Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Espacios Paracompactos: Propiedades Básicas y algunas caracterizaciones

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

MARÍA TERESA ROJAS SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FIDEL CASARRUBIAS SEGURA

2011

Contenido

Introducción

El propósito principal del presente trabajo es exponer propiedades elementales de los espacios paracompactos y algunas de las caracterizaciones más conocidas de los mismos.

La noción de espacio paracompacto fue introducida por J. Dieudoneé en su artículo *Une Générisation des Espaces Compacts* (J. Math. Pures Appl. 23, 65–79 (1944)). Hoy día, los espacios paracompactos forman una de las clases más importantes de espacios topológicos y ellos son muy populares entre topólogos y entre análistas. Una de las razones de ello, es que la clase de los espacios paracompactos contiene a la clase de los espacios compactos (Hausdorff) y a la clase de los espacios metrizables. J. Dieudonne demostró que todo espacio compacto es un espacio compacto (en su artículo antes mencionado) y fue M. H. Stone quien demostró que cualquier espacio métrizable es un espacio paracompacto (*On the compactification of topological spaces*, Ann. Soc. Pol. Math. 21 (1948)). Posteriormente, en una serie de tres trabajos de investigación (*A note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 4, 831–838 (1953), *Another note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 8, 822–828 (1957), *Yet snother note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 10, 309–314 (1959)) E. Michael estudió de manera intensiva las propiedades de los espacios paracompactos y demostró varios de los resultados que hoy día son considerados resultados clásicos dentro del estudio de las propiedades de los espacios paracompactos. En este trabajo de tesis exponemos estos resultados clásicos y algunos otros.

Nuestro trabajo consta de tres capítulos. El primero de ellos, titulado *Preliminares de Topología General*, pretende introducir al lector a los conceptos básicos de la Topología General que son necesarios para el tratamiento de los temas más relevantes del presente trabajo de tesis.

En el capítulo 2, *Paracompacidad*, introducimos la noción de espacio paracompacto y algunas de sus caracterizaciones clásicas. Aprovechando estos resultados hacemos un análisis de la relación que hay entre la clase de los espacios paracompactos y otras importantes clases de espacios topológicos, como la clase de espacios compactos, la clase de espacios métricos, la clase de espacios normales, etc. Damos una demostración del Teorema de Stone que muestra que todo espacio métrizable es un espacio paracompacto.

En el capítulo 3, que hemos titulado *Otras caracterizaciones: el Teorema de Tamano y particiones de la unidad*, analizaremos el comportamiento de la paracompacidad en relación a su preservación, o no, con respecto a las principales operaciones entre espacios topológicos para la formación de nuevos espacios topológicos. Además de ello, introduciremos otras interesantes caracterizaciones de los espacios paracompactos. Particularmente, exponemos una demostración del importante Teorema de Tamano que proporciona una caracterización de la paracompacidad utilizando a la compactación de Stone-Čech y establecemos la clásica caracterización de la paracompacidad utilizando la noción de partición de la unidad.

María Teresa Rojas Sánchez.
Septiembre de 2011.

Capítulo 1

Preliminares de Topología General

1.1 Introducción

Este capítulo está diseñado con la idea de que el lector pueda revisar en él los resultados básicos de Topología General que utilizamos a través de nuestro trabajo. En un principio, la intensión principal de este apartado era la de exponer de manera detallada y rigurosa todos los hechos de la Topología General que utilizamos en este trabajo de tesis. Sin embargo, siendo honestos, este apartado se asemeja más a una recopilación de hechos que a una exposición profunda y detallada de resultados. Por esta razón es que remitimos al lector interesado en profundizar en todos los temas presentados en este apartado a la clásica obra de R. Engelking [3] sobre Topología General y a la de F. Casarrubias Segura y A. Tamariz Mascarúa [1]. El material de este capítulo está fuertemente basado en las notas de clase el Profesor Oleg Okunev [4] y en el libro [1].

1.2 Espacios topológicos.

1.2.1 Definición. Sea X un conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X se llama *topología* en X si se cumplen los siguientes condiciones:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$,
2. Si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.
3. Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

La pareja $(X, \mathcal{T})$ donde $\mathcal{T}$ es una topología en X se llama *espacio topológico*. Es usual llamar a los elementos del conjunto X puntos del espacio topológico, y a los elementos de $\mathcal{T}$ *conjuntos abiertos* o *subconjuntos abiertos* del espacio $(X, \mathcal{T})$. Cuando $\mathcal{T}$ está fija, en lugar de escribir $(X, \mathcal{T})$ a menudo se escribe simplemente X; pero cuando el contexto así lo requiera utilizaremos la notación $\mathcal{T}(X)$ para hacer énfasis en que estamos hablando de una topología para X. Por otro lado, frecuentemente escribiremos $\mathcal{T}^*(X)$ para denotar al conjunto $\mathcal{T}(X) \setminus \{\emptyset\}$; y si $x \in X$ entonces $\mathcal{T}(x, X) = \{U \in \mathcal{T}(X) : x \in U\}$. Además, como es usual, $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$.

1.2.2 EJEMPLO.

1. Consideremos un conjunto no vacío X. Definamos como $\mathcal{T}$ a la familia $\mathcal{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X. Entonces $\mathcal{T}$ es una topología en X. Todos los subconjuntos de X son abiertos en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Esta topología se llama *topología discreta*; un espacio topológico cuya topología es discreta se llama *espacio discreto*.

2. Por otro lado, si definimos $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ entonces la familia $\mathcal{T}$ es una topología en X. Esta topología se llama *indiscreta*; un espacio topológico cuya topología es indiscreta se llama *espacio indiscreto*.

3. Ahora, si $\mathbb{R}$ es la recta real y si definimos

   $$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} : \text{ para todo } x \in U \text{ existe } \epsilon > 0 \text{ con } (x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq U\},$$

   entonces $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}$. De ahora en adelante nos referiremos a esta topología como la topología natural o usual de $\mathbb{R}$.

4. De igual manera si $\mathbb{R}$ es la recta real y definimos

   $$\mathcal{T}_S = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} : \text{ para todo } x \in U \text{ existe } \epsilon > 0 \text{ con } [x, x+\epsilon) \subseteq U\},$$

entonces la familia $\mathcal{T}_S$ es una topología en $\mathbb{R}$. Dicha topología es llamada comúnmente topología de Sorgenfrey de $\mathbb{R}$, y a $K = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ se le suele llamar *flecha de Sorgenfrey* o *línea de Sorgenfrey.*

Introduciremos ahora los conceptos de base de un espacio topológico, peso de un espacio topológico y vecindad.

1.2.3 DEFINICIÓN. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

1. Una familia $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos en $(X, \mathcal{T})$ se llama *base* de $\mathcal{T}$ (o de $(X, \mathcal{T})$ o simplemente de X) si para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

2. Una colección $\delta \subseteq \mathcal{T}$ es una *subbase* para $(X, \mathcal{T})$ si la colección de todas las intersecciones de subcolecciones finitas no vacías de δ es una base para $(X, \mathcal{T})$.

Tenemos el siguiente resultado que proporciona una caracterización de las bases.

1.2.4 PROPOSICIÓN. *Sea $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos abiertos en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ si y sólo si para todo conjunto abierto U en X existe una subfamilia $\mathcal{B}_U$ de $\mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{B}_U$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B}$ una base de X, y sea U un conjunto abierto en X. Para todo $x \in U$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Sea $\mathcal{B}_U = \{ B_x : x \in U \}$. Entonces $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$ y $\bigcup \mathcal{B}_U = U$

En la otra dirección, sea $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos abiertos tal que para todo conjunto abierto U en X existe una subfamilia $\mathcal{B}_U$ de $\mathcal{B}$ con $U = \bigcup \mathcal{B}_U$. Sea $x \in X$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x. Sea $\mathcal{B}_U$ una subfamilia de $\mathcal{B}$ tal que $\bigcup \mathcal{B}_U = U$. Entonces existe $B \in \mathcal{B}_U$ tal que $x \in B$. Obviamente, $B \subseteq U$ y $B \in \mathcal{B}$. □

1.2.5 DEFINICIÓN. Sea X un espacio topológico. El *peso* de X es el número cardinal

$$w(X) = \text{mín}\{ |\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base de } X \} + \omega.$$

1.2.6 Observación. El mínimo en la definición anterior existe porque todo conjunto no vacío de números cardinales tiene un elemento mínimo; note que el conjunto $\{\, |\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ es una base de $X \,\}$ no es vacío porque toda topología $\mathcal{T}$ es base de sí misma.

El siguiente lema nos prepara para establecer una propiedad importante del peso de un espacio topológico (vea el Teorema 1.2.8).

1.2.7 Lema. *Sea X un espacio topológico. Sea $\mathcal{U}$ una familia de conjuntos abiertos en X. Entonces existe $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ tal que $|\mathcal{U}_1| \leq w(X)$ y $\bigcup \mathcal{U}_1 = \bigcup \mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $U = \bigcup \mathcal{U}$, y sea $\mathcal{B}$ una base de X tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Para todo $x \in U$, sea $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$ y sea $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U_x$. La familia $\mathcal{B}_1 = \{\, B_x : x \in U \,\}$ es una subfamilia de $\mathcal{B}$, de donde $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}| = w(X)$, y además $\bigcup \mathcal{B}_1 = U$. Por la elección de los conjuntos B_x, se tiene que para todo $B \in \mathcal{B}_1$ existe $U_B \in \mathcal{U}$ tal que $B \subseteq U_B$. Sea $\mathcal{U}_1 = \{\, U_B : B \in \mathcal{B}_1 \,\}$. Entonces, $\mathcal{U}_1$ es una subfamilia de $\mathcal{U}$, $|\mathcal{U}_1| \leq |\mathcal{B}_1| \leq w(X)$, y $\bigcup \mathcal{U}_1 \supseteq \bigcup \mathcal{B}_1 = U$. □

El siguiente teorema establece una propiedad fundamental del peso de un espacio topológico.

1.2.8 Teorema. *Sea $\mathcal{B}$ una base de un espacio topológico X. Entonces existe una subfamilia $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}_1$ también es una base de X y además $|\mathcal{B}_1| = w(X)$.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ una base arbitraria para X y $\mathcal{B}_2$ una base de X tal que $|\mathcal{B}_2| = w(X)$. Para todo $B \in \mathcal{B}_2$, existe una subfamilia $\mathcal{U}_B^0$ de $\mathcal{B}$ tal que $B = \bigcup \mathcal{U}_B^0$. Por el lema anterior, es posible elegir $\mathcal{U}_B \subseteq \mathcal{U}_B^0$ en tal manera que $B = \bigcup \mathcal{U}_B$ y $|\mathcal{U}_B| \leq w(X)$. Sea $\mathcal{B}_1 = \bigcup \{\, \mathcal{U}_B : B \in \mathcal{B}_2 \,\}$. Claramente $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$ y además $|\mathcal{B}_1| \leq w(X) \cdot w(X) = w(X)$.

Verifiquemos ahora que $\mathcal{B}_1$ es una base para X. Sea $x \in X$ y sea U un conjunto abierto tal que $x \in U$. Entonces existe $B_1 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_1 \subseteq U$. Por la construcción de $\mathcal{B}_1$ se tiene que $B_1 = \bigcup \mathcal{U}_B$, y existe $B \in \mathcal{B}_U$ tal que $x \in B$. Tenemos entonces que $B \in \mathcal{B}_1$ y $x \in B_1 \subseteq U$.

Por lo tanto $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ es una base, y $|\mathcal{B}_1| \leq w(X)$. □

A continuación introduciremos el concepto de vecindad.

1.2.9 DEFINICIÓN. Sean X un espacio topológico, y $x_0 \in X$. Un conjunto $V \subseteq X$ se llama *vecindad* de x_0 si existe un conjunto abierto U tal que $x_0 \in U \subseteq V$.

Como es natural esperar, todo abierto es vecindad de cada uno de sus puntos.

1.2.10 PROPOSICIÓN. *Un conjunto U es abierto si y sólo si U es una vecindad de cada $x \in U$.*

DEMOSTRACIÓN. Si U es abierto, entonces para todo $x \in U$, $x \in U \subseteq U$, y entonces U es una vecindad de x.

Por otra parte, si U es una vecindad de cada $x \in U$, entonces para cada $x \in U$ existe un abierto U_x tal que $x \in U_x \subseteq U$; tenemos entonces que $U = \bigcup\{ U_x : x \in U \}$, y en consecuencia U es abierto. $\square$

1.2.11 DEFINICIÓN. Sean X un espacio topológico, $x \in X$, y $\mathcal{B}_x$ una familia de vecindades abiertas de x en X. La familia $\mathcal{B}_x$ se llama *base local de X en x* si para toda vecindad V de x existe $U \in \mathcal{B}_x$ tal que $U \subseteq V$.

A continuación introduciremos la noción de sistema fundamental de vecindades.

1.2.12 DEFINICIÓN. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Una familia $\mathcal{V}$ de vecindades de x en X se llama *sistema fundamental de vecindades de x en X* si para toda vecindad W de x en X existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq W$.

Es claro que toda base local de X en x es un sistema fundamental de vecindades de x; la diferencia sólo es que los elementos de un sistema fundamental de vecindades pueden no ser subconjuntos abiertos.

1.3 Conjuntos cerrados. Cerraduras

Comencemos con las definiciones de punto límite y de conjunto cerrado.

1.3.1 DEFINICIÓN. Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces x se llama *punto límite* de A si para toda vecindad V de x, se tiene que

$$V \cap A \nsubseteq \{x\}.$$

Para cada $A \subseteq X$, denotaremos con A' al conjunto de todos los puntos límites de A. A los puntos $x \in A \setminus A'$ se les llama puntos aislados de A en A. Note que un punto $x \in X$ es un punto aislado de X si $\{x\} \in \mathcal{T}_X$.

1.3.2 DEFINICIÓN. Sea X un espacio topológico. Un conjunto $F \subseteq X$ se llama *cerrado en* X si $F' \subseteq F$.

Las siguientes proposiciones muestran la relación entre subconjuntos abiertos y subconjuntos cerrados.

1.3.3 PROPOSICIÓN. *Un conjunto F es cerrado en X si y sólo si $X \setminus F$ es abierto en X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea F cerrado en X, y sea $U = X \setminus F$. Para verificar que U es abierto, es suficiente encontrar, para todo $x \in U$, una vecindad V_x de x tal que $V_x \cap F = \emptyset$.

Sea $x \in U$. Del hecho de que $F' \subseteq F$ se deduce que x no es punto límite de F, de donde existe una vecindad V_x tal que $V_x \cap F \subseteq \{x\}$. Note que no es posible que $V_x \cap F = \{x\}$, porque $x \notin F$. Entonces $V_x \cap F = \emptyset$.

Supongamos ahora que $U = X \setminus F$ es abierto; tenemos que verificar que $F' \subseteq F$. Si $x \notin F$, entonces $x \in U$, y U es una vecindad de x tal que $U \cap F = \emptyset \subseteq \{x\}$, y en consecuencia $x \notin F'$. Por lo tanto, $F' \subseteq F$ $\square$

1.3.4 COROLARIO. *Un conjunto U es abierto en X si y sólo si $X \setminus U$ es cerrado en X.*

Utilizando el Corolario 1.3.4 se puede demostrar fácilmente el siguiente teorema que resume algunas propiedades básicas de lo conjuntos cerrados.

1.3.5 Teorema. *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

1. *$\emptyset$ y X son conjuntos cerrados en X.*

2. *Si $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de conjuntos cerrados en X, entonces $\bigcap \mathcal{F}$ es cerrada en X.*

3. *Si F_1, F_2 son conjuntos cerrados en X, entonces $F_1 \cup F_2$ es cerrada en X.*

Es importante analizar en este momento el concepto de cerradura de un subconjunto de un espacio topológico y algunas de sus propiedades, ya que se utilizaran en los sucesivos apartados.

1.3.6 Definición. Sea X un espacio topológico, y $A \subseteq X$. El conjunto $\overline{A} = A \cup A'$ se llama *cerradura de A*.

1.3.7 Observación. A veces es necesario considerar la cerradura de un conjunto A en diferentes espacios topológicos, y en estos casos sería conveniente usar un índice para especificar el espacio topológico que se está considerando. Por ello, en una situación de este tipo, en lugar de la notación $\overline{A}$ se usará la notación $cl_X(A)$.

La siguiente proposición proporciona una caracterización útil de la cerradura de un conjunto

1.3.8 Proposición. *Para todo $A \subseteq X$ y $x \in X$, $x \in \overline{A}$ si y sólo si para toda vecindad abierta U de x se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. Si $x \in \overline{A}$, entonces $x \in A$ o $x \in A'$; en ambos casos la intersección de una vecindad de x con A no es vacía.

Si $x \notin \overline{A}$, entonces $x \notin A$ y x no es punto límite de A. Entonces existe una vecindad U de x tal que $U \cap A \subseteq \{x\}$. No es posible que $U \cap A = \{x\}$ porque $x \notin A$, entonces $U \cap A = \emptyset$. □

El siguiente teorema resume algunas propiedades básicas del operador cerradura

1.3.9 Teorema.

1. *La cerradura $\overline{A}$ de un conjunto A es cerrada.*

2. *Sea $A \subseteq F$. Si F es cerrado, entonces $\overline{A} \subseteq F$.*

3. *Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*

4. *F es cerrado si y sólo si $\overline{F} = F$.*

5. *Para todo $A \subseteq X$, se tiene que* $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

6. $\overline{A} = \bigcap\{\, F \subseteq X : F$ *es cerrado y* $A \subseteq F \,\}$.

7. *Si A y B son conjuntos en un espacio topológico X, entonces* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *y* $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demostración.

1. Por 1.3.8 y 1.2.10, el complemente $X \setminus \overline{A}$ es abierto.

2. Si $x \notin F$, entonces $U = X \setminus F$ es una vecindad de x tal que $U \cap A = \emptyset$. Eso muestra que $x \notin \overline{A}$.

3. Observemos primero que la condición $A \subseteq B$ implica que $A' \subseteq B'$. Efectivamente, si $x \in A'$ y V es una vecindad de x, entonces existe $y \in (V \cap A) \setminus \{x\}$. Como $A \subseteq B$, es claro que $y \in (V \cap B) \setminus \{x\}$. De esta forma hemos demostrado que $x \in B'$.

   Note ahora que lo anterior implica que $\overline{A} = A \cup A' \subseteq B \cup B' = \overline{B}$.

4. Si F es cerrado, entonces $F' \subseteq F$. Entonces $\overline{F} = F \cup F' \subseteq F \subseteq \overline{F}$.

   Por otro lado, si $\overline{F} = F$ entonces por $F' \subseteq F \cup F' = \overline{F} = F$. Por ello, F es cerrado.

5. Por (1), $\overline{A}$ es un conjunto cerrado. Por el inciso anterior, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

6. Si $A \subseteq F$ y F es cerrado, tenemos $\overline{A} \subseteq F$, de donde $\overline{A} \subseteq \bigcap\{\, F \subseteq X : F$ es cerrado y $A \subseteq F \,\}$. Por la otra parte, $\overline{A}$ es cerrado y $A \subseteq \overline{A}$, que significa que $\overline{A} \in \{\, F \subseteq X : F$ es cerrado y $A \subseteq F \,\}$, y $\bigcap\{\, F \subseteq X : F$ es cerrado y $A \subseteq F \,\} \subseteq \overline{A}$.

7. El conjunto $\overline{A \cup B}$ es cerrado y contiene a A, de donde $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$. En la misma manera, $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, y $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Por la otra parte, $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado y contiene a $A \cup B$, de donde $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B}$. Eso demuestra $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   El conjunto $\overline{A} \cap \overline{B}$ es cerrado y contiene a $A \cap B$ (porque $\overline{A} \supseteq A$ y $\overline{B} \supseteq B$). Entonces $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

□

Ahora introduciremos otros conceptos como la noción de espacio topológico separable.

1.3.10 Definición. Sea X un espacio topológico. Un conjunto $A \subseteq X$ se llama *denso en* X si $\overline{A} = X$.

1.3.11 Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es separable si X tiene un subconjunto denso a lo más numerable.

Ahora introduciremos la noción de interior de un conjunto que se usará más adelante.

1.3.12 Definición. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in X$ se llama *punto interior* de A si existe un conjunto V abierto en X tal que $x \in V \subseteq A$ (en otras palabras, si A es una vecindad de x). El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama *interior de* A y se denota $int\, A$.

A partir de la misma definición es muy sencillo demostrar las siguientes propiedades del interior de un conjunto.

1.3.13 Proposición.

1. *El conjunto $int\, A$ es abierto.*
2. *$A \subseteq X$ es abierto si y sólo si $A = int\, A$*
3. *Para todo $A \subseteq X$, $int\, A = X \setminus \overline{X \setminus A}$.*

Demostración.

1. Si $x \in int\, A$, entonces existe un conjunto abierto $V \subseteq A$ tal que $x \in V$. Para todo punto $y \in V$ tenemos que $y \in V \subseteq A$, y en consecuencia $y \in int\, A$. De donde $V \subseteq int\, A$. Eso significa que para todo $x \in int\, A$ existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq int\, A$. Por ello $int\, A$ es abierto.
2. Claramente, para cualquier subconjunto A de X, $int\, A \subseteq A$. Así que si suponemos que A es abierto, para demostrar que $A = int\, A$ bastará demostrar que $A \subseteq int\, A$; es decir, que todo punto de A es

un punto interior de A. Pero si $x \in A$, note que A es abierto y que $x \in A \subseteq A$.

Para demostrar la suficiencia, simplemente note que por (1) el conjunto *int* A es abierto.

3. Si $x \in int\ A$, entonces *int* A es una vecindad de x ajena de $X \setminus A$, de donde $x \notin \overline{X \setminus A}$, y entonces $x \in X \setminus \overline{X \setminus A}$.

   Si $x \in X \setminus \overline{X \setminus A}$, entonces $X \setminus \overline{X \setminus A}$ es una vecindad abierta de x contenida en A. Por lo tanto, $x \in int\ A$.

□

1.4 Axiomas de separación

En esta sección introduciremos a los axiomas de separación T_0, T_1, T_2,T_3 y T_4, y algunas caracterizaciones sencillas de los espacios que satisfacen estos axiomas de separación.

1.4.1 DEFINICIÓN. Un espacio X es un *espacio* T_0 si para todo $x, y \in X$, con $x \neq y$, existe un conjunto abierto U en X tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$.

1.4.2 DEFINICIÓN. Un espacio X es un *espacio* T_1 si para todo $x, y \in X$, con $x \neq y$, existe un conjunto abierto U en X tal que $U \cap \{x, y\} = \{x\}$.

Analizemos bajo qué condiciones un espacio X es un espacio T_1.

1.4.3 PROPOSICIÓN. *Los siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *X es un espacio T_1.*

2. *Para toda $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado.*

3. *Todo subconjunto de X de cardinalidad uno es igual a la intersección de una familia no vacía de conjuntos abiertos.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $x \in X$. Para todo $y \neq x$, sea U_y un conjunto abierto en X tal que $y \in U_y$ y $x \notin U_y$. Entonces la unión

$$U = \bigcup \{\, U_y : y \in X \setminus \{x\} \,\} = X \setminus \{x\}$$

es un conjunto abierto, y en consecuencia el conjunto $\{x\} = X \setminus U$ es cerrado.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $x \in X$. Entonces $\{x\} = \bigcap \{\, X \setminus \{y\} : y \neq x \,\}$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sean $x, y \in X$ dos puntos distintos. Sea $\mathcal{U}$ una familia de conjuntos abiertos tal que $\{x\} = \bigcap \mathcal{U}$. Entonces $y \notin \bigcap \mathcal{U}$, y por ello existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $y \notin U$. Tenemos entonces que $U \cap \{x, y\} = \{x\}$. $\square$

A continuación introduciremos a los espacios Hausdorff.

