UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

NOMBRE DE LA TESIS
EL MÉTODO VARIACIONAL DE NEHARI GENERALIZADO

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

JULIAN FERNANDO CHAGOYA SALDAÑA

DIRECTOR DE LA TESIS: DOCTOR NILS HEYE ACKERMANN

MÉXICO, D.F. ABRIL, 2011

Quiero agradecer a mi asesor de tesis, el doctor Nils Ackermann, por toda su ayuda en la elaboración de esta tesis, así como a mis sinodales por las correcciones que hicieron a esta. También quiero agradecer el apoyo recibido mediante el Proyecto UNAM-DGAPA PAPIIT IN101209 y al Proyecto Conacyt 129847.

Índice general

1. Introducción **3**

2. El producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ **8**

3. Lemas técnicos **26**

4. Demostración del Teorema 1.1 **34**

Bibliografía **50**

1 Introducción

En los artículos [3], [4], publicados respectivamente en 1960 y 1961, Zeev Nehari ideó un método para buscar una solución de cierta ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal demostrando que esta minimizaba a un funcional, asociado a dicha ecuación, sobre una variedad diferenciable contenida en el espacio de funciones. Esta idea fue trasladada con éxito a otros problemas, estableciendo así las ahora llamadas variedades de Nehari.

De acuerdo con [8] la situación abstracta en la cual suele definirse una variedad de Nehari puede delinearse de la siguiente manera: Sea B un espacio de Banach real y $\Phi \in C^1(B, \mathbb{R})$ un funcional del cual estamos interesados en encontrar sus puntos críticos. Supongamos que $u \neq 0$ es un punto crítico no trivial de Φ. Entonces u debe estar contenido en el conjunto

$$\mathcal{N} := \{u \in B \setminus \{0\} : \Phi'(u)u = 0\}.$$

El conjunto $\mathcal{N}$ recibe el nombre de variedad de Nehari, aún cuando no en todos los casos resulte ser una variedad. Cuando las hipótesis son adecuadas uno puede encontrar que existe una función u que minimiza a Φ sobre $\mathcal{N}$ y, más aún, que esta función es un punto crítico del funcional considerado sobre todo el espacio de funciones.

Para la situación que nos concierne en este trabajo no será esta variedad de Nehari la que utilizaremos, pues una hipótesis que suele incluirse en este planteamiento abstracto es que $u = 0$ sea un mínimo local del funcional Φ, lo cual no es un hecho que podamos dar por sentado para la ecuación periódica no lineal de Schrödinger, ya que para esta ecuación se da el caso en que $u = 0$ no es un mínimo sino un punto silla. Para abordar esta situación Pankov introdujo en [5] una generalización de la variedad de Nehari, la cual se retomará en este trabajo.

Para definir la variedad generalizada de Nehari que utilizaremos comencemos por precisar la ecuación con la cual trabajaremos. Ésta es la ecuación semilineal estacionaria de Schrödinger, la cual está dada por

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u) \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{1.1}$$

donde definimos $H^1(\mathbb{R}^N)$, y en general $H^k(\mathbb{R}^N)$ para toda $k \in \mathbb{N}$ como el espacio de Hilbert de todas las $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ localmente sumables tales que para todo multi-índice $0 \leq |\alpha| \leq k, D^\alpha$ existe en el sentido débil y pertenece a $L^2(\mathbb{R}^N)$. El producto interior lo definimos como

$$\langle u, v\rangle_{H^k} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2}.$$

Más adelante veremos que tiene sentido hablar del operador $-\Delta + V$ sobre $H^2(\mathbb{R}^N)$ definiéndolo como una extensión autoadjunta del operador $-\Delta + V$ sobre $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, y que esta extensión es acotada por debajo.

Definamos $F(x,u) := \int_0^u f(x,s)ds$. A lo largo del trabajo supondremos que se cumplen las siguientes condiciones:

(S_1) V es continua, 1-periódica en $x_1, \ldots, x_N$ y $0 \notin \sigma(-\Delta + V)$, el espectro de $-\Delta + V$.

(S_2) f es continua , 1-periódica en $x_1, \ldots, x_N$ y $|f(x,u)| \leq a(1 + |u|^{p-1})$ para algún $a > 0$ y $p \in (2, 2^*)$, donde $2^* := 2N/(N-2)$ si $N \geq 3$ y $2^* := +\infty$ si $N = 1$ ó 2.

(S_3) $f(x,u) = o(u)$ uniformemente en x cuando $|u| \to 0$.

(S_4) $F(x,u)/u^2 \to \infty$ uniformemente en x cuando $|u| \to \infty$.

(S_5) $u \mapsto f(x,u)/|u|$ es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

Utilizando las hipótesis sobre V, f y auxiliándonos de [10, Lema 3.10] vemos que

$$\Phi \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}), \quad \Phi(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx. \tag{1.2}$$

Notemos que

$$\Phi'(u)[h] = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla h + V(x)uh)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u)hdx \tag{1.3}$$

por lo cual los puntos críticos de Φ son por definición (ver por ejemplo [2]) soluciones débiles de (1.1).

Las condiciones que mediante las hipótesis estamos imponiendo a nuestra ecuación no son demasiado restrictivas, de hecho debilitan aquéllas requeridas por Pankov en [5]. En primer lugar no pedimos a f que sea C^1 sino sólo que sea continua. Además, las hipótesis $(S_4), (S_5)$ sustituyen una condición más fuerte de tipo Ambrosetti-Rabinowitz que suele ser pedida, ésta es

$$0 < \eta F(x,u) \leq f(x,u)u \quad \text{para algún} \quad \eta > 2 \quad \text{y para toda} \quad u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R}^N.$$

Las hipótesis consideradas por Pankov eran ya lo suficientemente generales para describir el comportamiento de algunos fenómenos físicos y él, de hecho, incluye en el artículo mencionado una aplicación a la teoría de los cristales fotónicos.

Utilizando (S_1) definiremos sobre $H^1(\mathbb{R}^N)$ un producto interior equivalente $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ y subespacios E^+, E^- cerrados tales que $H^1(\mathbb{R}^N) = E^+ \oplus E^-$ y

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|_E^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|_E^2 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx, \tag{1.4}$$

$$\Phi'(u)[h] = \langle u^+, h\rangle_E - \langle u^-, h\rangle_E - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u)hdx, \tag{1.5}$$

donde u^+, u^- son las componentes de u en los espacios E^+, E^-. Las expresiones (1.4) y (1.5) nos serán de gran ayuda al demostrar los resultados que veremos.

Definiremos ahora la variedad de Nehari generalizada, tal como fue introducida por Pankov en [5]:

$$\mathcal{M} := \{u \in E \setminus E^- : \Phi'(u)u = 0 \quad \text{y} \quad \Phi'(u)v = 0 \quad \text{para toda} \quad v \in E^-\}. \tag{1.6}$$

Notemos que si $u \in E^- \setminus \{0\}$ entonces $\Phi'(u)u = -\|u^-\|^2 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u)udx < 0$ así que, por definición, $\mathcal{M}$ contiene a todos los puntos críticos no triviales de Φ, tal como sucede con las variedades de Nehari definidas al principio. Nuestro resultado principal es el siguiente:

1.1 Teorema. *Suponga que se cumplen* $(S_1) - (S_5)$ *y defina* $c := \inf_{u \in \mathcal{M}} \Phi(u)$. *Entonces* c *se alcanza,* $c > 0$, *y si* $u_0 \in \mathcal{M}$ *satisface* $\Phi(u_0) = c$, *entonces* u_0 *es una solución débil de* (1.1).

Para demostrar este resultado consideraremos para cada $u \in E \setminus E^-$ los siguientes conjuntos:

$$E(u) := E^- \oplus \mathbb{R}u = E^- \oplus \mathbb{R}u^+ \tag{1.7}$$

y el subconjunto convexo:

$$\widehat{E}(u) := E^- + \mathbb{R}^+ u = E^- + \mathbb{R}^+ u^+ \tag{1.8}$$

donde, como es usual, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

El obstáculo más importante que debemos afrontar para obtener el Teorema 1.1 es que al suponer sólo continuidad para f no podemos asegurar que $\mathcal{M}$ sea una variedad C^1, por lo cual no podemos valernos del principio variacional de Ekeland, el cual juega un papel clave en la técnica utilizada por Pankov en [5]. Para sortear esto Szulkin y Weth han desarrollado el siguiente método en el artículo [7] que ahora esbozaremos.

Demostraremos primero que para toda $u \in E \setminus E^-$ el conjunto $\mathcal{M}$ intersecta a $\widehat{E}(u)$ en exactamente un punto, el cual resulta ser el máximo global único de $\Phi|_{\widehat{E}(u)}$. Denotaremos a este punto por $\widehat{m}(u)$. Lo siguiente será demostrar que la función dada por $u \to \widehat{m}(u)$ es continua y, más aún, que la restricción de $\widehat{m}$ a S^+, la esfera unidad en E^+, define un homeomorfismo entre S^+ y $\mathcal{M}$.

El paso que daremos a continuación es, tal como se enfatiza en el artículo [7], una pieza fundamental en el método que estamos siguiendo: veremos, aplicando el teorema del valor medio, que a pesar de que $\widehat{m}$ no es necesariamente diferenciable, la composición $\Phi \circ \widehat{m} : S^+ \to \mathbb{R}$ sí resulta serlo. Dado esto y que S^+ es una variedad diferenciable seremos capaces de recurrir al principio variacional de Ekeland, pues como veremos ya cerca del final de la tesis los puntos críticos de $\Phi \circ \widehat{m}$ se corresponden 1-1 con los puntos críticos no triviales de Φ.

El desarrollo de este trabajo se ha dividido en los tres capítulos siguientes de esta forma:

en el capítulo 2 demostraremos la existencia de la extensión autoadjunta de $-\Delta + V$, y además, apoyándonos en buena medida en la hipótesis (S_1), demostraremos la existencia y algunas propiedades del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$. El capítulo 3 lo dedicaremos a establecer algunos lemas técnicos que nos serán de ayuda más adelante, y que se refieren en su mayor parte a propiedades de f y F, derivadas de las hipótesis $(S_2) - (S_5)$. Por último, en el capítulo 4 se presentará el desarrollo del método seguido por Szulkin y Weth que hemos esbozado anteriormente.

2 El producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$

Denotemos por $L^2(\mathbb{R}^N)$ al espacio de Hilbert de las funciones reales cuadrado-integrables y definamos el operador

$$T : C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N), \quad Tu = -\Delta u + Vu,$$

donde Δ representa al Laplaciano definido sobre $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Veremos que T tiene una extensión autoadjunta $L : H^2(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, a partir de la cual definiremos un operador $|L|^{\frac{1}{2}} : H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ utilizando el cálculo funcional para operadores autoadjuntos no acotados. Los resultados mediante los cuales haremos esto suelen enunciarse sólo para espacios de Hilbert complejos, mencionando que es posible demostrarlos para espacios de Hilbert reales auxiliándose de un proceso de complejificación por lo cual comenzaremos por introducir este concepto.

Si H es un espacio de Hilbert real definimos su complejificación como el espacio complejo $H_{\mathbb{C}} = H \times H$ con la suma dada por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

la multiplicación escalar

$$(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x),$$

y el producto interno

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle - i\langle x_1, y_2\rangle + i\langle y_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle,$$

de manera que

$$\|(x,y)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Observemos que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ si y sólo si $x_n \to x$ y $y_n \to y$.
Definimos también la complejificación de un operador A en H como

$$A_{\mathbb{C}} : D(A) \times D(A) \subset H_{\mathbb{C}} \to H_{\mathbb{C}}, \quad A_{\mathbb{C}}(x,y) = (Ax, Ay).$$

Se verifica directamente de estas definiciones que $H_{\mathbb{C}}$ es un espacio de Hilbert complejo y que $A_{\mathbb{C}}$ es un operador en $H_{\mathbb{C}}$. También directamente de las definiciones se verifica que $L^2(\mathbb{R}^N)_{\mathbb{C}}$ se identifica como espacio de Hilbert con el espacio de las funciones complejas cuadrado-integrables, y resultados similares para las complejificaciones de $H^2(\mathbb{R}^N)$ y $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. El resto de las propiedades de la complejificación que ocuparemos las enunciaremos en el siguiente lema.

2.1 Lema. *Sea H un espacio de Hilbert real y A un operador en H.*

(a) $A_1 = A_2 \iff (A_1)_{\mathbb{C}} = (A_2)_{\mathbb{C}}$.

(b) *A es cerrable $\iff$ $A_{\mathbb{C}}$ es cerrable.*

(c) *Si A es cerrable entonces $\overline{A_{\mathbb{C}}} = (\overline{A})_{\mathbb{C}}$.*

(d) $(A^*)_{\mathbb{C}} = (A_{\mathbb{C}})^*$.

(e) *A es esencialmente autoadjunto $\iff$ $A_{\mathbb{C}}$ es esencialmente autoadjunto.*

(f) *En el caso en que A es autoadjunto se cumple que A es acotado por debajo $\iff$ $A_{\mathbb{C}}$ es acotado por debajo.*

Demostración.

(a) Esto se obtiene directamente de las definiciones.

(b) A cerrable $\Rightarrow A_{\mathbb{C}}$ cerrable se obtiene de manera natural de las definiciones, demostremos la implicación contraria: sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones tales que $x_n \to x, y_n \to x, A(x_n) \to w_1$ y $A(y_n) \to w_2$ en H. Esto implica que $(x_n, 0) \to (x, 0), \quad (y_n, 0) \to (x, 0), \quad A_{\mathbb{C}}(x_n, 0) \to (w_1, 0)$ y $A_{\mathbb{C}}(y_n, 0) \to (w_2, 0)$ en $H_{\mathbb{C}}$. Como $A_{\mathbb{C}}$ es cerrable se sigue que $w_1 = w_2$ y de aquí que existe $\overline{A}$.

(c) Se sigue de las definiciones.

