{End}_A({}_A\Delta(i))$, se sigue que $\Theta(i)$ es inescindible (pues $\mathcal{A}$ es Krull-Schmidt).
(c) Usando que $\mathscr{F}({}_A\Delta)$ es una subcategoría resolvente de $\mathrm{mod}(A)$ (ver [11]), 3.5.14 y que $\mathrm{e}_Q : \mathscr{F}_F(\Theta) \longrightarrow \mathscr{F}({}_A\Delta)$ es una equivalencia, obtenemos (c). □

Corolario 3.7.7 *Sea $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un F-epss de talla t, en una R-categoría exacta de artin $\mathcal{A}$. Entonces, el par $(\Theta, \leq)$ es un F-ss de talla t en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Las condiciones (i) y (ii) de F-ss (ver 3.5.1) son satisfechos por 3.5.7(b) y 3.5.2(b). Por 3.7.6 (b) tenemos que $\Theta(i)$ es inescindible. $\square$

Corolario 3.7.8 *Sean F un R-subfuntor de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}(-,-)$ y $(\Theta,\leq)$ un sistema estratificante de talla t, en una R-categoría exacta de artin $\mathcal{A}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathscr{F}_F(\Theta)$ es cerrado por sumandos directos.

(b) Para cada objeto $M \in \mathscr{F}_F(\Theta)$, existe un par F-exacto $Z \longrightarrow Q_M \longrightarrow M$ en $\mathscr{F}_F(\Theta)$ tal que $Q_M \longrightarrow M$ es una $\mathrm{add}(Q)$-cubierta de M y $\min(M) < \min(Z)$ si $M \neq 0$.

Demostración. Se sigue de 3.6.7 y de 3.7.6. $\square$

3.8. Ejemplo de un F-sistema

En esta sección vamos a construir un F-sistema estratificante que no es un sistema estratificante en el sentido clásico. Para esto vamos a utilizar la teoría de Auslander-Solberg desarrollada en el capítulo 1. Consideremos el siguiente carcaj $Q: \; 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$ y su álgebra de caminos $\Lambda = kQ$. Su carcaj de Auslander-Reiten es

$$\begin{tikzcd}
100 \arrow[dr] & & 010 \arrow[dr] & & 001 \\
& 110 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 011 \arrow[ur] & \\
& & 111. \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Sea $\Theta(1) := P(1) = 100$, $\Theta(2) := P(2) = 110$, $\Theta(3) := P(3) = 111$ y $\Theta(4) := 010$. En este caso, se ve que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(2),\Theta(1)) = 0$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(3),\Theta(1)) = 0$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(3),\Theta(2)) = 0$. Sean $\mathcal{T} = \{010, 001, 011\}$ y $\mathcal{F} = \{100, 110, 111\}$. El par $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es un par de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(4),\Theta(i)) = 0$ para $i < 4$. Ahora calculemos los grupos de extensiones. Como $\mathrm{gldim}(\Lambda) = 1$, recordemos que tenemos la siguiente fórmula de Auslander-Reiten: $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,N) \simeq \mathrm{DHom}_\Lambda(N,\tau M)$ como K-espacios vectoriales, para todo $M, N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(4),\Theta(4)) \simeq D(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(4),\tau(\Theta(4)))) \simeq D(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(4),\Theta(1)) = 0$$

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(4),\Theta(3)) \simeq D(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(3),\tau(\Theta(4)))) \simeq D(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(3),\Theta(1)) = 0$$

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(4),\Theta(2)) \simeq D(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(2),\tau(\Theta(4)))) \simeq D(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(2),\Theta(1)) = 0$$

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(4),\Theta(1)) \simeq D(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(1),\tau(\Theta(4)))) \simeq D(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Theta(1),\Theta(1)) \neq 0$$

Y también $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Theta(j),\Theta(i)) = 0$ si $j = 1,2,3$, pues en este caso, $\Theta(j)$ es proyectivo. Por lo tanto, el conjunto $\{\Theta(i)\}_{i=1}^4$ no forman un sistema estratificante.

Veamos que si es un F-sistema estratificante para un sunfuntor F de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. Consideremos $\mathcal{X} = \mathrm{add}(100 \oplus 110 \oplus 111 \oplus 010)$. Consideremos el subfuntor $F := F_\mathcal{X}$ de 1.1.22. Como $\mathcal{P}(\Lambda) \subseteq \mathcal{X}$, por 1.1.26, tenemos que los F-proyectivos cumplen que $\mathcal{P}(F) = \mathcal{X}$. Veamos que $\{\Theta(i)\}_{i=1}^4$ son un $F_\mathcal{X}$-sistema estratificante. Para esto, basta verificar que $F(\Theta(4), \Theta(1)) = 0$, pero esto se sigue de que $\Theta(4) \in \mathcal{P}(F) = \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\{\Theta(i)\}_{i=1}^4$ es un $F_\mathcal{X}$-sistema estratificante que no es un sistema estratificante en el sentido clásico.

Capítulo 4

Sistemas Homológicos en categorías trianguladas

4.1. Preliminares

En esta sección introduciremos la noción de categoría triangulada. Un ejemplo de ellas, son las categorías derivadas, las cuales fueron inventadas por A. Grothendieck y J. L. Verdier en la década de los años 60. Hoy en día, las categorías derivadas se han convertido en una herramienta importante en muchas ramas de la matemática como: geometría algebraica, geometría algebraica no conmutativa, teoría de representaciones, física-matemática, etc. En un intento de axiomatizar las propiedades de la categoría derivada, Grothendieck-Verdier introdujeron la noción de categoría triangulada. Durante largo tiempo, las categorías trianguladas se situaron en un extremo del álgebra homológica. Sin embargo, esta visión cambió debido a los trabajos de D. Happel en los años 80, llegando a ser de gran importancia en la teoría de representaciones y en otras áreas como ya comentamos arriba.

Una categoría triangulada consiste de una categoría aditiva $\mathcal{T}$, una autoequivalencia $\Sigma : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ llamada "funtor de traslación" y una clase $\Delta_{\mathcal{T}}$ de "triángulos distinguidos" los cuales satisfacen ciertos axiomas. Un triángulo distinguido $\eta \in \Delta_{\mathcal{T}}$ es una triada de morfismos $\eta : \ X \to Y \to Z \to \Sigma X$ en $\mathcal{T}$; y los axiomas que se pide satisfagan dichos triángulos distinguidos son con la finalidad de que modelen (permitan hacer álgebra homológica) las propiedades básicas de las sucesiones exactas cortas $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ en una categoría abeliana $\mathcal{A}$.

Dada una categoría aditiva $\mathcal{T}$ y una autoequivalencia $\Sigma : \mathcal{T} :\longrightarrow \mathcal{T}$, formamos una nueva categoría $\mathrm{Diag}(\mathcal{T}, \Sigma)$ cuyos objetos son diagramas de la forma $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A)$. Los morfismos en $\mathrm{Diag}(\mathcal{T}, \Sigma)$ son ternas (α, β, γ) de morfismos en $\mathcal{T}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta"] & C_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\gamma"] & \Sigma(A_1) \arrow[d, "\Sigma(\alpha)"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2 \arrow[r, "h_2"] & \Sigma(A_2) \end{tikzcd}$$

Definición 4.1.1 *Una **categoría triangulada** $\mathcal{T}$, es una terna $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ que satisface las siguientes condiciones.*

(a) $\mathcal{T}$ *es una categoría aditiva.*

(b) $\Sigma : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ *es una autoequivalencia aditiva.*

(c) Δ *es una subcategoría plena de Diag*$(\mathcal{T}, \Sigma)$ *(cuyos objetos llamaremos triángulos distinguidos), la cual es cerrada por isomorfismos y satisface los siguientes axiomas:*

(T1) Para todo morfismo $f : A \longrightarrow B$ *en* $\mathcal{T}$ *existe un triángulo distinguido de la forma* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A)$. *Para todo* $A \in \mathcal{T}$, *el diagrama* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{1} A \longrightarrow 0$ *es un triángulo distinguido.*

(T2) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A)$ *es un triángulo distinguido si y sólo si* $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A) \xrightarrow{-\Sigma(f)} \Sigma(B)$ *es un triángulo distinguido.*

(T3) Dados los triángulos distinguidos $A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \xrightarrow{h_i} \Sigma(A_i)$, *con* $i = 1, 2$*; y un par de morfismos* $\alpha : A_1 \longrightarrow A_2$, $\beta : B_1 \longrightarrow B_2$ *tales que el siguiente cuadrado conmuta*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[d, "\beta"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2, \end{tikzcd}$$

existe $\gamma : C_1 \longrightarrow C_2$ *tal que la terna* (α, β, γ) *es un morfismos de triángulos, es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta"] & C_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\gamma"] & \Sigma(A_1) \arrow[d, "\Sigma(\alpha)"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2 \arrow[r, "h_2"] & \Sigma(A_2). \end{tikzcd}$$

(T4) El axioma del octahedro. Para dos morfismos $f_1 : A \longrightarrow B$, $f_2 : B \longrightarrow C$ existe un diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_2"] & X \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\alpha"] & \Sigma(A) \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "f_2 f_1"] \arrow[d, "f_1"] & C \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "h_3"] \arrow[d, "\beta"] & \Sigma(A) \arrow[d, "\Sigma(f_1)"] \\
B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d] & C \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "0"] & Z \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "\Sigma(g_1)h_2"] & \Sigma(B) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[r, equal] & \Sigma(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en el cual todos los renglones y la tercera columna son triángulos distinguidos.

En este capítulo utilizaremos una versión equivalente al axioma del octahedro.

Proposición 4.1.2 [15, 2.1] *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada. Entonces, cada uno de los siguientes enunciados son equivalentes al axioma del octahedro.*

(a) Cambio de base. Para todo triángulo distinguido $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A)$ y todo morfismo $\epsilon : E \longrightarrow C$ existe un diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[d, "\delta"] & \\
A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & G \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\epsilon"] & \Sigma(A) \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\zeta"] & \Sigma(A) \\
& \Sigma(M) \arrow[r, equal] & \Sigma(M), &
\end{tikzcd}$$

donde todos los renglones y columnas son triángulos distinguidos.

(b) Cambio de Cobase. Para todo triángulo distinguido $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A)$ y todo morfismo $\alpha : A \longrightarrow D$ existe un diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, equal] \arrow[d, "\zeta"] & M \arrow[d, "\delta"] & \\
\Sigma^{-1}(C) \arrow[r, "-\Sigma^{-1}(h)"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, equal] \\
\Sigma^{-1}(C) \arrow[r, "-\Sigma^{-1}(h')"] & D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\eta"] & F \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\vartheta"] & C \\
 & \Sigma(N) \arrow[r, equal] & \Sigma(N), &
\end{tikzcd}$$

donde todos los renglones y columnas son triángulos distinguidos.

Lema 4.1.3 *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & C \arrow[r] & \Sigma A \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & \Sigma A',
\end{tikzcd}$$

donde los renglones son triángulos distinguidos. Entonces, el diagrama anterior puede ser completado al siguiente diagrama en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}A'' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^{-1}B'' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^{-1}C'' \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[d] \\
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & \Sigma A \arrow[d] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "IX"] & \Sigma A' \arrow[d] \\
A'' \arrow[r] & B'' \arrow[r] & C'' \arrow[r] & \Sigma A'',
\end{tikzcd}$$

donde todos los renglones y columnas son triángulos distinguidos; y todos los cuadrados conmutan, excepto el marcado con IX, que anticonmuta.

Demostración. Completando β y β' a triángulos distinguidos, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & A' \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha'"] & A'' \arrow[r, "\delta"] & \Sigma A \\
B \arrow[r, "\beta'"] & B' \arrow[r, "\gamma'"] & B'' \arrow[r, "\delta'"] & \Sigma B.
\end{tikzcd}$$

Luego, existe $h : A'' \longrightarrow B''$ que completa a un morfismo de triángulos. Por lo tanto, $\Sigma^{-1}h : \Sigma^{-1}A'' \longrightarrow \Sigma^{-1}B''$ hace conmutar el siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}A'' \arrow[r, "\Sigma^{-1}h"] \arrow[d, "-\Sigma^{-1}\delta"'] & \Sigma^{-1}B'' \arrow[d, "-\Sigma^{-1}\delta'"] \\
A \arrow[r, "\alpha"] & B.
\end{tikzcd}$$

Luego, por un resultado de Verdier (ver Ejecicio 10.2.6, pag. 378 en [63]), se tiene el resultado. $\square$

El siguiente resultado es el análogo al Lema de la Serpiente en categorías abelianas.

Lema 4.1.4 *Consideremos el siguiente morfismo de triángulos distinguidos en una categoría triangulada* $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\beta''"] & \Sigma A \arrow[d, "\Sigma\beta"] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & \Sigma A',
\end{tikzcd}$$

tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, \Sigma^{-1}C') = 0$. *Entonces, el diagrama anterior puede ser completado al siguiente diagrama en* $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}A'' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^{-1}B'' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^{-1}C'' \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[d] \\
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\beta''"] & \Sigma A \arrow[d, "\Sigma\beta"] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "IX"] & \Sigma A' \arrow[d] \\
A'' \arrow[r] & B'' \arrow[r] & C'' \arrow[r] & \Sigma A'',
\end{tikzcd}$$

donde todos los renglones y columnas son triángulos distinguidos; y todos los cuadrados conmutan, excepto el marcado con IX, que anticonmuta.

Demostración. Por 4.1.3, podemos completar el cuadrado de los morfismos α y β, a un diagrama como en 4.1.3. Observe que (β, β', Φ) es un morfismo de triángulos distinguidos; y como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, \Sigma^{-1}C') = 0$, por el Corolario 5 (ver pag. 243) en [32], tenemos que Φ es único, por lo tanto $\Phi = \beta''$. $\square$

Definición 4.1.5 *Sean* $\mathcal{X}$ *y* $\mathcal{Y}$ *clases de objetos en una categoría triangulada* $\mathcal{T}$. *Un morfismo* $f : X \to C$ *en* $\mathcal{T}$ *se dice que es una* $\mathcal{X}$**-precubierta** *de* C, *si*

$X \in \mathcal{X}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X', f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X', X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X', C)$ es suprayectivo, $\forall X' \in \mathcal{X}$. Si cualquier $C \in \mathcal{Y}$ admite una $\mathcal{X}$-precubierta, entonces $\mathcal{X}$ es una **clase precubriente** *en $\mathcal{Y}$. Dualizando la definición de arriba, obtenemos la noción de* **$\mathcal{X}$-preenvolvente** *de C y* **clase preenvolvente** *en $\mathcal{Y}$. Finalmente, decimos que $\mathcal{X}$ es* ***funtorialmente finita*** *en $\mathcal{T}$ si es precubriente y preenvolvente en $\mathcal{T}$.*

Definición 4.1.6 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada, $\mathcal{X}$ una subcategoría plena y aditiva de $\mathcal{T}$ cerrada por extensiones, $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $\mathcal{W}$ una subcategoría plena y aditiva de $\mathscr{A}$ cerrada por extensiones. Dado un funtor aditivo $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{W}$, decimos que:*

(a) un triángulo distinguido $\eta :\ A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma A$ está en $\mathcal{X}$, es decir, $\eta \in \mathcal{X}$, si A, B, $C \in \mathcal{X}$.

(b) El funtor aditivo $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{W}$ es ***exacto****, si para todo triángulo distinguido $\eta :\ A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma A$ en $\mathcal{X}$, se tiene que $F(\eta)$: $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathcal{W}$.*

Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ dos clases de objetos en $\mathcal{T}$. Definimos la categoría perpendicular a izquierda (resp. derecha) de $\mathcal{X}$ como ${}^{\perp}\mathcal{X} := \{Z \in \mathcal{T} \,:\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, -)|_{\mathcal{X}} = 0\}$ (resp. $\mathcal{X}^{\perp} := \{Z \in \mathcal{T} \,:\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Z)|_{\mathcal{X}} = 0\}$). Denotamos por $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ a la clase de objetos $Z \in \mathcal{T}$ para los cuales existe un triángulo distinguido $X \to Z \to Y \to X[1]$ en $\mathcal{T}$ con $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$.
Es bien conocido que la operación $*$ es asociativa (ver [13, 1.3.10]). Decimos que $\mathcal{X}$ es **cerrada por extensiones** si $\mathcal{X} * \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$.

4.2. R-categorías trianguladas

Recordemos que una categoría aditiva $\mathcal{A}$ es Krull-Schmidt si y sólo si los idempotentes en $\mathcal{A}$ se escinden y $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$ es un anillo semiperfecto para cada $X \in \mathcal{A}$ (ver 3.3.10 o [65, A.1]).

Definición 4.2.1 *Una* ***R-categoría triangulada*** *es una R-categoría $\mathcal{T}$ con una estructura de categoría triangulada $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$, en la cual el funtor de traslación $\Sigma : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ es un R-funtor (esto es, $\Sigma : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma(X), \Sigma(Y))$ es un morfismo de R-módulos, $\forall\, X, Y \in \mathcal{T}$).*

Definición 4.2.2 *Un triángulo distinguido $\eta :\ A^n \longrightarrow E \longrightarrow C \xrightarrow{h} \Sigma A^n$, con $n \in \mathbb{N}^+$, en una categoría triangulada $\mathcal{T}$, se dice que es* ***universal*** *si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-\Sigma^{-1}(h), A) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A^n, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1}C, A)$ es suprayectivo.*

Lema 4.2.3 *Sea $\mathcal{T}$ una R-categoría triangulada Hom-finita; y sean $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{T})$ tales que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1}C, A)) \neq 0$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Existe un triángulo distinguido en* $\mathcal{T}$ *que no se escinde*

$$\eta_{C,A}: \qquad A^n \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A^n)$$

tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-\Sigma^{-1}(h), A) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A^n, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1}C, A)$ *es suprayectiva, donde* $n := \ell_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1}C, A))$.

(b) *Si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, \Sigma A) = 0$ *entonces* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E, \Sigma A) = 0$.

Demostración.

(a) Sea $\{h_i\}_{i=1}^n$ una familia de R-generadores en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C, \Sigma A)$. Consideremos los triángulos distinguidos correspondientes

$$\eta_i : \; A \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C \xrightarrow{h_i} \Sigma A \quad \text{para} \quad i \in [1, n].$$

Luego $\xi : \; A^n \longrightarrow \oplus_{i=1}^n B_i \longrightarrow C^n \longrightarrow \Sigma(A^n)$ es un triángulo distinguido, donde $\xi = \oplus_{i=1}^n \eta_i$. Sea $\Delta : C \longrightarrow C^n$ el morfismo diagonal. Entonces, por Cambio de Base, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
\eta_{C,A}: A^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "K"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\Delta"] & \Sigma(A^n) \arrow[d, equal] \\
A^n \arrow[r] & \oplus_{i=1}^n B_i \arrow[r] & C^n \arrow[r] & \Sigma(A^n),
\end{tikzcd}$$

donde los renglones son triángulos distinguidos. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}(C) \arrow[r, "-\Sigma^{-1}(h)"] \arrow[d, "\Sigma^{-1}(\Delta)"'] & A^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "K"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\Delta"] & \Sigma(A^n) \arrow[d, equal] \\
\Sigma^{-1}(C^n) \arrow[r, "-\Sigma^{-1}(\varphi)"] \arrow[d, "\Sigma^{-1}(\pi_i'')"'] & A^n \arrow[r] \arrow[d, "\pi_i"] & \oplus_{i=1}^n B_i \arrow[r] \arrow[d, "\pi_i'"] & C^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_i''"] & \Sigma(A^n) \arrow[d, "\Sigma(\pi_i)"] \\
\Sigma^{-1}(C) \arrow[r, "-\Sigma^{-1}(h_i)"] & A \arrow[r] & B_i \arrow[r] & C \arrow[r] & \Sigma(A),
\end{tikzcd}$$

donde π_i, π_i' y π_i'' son las proyecciones canónicas correspondientes a las sumas directas. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\pi_i(-\Sigma^{-1}h) = -\Sigma^{-1}(h_i)\Sigma^{-1}(\pi_i'')\Sigma^{-1}(\Delta) &= -\Sigma^{-1}(h_i)\Sigma^{-1}(\pi_i''\Delta) \\
&= -\Sigma^{-1}(h_i)\Sigma^{-1}(1_C) \\
&= -\Sigma^{-1}(h_i)(1_{\Sigma^{-1}(C)}) \\
&= -\Sigma^{-1}(h_i).
\end{aligned}$$

Como Σ es un R-funtor, se tiene que $\{\Sigma^{-1}(h_i)\}_{i=1}^{n}$ son R-generadores de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1}C, A)$ y por lo tanto

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-\Sigma^{-1}(h), A) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A^n, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1}C, A)$$

es suprayectivo. Finalmente, dado que $h_i \neq 0 \ \forall\, i$, se tiene que $h \neq 0$; y por lo tanto el triángulo distinguido $\eta_{C,A}$ no se escinde.

(b) Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, A)$ al triángulo $\eta_{C,A}$ del inciso (a), tenemos la sucesión exacta

$$(A^n, A) \xrightarrow{(-\Sigma^{-1}(h),A)} (\Sigma^{-1}C, A) \longrightarrow (\Sigma^{-1}E, A) \longrightarrow (\Sigma^{-1}(A^n), A)\ .$$

Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1}(A^n), A) = 0$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-\Sigma^{-1}(h), A)$ es suprayectivo, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1}E, A) = 0$. $\Box$

Definición 4.2.4 *Decimos que $\mathcal{T}$ es una **R-categoría triangulada de artin** si $\mathcal{T}$ es una R-categoría triangulada que es una R-categoría de artin, es decir, es Hom-finita y Krull-Schmidt.*

Ejemplo 4.2.5 *Sea Λ una R-álgebra de artin. La categoría derivada acotada $\mathbf{D}^b(\mathrm{mod}(\Lambda))$ es una R-categoría triangulada de artin.*

Proposición 4.2.6 *Sean $\mathcal{T}$ una R-categoría triangulada de artin, $A \in \mathcal{T}$ y $\Gamma := \mathrm{End}(A)^{op}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Γ *es una R-álgebra de artin.*

(b) El funtor de evaluación en A, $e_A := \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, -) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$*, está bien definido e induce una equivalencia de categorías* $\mathrm{add}(A) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{proj}(\Gamma)$.

Demostración. Como $\mathcal{T}$ es en particular una R-categoría de artin, el resultado se sigue de 3.3.11. $\Box$

Corolario 4.2.7 *Sean $\mathcal{T}$ una R-categoría triangulada de artin, $A \in \mathcal{T}$ y $\Gamma :=$ $\mathrm{End}(A)^{op}$. Entonces, el funtor de evaluación $e_A : \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma)$ está bien definido; y además, la correspondencia de R-módulos*

$$e_A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, -) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma}(e_A(Z), e_A(X))$$

es un isomorfismo de R-módulos, $\forall Z \in \mathrm{add}(A)$ y $\forall X \in \mathcal{T}$.

Demostración. Se sigue de 4.2.6. $\Box$

Proposición 4.2.8 *Sea $\mathcal{T}$ una R-categoría triangulada de artin. Consideremos $\eta :\ A \xrightarrow{s} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\Psi} \Sigma A$ un triángulo distinguido que no se escinde tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma A, C) = 0$ y C es inescindible. Entonces, existe un triángulo distinguido $A' \longrightarrow B' \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma A'$ que no se escinde tal que A' es un sumando directo de A y B' es un sumando directo inescindible de B.*

Demostración. Sea $\alpha(B)$ el número de sumandos directos inescindibles que aparecen en una descomposición de B en suma directa de inescindibles. La prueba se hará por inducción sobre $\alpha(B)$. Si $\alpha(B) = 1$, no hay nada que probar. Sea $\alpha(B) > 1$. Consideremos una descomposición $B = B_1 \oplus B_2$ con B_1 inescindible. Luego, η se puede ver como sigue:

$$\eta: \ A \xrightarrow{\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{(g_1,\, g_2)} C \longrightarrow \Sigma A \ .$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, C)$ a η, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C, C) \xrightarrow{(g,C)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, C) \ .$$

Luego, como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma A, C) = 0$, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(g, C)$ es un isomorfismo. Consideremos $(g_1, 0) : B \longrightarrow C$ y $(0, g_2) : B \longrightarrow C$. Por lo tanto existen f, $f' : C \longrightarrow C$ tales que $f(g_1, g_2) = (g_1, 0)$ y $f'(g_1, g_2) = (0, g_2)$. De donde se siguen las siguientes igualdades

$$fg_1 = g_1 \tag{4.1}$$
$$fg_2 = 0 \tag{4.2}$$
$$f'g_1 = 0 \tag{4.3}$$
$$f'g_2 = g_2. \tag{4.4}$$

Ahora bien, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(g, C)(f + f') = (f + f')(g_1, g_2) = f(g_1, g_2) + f'(g_1, g_2) = (g_1, 0) + (0, g_2) = (g_1, g_2)$, y como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(g, C)(1_C) = (g_1, g_2)$, concluimos que

$$f + f' = 1_C.$$

Veamos que f y f' son idempotentes. Para esto, veamos primero que $ff' = f'f = 0$. En efecto, consideremos $ff' : C \longrightarrow C$, luego $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(g, C)(ff') = ff'(g_1, g_2) = f(0, g_2) = (0, fg_2) = (0, 0)$, donde la última igualdad es por (4.2); y como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(g, C)$ es un isomorfismo, se tiene que $ff' = 0$. Análogamente, considerando $f'f : C \longrightarrow C$, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(g, C)(f'f) = f'f(g_1, g_2) = f'(g_1, 0) = (f'g_1, 0) = (0, 0)$, por lo tanto $f'f = 0$.
Como $f + f' = 1_C$, entonces $f^2 + ff' = f$, de donde $f^2 = f$. Análogamente, se prueba que $f'^2 = f'$. Como $\mathcal{T}$ es Krull-Schmidt y C es inescindible, tenemos que $f = 0$ o $f' = 0$. Por lo tanto, de las igualdades (4.1) y (4.4), tenemos que $g_1 = 0$ o $g_2 = 0$.

Supongamos que $g_1 = 0$. Consideremos los triángulos distinguidos (el primero de ellos inducido por g_2)

$$\Sigma^{-1}(C) \xrightarrow{h_2} W' \xrightarrow{\delta'} B_2 \xrightarrow{g_2} C \quad \text{y} \quad 0 \longrightarrow B_1 \xrightarrow{1_{B_1}} B_1 \longrightarrow 0 \ ;$$

tomando su suma directa, tenemos el siguiente triángulo distinguido

$$\Sigma^{-1}(C) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix}} B_1 \oplus W' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0, & g_2 \end{pmatrix}} C\ .$$

Luego, tenemos el siguiente diagrama de triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}(C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0, & g_2 \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & C \arrow[d, equal] \\
\Sigma^{-1}(C) \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix}"] & B_1 \oplus W' \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0, & g_2 \end{pmatrix}"] & C.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, existe un isomorfismo $\xi : A \longrightarrow B_1 \oplus W'$, el cual induce un isomorfismo de triángulos. En particular, W' es un sumando directo de A. Por otro lado, tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "\delta'"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "i"] & C \arrow[r, "-\Sigma(h_2)"] \arrow[d, equal] & \Sigma W' \\
A \arrow[r, "s"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, "\Psi"] & \Sigma A,
\end{tikzcd}$$

donde $i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y los renglones son triángulos distinguidos. De dicho diagrama, se tiene que existe un morfismo $\beta' : W' \longrightarrow A$, el cual induce un morfismo de triángulos. Consideremos el siguiente triángulo distinguido

$$\eta' : \quad W' \xrightarrow{\delta'} B_2 \xrightarrow{g_2} C \xrightarrow{-\Sigma(h_2)} \Sigma W'.$$

Luego, η' no se escinde, pues si se escindiera tendríamos que $-\Sigma(h_2) = 0$. Por lo tanto $\Psi = \Sigma(\beta')(-\Sigma(h_2)) = 0$ y entonces η se escindiría, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto η' no se escinde. Además $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W', C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma(W'), C) = 0$ pues W' es sumando directo de A. Dado que $\alpha(\beta_2) < \alpha(\beta)$, por inducción el, resultado se sigue.

Supongamos ahora que $g_2 = 0$. Consideremos los triángulos distinguidos (el primero de ellos inducido por g_1

$$\Sigma^{-1}(C) \xrightarrow{h_1} W \xrightarrow{\delta} B_1 \xrightarrow{g_1} C \quad \text{y} \quad 0 \longrightarrow B_2 \xrightarrow{1_{B_2}} B_2 \longrightarrow 0\ ;$$

tomando su suma directa, tenemos el siguiente triángulo distinguido

$$\Sigma^{-1}(C) \xrightarrow{\begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}} W \oplus B_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_1, & 0 \end{pmatrix}} C\ .$$

Luego, tenemos el siguiente diagrama de triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}(C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, "(g_1,\, 0)"] \arrow[d, equal] & C \arrow[d, equal] \\
\Sigma^{-1}(C) \arrow[r, "\begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}"] & W \oplus B_2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, "(g_1,\, 0)"] & C.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, existe un isomorfismo $\xi' : A \longrightarrow W \oplus B_2$, el cual induce un isomorfismo de triángulos distinguidos. Consideremos el triángulo distinguido

$$\Xi : \quad W \xrightarrow{\delta} B_1 \xrightarrow{g_1} C \xrightarrow{-\Sigma(h_1)} \Sigma W.$$

Análogamente, al caso anterior, Ξ no se escinde. Además W es un sumando directo de A y B_1 es inescindible. Por lo tanto el triángulo buscado es Ξ. Con esto terminamos la demostración $\square$

4.3. Objetos filtrados en una categoría triangulada

Definición 4.3.1 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Decimos que $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{T})$* ***admite una $\mathcal{X}$-filtración*** *(finita) si existe una familia de triángulos distinguidos $\eta = \{\eta_i\}_{i=0}^n$, con*

$$\eta_i : \ M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow X_i \longrightarrow \Sigma M_{i-1} \ ,$$

tal que $M_{-1} = 0 = X_0$, $M_n = M$ y $X_i \in \mathcal{X}$ para $i \geq 1$. En tal caso, se definen las ***longitudes****: $\ell_{\mathcal{X},\eta}(M) := n$ y $\ell_{\mathcal{X}}(M) := \min\{\ell_{\mathcal{X},\eta}(M) \mid \eta$ es una $\mathcal{X}-$filtración de $M.\}$ Finalmente, denotemos por $\mathscr{F}(\mathcal{X})$ a la clase de objetos $M \in \mathcal{T}$ para los cuales existe una $\mathcal{X}$-filtración.*

Observación 4.3.2 *Sean $\mathcal{T}$ una categoría triangulada y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$.*

(a) $\mathscr{F}(\mathcal{X}) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n(\mathcal{X})$, donde $\mathscr{F}_0(\mathcal{X}) := \{0\}$ y $\mathscr{F}_n(\mathcal{X}) := \mathscr{F}_{n-1}(\mathcal{X}) * \mathcal{X}$ para $n \geq 1$.

(b) Para $M \in \mathscr{F}(\mathcal{X})$, se tiene que $\ell_{\mathcal{X}}(M) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid M \in \mathscr{F}_n(\mathcal{X})\}$.

(c) Para $\sigma \in \{\Sigma, \Sigma^{-1}\}$, se tiene que $\mathscr{F}(\sigma\mathcal{X}) = \sigma\mathscr{F}(\mathcal{X})$. En efecto, es fácil ver que $\sigma(\mathcal{X} * \mathcal{Y}) = \sigma(\mathcal{X}) * \sigma(\mathcal{Y})$ para cualquiera $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{T}$. Luego (c) es consecuencia de (a).

Lema 4.3.3 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Entonces $\mathscr{F}(\mathcal{X})$ es cerrada por extensiones.*

Demostración. Sea $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma A$ un triángulo distinguido con A, $C \in \mathscr{F}(X)$. La prueba se hará por inducción sobre $n = \ell_{\mathcal{X}}(C)$.
Si $C = 0$, se tiene que $A \simeq B$ y en tal caso $B \in \mathscr{F}(\mathcal{X})$.
Si $\ell_{\mathcal{X}}(C) = 1$, entonces $C \simeq X \in \mathcal{X}$. Por lo tanto una $\mathcal{X}$-filtración de B, no es más que el triángulo $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma A$ junto con los triángulos de una $\mathcal{X}$-filtración de A.
Supongamos que $\ell_{\mathcal{X}}(C) > 1$. Consideremos una $\mathcal{X}$-filtración mínima de C, $\{\eta_i : C_{i-1} \longrightarrow C_i \longrightarrow X_i \longrightarrow \Sigma C_{i-1}\}_{i=0}^{n}$. Luego, por cambio de base, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma^{-1}X_n \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Sigma^{-1}X_n \arrow[d] & \\
A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma A \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma A \\
& X_n \arrow[r, equal] & X_n, &
\end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son triángulos distinguidos y $\ell_{\mathcal{X}}(C_{n-1}) < \ell_{\mathcal{X}}(C)$. Entonces, por hipótesis de inducción, aplicada al primer renglón del diagrama anterior, tenemos que $B_{n-1} \in \mathscr{F}(\mathcal{X})$. Por lo tanto, una $\mathcal{X}$-filtración de B está dada por el triángulo $B_{n-1} \longrightarrow B \longrightarrow X_n \longrightarrow \Sigma B_{n-1}$ junto con los triángulos de una $\mathcal{X}$-filtración de B_{n-1}. $\square$

Lema 4.3.4 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$, $\sigma \in \{\Sigma^{-1}, \Sigma\}$ y $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = 0$ *entonces* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathscr{F}(\mathcal{Y}), \mathscr{F}(\mathcal{Z})) = 0$.

(b) Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{Y}, \sigma\mathcal{Z}) = 0$ *entonces* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathscr{F}(\mathcal{Y}), \sigma\mathscr{F}(\mathcal{Z})) = 0$.

Demostración.

(a) Sean $N \in \mathscr{F}(\mathcal{Y})$ y $M \in \mathscr{F}(\mathcal{Z})$. Probaremos por inducción sobre $\ell_{\mathcal{Y}}(N)$ que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(N, M) = 0$. Podemos asumir que $M \neq 0$ y $N \neq 0$.
Sea $\ell_{\mathcal{Y}}(N) = 1$. Entonces $N \simeq Y$, con $Y \in \mathcal{Y}$. Haremos inducción sobre $\ell_{\mathcal{Z}}(M)$. Si $\ell_{\mathcal{Z}}(M) = 1$, entonces $M \simeq Z$ con $Z \in \mathcal{Z}$ y por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(N, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, Z) = 0$. Sea $\ell_{\mathcal{Z}}(M) = m > 1$. Luego, existe un triángulo distinguido

$$\eta_m : \quad M_{m-1} \longrightarrow M \longrightarrow Z_m \longrightarrow \Sigma M_{n-1}$$

tal que $M_{n-1} \in \mathscr{F}(\mathcal{Z})$, $Z_m \in \mathcal{Z}$ y $\ell_{\mathcal{Z}}(M_{m-1}) = m - 1$. Entonces, por hipótesis de inducción $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, M_{m-1}) = 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, -)$ al triángulo η_m, tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, M_{m-1}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, Z_m).$$

Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, M_{m-1}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, Z_m) = 0$, concluimos de la sucesión exacta anterior que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(N, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, M) = 0$.
Supongamos que $\ell_{\mathcal{Y}}(N) > 1$. Luego, existe un triángulo distinguido

$$\eta_n : \quad N_{n-1} \longrightarrow N \longrightarrow Y_n \longrightarrow \Sigma N_{n-1}$$

tal que $N_{n-1} \in \mathscr{F}(\mathcal{Y})$, $Y_n \in \mathcal{Y}$ y $\ell_{\mathcal{Y}}(N_{n-1}) = n-1$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, M)$ al triángulo η_n, tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_n, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(N, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(N_{n-1}, M).$$

Por inducción tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(N_{n-1}, M) = 0$; y por lo probado en el paso anterior $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_n, M) = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(N, M) = 0$.