1.4.4 Definición. Un espacio topológico X es un *espacio* T_2, o *Hausdorff*, si para todos los puntos distintos x, y de X existen conjuntos abiertos U_x y U_y tales que $x \in U_x$, $y \in U_y$, y $U_x \cap U_y = \emptyset$.

1.4.5 Proposición. *Un espacio X es Hausdorff si y sólo si para todo $x \in X$, se tiene que $\{x\} = \bigcap \{\, \overline{U} : U$ es una vecindad de $x \,\}$.*

Demostración. Sea X de Hausdorff, y sea $x \in X$. Para todo $y \in X \setminus \{x\}$, sean U_y, V_y abiertos en X tales que $x \in U_y$, $y \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \emptyset$. De la existencia de una vecindad de y ajena de U_y se deduce que $y \notin \overline{U}_y$. Entonces $\{x\} = \bigcap \{\, \overline{U}_y : y \in X \setminus \{x\} \,\}$, y en consecuencia $\{x\} = \bigcap \{\, \overline{U} : U$ es una vecindad de $x \,\}$.

Por otro lado, si $\{x\} = \bigcap \{\, \overline{U} : U$ es una vecindad de $X \,\}$, entonces para todo $y \in X \setminus \{x\}$, se tiene que $y \notin \bigcap \{\, \overline{U} : U$ es una vecindad de $X \,\}$, y por ello existe una vecindad V de x tal que $y \notin \overline{V}$. Sea $U_y = X \setminus \overline{V}$ y sea U_x un abierto tal que $x \in U_x \subseteq V$. Entonces U_x, U_y son abiertos, $x \in U_x$, $y \in U_y$, y $U_x \cap U_y = \emptyset$. $\square$

Introduciremos ahora a los espacios regulares.

1.4.6 Definición. Un espacio topológico X es un *espacio* T_3, o *regular*, si X es T_1 y para todo punto $x \in X$ y todo conjunto cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existen conjuntos abiertos U_x y U_F tales que $x \in U_x$, $F \subseteq U_F$, y $U_x \cap U_F = \emptyset$.

1.4.7 PROPOSICIÓN. *Un espacio topológico X es regular si y sólo si X es T_1 y para todo punto $x \in X$ y toda vecindad V de x existe una vecindad U de x tal que $x \in \overline{U} \subseteq V$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Longrightarrow$] Sean X regular, $x \in X$, y V una vecindad de x. Sea V_0 abierto en X tal que $x \in V_0 \subseteq V$. Entonces el conjunto $F = X \setminus V_0$ es cerrado y $x \notin F$. Por la regularidad de X, existen conjuntos abiertos U y U_F tales que $x \in U$, $F \subseteq U_F$ y $U \cap U_F = \emptyset$. Note ahora que para todo punto $y \in F$, U_F es una vecindad de y ajena de U, de donde $y \notin \overline{U}$, y por lo cual $F \cap \overline{U} = \emptyset$. De ello se deduce que $\overline{U} \subseteq X \setminus F$. En consecuencia $\overline{U} \subseteq V_0$, y $\overline{U} \subseteq V$.

$\Longleftarrow$] Sean $x \in X$ y F cerrado en X tal que $x \notin F$. Entonces $V = X \setminus F$ es una vecindad de x. Sea U_x una vecindad abierta de x tal que $x \in U_x$ y $\overline{U}_x \cap F = \emptyset$. Sea $U_F = X \setminus \overline{U}_x$. Entonces U_F es abierto, $x \in U_x$, $F \subseteq U_F$, y $U_x \cap U_F = \emptyset$. $\square$

1.4.8 DEFINICIÓN. Un espacio topológico X es un *espacio* T_4, o *normal*, si X es T_1 y para todo par de conjuntos cerrados $F_1, F_2 \subseteq X$ tales que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ existen conjuntos abiertos U_1 y U_2 tales que $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$, y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

1.4.9 PROPOSICIÓN. *Un espacio X es normal si y sólo si X es T_1 y para todos conjuntos cerrados $F_1, F_2 \subseteq X$ tales que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ existe un conjunto abierto U_1 tal que $F_1 \subseteq U_1$ y $\overline{U}_1 \cap F_2 = \emptyset$.*

La demostración es similar a la de la Proposición 1.4.7.

1.5 Continuidad de funciones

Iniciemos esta sección con la definición de función continua y algunos resultados importantes.

1.5.1 DEFINICIÓN. Sean X y Y espacios topológicos y $x_0 \in X$. Una función $f : X \to Y$ es continua en x_0 si para toda vecindad V de $f(x_0)$ en Y existe una vecindad U de x_0 en X tal que $f(U) \subseteq V$, o equivalentemente, si para toda vecindad V de $f(x_0)$ en Y, $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x_0.

Diremos que f es continua en X si f es continua en x, para cada $x \in X$.

Ahora probemos que la composición de funciones continuas es continua.

1.5.2 PROPOSICIÓN. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $x_0 \in X$, y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ dos funciones. Si f es continua en x_0, y g es continua en y_0, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.*

DEMOSTRACIÓN. Sea W una vecindad de $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0))$ en Z. Por la continuidad de g en $f(x_0)$, tenemos que $g^{-1}(W)$ es una vecindad de $f(x_0)$ en Y, y por la continuidad de f en x_0, el conjunto $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}\big(g^{-1}(W)\big)$ es una vecindad de x_0 en X. $\square$

1.5.3 COROLARIO. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ dos funciones. Si f es continua en X, y g es continua en Y, entonces $g \circ f$ es continua en X.*

1.5.4 PROPOSICIÓN. *Sean X y Y espacios topológicos. Entonces $f : X \to Y$ es continua si y sólo si para todo conjunto abierto $V \subseteq Y$, la preimagen $f^{-1}(V)$ es abierta en X.*

DEMOSTRACIÓN. Sean f continua y V abierto en Y. Entonces para todo $y \in V$, V es una vecindad de y, de donde para todo $x \in f^{-1}(V)$, $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x, y $f^{-1}(V)$ es abierta.

En la otra dirección, sea f tal que para todo conjunto abierto $V \subseteq Y$, la preimagen $f^{-1}(V)$ es abierta en X, y sea $x_0 \in X$. Si V es una vecindad abierta de $f(x_0)$ en Y, entonces $x_0 \in f^{-1}(V)$ y $f^{-1}(V)$ es abierta, de donde $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x_0 en X, y f es continua en x_0. Por lo tanto, f es continua en X. $\square$

En las siguientes proposiciones veremos algunas caracterizaciones de la continuidad de una función en términos a bases y subbases de espacios topológicos.

1.5.5 PROPOSICIÓN. *Sean X y Y espacios topológicos, y sea $\mathcal{B}$ una base de Y. Entonces $f : X \to Y$ es continua si y sólo si para todo $B \in \mathcal{B}$ la preimagen $f^{-1}(B)$ es abierta en X.*

DEMOSTRACIÓN. Si f es continua, entonces la preimagen de todo $B \in \mathcal{B}$ es abierta, porque B es abierto.

Por la Proposición , todo conjunto abierto V en Y es la unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$. Si la preimagen de todo elemento de $\mathcal{B}$ es abierta, entonces la preimagen de V es abierta, porque la preimagen de una union es la unión de las preimagenes. □

1.5.6 Teorema. *Sean X y Y espacios topológicos, y sea $\mathcal{B}$ una subbase de Y. Entonces $f : X \to Y$ es continua si y sólo si para todo $B \in \mathcal{B}$ la preimagen $f^{-1}(B)$ es abierta en X.*

DEMOSTRACIÓN. Si f es continua, entonces la preimagen de todo $B \in \mathcal{B}$ es abierta, porque B es abierto.

Las intersecciones de subfamilias finitas de $\mathcal{B}$ forman una base de Y. De esto, del hecho que la preimagen de una intersección es igual a la intersección de las preimagenes y de la Proposición 1.5.5, se deduce fácilmente la afirmación. □

Por otro lado, también podemos estudiar a las funciones continuas a partir de los conjuntos cerrados.

1.5.7 PROPOSICIÓN. *Sean X y Y espacios topológicos. Entonces $f : X \to Y$ es continua si y sólo si para todo conjunto cerrado $F \subseteq Y$, la preimagen $f^{-1}(F)$ es cerrada en X.*

DEMOSTRACIÓN. Si f es continua, y F es cerrado en Y, entonces $Y \setminus F$ es abierto en Y. Por la continuidad de f, se tiene que $f^{-1}(Y \setminus F)$ es abierto en X, y por ello

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$$

es cerrado en X.

Sea f tal que para todo conjunto cerrado $F \subseteq Y$, la preimagen $f^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en X. Para todo V abierto en Y el complemente $Y \setminus V$ es cerrado en Y, de donde $f^{-1}(Y \setminus V)$ es cerrado en X, y en consecuencias

$$f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus V)$$

es abierto en X, de donde f es continua por la Proposición 1.5.4. □

Introduzcamos el concepto de homeomorfismo y algunos resultados relacionados a este concepto.

1.5.8 Definición. Una función $f : X \to Y$ se llama *homeomorfismo* si f es biyectiva, continua, y f^{-1} es continua. Dos espacios topológicos X y Y son *homeomorfos* si existe un homeomorfismo $f : X \to Y$.

De las propiedades de funciones continuas se deduce inmediatamente lo siguiente.

1.5.9 Proposición.

1. *Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f^{-1} : Y \to X$ es un homeomorfismo.*
2. *Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son homeomorfismos, entonces $g \circ f : X \to Z$ es un homeomorfismo.*
3. *La función identidad $\mathrm{id}_X : X \to X$ es un homeomorfismo.*

1.5.10 Corolario.

1. *X es homeomorfo a X.*
2. *Si X es homeomorfo a Y, entonces Y es homeomorfo a X.*
3. *Si X es homeomorfo a Y, y Y es homeomorfo a Z, entonces X es homeomorfo a Z.*

1.5.11 Definición. Una propiedad $\mathcal{P}$ de espacios topológicos se llama *propiedad topológica* si para todos dos espacios X y Y, si X y Y son homeomorfos y X tiene $\mathcal{P}$, entonces Y tiene $\mathcal{P}$.

1.5.12 Ejemplo. Las propiedades T_0, T_1, T_2, regularidad, normalidad, separbilidad, “ser discreto” son propiedades topológicas. La propiedad “contener a $\mathbb{R}$” no es topológica.

1.6 Lema de Urysohn

En esta sección demostraremos el Lema de Urysohn que es uno de los teoremas más importantes no sólo en los espacios normales, sino en la Topología en general.

1.6.1 Teorema (Lema de Urysohn). *Sea X un espacio normal, y sean F_0, F_1 conjuntos cerrados y ajenos en X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(F_0) \subseteq \{0\}$ y $f(F_1) \subseteq \{1\}$.*

Demostración. Sea $D = \{q_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ una enumeración del conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ tal que $q_0 = 0$ y $q_1 = 1$. Primeramente, construiremos una familia $\mathcal{U} = \{U_{q_n} : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ de subconjuntos abiertos de X que tiene las siguientes dos propiedades:

1. $F \subseteq U_0$ y $U_1 \subseteq X \setminus G$; y
2. si $r < s$ con $r, s \in D$ entonces $\overline{U_r} \subseteq U_s$.

Construcción de la familia $\mathcal{U}$. Defínase $U_1 = X \setminus G$. Como X es un espacio normal, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Definamos $U_0 = U$. Entonces, $U_0 \subseteq X \setminus V$; por lo cual, $\overline{U_0} \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus G = U_1$. De esta forma hemos demostrado que los subconjuntos abiertos U_0 y U_1 satisfacen las condiciones (1) y (2).

Supongamos ahora que $n \geqslant 2$ y que hemos construido los subconjuntos abiertos $U_{q_0=0}, U_{q_1=1}, U_{q_2}, \ldots, U_{q_n}$ de tal forma que ellos satisfacen las condiciones (1) y (2). Sea $r = \max\{q_k : k \leqslant n \text{ y } q_k < q_{n+1}\}$ y $s = \min\{q_l : l \leqslant n \text{ y } q_{n+1} < q_l\}$. Entonces $r, s \in \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ y son tales que $r < s$. Por nuestra hipótesis de inducción, tenemos que $\overline{U_r} \subseteq U_s$. Como X es un espacio normal, para los subconjuntos cerrados $\overline{U_r}$ y $X \setminus U_s$, existen abiertos ajenos A y B tales que $\overline{U_r} \subseteq A$ y $X \setminus U_s \subseteq B$. Definamos $U_{q_{n+1}} = A$. Entonces $\overline{U_{q_{n+1}}} \subseteq X \setminus B \subseteq U_s$. No es difícil verificar ahora que los conjuntos $\{U_{q_0=0}, U_{q_1=1}, U_{q_2}, \ldots, U_{q_n}, U_{q_{n+1}}\}$ satisfacen las condiciones requeridas. Esto completa la construcción inductiva de la familia $\mathcal{U} = \{U_r : r \in D\} \subseteq \mathcal{T}(X)$ que satisface las condiciones (1) y (2).

Ahora utilizaremos a la familia $\mathcal{U}$ para construir una función continua $f : X \to [0,1]$. Para este propósito, definamos

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in D : x \in U_r\} & \text{si } x \in X \setminus G; \\ 1 & \text{si } x \in G. \end{cases}$$

Afirmación. La función f antes definida es una función continua. Además, $f[F] \subseteq \{0\}$ y $f[G] \subseteq \{1\}$

Demostración de la afirmación. Es claro que f es en efecto una función y, por la misma definición de f, se tiene que $f(G) \subseteq \{1\}$. Ahora, si $x \in F$ entonces $x \in U_0$ y $x \in X \setminus G$; por lo cual, $f(x) = 0$. Así, bastará verificar que la función f es una función continua. Para ello, es suficiente comprobar que los conjuntos $f^{-1}[[0, a)]$ y $f^{-1}[(b, 1]]$ son subconjuntos abiertos de X para cualesquiera puntos $a, b \in (0, 1)$.

Primeramente notemos que $f^{-1}[[0, a)] = \bigcup\{U_r : r < a\}$ puesto que por la definición de la función f, se tiene que $f(x) < a$ si y sólo si existe un $r \in D$, con $r < a$, tal que $x \in U_r$. Por otro lado, $f(x) > b$ si y sólo si existe un $r \in D$ con $r > b$ y tal que $x \notin U_r$. Aplicando la propiedad (2), podemos concluir que $f(x) > b$ si y sólo si existe un $r \in D$ con $r > b$ y tal que $x \notin \overline{U_r}$. En consecuencia,

$$f^{-1}[(b, 1]] = \bigcup\{X \setminus \overline{U_r} : r > b\}.$$

De esta manera, los conjuntos $f^{-1}[[0, a)]$ y $f^{-1}[(b, 1]]$ son siempre subconjuntos abiertos de X para cualquier elección de los puntos $a, b \in (0, 1)$. Por lo tanto, f es una función continua. □

1.6.2 Definición. Un espacio topológico X es *Tychonoff* ó $T_{3\frac{1}{2}}$ si X es un espacio T_1 y para todo $x \in X$ y todo conjunto cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) \subseteq \{1\}$.

Como una aplicación inmediata del Lema de Uryshon tenemos lo siguiente.

1.6.3 Corolario. *Todo espacio normal es de Tychonoff.*

1.6.4 Proposición. *Todo espacio de Tychonoff es regular.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $F \subseteq X$ un conjunto cerrado tal que $x \notin F$. Sea $f : X \to [0, 1]$ una función continua tal que $f(x) = 0$ y $f(F) \subseteq \{1\}$. Los conjuntos $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ son abiertos, ajenos, $x \in U$ y $F \subseteq V$. □

1.7 La topología del producto

1.7.1 DEFINICIÓN. Sea $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de conjuntos. El *producto* de $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ es el conjunto

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{ x \mid x : A \to \cup_{\alpha \in A} X_\alpha \text{ tal que para todo } \alpha \in A, x(\alpha) \in X_\alpha \}.$$

Para todo $\beta \in A$, la función $p_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\beta$ definida por $p_\beta(x) = x(\beta)$ se llama *proyección β-ésima* del producto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ sobre el factor X_β. Los valores $x(\alpha)$ de $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ se llaman *coordenadas* de x; en lugar de $x(\alpha)$ a menudo se escribe x_α.

En el caso cuando todos los X_α son iguales a un mismo conjunto X, el producto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ se denota X^A.

1.7.2 DEFINICIÓN. Sea $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de espacios topológicos. Un *conjunto canónico* en el producto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es un conjunto de la forma $U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ donde:

1. Para todo $\alpha \in A$, el conjunto U_α es abierto en X_α.

2. El conjunto $K(U) = \{\alpha \in A : U_\alpha \neq U_\alpha\}$ es finito.

1.7.3 PROPOSICIÓN. *La familia de todos los conjuntos canónicos en $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es una base de una topología en $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los conjuntos canónicos abiertos en $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Note que $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es un conjunto canónico. Por ello, $X \in \mathcal{B}$. Así que si $x \in X$ es arbitrario, existe $X \in \mathcal{B}$ tal que $x \in X$. Por otro lado, sean $U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ y $V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ conjuntos canónicos de X y sea $x \in U \cap V$.

Definamos $W = \prod_{\alpha \in A} W_\alpha$ de la siguiente forma:

$$W_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si } \alpha \in A \setminus [K(U) \bigcup K(V)] \\ U_\alpha \cap V_\alpha & \text{si } \alpha \in [K(U) \bigcup K(V)]. \end{cases}$$

Entonces W es un conjunto canónico (es decir $W \in \mathcal{B}$), además: $x \in W \subseteq U \cap V$. Por todo lo anterior, la familia $\mathcal{B}$ genera una única topología en X como una base. $\square$

1.7.4 DEFINICIÓN. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. La topología en $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ generada por la familia de los conjuntos canónicos (como una base) se llama *topología del producto*, o *topología de Tychonoff*.

1.7.5 OBSERVACIÓN. Note que si $U = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ es un conjunto canónico, donde $K(U) = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ entonces $U = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap ... \cap p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k})$. En efecto:

1.7.6 COROLARIO. *La familia de todos los conjuntos de forma*

$$p_\beta^{-1}(U)$$

con $\beta \in A$ y U abierto en X_β, es una subbase de la topología del producto en $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

1.7.7 PROPOSICIÓN. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia no vacía de espacios topológicos, y sea $\beta \in A$. Entonces la proyección $p_\beta \ : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Para todo $U \subseteq X_\beta$ abierto, el conjunto $p_\beta^{-1}(U)$ es un conjunto canónico. Aplique ahora la Proposición 1.5.6. □

1.7.8 Teorema. *Sean $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia no vaca de espacios topológicos, y Y un espacio topológico. Entonces una función $f \ : Y \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ es continua si y sólo si para todo $\alpha \in A$ la composición $p_\alpha \circ f$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Si f es continua, entonces para todo $\alpha \in A$ la composición $p_\alpha \circ f$ es continua como la composición de dos funciones continuas.

Ahora sea f una función de Y en $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ tal que todas las composiciones $f \circ p_\alpha$, con $\alpha \in A$, son continuas. Para verificar que f es continua es suficiente verificar que la preimagen bajo f de todo elemento de la subbase de $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ dada en el Corolario 1.7.6 es abierta.

Pero note que si $U \subseteq X_\beta$ es abierto, tenemos que

$$f^{-1}(p_\beta^{-1}(U)) = (p_\beta \circ f)^{-1}(U)$$

es abierto, porque la composición $p_\beta \circ f$ es continua. □

1.8 Productos y axiomas de separación

En esta sección analizaeremos rápidamente la relación que hay entre los axiomas de separación T_0, T_1, T_2 y T_3 con el producto de espacios topológicos.

1.8.1 PROPOSICIÓN. *Sea* $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *una familia de espacios topológicos, y para todo* $\alpha \in A$*, sea* F_α *un conjunto cerrado en* X_α*. Entonces el conjunto* $\prod\{ F_\alpha : \alpha \in A \}$ *es cerrado en* $\prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Note que $\prod\{ F_\alpha : \alpha \in A \} = \bigcap\{ p_\alpha^{-1}(F_\alpha) : \alpha \in A \}$, y que para todo $\alpha \in A$, $p_\alpha^{-1}(F_\alpha)$ es cerrado por la continuidad de p_α. $\square$

1.8.2 COROLARIO. *Si* $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *es una familia de espacios topológicos* T_1*, entonces el producto* $\prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *es* T_1*.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente verificar que todo singulete $\{x\}$ en $\prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ es cerrado. Como $X : A \longrightarrow \cup_{\alpha\in A} X_\alpha$ es una función tal que $x(\alpha) = x_\alpha \in A$ para cada $\alpha \in A$, tenemos que $\{x\} = \prod\{ \{x_\alpha\} : \alpha \in A \}$. Note que para todo $\alpha \in A$, el conjunto $\{x_\alpha\}$ es cerrado en X_α, y de esta forma $\{x\}$ es cerrado en $\prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$. $\square$

1.8.3 PROPOSICIÓN. *Si* $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *es una familia de espacios topológicos* T_0*, entonces el producto* $\prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *es* T_0*.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ puntos distintos. Entonces existe $\alpha \in A$ tal que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Por la propiedad T_0 de X_α, existe un conjunto U abierto en X_α tal que $|U \cap \{x_\alpha, y_\alpha\}| = 1$. Sea $V = p_\alpha^{-1}(U)$; entonces $|V \cap \{x, y\}| = 1$. $\square$

1.8.4 PROPOSICIÓN. *Si* $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *es una familia de espacios topológicos Hausdorff, entonces el producto* $\prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *es Hausdorff.*

$\square$

Sean $x, y \in \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ puntos distintos. Entonces existe $\alpha \in A$ tal que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Por la propiedad de Hausdorff de X_α, existen conjuntos U_0, U_1 abiertos en X_α tales que $x_\alpha \in U_0$, $y_\alpha \in U_1$ y $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Sean $V_0 = p_\alpha^{-1}(U_0)$ y $V_1 = p_\alpha^{-1}(U_1)$; entonces $x \in V_0$, $y \in V_1$, y $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. $\square$

1.8.5 Proposición. *Si* $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *es una familia de espacios topológicos regulares, entonces el producto* $\prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *es regular.*

Demostración. Sean $F \subseteq \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ un conjunto cerrado y $x \in \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ un punto tal que $x \notin F$. Entonces existe una vecindad canónica abierta W de x tal que $W \cap F = \emptyset$. Sea

$$W = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}).$$

Para todo $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, U_α es una vecindad abierta de x_α; sea V_α una vecindad abierta de x_α tal que $\overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$, $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Sea

$$V = p_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(V_{\alpha_k}).$$

Entonces V es una vecindad abierta de x, y

$$\overline{V} \subseteq p_{\alpha_1}^{-1}(\overline{V}_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(\overline{V}_{\alpha_k}) \subseteq W,$$

de donde $\overline{V} \cap F = \emptyset$. □

1.8.6 Proposición. *Si* $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *una familia de espacios topológicos de Tychonoff, entonces el producto* $\prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *es de Tychonoff.*

Demostración. Sean $F \subseteq X = \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ un conjunto cerrado y $x \in \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ un punto tal que $x \notin F$. Entonces existe una vecindad canónica abierta W de x tal que $W \cap F = \emptyset$. Sea

$$W = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}).$$

Para todo $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, U_α es una vecindad abierta de x_α; sea $f_\alpha : X_\alpha \to [0,1]$ una función continua tal que $f_\alpha(x_\alpha) = 1$ y $f_\alpha(X_\alpha \backslash U_\alpha) \subseteq \{0\}$. Para todo $\alpha \in \{\alpha_1 \ldots, \alpha_k\}$ sea $g_\alpha : X \to [0,1]$ definida por $g_\alpha = f_\alpha \circ p_\alpha$; entonces g_α es continua, $g(x) = 1$ y $g_\alpha(X \setminus p_\alpha^{-1}(U_\alpha)) \subseteq \{0\}$.