(d) $\mathscr{D}((A^*)_{\mathbb{C}}) \subset \mathscr{D}((A_{\mathbb{C}})^*)$ se sigue de las definiciones. Para demostrar la contención contraria supongamos que $(x, y) \in \mathscr{D}((A_{\mathbb{C}})^*)$ y sea $(A_{\mathbb{C}})^*(x, y) = (w_1, w_2)$. Tenemos para toda $(u, v) \in \mathscr{D}(A_{\mathbb{C}})$

$$\langle (Au, Av), (x, y) \rangle = \langle A_{\mathbb{C}}(u, v), (x, y) \rangle = \langle (u, v), (w_1, w_2) \rangle.$$

Haciendo $v = 0$ y utilizando la definición del producto interno en $H_{\mathbb{C}}$ vemos que

$$\langle Au, x \rangle - i \langle Au, y \rangle = \langle u, w_1 \rangle - i \langle u, w_2 \rangle \quad \text{para toda} \quad u \in \mathscr{D}(A).$$

Igualando las partes real e imaginaria de esta ecuación obtenemos que $x, y \in \mathscr{D}(A^*)$ y de aquí que $(x, y) \in \mathscr{D}((A^*)_{\mathbb{C}})$. Más aún, hemos obtenido que $(A_{\mathbb{C}})^*(x, y) = (A^*x, A^*y) = (A^*)_{\mathbb{C}}(x, y)$ para toda $(x, y) \in \mathscr{D}((A_{\mathbb{C}})^*)$, lo cual concluye la demostración de este inciso.

(e) Para este resultado haremos uso de los incisos anteriores. Si A es esencialmente autoadjunto entonces

$$(\overline{A_{\mathbb{C}}})^* = (\overline{A}_{\mathbb{C}})^* = (\overline{A}^*)_{\mathbb{C}} = (\overline{A})_{\mathbb{C}} = \overline{A_{\mathbb{C}}}.$$

Por otro lado, si $A_{\mathbb{C}}$ es esencialmente autoadjunto tenemos

$$\overline{A}_{\mathbb{C}} = \overline{A_{\mathbb{C}}} = (\overline{A_{\mathbb{C}}})^* = (\overline{A}_{\mathbb{C}})^* = (\overline{A}^*)_{\mathbb{C}} \Rightarrow \overline{A} = \overline{A}^*.$$

(f) También se sigue de las definiciones.

$\square$

Volviendo al operador T que definimos al inicio de este capítulo tenemos que [9, pag. 306, ejemplo 1] y [9, Teorema 10.22] implican que $T_{\mathbb{C}}$ es esencialmente autoadjunto, $\mathscr{D}(\overline{T_{\mathbb{C}}}) = H^2(\mathbb{R}^N)_{\mathbb{C}}$ y $\overline{T_{\mathbb{C}}}$ es acotado por debajo. Este hecho y el Lema 2.1 demuestran nuestra primera Proposición.

2.2 Proposición. *T es esencialmente autoadjunto, $\mathscr{D}(\overline{T}) = H^2(\mathbb{R}^N)$ y $\overline{T}$ es acotado por debajo.*

El hecho de que la extensión autoadjunta de T sea precisamente su cerradura nos permite obtener una relación entre $\overline{T}$ y la derivada débil que utilizaremos más adelante.

2.3 Lema. *Para toda $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ se cumple $\overline{T}u = -\sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 u + Vu$, donde la derivada se considera en el sentido débil.*

Demostración. Utilizando de nuevo [9, pag. 306, ejemplo 1] y [9, Teorema 10.22], vemos que $\overline{-\Delta}$ es autoadjunto y que $\mathscr{D}(\overline{-\Delta} + V) = \mathscr{D}(\overline{-\Delta}) = H^2(\mathbb{R}^N) = \mathscr{D}(\overline{T})$. Supongamos ahora que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ y sea $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{T}u, w\rangle_{L^2} &= \langle u, \overline{T}w\rangle_{L^2} \\
&= \langle u, Tw\rangle_{L^2} \\
&= \langle u, -\Delta w\rangle_{L^2} + \langle u, Vw\rangle_{L^2} \\
&= \langle u, \overline{-\Delta} w\rangle_{L^2} + \langle u, Vw\rangle_{L^2} \\
&= \langle \overline{-\Delta} u, w\rangle_{L^2} + \langle Vu, w\rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Observemos que por ser $\overline{-\Delta}$ autoadjunto y por la definición de la derivada débil se tiene

$$\langle \overline{-\Delta} u, w\rangle_{L^2} = \langle u, -\Delta w\rangle_{L^2} = \langle -\sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 u, w\rangle_{L^2},$$

lo cual junto a la cadena de igualdades de arriba implica que $\langle \overline{T}u, w\rangle_{L^2} = \langle -\sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 u + Vu, w\rangle_{L^2}$. Sólo resta utilizar la densidad de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ para concluir la demostración del Lema. $\square$

Para simplificar la notación en lo que sigue fijemos $L := \overline{T}$. Enunciaremos ahora los resultados de teoría espectral para espacios de Hilbert reales que utilizaremos para definir el operador $|L|^{\frac{1}{2}}$. Sólo daremos aquí la demostración de una parte de uno de estos lemas pues el resto puede demostrarse de manera similar a [6, Teorema 13.24, Teorema 13.30, Teorema 13.33], siendo la diferencia que ahora debemos apoyarnos en la versión para espacios de Hilbert reales del teorema espectral para operadores acotados, el cual a su vez se apoya en la teoría espectral para espacios de Banach así que daremos como referencia el artículo [1], el cual aborda este tema.

Definamos para toda $x, y \in H$ y toda resolución de la identidad R^A la medida $R^A_{x,y}$ dada por

$$R^A_{x,y}(\omega) = \langle R^A(\omega)x, y\rangle$$

para todo conjunto de Borel ω.

2.4 Lema. *Para cada operador autoadjunto A en un espacio de Hilbert real H existe una única resolución de la identidad R^A, definida sobre los conjuntos de Borel de la recta real, tal que $R^A(\sigma(A)) = I$ y*

$$\langle Ax, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t dR^A_{x,y}(t) \quad \textit{para toda} \quad x \in \mathscr{D}(A), y \in H. \tag{2.1}$$

Además, si para $x \in H$ existe $z \in H$ tal que

$$\langle z, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t dR^A_{x,y}(t) \quad \textit{para toda} \quad y \in H \tag{2.2}$$

tenemos que $x \in \mathscr{D}(A)$ y $Ax = z$.

Demostración. Supongamos que x y z cumplen (2.2) y que $x \notin \mathscr{D}(A)$. Definamos el operador $B : \mathscr{D}(A) \oplus \mathbb{R}x \subset H \to H$ como $B|_{\mathscr{D}(A)} = A$ y $Bx = z$. Notemos que para toda $y \in \mathscr{D}(A)$ y para todo conjunto de Borel ω

$$R^A_{x,y}(\omega) = \langle R^A(\omega)x, y\rangle = \langle x, R^A(\omega)y\rangle = \langle R^A(\omega)y, x\rangle = R^A_{y,x}(\omega)$$

por lo que

$$\langle Bx, y\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t dR^A_{x,y}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t dR^A_{y,x}(t) = \langle Ay, x\rangle = \langle By, x\rangle = \langle x, By\rangle.$$

Como además A es autoadjunto, y por lo tanto simétrico, deducimos que B es un operador simétrico. Hemos llegado así a que B es una extensión simétrica del operador autoadjunto A así que, por maximalidad, se implica que $A = B$, una contradicción. Deducimos que $x \in \mathscr{D}(A)$, con lo cual (2.1) y (2.2) implican $Ax = z$. $\square$

2.5 Lema. *Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert real H y R^A su correspondiente resolución de la identidad.*

(a) *A cada función medible $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le corresponde un operador en H autoadjunto $f(A)$ caracterizado por*

$$\mathscr{D}(f(A)) = \{x \in H : \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2 dR^A_{x,x} < \infty\}, \tag{2.3}$$

$$\langle f(A)x, y\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f dR^A_{x,y} \quad \textit{para toda} \quad x \in \mathscr{D}(f(A)), y \in H. \tag{2.4}$$

$f(A)$ también satisface

$$\|f(A)x\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2 dR^A_{x,x} \quad \textit{para toda} \quad x \in \mathscr{D}(f(A)). \tag{2.5}$$

(b) *Se cumple el siguiente teorema de multiplicación: Si f, g son medibles entonces*

$$f(A)g(A) \subset fg(A), \quad \mathscr{D}(f(A)g(A)) = \mathscr{D}(g(A)) \cap \mathscr{D}(fg(A)). \tag{2.6}$$

(c) *Si $B \in \mathscr{B}(H)$ (el conjunto de los operadores lineales y acotados definidos sobre H) y $BA \subset AB$ entonces $R^A(\omega)B = BR^A(\omega)$ para todo conjunto de Borel ω.*

Demostraremos ahora un par de lemas que nos serán útiles más adelante. Denotemos por *id* a la función identidad definida sobre los reales

2.6 Lema. *Sean A y R^A como en el lema anterior. Tenemos que $id(A) = A$.*

Demostración. Sea $x \in \mathscr{D}(id(A))$, utilizando (2.4) y el Lema 2.4 vemos que

$$\langle id(A)x, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t dR^A_{x,y} \quad \text{para toda} \quad y \in H \Rightarrow x \in \mathscr{D}(A), \quad Ax = id(A)x,$$

por lo cual A es una extensión de $id(A)$. Como ambos operadores son autoadjuntos concluimos que $A = id(A)$. □

2.7 Lema. *Sea ω un conjunto de Borel y g una función medible. Manteniendo la notación de los lemas anteriores se cumple*

$$R^A(\omega)(\mathscr{D}(g(A))) \subset \mathscr{D}(g(A)). \tag{2.7}$$

Si además g es acotada sobre ω tenemos

$$R^A(\omega)(H) \subset \mathscr{D}(g(A)). \tag{2.8}$$

Demostración. De (2.3) y (2.4) se comprueba que $R^A(\omega) = \chi_\omega(A)$ (la función característica del conjunto A) por lo que (2.6) implica que $R^A(\omega)g(A) \subset g\chi_\omega(A) = g(A)R^A(\omega)$, donde la última igualdad se obtiene debido a que $\mathscr{D}(g(A)R^A(\omega)) = \mathscr{D}(R^A(\omega)) \cap \mathscr{D}(g\chi_\omega(A)) = H \cap \mathscr{D}(g\chi_\omega(A)) = \mathscr{D}(g\chi_\omega(A))$ también por (2.6). De esto se obtiene (2.7). Si además g es acotada en ω la función $g\chi_\omega$ es acotada por lo que $\mathscr{D}(g(A)R^A(\omega)) = \mathscr{D}(g\chi_\omega(A)) = H$. Como $\mathscr{D}(g(A)R^A(\omega)) = \{x \in \mathscr{D}(R^A(\omega)) | R^A(\omega)x \in \mathscr{D}(g(A))\}$ tenemos que se cumple (2.8). □

Ya con estos resultados definimos el operador $|L|^{\frac{1}{2}}$ como el operador asociado a la función $|t|^{\frac{1}{2}}$, y definimos también $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ como

$$\langle u, v\rangle_E = \langle |L|^{\frac{1}{2}}u, |L|^{\frac{1}{2}}v\rangle_{L^2} \quad \text{para toda} \quad u, v \in E := \mathscr{D}(|L|^{\frac{1}{2}}).$$

Tenemos el siguiente lema:

2.8 Lema. *$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Utilizando que $(-a,a) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma(L)$ para cierto $a > 0$ y (2.5) obtenemos que

$$\|u\|_E^2 = \||L|^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2}^2 = \int_{\sigma(L)} |t| dR_{u,u} \geq a\|u\|_{L^2}^2 \quad \text{para toda} \quad u \in \mathscr{D}(|L|^{\frac{1}{2}}), \tag{2.9}$$

auxiliándonos de esto y de la linealidad de $|L|^{\frac{1}{2}}$ se prueba que $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ es un producto interno. Supongamos ahora que (u_n) es una sucesión de Cauchy en E. Por definición esto implica que $(|L|^{\frac{1}{2}}u_n)$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^N)$, y como éste es completo, existe $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $|L|^{\frac{1}{2}}u_n \to v$. Además, por (2.9), (u_n) es una sucesión de Cauchy también en $L^2(\mathbb{R}^N)$, por lo cual existe $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$. Como $|L|^{\frac{1}{2}}$ es un operador cerrado deducimos que $u \in E$ y que $|L|^{\frac{1}{2}}u = v$. Tenemos así que $u_n \to u$ en E pues

$$\|u_n - u\|_E = \||L|^{\frac{1}{2}}u_n - |L|^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2} \to 0.$$

Esto prueba que E es un espacio de Hilbert con el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$. $\square$

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que $E = H^1(\mathbb{R}^N)$ y que $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ induce una norma equivalente a la usual en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Para ello comenzaremos por demostrar algunas propiedades de $|L|$, el operador asociado a la función $|t|$. A partir de ahora denotaremos por R a la resolución de la identidad asociada a L. También utilizaremos la notación $Q^+ = R\left((0,\infty)\right), Q^- = R\left((-\infty,0)\right)$. Notemos que por las propiedades de R como resolución de la identidad $R(\sigma(L)) = I \Rightarrow R(\omega) = 0$ para todo conjunto de Borel $\omega \subset \mathbb{R} \setminus \sigma(L)$, así que (S_1) y el Lema 2.4 aseguran que $Q^+ + Q^- = I - R(\{0\}) = I$.

2.9 Lema.

(a) $|L|u = LQ^+u - LQ^-u$ *para toda* $u \in \mathscr{D}(|L|)$.

(b) $\langle LQ^+u, v\rangle_{L^2} = \langle LQ^+u, Q^+v\rangle_{L^2}$ *para todo* $u \in \mathscr{D}(|L|), v \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

(c) $\langle LQ^-u, v\rangle_{L^2} = \langle LQ^-u, Q^-v\rangle_{L^2}$ *para todo* $u \in \mathscr{D}(|L|), v \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

(d) $\mathscr{D}(|L|) = H^2(\mathbb{R}^N)$.

