

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

*Modelo Esquemático de las Reacciones
Nucleares, descripción en el tiempo y
modelo Optico del Nucleo.*

INSTITUTO DE FISIKA



BIBLIOTECA
JUAN DE QUERZABAL

T E S I S

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS
(FISICA)

p r e s e n t a

Angel Fierros Palacios

México, D. F.

1970



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi madre:

Sra. Catalina P. Uda. de Fierros.

A la memoria de mi padre:

Sr. Angel Fierros y Fierros.

A mi esposa:

Sra. Rosa María Farell de Fierros

A mi hijita:

Rosa María Fierros Farell.

A mis hermanos y hermanas.

A mis maestros:

Dr. Francisco Medina Nicokau.
Dr. Leopoldo García-Colín S.
Dr. Alfonso Mondragón B.

Agradecimientos.

Mi sincero agradecimiento al profesor Dr. Francisco Medina Nicolau, por la dirección de esta tesis.

Al Instituto Mexicano del Petróleo y al Dr. Leopoldo García-Colín S., mi más profundo agradecimiento por las facilidades que me brindaron y que hicieron posible la realización del presente trabajo. Asimismo agradezco a los Drs. Eduardo Piña G., Fernando del Río, al M. en C. Fermín Viniégra H., y a los demás compañeros del I.M.P., sus valiosos consejos.

Agradezco al Instituto Nacional de la Investigación Científica la ayuda económica que me brindó durante mis estudios doctorales.

Índice.

Introducción	1
Capítulo 1.	
Descripción en el tiempo de una reacción nuclear con dos partículas compuestas	5
Capítulo 2.	
Comportamiento de las partículas compuestas en ausencia de acoplamiento con el canal de entrada	12
Desintegración de una de las partículas compuestas	22
Capítulo 3.	
Desintegración de las partículas compuestas	26
Capítulo 4.	
Dispersión elástica	38
Capítulo 5.	
Relación con el Modelo Óptico	51
Conclusiones	56

Apéndices.

I.- Solución de la Ecuación de Schredinger para movimiento libre _____	61
II.- Solución estacionaria del sistema de Ecuaciones del capítulo 1 _____	66
III.- Solución de la ecuación de 4º grado en número de onda. _____	83
IV.- Algunas propiedades de las funciones $w(z)$ _____	90
V.- Desarrollo en fracciones parciales _____	95
VI.- Cálculo de la sección para la dispersión elástica _____	100
Referencias _____	108

Introducción.

En las reacciones nucleares donde se produce la dispersión de nucleones por núcleos, ordinariamente se considera que se tiene un solo nucleón incidiendo sobre un sistema de A nucleones los cuales dan origen a un potencial dentro del cual la partícula incidente se mueve.

El proceso se describe con los métodos de la Mecánica Cuántica y dentro del marco de la Teoría de las Reacciones Nucleares. Por lo general, se busca obtener el comportamiento asintótico de las soluciones de las ecuaciones dinámicas que rigen el fenómeno. El problema se plantea escribiendo la ecuación de Schroedinger independiente del tiempo en términos del hamiltoniano asociado con el sistema de $(A+1)$ nucleones. La solución formal del problema permite determinar la matriz de dispersión para las reacciones nucleares. Si bien este procedimiento parece ser el más natural, es posible seguir un camino diferente partiendo de otros principios generales de la Mecánica Cuántica. En particular, vamos a utilizar las ideas contenidas en la Teoría Esquemática de las Reacciones Nucleares^(1,2).

#2#

En nuestro caso, se desea obtener no solo la parte estacionaria de las soluciones sino también los transitorios, para lo cual se plantea el problema en términos de ecuaciones de Schrödinger dependientes del tiempo.

El sistema de ecuaciones dinámicas así obtenido se resuelve con la técnica de las Transformadas de Laplace.

La situación física que consideramos es la siguiente: Inicialmente se tienen dos partículas de masas μ_1 y μ_2 , respectivamente, sin estructura interna que se mueven libremente. La interacción solo puede ocurrir en el punto de contacto. En el curso de la reacción, se tiene la posibilidad de que se formen dos partículas compuestas con masas definidas. Después de que se ha efectuado la reacción, el sistema se encuentra en un estado final que es idéntico al inicial, esto es, dos partículas de masas μ_1 y μ_2 , respectivamente, sin estructura interna que se mueven libremente. En otras palabras, vamos a considerar solo el canal de entrada.

El aspecto esencial en la derivación de la función de dispersión asociada con este problema, consiste en exigir que la probabilidad total de encontrar al sistema ya sea en la forma de dos partículas separadas

o en la forma de partícula compuesta, sea independiente del tiempo ^(1,2). Este requisito permite obtener un conjunto de condiciones de frontera que debe satisfacer la función de ondas del movimiento relativo de las partículas en el canal de entrada, en el punto de contacto. Así, la función de dispersión asociada al problema puede expresarse en términos de dichas condiciones en la frontera.

El programa de trabajo es el siguiente: En el primer capítulo se resuelve el problema completo y se obtiene la función de ondas que describe el comportamiento temporal del sistema completo. El segundo capítulo se dedica al estudio del comportamiento en el tiempo de las partículas compuestas, primero en ausencia de acoplamiento con el canal de entrada y, después, acoplando una de las partículas compuestas al canal incidente mientras se le desacopla de la otra partícula compuesta.

El tercer capítulo contiene el estudio de la desintegración del sistema. En este caso, las dos partículas compuestas se acoplan entre sí, pero solo una de ellas se conecta con el canal de entrada. En el cuarto capítulo se considera la situación en la cual se tiene un paquete de ondas incidente en el canal de

≠ 4 ≠

Entrada. Esto corresponde al proceso de dispersión elástica.

Finalmente el quinto capítulo contiene una discusión del Modelo Óptico del núcleo en términos de la amplitud de dispersión promedio.

Capítulo 1.

Descripción en el tiempo de una reacción nuclear con dos partículas compuestas.

Dentro del marco de la Teoría Esquemática de las Reacciones Nucleares ^(1,2), consideraremos el desarrollo en el tiempo de un sistema que puede encontrarse en tres etapas distintas:

Primera etapa: Dos partículas sin estructura interna que se mueven libremente.

Segunda etapa: Una partícula compuesta. Esta etapa está acoplada tanto a la primera etapa como a la tercera etapa.

Tercera etapa: Otra partícula compuesta. Esta etapa solo está acoplada a la segunda etapa.

Las partículas de la primera etapa interactúan en el punto de contacto y forman la partícula compuesta de la segunda etapa. Esta partícula compuesta puede desintegrarse en las dos partículas de la primera etapa o puede dar lugar a la partícula compuesta de la tercera etapa. La partícula compuesta de la tercera etapa solo puede dar origen a la partícula compuesta de la segunda etapa.

$\neq 6 \neq$

Sean m_1 y m_2 las masas de las partículas compuestas, cuyo comportamiento está descrito por las funciones de onda $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$, respectivamente, y sea $\Psi(r,t)$ la función de ondas para $l=0$ del movimiento relativo. Aquí r es la distancia relativa de las dos partículas y t el tiempo. El cero en la energía coincide con la suma de las masas en reposo de las dos partículas de la etapa primera.

Las ecuaciones dinámicas del sistema son^(1,2):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Psi(r,t) + 2i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r,t) &= 0 \\ i \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(t) - m_1 \psi_1(t) + C_{12} \psi_2(t) &= -C_{10} \frac{\partial}{\partial r} \Psi(r,t) \\ i \frac{\partial}{\partial t} \psi_2(t) - m_2 \psi_2(t) + C_{21} \psi_1(t) &= 0 \\ C_{01} \psi_1(t) &= \Psi(r,t) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Aquí hemos elegido el sistema de unidades de tal manera que $\hbar = 2m = 1$, con m la masa reducida del sistema. Además, $C_{21} = C_{12}^*$ es la constante de acoplamiento entre las partículas compuestas y $C_{10} = C_{01}^*$ la constante de acoplamiento entre la partícula compuesta 1 y el canal de entrada. La solución del sistema de ecuaciones (1.1) está sujeta a las siguientes condiciones iniciales:

#7#

$$\Psi_1(0) \neq 0; \Psi_2(0) \neq 0 \quad \text{--- (1.2a)}$$

$$\Psi_{in}(r,0) = H(r) e^{-i\varphi_0 r} \quad \text{--- (1.2b)}$$

con $\text{Re } \varphi_0 > 0$; $\text{Im } \varphi_0 < 0$ y $H(r)$ la función escalón definida como:

$$H(r) = \begin{cases} 0; & \text{para } r < 0 \\ 1; & \text{para } r > 0 \end{cases} \quad \text{--- (1.2c)}$$

Así, $\Psi_{in}(r,0)$ representa un paquete de ondas finito incidente, que decrece exponencialmente y se propaga en la dirección en que r disminuye.

La transformada de Laplace del sistema (1.1) es:

$$\bar{\Psi}''(r,p) + 2ip \bar{\Psi}(r,p) = 2i \Psi(r,0) \quad \text{--- (1.3a)}$$

$$(ip - m_1) \bar{\Psi}_1(p) + C_{12} \bar{\Psi}_2(p) = i \Psi_1(0) - C_{10} \bar{\Psi}'(0,p) \quad \text{--- (1.3b)}$$

$$(ip - m_2) \bar{\Psi}_2(p) + C_{21} \bar{\Psi}_1(p) = i \Psi_2(0) \quad \text{--- (1.3c)}$$

$$C_{01} \bar{\Psi}_1(p) = \bar{\Psi}(0,p) \quad \text{--- (1.3d)}$$

donde:

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt; \quad \text{Re } p > 0.$$

Definimos:

* 8 *

$$A(p) = \begin{pmatrix} ip - m_1 & c_{21} \\ c_{12} & ip - m_2 \end{pmatrix}; \quad \bar{\Psi}(p) = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1 \\ \bar{\Psi}_2 \end{pmatrix} \quad (1.4a)$$

$$\Psi^0 = \begin{pmatrix} \Psi_1^0 \\ \Psi_2^0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c_{10} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C^t = \begin{pmatrix} c_{01} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4b)$$

Las ecuaciones (1.3b, c y d) pueden escribirse como:

$$A \bar{\Psi} = -C \bar{\Psi}'(a, p) + i \Psi^0 \quad (1.3b, c)$$

$$C^t \bar{\Psi} = \bar{\Psi}(0, p) \quad (1.3d)$$

La solución de la ecuación de Schroedinger para el movimiento libre está dada en el Apéndice I. La transformada de Laplace del propagador libre es:

$$\bar{Q}_0(r-r'; p) = \frac{1}{q} e^{iq|r-r'|}; \quad \text{para toda } r. \quad (1.5)$$

donde $q = \sqrt{2ip}$; con $\text{Im } q \geq 0$.

La solución general de la ecuación (1.3a) es:

$$\bar{\Psi}(r, p) = \bar{\Psi}_{in}(r, p) + a e^{iqr} \quad (1.6)$$

donde a es una constante y:

$\neq 9 \neq$

$$\bar{\Psi}_{in}(r, p) = \int_0^{\infty} \bar{u}_0(r-r', p) \Psi(r') dr' \quad (1.7a)$$

En nuestro caso $\Psi(r')$ está dada en (1.2b). En $r=0$ se tiene:

$$\bar{\Psi}(0, p) = a + \bar{\Psi}_{in}(0, p) \quad (1.8a)$$

$$\bar{\Psi}'(0, p) = iq [a - \bar{\Psi}_{in}(0, p)] \quad (1.8b)$$

donde:

$$\bar{\Psi}_{in}(0, p) = \int_0^{\infty} \bar{u}_0(-r', p) \Psi(r') dr' \quad (1.7b)$$

Sustituyendo (1.8a) y (1.8b) en las ecuaciones (1.3b, c) y (1.3d) obtenemos:

$$A \bar{\Psi}(p) = -iq \mathcal{C} [\mathcal{C}^+ \bar{\Psi} - 2 \bar{\Psi}_{in}(0, p)] + i \Psi^0 \quad (1.9)$$

Y la transformada de Laplace de la función de ondas que describe el comportamiento de las partículas compuestas es:

$$\bar{\Psi}(p) = i (A + iq \mathcal{C} \mathcal{C}^+)^{-1} [2iq \mathcal{C} \bar{\Psi}_{in}(0, p) + \Psi^0] \quad (1.10)$$

Si combinamos (1.8a) y (1.3d) obtenemos:

$$a = \mathcal{C}^+ \bar{\Psi}(p) - \bar{\Psi}_{in}(0, p) \quad (1.11)$$

Sustituyendo (1.11) en (1.6) obtenemos la transformada de Laplace de la solución buscada. Esto es:

$$\bar{\Psi}(r, p) = \bar{\Psi}_{in}(r, p) - S(q) \bar{\Psi}_{in}(0, p) e^{iqr} + \frac{1}{2} i \mathcal{C}^+ T_r(q) \bar{\Psi}^0 \frac{e^{iqr}}{q} \quad (1.12)$$

$\neq 10 \neq$

donde:

$$T_r(q) = (A + iqCC^T)^{-1} \quad (1.13)$$

y de acuerdo con los resultados obtenidos en el apéndice II, la forma de la función de dispersión asociada al problema es la siguiente:

$$S(q) = 1 - 2iq C^T T_r(q) C \quad (1.14)$$

Entonces, de acuerdo con la expresión (I.9), la transformada de Laplace de la función de ondas que describe el comportamiento del sistema completo es:

$$\bar{\Psi}(r,p) = \frac{1}{iq} \left[-\frac{2q}{q^2 - q_0^2} e^{-iq_0 r} + \frac{e^{iq_0 r}}{q + q_0} \right] - S(q_0) \frac{e^{iq_0 r}}{iq(q - q_0)} + \sum_{j=1}^4 \text{Res} \left[\frac{1 - S(q)}{q - q_0} \right]_{q=q_j} \frac{e^{iq_0 r}}{iq(q - q_j)} - \frac{C^T}{2} \sum_{j=1}^4 \text{Res} \left[T_r(q) \right]_{q=q_j} \frac{e^{iq_0 r}}{iq(q - q_j)} \quad (1.15)$$

Para obtener la función de ondas dependiente del tiempo, calculamos la transformada inversa de Laplace de cada término de (1.15). Esto es:

$$\Psi(r,t) = \Psi_{in}(r,t) + \Psi_{E.R.}(r,t) + \Psi_s(r,t) + \Psi_{res}(r,t) + \Psi_b(r,t) \quad (1.16)$$

donde:

≠ 11 ≠

$$\Psi_{in}(r,t) = 1/2 e^{ir^2/2t} \omega\left(e^{-i3\pi/4} \frac{r + q_0 t}{\sqrt{2t}}\right) \quad (1.17a)$$

$$\Psi_{E.R.}(r,t) = -1/2 e^{ir^2/2t} \omega\left(e^{i\pi/4} \frac{r - q_0 t}{\sqrt{2t}}\right) \quad (1.17b)$$

$$\Psi_s(r,t) = 1/2 [1 - S(q_0)] e^{ir^2/2t} \omega\left(e^{i\pi/4} \frac{r - q_0 t}{\sqrt{2t}}\right) \quad (1.17c)$$

$$\Psi_{res}(r,t) = 1/2 \sum_{j=1}^4 \text{Re} \left[\frac{1 - S(q)}{q - q_0} \right]_{q=q_j} e^{ir^2/2t} \omega\left(e^{i\pi/4} \frac{r - q_j t}{\sqrt{2t}}\right) \quad (1.17d)$$

$$\Psi_d(r,t) = 1/4 C \sum_{j=1}^4 [\text{Tr}(q)]_{q=q_j} \Psi^0 e^{ir^2/2t} \omega\left(e^{i\pi/4} \frac{r - q_j t}{\sqrt{2t}}\right) \quad (1.17e)$$

En el apéndice IV se resumen algunas propiedades de las funciones $\omega(z)$ y en los siguientes capítulos se tratarán, separadamente, cada término de (1.16).

En las ecuaciones (1.17a-e), el primer término da la evolución temporal del paquete de ondas incidente, el segundo, la dispersión por esfera rígida; el tercero es la sombra. Este término toma en cuenta la parte de la amplitud de dispersión por esfera rígida que penetra en el sistema y es responsable de la formación de las partículas compuestas. El cuarto término da la dispersión resonante y el quinto y último término corresponde a la desintegración de las partículas compuestas.

Capítulo 2.

Comportamiento de las partículas compuestas en ausencia de acoplamiento con el canal de entrada.

Supongamos que las dos partículas compuestas están acopladas entre sí pero desacopladas del canal de entrada. Esto significa que solo intercambian probabilidad entre ellas. La situación inicial está dada por las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_in(0,p) &= 0 \\ \mathcal{C} &= \mathcal{C}^\dagger = 0 \\ \Psi^\circ &\neq 0\end{aligned} \quad \text{--- (2.1)}$$

La transformada de Laplace de la función de ondas que describe el comportamiento del sistema se obtiene de la ecuación (1.10). Su forma es la siguiente:

$$\bar{\Psi}(p) = i \mathbf{A} \Psi^\circ \quad \text{--- (2.2)}$$

donde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ip - m_1 & c_{12} \\ c_{21} & ip - m_2 \end{pmatrix} \quad \text{--- (2.3a)}$$

Su determinante es:

$\neq 13 \neq$

$$\Delta(q) = (q^2 - 2m_1)(q^2 - 2m_2) - 4C^2 \quad (2.3b)$$

donde $q = \sqrt{2i\dot{p}}$ y $C^2 = C_{12}C_{21} = |C_{12}|^2$. Este determinante se puede expresar en la forma general (V.1c) de tal manera que:

$$A^{-1} = 2\hat{\Theta}(q) / \Delta(q) \quad (2.4a)$$

donde:

$$\hat{\Theta}(q) = \begin{pmatrix} q^2 - 2m_2 & -2C_{12} \\ -2C_{21} & q^2 - 2m_1 \end{pmatrix} \quad (2.4b)$$

Entonces para $\bar{\Psi}(p)$ se obtiene:

$$\bar{\Psi}(p) = \sum_{j=1}^4 \frac{2i\hat{\Theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)} \frac{q_j}{q(q - q_j)} \Psi^0 \quad (2.5a)$$

donde:

$$\Delta_j(q_j) = \prod_{j \neq k} (q_j - q_k) \quad (2.5b)$$

Aquí hemos expresado A^{-1} como una suma de fracciones parciales. La transformada inversa de Laplace de (2.5a) da la función de ondas dependiente del tiempo. Esto es:

$$\Psi(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{q_j \hat{\Theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)} \omega(e^{-i3\pi/4} q_j \sqrt{t/2}) \Psi^0 \quad (2.6)$$

≠ 1/4 ≠

donde q_j son las raíces de la ecuación:

$$(q^2 - 2m_1)(q^2 - 2m_2) - 4C^2 = 0 \quad \text{--- (III.2)}$$

De acuerdo con las ecuaciones (III.3)-(III.5c) del apéndice III, las componentes del vector (2.6) son:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) = \frac{1}{4} \left[(\delta_+ \psi_1^0 - \frac{2C_{12}}{g'} \psi_2^0) \{ \omega(z_{1+}^0) + \omega(z_{1-}^0) \} + \right. \\ \left. + (\delta_- \psi_1^0 + \frac{2C_{12}}{g'} \psi_2^0) \{ \omega(z_{2+}^0) + \omega(z_{2-}^0) \} \right] \quad \text{--- (2.7a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(t) = \frac{1}{4} \left[(-\frac{2C_{21}}{g'} \psi_1^0 + \delta_- \psi_2^0) \{ \omega(z_{1+}^0) + \omega(z_{1-}^0) \} + \right. \\ \left. + (\frac{2C_{21}}{g'} \psi_1^0 + \delta_+ \psi_2^0) \{ \omega(z_{2+}^0) + \omega(z_{2-}^0) \} \right] \quad \text{--- (2.7b)} \end{aligned}$$

donde:

$$z_j^0 = e^{-i3\pi/4} q_j^0 \sqrt{t/2}; \text{ con } j=1\pm, 2\pm \quad \text{--- (2.8)}$$

Sustituyendo aquí las q_j^0 dadas en (III.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} z_{1+}^0 &= [-(1+i)\sqrt{m_+ + g'}] \sqrt{t/4} \\ z_{1-}^0 &= [(1+i)\sqrt{m_+ + g'}] \sqrt{t/4} \quad \text{--- (2.9)} \\ z_{2+}^0 &= [-(1+i)\sqrt{m_+ - g'}] \sqrt{t/4} \\ z_{2-}^0 &= [(1+i)\sqrt{m_+ - g'}] \sqrt{t/4} \end{aligned}$$

De aquí se ve que:

$$\text{Im}(z_{1+}^0) < 0; \text{Im}(z_{1-}^0) > 0 \quad \text{--- (2.10)}$$

$$\text{Im}(z_{2+}^0) < 0; \text{Im}(z_{2-}^0) > 0$$

≠ 15 ≠

y sabemos ⁽¹²⁾ que cuando $\text{Im}(z) < 0$, la función $\omega(z)$ puede expresarse como la suma de un término exponencial y otro difusivo, en el cual $\text{Im}(-z) > 0$. Es decir:

$$\omega(z_{j+}^{\circ}) = 2 e^{-z_{j+}^{\circ 2}} - \omega(-z_{j+}^{\circ}) \quad (2.11)$$

con $j=1, 2$. En ese caso, de las ecuaciones (2.9) se ve que:

$$\omega(-z_{1+}^{\circ}) = \omega(z_{1-}^{\circ}) \quad (2.12)$$

$$\omega(-z_{2+}^{\circ}) = \omega(z_{2-}^{\circ})$$

En otras palabras, las partes puramente difusivas de las funciones $\omega(z)$ se cancelan y solo sobreviven los términos exponenciales. Esto era de esperarse dado que las partículas compuestas están desacopladas del canal de entrada. Sustituyendo todo lo anterior en las ecuaciones (2.7) obtenemos:

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\delta_+ \psi_1^{\circ} - \frac{2c_{12}}{g'} \psi_2^{\circ} \right) e^{-z_{1+}^{\circ 2}} + \left(\delta_- \psi_1^{\circ} + \frac{2c_{12}}{g'} \psi_2^{\circ} \right) e^{-z_{2+}^{\circ 2}} \right] \quad (2.13)$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{2c_{21}}{g'} \psi_1^{\circ} + \delta_- \psi_2^{\circ} \right) e^{-z_{1+}^{\circ 2}} + \left(\frac{2c_{21}}{g'} \psi_1^{\circ} + \delta_+ \psi_2^{\circ} \right) e^{-z_{2+}^{\circ 2}} \right]$$

16

Consideremos ahora dos casos posibles:

1.- Supongamos que inicialmente todo el sistema se encuentra en forma de la partícula compuesta 1. Esto es:

$$\psi_1^0 \neq 0; \psi_2^0 = 0$$

Entonces:

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2} [\delta_+ e^{-z_{1+}^2} + \delta_- e^{-z_{2+}^2}] \psi_1^0 \quad \text{--- (2.14)}$$

$$\psi_2(t) = -\frac{c_{21}}{g} [e^{-z_{1+}^2} - e^{-z_{2+}^2}] \psi_1^0$$

2.- Inicialmente el sistema se encuentra en forma de la partícula compuesta 2. Es decir:

$$\psi_1^0 = 0; \psi_2^0 \neq 0.$$

Entonces:

$$\psi_1(t) = -\frac{c_{12}}{g} [e^{-z_{1+}^2} - e^{-z_{2+}^2}] \psi_2^0 \quad \text{--- (2.15)}$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2} [\delta_- e^{-z_{1+}^2} + \delta_+ e^{-z_{2+}^2}] \psi_2^0$$

Como es fácil ver, ambos casos son totalmente simétricos de tal manera que podemos considerar como situación inicial cualquiera de ellos. Supongamos que inicialmente tenemos el caso 1. Entonces:

≠ 17 ≠

$$\begin{aligned} -z_1^{\circ 2} &= -\frac{it}{2} (m_+ + \gamma) \quad \text{--- (2.16)} \\ -z_2^{\circ 2} &= -\frac{it}{2} (m_+ - \gamma) \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.16) en (2.14) obtenemos:

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{it}{2} (m_+ + \gamma)} [\delta_+ + \delta_- e^{i\gamma t}] \psi_1^{\circ} \quad \text{--- (2.17)}$$

$$\psi_2(t) = -\frac{c_{21}}{\gamma} e^{-\frac{it}{2} (m_+ + \gamma)} [1 + e^{i\gamma t} (-1)] \psi_1^{\circ}$$

El módulo de estas expresiones es:

$$|\psi_1(t)|^2 = \frac{1}{2} |\delta_+ + \delta_- e^{i\gamma t}| |\psi_1^{\circ}| \quad \text{--- (2.18)}$$

$$|\psi_2(t)|^2 = \frac{c_{21}}{\gamma} |1 + e^{i\gamma t} (-1)| |\psi_1^{\circ}|$$

Para $t=0$ las ecuaciones (2.18) se reducen a la condición inicial. Esto es:

$$|\psi_1(0)| = |\psi_1^{\circ}| \quad \text{--- (2.19)}$$

$$|\psi_2(0)| = 0$$

Podemos analizar gráficamente las ecuaciones (2.18) si construimos una pareja de vectores en el plano complejo. Así, el vector real δ_+ permanece fijo en el espacio mientras el

≠18≠

vector complejo $\delta e^{i\gamma t}$ gira en torno al origen con velocidad angular constante igual a γ , describiendo una circunferencia de radio δ . Como las partículas compuestas están desacopladas del canal de entrada, no se tienen pérdidas por disipación de tal manera que el sistema únicamente oscila. Con otras palabras, el vector $\delta e^{i\gamma t}$ efectúa una vuelta completa en un tiempo T_0 dado por:

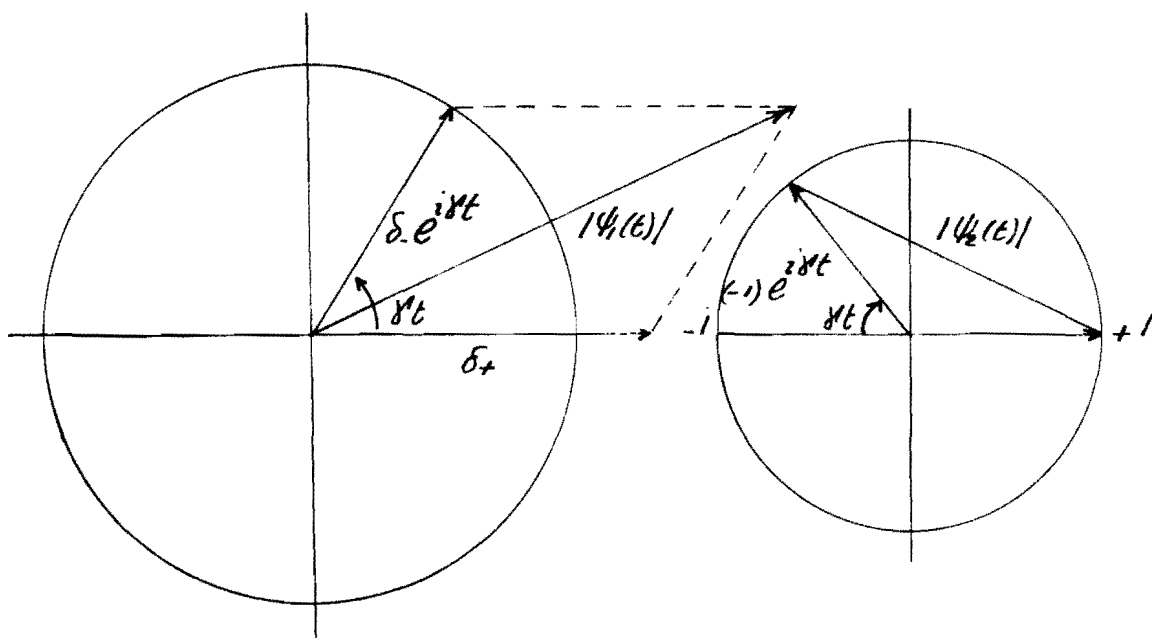
$$T_0 = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 + 4C^2}} \quad (2.20)$$

La segunda de las expresiones (2.18) tiene el mismo comportamiento general que la primera, nada más que en este caso el ciclo comienza en cero. Los vectores representativos tienen magnitud 1 y el vector complejo $(-1)e^{i\gamma t}$ realiza el mismo movimiento que el efectuado por $\delta e^{i\gamma t}$, nada más que en sentido opuesto. En otras palabras, también da una vuelta completa en un tiempo T_0 dado por (2.20).

El comportamiento temporal del sistema es el siguiente: Inicialmente, esto es en $t=0$, el sistema se encuentra en forma de la partícula compuesta 1, pero a medida que transcurre el tiempo y debido al acoplamiento entre las partículas compuestas 1 y 2, el sistema va a encontrarse parte en forma de la partícula compuesta 1 y parte en

≠ 19 ≠

forma de la partícula compuesta 2. Al cabo de un tiempo T_0 la situación inicial se repite y el ciclo se inicia de nuevo. Esto significa que las partículas compuestas 1 y 2, intercambian probabilidades de tal manera que el sistema oscila con una frecuencia característica f_0 dada por el inverso de la expresión (2.20). Al período de oscilación T_0 vamos a llamarlo tiempo de vaciado. La situación en el plano complejo es la siguiente:



Si aquí aplicamos la ley de los cosenos, se obtiene:

$$|\psi_1(t)|^2 = \left[\frac{m^2}{\gamma^2} \sin^2 \frac{\gamma t}{2} + \cos^2 \frac{\gamma t}{2} \right] |\psi_1^0|^2 \quad \text{--- (2.21)}$$

$$|\psi_2(t)|^2 = \frac{4C^2}{\gamma^2} \sin^2 \frac{\gamma t}{2} |\psi_1^0|^2$$

$\neq 20 \neq$

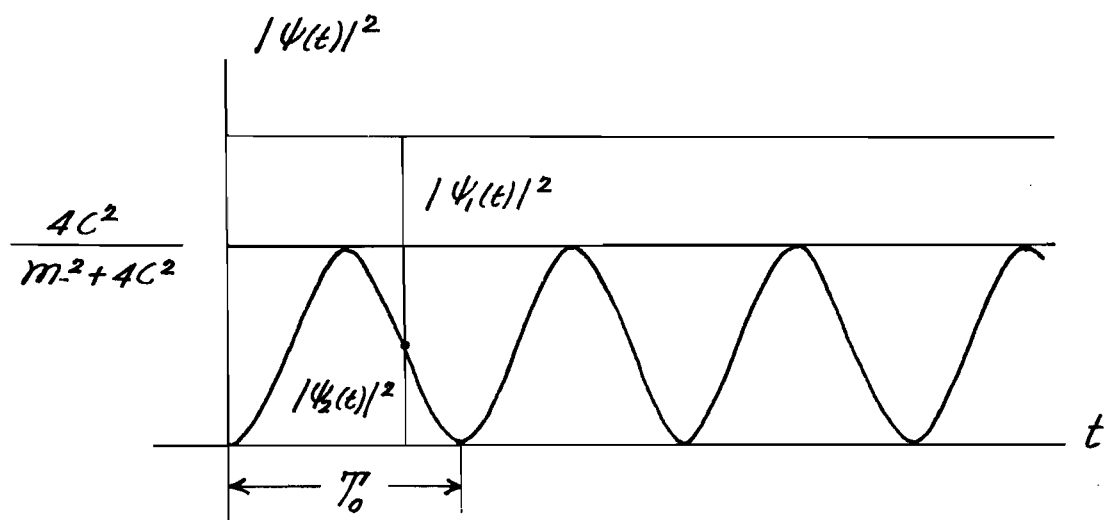
Estas expresiones dan las respectivas probabilidades para las partículas compuestas 1 y 2. Inicialmente se tiene que:

$$|\psi_0|^2 = 1 \quad (2.22a)$$

Entonces:

$$|\psi_1(t)|^2 = 1 - |\psi_2(t)|^2 \quad (2.22b)$$

Si graficamos $|\psi(t)|^2$ vs. t obtenemos:



Consideremos dos casos posibles:

i) Acoplamiento débil. Esto es: $m^2 \gg 4c^2$. Entonces:

$$T_0' \simeq \frac{2\pi}{|m_1 - m_2|} \left(1 - \frac{2c^2}{m^2}\right) \quad (2.23)$$

Si hacemos c^2 muy pequeño podemos despreciar el término $2c^2/m^2$ en comparación con la unidad, de modo que:

$$\neq 21 \neq$$

$$T_0' \simeq \frac{2\pi}{|m_1 - m_2|} \quad \text{--- (2.23)}$$

con $m_1 \neq m_2$. Esto significa que el intercambio se realizará con una rapidez que depende de la magnitud relativa de las masas de las partículas compuestas 1 y 2. Si por el contrario mantenemos fija la diferencia de masas y aumentamos la intensidad del acoplamiento, el período de oscilación disminuye de modo que el intercambio se va a realizar cada vez con mayor rapidez.

ii) Acoplamiento fuerte. Es decir: $m^2 \ll 4c^2$. Entonces:

$$T_0'' \simeq \frac{\pi}{|C_{12}|} \left(1 - \frac{m^2}{8c^2}\right) \quad \text{--- (2.24)}$$

Sin embargo, $m^2/8c^2 \ll 1$, de modo que podemos despre-
ciar ese término en comparación con la unidad, con lo cual
obtenemos:

$$T_0'' \simeq \frac{\pi}{|C_{12}|} \quad \text{--- (2.24)}$$

Es evidente que la rapidez con que se realice el inter-
cambio va a depender de la magnitud del acoplamiento
entre las partículas compuestas 1 y 2. Si $|C_{12}|$ se hace muy
intenso, el período T_0'' disminuye. Si $|C_{12}|$ es muy pequeño,
 T_0'' aumenta.

Desintegración de una de las partículas compuestas.

Vamos a acoplar una de las partículas compuestas con el canal de entrada, mientras la desacoplamos de la otra partícula compuesta. Esto significa que en el canal de entrada se va a presentar un fenómeno de desintegración. El problema ya ha sido ampliamente discutido por F. Medina η y U. Oseguera⁽³⁾. Sin embargo, vamos a bosquejar el cálculo debido a que tenemos necesidad de algunos de sus resultados. De acuerdo con nuestro esquema, la situación inicial es la siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{in}(0,p) &= 0 \\ C \neq 0; C^{\dagger} &\neq 0 \quad \text{--- (2.25)} \\ \bar{\Psi}^0 &\neq 0 \end{aligned}$$

La función de ondas dependiente del tiempo tiene la misma forma que la correspondiente al caso anterior. Esto es:

$$\bar{\Psi}(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{q_j \hat{\theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)} \omega(e^{-i3\pi/4} q_j \sqrt{t/2}) \bar{\Psi}^0 \quad \text{--- (2.26)}$$

donde q_j son las soluciones de la ecuación:

≠ 23 ≠

$$(q^2 - 2m_1 + 2i q \beta^2)(q^2 - 2m_2) = 0 \quad \text{--- (2.27)}$$

De acuerdo con las ecuaciones (III.7) a (III.9c) del apéndice III, las componentes del vector (0.26) son:

$$\Psi_1(t) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{i\beta^2}{\sqrt{2m_1}}\right) \omega(e^{-i3\pi/4} q_{1+} \sqrt{t/2}) + \left(1 + \frac{i\beta^2}{\sqrt{2m_1}}\right) \omega(e^{-i3\pi/4} q_{1-} \sqrt{t/2}) \right] \Psi_1^0 \quad \text{--- (2.28)}$$

$$\Psi_2(t) = \frac{1}{2} \left[\omega(e^{-i3\pi/4} q_{2+} \sqrt{t/2}) + \omega(e^{-i3\pi/4} q_{2-} \sqrt{t/2}) \right] \Psi_2^0$$

Como es fácil ver, las funciones de onda que describen el comportamiento temporal de las partículas compuestas 1 y 2, son totalmente independientes. Supongamos que en el instante en que desconectamos el acoplamiento entre las partículas compuestas, todo el sistema se encuentra en forma de la partícula compuesta 1. Entonces:

$$\Psi_1^0 \neq 0 ; \Psi_2^0 = 0 \quad \text{--- (2.29)}$$

y:

$$\Psi_1(t) = (q_{1+} - q_{1-})^{-1} [q_{1+} \omega(z_{1+}) - q_{1-} \omega(z_{1-})] \Psi_1^0 \quad \text{--- (2.30)}$$

donde:

$$z_{1+} = \left[-(\sqrt{2m_1} + \beta^2) - i(\sqrt{2m_1} - \beta^2) \right] \sqrt{t/4} \quad \text{--- (2.31)}$$

$$z_{1-} = \left[(\sqrt{2m_1} - \beta^2) + i(\sqrt{2m_1} + \beta^2) \right] \sqrt{t/4}$$

Si $\mathcal{C}^2 < \sqrt{2m_1}$, $\text{Im}(z_{1+}) < 0$; $\text{Im}(z_{1-}) > 0$. Entonces:

$$\psi_1(t) = (g_{1+} g_{1-})^{-1} \left[2g_{1+} e^{-z_{1+}^2} - (g_{1+} \omega(-z_{1+}) + g_{1-} \omega(z_{1-})) \right] \psi_1^0 \quad (2.32)$$

donde:

$$\begin{aligned} -z_{1+}^2 &= -itm_1 - \mathcal{C}^2 \sqrt{2m_1} t \\ \omega(-z_{1+}) &= \omega \left[(1+i) g_{1+} \sqrt{t/4} \right] \\ \omega(z_{1-}) &= \omega \left[-(1+i) g_{1-} \sqrt{t/4} \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

De acuerdo con (2.32), la partícula compuesta 1 tiene dos formas distintas de desintegración: una forma exponencial y otra difusional. Ambos modos de desintegración actúan coherentemente.

Supongamos que el acoplamiento es débil. Esto es: $\sqrt{2m_1} > \mathcal{C}^2$. En otras palabras, la resonancia asociada a la partícula compuesta 1 está bien definida. Entonces, los polos $g_{1\pm}$ se encuentran muy cerca del eje real y muy alejados del eje imaginario. Esto permite despreciar \mathcal{C}^2 en comparación con $\sqrt{2m_1}$, de tal manera que:

$$\begin{aligned} g_{1+} &\simeq \sqrt{2m_1} = g_{1-} \\ \omega(-z_{1+}) &\simeq \omega(z_{1-}) = \omega \left[(1+i) \sqrt{2m_1} \sqrt{t/4} \right] \\ g_{1+} \omega(-z_{1+}) + g_{1-} \omega(z_{1-}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

En esta aproximación el primer modo de desintegración es el dominante ya que la contribución de los términos difusivos

≠ 25 ≠

Es despreciable. Entonces:

$$\psi_1(t) \approx [2q_{1+}(q_{1+}q_{1-})^{-1} e^{-itm_1} e^{-t\beta^2\sqrt{2m_1}}] \psi_1^0 \quad (2.35)$$

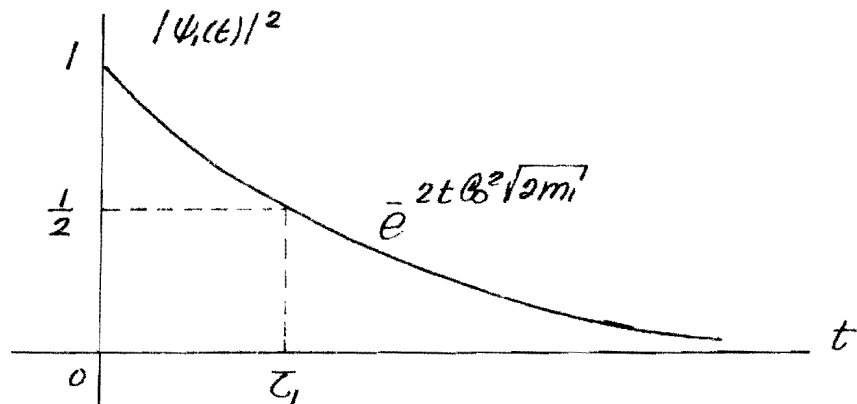
El módulo al cuadrado de esta expresión da la probabilidad para la partícula compuesta 1. Si consideramos que inicialmente $|\psi_1^0|^2 = 1$, obtenemos:

$$|\psi_1(t)|^2 = e^{-2t\beta^2\sqrt{2m_1}} \quad (2.36)$$

Así, la probabilidad para la partícula compuesta 1 disminuye exponencialmente con el tiempo. La vida media de dicha partícula compuesta es:

$$\tau_1 = \frac{1}{2\beta^2\sqrt{2m_1}} \quad (2.37)$$

Si graficamos $|\psi_1(t)|^2$ vs. t , obtenemos



Para tiempos suficientemente grandes, la forma difusional de la desintegración es la dominante ya que el término exponencial de (2.32) tiende a cero más rápidamente que el difusivo cuando $t \rightarrow \infty$. Esto es todo lo que se discutirá de este caso.

Capítulo 3.

Desintegración de las partículas compuestas.

En el estudio del comportamiento en el tiempo del fenómeno de la desintegración de un sistema inestable vamos a considerar, de acuerdo con nuestro modelo, que las partículas compuestas están acopladas entre sí mientras que solo una de ellas está acoplada al canal de entrada. Es claro que debido al acoplamiento interno, el sistema va a oscilar con la frecuencia característica:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{m^2 + 4c^2} \quad \text{--- (3.1)}$$

Al mismo tiempo, y debido al acoplamiento con el canal de entrada, se va a presentar un fenómeno de desintegración. Así, una parte de la probabilidad total va a estar contenida en las partículas compuestas mientras otra parte se va a encontrar en el canal de entrada. Supongamos que la vida media, τ_1 , de la partícula compuesta que está acoplada al canal de entrada, en ausencia de acoplamiento con la otra partícula compuesta, es mucho mayor que el tiempo de vaciado T_0 de las partículas compuestas. Esto es:

≠ 27 ≠

$$\tau_1 \gg \tau_0 \quad \text{--- (3.2)}$$

Esto significa que las partículas compuestas van a intercambiar probabilidad muchas veces antes de que el efecto disipativo sea importante. En este caso, la situación inicial de acuerdo con nuestro esquema es la siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{\text{in}}(0, p) &= 0 \\ C \neq 0; C^{\dagger} &\neq 0 \quad \text{--- (3.3)} \\ \bar{\Psi}^{\circ} &\neq 0 \end{aligned}$$

La función de ondas dependiente del tiempo tiene exactamente la misma forma que la correspondiente a los casos tratados en el capítulo 2. Esto es:

$$\bar{\Psi}(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{q_j \hat{\theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)} \omega(e^{-i3\pi/4} q_j \sqrt{t/2}) \bar{\Psi}^{\circ} \quad \text{--- (3.4)}$$

Nada más que ahora:

$$\hat{\theta}(q_j) = \begin{pmatrix} q_j^2 - 2m_2 & -2C_{12} \\ -2C_{21} & q_j^2 + 2iC_0^2 q_j - 2m_1 \end{pmatrix} \quad \text{--- (3.5)}$$

donde q_j son las raíces de la ecuación:

$$(q^2 - 2m_1 + 2iC_0^2 q)(q^2 - 2m_2) - 4C^2 = 0 \quad \text{--- (3.6)}$$

Como las resonancias asociadas a las partículas compuestas están bien definidas, $\text{Re } \eta_{j\pm} \gg \text{Im } \eta_{j\pm}$, $j=1,2$. Esto quiere decir que los polos se encuentran muy cerca del eje real pero muy alejados del eje imaginario. Entonces por simplicidad, vamos a calcular los coeficientes de las funciones $\omega(z)$ en (3.4) considerando que los polos están colocados sobre el eje real. Esto es, vamos a considerar que $\text{Im } \eta_{j\pm} = 0$. Esto equivale a suponer que $\mathcal{O}^2 \delta_{\pm}$ es muy pequeño comparado con $\sqrt{m_{\pm} \pm \delta}$ y, por tanto, podemos despreciar $\text{Im } \eta_{j\pm}$ en comparación con $\text{Re } \eta_{j\pm}$. Todo lo anterior permite utilizar los cálculos que se hicieron en el apéndice III para el caso tratado en la primera parte del capítulo 2, en particular las ecuaciones (III.3) a (III.5c). Sin embargo, en los argumentos de las funciones $\omega(z)$ utilizaremos las $\eta_{j\pm}$ completas como están calculadas en el apéndice III, en las ecuaciones (III.16). Así, las componentes del vector (3.4) son:

$$\Psi_1(t) = \frac{1}{4} \left[\left(\delta_+ \Psi_1^0 - \frac{2\mathcal{O}_{12} \Psi_2^0}{\delta} \right) [\omega(z_{1+}) + \omega(z_{1-})] + \left(\delta_- \Psi_1^0 + \frac{2\mathcal{O}_{12} \Psi_2^0}{\delta} \right) [\omega(z_{2+}) + \omega(z_{2-})] \right] \quad \text{--- (3.7)}$$

$$\Psi_2(t) = \frac{1}{4} \left[\left(-\frac{2\mathcal{O}_{21} \Psi_1^0}{\delta} + \delta_- \Psi_2^0 \right) [\omega(z_{1+}) + \omega(z_{1-})] + \left(\frac{2\mathcal{O}_{21} \Psi_1^0}{\delta} + \delta_+ \Psi_2^0 \right) [\omega(z_{2+}) + \omega(z_{2-})] \right]$$