Sea $g = g_{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot g_{\alpha_k}$; entonces g es continua, $g(x) = 1$, y $g(X \setminus W) \subseteq \{0\}$, en particular, $g(F) \subseteq \{0\}$. □

1.8.7 Teorema. *Sea* $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *una familia de espacios no vacíos. Entonces el producto* $\prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ *es* T_0 *(*T_1*, de Hausdorff, regular, de Tychonoff) si y sólo si para todo* $\alpha \in A$ *el espacio* X_α *es* T_0 *(*T_1*, de Hausdorff, regular, de Tychonoff).*

1.9 Productos de funciones

1.9.1 Definición. Sean $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ y $\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$ familias de conjuntos, y para todo $\alpha \in A$, sea $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ una función.

El *producto* de la familia $\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ de funciones es la función $F = \prod\{ f_\alpha : \alpha \in A \} : \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \} \to \prod\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$ definida por $F(x)(\alpha) = f_\alpha(x_\alpha)$ para todo $\alpha \in A$ y todo $x \in \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$.

1.9.2 Proposición. *El producto de una familia de funciones continuas es continua.*

Demostración. Sea $\{ f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de funciones continuas, y sea $F = \prod\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$. Para demostrar la continuidad de F es suficiente verificar para todo $\beta \in A$ la continuidad de la composición $p_\beta \circ F : \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \} \to Y_\beta$ donde $p_\beta : \prod\{ Y_\alpha : \alpha \in A \} \to Y_\beta$ es la proyección β-ésima. Por la definición del producto de funciones, $p_\beta \circ F = f_\beta \circ \pi_\beta$ donde $\pi_\beta : \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \} \to X_\beta$ es la proyección. La continuidad de $p_\beta \circ F$ ahora se deduce de la continuidad de f_β y de π_β. □

1.9.3 Definición. Sean X un conjunto, $\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$ una familias de conjuntos, y para todo $\alpha \in A$, $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ una función. Definimos el *producto diagonal* de la familia de funciones $\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ como la función $F = \Delta\{ f_\alpha : \alpha \in A \} : X \to \prod\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$ deninida por $F(x)(\alpha) = f_\alpha(x)$ para todo $\alpha \in A$ y todo $x \in X$.

1.9.4 Definición. Sean X y A dos conjuntos. La *diagonal* Δ de la potencia X^A es el conjunto de todos los elementos $x \in X^A$ tales que $x_\alpha = x_\beta$ para todos $\alpha, \beta \in A$. Recuerde que $x_\alpha = x(\alpha)$.

Es obvio que para todo $\alpha \in A$ la restricción $p_\alpha \restriction \Delta$ es una biyección, donde $p_\alpha : X^A \longrightarrow X$ es la α-ésima proyección.

Sea $i_A : X \to X^A$ definida por la regla $i_A(x)(\alpha) = x$ para toda $\alpha \in A$. Entonces $i_A(X) = \Delta$, y $p_\alpha \circ i_A = \mathrm{id}_X$. De esto último se deduce que i es un homeomorfismo de X sobre Δ si $A \neq \emptyset$. La comparación de las definiciones del producto y del producto diagonal nos llevan a la siguiente afirmación.

1.9.5 PROPOSICIÓN. *Sean X un conjunto, $\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia no vacía de conjuntos, y para todo $\alpha \in A$, $f_\alpha \ : X \to Y_\alpha$ una función. Entonces*

$$\Delta\{ f_\alpha : \alpha \in A \} = \Big(\prod\{ f_\alpha : \alpha \in A \} \restriction \Delta \Big) \circ i_A.$$

1.9.6 COROLARIO. *Si $\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ es una familia de funciones continuas, $f_\alpha \ : X \to Y_\alpha$, entonces el producto diagonal $\Delta\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ es continuo.*

1.10 El peso de productos

1.10.1 PROPOSICIÓN. *Si $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ es una familia de espacios no vacíos, entonces para todo $\beta \in A$, $w(X_\beta) \leq w(\prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \})$.*

1.10.2 PROPOSICIÓN. *Sean $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de espacios, y para todo $\alpha \in A$, $\mathcal{B}_\alpha$ una base en X_α. Entonces la familia $\mathcal{B} = \{ p_\alpha^{-1}(U) : U \in \mathcal{B}_\alpha, \alpha \in A \}$ es una subbase de $X = \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in X = \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ y W una vecindad de x. Entonces existe un conjunto canónico abierto

$$U = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k})$$

donde U_{α_i} es abierto en X_{α_i}, $i = 1, \ldots, k$, y $x \in U \subseteq W$. Para todo $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, sea $V_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ tal que $p_\alpha(x) \in V_\alpha \subseteq U_\alpha$. Entonces

$$x \in p_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(V_{\alpha_k}) \subseteq p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) \subseteq W,$$

y el conjunto $p_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(V_{\alpha_k})$ es una intersección finita de elementos de $\mathcal{B}$.

Para todo $x \in X$ y toda vecindad W de x hemos encontrado una intersección finita de elementos de $\mathcal{B}$ que contiene a x y está contenida en W. Eso significa que todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ forman una base de X, o que $\mathcal{B}$ es una subbase de X. □

1.10.3 COROLARIO. *Sea $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de espacios topológicos, y sea $X = \prod\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$. Entonces $w(X) \leq \sup\{ w(X_\alpha) : \alpha \in A \} + |\{ \alpha \in A : |X_\alpha| > 1 \}|$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}_\alpha$ una base en X_α tal que $|\mathcal{B}_\alpha| = w(X_\alpha)$. Sean $\mathcal{B}'_\alpha = \{\, p_\alpha^{-1}(U) : U \in \mathcal{B}_\alpha \,\}$, $\alpha \in A$, y $\mathcal{B} = \bigcup\{\, \mathcal{B}'_\alpha : \alpha \in A \,\}$. Por el lema anterior, $\mathcal{B}$ es una subbase de X, entonces $w(X) \leq |\mathcal{B}|$. Note que si $|X_\alpha| \leq 1$, entonces $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \{\emptyset, X\}$. Sean $\tau = \sup\{\, w(X_\alpha) : \alpha \in A \,\}$ y $\mu = |\{\, \alpha \in A : |X_\alpha| > 1 \,\}|$. Entonces $\mathcal{B}$ es un subconjunto de la unión de a lo más μ familias cada una de las cuales contiene a lo más τ elementos, de donde $|\mathcal{B}| \leq \mu\tau = \mu + \tau$, y $w(X) \leq \mu + \tau$. □

1.10.4 Proposición. *Sea $\{\, X_\alpha : \alpha \in A \,\}$ una familia de espacios T_1 tal que $|X_\alpha| \geq 2$ para todo $\alpha \in A$. Entonces $w(\prod\{\, X_\alpha : \alpha \in A \,\}) \geq |A|$.*

Demostración. Para todo $\alpha \in A$ sean x_α^0 y x_α^1 puntos distintos en X_α, y sea x_0 el punto de $X = \prod\{\, X_\alpha : \alpha \in A \,\}$ cuyas coordenadas son x_α^0, $\alpha \in A$. Sea $\mathcal{B}$ una base de X consistente de conjuntos abiertos canónicos tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Sea $\mathcal{B}_0$ la familia de todos los elementos de $\mathcal{B}$ que contienen a x_0; puesto que X es un espacio T_1, tenemos que $\{x_0\} = \bigcap \mathcal{B}_0$. Todo elemento de $\mathcal{B}_0$ es intersección finita de conjuntos de forma $p_\alpha^{-1}(U)$ donde $\alpha \in A$ y U es una vecindad abierta de x_α^0 en X_α; de eso se deduce que $\{x_0\}$ es la intersección de a lo más $|\mathcal{B}_0| \leq w(X)$ de conjuntos de esta forma. Entonces existe $B \subseteq A$ tal que $|B| \leq w(X)$ y

$$\{x_0\} = \bigcap\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in B \,\}.$$

Si $w(X) < |A|$, entonces existe $\alpha_0 \in A \setminus B$. Sea x_1 un punto de X tal que $x_\alpha = x_\alpha^0$ para todo $\alpha \neq \alpha_0$ y $x_{\alpha_0} = x_{\alpha_0}^1$. Es claro que $x_1 \neq x_0$; por la otra parte, para todo $\alpha \in B$, $p_\alpha(x_1) = p_\alpha(x_0)$, y $x_1 \in p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Entonces $x_1 \in \{x_0\} = \bigcap\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in B \,\}$ y $x_1 \neq x_0$, una contradicción. □

Como un corolario del Corolario 1.10.3 y de la Proposición 1.10.4 tenemos el siguiente resultado

1.10.5 Teorema. *Sea $\{\, X_\alpha : \alpha \in A \,\}$ una familia de espacios T_1 tal que $|X_\alpha| > 1$ para todo $\alpha \in A$. Entonces*

$$w\left(\prod\{\, X_\alpha : \alpha \in A \,\}\right) = \sup\{\, |A|, w(X_\alpha) : \alpha \in A \,\}.$$

1.10.6 Corolario. *Para todo A, $w(\mathbb{R}^A) = w([0,1]^A) = w(\{0,1\}^A) = |A| + \omega$.*

1.11 Espacios compactos

1.11.1 DEFINICIÓN. Una *cubierta* de un espacio topológico X es una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X cuya unión es todo X. Una *subcubierta* de una cubierta $\mathcal{U}$ es una subcolección $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ la cual es una cubierta. Una *cubierta abierta* de X es una cubierta que consiste de conjuntos abiertos.

1.11.2 DEFINICIÓN. Un espacio X se llama *compacto* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

1.11.3 DEFINICIÓN. Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X tiene *la propiedad de intersección finita* si para toda subfamilia finita no vacía $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$, se tiene que $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$.

1.11.4 Teorema. *Un espacio X es compacto si y sólo si toda familia de conjuntos cerrados en X con la propiedad de intersección finita en X tiene la intersección no vacía.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X compacto, y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos cerrados en X. Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, entonces la familia $\mathcal{U} = \{ X \setminus F : F \in \mathcal{F} \}$ es una cubierta abierta de X. Por la compacidad de X, $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita $\mathcal{U}'$. Sea $\mathcal{F}' = \{ X \setminus U : U \in \mathcal{U}' \}$. Entonces $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$, y $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad de intersección finita. Hemos demostrado que ninguna familia de conjuntos cerrados en X con la intersección vacía tiene la propiedad de intersección finita, o, equivalente, que toda familia con la propiedad de intersección finita tiene la intersección no vacía.

Ahora sea X tal que toda familia de conjuntos cerrados en X con la propiedad de intersección finita tiene la intersección no vacía. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces $\mathcal{F} = \{ X \setminus U : U \in \mathcal{U} \}$ es una familia de conjuntos cerrados en X, y $\bigcap \mathcal{F} = X \setminus \bigcup \mathcal{U} = \emptyset$. Eso implica que $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad de intersección finita, y entonces existe $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ finito tal que $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$. La familia $\mathcal{U}' = \{ X \setminus F : F \in \mathcal{F}' \}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. □

1.11.5 PROPOSICIÓN. *Sean X un espacio compacto y F un subespacio cerrado. Entonces F es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de F. Para todo $V \in \mathcal{V}$ sea U_V un conjunto abierto en X tal que $V = U_V \cap F$. Entonces $\mathcal{U} = \{ U_V : V \in \mathcal{V} \} \cup \{X \setminus F\}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{U}'$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. La familia $\{ U \cap F : U \in \mathcal{U}' \} \setminus \{\emptyset\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{V}$. □

1.11.6 LEMA. *Sean X un espacio Hausdorff, $K \subseteq X$ un subespacio compacto de X, y $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin K$. Entonces existen conjuntos abiertos U y V en X tales que $K \subseteq U$, $x_0 \in V$, y $U \cap V = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Para todo $x \in K$ sean U_x y V_x abiertos tales que $x \in U_x$, $x_0 \in V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$. La familia $\mathcal{U} = \{ U_x \cap K : x \in K \}$ es una cubierta abierta de K; sea $\{U_{x_1} \cap K, \ldots, U_{x_m} \cap K\}$ su subcubierta finita. Definamos $U = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$ y $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_m}$. Entonces U y V son los conjuntos requeridos. □

1.11.7 COROLARIO. *Si X es un espacio Hausdorff y K es un subespacio compacto de X, entonces K es cerrado en X.*

1.11.8 COROLARIO. *Todo espacio compacto Hausdorff es regular.*

1.11.9 PROPOSICIÓN. *Todo espacio compacto Hausdorff es normal.*

DEMOSTRACIÓN. Sean F_1, F_2 conjuntos cerrados ajenos en X. Por 1.11.6, para todo $x \in F_2$ existen conjuntos abiertos U_x y V_x tales que $F_1 \subseteq U_x$, $x \in V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$. La familia $\mathcal{V} = \{ V_x \cap F_2 : x \in F_2 \}$ es una cubierta abierta de F_2; por 1.11.5, F_2 es compacto, y existe una subcubierta finita $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_k}\}$ de $\mathcal{V}$. Los conjuntos $U = U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_k}$ y $V = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_k}$ son abiertos ajenos que contienen a F_1 y a F_2 respectivamente. □

1.11.10 PROPOSICIÓN. *Si X es un espacio compacto, Y es un espacio topológico, y existe una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(X) = Y$, entonces Y es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de Y. Entonces $\mathcal{U} = \{ f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V} \}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{U}'$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$; la familia $\mathcal{V}' = \{ f(U) : U \in \mathcal{U}' \}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{V}$. □

1.11.11 PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff, y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces f es una función cerrada.*

DEMOSTRACIÓN. Si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces F es compacto. Por 1.11.10, $f(F)$ es compacto, y por 1.11.7, $f(F)$ es cerrado en Y. $\square$

1.11.12 COROLARIO. *Sean X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff, y $f : X \to Y$ una función continua. Si f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

1.12 Productos de espacios compactos

En esta sección daremos una demostración del Teorema de Tychonoff sobre el producto de espacios compactos.

Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X con la propiedad de intersección finita se llama *maximal* si toda familia con la propiedad de intersección finita de subconjuntos de X que contiene a $\mathcal{F}$ es igual a $\mathcal{F}$.

Una familia $\mathcal{P}$ de familias con la propiedad de interseccion finita se llama *cadena* si para todos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{P}$, se tiene que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ ó $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$.

1.12.1 LEMA. *Sea $\mathcal{P}$ una cadena de familias de subconjuntos de un conjunto X con la propiedad de intersección finita. Entonces la familia $\bigcup \mathcal{P}$ tiene la propiedad de intersección finita.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $F_1, \ldots, F_n \in \bigcup \mathcal{P}$. Entonces existen $\mathcal{F}_1, \ldots \mathcal{F}_n \in \mathcal{P}$ tales que $F_1 \in \mathcal{F}_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_n$. Por la suposición de que $\mathcal{P}$ es una cadena, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_i$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $F_1, \ldots, F_n$ son elementos de $\mathcal{F}_i$, y por la propiedad de intersección finita de $\mathcal{F}_i$, tenemos que $F_1 \cap \cdots \cap F_n \neq \emptyset$. $\square$

La proposición anterior junto con el Lema de Zorn implica lo siguiente.

1.12.2 LEMA. *Toda familia de subconjuntos de un conjunto X con la propiedad de intersección finita está contenida en una familia maximal con la propiedad de intersección finita.*

1.12.3 LEMA. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X maximal con la propiedad de intersección finita . Sea $A \subseteq X$ tal que $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Entonces $A \in \mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $A \notin \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} \cup \{A\}$ es una familia con la propiedad de intersección finita de subconjuntos de X que contiene a $\mathcal{F}$ y no es igual a $\mathcal{F}$, y entonces $\mathcal{F}$ no es maximal. □

1.12.4 COROLARIO. *Sea $\mathcal{F}$ una familia maximal con la propiedad de intersección finita de subconjuntos de un conjunto X. Entonces para todo $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, tenemos que $F_1 \cap \cdots \cap F_n \in \mathcal{F}$.*

1.12.5 Teorema (de Tychonoff)**.** *Sea $\{\, X_\alpha : \alpha \in A \,\}$ una familia no vacía de espacios compactos. Entonces el producto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar que para toda familia $\mathcal{F}$ con la propiedad de intersección finita de subconjuntos cerrados de $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, la intersección $\bigcap \mathcal{F}$ no es vacía.

Sea $\mathcal{F}_0$ una familia maximal con la propiedad de intersección finita de subconjuntos de X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_0$, y sea $\overline{\mathcal{F}}_0 = \{\, \overline{F} : F \in \mathcal{F}_0 \,\}$. Es claro que $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}}_0$, así que es suficiente demostrar que $\bigcap \overline{\mathcal{F}}_0 \neq \emptyset$, es decir, que existe un punto $x \in X$ tal que $x \in \overline{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}_0$.

Para todo $\alpha \in A$, sea $\overline{\mathcal{F}}_\alpha = \{\, \overline{p_\alpha(F)} : F \in \mathcal{F}_0 \,\}$ donde $p_\alpha \ : X \to X_\alpha$ es la proyección. Entonces $\overline{\mathcal{F}}_\alpha$ es una familia de conjuntos cerrados en X_α con la propiedad de intersección finita. Por la compacidad de X_α, existe un punto $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $x_\alpha \in \bigcap \overline{\mathcal{F}}_\alpha$.

Sea x el punto de X tal que $p_\alpha(x) = x_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Verificaremos que $x \in \overline{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}_0$.

Sean $\alpha \in A$ y U_α una vecindad de x_α. Por la elección de x_α, se tiene que $U_\alpha \cap p_\alpha(F) \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}_0$, de donde $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}_0$. Por el Lema 1.12.3, $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{F}_0$, y por el Corolario 1.12.4 ahora implica que todo conjunto canónico que contiene a x está en $\mathcal{F}_0$. Eso significa que $x \in \overline{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}_0$, y la demostración está completa. □

1.13 Familias de funciones que separan puntos y generan una topología

1.13.1 Definición. Sean X un conjunto, $\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de conjuntos, y para cada $\alpha \in A$, $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ una función. Diremos que la familia de funciones $\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ *separa puntos de* X si dados dos puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existe $\alpha \in A$ tal que $f_\alpha(x_1) \neq f_\alpha(x_2)$.

Note por ejemplo, que la familia $\{f\}$ definida por una función $f : X \to Y$ separa puntos de X si y sólo si f es inyectiva.

1.13.2 Definición. Sean X un espacio topológico, $\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de espacios topológicos, y para cada $\alpha \in A$, $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ una función continua.

Diremos que la familia de funciones $\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ *genera la topología de* X si la familia $\{ f_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A,\, U \text{ es abierto en } Y_\alpha \}$ es una subbase de la topología de X.

1.13.3 Definición. Una función de espacios topológicos $f : X \to Y$ se llama *encaje* (*topológico*) si f es un homeomorfismo de X sobre $f(X)$ ($f(X)$ está equipado con la topología de subespacio de Y).

1.13.4 Ejemplo. 1. Si $f : X \to Y$ es un encaje, entonces f separa puntos y genera la topología de X.

2. La familia de todas las proyecciones $\{ p_\alpha : \alpha \in A \}$ genera la topología del producto $\prod \{ X_\alpha : \alpha \in A \}$.

1.13.5 Proposición. *Sean X, Z espacios topológicos, y $\{ f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de funciones que genera la topología de X. Entonces una función $g : Z \to X$ es continua si y sólo si todas las composiciones $f_\alpha \circ g : Z \to Y_\alpha$ son continuas.*

Demostración. Si g es continua, entonces todas las composiciones $f_\alpha \circ g$ son continuas porque toda f_α es continua.

Suponga que, para todo $\alpha \in A$, la composición $f_\alpha \circ g$ es continua. Para demostrar que g es continua es suficiente verificar que la preimagen bajo g de todo elemento de la subbase $\{ f_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U$ es abierta en $Y_\alpha \}$ es abierto en Z. Pero para todo U abierto en Y_α, tenemos que $g^{-1}(f^{-1}(U)) = (f_\alpha \circ g)^{-1}(U)$ es abierto, porque la composición $f_\alpha \circ g$ es continua. □

1.13.6 PROPOSICIÓN. *Si la familia de funciones $\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ genera la topología de un espacio T_0 X, entonces $\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ separa puntos de X.*

DEMOSTRACIÓN. Sean x_1, x_2 puntos distintos de X. Sea U un conjunto abierto en X tal que $|U \cap \{x_1, x_2\}| = 1$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ y conjuntos abiertos $U_{\alpha_k} \subseteq Y_{\alpha_k}$ tales que $x_1 \in f_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap f_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) \subseteq U$; de donde existe $\beta \in \{ \alpha_1, \ldots \alpha_k\}$ tal que $x_1 \in f_\beta^{-1}(U_\beta)$ y $x_2 \notin f_\beta^{-1}(U_\beta)$. En consecuencia $f_\beta(x_1) \in U_\beta$ y $f_\beta(x_2) \notin U_\beta$, y $f_\beta(x_1) \neq f_\beta(x_2)$. □

1.13.7 Teorema. *Un espacio T_0 X es de Tychonoff si y sólo si existe una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas de X a $[0,1]$ que genera la topología de X.*

DEMOSTRACIÓN. Si X es de Tychonoff, sea $\mathcal{F} = C(X, [0,1]) = \{ f : X \to [0,1] : f \text{ es continua}\}$. Por definición, para todo $x \in X$ y toda vecindad U de x existe $f \in C(X, [0,1])$ tal que $x \in f^{-1}([0,1)) \subseteq U$; eso significa que la familia $\mathcal{B} = \{ f^{-1}([0,1)) : f \in C(X, [0,1]) \}$ es una base de X, y en consecuencia la familia de conjuntos abiertos $\{ f^{-1}(U) : f \in C(X, [0,1]), U \subseteq [0,1] \text{ es abierto } \}$ que contiene a $\mathcal{B}$ también es una base.

Ahora sean X un espacio T_0 y $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de X a $[0,1]$ que genera la topología de X. Por la Proposición 1.13.6, la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de X. Sean x_1, x_2 puntos distintos en X. Entonces existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sean U_1, U_2 vecindades ajenas de $f(x_1)$ y $f(x_2)$ en $\mathbb{R}$. Las preimagenes $f^{-1}(U_1)$ y $f^{-1}(U_2)$ son entonces vecindades ajenas de x_1 y x_2 en X. Esto muestra que X es Hausdorff.