(b) Es consecuencia inmediata de (a) y de 4.3.2 (c). □

Corolario 4.3.5 *Si $\mathcal{X}$ es una clase de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$, entonces ${}^{\perp}\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathscr{F}(\mathcal{X})$.*

Demostración. Veamos que ${}^{\perp}\mathcal{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{F}(\mathcal{X})$. En efecto, sean $Y \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ y $Z \in \mathscr{F}(\mathcal{X})$. Luego, por 4.3.4, se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, Z) = 0$, pues $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, \mathcal{X}) = 0$. Por lo tanto $Y \in {}^{\perp}\mathscr{F}(\mathcal{X})$. Por otro lado, como $\mathcal{X} \subseteq \mathscr{F}(\mathcal{X})$, se tiene que ${}^{\perp}\mathscr{F}(\mathcal{X}) \subseteq {}^{\perp}\mathcal{X}$; probándose que ${}^{\perp}\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathscr{F}(\mathcal{X})$. □

Lema 4.3.6 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada. Supongamos que tenemos los siguientes triángulos distinguidos*

$$Z \longrightarrow Y \longrightarrow \theta_1 \longrightarrow \Sigma Z\ , \qquad Y \longrightarrow X \longrightarrow \theta_2 \longrightarrow \Sigma Y.$$

Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\theta_2, \Sigma\theta_1) = 0$, *entonces existen los siguientes triángulos distinguidos*

$$Z \longrightarrow W \longrightarrow \theta_2 \longrightarrow \Sigma Z\ , \qquad W \longrightarrow X \longrightarrow \theta_1 \longrightarrow \Sigma W.$$

Demostración. Por cambio de cobase, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z \arrow[d] & \\
\Sigma^{-1}\theta_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & \theta_2 \arrow[d, equal] \\
\Sigma^{-1}\theta_2 \arrow[r] & \theta_1 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & \theta_2 \\
 & \Sigma Z \arrow[r, equal] & \Sigma Z, &
\end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son triángulos distinguidos. Como $\eta: \quad \theta_1 \longrightarrow C \longrightarrow \theta_2 \longrightarrow \Sigma\theta_1$ se escinde, tenemos el siguiente triángulo distinguido η' : $\theta_2 \longrightarrow C \longrightarrow \theta_1 \longrightarrow \Sigma\theta_2$. Luego, por cambio de base, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$
\begin{tikzcd}
& \Sigma^{-1}\theta_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Sigma^{-1}\theta_1 \arrow[d] & \\
Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \arrow[r] \arrow[d] & \theta_2 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma Z \arrow[d, equal] \\
Z \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma Z \\
& \theta_1 \arrow[r, equal] & \theta_1, &
\end{tikzcd}
$$

donde los renglones y columnas son triángulos distinguidos. Luego, los triángulos buscados son: el primer renglón y primera columna del diagrama anterior, es decir

$$Z \longrightarrow W \longrightarrow \theta_2 \longrightarrow \Sigma Z \ , \quad W \longrightarrow X \longrightarrow \theta_1 \longrightarrow \Sigma W. \ \square$$

Lema 4.3.7 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada y $\theta \in \mathcal{T}$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\theta, \Sigma\theta) = 0$. Consideremos una sucesión de triángulos distinguidos de la siguiente forma*

$$\{\eta_i : \ M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow \theta \longrightarrow \Sigma M_{i-1} \ \}_{i=1}^n.$$

Entonces, para $k \in [1, n]$, existe un triángulo distinguido

$$\xi_k : \ M_0 \longrightarrow M_k \longrightarrow \theta^k \longrightarrow \Sigma M_0.$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre k. Para $k = 1$, definimos $\xi_1 := \eta_1$.
Sea $k \geq 2$ y supongamos que tenemos ξ_{k-1}. Por cambio de cobase, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$
\begin{tikzcd}
& M_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & M_0 \arrow[d] & \\
\Sigma^{-1}\theta \arrow[r] \arrow[d, equal] & M_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & M_k \arrow[r] \arrow[d] & \theta \arrow[d, equal] \\
\Sigma^{-1}\theta \arrow[r] & \theta^{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & L_k \arrow[r] \arrow[d] & \theta \\
& \Sigma M_0 \arrow[r, equal] & \Sigma M_0, &
\end{tikzcd}
$$

donde los renglones y columnas son triángulos distinguidos. Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\theta, \Sigma\theta) = 0$, el triángulo inferior del diagrama anterior se escinde. Entonces, $L_k \simeq \theta^k$. Por lo tanto, el triángulo de la segunda columna $M_0 \longrightarrow M_k \longrightarrow L_k \longrightarrow \Sigma M_0$, del diagrama anterior nos permite obtener el triángulo buscado ξ_k. Pues de los axiomas de categorías trianguladas, se sabe que: al reemplazar un objeto (en un triángulo distinguido) por uno isomorfo, se obtiene un triángulo distinguido. □

Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada y $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ una familia de objetos en $\mathcal{T}$. Para una Θ-filtración $\xi = \{\xi_k : M_{k-1} \longrightarrow M_k \longrightarrow X_k \longrightarrow \Sigma M_{k-1}\}_{k=0}^{n}$ de $M \in \mathscr{F}(\Theta)$, denotamos por $[M : \Theta(i)]_\xi$ la **multiplicidad** de la ξ-filtración de $\Theta(i)$ en M. Esto es , $[M : \Theta(i)]$ es la cardinalidad del conjunto $\{k \in \mathbb{N} \mid X_k \simeq \Theta(i)\}$. En general la multiplicidad depende de la Θ-filtración dada. Notemos que $\ell_{\Theta,\xi}(M) := \sum_{k=1}^{t}[M : \Theta(i)]_\xi$.

Proposición 4.3.8 *Sean $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ una familia de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$; y $\leq$ un orden lineal en $[1,t]$ tal que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma\Theta(i)) = 0$, $\forall\, j \geq i$. *Si ξ es una Θ-filtración de $M \in \mathscr{F}(\Theta)$, con $\ell_{\Theta,\xi}(M) = n$, entonces existe una Θ-filtración η de M y una familia Ξ de triángulos distinguidos tales que:*

(a) $m(i) := [M : \Theta(i)]_\xi = [M : \Theta(i)]_\eta \;\; \forall\, i \in [1,t]$,

(b) η está ordenada, i.e, $\eta = \{\eta_i : M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow \Theta(k_i) \longrightarrow \Sigma M_{i-1}\}_{i=0}^{n}$ con $\Theta(k_0) := 0$, $M_{-1} = 0$ y $k_n \leq k_{n-1} \leq \cdots \leq k_1$ en $([1,t], \leq)$,

(c) $\Xi = \{\Xi_i : M'_{i-1} \longrightarrow M'_i \longrightarrow \Theta(\lambda_i)^{m(\lambda_i)} \longrightarrow \Sigma M'_{i-1}\}_{i=0}^{d}$ donde $\{\Theta(\lambda_i)\}_{i=1}^{d}$ es el conjunto de los $\Theta(j)$ distintos que aparecen en la Θ-filtración ξ; y además, $\Theta(\lambda_0) = 0 = M'_{-1}$, $M'_d = M$ y $\lambda_d < \lambda_{d-1} < \cdots < \lambda_1$ en $([1,t], \leq)$.

Demostración. Podemos suponer que $M \neq 0$, pues en este caso, el resultado es trivial.

(a) y (b). Procederemos por inducción sobre $n := \ell_{\Theta,\xi}(M)$. Si $n = 1$, tenemos que la Θ-filtración $\eta := \xi$ satisface lo deseado. Sean $n \geq 2$ y $\xi := \{\xi_i \, : \, M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow \Theta(k_i) \longrightarrow \Sigma M_{i-1}\}_{i=0}^{n}$ una Θ-filtración de M. Dado que $\xi' := \xi - \{\xi_n\}$ es una Θ-filtración de M_{n-1} y $\ell_{\Theta,\xi'}(M_{n-1}) = n-1$, se tiene por inducción que existe una Θ-filtración de M_{n-1}

$$\eta' = \{\eta'_i : \; M'_{i-1} \longrightarrow M'_i \longrightarrow \Theta(k'_i) \longrightarrow \Sigma M'_{i-1}\}_{i=0}^{n-1}$$

satisfaciendo que $k'_{n-1} \leq k'_{n-2} \leq \cdots \leq k'_1$ y $[M_{n-1} : \Theta(i)]_{\xi'} = [M_{n-1} : \Theta(i)]_{\eta'}$, $\forall\, i$. Si $k_n \leq k'_{n-1}$, tenemos que $\eta := \eta' \cup \{\xi_n\}$ satisface lo requerido. Supongamos que $k'_{n-1} < k_n$; y sea $l := \max\{m \in [1, n-1] \mid k'_{n-m} < k_n\}$. Observe que la Θ-filtración $\eta' \cup \{\xi_n\}$ es casi la que buscamos, el único triángulo que no tiene multiplicidad ordenada es precisamente el ξ_n. Esto se arregla aplicando, l-veces, 4.3.6 a $\eta' \cup \{\xi_n\}$.

(c) Por (b), existe un filtración ordenada

$$\eta = \{\eta_i : \ M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow \Theta(k_i) \longrightarrow \Sigma M_{i-1}\ \}_{i=0}^{n}$$

con $k_n \leq k_{n-1} \leq \cdots \leq k_1$ en $([1,t], \leq)$ y $\Theta(k_0) := 0$. Para cada $i \in [1,n]$, agrupamos los k_i que son los mismos y los renombramos por λ_i.
Sea $\Theta(\lambda_1), \ldots, \Theta(\lambda_d)$ los diferentes $\Theta(j)$ que aparecen en la filtración η con $\lambda_d < \lambda_{d-1} < \cdots < \lambda_1$ en $([1,t], \leq)$. Definamos $s(i) := m(\lambda_i) = [M : \Theta(\lambda_i)]$ y $\alpha(i) := \sum_{j=1}^{i} s(i)$ y $\alpha(0) := -1$.
Dividamos la filtración η en las siguientes partes

$$\{\eta_i : \ M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow \Theta(\lambda_l) \longrightarrow \Sigma M_{i-1}\ \}_{i=\alpha(l-1)+1}^{\alpha(l)},$$

con $l \in [1,d]$. Por 4.3.7, tenemos el siguiente triángulo distinguido

$$\Xi_l : \quad M_{\alpha(l-1)} \longrightarrow M_{\alpha(l)} \longrightarrow \Theta(\lambda_l)^{s(l)} \longrightarrow \Sigma M_{\alpha(l-1)},$$

para cada $l \in [1,d]$. Definiendo $M_i'' := M_{\alpha(i-1)}$ para $i \in [1,d]$; y $\Xi_0 := \eta_0$, tenemos la filtración $\Xi = \{\Xi_i\}_{i=0}^{d}$ la cual satisface las propiedades requeridas. $\square$

Notación 4.3.9 *Sea $\mathcal{X} := \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ un conjunto finito de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Definimos $\mathcal{X}^{\oplus}$ como la subcategoría plena de $\mathcal{T}$ que consiste de sumas directas finitas de objetos isomorfos a objetos de $\mathcal{X}$.*

Observación 4.3.10 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, entonces $\mathcal{X}$ es cerrada por sumas directas finitas.*

Lema 4.3.11 *Sea $\mathcal{X} := \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ un conjunto finito de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Entonces $\mathscr{F}(\mathcal{X}) = \mathscr{F}(\mathcal{X}^{\oplus})$.*

Demostración. Como $X \subseteq X^{\oplus}$, se obtiene que $\mathscr{F}(\mathcal{X}) \subseteq \mathscr{F}(\mathcal{X}^{\oplus})$.
Sea $M \in \mathscr{F}(\mathcal{X}^{\oplus})$. Veremos por inducción sobre $m := \ell_{\mathcal{X}^{\oplus}}(M)$, que $M \in \mathscr{F}(\mathcal{X})$. Si $m = 1$, entonces $M \simeq X \in \mathcal{X}^{\oplus}$. Por lo tanto $M = X_1^{m_1} \bigoplus X_2^{m_2} \bigoplus \cdots \bigoplus X_n^{m_n}$. Como $\mathscr{F}(\mathcal{X})$ es cerrada por extensiones y $X_i \in \mathscr{F}(\mathcal{X})$, por 4.3.10 tenemos que $M \in \mathscr{F}(\mathcal{X})$.
Sea $m > 1$. Luego, existe un triángulo distinguido $M_{m-1} \longrightarrow M \longrightarrow S_m \longrightarrow \Sigma M_{m-1}$, con $S_m \in \mathcal{X}^{\oplus}$ y $\ell_{\mathcal{X}^{\oplus}}(M_{m-1}) = m - 1$. Por hipótesis de inducción, tenemos que $M_{n-1} \in \mathscr{F}(\mathcal{X})$. Por lo tanto, tenemos que $M \in \mathscr{F}(\mathcal{X})$, pues $\mathscr{F}(\mathcal{X})$ es cerrada por extensiones y $S_m \in \mathscr{F}(X)$ (como ya vimos en el caso $m = 1$). $\square$

Lema 4.3.12 *Sea $\mathcal{X} := \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ un conjunto finito de objetos en una R-categoría triangulada de artin $\mathcal{T}$. Entonces $\mathcal{X}^{\oplus}$ es funtorialmente finita.*

Demostración. Probaremos que $\mathcal{X}^{\oplus}$ es una clase precubriente en $\mathcal{T}$. En efecto, sea $T := \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$. Por 4.2.6 (a), tenemos la R-álgebra de artin $\Gamma := \mathrm{End}(T)^{op}$

y el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(T,-):\mathcal{T}\longrightarrow \operatorname{mod}(\Gamma)$. Sea $X\in\mathcal{T}$ y sea $\{f_1,\ldots,f_r\}$ un conjunto generador de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(T,X)$ como Γ-módulo. Veamos que $f:=(f_1,\ldots,f_r):T^r\longrightarrow X$ es una $\mathcal{X}^{\oplus}$-aproximación a derecha de X. En efecto, sea $g:C\longrightarrow X$ en $\operatorname{mod}(\Gamma)$ con $C\in\mathcal{X}^{\oplus}$, por lo tanto $C=X_1^{m_1}\bigoplus X_2^{m_2}\bigoplus\cdots\bigoplus X_n^{m_n}$. Luego, existe $C'\in\mathcal{X}^{\oplus}$ tal que $C\bigoplus C'=T^m$ para alguna m. Sea $\pi_C:T^m=C\bigoplus C'\longrightarrow C$ la proyección natural, y consideremos $g\pi_C=(g'_1,\ldots,g'_m):T^m\longrightarrow X$. Como $g'_j\in\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(T,X)$, se tiene que $g'_j=\sum_{i=1}^r f_ih_{ij}$, $j=1,\ldots,m$, con $h_{ij}:T\longrightarrow T$. Sea $H=(h_{ij})\in\operatorname{Mat}_{r\times m}(\operatorname{End}(T))$. Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T^m \arrow[r, "g\pi_C"] \arrow[d, "H"'] & X \\ T^r. \arrow[ur, "f=(f_1,\ldots,f_r)"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, considerando la inclusión canónica $i_C:C\longrightarrow C\bigoplus C'=T^m$ se tiene que $g=(g\pi_C)i_C=(fH)i_C=f(Hi_C)$. Esto prueba que $f:=(f_1,\ldots,f_r):T^r\longrightarrow X$ es una $\mathcal{X}^{\oplus}$-aproximación a derecha de X. Por lo tanto, $\mathcal{X}^{\oplus}$ es contravariantemente finita. De manera análoga, se prueba que $\mathcal{X}^{\oplus}$ es una clase preenvolvente en $\mathcal{T}$. $\square$

Lema 4.3.13 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos, en una categoría triangulada $\mathcal{T}$, tal que $0\in\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrada por isomorfismos. Entonces $\mathscr{F}_n(\mathcal{X})=\mathcal{X}*\mathcal{X}*\cdots*\mathcal{X}$, tantas veces como n para $n\geq 2$; y $\mathscr{F}_0(\mathcal{X})\subseteq\mathscr{F}_1(\mathcal{X})\subseteq\ldots$.*

Demostración. Como $\mathscr{F}_0(\mathcal{X}):=\{0\}$, se tiene que $\mathcal{X}\subseteq\mathscr{F}_1(\mathcal{X})=\{0\}*\mathcal{X}$. Por otro lado, como $\mathcal{X}$ es cerrada por isomorfismos, tenemos que $\{0\}*\mathcal{X}\subseteq\mathcal{X}$. Por lo tanto, $\mathscr{F}_1(\mathcal{X})=\mathcal{X}$. Luego, tenemos que $\mathscr{F}_2(\mathcal{X})=\mathcal{X}*\mathcal{X}$. Prosiguiendo inductivamente, tenemos que $\mathscr{F}_n(\mathcal{X})=\mathcal{X}*\mathcal{X}*\cdots*\mathcal{X}$ tantas veces como n para $n\geq 2$. Luego $\mathscr{F}_n(\mathcal{X})=\mathcal{X}*\mathscr{F}_{n-1}(\mathcal{X})$ (pues $*$ es asociativa). Ahora bien, como $0\in\mathscr{F}_n(\mathcal{X})$ para $n\geq 0$, concluimos que $\mathscr{F}_{n-1}(\mathcal{X})\subseteq\mathscr{F}_n(\mathcal{X})$, $\forall\, n\geq 1$. $\square$

El siguiente resultado, es una generalización para categorías trianguladas de un resultado de C. M. Ringel (ver [59, 1]). La prueba utiliza la versión para categorías trianguladas de un teorema de Gentle-Todorov, debido a Xia-Wu Chen.

Teorema 4.3.14 [64, 1.3] *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada y $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ subcategorías prenvolventes de $\mathcal{T}$. Entonces $\mathcal{X}*\mathcal{Y}$ es preenvolvente.*

Teorema 4.3.15 *Sea $\Theta:=\{\Theta(i)\}_{i=1}^n$ una familia de objetos, en una R-categoría triangulada de artin $\mathcal{T}$, tal que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j),\Sigma\Theta(i))=0$ para $j\geq i$. Entonces $\mathscr{F}(\Theta)$ es funtorialmente finita.*

Demostración. Veamos primero que $\mathscr{F}_n(\Theta^{\oplus})=\mathscr{F}(\Theta)$. En efecto, por 4.3.11, tenemos que $\mathscr{F}(\Theta^{\oplus})=\mathscr{F}(\Theta)$, por lo tanto $\mathscr{F}(\Theta)=\cup_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_k(\Theta^{\oplus})$. Sea $M\in\mathscr{F}(\Theta)$. Luego, por 4.3.8 (c), existe filtración

$$\Xi=\{\Xi_i:\ M'_{i-1}\longrightarrow M'_i\longrightarrow\Theta(\lambda_i)^{m(\lambda_i)}\longrightarrow\Sigma M'_{i-1}\ \}_{i=0}^d,$$

donde $\{\Theta(\lambda_i)\}_{i=1}^d$ es el conjunto de los $\Theta(j)$ distintos que aparecen en una Θ-filtración ξ de M, $\lambda_d < \lambda_{d-1} < \cdots < \lambda_1$ y $M_d = M$. Luego $M \in \mathscr{F}_d(\Theta^{\oplus})$ con $d \leq n$. Como $\Theta^{\oplus}$ es cerrada por isomorfismos y contiene al 0, se tiene que $\mathscr{F}_d(\Theta^{\oplus}) \subseteq \mathscr{F}_n(\Theta^{\oplus})$; de donde tenemos que $\mathscr{F}(\Theta) \subseteq \mathscr{F}_n(\Theta^{\oplus})$. Por lo tanto $\mathscr{F}_n(\Theta^{\oplus}) = \mathscr{F}(\Theta)$. Luego, como $\Theta^{\oplus}$ es funtorialmente por 4.3.12, el resultado se sigue de 4.3.14 y de su versión dual. □

Definición 4.3.16 *Sea $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^n$ una familia de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Los objetos* Θ-**proyectivos** *en $\mathcal{T}$ es la clase $\mathcal{P}(\Theta) := \Sigma({}^{\perp}(\mathscr{F}(\Theta)))$. Dualmente, los objetos* Θ-**inyectivos** *en $\mathcal{T}$ es la clase $\mathcal{I}(\Theta) := \Sigma^{-1}(\mathscr{F}(\Theta)^{\perp})$.*

Notemos que por 4.3.5 y su dual, tenemos que $\mathcal{P}(\Theta) = \Sigma({}^{\perp}\Theta) ={}^{\perp} (\Sigma\Theta)$ y $\mathcal{I}(\Theta) = \Sigma^{-1}(\Theta^{\perp}) = (\Sigma^{-1}\Theta)^{\perp}$. En lo que sigue, seguimos las ideas de Ringel del artículo [59], para probar que bajo ciertas condiciones $\mathcal{P}(\Theta)$ es una clase precubriente y $\mathcal{I}(\Theta)$ es una clase preenvolvente. Para eso, utilizamos los siguientes lemas (comparar con lema 3 y 4 en [59]).

Lema 4.3.17 *Sea $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^n$ una familia de objetos en una R-categoría triangulada y Hom-finita tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma\Theta(i)) = 0$ para $j \geq i$. Sean $t \in [1, n]$ y $N \in \mathcal{T}$ tales que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma N) = 0$ para $j > t$. Entonces, existe un triángulo distinguido*

$$N \longrightarrow N_t \longrightarrow Q_t \longrightarrow \Sigma N$$

tal que $Q_t = \Theta(t)^m$, donde $m := \ell_R \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(t), \Sigma N)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma N_t) = 0$ para $j \geq t$.

Demostración. Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(t), \Sigma N) = 0$, entonces el triángulo buscado es $N \xrightarrow{1} N \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma N$. Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(t), \Sigma N) \neq 0$, por el dual de 4.2.3, tenemos un triángulo distinguido

$$\eta : \; N \longrightarrow N_t \longrightarrow \Theta(t)^m \xrightarrow{h} \Sigma N$$

tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(t), h) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(t), \Theta(t)^m) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(t), \Sigma N)$ es un epimorfismo. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), -)$ a η con $j \geq t$, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$(\Theta(j), \Theta(t)^m) \xrightarrow{(\theta(t),h)} (\Theta(j), \Sigma N) \longrightarrow (\Theta(j), \Sigma N_t) \longrightarrow (\Theta(j), \Sigma\Theta(t)^m).$$

Como $(\Theta(j), \Sigma\Theta(t)) = 0$ para $j \geq t$ y $(\Theta(j), \Sigma N) = 0$ para $j > t$, entonces $(\Theta(j), \Sigma N_t) = 0$ para $j > t$. Si $j = t$, $(\Theta(t), h)$ es un epimorfismo, por lo tanto $(\Theta(t), \Sigma N_t) = 0$. Probándose el lema. □

Lema 4.3.18 *Sea $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^n$ una familia de objetos en una R-categoría triangulada y Hom-finita tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma\Theta(i)) = 0$ para $j \geq i$. Sean*

$t \in [1, n]$ y $N \in \mathcal{T}$ tales que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma N) = 0$ para $j > t$. Entonces, existe un triángulo distinguido

$$N \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow \Sigma N$$

con $X \in \mathscr{F}(\{\Theta(i) \mid i \in [1, t]\})$ y $Y \in \mathcal{I}(\Theta)$.

Demostración. Sea $N \in \mathcal{T}$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma N) = 0$ para $j > t$. Por 4.3.17, existe un triángulo distinguido

$$\eta_{t+1} : \; N \xrightarrow{\mu_t} N_t \longrightarrow Q_t \longrightarrow \Sigma N$$

con $Q_t = \Theta(t)^{m_t}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma N_t) = 0$ para $j \geq t$. De la misma forma, existe un triángulo distinguido

$$\eta_t : \; N_t \xrightarrow{\mu_{t-1}} N_{t-1} \longrightarrow Q_{t-1} \longrightarrow \Sigma N_t$$

con $Q_{t-1} = \Theta(t-1)^{m_{t-1}}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma N_{t-1}) = 0$ para $j \geq t-1$. Inductivamente, construimos triángulos distinguidos

$$\eta_i : \; N_i \xrightarrow{\mu_{i-1}} N_{i-1} \longrightarrow Q_{i-1} \longrightarrow \Sigma N_i$$

con $Q_{i-1} = \Theta(i-1)^{m_{i-1}}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma N_i) = 0$ para $j \geq i$. Para $\alpha_r := \mu_{t-r} \cdots \mu_{t-1}\mu_t$ con $0 \leq r \leq t-1$, construiremos triángulos distinguidos

$$\xi_r : \; N \xrightarrow{\alpha_r} N_{t-r} \longrightarrow X_{t-r} \longrightarrow \Sigma N$$

con $X_{t-r} \in \mathscr{F}(\{\Theta(i) \mid i \in [t-r, t]\})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma N_{t-r}) = 0$ para $j \geq t-r$. Para $r = 0$, definimos $\xi_0 := \eta_{t+1}$. Supongamos hemos construido ξ_r. Consideremos el siguiente diagrama de cambio de cobase

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma^{-1}\Theta(t-r-1)^{m_{t-r-1}} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Sigma^{-1}\Theta(t-r-1)^{m_{t-r-1}} \arrow[d] & \\
N \arrow[r, "\alpha_r"] \arrow[d, equal] & N_{t-r} \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{t-r-1}"] & X_{t-r} \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma N \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "\alpha_{r+1}"] & N_{t-r-1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{t-r-1} \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma N \\
& \Theta(t-r-1)^{m_{t-r-1}} \arrow[r, equal] & \Theta(t-r-1)^{m_{t-r-1}}. &
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis de inducción tenemos que $X_{t-r} \in \mathscr{F}(\{\Theta(i) \mid i \in [t-r, t]\})$. Por lo tanto $\Theta(t-r-1)^{m_{t-r-1}}, X_{t-r} \in \mathscr{F}(\{\Theta(i) \mid i \in [t-r-1, t]\})$. Luego como $\mathscr{F}(\{\Theta(i) \mid i \in [t-r-1, t]\})$ es cerrada por extensiones, tenemos que $X_{t-r-1} \in \mathscr{F}(\{\Theta(i) \mid i \in [t-r-1, t]\})$. También $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma N_{t-r-1}) = 0$ para $j \geq t-r-1$. Luego ξ_{r+1}, es el triángulo del segundo renglón del diagrama anterior. Por lo tanto el triángulo buscado es ξ_{t-1}. $\square$

Teorema 4.3.19 *Sea* $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^{n}$ *una familia de objetos en una* R*-categoría triangulada de artin; y* $\leq$ *un orden lineal en* $[1, n]$ *tal que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma\Theta(i)) = 0$ *para* $j \geq i$*. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Para cada objeto $X \in \mathcal{T}$ *existen dos triángulos distinguidos en* $\mathcal{T}$

$$X \longrightarrow Y_X \longrightarrow C_X \longrightarrow \Sigma(X) \quad \textit{con} \quad Y_X \in \mathcal{I}(\Theta), C_X \in \mathscr{F}(\Theta),$$

$$\Sigma^{-1}X \longrightarrow K_X \longrightarrow Q_X \longrightarrow X \quad \textit{con} \quad Q_X \in \mathcal{P}(\Theta), K_X \in \mathscr{F}(\Theta).$$

(b) $\mathcal{P}(\Theta)$ *es una clase precubriente y* $\mathcal{I}(\Theta)$ *es una clase preenvolvente.*

Demostración. (a) Por simplicidad, supondremos que $\leq$ es el orden natural en $[1, n]$. Además solo se probara la existencia del primer triángulo, pues la existencia del segundo se sigue por dualidad. Sea $X \in \mathcal{T}$ y $t := n$. Por 4.3.18, tenemos el triángulo distinguido $X \longrightarrow Y_X \longrightarrow C_X \longrightarrow \Sigma(X)$ con $Y_X \in \mathcal{I}(\Theta)$ y $C_X \in \mathscr{F}(\Theta)$.
(b) Veamos ahora que $\mathcal{I}(\Theta)$ es una clase preenvolvente. En efecto, sea $X \in \mathcal{T}$, por (a), existe triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{\beta} Y_X \longrightarrow C_X \longrightarrow \Sigma X$$

con $C_X \in \mathscr{F}(\Theta)$ y $Y_X \in \mathcal{I}(\Theta)$. Veamos que β es una $\mathcal{I}(\Theta)$-preenvolvente de X. En efecto, sea $\beta' : X \longrightarrow Y'$ con $Y' \in \mathcal{I}(\Theta)$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}C_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\beta'"] & Y_X \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & C_X \arrow[d, equal] \\
\Sigma^{-1}C_X \arrow[r, "\alpha"] & Y' \arrow[r, "u"] & L \arrow[r] & C_X,
\end{tikzcd}$$

donde los renglones son triángulos distinguidos. Como $Y' \in \mathcal{I}(\Theta)$ y $C_X \in \mathscr{F}(\Theta)$ por 4.3.4, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1}C_X, Y') = 0$. Por lo tanto, $\alpha = 0$ y entonces el triángulo inferior del diagrama anterior se escinde. Luego, existe $p : L \longrightarrow Y'$ tal que $pu = 1_{Y'}$. Por lo tanto, $\beta' = pu\beta' = p\gamma\beta = (p\gamma)\beta$. Probándose que β es una $\mathcal{I}(\Theta)$-preenvolvente de X. Finalmente, la prueba de que $\mathcal{P}(\Theta)$ es precubriente es similar usando el segundo triángulo en (a). $\square$

4.4. Sistemas Homológicos

En esta sección introducimos algunos sistemas homológicos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$, sobre un conjunto finito linealmente ordenado. Estos sistemas homológicos generalizan la noción de sistema estratificante en una categoría de módulos (ver [28], [47], [48], [53]).
Dadas $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ clases de objetos en $\mathcal{T}$, decimos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ si se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) = 0$, $\forall X \in \mathcal{X}$, $\forall Y \in \mathcal{Y}$. Para cada $t \in \mathbb{N}^+$, denotaremos por $[1, t]$ al conjunto $\{1, 2, \ldots t\}$.

Definición 4.4.1 *Un* Θ-***sistema*** $(\Theta, \leq)$ ***de talla*** t*, en una categoría triangulada* $\mathcal{T}$*, consiste de los siguientes datos*

(S1) $\leq$ *es un orden lineal en* $[1, t]$.

(S2) $\Theta =: \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ *es una familia de objetos inescindibles en* $\mathcal{T}$.

(S3) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para* $j > i$.

(S4) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma\Theta(i)) = 0$ *para* $j \geq i$.

(S5) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta, \Sigma^{-1}\Theta) = 0$.

Ejemplo 4.4.2 *Las sucesiones excepcionales. Sea* H *una* k*-álgebra hereditaria y* $\mathcal{T} := \mathbf{D}^b(\mathrm{mod}(H))$ *su categoría derivada acotada y denotamos por* $n := \mathrm{rk}\, K_0\,(H)$ *al rango del grupo de Grothendieck asociado a* H*. Una sucesión de objetos inescindibles en* $\mathbf{D}^b(\mathrm{mod}(H))$*,* $(M_1, \ldots, M_n)$ *es **excepcional** si*

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M_j, \Sigma^k(M_i)) = 0, \ \forall\, j > i\ \forall\, k$.

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M_i, \Sigma^k(M_i)) = 0, \ \forall k > 0$.

Entonces (S1), (S2) (S3) y (S4) de la definición de Θ *sistema se cumplen. Finalmente (S5), se cumple pues en una categoría derivada acotada de una hereditaria* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M, \Sigma^k(N)) = 0$ *si* $k < 0$*,* $\forall\, M, N \in \mathbf{D}^b(\mathrm{mod}(H))$*. Por lo tanto, las sucesiones excepcionales en la categoría derivada* $\mathbf{D}^b(\mathrm{mod}(H))$*, son ejemplos de* Θ*-sistemas.*

Definición 4.4.3 *Un* Θ-***sistema proyectivo de talla*** t*, en una categoría triangulada* $\mathcal{T}$*, consiste de los siguientes datos.*

(PS1) $\leq$ *es un orden lineal en* $[1, t]$

(PS2) $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ *es una familia de objetos no nulos en* $\mathcal{T}$.

(PS3) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para* $j > i$.

(PS4) $\underline{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^{t}$ *es una familia de objetos inescindibles en* $\mathcal{T}$ *tal que* $Q := \bigoplus_{i=1}^{t} Q(i) \in {}^{\perp}(\Sigma^{-1}\Theta) \cap {}^{\perp}(\Sigma\Theta)$.

(PS5) Para cada $i \in [1, t]$*, existe un triángulo distinguido en* $\mathcal{T}$

$$\eta_i : \qquad K(i) \longrightarrow Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Theta(i) \longrightarrow \Sigma K(i)$$

tal que $K(i) \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid j > i\})$ *y* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma K(i), \Theta(i)) = 0$.

Definición 4.4.4 *Un* Θ-***sistema injectivo*** $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ ***de talla*** t*, en una categoría triangulada* $\mathcal{T}$*, consiste de los siguientes datos.*

(IS1) $\leq$ *es un orden lineal en* $[1, t]$

(IS2) $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ *es una familia de objetos no nulos en* $\mathcal{T}$.

(IS3) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para* $j > i$.

(IS4) $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^{t}$ *es una familia de objetos inescindibles en* $\mathcal{T}$ *tal que* $Y := \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i) \in (\Sigma^{-1}\Theta)^{\perp} \cap (\Sigma\Theta)^{\perp}$.

(IS5) Para cada $i \in [1, t]$, *existe un triángulo distinguido en* $\mathcal{T}$

$$\eta_i : \quad \Sigma^{-1}Z(i) \longrightarrow \Theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \longrightarrow Z(i)$$

tal que $Z(i) \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid j < i\})$ *y* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i), \Sigma^{-1}Z(i)) = 0$.

Observación 4.4.5 *Una terna* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *es un* Θ*-sistema inyectivo de talla* t *en una categoría triangulada* $\mathcal{T}$, *si y sólo si* $(\Theta^{op}, \underline{Y}^{op}, \leq^{op})$ *es un* Θ^{op}*-sistema proyectivo de talla* t *en la categoría triangulada opuesta* $\mathcal{T}^{op}$, *donde* $\leq^{op}$ *es el orden opuesto de* $\leq$ *en* $[1, t]$. *Luego, cualquier resultado para* Θ*-sistemas proyectivos puede ser transferido a* Θ*-sistemas inyectivos; y entonces sólo trabajaremos con* Θ*-sistemas proyectivos.*

Proposición 4.4.6 *Sea* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *un* Θ*-sistema proyectivo de talla* t, *en una categoría triangulada* $\mathcal{T}$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(K(j), \Theta(i)) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma\Theta(i)),\ \forall j \geq i$.

(b) Para $j \geq i$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\beta_j, \Theta(i)) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Theta(i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q(j), \Theta(i))$ *es un isomorfismo de grupos abelianos.*

(c) Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^2 K(j), \Theta(i)) = 0\ \forall i, j \in [1, t]$, *entonces* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta, \Sigma^{-1}\Theta) = 0$.

Demostración.

(a) Sea $j \geq i$. Dado que $K(j) \in \mathscr{F}(\{\Theta(\lambda) \mid \lambda > j\})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(\lambda), \Theta(i)) = 0$ para $\lambda > j \geq i$, por 4.3.4(a), se sigue que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(K(j), \Theta(i)) = 0$. Consideremos el triángulo de 4.4.3(b) $\eta_j : K(j) \longrightarrow Q(j) \longrightarrow \Theta(j) \longrightarrow \Sigma K(j)$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, \Sigma\Theta(i))$ a η_j, se tiene la siguiente sucesión exacta

$$(\Sigma K(j), \Sigma\Theta(i)) \longrightarrow (\Theta(j), \Sigma\Theta(i)) \longrightarrow (Q(j), \Sigma\Theta(i)) \ .$$

Pero $(\Sigma K(j), \Sigma\Theta(i)) = (Q(j), \Sigma\Theta(i)) = 0$ para $j \geq i$, pues ya vimos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(K(j), \Theta(i)) = 0$ y además $Q(j) \in {}^{\perp}\Sigma\Theta$. Por lo tanto, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma\Theta(i)) = 0$ para $j \geq i$.

(b) Consideremos el triángulo distinguido, dado en 4.4.3 (b)

$$\eta_j : \ K(j) \longrightarrow Q(j) \xrightarrow{\beta_j} \Theta(j) \longrightarrow \Sigma K(j).$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, \Theta(i))$ a η_j, se tiene la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos

$$(\Sigma K(j), \Theta(i)) \longrightarrow (\Theta(j), \Theta(i)) \xrightarrow{(\beta_j, \Theta(i))} (Q(j), \Theta(i)) \longrightarrow (K(j), \Theta(i)) \ .$$

Para $j \geq i$ tenemos por (a) que $(K(j), \Theta(i)) = 0$; y por lo tanto $(\beta_j, \Theta(i))$ es un epimorfismo. Por otro lado, $\mathrm{Ker}(\beta_j, \Theta(i)) \subseteq (\Theta(j), \Theta(i)) = 0$, si $j > i$. Luego $(\beta_j, \Theta(i))$ es un isomorfismo para $j > i$.
Para $j = i$, tenemos que $(\Sigma K(i), \Theta(i)) = (K(i), \Theta(i)) = 0$. Por lo tanto, $(\beta_i, \Theta(i))$ es un isomorfismo .

