UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBLEMAS DE MÁXIMO Y MÍNIMOS CON UNA O VARIAS VARIABLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A

GABRIELA GUADALUPE CRUZ MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

2011

1. Datos del alumno Cruz Martínez Gabriela Guadalupe 56 93 91 98 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría 30405675-4
2. Datos del tutor M. en C. de Oteyza de Oteyza Elena
3. Datos del sinodal 1 M. en C. Argueta Villamar Héctor
4. Datos del sinodal 2 M. en C. Gómez Ortega José Antonio
5. Datos del sinodal 3 M. en C. Lam Osnaya Emma
6. Datos del sinodal 4 Dr. Brambila Paz Fernando
7. Datos del trabajo escrito Problemas de máximos y mínimos con una o varias variables 99p. 2011.

Índice General

Introducción

Los problemas de optimización desembocan en la búsqueda del máximo o mínimo de una función en su dominio o en una parte de él.

Los más sencillos de resolver, son aquellos que sólo tienen una variable, ya que con solo derivar, encontrar los puntos donde la primera derivada se hace cero y utilizar el criterio de la segunda derivada, se puede obtener la solución. Cuando en el problema hay dos variables, de tal manera que una de ellas se puede escribir en términos de la primera, el problema se reduce a uno que puede resolverse con cálculo de una variable. Por supuesto hay problemas de máximos y mínimos que involucran tres o más variables, sin embargo ellos no serán abordados en este trabajo.

En los casos de problemas de dos variables que mencionamos en el párrafo anterior, la dificultad radica en plantear la función que se va a optimizar y la ecuación auxiliar que involucra las restricciones del problema.

Cuando se quiere determinar los máximos o mínimos de una función sometida a una o más restricciones, no siempre es posible resolver la restricción para alguna de las variables en términos de las otras, pero se puede seguir un método para determinar los puntos donde se alcanzan los máximos o mínimos; tal procedimiento se denomina Método de los Multiplicadores de Lagrange. Este método reduce el problema restringido con n variables a uno sin restricciones de $n + k$ variables, donde k es igual al número de restricciones, pero cuyas ecuaciones pueden ser resueltas más fácilmente. Una vez encontrados los posibles candidatos, se utiliza el hessiano limitado para determinar la naturaleza de ellos. Aunque no es la única manera para determinar qué tipo de puntos son, en este trabajo es el que usaremos.

Muchos libros de cálculo de una sola variable, tiene ejemplos de problemas de optimización que involucran varias variables, en ese caso se plantea el problema y se escriben las variables en términos de una sola, reduciéndose así el problema a encontrar el máximo o el mínimo de una función real de variable real. Dichos problemas pueden ser resueltos considerando todas las variables mediante el uso del Método de los Multiplicadores de Lagrange, que si bien es cierto que aparece en los textos de cálculo de varias variables, el número de ejemplos es reducido, sin duda porque el proceso resulta largo.

En este trabajo se presenta una colección de problemas de optimización. Cada uno de ellos está resuelto utilizando primero el Criterio de la segunda derivada y posteriormente, usando el Método de Multiplicadores de Lagrange; por supuesto en ambos casos se obtiene el mismo resultado. La mayoría son problemas clásicos del cálculo de una variable, ninguno de ellos aparece resuelto en los textos de cálculo de varias variables.

PRELIMINARES

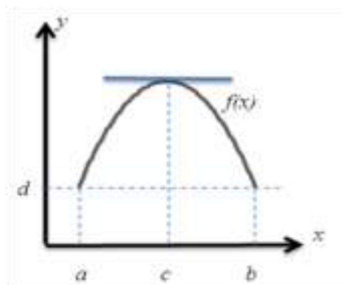
TEOREMA DE ROLLE

Sea f una función **continua** en $[a, b]$ y **diferenciable** en (a, b). Si

$$f(a) = f(b),$$

entonces, hay por lo menos un punto c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

La interpretación geométrica del **teorema de Rolle** nos dice que hay un punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función es paralela al eje de las abscisas.



TEOREMA DE LOS VALORES EXTREMOS

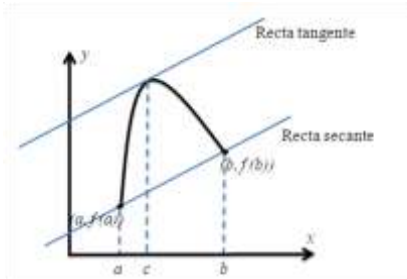
Sea f una función **continua** en $[a, b]$ entonces f alcanza tanto un mínimo como un máximo sobre este intervalo. El máximo y el mínimo pueden ocurrir en los extremos del intervalo.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea f una función **continua** sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y **diferenciable** en (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

La interpretación geométrica del **teorema del valor medio** nos dice que hay un punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función es paralela a la secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Sea f una función derivable en (a, b) excepto quizá en $c \in (a, b)$, entonces

- Si $f'(x) < 0$ en (a, c) y $f'(x) > 0$ en (c, b), entonces $f(c)$ es el valor mínimo de f en (a, b).
- Si $f'(x) > 0$ en (a, c) y $f'(x) < 0$ en (c, b), entonces $f(c)$ es el valor máximo de f en (a, b).

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto que contiene a c.

- Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
- Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
- Si $f''(c) = 0$, este criterio no decide y ha de recurrirse al criterio de la primera derivada.

EXTREMOS CON RESTRICCIONES

Cuando se quiere determinar los máximos o mínimos de una función sometida a una o más restricciones por ejemplo el de encontrar la distancia mínima que hay entre una superficie y el origen, no siempre es posible resolver la restricción para alguna de las variables en términos de las otras, pero se puede seguir un método para determinar dichos puntos máximos o mínimos; dicho procedimiento se denomina Método de los Multiplicadores de Lagrange y consiste en lo siguiente:

Reduce el problema restringido con n variables a uno en el que hay que resolver un sistema de ecuaciones con $n + k$ variables, donde k es igual al número de restricciones.

Podemos necesitar optimizar $f(x, y)$ sujeta a la condición adicional de que (x, y) también satisfaga una ecuación $g(x, y) = c$, donde g es alguna función y c es una constante. El conjunto de dichos puntos (x, y) es la curva de nivel de g de valor c.

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 dadas y S el conjunto de nivel de g de valor c. Sean $v_o \in U$, $g\ (v_o) = c$, si $\nabla g(v_o) \neq 0$, entonces si $f\big|S$ (f restringida a S) tiene un máximo o un mínimo local en v_o, existe un número real λ tal que

$$\nabla f(v_o) = \lambda \nabla g(v_o).$$

Esta idea es esencialmente la extensión natural del método usual para funciones de una variable, buscar máximos o mínimos entre sus puntos críticos.

Una vez que se tienen los puntos críticos utilizamos el siguiente criterio para determinar si son máximos o mínimos:

HESSIANO LIMITADO

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^2. Sean $v_o \in U$, $g\ (v_o) = c$ y S el conjunto de nivel de g de valor c. Supongamos que $\nabla g(v_o) \neq 0$ y que existe un número real λ tal que $\nabla f(v_o) = \lambda \nabla g(v_o)$. Formamos la función auxiliar

$$h(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

y el determinante hessiano limitado

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

evaluado en v_o. Entonces:

- Si $|\overline{H}| > 0$, entonces v_o es un punto máximo local de $f\big|S$
- Si $|\overline{H}| < 0$, entonces v_o es un punto mínimo local de $f\big|S$

I. Encontrar dos números positivos cuya suma sea 110 y su producto sea máximo.

Solución1:

Si

$$x+y=110.$$

Entonces

$$x=110-y.$$

Queremos maximizar

$$P(y)=(110-y)y.$$

Calculamos la primera derivada

$$P'(y)=110-2y$$

e igualamos a cero

$$y=55.$$

Éste es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$P''(y)=-2.$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$P''(55)=-2<0.$$

Así, P tiene un máximo en

$$y=55.$$

Por lo tanto, los números positivos cuya suma es 110 y su producto es máximo son

$$x=55 \quad \text{y} \quad y=55.$$

Que dan como resultado un producto de 3025.

Solución 2:

Sea

$$f(x,y)=xy.$$

Con la restricción

$$x+y=110.$$

Consideramos

$$g(x,y)=x+y.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x$$
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=1.$$

Entonces,

$$(y,x)=\lambda(1,1).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$\begin{aligned} y&=\lambda \\ x&=\lambda \\ x+y&=110. \end{aligned}$$

Así,

$$x=55 \quad , \quad y=55 \quad \text{y} \quad \lambda=55.$$

Entonces tenemos $v_o=(55,55)$, $g(55,55)=110$, S es la curva de nivel para g de valor 110, $\nabla g(v_o)\neq 0$ y existe $\lambda=55$ tal que $\nabla f(v_o)=\lambda\nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y)&=f(x,y)-\lambda g(x,y) \\ &=xy-\lambda(x+y). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right|=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y} \\ -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(x, y)$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}=y-\lambda \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}=x-\lambda$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}=0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y}=1.$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

Entonces $(55,55)$, es un máximo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 110. Por lo tanto, los números positivos cuya suma es 110 y su producto es máximo son

$$x = 55 \quad \text{y} \quad y = 55.$$

Que dan como resultado un producto de 3025.

II. Encontrar dos números positivos tales que su producto sea 192 y su suma sea mínima

Solución1:

Si

$$xy = 192$$

entonces

$$y = \frac{192}{x}.$$

Queremos minimizar

$$S(x) = x + \frac{192}{x}.$$

Calculamos la derivada

$$S'(x) = 1 - 192x^{-2}$$

e igualamos a cero

$$x = \sqrt{192}.$$

Calculamos la segunda derivada

$$S''(x) = 2(192)x^{-3}$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$S''\left(\sqrt{192}\right) = 2(192)\left(\sqrt{192}\right)^{-3} > 0.$$

Así, S tiene un mínimo en

$$x = \sqrt{192}.$$

Por lo tanto, los números positivos tales que su producto es 192 y su suma es mínima son

$$x = \sqrt{192} \qquad \text{y} \qquad y = \sqrt{192}$$

Que dan como resultado una suma aproximadamente de 27.7.

Solución 2:

Sea

$$f(x, y) = x + y.$$

Con la restricción

$$xy = 192.$$

Consideramos

$$g(x, y) = xy.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = x.$$

Entonces,

$$(1,1) = \lambda(y,x).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda y \\ 1 &= \lambda x \\ xy &= 192. \end{aligned}$$

Así,

$$x = \sqrt{192} \quad , \quad y = \sqrt{192} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{192}}.$$

Entonces tenemos $v_o = \left(\sqrt{192}, \sqrt{192}\right)$, $g\left(\sqrt{192}, \sqrt{192}\right) = 192$, S es la curva de nivel para g de valor 192, $\nabla g(v_o) \neq 0$ y existe $\lambda = \frac{1}{\sqrt{192}}$ tal que $\nabla f(v_o) = \lambda \nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y) &= f(x,y) - \lambda g(x,y) \\ &= x + y - \lambda(xy). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(x, y)$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = 1 - \lambda y \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = 1 - \lambda x$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} = -\lambda.$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{192} & -\sqrt{192} \\ -\sqrt{192} & 0 & -\lambda \\ -\sqrt{192} & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = -384\lambda$$

Evaluando en λ

$$-384\lambda = -\frac{384}{\sqrt{192}} < 0$$

Entonces $\left(\sqrt{192}, \sqrt{192}\right)$, es un mínimo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 192. Por lo tanto, los números positivos tales que su producto es 192 y su suma es mínima son

$$x = \sqrt{192} \qquad \text{y} \qquad y = \sqrt{192}$$

Que dan como resultado una suma aproximadamente de 27.7.

III. Encontrar dos números positivos tales que el producto sea 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima

Solución1:

Si

$$xy = 192$$

entonces

$$x = \frac{192}{y}.$$

Queremos minimizar

$$S = 3y + \frac{192}{y}.$$

Calculamos la primera derivada

$$S'(y) = -192y^{-2} + 3.$$

e igualamos a cero

$$y = 8.$$

Éste es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$S''(y) = 2(192)\,y^{-3}.$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$S''(8) = 2(192)(8)^{-3} > 0.$$

Así, S tiene un mínimo en

$$y = 8.$$

Por lo tanto, los números son

$$x = 24 \qquad \text{y} \qquad y = 8.$$

Y la suma es 32.

Solución 2:

Sea

$$f(x, y) = x + 3y.$$

Con la restricción

$$xy = 192.$$

Consideramos

$$g(x, y) = xy.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3$$
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = x.$$

Entonces,

$$(1,3) = \lambda(y, x).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$1 = \lambda y \qquad (a)$$
$$3 = \lambda x \qquad (b)$$
$$xy = 192 \qquad (c).$$

Despejando λ de (a)

$$\lambda = \frac{1}{y}.$$

Sustituyendo λ de (b)

$$3 = \frac{x}{y}$$
$$x = 3y.$$

Sustituyendo x en (c)

$$y(3y) = 192$$
$$y^2 = \frac{192}{3}$$
$$y = 8.$$

Así,

$$x = 24, \qquad y = 8 \qquad \text{y} \qquad \lambda = \frac{1}{8}$$

Entonces tenemos $v_o = (24,8)$, $g(24,8) = 192$, S es la curva de nivel para g de valor 192, $\nabla g(v_o) \neq 0$ y existe $\lambda = \frac{1}{8}$ tal que $\nabla f(v_o) = \lambda \nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y) &= f(x,y) - \lambda g(x,y) \\ &= x + 3y - \lambda(xy). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(x, y)$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = 1 - \lambda y \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = 3 - \lambda x$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} = -\lambda.$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\begin{aligned} \left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -24 \\ -8 & 0 & -\lambda \\ -24 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} &= 8[-24\lambda] - 24[8\lambda] \\ &= -16[24\lambda] \end{aligned}$$

evaluando en λ

$$-16\left[24\frac{1}{8}\right]=-48<0$$

Entonces $(24,8)$, es un mínimo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 192.

Por lo tanto, los números son

$$x=24 \quad \text{y} \quad y=8.$$

Y la suma es 32.

IV. Encontrar la longitud y el ancho del rectángulo con perímetro p y área máxima.

Solución1:

Llamamos x y y al largo y al ancho del rectángulo respectivamente.

Como

$$2x+2y=p$$

entonces

$$x=\frac{p-2y}{2}.$$

Se quiere maximizar

$$A(y)=y\left(\frac{p-2y}{2}\right)$$

Calculamos la primera derivada

$$A'(y)=\frac{p}{2}-2y.$$

e igualamos a cero

$$y=\frac{p}{4}.$$

Éste es el valor crítico.
Calculamos la segunda derivada

$$A''(y)=-2.$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$A''\left(\frac{p}{4}\right)=-2<0.$$

Por lo tanto, A tiene un máximo en

$$y=\frac{p}{4}.$$

Con este valor de y obtenemos que

$$x=\frac{p}{4}.$$

Así el área máxima se obtiene con un cuadrado de lado $\frac{p}{4}$ con un área de $\frac{p^2}{16}$ unidades cuadradas.