Para verificar que X es de Tychonoff, sean $x_0 \in X$ y F un conjunto cerrado en X tal que $x_0 \notin F$. La condición que $\mathcal{F}$ genera la topología de X implica que existen funciones $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{F}$ y conjuntos abiertos $U_1, \ldots, U_k$ en $\mathbb{R}$ tales que $x_0 \in f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_k^{-1}(U_k) \subseteq X \setminus F$. Para todo $i = 1, \ldots, k$ tenemos que $f_i(x_0) \in U_i$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $(f_i(x_0) - \varepsilon, f_i(x_0) + \varepsilon) \subseteq U_i$, para cada $i = 1, \ldots, k$.

Consideremos ahora las funciones $g_1, \ldots, g_k : X \to \mathbb{R}$ definidas por

$$g_i(x) = \frac{f_i(x) - f_i(x_0)}{\varepsilon}, \qquad x \in X, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Entonces $g_i(x_0) = 0$ y $g_i^{-1}((-1,1)) \subseteq f_i^{-1}((f_i(x_0) - \varepsilon, f_i(x_0) + \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(U_i)$, de donde $g_1^{-1}((-1,1)) \cap \cdots \cap g_k^{-1}((-1,1)) \subseteq X \setminus F$.

Sea $h_i(x) = \min(|g_i(x)|, 1)$, $i = 1, \ldots k$, $x \in X$. Las funciones h_i son continuas, $h_i(X) \subseteq [0,1]$, $h_i(x_0) = 0$ y $h_1^{-1}([0,1)) \cap \cdots \cap h_k^{-1}([0,1)) \subseteq X \setminus F$.

Sea $f = \max\{h_1, \ldots, h_k\}$. La función f es continua, $f(X) \subseteq [0,1]$, $f(x_0) = 0$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in F$ porque de $h_1^{-1}([0,1)) \cap \cdots \cap h_k^{-1}([0,1)) \subseteq X \setminus F$ se deduce que F no tiene puntos en cuales todas las funciones $h_1, \ldots, h_k$ tienen valores < 1.

Note ahora que la función f es como la requerida en la definición de un espacio de Tychonoff. $\square$

1.14 Encajes en productos

1.14.1 Teorema. *Sean X un conjunto y $\{ f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de funciones. Entonces la familia $\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ separa puntos de X si y sólo si el producto diagonal $F = \Delta\{ f_\alpha : \alpha \in A \} : X \to \prod\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$ es inyectiva.*

Demostración. $\Leftarrow]$ Sean x_1, x_2 puntos distintos en X. Si F es inyectiva, entonces $F(x_1) \neq F(x_2)$, y existe $\alpha \in A$ tal que $p_\alpha(F(x_1)) \neq p_\alpha(F(x_2))$. Pero $p_\alpha(F(x_1)) = f_\alpha(x_1)$, $p_\alpha(F(x_2)) = f_\alpha(x_2)$, y hemos encontrado un $\alpha \in A$ tal que $f_\alpha(x_1) \neq f_\alpha(x_2)$.

$\Rightarrow]$ Sean x_1, x_2 puntos distintos en X; tenemos que verificar que $F(x_1) \neq F(x_2)$. Sea $\alpha \in A$ tal que $f_\alpha(x_1) \neq f_\alpha(x_2)$. Entonces $p_\alpha(F(x_1)) = f_\alpha(x_1) \neq f_\alpha(x_2) = p_\alpha(F(x_2))$, de donde $F(x_1) \neq F(x_2)$. $\square$

1.14.2 Teorema. *Sean X un espacio topológico y $\{ f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de funciones continuas. Si la familia $\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ separa puntos de X y genera la topología de X, entonces el producto diagonal $F = \Delta\{ f_\alpha : \alpha \in A \} : X \to \prod\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$ es un encaje.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 1.14.1, la función $F\ : X \to F(X)$ es una biyección continua; para demostrar que F es un encaje es suficiente verificar que la inversa $h = F^{-1}$ es continua.

Para todo $\alpha \in A$ y $y \in F(X)$, se tiene que $(f_\alpha \circ h)(y) = p_\alpha(y)$ porque $p_\alpha \circ F = f_\alpha$ y $h = F^{-1}$. Entonces $f_\alpha \circ h$ es continua para todo $\alpha \in A$, y h es continua por 1.13.5. $\square$

De los Teoremas 1.14.2, 1.13.7 y la Proposición 1.8.6 se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

1.14.3 COROLARIO. *Un espacio X es de Tychonoff si y sólo si existe A tal que X es homeomorfo a un subespacio de* $[0,1]^A$.

1.14.4 PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces existe una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas de X a* $[0,1]$ *tal que $\mathcal{F}$ genera la topología de X y $|\mathcal{F}| \leq w(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B} = \{\, f^{-1}([0,1)) : f \in C(X,[0,1]) \,\}$. La colección $\mathcal{B}$ es una base de X. Existe una base $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $|\mathcal{B}'| = w(X)$. Para todo $U \in \mathcal{B}'$, sea $f_U \in C(X,[0,1])$ tal que $U = f_U^{-1}([0,1))$. Entonces la familia $\mathcal{F} = \{\, f_U : U \in \mathcal{B}' \,\}$ es como se requiere. $\square$

1.14.5 Teorema (de encaje de Tychonoff). *Todo espacio de Tychonoff X es homeomorfo a un subespacio de* $[0,1]^{w(X)}$.

1.15 Compactaciones

Este apartado es sumamente importante ya que es una introducción para entender la compactación de Stone-Čech que es abordado en la siguiente sección. Iniciemos definiendo lo que es una compactación.

1.15.1 DEFINICIÓN. Sea X un espacio topológico. Una pareja (i, Y) se llama *compactación* de X si Y es un espacio compacto y $i\ : X \to Y$ es un encaje topológico tal que $i(X)$ es denso en Y.

Recordemos que una función $i : X \longrightarrow Y$ es un encaje topológico si $i : X \longrightarrow i(X)$ es un homeomorfismo donde $i(X)$ tiene la topología del subespacio respecto de Y.

1.15.2 PROPOSICIÓN. *Un espacio X tiene una compactación Hausdorff si y sólo si X es Tychonoff.*

DEMOSTRACIÓN. Si X tiene una compactación T_2, entonces X es homeomorfo a un subespacio de un espacio compacto T_2; todo espacio compacto T_2 es normal, entonces es Tychonoff, y todo subespacio de un espacio Tychonoff es Tychonoff.

Si X es de Tychonoff, entonces por el Teorema de Tychonoff existe un encaje topológico $i\ : X \to [0,1]^{w(X)}$. Ahora, por el teorema de Tychonoff sobre los productos de espacios compactos, la potencia $[0,1]^{w(X)}$ es compacta. Sea Y la cerradura de $i(X)$ en $[0,1]^{w(X)}$. Entonces la pareja (i,Y) es una compactación T_2 de X. $\square$

De la demostración del Teorema anterior tambien se deduce lo siguiente:

1.15.3 COROLARIO. *Todo espacio de Tychonoff X tiene una compactación Hausdorff (i,Y) tal que $w(Y)=w(X)$.*

1.15.4 DEFINICIÓN. Sean (i_1,Y_1), (i_2,Y_2) dos compactaciones de un espacio X. Se escribe $(i_1,Y_1) \prec (i_2,Y_2)$ si existe una función continua $p\ : Y_2 \to Y_1$ tal que $p \circ i_2 = i_1$.

Las compactaciones (i_1,Y_1) y (i_2,Y_2) de X se llaman *equivalentes* si existe un homeomorfismo $p\ : Y_2 \to Y_1$ tal que $p \circ i_2 = i_1$.

Dada una compactación (p,Y) de X, es común identificar X con el subespacio $i(X)$ de Y (puesto que i es un homeomorfismo de X sobre $i(X)$) y decir que el espacio Y es compactación de X. Con está identificación siempre consideramos a X como un subespacio de cualquier compactación de él.

Con la anterior convención en mente, $Y_1 \prec Y_2$ significa que existe una función $p\ : Y_2 \longrightarrow Y$ tal que $p|X = \mathrm{id}_X$.

Es claro que la relación $\prec$ es transitiva y refléxiva.

1.15.5 PROPOSICIÓN. *Si Y_1 y Y_2 son dos compactaciones de un espacio X tales que $Y_1 \prec Y_2$ y $Y_2 \prec Y_1$, entonces Y_1 y Y_2 son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $p_1\ : Y_2 \to Y_1$ y $p_2\ : Y_1 \to Y_2$ funciones continuas tales que $p_1|X = \mathrm{id}_X$ y $p_2|X = \mathrm{id}_X$. Entonces $p_1 \circ p_2\ : Y_1 \to Y_1$

es continua, y $p_2 \circ p_1|X = \mathrm{id}_X$. Ahora tenemos funciones continuas de Y_1 a Y_1, $p_1 \circ p_2$ y id_{Y_1}, cuyas restricciones a X son iguales. Por la densidad de X en Y_1, $p_1 \circ p_2 = \mathrm{id}_{Y_1}$. Un argumento simétrico muestra que $p_2 \circ p_1 = \mathrm{id}_{Y_2}$. De ello podemos concluir que $p_1 = p_2^{-1}$, y p_1 y p_2 son homeomorfismos. $\square$

Sea Y una compactación de X, denotaremos con $C(Y|X,[0,1])$ al conjunto de todas las funciones continuas $f : X \to [0,1]$ que tienen extensiones continuas sobre Y (en otras palabras, $C(Y|X,[0,1])$ es el conjunto de todas las restricciones a X de funciones continuas de Y a $[0,1]$).

1.15.6 Observación. Por la densidad de X en su compactación Y, la función restricción $r : C(Y,[0,1]) \to C(Y|X,[0,1])$ (definida por $r(g) = g|X$) es biyectiva.

1.15.7 Lema. *Sea Y una compactación Hausdorff de X, y sea $F = \Delta\, C(Y,[0,1]) : Y \to [0,1]^{C(Y,[0,1])}$. Entonces $(F|X, F(Y))$ es una compactación de X equivalente a Y.*

Demostración. Es obvio que el espacio $F(Y)$ es compacto. Por la propiedad de Tychonoff de Y, la familia $C(Y,[0,1])$ separa puntos y genera la topología de Y, de donde F es un encaje de Y en $[0,1]^{C(Y,[0,1])}$, y entonces es un homeomorfismo de Y sobre $F(Y)$. $\square$

1.15.8 Definición. Sean $\{ X_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de espacios topológicos y $B \subseteq A$. El mapeo $p_B : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to \prod\{ X_\alpha : \alpha \in B \}$ definido por

$$p_B(x) = x|B$$

para todo $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ se llama *proyección* del producto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ a su subproducto $\prod_{\alpha \in B} X_\alpha$.

1.15.9 Proposición. *La proyección p_B es continua.*

Demostración. Es suficiente verificar que la composición $q_\beta \circ p_B$ es continua para toda proyección $q_\beta : \prod_{\alpha \in B} X_\alpha \to X_\beta$, donde $\beta \in B$. Pero $q_\beta \circ p_B = p_\beta$, donde $p_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\beta$ es la proyección. $\square$

Ahora pasemos a unos resultados que nos ayudaran en la deducción de algunos resultados acerca de la compactación de Stone-Čech de un espacio Tychonoff.

1.15.10 Teorema. *Sean Y_1, Y_2 dos compactaciones Hausdorff de X. Entonces $Y_1 \prec Y_2$ si y sólo si $C(Y_1|X,[0,1]) \subseteq C(Y_2|X,[0,1])$.*

Demostración. Sea $Y_1 \prec Y_2$, y sea $p\ : Y_2 \to Y_1$ la función continua tal que $p|X = \mathrm{id}_X$. Si $f \in C(Y_1|X,[0,1])$, entonces existe una extensión continua $f^*\ : Y_1 \to [0,1]$ de f. Es fácil ver que $g^* = f^* \circ p : Y_2 \to [0,1]$ es una extensión continua de f sobre Y_2, de donde $f \in C(Y_2|X,[0,1])$.

Ahora sean Y_1, Y_2 dos compactaciones T_2 de X tales que

$$C(Y_1|X,[0,1]) \subseteq C(Y_2|X,[0,1]).$$

Sean $F_1 = \Delta\, C(Y_1,[0,1]) \to [0,1]^{C(Y_1,[0,1])}$ y $F_2 = \Delta\, C(Y_2,[0,1]) \to [0,1]^{C(Y_2,[0,1])}$; por el Corolario 1.15.7, $(F_1|X, F(Y_1))$ y $(F_2|X, F_2(Y_2))$ son compactaciones T_2 de X equivalentes a Y_1 y Y_2, y entonces es suficiente encontrar una función $p\ : F_2(Y_2) \to F_1(Y_1)$ tal que $p \circ F_2 = F_1$.

Usando el hecho que los mapeos de restricción $r_1\ : C(Y_1,[0,1]) \to C(Y_1|X,[0,1])$ y $r_2\ : C(Y_2,[0,1]) \to C(Y_2|X,[0,1])$ son biyecciones, podemos suponer que F_1 es un encaje de Y_1 en $[0,1]^{C(Y_1|X,[0,1])}$ y F_2 es un encaje de Y_2 en $[0,1]^{C(Y_2|X,[0,1])}$. Sea

$$P = p_{C(Y_1|X,[0,1])}\ : [0,1]^{C(Y_2|X,[0,1])} \to [0,1]^{C(Y_1|X,[0,1])}$$

la proyección. Para todo $x \in X$ y $f \in C(Y_1|X,[0,1])$ tenemos

$$(P(F_1(x)))_f = (F_1(x))_f = f(x) = (F_2(x))_f,$$

de donde $(P \circ F_1)|X = F_2|X$. Por la densidad de X en Y_1, $P \circ F_1 = F_2$. La función $p = P|F(Y_2)\ : F(Y_2) \to F(Y_1)$ es la función buscada. □

1.15.11 Corolario. *Sean Y_1 y Y_2 dos compactaciones Haussdorff de X. Si $C(Y_1|X,[0,1]) = C(Y_2|X,[0,1])$, entonces Y_1 y Y_2 son equivalentes.*

1.16 La compactación de Stone-Čech

La razones para escribir este apartado es que, como veremos en el último capítulo, la compactación de Stone-Čech permite establecer una caracterización de los espacios paracompactos, que serán introducidos en el siguiente capítulo.

Definamos la compactación de Stone-Čech.

1.16.1 Definición. Sean X un espacio de Tychonoff, $F = \Delta\, C(X, [0,1]) : X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$, y Y la cerradura de $F(X)$ en $[0,1]^{C(X,[0,1])}$.

La pareja (F, Y) se llama *compactación de Stone-Čech* de X.

Por teoremas sobre productos diagonales, F es un encaje de X en $[0,1]^{C(X,[0,1])}$, y la compactación de Stone-Čech es una compactación de X (como siempre, identificamos X y $F(X) \subseteq Y$).

Del Teorema 1.15.10 se deduce que βX es la compactación máxima de X, en el sentido que $Y \prec X$ para toda compactación Y de X. También es fácil deducir lo siguiente.

1.16.2 Teorema. *Sea Y una compactación T_2 de X. Entonces el encaje $i : X \to Y$ tiene una extensión continua $p : \beta X \to Y$.*

1.16.3 Definición. Sean Y un espacio y X un subespacio de Y. Se dice que X es C^*-*encajado* en Y si toda función acotada continua $f : X \to \mathbb{R}$ tiene una extensión continua sobre Y.

1.16.4 Lema. *Toda función continua $f : X \to [0,1]$ tiene una extensión continua $f^* : \beta X \to [0,1]$.*

Demostración. Sea $f : X \to [0,1]$ continua, entonces $f \in C(X, [0,1])$. Por la definición de F como el producto diagonal de $C(X, [0,1])$, tenemos que $f = p_f \circ F$ donde $p_f : [0,1]^{C(X,[0,1])} \to [0,1]$ es la proyección correspondiente al elemento f de $C(X, [0,1])$. Sea $f^* = p_f|\beta X$. Entonces la función f^* es la extensión requerida. □

1.16.5 Proposición. *X es C^*-encajado en βX.*

Demostración. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua acotada, y sea $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in X$. Sea $g : X \to [0,1]$ definida por

$$g(x) = \frac{f(x) + C}{2C}, \qquad x \in X.$$

Entonces $g \in C(X, [0,1])$, y por el Lema 1.16.4, g tiene una extensión continua $g^* : \beta X \to [0,1]$. La función

$$f^*(x) = 2Cg^*(x) - C, \qquad x \in \beta X$$

es una extensión continua de f. □

Del Corolario 1.15.11 se deduce lo siguiente.

1.16.6 Proposición. *Si Y es una compactación T_2 de X tal que X es C^*-encajado en Y, entonces Y es equivalente a βX.*

1.16.7 Teorema. *Sea K un espacio compacto. Entonces toda función continua $f : X \to K$ tiene una extensión continua $f^* : \beta X \to K$.*

Demostración. Sea $i : X \to \beta X$ el encaje, y sea $g = f \Delta i : X \to K \times \beta X$. Es claro que la familia $\{f, i\}$ separa puntos y genera la topología de X, de donde g es un encaje de X en un espacio compacto $K \times \beta X$. Sea Y la cerradura de $g(X)$ en $K \times \beta X$; la pareja (g, Y) es una compactación de X. Por 1.16.2, existe una extensión continua $g^* : \beta X \to Y$ de g. Sea $p_K : K \times \beta X \to K$ la proyección; la función $f^* = p_K \circ g^*$ es una extensión continua de f. $\square$

Capítulo 2

Paracompacidad

2.1 Introducción

Como ya se dijo anteriormente el concepto de espacio paracompacto lo introdujo J. Dieudonné en 1944. En este capítulo introducimos la noción de espacio paracompacto y algunas de sus caracterizaciones clásicas. Aprovechando estos caracterizaciones hacemos un análisis de la relación que hay entre la clase de los espacios paracompactos y otras importantes clases de espacios topológicos, como la clase de espacios compactos, la clase de espacios métricos, la clase de espacios normales, etc. Damos también en este capítulo una demostración del Teorema de Stone que muestra que todo espacio métrizable es un espacio paracompacto.

2.2 Espacios paracompactos

2.2.1 Definición. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. $\mathcal{U}$ es una familia *localmente finita* si, para cada $x \in X$, existe $W \in \mathcal{T}(x, X)$ tal que

$$|\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\}| < \aleph_0$$

2. Diremos que la familia $\mathcal{V}$ *está inscrita* en la familia $\mathcal{U}$ si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ de tal manera que $V \subseteq U$.

3. La familia $\mathcal{V}$ se dice *refinamiento* de la familia $\mathcal{U}$ si $\mathcal{V}$ está inscrita en $\mathcal{U}$ y además $\bigcup \mathcal{V} = X$ (obsérvese que en tal caso también ocurre que $\bigcup \mathcal{U} = X$); si adicionalmente $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}(X)$, diremos que $\mathcal{V}$ es un *refinamiento abierto* de $\mathcal{U}$.

2.2.2 DEFINICIÓN. Un espacio topológico X es un espacio *paracompacto* si X es de Hausdoff y cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

2.2.3 EJEMPLO.

1. Todo espacio discreto es un espacio paracompacto.
   DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio discreto, es claro que X es T_2 y sea una cubierta $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Consideremos la cubierta $\mathcal{V} = \{\{x\} : x \in X\}$. Es fácil notar que $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ que es localmente finito puesto que si $x \in X$ entonces $W = \{x\}$ tiene la propiedad de que $W \in \mathcal{T}(x, X)$ y $|\{\sigma \in \mathcal{V} : W \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}| = |\{\{x\}\}| = 1 < \aleph_0$ $\square$

2. La clase de espacios paracompactos contiene a la clase de espacios compactos (recuérdese que los espacios compacto se suponen espacios T_1). En efecto, es suficiente observar que todo subcubierta finita de una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de un espacio compacto X es un refinamiento abierto localmente finito de la cubierta $\mathcal{U}$.

El siguiente lema será de gran importancia posterioremente. En él introducimos la noción de familia conservativa.

2.2.4 LEMA. *Toda familia $\mathcal{U}$ localmente finita es una familia conservativa (o preservadora de cerradura), esto es,*

$$\forall \;\; \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \;\; : \; \overline{\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}} = \bigcup\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}\}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Claramente, bastará demostrar que

$$\overline{\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}} \subseteq \bigcup\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}\}$$

Sea $x \in \overline{\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}}$. Dado que $\mathcal{U}$ es localmente finita, existe $W \in \mathcal{T}(x, X)$ tal que

$$|\{U \in \mathcal{U} : W \cap U \neq \emptyset\}| < \aleph_0.$$

Como $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, $|\{U \in \mathcal{V} : W \cap U \neq \emptyset\}| < \aleph_0$. Supongamos que

$$\{U \in \mathcal{V} : W \cap U \neq \emptyset\} = \{U_1, \dots, U_n\}.$$

Entonces

$$W \cap \bigcup\{U \in \mathcal{V} : U \neq U_i, i = 1, \dots, n\} = \emptyset.$$

Como $x \in \overline{\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}} = (\overline{\bigcup\{U \in \mathcal{V} : U \neq U_i, i = 1, \dots, n\}}) \cup (\overline{\bigcup_{i=1}^n U_i})$,

$$x \in \overline{\bigcup_{i=1}^n U_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}$$

De donde, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in \overline{U_i}$. Por lo tanto, $x \in \bigcup\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}\}$. $\square$

Nuestro propósito ahora es demostrar que todo espacio paracompacto es un espacio normal (de hecho, un poco más adelante demostaremos que los espacios paracompactos son espacios colectivamente normales). Para ello, probaremos primeramente que los espacios paracompactos son espacios regulares.

2.2.5 PROPOSICIÓN. *Todo espacio paracompacto es un espacio regular.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$. Dado que X es un espacio T_2, para cada $y \in F$, existe $W_y \in \mathcal{T}(y, X)$ de tal manera que $x \notin \overline{W_y}$. Consideremos a la familia $\mathcal{U} = \{X \setminus F\} \cup \{W_y : y \in F\}$. Claramente $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X. Dado que X es paracompacto, existe $\mathcal{V}$ refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. Sea

$$O = \bigcup\{U \in \mathcal{V} : x \notin \overline{U}\}$$

Claramente, $O \in \mathcal{T}(X)$. Además, $F \subseteq O$. En efecto, sea $y \in F$. Sea $B \in \mathcal{V}$ tal que $y \in B$ (recuerde que $\bigcup \mathcal{V} = X$). Dado que $\mathcal{V}$ está inscrita en $\mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $B \subseteq W$. Obsérvese que $W \neq X \setminus F$ (pues

$y \in B \subseteq W$ y $y \in F$). Entonces existe $z \in F$ tal que $W = W_z$. Como $x \notin \overline{W_z}$, $x \notin \overline{B}$. Así, $B \in \{U \in \mathcal{V} : x \notin \overline{U}\}$. Por lo tanto, $y \in B \subseteq O$.

Ahora nótese que dado que $\mathcal{V}$ es localmente finita, $x \notin \overline{O}$ (ver el Lema 2.2.4). Sea $V = X \setminus \overline{O}$. Entonces $x \in V$, $F \subseteq O$ y $V \cap O = \emptyset$. Por lo tanto, X es un espacio regular. □

Utilizando el resultado anterior podemos ya demostrar que todo espacio paracompacto es un espacio normal.