≠ 29 ≠

donde δ_{\pm} y γ' están definidas en (III.5c) y (III.4a), y:

$$z_j' = e^{-i3\pi/4} q_j \sqrt{t/2} \quad \text{con: } j=1\pm, 2\pm \quad (3.8)$$

Además:

$$q_{1\pm}' = \pm \sqrt{m_+ + \gamma'} - i C_0^2 \delta_{\pm} / 2 \quad (III.16)$$

$$q_{2\pm}' = \pm \sqrt{m_+ - \gamma'} - i C_0^2 \delta_{\pm} / 2$$

Entonces:

$$z_{1+}' = [-(1+i) (\sqrt{m_+ + \gamma'} - i C_0^2 \delta_{+} / 2)] \sqrt{t/4}$$

$$z_{1-}' = [(1+i) (\sqrt{m_+ + \gamma'} + i C_0^2 \delta_{+} / 2)] \sqrt{t/4} \quad (3.9)$$

$$z_{2+}' = [-(1+i) (\sqrt{m_+ - \gamma'} - i C_0^2 \delta_{-} / 2)] \sqrt{t/4}$$

$$z_{2-}' = [(1+i) (\sqrt{m_+ - \gamma'} + i C_0^2 \delta_{-} / 2)] \sqrt{t/4}$$

De aquí se ve que:

$$\text{Im}(z_{1+}') < 0; \text{Im}(z_{1-}') > 0 \quad (3.10)$$

$$\text{Im}(z_{2+}') < 0; \text{Im}(z_{2-}') > 0$$

y sabemos ⁽¹²⁾ que cuando $\text{Im}(z) < 0$, la función $w(z)$ se puede expresar como la suma de un término exponencial y otro difusivo, en el cual $\text{Im}(-z) > 0$. Esto es:

$$w(z_j') = 2e^{-z_j'^2} - w(-z_j'^2); \quad \text{con: } j=1, 2. \quad (3.11)$$

Ahora bien, para tiempos muy pequeños comparados con el tiempo de vaciado de las partículas compuestas, la forma

Exponencial de la desintegración es la dominante. Esto está de acuerdo con el hecho que las resonancias asociadas con las partículas compuestas están bien definidas. Conservando en mente este hecho, vamos a ignorar la parte puramente difusiva y a trabajar solamente con la parte exponencial. Entonces para (3.7) obtenemos:

$$\Psi_1(t) = \frac{1}{2} \left[(\delta_+ \Psi_1^0 - \frac{2C_{12}}{g} \Psi_2^0) e^{-z_1^2} + (\delta_- \Psi_1^0 + \frac{2C_{12}}{g} \Psi_2^0) e^{-z_2^2} \right] \quad (3.12)$$

$$\Psi_2(t) = \frac{1}{2} \left[(-\frac{2C_{21}}{g} \Psi_1^0 + \delta_- \Psi_2^0) e^{-z_1^2} + (\frac{2C_{21}}{g} \Psi_1^0 + \delta_+ \Psi_2^0) e^{-z_2^2} \right]$$

Supongamos que inicialmente todo el sistema se encuentra en forma de la partícula compuesta 1. Es decir:

$$\Psi_1^0 \neq 0; \Psi_2^0 = 0.$$

Entonces:

$$\Psi_1(t) = \frac{1}{2} \left[\delta_+ e^{-z_1^2} + \delta_- e^{-z_2^2} \right] \Psi_1^0 \quad (3.13)$$

$$\Psi_2(t) = -\frac{C_{21}}{g} \left[e^{-z_1^2} - e^{-z_2^2} \right] \Psi_1^0$$

donde:

≠ 31 ≠

$$-z_1'^2 = -itQ_1 - \epsilon_1 t \quad \text{--- (3.14a)}$$

$$-z_2'^2 = -itQ_2 - \epsilon_2 t$$

con:

$$Q_1 = \frac{1}{2} (m_+ + \gamma) \quad \text{--- (3.14b)}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} (m_+ - \gamma)$$

$$\epsilon_1 = \frac{c^2}{2} \sqrt{m_+ + \gamma} \delta_+ \quad \text{--- (3.14c)}$$

$$\epsilon_2 = \frac{c^2}{2} \sqrt{m_+ - \gamma} \delta_-$$

En términos de esto se tiene:

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2} e^{-itQ_1} \left[\delta_+ e^{-\epsilon_1 t} + \delta_- e^{-\epsilon_2 t} e^{i\gamma t} \right] \psi_0 \quad \text{--- (3.15)}$$

$$\psi_2(t) = -\frac{c_2}{\gamma} e^{-itQ_1} \left[e^{-\epsilon_1 t} + e^{i\gamma t} (-e^{-\epsilon_2 t}) \right] \psi_0$$

donde γ es inversamente proporcional al tiempo de vaciado T_0 .

El módulo al cuadrado de las expresiones (3.15) da las respectivas probabilidades para las partículas compuestas 1 y 2. Entonces:

$$|\psi_1(t)|^2 = \frac{1}{4} \left[\delta_+^2 e^{-t/\tau_1} + \delta_-^2 e^{-t/\tau_2} + 2\delta_+\delta_- \cos \gamma t e^{-\frac{t}{2}(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2})} \right] |\psi_0|^2$$
$$|\psi_2(t)|^2 = \frac{c^2}{\gamma^2} \left[e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} - 2\cos \gamma t e^{-\frac{t}{2}(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2})} \right] |\psi_0|^2 \quad \text{--- (3.16)}$$

#32#

donde $\tau_{1,2}$ son las vidas medias* de las partículas compuestas 1 y 2, respectivamente, y están dadas por:

$$\tau_1 = \frac{1}{2\varepsilon_1} = \frac{1}{c^2 \delta_+ \sqrt{m_+ + \delta^+}} \quad \text{--- (3.17)}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2\varepsilon_2} = \frac{1}{c^2 \delta_- \sqrt{m_+ - \delta^+}}$$

La probabilidad de encontrar al sistema en forma de partícula compuesta es:

$$|\psi(t)|^2 = \frac{1}{2} \left[\delta_+ e^{-t/\tau_1} + \delta_- e^{-t/\tau_2} \right] |\psi_0|^2 \quad \text{--- (3.18)}$$

Consideremos ahora los siguientes casos:

Caso 1: Supongamos que $m_1 = m_2 = m$. Entonces:

$$m - \delta^+ = 0$$

$$c^2 \delta^2 = 1/4 \quad \text{--- (3.19)}$$

$$\delta^+ = 2/c$$

$$\delta_+ = \delta_- = 1$$

* Cuando $c^2 = 0$, la vida media de la partícula compuesta 1 calculada aquí, se reduce a la que se calculó en la 2ª parte del cap. 2. Por esta razón usamos el mismo símbolo τ_1 .

#33#

Las probabilidades para las partículas compuestas 1 y 2 son:

$$|\Psi_1(t)|^2 = \frac{1}{4} \left[e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} + 2 \cos 2|c_{12}|t e^{-\frac{t}{2}(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2})} \right] |\Psi_0|^2 \quad \text{--- (3.20)}$$

$$|\Psi_2(t)|^2 = \frac{1}{4} \left[e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} - 2 \cos 2|c_{12}|t e^{-\frac{t}{2}(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2})} \right] |\Psi_0|^2$$

Y la probabilidad de encontrar al sistema en forma de partícula compuesta es:

$$|\Psi(t)|^2 = \frac{1}{2} \left[e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} \right] |\Psi_0|^2 \quad \text{--- (3.21)}$$

donde:

$$\tau_1 = \frac{1}{c_0^2 \sqrt{2m+2|c_{12}|}} \quad \text{--- (3.22)}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{c_0^2 \sqrt{2m-2|c_{12}|}}$$

La función $|\Psi_2(t)|^2$ tiene máximos y mínimos dados por:

$$|\Psi_2(t)|^2 \begin{matrix} \text{máx.} \\ \text{mín.} \end{matrix} = \frac{1}{4} \left[e^{-t/2\tau_1} \pm e^{-t/2\tau_2} \right]^2 |\Psi_0|^2 \quad \text{--- (3.23)}$$

Podemos graficar $|\Psi(t)|^2$ y $|\Psi_2(t)|^2$ contra el tiempo, dando valores arbitrarios a los parámetros y de la gráfica

≠ 34 ≠

Obtener $|\Psi_1(t)|^2$ por diferencia.

Es interesante hacer notar que para valores grandes del tiempo:

$$|\Psi(t)|^2 = \frac{1}{2} e^{-t/\tau_1} \quad \text{--- (3.24)}$$

$$|\Psi_2(t)|^2_{\text{máx.}} = |\Psi_2(t)|^2_{\text{min}} = \frac{1}{4} e^{-t/\tau_1}$$

Esto significa que las oscilaciones se han amortiguado de tal manera que la partícula compuesta decae exponencialmente con el tiempo. Como es fácil ver de (3.24) la mitad de la probabilidad total corresponde a la partícula compuesta 1 y la otra mitad a la partícula compuesta 2.

Caso 2: Supongamos ahora que el acoplamiento es débil. Esto es: $m^2 \gg 4c^2$ y $m_1 \neq m_2$. Entonces:

$$\delta \simeq m \cdot [1 + 2c^2/m^2]$$

$$\delta_+ \simeq 2 [1 - c^2/m^2]$$

$$\delta_- \simeq 2c^2/m^2$$

$$c^2/\delta^2 \simeq c^2/m^2$$

En ese caso:

$$|\Psi(t)|^2 = [e^{-t/\tau_1} + c^2/m^2 (e^{-t/\tau_2} - e^{-t/\tau_1})] |\Psi_0|^2 \quad \text{--- (3.25)}$$

$$|\Psi_2(t)|^2 = c^2/m^2 [e^{-t/\tau_+} + e^{-t/\tau_-} - 2\cos[m \cdot (1 + 2c^2/m^2)t] e^{-\frac{t}{2}(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2})}] |\Psi_0|^2$$

Los máximos y mínimos de $|\psi_2(t)|^2$ están dados por:

$$|\psi_2(t)|^2_{\substack{\text{máx.} \\ \text{min.}}} = c^2/m^2 \left[e^{-t/2\tau_1} \pm e^{-t/2\tau_2} \right]^2 |\psi_1^0|^2 \quad (3.26)$$

Además:

$$\sqrt{m_+ + \delta^1} \simeq \sqrt{2m_1 + 2c^2/m_-}$$

$$\sqrt{m_+ - \delta^1} \simeq \sqrt{2m_2 - 2c^2/m_-}$$

$$(\delta^1 + m_-) \simeq 2m_- + 2c^2/m_-$$

$$(\delta^1 - m_-) \simeq 2c^2/m_-$$

Con esto las vidas medias toman la forma:

$$\tau_1 = \frac{(m_-^2 + 2c^2)}{2c^2(m_-^2 + c^2)\sqrt{2m_1 + 2c^2/m_-}} \quad (3.27)$$

$$\tau_2 = \frac{(m_-^2 + 2c^2)}{2c^2 c^2 \sqrt{2m_2 - 2c^2/m_-}}$$

Es interesante hacer notar que cuando $c^2 = 0$, esto es, en ausencia de acoplamiento entre las partículas compuestas:

$$\left. \begin{aligned} |\psi(t)|^2 &= |\psi_1(t)|^2 = e^{-t/\tau_1} |\psi_1^0|^2 \\ |\psi_2(t)|^2 &= 0 \\ \tau_1 &= \frac{1}{2c^2 \sqrt{2m_1}}; \tau_2 \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Como puede verse en (3.28) la vida media de la partícula compuesta 1 es la misma que la calculada en la

Segunda parte del capítulo 2.

Caso 3: Supongamos ahora que el acoplamiento es fuerte. Es decir: $m^2 \ll 4c^2$. Entonces:

$$\delta \simeq 2|c_{12}| + m^2/4|c_{12}|$$

$$\delta_+ \simeq 1 + m_-/2|c_{12}|$$

$$\delta_- \simeq 1 - m_-/2|c_{12}|$$

$$c^2/\delta^2 \simeq 1/4$$

$$\sqrt{m_+ + \delta} \simeq \sqrt{m_+ + 2|c_{12}|}$$

$$\sqrt{m_+ - \delta} \simeq \sqrt{m_+ - 2|c_{12}|}$$

Con todo lo anterior se tiene:

$$|\psi(t)|^2 = \frac{1}{2} \left[e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} + \frac{m_-}{2|c_{12}|} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) \right] |\psi_0|^2 \quad (3.29)$$

$$|\psi_2(t)|^2 = \frac{1}{4} \left[e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} - 2 \cos \left[2|c_{12}| + \frac{m_-^2}{4|c_{12}|} \right] t e^{-\frac{t}{2} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)} \right] |\psi_0|^2$$

Los máximos y mínimos de la función $|\psi_2(t)|^2$ están dados por:

$$|\psi_2(t)|^2_{\max.} = \frac{1}{4} \left[e^{-t/2\tau_1} + e^{-t/2\tau_2} \right]^2 |\psi_0|^2 \quad (3.30)$$

Además:

$$\tau_1 = \frac{(8c^2 + m^2)}{4|c_{12}|c^2 \sqrt{m_+ + 2|c_{12}|} [2|c_{12}| + m_-]} \quad (3.31)$$

$$\tau_2 = \frac{(8c^2 + m^2)}{4|c_{12}|c^2 \sqrt{m_+ - 2|c_{12}|} [2|c_{12}| - m_-]}$$

≠ 37≠

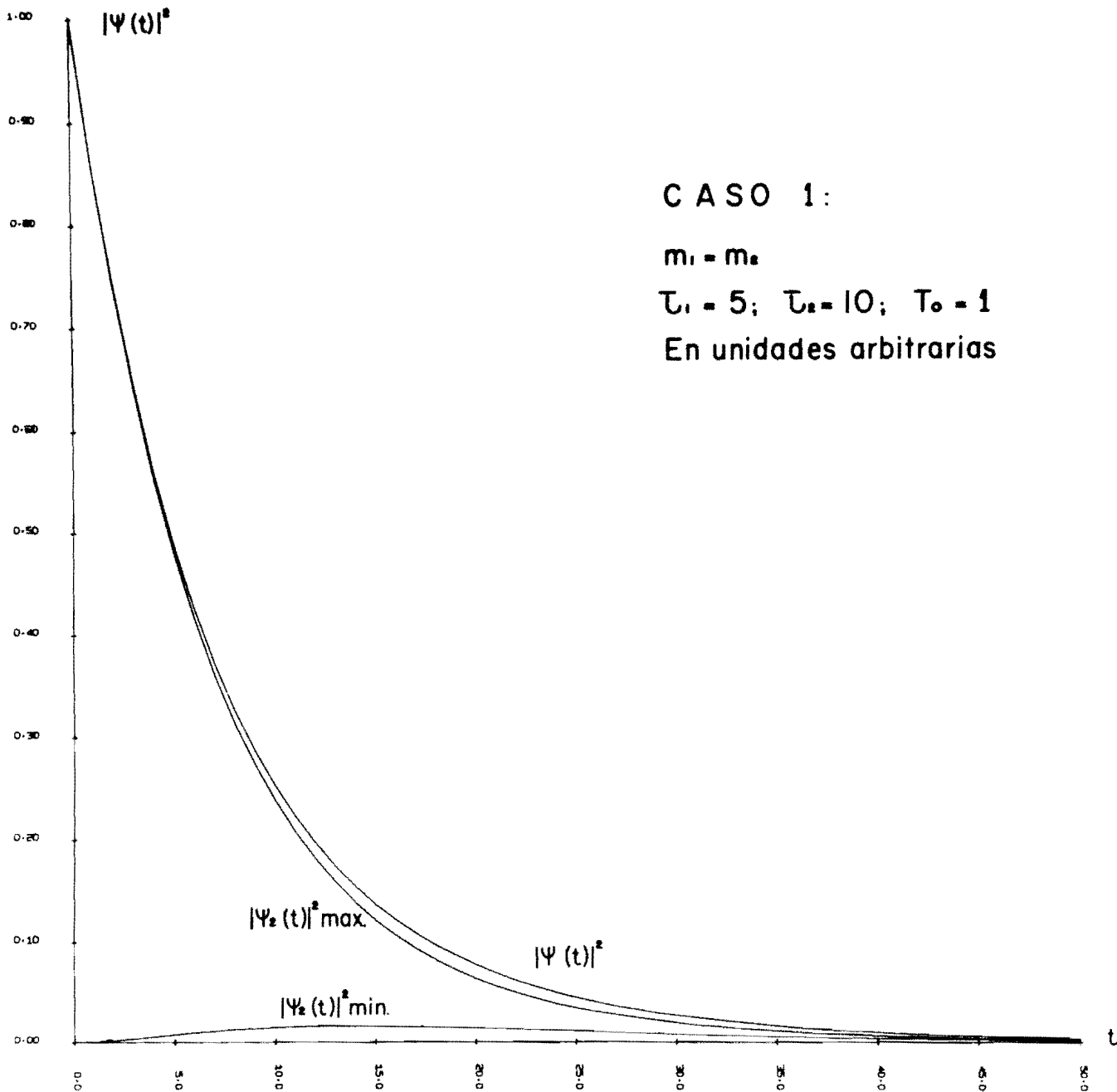
que son las vidas medias de las partículas compuestas 1 y 2, respectivamente. Supongamos que $m_1 = m_2 = m$.
Entonces $m_- = 0$, de modo que:

$$\tau_1 = \frac{1}{C_0^2 \sqrt{2m+2} |C_{12}|} \quad \text{--- (3.22)}$$

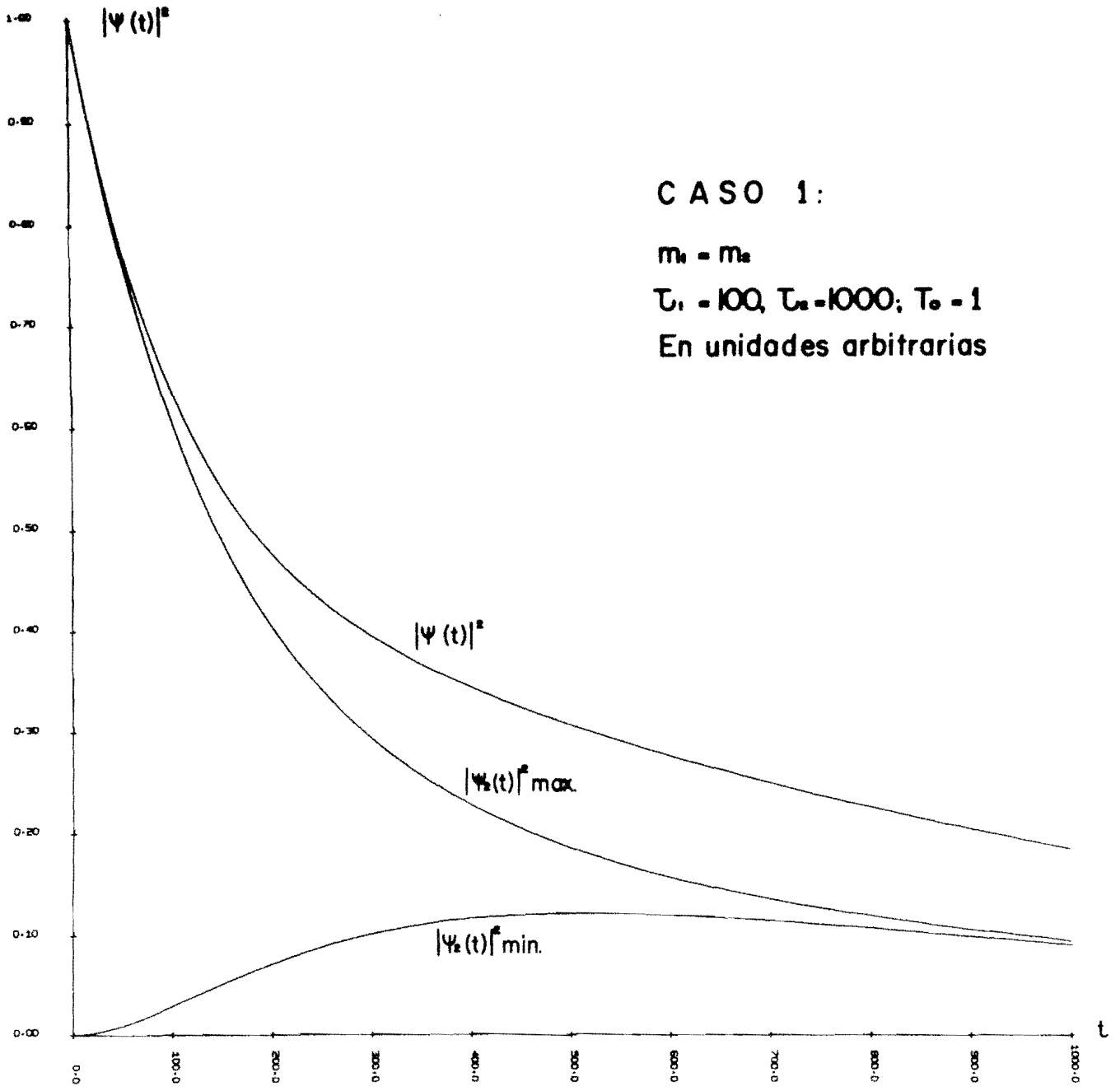
$$\tau_2 = \frac{1}{C_0^2 \sqrt{2m-2} |C_{12}|}$$

que son justamente las vidas medias calculadas en el caso 1.

A continuación se incluyen las gráficas de las probabilidades contra el tiempo, para los casos 1 y 2; donde se han dado algunos valores arbitrarios a los parámetros. Del tercer caso no se hizo gráfica alguna debido a que las probabilidades para las partículas compuestas, tienen el mismo comportamiento general que en los otros dos.