Demostración.

(a) Sea $u \in \mathscr{D}(|L|)$. Por el Lema 2.5 y el Lema 2.6 tenemos que $LQ^+ = id(L)\chi_{(0,\infty)}(L) = id\chi_{(0,\infty)}(L)$ y

$$u \in \mathscr{D}(|L|) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} t^2 dR_{u,u} < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (id\chi_{(0,\infty)}(t))^2 dR_{u,u} < \infty \Rightarrow u \in \mathscr{D}(LQ^+).$$

De manera similar se demuestra que $u \in \mathscr{D}(|L|) \Rightarrow u \in \mathscr{D}(LQ^-)$. También por el Lema 2.5 vemos que para toda $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ se cumple

$$\langle |L|u, v\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |t| dR_{u,v} = \int_{0}^{\infty} t dR_{u,v} - \int_{-\infty}^{0} t dR_{u,v} = \langle LQ^+u, v\rangle_{L^2} - \langle LQ^-u, v\rangle_{L^2},$$

por lo cual podemos concluir que $|L|u = LQ^+u - LQ^-u$.

(b) Utilizando (2.6) vemos que Q^+ y L conmutan en $\mathscr{D}(|L|)$, debido a esto y a que Q^+ es una proyección autoadjunta se cumple el resultado.

(c) La demostración es similar al inciso anterior.

(d) La caracterización dada en (2.3), el Lema 2.6 y la Proposición 2.2 implican que $\mathscr{D}(|L|) = \mathscr{D}(L) = H^2(\mathbb{R}^N)$.

$\square$

2.10 Lema. $|L|$ *es un operador fuertemente monótono, es decir, existe* $a > 0$ *tal que* $\langle |L|u, u\rangle_{L^2} \geq a\|u\|^2_{L^2}$ *para toda* $u \in \mathscr{D}(|L|)$.

Demostración. Por hipótesis existe $a > 0$ tal que $(-a, a) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma(L)$, debido a esto y a las propiedades de R como resolución de la identidad tenemos que

$$\langle LQ^+u, u\rangle_{L^2} = \int_{0}^{a} t dR_{u,u} + \int_{a}^{\infty} t dR_{u,u} = \int_{a}^{\infty} t dR_{u,u} \geq aR_{u,u}\left((a, \infty)\right), \qquad (2.10)$$

y

$$\langle LQ^-u, u\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{a} t dR_{u,u} + \int_{a}^{0} t dR_{u,u} = \int_{-\infty}^{a} t dR_{u,u} \leq -aR_{u,u}\left((-\infty, -a)\right), \qquad (2.11)$$

sumando las desigualdades y utilizando el Lema 2.9 obtenemos

$$\langle |L|u, u\rangle_{L^2} = \langle LQ^+u, u\rangle_{L^2} - \langle LQ^-u, u\rangle_{L^2} \geq aR_{u,u}\left((a,\infty)\right) + aR_{u,u}\left((-\infty,-a)\right) = a\|u\|_{L^2}^2.$$

$\square$

De aquí en adelante escribiremos $u^+ := Q^+u, \quad u^- := Q^-u$ para abreviar la notación. Para enunciar y demostrar los lemas que vienen es conveniente introducir algunos conceptos más: definamos el producto interior energético como

$$\langle u, v\rangle_e := \langle |L|u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \quad \text{para toda} \quad u, v \in \mathscr{D}(|L|),$$

y la norma enérgetica $\|\cdot\|_e$ como la inducida por este producto. Definamos también X_e, el espacio energético de $|L|$, como el conjunto de las $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ para las cuales existe una sucesión (u_n) en $\mathscr{D}(|L|)$ tal que $u_n \to u$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$ y tal que la sucesión (u_n) es de Cauchy con respecto a la norma energética. Estas sucesiones (u_n) son llamadas sucesiones admisibles para u.

Utilizando [11, Sección 5.3, Proposición 3] vemos que podemos extender el producto interior energético a X_e mediante la definición

$$\langle u, v\rangle_e = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n\rangle_e \quad \text{para todas} \quad u, v \in X_e,$$

donde (u_n) y (v_n) son sucesiones admisibles para u y v respectivamente, y que $(X_e, \langle\cdot,\cdot\rangle_e)$ es un espacio de Hilbert.

2.11 Lema. $X_e = H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Sea $u \in X_e$ y (u_n) una sucesión admisible para u. Utilizando el Lema 2.9 y la ecuación (2.11) vemos que

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|_e^2 &= \langle |L|(u_n - u_m), u_n - u_m\rangle_{L^2} \\
&= \langle L(u_n - u_m)^+, (u_n - u_m)^+\rangle_{L^2} - \langle L(u_n - u_m)^-, (u_n - u_m)^-\rangle_{L^2} \\
&\geq \langle L(u_n - u_m)^+, (u_n - u_m)^+\rangle_{L^2} + aR_{u_n-u_m,u_n-u_m}\left((-\infty,-a)\right).
\end{aligned}$$

Como R es una resolución de la identidad tenemos que $R\left((-\infty,-a)\right)$ es una proyección autoadjunta, lo cual implica que $aR_{u_n-u_m,u_n-u_m}\left((-\infty,-a)\right) \geq 0$. Notemos también que por (2.7) $Q^+(\mathscr{D}(L)) \subset \mathscr{D}(L)$, esto es, Q^+ deja invariante $H^2(\mathbb{R}^N)$. Con esto y el Lema 2.3 vemos que

$$\begin{aligned}
\|u_n-u_m\|_e^2 &\geq \langle L(u_n-u_m)^+,(u_n-u_m)^+\rangle_{L^2} \\
&= \langle -\sum_{i=1}^N \partial_i^2(u_n^+-u_m^+)+V(u_n^+-u_m^+),u_n^+-u_m^+\rangle_{L^2} \\
&= \sum_{i=1}^N \left[-\int (u_n^+-u_m^+)\partial_i^2(u_n^+-u_m^+)\right] + \int V(u_n^+-u_m^+)^2 \\
&= \sum_{i=1}^N \|\partial_i(u_n^+-u_m^+)\|_{L^2}^2 + \int V(u_n^+-u_m^+)^2.
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por ser convergente en $L^2(\mathbb{R}^N)$ la sucesión (u_n) es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^N)$, y por la continuidad de Q^+ la sucesión (u_n^+) también es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^N)$. Como además V es acotada y (u_n) es por hipótesis una sucesión de Cauchy respecto a la norma energética tenemos que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n,m > M$ entonces $\left|\int V(u_n^+-u_m^+)^2\right| < \varepsilon$ y $\|u_n-u_m\|_e < \varepsilon$. Utilizando la desigualdad arriba obtenida vemos que para toda $n,m > M$

$$\sum_{i=1}^N \|\partial_i(u_n^+-u_m^+)\|_{L^2}^2 \leq \|u_n-u_m\|_e^2 + \left|\int V(u_n^+-u_m^+)^2\right| \leq 2\varepsilon,$$

lo cual implica que $(\partial_i u_n^+)$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^N)$ para toda i. Como $L^2(\mathbb{R}^N)$ es un espacio completo deducimos que existe para toda i una v_i tal que $\partial_i u_n^+ \to v_i$. Se sigue de aquí que $u^+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ con $\partial_i u^+ = v_i$. Para obtener que $u^- \in H^1(\mathbb{R}^N)$ partimos otra vez de la ecuación (2.11):

$$\begin{aligned}
&\langle L(u_n-u_m)^-,(u_n-u_m)^-\rangle_{L^2} \leq -aR_{u_n-u_m,u_n-u_m}\left((-\infty,-a)\right) \leq 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^N \|\partial_i(u_n^--u_m^-)\|_{L^2}^2 + \int V(u_n^--u_m^-)^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^N \|\partial_i(u_n^--u_m^-)\|_{L^2}^2 \leq \left|\int V(u_n^--u_m^-)^2\right|,
\end{aligned}$$

así que, por argumentos similares a los del caso de u^+, podemos concluir que $u^- \in H^1(\mathbb{R}^N)$, y de aquí que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Hemos probado que $X_e \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, veamos ahora la contención contraria. Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, por densidad existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ respecto a la norma de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Por la Proposición 2.2 sabemos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\langle Lw, w\rangle_{L^2} \geq b\|w\|_{L^2}^2$ para toda $w \in \mathscr{D}(L)$, así que, utilizando el Lema 2.9 y el Lema 2.3:

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|_e^2 &= \langle |L|(u_n - u_m), u_n - u_m\rangle_{L^2} \\
&= \langle L(u_n - u_m)^+, (u_n - u_m)^+\rangle_{L^2} - \langle L(u_n - u_m)^-, (u_n - u_m)^-\rangle_{L^2} \\
&= \langle L(u_n - u_m), (u_n - u_m)\rangle_{L^2} - 2\langle L(u_n - u_m)^-, (u_n - u_m)^-\rangle_{L^2} \\
&\leq \langle L(u_n - u_m), (u_n - u_m)\rangle_{L^2} - 2b\|(u_n - u_m)^-\|_{L^2}^2 \\
&\leq |\langle L(u_n - u_m), (u_n - u_m)\rangle_{L^2}| + 2|b|\|(u_n - u_m)^-\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

por lo que sólo resta demostrar que $\langle L(u_n - u_m), (u_n - u_m)\rangle$ es una sucesión de Cauchy para obtener el resultado. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\langle L(u_n - u_m), (u_n - u_m)\rangle_{L^2}| &\leq |\langle -\Delta(u_n - u_m), (u_n - u_m)\rangle_{L^2}| \\
&\quad + |\langle V(u_n - u_m), (u_n - u_m)\rangle_{L^2}| \\
&= \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i(u_n - u_m)\|_{L^2}^2 + \left|\int V(u_n - u_m)^2\right|.
\end{aligned}$$

Por la definición de la norma en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y de nuevo por ser V acotada, concluimos. $\square$

2.12 Lema. $\mathscr{D}(|L|) = H^2(\mathbb{R}^N)$ *es denso en* $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$.

Demostración. Como $R_{u,u}$ es una medida finita (2.3) implica que $\mathscr{D}(|L|) \subset E$. Veamos ahora que en efecto es denso. Sea $u \in E$ y definamos $u_m = R((-m,m))u$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Denotemos $A = R((-m,m)), B = R\left((-\infty,-m] \cup [m,\infty)\right)$. Observemos que $A = \chi_{(-m,m)}(L)$ por lo que (2.8) implica que u_m pertenece a $\mathscr{D}(|L|)$, y que por las propiedades de la resolución de la identidad $I = A + B$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\|u - u_m\|_E^2 &= \||L|^{\frac{1}{2}}(u - u_m)\|_{L^2}^2 \\ &= \||L|^{\frac{1}{2}}(I - A)u\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |t| dR_{Bu,Bu}.\end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple por (2.5). Dado que para todo conjunto de Borel ω se cumple

$$\begin{aligned}R_{Bu,Bu}(\omega) &= \langle R(\omega)Bu, R(\omega)Bu\rangle_{L^2} \\ &= \langle R(\omega)R\left((-\infty,-m]\cup[m,\infty)\right)u, R(\omega)R\left((-\infty,-m]\cup[m,\infty)\right)u\rangle_{L^2} \\ &= R_{u,u}(\omega\cap\left((-\infty,-m]\cup[m,\infty)\right))\end{aligned}$$

deducimos que

$$\|u - u_m\|_E^2 = \int_{-\infty}^{-m} |t| dR_{u,u} + \int_{m}^{\infty} |t| dR_{u,u}.$$

Por (2.3) sabemos que el mapeo $t \to |t|$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}, R_{u,u})$ así que de la ecuación anterior se sigue que $u_m \to u$, como queríamos demostrar. $\square$

2.13 Lema. $X_e = E$.

Demostración. Mostraremos primero que $X_e \subset E$. Sea $u \in X_e$ y (u_n) una sucesión admisible para u. Como $\mathscr{D}(|L|) \subset E$ (2.6) implica que $|L| = |L|^{\frac{1}{2}}|L|^{\frac{1}{2}}$. Usando que además $|L|^{\frac{1}{2}}$ es autoadjunto tenemos

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|_e^2 &= \langle |L|(u_n - u_m), u_n - u_m\rangle_{L^2} \\ &= \langle |L|^{\frac{1}{2}}(u_n - u_m), |L|^{\frac{1}{2}}(u_n - u_m)\rangle_{L^2} \\ &= \|u_n - u_m\|_E^2,\end{aligned}$$

de donde se sigue que (u_n) es una sucesión de Cauchy en E así que $u_n \to v$ en E para alguna $v \in E$ por el Lema 2.8. La ecuación (2.9) implica que $a\|u_n - v\|_{L^2}^2 \to 0$, lo cual implica que $u = v$, esto es, $u \in E$. Esto prueba que $X_e \subset E$. Demostraremos ahora que los productos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ coinciden sobre X_e. Para esto supongamos ahora que $u, v \in X_e$ y sean $(u_n), (v_n)$ sucesiones admisibles para ellos respectivamente:

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_e &= \lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n\rangle_e \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle |L|^{\frac{1}{2}} u_n, |L|^{\frac{1}{2}} v_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n\rangle_E\end{aligned}$$

Por lo hecho al principio de esta demostración sabemos que $u_n \to u$ y $v_n \to v$ respecto a la norma $\|\cdot\|_E$, con lo cual se concluye de arriba la coincidencia de las normas. Como X_e es un espacio de Hilbert deducimos que es un subespacio cerrado de E. Puesto que $\mathscr{D}(|L|) \subset X_e \subset E$ la densidad de $\mathscr{D}(|L|)$ en E (Lema 2.12) implica que $X_e = E$. $\square$

2.14 Proposición. *$E = H^1(\mathbb{R}^N)$ y $(H^1(\mathbb{R}^N), \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Se sigue del Lema 2.11, el Lema 2.13 y el Lema 2.8. $\square$

La importancia de la norma $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ está en las propiedades que posee y que demostraremos a continuación. Definamos los espacios $E^+ := \mathscr{R}(Q^+) \cap H^1(\mathbb{R}^N), E^- := \mathscr{R}(Q^-) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$. Podemos definir también los operadores en $H^1(\mathbb{R}^N)$ dados por $P^+ := Q^+|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad P^- := Q^-|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ ya que por (2.7) y por la Proposición 2.14 tenemos que

$$Q^+(H^1(\mathbb{R}^N)) = Q^+(\mathscr{D}(|L|^{\frac{1}{2}}) \subset \mathscr{D}(|L|^{\frac{1}{2}}) = H^1(\mathbb{R}^N)$$

y

$$Q^-(H^1(\mathbb{R}^N)) = Q^-(\mathscr{D}(|L|^{\frac{1}{2}}) \subset \mathscr{D}(|L|^{\frac{1}{2}}) = H^1(\mathbb{R}^N).$$

Se verifica directamente de las definiciones que P^+, P^- son proyecciones y que $\mathscr{R}(P^+) \subset E^+, \mathscr{R}(P^-) \subset E^-$.