Solución 2:

Sea

$$f(x,y)=xy.$$

Con la restricción

$$2x+2y=p.$$

Consideramos

$$g(x,y)=2x+2y.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y \qquad\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=2 \qquad\qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=2.$$

Entonces,

$$(y,x)=\lambda(2,2).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$y=2\lambda \qquad (a)$$

$$x=2\lambda \qquad (b)$$

$$2x+2y=p \qquad (c).$$

De (a) y (b) tenemos que $x = y$.

Así,

$$x=\frac{p}{4}\ , \quad y=\frac{p}{4} \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{p}{8}.$$

Entonces tenemos $v_o=\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4}\right)$, $g\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4}\right)=p$, S es la curva de nivel para g de valor p, $\nabla g(v_o)\neq 0$ y existe $\lambda=\frac{p}{8}$ tal que $\nabla f(v_o)=\lambda\nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y) &= f(x,y)-\lambda g(x,y) \\ &= xy-\lambda(2x+2y). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w\,(x, y)$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = y - 2\lambda \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = x - 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} = 1.$$

Por lo que el hessiano resultante es

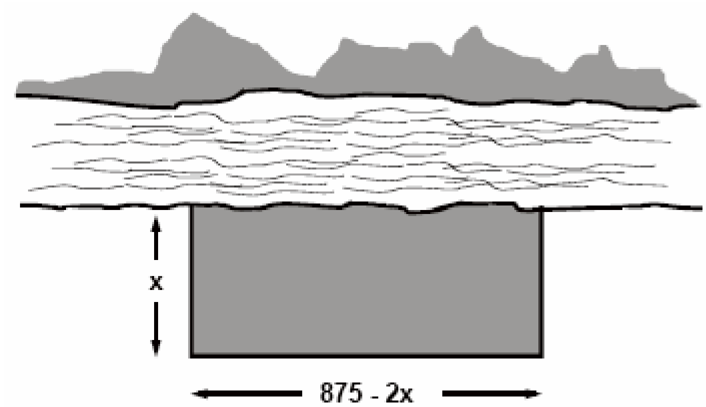
$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Entonces $\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{4}\right)$, es un máximo local para $f\,|\,S$, donde S es la curva de nivel para g de valor p.

Así el área máxima se obtiene con un cuadrado de lado $\frac{p}{4}$ con un área de $\frac{p^2}{16}$ unidades cuadradas.

V. Con 875 metros de rollo de alambrada debe cercarse un terreno rectangular por tres de sus lados, ya que el cuarto lado estará limitado por el cauce de un río. ¿De qué medidas deberá hacerse para que su superficie sea la máxima abarcada?

Solución 1:



Sea x la altura del rectángulo; por lo tanto, la base será $875-2x$ y la superficie del terreno será

$$S(x)=x(875-2x)$$
$$S(x)=875x-2x^2.$$

Calculamos la primera derivada:

$$S'(x)=875-4x$$

e igualamos a cero

$$875-4x=0$$
$$x=\frac{875}{4}.$$

Éste es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$S''(x)=-4.$$

Sustituimos el valor crítico en la segunda derivada

$$S''\left(\frac{875}{4}\right)=-4<0.$$

Por lo tanto, S tiene un máximo en

$$x=\frac{875}{4}=218.75.$$

Entonces, las dimensiones del terreno deben ser

$$218.75\times 437.5 \text{ metros.}$$

Solución 2:

Sea

$$f(x,y)=xy.$$

Con la restricción

$$2x+y=875.$$

Consideramos

$$\begin{aligned} g(x,y)&=2(x+y)-y \\ &=2x+y. \end{aligned}$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x$$
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=2 \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=1.$$

Entonces,

$$(y,x)=\lambda(2,1).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción tenemos que,

$$\begin{aligned} y&=2\lambda & (a) \\ x&=\lambda & (b) \\ 2x+y&=875 & (c). \end{aligned}$$

Sustituimos λ en (a)

$$y=2x.$$

sustituimos y en (c)

$$\begin{aligned} 2x+2x&=875 \\ 4x&=875 \\ x&=\frac{875}{4}. \end{aligned}$$

Así,

$$x=\frac{875}{4} \quad , \quad y=\frac{875}{2} \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{875}{4}.$$

Entonces tenemos $v_o = \left(\frac{875}{4}, \frac{875}{2} \right)$, $g\left(\frac{875}{4}, \frac{875}{2} \right) = 875$. S es la curva de nivel para g de valor 875, $\nabla g\left(v_o\right) \neq 0$ y existe $\lambda = \frac{875}{4}$ tal que $\nabla f\left(v_o\right) = \lambda \nabla g\left(v_o\right)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x, y) &= f(x, y) - \lambda g(x, y) \\ &= xy - \lambda(2x + y). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & -\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \\ -\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} & \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(x, y)$

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = y - 2\lambda \qquad \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = x - \lambda$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} = 1$$

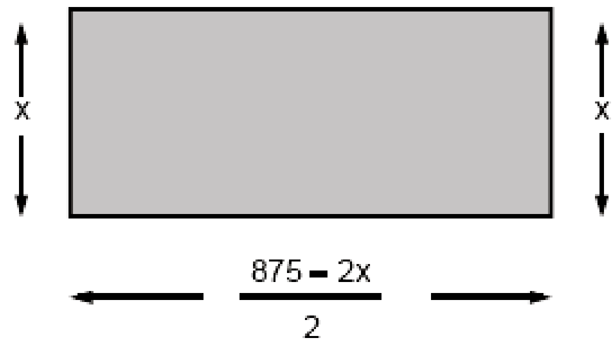
Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Entonces $\left(\frac{875}{4}, \frac{875}{2} \right)$ es un máximo local para $f\left|S\right.$, donde S es la curva de nivel para g de valor 875.

VI. Con 875 metros de rollo de alambrada debe cercarse un terreno rectangular por sus cuatro lados. ¿De qué medidas deberá hacerse para que su superficie sea la máxima abarcada?

Solución1:



Sea x la altura del rectángulo; por lo tanto, la base será

$$\frac{875-2x}{2}$$

y la superficie del terreno será

$$S(x)=x\left(\frac{875-2x}{2}\right).$$

Calculamos la primera derivada,

$$S'(x)=\frac{1}{2}(875-4x)$$

e igualamos a cero

$$x=\frac{875}{4}.$$

Éste es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$S''(x)=-2.$$

Sustituimos el valor crítico en la segunda derivada

$$S''\left(\frac{875}{4}\right)=-2<0.$$

Por lo tanto, S tiene un máximo en

$$x=\frac{875}{4}.$$

El terreno debe ser un cuadrado de 218.75 metros de lado.

Solución 2:
Sea
$$f(x,y)=xy.$$
Con la restricción
$$2(x+y)=875.$$
Consideramos
$$g(x,y)=2(x+y).$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y).$$
Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x$$
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=2 \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=2.$$
Entonces,
$$(y,x)=\lambda(2,2).$$
Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$y=2\lambda \qquad (a)$$
$$x=2\lambda \qquad (b)$$
$$2x+2y=875 \qquad (c).$$
Como $x = y$
$$x=\frac{875}{4} \quad , \quad y=\frac{875}{4} \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{875}{8}$$

Entonces tenemos $v_o=\left(\frac{875}{4},\frac{875}{4}\right)$, $g\left(\frac{875}{4},\frac{875}{4}\right)=875$, S es la curva de nivel para g de valor 875, $\nabla g(v_o)\neq 0$ y existe $\lambda=\frac{875}{8}$ tal que $\nabla f(v_o)=\lambda\nabla g(v_o)$.
Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y) &= f(x,y)-\lambda g(x,y) \\ &= xy-\lambda(2x+2y). \end{aligned}$$

El determinante hessiano limitado

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(x, y)$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = y - 2\lambda \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = x - 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} = 1$$

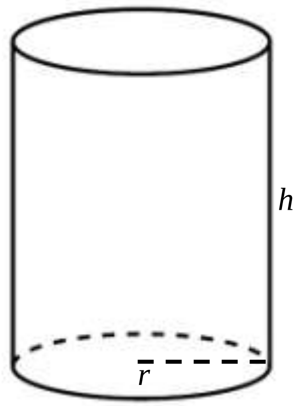
Por lo que el hessiano resultante es

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Entonces $\left(\frac{875}{4}, \frac{875}{4}\right)$ es un máximo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 875.

VII. Se deben construir envases cilíndricos de bebida con capacidad de 300 cm^3. Calcular las dimensiones que deben tener para que su costo sea el mínimo.

Solución1:



El costo de cada envase depende de la cantidad de material que se lleve; por lo tanto, el de costo mínimo será el que tenga menor superficie.

Suponemos que los envases tienen forma cilíndrica recta de espesor uniforme con altura h y radio r. Donde la base del rectángulo es igual al perímetro p de la circunferencia de la tapa.

Entonces el área del cilindro es

$$2\pi r^2 + ph$$

donde el perímetro p es igual a $p = 2\pi r$, por lo tanto, sustituyendo tenemos que el área es,

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Por otra parte, el volumen del envase es el área del círculo de una de las tapas por la altura del cilindro:

$$300 = \pi r^2 h$$
$$h = \frac{300}{\pi r^2}.$$

Sustituyendo h se tiene que:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{300}{\pi r^2}\right)$$
$$= 2\pi r^2 + \frac{600}{r}.$$

Calculamos la primera derivada:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{600}{r^2}$$

e igualamos a cero

$$4\pi r^3 - 600 = 0$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}.$$

Calculamos la segunda derivada

$$A''(r) = 4\pi + \frac{1200}{r^3}.$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right) = 4\pi + \frac{1200}{\left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)^3} > 0.$$

Así, A tiene un mínimo en

$$r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$$

Por lo tanto, las dimensiones que debe tener el cilindro para que su costo sea mínimo son:

$$r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}, \qquad h = \sqrt[3]{\frac{1200}{\pi}}$$

con las cuales se obtiene un área aproximada de 135.33 cm^2.

Solución 2:

Sea

$$f(h,r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Con la restricción

$$\pi r^2 h = 300.$$

Consideramos

$$g(h,r) = \pi r^2 h.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(h,r) = \lambda \nabla g(h,r).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(h,r)}{\partial h} = 2\pi r \qquad \frac{\partial f(h,r)}{\partial r} = 2\pi(2r+h)$$
$$\frac{\partial g(h,r)}{\partial h} = \pi r^2 \qquad \frac{\partial g(h,r)}{\partial r} = 2\pi rh.$$

Entonces,

$$\left(2\pi r, 2\pi(2r+h)\right) = \lambda\left(\pi r^2, 2\pi rh\right).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción tenemos que,

$$2\pi(2r+h) = \lambda 2\pi rh \qquad (a)$$
$$2\pi r = \lambda \pi r^2 \qquad (b)$$
$$\pi r^2 h = 300 \qquad (c).$$

Despejando λ de (b)

$$\lambda = \frac{2}{r}.$$

Sustituyendo λ en (a)

$$2\pi(2r+h) = \left(\frac{2}{r}\right)2\pi rh$$
$$(2r+h) = 2h$$
$$h = 2r.$$

Sustituyendo h en (c)

$$\pi r^2(2r) = 300$$
$$2\pi r^3 = 300$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}.$$

Así,

$$h = \sqrt[3]{\frac{1200}{\pi}} \quad , \quad r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}}$$

Entonces tenemos $v_o = \left(\sqrt[3]{\frac{1200}{\pi}}, \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)$, $g\left(\sqrt[3]{\frac{1200}{\pi}}, \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right) = 300$, S es la curva de nivel para g de valor 300, $\nabla g(v_o) \neq 0$ y existe $\lambda = \dfrac{2}{\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}}$ tal que $\nabla f(v_o) = \lambda \nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(h,r) &= f(h,r) - \lambda g(h,r) \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r h - \lambda \pi r^2 h. \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g(h,r)}{\partial h} & -\dfrac{\partial g(h,r)}{\partial r} \\ -\dfrac{\partial g(h,r)}{\partial h} & \dfrac{\partial^2 w(h,r)}{\partial h^2} & \dfrac{\partial^2 w(h,r)}{\partial h \partial r} \\ -\dfrac{\partial g(h,r)}{\partial r} & \dfrac{\partial^2 w(h,r)}{\partial h \partial r} & \dfrac{\partial^2 w(h,r)}{\partial r^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(h, r)$

$$\frac{\partial w(h,r)}{\partial h} = 2\pi r - \lambda \pi r^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(h,r)}{\partial r} &= 4\pi r + 2\pi h - 2\lambda \pi r h \\ &= 2\pi[2r + h - \lambda r h] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 w(h,r)}{\partial h^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(h,r)}{\partial r^2} = 2\pi[2 - \lambda h]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(h,r)}{\partial h \partial r} &= 2\pi - 2\pi\lambda r \\ &= 2\pi[1 - \lambda r]. \end{aligned}$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\pi r^2 & -2\pi r h \\ -\pi r^2 & 0 & 2\pi[1-\lambda r] \\ -2\pi r h & 2\pi[1-\lambda r] & 2\pi[2-\lambda h] \end{vmatrix} = -2\pi^3 r^3 (2r + 3\lambda r h - 4h)$$

Evaluando en v_o y en λ

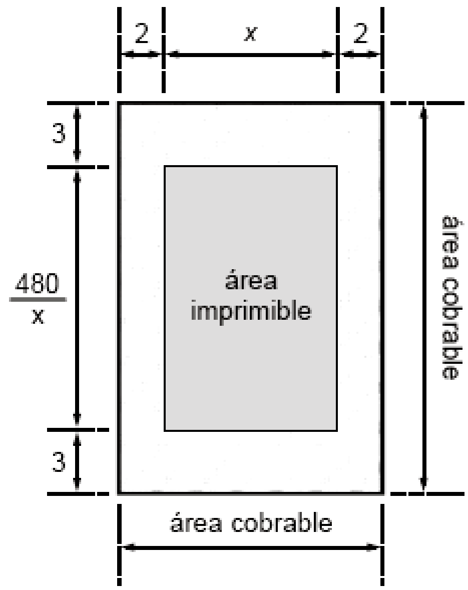
$$\left|\overline{H}\right| = -6600\pi \sqrt[3]{150}\sqrt[3]{\pi^2} < 0$$

Entonces $\left(\sqrt[3]{\frac{1200}{\pi}}, \sqrt[3]{\frac{300}{2\pi}}\right)$ Es un mínimo local para $f\big|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 300.

Por lo que el cilindro debe tener aproximadamente 3.627 cm de radio y 7.25 cm de altura.

VIII. Una agencia de publicidad cobra por centímetro cuadrado del área total empleada (área cobrable), lo que incluye el área imprimible más dos márgenes de 2 cm a la izquierda y a la derecha y dos de 3 cm arriba y abajo. Un cliente necesita mandar hacer una publicidad que tenga 480 cm^2 de área impresa. Calcular las dimensiones que debe tener la región cobrable para que el costo sea el mínimo.