DESINTEGRACION DE LAS PARTICULAS COMPUESTAS



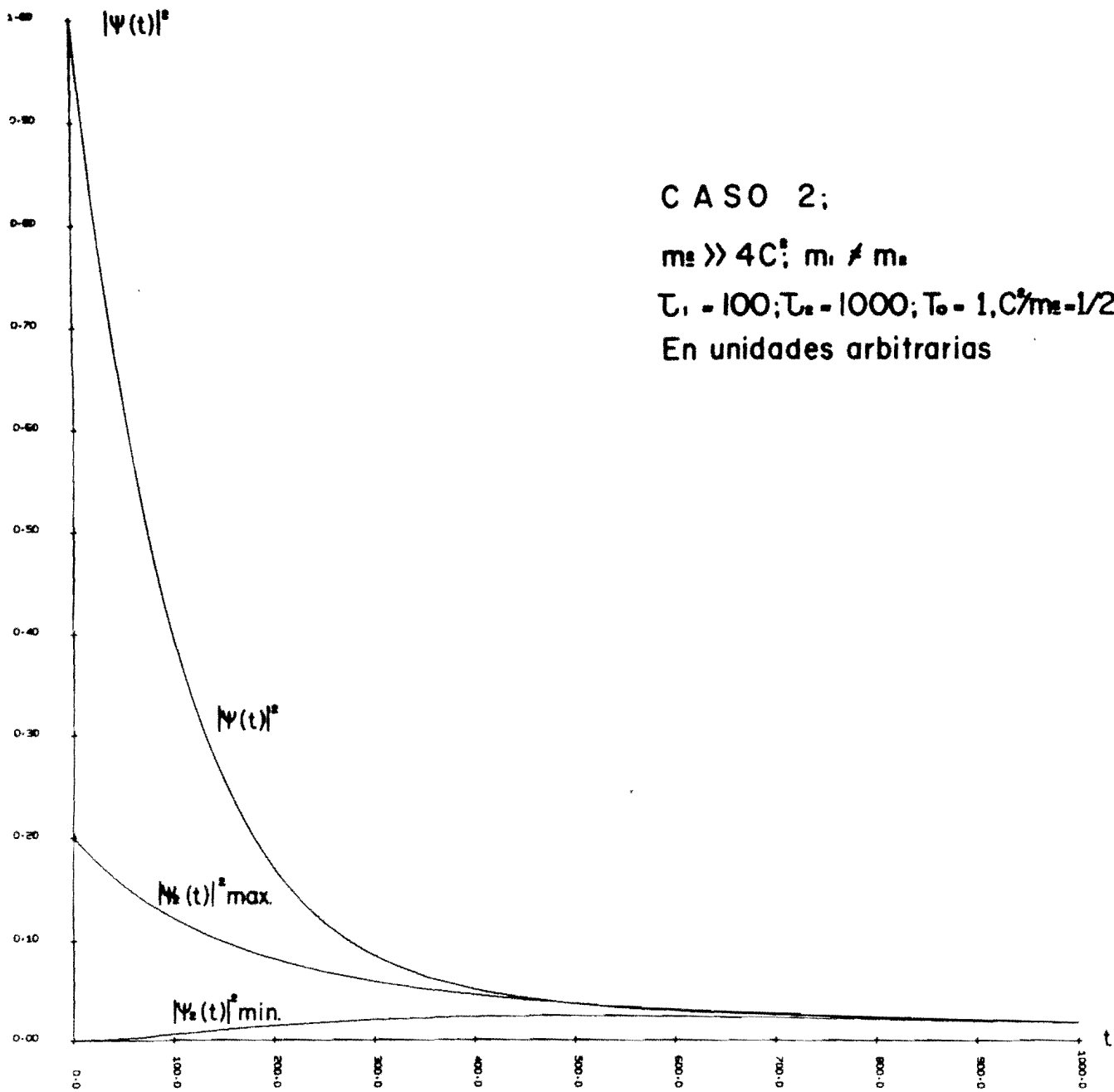
C A S O 1:

$$m_1 = m_2$$

$$\tau_1 = 100, \tau_2 = 1000; \tau_0 = 1$$

En unidades arbitrarias

DESINTEGRACION DE LAS PARTICULAS COMPUESTAS



DESINTEGRACION DE LAS PARTICULAS COMPUESTAS

Capítulo 4.

Dispersión elástica.

Vamos a estudiar el comportamiento temporal de las partículas compuestas cuando en el canal de entrada se tiene un paquete de ondas que para $t=0$ tiene la forma:

$$\Psi_{in}(r,0) = H(r) e^{-i q_0 r} \quad (4.1)$$

donde $\text{Re } q_0 > 0$; $\text{Im } q_0 < 0$ y $H(r)$ la función escalón definida como:

$$H(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } r < 0 \\ 1 & \text{para } r > 0 \end{cases}$$

Aquí estamos considerando que las partículas compuestas están acopladas entre sí, pero solo una de ellas acoplada con el canal de entrada. La transformada de Laplace de la función de ondas que describe el comportamiento de las partículas compuestas es:

$$\bar{\Psi}(p) = i (A + i q_0 \tau \cdot \sigma^{\dagger})^{-1} [2 q_0 \tau \cdot \bar{\Psi}_{in}(0,p) + \Psi^{\circ}] \quad (4.2)$$

Supongamos que en el instante $t=0$ el sistema no se encuentra en la forma de partícula compuesta;

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

#39#

esto es:

$$\underline{\Psi}^0 = 0 \quad \text{--- (4.3)}$$

Entonces, de acuerdo con (V.1e) y utilizando el desarrollo en fracciones parciales del apéndice V, el vector (4.2) puede escribirse como:

$$\underline{\bar{\Psi}}(p) = \left[\sum_{j=1}^4 \frac{4q_j \hat{\theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)(q_j - q_0)q(q - q_j)} - \frac{4q_0 \hat{\theta}(q_0)}{\Delta(q_0)q(q - q_0)} \right] \underline{C} \quad \text{--- (4.4)}$$

La transformada inversa de Laplace de esta expresión da la función de ondas dependiente del tiempo. Esto es:

$$\underline{\Psi}(t) = \left[\sum_{j=1}^4 \frac{2q_j \hat{\theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)i(q_j - q_0)} \omega(e^{-\frac{i3\pi}{4}q_j\sqrt{t/2}}) - \frac{2q_0 \hat{\theta}(q_0)}{i\Delta(q_0)} \omega(e^{-\frac{i3\pi}{4}q_0\sqrt{t/2}}) \right] \underline{C}$$

La condición inicial (4.3) requiere que en $t=0$; $\underline{\Psi}(0) = \underline{\Psi}^0 = 0$. Por otra parte, de acuerdo con el apéndice IV, se tiene que para $t=0$, $\omega(0) = 1$. Entonces:

$$\sum_{j=1}^4 \frac{2q_j \hat{\theta}(q_j)}{i\Delta_j(q_j)(q_j - q_0)} = \frac{2q_0 \hat{\theta}(q_0)}{i\Delta(q_0)} \quad \text{--- (4.5)}$$

Lo cual está de acuerdo con la ecuación (V.5) del apéndice V. Entonces:

$$\underline{\Psi}(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{2q_j \hat{\theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)i(q_j - q_0)} \underline{C} \left[\omega(e^{-\frac{i3\pi}{4}q_j\sqrt{t/2}}) - \omega(e^{-\frac{i3\pi}{4}q_0\sqrt{t/2}}) \right] \quad \text{--- (4.6)}$$

$\neq 40 \neq$

donde q_j son las soluciones de la ecuación:

$$(q^2 + 2i q C^2 - 2m_1)(q^2 - 2m_2) - 4C^2 = 0 \quad (3.6)$$

Vamos a calcular los coeficientes de las funciones $w(z)$ en (4.6) usando las raíces de (3.6) calculadas a orden cero en C^2 con C^2 arbitrario. Sin embargo, en la diferencias $(q_j - q_0)$ y en los argumentos de las funciones $w(z)$ usaremos las q_j calculadas a primer orden en C^2 con C^2 arbitrario. Entonces:

$$\sum_{j=1}^4 \frac{q_j \theta'(q_j)}{\Delta_j(q_j)} = \sum_{j=1}^4 \alpha_j \quad (4.7)$$

donde las α_j están dadas en (III.5b).

Con esta aproximación el vector (4.6) toma la forma:

$$\Psi(t) = -2i \left[\alpha_{1+} \mathcal{L} f_{1+}' + \alpha_{2+} \mathcal{L} f_{2+}' \right] \quad (4.8)$$

donde:

$$f_{1+}' = \frac{(q_1' - q_0)[w(z_{1+}) - w(z_0)] + (q_{1+}' - q_0)[w(z_{1-}) - w(z_0)]}{q_0^2 - q_0(q_{1+}' + q_{1-}') + q_{1+}' q_{1-}'} \quad (4.9)$$

$$f_{2+}' = \frac{(q_2' - q_0)[w(z_{2+}) - w(z_0)] + (q_{2+}' - q_0)[w(z_{2-}) - w(z_0)]}{q_0^2 - q_0(q_{2+}' + q_{2-}') + q_{2+}' q_{2-}'}$$

Vamos a despreciar aquí $\text{Im } q_0$ en comparación con $\text{Re } q_0$. Sin embargo, en los productos $q_0 x q_0$ mantendremos la parte imaginaria de q_0 . Para simplificar los

≠ 41 ≠

numeradores de las expresiones (4.9), vamos a suponer que $\text{Re } \gamma_j = \gamma_{0x}$, con $j = 1+, 2+$; y a considerar que $\text{Im } \gamma_j = 0$. Entonces:

$$f_{1+}' = \frac{-2\gamma_{0x} [\omega(z_{1+}) - \omega(z_0)]}{\gamma_0^2 - \gamma_{0x} (\gamma_{1+}' + \gamma_{1-}') + \gamma_{1+}' \gamma_{1-}'} \quad (4.10)$$

$$f_{2+}' = \frac{-2\gamma_{0x} [\omega(z_{2+}) - \omega(z_0)]}{\gamma_0^2 - \gamma_{0x} (\gamma_{2+}' + \gamma_{2-}') + \gamma_{2+}' \gamma_{2-}'}$$

Si calculamos los denominadores obtenemos:

$$2(E' - E_1 + i\Gamma_1/2) \quad (4.11a)$$

$$2(E' - E_2 - i\Delta E)$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} E' &= \gamma_{0x}^2 / 2 \\ \Delta E &= \gamma_{0x} \gamma_{0y} \\ E_1 &= (m_+ + \gamma_1^2) / 2 \\ E_2 &= (m_+ - \gamma_1^2) / 2 \\ \Gamma_1 &= 2\gamma_{0x} \gamma_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.11b)$$

con E' y ΔE la energía media y la anchura, respectivamente, de la parte temporal del paquete de ondas incidente. En las expresiones (4.11a) hemos despreciado Γ_2 con respecto a ΔE y ΔE con respecto a Γ_1 , debido a que estamos considerando el caso en el cual $\Gamma_2 \ll \Delta E \ll \Gamma_1$. Aquí Γ_1 y Γ_2 son las anchuras parciales.

≠ 42 ≠

En ese caso, las componentes del vector (4.8) son:

$$\psi_1(t) = i c_{10} / 2 \left[\delta_1 \{ \omega(z_{1+}) - \omega(z_0) \} + \delta_2 \{ \omega(z_{2+}) - \omega(z_0) \} \right] \quad (4.12)$$

$$\psi_2(t) = \frac{i c_{21} c_{10}}{g} \left[r_1 \{ \omega(z_{1+}) - \omega(z_0) \} - r_2 \{ \omega(z_{2+}) - \omega(z_0) \} \right]$$

donde:

$$\delta_1 = r_1 \delta_+ \quad (4.13a)$$

$$\delta_2 = r_2 \delta_-$$

$$r_1 = g_{0x} / (E' - E_1 + i\Gamma/2) \quad (4.13b)$$

$$r_2 = g_{0x} / (E' - E_2 - i\Delta E)$$

y δ_{\pm} son las cantidades que están definidas en (III.5c).

Por otra parte se tiene que:

$$z_{1+}' = [-(1+i)(\sqrt{m_+^2 - g^2} - i c_0^2 \delta_+ / 2)] \sqrt{E' / 4}$$

$$z_{2+}' = [-(1+i)(\sqrt{m_+^2 - g^2} - i c_0^2 \delta_- / 2)] \sqrt{E' / 4} \quad (4.13c)$$

$$z_0 = [-(1+i)(g_{0x} - i g_{0y})] \sqrt{E' / 4}$$

De aquí se ve que: $\text{Im}(z_n) < 0$, con $n=0, 1+, 2+$. En ese caso:

$$\omega(z_n) = 2E^{-z_n^2} \omega(-z_n) \quad (4.13d)$$

con $\text{Im}(-z_n) > 0$.

Vamos a ignorar la parte puramente difusiva de las funciones $\omega(z_n)$ y a trabajar solo con la parte exponencial.

≠ 43 ≠

Entonces:

$$\psi_1(t) = iC_{10} \left[\delta_1 e^{-z_1'^2} + \delta_2 e^{-z_2'^2} - (\delta_1 + \delta_2) e^{-z_0^2} \right] \quad (4.14)$$

$$\psi_2(t) = \frac{2iC_{21}C_{10}}{\gamma} \left[r_1 e^{-z_1'^2} - r_2 e^{-z_2'^2} - (r_1 - r_2) e^{-z_0^2} \right]$$

donde:

$$-z_1'^2 = -itQ_1 - \epsilon_1 t \quad (3.14a)$$

$$-z_2'^2 = -itQ_2 - \epsilon_2 t$$

$$Q_1 = (m_+ + \gamma)/2$$

$$Q_2 = (m_+ - \gamma)/2 \quad (3.14b)$$

$$\epsilon_1 = C_0^2 \sqrt{m_+ + \gamma} \delta_+ / 2$$

$$\epsilon_2 = C_0^2 \sqrt{m_+ - \gamma} \delta_- / 2$$

$$-z_0^2 = -itE' - \Delta E t \quad (4.15)$$

Con esto se tiene:

$$\psi_1(t) = iC_{10} e^{-itQ_2} \left[\delta_1 e^{-\epsilon_1 t} e^{-it\gamma} + \delta_2 e^{-\epsilon_2 t} - (\delta_1 + \delta_2) e^{-it\gamma_0} \right] \quad (4.16)$$

$$\psi_2(t) = \frac{2iC_{21}C_{10}}{\gamma} \left[r_1 e^{-\epsilon_1 t} e^{-it\gamma} - r_2 e^{-\epsilon_2 t} - (r_1 - r_2) e^{-it\gamma_0} \right] e^{-itQ_2}$$

donde:

$$\gamma = \sqrt{m_-^2 + 4C^2} \quad (4.17)$$

$$\gamma_0 = E' - E_2 - i\Delta E$$

#44#

El módulo al cuadrado de las expresiones (4.16) da las respectivas probabilidades que se formen las partículas compuestas 1 y 2, debido a la entrada al sistema del paquete de ondas incidente. Esto es:

$$|\Psi_1(t)|^2 = C_0^2 \left| \delta_1 e^{-\frac{t}{2\tau_1}} e^{-i\gamma t} + \delta_2 e^{-\frac{t}{2\tau_2}} - (\delta_1 + \delta_2) e^{-i\gamma_0 t} \right|^2 \quad (4.18)$$

$$|\Psi_2(t)|^2 = \frac{4CC_0^2}{\gamma^2} \left| r_1 e^{-\frac{t}{2\tau_1}} e^{-i\gamma t} - r_2 e^{-\frac{t}{2\tau_2}} - (r_1 - r_2) e^{-i\gamma_0 t} \right|^2$$

En estas expresiones aparece el tiempo de vaciado T_0 dado por:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\delta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma^2 + 4C^2}} \quad (2.20)$$

Además, se tienen los tiempos τ_1 y τ_2 . Vamos a llamarlos tiempos de levantamiento y tienen una interpretación simple. De acuerdo con (4.3) la probabilidad de que inicialmente el sistema se encuentre en la forma de partícula compuesta, es cero. Cuando el paquete de ondas incidente penetra en el sistema, se forma la partícula compuesta 1, con lo cual, la probabilidad para dicha partícula pasa del valor cero inicial a un cierto valor máximo final. Como esta etapa del proceso está

acoplada a la tercera etapa, se formará también la partícula compuesta 2, de modo que también la probabilidad para esta partícula alcanzará un valor máximo final al cabo de un cierto tiempo. A los tiempos que tardan las probabilidades de las partículas compuestas 1 y 2, respectivamente, en alcanzar sus valores máximos a partir de un valor cero inicial, los vamos a llamar tiempos de levantamiento. Sus valores son los siguientes:

$$\tau_1 = \frac{1}{C_0^2 \delta + \sqrt{m_+ + \delta^2}} \quad \text{--- (3.17)}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{C_0^2 \delta - \sqrt{m_+ - \delta^2}}$$

y claramente, son exactamente iguales a las vidas medias de las partículas compuestas 1 y 2, que se calcularon en el capítulo 3.

Ahora, vamos a investigar el comportamiento de la función de ondas del movimiento relativo. Dicha función de ondas, dependiente del tiempo, se calculó en el capítulo 1. Entonces, de acuerdo con (4.3) y con las ecuaciones (1.17b) - (1.17d), podemos escribir:

$$\begin{aligned} \psi(r,t) = & \frac{1}{2} e^{ir^2/2t} \omega\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{r+q_0 t}{\sqrt{2t}}\right) - \frac{1}{2} S(q_0) e^{ir^2/2t} \omega\left(e^{i\pi/4} \frac{r-q_0 t}{\sqrt{2t}}\right) + \\ & + \frac{1}{2} \left[i \mathcal{C} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{4 q_j \hat{\theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)(q_j - q_0)} \right] e^{ir^2/2t} \omega\left(e^{i\pi/4} \frac{r - q_j t}{\sqrt{2t}}\right) \quad (4.19) \end{aligned}$$

En el primer término de esta expresión, $\text{Im}(z) < 0$; y sabemos ⁽¹²⁾ que cuando esto ocurre la función $\omega(z)$ puede escribirse como:

$$\omega(z) = 2 \bar{e}^{-z^2} \omega(-z) \quad (IV.9)$$

con $\text{Im}(-z) > 0$. Vamos a despreciar la parte puramente difusiva de $\omega(z)$ y a trabajar solo con la parte exponencial. Como $q_0 = q_{0x} - i q_{0y}$, se tiene:

$$-z^2 = -ir^2/2t - (i q_{0x}^2/2 + q_{0x} q_{0y})t - i(q_{0x} - i q_{0y})r$$

donde hemos despreciado el término cuadrático en q_{0y} .

Entonces:

$$\psi_{in}(r,t) = \psi(t) \bar{e}^{-i q_0 r} \quad (4.20)$$

con $\psi(t)$ la parte temporal del paquete de ondas incidente dada por:

$$\psi(t) = \bar{e}^{-iE't - \Delta E t} \quad (4.21)$$

con E' y ΔE definidas en (4.11b).

En el segundo término de (4.19) también ocurre que $\text{Im}(z) < 0$, de modo que la función $\omega(z)$ como en (IV.9). Si despreciamos la parte puramente difusiva de

#47#

$w(z)$ obtenemos para ese término:

$$-\frac{1}{2} S_H(\eta_0) e^{i\eta_0^2 t} w\left(e^{i\pi/4} \frac{r - \eta_0 t}{\sqrt{2t}}\right) = -S_H(\eta_0) \psi(t) e^{i\eta_0 r} \quad (4.22)$$

En ese caso, la función de ondas (4.19) toma la forma:

$$\psi(r,t) = \left[e^{-i\eta_0 r} - S_H(\eta_0) e^{i\eta_0 r} \right] \psi(t) + \psi_{\text{res}}(r,t) \quad (4.23)$$

donde:

$$\psi_{\text{res}}(r,t) = \frac{1}{2} \left[i C^+ \sum_{j=1}^4 \frac{4\eta_j \hat{\theta}(\eta_j)}{\Delta_j(\eta_j)(\eta_j - \eta_0)} C \right] e^{i\eta_j^2 t} w\left(e^{i\pi/4} \frac{r - \eta_j t}{\sqrt{2t}}\right) \quad (4.24)$$

Aquí, nuevamente, las η_j son las soluciones de la ecuación (3.6). Vamos a utilizar el mismo procedimiento que se usó en la primera parte del capítulo, para calcular los coeficientes de las funciones $w(z)$ en (4.24). En ese caso:

$$\psi_{\text{res}}(r,t) = \frac{i e^{i\eta_0^2 t}}{2} \left[4 C^+ d_{1+} C Q_{1+}' + 4 C^+ d_{2+} C Q_{2+}' \right] \quad (4.25)$$

donde:

$$Q_{1+}' = \frac{(\eta_{1-}' - \eta_0) \omega(z_{1+}') + (\eta_{1+}' - \eta_0) \omega(z_{1-}')}{\eta_0^2 - \eta_0(\eta_{1+}' + \eta_{1-}') + \eta_{1+}' \eta_{1-}'} \quad (4.26)$$

$$Q_{2+}' = \frac{(\eta_{2-}' - \eta_0) \omega(z_{2+}') + (\eta_{2+}' - \eta_0) \omega(z_{2-}')}{\eta_0^2 - \eta_0(\eta_{2+}' + \eta_{2-}') + \eta_{2+}' \eta_{2-}'}$$

Además:

≠ 48 ≠

$$4C^+ a_{1+}^2 C = C_0^2 \delta_+ \quad (4.27)$$

$$4C^+ a_{2+}^2 C = C_0^2 \delta_-$$

Entonces:

$$Q_{res}(r,t) = e^{i r^2 \gamma_2 t} [i \gamma_1^2 Q_{1+}' + i \gamma_2^2 Q_{2+}'] \quad (4.28)$$

donde γ_s^2 , $s=1,2$, son las amehuras reducidas definidas en (VI.5).

Vamos a investigar ahora bajo que condiciones las funciones $w(z)$ que aparecen en (4.26) pueden expresarse como la suma de una parte exponencial y otra difusiva.

Dado que: $\gamma_j = \gamma_{jx} - i \gamma_{jy}$, con $\gamma_{jx} \gg \gamma_{jy}$, se tiene:

$$z = [r - (\gamma_{jx} + \gamma_{jy})t + i (r - [\gamma_{jx} - \gamma_{jy}]t)] / 2\sqrt{E}$$

Entonces:

$$\text{Re}(z) = [r - (\gamma_{jx} + \gamma_{jy})t] / 2\sqrt{E} \quad (4.29)$$

$$\text{Im}(z) = [r - (\gamma_{jx} - \gamma_{jy})t] / 2\sqrt{E}$$

Ahora bien, $\text{Im}(z) > 0$ cuando:

$$r > (\gamma_{jx} - \gamma_{jy})t \quad (4.30)$$

Este caso no interesa debido a que las funciones $w(z)$ son puramente difusivas.

Por otra parte, $\text{Im}(z) \leq 0$, cuando

$$r \leq (\gamma_{jx} - \gamma_{jy})t \quad (4.31)$$

con $t \neq 0$ y para toda r . En ese caso, las funciones $w(z)$

#49#

pueden expresarse como la suma de un término exponencial y otro difusivo en el cual $\text{Im}(-z) > 0$. Si despreciamos la parte puramente difusiva de las funciones $w(z)$, obtenemos:

$$\Psi_{\text{res}}(r,t) = \tilde{S} e^{i r^2 / 2t} \left[e^{-z_{1+}^2} + e^{-z_{2+}^2} \right] \quad (4.32)$$

donde:

$$\tilde{S} = \frac{i P_1}{E_1 - E' - i P_1 / 2} + \frac{i P_2}{E_2 - E' + i \Delta E} \quad (4.33)$$

con E' , ΔE , P_s y E_s ($s=1,2$) definidas en (4.11b).