2.15 Lema. *P^+, P^- son proyecciones acotadas en $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Veamos que E^+ es un cerrado de la topología de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Sea (u_n) una sucesión en E^+ que converge a un $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ respecto a la norma usual en este espacio.

Queremos demostrar que $u \in E^+$. Como $u_n \to u$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ se cumple también que $u_n \to u$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$, y dado que $\mathscr{R}(Q^+)$ es cerrado (donde $\mathscr{R}$ denota el rango del operador) en $L^2(\mathbb{R}^N)$ (por las propiedades de Q^+, Q^- como proyecciones espectrales) se tiene que $u \in \mathscr{R}(Q^+)$. Como por hipótesis $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ esto implica que $u \in E^+$. De manera similar se demuestra que E^- es cerrado. Podemos verificar también que $H^1(\mathbb{R}^N) = E^+ \oplus E^-$. Demostraremos ahora que P^+, P^- actúan como proyecciones complementarias a E^+ y E^-, de donde se concluye el resultado. Para ver que $\mathscr{R}(P^+) = E^+$ ya sólo necesitamos probar la contención $E^+ \subset \mathscr{R}(P^+)$, para hacer esto supongamos $u \in E^+$. Como $u \in \mathscr{R}(Q^+)$ tenemos $u = Q^+u$, y como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ se implica que $u = P^+u$, de donde se sigue que $u \in \mathscr{R}(P^+)$. De forma similar se demuestra que $\mathscr{R}(P^-) = E^-$. Resta ver que $\mathscr{N}(P^+) = E^-, \mathscr{N}(P^-) = E^+$, (donde $\mathscr{N}$ denota el núcleo del operador) hechos que se desprenden de que $\mathscr{N}(Q^+) = \mathscr{R}(Q^-), \mathscr{N}(Q^-) = \mathscr{R}(Q^+)$ por las propiedades de la resolución de la identidad R. □

2.16 Proposición. *Las normas asociadas a $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1}$ son equivalentes.*

Demostración. Veamos primero que estas normas son equivalentes en $\mathscr{D}(L) = H^2(\mathbb{R}^N)$. Para $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^1}^2 &= \int \left(u^2 + \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|^2 \right) \\
&= \int (1-V)u^2 + \int \left(Vu^2 + \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|^2 \right) \\
&\leq \left| \int (1-V)u^2 \right| + \left| \int \left(Vu^2 + \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|^2 \right) \right| \\
&\leq \int |1-V|u^2 + |\langle Lu, u\rangle_{L^2}| \\
&\leq \|1-V\|_\infty \|u\|_{L^2}^2 + |\langle Lu, u\rangle_{L^2}|
\end{aligned}$$

Por (2.4) y el Lema 2.6 se cumple

$$|\langle Lu, u\rangle_{L^2}| \leq \left| \int t dR_{u,u} \right| \leq \int |t| dR_{u,u} = \langle |L|u, u\rangle_{L^2},$$

con esto y el Lema 2.10 obtenemos que

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq \left(\frac{\|1-V\|_\infty}{a}+1\right)\langle |L|u,u\rangle_{L^2} = \left(\frac{\|1-V\|_\infty}{a}+1\right)\|u\|_E^2.$$

Veamos la otra desigualdad: de manera similar a la demostración de $H^1(\mathbb{R}^N) \subset X_e$ en el Lema 2.11 llegamos a que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|u\|_E^2 \leq \langle Lu,u\rangle_{L^2} - 2b\|u^-\|_{L^2}^2,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
\|u\|_E^2 &\leq \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{L^2}^2 + \int Vu^2 - 2b\|u^-\|_{L^2}^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{L^2}^2 + \left|\int Vu^2\right| + 2|b|\|u^-\|_{L^2}^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{L^2}^2 + \|V\|_\infty\|u\|_{L^2}^2 + 2|b|\|Q^-\|_{\mathscr{L}(L^2)}^2\|u\|_{L^2}^2 \\
&\leq \text{máx}\{1, \|V\|_\infty + 2|b|\}\|u\|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

Con esto queda demostrada la equivalencia de las normas en $H^2(\mathbb{R}^N)$, veamos ahora que esto se extiende a $H^1(\mathbb{R}^N)$: Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, por densidad existe una sucesión $(u_n) \in H^2(\mathbb{R}^N)$ que converge a u con la norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$, y por lo tanto también con la norma en $L^2(\mathbb{R}^N)$. Por la equivalencia de las normas esta sucesión es de Cauchy con la norma en E por lo que $|L|^{\frac{1}{2}}u_n$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^N)$, así que $|L|^{\frac{1}{2}}u_n \to v$ para algún $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Usando que $|L|^{\frac{1}{2}}$ es un operador cerrado obtenemos que $v = |L|^{\frac{1}{2}}u$. De aquí que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{H^1}^2 &\leq \left(\frac{\|1-V\|_\infty}{a}+1\right)\|u_n\|_E^2 = \left(\frac{\|(1-V)\|_\infty}{a}+1\right)\||L|^{\frac{1}{2}}u_n\|_{L^2}^2 \\
\Rightarrow \|u\|_{H^1}^2 &\leq \left(\frac{\|1-V\|_\infty}{a}+1\right)\||L|^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2}^2 = \left(\frac{\|1-V\|_\infty}{a}+1\right)\|u\|_E^2.
\end{aligned}$$

Por otra parte, el Lema 2.12 asegura que existe una sucesión (w_n) en $H^2(\mathbb{R}^N)$ que converge a u en la norma de E. Como $u - w_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para toda n, la desigualdad recién demostrada implica que (w_n) converge a u también con la norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$, así que

$$\begin{aligned}\|w_n\|_E^2 &\leq \text{máx}\{1, \|V\|_\infty + 2|b|\}\|w_n\|_{H^1}^2 \\ &\Rightarrow \|u\|_E^2 \leq \text{máx}\{1, \|V\|_\infty + 2|b|\}\|u\|_{H^1}^2,\end{aligned}$$

de donde se concluye el resultado. □

2.17 Lema. $E^- = (E^+)^\perp, E^+ = (E^-)^\perp$ *en el espacio* $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$.

Demostración. Sea $u \in E^+, v \in E^-$. De (2.6) se desprende que $Q^+|L|^{\frac{1}{2}} \subset |L|^{\frac{1}{2}}Q^+$ y por la Proposición 2.14 tenemos que $E^+ = \mathscr{R}(Q^+) \cap E$, utilizando estos resultados vemos que $Q^+|L|^{\frac{1}{2}}u = |L|^{\frac{1}{2}}Q^+u = |L|^{\frac{1}{2}}u$, lo cual implica que $|L|^{\frac{1}{2}}u \in \mathscr{R}(Q^+)$. De manera similar se demuestra que $|L|^{\frac{1}{2}}v \in \mathscr{R}(Q^-)$ así que

$$\langle u, v\rangle_E = \langle |L|^{\frac{1}{2}}u, |L|^{\frac{1}{2}}v\rangle_{L^2} = 0,$$

como esto se cumple para toda $u \in E^+, v \in E^-$ tenemos $E^+ \subset (E^-)^\perp$, la igualdad entre estos conjuntos se obtendrá de esta contención. En la demostración del Lema 2.15 vimos que E^- es un cerrado de $H^1(\mathbb{R}^N)$ así que la Proposición 2.16 implica que E^- es un cerrado de E, por lo cual $E = (E^-)^\perp \oplus E^-$. Recordando que $E = E^+ \oplus E^-$ obtenemos $E^+ = (E^-)^\perp$. Por último, $E^+ = (E^-)^\perp \Rightarrow E^- = (E^+)^\perp$ utilizando de nuevo que E^+, E^- son subespacios cerrados de E. □

En lo que resta de este trabajo omitiremos frecuentemente el subíndice E al referirnos al nuevo producto interior que hemos definido y a la norma inducida por éste. Para cerrar este capítulo demostraremos un par de ecuaciones anticipadas en la introducción.

2.18 Proposición. *Se cumplen las ecuaciones* (1.4),(1.5).

Demostración. Sean $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Por el Lema 2.12 existe una sucesión (u_n) en $H^2(\mathbb{R}^N)$ que converge a u con la norma $\|\cdot\|$. Para esta sucesión se cumple

$$\begin{aligned}\langle u_n^+, v\rangle - \langle u_n^-, v\rangle &= \langle |L|u_n^+, v\rangle_{L^2} - \langle |L|u_n^-, v\rangle_{L^2} \\ &= \langle Lu_n, v\rangle_{L^2} \\ &= \sum_{i=1}^N \langle \partial_i u_n, \partial_i v\rangle_{L^2} + \langle Vu_n, v\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

Por la Proposición 2.16 se cumple que $u_n \to u$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Ésto y el Lema 2.15 implican

$$\begin{aligned}
\langle u^+, v\rangle - \langle u^-, v\rangle &= \lim_{n\to\infty} \big(\langle u_n^+, v\rangle - \langle u_n^-, v\rangle\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} \langle \partial_i u_n, \partial_i v\rangle_{L^2} + \langle V u_n, v\rangle_{L^2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \langle \partial_i u, \partial_i v\rangle_{L^2} + \langle V u, v\rangle_{L^2},
\end{aligned}$$

con lo que se obtienen los resultados deseados. □

3 Lemas técnicos

Demostraremos ahora algunos lemas que utilzaremos durante el siguiente capítulo.

3.1 Lema. *$\mathcal{M}, \Phi$ y $\|\cdot\|$ son invariantes bajo traslaciones de la forma $u \mapsto u(\cdot - a)$ con $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y $a \in \mathbb{Z}^N$.*

Demostración. Definamos $u_a(x) = u(x-a)$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Por lo visto en la demostración de la Proposición 2.18 y por la propiedad (S_1) tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle u^+, v\rangle - \langle u^-, v\rangle &= \sum_{i=1}^{N} \langle \partial_i u, \partial_i v\rangle_{L^2} + \langle Vu, v\rangle_{L^2} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uvdx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_a \cdot \nabla v_a + V(x)u_a v_a dx \\
&= \sum_{i=1}^{N} \langle \partial_i u_a, \partial_i v_a\rangle_{L^2} + \langle Vu_a, v_a\rangle_{L^2} \\
&= \langle u_a^+, v_a\rangle - \langle u_a^-, v_a\rangle,
\end{aligned}$$

de esta igualdad obtenemos, con $v = u^+$ que $\|u^+\|^2 = \|u_a^+\|^2$ y con $v = u^-$ que $\|u^-\|^2 = \|u_a^-\|^2$, de aquí que

$$\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 = \|u_a^+\|^2 + \|u_a^-\|^2 = \|u_a\|^2.$$

Usando ahora (1.3), (1.4) y (S_2) obtenemos

$$\Phi(u_a) = \Phi(u) \quad \text{y} \quad \Phi'(u_a)v_a = \Phi'(u)v$$

para todo $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y $a \in \mathbb{Z}^N$. De la segunda ecuación se desprende que $\Phi'(u_a)v = \Phi'(u)v_{-a}$. Como además se verifica que $v \in E^-$ si y sólo si $v_a \in E^-$ concluimos que $\mathcal{M}$ es invariante bajo traslaciones. $\square$

3.2 Lema. *Para toda $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ existe $y_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que*

$$\int_{B_1(y_0)} u^2 dx = \max_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} u^2 dx.$$

Demostración. El caso en que $u = 0$ es claro así que podemos suponer $\|u\|_{L^2} \neq 0$. Esto implica que existe $z \in \mathbb{R}^N$ tal que $\int\limits_{B_1(z)} u^2 dx > 0$. Para toda $m \in \mathbb{N}$ definimos los conjuntos $A_m = B_m(z) \setminus B_{m-1}(z)$. Como $\sum\limits_m \int\limits_{A_m} u^2 dx = \int\limits_{R^N} u^2 dx < \infty$, es decir, la serie converge, existe $M_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B_{M_0}(z)} u^2 dx = \sum\limits_{m > M_0} \int\limits_{A_m} u^2 dx < \int\limits_{B_1(z)} u^2 dx$, por lo cual

$$\|y - z\| > M_0 + 1 \Rightarrow B_1(y) \subset \mathbb{R}^N \setminus B_{M_0}(z) \Rightarrow \int_{B_1(y)} u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{M_0}(z)} u^2 dx < \int_{B_1(z)} u^2 dx.$$

Con esto podemos concluir que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} u^2 dx = \sup_{y \in \overline{B_{M_0+1}}(z)} \int_{B_1(y)} u^2 dx. \tag{3.1}$$

Definamos $G : \overline{B_{M_0+1}}(z) \to \mathbb{R}, \quad G(y) = \int\limits_{B_1(y)} u^2 dx$. Demostraremos que G es continua. Sea $y_k \to y$ una sucesión en $\overline{B_{M_0+1}}(z)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_1(y)} u^2 dx - \int_{B_1(y_k)} u^2 dx \right| &= \left| \int_{B_1(y) \setminus B_1(y_k)} u^2 dx - \int_{B_1(y_k) \setminus B_1(y)} u^2 dx \right| \\ &\leq \left| \int_{B_1(y) \setminus B_1(y_k)} u^2 dx \right| + \left| \int_{B_1(y_k) \setminus B_1(y)} u^2 dx \right|. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
&B_1(y) \setminus B_1(y_k) \subset B_1(y) \setminus B_{1-|y-y_k|}(y) \\
&\Rightarrow \int\limits_{B_1(y)\setminus B_1(y_k)} u^2 dx \leq \int\limits_{B_1(y)} u^2 dx - \int\limits_{B_{1-|y-y_k|}(y)} u^2 dx \\
&\Rightarrow \lim_{y_k \to y} \int\limits_{B_1(y)\setminus B_1(y_k)} u^2 dx = 0.
\end{aligned}$$

De manera similar $B_1(y_k) \setminus B_1(y) \subset B_{1+|y-y_k|}(y) \setminus B_1(y)$ implica $\lim\limits_{y_k \to y} \int\limits_{B_1(y_k)\setminus B_1(y)} u^2 dx = 0$. Utilizando estos dos resultados concluimos que G es continua.