2.2.6 Teorema. *Todo espacio paracompacto es normal.*

Demostración. Sean F_1, F_2 un conjuntos cerrados ajenos en X. Tenemos que encontrar una vecindad U de F_1 tal que $F_2 \cap \overline{U} = \emptyset$.

Para todo $x \in F_2$ sea U_x una vecindad abierta de x tal que $x \in U_x$ y $F_1 \cap \overline{U}_x = \emptyset$. La familia $\mathcal{U} = \{\, U_x : x \in F_2 \,\} \cup \{X \setminus F_2\}$ es una cubierta abierta de X. Sean $\mathcal{V}$ un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}_1 = \{\, V \in \mathcal{V} : V \cap F_2 \neq \emptyset \,\}$. Es claro que $F_2 \subseteq \bigcup \mathcal{V}_1$; ningun elemento de $\mathcal{V}_1$ está contenido en $X \setminus F_2$, de donde para todo $V \in \mathcal{V}_1$ existe $x \in F_2$ tal que $V \subseteq U_x$, y entonces $F_1 \cap \overline{V} = \emptyset$.

Sea $U = \bigcup \mathcal{V}_1$. El conjunto U es abierto y contiene a F_2; por el Lema 2.2.4, $\overline{U} = \bigcup \{\, \overline{U}_x : x \in F \,\}$, y $F_1 \cap \overline{U} = \emptyset$. □

Introduciremos enseguida la noción de familia σ-localmente finita y la noción de estrella.

2.2.7 Definición. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. $\mathcal{U}$ se dice *σ-localmente finita* si $\mathcal{U}$ puede ser expresada como $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ donde cada familia $\mathcal{U}_n$ es localmente finita.

2. Dado $A \subseteq X$, definimos la *estrella de A respecto a* $\mathcal{U}$ como el conjunto $\operatorname{st}(A, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset\}$. Si $A = \{x\}$ escribiremos $\operatorname{st}(x, \mathcal{U})$ en lugar de $\operatorname{st}(\{x\}, \mathcal{U})$.

A continuación presentamos la primera caracterización de espacios paracompactos.

2.2.8 Teorema. *Sea X un espacio regular. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es paracompacto;*

2. *cualquier cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-localmente finito;*

3. *cualquier cubierta abierta de X tiene un refinamiento localmente finito (no necesariamente abierto);*

4. *cualquier cubierta abierta de X tiene un refinamiento cerrado localmente finito.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Por hipótesis, existe $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ refinamiento abierto tal que cada $\mathcal{V}_n$ es una familia localmente finita. Sea $H_n = \bigcup \mathcal{V}_n$ (para cada $n \in \mathbb{N}$). Definamos $\mathcal{G}_1 = \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{G}_n = \{V \setminus \bigcup_{k<n} H_k : V \in \mathcal{V}_n\}$ (para cada $n \geqslant 2$). Sea $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$.

Afirmación. $\mathcal{G}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$.

En efecto. Sea $x \in X$. Como $\mathcal{V}$ cubre a X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \bigcup \mathcal{V}_m$. Sea $n = \min\{m \in \mathbb{N} : x \in \bigcup \mathcal{V}_m\}$. Si $n = 1$ entonces $x \in \bigcup \mathcal{V}_1 = \bigcup \mathcal{G}_1 \subseteq \bigcup \mathcal{G}$. Si $n \geqslant 2$ entonces $x \notin H_k = \bigcup \mathcal{V}_k$ para cada $k < n$ (por la definición de n). Como $x \in \bigcup \mathcal{V}_n$, existe $V \in \mathcal{V}_n$ tal que $x \in V$. Así, $x \in V \setminus \bigcup_{k<n} H_k \in \mathcal{G}_n$. De donde, $x \in \bigcup \mathcal{G}_n \subseteq \bigcup \mathcal{G}$. Por lo tanto, $X = \bigcup \mathcal{G}$. Notése que por construcción, $\mathcal{G}$ está inscrita en $\mathcal{V}$. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ refina a $\mathcal{U}$. $\square$

Comprobemos ahora que $\mathcal{G}$ es una familia localmente finita. Sea $x \in X$. Como $\mathcal{V}$ es cubierta de X, existe $m \in \mathbb{N}$ de tal manera que $x \in \bigcup \mathcal{V}_m = H_m$. Observe que $H_m \in \mathcal{T}(x, X)$ y que $H_m \cap G = \emptyset$ para todo $G \in \bigcup_{k>m} \mathcal{G}_k$. Dado que la unión finita de familias localmente finitas es de nuevo una familia localmente finita, $\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{V}_k$ es localmente finita. De donde, podemos elegir $W \in \mathcal{T}(x, X)$ de tal manera que $|\{V \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{V}_k : W \cap V \neq \emptyset\}| < \aleph_0$. Sea $\widetilde{W} = W \cap H_m$. Entonces $\widetilde{W} \in \mathcal{T}(x, X)$ y $\widetilde{W}$ solo puede intersectar a un número finito de elementos de la familia $\mathcal{G}$ (como $H_m \cap G = \emptyset$ para todo $G \in \bigcup_{k>m} \mathcal{G}_k$, $\widetilde{W}$ solo puede intersectar a elementos de la familia $\bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{G}_k$; pero por la elección de W, $\widetilde{W}$ sólo puede intersectar a un número finito de elementos de esta familia). Así, $\mathcal{G}$ es un refinamiento localmente finito de la cubierta $\mathcal{U}$

(3) $\Rightarrow$ (4). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Para cada $x \in X$, existe $U_x \in \mathcal{U}$ de tal manera que $x \in U_x$. Como X es T_3, para cada $x \in X$ existe $W_x \in \mathcal{T}(x, X)$ tal que $\overline{W_x} \subseteq U_x$. Entonces $\mathcal{V} = \{W_x : x \in X\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X que cubre a X y tal que la familia $\overline{\mathcal{V}} = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$ está inscrita en la cubierta $\mathcal{U}$. Por hipótesis, existe $\mathcal{W}$ refinamiento localmente finito de la cubierta $\mathcal{V}$. Así, la familia $\overline{\mathcal{W}} = \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ es un refinamiento cerrado y localmente finito de $\mathcal{U}$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{H}$ un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$. Para cada $x \in X$, fijemos $V_x \in \mathcal{T}(x, X)$ tal que $|\{H \in \mathcal{H} : H \cap V_x \neq \emptyset\}| < \aleph_0$ (tales V_x existen debido a que $\mathcal{H}$ es localmente finito). Sea $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$. Entonces $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de X. Por hipótesis, existe $\mathcal{P}$ refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{V}$. Fijemos ahora, para cada $H \in \mathcal{H}$, $U(H) \in \mathcal{U}$ de tal manera que $H \subseteq U(H)$. Definamos

$$G(H) = \operatorname{int}(\operatorname{st}(H, \mathcal{P})) \cap U(H)$$

Sea $\mathcal{G} = \{G(H) : H \in \mathcal{H}\}$. Entonces $\mathcal{G}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. En efecto, primeramente obsérvese que $H \subseteq X \setminus \bigcup\{P \in \mathcal{P} : P \cap H = \emptyset\} \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{st}(H, \mathcal{P}))$ (para cada $H \in \mathcal{H}$); esto permite argumentar que la familia $\mathcal{G}$ es una cubierta de X (evidentemente los elementos de $\mathcal{G}$ son abiertos de X; 2.4 es aplicable en este momento). Como cada $G(H) \subseteq U(H) \in \mathcal{U}$, $\mathcal{G}$ refina a $\mathcal{U}$. Así, resta demostrar que $\mathcal{G}$ es localmente finita.

Para demostrar esto último, bastará probar que la familia

$$\mathcal{S} = \{\operatorname{st}(H, \mathcal{P}) : H \in \mathcal{H}\}$$

es localmente finita (obsérvese que este hecho es suficiente pues cada elemento de la familia $\mathcal{G}$ está contenido en un elemento de la familia $\mathcal{S}$.)

Sea $x \in X$. Como $\mathcal{P}$ es una familia localmente finita, existe $W \in \mathcal{T}(x, X)$ tal que W intersecta únicamente un número finito de elementos de $\mathcal{P}$. Pero cada $P \in \mathcal{P}$ intersecta únicamente un número finito de elementos de $\mathcal{H}$. Así, W intersecta únicamente un número finito de elementos de $\mathcal{S}$. $\square$

Utilizando el inciso (2) del anterior teorema podemos demostrar que todo espacio regular Lindelöf es un espacio paracompacto. Recordemos que un espacio topológico X es *Lindelöf* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta a lo más numerable.

2.2.9 COROLARIO (K. Morita). *Cualquier espacio regular Lindelöf es un espacio paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta. Como X es Lindelöf, existe

$$\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_n, \ldots\}$$

subcubierta numerable de $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{V}_k = \{V_k\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Claramente cada familia $\mathcal{V}_k$ es localmente finita y además $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$. Así, $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto σ-localmente finito de $\mathcal{U}$. Por la proposición anterior (inciso (2)), X es paracompacto. □

Si $D(\mathfrak{c})$ es el espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$, entonces $D(\mathfrak{c})$ es un espacio paracompacto que no es Lindelöf. Por ello podemos concluir que , el recíproco al resultado de K. Morita no es cierto. Por otro lado, es conocida la existencia de espacios no regulares Lindelöf que no son paracompactos; por lo cual, la hipótesis de regularidad en el anterior resultado de K. Morita no puede ser omitida. El lector puede consultar la obra de L. A. Steen y J. A. Seebach para hallar un ejemplo de un espacio de Lindelöf no regular que no es paracompacto ([6, 61, pag.82]).

Una pregunta natural a raíz de la Proposición 2.2.9 es bajo qué condiciones un espacio paracompacto es Lindelöf. La siguiente proposición muestra que para espacios regulares con la propiedad de Souslin, estas dos propiedades topológicas coinciden.

Recordemos que un espacio topológico X tiene la *propiedad de Souslin* si toda familia de abiertos no vacíos y ajenos dos a dos de X es a lo más numerable.

2.2.10 PROPOSICIÓN. *Si X es un espacio paracompacto con la propiedad de Souslin, entonces X es Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Dado que X es paracompacto, podemos elegir un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Bastará demostrar que $\mathcal{V}$ es a lo más numerable.

Sea $\mathfrak{C}$ la familia de todas las subcolecciones ajenas $\mathcal{G}$ de $\mathcal{T}^*(X)$ tales que:

$$\forall\, G \in \mathcal{G} : |\{V \in \mathcal{V} : V \cap G \neq \emptyset\}| < \aleph_0$$

Observe que $\mathfrak{C} \neq \emptyset$. En efecto: sean $x_1, x_2 \in X$ distintos (evidentemente podemos suponer que $|X| \geqslant 2$). Dado que X es T_2, existen abiertos no vacíos, y ajenos, U y V tales que $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$. Sean W_i vecindades abiertas de x_i (para $i = 1, 2$) tales que: $|\{V \in \mathcal{V} : V \cap W_i \neq \emptyset| < \aleph_0$. Entonces $\mathcal{G} = \{W_1 \cap U, W_2 \cap V\} \in \mathfrak{C}$. Consideremos ahora al conjunto parcialmente ordenado $(\mathfrak{C}, \subseteq)$. No es difícil mostrar que toda cadena en $(\mathfrak{C}, \subseteq)$ tiene una cota superior en $(\mathfrak{C}, \subseteq)$. Por el lema de Zorn, podemos elegir un elemento maximal $\mathcal{F}$ en $(\mathfrak{C}, \subseteq)$. Dado que X tiene la propiedad de Souslin, la cardinalidad de $\mathcal{F}$ no puede exceder a $\aleph_0$. Sea $\mathcal{F} = \{H_1, \ldots, H_n, \ldots\}$ una enumeración para $\mathcal{F}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{V}_n = \{W \in \mathcal{V} : W \cap H_n \neq \emptyset\}$. Entonces

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$$

En efecto, sea $W \in \mathcal{V}$ cualquiera. Si $W \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$, entonces $W \subseteq \operatorname{int}(X \setminus \bigcup H_n)$. Dado que $W \neq \emptyset$, podemos elegir $x_0 \in W$. Sea V un abierto que contiene a x_0 y tal que

$$|\{A \in \mathcal{V} : A \cap V \neq \emptyset\}| < \aleph_0$$

Entonces la familia $\mathcal{F} \cup \{V \cap W\}$ es un elemento de $(\mathfrak{C}, \subseteq)$ que contiene propiamente a $\mathcal{F}$, lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$. De donde, $\mathcal{V}$ es a lo más numerable. $\square$

Tenemos el siguiente resultado como un corolario.

2.2.11 Corolario. *Todo espacio paracompacto separable es Lindelöf.*

Demostración. Es suficiente observar que todo espacio separable tiene la propiedad de Souslin. $\square$

2.3 Espacios Colectivamente Normales

Hemos ya demostrado que todo espacio paracompacto es un espacio normal. En este apartado demostraremos que los espacios paracompactos satisfacen un axioma de separación aún más fuerte: ellos son espacios colectivamente normales.

2.3.1 Definición. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. Se dice que $\mathcal{U}$ es *discreta* si para cada $x \in X$, existe $W \in \mathcal{T}(x, X)$ tal que
$$|\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\}| \leqslant 1.$$
2. X es un espacio *colectivamente normal* si $X \in T_1$ y para cada familia discreta $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos cerrados de X, existe una familia $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos abiertos ajenos dos a dos de X tal que $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ para cada $\alpha \in A$.

Todo espacio colectivamente normal es un espacio normal. En efecto, simplemente obsérvese que si X es un espacio topológico y $F_1, F_2 \subseteq X$ son cerrados ajenos entonces la familia $\{F_1, F_2\}$ es una familia discreta de cerrados de X (recuerde que los espacios normales son T_1).

A continuación introducimos la noción de cubierta acoginada.

2.3.2 Definición. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathcal{V}$ está *acoginada* en $\mathcal{U}$ si existe una función $T : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ tal que:
$$\forall \;\; \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} \;:\;\; \overline{\bigcup\{W : W \in \mathcal{W}\}} \subseteq \bigcup\{T(W) : W \in \mathcal{W}\}$$

El siguiente esquema muestra las relaciones entre las distintas nociones que hemos establecido referentes a familias de subconjuntos de un espacio topológico X.

Discreta $\Rightarrow$ Localmente finita $\Rightarrow$ Conservativa $\Rightarrow$ Acoginada

En este esquema la última "implicación" significa que si $\mathcal{U}$ es una familia conservativa entonces $\mathcal{U}$ está acoginada en $\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}$. En lo que sigue el concepto de refinamiento preciso será importante.

2.3.3 DEFINICIÓN. Dadas $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ y $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ en $\mathcal{P}(X)$, diremos que $\mathcal{V}$ es un *refinamiento preciso* de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ tal que $V_\alpha \subseteq U_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$.

2.3.4 LEMA. *Sea X un espacio topológico. Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una cubierta de X que tiene un refinamiento acoginado, entonces $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento acoginado y preciso.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento acoginado de $\mathcal{U}$, via la función $T : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$. Definamos, para cada $\alpha \in \Lambda$,

$$W_\alpha = \bigcup\{V \in \mathcal{V} : T(V) = U_\alpha\}$$

Entonces $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es un refinamiento acoginado y preciso de $\mathcal{U}$. En efecto, dado que $\mathcal{V}$ está acoginada en $\mathcal{U}$,

$$\begin{aligned} W_\alpha &= \bigcup\{V \in \mathcal{V} : T(V) = U_\alpha\} \\ &\subseteq \overline{\bigcup}\{V \in \mathcal{V} : T(V) = U_\alpha\} \\ &\subseteq \bigcup\{T(V) : V \in \mathcal{V} \text{y} U_\alpha = T(V)\} \\ &= U_\alpha \end{aligned}$$

para cada $\alpha \in \Lambda$. Así, $\mathcal{W}$ es un refinamiento preciso de $\mathcal{U}$ (es un buen ejercicio para el lector comprobar que en efecto la familia $\mathcal{W}$ cubre a X).

Veamos ahora que $\mathcal{W}$ está acolchonada en $\mathcal{U}$. Sea $f : \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ la función dada por: $f(W_\alpha) = U_\alpha$. Sea $\Lambda' \subseteq \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup\{W_\alpha : \alpha \in \Lambda'\}} &= \overline{\bigcup\{V : V \in \mathcal{V}, T(V) = U_\alpha, \alpha \in \Lambda'\}} \\ &\subseteq \bigcup\{T(V) : V \in \mathcal{V}, T(V) = U_\alpha, \alpha \in \Lambda'\} \\ &= \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda'\} \\ &= \bigcup\{f(W_\alpha) : \alpha \in \Lambda'\} \end{aligned}$$

□

El anterior lema permite "modificar" la definición de familias acoginadas para el caso de familias indexadas.

2.3.5 DEFINICIÓN. Sean $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ y $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ en $\mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathcal{V}$ está acoginada en $\mathcal{U}$ si

$$\forall \ \Lambda' \subseteq \Lambda \quad : \quad \overline{\bigcup\{V_\alpha : \alpha \in \Lambda'\}} \subseteq \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda'\}$$

Como un corolario a la siguiente proposición obtendremos que los espacios paracompactos son espacios colectivamente normales.

2.3.6 PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio T_1. Si cada cubierta abierta de un espacio X tiene un refinamiento acoginado entonces X es un espacio colectivamente normal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia discreta de subespacios cerrados de X. Definamos, para cada $\alpha \in \Lambda$,

$$U_\alpha = X \setminus \bigcup\{F_\gamma : \gamma \neq \alpha\}$$

Entonces $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una cubierta abierta de X. Observe que $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$ y que $F_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ siempre que $\alpha \neq \beta$ (el primer hecho puede ser constatado facilmente si se comprueba antes que los elementos de toda familia discreta son ajenos dos a dos; para la segunda afirmación, observe que si $\alpha \neq \beta$ entonces $F_\alpha \subseteq \bigcup_{\gamma\neq\beta} F_\gamma$). Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ un refinamiento acoginado y preciso de $\mathcal{U}$. Consideremos ahora a la familia $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, donde $W_\beta = X \setminus \overline{\bigcup\{V_\gamma : \gamma \neq \beta\}}$. Entonces $\mathcal{W}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X ajenos dos a dos tales que: $F_\alpha \subseteq W_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$. En efecto, sean $\alpha \neq \beta$ entonces $W_\alpha \cap W_\beta = (X \setminus \overline{\bigcup\{V_\gamma : \gamma \neq \alpha\}}) \bigcap (X \setminus \overline{\bigcup\{V_\gamma : \gamma \neq \beta\}}) = X \setminus (\overline{\bigcup\{V_\gamma : \gamma \neq \alpha\}} \bigcup \overline{\bigcup\{V_\gamma : \gamma \neq \alpha\}}) = X \setminus \overline{X} = \emptyset$. Ahora, si $F_\alpha \bigcap (X \setminus W_\alpha) \neq \emptyset$, entonces $F_\alpha \bigcap (\overline{\bigcup\{V_\gamma : \gamma \neq \alpha\}}) \neq \emptyset$. Pero como $\mathcal{V}$ está acolchada en $\mathcal{U}$, $F_\alpha \bigcap (\bigcup\{U_\gamma : \gamma \neq \alpha\}) \neq \emptyset$. De donde, existe $\gamma \neq \alpha$ tal que $F_\alpha \cap U_\gamma \neq \emptyset$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $F_\alpha \subseteq W_\alpha$ para cada α. □

2.3.7 COROLARIO. *Todo espacio paracompacto es un espacio colectivamente normal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio paracompacto. Según la proposición anterior, bastará demostrar que toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento acoginado.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{U}$. Para cada $V \in \mathcal{V}$, fijemos $U(V) \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U(V)$. Sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ la función dada por $T(V) = U(V)$. Entonces $\mathcal{V}$ está acolchonada en $\mathcal{U}$. En efecto, si $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ entonces,

$$\begin{aligned}\overline{\bigcup\{W : W \in \mathcal{W}\}} &= \bigcup\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\} \\ &\subseteq \bigcup\{U(W) : W \in \mathcal{W}\} \\ &= \bigcup\{T(W) : W \in \mathcal{W}\}\end{aligned}$$

□

2.3.8 Observación. Algunos autores definen a los espacios paracompactos como aquellos espacios que satisfacen sólo la propiedad de cubierta: *cada cubierta abierta tiene un refinamiento abierto localmente finito*, sin exigir que sus "espacios paracompactos" sean Hausdorff. Con esa definición, no necesariamente un espacio paracompacto sería un espacio colectivamente normal. De hecho, existen ejemplos de espacios T_1 que satisfacen la propiedad de cubierta para ser paracompactos, pero que no son ni siquiera espacios de Hausdorff. El ejemplo clásico de esto es el llamado Espacio de Fort Modificado.

2.3.9 Ejemplo (Espacio de Fort Modificado). Sean $x_1, x_2 \notin \mathbb{N}$ y definamos $X = \mathbb{N} \bigcup \{x_1, x_2\}$. La topología de X es establecida declarando bases locales para cada uno de los puntos de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{n\} \in \mathcal{T}^*(X)$. Ahora, $A \subseteq X$ es vecindad abierta de x_i si $x_i \in A$ y $|\mathbb{N} \setminus A| < \aleph_0$ (para $i = 1, 2$). No es difícil demostrar que de cada cubierta abierta de X se puede extraer una subcubierta finita. Así, el espacio satisface que toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto localmente finito. El espacio es T_1 pero los puntos x_1 y x_2 no pueden ser separados con abiertos ajenos.

Otro hecho interesante es el siguiente resultado que nos permite obtener una caracterización muy conocida de los espacios colectivamente normales.

2.3.10 Proposición. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para cualquier espacio normal X.*

1. *X es colectivamente normal;*

2. *para cada $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ familia discreta de subconjuntos cerrados de X, existe una familia discreta $\{W_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $F_\alpha \subseteq W_\alpha$, para cada $\alpha \in A$.*

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2). Sea $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia discreta de subconjuntos cerrados de X. Dado que X es colectivamente normal, existe $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ familia ajena de subconjuntos abiertos de X tal que: $F_\alpha \subseteq U_\alpha$, para cada $\alpha \in A$. Sean $F = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$ y $G = X \setminus \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Entonces F y G son cerrados ajenos de X. Como X es un espacio normal, existen $U, V \in \mathcal{T}^*(X)$ ajenos tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.

Sean $W_\alpha = U_\alpha \cap U$, para cada $\alpha \in A$. Entonces $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia discreta de subconjuntos abiertos de X tal que: $F_\alpha \subseteq W_\alpha$, para cada $\alpha \in A$. En efecto, $F_\alpha \subseteq F \subseteq U$ y $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ implican que $F_\alpha \subseteq W_\alpha$ (para cada $\alpha \in A$). Comprobemos que $\mathcal{W}$ es discreta. Sea $x \in X$. Si $x \in U_\alpha$, para algún $\alpha \in A$, entonces U_α es una vecindad abierta de x que puede intersectar a lo más a un elemento de la familia $\mathcal{W}$, a saber, a W_α (pues $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, para cada $\beta \neq \alpha$). Ahora, si $x \notin U_\alpha$ para todo $\alpha \in A$ entonces $x \in G$. De donde, $x \in V$. Así, V es una vecindad abierta de x que no intersecta a elemento alguno de la familia $\mathcal{W}$ (pues $V \cap U = \emptyset$). Por lo tanto, $\mathcal{W}$ es una familia discreta.