Además:

$$-z_{1+}^2 = -\frac{i r^2}{2t} - \frac{i t}{2} (m_+ + \gamma' - i P_1) + i \eta_{1+}' r \quad (4.34)$$

$$-z_{2+}^2 = -\frac{i r^2}{2t} - \frac{i t}{2} (m_+ - \gamma' - i P_2) + i \eta_{2+}' r$$

donde el valor explícito de las P_s es:

$$P_1 = c_0^2 \delta_+ \sqrt{m_+ + \gamma'} \quad (4.35)$$

$$P_2 = c_0^2 \delta_- \sqrt{m_+ - \gamma'}$$

Entonces:

$$\Psi_{\text{res}}(r,t) = \tilde{S} \Psi_2(t) \left[e^{i \eta_{2+}' r} + e^{i \eta_{1+}' r} e^{-i \gamma' t} e^{-\frac{t}{2} (P_1 - P_2)} \right] \quad (4.36)$$

donde:

$$\Psi_2(t) = e^{-i E_2 t - \frac{1}{2} P_2 t} \quad (4.37)$$

con E_2 la energía de la partícula compuesta 2. Aquí

$\delta = \sqrt{m^2 + 4C^2}$ es proporcional al tiempo de vaciado y las β_s ($s=1,2$) están relacionadas con los tiempos de vaciado y claramente, con las vidas medias de las partículas compuestas 1 y 2, respectivamente, a través del principio de Incertidumbre.

Finalmente, la función de ondas dependiente del tiempo del movimiento relativo, toma la forma:

$$\Psi(r,t) = \left[H(r - q_{0x}t) e^{-i q_{0r} r} S_H(\beta) H(-r + q_{0x}t) e^{i q_{0r} r} \right] \psi_1(t) + \tilde{S} H(-r + q_{2x}t) \left[e^{+i q_{2r} r} + e^{i q_{1r} r} e^{-i \delta t} e^{-\frac{t}{2}(\beta_1 - \beta_2)} \right] \psi_2(t) \quad (4.38)$$

donde hemos introducido la función escalón que indica donde se corta la cabeza del paquete de ondas entrante y saliente, de acuerdo con la condición (4.31)

Capítulo 5.

Relación con el Modelo Óptico.

En muchas reacciones nucleares iniciadas por partículas de baja energía, especialmente en experimentos de dispersión elástica y absorción de neutrones, se han observado resonancias en la sección total en la región comprendida entre 0 y 3 MeV. Tales resonancias, tienen una anchura característica de 1 a 2 MeV.

Dichos experimentos se realizan, en general, con una resolución muy pobre en la energía, ya que se efectúan con haces de partículas que tienen una anchura en la energía que va desde algunos keV hasta cientos de keV. Por otra parte, si se observan los detalles finos con la ayuda de algún dispositivo capaz de medir energías con precisión, se encuentran resonancias angostas y muy bien definidas, con anchuras del orden de 10 eV. Estas resonancias angostas fueron descritas por N. Bohr⁽⁵⁾ en su teoría del Núcleo Compuesto, mientras que las resonancias anchas fueron explicadas por Feshbach, Porter y Weisskopf⁽⁶⁾ como resonancias en un potencial

complejo. Dichas resonancias son la manifestación del movimiento de una sola partícula en la región de energías positivas del potencial.

El comportamiento de la sección en la región de resonancias no puede explicarse utilizando un potencial para una sola partícula debido a las rápidas fluctuaciones que presenta con la energía. De acuerdo con Feshbach, Porter y Weisskopf⁽⁶⁾ es posible realizar un promedio de S sobre un intervalo de energías ΔE que contenga muchas resonancias para obtener una amplitud de dispersión que sea una función lisa de la energía. Las secciones que se obtienen describen un nuevo problema, el de la estructura gruesa, cuya función de dispersión varía lentamente con la energía. Es este problema de la estructura gruesa y no el problema real con secciones que varían rápidamente con la energía el que puede describirse con un potencial de una sola partícula. El modelo consiste en sustituir al núcleo por un potencial complejo:

$$V = -V_0(1 + i\epsilon) \quad \text{--- (5.1)}$$

Entonces, la parte real del potencial es el potencial promedio que siente la partícula incidente cuando

penetra en el núcleo, mientras que la parte imaginaria toma en cuenta la absorción de la onda incidente. Así, las secciones que describen el problema de la estructura gruesa se definen en términos de la función de dispersión promedio \bar{S} , de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_{s.e}^{(\ell)} &= \pi \lambda^2 (2\ell+1) |1 - \bar{S}_\ell|^2 \quad \text{--- (5.2)} \\ \sigma_{c.e}^{(\ell)} &= \pi \lambda^2 (2\ell+1) [|\bar{S}_\ell|^2 - |\bar{S}_\ell|^2] \end{aligned}$$

La sección para la formación de núcleo compuesto se obtiene combinando $\sigma_{c.e}^{(\ell)}$ y $\bar{\sigma}_r^{(\ell)}$, donde:

$$\bar{\sigma}_r^{(\ell)} = \pi \lambda^2 (2\ell+1) (1 - |\bar{S}_\ell|^2) \quad \text{--- (5.3)}$$

Entonces:

$$\sigma_c^{(\ell)} = \sigma_{c.e}^{(\ell)} + \bar{\sigma}_r^{(\ell)} = \pi \lambda^2 (2\ell+1) [1 - |\bar{S}_\ell|^2] \quad \text{--- (5.4)}$$

Ahora bien, de acuerdo con Lane y Thomas⁽⁴⁾ la función $R_{ip}(E)$ para un potencial es:

$$R_{ip}(E) = \frac{\gamma_1^2}{E_1 - E} \quad \text{--- (5.5a)}$$

donde:

$$E_1 = V_0 + \pi^2 \hbar^2 / 8ma^2 \quad \text{--- (5.5b)}$$

En ese caso:

$$R_{ip}(E) = \frac{\gamma_1^2}{V_0 + \pi^2 \hbar^2 / 8ma^2 - E} \quad \text{--- (5.5c)}$$

Aquí V_0 es la profundidad del pozo.

≠ 54 ≠

De acuerdo con el Modelo Óptico⁽⁶⁾ la función R del problema de la estructura gruesa se obtiene agregando una pequeña parte imaginaria al potencial V_0 , en la expresión de R para un potencial. Esto es

$$R_{i.p.}^{(\text{óptico})}(E) = \frac{\gamma_1^2}{V_0 + iV_1 + \pi^2 \hbar^2 / 8ma^2 - E} \quad (5.6)$$

donde $V_1 = \xi V_0$ con ξ una constante igual a 0.03 y V_0 la profundidad del pozo.

Por otra parte, en el presente trabajo se demostró que la función de dispersión asociada a los términos de la función de ondas del movimiento relativo que toman en cuenta la dispersión por esfera rígida y la sombra, es el promedio sobre un intervalo de energía ΔE de la función de dispersión exacta asociada al problema de reacciones nucleares resuelto en el apéndice II. En ese caso:

$$S_M(\eta_0) = \frac{1 + i\eta_0 R_M(\eta_0)}{1 - i\eta_0 R_M(\eta_0)} \quad (5.7)$$

De acuerdo con (VI.19) y (II.6)

$$R_M(\eta_0) = \frac{C^2}{(m_1 - E' + i\Delta E) - C^2 / (m_2 - E' + i\Delta E)} \quad (5.8)$$

Supongamos que:

$$|\Delta E| \gg |m_2 - E'| \quad (5.9)$$

Entonces:

$$R_M(E') = \frac{C_0^2}{V_0 + iV_1 + \pi^2 \hbar^2 / 8ma^2 - E'} \quad (5.10)$$

Esta expresión es justamente, la $R_{ip}^{(optica)}$ puesto que en el Apéndice II se demostró que:

$$C_0^2 = \gamma_1^2 \quad (5.11)$$

$$m_1 = V_0 + \pi^2 \hbar^2 / 8ma^2$$

La parte imaginaria del potencial óptico es:

$$V_1 = \Delta E \left[1 + C^2 / \Delta E^2 \right] \quad (5.12)$$

Es interesante hacer notar que dicha parte imaginaria depende no solo del intervalo de energía ΔE sobre el cual se hizo el promedio de la función S exacta, sino también de la constante de acoplamiento entre las partículas compuestas.

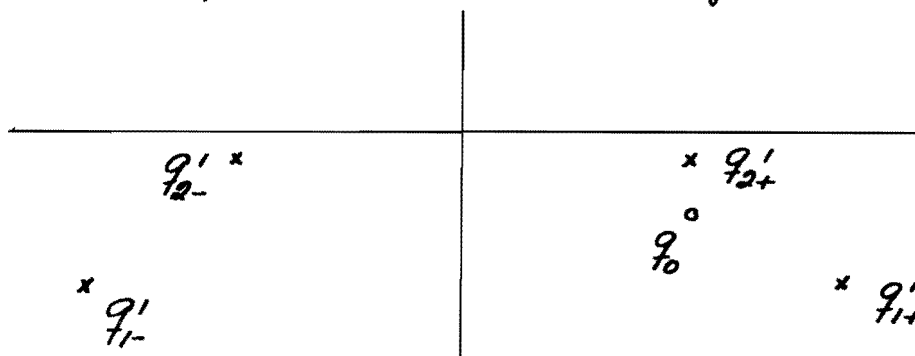
Conclusiones.

En el presente trabajo se estudia la dispersión elástica de un paquete de ondas que para $t=0$ tiene la forma $H(r)e^{-i\varphi_0 r}$, dentro del marco de la Teoría Esquemática de las Reacciones Nucleares^(1,2). La función de ondas que se obtiene describe el comportamiento temporal del sistema completo. El cálculo que se hace es exacto.

Los resultados muestran que dicha función de ondas contiene términos que dan la evolución temporal del paquete de ondas incidente, la dispersión por esfera rígida, la sombra, la dispersión resonante y la parte que toma en cuenta la desintegración de las partículas compuestas, en el caso en el cual la probabilidad de encontrar al sistema en forma de partícula compuesta sea diferente de cero al tiempo $t=0$.

La sombra es la parte que debe quitarse a la amplitud de dispersión por esfera rígida y es atrapada por el sistema en forma de partícula compuesta. La combinación de la dispersión por esfera rígida y la sombra es la respuesta inmediata del sistema cuya amplitud es la $S(\varphi_0)$. Este término da la evolución temporal de un

paquete de ondas que para $t=0$ tiene la forma $H(-r)e^{i\varphi_0 r}$.
 Los dos términos restantes corresponden a la evolución temporal de paquetes de onda de la forma $e^{i\varphi_j r}$, con: $j=1\pm, 2\pm$. La amplitud de dichos términos depende de la distancia que existe entre el polo φ_0 y los polos φ_j .
 La situación que se maneja es la siguiente:



Los polos que se encuentran en el tercer cuadrante del plano complejo dan origen a términos puramente difusivos en la función de ondas completa, mientras que los que están en el cuarto cuadrante conducen a términos que contienen una parte difusiva y otra exponencial.

Es interesante hacer notar que debido a que la dispersión ocurre en el punto de contacto, todas las respuestas del sistema son instantáneas; nada más que unas son de corta y otras de larga duración, dependiendo de la posición de los polos en el plano complejo.

En el apéndice II se resuelve con todo detalle un

problema de reacciones nucleares donde las interacciones son dos pozos de potencial acoplados. Se obtiene la función R de Wigner en la aproximación lineal, esto es, se hace un desarrollo en serie de Taylor, hasta el término lineal, alrededor de las energías de las dos resonancias. La comparación de dicha función con la obtenida del modelo proponiendo una solución estacionaria de energía E del sistema de ecuaciones dinámicas que lo describen, permite identificar los parámetros del modelo con aquellos que intervienen en el citado problema.

En el estudio del comportamiento temporal de las partículas compuestas, en ausencia de acoplamiento con el canal de entrada, se obtiene un intercambio de probabilidad entre ellas lo cual da origen a una oscilación periódica del sistema interno con un tiempo característico, al cual denominamos tiempo de vaciado, que es función de la diferencia entre las masas de las partículas compuestas y de la magnitud del acoplamiento entre ellas.

Cuando se conecta una de las partículas compuestas al canal de entrada, se presenta el fenómeno de la desintegración. Al mismo tiempo que las partículas compuestas intercambian probabilidad, parte de ésta se escapa por

El canal de entrada. La situación es fácilmente visualizable en las gráficas de la probabilidad total contra el tiempo que se incluyen en los capítulos 2 y 3. Además se calculan las vidas medias de las partículas compuestas y se analizan algunos casos interesantes.

Cuando interaccionan las dos partículas incidentes, se produce el fenómeno de la dispersión elástica. La función de ondas que describe el comportamiento temporal de las partículas compuestas contiene además del tiempo de vaciado, los tiempos de levantamiento definidos como los tiempos que tardan las partículas compuestas en alcanzar su valor máximo final a partir de su valor cero inicial. Se muestra que dichos tiempos de levantamiento son iguales a las vidas medias de las partículas compuestas calculadas en el capítulo 3. Esto significa que la formación de las partículas compuestas es el proceso inverso en el tiempo al de desintegración de las mismas. Por otra parte, en dicha función de ondas aparece también el tiempo que tarda en penetrar al sistema la cabeza del paquete de ondas incidente. Dicho tiempo es $T_0 = 1/\Delta E$, en unidades apropiadas.

También se calcula la función de ondas dependiente

del tiempo del movimiento relativo para el caso en el cual la probabilidad de encontrar al sistema al tiempo $t=0$ en la forma de partícula compuesta, es cero.

En ella aparecen la dispersión por esfera rígida, la sombra y la parte resonante. La función de dispersión asociada a la respuesta inmediata es el promedio sobre un intervalo de energía ΔE , igual a la anchura en la energía del paquete de ondas incidente, de la función de dispersión que se obtiene al resolver un problema de reacciones nucleares donde las interacciones son pozos de potencial acoplados, tomando la aproximación lineal.

Estos resultados permiten relacionar nuestro esquema con el Modelo Óptico del núcleo y calcular la parte imaginaria del potencial que es la responsable de la absorción del paquete de ondas incidente. Dicha absorción es la parte de la respuesta inmediata que hemos llamado ^{Sombra}. Sin embargo, la mayor contribución a ella proviene del término que depende del polo ρ_+ que es el que está más cerca del polo ρ_0 .

Se muestra que la parte imaginaria del potencial de interacción es una función de la anchura en la energía ΔE del paquete de ondas incidente, y de la magnitud C^2 del acoplamiento entre las partículas compuestas.

Apéndice I.

Solución de la ecuación de Schrodinger para movimiento libre.

Vamos a construir la función de Green para la ecuación de Schrodinger dependiente del tiempo para el caso en el cual tenemos un potencial constante V . La ecuación de Schrodinger que tenemos que resolver es la siguiente:

$$\phi''(x,t) - 2mV/\hbar^2 \phi(x,t) + 2im/\hbar \dot{\phi}(x,t) = 0 \quad \text{--- (I.1)}$$

donde la doble prima indica segunda derivada con respecto a x y el punto derivada con respecto al tiempo. Escribimos $\phi(x,t)$ como:

$$\phi(x,t) = \psi(x,t) e^{\frac{Vt}{\hbar}} \quad \text{--- (I.2)}$$

En tal caso (I.1) se reduce a:

$$\psi''(x,t) + 2im/\hbar \dot{\psi}(x,t) = 0 \quad \text{--- (I.3)}$$

Tomando la transformada de Laplace con respecto al tiempo obtenemos:

$$\bar{\psi}''(x,p) + \frac{2im p}{\hbar} \bar{\psi}(x,p) = \frac{2im}{\hbar} \psi(x,0) \quad \text{--- (I.4)}$$

donde $\Psi(x,0) = \phi(x,0)$ es el paquete de ondas inicial.

La solución general de esta ecuación está dada por la solución de la ecuación homogénea más una solución particular. La ecuación homogénea:

$$\bar{\Psi}''(x,p) + \mu^2 \bar{\Psi}(x,p) = 0 \quad \text{--- (I.5)}$$

tiene soluciones de la forma:

$$\bar{\Psi}(x,p) = a e^{i\mu x} + b e^{-i\mu x} \quad \text{--- (I.6)}$$

donde a y b son constantes y:

$$\mu = \sqrt{2\text{imp}/\hbar} \quad \text{--- (I.7)}$$

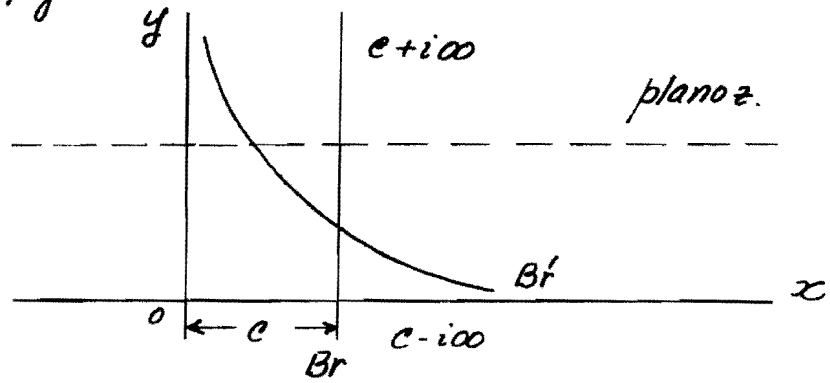
dado que $\text{Im}\mu > 0$ y x es positiva, es necesario que $b=0$ para que $e^{-i\mu x}$ no crezca exponencialmente cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces, la solución de la homogénea es:

$$\bar{\Psi}(x,p) = a e^{i\mu x} \quad \text{--- (I.8)}$$

Aquí p tiene el intervalo $(-i\infty + c, +i\infty + c)$ con $c \geq 0$ una cantidad real. El contorno o trayectoria de Bronwich debe ser tal que todas las singularidades de la función integrada se encuentren a la izquierda de él. Cuando pasamos a la representación de las μ , el contorno se transforma en la trayectoria equivalente B_r' , como

#63#

se ve en la figura:



Para solucionar la ecuación diferencial inhomogénea, construimos la función de Green asociada al problema:

$$\frac{d^2}{dx^2} \bar{U}_0(x-x'; p) + \mu^2 \bar{U}_0(x-x'; p) = \frac{2im}{\hbar} \delta(x-x') \quad \text{--- (I.9)}$$

Integrando entre $x'-\epsilon$ y $x'+\epsilon$ y tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, obtenemos las siguientes condiciones en la frontera:

$$\bar{U}'_0(x'_+) - \bar{U}'_0(x'_-) = 2im/\hbar \quad \text{--- (I.10)}$$

$$\bar{U}_0(x'_+) - \bar{U}_0(x'_-) = 0$$

Vamos a proponer soluciones de la forma:

$$\bar{U}_0(x, p) = \alpha e^{i\mu x} + \beta e^{-i\mu x}; \text{ para } x > x'$$

$$\bar{U}_0(x, p) = \delta e^{-i\mu x} + \gamma e^{i\mu x}; \text{ para } x < x'$$

#64#

Para que tales soluciones se comporten bien en el infinito es necesario que $\beta = \gamma = 0$. En ese caso:

$$\bar{U}_0(x, p) = \alpha e^{i\mu x}; \text{ para } x > x' \quad \text{--- (I.11)}$$

$$\bar{U}_0(x, p) = \delta e^{-i\mu x}; \text{ para } x < x'$$

Aplicando aquí las condiciones en la frontera (I.10), obtenemos:

$$\alpha = m/\hbar\mu e^{-i\mu x} \quad \text{--- (I.12)}$$

$$\delta = m/\hbar\mu e^{i\mu x}$$

Así, la transformada de Laplace del propagador libre es:

$$\bar{U}_0(x-x', p) = \frac{m}{\hbar\mu} e^{-i\mu|x-x'|}; \text{ para toda } x \quad \text{--- (I.13)}$$

Sustituyendo aquí el valor de μ dado en (I.7) obtenemos:

$$\bar{U}_0(x-x', p) = \frac{m e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2m\hbar}} p^{-\frac{1}{2}} e^{i\sqrt{2m/\hbar}|x-x'|p^{\frac{1}{2}}} \quad \text{--- (I.14)}$$

Definimos:

$$-\alpha^{\frac{1}{2}} = i\sqrt{2m/\hbar}|x-x'| \quad \text{--- (I.15)}$$

$$\alpha = -\frac{2im}{\hbar}|x-x'|^2$$

Entonces:

#65#

$$\bar{U}_0(x-x', p) = \frac{me^{-i\pi/4}}{\sqrt{2m\hbar}} p^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}}} \quad \text{--- (I.16)}$$

Su transformada inversa de Laplace es:

$$U_0(x-x', t) = \frac{me^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi m\hbar t}} e^{\frac{im}{2\hbar t} |x-x'|^2} \quad \text{--- (I.17)}$$

Y ésta es la función de Green para movimiento libre, la cual difiere solo en una fase de la correspondiente función de Green para el caso de potencial constante. Esto es:

$$U(x-x', t) = \frac{me^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi m\hbar t}} e^{\frac{im}{2\hbar t} |x-x'|^2} e^{i\frac{Vt}{\hbar}} \quad \text{--- (I.18)}$$

Si consideramos que $\hbar = 2m = 1$, obtenemos:

$$U_0(x-x', t) = \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi t}} e^{i\frac{|x-x'|^2}{4t}} \quad \text{--- (I.19)}$$

$$U(x-x', t) = \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{i}{4t} [|x-x'|^2 - 4Vt^2]}$$

Apéndice II

Solución estacionaria del sistema de ecuaciones del capítulo 1.