(c) Sean $i, j \in [1, t]$ y $\eta_j : \ K(j) \longrightarrow Q(j) \xrightarrow{\beta_j} \Theta(j) \longrightarrow \Sigma K(j)$ el triángulo de 4.4.3(b). Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, \Sigma^{-1}\Theta(i))$ a η_j, se tiene la siguiente sucesión exacta

$$(\Sigma K(j), \Sigma^{-1}\Theta(i)) \longrightarrow (\Theta(j), \Sigma^{-1}\Theta(i)) \longrightarrow (Q(j), \Sigma^{-1}\Theta(i)) \; .$$

Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^2 K(j), \Theta(i)) = 0$, $\forall i, j \in [1, t]$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q(j), \Sigma^{-1}\Theta(i)) = 0$ pues $Q := \bigoplus_{i=1}^{n} Q(i) \in^{\perp} (\Sigma^{-1}\Theta)$, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(j), \Sigma^{-1}\Theta(i)) = 0$. $\square$

Corolario 4.4.7 *Sea $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un Θ-sistema proyectivo de talla t, en una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Entonces, para cada triángulo $\eta_i : K(i) \longrightarrow Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Theta(i) \longrightarrow \Sigma K(i)$ de la definición 4.4.3 (b), se tiene que $\beta_i \neq 0$.*

Demostración. De 4.4.6 (b), tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\beta_i, \Theta(i))$ es un isomorfismo. Por lo tanto, como $1_{\Theta(i)} \neq 0$, se tiene que $\beta_i = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\beta_i, \Theta(i))(1_{\Theta(i)}) \neq 0$ $\square$

Lema 4.4.8 *Sea $\mathcal{T}$ una R-categoría triangulada de artin. Entonces, cada morfismo $\beta : Q \longrightarrow M$ en $\mathcal{T}$, con $\beta \neq 0$ y Q inescindible, es minimal a derecha.*

Demostración. Como $\mathcal{T}$ es en particular una R-categoría de artin, el resultado se sigue de 3.5.11. $\square$

Proposición 4.4.9 *Sea $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un Θ-sistema proyectivo de talla t en una R-categoría triangulada de artin $\mathcal{T}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Para cada $i \in [1, t]$, el morfismo $\beta_i : Q(i) \longrightarrow \Theta(i)$ es una $\mathcal{P}(\Theta)$-cubierta de $\Theta(i)$.

(b) Sea $(\Theta, \underline{Q'}, \leq)$ es otro Θ-sistema proyectivo de talla t en $\mathcal{T}$. Entonces, para cada $i \in [1, t]$, existe un isomorfismo $\rho_i : Q(i) \longrightarrow Q'(i)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Q(i) \arrow[rr, "\rho_i"] \arrow[dr, "\beta_i"'] & & Q'(i) \arrow[dl, "\beta'_i"] \\ & \Theta(i). & \end{tikzcd}$$

Demostración.

(a) Por 4.4.7 y 4.4.8 tenemos que β_i es minimal a derecha. Veamos que también es una $\mathcal{P}(\Theta)$-precubierta. En efecto, sea $f : X \longrightarrow \Theta(i)$ con $X \in {}^{\perp}(\Sigma\Theta)$.

Consideremos $\eta_i : \; K(i) \longrightarrow Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Theta(i) \longrightarrow \Sigma K(i)$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, -)$ a η_i, tenemos la sucesión exacta

$$(X, K(i)) \longrightarrow (X, Q(i)) \xrightarrow{(X,\beta_i)} (X, \Theta(i)) \longrightarrow (X, \Sigma K(i)).$$

Como $X \in {}^{\perp}(\Sigma\Theta)$ y $K(i) \in \mathscr{F}(\Theta)$, entonces por 4.3.2(c), 4.3.4(b) y 4.3.5, tenemos que $(X, \Sigma K(i)) = 0$. Por lo tanto, β_i es una $\mathcal{P}(\Theta)$-cubierta de $\Theta(i)$.

(b) Es consecuencia inmediata de (a). $\square$

Proposición 4.4.10 *Sea $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un Θ-sistema proyectivo de talla t, en una R-categoría triangulada $\mathcal{T}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\forall\, Q' \in \mathrm{add}(Q)$, el R-funtor aditivo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q', -) : \mathscr{F}(\Theta) \longrightarrow \mathrm{mod}(R)$ es exacto.

(b) Sea $\mathcal{T}$ una categoría Hom-finita. Entonces, para $M \in \mathscr{F}(\Theta)$; y cada Θ-filtración ξ de M, la multipicidad de $\Theta(i)$ en M no depende de ξ. En tal caso, dicha multiplicidad será denotada por $[M : \Theta(i)]$. En particular $\ell_{\Theta}(M) = \sum_{i=1}^{n}[M : \Theta(i)]$.

Demostración.

(a) Sea $\eta : \; A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma A$ un triángulo distinguido en $\mathscr{F}(\Theta)$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q', -)$ al triángulo η, tenemos la sucesión exacta

$$(Q', \Sigma^{-1}(C)) \longrightarrow (Q', A) \longrightarrow (Q', B) \longrightarrow (Q', C) \longrightarrow (Q', \Sigma A).$$

Luego, por 4.3.4(b), tenemos que $(Q', \Sigma^{-1}(C)) = (Q', \Sigma A) = 0$ pues $Q := \bigoplus_{i=1}^{t} Q(i) \in {}^{\perp}(\Sigma^{-1}\Theta) \cap {}^{\perp}(\Sigma\Theta)$, probándose (a).

(b) Consideremos una Θ-filtración de M

$$\xi = \{\xi_l : \quad M_{l-1} \longrightarrow M_l \longrightarrow \Theta(j_l) \longrightarrow \Sigma M_{l-1} \}_{l=0}^{n},$$

tal que $M_{-1} = 0 = \Theta(j_0)$, $j_l \in [1, t]$ para $l \geq 1$ y $M_n = M$. Aplicando a cada triángulo ξ_j el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q(i), -)$; y denotando por $\langle X, Y\rangle$ a $\ell_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y))$, tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\langle Q(i), M_1\rangle &= \langle Q(i), 0\rangle + \langle Q(i), \Theta(j_1)\rangle,\\
\langle Q(i), M_2\rangle &= \langle Q(i), \Theta(j_1)\rangle + \langle Q(i), \Theta(j_2)\rangle,\\
\langle Q(i), M_3\rangle &= \langle Q(i), M_2\rangle + \langle Q(i), \Theta(j_3)\rangle,\\
&\vdots\\
\langle Q(i), M\rangle &= \langle Q(i), M_{n-1}\rangle + \langle Q(i), \Theta(j_n)\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $c_i := \langle Q(i), M\rangle = \sum_{j=1}^{t}[M : \Theta(j)]_\xi \langle Q(i), \Theta(j)\rangle$. Considerando la matriz $D := (d_{ij})$ donde $d_{ij} := \langle Q(i), \Theta(j)\rangle$, tenemos por 4.4.6(b), que D es triangular superior con $d_{ii} \neq 0$; y por lo tanto, $\det(D) \neq 0$. Sean $X := ([M : \Theta(1)]_\xi, [M : \Theta(2)]_\xi, \ldots, [M : \Theta(t)]_\xi)^t$ y $C := (c_1, c_2, \ldots, c_t)^t$ renglones columna. Entonces, las igualdades anteriores se pueden escribir como una ecuación matricial $D \cdot X = C$. Como $\det(D) \neq 0$, existe una única solución al sistema anterior y por lo tanto $[M : \Theta(j)]_\xi$ sólo depende de los c_i y $d_{i,j}$ y no de ξ. $\square$

Corolario 4.4.11 *Sea $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un Θ-sistema proyectivo de talla t, en una R-categoría triangulada de artin $\mathcal{T}$. Entonces $[Q(i) : \Theta(i)] = 1$, $\forall\, i \in [1, t]$ y $Q(i) \ncong Q(j)$ para $i \neq j$.*

Demostración. Veamos que $[Q(i) : \Theta(i)] = 1$, $\forall\, i$. En efecto, por 4.4.3 (b), tenemos el triángulo distinguido

$$K(i) \longrightarrow Q(i) \longrightarrow \Theta(i) \longrightarrow \Sigma K(i)$$

con $K(i) \in \mathscr{F}(\{\Theta(k) \mid k > i\})$. Luego, por 4.4.10 (b), del triángulo distinguido anterior se concluye que $[Q(i) : \Theta(i)] = 1$.
Ahora bien, sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$. Por lo tanto, del triángulo distinguido dado en 4.4.3 (b) para $Q(j)$; y de nuevo por 4.4.10 (b), se tiene que $[Q(j) : \Theta(i)] = 0$ pues $Q(j) \in \mathscr{F}(\{\Theta(k) \mid k \geq j\})$ y $j > i$. En particular, $\Theta(i)$ es factor de composición de $Q(i)$ pero no de $Q(j)$; probándose que $Q(i) \ncong Q(j)$ para $i \neq j$. $\square$

Corolario 4.4.12 *Sea $(\Theta, \leq)$ un Θ-sistema de talla t en una R-categoría triangulada de artin $\mathcal{T}$. Entonces, $\forall\, M \in \mathcal{F}(\Theta)$ y cada Θ-filtración ξ de M, la multiplicidad de $\Theta(i)$ en M no depende de ξ. En particular $\ell_\Theta(M) = \sum_{i=1}^{n}[M : \Theta(i)]$.*

Demostración. Es inmediata de 4.4.15 y 4.4.10. $\square$

Lema 4.4.13 *Sea $(\Theta, \leq)$ un Θ-sistema de talla t en una categoría triangulada $\mathcal{T}$, con $\leq$ el orden natural en $[1, t]$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $M \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid i \leq j \leq i + k\})$, $N \in \mathscr{F}(\{\Theta(r) \mid r > i + k\})$ y $L \in \mathscr{F}(\{\Theta(s) \mid s < i\})$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(N, M) = 0$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M, L) = 0$.

(b) Si $M \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid i \leq j \leq i + k\})$, $N \in \mathscr{F}(\{\Theta(r) \mid r \geq i + k\})$ y $L \in \mathscr{F}(\{\Theta(s) \mid s \leq i\})$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(N, \Sigma M) = 0$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M, \Sigma L) = 0$.

(c) Si $M, N \in \mathscr{F}(\Theta)$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M, \Sigma^{-1} N) = 0$.

Demostración. La prueba es inmediata de 4.3.4 y de la definición de Θ-sistema. $\square$

Proposición 4.4.14 *Sean $\mathcal{T}$ una R-categoría triangulada de artin,* $(\Theta, \leq)$ *un* Θ*-sistema de talla* t *en* $\mathcal{T}$*, con* $\leq$ *el orden natural en* $[1, t]$*,* $t > 1$ *y* $1 \leq i \leq t$*. Entonces, para cada* k *tal que* $1 \leq k \leq t - i$*, existe un triángulo distinguido*

$$\xi_k : \quad V_k \longrightarrow U_k \longrightarrow \Theta(i) \longrightarrow \Sigma V_k$$

que satisface las siguientes condiciones:

(a) U_k *es inescindible,*

(b) $V_k \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid i < j \leq i + k\})$*,*

(c) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U_k, \Sigma\Theta(j)) = 0$ *para* $i \leq j \leq i + k$*.*

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre k.
Sea $k = 1$. En tal caso, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i + 1), \Theta(i)) = 0$. Por lo tanto, si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i), \Sigma\Theta(i + 1)) = 0$ el triángulo buscado es

$$0 \longrightarrow \Theta(i) \xrightarrow{1} \Theta(i) \longrightarrow 0.$$

Supongamos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i), \Sigma\Theta(i + 1)) \neq 0$. Por 4.2.3(a), existe un triángulo universal

$$\xi : \quad \Theta(i + 1)^n \longrightarrow E \longrightarrow \Theta(i) \longrightarrow \Sigma\Theta(i + 1)^n$$

que no se escinde. Además por 4.2.3(b), tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E, \Sigma(\Theta(i+1))) = 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, \Sigma(\Theta(i)))$ a ξ, tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i), \Sigma\Theta(i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E, \Sigma\Theta(i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i + 1)^n, \Sigma\Theta(i)).$$

Dado que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i), \Sigma\Theta(i)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i + 1)^n, \Sigma\Theta(i)) = 0$, concluimos de la sucesión anterior que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E, \Sigma\Theta(i)) = 0$. Además, como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i + 1)^n, \Theta(i)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i + 1)^n, \Sigma^{-1}\Theta(i)) = 0$, por 4.2.8, existe un triángulo distinguido

$$\xi' : \ \Theta(i + 1)^m \longrightarrow U_1 \longrightarrow \Theta(i) \longrightarrow \Sigma\Theta(i + 1)^m$$

con $m \leq n$ y U_1 un sumando inescindible de E. Por lo tanto, $\xi_1 := \xi'$ satisface las condiciones requeridas. Supongamos ahora que existe un triángulo distinguido

$$\xi_k : \quad V_k \longrightarrow U_k \longrightarrow \Theta(i) \longrightarrow \Sigma V_k$$

con las propiedades requeridas. Construiremos ξ_{k+1} apartir de ξ_k, como sigue:
Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U_k, \Sigma\Theta(i + k + 1)) = 0$, el triángulo $\xi_{k+1} := \xi_k$ tiene las características deseadas.
Supongamos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U_k, \Sigma\Theta(i + k + 1)) \neq 0$. Entonces, por 4.2.3(a), existe un triángulo distinguido

$$\eta : \quad \Theta(i + k + 1)^a \longrightarrow U \longrightarrow U_k \longrightarrow \Sigma\Theta(i + k + 1)^a \ ,$$

que no se escinde; y por 4.2.3(b), tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, \Sigma\Theta(i+k+1)) = 0$. Consideremos el siguiente conjunto $\mathscr{S} := \{s \mid -k \leq s \leq 0\}$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, \Sigma\Theta(i+k+s))$ a η, con $s \in \mathscr{S}$, tenemos la sucesión exacta

$$(U_k, \Sigma\Theta(i+k+s)) \longrightarrow (U, \Sigma\Theta(i+k+s)) \longrightarrow (\Theta(i+k+1)^a, \Sigma\Theta(i+k+s))$$

Tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U_k, \Sigma\Theta(i+k+s)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i+k+1)^a, \Sigma\Theta(i+k+s)) = 0$ para $s \in \mathscr{S}$, por hipótesis de inducción y definición de Θ-sistema. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, \Sigma\Theta(i+k+s)) = 0$ para $s \in \mathscr{S}$. Con todo esto, concluimos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, \Sigma\Theta(j)) = 0$ para $i \leq j \leq i+k+1$. Por 4.4.13(a), tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i+k+1)^a, U_k) = 0$ pues $U_k \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid i \leq j \leq i+k\})$; y también por 4.4.13 (c) tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Theta(i+k+1)^a, \Sigma^{-1}U_k) = 0$. Por lo tanto, por 4.2.8, existe un triángulo distinguido

$$\eta' : \quad \Theta(i+k+1)^d \longrightarrow U_{k+1} \longrightarrow U_k \longrightarrow \Sigma\Theta(i+k+1)^d$$

con $d \leq a$ y U_{k+1} sumando directo inescindible de U. Luego, por cambio de base, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma^{-1}\Theta(i) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Sigma^{-1}\Theta(i) \arrow[d] & \\
\Theta(i+k+1)^d \arrow[r] \arrow[d, equal] & V_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{k+1}"] & V_k \arrow[r] \arrow[d, "\mu_k"] & \Sigma\Theta(i+k+1)^d \arrow[d, equal] \\
\Theta(i+k+1)^d \arrow[r] & U_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & U_k \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma\Theta(i+k+1)^d \\
 & \Theta(i) \arrow[r, equal] & \Theta(i), &
\end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son triángulos distinguidos. Como $V_k \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid i < j \leq i+k\})$, se tiene por 4.3.3 que $V_{k+1} \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid i < j \leq i+k+1\})$. Además $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U_{k+1}, \Sigma\Theta(j)) = 0$ para $i \leq j \leq i+k+1$ pues U_{k+1} es sumando directo inescindible de U. Por lo tanto, el triángulo buscado es el de la primera columna del diagrama anterior, es decir,

$$\xi_{k+1} : \quad V_{k+1} \xrightarrow{\mu_{k+1}} U_{k+1} \longrightarrow \Theta(i) \longrightarrow \Sigma V_{k+1}\,. \;\square$$

Teorema 4.4.15 *Sea* $(\Theta, \leq)$ *un* Θ*-sistema de talla* t *en una* R*-categoría triangulada de artin* $\mathcal{T}$*. Entonces, existe una única familia salvo isomorfismos* $\underline{Q} := \{Q(i)\}_{i=1}^{t}$ *de objetos en* $\mathcal{T}$ *tal que* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *es un* Θ*-sistema proyectivo de talla* t *en* $\mathcal{T}$*.*

Demostración. Supondremos, por simplicidad, que $\leq$ es el orden natural en $[1,t]$. Para $i<t$, definimos $\eta_i := \xi_{t-i}$ donde ξ_{t-i} son los triángulos de 4.4.14

$$\xi_{t-i}: \quad V_{t-i} \longrightarrow U_{t-i} \longrightarrow \Theta(i) \longrightarrow \Sigma V_{t-i}.$$

Definiendo $K(i) := V_{t-i}$ y $Q(i) := U_{t-i}$, tenemos que $K(i) \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid j > i\})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q(i), \Sigma\Theta(j)) = 0$ para $j \geq i$. Del triángulo ξ_{t-i}, tenemos que $Q(i) \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid j \geq i\})$. Entonces, por 4.4.13 (b) y (c), tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q(i), \Sigma\Theta(r)) = 0$ para $r \leq i$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q(i), \Sigma^{-1}\Theta(r)) = 0$, $\forall r$. Por lo tanto, $Q(i) \in {}^{\perp}(\Sigma^{-1}\Theta) \cap {}^{\perp}(\Sigma\Theta)$. Para $i = t$, tomamos el triángulo

$$0 \longrightarrow \Theta(t) \xrightarrow{1} \Theta(t) \longrightarrow 0$$

y definimos $Q(t) := \Theta(t)$ y $K(t) := 0$, entonces éste triángulo cumple las condiciones requeridas. $\square$

Definición 4.4.16 *Sea* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *un* Θ*-sistema proyectivo de talla* t*, en una* R*-categoría triangulada Hom-finita* $\mathcal{T}$*. El* Θ-**soporte** *de* $M \in \mathscr{F}(\Theta)$*, es el conjunto*

$$\mathrm{Sop}_\Theta(M) := \{i \in [1,t] \mid [M : \Theta(i)] \neq 0\}.$$

Para $0 \neq M \in \mathscr{F}(\Theta)$, sea $\max(M)$ el máximo de $\mathrm{Sop}_\Theta(M)$ con respecto al orden lineal $\leq$. Similarmente $\min(M)$ es el mínimo de $\mathrm{Sop}_\Theta(M)$ con respecto al orden lineal $\leq$. Finalmente, $\max(0) := -\infty$ y $\min(0) := +\infty$.

Teorema 4.4.17 *Sean* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *un* Θ*-sistema proyectivo de talla* t*, en una cate-goría triangulada* $\mathcal{T}$*,* $M \in \mathscr{F}(\Theta)$ *e* $i := \min(M)$*. Entonces, existe un triángulo distinguido en* $\mathcal{T}$

$$N \longrightarrow Q_0(M) \xrightarrow{\epsilon_M} M \longrightarrow \Sigma N,$$

el cual satisface las siguientes condiciones

(a) $N \in \mathscr{F}(\Theta)$ *y* $Q_0(M) \in \mathrm{add}(\bigoplus_{j\geq i} Q(j))$*,*

(b) $\min(M) < \min(N)$ *si* $M \neq 0$*,*

(c) $\epsilon_M : Q_0(M) \longrightarrow M$ *es una* $\mathcal{P}(\Theta)$*-precubierta de* M*.*

Demostración. Si $M = 0$, el triángulo distinguido zero $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ es el triángulo deseado. Sin perdida de generalidad, supondremos que $\leq$ es el orden natural en $[1,t]$. Sea $M \neq 0$. Por 4.4.6 (a), se satisfacen las hipótesis de 4.3.8. Luego, por 4.3.8 (c), existe un triángulo distinguido $N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} \Theta(i)^{m_i} \longrightarrow \Sigma N$ con $N \in \mathscr{F}(\Theta)$ y $\min(M) < \min(N)$. Si $i = \min(M) = t$, se tiene que $N = 0$; y por lo tanto concluimos que el triángulo buscado es

$$0 \longrightarrow \Theta(t)^{m_i} \longrightarrow \Theta(t)^{m_i} \longrightarrow 0$$

pues $Q(t) \simeq \Theta(t)$. Observese, que en este caso, $Q_0(M) := Q(t)^{m_i}$ y $\epsilon_M := 1_{Q(t)^{m_i}}$.
Sea $i = \min(M) < t$. Si $N = 0$ entonces $M \simeq \Theta(i)^{m_i}$; y así el siguiente triángulo distinguido (ver 4.4.3 (b)) cumple las condiciones deseadas (ver la prueba de 4.4.9 (a))

$$K(i)^{m_i} \longrightarrow Q(i)^{m_i} \xrightarrow{\beta_i^{m_i}} \Theta(i)^{m_i} \longrightarrow \Sigma K(i)^{m_i}.$$

Supongamos que $N \neq 0$. Dado que $i = \min(M) < \min(N)$, por hipótesis de inducción, existe un triángulo distinguido

$$N' \longrightarrow Q_0(N) \xrightarrow{\epsilon_N} N \longrightarrow \Sigma N'$$

tal que $i < \min(N) < \min(N') =: i'$, $Q_0(N) \in \mathrm{add}(\bigoplus_{j \geq i'} Q(j))$ y $\epsilon : Q_0(N) \longrightarrow N$ es una $\mathcal{P}(\Theta)$-precubierta de N. Por cambio de base, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
 & K(i)^{m_i} \arrow[r, equal] \arrow[d] & K(i)^{m_i} \arrow[d] & \\
N \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\theta"] & Q(i)^{m_i} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_i^{m_i}"] & \Sigma N \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \Theta(i)^{m_i} \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma N \\
 & \Sigma K(i)^{m_i} \arrow[r, equal] & \Sigma K(i)^{m_i}, &
\end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son triángulos distinguidos. Como $N \in \mathscr{F}(\Theta)$, se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q(i), \Sigma N) = 0$. Por lo tanto, el primer renglón del diagrama anterior se escinde. Luego, existe $i_2 : Q(i)^{m_i} \longrightarrow E$ tal que $\beta_i^{m_i} = \psi\theta i_2$. Sean $\alpha := \theta i_2$ y $\epsilon := (\varphi\epsilon_N, \alpha) : Q_0(N) \bigoplus Q(i)^{m_i} \longrightarrow M$. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
Q_0(N) \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\epsilon_N"] \arrow[dr, phantom, "I"] & Q_0(M) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\epsilon"] \arrow[dr, phantom, "II"] & Q(i)^{m_i} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\beta_i^{m_i}"] \arrow[dr, phantom, "III"] & \Sigma Q_0(N) \arrow[d, "\Sigma\epsilon_N"] \\
N \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r, "\psi"] & \Theta(i)^{m_i} \arrow[r] & \Sigma N,
\end{tikzcd}$$

donde los renglones son triángulos distinguidos $Q_0(M) := Q_0(N) \bigoplus Q(i)^{m_i}$, $j_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\pi_2 := \begin{pmatrix} 0, & 1 \end{pmatrix}$. Los cuadrados I y II conmutan por la propiedad universal de ϵ y III conmuta pues $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q(i), \Sigma N) = 0$. Por lo tanto $(\epsilon_N, \epsilon, \beta_i^{m_i})$ es un morfismo de triángulos. Luego $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q_0(N'), \Sigma^{-1}\Theta(i)^{m_i}) = 0$, pues

$Q_0(N) \in \operatorname{add}(\bigoplus_{j\geq i'} Q(j))$ y $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Q(j), \Sigma^{-1}\Theta(i)) = 0,\ \forall i, j$. Entonces, por 4.1.4, podemos completar a un diagrama en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
N' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^{-1}P \arrow[r] \arrow[d] & K(i)^{m_i} \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma N' \arrow[d] \\
Q_0(N) \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\epsilon_N"] & Q_0(M) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\epsilon"] & Q(i)^{m_i} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_i^{m_i}"] & \Sigma Q_0(N) \arrow[d, "\Sigma\epsilon_N"] \\
N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\gamma"] & \Theta(i)^{m_i} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "IX"] & \Sigma N \arrow[d] \\
\Sigma N' \arrow[r] & P \arrow[r] & \Sigma K(i)^{m_i} \arrow[r] & \Sigma^2 N'.
\end{tikzcd}$$

donde todos los renglones y columnas son triángulos distinguidos; y todos los cuadrados conmutan, a excepción de IX, que anticonmuta. Veamos que el siguiente triángulo distinguido

$$\Sigma^{-1}P \longrightarrow Q_0(M) \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow P$$

satisface las condiciones requeridas. En efecto, $Q_0(M) \in \operatorname{add}(\bigoplus_{j\geq i} Q(j))$ pues $Q_0(N) \in \operatorname{add}(\bigoplus_{j\geq i'} Q(j))$ con $i < \text{mín}(N) < \text{mín}(N') = i'$ y $Q(i)^{m_i} \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid\geq i\})$. Considerando el triángulo del primer renglón, del diagrama anterior, tenemos que $\Sigma^{-1}P \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid j > i\})$ pues $\mathscr{F}(\Theta)$ es cerrada por extensiones, $K(i)^{m_i} \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid j > i\})$ y $N' \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid j > i'\})$ con $i < i'$. Por lo tanto $i = \min(M) < \min(\Sigma^{-1}P)$.

Veamos finalmente que ϵ es una $\mathcal{P}(\Theta)$-precubierta de M. En efecto, por 4.3.5, tenemos que ${}^{\perp}(\Sigma\Theta) = {}^{\perp}(\Sigma\mathscr{F}(\Theta))$. Luego, para $h : X \longrightarrow M$ con $X \in \mathcal{P}(\Theta)$ se tiene el morfismo $\gamma h : X \longrightarrow P$. Dado que $P \in \Sigma\mathscr{F}(\Theta)$, pues $\Sigma^{-1}P \in \mathscr{F}(\Theta)$, obtenemos que $\gamma h = 0$ y entonces existe $h' : X \longrightarrow Q_0(M)$ tal que $h = \epsilon h'$. Por lo tanto, el morfismo ϵ es una $\mathcal{P}(\Theta)$-precubierta de M. $\square$

Corolario 4.4.18 *Sean $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un Θ-sistema proyectivo de talla t, en una cate-goría triangulada $\mathcal{T}$; y $Q := \bigoplus_{i=1}^{t} Q(i)$. Entonces, para $M \in \mathscr{F}(\Theta)$, tenemos que $\operatorname{resdim}_{\operatorname{add}(Q)}(M) \leq t$. Es decir, existe una familia de triángulos distinguidos*

$$\{\ K_{j+1} \longrightarrow Q_j \longrightarrow K_j \longrightarrow \Sigma K_{j+1}\ , 0 \leq j \leq t-1\}$$

tal que $K_j \in \mathscr{F}(\Theta),\ \forall j,\ K_0 = M$ y $Q_j \in \operatorname{add}(Q)\ \forall j$.

Demostración. Se sigue de 4.4.17 (b). $\square$

Corolario 4.4.19 *Sean $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un Θ-sistema proyectivo de talla t, en una cate-goría triangulada $\mathcal{T}$; y $Q := \bigoplus_{i=1}^{t} Q(i)$. Entonces*

$$\operatorname{add}(Q) = \mathscr{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta).$$

Demostración. Es claro que $\mathrm{add}(Q) \subseteq \mathscr{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta)$. Sea $M \in \mathscr{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta)$. Por 4.4.17, existe un triángulo distinguido en $\mathcal{T}$

$$\eta : N \longrightarrow Q_0(M) \xrightarrow{\epsilon_M} M \longrightarrow \Sigma N,$$

donde $Q_0(M) \in \mathrm{add}(Q)$ y $N \in \mathscr{F}(\Theta)$. Luego, el triángulo anterior se escinde y entonces $M \in \mathrm{add}(Q)$; probándose el resultado. $\square$

4.5. El álgebra asociada a un sistema Θ- proyectivo

Proposición 4.5.1 *Sean $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un Θ-sistema proyectivo de talla t, en una R-categoría triangulada de artin $\mathcal{T}$, $A := \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(Q)^{op}$, $\mathsf{e}_Q := \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q, -) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{mod}(A)$ y ${}_AP(i) := \mathsf{e}_Q(Q(i))$ para cada $i \in [1, t]$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) La familia ${}_AP := \{{}_AP(i) \mid i \in [1, t]\}$ es un conjunto de representantes de A-módulos proyectivos inescindibles. En particular A es básica y $\mathrm{rk}K_0(A) = t$.

(b) $\mathsf{e}_Q(\Theta(i)) \simeq {}_A\Delta(i)$, $\forall i \in [1, t]$, donde ${}_A\Delta$ es calculada usando ${}_AP$ y el orden dado $\leq$ en $[1, t]$.

(c) El par $(A, \leq)$ es una álgebra básica estandarmente estratificada.

(d) $\mathsf{e}_Q : \mathscr{F}(\Theta) \longrightarrow \mathscr{F}({}_A\Delta)$ es una equivalencia exacta de categorías

Demostración. Por 4.4.10(a), tenemos que el funtor $\mathsf{e}_Q = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q, -) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{mod}(A)$ es exacto.
(a) Se sigue de 4.4.11 y 4.2.7.
(b) y (c). Sea $i \in [1, t]$. Por 4.4.3 (PS5) y 4.4.17, tenemos dos triángulos distinguidos

$$\eta_i : K(i) \xrightarrow{\alpha_i} Q(i) \longrightarrow \Theta(i) \longrightarrow \Sigma K(i),$$

$$\eta_i' : K' \longrightarrow Q' \xrightarrow{\lambda_i} K(i) \longrightarrow \Sigma K',$$

donde $K(i), K' \in \mathscr{F}(\{\Theta(j) \mid j > i\})$ y $Q' \in \mathrm{add}(\oplus_{j>i} Q(j))$. Aplicando el funtor $\mathsf{e}_Q = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q, -)$ a los triángulos η_i y η_i', tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$ (pues e_Q es exacto en $\mathscr{F}(\Theta)$)

$$\epsilon_i : \mathsf{e}_Q(Q') \xrightarrow{\mathsf{e}_Q(\gamma_i)} {}_A\, P(i) \longrightarrow \mathsf{e}_Q(\Theta(i)) \longrightarrow 0,$$

donde $\gamma_i := \alpha_i \lambda_i$. Afirmamos que

$$\mathrm{Im}(\mathsf{e}_Q(\gamma_i)) = \mathrm{Tr}_{\oplus_{j>i} {}_AP(j)}({}_AP(i)) =: U(i).$$

En efecto, usando que $\mathsf{e}_Q(Q') \in \mathrm{add}(\oplus_{j>i\, A} P(j))$, se sigue que $\mathrm{Im}(\mathsf{e}_Q(\gamma_i)) \subseteq \mathrm{Tr}_{\oplus_{j>i} {}_AP(j)}({}_AP(i))$. Para ver la otra inclusión, sea $j > i$ y consideremos un

morfismo $f :_A P(j) \longrightarrow_A P(i)$. Por 4.4.3 (PS3), 4.2.7 y 4.4.10 (a), tenemos que $\mathrm{Hom}_A({}_AP(j), \mathrm{e}_Q(\Theta(i))) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathrm{e}_Q(Q(j)), \mathrm{e}_Q(\Theta(i))) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q(j), \Theta(i)) = 0$, donde la última igualdad se da por 4.4.6 (b). Entonces f se factoriza a tráves de $\mathrm{e}_Q(\gamma_i)$; probándose la afirmación. Luego $\mathrm{e}_Q(\Theta(i)) \simeq_A \Delta(i)$.
Por otro lado, de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow U(i) \longrightarrow_A P(i) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(\Theta(i)) \longrightarrow 0,$$

tenemos que ${}_AP(i) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$ pues $U(i) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$, $\mathrm{e}_Q(\Theta(i)) \simeq_A \Delta(i)$ y $\mathscr{F}({}_A\Delta)$ es cerrada por extensiones; probándose que A es un álgebra estandarmente estratificada

(d) Como $\mathrm{e}_Q = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q, -) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{mod}(A)$ es un funtor exacto, tenemos que probar que $\mathrm{Im}(\mathrm{e}_Q) \subseteq \mathscr{F}({}_A\Delta)$ y que la restricción $\mathrm{e}_Q : \mathscr{F}(\Theta) \longrightarrow \mathscr{F}({}_A\Delta)$ es fiel pleno y denso. Veamos que $\mathrm{Im}(\mathrm{e}_Q) \subseteq \mathscr{F}({}_A\Delta)$. Sea $M \in \mathscr{F}(\Theta)$. Probaremos, por inducción sobre $\ell_\Theta(M)$, que $\mathrm{e}_Q(M) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$.
Si $\ell_\Theta(M) \leq 1$ entonces $M \simeq \Theta(i)$ para algún i. Luego, por (b), $\mathrm{e}_Q(M) \simeq {}_A\Delta(i) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$.
Sea $\ell_\Theta(M) = m > 1$. Dado que $M \in \mathscr{F}(\Theta)$, existe una Θ-filtración

$$\eta := \{\eta_l : \quad M_{l-1} \longrightarrow M_l \longrightarrow \Theta(j_l) \longrightarrow \Sigma M_{l-1} \}_{l=1}^{m}$$

tal que $M_0 = 0$, y $M_m = M$. Consideremos el triángulo distinguido η_m : $M_{m-1} \longrightarrow M \longrightarrow \Theta(j_m) \longrightarrow \Sigma M_{m-1}$, con $M_{m-1} \in \mathscr{F}(\Theta)$ y $\ell_\Theta(M_{m-1}) = \ell_\Theta(M) - 1$. Aplicando e_Q a η_m, tenemos por 4.4.10 (a) la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{e}_Q(M_{m-1}) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(M) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(\Theta(j_m)) \longrightarrow 0.$$

Por inducción $\mathrm{e}_Q(M_{n-1}) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$; y como $\mathrm{e}_Q(\Theta(j)) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$, tenemos que $\mathrm{e}_Q(M) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$ pues $\mathscr{F}({}_A\Delta)$ es cerrada por extensiones.
Ahora veamos que el funtor e_Q es fiel y pleno. Por 4.4.18, para $M \in \mathscr{F}(\Theta)$, tenemos una familia de triángulos distinguidos $\xi = \{\xi_k : K_{j+1} \to Q_j \to K_j \to \Sigma K_{j+1}\}_{j=0}^{t-1}$ tal que $K_j \in \mathscr{F}(\Theta)\ \forall j$, $K_0 = M$ y $Q_j \in \mathrm{add}(Q)\ \forall j$. Aplicando e_Q a ξ_0 y ξ_1, tenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{e}_Q(K_1) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(Q_0) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(M) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{e}_Q(K_2) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(Q_1) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(K_1) \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto $\mathrm{e}_Q(Q_1) \xrightarrow{f} \mathrm{e}_Q(Q_0) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(M) \longrightarrow 0$ es exacta. Luego, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_{\mathcal{T}}(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & {}_{\mathcal{T}}(Q_0,N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & {}_{\mathcal{T}}(Q_1,N) \arrow[d, "\alpha_3"] \\
0 \arrow[r] & {}_A(\mathrm{e}_Q(M),\mathrm{e}_Q(N)) \arrow[r] & {}_A(\mathrm{e}_Q(Q_0),\mathrm{e}_Q(N)) \arrow[r] & {}_A(\mathrm{e}_Q(Q_1),\mathrm{e}_Q(N)),
\end{tikzcd}$$

donde α_2 y α_3 son isomorfismos, pues Q_0, $Q_1 \in \mathrm{add}(Q)$. Por lo tanto, por el Lema del Cinco, α_1 es un isomorfismo; probándose que e_Q es fiel y pleno.
Ahora veamos que e_Q es denso. Por inducción sobre $\ell_{{}_A\Delta}(M)$.
Sea $0 \neq M \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$. Si $\ell_{{}_A\Delta}(M) = 1$, existe i tal que $M \simeq {}_A\Delta(i) \simeq \mathrm{e}_Q(\Theta(i))$.
Sea $\ell_{{}_A\Delta}(M) = m > 1$. Dado que $M \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$, tenemos la siguiente filtración

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \dots M_{m-1} \subseteq M_m = M,$$

con $M_1 \simeq {}_A\Delta(i)$ para algún i. Luego, podemos considerar la siguiente filtración de $M/{}_A\Delta(i)$

$$0 = M_1/{}_A\Delta(i) \subseteq M_2/{}_A\Delta(i) \subseteq M_3/{}_A\Delta(i) \cdots \subseteq M_{m-1}/{}_A\Delta(i) \subseteq M/{}_A\Delta(i),$$

con $M_{k+1}/{}_A\Delta(i)/M_k/{}_A\Delta(i) \simeq M_{k+1}/M_k \simeq {}_A\Delta(i_k)$ para $k \in [1, m-1]$. Por lo tanto $M/{}_A\Delta(i) \in \mathscr{F}({}_A\Delta)$; y se tiene la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$

$$0 \longrightarrow {}_A\Delta(i) \longrightarrow M \longrightarrow M/{}_A\Delta(i) \longrightarrow 0,$$

donde $\ell_{{}_A\Delta}(M/{}_A\Delta(i)) = \ell_{{}_A\Delta}(M) - 1$. Luego, por inducción, tenemos que existe $Z \in \mathscr{F}(\Theta)$ tal que $\mathrm{e}_Q(Z) \simeq M/{}_A\Delta(i)$. Por 4.4.17, existe un triángulo distinguido $\eta_Z: \quad Z' \xrightarrow{u} Q_0(Z) \xrightarrow{\epsilon_Z} Z \longrightarrow \Sigma Z'$ con $Z' \in \mathscr{F}(\Theta)$. Entonces, se obtiene la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$

$$0 \longrightarrow \mathrm{e}_Q(Z') \xrightarrow{\mathrm{e}_{Q(u)}} \mathrm{e}_Q(Q_0(Z)) \xrightarrow{\mathrm{e}_{Q(\epsilon_Z)}} \mathrm{e}_Q(Z) \longrightarrow 0\,.$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathrm{e}_Q(Z') \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mu"] & \mathrm{e}_Q(Z') \arrow[d, "\mathrm{e}_{Q(u)}"] & \\
\eta: \quad 0 \arrow[r] & {}_A\Delta(i) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\lambda"] & \mathrm{e}_Q(Q_0(Z)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{e}_{Q(\epsilon_Z)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}_A\Delta(i) \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{e}_Q(Z) \simeq M/{}_A\Delta(i) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

La sucesión η, del diagrama anterior, se escinde pues $\mathrm{e}_Q(Q_0(Z))$ es proyectivo. Por lo tanto $C \simeq {}_A\Delta(i) \bigoplus \mathrm{e}_Q(Q_0(Z)) \simeq \mathrm{e}_Q(\Theta(i) \bigoplus Q_0(Z))$, $i_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

y $p_2 = (0,1)$. Esto es, $\mu = \begin{pmatrix} \varphi \\ \mathrm{e}_Q(u) \end{pmatrix}$ con $\varphi : \mathrm{e}_Q(Z') \longrightarrow \mathrm{e}_Q(\Theta(i))$. Como $\mathrm{e}_Q \mid_{\mathscr{F}(\Theta)}$ es pleno, existe $h : Z' \longrightarrow \Theta(i)$ tal que $\mathrm{e}_Q(h) = \varphi$; y así $\mu = \begin{pmatrix} \mathrm{e}_Q(h) \\ \mathrm{e}_Q(u) \end{pmatrix} = \mathrm{e}_Q \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$. Notemos que $(0,1)\Psi = u$ donde $\Psi := \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$. Completando ψ a un triángulo distinguido $\xi :\quad Z' \xrightarrow{\Psi} \Theta(i) \bigoplus Q_0(Z) \longrightarrow X \longrightarrow \Sigma Z'$ y por cambio de cobase (o por 4.1.3), se obtiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
 & \Theta(i) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Theta(i) \arrow[d] & \\
Z' \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, equal] & \Theta(i) \bigoplus Q_0(Z) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \Sigma Z' \arrow[d, equal] \\
Z' \arrow[r, "u"] & Q_0(Z) \arrow[r, "\epsilon_Z"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma Z' \\
 & \Sigma\Theta(i) \arrow[r, equal] & \Sigma\Theta(i), &
\end{tikzcd}$$

donde $i := (0,1)$ y los renglones y columnas son triángulos distinguidos. Como Z, $\Theta(i) \in \mathscr{F}(\Theta)$, tenemos que $X \in \mathscr{F}(\Theta)$, pues $\mathscr{F}(\Theta)$ es cerrada por extensiones. Aplicando e_Q a ξ, tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$

$$0 \longrightarrow \mathrm{e}_Q(Z') \xrightarrow{\mathrm{e}_Q(\Psi)} \mathrm{e}_Q(\Theta(i) \bigoplus Q_0(Z)) \longrightarrow \mathrm{e}_Q(X) \longrightarrow 0.$$

Pero $\mathrm{e}_Q(\Psi) = \mu$; y entonces $\mathrm{e}_Q(X) \simeq \mathrm{Coker}(\mu) = M$. Por lo tanto e_Q es denso. $\square$

Proposición 4.5.2 *Sean $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un Θ-sistema proyectivo de talla t, en una R-categoría triangulada $\mathcal{T}$ de artin; y $Q := \bigoplus_{i=1}^t Q(i)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathscr{F}(\Theta)$ es cerrado por sumandos directos.