(2) $\Rightarrow$ (1). Simplemente obsérvese que toda familia discreta es una familia *ajena* ($\equiv$ todos sus elementos son ajenos dos a dos). $\square$

2.3.11 Observación. En particular, en la definición de espacio colectivamente normal (ver Definición 2.3.1) la frase *"existe una familia ajena $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos abiertos"* puede ser sustituida por la frase *" existe una familia discreta $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos abiertos"*.

2.4 Otras caracterizaciones

Hemos visto ya que la propiedad de que cada cubierta abierta de un espacio X tenga un refinamiento acoginado es suficiente para implicar que el espacio X sea colectivamente normal. De hecho, como veremos un poco mas adelante, esta propiedad es equivalente a la paracompacidad. El siguiente lema técnico enuncia dos propiedades de familias conservativas.

2.4.1 LEMA. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia conservativa.*

1. *Si $\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ entonces $\overline{\mathcal{F}}$ es una familia conservativa;*

2. *Si $\mathcal{F}$ consta de subespacios cerrados de X y $A \subseteq X$ es cerrado entonces la familia $\mathcal{F}_A = \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ es una familia conservativa en A.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $\mathcal{G} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$. Debemos demostrar que $\overline{\cup\{G : G \in \mathcal{G}\}} = \cup\{\overline{G} : G \in \mathcal{G}\}$. Pero es fácil notar para toda $G \in \mathcal{G}$ se tiene que

$$G \subseteq \cup\{G : G \in \mathcal{G}\} \subseteq \overline{\cup\{G : G \in \mathcal{G}\}}.$$

Por ello se tiene que $\overline{G} \subseteq \overline{\cup\{G : G \in \mathcal{G}\}}$ para toda $G \in \mathcal{G}$. En consecuencia, $\cup\{\overline{G} : G \in \mathcal{G}\} \subseteq \overline{\cup\{G : G \in \mathcal{G}\}}$.

Así que bastará demostrar que

$$\overline{\cup\{G : G \in \mathcal{G}\}} \subseteq \cup\{\overline{G} : G \in \mathcal{G}\}.$$

Note que para probar esto último bastará demostrar que el conjunto $\cup\{\overline{G} : G \in \mathcal{G}\}$ es un subconjunto cerrado de X que contiene a la unión $\cup\{G : G \in \mathcal{G}\}$. Claramente se tiene que $\cup\{G : G \in \mathcal{G}\} \subseteq \cup\{\overline{G} : G \in \mathcal{G}\}$; así que resta demostrar que $\cup\{\overline{G} : G \in \mathcal{G}\}$ es cerrado en X.

Para este último propósito, note que podemos suponer que existe una colección $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{G} = \{\overline{H} : H \in \mathcal{H}\}$. Note ahora que como $\mathcal{F}$ es conservativa y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ tenemos que

$$\overline{\cup\{H : H \in \mathcal{H}\}} = \cup\{\overline{H} : H \in \mathcal{H}\}.$$

De esta manera, $\cup\{\overline{H} : H \in \mathcal{H}\}$ es un conjunto cerrado de X. Pero entonces $\cup\{\overline{G} : G \in \mathcal{G}\} = \cup\{\overline{\overline{H}} : H \in \mathcal{H}\} = \cup\{\overline{H} : H \in \mathcal{H}\}$ es cerrado en X.

2. Sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_A$. Debemos demostrar que

$$\mathrm{cl}_A(\cup\{G : G \in \mathcal{G}\}) = \cup\{\mathrm{cl}_A(G) : G \in \mathcal{G}\}.$$

De nuevo es suficiente demostrar que

$$\mathrm{cl}_A(\cup\{G : G \in \mathcal{G}\}) \subseteq \cup\{\mathrm{cl}_A(G) : G \in \mathcal{G}\}$$

(vea el argumento dado en el inciso anterior).

Para probar esto último será suficiente demostrar que $\cup\{\mathrm{cl}_A(G) : G \in \mathcal{G}\}$ es un subconjunto cerrado de A que contiene al conjunto $\cup\{G : G \in \mathcal{G}\}$. El que $\cup\{G : G \in \mathcal{G}\}$ esté contenido en $\cup\{\mathrm{cl}_A(G) : G \in \mathcal{G}\}$ es sencillo de notar, asi que demostraremos que este último conjunto es un subconjunto cerrado de A.

Para ello note que como $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_A$ podemos suponer que existe una colección $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ de tal manera que $\mathcal{G} = \{H \cap A : H \in \mathcal{H}\}$. Como, para todo subconjunto C de X se tiene que $\mathrm{cl}_A(C \cap A) = \mathrm{cl}_X(C) \cap A$, tenemos que $\cup\{\mathrm{cl}_A(G) : G \in \mathcal{G}\} = \cup\{\mathrm{cl}_X(G) \cap A : G \in \mathcal{G}\} = \cup\{\mathrm{cl}_X(H \cap A) \cap A : H \in \mathcal{H}\} = \cup\{(H \cap A) \cap A : H \in \mathcal{H}\} = \cup\{H : H \in \mathcal{H}\} \cap A$ (recuerde que todos los elementos de $\mathcal{F}$, y A mismo, son cerrados en X) y que $\cup\{H : H \in \mathcal{H}\}$ es un subconjunto cerrado de X porque siendo $\mathcal{F}$ una familia conservativa y siendo $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$, tenemos que $\cup\{H : H \in \mathcal{H}\} = \mathrm{cl}_X(\cup\{H : H \in \mathcal{H}\})$. Por ello, $\cup\{\mathrm{cl}_A(G) : G \in \mathcal{G}\} = \cup\{H : H \in \mathcal{H}\} \cap A = \mathrm{cl}_X(\cup\{H : H \in \mathcal{H}\}) \cap A$ es un subconjunto cerrado de A. $\square$

2.4.2 DEFINICIÓN. Diremos que una familia $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es σ-discreta (respectivamente, σ-conservativa, σ-acoginada) si $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ donde cada familia $\mathcal{V}_n$ es discreta (respectivamente, conservativa, acoginada).

El siguiente teorema nos porporciona otras importantes caracterizaciones para los espacios paracompactos.

2.4.3 Teorema. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para cualquier espacio X regular:*

1. X es paracompacto;

2. *cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-conservativo;*

3. *cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento conservativo;*

4. *cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento cerrado conservativo;*

5. *cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-acoginado;*

6. *cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento acoginado.*

Demostración. Mostraremos el teorema demostrando la siguiente serie de implicaciones:

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6) \Rightarrow (1) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6).$$

(1) $\Rightarrow$ (2). Sabemos que en un espacio paracompacto, cada cubierta abierta tiene un refinamiento abierto localmente finito. Evidentemente, tal refinamiento es σ-conservativo.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Dado que X es regular, podemos elegir una cubierta abierta $\mathcal{V}$ de tal manera que la familia $\overline{\mathcal{V}} = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$ refina a $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n$ un refinamiento abierto de $\mathcal{V}$ tal que cada $\mathcal{W}_n$ es una familia conservativa. Sean $H_m = \bigcup \mathcal{W}_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Definamos $\mathcal{G}_n = \{\overline{W} \setminus \bigcup_{k<n} H_k : W \in \mathcal{W}_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$. Entonces $\mathcal{G}$ es un refinamiento cerrado conservativo de $\mathcal{U}$. En efecto, no es dificil demostrar que $\mathcal{G}$ está inscrita en $\mathcal{U}$ y que es una cubierta de subconjuntos cerrados de X. Veamos que es conservativa.

Sean $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ y $x \in \overline{\bigcup\{H : H \in \mathcal{H}\}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{H}_n = \{H \in \mathcal{H} : H \in \mathcal{G}_n\}$. Claramente, $\mathcal{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$. Como $\mathcal{W}$ cubre a X, existe $m \in \mathbb{N}$ de tal manera que $x \in \bigcup \mathcal{W}_m = H_m$. Entonces $H_m \in \mathcal{T}(x, X)$ es tal que: $H_m \cap G = \emptyset$ para cada $G \in \mathcal{G}_l$ y cada $l > m$. Entonces $x \notin \overline{\bigcup\{H : H \in \bigcup_{l>m} \mathcal{H}_l\}}$. De donde, $x \in \overline{\bigcup\{H : H \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i\}}$.

Pero $\overline{\bigcup\{H : H \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i\}} = \bigcup_{i=1}^{m}(\overline{\bigcup\{H : H \in \mathcal{H}_i\}})$. Entonces, existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in \overline{\bigcup\{H : H \in \mathcal{H}_i\}}$. Ahora obsérvese que como cada familia $\mathcal{G}_n$ es conservativa (aplique el Lema 2.4.1) y $\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{G}_i$, podemos elegir $H \in \mathcal{H}_i$ de tal manera que $x \in \overline{H}$. Por lo tanto, $\overline{\bigcup\{H : H \in \mathcal{H}\}} \subseteq \bigcup\{\overline{H} : H \in \mathcal{H}\}$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta. Por ser X regular, existe una cubierta abierta $\mathcal{V}$ de X tal que, para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ de tal manera que $V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Sea $\mathcal{W}$ un refinamiento conservativo de $\mathcal{V}$. Entonces la familia $\overline{\mathcal{W}} = \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ es un refinamiento cerrado conservativo de $\mathcal{U}$. En efecto, como $\mathcal{W}$ es refinamiento de $\mathcal{V}$, $X = \bigcup \mathcal{W} \subseteq \bigcup \overline{\mathcal{W}}$. Además, para cada $W \in \mathcal{W}$, existe $V \in \mathcal{V}$ de tal forma que $W \subseteq V$. Por la elección de la cubierta $\mathcal{V}$, cada $V \in \mathcal{V}$ está contenido junto con su cerradura en algún elemento de $\mathcal{U}$. De donde, para cada $W \in \mathcal{W}$, existe $U \in \mathcal{U}$ de tal forma que $\overline{W} \subseteq U$, es decir, $\overline{\mathcal{W}}$ está inscrita en $\mathcal{U}$. Ahora veamos que $\overline{\mathcal{W}}$ es conservativa.

Sean $\mathcal{P} \subseteq \overline{\mathcal{W}}$. Dado que $\mathcal{W}$ es conservativa,

$$\bigcup\{P : P \in \mathcal{P}\} = \bigcup\{\overline{W} : \overline{W} \in \mathcal{P}\} = \overline{\bigcup\{W : \overline{W} \in \mathcal{P}\}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\overline{\bigcup\{P : P \in \mathcal{P}\}} &= \overline{\overline{\bigcup\{W : \overline{W} \in \mathcal{P}\}}} \\
&= \overline{\bigcup\{W : \overline{W} \in \mathcal{P}\}} \\
&= \bigcup\{\overline{W} : \overline{W} \in \mathcal{P}\} \\
&= \bigcup\{P : P \in \mathcal{P}\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{\mathcal{W}}$ es conservativa.

(4) $\Rightarrow$ (6). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento cerrado y conservativo de $\mathcal{U}$. Para cada $V \in \mathcal{V}$, fijemos $U(V) \in \mathcal{U}$ de tal manera que $V \subseteq U(V)$. Sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ dada por: $T(V) = U(V)$ para

$V \in \mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{V}$ está acolchonada en $\mathcal{U}$. En efecto, si $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ entonces

$$\begin{aligned}\overline{\bigcup\{W : W \in \mathcal{W}\}} &= \bigcup\{W : W \in \mathcal{W}\} \\ &\subseteq \bigcup\{U(W) : W \in \mathcal{W}\} \\ &= \bigcup\{T(W) : W \in \mathcal{W}\}\end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow$ (5). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de X, y sea $\mathcal{V}$ cubierta abierta de X tal que $\overline{V} = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$ refina a $\mathcal{U}$ (utilice la regularidad de X para mostrar la existencia de $\mathcal{V}$). Como X es paracompacto, podemos elegir $\mathcal{W}$ refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{V}$. Comprobemos que $\mathcal{W}$ está acolchonada en $\mathcal{U}$. Para tal propósito, fijemos para cada $V \in \mathcal{V}$ un elemento $U(V) \in \mathcal{U}$ de tal forma que $\overline{V} \subseteq U(V)$. Dado que $\mathcal{W}$ refina a $\mathcal{V}$, para cada $W \in \mathcal{W}$, podemos elegir, y fijar, un elemento $V(W) \in \mathcal{V}$ de tal manera que $W \subseteq V(W)$. Consideremos ahora a la función $T : \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ dada por: $T(W) = U(V(W))$ $(W \in \mathcal{W})$. Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{W}$ arbitraria, entonces

$$\begin{aligned}\overline{\bigcup\{H : H \in \mathcal{H}\}} &= \bigcup\{\overline{H} : H \in \mathcal{H}\} \\ &\subseteq \bigcup\{U(V(H)) : H \in \mathcal{H}\} \\ &= \bigcup\{T(H) : H \in \mathcal{H}\}\end{aligned}$$

Así, $\mathcal{W}$ es un refinamiento abierto acoginado de $\mathcal{U}$; por lo cual, refinamiento abierto σ-acoginado de $\mathcal{U}$.

(5) $\Rightarrow$ (6). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Elijamos un refinamiento abierto $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ de $\mathcal{U}$ tal que cada familia $\mathcal{V}_n$ está acoginada en $\mathcal{U}$. Entonces existen funciones $T_n : \mathcal{V}_n \to \mathcal{U}$ (para cada $n \in \mathbb{N}$) que satisfacen, para $\mathcal{V}_n$ y $\mathcal{U}$, la condición dada en la Definición 2.3.2.

Sea $\mathcal{W}_1 = \mathcal{V}_1$, $\mathcal{W}_n = \mathcal{V}_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{V}_i$ $(n \geqslant 2)$, y sea $\mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n$. Claramente, $\mathcal{W} = \mathcal{V}$. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \bigcup \mathcal{W}_n$. Definamos $\mathcal{G}_n = \{W \setminus \bigcup_{k<n} H_k : W \in \mathcal{W}_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$. Entonces $\mathcal{G}$ es un refinamiento acoginado de $\mathcal{U}$. En efecto, no es dificil demostrar que $\mathcal{G}$ cubre al espacio X. Sea $T : \mathcal{G} \to \mathcal{U}$ la función dada por: $T(G) = T_n(W)$,

donde W es tal que $G = W \setminus \bigcup_{k<n} \mathcal{H}_k$ y $W \in \mathcal{W}_n$. Comprobemos que T satisface todos los requerimientos deseados.

Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ arbitraria. Sean $H_i = \{H \in \mathcal{H} : H \in \mathcal{G}_i\}$ $(i \in \mathbb{N})$. Entonces $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$.

Sea $x \in \overline{\bigcup\{H : H \in \mathcal{H}\}}$. Dado que $\mathcal{W}$ cubre a X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \bigcup \mathcal{W}_m = H_m$. Dado que $H_m \cap G = \emptyset$ para cada $G \in \bigcup_{l>m} \mathcal{G}_l$, $x \notin \overline{\bigcup\{H : H \in \bigcup_{l>m} \mathcal{H}_l\}}$. De donde, $x \in \overline{\bigcup\{H : H \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i\}}$. Por lo cual, existe $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $x \in \overline{\bigcup\{H : H \in \mathcal{H}_j\}}$. Ahora, sea $\mathcal{D} = \{W \in \mathcal{W}_j : W \setminus \bigcup_{k<j} H_k \in \mathcal{H}_j\}$. Entonces $\overline{\bigcup\{H : H \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i\}} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{D}}$ (pues $\bigcup\{H : H \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i\} \subseteq \bigcup \mathcal{D}$). Dado que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{W}_j \subseteq V_j$, $\overline{\mathcal{D}} \subseteq \bigcup\{T_j(W) : W \in \mathcal{D}\}$. Entonces existe $W \in \mathcal{D}$ tal que $x \in T_j(W)$. Por lo tanto, existe $H = W \setminus \bigcup_{k<j} H_k \in \mathcal{H}1_j$ tal que $x \in T(H) = T_j(W)$. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ está acoginada en $\mathcal{U}$.

(6) $\Rightarrow$ (1). Antes de iniciar la demostración fijemos algunas ideas. Primeramente, la propiedad dada en (6) junto con la regularidad de X implican que el espacio X es un espacio colectivamente normal (veáse la Proposición 2.3.6). La idea de la demostración consistirá en mostrar que *cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-discreto*; aplicando el Teorema 2.3.6 podremos concluir que X es un espacio paracompacto.

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una cubierta abierta de X y sea $<$ un buen orden para Λ.

Afirmación 1. Existe una sucesión $\{\mathcal{U}(1), \mathcal{U}(2), \ldots, \mathcal{U}(n), \ldots\}$ de cubiertas abiertas de X tal que: $\mathcal{U}(n+1)$ refina a $\mathcal{U}(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En efecto: Para cada $\alpha \in \Lambda$, definamos $U(\alpha, 1) = U_\alpha$; y sea $\mathcal{U}(1) = \{U(\alpha, 1) : \alpha \in \Lambda\} = \mathcal{U}$. Por hipótesis, existe $\mathcal{C}(1) = \{C(\alpha, 1) : \alpha \in \Lambda\}$ refinamiento acoginado y preciso de $\mathcal{U}(1)$. Ahora, para cada $\alpha \in \Lambda$, definamos $U(\alpha, 2) = U(\alpha, 1) \setminus \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} C(\beta, 1)}$. Obsérvese que $\mathcal{U}(2) = \{U(\alpha, 2) : \alpha \in \Lambda\}$ es una cubierta abierta de X (evidentemente, cada elemento de $\mathcal{U}(2)$ es abierto). En efecto, sea $x \in X$ y sea $\beta = \min\{\gamma \in \Lambda : x \in U(\gamma, 1)\}$. Dado que $\overline{\bigcup_{\gamma<\beta} C(\gamma, 1)} \subseteq \bigcup_{\gamma<\beta} U(\gamma, 1)$, necesariamente $x \notin \overline{\bigcup_{\gamma<\beta} C(\gamma, 1)}$ (de lo contrario, existiría $\gamma < \beta$ tal que $x \in \mathcal{U}(\gamma, 1)$; lo cual es imposible). Entonces $x \in U(\beta, 2) = U(\beta, 1) \setminus \overline{\bigcup_{\gamma<\beta} C(\gamma, 1)}$.

Dado que $\mathcal{U}(2)$ es cubierta abierta de X, existe $\mathcal{C}(2) = \{C(\alpha, 2) : \alpha \in \Lambda\}$ refinamiento acoginado y preciso de $\mathcal{U}(2)$.

Definamos, para cada $\alpha \in \Lambda$, $U(\alpha, 3) = U(\alpha, 2) \setminus \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} C(\alpha, 2)}$. Sea

$$\mathcal{U}(3) = \{U(\alpha, 3) : \alpha \in \Lambda\}$$

No es dificil verificar que $\mathcal{U}(3)$ es una cubierta abierta de X. Por hipótesis, podemos elegir un refinamiento acoginado y preciso $\mathcal{C}(3) = \{C(\alpha, 3) : \alpha \in \Lambda\}$ de $\mathcal{U}(3)$.

Supongamos que tenemos construidas $\mathcal{U}(1), \mathcal{U}(2), \dots \mathcal{U}(n)$ cubiertas abiertas de X y refinamientos acoginados y precisos $\mathcal{C}(1), \mathcal{C}(2), \dots, \mathcal{C}(n)$ de cada una de ellas. Definamos $U(\alpha, n+1) = U(\alpha, n) \setminus \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} C(\alpha, n)}$, para cada $\alpha \in \Lambda$. Entonces

$$\mathcal{U}(n+1) = \{U(\alpha, n+1) : \alpha \in \Lambda\}$$

es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{C}(n+1) = \{C(\alpha, n+1) : \alpha \in \Lambda\}$ un refinamiento acoginado y preciso de $\mathcal{U}(n+1)$. Así, de manera inductiva hemos construido la sucesión de cubiertas deseada. ⊠

Afirmación 2. Dado $x \in X$, definimos $\delta(x, n) = \min\{\alpha \in \Lambda : x \in C(\alpha, n)\}$. Entonces

$$\forall\ x \in X \quad : \quad \delta(x, 1) \geqslant \delta(x, 2) \geqslant \cdots \geqslant \delta(x, n) \geqslant \delta(x, n+1) \geqslant \cdots$$

En efecto: Sea $n \in \mathbb{N}$. Supóngase que $\delta(x, n) < \delta(x, n+1) = \beta$. Por definición de β, $x \in C(\beta, n+1) \subseteq U(\beta, n+1)$. Recordemos que $U(\beta, n+1) = U(\beta, n) \setminus \overline{\bigcup\{C(\gamma, n) : \gamma < \beta\}}$. Dado que $\delta(x, n) < \beta$, $C(\delta(x, n), n) \subseteq \overline{\bigcup\{C(\gamma, n) : \gamma < \beta\}}$. De donde, $x \notin C(\delta(x, n), n)$; lo cual es una contradicción con la definición de $\delta(x, n)$.⊠

Es un hecho bien conocido que en un conjunto bien ordenado toda sucesión decreciente infinita se estabiliza. Entonces, para cada $x \in X$, existe $m(x) \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(x, n) = \delta(x, m(x))$, para cada $n \geqslant m(x)$.

Afirmación 3. Sea, para $\alpha \in \Lambda$ y cada $n \in \mathbb{N}$,

$$F(\alpha, n) = \{x \in C(\alpha, n) : \alpha = \delta(x, n) \text{ y } n \geqslant m(x)\}$$

Definamos $\mathcal{F}(n) = \{F(\alpha, n) : \alpha \in \Lambda\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Entonces

1. $F(\alpha, n) \subseteq C(\alpha, n) \subseteq U(\alpha, n)$;
2. $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(n)$ es una cubierta de X;
3. Cada familia $\mathcal{F}(n)$ es una familia discreta.

En efecto: Por construcción, $F(\alpha, n) \subseteq C(\alpha, n)$, y ya hemos visto que $C(\alpha, n) \subseteq U(\alpha, n)$. Ahora, si $x \in X$ entonces $x \in C(\delta(x, m(x)), m(x))$ (vea la definición de $\delta(x, m(x))$). De donde, $x \in F(\delta(x, m(x)), m(x))$.