Consideremos un estado estacionario de energía E del sistema descrito en el capítulo 1. Para resolver las ecuaciones dinámicas (1.1), vamos a proponer soluciones del tipo:

$$\Psi(r,t) = \Psi_0(r) e^{-iEt} = k_0^{-\frac{1}{2}} \left[e^{-ik_0 r} - S_H(k_0) e^{ik_0 r} \right] e^{-iEt} \quad (\text{II.1a})$$

$$\Psi_1(t) = \Psi_1 e^{-iEt} \quad (\text{II.1b})$$

$$\Psi_2(t) = \Psi_2 e^{-iEt}$$

donde $k_0 = \sqrt{2E}$ y $S_H(k_0)$ es la función de dispersión asociada al problema. Sustituyendo estas soluciones en el sistema (1.1) obtenemos:

$$\Psi_0''(r) + k_0^2 \Psi_0(r) = 0 \quad (\text{II.2a})$$

$$(E - m_1) \Psi_1 + C_{12} \Psi_2 = -C_{10} [\Psi_0'(r)]_{r=0} \quad (\text{II.2b})$$

$$(E - m_2) \Psi_2 + C_{21} \Psi_1 = 0 \quad (\text{II.2c})$$

y la condición en la frontera:

$$[\Psi_0(r)]_{r=0} = C_{01} \Psi_1 \quad (\text{II.2d})$$

Definimos:

$$A(E) = \begin{pmatrix} E - m_1 & c_{21} \\ c_{12} & E - m_2 \end{pmatrix}; \quad \underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{--- (II.3)}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{10} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C^\dagger = \begin{pmatrix} c_{01} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{--- (1.4b)}$$

Las ecuaciones (II.2b, c y d) pueden escribirse como:

$$A(E) \underline{\Psi} = -C [\psi_0'(r)]_{r=0} \quad \text{--- (II.2b, c)}$$

$$C^\dagger \underline{\Psi} = [\psi_0(r)]_{r=0} \quad \text{--- (II.2d)}$$

Utilizando aquí la solución (II.1a) obtenemos:

$$A(E) \underline{\Psi} = i\sqrt{k_0} C [1 + S_M(k_0)]$$

$$i k_0 C C^\dagger \underline{\Psi} = i\sqrt{k_0} C [1 - S_M(k_0)]$$

En la segunda de estas ecuaciones hemos multiplicado ambos miembros por $i k_0 C$. Sumandolas obtenemos:

$$\underline{\Psi} = i(A + i k_0 C C^\dagger)^{-1} 2\sqrt{k_0} C \quad \text{--- (II.4a)}$$

Restando una de la otra obtenemos:

$$S_M(k_0) = 1 - 2i k_0 C^\dagger T_r(k_0) C \quad \text{--- (II.4b)}$$

donde:

$$T_r(k_0) = (A(E) + i k_0 C C^\dagger)^{-1} \quad \text{--- (II.4c)}$$

La función $S_M(k_0)$ se puede escribir de otra manera, usando la función $R_M(E)$ de Wigner del modelo. Dicha función se obtiene eliminando $\underline{\Psi}$ de las ecuaciones

(II.2b, c, d). Esto es:

$$[\Psi_0(r)]_{r=0} + C^\dagger A^{-1} C [\Psi_0'(r)]_{r=0} = 0 \quad \text{--- (II.5a)}$$

Esta ecuación da la relación que existe entre la función de ondas que describe el movimiento relativo y su derivada, en el punto de contacto. En ese caso:

$$R_M(E) = -C^\dagger A^{-1} C \quad \text{--- (II.5b)}$$

Vamos a calcular explícitamente esta expresión. El determinante de $A(E)$ es:

$$\Delta(E) = (E - m_1)(E - m_2) - C^2 \quad \text{--- (II.5c)}$$

donde: $C^2 = C_{12} C_{21} = |C_{12}|^2$. Entonces:

$$A^{-1} = \hat{\Theta}(E) / \Delta(E) \quad \text{--- (II.5d)}$$

con:

$$\hat{\Theta}(E) = \begin{pmatrix} E - m_2 & -C_{12} \\ -C_{21} & E - m_1 \end{pmatrix} \quad \text{--- (II.5e)}$$

Entonces:

$$R_M(E) = \frac{C_0^2 (m_2 - E)}{(m_1 - E)(m_2 - E) - C^2} \quad \text{--- (II.6)}$$

donde: $C_0^2 = C_{01} C_{10} = |C_{10}|^2$. Usando (II.1a) y (II.5b) en (II.5a) obtenemos la función de dispersión $S_M(k_0)$. Esto es:

$$S_M(k_0) = \frac{1 + i k_0 R_M(E)}{1 - i k_0 R_M(E)} \quad \text{--- (II.7)}$$

A continuación veremos que este problema tiene un análogo muy interesante en un problema de reacciones nucleares tratado con interacciones más realistas como son los pozos de potencial.

Consideremos el problema de una reacción nuclear iniciada por una partícula de masa m y sin estructura interna, que incide sobre un sistema nuclear formado por un número grande N de partículas idénticas cada una de ellas con masa m . Eventualmente la partícula incidente va a penetrar en el sistema donde interactuará con las N partículas nucleares. Estamos interesados en la descripción del comportamiento de dicho sistema.

El hamiltoniano total del sistema formado por las $(N+1)$ partículas es:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \sum_{n=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_n + V(\vec{r}, \vec{\xi}) \quad \text{--- (II.8)}$$

donde \vec{r} es la coordenada relativa de la partícula incidente con respecto al centro de masa de las N partículas nucleares y $\vec{\xi} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ toma en cuenta todas las coordenadas de las N partículas del núcleo blanco.

≠ 70 ≠

La energía potencial de la partícula incidente es igual a la energía potencial total del sistema completo menos el potencial de las N partículas nucleares. Esto es:

$$V_0(\vec{r}; \vec{\xi}) = V(\vec{r}; \vec{\xi}) - V(\vec{\xi}) \quad \text{--- (II.9)}$$

El hamiltoniano total se puede descomponer de la siguiente manera:

$$H = H_{\text{proyctil}} + H_{\text{blanco}}.$$

donde:

$$H_{\text{proyctil}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0(\vec{r}; \vec{\xi}) \quad \text{--- (II.10)}$$

$$H_{\text{blanco}} = \sum_{n=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_n + V(\vec{\xi})$$

Con el fin de describir el sistema de $(N+1)$ partículas, necesitamos un conjunto completo de funciones de onda ortonormales que describa todos los posibles estados del núcleo blanco. Sean las funciones $\chi_\alpha(\vec{\xi})$ tales que satisfagan la ecuación de Schrödinger:

$$H_{\text{blanco}} \chi_\alpha(\vec{\xi}) = E_\alpha \chi_\alpha(\vec{\xi}) \quad \text{--- (II.11)}$$

donde α es un índice que enumera los posibles estados del núcleo blanco.

#71#

La ecuación de Shroedinger que describe el comportamiento del sistema completo es:

$$(\mathcal{H} - E)\Psi = 0 \quad \text{--- (II.12)}$$

con E la energía total del sistema.

La función de onda que describe el comportamiento del sistema completo, se puede desarrollar en términos del conjunto completo de estados del sistema de N partículas, de modo que:

$$\Psi = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \mu_{\alpha}(\vec{r}) \chi_{\alpha}(\vec{\xi}) \quad \text{--- (II.13)}$$

Sustituyendo (II.13) en (II.12) y utilizando las relaciones (II.10) y (II.11) obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0(\vec{r}; \vec{\xi}) \right] \mu_{\alpha}(\vec{r}) \chi_{\alpha}(\vec{\xi}) + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \mu_{\alpha}(\vec{r}) \epsilon_{\alpha} \chi_{\alpha}(\vec{\xi}) &= \\ &= E \sum_{\alpha=0}^{\infty} \mu_{\alpha}(\vec{r}) \chi_{\alpha}(\vec{\xi}) \quad \text{--- (II.14)} \end{aligned}$$

Ahora, si multiplicamos por la izquierda por $\chi_{\beta}(\vec{\xi})$ e integramos a todo el espacio $d\vec{\xi}$, obtenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \mu_{\beta}(\vec{r}) + \sum_{\alpha=0}^{\infty} V_{\beta\alpha}(\vec{r}) \mu_{\alpha}(\vec{r}) + \epsilon_{\beta} \mu_{\beta}(\vec{r}) = E \mu_{\beta}(\vec{r}) \quad \text{--- (II.15)}$$

donde:

$$V_{\beta\alpha}(\vec{r}) \equiv \langle \chi_{\beta}(\vec{s}) | V_0(\vec{r}; \vec{s}) | \chi_{\alpha}(\vec{s}) \rangle \quad \text{--- (II.16)}$$

Además, vamos a considerar que los potenciales son reales y que:

$$V_{\beta\alpha}(\vec{r}) = V_{\alpha\beta}(\vec{r}) \quad \text{--- (II.17)}$$

Con todo lo anterior, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Vamos a suponer que solo son dos canales los importantes. Esto es, α y β tomarán ambos los valores 0 y 1 solamente. En ese caso (II.15) se reduce a:

$$\left[-\hbar^2/2m \Delta + V_{00} - (E - \epsilon_0) \right] \mu_0(\vec{r}) = -V_{01} \mu_1(\vec{r}) \quad \text{--- (II.18)}$$

$$\left[-\hbar^2/2m \Delta + V_{11} - (E - \epsilon_1) \right] \mu_1(\vec{r}) = -V_{10} \mu_0(\vec{r})$$

Vamos a fijar la escala de energías de tal manera que $\epsilon_0 = 0$. En ese caso, E es la energía cinética de la partícula incidente y ϵ_1 el valor Q de la reacción. Si ahora multiplicamos las ecuaciones (II.18) por $-2m/\hbar^2$ obtenemos:

$$(\Delta - U_{00} + k_0^2) \mu_0(\vec{r}) = U_{01} \mu_1(\vec{r}) \quad \text{--- (II.19)}$$

$$(\Delta - U_{11} + k_1^2) \mu_1(\vec{r}) = U_{10} \mu_0(\vec{r})$$

73

donde:

$$\begin{aligned} U_{00} &= 2mV_{00}/\hbar^2 & ; & \quad U_{11} = 2mV_{11}/\hbar^2 \quad \text{--- (II.20)} \\ U_{01} &= 2mV_{01}/\hbar^2 & ; & \quad U_{10} = 2mV_{10}/\hbar^2 \end{aligned}$$

$$k_0^2 = 2mE/\hbar^2 \quad \text{--- (II.21)}$$

$$k_i^2 = 2m(E - \epsilon_i)/\hbar^2$$

Vamos a escribir las funciones $\mu_i(r, \theta, \phi)$, $i=0,1$, como una suma de ondas parciales de momento angular orbital l . Entonces:

$$\mu_i(r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} \frac{\psi_{i,l,m}(r)}{r} Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad \text{--- (II.22)}$$

donde $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos. El operador laplaciano se puede escribir como:

$$\Delta = R(r) + \hat{L}^2/r^2$$

donde el operador radial $R(r)$ está dado por:

$$R(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r})$$

y \hat{L}^2 , aparte de un factor, es la parte angular del laplaciano. Esto es:

$$\hat{L}^2 = - \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \right]$$

#74#

Puesto que $\hat{L}^2 Y_{l,m} = l(l+1) Y_{l,m}$, la aplicación del operador Δ en coordenadas esféricas a (II.22) nos conduce a:

$$\hat{L}^2 u_i(r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} \frac{\psi_{l,m}}{r} Y_{l,m} l(l+1) \quad \text{--- (II.23)}$$

$$R(r) u_i(r, \theta, \phi) = \frac{\psi_{l,m}''}{r}$$

donde la doble prima indica segunda derivada con respecto a r . Si ahora aprovechamos las propiedades de ortonormalidad de los armónicos esféricos y nos restringimos al caso de reacciones nucleares iniciadas por partículas de baja energía, obtenemos:

$$\psi_0'' + (k_0^2 - U_{00}) \psi_0 = U_{01} \psi_1 \quad \text{--- (II.24)}$$

$$\psi_1'' + (k_1^2 - U_{11}) \psi_1 = U_{10} \psi_0$$

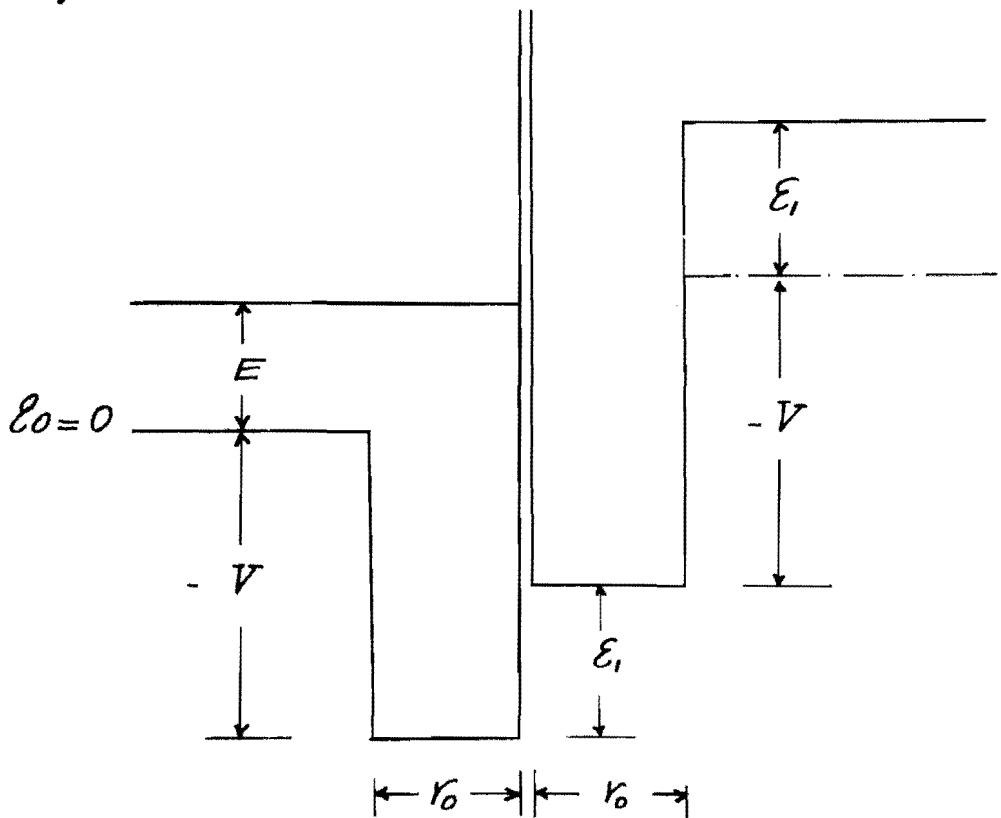
Si suponemos que los potenciales son esféricamente simétricos, podemos considerar que tanto U_{00} y U_{11} como los acoplamientos son pozos cuadrados de la forma:

$$U_{00} = \begin{cases} -V; & \text{para } r < r_0; \\ 0; & \text{para } r > r_0; \end{cases} \quad U_{11} = \begin{cases} -V; & \text{para } r < r_0 \\ E_1; & \text{para } r > r_0 \end{cases}$$

#75#

$$V_{i0} = V_{o1} = \begin{cases} -\hbar^2/2m \eta & ; \text{ para } r < r_0 \\ 0 & ; \text{ para } r > r_0 \end{cases}$$

donde r_0 es el alcance de los acoplamientos y de los potenciales y η es la constante de acoplamiento. La situación es la siguiente:



Entonces, para $r < r_0$:

$$U_{00} = -2mV/\hbar^2 ; U_{11} = -2mV/\hbar^2 \quad \text{--- (II.25)}$$

$$U_{o1} = U_{i0} = -\eta$$

y las ecuaciones (II.24) quedan como:

$$\psi_0'' + \kappa_0^2 \psi_0 + \eta \psi_1 = 0 \quad \text{--- (II.26)}$$

$$\psi_1'' + \kappa_1^2 \psi_1 + \eta \psi_0 = 0$$

≠76≠

donde κ_0^2 y κ_1^2 son los números de onda para $r < r_0$, dados por:

$$\kappa_0^2 = 2m(E+V)/\hbar^2 \quad \text{--- (II.27)}$$

$$\kappa_1^2 = 2m(E+V-E_1)/\hbar^2$$

Definimos:

$$\Phi'' = \begin{pmatrix} \psi_0'' \\ \psi_1'' \end{pmatrix}; \quad \Phi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} \kappa_0^2 & \eta \\ \eta & \kappa_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{--- (II.28)}$$

con lo cual podemos escribir (II.26) en forma matricial. Esto es:

$$\Phi'' + M\Phi = 0 \quad \text{--- (II.29)}$$

Puesto que M es una matriz simétrica, se puede diagonalizar mediante una transformación de semejanza. Sea \mathcal{U} la matriz que diagonaliza a M . Entonces:

$$\mathcal{U}^{-1}M\mathcal{U} = \Lambda \quad \text{--- (II.30)}$$

con Λ la matriz diagonal. Ahora, multipliquemos (II.29) por \mathcal{U}^{-1} :

$$(\mathcal{U}^{-1}\Phi)'' + \Lambda(\mathcal{U}^{-1}\Phi) = 0 \quad \text{--- (II.31)}$$

Si definimos:

$$\tilde{\Phi} = \mathcal{U}^{-1}\Phi \quad \text{--- (II.32)}$$

obtenemos:

#77#

$$\tilde{\Phi} + \Lambda \tilde{\Phi} = 0 \quad \text{--- (II.33)}$$

con lo cual hemos logrado desacoplar las ecuaciones. Es decir:

$$\tilde{\Phi}_0'' + \lambda_0^2 \tilde{\Phi}_0 = 0 \quad \text{--- (II.34)}$$

$$\tilde{\Phi}_i'' + \lambda_i^2 \tilde{\Phi}_i = 0$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones son de la forma:

$$\tilde{\Phi}_0 = A_0 e^{i\lambda_0 r} + B_0 e^{-i\lambda_0 r} \quad \text{--- (II.35)}$$

$$\tilde{\Phi}_i = A_i e^{i\lambda_i r} + B_i e^{-i\lambda_i r}$$

Sin embargo, se requiere que en el origen $\tilde{\Phi}_0(0) = \tilde{\Phi}_i(0) = 0$, de modo que:

$$A_0 = -B_0 \quad \text{--- (II.36a)}$$

$$A_i = -B_i$$

$$\tilde{\Phi}_0 = A_0 (e^{i\lambda_0 r} - e^{-i\lambda_0 r}) \quad \text{--- (II.36b)}$$

$$\tilde{\Phi}_i = A_i (e^{i\lambda_i r} - e^{-i\lambda_i r})$$

Esto significa que podemos escribir las soluciones de (II.34) como:

$$\tilde{\Phi}_0 = b_0 \sin \lambda_0 r \quad \text{--- (II.37)}$$

$$\tilde{\Phi}_i = b_i \sin \lambda_i r$$

Ahora, para obtener Φ lo único que tenemos que hacer es aplicar \mathcal{U} a (II.32). Esto es:

$$\Phi = \mathcal{U} \tilde{\Phi} \quad \text{--- (II.38)}$$

#78#

Vamos a calcular los valores propios de M . Esto es:

$$\begin{vmatrix} \kappa_0^2 - \lambda^2 & \eta \\ \eta & \kappa_1^2 - \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^4 - \lambda^2(\kappa_0^2 + \kappa_1^2) + \kappa_0^2 \kappa_1^2 - \eta^2 = 0$$

De aquí se obtiene:

$$\lambda_0^2 = \kappa_+ + \sqrt{\kappa_-^2 + \eta^2} \quad \text{--- (II.39)}$$

$$\lambda_1^2 = \kappa_+ - \sqrt{\kappa_-^2 + \eta^2}$$

donde:

$$\kappa_+ = (\kappa_0^2 + \kappa_1^2)/2 = 2m(E + V - \epsilon_{i/2})/\hbar^2 \quad \text{--- (II.40)}$$

$$\kappa_- = (\kappa_0^2 - \kappa_1^2)/2 = m\epsilon_i/\hbar^2$$

Entonces:

$$\lambda_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V - \frac{\epsilon_i}{2}) + \sqrt{\frac{m^2 \epsilon_i^2}{\hbar^4} + \eta^2} \quad \text{--- (II.41)}$$

$$\lambda_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V - \frac{\epsilon_i}{2}) - \sqrt{\frac{m^2 \epsilon_i^2}{\hbar^4} + \eta^2}$$

con λ_0^2 y λ_1^2 los valores propios de M . Para obtener los vectores propios de dicha matriz, se procede como es usual, de manera que:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \alpha & \eta \\ -\eta & \alpha \end{pmatrix}; \quad \mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{(\alpha^2 + \eta^2)} \begin{pmatrix} \alpha & -\eta \\ \eta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{--- (II.42)}$$

donde:

#79#

$$\alpha = -\kappa - \sqrt{\kappa^2 + \eta^2} = -\frac{m\varepsilon_1}{\hbar^2} - \sqrt{\frac{m^2\varepsilon_1^2}{\hbar^4} + \eta^2}$$

Así, sustituyendo \mathcal{U} en (II.38) y usando (II.37) obtenemos para $r < r_0$:

$$\psi_0 = \alpha b_0 \sin \lambda_0 r + \eta b_1 \sin \lambda_1 r \quad \text{--- (II.43)}$$

$$\psi_1 = -\eta b_0 \sin \lambda_0 r + \alpha b_1 \sin \lambda_1 r$$

Fuera de la región de interacción las ecuaciones están desacopladas de manera que para $r > r_0$:

$$\psi_0'' + k_0^2 \psi_0 = 0 \quad \text{--- (II.44)}$$

$$\psi_1'' + k_1^2 \psi_1 = 0$$

con k_0^2 y k_1^2 los números de onda para $r > r_0$, dados por las ecuaciones (II.21). Las soluciones de (II.44) son de la forma:

$$\psi_0 = [e^{-ik_0 r} - S_{00}(k_0) e^{ik_0 r}] / \sqrt{k_0} \quad \text{--- (II.45)}$$

$$\psi_1 = [S_{01} e^{ik_1 r}] / \sqrt{k_1}$$

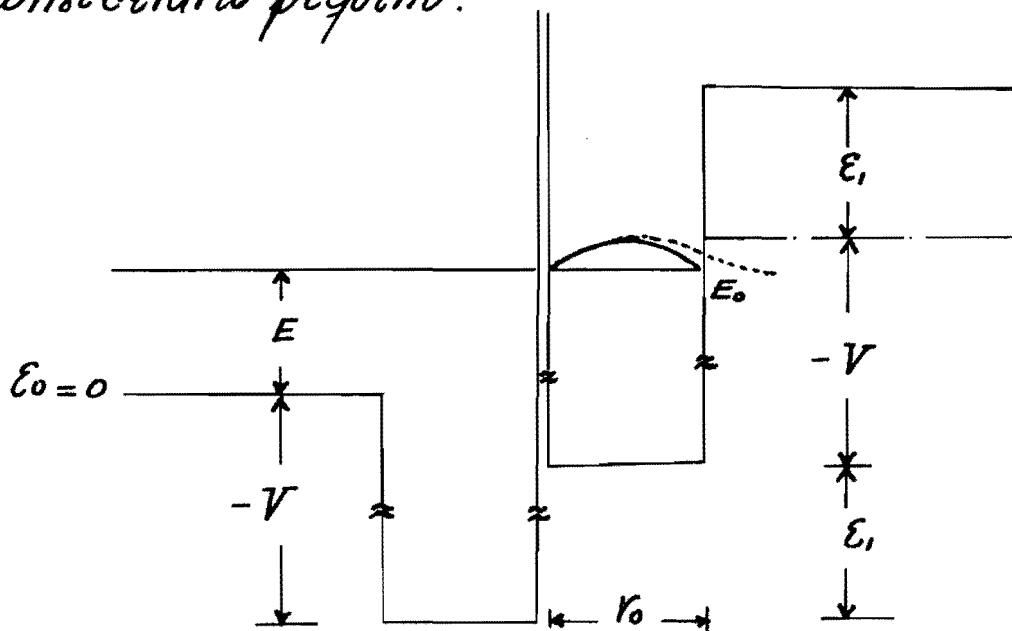
donde S_{00} y S_{01} son elementos de la matriz de dispersión S .