Solución1:



Sea x la base del rectángulo del área imprimible. Por lo tanto, como dicha área debe ser de 480 cm^2, la altura es $\dfrac{480}{x}$.

Por lo que el área cobrable es

$$A(x) = (x+4)\left(\frac{480}{x}+6\right).$$

Calculamos la primera derivada:

$$\begin{aligned} A'(x) &= (x+4)\left(-\frac{480}{x^2}\right)+\left(\frac{480}{x}+6\right) \\ &= \frac{-480x-1920}{x^2}+\frac{480+6x}{x} \end{aligned}$$

e igualamos a cero

$$\begin{aligned} 480x+6x^2 &= 480x+1920 \\ x^2 &= 320 \\ x &= 8\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Éste es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$A''\left(x\right)=2(1920)(x^{-3}).$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$A''\left(8\sqrt{5}\right)=\left(3840\right)\left(\left[8\sqrt{5}\right]^{-3}\right)>0.$$

De donde, A tiene un máximo en

$$x=8\sqrt{5}.$$

Entonces:

Las dimensiones del área cobrable deben ser aproximadamente de 21.8 cm $\times$ 32.8 cm que dan un área cobrable de 718.6 cm^2.

Solución 2:

Sea

$$f\left(x,y\right)=(x+4)(y+6).$$

Con la restricción

$$xy=480.$$

Consideramos

$$g\left(x,y\right)=xy.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f\left(x,y\right)=\lambda\nabla g\left(x,y\right).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=y+6 \qquad \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=x+4$$
$$\frac{\partial g\left(x,y\right)}{\partial x}=y \qquad \frac{\partial g\left(x,y\right)}{\partial y}=x.$$

Entonces,

$$\left(6+y,x+4\right)=\lambda\left(y,x\right)$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción tenemos que,

$$\begin{aligned} 6+y&=\lambda y && (a)\\ 4+x&=\lambda x && (b)\\ xy&=480 && (c)\ . \end{aligned}$$

Despejando λ de (a)

$$
\begin{aligned}
6+y &= \lambda y \\
\lambda &= \frac{6+y}{y} \\
&= \frac{6}{y}+1.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo λ en (b)

$$
\begin{aligned}
4+x &= \left(\frac{6}{y}+1\right)x \\
\frac{4}{x}+1 &= \frac{6}{y}+1 \\
\frac{4}{x} &= \frac{6}{y} \\
x &= \frac{2}{3}y.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo y en (c)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}y\right)y &= 480 \\
\frac{2}{3}y^2 &= 480 \\
y &= 12\sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{6}{12\sqrt{5}}+1 \\
&= \frac{1+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

Así,

$$
x = 8\sqrt{5} \quad , \quad y = 12\sqrt{5} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{1+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}
$$

Entonces tenemos $v_o = \left(8\sqrt{5}, 12\sqrt{5}\right)$, $g\left(8\sqrt{5}, 12\sqrt{5}\right) = 300$, S es la curva de nivel para g de valor 480, $\nabla g\left(v_o\right) \neq 0$ y existe $\lambda = \frac{1+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ tal que $\nabla f\left(v_o\right) = \lambda \nabla g\left(v_o\right)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y) &= f(x,y) - \lambda g(x,y) \\ &= (x+4)(y+6) - \lambda xy. \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(x, y)$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = y + 6 - \lambda y \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = x + 4 - \lambda x$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} = 1 - \lambda$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -y & -x \\ -y & 0 & 1-\lambda \\ -x & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = 2xy(1-\lambda).$$

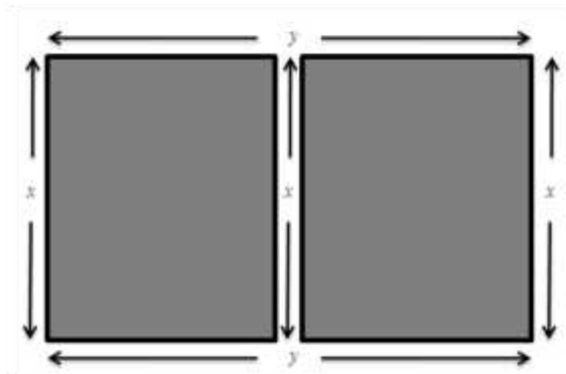
Evaluando en v_o y en λ

$$2xy(1-\lambda) = 960\left[1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} + 1\right)\right] < 0.$$

Entonces $\left(8\sqrt{5}, 12\sqrt{5}\right)$ es un mínimo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 480.

IX. Con un rollo de 270 metros de alambrada se deben construir dos corrales adyacentes idénticos. Calcular las dimensiones que debe tener el cercado para que el área abarcada sea máxima.

Solución1:



Sean x el ancho y y la longitud del cercado total. Como se dispone de 270 metros de alambrada y se van a emplear 3 secciones de longitud x y dos de longitud y, entonces $3x+2y=270$, de donde

$$y=135-\frac{3x}{2}.$$

El área total es

$$A(x)=xy=x\left(135-\frac{3x}{2}\right).$$

Calculamos la primera derivada:

$$A'(x)=135-3x.$$

e igualamos a cero

$$x=45.$$

Éste es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$A''(x)=-3.$$

Sustituimos el valor crítico en la segunda derivada

$$A''(45)=-3<0.$$

Por lo tanto, A tiene un máximo en

$$x = 45.$$

Entonces, tenemos que $y = 135 - \frac{3[45]}{2} = \frac{135}{2}$

Por lo que las dimensiones de los corrales deben ser de $45 \times \frac{135}{2}$ metros, que dan el área máxima aproximada de 3037.5 metros cuadrados.

Solución 2:

Sea

$$f(x, y) = xy.$$

Con la restricción

$$3x + 2y = 270.$$

Consideramos

$$g(x, y) = 3x + 2y.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 3 \qquad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 2.$$

Entonces,

$$(y, x) = \lambda(3, 2).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción tenemos que,

$$\begin{aligned} y &= 3\lambda && (a) \\ x &= 2\lambda && (b) \\ 3x + 2y &= 270 && (c). \end{aligned}$$

Despejando λ de (a)

$$\lambda = \frac{y}{3.}$$

Sustituyendo λ en (b)

$$x = \frac{2}{3} y.$$

Sustituyendo x en (c)

$$3\left(\frac{2}{3}y\right)+2y=270$$
$$2y+2y=270$$
$$4y=270$$
$$y=\frac{135}{2}.$$

Así,

$$x=45 \quad , \quad y=\frac{135}{2} \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{45}{2}$$

Entonces tenemos $v_o=\left(45,\frac{135}{2}\right)$, $g\left(45,\frac{135}{2}\right)=135$, S es la curva de nivel para g de valor 270, $\nabla g(v_o)\neq 0$ y existe $\lambda=\frac{45}{2}$ tal que $\nabla f(v_o)=\lambda\nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y) &= f(x,y)-\lambda g(x,y) \\ &= xy-\lambda(3x+2y). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right|=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y} \\ -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(x, y)$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}=y-3\lambda \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}=x-2\lambda$$
$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}=0$$
$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y}=1.$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Entonces $\left(45, \frac{135}{2}\right)$, es un máximo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 270.

Por lo que las dimensiones de los corrales deben ser de $45 \times \frac{135}{2}$ metros, que dan el área máxima aproximada de 3037.5 metros cuadrados.

X. Un fabricante desea diseñar una caja abierta que tenga una base cuadrada y un área superficial de 108 centímetros cuadrados. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que el volumen sea máximo?

Solución1:

Como la caja tiene una base cuadrada, su volumen es

$$V = x^2 h.$$

El área superficial de la caja es

$$S = x^2 + 4xh = 108.$$

Despejando *h* de

$$\begin{aligned} x^2 + 4xh &= 108 \\ h &= \left(\frac{108 - x^2}{4x} \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo *h* tenemos

$$\begin{aligned} V &= x^2 h \\ &= x^2 \left(\frac{108 - x^2}{4x} \right) \\ &= 27x - \frac{x^3}{4}. \end{aligned}$$

Calculamos la primera derivada:

$$V'(x) = 27 - \frac{3x^2}{4}$$

e igualamos a cero

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 108 \\ x &= \pm 6. \end{aligned}$$

Por tanto, los números críticos son $x = \pm 6$. No se considera el -6 porque *x* es una longitud.

Entonces, 6 es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$V''(x) = -\frac{3x}{2}.$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$V''(6) = -\frac{3(6)}{2} < 0.$$

Así, *V* tiene un máximo en

$$x = 6.$$

Por lo tanto,

$$x = 6 \quad \text{y} \quad h = 3.$$

Las dimensiones de la caja deben ser de $6 \times 6 \times 3$.

Solución 2:

Sea

$$f(x,h) = x^2 h.$$

Con la restricción

$$x^2 + 4xh = 108.$$

Consideramos

$$g(x,h) = x^2 + 4xh.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x,h) = \lambda \nabla g(x,h).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x,h)}{\partial x} = 2xh \qquad \frac{\partial f(x,h)}{\partial h} = x^2$$

$$\frac{\partial g(x,h)}{\partial x} = 2x + 4h \qquad \frac{\partial g(x,h)}{\partial h} = 4x.$$

Entonces,

$$\left(2xh, x^2\right) = \lambda\left(2x + 4h, 4x\right).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción tenemos que,

$$2xh = 2\lambda x + 4\lambda h \qquad (a)$$

$$x^2 = 4\lambda x \qquad (b)$$

$$x^2 + 4xh = 108 \qquad (c).$$

Despejando λ de (b)

$$\lambda = \frac{x}{4}.$$

Sustituyendo λ en (a)

$$xh = \frac{x^2}{4} + \frac{xh}{2}$$
$$h = \frac{x}{4} + \frac{h}{2}$$
$$4h = x + 2h$$
$$2h = x.$$

Sustituyendo x en (c)

$$(2h)^2 + 4h(2h) = 108$$
$$4h^2 + 8h^2 = 108$$
$$h^2 = 9$$
$$h = 3.$$

Así,

$$x = 6 \quad , \quad h = 3 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{3}{2}.$$

Entonces tenemos $v_o = (6,3)$, $g(6,3) = 108$, S es la curva de nivel para g con valor 108, $\nabla g(v_o) \neq 0$ y existe $\lambda = \dfrac{3}{2}$ tal que $\nabla f(v_o) = \lambda \nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$w(x,h) = f(x,h) - \lambda g(x,h)$$
$$= x^2 h - \lambda\left(x^2 + 4xh\right).$$

El determinante hessiano limitado

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g(x,h)}{\partial x} & -\dfrac{\partial g(x,h)}{\partial h} \\ -\dfrac{\partial g(x,h)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 w(x,h)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 w(x,h)}{\partial x \partial h} \\ -\dfrac{\partial g(x,h)}{\partial h} & \dfrac{\partial^2 w(x,h)}{\partial x \partial h} & \dfrac{\partial^2 w(x,h)}{\partial h^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(x, h)$

$$\frac{\partial w(x,h)}{\partial x} = 2xh - 2\lambda x - 4\lambda h \qquad \frac{\partial w(x,h)}{\partial h} = x^2 - 4\lambda x$$
$$\frac{\partial^2 w(x,h)}{\partial x^2} = 2h - 2\lambda \qquad \frac{\partial^2 w(x,h)}{\partial h^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(x,h)}{\partial x \partial h} = 2x - 4\lambda.$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -(2x+4h) & -4x \\ -(2x+4h) & 2h-2\lambda & 2x-4\lambda \\ -4x & 2x-4\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (2x+4h)\left[4x(2x-4\lambda)\right] - 4x\left\{-(2x+4h)(2x-4\lambda) + 4x(2h-2\lambda)\right\} \\
&= 4x(2x+4h)(2x-4\lambda) + 4x(2x+4h)(2x-4\lambda) - 16x^2(2x-4\lambda) \\
&= 8x(2x+4h)(2x-4\lambda) - 16x^2(2x-4\lambda) \\
&= 32x(x-\lambda)\left[2h\right]
\end{aligned}$$

Evaluando en v_o y en λ

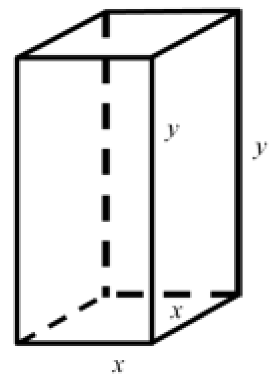
$$\left|\overline{H}\right| = 32(6)\left((6) - \left(\frac{3}{2}\right)\right)\left[2(6)\right] > 0.$$

Entonces $(6,3)$, es un máximo local para $f\,|\,S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 108.

Las dimensiones de la caja deben ser de $6 \times 6 \times 3$.

XI. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 50 cm^3. Encontrar las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que debe ser usado.

Solución 1.



