Universidad Nacional Autónoma de México

y

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

El Teorema de Determinación de Martin y Algunas Aplicaciones.

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Giovanni Arquímedes Wences Nájera

Director: Dr. Fernando Hernández Hernández

Morelia, Michoacán - 17 de octubre de 2011.

Índice general

Agradecimientos III

INTRODUCCIÓN V

Capítulo 1. PRELIMINARES 1
1. Árboles 1
2. Espacios Polacos 4
3. Conjuntos Borel 8
4. Conjuntos Analíticos y Coanalíticos 11
5. Conjuntos Analíticos y Conjuntos Borel 12

Capítulo 2. EL TEOREMA DE MARTIN 17
1. Determinación 17
2. Demostración del Teorema de Martin 21

Capítulo 3. APLICACIONES DEL TEOREMA DE MARTIN 27
1. El PSP-juego 27
2. Juegos Wadge 29
3. Juegos de Separación y el Teorema de Hurewicz 30
4. Una Caracterización de Ultrafiltros Selectivos 32

Capítulo 4. EL AXIOMA DE DETERMINACIÓN 37
1. Determinación y Elección 37
2. Algunas Consecuencias de AD 38

Bibliografía 45

Agradecimientos

Dedico este trabajo a mis padres Teresa Avelino y Job Wences a quienes amo tanto.

Agradezco infinitamente a Dios por haber logrado mi objetivo al graduarme como maestro en ciencias matemáticas y darme siempre las fuerzas que necesité en momentos tan difíciles durante mi carrera.

A mis padres Teresa y Job, que han sido motivo de superación y que con sus consejos me han traído hasta aquí. Agradezco tanto a mi madre Teresa por su valentía y que a pesar de las circunstancias me empujó a seguir preparándome. A ellos agradezco por todo lo que han hecho de mí.

A mi profesor que admiro tanto, Fernando Hernández Hernádez por su apoyo que desde el primer día que lo conocí me lo manifestó, por su paciencia, dedicación, comprensión y motivación que me brindó, especialmente en aquellos momentos en que más los necesité. Le agradezco por todo lo que compartió conmigo.

A mis tíos que siempre han estado conmigo apoyándome y mostrándome su amor: Cornelio, Ramón, José Luis, Dominga y Claudia.

A mi papá Rufino, por sus consejos que me ha dado y que han sido fundamentales a lo largo de mi carrera.

Agradezco a la mujer de mi vida, por sus motivaciones y su comprensión, Rafita.

A mis amigos, Juan Manuel Cervantes y Elías Alonzo que también han sido parte fundamental en mi preparación.

Agradezco a los doctores Salvador García Ferreira, María Luisa Pérez Seguí, Daniel Juan Pineda y Pierre Bayard por haber revisado este trabajo.

Agradezco profundamente a CONACYT por el apoyo que me brindó para realizar este proyecto. Así también a la Universidad Nacional Autónoma de México, al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

INTRODUCCIÓN

La determinación de juegos ha surgido en la teoría de conjuntos moderna y ha sido una de las áreas de mayor investigación. Los juegos infinitos entre dos personas con información perfecta, que denotaremos por $J(T, X)$, fueron introducidos por Gale y Stewart, aunque muchos casos especiales fueron estudiados antes por matemáticos polacos. Davis Gale y Frank Stewart en 1953 probaron que todo juego $J(T, X)$ con X cerrado o abierto, es determinado; Philip Wolfe probó dos años maś tarde que si $X \in \Sigma_2^0$, el juego $J(T, X)$ es determinado y en 1964 Morton Davis extendió el resultado para $X \in \Sigma_3^0$. En 1975, Donald A. Martin probó que si X es Borel, entonces el juego $J(T, X)$ es determinado, aunque tal prueba es muy complicada. Diez años más tarde, Martin construyó una nueva prueba de este resultado, la cual es mucho más elegante y menos difícil que la anterior.

En este trabajo se presenta por primera vez en un sólo volumen todo lo necesario para desarrollar una demostración del teorema de Martin y algunas aplicaciones clásicas de este teorema; por ejemplo, probar que todo boreliano de un espacio polaco sin puntos aislados tiene la propiedad del conjunto perfecto (consecuentemente es a lo más numerable o tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$) y otras no tan clásicas, como dar una caracterización de ultrafiltros selectivos. En todos los casos siempre haciendo una presentación accesible a lectores con conocimientos básicos en teoría de conjuntos y topología. Otra contribución que hacemos en esta tesis, es la de probar algunos hechos en una otra teoría: ZF+AD que puede probarse consistente si se acepta la existencia de cardinales grandes. Se estudia la incompatibilidad de AD y AC y se presentan consecuencias de AD tales como el hecho de que en esta teoría todo subconjunto de números reales es medible según Lebesgue.