Si consideramos que $\varepsilon_1 > E$:

$$k_1 = i\sqrt{2m(\varepsilon_1 - E)}/\hbar \quad \text{--- (II.46)}$$

y: $\psi_1 = 0$ en $r > r_0$

Aquí estamos suponiendo que cuando la partícula incidente penetra en el núcleo, le cede prácticamente toda su energía cinética mientras que ella cae en un estado casi-estacionario del núcleo blanco. Así, en tanto que el núcleo está muy excitado, la partícula incidente queda atrapada en un nivel energético E_0 del núcleo tal que es mucho menor que la energía de excitación ϵ_1 . Entonces, podemos suponer que la función de ondas se hace cero en $r \leq r_0$ y despreciar el decaimiento exponencial de ψ_1 en $r \geq r_0$ por considerarlo pequeño.



Ahora bien, la función $R(E)$ de Wigner se define como:

$$R(E) = \frac{1}{r_0} \left[\frac{\psi_0(r)}{\psi_0'(r)} \right]_{r=r_0} \quad \text{--- (II. 47)}$$

≠ 81 ≠

de modo que usando (II.45) y de acuerdo con (II.46) se tiene:

$$S_{00}(k_0) = e^{-2ik_0r_0} \left[\frac{1 + ik_0 R(E)}{1 - ik_0 R(E)} \right] \quad \text{--- (II.48)}$$

Si ahora en (II.47) usamos las funciones de onda obtenidas para $r < r_0$ y la condición $\psi_1(0) = 0$, obtenemos:

$$R(E) = \frac{(\alpha^2 + \eta^2)}{\alpha^2 \lambda_0 \cot \lambda_0 r_0 + \eta^2 \lambda_1 \cot \lambda_1 r_0} \quad \text{--- (II.49)}$$

Es claro que:

$$R(E) \rightarrow \infty, \text{ cuando } \quad \text{--- (II.50)}$$
$$\alpha^2 \lambda_0 \cot \lambda_0 r_0 + \eta^2 \lambda_1 \cot \lambda_1 r_0 \rightarrow 0$$

Vamos a escribir $R(E)$ de la manera siguiente:

$$R(E) = \frac{(\alpha^2 + \eta^2) \tan \lambda_1 r_0}{\alpha^2 \lambda_0 \cot \lambda_0 r_0 \tan \lambda_1 r_0 + \eta^2 \lambda_1} \quad \text{--- (II.51)}$$

Definimos las energías de resonancia con las condiciones:

$$\cot \lambda_0 r_0 = 0 \quad (\text{resonancia en el 1er potencial}) \quad \text{--- (II.52)}$$

$$\tan \lambda_1 r_0 = 0 \quad (\text{estado ligado en el 2o potencial})$$

Si hacemos un desarrollo en serie de Taylor alrededor de dichas energías y nos quedamos con términos hasta primer orden, obtenemos:

#82#

$$f_0(E) \approx (E_0 - E) \lambda_0^{(n_0)} / 2 \quad \text{--- (II.53)}$$

$$f_1(E) \approx -(E_1 - E) \lambda_1^{(n_1)} / 2$$

donde $\lambda_0^{(n_0)}$ y $\lambda_1^{(n_1)}$ son los valores de λ_0 y λ_1 para los cuales se cumplen las condiciones (II.52). Así, para la condición de resonancia se tiene:

$$R(E) = \frac{2(\alpha^2 + \eta^2)(E_1 - E)}{\alpha^2(E_0 - E)(E_1 - E) - 4\eta^2 \lambda_1^{(n_1)^2}} \quad \text{--- (II.54)}$$

Si comparamos esta expresión con la que está dada en (II.6) vemos que son idénticas si

$$\left. \begin{aligned} C_0^2 &= 2(\alpha^2 + \eta^2) / \alpha^2 \\ C^2 &= 4\eta^2 \lambda_1^{(n_1)^2} / \alpha^2 \\ m_1 &= E_0 \\ m_2 &= E_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (II.55)}$$

En ese caso, la expresión (II.48) toma la forma:

$$S_{00}(k_0) = S_M(k_0) e^{-2ik_0 r_0} \quad \text{--- (II.56)}$$

donde el término $e^{-2ik_0 r_0}$ toma en cuenta la dispersión por una esfera rígida, mientras que $S_M(k_0)$ describe el comportamiento del sistema interno. En esta última parte hemos considerado que $\hbar = 2m = 1$.

Apéndice III

Solución de la ecuación de 4º grado en número de onda.

Las raíces de la ecuación (3.6) se obtienen de la condición:

$$(q^2 - 2m_1 + 2iC^2q)(q^2 - 2m_2) - 4C^2 = 0 \quad \text{--- (III.1)}$$

Esta es una ecuación de 4º grado en q . Vamos a obtener sus raíces en forma aproximada debido a que es difícil hallar soluciones exactas de ella. Consideremos que en primera aproximación $C^2 = 0$ y C^2 arbitrario. Esta aproximación corresponde al caso tratado en la primera parte del capítulo 2. Entonces (III.1) se reduce a la ecuación:

$$(q^2 - 2m_1)(q^2 - 2m_2) - 4C^2 = 0 \quad \text{--- (III.2)}$$

cuyas soluciones son:

$$q_{1\pm}^0 = \pm \sqrt{m_+ + \delta^1} \quad \text{--- (III.3)}$$

$$q_{2\pm}^0 = \pm \sqrt{m_+ - \delta^1}$$

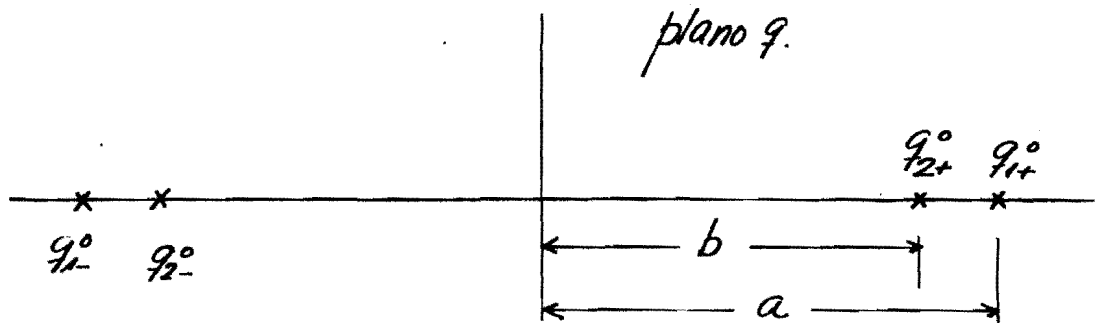
donde:

$$\delta^1 = \sqrt{m_-^2 + 4C^2} \quad \text{--- (III.4a)}$$

$$m_{\pm} = m_1 \pm m_2 \quad \text{--- (III.4b)}$$

≠84≠

En el plano complejo z la situación es la siguiente:



Como es fácil ver:

$$q_{j+}^0 = -q_{j-}^0 ; j=1,2 \quad \text{--- (III. 4C)}$$

Con todo lo anterior vamos a calcular los coeficientes de las funciones $w(z)$ que aparecen en (2.6). Los determinantes tienen la forma:

$$\begin{aligned} \Delta_{1+}^0(q_{1+}^0) &= 2q_{1+}^0 [q_{1+}^{0^2} - q_{2+}^{0^2}] = 4q_{1+}^0 \delta \\ \Delta_{1-}^0(q_{1-}^0) &= 2q_{1-}^0 [q_{1-}^{0^2} - q_{2-}^{0^2}] = 4q_{1-}^0 \delta \quad \text{--- (III. 5a)} \\ \Delta_{2+}^0(q_{2+}^0) &= 2q_{2+}^0 [q_{2+}^{0^2} - q_{1+}^{0^2}] = -4q_{2+}^0 \delta \\ \Delta_{2-}^0(q_{2-}^0) &= 2q_{2-}^0 [q_{2-}^{0^2} - q_{1-}^{0^2}] = -4q_{2-}^0 \delta \end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{q_{1+}^0 \hat{\theta}(q_{1+}^0)}{\Delta_{1+}^0(q_{1+}^0)} = \frac{q_{1-}^0 \hat{\theta}(q_{1-}^0)}{\Delta_{1-}^0(q_{1-}^0)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \delta_+ & -\frac{2C_{12}}{\delta} \\ -\frac{2C_{21}}{\delta} & \delta_- \end{pmatrix} \quad \text{--- (III. 5b)}$$

$$\frac{q_{2+}^0 \hat{\theta}(q_{2+}^0)}{\Delta_{2+}^0(q_{2+}^0)} = \frac{q_{2-}^0 \hat{\theta}(q_{2-}^0)}{\Delta_{2-}^0(q_{2-}^0)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \delta_- & \frac{2C_{12}}{\delta} \\ \frac{2C_{21}}{\delta} & \delta_+ \end{pmatrix}$$

≠ 85 ≠

donde δ_{\pm} es una cantidad siempre positiva dada por:

$$\delta_{\pm} = 1 \pm \frac{m_{-}}{\gamma} \quad \text{--- (III.5c)}$$

En ausencia de acoplamiento interno, es decir: $C^2 = 0$, la ecuación (III.1) toma la forma:

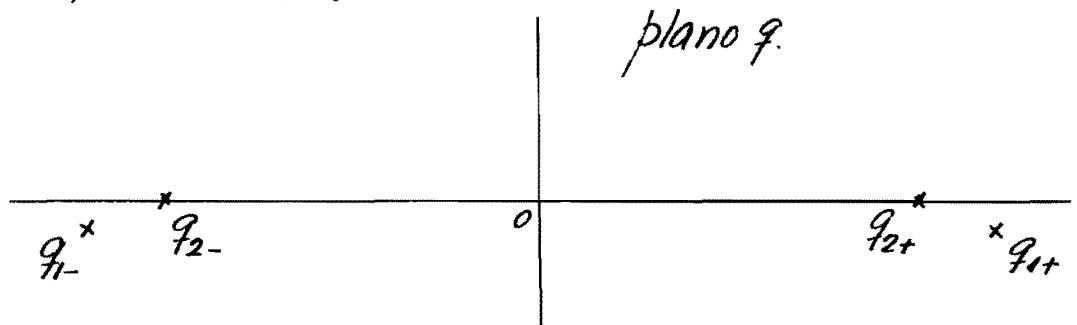
$$(q^2 - 2m_1 + 2iqC^2)(q^2 - 2m_2) = 0 \quad \text{--- (III.6)}$$

Sus soluciones son:

$$q_{1\pm} = \pm \sqrt{2m_1} - iC^2 \quad \text{--- (III.7)}$$

$$q_{2\pm} = \pm \sqrt{2m_2}$$

En el plano complejo q la situación es la siguiente:



Es claro que:

$$q_{j+} = -q_{j-}^* ; j=1,2 \quad \text{--- (III.8)}$$

Esta aproximación corresponde al caso tratado en la segunda parte del capítulo 2. Vamos a calcular con esto, los coeficientes de las funciones $w(z)$ que aparecen en (2.26).

Los determinantes tienen la forma:

$$\begin{aligned} \Delta_{1+}(q_{1+}) &= 2\sqrt{2m_1'} [q_{1+}^2 - q_{2+}^2] = 4\sqrt{2m_1'} [m_- - i\beta^2 \sqrt{2m_1'}] \\ \Delta_{1-}(q_{1-}) &= -2\sqrt{2m_1'} [q_{1-}^2 - q_{2-}^2] = -4\sqrt{2m_1'} [m_- + i\beta^2 \sqrt{2m_1'}] \quad \text{--- (III.9a)} \\ \Delta_{2+}(q_{2+}) &= 2\sqrt{2m_2'} (q_{2+} - q_{1+})(q_{2+} - q_{1-}) = -4\sqrt{2m_2'} [m_- - i\beta^2 \sqrt{2m_2'}] \\ \Delta_{2-}(q_{2-}) &= -2\sqrt{2m_2'} (q_{2-} - q_{1-})(q_{2-} - q_{1+}) = 4\sqrt{2m_2'} [m_- + i\beta^2 \sqrt{2m_2'}] \end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{q_{1+} \hat{\theta}(q_{1+})}{\Delta_{1+}(q_{1+})} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{i\beta^2}{\sqrt{2m_1'}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{--- (III.9b)}$$

$$\frac{q_{1-} \hat{\theta}(q_{1-})}{\Delta_{1-}(q_{1-})} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i\beta^2}{\sqrt{2m_1'}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{q_{2+} \hat{\theta}(q_{2+})}{\Delta_{2+}(q_{2+})} = \frac{q_{2-} \hat{\theta}(q_{2-})}{\Delta_{2-}(q_{2-})} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{--- (III.9c)}$$

Aquí hemos calculado todas las cantidades hasta primer orden en β^2 .

Para los capítulos 3 y 4 necesitamos las raíces de la ecuación (III.1) a primer orden en β^2 con C^2 arbitrario. En ese caso, vamos a escribir (III.1) como sigue:

#87#

$$(q^2 - 2m_2)(q^2 - 2m_1) + 2i\beta^2 q(q^2 - 2m_2) = 4C^2$$

En ausencia de acoplamiento con el canal de entrada:

$$(q^2 - 2m_2)(q^2 - 2m_1) = 4C^2 \quad \text{--- (III.10a)}$$

con lo cual obtenemos las raíces a orden cero en C^2 dadas en (III.3). Por otra parte, en ausencia de acoplamiento interno:

$$(q^2 - 2m_2)(q^2 - 2m_1) = 2i\beta^2 q(2m_2 - q^2) \quad \text{--- (III.10b)}$$

Esta ecuación da las raíces a orden cero en C^2 . Si en ella utilizamos las raíces a orden cero en C^2 con C^2 arbitrario, calculadas con la ecuación (III.10a), obtendremos las raíces q_j , $j=1,2,3,4$; a primer orden en C^2 con C^2 arbitrario.

Entonces, sea $Q = q^2$, de tal manera que (III.10b) toma la forma:

$$(Q - 2m_1)(Q - 2m_2) = 2i\beta^2 q(2m_2 - Q)$$

y utilizando las soluciones (III.3) obtenemos:

$$(Q - Q^{(1)})(Q - Q^{(2)}) = 2i\beta^2 q(2m_2 - Q)$$

donde:

$$Q^{(1)} = q_{1+}^2 = m_+ + 8 \quad \text{--- (III.11)}$$

$$Q^{(2)} = q_{2+}^2 = m_+ - 8$$

Así, para q_{1+} y q_{2+} obtenemos la siguiente pareja de ecuaciones:

≠ 88 ≠

$$(q - q_{1+}^0)(q - q_{1-}^0)(Q^{(1)} - Q^{(2)}) = 2i\gamma(2m_2 - Q)\mathcal{C}^2 \quad \text{--- (III.12)}$$
$$(Q^{(2)} - Q^{(1)})(q - q_{2+}^0)(q - q_{2-}^0) = 2i\gamma(2m_2 - Q)\mathcal{C}^2$$

Reescribiendo para q_{1+}^1 y q_{2+}^1 obtenemos:

$$q_{1+}^1 = q_{1+}^0 + \frac{i q_{1+}^0 (2m_2 - Q) \mathcal{C}^2}{q_{1+}^0 (Q^{(1)} - Q^{(2)})} \quad \text{--- (III.13a)}$$

$$q_{2+}^1 = q_{2+}^0 + \frac{i q_{2+}^0 (2m_2 - Q) \mathcal{C}^2}{q_{2+}^0 (Q^{(2)} - Q^{(1)})} \quad \text{--- (III.13b)}$$

donde:

$$(Q^{(1)} - Q^{(2)}) = 2\gamma \quad \text{--- (III.14)}$$

$$(Q^{(2)} - Q^{(1)}) = -2\gamma$$

Por otra parte, vamos a sustituir Q en (III.13a) por $q_{1+}^{0^2}$ y en (III.13b) por $q_{2+}^{0^2}$. Entonces:

$$q_{1+}^1 = q_{1+}^0 - \frac{i\mathcal{C}^2}{2} \left(1 + \frac{m_-}{\gamma}\right) \quad \text{--- (III.15a)}$$

$$q_{2+}^1 = q_{2+}^0 - \frac{i\mathcal{C}^2}{2} \left(1 - \frac{m_-}{\gamma}\right)$$

Por la simetría del problema es claro que:

$$q_{1-}^1 = -q_{1+}^{1*} \quad \text{--- (III.15b)}$$

$$q_{2-}^1 = -q_{2+}^{1*}$$

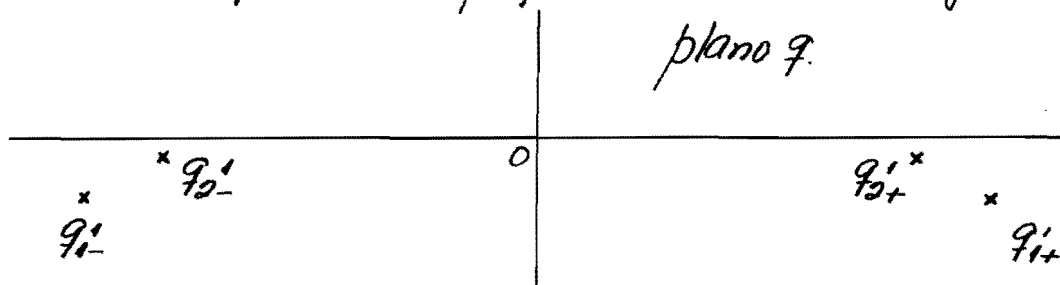
Entonces:

$\neq 89 \neq$

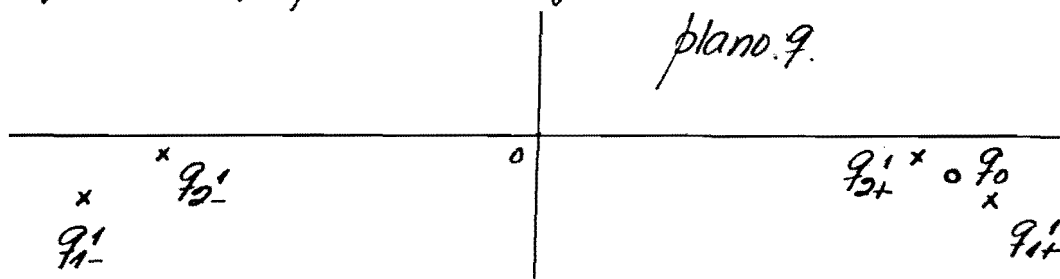
$$\begin{aligned} \gamma_{1+}' &= \sqrt{m_+ + \delta'} - i C_0^2 \delta_+ / 2 ; & \gamma_{2+}' &= \sqrt{m_+ - \delta'} - i C_0^2 \delta_- / 2 \quad \text{--- (III.16)} \\ \gamma_{1-}' &= -\sqrt{m_+ + \delta'} - i C_0^2 \delta_+ / 2 ; & \gamma_{2-}' &= -\sqrt{m_+ - \delta'} - i C_0^2 \delta_- / 2 \end{aligned}$$

De las ecuaciones (III.15a) se ve que $\delta_+ > \delta_-$. Por otra parte, si $C_0^2 = 0$, las ecuaciones (III.16) se reducen a las soluciones (III.3). Por el contrario, cuando $C_0^2 = 0$; $\delta' = m_-$, $\delta_- = 0$ y $\delta_+ = 2$; de modo que (III.16) se reduce a las soluciones (III.7).

En el capítulo 3 hemos supuesto que las raíces γ_j están colocadas en el plano complejo γ de la manera siguiente:



En el capítulo 4 la situación de los polos γ_j es la misma que antes, nada más que ahora tenemos un polo más, el γ_0 , proveniente del paquete de ondas entrante y cuya situación en el plano complejo γ es la siguiente:



Apéndice IV.

Algunas propiedades de las funciones $w(z)$.

La función $w(z)$ se define como:

$$w(z) = e^{-z^2} \left[1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \right] \quad \text{--- (IV.1)}$$

y es conocida como la integral de probabilidad de argumento complejo ⁽¹²⁾ $z = (x+iy)$. La parte real de $w(z)$ se denota por $u(x,y)$ y la parte imaginaria por $v(x,y)$. Para $y > 0$ se sabe ⁽¹²⁾ que:

$$w(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{z-t} dt \quad \text{--- (IV.2a)}$$

de modo que:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y e^{-t^2}}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad \text{--- (IV.2b)}$$

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t) e^{-t^2}}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad \text{--- (IV.2c)}$$

En general es difícil obtener valores tabulados de la

≠ 91 ≠

función $w(z)$ para cualquier intervalo de variación de la variable z . Los valores de la función $w(z)$ se expresan, solamente, en términos de funciones previamente tabuladas y en los casos siguientes:

i) Cuando z cambia pero permanece sobre el eje real. Esto es: $z = x$. Entonces:

$$w(z) = e^{-x^2} + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} F(x) \quad \text{--- (IV.3a)}$$

donde:

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \quad \text{--- (IV.3b)}$$

Los valores de la función $F(x)$ pueden encontrarse en la literatura⁽¹⁾.

ii) Supongamos que z cambia pero permanece sobre el eje imaginario. Es decir: $z = iy$. Entonces:

$$w(iy) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{y^2} \int_y^\infty e^{-t^2} dt \quad \text{--- (IV.4)}$$

con $w(iy)$ una función real. Esta función solo se distingue por el factor $2e^{y^2}/\sqrt{\pi}$ de la función $\int^\infty e^{-t^2} dt$ cuyos valores fueron tabulados por A.A. Markov⁽¹²⁾. Por otra parte se tiene que:

≠ 92 ≠

$$\begin{aligned} \omega(z) &= e^{-z^2} \left[1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \right] = e^{-z^2} [1 + i \operatorname{erf}(z)] \\ &= e^{-z^2} [1 + i(1 - \operatorname{erfc}(z))] = e^{-z^2} [1 + i - i \operatorname{erfc}(z)] \end{aligned}$$

Además:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du$$

Entonces:

$$\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 1$$

donde erf es la función de error de Gauss y erfc la función de error complementaria. Definimos:

$$\operatorname{erfc}(iz) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{iz} e^{-t^2} dt \quad \text{--- (IV.5a)}$$

Vamos a hacer el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} t' &\rightarrow -it \\ dt' &= -i dt \end{aligned}$$

Entonces:

93

$$\operatorname{erfc}(iz) = 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t'^2} dt' \quad \text{--- (IV.5b)}$$

Con esto se tiene que:

$$\bar{\omega}(iz) = \bar{e}^{-z^2} \operatorname{erfc}(iz) \quad \text{--- (IV.6)}$$

iii) Finalmente cuando $z = (1+i)\mu$ con $\mu > 0$, la función $\bar{\omega}[(1+i)\mu]$ está relacionada con las integrales de Fresnel de la siguiente manera:

$$\bar{\omega}[(1+i)\mu] = \bar{e}^{-2i\mu^2} \left\{ 1 + (i-1) \left[C\left(\frac{2\mu}{\sqrt{\pi}}\right) + iS\left(\frac{2\mu}{\sqrt{\pi}}\right) \right] \right\} \quad \text{--- (IV.7)}$$

donde:

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi z^2}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(t) dt \quad \text{--- (IV.8)}$$

$$S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi z^2}{2}} J_{\frac{1}{2}}(t) dt$$

donde $J_{-\frac{1}{2}}, J_{\frac{1}{2}}$ son las funciones Bessel esféricas.