Sean x el lado de la base y y la altura de la caja, puesto que

$$V = x^2 y = 50$$

se tiene que

$$y = \frac{50}{x^2}$$

es decir, la altura de la caja es:

$$\frac{50}{x^2}.$$

Por lo que el área de la superficie de la caja es

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + 4x\left(\frac{50}{x^2}\right) \\ &= x^2 + \frac{200}{x}. \end{aligned}$$

Calculamos la primera derivada:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2x - \frac{200}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 - 200}{x^2}. \end{aligned}$$

e igualamos a cero

$$\frac{2x^3 - 200}{x^2} = 0$$

$$x = \sqrt[3]{100}.$$

Éste es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$A''(x) = 2 + \frac{400}{x^3}.$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$A''\left(\sqrt[3]{100}\right) = 2 + \frac{400}{\left(\sqrt[3]{100}\right)^3} > 0.$$

Por lo tanto, A tiene un mínimo en

$$x = \sqrt[3]{100}.$$

Entonces, el área de la caja que utiliza la menor cantidad de material es

$$A(\sqrt[3]{100}) = \left(\sqrt[3]{100}\right)^2 + \frac{200}{\left(\sqrt[3]{100}\right)}$$

Y las dimensiones de la caja son

$$x = \sqrt[3]{100} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{50}{\left(\sqrt[3]{100}\right)^2}.$$

Solución 2:

Sea

$$f\left(x, y\right) = x^2 + 4xy.$$

Con la restricción

$$x^2 y = 50.$$

Consideramos

$$g\left(x, y\right) = x^2 y.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f\left(x, y\right) = \lambda \nabla g\left(x, y\right).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x} = 2x + 4y \qquad \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y} = 4x$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = x^2.$$

Entonces,

$$\left(2x + 4y, 4x\right) = \lambda\left(2xy, x^2\right).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$2x+4y=2\lambda xy \qquad (a)$$
$$4x=\lambda x^2 \qquad (b)$$
$$x^2y=50 \qquad (c).$$

Despajando λ de (b) tenemos que

$$\lambda=\frac{4}{x}.$$

Sustituyendo λ en (a)

$$x+2y=\left(\frac{4}{x}\right)xy$$
$$x+2y=4y$$
$$x=2y.$$

Sustituyendo x en (c)

$$(2y)^2\, y=50$$
$$4y^3=50$$
$$y=\sqrt[3]{\frac{25}{2}}.$$

Así,

$$x=\sqrt[3]{100} \quad , \quad y=\sqrt[3]{\frac{25}{2}} \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{4}{\sqrt[3]{100}}.$$

Entonces tenemos $v_o=\left(\sqrt[3]{100},\sqrt[3]{\frac{25}{2}}\right)$, $g\left(\sqrt[3]{100},\sqrt[3]{\frac{25}{2}}\right)=50$, S es la curva de nivel para g de valor 50, $\nabla g(v_o)\neq 0$ y existe $\lambda=\dfrac{4}{\sqrt[3]{100}}$ tal que $\nabla f(v_o)=\lambda\nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y) &= f(x,y)-\lambda g(x,y)\\ &= x^2+4xy-\lambda\left(x^2y\right). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right|=\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y} \\ -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w\,(x, y)$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = 2x + 4y - \lambda 2xy \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = 4x - \lambda x^2$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} = 2 - 2\lambda y \qquad \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} = 4 - 2\lambda x.$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -2xy & -x^2 \\ -2xy & 2-2\lambda y & 4-2\lambda x \\ -x^2 & 4-2\lambda x & 0 \end{vmatrix} = 4x^3 y(4-2\lambda x) - x^4(2-2\lambda y)$$

Evaluando en v_o y en λ

$$\begin{aligned}
&= 4\left(\sqrt[3]{100}\right)^3\left(\sqrt[3]{\frac{25}{2}}\right)\left(4-2\left[\frac{4}{\sqrt[3]{100}}\right]\left[\sqrt[3]{100}\right]\right)-\left(\sqrt[3]{100}\right)^4\left(2-2\left[\frac{4}{\sqrt[3]{100}}\right]\left[\sqrt[3]{\frac{25}{2}}\right]\right)\\
&= -1600\left(\sqrt[3]{\frac{25}{2}}\right)-\left(\sqrt[3]{100}\right)^4\left(2-\frac{8}{\sqrt[2]{2}}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right]\right)\\
&= -1600\left(\sqrt[3]{\frac{25}{2}}\right)-\left(\sqrt[3]{100}\right)^4(2-4)\\
&= -1600\left(\sqrt[3]{\frac{25}{2}}\right)+2\left(\sqrt[3]{100}\right)^4\\
&= -2784.95.
\end{aligned}$$

Entonces $\left(\sqrt[3]{100}, \sqrt[3]{\frac{25}{2}}\right)$ es un mínimo local para $f\,|\,S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 50.

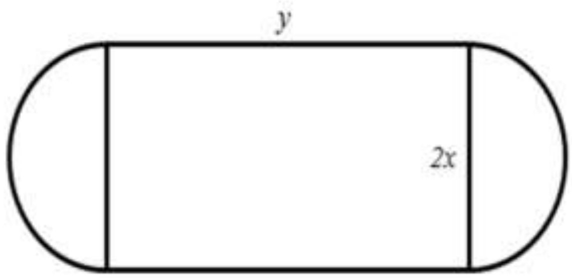
Entonces, el área de la caja que utiliza la menor cantidad de material es

$$A(\sqrt[3]{100}) = \left(\sqrt[3]{100}\right)^2 + \frac{200}{\left(\sqrt[3]{100}\right)}$$

Y las dimensiones de la caja son $x = \sqrt[3]{100}$ y $y = \dfrac{50}{\left(\sqrt[3]{100}\right)^2}$.

XII. Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos. Si el perímetro del terreno es de 50 m, encontrar las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima.

Solución 1:



Sea x el radio del semicírculo, y y como en la figura, entonces el perímetro del terreno es

$$2y+2\pi x=50.$$

Despejando y se tiene que

$$y=25-\pi x.$$

Por lo que el área del terreno es

$$\begin{aligned} A(x) &= 2xy+\pi x^2 \\ &= 2x\left(25-\pi x\right)+\pi x^2 \\ &= 50x-2\pi x^2+\pi x^2 \\ &= 50x-\pi x^2. \end{aligned}$$

Calculamos la primera derivada:

$$A'(x)=50-2\pi x$$

e igualamos a cero

$$\begin{aligned} 50-2\pi x&=0 \\ x&=\frac{25}{\pi}. \end{aligned}$$

Éste es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$A''(x)=-2\pi.$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$A''\left(\frac{25}{\pi}\right) = -2\pi < 0.$$

Por lo tanto, A tiene un máximo en

$$x = \frac{25}{\pi}.$$

Entonces, el lado del rectángulo debe medir $25 - \pi\frac{25}{\pi} = 0$, por lo que es área máxima se obtiene cuando el terreno tiene forma circular.

Solución 2:

Sea

$$f(x, y) = 2xy + \pi x^2.$$

Con la restricción

$$2y + 2\pi x = 50.$$

Consideremos

$$g(x, y) = 2y + 2\pi x.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2y + 2\pi x \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 2\pi \qquad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 2.$$

Entonces,

$$(2y + 2\pi x, 2x) = \lambda(2\pi, 2).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$\begin{aligned} 2y + 2\pi x &= 2\lambda\pi && (a) \\ 2x &= 2\lambda && (b) \\ 2y + 2\pi x &= 50 && (c). \end{aligned}$$

De (b) tenemos que $x = \lambda.$

Sustituyendo λ en (a)

$$\begin{aligned} 2y+2\pi x &= 2\pi x \\ 2y &= 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo y en (c)

$$\begin{aligned} 2\pi x &= 50 \\ x &= \frac{25}{\pi}. \end{aligned}$$

Así,

$$x=\frac{25}{\pi}\ ,\quad y=0 \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{25}{\pi}.$$

Entonces tenemos $v_o=\left(\frac{25}{\pi},0\right)$, $g\left(\frac{25}{\pi},0\right)=50$, S es la curva de nivel para g de valor 50 y $\nabla g\left(v_o\right)\neq 0$ y existe $\lambda=\frac{25}{\pi}$ tal que $\nabla f\left(v_o\right)=\lambda\nabla g\left(v_o\right)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y) &= f\left(x,y\right)-\lambda g\left(x,y\right) \\ &= 2xy+\pi x^2-\lambda\left(2y+2\pi x\right). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right|=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g\left(x,y\right)}{\partial x} & -\frac{\partial g\left(x,y\right)}{\partial y} \\ -\frac{\partial g\left(x,y\right)}{\partial x} & \frac{\partial^2 w\left(x,y\right)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w\left(x,y\right)}{\partial x\partial y} \\ -\frac{\partial g\left(x,y\right)}{\partial y} & \frac{\partial^2 w\left(x,y\right)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 w\left(x,y\right)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w\,(x, y)$

$$\frac{\partial w\left(x,y\right)}{\partial x}=2y+2\pi x-2\pi\lambda \qquad \frac{\partial w\left(x,y\right)}{\partial y}=2x-2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 w\left(x,y\right)}{\partial x^2}=2\pi \qquad \frac{\partial^2 w\left(x,y\right)}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 w\left(x,y\right)}{\partial x\partial y}=2.$$

Por lo que el hessiano resultante es

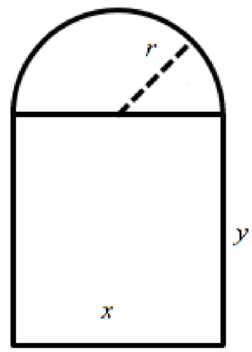
$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -2\pi & -2 \\ -2\pi & 2\pi & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8\pi.$$

Entonces $\left(\frac{25}{\pi}, 0\right)$ es un máximo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 50.

Entonces el área máxima se obtiene cuando el terreno es circular.

XIII. Una ventana presenta forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encontrar las dimensiones de la ventana con área máxima, si su perímetro es de 10 *m*.

Solución 1:



Sea x el diámetro del semicírculo. El perímetro de la ventana es

$$x+2y+\frac{\pi}{2}x=10$$

despejando y tenemos que

$$x\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+2y=10$$

$$2y=10-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)x$$

$$y=5-\frac{2+\pi}{4}x.$$

Por lo que el área de la ventana es

$$\begin{aligned}A(x)&=xy+\frac{\pi}{8}x^2\\&=x\left[5-\frac{2+\pi}{4}x\right]+\frac{\pi}{8}x^2\\&=5x-\frac{2+\pi}{4}x^2+\frac{\pi}{8}x^2\\&=\frac{\pi}{8}x^2-\frac{2+\pi}{4}x^2+5x\\&=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{2+\pi}{4}\right)x^2+5x\\&=\frac{\pi-2(2+\pi)}{8}x^2+5x\\&=\frac{\pi-4-2\pi}{8}x^2+5x\end{aligned}$$

$$= \frac{-\pi - 4}{8} x^2 + 5x$$

$$= -\frac{\pi + 4}{8} x^2 + 5x.$$

Calculamos la primera derivada:

$$A' = -\frac{\pi + 4}{4} x + 5$$

e igualamos a cero

$$-\frac{\pi + 4}{4} x + 5 = 0$$

$$x = \frac{20}{\pi + 4}.$$

Éste es el valor crítico.

Calculamos

$$A''(x) = -\frac{\pi + 4}{4}.$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$A''\left(\frac{20}{\pi + 4}\right) = -\frac{\pi + 4}{4} < 0.$$

Por lo tanto, A tiene un máximo en

$$x = \frac{20}{\pi + 4}.$$

Sustituyendo en el valor de y que habíamos obtenido, tenemos

$$y = 5 - (2 + \pi)\left(\frac{5}{\pi + 4}\right)$$

$$y = \frac{5(\pi + 4) - (10 + 5\pi)}{\pi + 4}$$

$$y = \frac{10}{\pi + 4}.$$

Entonces, el área máxima de la ventana es cuando $x = \frac{20}{\pi + 4}$ y $y = \frac{10}{\pi + 4}$ que dan como resultado un área de

$$A=\left(\frac{20}{4+\pi}\right)\left(\frac{10}{4+\pi}\right)+\frac{\pi}{8}\left(\frac{20}{4+\pi}\right)^2$$
$$A=\frac{20}{(4+\pi)^2}\left(10+\frac{5\pi}{2}\right)$$
$$A=\frac{10}{(4+\pi)^2}(20+5\pi)$$

que es aproximadamente 7.001 metros cuadrados.

Solución 2:

Sea

$$f(x,y)=xy+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=xy+\frac{1}{8}\pi x^2.$$

Con la restricción

$$x+2y+\pi\frac{x}{2}=10.$$

Consideramos

$$g(x,y)=x+2y+\pi\frac{x}{2}.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y+\frac{\pi x}{4} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x$$
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=1+\frac{\pi}{2} \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=2.$$

Entonces,

$$\left(y+\frac{\pi x}{4},x\right)=\lambda\left(1+\frac{\pi}{2},2\right).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$y+\frac{\pi x}{4}=\lambda\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \qquad (a)$$

$$x=2\lambda \qquad (b)$$

$$x+2y+\frac{\pi x}{2}=10 \qquad (c).$$

De (b) tenemos que

$$\lambda=\frac{x}{2}.$$

Sustituyendo λ en (a)

$$y+\frac{\pi x}{4}=\left(\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y+\frac{\pi x}{4}=\frac{x}{2}+\frac{\pi x}{4}$$

$$y=\frac{x}{2}.$$

Sustituyendo y en (c)

$$x+2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{\pi x}{2}=10$$

$$x\left(2+\frac{\pi}{2}\right)=10$$

$$x=\frac{20}{4+\pi}.$$

Así,

$$x=\frac{20}{4+\pi} \quad , \quad y=\frac{10}{4+\pi} \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{10}{4+\pi}.$$

Entonces tenemos $v_o=\left(\frac{20}{4+\pi},\frac{10}{4+\pi}\right)$, $g\left(\frac{20}{4+\pi},\frac{10}{4+\pi}\right)=10$, S es la curva de nivel para g de valor 10, $\nabla g\left(v_o\right)\neq 0$ y existe $\lambda=\frac{10}{4+\pi}$ tal que $\nabla f\left(v_o\right)=\lambda\nabla g\left(v_o\right)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y) &= f(x,y)-\lambda g(x,y) \\ &= xy+\frac{\pi x^2}{8}-\lambda\left(x+2y+\frac{\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w\,(x, y)$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = y + \frac{\pi x}{4} - \lambda - \frac{\pi \lambda}{2} \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = x - 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\pi}{4} \qquad \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} = 1.$$

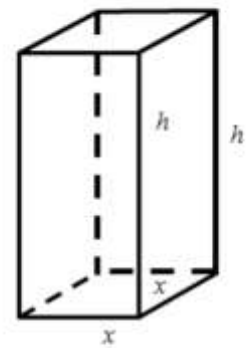
Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right) & -2 \\ -\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right) & \dfrac{\pi}{4} & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 + \pi > 0.$$

Entonces $\left(\dfrac{20}{4+\pi}, \dfrac{10}{4+\pi}\right)$ es un máximo local para $f\,|\,S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 10.

XIV. Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar 12 m^3 de agua. Si el concreto para construir la base y los lados tiene un costo de \$100 por m^2 y el material para construir la tapa cuesta \$200 por m^2 ¿cuáles son las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción?

Solución 1:



Sea x el lado de la base de la cisterna y h la altura, entonces, puesto que

$$V = x^2 h = 12$$

Así,

$$h = \frac{12}{x^2}.$$

El costo total de la cisterna es

$$\begin{aligned} C &= 100x^2 + 100(4xh) + 200x^2 \\ &= 300x^2 + 400xh. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= 300x^2 + 400x\left(\frac{12}{x^2}\right) \\ &= 300x^2 + \frac{4800}{x}. \end{aligned}$$

Calculamos la primera derivada:

$$C'(x) = 600x - \frac{4800}{x^2}$$

e igualamos a cero

$$\begin{aligned} 600x - \frac{4800}{x^2} &= 0 \\ 600x &= \frac{4800}{x^2} \\ x^3 &= 8 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Éste es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$C''(x) = 600 + \frac{9600}{x^3}.$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$A''(2) = 600 + \frac{9600}{(2)^3} > 0.$$

Por lo tanto, C tiene un mínimo en

$$x = 2.$$

Entonces, el costo mínimo de la cisterna es cuando $x = 2$ y h = 3 por lo que el costo es de \$360.