(b) $\Theta(i)$ es inescindible para cada $i \in [1,t]$.

(c) Para cada objeto $M \in \mathscr{F}(\Theta)$, existe un triángulo distinguido $Z \longrightarrow Q_M \longrightarrow M \longrightarrow \Sigma Z$ en $\mathscr{F}(\Theta)$ tal que $Q_M \longrightarrow M$ es una $\mathrm{add}(Q)$-cubierta de M y $\min(M) < \min(Z)$ si $M \neq 0$.

Demostración. Sea $A := \mathrm{End}_T(Q)^{op}$. Sabemos por 4.5.1 que $\mathrm{e}_Q : \mathscr{F}(\Theta) \longrightarrow \mathscr{F}({}_A\Delta)$ es una equivalencia exacta de categorías, A es un álgebra estandarmente estratificada y $\mathrm{e}_Q(\Theta(i)) \simeq_A \Delta(i)$, $\forall i$.
(a) Como $\mathscr{F}({}_A\Delta)$ es cerrada por sumandos directos (ver [11]), entonces esta propiedad se puede trasladar a $\mathscr{F}(\Theta)$ usando la equivalencia e_Q.

(b) Como ${}_A\Delta_i$ es inescindible y $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(\Theta(i)) \simeq \mathrm{End}_A({}_A\Delta(i))$, se sigue que $\Theta(i)$ es inescindible (pues $\mathcal{T}$ es Krull-Schmidt).
(c) Usando que $\mathscr{F}({}_A\Delta)$ es una subcategoría resolvente de $\mathrm{mod}(A)$ (ver [11]), 4.4.17 y que $\mathsf{e}_Q : \mathscr{F}(\Theta) \longrightarrow \mathscr{F}({}_A\Delta)$ es una equivalencia, obtenemos (c). $\square$

Corolario 4.5.3 *Sean $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un Θ-sistema proyectivo de talla t, en una cate-goría triangulada $\mathcal{T}$; $\overline{\mathbf{K}} := \{K(i)\}_{i=1}^{t}$ donde $K(i)$ es el objeto que aparece en 4.4.3 (PS5). Si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^2\mathbf{K}, \Theta) = 0$*, entonces $(\Theta, \leq)$ es un Θ-sistema de talla t en $\mathcal{T}$.*

Demostración. Se sigue de 4.5.2 (b) y 4.4.6 (a), (c). $\square$

Corolario 4.5.4 *Sean $(\Theta, \leq)$ un Θ-sistema de talla t, en una R-categoría triangulada $\mathcal{T}$ de artin. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathscr{F}(\Theta)$ es cerrado por sumandos directos.

(b) Para cada objeto $M \in \mathscr{F}(\Theta)$, existe un triángulo distinguido $Z \longrightarrow Q_M \longrightarrow M \longrightarrow \Sigma Z$ en $\mathscr{F}(\Theta)$ tal que $Q_M \longrightarrow M$ es una $\mathrm{add}(Q)$*-cubierta de M y $\min(M) < \min(Z)$ si $M \neq 0$.*

Demostración. Se sigue de 4.4.15 y de 4.5.2. $\square$

Capítulo 5

Teoría de aproximación de Auslander-Buchweitz

La teoría de aproximaciones tiene su origen en el concepto de envolventes inyectivas y ha sido ampliamente aceptada en el contexto de la categoría de módulos.

En artículos independientes, Auslander, Reiten y Smalo (para la categoría $\mathrm{mod}(\Lambda)$ de módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin Λ) y Enochs (para la categoría $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ de módulos sobre un anillo arbitrario) introdujeron una teoría general de aproximaciones que involucraba precubiertas y preenvolventes (ver [4], [6] y [29]).
Auslander y Buchweitz (ver [3]) estudiaron las ideas de envolventes inyectivas y cubiertas proyectivas en términos de aproximaciones maximales Cohen-Macaulay para ciertos módulos. En su trabajo, ellos estudiaron la relación entre la dimensión inyectiva relativa y la dimensión coresolución de un módulo. Ellos desarrollaron su teoría en el contexto de categorías abelianas dando varias aplicaciones en varios contextos.
Basado en [3], Hashimoto definió los "contextos de Auslander-Buchweitz" para categoriás abelianas, dando un marco teórico a la teoría de aproximaciones (ver [37]). Recientemente, las categorías trianguladas entraron en forma relevante y varios autores han estudiado el concepto de aproximación tanto en el caso abeliano como en el caso triangulado (ver [20],[16], [49] y [50]).

En este capítulo, desarrollaremos el análogo de la teoría de aproximaciones en el sentido de Auslander y Buchweitz, para categorías trianguladas. Durante todo este capítulo, $\mathcal{T}$ denotará una categoría triangulada arbitraria y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$. El resultado principal es acerca de un par de $(\mathcal{X}, \omega)$ de clases de objetos en $\mathcal{T}$ donde $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y ω satisface condiciones debiles de cogenerabilidad con respecto a los objetos de $\mathcal{X}$. Siguiendo a Auslander y Buchweitz, consideramos la clase $\mathcal{X}^\wedge$ de objetos de $\mathcal{T}$ que admiten una resolución finita a través de objetos de $\mathcal{X}$. Probamos que cada objeto de $\mathcal{X}^\wedge$ admite dos triángulos distinguidos: uno dando una $\mathcal{X}$-aproximación a derecha y el otro dando una $\omega^\wedge$-aproximación a izquierda. En este capítulo también es introducida la dimensión $\mathcal{X}$-resolución y es comparada con otras dimensiones relativas.

En todo este capítulo, $\mathcal{T}$ será una categoría triangulada y $[1] : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ su funtor de suspensión. El término subcategoría, significará una subcategoría que es plena, aditiva y cerrada bajo isomorfismos.
Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ dos clases de objetos en $\mathcal{T}$. Definimos la categoría perpendicular a izquierda (resp. derecha) de $\mathcal{X}$ como ${}^{\perp}\mathcal{X} := \{Z \in \mathcal{T} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, -)|_{\mathcal{X}} = 0\}$ (resp. $\mathcal{X}^{\perp} := \{Z \in \mathcal{T} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Z)|_{\mathcal{X}} = 0\}$). Denotamos por $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ a la clase de objetos $Z \in \mathcal{T}$ para los cuales existe un triángulo distinguido $X \to Z \to Y \to X[1]$ en $\mathcal{T}$ con $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$. En el caso $\mathcal{Y} = \{Y\}$, escribiremos $\mathcal{X} * Y$ en lugar de $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$.
Es bien conocido que la operación $*$ es asociativa (ver [13, 1.3.10]). Decimos que $\mathcal{X}$ es **cerrada por extensiones** si $\mathcal{X} * \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$.
Recordemos que una clase $\mathcal{X}$ de objetos en $\mathcal{T}$ se dice que es **suspendida** (respectivamente, **cosuspendida**) si $\mathcal{X}[1] \subseteq \mathcal{X}$ (respectivamente, $\mathcal{X}[-1] \subseteq \mathcal{X}$) y $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones. Por el siguiente lema, es fácil ver que una clase $\mathcal{X}$ suspendida (respectivamente, cosuspendida) de objectos en $\mathcal{T}$, puede ser considerada como una subcategoría de $\mathcal{T}$.

Lema 5.0.5 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$.*

(a) Si $0 \in \mathcal{X}$ entonces $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} * \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y} * \mathcal{X}$ para toda clase $\mathcal{Y}$ de objetos en $\mathcal{T}$.

(b) Si $\mathcal{X}$ es suspendida o cosuspendida, entonces $0 \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X} = \mathcal{X} * \mathcal{X}$.

Demostración.

(a) Si $0 \in \mathcal{X}$, obtenemos que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} * \mathcal{Y}$ usando el triángulo distinguido $0 \to Y \stackrel{1_Y}{\to} Y \to 0$ para cualquier $Y \in \mathcal{Y}$. La otra inclusión es similar.

(b) Sea $\mathcal{X}$ cosuspendida (el otro caso es análogo). Entonces se sigue que $0 \in \mathcal{X}$ puesto que tenemos el triángulo distinguido $X[-1] \to 0 \to X \to X$ para $X \in \mathcal{X}$. Luego (b) se sigue de (a) y de que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones. $\square$

Dada una clase $\mathcal{X}$ de objetos en $\mathcal{T}$, se dice que $\mathcal{X}$ es **cerrada bajo conos** si para cualquier triángulo distinguido $A \to B \to C \to A[1]$ en $\mathcal{T}$ con $A, B \in \mathcal{X}$ tenemos que $C \in \mathcal{X}$. Similarmente, $\mathcal{X}$ es **cerrada bajo coconos** si para cualquier triángulo distinguido $A \to B \to C \to A[1]$ en $\mathcal{T}$ con $B, C \in \mathcal{X}$ tenemos que $A \in \mathcal{X}$.
Denotamos por $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ (respectivamente, ${}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}$) a la subcategoría más pequeña suspendida (respectivamente, cosuspendida) de $\mathcal{T}$ que contiene a la clase $\mathcal{X}$. Notemos que si $\mathcal{X}$ is una subcategoría suspendida (respectivamente, cosuspendida) de $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{X} = \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ (respectivamente, $\mathcal{X} = {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}$). También recordemos que una subcategoría $\mathcal{U}$ de $\mathcal{T}$, que es suspendida y cosuspendida, es llamada una

subcategoría triangulada de $\mathcal{T}$. Una subcategoría **gruesa** de $\mathcal{T}$ es una subcategoría triangulada de $\mathcal{T}$ que es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$. También denoteremos por $\Delta_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$ (respectivamente, $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$) a la subcategoría triangulada más pequeña (respectivamente, triangulada más pequeña gruesa) de $\mathcal{T}$ que contiene a la clase $\mathcal{X}$. Observemos que $\Delta_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) \subseteq \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$. Para la siguiente definición ver [4], [20], [16] and [29] (también ver 1.1.30).

Definición 5.0.6 *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Un morfismo $f : X \to C$ en $\mathcal{T}$ se dice que es una* **$\mathcal{X}$-precubierta** *de C, si $X \in \mathcal{X}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X', f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X', X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X', C)$ es suprayectivo, $\forall X' \in \mathcal{X}$. Si cualquier $C \in \mathcal{Y}$ admite una $\mathcal{X}$-precubierta, entonces $\mathcal{X}$ es una* **clase precubriente** *en $\mathcal{Y}$. Dualizando la definición de arriba, obtenemos la noción de* **$\mathcal{X}$-preenvolvente** *de C y* **clase preenvolvente** *en $\mathcal{Y}$. Finalmente, decimos que $\mathcal{X}$ es* ***funtorialmente finita*** *en $\mathcal{T}$ si es precubriente y preenvolvente en $\mathcal{T}$.*

Finalmente, para trabajar con (co)resolusiones, dimensiones relativas inyectivas y proyectivas, consideramos los números naturales extendidos $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Con las siguientes reglas:
(a) $x + \infty = \infty$ para cualquier $x \in \overline{\mathbb{N}}$,
(b) $x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{N}$ y
(c) $\min(\emptyset) := \infty$.

5.1. Dimensiones resolución y coresolución

Ahora definiremos ciertas clases de objetos en $\mathcal{T}$ las cuales nos guiarán a la noción de dimensión resolución y dimensión coresolución.

Definición 5.1.1 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$. Para cualquier número natu-ral n, introducimos inductivamente la clase $\varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X})$ como sigue: $\varepsilon_0^{\wedge}(\mathcal{X}) := \mathcal{X}$ y suponiendo definida $\varepsilon_{n-1}^{\wedge}(\mathcal{X})$, la clase $\varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X})$ está dada por todos los objetos $Z \in \mathcal{T}$ para los cuales existe un triángulo distinguido $\mathcal{T}$*

$$Z[-1] \longrightarrow W \longrightarrow X \longrightarrow Z$$

con $W \in \varepsilon_{n-1}^{\wedge}(\mathcal{X})$ y $X \in \mathcal{X}$. Dualmente, definimos $\varepsilon_0^{\vee}(\mathcal{X}) := \mathcal{X}$ y suponiendo definida $\varepsilon_{n-1}^{\vee}(\mathcal{X})$, la clase $\varepsilon_n^{\vee}(\mathcal{X})$ está dada por todos los objetos $Z \in \mathcal{T}$ para los cuales existe un triángulo distinguido

$$Z \longrightarrow X \longrightarrow K \longrightarrow Z[1].$$

Tenemos las siguientes propiedades para $\varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X})$ (y similares para $\varepsilon_n^{\vee}(\mathcal{X})$).

Proposición 5.1.2 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada, $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$, y n un número natural. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Para $Z \in \mathcal{T}$ y $n > 0$, tenemos que $Z \in \varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X})$ si y sólo si existe una familia $\{K_j[-1] \to K_{j+1} \to X_j \to K_j\}_{j=0}^{n-1}$ de triángulos distinguidos en $\mathcal{T}$ con $K_0 = Z$, $X_j \in \mathcal{X}$ y $K_n \in \mathcal{X}$.

(b) $\varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X}) = *_{i=0}^{n} \mathcal{X}[i] := \mathcal{X} * \mathcal{X}[1] * \cdots * \mathcal{X}[n]$.

(c) *Si* $0 \in \mathcal{X}$ *entonces* $\mathcal{X}[n] \subseteq \varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X}) \subseteq \varepsilon_{n+1}^{\wedge}(\mathcal{X})$ *y* $\varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X})[1] \subseteq \varepsilon_{n+1}^{\wedge}(\mathcal{X})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

(a) Si $n = 1$ la equivalencia se sigue de la definición de $\varepsilon_1^{\wedge}(\mathcal{X})$. Sea $n \geq 2$ y supongamos (por inducción) que la equivalencia es cierta para $\varepsilon_{n-1}^{\wedge}(\mathcal{X})$. Por definición, $Z \in \varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X})$ si y sólo si existe un triangulo distinguido en $\mathcal{T}$

$$Z[-1] \longrightarrow K_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow Z$$

con $K_1 \in \varepsilon_{n-1}^{\wedge}(\mathcal{X})$ y $X_0 \in \mathcal{X}$. Por otro lado, por inducción, tenemos que $K_1 \in \varepsilon_{n-1}^{\wedge}(\mathcal{X})$ si y sólo existe una familia $\{K_j[-1] \to K_{j+1} \to X_j \to K_j\}_{j=1}^{n-1}$ de triángulos distinguidos en $\mathcal{T}$ con $X_j \in \mathcal{X}$ y $K_n \in \mathcal{X}$; probándose (a).

(b) Por definición, tenemos que $\varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X}) = \mathcal{X} * \varepsilon_{n-1}^{\wedge}(\mathcal{X})[1]$. Por lo tanto, por inducción, se sigue que $\varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X}) = \mathcal{X} * (*_{i=0}^{n-1} \mathcal{X}[i])[1] = *_{i=0}^{n} \mathcal{X}[i]$.

(c) Supongamos que $0 \in \mathcal{X}$. Por (b), sabemos que $\varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X}) = \varepsilon_{n-1}^{\wedge}(\mathcal{X}) * \mathcal{X}[n]$; y puesto que $0 \in \varepsilon_{n-1}^{\wedge}(\mathcal{X})$, se sigue de 5.0.5 (a) que $\mathcal{X}[n] \subseteq \varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X})$. Similarmente, de las igualdades $\varepsilon_{n+1}^{\wedge}(\mathcal{X}) = \varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X}) * \mathcal{X}[n+1]$ y $\varepsilon_{n+1}^{\wedge}(\mathcal{X}) = \mathcal{X} * \varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X})[1]$, y los hechos que $0 \in \mathcal{X}[n+1]$ y $0 \in \mathcal{X}$, obtenemos las otras inclusiones de 5.0.5 (a). $\square$

Procediendo como en [3] y [20], introducimos la noción de dimensión $\mathcal{X}$-resolución (respectivamente, coresolución) de una clase $\mathcal{Y}$ de objetos de $\mathcal{T}$.

Definición 5.1.3 *Sea* $\mathcal{X}$ *una clase de objetos en* $\mathcal{T}$.

(a) $\mathcal{X}^{\wedge} := \cup_{n \geq 0}\, \varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X})$ *y* $\mathcal{X}^{\vee} := \cup_{n \geq 0}\, \varepsilon_n^{\vee}(\mathcal{X})$.

(b) *Para* $M \in \mathcal{T}$, *la* **dimensión $\mathcal{X}$-resolución** *de* M *es*

$$\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \;:\; M \in \varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{X})\}.$$

Dualmente, la **dimensión $\mathcal{X}$-coresolución** *de* M *es*

$$\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(M) := \min\{n \in \mathbb{N} :\; M \in \varepsilon_n^{\vee}(\mathcal{X})\}.$$

(c) *Para cualquier clase* $\mathcal{Y}$ *de* $\mathcal{T}$, *definimos* $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \sup\{\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M) : M \in \mathcal{Y}\}$. *Similarmente, se tiene la noción de* $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$.

Proposición 5.1.4 *Sean* $\mathcal{X}$ *y* $\mathcal{Y}$ *clases de objetos en* $\mathcal{T}$, $0 \in \mathcal{Y}$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) \leq n$ *si y sólo si* $\mathcal{X} \subseteq \varepsilon_n^{\wedge}(\mathcal{Y}) = *_{i=0}^{n} \mathcal{Y}[i]$.

(b) Si $\mathcal{X}$ *es cerrada por extensiones, entonces* $\mathcal{X} * \mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\wedge$.

(c) Si $\mathcal{X}$ *es cosuspendida, entonces* $\varepsilon_n^\wedge(\mathcal{X}) = \mathcal{X}[n]$.

Demostración.

(a) Se sigue de la definición y de 5.1.2 (b),(c).

(b) Se sigue de 5.1.2 (b) puesto que $\mathcal{X} * \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$.

(c) Sea $\mathcal{X}$ cosuspendida. Como $0 \in \mathcal{X}$ (ver 5.0.5 (b)), tenemos de 5.1.2 (b), (c) que $\mathcal{X}[n] \subseteq \varepsilon_n^\wedge(\mathcal{X}) = *_{i=0}^n \mathcal{X}[i]$. Por otro lado, usando que $\mathcal{X} * \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}[-1] \subseteq \mathcal{X}$, concluimos que $*_{i=0}^n \mathcal{X}[i] = (*_{i=0}^n \mathcal{X}[i-n])[n] \subseteq (*_{i=0}^n \mathcal{X})[n] \subseteq \mathcal{X}[n]$. $\Box$

El siguiente resultado será útil en este capítulo. El inciso (a) aparece en [20]. Recordemos que $\Delta_\mathcal{T}(\mathcal{X})$ (respectivamente, $\overline{\Delta}_\mathcal{T}(\mathcal{X})$) es la subcategoría triangulada más pequeña (respectivamente, triangulada más pequeña gruesa) de $\mathcal{T}$ que contiene a la clase $\mathcal{X}$.

Teorema 5.1.5 *Para cualquier subcategoría cosuspendida* $\mathcal{X}$ *de* $\mathcal{T}$ *y cualquier objeto* $C \in \mathcal{T}$, *se satisface lo siguiente.*

(a) $\mathrm{resdim}_\mathcal{X}(C) \leq n$ *si y sólo si* $C \in \mathcal{X}[n]$.

(b) $\mathcal{X}^\wedge = \cup_{n\geq 0} \mathcal{X}[n] = \Delta_\mathcal{T}(\mathcal{X})$.

(c) Si $\mathcal{X}$ *es cerrada por sumandos directos en* $\mathcal{T}$, *entonces* $\mathcal{X}^\wedge = \overline{\Delta}_\mathcal{T}(\mathcal{X})$.

Demostración.

(a) Se sigue de 5.1.4 (a), (c) puesto que $0 \in \mathcal{X}$ (ver 5.0.5 (b)).

(b) De 5.1.4 (c), obtenemos que $\mathcal{X}^\wedge = \cup_{n\geq 0} \mathcal{X}[n]$; y entonces $\mathcal{X}^\wedge$ es cerrada por translaciones positivas y negativas. Ahora veamos que $\mathcal{X}^\wedge$ es cerrada bajo extensiones. En efecto, sea $X[n] \to Y \to X'[m] \to X[n][1]$ un triángulo distinguido en $\mathcal{T}$ con $X, X' \in \mathcal{X}$. Supongamos sin perdida de generalidad que $n \leq m$ y entonces $X[n] = X[n-m][m] \in \mathcal{X}[m]$ ya que $n-m \leq 0$ y $\mathcal{X}[-1] \subseteq \mathcal{X}$. Usando ahora que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones, tenemos que $Y \in \mathcal{X}[m] \subseteq \mathcal{X}^\wedge$; probándose que $\mathcal{X}^\wedge$ es cerrada bajo extensiones. Entonces $\mathcal{X}^\wedge$ es una subcategoría triangulada de $\mathcal{T}$ y además es la más pequeña que contiene a $\mathcal{X}$ ya que $\mathcal{X}^\wedge = \cup_{n\geq 0} \mathcal{X}[n]$.

(c) Se sigue de (b). $\Box$

Enunciemos el dual del teorema anterior.

Teorema 5.1.6 *Para cualquier subcategoría suspendida* $\mathcal{Y}$ *de* $\mathcal{T}$ *y cualquier objeto* $C \in \mathcal{T}$, *se satisface lo siguiente.*

(a) $\mathrm{coresdim}_\mathcal{Y}(C) \leq n$ *si y sólo si* $C \in \mathcal{Y}[-n]$.

(b) $\mathcal{Y}^\vee = \cup_{n\geq 0}\,\mathcal{Y}[-n] = \Delta_{\mathcal{T}}(\mathcal{Y})$.

(c) Si $\mathcal{Y}$ *es cerrada por sumandos directos en* $\mathcal{T}$*, entonces* $\mathcal{Y}^\vee = \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{Y})$.

Observación 5.1.7 (1) *Observemos que una clase suspendida* $\mathcal{U}$ *de* $\mathcal{T}$ *es cerrada por conos. En efecto, si* $A \to B \to C \to A[1]$ *es un triángulo distinguido en* $\mathcal{T}$ *con* $A, B \in \mathcal{U}$ *entonces* $A[1], B \in \mathcal{U}$*; y por lo tanto* $C \in \mathcal{U}$*, pues* $\mathcal{U}$ *es cerrada por extensiones. Similarmente, si* $\mathcal{U}$ *es cosuspendida, entonces es cerrada por coconos.*
(2) *Sea* $(\mathcal{Y}, \omega)$ *un par de clases de objetos en* $\mathcal{T}$ *con* $\omega \subseteq \mathcal{Y}$*. Si* $\mathcal{Y}$ *es cerrada por conos (respectivamente, coconos) entonces* $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{Y}$ *(respectivamente,* $\omega^\vee \subseteq \mathcal{Y}$*). En efecto, supongamos que* $\mathcal{Y}$ *es cerrada por conos y sea* $M \in \omega^\wedge$*. Entonces* $M \in \varepsilon_n^\wedge(\omega)$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$*. Si* $n = 0$ *entonces* $M \in \omega \subseteq \mathcal{Y}$*. Sea* $n > 0$*, luego existe un triángulo distinguido* $M[-1] \to K \to Y \to M$ *en* $\mathcal{T}$ *con* $K \in \varepsilon_{n-1}^\wedge(\omega)$ *y* $Y \in \mathcal{Y}$*. Por inducción* $K \in \mathcal{Y}$ *y entonces* $M \in \mathcal{Y}$ *puesto que* $\mathcal{Y}$ *es cerrado por conos; probándose que* $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{Y}$*.*
(3) *Notemos que* $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ *(res-pectivamente,* $\mathcal{X}^\vee \subseteq {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}$*) puesto que* $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ *(respectivamente,* ${}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}$*) es cerrada por conos (respectivamente, coconos) y contiene a* $\mathcal{X}$*.*

Usando el hecho de que el funtor Hom es cohomológico, obtenemos la siguiente descripción de las subcategorías ortogonales. En particular, observemos que ${}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^\perp$ (respectivamente, ${}^\perp\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$) es una subcategoría suspendida (respectivamente, cosuspendida) de $\mathcal{T}$.

Lema 5.1.8 *Para una clase* $\mathcal{X}$ *de objetos en* $\mathcal{T}$*, tenemos que*

(a) ${}^\perp\mathcal{U}_{\mathcal{X}} = \{Z \in \mathcal{T} \,:\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, X[i]) = 0, \quad \forall i \geq 0, \forall X \in \mathcal{X}\}$,

(b) ${}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^\perp = \{Z \in \mathcal{T} \,:\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[i], Z) = 0, \quad \forall i \leq 0, \forall X \in \mathcal{X}\}$.

Demostración. Es directa. □

Lema 5.1.9 *Sean* $\mathcal{Y}$ *y* $\mathcal{X}$ *clases de objetos en* $\mathcal{T}$*,* $n \geq 1$ *y* $Z \in \mathcal{T}$*. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) El objeto Z *pertenece a* $\mathcal{Y} * \mathcal{Y}[1] * \cdots * \mathcal{Y}[n-1] * \mathcal{X}[n]$ *si y sólo si existe una familia* $\{K_i \to Y_i \to K_{i+1} \to K_i[1] \,:\, Y_i \in \mathcal{Y}\}_{i=0}^{n-1}$ *de triángulos distinguidos en* $\mathcal{T}$ *con* $K_0 \in \mathcal{X}$ *y* $Z = K_n$*.*

(b) El objeto Z *pertenece a* $\mathcal{X}[-n] * \mathcal{Y}[-n+1] * \cdots * \mathcal{Y}[-1] * \mathcal{Y}$ *si y sólo si existe una familia* $\{K_{i+1} \to Y_i \to K_i \to K_{i+1}[1] \,:\, Y_i \in \mathcal{Y}\}_{i=0}^{n-1}$ *de triángulos distinguidos en* $\mathcal{T}$ *con* $K_0 \in \mathcal{X}$ *y* $Z = K_n$*.*

Demostración.

(a) Procederemos por inducción sobre n. Si $n = 1$ entonces (a) es trivial. Supongamos que $n \geq 2$ y consideremos la clase

$$\mathcal{Z}_{n-1} := \mathcal{Y} * \mathcal{Y}[1] * \cdots * \mathcal{Y}[n-2] * \mathcal{X}[n-1].$$

Es claro que $\mathcal{Y} * \mathcal{Y}[1] * \cdots * \mathcal{Y}[n-1] * \mathcal{X}[n] = \mathcal{Y} * \mathcal{Z}_{n-1}[1]$; y entonces tenemos que $Z \in \mathcal{Y} * \mathcal{Y}[1] * \cdots * \mathcal{Y}[n-1] * \mathcal{X}[n]$ si y sólo si existe un triángulo distinguido

$$K \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow K[1]$$

en $\mathcal{T}$ con $Y \in \mathcal{Y}$ y $K \in \mathcal{Z}_{n-1}$. Por otro lado, por inducción tenemos que $K \in \mathcal{Z}_{n-1}$ si y sólo si existe una familia $\{K_i \to Y_i \to K_{i+1} \to K_i[1] \ : \ Y_i \in \mathcal{Y}\}_{i=0}^{n-2}$ de triángulos distinguidos en $\mathcal{T}$ con $K_0 \in \mathcal{X}$ y $K = K_{n-1}$. El resultado se sigue agregando el triángulo de arriba a la familia de triángulos anterior.

(b) Similar a (a). $\square$

5.2. Dimensiones homológicas relativas

En esta sección, introducimos la dimensión $\mathcal{X}$-proyectiva (respectivamente, inyectiva) de objetos en $\mathcal{T}$. Además, establecemos un resultado que relaciona esta dimensión proyectiva relativa con la dimensión resolución como se verá en el teorema 5.2.4.

Definición 5.2.1 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$ y M un objeto en $\mathcal{T}$.*

(a) La **dimensión $\mathcal{X}$-proyectiva** *de M es*

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M[-i], -)\,|_{\mathcal{X}} = 0, \quad \forall i > n\}.$$

(b) La **dimensión $\mathcal{X}$-inyectiva** *de M es*

$$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, M[i])\,|_{\mathcal{X}} = 0, \quad \forall i > n\}.$$

(c) Para una clase $\mathcal{Y}$ de objetos en $\mathcal{T}$, definimos

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \sup\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(C) \ : \ C \in \mathcal{Y}\} \quad y \quad \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \sup\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) \ : \ C \in \mathcal{Y}\}.$$

Lema 5.2.2 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Para $M \in \mathcal{T}$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

(a1) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M) \leq n$ *si y sólo si* $M \in {}^{\perp}\mathcal{U}_{\mathcal{X}}[n+1]$;

(a2) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) \leq n$ *si y sólo si* $M \in {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^{\perp}[-n-1]$.

(b) $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$ *para cualquier clase $\mathcal{Y}$ de objetos en $\mathcal{T}$.*

Demostración. (a) Se sigue de 5.1.8 y (b) es directo. $\square$

Proposición 5.2.3 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$ y $M \in \mathcal{T}$. Entonces*

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{resdim}_{^\perp\mathcal{U}_{\mathcal{X}}[1]}(M) \;\; y \;\; \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{coresdim}_{_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^\perp[-1]}(M).$$

Demostración. Como $^\perp\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ es cosuspendida (ver 5.1.8 (a)), la primera igualdad se sigue de 5.2.2 (a1) y 5.1.5 (a). La segunda igualdad se prueba similarmente. $\square$

Ahora probaremos la siguiente relación entre la dimensión proyectiva relativa y la dimensión resolución.

Teorema 5.2.4 *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de objetos en $\mathcal{T}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(L), \quad \forall L \in \mathcal{T}.$

(b) Si $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{X}} \cap {}^\perp\mathcal{U}_{\mathcal{X}}[1]$ y $\mathcal{Y}$ es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$, entonces

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(L), \quad \forall L \in \mathcal{Y}^\wedge.$$

Demostración.

(a) Sea $d := \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(L)$ y $\alpha := \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$. Podemos suponer que d y α son finitos. Probaremos (a) por inducción sobre d. Si $d = 0$, se sigue que $L \in \mathcal{Y}$ y entonces (a) se satisface en este caso.
Supongamos que $d \geq 1$. Luego existe un triángulo distinguido $K \to Y \to L \to K[1]$ en $\mathcal{T}$ con $Y \in \mathcal{Y}$ y $K \in \varepsilon^\wedge_{d-1}(\mathcal{Y})$. Aplicando el funtor cohomológico $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, M[j])$, con $M \in \mathcal{X}$, al triángulo de arriba, obtenemos la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(K[1], M[j]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(L, M[j]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, M[j]).$$

Por inducción, tenemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(K) \leq \alpha + d - 1$. Luego $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(L, M[j]) = 0$ para $j > \alpha + d$ de donde concluimos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) \leq \alpha + d$.

(b) Sea $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{X}} \cap {}^\perp\mathcal{U}_{\mathcal{X}}[1]$ y $\mathcal{Y}$ cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$. Consideremos $L \in \mathcal{Y}^\wedge$ y sea $d := \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(L)$. Por 5.2.2 tenemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$ y entonces $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) \leq d$ (ver (a)). Probaremos por inducción sobre d, que la igualdad dada en (b) se satisface. Para $d = 0$ es claro.
Supongamos que $d = 1$. Entonces, existe un triángulo distinguido

$$\eta: \quad Y_1 \to Y_0 \to L \xrightarrow{f} Y_1[1] \text{ en } \mathcal{T} \text{ con } Y_i \in \mathcal{Y}.$$

Si $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) = 0$ entonces $L \in {}^\perp\mathcal{U}_{\mathcal{X}}[1]$ (ver 5.2.2). Entonces $f = 0$ puesto que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$; y luego η se escinde, de donde tenemos que $L \in \mathcal{Y}$, lo cual es una contradicción ya que $d = 1$. Por lo tanto $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) > 0$ probándose (b) para $d = 1$.
Supongamos que $d \geq 2$. Entonces tenemos un triángulo distinguido $K \to$

$Y \to L \to K[1]$ en $\mathcal{T}$ con $Y \in \mathcal{Y}$, $K \in \varepsilon^{\wedge}_{d-1}(\mathcal{Y})$ y $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(K) = d-1$ (por hipótesis de inducción). Como $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) \leq d$, basta ver que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) > d-1$. Por lo tanto, en el caso que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) \leq d-1$, aplicamos el funtor cohomológico $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X[d])$, con $X \in \mathcal{X}$, al triángulo $L \to K[1] \to Y[1] \to L[1]$. Entonces obtenemos la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y[1], X[d]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(K[1], X[d]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(L, X[d]).$$

Luego $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(K[1], X[d]) = 0$ contradiciendo que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(K) = d-1$. Esto significa que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) > d-1$; probándose (b). $\square$

Observación 5.2.5 *Notemos que si* $Y \neq 0$ *y* $Y \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}} \cap {}^{\perp}\mathcal{U}_{\mathcal{X}}[1]$, *entonces* $Y[j] \notin \mathcal{U}_{\mathcal{X}} \cap {}^{\perp}\mathcal{U}_{\mathcal{X}}[1]$, $\forall j > 0$.