Los valores de la función $\bar{\omega}(z)$ se han calculado considerando que el intervalo de variación de la variable z es el cuadrante $x > 0, y > 0$. Los valores de $\bar{\omega}(z)$

#94#

En los puntos restantes del plano se obtienen a partir de los valores de $\omega(z)$ en dicho cuadrante. En efecto, cuando $\text{Im}(z) > 0$:

$$\omega(z) = 2\bar{e}^{-z^2} - \omega(-z) \quad \text{--- (IV.9)}$$

Además, como la función $\omega(iy)$ es real, la función $\omega(z)$ toma valores complejos conjugados en los puntos situados simétricamente con respecto al eje imaginario.

Finalmente, cuando $z=0$:

$$\omega(0) = 1 \quad \text{--- (IV.10)}$$

Apéndice V.

Desarrollo en fracciones parciales.

Consideremos la ecuación (4.12). Esto es:

$$\bar{\Psi}(r,p) = \bar{\Psi}_{in}(r,p) - S(q) \bar{\Psi}_{in}(0,p) e^{iqr} + \frac{1}{2} i C^+ \mathbb{T}_r(q) \Psi^0 \frac{e^{iqr}}{q} \quad (4.12)$$

donde $\mathbb{T}_r(q)$ y $S(q)$ están definidas en (4.13) y (4.14).

Ahora bien,

$$(A + i q C C^+) = \begin{pmatrix} q^2/2 - m_1 + i q C_0^2 & C_{12} \\ C_{21} & q^2/2 - m_2 \end{pmatrix} \quad (V.1a)$$

Necesitamos el inverso de esta matriz. Su determinante es:

$$\Delta(q) = (q^2 + 2i q C_0^2 - 2m_1)(q^2 - 2m_2) - 4C^2 \quad (V.1b)$$

donde: $C^2 = C_{12} C_{21} = |C_{12}|^2$; $C_0^2 = C_{10} C_{01} = |C_{10}|^2$.

Este determinante puede escribirse como un polinomio en q de la forma:

$$\Delta(q) = \prod_{j=1}^4 (q - q_j) \quad (V.1c)$$

de tal manera que:

≠ 96 ≠

$$T_r(q) = \frac{2\hat{\Theta}(q)}{\Delta(q)} \quad \text{--- (V.1d)}$$

donde:

$$\hat{\Theta}(q) = \begin{pmatrix} q^2 - 2m_2 & -2C_{12} \\ -2C_{21} & q^2 + 2i q C_0^2 - 2m_1 \end{pmatrix}$$

En términos de fracciones parciales se tiene:

$$\frac{q\hat{\Theta}(q)}{\Delta(q)} = \sum_{j=1}^4 \frac{q_j \hat{\Theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)(q - q_j)}$$

donde:

$$\Delta_j(q_j) = \prod_{j \neq k} (q_j - q_k)$$

Por otra parte si calculamos $\bar{\Psi}_{in}(r, p)$ y $\Psi_{in}(0, p)$ obtenemos:

$$\bar{\Psi}_{in}(0, p) = -\frac{1}{iq} \frac{1}{(q - q_0)} \quad \text{--- (V.1e)}$$

$$\bar{\Psi}_{in}(r, p) = \frac{1}{iq} \left[-\frac{2q}{q^2 - q_0^2} e^{-iq_0 r} + \frac{e^{iqr}}{q + q_0} \right] \quad \text{--- (V.1f)}$$

Sustituyendo todo lo anterior en (1.12) se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(r, p) = & \bar{\Psi}_{in}(r, p) - \frac{1}{i} \left[\frac{1}{q(q - q_0)} - i C^+ \sum_{j=1}^4 \frac{q_j \hat{\Theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)(q - q_j) q(q - q_0)} \right] e^{iqr} + \\ & + \frac{i}{2} C^+ \sum_{j=1}^4 \frac{q_j \hat{\Theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)} \frac{\Psi^0 e^{iqr}}{q(q - q_j)} \quad \text{--- (V.2)} \end{aligned}$$

97

Por otra parte se tiene que:

$$\frac{1}{(q-q_0)(q-q_j)} = \frac{1}{(q_j-q_0)(q-q_j)} - \frac{1}{(q_j-q_0)(q-q_0)}$$

Entonces la suma encerrada en el paréntesis en (V.2) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{q} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{q_j \hat{\theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)(q_j-q_0)(q-q_j)} - \frac{1}{(q-q_0)} \sum_{j=1}^4 \frac{q_j \hat{\theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)(q_j-q_0)} \right] = \\ & = 4 \sum_{j=1}^4 \frac{q_j \hat{\theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)(q-q_j)q(q-q_0)} \end{aligned}$$

La segunda suma del miembro de la izquierda de la expresión anterior se puede escribir de la manera siguiente:

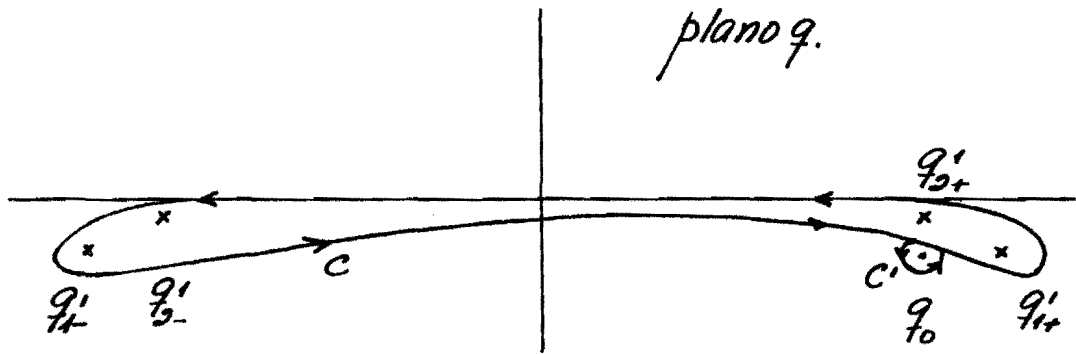
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{q \hat{\theta}(q) dq}{(q-q_0)(q-q_{1+}) \dots (q-q_{2-})} = \left[\frac{q_{1+} \hat{\theta}(q_{1+})}{(q_{1+}-q_0) \Delta_{1+}(q_{1+})} + \frac{q_{1-} \hat{\theta}(q_{1-})}{(q_{1-}-q_0) \Delta_{1-}(q_{1-})} + \right. \\ & \left. + \frac{q_{2+} \hat{\theta}(q_{2+})}{(q_{2+}-q_0) \Delta_{2+}(q_{2+})} + \frac{q_{2-} \hat{\theta}(q_{2-})}{(q_{2-}-q_0) \Delta_{2-}(q_{2-})} \right] = \sum_{j=1}^4 \frac{q_j \hat{\theta}(q_j)}{(q_j-q_0) \Delta_j(q_j)} \quad (V.3) \end{aligned}$$

donde la integral se debe realizar a lo largo de un contorno cerrado C que no incluya los polos $q_j = q_0$. El contorno

$\neq 98 \neq$

c deberá recorrerse en sentido positivo. Aquí $j=1\pm, 2\pm$.

Sea c' una trayectoria cerrada recorrida en sentido positivo que encierra al polo q_0 . En el plano complejo q la situación es la siguiente:



Podemos deformar el contorno c de tal manera que sea equivalente a c' . Como ambas trayectorias son positivas, se tiene que:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_c - \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} = 0 \quad \text{--- (V.4)}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_c = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} = \frac{q_0 \hat{\theta}(q_0)}{\Delta(q_0)}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{q \hat{\theta}(q) dq}{(q-q_0)(q-q_{1+}) \dots (q-q_{2-})} = \sum_{j=1}^4 \frac{q_j \hat{\theta}(q_j)}{(q_j-q_0) \Delta_j'(q_j)} = \frac{q_0 \hat{\theta}(q_0)}{\Delta(q_0)} \quad \text{--- (V.5)}$$

donde:

$$\Delta(q_0) = \prod_j (q_0 - q_j); \text{ con } j=1\pm, 2\pm \quad \text{--- (V.6)}$$

#99#

Por otra parte:

$$\sum_{j=1}^4 \frac{q_j \hat{\theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{q \hat{\theta}(q) dq}{\Delta_j(q_j)(q - q_j)}$$

Entonces:

$$i \mathcal{C}^+ \sum_{j=1}^4 \frac{4q_j \hat{\theta}(q_j)}{\Delta_j(q_j)(q_j - q_0)} \mathcal{C} = \sum_{j=1}^4 \text{Res} \left[\frac{1 - S(q)}{q - q_0} \right]_{q=q_j} \quad (\text{V.7})$$

Ademas

$$\frac{\mathcal{C}^+ \sum_{j=1}^4 4q_j \hat{\theta}(q_j)}{2 \Delta_j(q_j)} = \frac{\mathcal{C}^+ \sum_{j=1}^4 \text{Res} [\Psi(r, q)]_{q=q_j}}{2} \quad (\text{V.8})$$

Sustituyendo (V.5, 7 y 8) y (V.1f) en (V.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(r, \rho) = & \frac{1}{i q} \left[-\frac{2q}{q^2 - q_0^2} e^{-i q_0 r} + \frac{e^{i q r}}{q + q_0} \right] - S(q_0) \frac{e^{i q r}}{i q (q - q_0)} + \\ & + \sum_{j=1}^4 \text{Res} \left[\frac{1 - S(q)}{q - q_0} \right]_{q=q_j} \frac{e^{i q r}}{i q (q - q_j)} - \frac{\mathcal{C}^+ \sum_{j=1}^4 \text{Res} [\Psi(r, q)]_{q=q_j}}{2} \frac{\Psi^0 e^{i q r}}{i q (q - q_j)} \quad (\text{V.9}) \end{aligned}$$

donde:

$$S(q_0) = 1 - i \mathcal{C}^+ \frac{4q_0 \hat{\theta}(q_0)}{\Delta(q_0)} \mathcal{C} \quad (\text{V.10})$$

Apéndice VI.

Cálculo de la sección para la dispersión elástica.

Vamos a calcular la sección para la dispersión elástica a partir de la solución estacionaria del sistema de ecuaciones dinámicas (I.1), dada en el apéndice II. Para $l=0$, se tiene:

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k_0^2} |1 - S_M(k_0)|^2 \quad \text{--- (VI.1)}$$

donde $k_0^2 = 2mE/\hbar^2$ y $S_M(k_0)$ es la función de dispersión del modelo dada por:

$$S_M(k_0) = \frac{1 + i k_0 R_M(E)}{1 - i k_0 R_M(E)} \quad \text{--- (II.7)}$$

Aquí $R_M(E)$ es la función de Wigner del modelo dada por:

$$R_M(E) = \frac{C_0^2 (m_2 - E)}{(m_1 - E)(m_2 - E) - C^2} \quad \text{--- (II.6)}$$

Es claro que $R_M(E) \rightarrow \infty$ cuando el denominador de (II.6) tiende a cero. Esto es:

101

$$E^2 - (m_1 + m_2)E + m_1 m_2 - C^2 = 0 \quad \text{--- (VI.2)}$$

Entonces:

$$E_1 = [m_+ + \delta']/2 \quad \text{--- (VI.3)}$$

$$E_2 = [m_+ - \delta']/2$$

donde m_+ y δ' están definidas en el apéndice III.

Vamos a reducir a $R_M(E)$ a su forma normal. Entonces:

$$(m_1 - E)(m_2 - E) - C^2 = (E_1 - E)(E_2 - E)$$

$$R_M(E) = C^2 \left[\frac{A}{E_1 - E} + \frac{B}{E_2 - E} \right] = \frac{C^2 [A(E_2 - E) + B(E_1 - E)]}{(E_1 - E)(E_2 - E)}$$

$$AE_2 + BE_1 - E(A+B) = (m_2 - E)$$

$$AE_2 + BE_1 = m_2$$

$$A+B = 1$$

De modo que:

$$A = \frac{m_2 - E_1}{E_2 - E_1} \quad \text{--- (VI.4a)}$$

$$B = \frac{E_2 - m_2}{E_2 - E_1}$$

Además:

$$E_2 - E_1 = -\delta'$$

$$m_2 - E_1 = -[m_+ + \delta']/2$$

$$E_2 - m_2 = [m_+ - \delta']/2$$

≠ 102 ≠

Sustituyendo ésto último en (VI.4a) obtenemos:

$$\begin{aligned} A &= \delta_+/2 \\ B &= \delta_-/2 \end{aligned} \quad \text{--- (VI.4b)}$$

En ese caso las anchuras reducidas son:

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= C^2 \delta_+/2 \\ \gamma_2^2 &= C^2 \delta_-/2 \end{aligned} \quad \text{--- (VI.5)}$$

y la forma normal de $R_M(E)$ es:

$$R_M(E) = \sum_{s=1}^2 \frac{\gamma_s^2}{(E_s - E)} \quad \text{--- (VI.6)}$$

Es interesante hacer notar que debido a que $\delta_+ > \delta_-$; $\gamma_1^2 > \gamma_2^2$.

Ademas:

$$\sum_s \gamma_s^2 = C^2 \quad \text{--- (VI.7)}$$

Supongamos que las partículas compuestas 1 y 2, están desacopladas entre sí, mientras una de ellas está acoplada con el canal de entrada. Esto es: $C^2 = 0$ y $C^2 \neq 0$. Entonces:

$$\gamma = m.$$

$$\delta_+ = 2; \delta_- = 0 \quad \text{--- (VI.8a)}$$

$$\gamma_1^2 = C^2; \gamma_2^2 = 0$$

y:

$$R_M(E) = \frac{\gamma_1^2}{E_1 - E} \quad \text{--- (VI.8b)}$$

Con el fin de obtener el valor numérico de δ_1^2 y por consiguiente de \cos^2 , necesitamos la expresión para la función $R(E)$ de Wigner para un pozo cuadrado. De acuerdo con Lane y Thomas⁽⁴⁾ la ecuación de Schrödinger del problema, para $l=0$, es:

$$\frac{d^2\mu}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E-V)\mu = 0 \quad \text{--- (VI.9a)}$$

Dentro de la región de interacción, donde $V=V_0$, la solución es de la forma:

$$\mu_E(r) = \delta \sin \kappa r; \text{ para } r < a \quad \text{--- (VI.9b)}$$

Aquí a es el alcance del potencial y:

$$\kappa = [2m(E-V_0)/\hbar^2]^{1/2} \quad \text{--- (VI.10)}$$

es el número de onda para $r < a$. En la superficie nuclear, la función $R(E)$ está dada por la condición:

$$R(E) = \frac{1}{a} \left[\frac{\mu_E(a)}{\mu'_E(a)} \right] \quad \text{--- (VI.11a)}$$

Aquí la prima indica derivada con respecto a r . Así,

$$R(E) = \beta^{-1} \tan \beta \quad \text{--- (VI.11b)}$$

donde: $\beta = \kappa a$.

Los eigenvalores de la energía son aquellos para los cuales las soluciones (VI.9b) tienen derivada cero en la superficie. Esto es:

≠ 104 ≠

$$\beta\lambda = x_\lambda a = \pi\left[\lambda - \frac{1}{2}\right]; \lambda = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{VI.12})$$

Sustituyendo (VI.12) en (VI.10) y resolviendo para E obtenemos:

$$E_\lambda = V_0 + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (\text{VI.13})$$

Las anchuras reducidas se definen como:

$$\delta_\lambda = (-1)^{\lambda+1} (\hbar^2/ma^2)^{1/2} \quad (\text{VI.14})$$

Entonces:

$$R(E) = \sum_\lambda \frac{\delta_\lambda^2}{E_\lambda - E} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \beta^2} \quad (\text{VI.15})$$

y este es el desarrollo en fracciones parciales de (VI.11b).

Para un solo nivel E_λ , la función $R^0(E_\lambda)$ se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{d\delta^2}{dE} = 2R - R^2 \frac{d^2R}{dE^2} \left/ \left[\frac{dR}{dE} \right]^2 \right.$$

En el límite cuando $E = E_\lambda$, se tiene que:

$$R^0(E_\lambda) = \frac{1}{2\pi^2 \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2} \quad (\text{VI.16a})$$

Sea $\lambda = 1$. Entonces:

$$R^0(E_1) = 2/\pi^2 \quad (\text{VI.16b})$$

De la expresión (VI.14) obtenemos:

$$\delta_1^2 = \hbar^2/ma^2 \quad (\text{VI.16c})$$

Si consideramos que $a = 4.56$ fermis obtenemos:

$$V_0 = C_0^2 = 2 \text{ MeV}$$

Ademas, de acuerdo con (VI.13): $m_1 = E_1 = V_0 + \pi^2 \hbar^2 / 8ma^2$.

Sea $V_0 = 42 \text{ MeV}$. Entonces $m_1 = 44 \text{ MeV}$, medida desde el fondo del pozo.

Ahora bien, si recordamos que $E = \hbar^2 k^2 / 2$ y sustituimos (II.6) en (II.7) obtenemos:

$$S(k) = \frac{(k^2 - 2m_2)(k^2 - 2m_1 - 2ikC_0^2) - 4C^2}{(k^2 - 2m_2)(k^2 - 2m_1 + 2ikC_0^2) - 4C^2} \quad \text{--- (VI.17)}$$

donde por comodidad hemos sustituido k_0 por k .

Sustituyendo (VI.17) en (VI.1) obtenemos $D(E)$.

De acuerdo con los resultados obtenidos en los apéndices II y V, la función de dispersión $S_M(q_0)$ es idéntica a la $S(k)$ dada en (VI.17), nada mas cambiando k por q_0 .

Esto es:

$$S_M(q_0) = \frac{(q_0^2 - 2m_2)(q_0^2 - 2m_1 - 2iq_0C_0^2) - 4C^2}{(q_0^2 - 2m_2)(q_0^2 - 2m_1 + 2iq_0C_0^2) - 4C^2} \quad \text{--- (VI.18)}$$

Ahora bien: $q_0 = q_{0x} - iq_{0y}$, con $q_{0x} \gg q_{0y}$. Ademas de acuerdo con (4.11b)

$$q_{0x}^2 = 2E' \quad \text{--- (VI.19)}$$

$$q_{0x} q_{0y} = \Delta E$$

Sustituyendo esto en (VI.18) y despreciando q_{0y} en

comparación con g_{0z} , pero manteniendo los productos $g_{0x} g_{0y}$, obtenemos:

$$S_M(\omega) = \frac{(E' - m_2 - i\Delta E)(E' - m_1 - i g_{0x} c \omega^2) - c^2}{(E' - m_2 - i\Delta E)(E' - m_1 + i g_{0x} c \omega^2) - c^2} \quad (\text{VI.20})$$

Vamos a demostrar que esta expresión es exactamente igual a la amplitud de dispersión que obtendríamos si realizamos un promedio en la energía de la $S_M(k)$ dada en (VI.17), con k real e igual a $\sqrt{2E}$. Esto es:

$$\bar{S}_M(E') = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(E - E') S_M(E) dE \quad (\text{VI.21})$$

donde la barra indica que estamos promediando sobre un intervalo de energía ΔE , tal que $\Gamma_2 \ll \Delta E \ll \Gamma_1$, con Γ_1 y Γ_2 las anchuras parciales. Para la función de peso $\rho(E - E')$ usaremos la siguiente forma lorentziana:

$$\rho(E - E') = \frac{\Delta E}{\pi} \frac{1}{(E - E')^2 + \Delta E^2} \quad (\text{VI.22})$$

Ahora bien, como $S_M(E)$ no tiene polos en el semiplano superior del plano complejo, conviene realizar la integración a lo largo de un contorno cerrado recorrido en sentido positivo, que pase por el eje real y se cierre por el semiplano superior. Así, la única contribución a la integral (VI.21) viene de la parte del

107

contorno que pasa por el eje real, la cual a su vez, es igual al residuo del polo encerrado por el contorno completo. En ese caso:

$$\bar{S}_H(E') = \frac{(E' - m_2 - i\Delta E)(E' - m_1 - ik_0^2) - c^2}{(E' - m_2 - i\Delta E)(E' - m_1 + ik_0^2) - c^2} \quad (\text{VI.23})$$

de modo que:

$$S_H(q_0) = \bar{S}_H(E') \quad (\text{VI.24})$$

donde $\text{Re } q_0 = k$.

Referencias.

- 1.- M. Moshinsky, Phys. Rev. 81, 347(1951).
M. Moshinsky, Phys. Rev. 84, 525(1951).
M. Moshinsky, Phys. Rev. 84, 533(1951).
- 2.- F. Medina η , Rev. Mex. Fis. 11, 55(1962).
- 3.- F. Medina η y U. Oseguera, IV Simposio Interamericano sobre la aplicación de la energía nuclear para fines pacíficos. 1, 15(1962)
- 4.- A. M. Lane y R. G. Thomas, Rev. Mod. Phys. 91, 257(1958).
- 5.- η . Bohr, Nature. 137, 344(1936).
 η . Bohr, Science. 86, 161(1937).
- 6.- H. Feshbach, C. E. Porter y V. F. Weisskopf. Phys. Rev. 96, 448(1954).
A. M. Lane, R. G. Thomas y E. P. Wigner. Phys. Rev. 98, 693(1955).
- 7.- G. E. Brown, Rev. Mod. Phys. 31, 893(1959).
- 8.- P. A. Mello y M. Moshinsky.
Mechanical Models for Reactions involving Isobaric Analogue States.
(Por publicarse).

- 9.- J. M. Blatt and V. F. Weisskopf.
Theoretical Nuclear Physics.
J. Wiley and Sons, Inc., New York (1963)
- 10.- G. E. Brown
Unified Theory of Nuclear Models.
Interscience Publishers, New York (1964)
- 11.- H. Bateman.
Tables of Integral Transforms.
McGraw-Hill Book Company, Inc., (1954)
- 12.- V. N. Faddeyeva and N. M. Terent'ev.
Tables of Values of the Function: $\omega(z) = e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-iz)$,
for Complex Argument.
Pergamon Press (1961)
- 13.- M. Abramowitz and I. A. Stegun.
Handbook of Mathematical Functions.
Dover Publications, Inc., New York (1965)