En el primer capítulo introducimos conceptos y resultados que utilizaremos a lo largo del presente trabajo, tales como espacios polacos y algunas de sus propiedades, la jerarquía de los conjuntos borelianos, conjuntos analíticos, conjuntos coanalíticos y árboles. Mostraremos resultados importantes como el teorema de separación de Lusin y el teorema de Suslin.

En el segundo capítulo introdujimos los conceptos de determinación de juegos infinitos entre dos personas con información perfecta, probaremos el resultado de Gale-Stewart que trata acerca de la determinación de juegos cerrados y abiertos. En este capítulo hablaremos acerca de la primera prueba que dió Donald A. Martin sobre la determinación de los conjuntos borelianos y finalmente presentaremos con detalles una demostración de este resultado.

En el tercer capítulo trataremos con juegos diferentes a los de información perfecta $J(T,X)$, con los cuales se han obtenido pruebas diferentes de algunos resultados importanes tanto en topología como en teoría de conjuntos a través del teorema de Martin, en cada ejemplo exponemos la "traducción" a un juego $J(T,X)$. Específicamente, estudiaremos el PSP-juego con el cual probaremos el teorema del conjunto perfecto para conjuntos Borelianos, estudiaremos el juego Wadge y el juego de separación para probar el teorema de Hurewicz y finalmente introduciremos un nuevo juego para probar un teorema de Mathias, que trata acerca de ultrafiltros selectivos.

Finalmente, en el cuarto capítulo trataremos un axioma que es incompatible con el axioma de elección (AC), el axioma de determinación (AD), el cual establece que para todo conjunto A de reales, el juego $J(\omega^{<\omega},A)$ es determinado y damos algunas propiedades de regularidad de tales conjuntos (como la propiedad del conjunto perfecto, la propiedad de Baire) que són válidos en ZF+AD como una aplicación. Esta teoría nos permite responder a la pregunta: ¿existen ultrafiltros no principales sobre ω? que en ZF no se responde.

CAPíTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se recopilarán conceptos y resultados topológicos y conjuntistas que utilizaremos en este trabajo. Es de suma importancia saber que toda esta teoría se desarrolla (a menos que se diga lo contrario) dentro de la axiomática de Zermelo-Fraenkel (ZF) más axioma de elección (AC), que denotamos por (ZFC), para consultar los axiomas de esta teoría ver [**6**]. En caso de no definir algún objeto en esta tesis se puede consultar [**9**] y [**11**].

1. Árboles

El concepto de árbol es un instrumento básico de combinatoria en la teoría descriptiva de conjuntos. A continuación daremos conceptos concernientes a árboles y un resultado básico acerca de los mismos.

Sea A un conjunto no vacío, A^ω denota a la familia de funciones de ω en A, con la topología producto, tomando A con la topología discreta.
Algunas convenciones y notación:

- Todo número natural es el conjunto de números naturales anteriores a él.
- A^n es la famila de sucesiones finitas $s = \langle s(0), ..., s(n-1)\rangle = \langle s_0, ..., s_{n-1}\rangle$ de longitud n de A. La longitud de una sucesión s se denota por long(s).
- $A^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} A^n$ es el conjunto de todas las sucesiones finitas de A.
- Si x es una función, $dom(x)$ es el dominio de x.
- Si x es una función y $A \subset dom(x)$ entonces $x \upharpoonright A$ denota a la restricción de x en A.
- Si t, s, son sucesiones finitas de A, decimos que s es un segmento inicial de t y t es una extensión de s si $s = t \upharpoonright m$, para algún $m \leq \text{long}(t)$ y escribimos $s \subseteq t$.
- Si $s, t \in A^{<\omega}$, digamos $s = \langle s_0, ..., s_k\rangle$ y $t = \langle t_0, ..., t_l\rangle$, entonces se define la concatenación de s con t cocomo sigue:

$$s^\frown t = \langle s_0, ...s_k, t_0, ..., t_l\rangle.$$

  En particular, si $a \in A$ entonces $s^\frown a$ queda definido por $s^\frown a = s^\frown\langle a\rangle$

Definición 1.1. Sea A un conjunto no vacío. Un subconjunto $T \subseteq A^{<\omega}$ es un *árbol* sobre A si

$$(\forall s \in T)(\forall n \in dom(s))(s \restriction n \in T).$$

Es decir, es cerrado bajo segmentos iniciales. (En particular, $\emptyset \in T$ si T es no vacío). Llamamos a los elementos de T *nodos* de T.