Como G está definida sobre un compacto alcanza su máximo en algún punto de su dominio así que (3.1) implica que existe la y_0 buscada.

$\square$

3.3 Lema. $\forall \varepsilon > 0 : \exists C_\varepsilon > 0$ *tal que* $|f(x,u)| \leq \varepsilon|u| + C_\varepsilon |u|^{p-1} \quad \forall u \in \mathbb{R}$.

Demostración. Por (S_3) existe $\delta > 0$ tal que si $|u| < \delta$ entonces $|f(x,u)| \leq \varepsilon|u|$ así que sólo resta demostrar que existe $C_\varepsilon > 0$ con la cual el resultado se cumple para $|u| \geq \delta$. Definamos $C_\varepsilon := a(\delta^{1-p} + 1)$, donde a es la misma que en (S_2) . Tenemos ahora que

$$\begin{aligned}
|u| \geq \delta \Rightarrow |f(x,u)| &\leq a(1 + |u|^{p-1}) \\
&= a(|u|^{1-p} + 1)|u|^{p-1} \\
&\leq a(\delta^{1-p} + 1)|u|^{p-1} \\
&= C_\varepsilon |u|^{p-1} \\
&\leq \varepsilon|u| + C_\varepsilon |u|^{p-1}.
\end{aligned}$$

$\square$

3.4 Lema. *Si* (u_n) *es una sucesión acotada en* E *tal que* $u_n \to 0$ *en* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *para la* p *de la hipótesis* (S_2) *entonces* $\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n^+ dx = o(\|u_n^+\|)$ *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. Utilizando el Lema 3.3 obtenemos

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n^+ dx \right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x,u_n)u_n^+| dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon|u_n||u_n^+| + C_\varepsilon |u_n|^{p-1}|u_n^+|) dx$$

Por el teorema del encaje de Sobolev $u_n^+ \in L^p$ y $u_n^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$, debido a esto y a la desigualdad de Hölder:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon|u_n||u_n^+| + C_\varepsilon |u_n|^{p-1}|u_n^+|)dx \leq \varepsilon\|u_n\|_{L^2}\|u_n^+\|_{L^2} + C_\varepsilon \|u_n^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}\|u_n^+\|_{L^p}$$

$$= \varepsilon\|u_n\|_{L^2}\|u_n^+\|_{L^2} + C_\varepsilon\|u_n\|_{L^p}^{p-1}\|u_n^+\|_{L^p}$$

Combinando las desigualdades y utilizando de nuevo el teorema del encaje de Sobolev y la equivalencia de las normas obtenemos:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n^+ dx\right| \leq \varepsilon\|u_n\|_{L^2}\|u_n^+\|_{L^2} + C_\varepsilon\|u_n\|_{L^p}^{p-1}\|u_n^+\|_{L^p}$$

$$\leq \varepsilon K'\|u_n\|\|u_n^+\| + C_\varepsilon K''\|u_n\|_{L^p}^{p-1}\|u_n^+\|$$

así que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n^+ dx\right|}{\|u_n^+\|} \leq \varepsilon K' M,$$

donde M acota a la sucesión (u_n). Como esto se cumple para toda $\varepsilon > 0$ se concluye el resultado. $\square$

3.5 Lema. *Sea (u_n) una sucesión en $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\Phi'(u_n) \to 0$. Si $u_n \rightharpoonup u$ entonces $\Phi'(u) = 0$.*

Demostración. Probaremos primero que $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)v \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v$ para toda $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Denotemos por K el soporte de v, y sea Ω un abierto acotado tal que $K \subset \Omega$. Por el teorema de Rellich-Kondrakov $u_n|_\Omega \to u|_\Omega$ en $L^2(\Omega)$ y en $L^p(\Omega)$, de aquí que $u_n\chi_\Omega \to u\chi_\Omega$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$ y en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Además $|f(x,y)| \leq \max\{\varepsilon, C_\varepsilon\}(|y|^{\frac{2}{2}} + |y|^{\frac{p}{(\frac{p}{p-1})}})$ por lo que [10, A.4] implica que $f(\cdot, u_n\chi_\Omega) \to f(\cdot, u\chi_\Omega)$ en $L^2(\mathbb{R}^N) + L^{p/(p-1)}(\mathbb{R}^N)$ y de aquí se deduce que $\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n\chi_\Omega)v \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u\chi_\Omega)v$ lo cual equivale al resultado buscado.

Ahora veamos que $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \Phi'(u_n)v \to \Phi'(u)v$ para toda $v \in C_c^\infty$:

$$\Phi'(u_n)v = \langle u_n^+, v\rangle - \langle u_n^-, v\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)v dx$$
$$\to \langle u^+, v\rangle - \langle u^-, v\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u)v dx = \Phi'(u)v$$

Como $\Phi'(u_n) \to 0$ deducimos que $\Phi'(u)v = 0$ para toda $v \in C_c^\infty$. Por último basta utilizar que $\Phi \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ y la densidad de C_c^∞ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ para obtener el resultado.

□

3.6 Lema. *Si $v_n \rightharpoonup v$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ entonces $v_n \to v$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Sea K un compacto de $\mathbb{R}^N$ y U un abierto acotado que le contiene. Utilizando el teorema de Rellich- Kondrachov vemos que

$$\begin{aligned} v_n \rightharpoonup v \quad \text{en} \quad H^1(\mathbb{R}^N) &\Longrightarrow v_n|_U \to v|_U \quad \text{en} \quad L^2(U) \\ &\Longrightarrow v_n|_K \to v|_K \quad \text{en} \quad L^2(K), \end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

3.7 Lema. *Sean u_n una sucesión en $H^1(\mathbb{R}^N), u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Si $u_n \rightharpoonup u$ entonces, pasando a una subsucesión, $u_n(x) \to u(x)$ c.d.s. (casi donde sea).*

Definamos para toda $m \in \mathbb{N}$ el conjunto $B_m = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < m\}$. Debido al Teorema de Rellich-Kondrakov tenemos

$$\begin{aligned} u_n \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad H^1(\mathbb{R}^N) &\Rightarrow u_n|_{B_1} \rightharpoonup u|_{B_1} \quad \text{en} \quad H^1(B_1) \\ &\Rightarrow u_n|_{B_1} \to u|_{B_1} \quad \text{en} \quad L^1(B_1), \end{aligned}$$

de donde deducimos que existe una subsucesión $(u_{1,n})$ tal que $u_{1,n}(x) \to u(x)$ c.d.s. en B_1. Repitiendo los argumentos podemos extraer de $(u_{1,n})$ una subsucesión $(u_{2,n})$ tal que $u_{2,n}(x) \to u(x)$ c.d.s. en B_2. Continuando de esta forma construimos para toda $m \in \mathbb{N}$ una sucesión $(u_{m,n})$ que sea subsucesión de $(u_{m-1,n})$, donde definimos $u_{0,n} = u_n$, y tal que $u_{m,n}(x) \to u(x)$ c.d.s. en B_m. Sólo resta aplicar un proceso de diagonalización a estas sucesiones para hallar la subsucesión deseada.

3.8 Lema. *Si $u \neq 0$ entonces $F(x,u) > 0$ y $\frac{1}{2}f(x,u)u > F(x,u)$.*

Demostración. Veamos el caso $u < 0$. Supongamos que $F(x,u) \leq 0$, como $F(x,u) = \int_u^0 -f(x,s)ds$ esto implica que $\exists s_0 \in (u,0)$ tal que $f(x,s_0) \geq 0$. Por (S_5) obtenemos

$$\forall s \in \left(\frac{s_0}{2}, 0\right) : \frac{f(x,s)}{|s|} > \frac{f(x,\frac{s_0}{2})}{|\frac{s_0}{2}|} > \frac{f(x,s_0)}{|s_0|} \geq 0.$$

Sin embargo, utilizando (S_3) obtenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|f(x,s)|}{|s|} < \frac{f(x,\frac{s_0}{2})}{|\frac{s_0}{2}|} \quad \text{para toda} \quad s \in (\delta, 0)$$

lo cual nos conduce a una contradicción. Podemos concluir que en este caso se cumple la primera desigualdad enunciada. Probemos ahora la segunda desigualdad:

$$\begin{aligned} (S_5) &\Rightarrow \frac{f(x,u)s}{u} < f(x,s) \quad \text{para toda} \quad s \in (u,0) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}f(x,u)u = \frac{f(x,u)}{u}\int_u^0 -s ds > \int_u^0 -f(x,s)ds = F(x,u). \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado el lema para el caso $u < 0$. El caso $u > 0$ se demuestra de manera similar. $\square$

3.9 Lema. *Sean $u, s, v \in \mathbb{R}$ tales que $s \geq -1$ y $w := su + v \neq 0$, y sea $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces*

$$f(x,u)\left[s\left(\frac{s}{2}+1\right)u + (1+s)v\right] + F(x,u) - F(x,u+w) < 0.$$

Demostración. Consideremos fijos x, u, v y definamos $z = z(s) := (1+s)u + v$, de forma que $z = u + w$. Definamos también

$$g : [-1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(s) := f(x,u)\left[s\left(\frac{s}{2}+1\right)u + (1+s)v\right] + F(x,u) - F(x,z).$$

Debemos demostrar que $g(s) < 0$ para toda s en su dominio que cumpla $z(s) \neq u$.
Veamos primero el caso $u = 0$. En este caso $F(x,u) = 0$ por definición, $f(x,u) = 0$ por (S_3) y $F(x,z) > 0$ por el Lema 3.8, por lo cual la afirmación es cierta.
En el caso en que $u \neq 0$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(S_4) &\Rightarrow \lim_{s\to\infty} \frac{F(x,(1+s)u+v)}{((1+s)u+v)^2} = \infty \\
&\Rightarrow \lim_{s\to\infty} \frac{F(x,(1+s)u+v)}{s^2} = \infty \quad \left(\text{pues} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{((1+s)u+v)^2}{s^2} = u^2 > 0\right) \\
&\Rightarrow \lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s^2} = -\infty \\
&\Rightarrow \lim_{s\to\infty} g(s) = -\infty.
\end{aligned}$$

Notemos también que g es diferenciable sobre $(-1,\infty)$ y

$$g'(s) = uz\left(\frac{f(x,u)}{u} - \frac{f(x,z)}{z}\right) \quad \text{si} \quad z \neq 0. \tag{3.2}$$

Como g es continua sobre $[-1,\infty)$ y $\lim_{s\to\infty} g(s) = -\infty$ podemos asegurar que existe $s_0 \in [-1,\infty)$ tal que $g(s_0)$ es el valor máximo global de g. Si $s_0 = -1$ entonces por el Lema 3.8 tenemos para toda s

$$g(s) \leq g(-1) = -\frac{1}{2}f(x,u)u + F(x,u) - F(x,v) < -F(x,v) \leq 0$$

así que el lema se cumple. Supongamos ahora que $s_0 \in (-1,\infty)$ de forma que $g'(s_0) = 0$. Si $g(s_0) < 0$ el resultado se sigue directamente así que supongamos también $g(s_0) \geq 0$. Notemos que si $uz \leq 0$ entonces $\frac{z}{u} \leq 0$, lo cual junto al Lema 3.8 implica $f(x,u)z \leq 0$. Utilizando esto, que $v = z - (1+s)u$ y de nuevo el Lema 3.8 obtenemos para toda $s \in [-1,\infty)$:

$$\begin{aligned}
uz \leq 0 \Rightarrow g(s) &= f(x,u)\left[\left(\frac{s^2}{2} + s\right)u + (s+1)(z-(s+1)u)\right] + F(x,u) - F(x,z) \\
&< f(x,u)\left[\left(\frac{s^2}{2} + s\right)u + (s+1)(z-(s+1)u)\right] + \frac{1}{2}f(x,u)u - F(x,z) \\
&= -\frac{1}{2}(s+1)^2 f(x,u)u + (s+1)f(x,u)z - F(x,z) \leq 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Dado que $g(s_0) \geq 0$ (3.3) implica que $uz(s_0) > 0$. Se deduce de esto junto con (3.2), $g'(s_0) = 0$ y (S_5) que $u = z(s_0)$, de donde se obtiene al evaluar que $g(s_0) = -\frac{1}{2}s_0^2 f(x,u)u \leq 0$, y de aquí que $g(s_0) = 0$. Tenemos así que si $g(s) \geq 0$ para alguna s entonces $g(s) = 0$, esto es, en s se alcanza también el máximo global por lo que podemos repetir el argumento para mostrar que $z(s) = u$, lo cual demuestra el lema. $\square$

3.10 Lema. $\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx = o(\|u\|^2)$ *cuando* $\|u\| \to 0$.

Demostración. Por los Lemas 3.3 y 3.8 tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}_N} F(x,u)dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}_N} |F(x,u)|dx \leq \int_{\mathbb{R}_N} \left|\frac{1}{2}f(x,u)u\right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_N} \left(\varepsilon|u|^2 + C_\varepsilon|u|^p\right) dx = \varepsilon\|u\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon\|u\|_{L^p}^p.\end{aligned}$$

Como las normas en E y H^1 son equivalentes el teorema del encaje de Sobolev ([10, Teorema 1.8] implica que existen K_2, K_p tales que $\|u\|_{L^2} \leq K_2\|u\|$ y $\|u\|_{L^p} \leq K_p\|u\|$ para toda $u \in H^1$. Tenemos así que

$$\begin{aligned}\lim_{\|u\|\to 0} \frac{|\int_{\mathbb{R}_N} F(x,u)dx|}{\|u\|^2} &< \lim_{\|u\|\to 0} \left(\frac{\varepsilon\|u\|_{L^2}^2}{\|u\|^2} + \frac{C_\varepsilon\|u\|_{L^p}^p}{\|u\|^2}\right) \\ &\leq \lim_{\|u\|\to 0} \left(\varepsilon K_2^2 + C_\varepsilon K_p^p\|u\|^{p-2}\right) \\ &= \varepsilon K_2^2.\end{aligned}$$

Dado que esto es cierto $\forall\varepsilon > 0$ se deduce el resultado. $\square$

4 Demostración del Teorema 1.1

Demostraremos ahora nuestro resultado principal siguiendo el método descrito en la introducción. Recordemos que las definiciones de $\mathcal{M}, E(u)$ y $\widehat{E}(u)$ se han dado ya en la página 5.