Solución 2:

Sea

$$f(x,h) = 300x^2 + 400xh.$$

Con la restricción

$$x^2h = 12.$$

Consideramos

$$g(x,h) = x^2h.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x,h) = \lambda \nabla g(x,h).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x,h)}{\partial x} = 600x + 400h \qquad \frac{\partial f(x,h)}{\partial h} = 400x$$

$$\frac{\partial g(x,h)}{\partial x} = 2xh \qquad \frac{\partial g(x,h)}{\partial h} = x^2.$$

Entonces,

$$(600x + 400h, 400x) = \lambda(2xh, x^2).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$
\begin{aligned}
600x + 400h &= \lambda(2xh) && (a)\\
400x &= \lambda x^2 && (b)\\
x^2 h &= 12 && (c).
\end{aligned}
$$

De (b) tenemos que

$$\lambda = \frac{400}{x}.$$

Sustituyendo λ en (a)

$$
\begin{aligned}
600x + 400h &= \left(\frac{400}{x}\right)2xh\\
600x + 400h &= 800h\\
x &= \frac{200}{300}h\\
x &= \frac{2}{3}h.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo x en (c)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}h\right)^2 h &= 12\\
\frac{4}{9}h^3 &= 12\\
h^3 &= 27\\
h &= 3.
\end{aligned}
$$

Así,

$$x = 2, \quad h = 3 \quad \text{y} \quad \lambda = 200.$$

Entonces tenemos $v_o = (2,3)$, $g(2,3) = 12$, S es la curva de nivel para g de valor 12 y $\nabla g(v_o) \neq 0$, existe $\lambda = 200$ tal que $\nabla f(v_o) = \lambda \nabla g(v_o)$.
Consideramos la función auxiliar

$$
\begin{aligned}
w(x,h) &= f(x,h) - \lambda g(x,h)\\
&= 300x^2 + 400xh - \lambda(x^2 h).
\end{aligned}
$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g(x,h)}{\partial x} & -\frac{\partial g(x,h)}{\partial h} \\ -\frac{\partial g(x,h)}{\partial x} & \frac{\partial^2 w(x,h)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w(x,h)}{\partial x \partial h} \\ -\frac{\partial g(x,h)}{\partial h} & \frac{\partial^2 w(x,h)}{\partial x \partial h} & \frac{\partial^2 w(x,h)}{\partial h^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w\,(x,\,h)$

$$\frac{\partial w(x,h)}{\partial x} = 600x + 400h - 2\lambda xh \qquad \frac{\partial w(x,h)}{\partial h} = 400x - \lambda x^2$$

$$\frac{\partial^2 w(x,h)}{\partial x^2} = 600 - 2\lambda h \qquad \frac{\partial^2 w(x,h)}{\partial h^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial h} = 400 - 2\lambda x.$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\begin{aligned} \left|\overline{H}\right| &= \begin{vmatrix} 0 & -2xh & -x^2 \\ -2xh & 600-2\lambda h & 400-2\lambda x \\ -x^2 & 400-2\lambda x & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2xh\left[x^2\left(400-2\lambda x\right)\right] - x^2\left[-2xh\left(400-2\lambda x\right) + x^2\left(600-2\lambda h\right)\right] \\ &= 2x^3h\left(400-2\lambda x\right) + 2x^3h\left(400-2\lambda x\right) - x^4\left(600-2\lambda h\right) \\ &= 2x^3h\left(400-2\lambda x\right) - x^4\left(600-2\lambda h\right) \\ &= 2x^3\left\{4h\left(200-\lambda x\right) - x\left(300-\lambda h\right)\right\}. \end{aligned}$$

Evaluando en v_o y λ

$$\begin{aligned} \left|\overline{H}\right| &= 2(2)^3\left\{4(3)\left(200-(200)(2)\right) - 2\left(300-200(3)\right)\right\} \\ &= 16\left\{12(-200) - 2(-300)\right\} \\ &= 16\left\{-2400+600\right\} \\ &= 16\left\{-1800\right\} < 0. \end{aligned}$$

Entonces $(20,30)$ es un mínimo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 12.

Por lo que, el costo mínimo de la cisterna es cuando $x=2$ y h = 3 resultando un costo de \$360.

XV. Se van a usar cuatro metros de alambre para formar un cuadrado y un círculo. ¿Cuánto alambre debe usarse para el cuadrado y cuánto para el círculo con el fin de que el área total sea máxima?

Solución 1:

Llamamos x al lado del cuadrado y r al radio del círculo, entonces el área total se expresa como

$$x^2 + \pi r^2.$$

En virtud de que la cantidad total de alambre es 4 metros

$$4 = 4x + 2\pi r.$$

Por tanto,

$$r = \frac{2(1-x)}{\pi}.$$

Al sustituir en la expresión del área:

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + \pi\left[\frac{2(1-x)}{\pi}\right]^2 \\ &= x^2 + \frac{4(1-x)^2}{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[(\pi+4)x^2 - 8x + 4\right]. \end{aligned}$$

Como se tienen 4 metros de alambre y el perímetro del cuadrado es $4x$ entonces $x \le 1$.

El dominio de la función es $0 \le x \le 1$ restringido por el perímetro del cuadrado.

Calculamos la primera derivada

$$A'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 8}{\pi}$$

e igualamos a cero

$$\begin{aligned} \frac{2(\pi+4)x-8}{\pi} &= 0 \\ (\pi+4)x &= 4 \\ x &= \frac{4}{(\pi+4)}. \end{aligned}$$

Éste es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$A''(x) = \frac{2(\pi+4)}{\pi}.$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$A''\left(\frac{4}{(\pi+4)}\right)=\frac{2(\pi+4)}{\pi}>0.$$

Por lo tanto, A tiene un mínimo en

$$x=\frac{4}{(\pi+4)}.$$

Entonces, el valor máximo se alcanza en uno de los extremos del dominio.
Analizando los extremos tenemos:

$$\begin{aligned}A(0)&=\frac{1}{\pi}\left[(\pi+4)(0)^2-8(0)+4\right]\\&=\frac{4}{\pi}>1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A(1)&=\frac{1}{\pi}\left[(\pi+4)(1)^2-8(1)+4\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[(\pi+4)-8+4\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[(\pi+4)-4\right]\\&=1.\end{aligned}$$

Por lo que el área máxima se alcanza en $x = 0$, esto es, cuando todo el alambre es utilizado para hacer el círculo.

Solución 2:

Sea

$$f(x,r)=x^2+\pi r^2.$$

Con la restricción

$$4x+2\pi r=4.$$

Consideramos

$$g(x,r)=4x+2\pi r.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x,r)=\lambda\nabla g(x,r).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x,r)}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}=2\pi r$$

$$\frac{\partial g(x,r)}{\partial x}=4 \qquad \frac{\partial g(x,r)}{\partial r}=2\pi.$$

Entonces,

$$(2x,2\pi r)=\lambda(4,2\pi).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$\begin{aligned} 2x &= 4\lambda && (a) \\ 2\pi r &= 2\pi\lambda && (b) \\ 4x + 2\pi r &= 4 && (c). \end{aligned}$$

De (b), se tiene que

$$r = \lambda.$$

Despejando λ de (a)

$$\lambda = \frac{x}{2}.$$

Sustituyendo r en (c)

$$\begin{aligned} 4x + 2\pi\left(\frac{x}{2}\right) &= 4 \\ 4x + \pi x &= 4 \\ x &= \frac{4}{4+\pi}. \end{aligned}$$

Así,

$$x = \frac{4}{\pi+4}\ , \quad r = \frac{2}{4+\pi} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2}{\pi+4}.$$

Entonces tenemos $v_o = \left(\frac{4}{\pi+4}, \frac{2}{\pi+4}\right)$, $g\left(\frac{4}{\pi+4}, \frac{2}{\pi+4}\right) = 4$, S es la curva de nivel para g de valor 4, $\nabla g(v_o) \neq 0$ y existe $\lambda = \frac{2}{\pi+4}$ tal que $\nabla f(v_o) = \lambda \nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,r) &= f(x,r) - \lambda g(x,r) \\ &= x^2 + \pi r^2 - \lambda(4x + 2\pi r). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g(x,r)}{\partial x} & -\frac{\partial g(x,r)}{\partial r} \\ -\frac{\partial g(x,r)}{\partial x} & \frac{\partial^2 w(x,r)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w(x,r)}{\partial x \partial r} \\ -\frac{\partial g(x,r)}{\partial r} & \frac{\partial^2 w(x,r)}{\partial x \partial r} & \frac{\partial^2 w(x,r)}{\partial r^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de *w* (*x, r*)

$$\frac{\partial w(x,r)}{\partial x}=2x-4\lambda \qquad \frac{\partial w(x,r)}{\partial r}=2\pi r-2\pi\lambda$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial r^2}=2\pi$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y}=0.$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right|=\begin{vmatrix} 0 & -4 & -2\pi \\ -4 & 2 & 0 \\ -2\pi & 0 & 2\pi \end{vmatrix}=4\left[(-4)2\pi\right]-2\pi\left[4\pi\right]$$
$$=-8\pi(4+\pi)<0.$$

Entonces $\left(\frac{4}{\pi+4},\frac{2}{\pi+4}\right)$, es un mínimo local para $f|S$, por lo que, el valor máximo se alcanza en uno de los extremos del dominio.

Analizando los extremos tenemos:

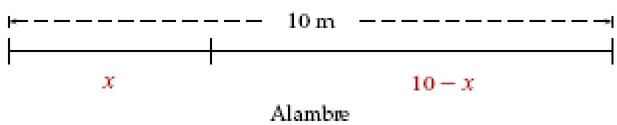
$$A(0)=\frac{1}{\pi}\left[(\pi+4)(0)^2-8(0)+4\right]$$
$$=\frac{4}{\pi}>1.$$

$$A(1)=\frac{1}{\pi}\left[(\pi+4)(1)^2-8(1)+4\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[(\pi+4)-8+4\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[(\pi+4)-4\right]$$
$$=1.$$

Así que el área máxima se alcanza en x = 0, esto es, cuando todo el alambre es utilizado para hacer el círculo.

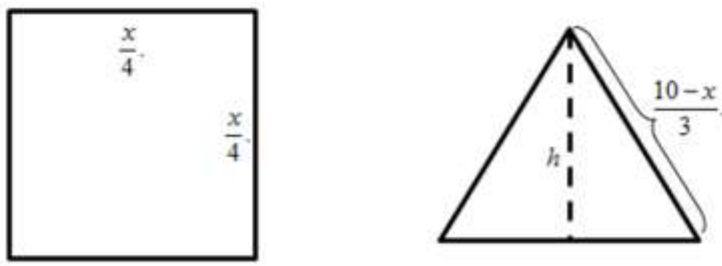
XVI. Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Hallar cómo debe cortarse el alambre de modo que el área encerrada sea mínima

Solución 1:



La parte x del alambre se usa para el cuadrado, por lo tanto cada lado tiene longitud $\frac{x}{4}$.

La parte $10 - x$ del alambre se usa para el triángulo equilátero, por lo tanto cada lado tiene longitud $\frac{10-x}{3}$.



De la figura del triángulo, usando el teorema de Pitágoras, obtenemos la siguiente relación:

$$
\begin{aligned}
h^2 + \left(\frac{10-x}{6}\right)^2 &= \left(\frac{10-x}{3}\right)^2 \\
h^2 &= \frac{1}{9}(10-x)^2 - \frac{1}{36}(10-x)^2 \\
h^2 &= \frac{3}{36}(10-x)^2 \\
h &= \frac{1}{\sqrt{12}}(10-x).
\end{aligned}
$$

Entonces el área del cuadrado es

$$Ac(x) = \frac{x^2}{16}.$$

Y el área del triángulo es

$$
\begin{aligned}
At(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{12}}(10-x)\right]\left[\frac{1}{3}(10-x)\right] \\
&= \frac{(10-x)^2}{6\sqrt{12}}.
\end{aligned}
$$

Por lo que el área total es

$$A(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(10-x)^2}{6\sqrt{12}}.$$

Calculamos la primera derivada:

$$A'(x)=\frac{x}{8}-\frac{(10-x)}{3\sqrt{12}}.$$

e igualamos a cero

$$\frac{x}{8}-\frac{(10-x)}{3\sqrt{12}}=0$$

$$x\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{3\sqrt{12}}\right)=\frac{10}{3\sqrt{12}}$$

$$x\left(\frac{3\sqrt{12}+8}{24\sqrt{12}}\right)=\frac{10}{3\sqrt{12}}$$

$$x=\frac{80}{3\sqrt{12}+8}.$$

Éste es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$A''(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{3\sqrt{12}}.$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$A''\left(\frac{80}{3\sqrt{12}+8}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{3\sqrt{12}}>0.$$

Por lo tanto, A tiene un mínimo en

$$x=\frac{80}{3\sqrt{12}+8}.$$

Entonces, el área es mínima cuando $x=\frac{80}{3\sqrt{12}+8}$ y es aproximadamente 2.71 metros.

El perímetro del triángulo es

$$10-\frac{80}{3\sqrt{12}+8}=\frac{30\sqrt{12}}{3\sqrt{12}+8}\approx 7.38\ \text{m}.$$

Solución 2:

Sea

$$f(x,y)=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}\sqrt{3}$$

Con la restricción

$$x+3y=10.$$

Consideramos

$$g(x,y)=x+3y.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{8} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{y}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=3.$$

Entonces,

$$\left(\frac{x}{8},\frac{y}{2}\sqrt{3}\right)=\lambda(1,3).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$\frac{x}{8}=\lambda \qquad (a)$$

$$\frac{y}{2}\sqrt{3}=3\lambda \qquad (b)$$

$$x+3y=10 \qquad (c).$$

De (a) se tiene que

$$\lambda=\frac{x}{8}.$$

Sustituyendo λ en (b)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{3}{8}x$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{4}x.$$

Sustituyendo y en (c)

$$x+3\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)=10$$

$$x3\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=10$$

$$x=\frac{40}{3+3\sqrt{3}}.$$

Así,

$$x=\frac{40}{4+3\sqrt{3}} \quad , \quad y=\frac{10}{4+\sqrt{3}}\sqrt{3} \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{5}{4+3\sqrt{3}}.$$

Entonces tenemos $v_o=\left(\frac{40}{4+3\sqrt{3}},\frac{10}{4+\sqrt{3}}\sqrt{3}\right)$, $g\left(\frac{40}{4+\sqrt{3}},\frac{10}{4+3\sqrt{3}}\sqrt{3}\right)=10$, S es la curva de nivel para g de valor v_o y $\nabla g(v_o)\neq 0$ y existe $\lambda=\frac{5}{4+3\sqrt{3}}$ tal que $\nabla f(v_o)=\lambda\nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y) &= f(x,y)-\lambda g(x,y) \\ &= \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}\sqrt{3}-\lambda(x+3y). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$|\overline{H}|=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y} \\ -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(x, y)$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{8}-\lambda \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}=\frac{\sqrt{3}}{2}y-3\lambda$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}=\frac{1}{8} \qquad \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y}=0.$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & \frac{1}{8} & 0 \\ -3 & 0 & \sqrt{3}\big/2 \end{vmatrix} = 1\left[-1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] - 3\left[\frac{3}{8}\right]$$

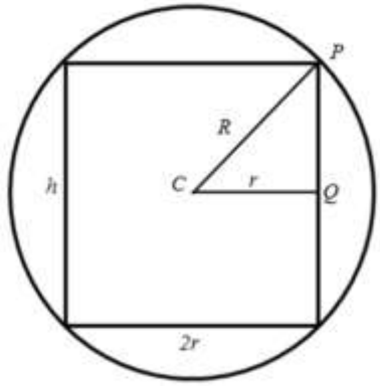
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{8} < 0.$$

Entonces $\left(\dfrac{40}{4+\sqrt{3}}, \dfrac{10}{4+\sqrt{3}}\sqrt{3}\right)$ es un mínimo local para $f\,|\,S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 10.