Probemos ahora que cada familia $\mathcal{F}(n)$ es discreta. Para tal propósito, elijamos $x \in X$. Sea $k > \max\{n, m(x)\}$. Sean $\beta = \delta(x, k)$ y $W = X \setminus \overline{\bigcup_{\gamma \neq \beta} C(\gamma, k)}$. Claramente $W \in \mathcal{T}^*(X)$. Aún más, $x \in W$ y W intersecta a lo más un elemento de la familia $\mathcal{F}(n)$. Efectivamente, dado que $k-1 \geqslant m(x)$, $\delta(x, k-1) = \delta(x, m(x))$. De esto último y de la definición de $\delta(x, k-1)$ tenemos que $x \in C(\beta, k-1)$ (note que $\beta = \delta(x, k) = \delta(x, k-1) = \delta(x.m(x))$). Así, si $\alpha > \beta$ entonces $x \notin U(\alpha, k) = U(\alpha, k-1) \setminus \overline{\bigcup_{\gamma < \alpha} C(\gamma, k-1)}$. Entonces $x \notin \overline{\bigcup_{\gamma > \beta} C(\gamma, k)}$ (recuérdese que la familia $\mathcal{C}(k)$ está acoginada en $\mathcal{U}(k)$). Además, nótese que como $k+1 > m(x)$, $\delta(\beta, k) = \delta(\beta, k+1)$. Así, $x \in C(\beta, k+1) \subseteq U(\beta, k+1)$. Como $U(\beta, k+1) = U(\beta, k) \setminus \overline{\bigcup\{C(\alpha, k) : \alpha < \beta\}}$, $x \notin \overline{\bigcup\{C(\alpha, k) : \alpha < \beta\}}$. Todo lo anterior nos dice que $x \in W = X \setminus \overline{\bigcup_{\gamma \neq \beta} C(\gamma, k)}$. De donde, $W \in \mathcal{T}(x, X)$. Ahora, dado que $W = X \setminus \overline{\bigcup_{\gamma \neq \beta} C(\gamma, k)}$ y $F(\alpha, k) \subseteq C(\alpha, k)$ para cada $\alpha \neq \beta$, $W \cap F(\alpha, k) = \emptyset$ para cada $\alpha \neq \beta$. Como $F(\alpha, n) \subseteq F(\alpha, k)$ (pues $k > n$), $W \cap F(\alpha, n) = \emptyset$ para cada $\alpha \neq \beta$. Por lo tanto, $\mathcal{F}(n)$ es una familia discreta. ⊠

Finalicemos la demostración del teorema. Dado que $\mathcal{F}(n)$ es una familia discreta, la familia $\overline{\mathcal{F}(n)} = \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}(n)\}$ es una familia discreta de cerrados de X (para cada n). Además, por el inciso (1) de la Afirmación 3, cada una de estas familias está inscrita en $\mathcal{U}$ (recuerde que cada $\mathcal{C}(n)$ está acoginada en $\mathcal{U}(n)$, y que cada $\mathcal{U}(n)$ refina a $\mathcal{U}$. Por (1) de la Afirmación 3, $F(\alpha, n) \subseteq C(\alpha, n)$. Pero por lo antes dicho, $C(\alpha, n) \subseteq \overline{C(\alpha, n)} \subseteq U(\alpha, n) \subseteq U_\alpha)$.

Dado que X es un espacio colectivamente normal, existen $\mathcal{B}(n) = \{W(\alpha, n) : \alpha \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{T}^*(X)$ familias discretas tales que $\overline{F(\alpha, n)} \subseteq W(\alpha, n)$, para cada $\alpha \in \Lambda$.

Sea $\mathcal{V}(n) = \{W(\alpha, n) \cap U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Entonces $\mathcal{V}(n)$ es una familia de abiertos de X, discreta e inscrita en $\mathcal{U}$. De donde, $\mathcal{V} =$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}(n)$ es un refinamiento abierto σ-discreto de $\mathcal{U}$. Por lo tanto, X es un espacio paracompacto. $\square$

Como podrá darse cuenta el lector, en la anterior demostración se prueba el siguiente resultado de E. A. Michael, que bien puede considerarse un fortalecimiento de la propiedad (2) de la Proposición 2.3.10.

2.4.4 Corolario (E. A. Michael). *Un espacio regular X es paracompacto si y sólo si cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-discreto.*

2.4.5 Definición. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas de un espacio X. Diremos que la cubierta $\mathcal{V}$ es un *refinamiento baricéntrico* de la cubierta $\mathcal{U}$ si la familia $\{\mathrm{st}(x, \mathcal{V}) : x \in X\}$ refina a $\mathcal{U}$. Si la familia $\{\mathrm{st}(V, \mathcal{V}) : V \in \mathcal{V}\}$ refina a $\mathcal{U}$ entonces se dice que $\mathcal{V}$ es un *refinamiento estrella* de $\mathcal{U}$.

2.4.6 Lema. *Supóngase que $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son cubiertas de un espacio X. Si $\mathcal{W}$ es un refinamiento baricéntrico de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}$ es a su vez refinamiento baricéntrico de $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{W}$ es refinamiento estrella de $\mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $W \in \mathcal{W}$. Elijamos $x_0 \in W$ arbitrariamente. Por hipótesis, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $\mathrm{st}(x_0, \mathcal{W}) \subseteq V$. Además, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\mathrm{st}(x_0, \mathcal{V}) \subseteq U$. Demostremos que $\mathrm{st}(W, \mathcal{W}) \subseteq U$. Sea $H \in \mathcal{W}$ tal que $H \cap W \neq \emptyset$. Sea $y \in H \cap W$. Entonces existe $P \in \mathcal{V}$ tal que $\mathrm{st}(y, \mathcal{W}) \subseteq P$. Entonces $H \cup W \subseteq P$. De donde, $x_0 \in P$. Por tanto, $P \subseteq \mathrm{st}(x_0, \mathcal{V}) \subseteq U$. Entonces $H \subseteq U$. Por lo tanto, $\mathrm{st}(W, \mathcal{W}) \subseteq U$. $\square$

2.4.7 Teorema. *Las siguientes proposiciones con equivalentes para cualquier espacio $X \in T_1$.*

1. *X es paracompacto;*
2. *cualquier cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto baricéntrico;*
3. (A. H. Stone) *cualquier cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto estrella;*
4. (A. V. Arhangel'skiĭ) *para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe una sucesión $\{\mathcal{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas de X tal que: para cada $x \in X$ existe $W \in \mathcal{T}(x, X)$ para el cual $st(W, \mathcal{V}_n) \subseteq U$ para algún $U \in \mathcal{U}$ y algún $n \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN.
(1) $\Rightarrow$ (2). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Por la Proposición 2.3.10, existe $\mathcal{F}$ refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{U}$. Ahora, para cada $x \in X$, existe $U_x \in \mathcal{T}(x, X)$ tal que $|\{F \in \mathcal{F} : F \cap U_x \neq \emptyset\}| < \aleph_0$. Dado $x \in X$, definamos $\mathcal{F}_x = \{F \in \mathcal{F} : x \in F\}$. Además, para cada $F \in \mathcal{F}$ fijemos $U(F) \in \mathcal{U}$ de tal manera que $F \subseteq U(F)$. Sea

$$W_x = (X \setminus \bigcup\{F \in \mathcal{F} : F \notin \mathcal{F}_x\}) \bigcap (\bigcap\{U(F) : F \in \mathcal{F}_x\})$$

Entonces la familia $\mathcal{W} = \{W_x : x \in X\}$ es un refinamiento baricéntrico de $\mathcal{U}$. En efecto, sea $x \in X$. Fijemos un $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que $x \in F_0$. Es claro que $F_0 \in \mathcal{F}_x$. Consideremos al correspondiente $U(F_0) \in \mathcal{U}$. Entonces $\text{st}(x, \mathcal{W}) \subseteq U(F_0)$. Efectivamente, sea $y \in X$ tal que $x \in W_y$. Entonces $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}_y$ (como $x \in W_y \subseteq X \setminus \bigcup\{F \in \mathcal{F} : F \notin \mathcal{F}_y\}$, si $F \in \mathcal{F}$ y $y \notin F$, entonces $x \notin F$). Entonces

$$W_y \subseteq \bigcap\{U(F) : F \in \mathcal{F}_y\} \subseteq \bigcap\{U(F) : F \in \mathcal{F}_x\} \subseteq U(F_0)$$

Por lo tanto, $\text{st}(x, \mathcal{W}) \subseteq U(F_0)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). La demostración es una simple aplicación del lema anterior.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, y sea $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto estrella de $\mathcal{U}$. Para concluir el resultado considere la sucesión $\{\mathcal{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde cada $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Demostremos que cada cubierta abierta $U = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ tiene un refinamiento abierto σ-acoginado. Sea $\{\mathcal{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X que satisfacen la propiedad de Arhangel'skiĭ. Para cada $\alpha \in \Lambda$ y cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$C(\alpha, n) = \bigcup\{V : V \in \mathcal{T}^*(X) \text{ y } \text{st}(V, \mathcal{V}_n) \subseteq U_\alpha\}$$

Entonces la familia $\mathcal{C} = \{C(\alpha, n) : \alpha \in \Lambda, n \in \mathbb{N}\}$ es un refinamiento abierto σ-acoginado de $\mathcal{U}$. Dejamos al lector el comprobar que $\mathcal{C}$ cubre a X y que está inscrita en forma precisa en $\mathcal{U}$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y sea $\Lambda' \subseteq \Lambda$. Sea $z \in X \setminus \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda'\}$. Como $\text{st}(C(\alpha, n), \mathcal{V}_n) \subseteq U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda'$, $\text{st}(z, \mathcal{V}_n) \cap C(\alpha, n) = \emptyset$ para cada

$\alpha \in \Lambda'$ (pues para tales α, $z \notin U_\alpha$). Entonces $z \notin \overline{\bigcup\{C(\alpha, n) : \alpha \in \Lambda'\}}$ (pues $\mathrm{st}(z, \mathcal{V}_n) \in \mathcal{T}(z, X)$). De donde,

$$\overline{\bigcup\{C(\alpha, n) : \alpha \in \Lambda'\}} \subseteq \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda'\}$$

Así, hemos demostrado que toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-acoginado. Para demostrar X es un espacio paracompacto bastará demostrar que X es regular (veáse el Teorema 2.4.3). Obsérvese que dado que cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-acoginado, entonces toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento acoginado (veáse la demostración de la implicación (5) $\Rightarrow$ (6) del Teorema 2.4.3). De donde, por la Proposición 2.3.6, X es un espacio colectivamente normal; por lo cual, regular. $\square$

2.4.8 Corolario (A. H. Stone). *Todo espacio métrico es un espacio paracompacto.*

Demostración. Sea X un espacio métrico y sean $\mathcal{V}_n = \{B(x; \frac{1}{n}) : x \in X\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, la sucesión $\{\mathcal{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface la propiedad de Arhangel'skiĭ. En efecto, sean $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Elijamos $\epsilon > 0$ de tal manera que $x \in B(x; \epsilon) \subseteq U$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{m} < \epsilon$. Entonces $\mathrm{st}(B(x; \frac{1}{m}), \mathcal{V}_m) \subseteq B(x; \epsilon) \subseteq U$ (si $y \in X$ tal que $B(y; \frac{1}{m}) \cap B(x; \frac{1}{m}) \neq \emptyset$, sean $z \in B(y; \frac{1}{m}) \cap B(x; \frac{1}{m})$ y $w \in B(y; \frac{1}{m})$. Entonces $d(w, x) \leqslant d(w, y) + d(y, x) \leqslant d(w, y) + d(y, z) + d(z, x) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{3}{m} < \epsilon$). $\square$

Capítulo 3

Otras caracterizaciones: el Teorema de Tamano y particiones de la unidad

3.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos introducido la noción de espacio paracompacto y algunas de sus caracterizaciones; y aprovechando dichas caracterizaciones hemos analizado su relación con otras clases de espacios topológicos como la clase de espacios compactos, la clase de espacios métricos, la clase de espacios normales, etc. En este capítulo analizaremos el comportamiento de la paracompacidad en relación a su preservación, o no, con respecto a las principales operaciones entre espacios topológicos. Además de ello, introduciremos otras interesantes caracterizaciones de los espacios paracompactos. Particularmente, exponemos una demostración del importante Teorema de Tamano que proporciona una caracterización de la paracompacidad utilizando a la compactación de Stone-Čech y establecemos la clásica caracterización de la paracompacidad utilizando la noción de partición de la unidad.

3.2 Preservación de la paracompacidad bajo operaciones básicas

Iniciamos esta sección demostrando que la paracompacidad se hereda por los subespacios de tipo F_σ.

Recuerde que un subespacio F de un espacio topológico X es un subconjunto F_σ si existen subconjuntos cerrados F_n con $(n \in \mathbb{N})$ tales que $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

3.2.1 PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio paracompacto. Si F es un subconjunto de tipo F_σ de X, entonces F es paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, con cada F_n subespacio cerrado de X. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de F, y sea, para cada $U \in \mathcal{U}$, $W(U) \in \mathcal{T}^*(X)$ tal que $W(U) \cap F = U$. Entonces $\mathcal{W}_i = \{W(U) : U \in \mathcal{U}\} \bigcup \{X \setminus F_i\}$ es una cubierta abierta de X, para cada $i \in \mathbb{N}$. Dado que X es paracompacto, existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{W}_i$, para cada i. Para toda $n \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{B}_n = \{F \cap V : V \in \mathcal{V}_n \text{ y } V \cap F_n \neq \emptyset\}$. Entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ es una cubierta abierta σ-localmente finita de F que refina a $\mathcal{U}$. □

3.2.2 COROLARIO. *Cada subespacio cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto.*

3.2.3 COROLARIO. *La suma topológica $\oplus_{s\in S} X_s$ es paracompacto si y sólo si todos los espacios X_s son paracompactos.*

DEMOSTRACIÓN. Si la suma $\oplus_{s\in S} X_s$ es paracompacta, entonces todos los X_s son paracompactos por el último corolario. □

Inversamente, si todos los X_s son paracompactos, entonces para cada cubierta abierta $\mathcal{V} = \{V_t\}_{t\in T}$ de la suma $\oplus_{s\in S} X_s$ la familia $\bigcap_{s\in S} A_s$ - donde A_s es un refinamiento abierto localmente finito de la cubierta abierta $\{X_s \bigcap V_t\}_{t\in T}$ del subespacio X_s - es una cubierta abierta localmente finita de la suma $\oplus_{s\in S} X_s$ que refina V. □

Pasemos ahora a la discusión de la invariancia de la paracompacidad bajo funciones continuas. Para comenzar, notemos que la paracompacidad no es un invariante bajo funciones continuas. Efectivamente, cualquier espacio topológico es una imagen continua de un espacio discreto, y por consiguiente, de un espacio paracompacto. Así que si tomamos un espacio no paracompacto $(X, \mathcal{T})$ y dotamos a X con la topología discreta, entonces la función $Id_X : (X, \mathcal{P}(X)) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua y sobreyectiva, $(X, \mathcal{P}(X))$ es paracompacto, pero $(X, \mathcal{T})$ no lo es.

El siguiente resultado es corolario del Teorema 2.4.3.

3.2.4 COROLARIO (E. A. Michael). *Si $X, Y \in T_2$, X es paracompacto y $f : X \to Y$ es sobreyectiva, continua y cerrada, entonces Y es paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Y. Entonces $\mathcal{W} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{C}$ un refinamiento cerrado y conservativo de $\mathcal{W}$.

Sea $\mathcal{D} = \{f(C) : C \in \mathcal{C}\}$. Entonces $\mathcal{D}$ es un refinamiento cerrado y conservativo de $\mathcal{U}$. En efecto, dado que f es una función cerrada, $\mathcal{D}$ es una familia de subespacios cerrados de X. La sobreyectividad de f, y el hecho de que $\mathcal{C}$ cubre a X, permiten constatar que $\bigcup \mathcal{D} = Y$. Ahora, si $C \in \mathcal{C}$ entonces existe $W = f^{-1}(U)$ (para algún $U \in \mathcal{U}$) tal que $C \subseteq W$. Entonces $f(C) \subseteq f(W) = U$. De donde, $\mathcal{D}$ está inscrita en $\mathcal{U}$. Así, resta probar que $\mathcal{D}$ es conservativa.

Sean $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ y $y \in \overline{\bigcup\{D : D \in \mathcal{D}'\}}$. Podemos suponer que $\mathcal{D}' = \{f(C) : C \in \mathcal{C}'\}$ para alguna subfamilia $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$. Entonces $f^{-1}(y) \cap \overline{\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}'\}} \neq \emptyset$ (en caso contrario: $f^{-1}(y) \subseteq X \setminus \overline{\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}'\}} = U$, entonces $f^{\#}(U) = Y \setminus f(X \setminus U) \in \mathcal{T}(y, Y)$ es tal que $f^{\#}(U) \cap (\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}'\}) = \emptyset$; lo cual es una contradicción) Así, existe $C \in \mathcal{C}'$ tal que $f^{-1}(y) \cap C \neq \emptyset$. Entonces $y \in f(C) \in \mathcal{D}'$. Entonces $y \in \bigcup\{D : D \in \mathcal{D}'\}$. Por lo tanto, $\mathcal{D}$ es conservativa. $\square$

Ahora demostraremos dos proposiciones que serán utilizadas para comprobar que la paracompacidad es un invariante inverso bajo funciones perfectas.

3.2.5 PROPOSICIÓN. *Una función continua $f : X \to Y$ es cerrada (abierta) si y sólo si para cada $B \subseteq Y$ y cada conjunto abierto (cerrado) $A \subseteq X$ tal que $f^{-1}(B) \subseteq A$, existe un conjunto abierto (un cerrado) $C \subseteq Y$ con $B \subseteq C$ tal que $f^{-1}(C) \subseteq A$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es cerrada (el argumento para el caso en que f es abierto, es similar). Supongamos que $f : X \to Y$ es cerrado, B es un subconjunto de Y y A es un subconjunto abierto de X el cual contiene $f^{-1}(B)$. El conjunto $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ es abierto en Y y contiene B. Además,

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}f(X \setminus A) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A$$

Supongamos ahora que f satisface la condición en la Proposición y tomemos un conjunto cerrado $F \subseteq X$. El conjunto $A = X \setminus F$ es abierto, y para $B = Y \setminus f(F)$ tenemos

$$f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}f(F) \subseteq X \setminus F = A;$$

entonces existe un subsonjunto abierto C de Y tal que $Y \setminus f(F) \subseteq C$ y $f^{-1}(C) \subseteq A$, es decir, $f^{-1}(C) \cap F = \emptyset$. La última igualdad implica que $C \cap f(F) = \emptyset$, es decir, que $C \subseteq Y \setminus f(F)$. Entonces tenemos $f(F) = Y \setminus C$, y esto demuestra que el conjunto $f(F)$ es cerrado. □

En el caso de una función cerrada la condición en la Proposición 3.2.5 puede ser reemplazada por lo siguiente:

3.2.6 PROPOSICIÓN. *Una función continua $f : X \to Y$ es cerrada si y sólo si para cada punto $y \in Y$ y cada conjunto abierto $U \subseteq X$ el cual contiene $f^{-1}(y)$, existe en Y una vecindad V del punto y tal que $f^{-1}(V) \subseteq U$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el la Proposición 3.2.5, es suficiente demostrar que si f satisface la condición en la Proposición, entonces f es cerrada. Tomemos un conjunto $B \subseteq Y$ y un conjunto abierto $A \subseteq X$ tal que $f^{-1}(B) \subseteq A$. Para cada $y \in B$, escogemos una vecindad $V_y \subseteq Y$ del punto y tal que $f^{-1}(V_y) \subseteq A$. El conjunto abierto $C = \bigcup_{y \in B} V_y$ satisface la inclusión $B \subseteq C$ y $f^{-1}(C) \subseteq A$, entonces f es cerrada por 3.2.5. □

Ahora si demostremos que la paracompacidad es invariante inverso de funciones perfectas.

3.2.7 Teorema. *La paracompacidad es un invariante inverso de funciones perfectas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \to Y$ una función perfecta sobreyectiva, donde Y es paracompacto. Considere una cubierta abierta $\{U_s\}_{s\in S}$ del espacio X y para cada $y \in Y$ escogemos un conjunto finito $S(y) \subseteq S$ tal que $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{s\in S(y)} U_s$. Aplicando la Proposición 3.2.6, tomemos una vecindad V_y del punto y tal que

$$f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(V_y) \subseteq \bigcup_{s\in S(y)} U_s.$$

La cubierta abierta $\{V_y\}_{y\in Y}$ de Y tiene un refinamiento abierto localmente finito $\{W_t\}_{t\in T}$. La familia $\{f^{-1}(W_t)\}_{t\in T}$ es una cubierta abierta localmente finita de X y para cada $t \in T$ existe un $y_t \in Y$ que satisface

$$f^{-1}(W_t) \subseteq f^{-1}(V_{y_t}) \subseteq \bigcup_{s\in S(y_t)} U_s$$

.

Fácilmente podemos comprobar que la familia $\{f^{-1}(W_t) \cap U_s : t \in T$ y $s \in S(y_t)\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\{U_s\}_{s\in S}$ $\square$

La paracompacidad no es una propiedad que se preserve por productos, ni siquiera es necesariamente cierto que el cuadrado de un espacio paracompacto sea un espacio paracompacto. El cuadrado de la línea de Sorgenfrey es un ejemplo de esto último. Para convencernos de ello, vamos a requerir del siguiente resultado conocido como Lema de Jones.

3.2.8 LEMA. *Sea X un espacio normal separable. Si X contiene un subespacio discreto y cerrado de cardinalidad κ, entonces $2^\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Y un subespacio discreto y cerrado de X de cardinalidad κ y sea D un subespacio denso numerable de X. Como cada subconjunto de Y es un subconjunto cerrado de X, tenemos que para cada $A \subseteq Y$ existen subconjuntos abiertos ajenos U_A y V_A de X tales que $A \subseteq U_A$ y $Y \setminus A \subseteq V_A$. Para todo $A \subseteq Y$, definamos $C_A = U_A \cap D$. Notemos primeramente que si $A, B \subseteq Y$ son diferentes, entonces $\overline{U_A} \neq \overline{U_B}$.

En efecto, como $A \neq B$ se tiene que $A \setminus B \neq \emptyset$ o $B \setminus A \neq \emptyset$ (o ambos casos). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \setminus B \neq \emptyset$. Entonces $\overline{U_A} \cap V_B \neq \emptyset$ (porque $A \setminus B \subseteq \overline{U_A} \cap V_B$). De esto último podemos ya concluir que $\overline{U_A} \neq \overline{U_B}$ porque $\overline{U_B} \cap V_B = \emptyset$.

Observe ahora que para cada $A \subseteq Y$ se tiene que

$$\overline{U_A} = \overline{U_A \cap D} = \overline{C_A}$$

(esto debido a que D es un subconjunto denso de X). En consecuencia, podemos concluir que si $A, B \subseteq Y$ son tales que $A \neq B$, entonces $C_A \neq C_B$ (puesto que si $C_A = C_B$ entonces se tendría que $\overline{U_A} = \overline{U_B}$). De esta manera tenemos una función inyectiva $\psi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(D)$ dada por $\psi(A) = C_A$ para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$. La existencia de esta función nos permite concluir que $2^\kappa = |\mathcal{P}(Y)| \leqslant |\mathcal{P}(D)| = 2^{\aleph_0}$. $\square$

3.2.9 Ejemplo. Como todo espacio regular Lindelöf es paracompacto, se sigue que la línea de Sorgenfrey K es un espacio paracompacto. Debido a que el producto cartesiano $K \times K$ no es un espacio normal (aplicando el Lema de Jones podemos concluir que el cuadrado de la línea de Sorgenfrey no es un espacio normal porque $K \times K$ es separable ya que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso en $K \times K$ y además $K \times K$ contiene a un subespacio discreto cerrado de cardinalidad $\mathfrak{c}$, a saber $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$) podemos inferir del Teorema 2.2.6 que el producto cartesiano de dos espacios paracompactos no necesariamente es paracompacto.

No obstante a lo anterior si multiplicamos un espacio paracompacto con un espacio compacto siempre obtenemos un espacios paracompacto. Para demostrar esto último, demostraremos antes el siguiente lema.