4.1 Proposición. *Si $u \in \mathcal{M}$, entonces*

$$\Phi(u+w) < \Phi(u) \quad \textit{para todo} \quad w \in \mathcal{Z} := \{su + v : s \geq -1, v \in E^-\}, w \neq 0$$

de forma que u es máximo global único de $\Phi|_{\widehat{E}(u)}$.

Demostración. Sea $B : E \times E \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica definida por

$$B(v_1, v_2) := \langle v_1^+ - v_1^-, v_2 \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_1 \nabla v_2 + V(x) v_1 v_2) dx \quad \text{para} \quad v_1, v_2 \in E.$$

Sea $w \in \mathcal{Z}$, esto es, $w = su + v$ para s, v tales que $s \geq -1, v \in E^-$. Supongamos también $w \neq 0$. Tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(u+w)-\Phi(u)\\
&=\frac{1}{2}\left[B(u+w,u+w)-B(u,u)\right]+\int\limits_{\mathbb{R}^N}(F(x,u)-F(x,u+w))dx\\
&=\frac{1}{2}\left[B\left((1+s)u+v,(1+s)u+v\right)-B(u,u)\right]+\int\limits_{\mathbb{R}^N}(F(x,u)-F(x,u+w))dx\\
&=\frac{1}{2}\left(\left[(1+s)^2-1\right]B(u,u)+2(1+s)B(u,v)+B(v,v)\right)\\
&+\int\limits_{\mathbb{R}^N}(F(x,u)-F(x,u+w))dx\\
&=\frac{1}{2}\left(B(u,\left[(1+s)^2-1\right]u)+B(u,2(1+s)v)\right)+\frac{1}{2}B(v,v)\\
&+\int\limits_{\mathbb{R}^N}(F(x,u)-F(x,u+w))dx\\
&=-\frac{||v||^2}{2}+B\left(u,s\left(\frac{s}{2}+1\right)u+(1+s)v\right)+\int\limits_{\mathbb{R}^N}(F(x,u)-F(x,u+w))dx.
\end{aligned}
$$

Además como $u\in\mathcal{M}$ tenemos:

$$
0=\Phi'(u)z=B(u,z)-\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(x,u)z(x)dx\quad\text{para toda}\quad z\in E(u).
$$

Definamos $W_0=\{x\in\mathbb{R}^N:w(x)=0\}$. Por hipótesis $\mathbb{R}^N\setminus W_0$ es un conjunto de medida positiva. Notando que $s\left(\frac{s}{2}+1\right)u+(1+s)v\in E(u)$ y usando el Lema 3.8 obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\Phi(u+w)-\Phi(u)\\
&=-\frac{||v||^2}{2}+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(f(x,u)\left[s\left(\frac{s}{2}+1\right)u+(1+s)v\right]+F(x,u)-F(x,u+w)\right)dx\\
&=-\frac{||v||^2}{2}+\int\limits_{W_0}\left(f(x,u)\left[s\left(\frac{s}{2}+1\right)u+(1+s)v\right]+F(x,u)-F(x,u+w)\right)dx\\
&+\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus W_0}\left(f(x,u)\left[s\left(\frac{s}{2}+1\right)u+(1+s)v\right]+F(x,u)-F(x,u+w)\right)dx\\
&=-\frac{||v||^2}{2}+\int\limits_{W_0}f(x,u)\left[(1+s)w+s\left(\frac{-s}{2}\right)u\right]dx\\
&+\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus W_0}\left(f(x,u)\left[s\left(\frac{s}{2}+1\right)u+(1+s)v\right]+F(x,u)-F(x,u+w)\right)dx\\
&=-\frac{||v||^2}{2}-s^2\int\limits_{W_0}\frac{f(x,u)u}{2}dx+\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus W_0}\left(f(x,u)\left[s\left(\frac{s}{2}+1\right)u+(1+s)v\right]+F(x,u)-F(x,u+w)\right)dx\\
&\le-\frac{||v||^2}{2}+\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus W_0}\left(f(x,u)\left[s\left(\frac{s}{2}+1\right)u+(1+s)v\right]+F(x,u)-F(x,u+w)\right)dx.
\end{aligned}
$$

Se sigue del Lema 3.9 que $\Phi(u+w)<\Phi(u)$. Por último observemos que $w\in\mathcal{Z}\Leftrightarrow u+w\in\widehat{E}(u)$ con lo que se asegura que u es el único máximo global de $\Phi|_{\widehat{E}(u)}$. □

Para el siguiente lema recordemos que el real c se ha definido ya en el enunciado del Teorema 1.1.

4.2 Lema.

(a) $\exists\alpha>0$ *tal que* $c=\inf_{\mathcal{M}}\Phi\geq\inf_{S_\alpha}\Phi(u)>0$, *donde* $S_\alpha:=\{u\in E^+:||u||=\alpha\}$.

(b) $\|u^+\|\geq\max\{\|u^-\|,\sqrt{2c}\}$ *para toda* $u\in\mathcal{M}$.

Demostración.

(a) El Lema 3.10 asegura que existe $\alpha > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}_N} F(x,u)dx < \frac{1}{4}\|u\|^2$ para toda $u \in S_\alpha$. Como $S_\alpha \subset E^+$ tenemos que

$$\begin{aligned} u \in S_\alpha \Rightarrow \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}_N} F(x,u)dx &= \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}_N} F(x,u)dx = \Phi(u) \\ \Rightarrow \frac{1}{4}\alpha^2 &< \Phi(u), \end{aligned}$$

así que $\inf_{S_\alpha} \Phi(u) \geq \frac{1}{4}\alpha^2 > 0$. Para probar que $\inf_{\mathcal{M}} \Phi \geq \inf_{S_\alpha} \Phi(u)$ basta observar que para toda $v \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\begin{aligned} \Phi(v) &\geq \Phi\left(\frac{\alpha}{\|v^+\|}v^+\right) \quad \text{por la Proposición} \quad 4.1 \\ &\geq \inf_{S_\alpha} \Phi(u), \end{aligned}$$

de lo cual se deduce el resultado.

(b) Dado que F es no negativa y probamos en (a) que $c > 0$ tenemos, $\forall u \in \mathcal{M}$

$$c \leq \frac{1}{2}(\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2) - \int_{\mathbb{R}_N} F(x,u)dx \leq \frac{1}{2}(\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2)$$

de aquí que $\|u^+\|^2 \geq 2c + \|u^-\|^2 \geq \max\{2c, \|u^-\|^2\} \Rightarrow \|u^+\| \geq \max\{\sqrt{2c}, \|u^-\|\}$.

$\square$

4.3 Lema. *Si $\mathcal{V} \subset E^+ \setminus \{0\}$ es un subconjunto compacto, entonces existe $R > 0$ tal que $\Phi < 0$ en $E(u) \setminus B_R(0)$ para toda $u \in \mathcal{V}$.*

Demostración. Tratemos primero el caso en que $\|u\| = 1$ para toda $u \in \mathcal{V}$, demostremos el resultado por contradicción: supongamos que para toda $R > 0$ existen $u \in \mathcal{V}$ y $w \in E(u)$ con $\|w\| \geq R$ tal que $\Phi(w) \geq 0$. Podemos entonces encontrar sucesiones $(u_n), (w_n)$ con $u_n \in \mathcal{V}, w_n \in E(u_n)$ y $\Phi(w_n) \geq 0$ para toda n tales que $\|w_n\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Como $\mathcal{V}$ es un espacio métrico compacto podemos suponer, pasando a una subsucesión, que $u_n \to u \in \mathcal{V}$, esto es, $u \in E^+ \setminus \{0\}$ y $\|u\| = 1$. Sin pérdida de generalidad supongamos también que $w_n \neq 0$ para toda n y definamos $v_n = w_n/\|w_n\|$ de manera que $v_n \in E(u_n)$ y $v_n = s_n u_n + v_n^-$ con $|s_n| = \frac{\|w_n^+\|}{\|w_n\|}, v_n^- = \frac{w_n^-}{\|w_n\|}$. Observemos que

$$0 \leq \frac{\Phi(w_n)}{\|w_n\|^2} = \frac{1}{2}(s_n^2 - \|v_n^-\|^2) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, w_n)}{\|w_n\|^2} dx. \tag{4.1}$$

Esto implica que $\|v_n^-\|^2 \leq s_n^2 = \|v_n\|^2 - \|v_n^-\|^2 = 1 - \|v_n^-\|^2$, lo cual a su vez implica que $2\|v_n^-\|^2 \leq 1$. Obtenemos así que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} \leq \sqrt{1 - \|v_n^-\|^2} = |s_n| \leq 1$. Debido a esto podemos suponer que $|s_n| \to s > 0$. Como (v_n) es una sucesión acotada podemos suponer también que $v_n \rightharpoonup v$. Más aún, por el Lema 3.7 obtenemos que $v_n(x) \to v(x)$ c.d.s. en $\mathbb{R}^N$. Como $u_n \to u$ y $v_n^+ \rightharpoonup v^+$ (recordemos que P^+ es un operador acotado respecto a la norma definida en E) tenemos también $u_n(x) \to u(x)$ c.d.s. y $v_n^+(x) \to v^+(x)$ c.d.s. Observemos que como $v_n^+ = s_n u_n$

$$\begin{aligned} |s_n| u_n(x) \to s u(x) \quad \text{c.d.s.} &\Rightarrow |v_n^+(x)| \to |s u(x)| \quad \text{c.d.s.} \\ &\Rightarrow |v^+(x)| = |s u(x)| \quad \text{c.d.s.} \\ &\Rightarrow |v^+| \equiv |su| \not\equiv 0 \\ &\Rightarrow v \not\equiv 0, \end{aligned}$$

así que existe un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ de medida positiva sobre el cual $v(x) \neq 0$ y $v_n(x) \to v(x)$. En este conjunto se cumple

$$\lim_{n \to \infty} |w_n(x)| = \lim_{n \to \infty} \|w_n\| |v_n(x)| = |v(x)| \lim_{n \to \infty} \|w_n\| = \infty,$$

por lo cual (S_4), el Lema 3.8 y el Lema de Fatou implican que:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, w_n)}{\|w_n\|^2} dx \geq \int\limits_{A} \frac{F(x, w_n)}{\|w_n\|^2} dx = \int\limits_{A} \frac{F(x, w_n)}{w_n^2} v_n^2 dx \to \infty. \tag{4.2}$$

Sin embargo, esto contradice (4.1) pues $s_n^2 - \|v_n^-\|^2 \leq 1$.