Notación: Sea A un conjunto no vacío.

1. Si $s \in A^{<\omega}$, entonces el cono de s es el conjunto
$$\langle s \rangle = \{f \in A^{\omega} : s \subseteq f\}.$$
2. Si $T \subseteq A^{<\omega}$ es un árbol, entonces las ramas de T son los elementos del conjunto
$$[T] = \{f \in A^{\omega} : (\forall n \in \omega)(f \restriction n \in T)\}.$$
3. Si $T \subseteq \omega^{<\omega}$ es un árbol y $t \in T$, $succ_T(t) = \{n : t^\frown n \in T\}$. Si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de ω, entonces T es un árbol con ramificaciones en $\mathcal{A}$ si para todo $t \in T$, $succ_T(t) = \{n : t^\frown n \in T\} \in \mathcal{A}$.
4. Si $s \in A^{<\omega}$ y T es un árbol , entonces
$$T_s = \{t \in T : t \subseteq s \vee s \subseteq t\}.$$
De este modo, $[T_s] = \langle s \rangle \cap [T]$.

Sea $T \subseteq A^{<\omega}$ un árbol. Diremos que T es *bien podado* si satisface:

$$(\forall t \in T)(\exists a \in A)(t^\frown a \in T).$$

Es decir, si todo $s \in T$ tiene una extensión propia $t \in T$.

Lema 1.2. *La función $T \mapsto [T]$ es una biyección entre los árboles bien podados en $A^{<\omega}$ y los subconjuntos cerrados no vacíos de A^{ω}.*

Demostración.

Sean

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq A^{\omega} : F \textit{ es cerrado no vacío de } A\}$$

y

$$\mathcal{T} = \{T \subseteq A^{<\omega} : T \textit{ es árbol bien podado sobre } A\}.$$

Veamos primero que si $T \in \mathcal{T}$ entonces $[T]$ es cerrado. Sea $f \in A^\omega \setminus [T]$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $f \upharpoonright n \notin T$. Como T es árbol, $\langle f \upharpoonright n\rangle \cap [T] = \emptyset$. Esto prueba que $[T]$ es cerrado en A^ω, pues $\langle f \upharpoonright n\rangle$ es una vecindad abierta de f.
Sea $\psi : \mathcal{T} \to \mathcal{F}$ dada por $\psi(T) = [T]$. Se define la función

$$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{T}$$

como sigue:

$$\varphi(F) = \{f \upharpoonright n : n \in \omega \text{ y } f \in F\}.$$

Probaremos que tales funciones son inversas una de la otra. Veamos primero $(\varphi \circ \psi)(T) = T$ para todo $T \in \mathcal{T}$; es decir, $\{f \upharpoonright n : n \in \omega \text{ y } f \in [T]\} = T$. Sea $B = \{f \upharpoonright n : n \in \omega \text{ y } f \in [T]\}$.

Sea $t \in B$, entonces $t = f \upharpoonright n$ para algún $f \in [T]$ y algún $n \in \omega$. Como $f \in [T]$ tenemos que $t = f \upharpoonright n \in T$. Ahora sea $t \in T$, puesto que T es bien podado podemos obtener $f \in [T]$ tal que $t \subseteq f$. Luego $f \upharpoonright dom(t) = t \in B$. Así $(\varphi \circ \psi)(T) = T$. Probemos ahora que $(\psi \circ \varphi)(F) = F$, es decir, $[B] = F$.
Sea $t \in [B]$. Supongamos que $t \notin F$, entonces $t \notin \bar{F}$ y por lo tanto existe un $k \in \omega$ tal que $\langle t \upharpoonright k\rangle \cap F = \emptyset$. Por otro lado, existe $f \in F$ tal que $t \upharpoonright k = f \upharpoonright k$, entonces $f \in \langle t \upharpoonright k\rangle$, lo cuál es una contradicción. La

otra contención es inmediata. ❑

Definición 1.3. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es un retracto de X si existe una función $f : X \to A$ continua tal que $(\forall a \in A)(f(a) = a)$.