El siguiente resultado técnico será usado en la sección 4.

Lema 5.2.6 *Sean* $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ *y* $\mathcal{Z}$ *clases de objetos en* $\mathcal{T}$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}^{\vee}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.

(b) Si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}^{\vee}$ *entonces* $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Z}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.

Demostración. Para probar (a), basta ver que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}^{\vee}) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. Sea $M \in \mathcal{X}^{\vee}$. Probaremos por inducción sobre $d := \mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(M)$ que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. Podemos suponer que $\alpha := \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) < \infty$. Si $d = 0$ tenemos que $M \in \mathcal{X}$ y entonces no hay nada que probar.
Sea $d \geq 1$. Entonces existe un triángulo distinguido $M \to X \to K \to M[1]$ in $\mathcal{T}$ with $X \in \mathcal{X}$, $K \in \varepsilon^{\vee}_{d-1}(\mathcal{X})$ y $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(K) \leq \alpha$ (por hipótesis de inducción). Aplicando el funtor cohomológico $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Y[i])$, con $Y \in \mathcal{Y}$, obtenemos la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y[i]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M, Y[i]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(K, Y[i+1]).$$

Luego $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M, Y[i]) = 0$ para $i > \alpha$ dado que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(K) \leq \alpha$. Probándose que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}^{\vee}) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.
Finalmente, (b) es consecuencia fácil de (a). $\square$

Los siguientes dos lemas son los análogos a los de corrimiento usados usualmente para sizigias y cosizigias en el funtor Ext^n.

Lema 5.2.7 *Sean* $\mathcal{X}$ *y* $\mathcal{Y}$ *clases de objetos en* $\mathcal{T}$ *tal que* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. *Entonces, para* $X \in \mathcal{X}$, $k > 0$ *y* $K_n \in \mathcal{Y} * \mathcal{Y}[1] * \cdots * \mathcal{Y}[n-1] * K_0[n]$, *existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, K_0[k+n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, K_n[k]).$$

Demostración. Sea $X \in \mathcal{X}$, $k > 0$ y $K_n \in \mathcal{Y} * \mathcal{Y}[1] * \cdots * \mathcal{Y}[n-1] * K_0[n]$. Por 5.1.9 (a), existen triángulos distinguidos $\eta_i : \quad K_i \to Y_i \to K_{i+1} \to K_i[1]$ con $Y_i \in \mathcal{Y},\ 0 \leq i \leq n-1$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[-k], -)$ a η_i, tenemos una sucesión exacta de grupos abelianos

$$(X[-k], Y_i) \to (X[-k], K_{i+1}) \to (X[-k], K_i[1]) \to (X[-k], Y_i[1]),$$

donde para simplicidad $(-,-) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-,-)$. Como $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$, se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[-k], K_{i+1}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[-k], K_i[1])$. Por lo tanto, por el isomorfismo anterior, tenemos que
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, K_n[k]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, K_{n-1}[k+1]) \simeq \cdots \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, K_0[k+n])$. $\square$

Lema 5.2.8 *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de objetos en $\mathcal{T}$ tal que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. Entonces, para $X \in \mathcal{X}$, $k > 0$ y $K_n \in K_0[-n] * \mathcal{Y}[-n+1] * \cdots * \mathcal{Y}[-1] * \mathcal{Y}$, existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(K_0, X[k+n]) \simeq \mathrm{Hom}_{T}(K_n, X[k]).$$

Demostración. La prueba es similar a la dada en 5.2.7 usando 5.1.9 (b). $\square$

5.3. Cogeneradores débiles relativos e inyectivos relativos

En esta sección, centraremos nuestra atención en pares de clases de objetos $(\mathcal{X}, \omega)$ en $\mathcal{T}$. Estudiaremos la relación entre cogeneradores débiles en $\mathcal{X}$ y coresoluciones. También, daremos una caracterización para ciertas subcategorías de $\mathcal{T}$.

Definición 5.3.1 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$. Decimos que*

(a) ω es un **cogenerador débil** *en $\mathcal{X}$, si $\omega \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}[-1] * \omega$;*

(b) ω es un **generador débil** *en $\mathcal{X}$, si $\omega \subseteq \mathcal{X} \subseteq \omega * \mathcal{X}[1]$;*

(c) ω es **$\mathcal{X}$-inyectivo** *si $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$; y dualmente, ω es* **$\mathcal{X}$-proyectivo** *si $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$.*

El siguiente resultado nos dice que un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo que es cerrado por sumandos directos, es único (en caso de que exista).

Proposición 5.3.2 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$ tal que ω es $\mathcal{X}$-inyectivo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\omega^{\wedge}$ es $\mathcal{X}$-inyectivo.

(b) Si ω es un cogenerador débil en $\mathcal{X}$, y ω es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$, entonces
$$\omega = \mathcal{X} \cap {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^{\perp}[-1] = \mathcal{X} \cap \omega^{\wedge}.$$

Demostración.

(a) Se sigue del dual de 5.2.6 (a).

(b) Sea $\omega \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}[-1] * \omega$ y ω cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$. Primero probaremos la primera igualdad. Sea $X \in \mathcal{X} \cap {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^{\perp}[-1]$. Como $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}[-1] * \omega$, existe un triángulo distinguido

$$\eta : \quad X \to W \to X' \xrightarrow{f} X[1] \text{ en } \mathcal{T} \text{ con } X' \in \mathcal{X} \text{ y } W \in \omega.$$

Además $X \in {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^{\perp}[-1]$ implica que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X[1])|_{\mathcal{X}} = 0$ (ver 5.1.8 (b)). Luego η se escinde y entonces $X \in \omega$; probándose que $\mathcal{X} \cap {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^{\perp}[-1] \subseteq \omega$. La otra inclusión se sigue de 5.2.2 (a2) puesto que $\omega \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$. Por otro lado, es fácil ver que $\omega \subseteq \mathcal{X} \cap \omega^{\wedge}$ y como $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega^{\wedge}) = 0$, se sigue de 5.2.2 (a2) que $\mathcal{X} \cap \omega^{\wedge} \subseteq \mathcal{X} \cap {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^{\perp}[-1]$; probándose (b). $\square$

Proposición 5.3.3 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$ y ω cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$. Si ω es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$, entonces*

$$\mathcal{X} \cap \omega^{\vee} = \{X \in \mathcal{X} \,:\, \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X) < \infty\}.$$

Demostración. Sea $M \in \mathcal{X} \cap \omega^{\vee}$. Afirmamos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) \leq d < \infty$ donde $d := \mathrm{coresdim}_{\omega}(M)$. En efecto, del dual de 5.1.2 (a) y 5.1.9 (a), existe $W_d \in \omega * \omega[1] * \cdots * \omega[d-1] * M[d]$ con $W_d \in \omega$. Por 5.2.7 tenemos un isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, M[k+d]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, W_d[k])$ para $k > 0$ y $X \in \mathcal{X}$; usando que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$, obtenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, M[k+d]) = 0$ para $k > 0$, probándose que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) \leq d$.
Sea $N \in \mathcal{X}$ tal que $n := \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(N) < \infty$. Como $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}[-1] * \omega$, podemos construir una familia $\{K_i \to W_i \to K_{i+1} \to K_i[1] \ : \ W_i \in \omega, \ 0 \leq i \leq n-1\}$ de triángulos distinguidos en $\mathcal{T}$ donde $K_0 := N$ y $K_i \in \mathcal{X}$, $\forall i \ 0 \leq i \leq n$. Por 5.1.9 (a), se tiene que $K_n \in \omega * \omega[1] * \cdots * \omega[n-1] * N[n]$; luego por 5.2.7 obtenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, K_n[k]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, N[k+n])$, $\forall X \in \mathcal{X}$, $\forall k > 0$. Pero $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, N[k+n]) = 0$, $\forall X \in \mathcal{X}$, $\forall k > 0$ puesto que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(N) = n$. Por lo tanto $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K_n) = 0$ y entonces $K_n \in \omega$ (ver 5.2.2 y 5.3.2 (b)); probándose que $N \in \mathcal{X} \cap \omega^{\vee}$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente resultado. En el enunciado, usamos las nociones de clase preenvolvente y precubriente (ver sección 1).

Teorema 5.3.4 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$, $\mathcal{X}$ cerrada por extensiones y ω un cogenerador débil en $\mathcal{X}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Para todo $C \in \mathcal{X}^{\wedge}$ existen dos triángulos distinguidos en $\mathcal{T}$:

$$C[-1] \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{\varphi_C} C \ \textit{con} \quad Y_C \in \omega^{\wedge} \quad \textit{y} \quad X_C \in \mathcal{X}.$$

$$C \xrightarrow{\varphi^C} Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow C[1] \ \textit{con} \quad Y^C \in \omega^{\wedge} \quad \textit{y} \quad X^C \in \mathcal{X}.$$

(b) Si ω es $\mathcal{X}$-inyectivo, entonces

(b1) $Y_C[1] \in \mathcal{X}^{\perp}$ y φ_C es una $\mathcal{X}$-precubierta de C,

(b2) $X^C[-1] \in {}^{\perp}(\omega^{\wedge})$ y φ^C es una $\omega^{\wedge}$-preenvolvente de C.

Demostración. (a) Sea $C \in \mathcal{X}^{\wedge}$. Probaremos la existencia de los triángulos en (a) por inducción sobre $n := \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C)$. Si $n = 0$, tenemos que $C \in \mathcal{X}$ y entonces podemos considerar $C[-1] \to 0 \to C \overset{1_C}{\to} C$ como el primer triángulo; el segundo triángulo es obtenido del hecho que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}[-1] * \omega$.
Supongamos que $n > 0$. Entonces tenemos un triángulo distinguido $C[-1] \to K_1 \to X_0 \to C$ en $\mathcal{T}$ con $X_0 \in \mathcal{X}$ y $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K_1) = n-1$. Por inducción, existe un triángulo distinguido $K_1 \to Y^{K_1} \to X^{K_1} \to K_1[1]$ en $\mathcal{T}$ con $Y^{K_1} \in \omega^{\wedge}$ y $X^{K_1} \in \mathcal{X}$. Por cambio de co-base aplicada a los triángulos de arriba, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & X^{K_1}[-1] \arrow[r, equal] \arrow[d] & X^{K_1}[-1] \arrow[d] & \\
C[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, equal] \\
C[-1] \arrow[r] & Y^{K_1} \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & C \\
 & X^{K_1} \arrow[r, equal] & X_{K_1} &
\end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son triángulos distinguidos en $\mathcal{T}$. Como X_0, X^{K_1} $\in \mathcal{X}$ se sigue que $U \in \mathcal{X}$. Tomando $X_C := U$ y $Y_C := Y^{K_1}$, obtenemos el primer triángulo de (a). Por otro lado, como $U \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}[-1]*\omega$, existe un triángulo distinguido $X^C[-1] \to U \to W \to X^C$ en $\mathcal{T}$ con $X^C \in \mathcal{X}$ y $W \in \omega$. Por cambio de co-base, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & Y^{K_1} \arrow[r] \arrow[d] & Y^{K_1} \arrow[d] & \\
X^C[-1] \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & X^C \arrow[d] \\
X^C[-1] \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & Y^C \arrow[r] \arrow[d] & X^C \\
 & Y^{K_1}[1] \arrow[r] & Y^{K_1}[1] &
\end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son triángulos distinguidos en $\mathcal{T}$. Considerando la segunda columna del diagrama de arriba, tenemos que $Y^C \in \omega^\wedge$. Por lo tanto, el segundo renglón del diagrama anterior es el triángulo buscado.

(b2) Consideremos el triángulo $X^C[-1] \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\varphi^C} Y^C \to X^C$ con $Y^C \in \omega^\wedge$ y $X^C \in \mathcal{X}$. Como $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$, por 5.3.2, tenemos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega^\wedge) = 0$. Luego $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[-1], -)|_{\omega^\wedge} = 0$ para $X \in \mathcal{X}$; y por lo tanto $X^C[-1] \in {}^\perp(\omega^\wedge)$. Sea $f : C \to Y$ un morfismo en $\mathcal{T}$ con $Y \in \omega^\wedge$. Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X^C[-1], Y) = 0$, se tiene que $fg = 0$ y entonces f se factoriza a través de φ^C; probándose que φ^C es una $\omega^\wedge$-preenvolvente de C.
(b1) Similar a la prueba de (b2). $\square$

El siguiente resultado nos dá una caracterización de la categoría $\mathcal{X}^\wedge$, y será aplicado en el siguiente capítulo acerca de co-t-estructuras.

Corolario 5.3.5 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y ω es un cogenerador débil en $\mathcal{X}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $0 \in \omega$ entonces $\mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X} * \omega^\wedge = \mathcal{X} * \omega^\wedge[1]$.

(b) Si $\mathcal{X}[-1] \subseteq \mathcal{X}$ entonces $\mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X} * \omega^\wedge = \mathcal{X} * \omega^\wedge[1] = \mathcal{X}[-1] * \omega^\wedge$.

Demostración. Afirmamos que $\mathcal{X} * \omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\wedge$. En efecto, como $\omega \subseteq \mathcal{X}$ se sigue por 5.1.2 (b) que $\varepsilon_n^\wedge(\omega) \subseteq \varepsilon_n^\wedge(\mathcal{X})$, de donde tenemos que $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\wedge$. Luego $\mathcal{X} * \omega^\wedge \subseteq \mathcal{X} * \mathcal{X}^\wedge$ y entonces $\mathcal{X} * \omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\wedge$ por 5.1.4 (b).
(a) Sea $0 \in \omega$. Por 5.3.4 (a) tenemos que $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{X} * \omega^\wedge[1]$, . Por otro lado, por 5.1.2 (c), tenemos que $\omega^\wedge[1] \subseteq \omega^\wedge$ y entonces $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{X} * \omega^\wedge[1] \subseteq \mathcal{X} * \omega^\wedge$. Pero $\mathcal{X} * \omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\wedge$ por el parrafo anterior, y entonces $\mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X} * \omega^\wedge = \mathcal{X} * \omega^\wedge[1]$.
(b) Sea $\mathcal{X}[-1] \subseteq \mathcal{X}$. Por 5.3.4 (a) y la afirmación de arriba, tenemos que $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{X}[-1] * \omega^\wedge \subseteq \mathcal{X} * \omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\wedge$. Por otro lado, de 5.3.4 (a), se sigue que $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{X} * \omega^\wedge[1]$. Por lo tanto, para probar (b), es suficiente ver $\mathcal{X} * \omega^\wedge[1] \subseteq \mathcal{X}^\wedge$. Sea $C \in \mathcal{X} * \omega^\wedge[1]$. Entonces existe un triángulo distinguido $Y \to X \to C \to Y[1]$ en $\mathcal{T}$ con $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \omega^\wedge$. Luego se sigue que $C \in \mathcal{X}^\wedge$ puesto que $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\wedge$; probándose (b). $\square$

Ahora estamos en posición de probar que si ω es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en una clase $\mathcal{X}$, entonces la dimensión $\omega^\wedge$-proyectiva coincide con la dimensión $\mathcal{X}$-resolución para cada objeto de la subcategoría gruesa de $\mathcal{T}$ generada por $\mathcal{X}$.

Teorema 5.3.6 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$ que son cerradas por sumandos directos en $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y ω es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$, entonces*

$$\mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(C) = \mathrm{pd}_{\omega}(C) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C), \quad \forall C \in \mathcal{X}^\wedge.$$

Demostración. Sea $C \in \mathcal{X}^\wedge$. Por 5.2.2 (b) y el dual de 5.2.6 (a), se sigue que $\mathrm{pd}_\omega(C) = \mathrm{id}_{\{C\}}(\omega) = \mathrm{id}_{\{C\}}(\omega^\wedge) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(C)$. Para probar la última igualdad, procederemos por inducción sobre $n := \mathrm{resdim}_\mathcal{X}(C)$. Primero notemos que $\mathrm{pd}_\omega(\mathcal{X}) = \mathrm{id}_\mathcal{X}(\omega) = 0$. Si $n = 0$ entonces $C \in \mathcal{X}$ y por lo tanto $\mathrm{pd}_\omega(C) = 0 = \mathrm{resdim}_\mathcal{X}(C)$.
Sea $n = 1$. Entonces existe un triángulo distinguido $X_1 \to X_0 \to C \to X_1[1]$ en $\mathcal{T}$ con $X_i \in \mathcal{X}$. Por 5.3.4 (a), existe un triángulo distinguido $Y_C \to X_C \overset{\varphi_C}{\to} C \to Y_C[1]$ en $\mathcal{T}$ con $Y_C \in \omega^\wedge$ y $X_C \in \mathcal{X}$. Por cambio de base tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & Y_C \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y_C \arrow[d] & \\
X_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & X_C \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_C"] & X_1[1] \arrow[d, equal] \\
X_1 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & X_1[1] \\
 & Y_C[1] \arrow[r, equal] & Y_C[1] &
\end{tikzcd}$$

donde los renglones y columnas son triángulos distinguidos en $\mathcal{T}$. Como $X_1, X_C \in \mathcal{X}$ tenemos que $E \in \mathcal{X}$. Por otro lado, como $\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(X, Y[1]) = 0$ para $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \omega^\wedge$ (ver 5.3.2 (a)), tenemos que $\beta\alpha = 0$ y entonces el triángulo $Y_C \to E \to X_0 \to Y_C[1]$ se escinde, de donde tenemos que $Y_C \in \mathcal{X} \cap \omega^\wedge = \omega$ (ver 5.3.2). Como $\mathrm{pd}_\omega(\mathcal{X}) = 0$ por 5.2.4 (a), tenemos que $\mathrm{pd}_\omega(C) \leq \mathrm{resdim}_\mathcal{X}(C) = 1$. Afirmamos que $\mathrm{pd}_\omega(C) > 0$. En efecto, supongamos que $\mathrm{pd}_\omega(C) = 0$; entonces $\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(C, W[1]) = 0$ para $W \in \omega$. Como $Y_C \in \omega$ tenemos que $\beta = 0$ y entonces el triángulo $Y_C \to X_C \to C \to Y_C[1]$ se escinde. Por lo tanto $C \in \mathcal{X}$ lo cual contradice que $\mathrm{resdim}_\mathcal{X}(C) = 1$; de donde concluimos que $\mathrm{pd}_\omega(C) = 1 = \mathrm{resdim}_\mathcal{X}(C)$.
Sea $n \geq 2$. Por 5.2.4 (a), tenemos $\mathrm{pd}_\omega(C) \leq \mathrm{resdim}_\mathcal{X}(C) = n$ puesto que $\mathrm{pd}_\omega(\mathcal{X}) = 0$. Entonces, basta ver que $\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(C[-n], -)|_\omega \neq 0$. Consideremos el triángulo distinguido $K_1 \to X_0 \to C \to K_1[1]$ en $\mathcal{T}$ con $X_0 \in \mathcal{X}$ y $\mathrm{resdim}_\mathcal{X}(K_1) = n - 1 = \mathrm{pd}_\omega(K_1)$ (hipótesis de inducción). Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(-, W[n])$, con $W \in \omega$, al triángulo $C \to K_1[1] \to X_0[1] \to C[1]$ tenemos la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(X_0[1], W[n]) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{T}(K_1[1], W[n]) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{T}(C, W[n]).$$

Supongamos que $\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(C[-n], -)|_\omega = 0$. Entonces $\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(K_1[1], W[n]) = 0$ puesto que $\mathrm{id}_\mathcal{X}(\omega) = 0$ y $n \geq 2$; contradiciendo que $\mathrm{pd}_\omega(K_1) = n - 1$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(C[-n], -)|_\omega \neq 0$ y entonces $n = \mathrm{pd}_\omega(C) = \mathrm{resdim}_\mathcal{X}(C)$. $\square$

Lema 5.3.7 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$ y $A \to B \to C \to A[1]$ un triángulo distinguido en $\mathcal{T}$. Entonces* *(a)* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(B) \leq \max\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(A), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C)\}$;

(b) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(A) \leq \max\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(B), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C)+1\}$;

(c) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) \leq \max\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(B), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(A)-1\}$.

Demostración. Es directa. $\Box$

El siguiente resultado nos da una relación entre las dimensiones relativas inyectivas para la pareja $(\mathcal{X}, \omega)$ y la dimensión ω-coresolución. Este resultado será utilizado en el siguiente capítulo cuando trabajemos con co-t-estructuras. Observemos que 5.3.8 no es la versión dual de 5.3.6.

Proposición 5.3.8 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$ tal que $\omega \subseteq {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}$. Si ω es cerrada por sumandos directos y $\mathcal{X}$-inyectivo, entonces*

$$\mathrm{id}_{\omega}(C) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) = \mathrm{coresdim}_{\omega}(C), \quad \forall\, C \in {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U} \cap \omega^{\vee}.$$

Demostración. Supongamos que ω es cerrada por sumandos directos y $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$. Sea $C \in {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U} \cap \omega^{\vee}$ y $n := \mathrm{coresdim}_{\omega}(C)$. Por el dual de 5.2.4 (b), se tiene

$$(*) \quad \alpha := \mathrm{id}_{\omega}(C) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) = \mathrm{coresdim}_{\omega}(C) = n.$$

Además como $C \in \omega^{\vee}$, existe un triángulo distinguido $(\eta)\ :\ C \to W_0 \to K_1 \to C[1]$ en $\mathcal{T}$ con $W_0 \in \omega$ y $\mathrm{coresdim}_{\omega}(K_1) = n-1$. De 5.1.2 (a) tenemos que $K_1 \in {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}$ puesto que ${}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}$ es cerrada por coconos y $\omega \subseteq {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}$ (recorriendo los triángulos de 5.1.2 hasta llegar a K_1). Ahora, probaremos el resultado por inducción sobre α.
Sea $\alpha = 0$. Afirmamos que $C \in \omega$ (note que si esto es cierto, el resultado es ciero). Procederemos por inducción sobre n. Si $n = 0$ es claro que $C \in \omega$. Por lo tanto podemos suponer que $n > 0$, aplicando 5.3.7 a (η) se sigue que $\mathrm{id}_{\omega}(K_1) = 0$. Luego por inducción tenemos que $K_1 \in \omega$, y por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(K_1, C[1]) = 0$ dado que $\mathrm{id}_{\omega}(C) = 0$. Por lo tanto el triángulo (η) se escinde y entonces $C \in \omega$; probándose el resultado.
Supongamos que $\alpha > 0$. Aplicando 5.3.7 a (η), tenemos que $\mathrm{id}_{\omega}(K_1) \leq \alpha - 1$. Por inducción, se sigue que $\mathrm{id}_{\omega}(K_1) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K_1) = \mathrm{coresdim}_{\omega}(K_1) = n-1$. En particular, tenemos que $n-1 \leq \alpha-1$ y entonces por $(*)$, tenemos el resultado. $\Box$

El siguiente resultado da una caracterización de $\omega^{\wedge}$ en términos de $\mathcal{X}$. De esto se siguen relaciones entre ciertas subcategorías.

Proposición 5.3.9 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos de $\mathcal{T}$ tal que ω es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$, $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y ω es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) ${}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^{\perp}[-1] \cap \mathcal{X}^{\wedge} = \omega^{\wedge}$.

(b) Si $\mathcal{X}[-1] \subseteq \mathcal{X}$ *entonces* $\mathcal{U}_\omega = \omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp[-1] \cap \mathcal{X}^\wedge$.

Demostración.

(a) Sea $C \in {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^\perp[-1] \cap \mathcal{X}^\wedge$. En particular, por 5.3.4 (a), existe un triángulo distinguido $Y_C \to X_C \to C \to Y_C[1]$ en $\mathcal{T}$ con $Y_C \in \omega^\wedge$ y $X_C \in \mathcal{X}$. Afirmamos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X_C) = 0$. En efecto, como $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) = 0 = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(Y_C)$ (ver 5.2.2 y 5.3.2 (a)) la afirmación se sigue de 5.3.7 (a). Por lo tanto, $X_C \in \mathcal{X} \cap {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^\perp[-1]$ y por 5.3.2 (b), tenemos que $X_C \in \omega$ probándose que $C \in \omega^\wedge$. Por otro lado, como $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega^\wedge) = 0$, por 5.2.2 tenemos que $\omega^\wedge \subseteq {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^\perp[-1] \cap \mathcal{X}^\wedge$.

(b) Supongamos que $\mathcal{X}[-1] \subseteq \mathcal{X}$. Por (a), se sigue que $\omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp[-1] \cap \mathcal{X}^\wedge$ pues ${}_{\mathcal{X}}\mathcal{U} = \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}^\perp[-1]$ es suspendida y $\mathcal{X}^\wedge$ es triangulada (ver 5.1.5), concluimos que $\omega^\wedge$ es una subcategoría suspendida de $\mathcal{T}$; y por lo tanto $\mathcal{U}_\omega \subseteq \omega^\wedge$. Finalmente, la igualdad $\mathcal{U}_\omega = \omega^\wedge$ se sigue de 5.1.7 (3). □

Teorema 5.3.10 *Sea* $(\mathcal{X}, \omega)$ *un par de clases de objetos en* $\mathcal{T}$ *que son cerradas por sumandos directos,* $\mathcal{X}$ *cosuspendida y* ω *un cogenerador débil* $\mathcal{X}$*-inyectivo en* $\mathcal{X}$*. Entonces,*

$$\varepsilon_n^\wedge(\mathcal{X}) = \mathcal{X}[n] = \mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp\mathcal{U}_\omega[n+1] = \mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge)[n+1], \quad \forall n \geq 0.$$

Demostración. Por 5.1.5, tenemos que $\varepsilon_n^\wedge(\mathcal{X}) = \mathcal{X}[n]$ y $\mathcal{X}^\wedge = \cup_{n\geq 0} \mathcal{X}[n]$. Por otro lado, por 5.2.2 y 5.3.6, se sigue que

$$\mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp\mathcal{U}_{\omega^\wedge}[n+1] = \mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp\mathcal{U}_\omega[n+1] = \mathcal{X}[n] \cap \mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X}[n].$$

Finalmente, como $\omega^\wedge$ es una subcategoría suspendida de $\mathcal{T}$ (ver 5.3.9 (b)), tenemos que ${}^\perp\mathcal{U}_{\omega^\wedge} = {}^\perp(\omega^\wedge)$; probándose el resultado. □

El resultado anterior puede ser visto en el contexto de teorías de torsión, en el sentido de Iyama-Yoshino. Tales teorías de torsión han sido ampliamente estudiadas en relación con la teoría de conglomerados (ver [40]).

Definición 5.3.11 [40, Definición 2.2] *Un par* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *de subcategorías de* $\mathcal{T}$ *es una* ***teoría de torsión*** *en* $\mathcal{T}$*, si las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{X}$ *y* $\mathcal{Y}$ *son cerradas por sumandos directos en* $\mathcal{T}$.

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$.

(c) $\mathcal{T} = \mathcal{X} * \mathcal{Y}$.

Corolario 5.3.12 *Sea* $(\mathcal{X}, \omega)$ *un par de clases de objetos en* $\mathcal{T}$*, que son cerradas por sumandos directos en* $\mathcal{T}$*, y tal que* $\mathcal{X}$ *es cosuspendida y* ω *es un cogenerador débil* $\mathcal{X}$*-inyectivo en* $\mathcal{X}$*. Entonces, el par* $(\mathcal{X}, \omega^\wedge[1])$ *es una teoría de torsión en la subcategoría triangulada gruesa* $\mathcal{X}^\wedge$ *de* $\mathcal{T}$*.*

Demostración. Como $\mathcal{X}$ es cosuspendida y cerrada bajo sumandos directos, por 5.1.5 (c) tenemos que $\mathcal{X}^\wedge$ es una subcategoría triangulada gruesa de $\mathcal{T}$. Por otro lado, por 5.3.5, se sigue que $\mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X} * \omega^\wedge[1]$; y además, $\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(\mathcal{X}, \omega^\wedge[1]) = 0$ puesto que ω es $\mathcal{X}$-inyectivo (ver 5.3.2). Por 5.3.9, se tiene que $\omega^\wedge$ es una subcategoría cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$ pues $\mathcal{X}^\wedge$ y $\mathcal{X}^\perp[-1]$ lo son. □

Notación 5.3.13 *Para una clase $\mathcal{Y}$ de objetos en $\mathcal{T}$, definimos $\mathcal{Y}^\sim := (\mathcal{Y}^\wedge)^\vee$.*

Lema 5.3.14 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $\mathcal{X}^\wedge$ es cerrada por coconos entonces $\omega^\sim \subseteq \mathcal{X}^\wedge$ para cualquier $\omega \subseteq \mathcal{X}$.

(b) $\mathcal{X}^\wedge$ es cerrada por coconos si y sólo si $\mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X}^\sim$.

(c) Si $\mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X}^\sim$ entonces $\mathcal{X}^\wedge[-1] \subseteq \mathcal{X}^\wedge$.

Demostración.

(a) Sea $\omega \subseteq \mathcal{X}$ y supongamos que $\mathcal{X}^\wedge$ es cerrada por coconos. Como $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\wedge$, por 5.1.7 (2), concluimos que $\omega^\sim \subseteq \mathcal{X}^\wedge$.

(b) Supongamos que $\mathcal{X}^\wedge$ es cerrada por coconos. Es claro que $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\sim$. Por otro lado, por (a) se sigue que $\mathcal{X}^\sim \subseteq \mathcal{X}^\wedge$.
Supongamos que $\mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X}^\sim$. Sea $A \to B \to C \to A[1]$ un triángulo distinguido en $\mathcal{T}$ con B, C en $\mathcal{X}^\wedge$. Entonces $A \in \mathcal{X}^\sim = \mathcal{X}^\wedge$ y por lo tanto $\mathcal{X}^\wedge$ es cerrada por coconos.

(c) Sea $\mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X}^\sim$ y consideremos $X \in \mathcal{X}^\wedge$. Como tenemos el triángulo distinguido $X[-1] \to 0 \to X \xrightarrow{1_X} X$ y $0, X \in \mathcal{X}^\wedge$, se sigue de (b) que $X[-1] \in \mathcal{X}^\wedge$; probándose el lema. □

Corolario 5.3.15 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{X}$ es cosuspendida y $\omega \subseteq \mathcal{X}$, entonces $\omega^\sim \subseteq \mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X}^\sim$.*

Demostración. Se sigue de 5.3.14 y del hecho que $\mathcal{X}^\wedge$ es triangulada (ver 5.1.5). □

En el caso de que ω sea un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en una subcategoría cosuspendida $\mathcal{X}$ de $\mathcal{T}$, ambas cerradas por sumandos directos, la subcategoría gruesa $\overline{\Delta}_\mathcal{T}(\omega)$ de $\mathcal{T}$ puede ser caracterizada como sigue.

Teorema 5.3.16 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$, $\mathcal{X}$ cosuspendida y ω cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$. Si ω es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\omega^\sim = \{C \in \mathcal{X}^\wedge : \mathrm{id}_\mathcal{X}(C) < \infty\} = \mathcal{X}^\wedge \cap (\mathcal{X}^\perp[-1])^\vee$.

(b) $\omega^\sim$ es la subcategoría triangulada más pequeña de $\mathcal{X}^\wedge$ que contiene a ω, esto es, $\omega^\sim = \Delta_{\mathcal{X}^\wedge}(\omega)$.

(c) Si $\mathcal{X}$ es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$, entonces

$$\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega) = \omega^{\sim} = \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) \cap (\mathcal{X}^{\perp}[-1])^{\vee}.$$

Demostración. Supongamos que $\omega \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}[-1] * \omega$ y que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$. Sea $\mathcal{Y} := \{C \in \mathcal{X}^{\wedge} : \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) < \infty\}$. Primero veamos que $\omega^{\sim} \subseteq \mathcal{Y}$. Por 5.3.15, se tiene que $\omega^{\sim} \subseteq \mathcal{X}^{\wedge}$. Por otro lado, como $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega^{\wedge}) = 0$ (ver 5.3.2(a)), podemos aplicar el dual de 5.2.4 (a); y entonces $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) \leq \mathrm{coresdim}_{\omega^{\wedge}}(C) < \infty$ para $C \in \omega^{\sim}$; de donde concluimos que $\omega^{\sim} \subseteq \mathcal{Y}$.
Sea $C \in \mathcal{Y}$. Por 5.3.4 (a), existe un triángulo distinguido $C \to Y^C \to X^C \to C[1]$ en $\mathcal{T}$ con $Y^C \in \omega^{\wedge}$ y $X^C \in \mathcal{X}$. Por 5.3.7 (c) tenemos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X^C) < \infty$ y entonces por 5.3.3, obtenemos que $X^C \in \omega^{\vee} \subseteq \omega^{\sim}$; probándose que $C \in \omega^{\sim}$. Por lo tanto $\mathcal{Y} \subseteq \omega^{\sim}$.
Para probar la segunda igualdad en (a), usamos 5.2.2 y el hecho que $\mathcal{X} = {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}$ para obtener que

$$\{C \in \mathcal{X}^{\wedge} : \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) < \infty\} = \mathcal{X}^{\wedge} \cap (\cup_{n\geq 0}\, \mathcal{X}^{\perp}[-n-1]).$$

Por otro lado, como $\mathcal{X}^{\perp}[-1]$ es suspendida, por el dual de 5.1.5, se sigue que $(\mathcal{X}^{\perp}[-1])^{\vee} = \cup_{n\geq 0}\, \mathcal{X}^{\perp}[-n-1]$ y también que $(\mathcal{X}^{\perp}[-1])^{\vee}$ es una subcategoría gruesa de $\mathcal{T}$ pues $(\mathcal{X}^{\perp}[-1])$ es cerrada por sumandos directos. En particular, por 5.1.5, se sigue (b). Finalmente, (c) se sigue de (a) y 5.1.5. $\square$

El siguiente resultado será aplicado en la siguiente sección para obtener una conexión con la dimensión relativa de Rouquier.

Proposición 5.3.17 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$, $\mathcal{X}$ cosuspendida y ω cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$. Si ω es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$, entonces*

(a) $\mathrm{id}_{\omega}(C) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) < \infty, \quad \forall C \in \omega^{\sim}$;

(b) $\omega^{\sim} \cap {}_{\omega}\mathcal{U}^{\perp}[-n-1] = \omega^{\sim} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-n-1], \quad \forall n \geq 0.$

Demostración.

(a) Por 5.1.5 y 5.3.16, tenemos que $\mathcal{X}^{\wedge}$ y $\omega^{\sim}$ son subcategorías trianguladas de $\mathcal{T}$. Por 5.3.15 se tiene que $\omega^{\sim} \subseteq \mathcal{X}^{\wedge}$.
Sea $C \in \omega^{\sim}$. Basta ver que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) \leq \mathrm{id}_{\omega}(C)$. La prueba se hará por inducción sobre $n := \mathrm{id}_{\omega}(C)$.
Como $C \in \mathcal{X}^{\wedge}$, por 5.3.4 tenemos la existencia del triángulo distinguido $(\eta)\ :\ C \to Y^C \to X^C \to C[1]$ en $\mathcal{T}$ con $Y^C \in \omega^{\wedge} \subseteq \omega^{\sim}$ y $X^C \in \mathcal{X}$.
Afirmamos que $X^C \in \mathcal{X} \cap \omega^{\vee}$. En efecto, como $\omega^{\sim}$ es triangulada y $C[1], Y^C \in \omega^{\sim}$, concluimos que $X^C \in \mathcal{X} \cap \omega^{\sim}$ y entonces $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X^C)$ es finita (ver 5.3.16 (a)). Luego por 5.3.3, $X^C \in \mathcal{X} \cap \omega^{\vee}$.
Sea $n = 0$. Como $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega^{\wedge}) = 0$ (ver 5.3.2) y $\omega \subseteq \mathcal{X}$ entonces $\mathrm{id}_{\omega}(Y^C) = 0$. Luego por 5.3.7, tenemos que $\mathrm{id}_{\omega}(X^C) = 0$ pues $0 = n = \mathrm{id}_{\omega}(C)$. Por otro lado, de 5.3.8 tenemos las igualdades $\mathrm{coresdim}_{\omega}(X^C) = \mathrm{id}_{\omega}(X^C) = 0$.