El caso general se sigue de éste pues $E(u) = E\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$ y el conjunto $\mathcal{V}_1 = \{\frac{u}{\|u\|} : u \in \mathcal{V}\}$ es compacto cuando $\mathcal{V}$ lo es, como puede demostrarse utilizando la caracterización de compacto por sucesiones. $\square$

4.4 Lema. *Para cada $u \notin E^-$ el conjunto $\mathcal{M} \cap \widehat{E}(u)$ consiste de precisamente un punto $\widehat{m}(u)$, el cual es el máximo global único de $\Phi|_{\widehat{E}(u)}$.*

Demostración. Como $\widehat{E}(u) = \widehat{E}\left(\frac{u^+}{\|u^+\|}\right)$ para toda $u \in E \setminus E^-$ podemos suponer que $u \in E^+, \|u\| = 1$. Como puede verse en la demostración del Lema 4.2(a), $\Phi(tu) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeña, de lo cual se deduce que $0 < \sup_{\widehat{E}(u)} \Phi$. Por el Lema 4.3 existe $R > 0$ tal que $\Phi < 0$ sobre $E(u) \setminus B_R(0)$ así que

$$\sup_{\widehat{E}(u)} \Phi = \sup_{B_R(0)\cap\widehat{E}(u)} \Phi \leq \sup_{w\in B_R(0)\cap\widehat{E}(u)} \frac{1}{2}(\|w^+\|^2 - \|w^-\|^2) \leq \sup_{w\in B_R(0)\cap\widehat{E}(u)} \frac{1}{2}\|w\|^2 = \frac{1}{2}R^2.$$

Para continuar veremos que Φ es débilmente semicontinua superiormente sobre $\widehat{E}(u)$: sea (w_n) una sucesión en $\widehat{E}(u)$ tal que $w_n \rightharpoonup w_0$ y $w_0 \in \widehat{E}(u)$. Denotemos $w_n = t_n u + w_n^-$. Por ser P^+ un operador acotado es débilmente continuo y como en espacios de dimensión finita los conceptos de convergencia fuerte y débil son equivalentes, tenemos

$$w_n \rightharpoonup w_0 \Rightarrow t_n u \rightharpoonup t_0 u \Rightarrow t_n u \to t_0 u.$$

Utilizando ahora que también P^- es un operador acotado se desprende de nuevo de las propiedades de la convergencia débil que

$$w_n \rightharpoonup w_0 \Rightarrow w_n^- \rightharpoonup w_0^- \Rightarrow -\|w_0^-\| \geq -\liminf \|w_n^-\| = \limsup(-\|w_n^-\|).$$

De la continuidad y no negatividad de F, el Lema 3.7 y el Lema de Fatou deducimos que

$$\limsup\left(-\int_{\mathbb{R}^N} F(x, w_n)\right) = -\liminf \int_{\mathbb{R}^N} F(x, w_n) \leq -\int_{\mathbb{R}^N} F(x, w_0).$$

Combinando estos resultados obtenemos la semicontinuidad superior de Φ :

$$\begin{aligned} w_n \rightharpoonup w_0 \Rightarrow \limsup_{w_n\to w_0} \Phi(w_n) &= \limsup_{w_n\to w_0} \left(\frac{1}{2}\|t_n u\|^2 - \frac{1}{2}\|w_n^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, w_n)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\|t_0 u\|^2 - \frac{1}{2}\|w_0^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, w_0) = \Phi(w_0). \end{aligned}$$

Definamos ahora una sucesión (u_n) en $\widehat{E}(u)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \sup_{\widehat{E}(u)} \Phi$. Como $\sup_{\widehat{E}(u)} \Phi = \sup_{B_R(0)\cap\widehat{E}(u)} \Phi$ podemos suponer que la sucesión es acotada y pasando a una subsucesión tenemos $u_n \rightharpoonup u_0$. Dado que $E(u)$ es un subespacio de E y es cerrado bajo la topología fuerte (pues E^- lo es), tenemos que también es cerrado relativo a la topología débil por lo cual $u_0 \in E(u)$. Esto implica que $u_0 \in \widehat{E}(u)$:

$$\begin{aligned}
&a_n u + u_n^- = u_n \rightharpoonup u_0 = a_0 u + u_0^-, \quad a_n > 0\\
&\Rightarrow a_n u \rightharpoonup a_0 u\\
&\Rightarrow a_n u \to a_0 u\\
&\Rightarrow a_0 \geq 0.
\end{aligned}$$

Utilizando el resultado de semicontinuidad arriba demostrado obtenemos que $\sup_{\widehat{E}(u)} \Phi = \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) \leq \Phi(u_0)$ de donde se deduce que $\Phi(u_0) = \sup_{\widehat{E}(u)} \Phi$. En particular esto implica que $u_0^+ \neq 0$ pues $\sup_{\widehat{E}(u)} \Phi > 0$ y Φ es no positiva sobre E^-. Debido a esto existe una vecindad de u_0 totalmente contenida en el interior de $\widehat{E}(u)$ respecto a la topología inducida por $E(u)$ así que u_0 es un punto crítico de $\Phi|_{E(u)}$ y $\Phi'(u_0)u_0 = \Phi'(u_0)v = 0$ para toda $v \in E(u)$. Con esto aseguramos que $u_0 \in \mathcal{M} \cap \widehat{E}(u)$ y concluimos utilizando la Proposición 4.1. $\square$

4.5 Proposición. Φ *es coerciva sobre* $\mathcal{M}$*, es decir,* $\Phi(u) \to \infty$ *cuando* $\|u\| \to \infty, \quad u \in \mathcal{M}$.

Demostración. Probemos este resultado por contradicción: supongamos que existe una sucesión $(u_n) \subset \mathcal{M}$ tal que $\|u_n\| \to \infty$ y $\Phi(u_n) \leq d$ para algún $d \in [c, \infty)$ (recordemos que $c = \inf_{\mathcal{M}} \Phi$). Definamos $v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}$ de forma que tenemos, al tomar subsucesiones, $v_n \rightharpoonup v$ y $v_n(x) \to v(x)$ c.d.s. en $\mathbb{R}^N$ por el Lema 3.7. Por el Lema 3.2 para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in \mathbb{R}^N$ que satisface

$$\int_{B_1(y_n)} (v_n^+)^2 dx = \max_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} (v_n^+)^2 dx. \tag{4.3}$$

Es claro que para toda y_n existe $z_n \in \mathbb{Z}^N$ t.q. $y_n - z_n \in [0,1]^N$. Definamos $\tau_{-z_n} : E \to E$, $\tau_{-z_n}(u)(x) = u(x+z_n)$. El Lema 3.1 implica que $\tau_{-z_n} u_n \in \mathcal{M}$, $\|\tau_{-z_n} u_n\| \to \infty$ y $\Phi(\tau_{-z_n} u_n) \leq$

d para toda $n \in \mathbb{N}$. Observemos que además (4.3) implica

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_1(y_n-z_n)} \left(\frac{\tau_{-z_n}u_n}{\|\tau_{-z_n}u_n\|}^+\right)^2 dx &= \frac{1}{\|\tau_{-z_n}u_n\|^2}\int\limits_{B_1(y_n)} ({u_n}^+)^2 dx \\
&= \int\limits_{B_1(y_n)} \left(\frac{{u_n}^+}{\|u_n\|}\right)^2 dx \\
&= \max_{y\in\mathbb{R}^N} \int\limits_{B_1(y)} \left(\frac{{u_n}^+}{\|u_n\|}\right)^2 dx \\
&= \max_{y\in\mathbb{R}^N} \int\limits_{B_1(y-z_n)} \left(\frac{\tau_{-z_n}u_n}{\|\tau_{-z_n}u_n\|}^+\right)^2 dx \\
&= \max_{y\in\mathbb{R}^N} \int\limits_{B_1(y)} \left(\frac{\tau_{-z_n}u_n}{\|\tau_{-z_n}u_n\|}^+\right)^2 dx,
\end{aligned}$$

así que podemos suponer que la sucesión (y_n) es acotada en $\mathbb{R}^N$ trabajando con las traslaciones de las funciones u_n.

Supongamos que $v^+ = 0$. Como $v_n \rightharpoonup v \Rightarrow v_n^+ \rightharpoonup v^+$ el Lema 3.6 asegura que $v_n^+ \to v^+$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Por hipótesis $y_n \in [0,1]^N$ para toda n así que $B_1(y_n) \subset [-2,2]^N$. Como $[-2,2]^N$ es compacto $v^+ = 0$ implicaría $\int\limits_{[-2,2]^N} (v_n^+)^2 dx \to 0$, lo cual a su vez implicaría que

$$\int\limits_{B_1(y_n)} (v_n^+)^2 dx \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \tag{4.4}$$

Dado esto el Lema de P.L. Lions (ver [10, Lema 1.21]) implicaría $v_n^+ \to 0$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ donde

p es la misma que en la hipótesis S_2. Por el Lema 3.3 vemos que para toda $\epsilon > 0, s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, sv_n^+)dx &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} f(x, sv_n^+) sv_n^+ dx \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\varepsilon |sv_n^+|^2 + \frac{1}{2} C_\varepsilon |sv_n^+|^p dx \\ &= \frac{s^2}{2}\varepsilon \|v_n^+\|_{L^2}^2 + \frac{s^p}{2} C_\varepsilon \|v_n^+\|_{L^p}^p \\ &\leq \frac{s^2}{2}\varepsilon K \|v_n^+\|^2 + \frac{s^p}{2} C_\varepsilon \|v_n^+\|_{L^p}^p \\ &\leq \frac{s^2}{2}\varepsilon K + \frac{s^p}{2} C_\varepsilon \|v_n^+\|_{L^p}^p\end{aligned}$$

donde K es la constante de la equivalencia de $\| \cdot \|$ con la norma estándar de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Haciendo $n \to \infty$ obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, sv_n^+)dx \leq \frac{s^2}{2}\varepsilon K_2.$$

Como esto se cumple para toda $\varepsilon > 0$ deducimos que $\int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, sv_n^+)dx \to 0$. Por el Lema 4.2(b)

$$2\|v_n^+\|^2 \geq \|v_n^+\|^2 + \|v_n^-\|^2 = \|v_n\|^2 = 1,$$

esto es, $\|v_n^+\|^2 \geq \frac{1}{2}$. Como $sv_n^+ \in \widehat{E}(u_n)$ para $s \geq 0$ la Proposición 4.1 implica

$$d \geq \Phi(u_n) \geq \Phi(sv_n^+) = \frac{s^2}{2}\|v_n^+\|^2 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, sv_n^+)dx \geq \frac{s^2}{4} - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, sv_n^+)dx \to \frac{s^2}{4}$$

Esto lleva a una contradicción cuando $s > \sqrt{4d}$. Como $v = 0$ implica (4.4) deducimos que $v \neq 0$.

Puesto que $|u_n(x)| \to \infty$ si $v(x) \neq 0$ se sigue de nuevo de (S_4) y del Lema de Fatou que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} v_n^2 dx \to \infty$$

y de aquí que

$$0 \leq \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2}(\|v_n^+\|^2 - \|v_n^-\|^2) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} v_n^2 dx \to -\infty$$

cuando $n \to \infty$, una contradicción. Esto finaliza la demostración. $\square$

4.6 Lema. *El mapeo* $E^+ \setminus \{0\} \to \mathcal{M}, u \mapsto \widehat{m}(u)$ *(ver Lema 4.4) es continuo.*

Demostración. Sea $u \in E^+ \setminus \{0\}$. Demostraremos primero la siguiente afirmación:

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad u_n \to u \quad \text{para una sucesión} \quad (u_n)_n \subset E^+ \setminus \{0\}, \quad \text{entonces} \\ &\widehat{m}(u_n) \to \widehat{m}(u) \quad \text{para una subsucesión} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como $u, u_n \neq 0$ para toda n tenemos que $u_n \to u \Rightarrow \frac{u_n}{\|u_n\|} \to \frac{u}{\|u\|}$ y $\widehat{m}(u_n) = \widehat{m}(\frac{u_n}{\|u_n\|}), \widehat{m}(u) = \widehat{m}(\frac{u}{\|u\|})$, así que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|u_n\| = \|u\| = 1$ para toda n, de manera que $\widehat{m}(u_n) = \|\widehat{m}(u_n)^+\| u_n + \widehat{m}(u_n)^-$.
Por el Lema 4.2(a) tenemos

$$\Phi(\widehat{m}(u_n)) = \sup_{\widehat{E}(u_n)} \Phi \leq \sup_{E(u_n)} \Phi \Rightarrow 0 < \sup_{E(u_n)} \Phi,$$

como $(\bigcup_n u_n) \cup u$ es un compacto el Lema 4.3 implica que existe $R > 0$ tal que para toda n

$$\Phi(\widehat{m}(u_n)) \leq \sup_{E(u_n)} \Phi = \sup_{B_R(0)} \Phi \leq \sup_{w \in B_R(0)} \|w^+\|^2 = R^2.$$

Por la Proposición 4.5 esto implica que $\widehat{m}(u_n)$ es una sucesión acotada. Pasando a una subsucesión podemos suponer que

$$t_n := \|\widehat{m}(u_n)^+\| \to t \quad \text{y} \quad \widehat{m}(u_n)^- \rightharpoonup u_*^- \quad \text{en} \quad E \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

donde $t \geq \sqrt{2c} > 0$ por el Lema 4.2(b). Por el Lema 4.4, el Lema de Fatou y la semicontinuidad débil por debajo de la norma vemos que:

$$
\begin{aligned}
\Phi(\widehat{m}(u)) &= \Phi(\|\widehat{m}(u)^+\|u + \widehat{m}(u)^-) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\|\widehat{m}(u)^+\|u_n + \widehat{m}(u)^-) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \Phi(\|\widehat{m}(u)^+\|u_n + \widehat{m}(u)^-) \leq \limsup_{n\to\infty} \Phi(\widehat{m}(u_n)) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}(|t_n|^2 - \|\widehat{m}(u_n)^-\|^2) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, \widehat{m}(u_n))dx \right) \\
&= \frac{1}{2}t^2 + \limsup_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\|\widehat{m}(u_n)^-\|^2 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, \widehat{m}(u_n))dx \right) \\
&\leq \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\|u_*^-\|^2 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, tu + u_*^-)dx \\
&= \Phi(tu + u_*^-) \leq \Phi(\widehat{m}(u)).
\end{aligned}
$$

Utilizando la parte de unicidad del Lema 4.4 vemos que $\Phi(tu + u_*^-) = \Phi(\widehat{m}(u)) \Rightarrow \widehat{m}(u) = tu + u_*^-$. También de la cadena de desigualdades de arriba se deduce

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\|u_*^-\|^2 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, tu + u_*^-)dx &= \frac{1}{2}t^2 + \limsup_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\|\widehat{m}(u_n)^-\|^2 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, \widehat{m}(u_n))dx \right) \\
&\leq \frac{1}{2}t^2 + \limsup_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\|\widehat{m}(u_n)^-\|^2 \right) \\
&\quad + \limsup_{n\to\infty} \left(-\int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, \widehat{m}(u_n))dx \right),
\end{aligned}
$$

y dado que tenemos las desigualdades

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\|\widehat{m}(u_n)^-\|^2 \right) \leq -\frac{1}{2}\|u_*^-\|^2 \\
&\limsup_{n\to\infty} \left(-\int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, \widehat{m}(u_n))dx \right) \leq -\int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x, tu + u_*^-)dx
\end{aligned}
$$

se implica que $\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\|\widehat{m}(u_n)^-\|^2 = -\frac{1}{2}\|u_*^-\|^2$. Utilizando de nuevo que $\widehat{m}(u_n)$ es acotado pasamos a una subsucesión para la cual $\|\widehat{m}(u_n)^-\|$ converge de manera que, por la igualdad anterior, $\|\widehat{m}(u_n)^-\| \to \|u_*^-\|$. Esto junto con la hipótesis de convergencia débil

implican $\widehat{m}(u_n)^- \to u_*^-$. Combinando los resultados obtenidos concluimos que $\widehat{m}(u_n) = t_n u_n + \widehat{m}(u_n)^- \to tu + u_*^- = \widehat{m}(u)$, esto es, se cumple (4.5).
Veamos ahora que (4.5) implica el resultado: Supongamos que $\widehat{m}$ no es continua en u, entonces existe una sucesión $u_n \to u$ tal que $\widehat{m}(u_n) \nrightarrow \widehat{m}(u)$. Pasando a una subsucesión podemos suponer que $\|\widehat{m}(u_n) - \widehat{m}(u)\| \geq \varepsilon$ para cierta $\varepsilon > 0$, sin embargo esta nueva sucesión contradice (4.5). De aquí concluimos que $\widehat{m}$ es continua en $E^+ \setminus \{0\}$. $\square$

Consideramos ahora el funcional

$$\widehat{\Psi} : E^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \widehat{\Psi}(u) := \Phi(\widehat{m}(u)),$$

el cual es continuo por el Lema 4.6. En el siguiente lema veremos, aplicando un par de veces el teorema del valor medio a la función adecuada, que la continuidad de $\widehat{m}$ es suficiente para asegurar que la composición $\widehat{\Psi}$ es continuamente diferenciable.