3.2.10 Lema. *Sean X y Y espacios topológicos. Si B es un subconjunto compacto de Y y $x \in X$ son tales que $\{x\} \times B$ está contenido en un subconjunto abierto W de $X \times Y$, entonces existen abiertos U y V de X y Y, respectivamente, tales que $\{x\} \times B \subseteq U \times V \subseteq W$.*

Demostración. Como $\{x\} \times B$ es homeomorfo a B y éste es compacto, tenemos que $\{x\} \times B$ es compacto. Note que para cada $y \in B$, existen abiertos U_x^y y V_y^x tales que $\{x\} \times B \subseteq \bigcup_{y \in B}(U_x^y \times V_y^x) \subseteq W$. Como

$\{x\} \times B$ es compacto, existen $y_1, \ldots, y_n \in B$ tales que

$$\{x\} \times B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_x^{y_i} \times V_{y_j}^x) \subseteq \bigcup_{y \in B} (U_x \times V_y^x) \subseteq W.$$

Sea $U = \bigcap_{i=1}^n U_x^{y_i}$ y $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}^x$. Note que $\{x\} \times B \subseteq U \times V \subseteq W$. $\square$

3.2.11 PROPOSICIÓN. *Si X es un espacio paracompacto y Y es compacto entonces $X \times Y$ es un espacio paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos que toda cubierta abierta de $X \times Y$ tiene un refinamiento abierto localmente finito. Sea entonces $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in J\}$ una cubierta abierta de $X \times Y$. Sea $x \in X$ fijo. Como Y es homeomorfo a $\{x\} \times Y$, tenemos que este último subespacio de $X \times Y$ es compacto. Entonces existen una cantidad finita de índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_x} \in J$ tales que $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_x} U_{\alpha_j}^x$. Por el Lema 3.2.10, existe un abierto V_x de X que contiene a x tal que $\{x\} \times Y \subseteq V_x \times Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_x} U_{\alpha_j}^x$.

Considere ahora a la colección $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$. Note que $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de X, el cual es paracompacto. Entonces existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$. Como $\mathcal{W}$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$, para cada $W \in \mathcal{W}$ existe un $x \in X$ tal que $W \subseteq V_x$. Fijemos, para cada $W \in \mathcal{W}$, un $x^W \in X$ tal que $W \subseteq V_{x^W}$. Considere ahora a la colección

$$\mathcal{H} = \{(W \times Y) \cap U_{\alpha_j}^{x^W} : j = 1, \ldots, n_{x^W}, W \in \mathcal{W}\}.$$

La colección $\mathcal{H}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ localmente finito. Efectivamente, es claro que $\mathcal{H}$ está formada de subconjunto abiertos de $X \times Y$ y que está inscrita en $\mathcal{U}$. Así que bastará ver que cubre a $X \times Y$ y que es localmente finita. Pero ello es sencillo, note que si $(x, y) \in X \times Y$ entonces existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $x \in W$. Por definición de V_{x^W}, tenemos que $(x, y) \in W \times Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_{x^W}} U_{\alpha_j}^{x^W}$. Así que existe $j \in \{1, \ldots, n_{x^W}\}$ tal que $(x, y) \in (W \times Y) \cap U_{\alpha_j}^{x^W} \in \mathcal{H}$.

Por otra parte, como $\mathcal{W}$ es localmente finita, si $(x, y) \in X \times Y$ existe una vecindad U de x en X tal que $U \times Y$ intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{W}$. Entonces $U \times Y$ intersecta un número finito de elementos de $\mathcal{H}$. $\square$

3.3 El Teorema de Tamano

Ahora introduciremos un nuevo concepto, el de cubierta normal, para dar pie a dos reultados que más adelante nos ayudarán a demostrar el Teorema de Tamano.

3.3.1 Definición. Una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X es una *cubierta normal* si existe una sucesión $\{\mathcal{V}_n\}_1^\infty$ de cubiertas abiertas tales que $\mathcal{V}_1$ es un refinamiento estrella $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}_{n+1}$ es un refinamiento estrella $\mathcal{V}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En seguida demostraremos que aún en ausencia de paracompacidad, las cubiertas normales tienen refinamientos abiertos localmente finitos.

3.3.2 Teorema. *Si $\mathcal{U}$ es una cubierta normal de un espacio X, entonces $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito el cual es también σ-discreto.*

Demostración. Supongamos $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una cubierta abierta de X, con Λ bien ordenada, y sea $\{\mathcal{V}_n\}_1^\infty$ es una sucesión de cubiertas abiertas donde $\mathcal{V}_1$ es un refinamiento estrella $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}_{n+1}$ es un refinamiento estrella $\mathcal{V}_n$. Para cada $x \in X$, sea $\delta(x)$ el más pequeño elemento $\beta \in \Lambda$ tal que $st(x, \mathcal{V}_n) \subseteq U_\beta$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Para cada $\alpha \in \Lambda$ y cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$F(\alpha, n) = \{x : \alpha = \delta(x), st(x, \mathcal{V}_n) \subseteq U_\alpha\}$$

y

$$G(\alpha, n) = st(F(\alpha, n), \mathcal{V}_{n+3})$$

Es claro que $\{F(\alpha, n) : \alpha \in \Lambda, n \in \mathbb{N}\}$ cubre a X. Así $\{G(\alpha, n) : \alpha \in \Lambda, n \in \mathbb{N}\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$. Dejamos al lector verificar que $\{G(\alpha, n) : \alpha \in \Lambda\}$ es una colección discreta para cada $n \in \mathbb{N}$. Para obtener un refinamiento localmente finito una pequeña sugerencia es necesaria. Si

$$K(n) = \bigcup\{st(F(\alpha, n), \mathcal{V}_{n+4}) : \alpha \in \Lambda\}$$

es fácil demostrar que

$$K(n) \subseteq \bigcup\{G(\alpha, n) : \alpha \in \Lambda\}.$$

Sea

$$H(\alpha, n) = G(\alpha, n) \setminus \overline{(\bigcup_{k<n} K(k))}.$$

Se sigue que $\{H(\alpha, n) : \alpha \in \Lambda, n \in \mathbb{N}\}$ es el refinamiento abierto σ-discreto deseado, el cual es también localmente finito. □

El siguiente resultado será usado posteriormente en la demostración del Teorema de Tamano, para poder establecerlo correctamente necesitamos algunas definiciones.

3.3.3 Definición. Diremos que una colección finita $\mathcal{H}$ es *centrada* si $\bigcap \mathcal{H} \neq \emptyset$ y que $\mathcal{H}$ es *centrada* en x si $x \in \bigcap \mathcal{H}$.

3.3.4 Teorema. *Para cada espacio X, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *X es paracompacto.*

2. *Para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X hay un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ tal que para cada $V \in \mathcal{V}$ hay un $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ finito tal que $st(V, \mathcal{V}) \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ y $V \subseteq \bigcap \mathcal{W}$.*

3. *Para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X hay un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ tal que para cada $x \in X$ hay un conjunto abierto V que contiene a x y una colección $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ finita, centrada en x, tal que $st(V, \mathcal{V}) \subseteq \bigcup \mathcal{W}$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (3). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Como X es paracompacto, existe $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto estrella de $\mathcal{U}$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, y sea $\mathcal{V}$ dado como en (3). Para cada $x \in X$, tomemos un conjunto abierto V_x con $x \in V_x$ y $\mathcal{W}_x \subseteq \mathcal{U}$ finito, con $x \in \bigcap \mathcal{W}_x$, tal que $st(V_x, \mathcal{V}) \subseteq \bigcup \mathcal{W}_x$. Sea $H_x = V_x \cap (\bigcap \mathcal{W}_x)$ y $\mathcal{H} = \{H_x : x \in X\}$. Entonces $\mathcal{H}$ es una cubierta abierta de X, y para $H_x \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$st(H_x, \mathcal{H}) \subseteq st(V_x, \mathcal{V}) \subseteq \bigcup \mathcal{W}_x$$

y $H_x \subseteq \bigcap \mathcal{W}_x$. Entonces (2) es verdadera.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sean $\mathcal{U}_3, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_1$ cubiertas abiertas de X tales que $\mathcal{U}_3$ refina $\mathcal{U}_2$ y $\mathcal{U}_2$ refina $\mathcal{U}_1$ en la manera dada en (2). Sean $\mathcal{U}_3^{FC}, \mathcal{U}_2^{FC}, \mathcal{U}_1^{FC}$ las cubiertas obtenidas al tomar todas las uniones de subcolecciones finitas centradas de $\mathcal{U}_3, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_1$, respectivamente. Para cada $U \in \mathcal{U}_3^{FC}$ sea $\mathcal{G}_U$ una subcolección centrada finita de $\mathcal{U}_3$ tal que $U = \bigcup \mathcal{G}_U$. Demostramos que $\mathcal{U}_3^{FC}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}_1^{FC}$. Sea $V \in \mathcal{U}_3^{FC}$. Ahora, hay una colección finita $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{U}_2$ tal que $st(V, \mathcal{U}_3) \subseteq \bigcup \mathcal{H}$ y $\bigcap \mathcal{G}_V \subseteq \bigcap \mathcal{H}$. (Para ver esto, para cada $S \in \mathcal{G}_V$, tome $\mathcal{W}_S \subseteq \mathcal{U}_2$ finita tal que $st(S, \mathcal{U}_3) \subseteq \bigcup \mathcal{W}_S$ y $S \subseteq \bigcup \mathcal{W}_S$. Sea $\mathcal{H} = \bigcup \{\mathcal{W}_S | S \in \mathcal{G}_V\}$.) Se sigue que

$$st(V, \mathcal{U}_3^{FC}) \subseteq st(\bigcup \mathcal{H}, \mathcal{U}_3) \subseteq st(\bigcup \mathcal{H}, \mathcal{U}_2)$$

.

Para cada $H \in \mathcal{H}$ hay un $\mathcal{W}_H \subseteq \mathcal{U}_1$ finito tal que $st(H, \mathcal{U}_2) \subseteq \bigcup \mathcal{W}_H$ y $H \subseteq \bigcap \mathcal{W}_H$. Sea $\mathcal{H} = \bigcup \{\mathcal{W}_H : H \in \mathcal{H}\}$; entonces $\mathcal{H}$ es una subcolección finita centrada de $\mathcal{U}$ y

$$st(\bigcup \mathcal{H}, \mathcal{U}_2) \subseteq \bigcup \mathcal{H} \in \mathcal{U}_1^{FC}.$$

Esto demuestra que $\mathcal{U}_3^{FC}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}_1^{FC}$. Repitiendo el mismo argumento, podemos demostrar que si $\mathcal{U}$ es cualquier cubierta de X, entonces $\mathcal{U}^{FC}$ es una cubierta normal, así por el Teorema 3.3.2, tenemos un refinamiento abierto localmente finito. No es difícil demostrar que $\mathcal{U}$ debe tener un refinamiento abierto localmente finito, completando así la demostración de 3.3.4. $\square$

Estamos ya en posición de enunciar y demostrar el Teorema de Tamano. Dicho Teorema proporciona una caracterización "externa" de la paracompacidad.

3.3.5 Teorema. *Las siguientes proposiones son equivalentes para cualquier espacio Tychonoff.*

1. *X es paracompacto;*

2. $X \times \beta X$ *es normal*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Ya que X es paracompacto y βX es compacto el producto $X \times \beta X$ es paracompacto y por lo tanto normal (veánse las Proposiciones 3.2.11 y 2.3.7.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $X \times \beta X$ es normal y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X. Demostremos que X satisface (3) de 3.3.4. Para cada conjunto abierto $U \subseteq X$ asignamos un conjunto abierto U^* en βX tal que $U^* \bigcap X = U$ y definamos $\mathcal{U}^* = \{U^* : U \in \mathcal{U}\}$. Aplicando la normalidad de $X \times \beta X$ podemos encontrar un conjunto abierto $W \subseteq X \times \beta X$ tal que

$$\{(x,x)|x \in X\} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq W = \bigcup\{U \times U^*|U \in \mathcal{U}\}.$$

Sin perder generalidad podemos suponer que V puede ser expresado como $V = \bigcup\{V_\alpha \times V_\alpha^*|\alpha \in \Lambda\}$ donde V_α es abierto en X. Ahora supongamos $x \in X$ y definamos $E = \beta X \setminus st(x, \mathcal{U}^*)$. Es claro que $(\{x\} \times E) \bigcap W = \emptyset$ así que $(\{x\} \times E) \bigcap \overline{V} = \emptyset$ y además existen conjuntos W_1, W_2 abiertos en X y βX respectivamente tales que $\{x\} \times E \subseteq W_1 \times W_2$ y $(W_1 \times W_2) \bigcap \overline{V} = \emptyset$. Tenemos entonces que $(W_1 \times W_2) \bigcap (V_\alpha \times V_\alpha^*) = \emptyset$ para cada α; así que $W_2 \bigcap V_\alpha^* = \emptyset$ cuando $W_1 \cap V_\alpha^* \neq \emptyset$.

Entonces tenemos que $W_2 \cap V_\alpha^* = \emptyset$ cuando

$$W_1^* \cap V_\alpha^* \neq \emptyset \quad \text{ó} \quad W_2 \cap st(W_1^*, V^*) = \emptyset.$$

Por consiguiente, $E \bigcap \overline{st(W_1^*, V^*)} = \emptyset$. Así que $\overline{\beta X(st(W_1^*, V^*))} \subseteq st(x, \mathcal{U}^*)$.

De hecho, existe una subcolección finita $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{U}^*$, centrada en x, tal que $st(W_1^*, V^*) \subseteq \bigcup \mathcal{P}$.

Si $\mathcal{W} = \{S \cap X : S \in \mathcal{P}\}$, entonces $st(W_1, V) \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ y las condiciones (3) de 3.3.4 son satisfechas. $\square$

Como un corolario al Teorema 3.2.11, al Corolario 1.15.3 y al Teorema 3.3.5 tenemos el siguiente resultado.

3.3.6 Teorema. *Para cada espacio topológico X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El espacio X es paracompacto.*
2. *Para cada espacio compacto Y el producto cartesiano $X \times Y$ es normal.*
3. *Para cada espacio compacto Y tal que $w(Y) \leqslant w(X)$ el producto cartesiano $X \times Y$ es normal.*
4. *El producto cartesiano $X \times I^{w(X)}$ es normal.*

3.4 Otras caracterizaciones –Particiones de la unidad

Una familia $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de funciones continuas de un espacio X en el intervalo unitario cerrado $I = [0, 1]$ es una partición de la unidad en el espacio X si $\Sigma_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) = 1$ para cada $x \in X$.

Es importante mencionar que la última igualdad significa que para cada $x_0 \in X$ el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : f_\alpha(x_0) \neq 0\}$ es a lo más numerable y que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\alpha_i}(x_0)$, donde $\{\alpha_1, \alpha_2, ...\} = \{\alpha \in \Lambda : f_\alpha(x_0) \neq 0\}$ converge a 1. Note que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\alpha_i}(x_0)$ converge absolutamente, y por ello, el arreglo de los términos no importa y como converge a 1 significa que 1 es el límite mínimo superior del conjunto que consiste de todos los números de la forma

$$f_{\alpha_1}(x_0) + f_{\alpha_2}(x_0) + ... + f_{\alpha_k}(x_0), \text{ donde } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \Lambda \text{ y } k = 1, 2, ...$$

Diremos que una partición de la unidad $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ en un espacio X es localmente finita si la cubierta $\{f_\alpha^{-1}((0, 1])\}_{\alpha \in \Lambda}$ del espacio X es localmente finita.

Una partición de la unidad $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ en un espacio X es subordinada a la cubierta $\mathcal{U}$ de X si la cubierta $\{f_\alpha^{-1}((0, 1])\}_{\alpha \in \Lambda}$ del espacio X es un refinamiento de $\mathcal{U}$.

La idea de esta sección es demostrar dos caracterizaciones de paracompacidad en términos de particiones de la unidad; estas caracterizaciones son muy útiles no solamente en Topología sino también en Análisis y Geometría Diferencial. El Teorema que continen estas caracterizaciones está precedido por los siguientes resultados.

3.4.1 PROPOSICIÓN. *Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia localmente finita (discreta), entonces la familia $\{\overline{A_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ tambien es localmente finita (discreta).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia localmente finita. Esto es, para cada $x \in X$, existe W abierto con $x \in W$ y $A_1, A_2, ..., A_n$ tal que si $A \neq A_\alpha$ con $\alpha \in \Lambda$ tenemos que $W \bigcap A = \emptyset$

Debemos probar que $\overline{f} = \{\overline{A_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ tambin es localmente finita, es decir, hay que probar que para cada $x \in X$, existe W abierto con $x \in W$ y $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$ tal que si $\overline{A} \neq \overline{A_\alpha}$ con $\alpha \in \Lambda$ tenemos que $W \bigcap \overline{A} = \emptyset$

De aqui deducimos que lo que hay que probar es lo siguiente: sabemos que $W \bigcap A = \emptyset$ y dado que W es un abierto entonces hay que probar que $W \bigcap \overline{A} = \emptyset$

Para demostrarlo supongamos que $W \bigcap A = \emptyset$ y que $W \bigcap \overline{A} \neq \emptyset$. Luego entonces tenemos que $\exists\ x \in W \bigcap \overline{A}$, de aquí que $x \in W$ que es un abierto y $x \in \overline{A}$ entonces por la proposición 1.3.8 tenemos que $W \bigcap A \neq \emptyset$ llegando así a una contradicción. □

El siguiente Lema es en esencia la implicación (3) ⇒ (4) del Teorema 2.2.8 con el fin de ser lo más explícitos posibles, repetiremos aquí la demostración de dicha implicación.

3.4.2 LEMA. *Si cada cubierta abierta de un espacio regular X tiene un refinamiento localmente finito (que consiste de conjuntos arbitrarios), entonces para cada cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ del espacio X existe una cubierta cerrada localmente finita $\{F_s\}_{\alpha\in\Lambda}$ de X tal que $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la regularidad de X existe una cubierta abierta W del espacio X tal que $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ es un refinamiento de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Tomemos un refinamiento localmente finito $\{A_t\}_{t\in T}$ de la cubierta $\mathcal{W}$. Para cada $t \in T$ escogemos un

$alpha(t) \in T$ tal que $\overline{A}_t \subseteq U_{\alpha(t)}$, y definimos $F_\alpha = U_{\alpha(t)=\alpha}\overline{A}_t$. De los Teoremas 2.2.4 y 3.4.1 se sigue que $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cubierta cerrada localmente finita de X y la definición de los F_α implica que $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$ □

3.4.3 Observación. Notemos que en la demostración del lema anterior, si la cubierta $\{A_t\}_{t\in T}$ es abierta entonces los conjuntos $V_\alpha = U_{\alpha(t)=\alpha}A_t$ son abiertos y $\overline{V}_\alpha = F_\alpha$. Por lo tanto, para cada cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de un espacio paracompacto existe una cubierta localmente finita abierta $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $\overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$

Por otro lado tenemos el siguiente hecho sobre funciones continuas fácil de demostrar.

3.4.4 Proposición. *Una función f de un espacio topológico X a un espacio topológico Y es continua si y sólo si para cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U tal que $f|U$ es continuo.*

3.4.5 Lema. *Si para una cubierta abierta $\mathfrak{U}$ de un espacio X existe una partición de la unidad $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ subordinada a esta, entonces $\mathfrak{U}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Demostración. Para empezar, observemos que para cada función continua $g : X \to I$ y cualquier punto $x_0 \in X$ que satisface $g(x_0) > 0$, existe una vecindad U_0 del punto x_0 y un conjunto finito $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ tal que

(1) $f_0(x) < g(x)$ para cada $x \in U_0$ y $\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda_0$.

Efectivamente, fácilmente verificamos que cualquier conjunto $\Lambda_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\} \subseteq \Lambda$ tal que $1 - \sum_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}(x_0) < g(x_0)$, el conjunto abierto $U_0 = \{x \in X : 1 - \sum_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}(x) < g(x)\}$ satisface (1).

Para cada $x \in X$ existe un $\alpha(x) \in \Lambda$ tal que $f_{\alpha(x)}(x) > 0$. Haciendo $g = f_{\alpha(x)}$ en la observación de arriba inferimos de 3.4.4 que la fórmula $f(x) = sup_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(x)$ define una función continua $f : X \to (0, 1]$.

Para cada $\alpha \in \Lambda$ el conjunto $V_\alpha = \{x \in X : f_\alpha(x) > \frac{1}{2}f(x)\}$

es abierto, y la familia $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Definiendo $g = \frac{1}{2}f$ en nuestra observación original podemos concluir que $\mathcal{V}$ es una familia localmente finita. □

3.4.6 PROPOSICIÓN. *Para cada espacio X T_1, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El espacio X es paracompacto.*
2. *Cada cubierta abierta del espacio X tiene una partición localmente finita subordinada a ésta.*
3. *Cada cubierta abierta del espacio X tiene una partición de la unidad subordinada a ésta.*

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2) Asumiremos que X es paracompacto y consideremos una cubierta abierta $\mathcal{A}$ de X. Sea $\mathcal{U} = \{U_s\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{A}$. Por el Lema 3.4.2 existe una cubierta cerrada $\{F_s\}_{\alpha\in\Lambda}$ del espacio X tal que $F_s \subseteq U_s$ para cada $s \in S$.Del Lemma de Urysohn se sigue que para cada $\alpha \in \Lambda$ podemos encontrar una función continua $g_s : X \to I$ tal que $g_s(x) = 0$ para $x \in X \setminus U_s$ y $g_s(x) = 1$ para $x \in F_s$. La familia $CalU$ es localmente finita, dejando $g(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda} g_s(x)$ nosotros definimos una función continua $g : X \to R$. Fácilmente vemos que $\{f_s\}_{s\in S}$, donde $f_s = g_s/g$, es una partición localmente finita de la unidad subordinada a $\mathcal{A}$. Por lo tanto la implicación está establecida.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es obvia.

(3) $\Rightarrow$ (1). Esta implicación, por el Lema 3.4.5, se reduce a demostrar que cada espacio X que es T_1 que satisface (3) es un espacio Hausdorff. Considere un par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$. La cubierta abierta $\mathcal{U} = \{X \setminus \{x_1\}, X \setminus \{x_2\}\}$ del espacio X tiene una partición de la unidad $\{f_s\}_{s\in S}$ subordinada a este. Tomemos un $s_0 \in S$ tal que $f_{s_0}(x_1) = a > 0$; entonces el conjunto $f_{s_0}^{-1}((0,1])$ esta contenida en $X \setminus \{x_2\}$, nosotros tenemos $f_{s_0}(x_2) = 0$. Los conjuntos abiertos $U_1 = f_{s_0}^{-1}((a/2,1])$ y $U_2 = f_{s_0}^{-1}([0,a/2))$ son disjuntos y contienen x_1 y x_2 respectivamente. □

Bibliografía

[1] F. Casarrubias Segura, A. Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología de conjuntos*, Manuscrito 2010 .

[2] D.K. Burke, *Covering properties*, K. Kunen (ed.) J.E. Vaughan (ed.) , Handbook of Set-Theoretic Topology , North-Holland, 1984.

[3] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol 6, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[4] O. G. Okunev, *Notas del curso de Topología I*, Facultad de Ciencias. UNAM. Manuscrito.

[5] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley series in Mathematics, USA, 1970.

[6] L. A. Steen, J. A. Seebach, *Countrerexamples in Topology*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1978.