Luego $X^C \in \omega$ y como $\mathrm{id}_\omega(C) = 0$, tenemos que $\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(X^C, C[1]) = 0$. Por lo tanto, el triángulo (η) se escinde, por lo que C es un sumando directo de Y^C; y entonces $\mathrm{id}_\mathcal{X}(C) \leq \mathrm{id}_\mathcal{X}(Y^C) \leq \mathrm{id}_\mathcal{X}(\omega^\wedge) = 0$.
Supongamos que $n > 0$. Como $\mathrm{id}_\mathcal{X}(Y^C) = 0 = \mathrm{id}_\omega(Y^C)$, se sigue de 5.3.7 que $\mathrm{id}_\omega(X^C) \leq n - 1$. Por inducción $\mathrm{id}_\mathcal{X}(X^C) \leq \mathrm{id}_\omega(X^C) \leq n - 1$. Por lo tanto, aplicando 5.3.7 al triángulo (η), obtenemos que $\mathrm{id}_\mathcal{X}(C) \leq n = \mathrm{id}_\omega(C)$; probándose el resultado.

(b) Por 5.2.2, el inciso (a) y el hecho que ${}_\mathcal{X}\mathcal{U} = \mathcal{X}$ tenemos el resultado. □

5.4. Algunas conexiones con la dimensión de Rouquier

En esta sección, introducimos la “dimensión relativa de Rouquier” y la relacionamos con la dimensión de Rouquier y las otras dimensiones relativas desarrolladas en este capítulo.
Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Consideremos la menor subcategoría $\langle\mathcal{X}\rangle$ de $\mathcal{T}$ que contiene a $\mathcal{X}$, cerrada bajo translaciones, sumas directas finitas y sumandos directos, esto es, $\langle\mathcal{X}\rangle := \mathrm{add}\,(\cup_{i\in\mathbb{Z}}\,\mathcal{X}[i])$. Sea $\mathcal{X}\diamondsuit\mathcal{Y} := \langle\mathcal{X} * \mathcal{Y}\rangle$. Procediendo como R. Rouquier, definimos inductivamente $\langle\mathcal{X}\rangle_0 := 0$ y $\langle\mathcal{X}\rangle_n := \langle\mathcal{X}\rangle_{n-1} \diamondsuit \langle\mathcal{X}\rangle$ para $n \geq 1$. Los objetos de $\langle\mathcal{X}\rangle_n$ son sumandos directos de objetos obtenidos tomando n-extensiones de sumas directas finitas de translaciones de objetos de $\mathcal{X}$.

La siguiente dimensión para categorías trianguladas fue introducida por R. Rouquier y ha sido ampliamente estudiada en [61].

Definición 5.4.1 [61, Definition 3.2] *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada. La **dimensión** de $\mathcal{T}$ es*

$$\dim(\mathcal{T}) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \textit{existe} \quad X \in \mathcal{T} \quad \textit{tal que} \quad \langle X\rangle_{n+1} = \mathcal{T}\}.$$

Lema 5.4.2 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Entonces, para $n \in \mathbb{N}$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\langle\mathcal{X}\rangle_{n+1} = \langle\varepsilon_n^\wedge(\langle\mathcal{X}\rangle)\rangle = \langle\varepsilon_n^\vee(\langle\mathcal{X}\rangle)\rangle$.

(b) $\langle\mathcal{X}\rangle_n \subseteq \langle\mathcal{X}\rangle_{n+1}$.

Demostración.

(a) Procediendo por inducción sobre n, se puede ver que $\langle\mathcal{X}\rangle_{n+1} = \left\langle *_{i=1}^{n+1}\langle\mathcal{X}\rangle\right\rangle$. Por otro lado, por 5.1.2 (b), tenemos que $\varepsilon_n^\wedge(\langle\mathcal{X}\rangle) = *_{i=0}^{n}\langle\mathcal{X}\rangle[i] = *_{i=1}^{n+1}\langle\mathcal{X}\rangle$ puesto que $\langle\mathcal{X}\rangle[i] = \langle\mathcal{X}\rangle$ para $i \in \mathbb{Z}$; probándose que $\langle\mathcal{X}\rangle_{n+1} = \langle\varepsilon_n^\wedge(\langle\mathcal{X}\rangle)\rangle$. Similarmente, por el dual de 5.1.2 (b), se sigue que $\langle\mathcal{X}\rangle_{n+1} = \langle\varepsilon_n^\vee(\langle\mathcal{X}\rangle)\rangle$.

(b) Se sigue de (a) y 5.1.2 (c), dado que $0 \in \langle\mathcal{X}\rangle$. □

Ahora introducimos la **dimensión relativa de Rouquier** como sigue.

Definición 5.4.3 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada, $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$ y $M \in \mathcal{T}$. La $\mathcal{X}$-**dimensión relativa de Rouquier** de M es*

$$\dim_{\mathcal{X}}(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \textit{ tal que } M \in \langle\mathcal{X}\rangle_{n+1}\}.$$

Para una clase $\mathcal{Y}$ de objetos en $\mathcal{T}$, definimos $\dim_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \sup\{\dim_{\mathcal{X}}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\}$.

Lema 5.4.4 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada, y $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ clases de objetos en $\mathcal{T}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Para $n \in \mathbb{N}$, $\dim_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) \leq n$ si y sólo si $\mathcal{Y} \subseteq \langle\mathcal{X}\rangle_{n+1}$.

(b) Si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ entonces $\dim_{\mathcal{Y}}(M) \leq \dim_{\mathcal{X}}(M)$ $\forall\, M \in \mathcal{T}$.

Demostración.

(a) Sea $\dim_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) \leq n$. Para $Y \in \mathcal{Y}$, tenemos que $m(Y) := \dim_{\mathcal{X}}(Y) \leq n$. Por 5.4.2 (b), se sigue que $Y \in \langle\mathcal{X}\rangle_{m(Y)+1} \subseteq \langle\mathcal{X}\rangle_{n+1}$; probándose que $\mathcal{Y} \subseteq \langle\mathcal{X}\rangle_{n+1}$. Finalmente, supongamos que $\mathcal{Y} \subseteq \langle\mathcal{X}\rangle_{n+1}$. Luego, se sigue directamente que $\dim_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) \leq n$.

(b) Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ y $M \in \mathcal{T}$. Por lo tanto $\langle\mathcal{X}\rangle \subseteq \langle\mathcal{Y}\rangle$ y entonces $*_{i=1}^{n}\langle\mathcal{X}\rangle \subseteq *_{i=1}^{n}\langle\mathcal{Y}\rangle \subseteq \langle *_{i=1}^{n}\langle\mathcal{Y}\rangle\rangle = \langle\mathcal{Y}\rangle_{n}$. Por lo tanto $\langle\mathcal{X}\rangle_{n} \subseteq \langle\mathcal{Y}\rangle_{n}$; y entonces tenemos que $\dim_{\mathcal{Y}}(M) \leq \dim_{\mathcal{X}}(M)$. $\square$

Ahora, la dimensión relativa de Rouquier está relacionada con la dimensión de Rouquier como sigue.

Proposición 5.4.5 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada. Entonces,*

$$\dim(\mathcal{T}) = \min\{\dim_{X}(\mathcal{T}) : X \in \mathcal{T}\}.$$

Demostración. Por 5.4.4 (a), tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{T}) &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{existe } X \in \mathcal{T} \text{ tal que } \langle X\rangle_{n+1} = \mathcal{T}\}\\
&= \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{existe } X \in \mathcal{T} \text{ tal que } \dim_{X}(\mathcal{T}) \leq n\}\\
&= \min\{\dim_{X}(\mathcal{T}) : X \in \mathcal{T}\}.
\end{aligned}$$

Tenemos las siguientes relaciones entre la dimensión relativa de Rouquier y las otras dimensiones relativas como dimensión coresolución, resolución, proyectiva relativa e inyectiva relativa.

Proposición 5.4.6 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada, $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$ y $M \in \mathcal{T}$. Entonces, tenemos que*

$$\dim_{\mathcal{X}}(M) \leq \min\{\operatorname{resdim}_{\langle\mathcal{X}\rangle}(M), \operatorname{coresdim}_{\langle\mathcal{X}\rangle}(M)\}.$$

Demostración. Por 5.4.2 (a), tenemos las contenciones $\varepsilon_n^{\wedge}(\langle\mathcal{X}\rangle) \subseteq \langle\mathcal{X}\rangle_{n+1}$ y $\varepsilon_n^{\vee}(\langle\mathcal{X}\rangle) \subseteq \langle\mathcal{X}\rangle_{n+1}$. Probándose el resultado. $\square$

Proposición 5.4.7 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$ que son cerrados por sumandos directos en $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y ω es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$, entonces*

$$\dim_{\mathcal{X}}(C) \leq \mathrm{pd}_{\omega}(C) < \infty, \quad \forall\, C \in \mathcal{X}^{\wedge}.$$

Demostración. Se sigue directamente 5.4.6 y 5.3.6, puesto que $\mathcal{X} \subseteq \langle\mathcal{X}\rangle$. $\square$

Proposición 5.4.8 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$ que son cerradas por sumandos directos en $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{X}$ es cosuspendida y ω es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$, entonces*

$$\dim_{\omega}(C) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) = \mathrm{id}_{\omega}(C) < \infty, \quad \forall\, C \in \omega^{\vee}.$$

Demostración. Por 5.3.17, tenemos que $\mathrm{id}_{\omega}(C) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) < \infty$ para $C \in \omega^{\sim}$. Como $\mathcal{X} = {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}$, por 5.3.2 (b), tenemos que $\omega = {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U} \cap {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}^{\perp}[-1]$. Tomando $\mathcal{Y} := \omega$, por el dual de 5.2.4 (b), tenemos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) = \mathrm{coresdim}_{\omega}(C)$ para $C \in \omega^{\vee}$. Observemos que $\omega^{\vee} \subseteq \omega^{\sim}$ puesto que $\omega^{\sim}$ es la subcategoría triangulada más pequeña de $\mathcal{T}$ que contiene a ω (ver 5.3.16 (b)). Por lo tanto $\mathrm{id}_{\omega}(C) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) < \infty$ para $C \in \omega^{\vee}$. Finalmente, por 5.4.6, tenemos que $\dim_{\omega}(C) \leq \mathrm{coresdim}_{\omega}(C)$ puesto que $\omega \subseteq \langle\omega\rangle$, probándose el resultado. $\square$

Sea k un campo, en lo que sigue, supondremos que $\mathcal{T}$ es una categoría triangulada que es k-lineal, Hom-finita y Krull-Schmidt. $\mathcal{C}$ será una subcategoría Krull-Schmidt de $\mathcal{T}$ que es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es un n-cluster tilting (ver [41]) si es funtorialmente finita y $\mathcal{C} = \cap_{i=1}^{n-1} \mathcal{C}[-i]^{\perp} = \cap_{i=1}^{n-1} {}^{\perp}\mathcal{C}[i]$.
Tenemos el siguiente ejemplo de una categoría triangulada $\mathcal{T}$ que tiene $\mathcal{C}$-dimensión finita.

Proposición 5.4.9 *Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría n-cluster tilting de $\mathcal{T}$. Entonces,*

$$\dim_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}) \leq n-1.$$

Demostración. Por [40, Teorema 3.1], tenemos que $\mathcal{T} = *_{i=0}^{n-1} \mathcal{C}[i]$. Por lo tanto, por 5.1.2 (b), concluimos que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}) \leq n-1$. Finalmente, por 5.4.6, se tiene que $\dim_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T})$ puesto que $\mathcal{C} \subseteq \langle\mathcal{C}\rangle$; probándose el resultado. $\square$

Capítulo 6

Contextos de Auslander-Buchweitz

En [37], Hashimoto definió el "Contexto de Auslander-Buchweitz" para categorías abelianas, dando un marco teórico para la teoría de aproximaciones. El punto de partida del trabajo de Hashimoto es la teoría de aproximaciones en categorías abelianas desarrollada por Auslander y Buchweitz en [3]. El trabajo [3], fue el inicio de hacer álgebra homológica relativa con respecto a ciertas subcategorías, el cual tuvo aplicaciones a los módulos Cohen-Macaulay sobre anillos conmutativos, a la teoría inclinante, a la teoría de álgebras quasi-hereditarias y grupos reductivos. También se aplicó al estudio de conjeturas homológicas de álgebras de dimensión finita. Por otro lado, en [14], generaliza a categorías exactas el trabajo fundamental [3]. En particular, siguiendo las ideas de Hashimoto Beligiannis introduce el contexto de Auslander-Buchweitz en categorías exactas, que es más general que el caso abeliano.

En el caso de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ (la categoría de módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin), es importante mencionar el trabajo de Auslander y Reiten [4]. Ellos estudiaron las aproximaciones de módulos usando módulos inclinantes y coinclinantes, ellos demostraron que existe una correspondencia biyectiva entre módulos coinclinantes básicos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y ciertas subcategorías precubrientes $\mathcal{X}$ de $\mathrm{mod}(\Lambda)$. El principal objetivo de [4] es explorar la conexión entra la teoría inclinante y los pares de cotorsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.
Como mencionamos en el capítulo anterior (también ver [51]), las categorías abelianas son el contexto propio para hacer álgebra homológica. Pero recientemente, las categorías trianguladas han empezado a jugar un papel importante. En [51] se desarrolla el análogo a la teoría de aproximaciones de Auslander-Buchweitz para categorías abelianas.

El principal objetivo de este capítulo es explorar en el contexto dado en el capítulo anterior, resultados análogos de Auslander-Reiten en conexión con la teoría inclinante y la teoría de co-t-estructuras. Para esto, utilizamos la teoría desarrollada en el capítulo anterior y centramos nuestra atención en la relación entre los contextos de Auslander-Buchweitz en una categoría triangulada $\mathcal{T}$ y

las co-t-estructuras definidas en ciertas subcategorías de $\mathcal{T}$.
La noción de co-t-estructura fue independientemente introducida por Pauksztello [56] y Bondarko [17] (bajo el nombre de estructuras con peso). Esta noción da información importante de la categoría triangulada $\mathcal{T}$ y permite la existencia de descompoiciones con peso y filtraciones. Además las co-t-estructuras dan ejemplos de teorías de torsión en categorías trianguladas Krull Schmidt en el sentido de Iyama-Yoshino [40].

Dada una clase de objetos $\mathcal{X}$ en $\mathcal{T}$, recordemos que $\Delta_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$ (respectivamente, $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$) denotará a la subcategoría triangulada más pequeña (respectivamente, triangulada más pequeña gruesa) de $\mathcal{T}$ que contiene a la clase $\mathcal{X}$.
En la sección 1, mostramos que la noción de contexto de Auslander-Buchweitz relativo en una categoría triangulada $\mathcal{T}$ coincide con la noción de co-t-estructura en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$) (ver 6.1.8). En particular, un contexto de Auslander-Buchweitz es lo mismo que una co-t-estructura acotada por abajo. Además establecemos una correspondencia biyectiva entre los contextos de Auslander-Buchweitz $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ en $\mathcal{T}$ y la clase de pares $(\mathcal{X},\omega)$ tal que $\mathcal{X}$ es cosuspendida y ω es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$ (ver 6.1.11).

En la sección 2, estudiamos las co-t-estructuras fieles acotadas y no degeneradas. Damos una caracterización de las co-t-estructuras acotadas en términos de álgebra homológica relativa. Además damos relaciones entre los diferentes tipos de co-t-estructuras. Tambén damos relaciones entre las subcategorías asociadas a las co-t-estructuras y las dimensiones homológicas relativas. Terminamos esta sección con resultados que involucran co-t-estructuras y la noción de cogenerador.

En la sección 3, estudiamos la relación entre co-t-estucturas y clases silting. Establecemos una correspondencia biyectiva entre las clases silting en $\mathcal{T}$ y las co-t-estructuras acotadas en la subcategoría gruesa generada por la clase silting (ver 6.3.8). Además damos una caracterización de las co-t-estructuras acotadas en $\mathcal{T}$ (ver 6.3.10).

En la sección 4, aplicamos los resultados de la sección 3 al caso de la categoría derivada acotada $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es una categoría abeliana hereditaria que es Hom-finita, Ext-finita y tiene un objeto inclinante. Damos una correspondencia biyectiva entre los silting generadores finitos $\omega = \mathrm{add}(\omega)$ y las co-t-estructuras acotadas (ver 6.4.7). Como una bonita consecuencia tenemos que una co-t-estructura acotada en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ tiene asociada dos t-estructuras: una a izquierda y otra a derecha. Esto es, una co-t-estructura en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ es siempre adyacente a izquierda (resp. a derecha) a una t-estructura en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ en el sentido de [18].
Notemos que en [18], el autor estudia las co-t-estructuras en categorías arbitrarias con coproductos arbitrarios (su noción de subcategorías negativas corresponde a nuestra noción de silting). En este contexto Bondarko prueba que cualquier subcategoría silting da una co-t-estructura en la menor subcategoría

triangulada de $\mathcal{T}$ cerrada por coproductos arbitrarios y que contiene a ω. Nuestro resultado (Teorema 6.3.5) que es probado usando técnicas de homología rela-tiva es el análogo para subcategorías gruesas que contienen a ω del Teorema 4.3.2 en [18] el cual es probado con diferentes técnicas.

6.1. Co-t-estructuras

En todo este capítulo $\mathcal{T}$ será una categoría triangulada y $[1] : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ su funtor de translación. Diremos que $\mathcal{C}$ es una subcategoría de $\mathcal{T}$ si $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena, aditiva y cerrada por isomorfismos. Recordemos que para una clase $\mathcal{X}$ de objetos de $\mathcal{T}$, $\mathrm{add}(\mathcal{X})$ denota a la menor subcategoría de $\mathcal{T}$ que contiene a $\mathcal{X}$ y es cerrada por sumandos directos y sumas directas finitas.
En esta sección damos la noción de contexto de Auslander-Buchwetitz (relativo) para una categoría triangulada $\mathcal{T}$, relacionando esta noción con el concepto de co-t-estructura.

Definición 6.1.1 [17, 56] *Una par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de subcategorías en $\mathcal{T}$ es una* **co-t-estructura** *en $\mathcal{T}$ si las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *son cerradas por sumandos directos en* $\mathcal{T}$.

(b) $\mathcal{A}[-1] \subseteq \mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}[1] \subseteq \mathcal{B}$.

(c) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}[-1], \mathcal{B}) = 0$.

(d) $\mathcal{T} = \mathcal{A}[-1] * \mathcal{B}$.

Usaremos el siguiente resultado dado por D. Pauksztello en [56].

Proposición 6.1.2 [56, Proposición 2.1] *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una co-t-estructura en $\mathcal{T}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{A}[-1]$ *es una clase precubriente en* $\mathcal{T}$.

(b) $\mathcal{B}$ *es una clase preenvolvente en* $\mathcal{T}$.

(c) $\mathcal{A}[-1] = {}^{\perp}\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp}[-1]$.

(d) $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *son cerradas por extensiones.*

Lema 6.1.3 *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una co-t-estructura en $\mathcal{T}$ y $\mathcal{Y}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}) \leq n$ *si y sólo si* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{B}[-n]$.

(b) $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{Y}) \leq n$ *si y sólo si* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}[n]$.

Demostración.

(a) Por 5.2.2, tenemos la equivalencia: $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}) \leq n$ si y sólo si $\mathcal{Y} \subseteq {}_{\mathcal{A}}\mathcal{U}^{\perp}[-n-1]$. Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es una co-t-estructura, se sigue por 6.1.2 (c), que ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{U}^{\perp}[-n-1] = \mathcal{B}[-n]$.

(b) Es dual a (a). $\square$

El siguiente resultado nos dice que para una co-t-estructura $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en $\mathcal{T}$, la clase $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es un cogenerador débil $\mathcal{A}$-inyectivo en $\mathcal{A}$; y también que ω es un generador débil $\mathcal{B}$-proyectivo en $\mathcal{B}$. Notemos además que $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$.

Proposición 6.1.4 *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una co-t-estructura en $\mathcal{T}$ y sea $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 0$ *y* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}[-1] * \omega$.

(b) $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = 0$ *y* $\mathcal{B} \subseteq \omega * \mathcal{B}[1]$.

Demostración. Por 6.1.3, se sigue que $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 0 = \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$. Ahora veamos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}[-1] * \omega$.
Sea $C \in \mathcal{A}$. Por 6.1.1 (d), tenemos un triángulo distinguido $C' \to C \to C'' \to C'[1]$ en $\mathcal{T}$ con $C' \in \mathcal{A}[-1]$ y $C'' \in \mathcal{B}$. Como $C'[1], C \in \mathcal{A}$, por 6.1.2 (d), se sigue que $C'' \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \omega$; probándose que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}[-1] * \omega$.
Sea $X \in \mathcal{T}$, por 6.1.1 (b), (d), existe un triángulo distinguido $A \to X \to B[1] \to A[1]$ en $\mathcal{T}$ con $A \in \mathcal{A}$ y $B[1] \in \mathcal{B}[1]$. Si $X \in \mathcal{B}$, se sigue del triángulo distinguido $B \to A \to X \to B[1]$ que $A \in \mathcal{B}$ pues $\mathcal{B}$ es cerrada por extensiones (ver 6.1.2 (d)). Entonces $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \omega$; de donde concluimos que $\mathcal{B} \subseteq \omega * \mathcal{B}[1]$. $\square$

Mostraremos algunas relaciones entre las nociones de subcategorías cosuspendidas (resp. suspendidas) $\mathcal{X}$, cogeneradores débiles (resp. generadores débiles) $\mathcal{X}$-inyectivos (resp. $\mathcal{X}$-proyectivos) y co-t-estructuras en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$. Por lo que sólo enunciaremos los resultados para el caso cosuspendido y omitimos el caso suspendido los cuales pueden ser probados con argumentos similares.
Primero, veamos que un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en una subcategoría cosuspendida $\mathcal{X} = \mathrm{add}\,(\mathcal{X})$ de $\mathcal{T}$ nos dá una co-t-estructura en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^{\wedge}$.

Teorema 6.1.5 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$ que son cerradas por sumandos directos, $\mathcal{X}$ cosuspendida y ω un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\omega^{\wedge} = \mathcal{X}^{\wedge} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1]$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{\wedge} \cap {}^{\perp}(\omega^{\wedge})[1]$ *y* $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1]$.

(b) El par $(\mathcal{X}^{\wedge} \cap {}^{\perp}(\omega^{\wedge})[1], \omega^{\wedge})$ es una co-t-estructura en la categoría triangulada $\mathcal{X}^{\wedge}$.

(c) Si ω' es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$, entonces $\omega = \mathrm{add}\,\omega'$.

Demostración. Primero notemos que como $\mathcal{X}$ es cosuspendida entonces $\mathcal{X} = {}_{\mathcal{X}}\mathcal{U}$.

(a) Por 5.3.9 (a), tenemos que $\omega^\wedge = \mathcal{X}^\wedge \cap \mathcal{X}^\perp[-1]$. Como $\mathcal{X}$ es cosuspendida, por 5.3.2 (b), se tiene que $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp[-1]$. Además, por 5.3.10, se sigue que $\mathcal{X} = \mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge)[1]$.

(b) Tenemos que $\omega^\wedge = \mathcal{X}^\wedge \cap \mathcal{X}^\perp[-1]$ es suspendida y cerrada por sumandos directos pues $\mathcal{X}^\wedge$ y $\mathcal{X}^\perp[-1]$ lo son (ver 5.1.5). Por lo tanto $\mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge)[1]$ es cosuspendida y cerrada por sumandos directos. Como $\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(\mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge)[1], \omega^\wedge) = 0$. Para ver que el par dado es una co-t-estructura en la categoría triangulada $\mathcal{X}^\wedge$, basta ver que $\mathcal{X}^\wedge = (\mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge)) * \omega^\wedge$. Pero esto es consecuencia de 5.3.5 (b) puesto que $\mathcal{X}[-1] = \mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$.

(c) Se sigue de (a) y del hecho que add (ω') es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$. $\square$

Observación 6.1.6 *Sea $\mathcal{X} = \mathrm{add}\,(\mathcal{X})$ una subcategoría cosuspendida de $\mathcal{T}$. Notemos que $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp[-1]$ es $\mathcal{X}$-inyectivo. Además, de 6.1.5, tenemos que: si existe un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$ en $\mathcal{X}$, entonces es único. Por lo tanto, existe un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$ en $\mathcal{X}$ si y sólo si $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp[-1]$ es un cogenerador débil en $\mathcal{X}$.*

El contexto de Auslander-Buchweitz para categorías abelianas fue introducida por M. Hashimoto en [37]. Inspirados en esto, introducimos tal contexto para categorías trianguladas $\mathcal{T}$. Para hacer esto, primero definimos la noción de contexto relativo de Auslander-Buchweitz en $\mathcal{T}$. Observemos que el "contexto relativo de Auslander-Buchweitz" en categorías trianguladas es usado como un análogo de lo que Hashimoto llama "contexto débil de Auslander-Buchweitz " en categorías abelianas.

Definición 6.1.7 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$ y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. El par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un* **contexto relativo de Auslander-Buchweitz** *en $\mathcal{T}$ si las siguientes tres condiciones se satisfacen:*

(AB1) $\mathcal{X}$ es cosuspendida y cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$.

(AB2) $\mathcal{Y}$ es suspendida y cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^\wedge$.

(AB3) ω es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$.

El par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un **contexto de Auslander-Buchweitz** *en $\mathcal{T}$ si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un contexto relativo de Auslander-Buchweitz en $\mathcal{T}$ y $\mathcal{X}^\wedge = \mathcal{T}$.*

Teorema 6.1.8 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un contexto relativo de Auslander-Buchweitz en $\mathcal{T}$ y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp[-1]$ y $\omega^\wedge = \mathcal{Y}$.

(b) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una co-t-estructura en la categoría triangulada $\mathcal{X}^\wedge$.

Demostración.

(a) La primera igualdad se sigue de 6.1.5. Como $\omega \subseteq \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Y}$ es suspendida, se sigue de 5.1.7 que $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{Y}$.
Veamos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. En efecto, sea $C \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^\wedge$. Por 5.3.4, existe triángulo distinguido $Y_C \to X_C \to C \to Y_C[1]$ en $\mathcal{T}$ con $X_C \in \mathcal{X}$ y $Y_C \in \omega^\wedge \subseteq \mathcal{Y}$. Luego $X_C \in \mathcal{Y}$ pues $\mathcal{Y}$ es cerrada por extensiones y $Y_C, C \in \mathcal{Y}$. Por lo tanto, $X_C \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \omega$ y entonces $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X_C) = 0$. Por otro lado, como $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(Y_C) = 0$ (ver 5.3.2 (a)), se sigue por 5.3.7 (c) que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) = 0$; probándose la afirmación. Finalmente, como $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$ y $\mathcal{X}$ es cosuspendida, concluimos por 5.2.2, que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^\wedge \cap \mathcal{X}^\perp[-1]$. Luego por 6.1.5 (a) tenemos que $\mathcal{Y} \subseteq \omega^\wedge$.

(b) Como $\omega^\wedge = \mathcal{Y}$, (b) se sigue de 6.1.5. $\square$

Dada una clase $\mathcal{X}$ de objetos en $\mathcal{T}$, recordemos que $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$ denota a la menor subcategoría gruesa que contiene a la clase $\mathcal{X}$.

Proposición 6.1.9 *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de objetos en $\mathcal{T}$ tal que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una co-t-estructura en la categoría triangulada $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$. Entonces, $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^\wedge$ y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un contexto relativo de Auslander-Buchweitz en $\mathcal{T}$.*

Demostración. Por 6.1.2 (d), tenemos que $\mathcal{X}$ es cosuspendida y $\mathcal{Y}$ es suspendida. En particular, por 5.1.5(c), concluimos que $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^\wedge$. El hecho que $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$, se sigue de 6.1.4 (a). $\square$

Ahora podemos enunciar el resultado principal de esta sección. Para hacer esto, introducimos las siguientes clases

Notación 6.1.10 *Para una categoría triangulada $\mathcal{T}$, introducimos las siguientes clases:*

(a) $\mathcal{C}_1$ consiste de todos los pares $(\mathcal{X}, \omega)$ de clases de objetos en $\mathcal{T}$, que son cerradas por sumandos directos, y tal que $\mathcal{X}$ es cosuspendida y ω es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$.

(b) $\mathcal{C}_2$ consiste de todos los pares $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de clases de objetos en $\mathcal{T}$, que son un contexto relativo de Auslander-Buchweitz en $\mathcal{T}$.

(c) $\mathcal{C}_3$ consiste de todos los pares $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de clases de objetos en $\mathcal{T}$, que son una co-t-estructura en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$.

(d) $\mathcal{C}_4$ consiste de todas las subcategorías cosuspendidas $\mathcal{X}$ en $\mathcal{T}$, que son precubrientes en $\mathcal{X}^\wedge$ y $\mathcal{X} = \mathrm{add}\,(\mathcal{X})$.

Una categoría aditiva $\mathcal{C}$ es Krull-Schmidt si todo objeto C en $\mathcal{C}$ tiene una descomposición finita $C = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n$ tal que cada C_i es inescindible con anillo de endomorfismos local.
Sea R un anillo conmutativo artiniano. Recordemos que una categoría triangulada R-lineal $\mathcal{T}$ es Hom-finita si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ es un R-módulo finitamente generado para $X, Y \in \mathcal{T}$.

Sea Λ una R-álgebra de artin. Es bien conocido, que la categoría derivada acotada $\mathbf{D}^b\,(\mathrm{mod}\,(\Lambda))$ es un ejemplo típico de una categoría triangulada R-lineal que es Krull-Schmidt y Hom-finita.

Teorema 6.1.11 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3$ *y la correspondencia* $\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, $(\mathcal{X}, \omega) \mapsto (\mathcal{X}, \mathcal{Y} := \omega^\wedge)$, *es una biyección con inversa* $\mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ *dada por* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \mapsto (\mathcal{X}, \omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$.

(b) Si $\mathcal{T}$ es una categoría triangulada R-lineal que es Hom-*finita y Krull-Schmidt, entonces la correspondencia* $\mathcal{C}_4 \to \mathcal{C}_3$, $\mathcal{X} \mapsto (\mathcal{X}, \mathcal{Y} := \mathcal{X}^\perp[-1] \cap \mathcal{X}^\wedge)$ *es una biyección con inversa* $\mathcal{C}_4 \to \mathcal{C}_3$ *dada por* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \mapsto \mathcal{X}$.

Demostración.

(a) Se sigue de 6.1.5, 6.1.8 y 6.1.9.

(b) Supongamos que $\mathcal{T}$ es una categoría triangulada R-lineal que es Hom-finita y Krull-Schmid. Sea $\mathcal{X} \in \mathcal{C}_4$. Como $\mathcal{X}$ es cosuspendida y cerrada por sumandos directos en $\mathcal{T}$, se sigue por 5.1.5 que $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^\wedge$. Por otro lado, por [40, Proposición 2.3], tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{X}^\wedge) = 0$ y $\mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X} * (\mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{X}^\wedge)$. Por lo tanto

$$\mathcal{X}[-1] * (\mathcal{X}^\perp[-1] \cap \mathcal{X}^\wedge) = (\mathcal{X} * (\mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{X}^\wedge))[-1] = \mathcal{X}^\wedge[-1] = \mathcal{X}^\wedge,$$

y entonces $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^\perp[-1] \cap \mathcal{X}^\wedge) \in \mathcal{C}_3$.
Cosideremos un par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{C}_3$. Por 6.1.9, 6.1.8 y 6.1.5, tenemos que $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^\perp[-1] \cap \mathcal{X}^\wedge$. Como el par $(\mathcal{X}[1], \mathcal{Y}[1])$ es una co-t-estructura en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$, tenemos por 6.1.2 (a) que $\mathcal{X} \in \mathcal{C}_4$. Además, como $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^\perp[-1] \cap \mathcal{X}^\wedge$, obtenemos que la correspondencia $\mathcal{X} \mapsto (\mathcal{X}, \mathcal{X}^\perp[-1] \cap \mathcal{X}^\wedge)$ es una biyección entre las clases $\mathcal{C}_4$ y $\mathcal{C}_3$, con inversa $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \mapsto \mathcal{X}$. $\square$

Corolario 6.1.12 *Existe un correspondencia biyectiva* $\mathcal{X} \mapsto (\mathcal{X}, \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}^\perp[-1])$ *entre las subcategorías cosuspendidas* $\mathcal{X} = \mathrm{add}\,(\mathcal{X})$ *de $\mathcal{T}$ tal que* $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp[-1]$ *es un cogenerador débil en $\mathcal{X}$, y las co-t-estructuras* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *en* $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$.

Demostración. Se sigue de 6.1.11 y 6.1.6. $\square$

6.2. Co-t-estructuras no degeneradas, acotadas y fieles

En esta sección centramos nuestra atención en las co-t-estructuras no degeneradas, acotadas y fieles . Terminamos esta sección con algunos resultados que involucran a las co-t-estructuras y la noción categórica de cogenerador.
Siguiendo la terminología para co-t-estructuras en categorías trianguladas dada en [17], recordamos la siguiente definición.

Definición 6.2.1 *Sea $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ una co-t-estructura en $\mathcal{T}$. Decimos que $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es* **acotada por abajo** *(respectivamente,* **acotada por arriba***) si $\cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{A}[n]=\mathcal{T}$ (respectivamente, $\cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{B}[n]=\mathcal{T}$). El par $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es* **acotado** *si es acotado por arriba y por abajo.*

Observación 6.2.2 *Por 5.1.5 y 5.1.6, tenemos que una co-t-estructura $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ en $\mathcal{T}$ es acotada por abajo (respectivamente, por arriba) si y sólo si $\mathcal{A}^\wedge=\mathcal{T}$ (respectivamente, $\mathcal{B}^\vee=\mathcal{T}$).*

Corolario 6.2.3 *Existe una correspondencia biyectiva $\mathcal{X}\mapsto(\mathcal{X},\mathcal{X}^\perp[-1])$ entre las subcategorías cosuspendidas $\mathcal{X}=\operatorname{add}(\mathcal{X})$ de $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{X}^\wedge=\mathcal{T}$ y $\mathcal{X}\cap\mathcal{X}^\perp[-1]$ es un cogenerador débil en $\mathcal{X}$, y las co-t-estructuras acotadas por abajo $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ en $\mathcal{T}$.*

Demostración. Se sigue de 6.1.12 y 6.2.2. □

Ahora, probamos algunas relaciones entre las dimensiones homológicas relativas asociadas a una co-t-estructura.

Proposición 6.2.4 *Sea $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ una co-t-estructura en $\mathcal{T}$ y $\omega:=\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$. Entonces*

(a) $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M)=\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$ *y* $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M)=\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(M),\quad \forall M\in\mathcal{T}$.

(b) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M)=\mathrm{resdim}_{\omega}(M),\quad \forall M\in\omega^\wedge$.

(c) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(M)=\mathrm{coresdim}_{\omega}(M),\quad \forall M\in\omega^\vee$.

Demostración. Por 6.1.2, tenemos que $\mathcal{B}=\mathcal{A}^\perp[-1]={}_{\mathcal{A}}\mathcal{U}^\perp[-1]$ y $\mathcal{A}={}^\perp\mathcal{B}[1]={}^\perp\mathcal{U}_{\mathcal{B}}[1]$. Por lo tanto, por 5.2.3 se tiene (a). Como $\omega\subseteq\mathcal{U}_{\mathcal{B}}\cap{}^\perp\,\mathcal{U}_{B}[1]=\mathcal{B}\cap\mathcal{A}$ por 5.2.4, tenemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M)=\mathrm{resdim}_\omega(M)$ para $M\in\omega^\wedge$. Luego, por (a), tenemos el inciso (b). Finalmente (c) se sigue del dual de 5.2.4, y del inciso (a). □

El siguiente resultado nos da relaciones entre varias subcategorías asociadas a una co-t-estructura. Además, caracteriza a las co-t-estructuras acotadas por abajo en $\mathcal{T}$. Recordemos que $\omega^\sim:=(\omega^\wedge)^\vee$ para cualquier clase de objetos ω en $\mathcal{T}$.

Teorema 6.2.5 *Sea $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ una co-t-estructura en $\mathcal{T}$ y $\omega:=\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{U}_\omega=\omega^\wedge=\mathcal{A}^\wedge\cap\mathcal{B}$ *y* ${}_\omega\mathcal{U}=\omega^\vee=\mathcal{B}^\vee\cap\mathcal{A}$.

(b) $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega)=\omega^\sim=\{C\in\mathcal{A}^\wedge:\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(C)<\infty\}=\{C\in\mathcal{B}^\vee:\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(C)<\infty\}=\mathcal{A}^\wedge\cap\mathcal{B}^\vee$.

(c) Las siguientes condiciones son equivalentes:

(c1) $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *es acotada por abajo.*

(c2) $\mathcal{B}\subseteq\omega^\sim$.

(c3) $\omega^{\wedge} = \mathcal{B}$.

(c4) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^{\wedge}$.

Demostración.

(a) Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es una co-t-estructura en $\mathcal{T}$, por 6.1.4 tenemos que ω es un cogenerador débil $\mathcal{A}$-inyectivo en $\mathcal{A}$. Por lo tanto, la primera igualdad en (a) se sigue de 5.3.9 pues ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{U}^{\perp}[-1] = \mathcal{B}$. La segunda se puede probar dualizando 5.3.9.