4.7 Proposición. *$\widehat{\Psi} \in C^1(E^+ \setminus \{0\}, \mathbb{R})$, y*

$$\widehat{\Psi}'(w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)^+\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z \quad \textit{para} \quad w, z \in E^+, w \neq 0.$$

Demostración. Sean w, z como en el enunciado de la proposición. Definamos $u = \widehat{m}(w) \in \mathcal{M}$, de manera que $u = u^- + \frac{\|u^+\|}{\|w\|}w$. Como $w \in E^+ \setminus \{0\}$ podemos elegir $\delta > 0$ tal que $w_t := w + tz \in E^+ \setminus \{0\}$ para $|t| < \delta$. Definamos $u_t = \widehat{m}(w_t) \in \mathcal{M}$. Podemos escribir $u_t = u_t^- + s_t w_t$ con $s_t > 0$. Tenemos que $s_0 = \frac{\|u^+\|}{\|w\|}$, y la función $(-\delta, \delta) \to \mathbb{R}, t \mapsto s_t$ es continua pues la continuidad de $t \mapsto w_t$, el Lema 4.6 y la continuidad de las proyecciones implican que $t \mapsto s_t w_t$ es continua con lo que si t_n es una sucesión en $(-\delta, \delta)$ tal que $t_n \to t_0 \in (-\delta, \delta)$ entonces, dado que $w_t \neq 0$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} s_{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|s_{t_n} w_{t_n}\|}{\|w_{t_n}\|} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \|s_{t_n} w_{t_n}\|}{\lim\limits_{n\to\infty} \|w_{t_n}\|} = s_{t_0}.$$

El Lema 4.4 y el teorema del valor medio aplicado a la función

$$\tau \mapsto \Phi\left(u_t^- + s_t\left[w + \tau\left(w_t - w\right)\right]\right) \quad \text{para toda} \quad \tau \in [0,1]$$

implican que

$$\begin{aligned}&\widehat{\Psi}(w_t) - \widehat{\Psi}(w) = \Phi(u_t) - \Phi(u) = \Phi(u_t^- + s_t w_t) - \Phi(u^- + s_0 w)\\&\leq \Phi(u_t^- + s_t w_t) - \Phi(u_t^- + s_t w) = \Phi'(u_t^- + s_t[w + \tau_t(w_t - w)])s_t(w_t - w)\\&= s_0\Phi'(u)tz + o(t) \quad \text{cuando} \quad t \to 0\end{aligned}$$

donde $\tau_t \in (0,1)$. Por un argumento similar obtenemos

$$\begin{aligned}&\widehat{\Psi}(w_t) - \widehat{\Psi}(w) = \Phi(u_t^- + s_t w_t) - \Phi(u^- + s_0 w)\\&\geq \Phi(u^- + s_0 w_t) - \Phi(u^- + s_0 w)\\&= \Phi'(u^- + s_0[w + \eta_t(w_t - w)])s_0(w_t - w)\\&= s_0\Phi'(u)tz + o(t) \quad \text{cuando} \quad t \to 0\end{aligned}$$

donde $\eta_t \in (0,1)$. Combinando estas desigualdades concluimos que la derivada direccional $\partial_z\widehat{\Psi}(w)$ existe y está dada por

$$\partial_z\widehat{\Psi}(w) = \lim_{t\to 0}\frac{\widehat{\Psi}(w_t) - \widehat{\Psi}(w)}{t} = s_0\Phi'(u)z = \frac{\|\widehat{m}(w)^+\|}{\|w\|}\Phi'(\widehat{m}(w))z.$$

Esto prueba que $\partial_z\widehat{\Psi}(w)$ es lineal en z, continua y depende de w continuamente así que el resultado se sigue por [10, Proposición 1.3]. □

Ahora consideraremos la esfera unidad $S^+ := \{w \in E^+ : \|w\| = 1\}$ en E^+. Notemos que la restricción del mapeo $\widehat{m}$ a S^+ es un homeomorfismo con inversa dada por

$$\check{m} : \mathcal{M} \to S^+, \check{m}(u) = \frac{u^+}{\|u^+\|}. \tag{4.6}$$

También consideramos la restricción $\Psi : S^+ \to \mathbb{R}$ de $\widehat{\Psi}$ a S^+.

4.8 Corolario.

(a) $\Psi \in C^1(S^+)$ *y*

$$\Psi'(w)z = \|\widehat{m}(w)^+\|\Phi'(\widehat{m}(w))z \textit{ para } z \in T_wS^+ = \{v \in E^+ : \langle w, v\rangle = 0\}$$

(b) $(w_n)_n$ *es una sucesión de Palais-Smale para* Ψ *si y sólo si* $(\widehat{m}(w_n))_n$ *es una sucesión de Palais-Smale para* Φ.

(c) *Tenemos*

$$\inf_{S+} \Psi = \inf_{\mathcal{M}} \Phi = c.$$

Más aún, $u \in S^+$ *es un punto crítico de* Ψ *si y sólo si* $\widehat{m}(u) \in \mathcal{M}$ *es un punto crítico de* Φ*, y los correspondientes valores críticos coinciden.*

Demostración.

(a) Es consecuencia directa de la Proposición 4.7

(b) Sea $(w_n)_n$ una sucesión tal que $C := \sup_n \Psi(w_n) = \sup_n \Phi(\widehat{m}(w_n)) < \infty$ y sea $u_n := \widehat{m}(w_n) \in \mathcal{M}$. Dado que $\Phi'(u_n)v = 0$ para toda $v \in E(u_n), n \in \mathbb{N}$ y que existe una descomposición ortogonal

$$E = E(w_n) \oplus T_{w_n}S^+ = E(u_n) \oplus T_{w_n}S^+ \quad \text{(respecto a} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

deducimos que $\nabla\Phi(u_n) \in E(u_n)^{\perp} = T_{w_n}S^+$ y usando (a)

$$\begin{aligned} \|\Psi'(w_n)\| &= \sup_{\substack{z \in T_{w_n}S^+ \\ \|z\|=1}} \Psi'(w_n)z \\ &= \sup_{\substack{z \in T_{w_n}S^+ \\ \|z\|=1}} \|u_n^+\|\Phi'(u_n)z \\ &= \sup_{\substack{z \in E(u_n)\oplus T_{w_n}S^+ \\ \|z\|=1}} \|u_n^+\|\Phi'(u_n)z \\ &= \|u_n^+\|\|\Phi'(u_n)\| \end{aligned} \tag{4.7}$$

Por el Lema 4.2(b), la Proposición 4.5 y la hipótesis $\sup_n \Phi(u_n) < \infty$ tenemos que $\sqrt{2c} \leq \|u_n^+\| \leq \sup_n \|u_n^+\| < \infty$. Utilizando estos resultados podemos ya probar este inciso: si $(w_n)_n$ es una sucesión de Palais-Smale entonces $\Phi(u_n)$ es una sucesión acotada y por (4.7) $\lim_{n\to\infty} \|u_n^+\|\|\Phi'(u_n)\| = 0$. Esto implica que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2c}\|\Phi'(u_n)\| = 0$ y de aquí que $\lim_{n\to\infty} \|\Phi'(u_n)\| = 0$. Por otra parte supongamos que $(u_n)_n$ es una sucesión de Palais-Smale para Φ, entonces la sucesión $\Psi(w_n)$ es acotada y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|\Psi'(w_n)\| &= \lim_{n\to\infty} \|u_n^+\| \|\Phi'(u_n)\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_m \|u_m^+\| \|\Phi'(u_n)\| = 0\end{aligned}$$

con lo que obtenemos que $(w_n)_n$ es una sucesión de Palais-Smale para Ψ.

(c) Tenemos que

$$\inf_{u\in S^+} \Psi(u) = \inf_{u\in S^+} \Phi(\widehat{m}(u)) = \inf_{w\in\mathcal{M}} \Phi(w)$$

donde la segunda igualdad se cumple porque $\widehat{m}|_{S^+}$ es un homeomorfismo, y en particular una biyección, entre S^+ y $\mathcal{M}$. Además, tal como en (b), vemos que para toda $u \in S^+$

$$\|\Psi'(u)\| = \|\widehat{m}(u)^+\| \|\Phi'(\widehat{m}(u))\|$$

por lo cual el Lema 4.2 implica que $u \in S^+$ es un punto crítico de Ψ si y sólo si $\widehat{m}(u)$ es un punto crítico de Φ, y de aquí es claro de la definición de Ψ que los valores críticos coinciden.

□

Demostración del Teorema 1.1. Por el Lema 4.2(a) sabemos que $c > 0$. Más aún, si $u_0 \in \mathcal{M}$ satisface $\Phi(u_0) = c$, entonces $\check{m}(u_0) \in S^+$ minimiza Ψ y de aquí que es un punto crítico de Ψ, así que u_0 es un punto crítico de Φ por el Corolario 4.8. Resta demostrar que en efecto existe un minimizador $u \in \mathcal{M}$ de $\Phi|_{\mathcal{M}}$. Por el principio variacional de Ekeland [10], existe una sucesión $(w_n)_n \subset S^+$ con $\Psi(w_n) \to c$ y $\Psi'(w_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Definamos $u_n = \widehat{m}(w_n) \in \mathcal{M}$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\Phi(u_n) \to c$ y $\Phi'(u_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ por el Corolario 4.8(b). Por la Proposición 4.5, (u_n) es acotada y de aquí que $u_n \rightharpoonup u$ pasando a una subsucesión. Utilizando el Lema 3.2 definimos $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_n)} u_n^2 dx = \max_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} u_n^2 dx.$$

Tal como en la demostración de la Proposición 4.5 suponemos que (y_n) es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^N$. Si

$$\int\limits_{B_1(y_n)} u_n^2 dx \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \tag{4.8}$$

entonces $u_n \to 0$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$ para toda $2 < q < 2^*$, de nuevo por [10, Lema 1.21]. De esta forma el Lema 3.4 asegura que $\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)u_n^+ dx = o(\|u_n^+\|)$ cuando $n \to \infty$. Notemos que también

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\Phi'(u_n)u_n^+|}{\|u_n^+\|} = \lim_{n\to\infty} \left|\Phi'(u_n)\frac{u_n^+}{\|u_n^+\|}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \|\Phi'(u_n)\| = 0.$$

Utilizando estos resultados obtenemos que

$$o(\|u_n^+\|) = \Phi'(u_n)u_n^+ = \|u_n^+\|^2 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)u_n^+ dx = \|u_n^+\|^2 - o(\|u_n^+\|)$$

por lo cual $\|u_n^+\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, contradiciendo el Lema 4.2(b). Deducimos que no se cumple (4.8) lo cual implica que $u_n \rightharpoonup u \neq 0$ tal como en la demostración de la Proposición 4.5. Además por el Lema 3.5 $\Phi'(u) = 0$, esto es, u es un punto crítico no trivial de Φ así que $u \in \mathcal{M}$ por definición. Resta demostrar que $\Phi(u) = c$. Por el Lema 3.8, el Lema de Fatou y dado que $(u_n)_n$ es acotada

$$\begin{aligned} c + o(1) = \Phi(u_n) - \frac{1}{2}\Phi'(u_n)u_n &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(x, u_n)u_n - F(x, u_n)\right) dx \\ &\geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(x, u)u - F(x, u)\right) dx + o(1) = \Phi(u) - \frac{1}{2}\Phi'(u)u + o(1) \\ &= \Phi(u) + o(1) \end{aligned}$$

De aquí que $\Phi(u) \leq c$. La otra desigualdad se sigue de la definición de c dado que $u \in \mathcal{M}$. $\square$

Bibliografía

[1] A. G. Baskakov and A.S. Zagorskii, *Spectral Theory of Linear Relations on Real Banach Spaces*, Matematicheskie Zametki **81** (2007), 17–31.

[2] L. C. Evans, *Partial differential equations*, AMS, 1998.

[3] Z. Nehari, *On a class of nonlinear second-order differential equations*, Transactions of the American Mathematical Society **95** (1960), 101–123.

[4] ______, *Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations*, Acta Mathematica **105** (1961), 141–175.

[5] A. Pankov, *Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals*, Milan J. Math. **73** (2005), 259–287.

[6] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[7] A. Szulkin and T. Weth, *Ground state solutions for some indefinite variational problems*, Journal of Functional Analysis **257** (2009), 3802–3822.

[8] ______, *The method of Nehari manifold*, Handbook of Nonconvex Analysis and Applications (D.Y. Gao and D. Motreanu, ed.), International Press, Boston, 2010, pp. 597–632.

[9] J. Weidmann, *Linear operators in hilbert spaces*, Springer-Verlag, 1980.

[10] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhäuser, 1996.

[11] E. Zeidler, *Applied functional analysis*, Springer, 1995.