Así el área es aproximadamente de 2.71 metros.

XVII. Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R.

Solución 1:



Considerando un cilindro recto con base circular de radio r y altura h (inscrito en una esfera de radio R). Si se analiza una sección transversal del cuerpo, la figura representativa de ellos es la misma que se tiene para una circunferencia de radio R y un rectángulo inscrito en ella de base $2r$ y altura h.

El volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h.$$

Es una función de dos variables (r y h).

En el triángulo rectángulo CQP (por el teorema de Pitágoras) se obtiene

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Donde

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}.$$

Entonces,

$$V(h) = \pi\left(R^2 h - \frac{1}{4}h^3\right).$$

Calculamos la primera derivada:

$$V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right)$$

e igualamos a cero

$$\pi\left(R^2-\frac{3}{4}h^2\right)=0$$

$$|h|=\frac{2}{\sqrt{3}}R..$$

Debido a que h representa la altura, entonces $h > 0$, entonces

$$h=\frac{2}{\sqrt{3}}R$$

es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$V''(h)=-\frac{3}{2}\pi h$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$V''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)=-\frac{3}{2}\pi\frac{2}{\sqrt{3}}R<0.$$

Por lo tanto, V tiene un máximo en

$$h=\frac{2}{\sqrt{3}}R.$$

Entonces, el cilindro tiene mayor volumen cuando

$$h=\frac{2}{\sqrt{3}}R \qquad \text{y} \qquad r=\sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

Dicho volumen máximo es

$$\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3.$$

Solución 2:

Sea

$$f(r,h)=\pi r^2 h.$$

Con la restricción

$$r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=R^2.$$

Consideramos

$$g(r,h) = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\Delta f(r,h) = \lambda \Delta g(r,h).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(r,h)}{\partial r} = 2\pi rh \qquad \frac{\partial f(r,h)}{\partial h} = \pi r^2$$

$$\frac{\partial g(r,h)}{\partial r} = 2r \qquad \frac{\partial g(r,h)}{\partial h} = \frac{h}{2}.$$

Entonces,

$$\left(2\pi rh, \pi r^2\right) = \lambda\left(2r, \frac{h}{2}\right).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$2\pi rh = 2\lambda r \qquad (a)$$

$$\pi r^2 = \lambda \frac{h}{2} \qquad (b)$$

$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \qquad (c).$$

De (a) tenemos que

$$\lambda = \pi h.$$

Sustituyendo λ en (b)

$$\pi r^2 = \pi h\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$r^2 = \frac{h^2}{2}$$

$$r = \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

Sustituyendo r en (c)

$$\frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{4} = R^2$$

$$3h^2 = 4R^2$$

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}}R.$$

Así,

$$r=\sqrt{\frac{2}{3}}R \quad , \quad h=\frac{2}{\sqrt{3}}R \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}R.$$

Entonces tenemos $v_o=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R,\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)$, $g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R,\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)=R^2$, S es la curva de nivel para g de valor R^2, $\nabla g\left(v_o\right)\neq 0$ y existe $\lambda=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}R$ tal que $\nabla f\left(v_o\right)=\lambda\nabla g\left(v_o\right)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(r,h) &= f(r,h)-\lambda g(r,h) \\ &= \pi r^2 h-\lambda\left(r^2+\frac{h^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right|=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g(r,h)}{\partial r} & -\frac{\partial g(r,h)}{\partial h} \\ -\frac{\partial g(r,h)}{\partial r} & \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r\partial h} \\ -\frac{\partial g(r,h)}{\partial h} & \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r\partial h} & \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial h^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(r, h)$

$$\frac{\partial w(r,h)}{\partial r}=2\pi rh-2\lambda r \qquad \frac{\partial w(r,h)}{\partial h}=\pi r^2-\lambda\frac{h}{2}$$

$$\frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r^2}=2\pi h-2\lambda \qquad \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial h^2}=-\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r\partial h}=2\pi r.$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -2r & -\frac{h}{2} \\ -2r & 2\pi h - 2\lambda & 2\pi r \\ -\frac{h}{2} & 2\pi r & -\frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 2r^2\lambda + 4h\pi r^2 - \frac{\pi h^3}{2} + \frac{\lambda h^2}{2}$$

$$= \lambda\left[2(r)^2 + \frac{(h)^2}{2}\right] + \pi(h)\left[4(r)^2 - \frac{(h)^2}{2}\right]$$

Evaluando en v_o y en λ

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}R\left[2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2 + \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)^2}{2}\right] + \pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)\left[4\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2 - \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)^2}{2}\right]$$

$$= \frac{8\pi R^3}{\sqrt{3}}$$

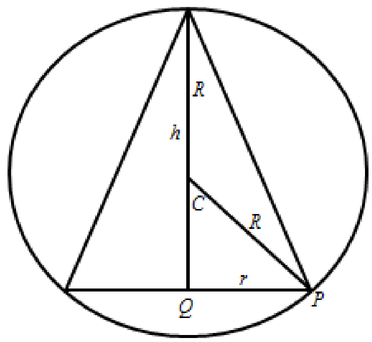
Entonces $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R, \frac{2}{\sqrt{3}}R\right)$ es un máximo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor R^2.

Entonces, el volumen máximo es $V = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3$.

XVIII. Determinar las dimensiones del cono circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R.

Solución 1:

Consideramos una esfera de radio $R > 0$ y un cono que tiene base circular de radio $r > 0$ y altura $h > 0$.
Una sección transversal perpendicular a la base del cono y que pase por su eje se muestra en la figura siguiente.



El volumen del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo CQP, obtenemos

$$R^2 = (h - R)^2 + r^2$$

Entonces si despejamos r^2

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - (h - R)^2 \\ &= R^2 - h^2 + 2Rh - R^2 \\ &= -h^2 + 2Rh. \end{aligned}$$

y la sustituimos en el volumen tenemos,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi\left(2Rh - h^2\right)h \\ &= \frac{1}{3}\pi\left(2Rh^2 - h^3\right). \end{aligned}$$

Calculamos la primera derivada:

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi\left(4Rh - 3h^2\right)$$

e igualamos a cero

$$\frac{1}{3}\pi\left(4Rh-3h^2\right)=0$$

Entonces $h_1=0$ y $h_2=\frac{4}{3}R$, como h se refiere a la altura del cono y buscamos las dimensiones máximas de éste, entonces $h_1=0$ no tiene sentido, por lo que $h_2=\frac{4}{3}R$ es el valor crítico.

Calculamos la segunda derivada

$$V''(h)=\frac{1}{3}\pi\left(4R-6h\right).$$

Sustituimos el valor crítico en la segunda derivada

$$V''\left(\frac{4}{3}R\right)=-\frac{4}{3}\pi R<0.$$

Por lo tanto, V tiene un mínimo en

$$h=\frac{4}{3}R.$$

Entonces, las dimensiones máximas del cono son cuando $h=\frac{4}{3}R.$ y $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$, por lo que el volumen máximo es

$$\begin{aligned} V&=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{8}{9}R^2\right)\frac{4}{3}R \\ &=\frac{32}{81}\pi R^2. \end{aligned}$$

Solución 2:

Sea

$$f\left(r,h\right)=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Con la restricción

$$\left(h-R\right)^2+r^2=R^2.$$

Consideramos

$$g\left(r,h\right)=\left(h-R\right)^2+r^2.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\Delta f(r,h)=\lambda \Delta g(r,h).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{2}{3}\pi hr \qquad \frac{\partial f}{\partial h}=\frac{1}{3}\pi r^2$$
$$\frac{\partial g}{\partial r}=2r \qquad \frac{\partial g}{\partial h}=2(h-R).$$

Entonces,

$$\left(\frac{2}{3}\pi rh,\frac{1}{3}\pi r^2\right)=\lambda\left(2r,2[h-R]\right).$$

Igualando los componentes y considerando la restricción se tiene que,

$$\frac{2}{3}\pi rh=2\lambda r \qquad (a)$$
$$\frac{1}{3}\pi r^2=\lambda 2(h-R) \qquad (b)$$
$$(h-R)^2+r^2=R^2 \qquad (c).$$

Despejamos λ de (a)

$$\lambda=\frac{\pi h}{3}$$

Sustituimos λ en (b)

$$\frac{1}{3}\pi r^2=\left(\frac{\pi h}{3}\right)2(h-R)$$
$$r^2=2h(h-R)$$
$$r^2=2h^2-2Rh$$
$$r=\sqrt{2h^2-2Rh}.$$

Sustituimos r en (c)

$$(h-R)^2+\left(\sqrt{2h^2-Rh}\right)^2=R^2$$
$$h^2-2Rh+R^2+2h^2-2Rh=R^2$$
$$3h^2-4Rh=0$$
$$h(3h-4R)=0.$$

Entonces $h_1 = 0$ y $h_2 = \frac{4}{3}R$, como h se refiere a la altura del cono y buscamos las dimensiones máximas de éste, entonces $h_1 = 0$ no tiene sentido.
Así,

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R \quad , \quad h = \frac{4}{3}R \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{4}{9}\pi R.$$

Entonces tenemos $v_o = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R, \frac{4}{3}R\right)$, $g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R, \frac{4}{3}R\right) = R^2$, S es la curva de nivel para g de valor R^2, $\nabla g(v_o) \neq 0$ y existe $\lambda = \frac{4}{9}\pi R$ tal que $\nabla f(v_o) = \lambda \nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(r,h) &= f(r,h) - \lambda g(r,h) \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 h - \lambda\left[(h-R)^2 + r^2\right]. \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g(r,h)}{\partial r} & -\frac{\partial g(r,h)}{\partial h} \\ -\frac{\partial g(r,h)}{\partial r} & \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r \partial h} \\ -\frac{\partial g(r,h)}{\partial h} & \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r \partial h} & \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial h^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(r, h)$

$$\frac{\partial w(r,h)}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi r h - 2\lambda r \qquad \frac{\partial w(r,h)}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi r^2 - 2\lambda(h-R)$$

$$\frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r^2} = \frac{2}{3}\pi h - 2\lambda \qquad \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial h^2} = -2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r \partial h} = \frac{2}{3}\pi r.$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$
\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -2r & -2(h-R) \\ -2r & \frac{2}{3}\pi h - 2\lambda & \frac{2}{3}\pi r \\ -2(h-R) & \frac{2}{3}\pi r & -2\lambda \end{vmatrix}
$$

$$
= 2r\left[-2r(-2\lambda) + 2(h-R)\left(\frac{2}{3}\pi r\right)\right] - 2(h-R)\left\{-2r\left[\frac{2}{3}\pi r\right] + 2(h-R)\left[\frac{2}{3}\pi h - 2\lambda\right]\right\}
$$

$$
= 2r\left[4\lambda r + (h-R)\left(\frac{4}{3}\pi r\right)\right] - 2(h-R)\left\{-\left[\frac{4}{3}\pi r^2\right] + 4(h-R)\left[\frac{1}{3}\pi h - \lambda\right]\right\}
$$

$$
= 8r^2\left\{\left[\lambda + (h-R)\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right]\right\} + 8(h-R)\left\{\left[\frac{1}{3}\pi r^2\right] - (h-R)\left[\frac{1}{3}\pi h - \lambda\right]\right\}
$$

Evaluando en v_o y en λ

$$
= 8\left[\left\{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R\right)^2\left[\left(\frac{4}{9}\pi R\right) + \left(\left(\frac{4}{3}R\right) - R\right)\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right]\right\} + \left(\left(\frac{4}{3}R\right) - R\right)\left\{\left[\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R\right)^2\right] - \left(\left(\frac{4}{3}R\right) - R\right)\left[\frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}R\right) - \frac{4}{9}\pi R\right]\right\}\right]
$$

$$
= 8\left[\left\{\left(\frac{8}{9}R^2\right)\left[\left(\frac{4}{9}\pi R\right) + \frac{R}{9}\pi\right]\right\} + \frac{1}{3}R\left\{\left[\frac{8}{27}\pi R^2\right] - \frac{R}{3}\left[\frac{4}{9}\pi R - \frac{4}{9}\pi R\right]\right\}\right]
$$

$$
= 8\left[\left\{\left(\frac{8}{9}R^2\right)\left(\frac{5}{9}\pi R\right)\right\} + \frac{1}{3}R\left\{\left[\frac{8}{27}\pi R^2\right]\right\}\right]
$$

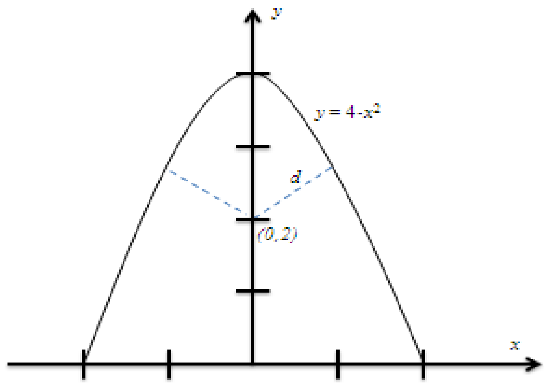
$$
= 8\left[\frac{40}{81}R^3 + \frac{64}{81}R^3\right]
$$

$$
= \frac{832}{81}R^3 > 0.
$$

Entonces $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R, \frac{4}{3}R\right)$ es un máximo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor R^2.

XIX. ¿Qué puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ están más cercanos al punto (0, 2)?

Solución 1:



Como se muestra en la imagen, hay dos puntos de la gráfica a una distancia mínima del punto (0, 2). La distancia entre el punto (0, 2) y uno (x, y) sobre la gráfica $y = 4 - x^2$ es:

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}.$$

Si utilizamos la ecuación $y = 4 - x^2$, podemos volver a escribir

$$d = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}.$$

Como d es más pequeña cuando la expresión en el interior del radical es menor, sólo necesitamos encontrar los valores críticos de

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4.$$

Notemos que el dominio de f es toda la recta real.

Calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x$$

e igualamos a cero para obtener los valores críticos

$$4x^3 - 6x = 0$$
$$x(4x^2 - 6) = 0$$

de donde tenemos que

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad |x| = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Entonces, la función $f\,(x)$ tiene tres valores críticos: 0, $\sqrt{\frac{3}{2}}$ y $-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Calculamos la segunda derivada

$$f\,''(x) = 12x^2 - 6.$$

i) Sustituimos $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ en la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f\,''(x_1) &= 12\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 6 \\ &= 12 > 0. \end{aligned}$$

Por lo que $f\,(x_1)$ tiene un mínimo en x_1.

ii) Sustituimos $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ en la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f\,''(x_2) &= 12\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 6 \\ &= 12 > 0. \end{aligned}$$

Por lo que $f\,(x)$ tiene un mínimo en x_2.

iii) Sustituimos $x_3 = 0$ en la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f\,''(x_3) &= 12\,(0)^2 - 6 \\ &= -6 > 0. \end{aligned}$$

Por lo que $f\,(x)$ tiene un máximo en x_3.