(b) Se sigue de 5.3.16 y su dual.

(c) (c1) $\Rightarrow$ (c3) Sea $\mathcal{A}^{\wedge} = \mathcal{T}$ (ver 6.2.2). Por 6.1.9, tenemos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un contexto de Auslander-Buchweitz en $\mathcal{T}$. Entonces $\mathcal{B} = \omega^{\wedge}$ por 6.1.8.
(c3) $\Rightarrow$ (c2) Supongamos que $\mathcal{B} = \omega^{\wedge}$. Como $\omega^{\wedge} \subseteq \omega^{\sim}$, tenemos que $\mathcal{B} \subseteq \omega^{\sim}$.
(c2) $\Rightarrow$ (c1) Supongamos que $\mathcal{B} \subseteq \omega^{\sim}$. Veamos que $\mathcal{T} = \mathcal{A}^{\wedge}$. En efecto, como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es una co-t-estructura en $\mathcal{T}$, tenemos que $\mathcal{T} = \mathcal{A}[-1] * \mathcal{A}^{\perp}[-1] = (\mathcal{A} * \mathcal{A}^{\perp})[-1]$; y por lo tanto $\mathcal{T} = \mathcal{A} * \mathcal{A}^{\perp}$. Luego, para $C \in \mathcal{T}$ existe un triángulo distinguido $Z[-1] \to A \to C \to Z$ en $\mathcal{T}$ con $A \in \mathcal{A}$ y $Z \in \mathcal{A}^{\perp}$. Pero por (b), tenemos que $Z[-1] \in \mathcal{A}^{\perp}[-1] = \mathcal{B} \subseteq \omega^{\sim} \subseteq \mathcal{A}^{\wedge}$; probándose que $C \in \mathcal{A}^{\wedge}$.
(c3) $\Leftrightarrow$ (c4) Se sigue de la igualdad $\omega^{\wedge} = \mathcal{A}^{\wedge} \cap \mathcal{B}$ (ver (a)). $\square$

Los resultados para co-t-estructuras acotadas por arriba también son válidos. Para dar un ejemplo, damos la caracterización de co-t-estructuras acotadas por arriba.

Observación 6.2.6 *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una co-t-estructura en $\mathcal{T}$ y $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *es acotada por arriba.*

(b) $\mathcal{A} \subseteq \omega^{\sim}$.

(c) $\omega^{\vee} = \mathcal{A}$.

(d) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}^{\vee}$.

Siguiendo la terminología para t-estructuras en categorías trianguladas, y también [17] y [56], damos las siguientes definiciones.

Definición 6.2.7 *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una co-t-estructura en $\mathcal{T}$, y sea $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es* **fiel por abajo** *(respectivamente,* **fiel por arriba***) si $\cup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}[n] = \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega)$ (respectivamente, $\cup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}[n] = \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega)$). Decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es* **fiel** *si es fiel por arriba y por abajo.*

Proposición 6.2.8 *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una co-t-estructura en $\mathcal{T}$, y $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *es fiel por abajo.*

(b) $\mathcal{A}^\wedge = \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega)$.

(c) $\mathcal{A}^\wedge \subseteq \mathcal{B}^\vee$.

(d) $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *es acotada por arriba.*

Demostración.
(a) $\Leftrightarrow$ (b) Se sigue de 5.1.5.
(b) $\Leftrightarrow$ (c) Se sigue de 6.2.5 (b).
(c) $\Leftrightarrow$ (d) Como $\mathcal{B}^\vee$ es una subcategoría triangulada de $\mathcal{T}$, tenemos que $\mathcal{A}^\wedge \subseteq \mathcal{B}^\vee$ es equivalente a la inclusión $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}^\vee$ (ver 5.1.6). Por 6.2.6, tenemos el resultado. $\square$

Corolario 6.2.9 *Sea* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *una co-t-estructura en* $\mathcal{T}$. *Entonces,* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *es acotada si y sólo es fiel.*

Demostración. Se sigue de 6.2.8 y su dual. $\square$

Teorema 6.2.10 *Sea* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *una co-t-estructura acotada en* $\mathcal{T}$ *y sea* $\omega := \mathcal{A}\cap\mathcal{B}$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega) = (\omega^\wedge)^\vee = (\omega^\vee)^\wedge = \mathcal{T}$, $\mathcal{U}_\omega = \omega^\wedge = \mathcal{B}$ *y* ${}_\omega\mathcal{U} = \omega^\vee = \mathcal{A}$.

(b) $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(C) = \mathrm{id}_\omega(C) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(C) < \infty$, $\forall\ C \in \mathcal{T}$.

(c) $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(C) = \mathrm{pd}_\omega(C) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(C) < \infty$, $\forall\ C \in \mathcal{T}$.

(d) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(C) = \mathrm{coresdim}_\omega(C) < \infty$, $\forall\ C \in \mathcal{A}$.

(e) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(C) = \mathrm{resdim}_\omega(C) < \infty$, $\forall\ C \in \mathcal{B}$.

Demostración.

(a) Se sigue de 6.2.9, 6.2.8, 6.2.5 y su dual.

(b) Como $\omega^\sim = \mathcal{T}$ (ver (a)), por 6.2.5 (b) tenemos que $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(C) < \infty$ para toda $C \in \mathcal{T}$. Luego, (b) se sigue de 6.2.4 (a) y 5.3.17(a) pues ω es un conenerador débil $\mathcal{A}$-inyectivo en $\mathcal{A}$ (ver 6.1.4).

(c) Como $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es una co-t-estructura en $\mathcal{A}^\wedge = \mathcal{T}$, por 6.1.4, tenemos que el par $(\mathcal{A},\omega)$ satisface las hipótesis necesitadas en 5.3.6; probándose (c).

(d) y (e) se siguen de 6.2.4 puesto que $\omega^\vee = \mathcal{A}$ y $\omega^\wedge = \mathcal{B}$. $\square$

Ahora haremos una aplicación de 6.2.10 a la dimensión relativa de Rouquier que fue introducida en el capítulo anterior. Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ dos clases de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Consideremos la subcategoría $\langle\mathcal{X}\rangle := \mathrm{add}\,(\cup_{i\in\mathbb{Z}}\,\mathcal{X}[i])$ y sea $\mathcal{X}\diamondsuit\mathcal{Y} := \langle\mathcal{X} * \mathcal{Y}\rangle$. Siguiendo a R. Rouquier en [61], definimos inductivamente $\langle\mathcal{X}\rangle_0 := 0$ y $\langle\mathcal{X}\rangle_n := \langle\mathcal{X}\rangle_{n-1} \diamondsuit \langle\mathcal{X}\rangle$ para $n \geq 1$. Recordemos la siguiente definición.

Definición 6.2.11 *5.4.3 Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada, $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$ y $M \in \mathcal{T}$. La $\mathcal{X}$-**dimensión relativa de Rouquier** de M es*

$$\dim_{\mathcal{X}}(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } M \in \langle \mathcal{X} \rangle_{n+1}\}.$$

Para una clase $\mathcal{Y}$ de objetos en $\mathcal{T}$, definimos $\dim_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \sup\{\dim_{\mathcal{X}}(Y) : \quad Y \in \mathcal{Y}\}$.

Corolario 6.2.12 *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una co-t-estructura acotada en $\mathcal{T}$ y sea $\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Entonces*

(a) $\max\{\dim_{\mathcal{A}}(C), \dim_{\mathcal{B}}(C)\} \leq \dim_{\omega}(C), \quad \forall C \in \mathcal{T}$.

(b) $\dim_{\mathcal{A}}(C) \leq \mathrm{pd}_{\omega}(C) = \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(C) < \infty, \quad \forall C \in \mathcal{T}$.

(c) $\dim_{\mathcal{B}}(C) \leq \mathrm{id}_{\omega}(C) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(C) < \infty, \quad \forall C \in \mathcal{T}$.

(d) $\dim_{\omega}(C) \leq \mathrm{id}_{\omega}(C) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(C) < \infty, \quad \forall C \in \mathcal{A}$.

(e) $\dim_{\omega}(C) \leq \mathrm{pd}_{\omega}(C) = \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(C) < \infty, \quad \forall C \in \mathcal{B}$.

Demostración. Como $\omega = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, (a) se sigue de 5.4.4 (b). Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en $\mathcal{T}$ y $M \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{X} \subseteq \langle \mathcal{X} \rangle$, por 5.4.6 y 5.4.4, tenemos que $\dim_{\mathcal{X}}(M) \leq \max\{\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M), \mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(M)\}$. Luego, el resultado se sigue de 6.2.10. $\square$

Recordemos las siguientes nociones bien conocidas que serán usadas en lo que sigue.

Definición 6.2.13 *Sea ω una clase de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$ y sea $\Omega := \cup_{i \in \mathbb{Z}}\, \omega[i]$. Decimos que ω es un* **cogenerador** *en $\mathcal{T}$, si ${}^{\perp}\Omega = \{0\}$. Dualmente, ω es un* **generador** *en $\mathcal{T}$ si $\Omega^{\perp} = \{0\}$.*

Observación 6.2.14 *Sea ω una clase de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Por inducción y usando la definición de $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega)$, se puede ver que ω es un generador y un cogenerador en la categoría triangulada $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega)$.*

Proposición 6.2.15 *Sea $\mathcal{X} = \mathrm{add}\,(\mathcal{X})$ una subcategoría cosuspendida de $\mathcal{T}$ y sea ω un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$. Entonces, $\cap_{i \in \mathbb{Z}}\, \mathcal{X}[i] = \{0\}$ si y sólo si ω es un cogenerador en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$.*

Demostración. Por 5.1.5, tenemos que $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^{\wedge} = \cup_{n \geq 0}\, \mathcal{X}[n]$.
Afirmamos que $\cap_{i \in \mathbb{Z}}\, \mathcal{X}[i] \subseteq {}^{\perp}\Omega \cap \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$, donde $\Omega := \cup_{i \in \mathbb{Z}}\, \omega[i]$. En efecto, sea $M \in \cap_{i \in \mathbb{Z}}\, \mathcal{X}[i]$ y $j \in \mathbb{Z}$. Entonces $M = X[j-1]$ para algún $X \in \mathcal{X}$, y por lo tanto $\mathrm{Hom}(M, W[j]) \simeq \mathrm{Hom}(X, W[1]) = 0$ para $W \in \omega$, probándose la afirmación.
($\Leftarrow$) Supongamos que ω es un cogenerador en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$. Luego ${}^{\perp}\Omega \cap \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) = \{0\}$ y por la afirmación de arriba se sigue que $\cap_{i \in \mathbb{Z}}\, \mathcal{X}[i] = \{0\}$.
($\Rightarrow$) Supongamos que $\cap_{i \in \mathbb{Z}}\, \mathcal{X}[i] = \{0\}$. Sea $Y \in \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$ un objeto no cero. Veamos que existe un entero ℓ tal que $\mathrm{Hom}(Y, \omega[\ell]) \neq 0$. En efecto, como

$\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) = \cup_{n\geq 0}\,\mathcal{X}[n]$, existe $n \in \mathbb{N}$ con $Y = X[n]$ para algún $X \in \mathcal{X}$. Usando que $X[n] = X[n-i][i]$ y que $\mathcal{X}$ es cosuspendida, obtenemos que $Y \in \mathcal{X}[i]$ para todo $i \geq n$. Por otro lado, como $\cap_{j\in\mathbb{Z}}\,\mathcal{X}[j] = \{0\}$ y $Y \neq 0$, tenemos que existe un $j_0 < n$ tal que $Y \notin \mathcal{X}[j_0]$. Afirmamos que $Y \notin \mathcal{X}[i]$ para $i \leq j_0$. En efecto, sea $i \leq j_0$, como $\mathcal{X}[i] = \mathcal{X}[i-j_0][j_0] \subseteq \mathcal{X}[j_0]$ pues $\mathcal{X}$ es cosuspendida y $Y \notin \mathcal{X}[j_0]$, entonces $Y \notin \mathcal{X}[i]$. Sea $\ell := \min\{s \ : \ j_0 < s \leq n \text{ y } Y \in \mathcal{X}[s]\}$. Por lo tanto tenemos que $Y[-\ell] \in \mathcal{X}$ y entonces como ω es cogenerador débil en $\mathcal{X}$, tenemos que existe un triángulo distinguido $X'[-1] \to Y[-\ell] \xrightarrow{f} W \to X'$ con $X' \in \mathcal{X}$ y $W \in \omega$. Luego, el morfismo $f : Y[-\ell] \to W$ no es cero. En efecto, si $f = 0$, entonces $Y[-\ell]$ sería sumando directo de $X'[-1] \in \mathcal{X}[-1]$, y entonces $Y[-\ell+1] \in \mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ es cerrada por sumandos directos); lo cual es una contradicción pues $Y \notin \mathcal{X}[\ell-1]$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}(Y, W[\ell]) \neq 0$. Probándose que si $Y \neq 0$ entonces $Y \notin {}^{\perp}\omega$. Por lo tanto ${}^{\perp}\omega = 0$. $\square$

Definición 6.2.16 *Sea* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *una co-t-estructura en* $\mathcal{T}$. *Decimos que el par* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *es* **no-degenerada por abajo** *(respectivamente,* **no-degenerada por arriba***) si* $\cap_{i\in\mathbb{Z}}\,\mathcal{A}[i] = \{0\}$ *(respectivamente,* $\cap_{i\in\mathbb{Z}}\,\mathcal{B}[i] = \{0\}$*). Decimos que* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *es* **no-degenerada** *si es no-degenerada por arriba y por abajo.*

Proposición 6.2.17 *Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *una co-t-estructura acotada por abajo en una categoría triangulada* $\mathcal{T}$ *y sea* $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *es no-degenerada por abajo.*

(b) ω *es un cogenerador en* $\mathcal{T}$.

Demostración. Se sigue de 6.2.15, 6.1.4 (a) y 5.1.5 (c). $\square$

Corolario 6.2.18 *Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *una co-t-estructura acotada en una categoría triangulada* $\mathcal{T}$ *y sea* $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *es no-degenerada.*

(b) ω *es un generador y cogenerador en* $\mathcal{T}$.

Demostración. Se sigue de 6.2.17 y su dual. $\square$

Corolario 6.2.19 *Existe una correspondencia biyectiva* $\mathcal{X} \mapsto (\mathcal{X}, \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1])$ *entre las subcategorías cosuspendidas* $\mathcal{X} = \mathrm{add}\,(\mathcal{X})$ *de* $\mathcal{T}$ *tal que* $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1]$ *es un cogenerador débil en* $\mathcal{X}$ *y un cogenerador en* $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$, *y las co-t-estructuras* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *no-degeneradas por abajo de* $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$.

Demostración. Por 6.1.12, las co-t-estructuras $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$ se corresponden biyectivamente con las subcategorías cosuspendidas $\mathcal{X}$ de $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1]$ es un cogenerador débil en $\mathcal{X}$. Luego, el resultado se sigue de 6.2.15 y 6.2.17. $\square$

La relación entre los diferentes tipos de co-t-estructuras es como sigue.

Teorema 6.2.20 *Sea $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ una co-t-estructura en una categoría triangulada $\mathcal{T}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *es acotada.*

(b) $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *es fiel.*

(c) $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *es acotada y no-degenerada.*

(d) $\mathcal{T}=\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$.

Demostración. (a) $\Leftrightarrow$ (b) Se sigue por 6.2.9.
(a) $\Rightarrow$ (c) Supongamos que $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es acotada. Por 6.2.2 y 6.2.8 (b), tenemos que $\mathcal{T}=\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega)$ para $\omega:=\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$; y por 6.2.14, tenemos que ω es un cogenerador y un generatdor en $\mathcal{T}$. Luego, (c) se sigue de 6.2.18.
(c) $\Rightarrow$ (d) Se sigue de 6.2.10 (a).
(d) $\Rightarrow$ (a) Sea $\mathcal{T}=\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$. Luego $\mathcal{T}=\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})=\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{Y})$. Por lo tanto, por 5.1.5 y 5.1.6 tenemos que $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es acotada. $\square$

6.3. Co-t-estructuras y siltings

En esta sección veremos que en muchos casos una co-t-estructura puede ser determinada por una clase silting. También estudiamos la relación entre co-t-estructuras, clases silting y clases inyectivas relativas. Siguiendo a [42], recordamos la noción de clase silting en una categoría triangulada.

Definición 6.3.1 *Sea ω una clase de objetos en $\mathcal{T}$. Decimos que ω es* **silting** *si* $\mathrm{id}_\omega(\omega)=0$.

Denotamos por ${}_\omega\overline{\mathcal{U}}$ (respectivamente, $\overline{\mathcal{U}}_\omega$) a la menor subcategoría cosuspendida (respectivamente, suspendida) de $\mathcal{T}$, cerrada por sumandos directos que contiene a ω.

Observación 6.3.2 *Sea ω una clase de objetos en $\mathcal{T}$. Definimos la sucesión $\{\varepsilon_i^-(\omega)\}_{i\geq 0}$ de clases de objetos en $\mathcal{T}$ como sigue: $\varepsilon_0^-(\omega):=\mathrm{add}\,(\cup_{i\leq 0}\,\omega[i])$ y supongamos que hemos definido $\varepsilon_0^-(\omega),\varepsilon_1^-(\omega),\cdots,\varepsilon_{i-1}^-(\omega)$. Entonces, definimos $\varepsilon_i^-(\omega)$ como la clase de objetos en $\mathcal{T}$, que son sumandos directos de objetos en $\varepsilon_{i-1}^-(\omega)*\varepsilon_0^-(\omega)$. No es difícil ver que ${}_\omega\overline{\mathcal{U}}=\cup_{i\geq 0}\varepsilon_i^-(\omega)$.*

Lema 6.3.3 *Sea $(\mathcal{X},\omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{T}$ tal que $\omega\subseteq\mathcal{X}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $\mathcal{X}$ es cosuspendida y $\mathcal{X}=\mathrm{add}\,(\mathcal{X})$, entonces $\mathcal{X}[-1]*\omega$ es cerrada por sumandos directos.

(b) Si ω es silting y cerrada por sumandos directos, entonces ω es cerrada por extensiones.

Demostración. (a) Supongamos que $\mathcal{X}$ es cosuspendida y cerrada por sumandos directos. Sea $C \in \mathcal{X}[-1] * \omega$. Entonces, existe un triángulo distinguido $X[-1] \to C \overset{f}{\to} W \to X$ donde $X \in \mathcal{X}$ y $W \in \omega$. Sea Z un sumando directo de C, entonces existe un triángulo distinguido $Z \overset{u}{\to} C \to Z' \to Z[1]$, que se escinde. Por el axioma del octahedro, tenemos triángulos distinguidos $\Delta_1 :\ Z \overset{fu}{\to} W \to V \to Z[1]$ y $\Delta_2 :\ Z' \to V \to X \to Z'[1]$. Por hipótesis, tenemos que $\mathcal{X}[-1] * \omega \subseteq \mathcal{X} * \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$; y por lo tanto $C \in \mathcal{X}$, de donde obtenemos que Z y Z' pertenecen a $\mathcal{X}$. Por lo tanto $V \in \mathcal{X}$ (ver Δ_2), y entonces de Δ_1, obtenemos que $Z \in \mathcal{X}[-1] * \omega$.
(b) Supongamos que ω es silting y cerrada por sumandos directos. Sea $\Delta :\ W \to X \to W' \to W[1]$ un triángulo distinguido con $W, W' \in \omega$. Como $\mathrm{id}_\omega(\omega) = 0$, tenemos que el triángulo Δ se escinde; y entonces $X \in \omega$ puesto que ω es cerrada por sumandos directos. $\square$

Proposición 6.3.4 *Sea ω una clase silting en $\mathcal{T}$ tal que* $\mathrm{add}\,(\omega) = \omega$. *Entonces ω es un cogenerador débil ${}_\omega\overline{\mathcal{U}}$-inyectivo en ${}_\omega\overline{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Por 6.3.2, tenemos que ${}_\omega\overline{\mathcal{U}} = \cup_{n\geq 0}\varepsilon_n^-(\omega)$. Luego, basta ver por inducción sobre n que $\varepsilon_n^-(\omega) \subseteq {}_\omega\overline{\mathcal{U}}[-1] * \omega$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\mathrm{add}\,(\omega) = \omega$. En particular, tenemos que $\varepsilon_0^-(\omega) = \oplus_{i\leq 0}\,\omega[i]$, donde la suma directa significa suma directa finita.
Si $X \in \varepsilon_0^-(\omega)$, entonces $X = W' \oplus W$ con $W' \in \oplus_{i<0}\,\omega[i]$ y $W \in \omega$. Luego existe un triángulo distinguido que se escinde $W' \to X \to W \to W'[1]$. Por lo tanto $X \in {}_\omega\overline{\mathcal{U}}[-1] * \omega$.
Sea $n > 1$, y sea $X \in \varepsilon_n^-(\omega)$. Entonces existe un triángulo distinguido $X_{n-1} \to X' \to X_0 \to X_{n-1}[1]$ con $X_0 \in \varepsilon_0^-(\omega)$, $X_{n-1} \in \varepsilon_{n-1}^-(\omega)$ y tal que X es un sumando directo de X'. Para X_0 tenemos un triángulo distinguido que se escinde $W' \to X_0 \overset{f}{\to} W \to W'[1]$, donde $W' \in \oplus_{i<0}\,\omega[i]$ y $W \in \omega$. Por cambio de base, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd}
 & W[-1] \arrow[r, equal] \arrow[d] & W[-1] \arrow[d] & \\
X_{n-1} \arrow[r, "g_3"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "h_3"] \arrow[d] & W' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & X_{n-1}[1] \arrow[d] \\
X_{n-1} \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_{n-1}[1] \\
 & W \arrow[r, equal] & W &
\end{tikzcd}$$

Por inducción existe un triángulo distinguido $U[-1] \overset{\lambda}{\to} X_{n-1} \overset{h}{\to} W'' \overset{\psi}{\to} U$ donde $U \in {}_\omega\overline{\mathcal{U}}$ y $W'' \in \omega$. Luego tenemos el siguiente triángulo distinguido $\eta :\ W'' \overset{\psi}{\longrightarrow} U \overset{-\lambda[1]}{\longrightarrow} X_{n-1}[1] \overset{-h[1]}{\longrightarrow} W''[1]$. Como $\mathrm{Hom}(\oplus_{i<0}\,\omega[i], \omega[1]) = 0$ (ω

es silting) tenemos que el morfismo $-h[1]\theta : W' \longrightarrow W''[1]$ es cero. Por lo tanto, considerando el triángulo η, tenemos un morfismo $\alpha : W' \longrightarrow U$ tal que $-\lambda[1]\alpha = \theta$. Tenemos que el morfismo $\alpha : W' \to U$ puede ser completado a un triángulo distinguido $W' \overset{\alpha}{\to} U \overset{\beta}{\to} V \overset{s}{\to} W'[1]$. Por el axioma del octahedro, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & U \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "-\lambda[1]"] & V \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\rho"] & W'[1] \arrow[d, equal] \\
W' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\alpha"] & X_{n-1}[1] \arrow[r, "-g_3[1]"] \arrow[d, equal] & Y[1] \arrow[r, "-h_3[1]"] \arrow[d, "\zeta"] & W'[1] \arrow[d, "\alpha[1]"] \\
U \arrow[r, "-\lambda[1]"] \arrow[d] & X_{n-1}[1] \arrow[r, "-h[1]"] \arrow[d, "0"] & W''[1] \arrow[r, "-\psi[1]"] \arrow[d, "-\beta[1]\psi[1]"] & U[1] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & V[1] \arrow[r, equal] & V[1] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde los renglones y la tercera columna son triángulos distinguidos. Del triángulo $U[-1] \overset{-\beta[-1]}{\longrightarrow} V[-1] \overset{-s[-1]}{\longrightarrow} W' \overset{\alpha}{\longrightarrow} U$, tenemos que $V[-1] \in {}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}[-1]$ puesto que ${}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}[-1]$ es cerrada por extensiones. Luego, considerando el triángulo distinguido $V[-1] \overset{-\rho[-1]}{\longrightarrow} Y \overset{-\zeta[-1]}{\longrightarrow} W'' \overset{\beta\psi}{\longrightarrow} V$ tenemos que que $Y \in {}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}[-1] * \omega$. Por otro lado, del triángulo $W[-1] \to Y \to X' \overset{g}{\to} W$, tenemos que $X' \in {}_{w}\mathcal{U}[-1] * \omega * \omega$. Pero $\omega * \omega \subseteq \omega$ (ver 6.3.3 (b)), y entonces $X' \in {}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}[-1] * \omega * \omega \subseteq {}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}[-1] * \omega$. Por 6.3.3 (a), concluimos que $X \in {}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}[-1] * \omega$; probándose que ω es un cogenerador débil en ${}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}$.
Finalmente, veamos que ω es ${}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}$-inyectivo. En efecto, como $\mathrm{id}_{\omega}(\omega) = 0$ se sigue de 5.2.2 (a2) que $\omega \subseteq {}_{\omega}\mathcal{U}^{\perp}[-1]$; y como ${}_{\omega}\mathcal{U}^{\perp}[-1] = {}_{\omega\overline{\mathcal{U}}}\mathcal{U}^{\perp}[-1]$, obtenemos por 5.2.2 (a2) que $\mathrm{id}_{{}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}}(\omega) = 0$. $\Box$

El siguiente resultado es muy similar a [17, Theorem 4.3.2(II)], el cual fué probado con diferentes técnicas.

Teorema 6.3.5 *Sea ω una clase silting en $\mathcal{T}$ tal que $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$. Entonces, $\omega = {}_{\omega}\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_{\omega}$ y el par $({}_{\omega}\mathcal{U}, \mathcal{U}_{\omega})$ es una co-t-estructura acotada en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(w)$.*

Demostración. Como $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega) = \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}({}_{\omega}\overline{\mathcal{U}})$, por 5.1.5(c) tenemos que $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega) = {}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}^{\wedge}$. Por otro lado, por 6.3.4 y 6.1.11 (a), tenemos que el par $({}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}, \omega^{\wedge})$ es una co-t-estructura en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}({}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}) = \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega)$ y $\omega = {}_{\omega}\overline{\mathcal{U}} \cap \omega^{\wedge}$. En particular, por 6.2.5 (a), se sigue que $\mathcal{U}_{\omega} = \omega^{\wedge}$ y entonces $\mathcal{U}_{\omega} = \overline{\mathcal{U}}_{\omega}$. Por lo tanto, el par $({}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}, \overline{\mathcal{U}}_{\omega})$ es una co-t-estructura acotada por abajo y fiel por abajo de $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(w)$ y $\omega = {}_{\omega}\overline{\mathcal{U}} \cap \overline{\mathcal{U}}_{\omega}$. Luego, por 6.2.8, se tiene que $({}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}, \overline{\mathcal{U}}_{\omega})$ es acotada en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(w)$. Además, por 6.2.10 (a), obtenemos que ${}_{\omega}\mathcal{U} = {}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}$ y $\mathcal{U}_{\omega} = \overline{\mathcal{U}}_{\omega}$. $\Box$

Observación 6.3.6 *Sea ω una clase silting en $\mathcal{T}$ tal que $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$. Entonces, por 6.3.5, se tiene que ${}_{\omega}\mathcal{U} = {}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}$ and $\mathcal{U}_{\omega} = \overline{\mathcal{U}}_{\omega}$.*

Notación 6.3.7 *Para una categoría triangulada $\mathcal{T}$, introducimos las siguientes clases:*

(a) $\mathbf{S}$ *consiste de todas las clases silting ω de $\mathcal{T}$ tal que* $\mathrm{add}\,(\omega) = \omega$.

(b) $\mathcal{C}_b$ *consiste de todas las co-t-estructuras acotadas $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$.*

Corolario 6.3.8 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada. Entonces, la correspondencia $\varphi : \mathbf{S} \to \mathcal{C}_{\mathbf{b}}$, dada por $\varphi(\omega) := ({}_{\omega}\mathcal{U}, \mathcal{U}_{\omega})$, es biyectiva.*

Demostración. Por 6.3.5, tenemos que $\varphi : \mathbf{S} \to \mathcal{C}_{\mathbf{b}}$ está bien definida y es inyectiva. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en $\mathcal{C}_b$, y consideremos $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una co-t-estructura acotada en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega)$, concluimos por 6.2.10 (a) que $\varphi(\omega) = (\mathcal{X}, \mathcal{Y})$; probándose que φ es suprayectiva. □

Corolario 6.3.9 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada. Entonces, existe una correspondencia biyectiva $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \mapsto \omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, con inversa $\omega \mapsto ({}_{\omega}\mathcal{U}, \mathcal{U}_{\omega})$, entre las co-t-estructuras acotadas $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de $\mathcal{T}$ y las clases silting $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$ tales que $\mathcal{T} = \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega)$.*

Demostración. Se sigue de 6.3.8 y 6.2.20. □

El siguiente resultado caracteriza cuando una subcategoría cosuspendida de $\mathcal{T}$ determina una co-t-estructura acotada en $\mathcal{T}$.

Teorema 6.3.10 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada y $\mathcal{X}$ una subcategoría cosuspendida de $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{X} = \mathrm{add}\,(\mathcal{X})$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) Existe una co-t-estructura acotada $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en $\mathcal{T}$.

(b) $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1]) = \mathcal{T}$.

(c) Existe una clase $\mathcal{X}$-inyectiva $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$ tal que $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega) = \mathcal{T}$ y $\omega \subseteq \mathcal{X}$.

(d) Existe una clase silting $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$ tal que $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega) = \mathcal{T}$ y $\omega \subseteq \mathcal{X} \subseteq \omega^{\vee}$.

Además, si alguna de las condiciones anteriores se satisfacen, tenemos que $\mathcal{X} = {}_{\omega}\mathcal{U} = \omega^{\vee}$, $\mathcal{Y} = \mathcal{U}_{\omega}$ y $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1]$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (d) Supongamos que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una co-t-estructura acotada en $\mathcal{T}$ y sea $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Por 6.3.9, tenemos que $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$ es una clase silting tal que $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega) = \mathcal{T}$. Por otro lado, como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es acotada, se sigue de 6.2.10 (a) que $\mathcal{X} = {}_{\omega}\mathcal{U} = \omega^{\vee}$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{U}_{\omega}$.
(d) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que existe una clase silting ω tal que $\omega \subseteq \mathcal{X} \subseteq \omega^{\vee}$ y $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega) = \mathcal{T}$. Luego, por 6.3.5, tenemos que $({}_{\omega}\mathcal{U}, \mathcal{U}_{\omega})$ es una co-t-estructura acotada en $\mathcal{T}$ y $\omega = {}_{\omega}\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_{\omega}$. En particular, por 6.2.10 (a), tenemos que ${}_{\omega}\mathcal{U} = \omega^{\vee}$. Como $\omega \subseteq \mathcal{X}$, se sigue que ${}_{\omega}\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ y entonces $\mathcal{X} = {}_{\omega}\mathcal{U}$.
(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ acotada. Por 6.2.10 (b), tenemos que $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega) = \mathcal{T}$ donde $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1]$ (ver 6.1.2 (c)).

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{X}^{\perp}[-1])=\mathcal{T}$. Como $\mathcal{X}$ es una subcategoría cosuspendida de $\mathcal{T}$, por 5.2.2 (a2), tenemos que $\omega:=\mathcal{X}\cap\mathcal{X}^{\perp}[-1]$ es $\mathcal{X}$-inyectivo.
(c) $\Rightarrow$ (a) Supongamos las hipótesis de (c). En particular, ω es silting pues $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega)=0$. Luego, por 6.3.5, tenemos que $({}_{\omega}\mathcal{U},\mathcal{U}_{\omega})$ es una co-t-estructura acotada en $\mathcal{T}$ y también que $\omega={}_{\omega}\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_{\omega}$. Además ${}_{\omega}\mathcal{U}\subseteq\mathcal{X}$ puesto $\omega\subseteq\mathcal{X}$. Por otro lado, como $\mathrm{pd}_{\omega}(\mathcal{X})=\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega)=0$, se sigue de 5.2.2 (a1) que $\mathcal{X}\subseteq{}^{\perp}\mathcal{U}_{\omega}[1]={}_{\omega}\mathcal{U}$ (ver 6.1.2 (c)); y entonces $\mathcal{X}={}_{\omega}\mathcal{U}$. $\Box$

6.4. Co-t-estructuras en $D^b(\mathcal{H})$

En toda esta sección, k denotará un campo algebraicamente cerrado y $\mathcal{H}$ una *k-categoría abeliana hereditaria que es Hom-finita, Ext-finita y tiene un objeto inclinante*. Consideraremos la categoría derivada acotada $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ la cual es triangulada y ha sido estudiada ampliamente (ver por ejemplo [34] y [35]).
En esta sección daremos una descripción de las co-t-estructuras acotadas en $\mathcal{T}:=\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. En este caso, los resultados obtenidos toman una forma más completa que en la sección anterior.
En lo que sigue, necesitaremos el siguiente lema. Para detalles, referimos al lector a [1].

Lema 6.4.1 *[1] Sea ω una clase en la categoría triangulada $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) ω es un generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ si y sólo si es un cogenerador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.

(b) Sea ω una clase silting en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Entonces, ω es un generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ si y sólo si $\overline{\Delta}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{H})}(\omega)=\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.

Demostración. (a) Se sigue de [1, Lemma 2.1] puesto que $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ tiene dualidad de Serre.
(b) ($\Leftarrow$) Se sigue de 6.2.14.
($\Rightarrow$) Por [1, Corollary 3.2 (b)], tenemos que para todo complejo $X\in\mathcal{T}$, existe un triángulo $W\to X\to L\to W[1]$ tal que $W\in\overline{\Delta}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{H})}(\omega)$ y $L\in\overline{\Delta}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{H})}(\omega)^{\perp}$. Si ω es un generador entonces $L=0$ y por lo tanto $X\simeq W\in\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega)$, probándose que $\overline{\Delta}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{H})}(\omega)=\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. $\Box$

Proposición 6.4.2 *Sea $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ una co-t-estructura en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es acotada.

(b) $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es no-degenerada por abajo y acotada por abajo.

(c) $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es no-degenerada por arriba y acotada por arriba.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Se sigue de 6.2.20.
(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es no-degenerada por abajo y acotada por

abajo. Por 6.2.17, tenemos que ω es un cogenerador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Por 6.1.4 (a), tene-mos que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es una clase silting. Luego por 6.4.1 y 6.2.20, concluimos que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es acotada.
Finalmente, la equivalencia entre (c) y (a), se prueba de forma similar como para $(a) \Leftrightarrow (b)$. $\square$

El siguiente resultado da una caracterización, en términos de generadores y cogeneradores, de las co-t-estructuras acotadas en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.

Teorema 6.4.3 *Sea $\mathcal{X}$ una subcategoría cosuspendida de $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ tal que $\mathcal{X} = \mathrm{add}\,(\mathcal{X})$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) Existe una co-t-estructura acotada $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.

(b) $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1]$ es un conjunto generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.

(c) Existe una clase $\mathcal{X}$-inyectiva $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$, que es un cogenerador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ y $\omega \subseteq \mathcal{X}$.

Demostración. Como $\mathcal{X}$ es cosuspendida ${}_{\mathcal{X}}\mathcal{U} = \mathcal{X}$ y por 5.2.2 (a2), tenemos que $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1]$ es $\mathcal{X}$-inyectivo; y entonces es una clase silting. Luego, el resultado se sigue de 6.3.10 y 6.4.1. $\square$

Corolario 6.4.4 *Sea $\mathcal{X}$ una subcategoría cosuspendida de $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ tal que $\mathcal{X} = \mathrm{add}(\mathcal{X})$. Si $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1]$ es un conjunto generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$, entonces $\mathcal{X}^{\wedge} = \mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ y $\mathcal{X}$ es una clase precubriente en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.*

Demostración. Se sigue de 6.1.11 (b) y 6.4.3 (a). $\square$

Corolario 6.4.5 *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$, que son cerradas por sumandos directos, tal que $\mathcal{X}$ es cosuspendida. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) ω es un cogenerador débil $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$, $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{X}[i] = \{0\}$ y $\mathcal{X}^{\wedge} = \mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.

(b) $\omega \subseteq \mathcal{X} \subseteq \omega^{\vee}$ y $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$ es un cogenerador silting en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.

(c) $\omega = \mathrm{add}\,(\omega) \subseteq \mathcal{X}$ y ω es un conjunto cogenerador $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.

(d) $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1]$ y ω es un conjunto generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.