Por lo tanto los puntos más cercanos al punto (0, 2) son

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right) \text{ y } \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right).$$

Y la distancia mínima es

$$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{31}{4}}.$$

Solución 2:

Sea

$$f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+\left(y-2\right)^2}.$$

Con la restricción

$$x^2+y=4.$$

Consideramos

$$g\left(x,y\right)=x^2+y.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f\left(x,y\right)=\lambda\nabla g\left(x,y\right).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+\left(y-2\right)^2}} \qquad \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=\frac{(y-2)}{\sqrt{x^2+\left(y-2\right)^2}}$$

$$\frac{\partial g\left(x,y\right)}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial g\left(x,y\right)}{\partial y}=1.$$

Entonces,

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\left(y-2\right)^2}},\frac{(y-2)}{\sqrt{x^2+\left(y-2\right)^2}}\right)=\lambda\left(2x,1\right).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+\left(y-2\right)^2}}=2\lambda x \qquad (a)$$

$$\frac{(y-2)}{\sqrt{x^2+\left(y-2\right)^2}}=\lambda \qquad (b)$$

$$x^2+y=4 \qquad (c).$$

De (a) tenemos que

$$\lambda=\frac{1}{2\sqrt{x^2+\left(y-2\right)^2}}.$$

Sustituimos λ en (b)

$$\frac{(y-2)}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+(y-2)^2}}$$
$$(y-2)=\frac{1}{2}$$
$$2y-4=1$$
$$y=\frac{5}{2}.$$

Sustituimos y en (c)

$$x^2+\frac{5}{2}=4$$
$$|x|=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Por lo que λ es

$$\lambda=\frac{1}{2\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}}$$
$$\lambda=\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}}$$
$$\lambda=\frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{4}}}$$
$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Así,

$$x=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad y=\frac{5}{2} \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{1}{\sqrt{7}}.$$

O

$$x=-\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad y=\frac{5}{2} \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Entonces tenemos $v_o = \left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$, $g\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right) = 4$, S es la curva de nivel para g de valor 4, $\nabla g(v_o) \neq 0$ y existe $\lambda = \frac{1}{\sqrt{7}}$ tal que $\nabla f(v_o) = \lambda \nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y) &= f(x,y) - \lambda g(x,y) \\ &= \sqrt{x^2 + (y-2)^2} - \lambda\left(x^2 + y\right). \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(x, y)$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{\left(x^2 + (y-2)^2\right)^{1/2}} - 2\lambda x \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = \frac{y-2}{\left(x^2 + (y-2)^2\right)^{1/2}} - \lambda$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} &= \left[\frac{1}{\left(x^2 + (y-2)^2\right)^{1/2}}\right] - x^2\left[\left(x^2 + (y-2)^2\right)^{-3/2}\right] - 2\lambda \\ &= \left[\frac{1}{\left(x^2 + (y-2)^2\right)^{1/2}}\right]\left[1 - \frac{x^2}{\left(x^2 + (y-2)^2\right)}\right] - 2\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} &= \left[\frac{1}{\left(x^2 + (y-2)^2\right)^{1/2}}\right] - (y-2)^2\left[\left(x^2 + (y-2)^2\right)^{-3/2}\right] \\ &= \left[\frac{1}{\left(x^2 + (y-2)^2\right)^{1/2}}\right]\left[1 - \frac{(y-2)^2}{\left(x^2 + (y-2)^2\right)}\right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} = -\frac{x(y-2)}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{3/2}}.$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -2\lambda x & -\lambda \\ -2\lambda x & \frac{1}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{1/2}}\left[1-\frac{x^2}{x^2+(y-2)^2}\right]-2\lambda & -\frac{x(y-2)}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{3/2}} \\ -\lambda & -\frac{x(y-2)}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{3/2}} & \frac{1}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{1/2}}\left[1-\frac{(y-2)^2}{x^2+(y-2)^2}\right] \end{vmatrix}$$

$$= 2\lambda x\left[-2\lambda x\left(\frac{1}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{1/2}}\right)\left\{1-\frac{(y-2)^2}{\left(x^2+(y-2)^2\right)}\right\}+\lambda\left[-\frac{x(y-2)}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{3/2}}\right]\right]$$

$$-\lambda\left[-2\lambda x\left[-\frac{x(y-2)}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{3/2}}\right]+\lambda\left(\frac{1}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{1/2}}\right)\left[1-\frac{x^2}{x^2+(y-2)^2}\right]\right]$$

$$= -\frac{2\lambda^2 x}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{1/2}}\left[2x\left\{1-\frac{(y-2)^2}{\left(x^2+(y-2)^2\right)}\right\}+\left[\frac{x(y-2)}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{3/2}}\right]\right]$$

$$-\frac{\lambda^2}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{1/2}}\left[-\left[-\frac{2x^2(y-2)}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{3/2}}\right]+\left[1-\frac{x^2}{x^2+(y-2)^2}\right]\right]$$

Si analizamos

$$\frac{(y-2)^2}{\left(x^2+(y-2)^2\right)} = \frac{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}{\left(\frac{3}{2}+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2\right)} = \frac{.25}{1.75} < 1$$

entonces

$$-\frac{2\lambda^2 x}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{1/2}}\left[2x\left\{1-\frac{(y-2)^2}{\left(x^2+(y-2)^2\right)}\right\}+\left[\frac{x(y-2)}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{3/2}}\right]\right] < 0$$

después

$$\frac{x^2}{\left(x^2+(y-2)^2\right)}=\frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2\right)}<1$$

por lo que

$$-\frac{\lambda^2}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{1/2}}\left[-\left[-\frac{2x^2(y-2)}{\left(x^2+(y-2)^2\right)^{3/2}}\right]+\left[1-\frac{x^2}{x^2+(y-2)^2}\right]\right]<0.$$

Entonces $\left(\sqrt{\frac{13}{2}},\frac{5}{2}\right)$, es un mínimo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g con valor 4.
Por lo tanto los puntos más cercanos al punto (0, 2) son

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right) \text{ y } \left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right).$$

XX. Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H.

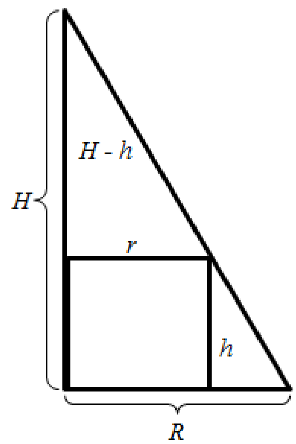
Solución 1:

Sea r el radio del cilindro y h su altura. Analizamos una sección transversal perpendicular a la base del cono y que pase por su eje.

El volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h.$$

Es una función de dos variables (r y h).
Para escribir r en términos de h tomamos en cuenta dos de los triángulos semejantes que hay en la figura:



Por semejanza se cumple la proporción:

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{H-h}.$$

De donde tenemos que

$$r = \frac{R(H-h)}{H}.$$

Sustituyendo en la fórmula del volumen,

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi \left[\frac{R(H-h)}{H} \right]^2 h \\ &= \pi \frac{R^2}{H^2} (H-h)^2 h \\ &= \pi \frac{R^2}{H^2} \left(H^2 h - 2Hh^2 + h^3 \right). \end{aligned}$$

Calculamos la primera derivada:

$$V'(h)=\frac{\pi R^2}{H^2}\left(H^2-4Hh+3h^2\right)$$

e igualamos a cero

$$\frac{\pi R^2}{H^2}\left(H^2-4Hh+3h^2\right)=0$$

$$\left(H^2-4Hh+3h^2\right)=0$$

$$h=\frac{4H\pm\sqrt{(-4H)^2-4(3)H^2}}{2(3)}$$

$$h=\frac{4H\pm\sqrt{16H^2-12H^2}}{6}$$

$$h=\frac{4H\pm\sqrt{4H^2}}{6}$$

$$h=\frac{4H\pm 2H}{6}.$$

Por lo tanto,

$$h_1=H \qquad \text{y} \qquad h_2=\frac{H}{3}.$$

Luego, la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos.

Calculamos la segunda derivada:

$$V''(h)=\frac{\pi R^2}{H^2}\left(-4H+6h\right)$$

i) Sustituimos $h_1=H$ en la segunda derivada:

$$V''(h_1)=\frac{\pi R^2}{H^2}\left(-4H+6H\right)$$

$$=\frac{\pi R^2}{H^2}\left(2H\right)$$

$$=\frac{2\pi R^2}{H}>0.$$

Entonces $V(h)$ tiene un mínimo en h_1.

ii) Sustituimos $h_2 = \dfrac{H}{3}$ en la segunda derivada:

$$
\begin{aligned}
V''(h_2) &= \frac{\pi R^2}{H^2}\left(-4H + 6\frac{H}{3}\right) \\
&= \frac{\pi R^2}{H^2}\left(-4H + 2H\right) \\
&= \frac{\pi R^2}{H^2}\left(-2H\right) \\
&= -\frac{2\pi R^2}{H} < 0
\end{aligned}
$$

Entonces $V(h)$ tiene un máximo en h_{2}.

Por lo que, el volumen máximo se obtiene para el cilindro de altura $h_2 = \dfrac{H}{3}$ y de radio $r = \dfrac{2}{3}R$.

De lo anterior concluimos que dicho volumen máximo es:

$$
\begin{aligned}
V(h_2) &= \pi\frac{R^2}{H^2}\left(H - \frac{H}{3}\right)^2\frac{H}{3} \\
&= \pi\frac{R^2}{H^2}\left(\frac{2}{3}H\right)^2\frac{H}{3} \\
&= \pi\frac{R^2}{H^2}\left(\frac{4}{27}H^3\right) \\
&= \frac{4}{27}\pi H R^2
\end{aligned}
$$

Solución 2:

Sea

$$f(r,h) = \pi r^2 h.$$

Con la restricción

$$\frac{r}{H-h} = \frac{R}{H}.$$

Consideramos

$$g(r,h) = \frac{r}{H-h}.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f\left(r,h\right)=\lambda\nabla g\left(r,h\right).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f\left(r,h\right)}{\partial r}=2\pi rh \qquad \frac{\partial f\left(r,h\right)}{\partial h}=\pi r^2$$

$$\frac{\partial g\left(r,h\right)}{\partial r}=\frac{1}{H-h} \qquad \frac{\partial g\left(r,h\right)}{\partial h}=\frac{r}{\left(H-h\right)^2}.$$

Entonces,

$$\left(2\pi rh,\pi r^2\right)=\lambda\left(\frac{1}{H-h},\frac{r}{\left(H-h\right)^2}\right).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción tenemos que,

$$2\pi rh=\lambda\frac{1}{H-h} \qquad (a)$$

$$\pi r^2=\lambda\frac{r}{\left(H-h\right)^2} \qquad (b)$$

$$\frac{r}{H-h}=\frac{R}{H} \qquad (c).$$

Despejamos λ de (a)

$$\lambda=2\pi rh\left(H-h\right).$$

Sustituimos λ en (b)

$$\pi r^2=\left[2\pi rh\left(H-h\right)\right]\frac{r}{\left(H-h\right)^2}$$

$$\pi r^2=\left[2\pi r^2h\right]\frac{1}{\left(H-h\right)}$$

$$1=\left[2h\right]\frac{1}{\left(H-h\right)}$$

$$H-h=2h$$

$$H=3h$$

$$h=\frac{H}{3}.$$

Sustituyendo h en (c)

$$\frac{r}{H-\frac{H}{3}}=\frac{R}{H}$$

$$r=\frac{R}{H}\left(H-\frac{H}{3}\right)$$

$$r=\frac{R}{H}\left(\frac{2}{3}H\right)$$

$$r=\frac{2}{3}R$$

Por lo que

$$\lambda=2\pi\left(\frac{2}{3}R\right)\left(\frac{H}{3}\right)\left(H-\frac{H}{3}\right)$$

$$\lambda=\left(\frac{4\pi}{9}RH\right)\left(\frac{2}{3}H\right)$$

$$\lambda=\frac{8}{27}\pi H^2R$$

Así,

$$r=\frac{2}{3}R \quad , \quad h=\frac{H}{3} \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{8}{27}\pi H^2R.$$

Entonces tenemos $v_o=\left(\frac{2}{3}R,\frac{H}{3}\right)$, $g\left(\frac{2}{3}R,\frac{H}{3}\right)=\frac{R}{H}$, S es la curva de nivel para g de valor $\frac{R}{H}$, $\nabla g\left(v_o\right)\neq 0$ y existe $\lambda=\frac{8}{27}\pi H^2R.$ tal que $\nabla f\left(v_o\right)=\lambda\nabla g\left(v_o\right)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(r,h) &= f(r,h)-\lambda g(r,h) \\ &= \pi r^2h-\lambda\left(\frac{r}{H-h}\right). \end{aligned}$$

El determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right|=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g(r,h)}{\partial r} & -\frac{\partial g(r,h)}{\partial h} \\ -\frac{\partial g(r,h)}{\partial r} & \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r\partial h} \\ -\frac{\partial g(r,h)}{\partial h} & \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r\partial h} & \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial h^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(r,h)$

$$\frac{\partial w(r,h)}{\partial r} = 2\pi rh - \lambda\left(\frac{1}{H-h}\right) \qquad \frac{\partial w(r,h)}{\partial h} = \pi r^2 - \lambda\left(\frac{r}{[H-h]^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r^2} = 2\pi h \qquad \frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial h^2} = -\frac{2\lambda r}{(H-h)^3}$$

$$\frac{\partial^2 w(r,h)}{\partial r \partial h} = 2\pi r - \frac{\lambda}{(H-h)^2}$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{H-h} & -\frac{r}{(H-h)^2} \\ -\frac{1}{H-h} & 2\pi h & 2\pi r - \frac{\lambda}{(H-h)^2} \\ -\frac{r}{(H-h)^2} & 2\pi r - \frac{\lambda}{(H-h)^2} & -\frac{2\lambda r}{(H-h)^3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{H-h}\left\{\left[-\frac{1}{H-h}\left(\frac{-2\lambda r}{(H-h)^3}\right)\right] - \left[-\frac{r}{(H-h)^2}\left(2\pi r - \frac{\lambda}{(H-h)^2}\right)\right]\right\}$$

$$-\frac{r}{(H-h)^2}\left[-\frac{1}{H-h}\left(2\pi r - \frac{\lambda}{(H-h)^2}\right) - \left(-\frac{r}{(H-h)^2}\right)2\pi h\right]$$

$$= \frac{2\lambda r}{(H-h)^5} + \frac{2\pi r^2}{(H-h)^3} - \frac{\lambda r}{(H-h)^5} + \frac{2\pi r^2}{(H-h)^3} - \frac{\lambda r}{(H-h)^5} - \frac{2r^2\pi h}{(H-h)^4}$$

$$= \frac{2\pi r^2}{(H-h)^4}[2H - 3h]$$

Evaluando en v_o y en λ

$$|\overline{H}| = \frac{2\pi \frac{4}{9} R^2}{\frac{16}{81} H^4} H > 0.$$

Entonces $\left(\frac{2}{3}R, \frac{H}{3}\right)$ es un máximo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor $\frac{R}{H}$.

XXI. Un comerciante de pintura tiene los siguientes gastos al comprar y distribuir x cajas de pintura por semana:

- Costos fijos 1200 pesos.
- Costo de la pintura 60*x* pesos.
- $\frac{x^2}{24}$ pesos por semana por concepto de almacenamiento de inventario, manejo, etcétera.

Semanalmente vende *x* cajas con un precio de *p* pesos por caja, donde

$$x = 2160 - 24p$$

Calcular el precio *p* al cual debe vender cada caja para hacer máxima la ganancia semanal.

Solución1:

El costo semanal está dado por

$$C(x) = 1200 + 60x + \frac{x^2}{24}.$$

El ingreso semanal por vender *x* cajas a *p* pesos cada una es

$$\begin{aligned} I(x) &= px \\ &= \left(\frac{2160 - x}{24}\right)x \\ &= \left(90 - \frac{x}{24}\right)x. \end{aligned}$$

Queremos maximizar la ganancia semanal que es:

$$\begin{aligned} G(x) &= I(x) - C(x) \\ &= \left(90 - \frac{x}{24}\right)x - \left(1200 + 60x + \frac{x^2}{24}\right). \end{aligned}$$

Calculamos la primera derivada

$$\begin{aligned} G'(x) &= 90 - \frac{x}{12} - 60 - \frac{x}{12} \\ &= 30 - \frac{x}{6} \end{aligned}$$

e igualamos a cero

$$x = 180.$$

Éste es el valor crítico

Calculamos la segunda derivada

$$G''(x) = -\frac{1}{6}.$$

Sustituyendo el valor crítico en la segunda derivada

$$G''(180) = -\frac{1}{6} < 0.$$

Así G tiene un máximo en

$$x = 180.$$

Entonces, el precio al que se debe vender la caja para que la ganancia semanal sea máxima es de

$$\begin{aligned} 180 &= 2160 - 24p \\ 24p &= 1980 \\ p &= \frac{165}{2}. \end{aligned}$$

Solución 2:

Sea

$$f(x, p) = xp - 1200 - 60x - \frac{x^2}{24}.$$

Con la restricción

$$x + 24p = 2160.$$

Consideramos

$$g(x, p) = x + 24p.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x, p) = \lambda \nabla g(x, p).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x, p)}{\partial x} = p - 60 - \frac{x}{12} \qquad \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} = x$$

$$\frac{\partial g(x, p)}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial g(x, p)}{\partial p} = 24.$$

Entonces,

$$\left(p - 60 - \frac{x}{12}, x \right) = \lambda(1, 24).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción se tiene que,

$$p - 60 - \frac{x}{12} = \lambda \qquad (a)$$
$$x = 24\lambda \qquad (b)$$
$$x + 24p = 2160 \qquad (c)$$

De (b) tenemos que

$$\lambda = \frac{x}{24}.$$

Sustituyendo λ en (a)

$$p - 60 - \frac{x}{12} = \frac{x}{24}$$
$$24p - 1440 - 2x = x$$
$$x = 8p - 480.$$

Sustituyendo x en (c)

$$8p - 480 + 24p = 2160$$
$$32p = 2640$$
$$p = \frac{165}{2}.$$

Por lo que

$$x = 180.$$

Así,

$$x = 180 \quad , \quad p = \frac{165}{2} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{15}{2}.$$

Entonces tenemos $v_o = \left(180, \frac{165}{2}\right)$, $g\left(180, \frac{165}{2}\right) = 2160$, S es la curva de nivel para g de valor 2160, $\nabla g(v_o) \neq 0$ y existe $\lambda = \frac{15}{2}$ tal que $\nabla f(v_o) = \lambda \nabla g(v_o)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,p) &= f(x,p) - \lambda g(x,p) \\ &= px - 120 - 60x - \frac{x^2}{24} - \lambda(x - 24p) \end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g(x,p)}{\partial x} & -\dfrac{\partial g(x,p)}{\partial p} \\ -\dfrac{\partial g(x,p)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 w(x,p)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 w(x,p)}{\partial x \partial p} \\ -\dfrac{\partial g(x,p)}{\partial p} & \dfrac{\partial^2 w(x,p)}{\partial x \partial p} & \dfrac{\partial^2 w(x,p)}{\partial p^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(x, p)$

$$\frac{\partial w(x,p)}{\partial x} = p - 60 - \frac{x}{12} - \lambda \qquad \frac{\partial w(x,p)}{\partial p} = x - 24\lambda$$

$$\frac{\partial^2 w(x,p)}{\partial x^2} = -\frac{1}{12} \qquad \frac{\partial^2 w(x,p)}{\partial p^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(x,p)}{\partial x \partial p} = 1.$$

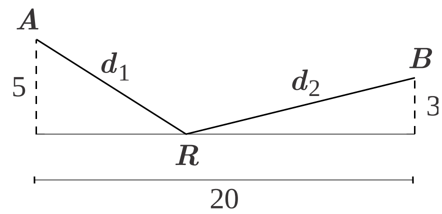
Por lo que el hessiano resultante es

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -24 \\ -1 & -\dfrac{1}{12} & 1 \\ -24 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 96 > 0$$

Entonces $\left(180, \dfrac{165}{2}\right)$, es un máximo local para $f|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 2160. Por lo que, el precio al que se debe vender la caja para que la ganancia semanal sea máxima es de

$$p = \frac{165}{2}.$$

XXII. Un rayo de luz se refleja en un espejo como se muestra en la figura siguiente:



Encontrar el punto R de reflexión de tal manera que la distancia total $d_1 + d_2$ sea mínima.

Solución 1:

Sea

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(20 - x)^2 + 9}\ .$$

Calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{-(20 - x)}{\sqrt{(20 - x)^2 + 9}}$$

e igualamos a cero

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} = \frac{(20 - x)}{\sqrt{(20 - x)^2 + 9}}$$

$$x\sqrt{(20 - x)^2 + 9} = (20 - x)\sqrt{x^2 + 25}$$

$$x^2\left((20 - x)^2 + 9\right) = (20 - x)^2\left(x^2 + 25\right)$$

$$9x^2 = 25(20 - x)^2$$

$$9x^2 = 25\left(400 - 40x + x^2\right)$$

$$10000 - 1000x + (25 - 9)x^2 = 0$$

$$16x^2 - 1000x + 10000 = 0$$

$$2x^2 - 125x + 1250 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{125 \pm \sqrt{125^2 - 8(1250)}}{4} \\ &= \frac{125 \pm \sqrt{125(45)}}{4} \\ &= \frac{125 \pm 3\sqrt{125(5)}}{4} \\ &= \frac{125 \pm 3(25)}{4}. \end{aligned}$$

Entonces $x_1 = \dfrac{25}{2}$ y $x_2 = 50$, son los valores críticos.

Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+25} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+25}}}{x^2+25} - \frac{-\sqrt{(20-x)^2+9} - \dfrac{-(20-x)^2}{\sqrt{(20-x)^2+9}}}{(20-x)^2+9}$$

$$= \frac{25}{\left(x^2+25\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(20-x)^2+9-(20-x)^2}{\left((20-x)^2+9\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{25}{\left(x^2+25\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{9}{\left((20-x)^2+9\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sustituimos x_1 en la segunda derivada

$$f''\left(\frac{25}{2}\right) = \frac{25}{\left(\left(\frac{25}{2}\right)^2+25\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{9}{\left(\left(20-\left(\frac{25}{2}\right)\right)^2+9\right)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

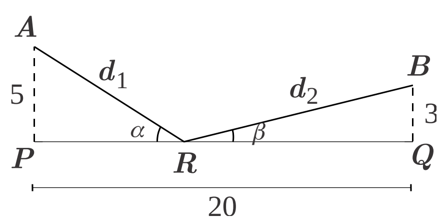
Entonces en x_1 se alcanza un mínimo. Desechamos el otro punto crítico ya que por las condiciones del problema no tiene sentido.

Observación:

El punto crítico es el valor x para el cual

$$\frac{x}{d_1} = \frac{20-x}{d_2}.$$

Consideremos la figura



Los triángulos APR y RQB son rectángulos, de donde

$$\cos\alpha = \frac{x}{d_1}$$

y

$$\cos\beta = \frac{20-x}{d_2}$$

Entonces el mínimo se obtiene cuando

$$\cos\alpha = \cos\beta$$

Como α y β están entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, entonces el mínimo se alcanza cuando $\alpha = \beta$, es decir, cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Solución 2:

Sea

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+25} + \sqrt{y^2+9}.$$

Con la restricción

$$x + y = 20.$$

Consideramos

$$g(x,y) = x + y.$$

Utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y).$$

Calculamos las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2+9}}$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 1.$$

Entonces,

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}, \frac{y}{\sqrt{y^2+9}} \right) = \lambda(1,1).$$

Igualando las coordenadas y considerando la restricción tenemos que,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+25}} = \lambda \qquad (a)$$

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+9}} = \lambda \qquad (b)$$

$$x + y = 20 \qquad (c)$$

Igualamos de (a) y (b)

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+9}}$$
$$x^2\left(y^2+9\right)=y^2\left(x^2+25\right)$$
$$x^2y^2+9x^2=x^2y^2+25y^2$$
$$9x^2=25y^2$$
$$3x=5y$$
$$x=\frac{5}{3}y.$$

Sustituimos x en (c)

$$\frac{5}{3}y+y=20$$
$$\frac{8}{3}y=20$$
$$y=\frac{15}{2}.$$

Así,

$$x=\frac{25}{2}\quad,\quad y=\frac{15}{2}\quad \text{y}\quad \lambda=\frac{25}{\sqrt{725}}.$$

Entonces tenemos $v_o=\left(\frac{25}{2},\frac{15}{2}\right)$, $g\left(\frac{25}{2},\frac{15}{2}\right)=20$. S es la curva de nivel para g de valor 20, $\nabla g\left(v_o\right)\neq 0$ y existe $\lambda=\frac{25}{\sqrt{725}}$ tal que $\nabla f\left(v_o\right)=\lambda\nabla g\left(v_o\right)$.

Consideramos la función auxiliar

$$\begin{aligned} w(x,y)&=f\left(x,y\right)-\lambda g\left(x,y\right)\\ &=\sqrt{x^2+25}+\sqrt{y^2+9}-\lambda\left(x+y\right).\end{aligned}$$

Y el determinante hessiano limitado

$$\left|\overline{H}\right|=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g\left(x,y\right)}{\partial x} & -\frac{\partial g\left(x,y\right)}{\partial y}\\ -\frac{\partial g\left(x,y\right)}{\partial x} & \frac{\partial^2 w\left(x,y\right)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w\left(x,y\right)}{\partial x\partial y}\\ -\frac{\partial g\left(x,y\right)}{\partial y} & \frac{\partial^2 w\left(x,y\right)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 w\left(x,y\right)}{\partial y^2}\end{vmatrix} \text{ evaluado en } v_o \text{ y } \lambda.$$

Calculamos las derivadas parciales de $w(x, y)$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}-\lambda \qquad \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{y^2+9}}-\lambda$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}=\frac{25}{\left(x^2+25\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}=\frac{9}{\left(y^2+9\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y}=0$$

Por lo que el hessiano resultante es

$$|\bar{H}|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{25}{(x^2+25)^{\frac{3}{2}}} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{9}{(y^2+9)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix}=2-\frac{9}{(y^2+9)^{\frac{3}{2}}}-\frac{25}{(x^2+25)^{\frac{3}{2}}}$$

Evaluando en $x=\frac{25}{2}$, $y=\frac{15}{2}$

$$|\bar{H}|=2-\frac{9}{\left(\left(\frac{15}{2}\right)^2+9\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{25}{\left(\left(\frac{25}{2}\right)^2+25\right)^{\frac{3}{2}}}\approx 2-0.02>0.$$

Entonces $\left(\frac{25}{2},\frac{15}{2}\right)$ es un mínimo local para $f\big|S$, donde S es la curva de nivel para g de valor 20.

Conclusiones

El primer problema con el que nos encontramos, en los ejemplos mostrados, es el planteamiento de la función que se quiere optimizar y de la ecuación que satisface la restricción del problema - esto es necesario para ambos métodos.

La ventaja de resolver problemas de optimización utilizando técnicas de cálculo de una variable, es que no hay que poseer grandes conocimientos de cálculo, ya que con tener claros los conceptos de la primera y segunda derivadas y el Criterio de la segunda derivada, es más que suficiente.

Una desventaja de dicho método, es que no siempre somos capaces de escribir una variable en términos de otra, lo que provoca que no podamos continuar con la aplicación del método; otra es que en caso de poderse, la ecuación resultante no es tan amigable para calcular su derivada, lo que hace que la resolución del problema se dificulte.

Ahora bien, el método de los Multiplicadores de Lagrange es utilizado para resolver problemas de optimización de varias variables, para utilizar este método, es necesario tener más conocimientos de cálculo, como son:

i) Las derivadas parciales,
ii) La derivabilidad de funciones de varias variables,
iii) El Hessiano limitado

para probar si hay máximos o mínimos.

Como este método transforma un problema de n variables con k restricciones a uno de $n+k$ variables sin restricciones, el problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones de $n+k$ variables, lo que algunas veces puede resultar un tanto tedioso. También, al realizar la prueba del Hessiano, algunas veces puede complicarse por la naturaleza de las ecuaciones, lo que podría hacer que la prueba fuese más complicada que el problema mismo.

Por estas razones, no es posible decir que alguno de los dos métodos es absoluto, ambos tienen sus ventajas y desventajas, si bien, el método de los Multiplicadores de Lagrange es mucho más potente, hay ocasiones en que resulta mucho más fácil resolver la restricción para alguna de las variables en términos de las otras y utilizar el cálculo de una variable.

Bibliografía

Apostol Tom, *Calculus*, Volumen 1 Reverté, 2ª edición, España 1982.

Boyce William E.; DiPrima Richard C., *Cálculo*, Compañía Editorial Continental, México 1994.

Larson Ron, Hostetler Robert, Edwars Bruce, *Cálculo Diferencial e Integral*, Mc Graw Hill, 7ª edición, México 2005.

Marsden Jerrold; Tromba Anthony, *Cálculo Vectorial*, Pearson, 4ª edición, México 1998.

Stewart James, *Calculus*, Brooks/Cole Publishing Company, 4ª edición, USA 1999.

Thomas George, *Calculus*, Pearson, 11ª edición, USA 2005.

Mesografía

http://www.fic.umich.mx/~lcastro/11%20maximos%20y%20minimos.pdf

http://canek.uam.mx/Calculo1/Teoria/Optimizacion/FTOptimizacion.pdf