Además, si alguna de las condiciones de arriba se satisfacen, tenemos que $\mathcal{X} = {}_{\omega}\mathcal{U} = \omega^{\vee}$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Por 6.1.11 (a) y 5.1.5(b) existe una co-t-estructura acotada por abajo $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ con $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \omega$. Por 6.2.15, tenemos que ω es un conjunto cogenerador en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) = \mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ pues $\mathcal{X}^{\wedge} \subseteq \overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$. Luego por 6.4.1 y 6.2.20, tenemos que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es acotada. Por lo tanto, por 6.2.14 y 6.3.10 (d) tenemos (b).

$(b) \Rightarrow$ (a) Por 6.4.1, tenemos que $\overline{\Delta}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{H})}(\omega) = \mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Luego, la condición (d) en 6.3.10 se satisface. Entonces (a) se sigue de 6.1.11 (a), 6.1.9, 6.2.15 pues $\mathbf{D}^b(\mathcal{H}) = \overline{\Delta}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{H})}(\omega) \subseteq \overline{\Delta}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{H})}(\mathcal{X})$.
$(b) \Leftrightarrow$ (c) Se sigue de 6.4.1, 6.3.10 y 6.4.3.
$(a) \Leftrightarrow$ (d) Se sigue de 6.4.3, 6.1.4 (a), 6.4.1 y 6.2.15. $\square$

Sea ω una clase de objetos en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Decimos que ω es de **tipo finito** si existe un número finito de objetos inescindibles no isomorfos dos a dos $W_1, \cdots, W_n$ en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ que satisfacen que $\mathrm{add}\,(\omega) = \mathrm{add}\,(\{W_1, W_2, \cdots, W_n\})$. En tal caso, definimos $\mathrm{ind}\,(\omega) := \{W_1, W_2, \cdots, W_n\}$ y $\mathrm{rk}\,(\omega) := n$. Denotamos por $\mathrm{rk}\, K_0\,(\mathcal{H})$ al rango del grupo de Grothendieck asociado a $\mathcal{H}$.

Lema 6.4.6 *[1] Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si ω es una clase silting en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$, entonces $\mathrm{rk}\,(\omega) \leq \mathrm{rk}\, K_0\,(\mathcal{H})$.

(b) Sea $\mathcal{Y} = \mathrm{add}\,(\mathcal{Y})$ una subcategoría suspendida y precubriente en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$, y sea $\omega := \mathcal{Y} \cap {}^{\perp}\mathcal{Y}[1]$. Entonces, $\mathrm{rk}\,(\omega) = \mathrm{rk}\, K_0\,(\mathcal{H})$ si y sólo si ω es un generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Además, si este es el caso, tenemos que $\mathcal{Y} = \overline{\mathcal{U}}_{\omega} = \mathcal{U}_{\omega}$.

Demostración. (a) Por 6.3.4, tenemos que ω es ${}_{\omega}\overline{\mathcal{U}}$-inyectivo. Luego, el inciso (a) es sólo el dual [1, Theorem 2.3 (b)].
(b) Esto es [1, Corollary 4.4]. Observemos que la igualdad $\overline{\mathcal{U}}_{\omega} = \mathcal{U}_{\omega}$ se sigue de 6.3.6 $\square$

Teorema 6.4.7 *Existe una correspondencia biyectiva*

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \mapsto \mathcal{Y}, \quad \mathcal{Y} \mapsto \omega := \mathcal{Y} \cap {}^{\perp}\mathcal{Y}[1] \quad \text{y} \quad \omega \mapsto ({}_{\omega}\mathcal{U}, \mathcal{U}_{\omega})$$

entre las siguientes clases:

(a) co-t-estructuras acotadas $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.

(b) subcategorías suspendidas y precubrientes $\mathcal{Y} = \mathrm{add}\,(\mathcal{Y})$ de $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{rk}\,(\mathcal{Y} \cap {}^{\perp}\mathcal{Y}[1]) = \mathrm{rk}\, K_0\,(\mathcal{H})$.

(c) clases silting $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$ en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{rk}\,(\omega) = \mathrm{rk}\, K_0\,(\mathcal{H})$.

Demostración. Por [1, Corollary 4.5] y 6.4.6 (b), tenemos que la correspondencia $\mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Y} \cap {}^{\perp}\mathcal{Y}[1]$ entre las clases de los incisos (b) y (c) es biyectiva con inversa $\omega \mapsto \mathcal{U}_{\omega}$.
Veamos que la correspondencia $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \overset{\alpha}{\mapsto} \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ entre las clases de los incisos (a) y (c) es biyectiva con inversa $\omega \overset{\beta}{\mapsto} ({}_{\omega}\mathcal{U}, \mathcal{U}_{\omega})$. En efecto, sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ una co-t-estructura acotada en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Por 6.3.10 y 6.4.3, tenemos que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es un generador silting en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{U}_{\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}}$. Luego, por [1, Corollary 3.2 (b)], se tiene que $\mathcal{Y}$ es una subcategoría suspendida y precubriente de $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Por lo tanto, por 6.4.6, tenemos que $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = {}^{\perp}\mathcal{Y}[1] \cap \mathcal{Y}$ es silting, $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$ y $\mathrm{rk}\,(\omega) = \mathrm{rk}\, K_0\,(\mathcal{H})$. Además por 6.3.10, concluimos que $\beta\,\alpha(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Sea ω una clase silting tal que $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$ y $\mathrm{rk}\,(\omega) = \mathrm{rk}\,K_0\,(\mathcal{H})$. En particular, por 6.3.5 y 6.2.20 tenemos que $\beta(\omega) = ({}_\omega\mathcal{U}, \mathcal{U}_\omega)$ es una co-t-estructura no-degenerada y acotada en $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega)$ y $\omega = {}_\omega\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_\omega = \alpha\,\beta(\omega)$. Usando la correspondencia biyectiva entre las clases de los incisos (b) y (c), obtenemos que $\mathcal{U}_\omega$ es una subcategoría suspendida y precubriente en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Luego, por 6.4.6, tenemos que ω es un generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$; y por lo tanto $\overline{\Delta}_{\mathcal{T}}(\omega) = \mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ (ver 6.4.1), probándose que $({}_\omega\mathcal{U}, \mathcal{U}_\omega)$ es una co-t-estructura acotada en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Esto es, $\beta(\omega)$ pertenece a la clase del inciso (a). $\square$

Observación 6.4.8 *El inciso* (b) *en 6.4.7 es equivalente al siguiente:*
(b′) *subcategorías suspendidas* $\mathcal{Y} = \mathrm{add}\,(\mathcal{Y})$ *de* $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ *tal que* $\mathrm{rk}\,(\mathcal{Y} \cap {}^\perp\mathcal{Y}[1]) = \mathrm{rk}\,K_0\,(\mathcal{H})$.
Además, si (b′) *se satisface, tenemos que* $\omega := \mathcal{Y} \cap {}^\perp\mathcal{Y}[1]$ *es un conjunto generador en* $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ *y* $\mathcal{Y} = \mathcal{U}_\omega$.

Demostración. Sea $\mathcal{Y} = \mathrm{add}\,(\mathcal{Y})$ una subcategoría suspendida de $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$, y sea $\omega := \mathcal{Y} \cap {}^\perp\mathcal{Y}[1]$ tal que $\mathrm{rk}\,(\omega) = \mathrm{rk}\,K_0\,(\mathcal{H})$. Por 6.4.7 (a), tenemos que $({}_\omega\mathcal{U}, \mathcal{U}_\omega)$ es una co-t-estructura acotada en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ pues ω es silting. Por lo tanto $\overline{\Delta}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{H})}(\omega) = \mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ y ω es un conjunto generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ (ver 6.3.10 y 6.4.1). En particular $(\overline{\Delta}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{H})}(\omega))^\perp = \{0\}$; y entonces por [1, Theorem 4.2 (b)], concluimos que $\mathcal{Y} = \mathcal{U}_\omega$. Finalmente, por [1, Corollary 3.2], tenemos que $\mathcal{Y}$ es precubriente en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. $\square$

Corolario 6.4.9 *Existen correspondencias biyectivas*

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \mapsto \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} \mapsto \omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp[-1] \quad y \quad \omega \mapsto ({}_\omega\mathcal{U}, \mathcal{U}_\omega)$$

entre las siguientes clases:

(a) co-t-estructuras acotadas $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *en* $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.

(b) subcategorías cosuspendidas y preenvolventes $\mathcal{X} = \mathrm{add}\,(\mathcal{X})$ *de* $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ *tal que* $\mathrm{rk}\,(\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp[-1]) = \mathrm{rk}\,K_0\,(\mathcal{H})$.

(c) clases silting $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$ *en* $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ *tal que* $\mathrm{rk}\,(\omega) = \mathrm{rk}\,K_0\,(\mathcal{H})$.

(d) subcategorías cosuspendidas $\mathcal{X} = \mathrm{add}\,(\mathcal{X})$ *de* $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ *tal que* $\mathrm{rk}\,(\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp[-1]) = \mathrm{rk}\,K_0\,(\mathcal{H})$.

Demostración. Sea $\mathcal{T} := \mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Para probar el resultado, usando 6.4.7, 6.4.8 y el principio de dualidad para categorías trianguladas, basta probar la siguiente afirmación: Si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una co-t-estructura acotada en $\mathcal{T}$, entonces $(\mathcal{Y}^{op}, \mathcal{X}^{op})$ lo es en la categoría triangulada opuesta $\mathcal{T}^{op}$. Esta afirmación es cierta pues la noción de ser acotada es auto-dual y $\mathcal{T}^{op} \simeq \mathbf{D}^b(\mathcal{H}^{op})$ donde $\mathcal{H}^{op}$ es una k-categoría abeliana hereditaria que es Hom-finita, Ext-finita y tiene un objeto inclinante (Ver [35, Proposition 1.9]). $\square$

Una bonita consecuencia de 6.4.7 (b) y 6.4.9 (b), es el siguiente corolario, que dice que una co-t-estructura en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ tiene dos t-estructuras asociadas. Para conveniencia del lector recordamos la definición de t-estructura.

Definición 6.4.10 *[13] Un par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de subcategorías en $\mathcal{T}$ es una* t**-estructura** *en $\mathcal{T}$ si las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{A}[1] \subseteq \mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}[-1] \subseteq \mathcal{B}$.

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}[-1]) = 0$.

(c) $\mathcal{T} = \mathcal{A} * \mathcal{B}[-1]$.

Corolario 6.4.11 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ una co-t-estructura acotada en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Entonces, las parejas $({}^{\perp}\mathcal{X}[-1], \mathcal{X})$ y $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^{\perp}[1])$ son t-estructuras en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.*

Demostración. Por 6.4.7 (b) y [42, Proposition 1.3], tenemos que $\mathcal{Y}$ es un aisle en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Entonces $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^{\perp}[1])$ es una t-estructura en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Además, por 6.4.9 (b) y el dual de [42, Proposition 1.3], tenemos que $\mathcal{X}$ es un co-aisle en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$, y por lo tanto $({}^{\perp}\mathcal{X}[-1], \mathcal{X})$ es una t-structura en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. □

Observación 6.4.12 *El resultado anterior, nos dice que una co-t-estructura acotada en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ es adyacente a la izquierda (respectivamente, derecha) a una t-estructura en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ en el sentido de [17].*

Corolario 6.4.13 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ una co-t-estructura acotada en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Entonces $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son funtorialmente finitas en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.*

Demostración. Se sigue de 6.4.7, 6.4.9 y 6.1.2. □

Corolario 6.4.14 *Sea $\omega = \mathrm{add}\,(\omega)$ un silting generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Entonces ${}_{\omega}\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_{\omega}$ son funtorialmente finitas en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$, ${}_{\omega}\mathcal{U}^{\wedge} = \mathbf{D}^b(\mathcal{H}) = \mathcal{U}_{\omega}^{\vee}$ y $\mathrm{rk}\,(\omega) = \mathrm{rk}\,K_0\,(\mathcal{H})$.*

Demostración. Por 6.4.1 (b) y 6.3.5, tenemos que $({}_{\omega}\mathcal{U}, \mathcal{U}_{\omega})$ es una co-t-estructura acotada en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Luego el resultado se sigue de 6.4.13 y 6.4.7 (c). □

Corolario 6.4.15 *Sea ω una clase silting en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Entonces, ω es un generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ si y sólo si $\mathrm{rk}\,(\omega) = \mathrm{rk}\,K_0\,(\mathcal{H})$.*

Demostración. Sea $\omega' := \mathrm{add}\,(\omega)$. Notemos que $\omega' := \mathrm{add}\,(\omega')$ y que ω' es también una clase silting en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.
($\Rightarrow$) Supongamos que ω es un generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$; y entonces ω' lo es. Por 6.4.14, tenemos que $\mathrm{rk}\,(\omega) = \mathrm{rk}\,K_0\,(\mathcal{H})$ puesto que $\mathrm{rk}\,(\omega) = \mathrm{rk}\,(\omega')$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathrm{rk}\,(\omega) = \mathrm{rk}\,K_0\,(\mathcal{H})$. Por lo tanto $\mathrm{rk}\,(\omega') = \mathrm{rk}\,K_0\,(\mathcal{H})$ y de 6.4.7, se sigue que $({}_{\omega'}\mathcal{U}, \mathcal{U}_{\omega'})$ es una co-t-estructura acotada en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Luego por 6.2.8 y 6.2.9, concluimos que $\overline{\Delta}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{H})}(\omega) = \overline{\Delta}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{H})}(\omega') = \mathbf{D}^b(\mathcal{H})$. Entonces ω es un generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ (ver 6.4.1). □

Corolario 6.4.16 *Sea $\mathcal{Y} = \mathrm{add}\,(\mathcal{Y})$ una subcategoría suspendida de $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ y sea $\omega := \mathcal{Y} \cap {}^{\perp}\mathcal{Y}[1]$. Si $\mathrm{rk}\,(\omega) = \mathrm{rk}\,K_0\,(\mathcal{H})$, entonces $\mathcal{Y}$ es funtorialmente finita en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$, $\mathcal{Y} = \mathcal{U}_{\omega}$ y $\mathcal{Y}^{\vee} = \mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.*

Demostración. Sea $\operatorname{rk}(\omega) = \operatorname{rk} K_0(\mathcal{H})$. Por 6.4.8, tenemos que ω es un generador en $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{U}_\omega$. Luego el resultado se sigue de 6.4.14. $\square$

Corolario 6.4.17 *Sea* $\mathcal{X} = \operatorname{add}(\mathcal{X})$ *una subcategoría cosuspendida de* $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$ *y sea* $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}[-1]$. *Si* $\operatorname{rk}(\omega) = \operatorname{rk} K_0(\mathcal{H})$, *entonces* $\mathcal{X}$ *es funtorialmente finita en* $\mathbf{D}^b(\mathcal{H})$, $\mathcal{X} = {}_\omega\mathcal{U}$ *y* $\mathcal{X}^\wedge = \mathbf{D}^b(\mathcal{H})$.

Demostración. Se sigue de 6.4.16 y la discusión dada en la prueba 6.4.9. $\square$

Capítulo 7
Apéndice

7.1. Subfuntores aditivos del $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$

Sea Λ una R-álgebra de artin y $\mathrm{mod}(\Lambda)$ la categoría de Λ-módulos finitamente generados. En este apéndice demostramos que si F es un subfuntor aditivo de $\mathrm{Ext}_\Lambda(-,-)$ entonces necesariamente F es un R-subfuntor en el sentido de 3.6.1.

Recordemos que dos extensiones en $\mathrm{mod}(\Lambda)$; $\xi : 0 \to A \to E \to C \to 0$, $\xi' : 0 \to A \to B \to C \to 0$ son equivalentes si existe un diagrama conmutativo de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
\xi' : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\xi : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Es fácil ver que esto define una relación de equivalencia en la clase de todas la extensiones de A por C. Denotemos por $\mathrm{Ext}_\Lambda(C, A)$ a la clase de clases de equivalencia de extensiones de A por C.

Consideremos una extensión $\xi : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$. Dada una resolución proyectiva $\mathfrak{P}_C$ de C, por el teorema de comparación (ver [60, teorema 6.9]) obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Del diagrama anterior concluimos que $\alpha f_2 = 0$; es decir, $\alpha \in \mathrm{Ker}(f_2^*)$ donde $f_2^* := \mathrm{Hom}_\Lambda(f_2, N)$. Sea $\pi : \mathrm{Ker}(f_2^*) \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_2^*)/\mathrm{Im}(f_1^*) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ donde $f_1^* := \mathrm{Hom}_\Lambda(f_1, N)$. Luego tenemos una asignación $\Psi : \mathrm{Ext}(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ definida por $\Psi(\xi) = \pi(\alpha) = \alpha + \mathrm{Im}(f_1^*)$.

Observación 7.1.1 *Por el lema de comparación, tenemos que si* $\alpha' : P_1 \to A$ *es otro morfismo que hace conmutar el diagrama anterior, entonces* α' *es homotópico a* α. *Es decir, existen* $s_0 : P_0 \longrightarrow A$, $s_1 : P_1 \longrightarrow 0$ *tal que* $\alpha - \alpha' = 0s_1 + s_0 d_1$. *Luego,* $\alpha - \alpha' \in \mathrm{Im}(f_1^*)$. *Por lo tanto* ξ *determina un único elemento en* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$. *También es fácil ver que si* ξ, ξ' *son equivalentes, entonces determinan el mismo elemento en* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$. *Luego, tenemos una función bien definida* $\Psi : E(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$.

Teorema 7.1.2 *El conjunto* $\mathrm{Ext}(C, A)$ *es un grupo abeliano bajo la suma de Baer.*

Demostración. Ver [60]. □

Proposición 7.1.3 *La función* $\Psi : \mathrm{Ext}(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ *es un isomorfismo de grupos abelianos.*

Demostración. Ver [60, 7.21]. □

Consideremos el morfismo $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$ que hace de Λ una R-álgebra de artin. Sea M un Λ módulo, entonces la estructura de R-módulo de M está dada como sigue: para $r \in R$ y $m \in M$ se define $rm := \varphi(r)m$ (se puede ver que si M es finitamente generado como Λ-módulo, también lo es como R-módulo). Como $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{cent}(\Lambda)$ (ver definición de R-álgebra en [5] pag. 26), tenemos que $\lambda(r(m)) = r(\lambda m)$, $\forall r \in R$ y $\lambda \in \Lambda$. Es decir, M tiene estructura de Λ-R-bimódulo.
El siguiente resultado se puede encontrar en [5], pag 20. Pero para beneficio del lector, damos una demostración aqui.

Lema 7.1.4 *Sea* Λ *una* R*-álgebra de artin. Entonces* $\mathrm{Ext}(C, A)$ *es un* R*-módulo,* $\forall\, A, C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Utilizaremos la estructura de Λ-R-bimódulo de C. Para cada $r \in R$, consideremos la función $f_r : C \longrightarrow C$ dada por $f_r(c) := rc\ \forall\, c \in C$. Notemos que f_r es un morfismo de Λ-módulos. En efecto, sea $\lambda \in \Lambda$, entonces $f_r(\lambda c) = r(\lambda c) = \lambda(rc) = \lambda f_r(c)$ donde la penúltima igualdad se da pues C es un Λ-R-bimódulo.
También notemos que si $r_1, r_2 \in \mathrm{R}$ y $c \in C$, entonces $f_{r_1 r_2}(c) = (r_1 r_2)c = f_{r_1} f_{r_2}(c)$. Por lo tanto, $\forall\, r_1, r_2 \in \mathrm{R}$ se tiene que $f_{r_1 r_2} = f_{r_1} f_{r_2}$. Además, como R es conmutativo, tenemos que $f_{r_1 r_2} = f_{r_1} f_{r_2} = f_{r_2} f_{r_1}\ \forall\, r_1, r_2 \in \mathrm{R}$.
Sea $\xi : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ con $\xi \in \mathrm{Ext}(C, A)$. Dado $r \in \mathrm{R}$, consideremos el siguiente diagrama de pullback en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
\xi f_r : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "f_r"] & 0 \\
\xi : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Definamos $r \cdot \xi := \xi f_r =: \mathrm{Ext}(f_r, A)(\xi)$. Veamos que con esto $\mathrm{Ext}(C, A)$ es un R-módulo. Sólo verifiquemos que se cumple que $(r_1 \cdot r_2)\xi = r_1 \cdot (r_2 \cdot \xi)\ \forall\, r_1, r_2 \in \mathrm{R}$ y $\xi \in \mathrm{Ext}(C, A)$; ya que las otras propiedades son análogas. En efecto,

$$\begin{aligned}(r_1 \cdot r_2)\xi = \mathrm{Ext}(f_{r_1 r_2}, A)(\xi) &= \mathrm{Ext}(f_{r_2} f_{r_1}, A)(\xi)\\ &= \mathrm{Ext}(f_{r_1}, A)\big(\mathrm{Ext}(f_{r_2}, A)(\xi)\big)\\ &= r_2 \cdot (r_1 \cdot \xi).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{Ext}(C, A)$ es un R-módulo. $\square$

Lo que nos gustaría es que $\mathrm{Ext}(C, A)$ sea finitamente generado como R-módulo. Para ver esto vamos a darle estructura de R-módulo a $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ y compararlo con la de $\mathrm{Ext}(C, A)$.

Observación 7.1.5 *Sea* $A, B \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *entonces* $A, B \in \mathrm{mod}(R)$. *Para* $r \in R$ *y* $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$ *tenemos que* $f(ra) = rf(a)$, $\forall a \in A$. *Luego podemos definir* rf *por* $rf(a) := rf(a)\ \forall a \in A$. *Se puede ver que esta acción define una estructura de R-módulo sobre* $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ *y que además* $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ *es un R-submódulo de* $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ *(ver [5], pag. 27).*

Lema 7.1.6 *Sea* Λ *una R-álgebra de artin, entonces* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ *es un R-módulo finitamente generado para todo* C, $A \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Consideremos una resolución proyectiva de C

$$\mathfrak{P}_C : \quad \cdots \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} C \xrightarrow{f_{-1}} 0,$$

donde cada $P_i \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Sean $f_2^* := \mathrm{Hom}_\Lambda(f_2, A)$ y $f_1^* := \mathrm{Hom}_\Lambda(f_1, A)$.
Entonces $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A) := \mathrm{Ker}(f_2^*)/\mathrm{Im}(f_1^*)$.
Por 7.1.5, tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, A)$ es un R-módulo. Veamos que $\mathrm{Ker}(f_2^*)$ y $\mathrm{Im}(f_1^*)$ son R-submódulos de $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, A)$. Sea $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, A)$ tal que $g \in \mathrm{Ker}(f_2^*)$, entonces $f_2 g = 0$. Sea $r \in R$, veamos que $rg \in \mathrm{Ker}(f_2^*)$. En efecto, por 7.1.5, tenemos que $rg \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, A)$ y además $(f_2^*(rg))(p) = ((rg)f_2)(p) = r(g(f_2(p))) = 0\ \forall p \in P_1$. Por lo tanto, $f_2^*(rg) = 0$ probándose que $\mathrm{Ker}(f_2^*)$ es un R-submódulo de $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, A)$. Ahora veamos que $\mathrm{Im}(f_1^*)$ es un R-submódulo de $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, A)$. Sea $h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, A)$ tal que $h \in \mathrm{Im}(f_1^*)$. Luego, existe $h' \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0, A)$ tal que $h = h' f_1$. Sea $r \in R$, veamos que $rh \in \mathrm{Im}(f_1^*)$. En efecto, por 7.1.5, tenemos que $rh' \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0, A)$ y además $((rh')f_1)(p) = rh'(f_1(p)) = r(h' f_1(p)) = r(h(p)) = (rh)(p)\ \forall p \in P_1$. Por lo tanto $(rh')f_1 = rh$, es decir, $rh' \in \mathrm{Im}(f_1^*)$. Probándose que $\mathrm{Im}(f_1^*)$ es un R-submódulo de $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_2, A)$. Por [5, prop 1.1] pag. 27; tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, A) \in \mathrm{mod}(R)$. Como R es noetheriano, tenemos que $\mathrm{Ker}(f_2^*)$ y $\mathrm{Im}(f_1^*)$ son R-módulos finitamente generados. Luego, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ es finitamente generado como R-módulo. $\square$

Lema 7.1.7 *Sean* A, $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, *la función* $\Psi : \mathrm{Ext}(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ *es un isomorfismo de R-módulos.*

Demostración. Por 7.1.3, basta ver que $\Psi(r \cdot \xi) = r\Psi(\xi)$ para $r \in R$ y $\xi \in \mathrm{Ext}(C, A)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{P}_C : & P_2 \arrow[r, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha'"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\
\xi' : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f_r"] & 0 \\
\xi : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\Psi(r \cdot \xi) = \alpha' + \mathrm{Im}(f_1^*)$ y el siguiente diagrama es conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha'"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma\beta'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f_r"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, $\Psi(\xi) = \alpha + \mathrm{Im}(f_1^*)$ donde α hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Sea $r \in$ R, por 7.1.5, se tiene que $r\alpha$, $r\beta$, $r1_C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Afirmamos que el siguiente diagrama conmuta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "r\alpha"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "r\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "r1_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En efecto, veamos por ejemplo que $(r\beta)f_1 = j(r\alpha)$. Sea $x \in P_1$, entonces $(j(r\alpha))(x) = j(r\alpha(x)) = j(r(\alpha(x))) = rj(\alpha(x))$ pues $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ es un R-submódulo de $\mathrm{Hom}_R(A, B)$; pero $r(j(\alpha(x))) = r(\beta(f_1(x))) = ((r\beta)f_1)(x)$, con lo cual probamos que $(r\beta)f_1 = j(r\alpha)$. Por otro lado, $f_r = r1_C$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. En efecto, por 7.1.5, tenemos que $r1_C$ es un morfismo de Λ-módulos y además trivialmente $f_r(c) = r1_C(c)$, $\forall c \in C$; por lo tanto $fr = r1_C$ como morfismo de Λ-módulos.

De los diagramas conmutativos anteriores, concluimos que α' y $r\alpha$ forman parte de dos levantamientos del morfismo $f_r = r1_C : C \longrightarrow C$, a dos morfismo de complejos $\mathfrak{P}_C \longrightarrow \xi$. Luego, α' y $r\alpha$ son homotópicos, es decir, existen $s_0 : P_0 \longrightarrow A$, $s_1 : P_1 \longrightarrow 0$ tal que $r\alpha - \alpha' = 0s_1 + s_0 f_1$. Es decir, $r\alpha + \mathrm{Im}(f_1^*) = \alpha' + \mathrm{Im}(f_1^*)$. Probándose que $\Psi(r \cdot \xi) = r\Psi(\xi)$. $\square$

Corolario 7.1.8 *Para A, $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, se tiene que* $\mathrm{Ext}(C, A) \in \mathrm{mod}(R)$.

Lema 7.1.9 *Sea F un subfuntor aditivo de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(-,-)$. *Entonces $F(C, A)$ es un R-submódulo finitamente generado de* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ $\forall\, A, C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Como $F(C, A)$ es un subgrupo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ por la definición de subfuntor aditivo, basta ver que es cerrada por la acción de R. Consideremos el siguiente diagrama de pullback en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
\xi f_r : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "f_r"] & 0 \\
\xi : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por definición $r \cdot \xi := \xi f_r$. Luego, si ξ es F-exacta, tenemos que $r \cdot \xi$ es F-exacta (pues es pullback de una F-exacta). Probándose que $F(C, A)$ es un R-submódulo de $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$. Ahora como R es noetheriano y $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A) \in \mathrm{mod}(\mathrm{R})$, entonces $F(C, A) \in \mathrm{mod}(\mathrm{R})$. $\square$

Bibliografía

[1] I. Assem, M.J. Souto Salorio, S. Trepode. Ext-projectives in suspended subcategories. *J. Pure Appl. Algebra* 212 (2) (2008), 423-434.

[2] M. Auslander. Functors and morphisms determined by objects, in Representation theory of artin algebras, *Proceedings of the Philadelphia conference, Lectures Notes in Pure and Appl. Math.*, Vol. 37, Dekker, New York, (1978), 1-244.

[3] M. Auslander, R.O. Buchweitz. The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations. *Mem. Soc. Math. Fr.(NS)* 38 (1989), 5-37.

[4] M. Auslander, I. Reiten. Applications of contravariantly finite subcategories. *Adv. Math.* 86 (1991), 111-152.

[5] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, Representation Theory of Artin Algebras, *Cambridge Studies in Advance Mathematics*, Vol. 36, Cambridge Univ. Press, New York, (1994).

[6] M. Auslander, S.O. Smalø. Preprojective modules over artin algebras. *Journal of algebra* 66 (1980), 61-122.

[7] M. Auslander, O. Solberg. Relative Homology and Representation theory I, Relative homology and homologically finite subcategories. *Comm. Algebra* 21 (9) (1993), 2995-3031.

[8] M. Auslander, O. Solberg. Relative Homology and Representation theory II, Relative Cotilting Theory .*Comm. Algebra* 21 (9) (1993), 3033-3079.

[9] M. Auslander, I. Reiten. Homologically finite subcategories. *Proceedings of the ICRA V*, Tsukuba Japan.

[10] I. Ágoston, V. Dlab, E Lukács. Stratified algebras. *C.R.Math. Rep. Acad. Sci. Canada* 20(1) (1998), 22-28.

[11] I. Ágoston, D. Happel, E. Lukács and L. Unger. Standardly Stratified Algebras and Tilting. *Journal of algebra* 226 (2000), 144-160.

[12] M. Barr. Exact categories. *Lectures Notes in Mathematics*, Vol. 236, Springer, (1973).

[13] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne. Faisceaux pervers. *Asterisque* 100 (1982), 5-171.

[14] A. Beligiannis. The Homological Theory of Contravariantly Finite Subcategories: Auslander-Buchweitz contexts, Gorensteins categories and (co)-stabilization. *Comm. Algebra* 28(10) (2000), 4547-4596

[15] A. Beligiannis. Relative Homological algebra and Purity in triangulated categories.*J. Algebra* 227 (2000), 268-361.

[16] A. Beligiannis, I. Reiten. Homological and homotopical aspects of torsion theories. *Mem. Amer. Math. Soc.* 188 (2007) no. 883, viii+207 pp.

[17] M. V. Bondarko. Weight structures for triangulated categories: weight filtrations, weight spectral sequences and weight complexes, applications to motives and to the stable homotopy category. *Preprint available at* http://arxiv.org/abs/0704.4003v1

[18] M. V. Bondarko. Weight structures vs. t-structures; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives an in general). *J. K-Theory* 6 (2010), 387-504.

[19] A. B. Buan, I. Reiten, H. Thomas. Three kinds of mutation. *Journal of Algebra* 339 (2011), 97-113.

[20] A. B. Buan. Subcategories of the derived category and cotilting complexes. *Colloq. Math.* 88 (1) (2001), 1-11.

[21] D. A. Buchsbaum. A note on homology in categories. *Ann. of Math* 69 (2) (1959), 66-74.

[22] T. Bühler. Exact Categories. *Expo. Math* 28 (2010), 1-69.

[23] M. C. R. Butler, G. Horrocks. Classes of extensions and resolutions, *Phill, Trans Royal Soc. London Ser. A*, 254 (1961), 155-222.

[24] S. Dickson. A torsion theory for abelian categories. *Trans. Amer. Math. Soc.* 121 (1966), 223-35.

[25] V. Dlab, M. C. Ringel. The module Theoretical Approach to Quasi-hereditary algebras. *Rep. Theory and Related Topics, London Math. Soc. LNS* 168 (1992), 200-224.

[26] V. Dlab, M. C. Ringel. Quasi-hereditary Algebras. *Illinois J. Math.* 33 (1989), 280-291.

[27] P. Draxler, I. Reiten, S. Smalo, O. Solberg. Exact Categories and Vector Espaces. *Trans. of the Amer. Math Soc.* 351 (1999), 647-682.

[28] K. Erdmann, C. Sáenz. On standardly stratified algebras. *Comm. Algebra* 31 (7) (2003), 3429-3446.

[29] E. Enochs. Injective and flat covers, envelopes and resolvents. *Israel J. Math.* 39 (1981), 189-209.

[30] P. Freyd. Relative Homological algebra made absolute. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 49 (1963), 19-29.

[31] P. Gabriel. Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* 90 (1962), 323-448.

[32] S. I. G. Manin, Yu. I. Manin. Methods of homological algebra. *Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag*, Berlin.

[33] R. Göbel, J. Trlifaj. Approximations and Endomorphism Algebras of Modules. *De Gruyter Expositions in Math*, 2006.

[34] D. Happel. Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras. *LMS, Series* 119, *Cambridge University Press* (1988).

[35] D. Happel, I. Reiten. Hereditary categories with tilting objects. *Math. Z.* 232 (1999), 559-588.

[36] G. Hochschild. Relative homological algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.* 82 (1956), 246-269.

[37] M. Hashimoto. Auslander-Buchweitz approximations of equivariant modules. *LMS, Lecture Notes Series* 282 (2000) *Cambridge University Press.*

[38] A. Heller. Homological algebra in abelian categories. *Ann. of Math* 68 (2) (1958), 484-525.

[39] P. Hilton, Stammbach U. A Course in Homological Algebra. *Graduate Texts in Math,.4, Springer Verlag, Berling-Heidelberg-New York*, 1971.

[40] O. Iyama, Y. Yoshino. Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules. *Invent. math.* 172 (2008), 117-168.

[41] B. Keller, I. Reiten. Cluster tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau. *Adv. Math.* 211 (1) (2007), 123-151.

[42] B. Keller, D. Vossieck. Aisles in derived categories. *Bull. Soc. Math. Belg.* 40 (1988), 239-253.

[43] B. Keller. Chain Complexes and Stable Categories.*Manus. Math* 67 (1990), 379-417.

[44] H. Krause. Krull-Remak-Schmitd categories and projective covers. *Homepage of Krause*

[45] G. Laumon. Sur la catégorie dérivée des D-modules filtrés. *Algebraic Geometry (Tokio/Kyoto,1982)*, *Lectures Notes in Math.*, Vol. 1016, Springer, Berling, (1983), 151-237.

[46] S. Mac Lane. Homology. *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd.* 114, Academic Press Inc., Publishers, New York, (1963).

[47] E. Marcos, O. Mendoza, C. Sáenz. Stratifying systems via relative simple modules. *J. Algebra* 280 (2004), 472-487.

[48] E. Marcos, O. Mendoza, C. Sáenz. Stratifying systems via relative projective modules. *Comm. Algebra* 33 (2005), 1559-1573.

[49] L.A. Hügel, O. Mendoza. Homological dimensions in cotorsion pairs. III. *J. Math.* 53(1) (2009), 251-263.

[50] O. Mendoza, C. Saénz. Tilting categories with applications to stratifying systems. *Journal of Algebra* 302 (2006), 419-449.

[51] O. Mendoza, C. Saénz, V. Santiago, M. J. Souto Salorio. Auslander-Buchweitz approximation theory for triangulated categories. *Applied Categorical Structures.* doi:10.1007/s10485-011-9261-4. (2011)

[52] O. Mendoza, C. Saénz, V. Santiago, M. J. Souto Salorio. Auslander-Buchweitz context and Co-t-structures. *Applied Categorical Structures.* doi. 10.1007/s10485-011-9271-2. (2011)

[53] O. Mendoza, C. Saénz, C. Xi. Homological systems in module categories over preordered sets. *Quart. J. Math.* 60 (2009), 75-103.

[54] T. Miayshita. Tilting modules of finite projective dimension. *Math. Z.* 193 (1986), 113-146.

[55] B. Mitchell. Theory of categories. *Columbia University, New York*, (1964).

[56] D. Pauksztello. Compact corigid objects in triangulated categories and co-t-structures. *Cent. Eur. J. Math.* 6 (1) (2008), 25-42.

[57] B. Parshall, L.L. Scott. Derived categories, quasi-hereditary algebras and algebraic groups. *Proc. of the Ottawa-Moosone Workshop in algebra* (1987), *Math. Lect. Note Series*, Carleton University and Universite d'Ottawa (1988).

[58] D. Quillen. Higher Algebraic K-theory I. *Springer LNM* 341 (1973), 85-147.

[59] C. M. Ringel. The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences. *Math. Z.* 208 (1991), 209-223.

[60] J. Rotman. An Introduction to Homological Algebra. *Academic Press, Inc*, Illinois, (1979).

[61] R. Rouquier. Dimension of triangulated categories. *K-Theory* 1 (2008), 193-256.

[62] J. Wei, C. Xi. A Characterization of the tilting pair. *Journal of algebra* 317 (2007), 376-391.

[63] C. Weibel. An Introduction to Homological Algebra. *Cambridge Studies in Advanced Mathemathics*. Vol 38. *Cambridge University Press*, Cambridge, (1994).

[64] X. W. Chen. Extensions of covariantly finite subcategories. *Archiv der Mathematik* (2009), 29-35.

[65] X. W. Chen, Y. Ye, P. Zhang. Algebras of derived dimension cero. *Comm. Algebra* 36 (7) (2008), 1-10.

[66] N. Yoneda. On Ext and exact sequences. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.* I 8 (1960), 507-576.

Índice alfabético