Teorema 1.4. *Sean $F \subseteq H \subseteq A^\omega$ cerrados no vacíos de A^ω. Entonces F es un retracto de H.*

Demostración.

Sean T y S los árboles bien podados en $A^{<\omega}$ tales que $[T] = F$ y $[S] = H$. Veamos que $T \subseteq S$. Sea $t \in T$, como T es bien podado podemos obtener $f \in [T]$ tal que $t \subseteq f$. Entonces $f \in [S]$, luego $t = f \upharpoonright dom(t) \in S$. Definamos $g : S \to T$ recursivamente como sigue: $g(\emptyset) = \emptyset$ y para cualquier $s \in A^{<\omega}$ y $a \in A$:

$$g(s^\frown a) = \begin{cases} g(s)^\frown a & \text{si } g(s)^\frown a \in T \\ g(s)^\frown b & \text{en otro caso, donde } b \in A \text{ es tal que } g(s)^\frown b \in T. \end{cases}$$

Ahora definimos la función $G : [S] \to [T]$ como $G(f) = \bigcup_{n\in\omega} g(f \upharpoonright n)$ para todo $f \in [S]$. Si $f \in [T]$ entonces $G(f) = f$. Verifiquemos que G es continua. Sea $f \in [S]$ y $G(f) = \bigcup_{n\in\omega} g(f \upharpoonright n) = h$. Sea $k \in \omega$ y consideremos la vecindad abierta $\langle h \upharpoonright k\rangle$ de h. Tenemos que $G[\langle f \upharpoonright k\rangle] \subseteq \langle h \upharpoonright k\rangle$, en efecto; sea $\varphi \in G[\langle f \upharpoonright k\rangle]$, entonces existe $\psi \in \langle f \upharpoonright k\rangle$ tal que $\bigcup_{n\in\omega} g(\psi \upharpoonright n) = \varphi$, pero $\bigcup_{n\le k} g(f \upharpoonright n) = \bigcup_{n\le k} g(\psi \upharpoonright n) \subseteq \varphi$, luego $\varphi \in \langle h \upharpoonright k\rangle$, así G es continua. ❑

Algunas veces trataremos con árboles T sobre conjuntos A los cuales son productos de la forma $A = B \times C$. Un miembro de T es una sucesión $s = \langle s_i\rangle_{i<n}$ con $s_i = (b_i, c_i)$, $b_i \in B$, $c_i \in C$. Es más conveniente identificar s con el par de sucesiones (t, u) con $t_i = b_i$, $u_i = c_i$ y ver a T como un subconjunto de $B^{<\omega} \times C^{<\omega}$ con la propiedad que $(t, u) \in T$ implica que $\mathrm{long}(t) = \mathrm{long}(u)$, y $(t, u) \subseteq (t', u')$ (es decir, $t \subseteq t'$ y $u \subseteq u'$), $(t', u') \in T$ implica $(t, u) \in T$. Con esta convención $[T]$ es el conjunto de parejas $(x, y) \in B^\omega \times C^\omega$ con $(x \upharpoonright n, y \upharpoonright n) \in T$ para todo n.

De acuerdo a 1.2, aplicado a $(B \times C)^\omega$, el cual identificamos con $B^\omega \times C^\omega$, los subconjuntos cerrados de $B^\omega \times C^\omega$ son exactamente aquellos de la forma $[T]$, para T un árbol bien podado sobre $B \times C$.

2. Espacios Polacos

Los objetos de interés de la Teoría Descriptiva de Conjuntos son los conjuntos y funciones "definibles"de los espacios polacos.

Definición 1.5. Un espacio topológico X es polaco si X es separable y completamente metrizable (es decir, existe una métrica completa para X compatible con su topología).

Algunos ejemplos de espacios polacos son: la recta real, los espacios euclideanos $\mathbb{R}^n$, el espacio de Cantor 2^ω, el espacio de Baire ω^ω.

Presentamos a continuación algunos resultados importantes sobre espacios polacos que utilizaremos maś adelante:

Teorema 1.6. *1. Un subespacio cerrado de un espacio polaco es polaco.*
2. Los productos numerables de espacios polacos son polacos.

Demostración. 1. Sea X un espacio polaco y $Y \subseteq X$ cerrado en X. Sea d una métrica compatible con la topología de X y d_Y la métrica d restringida a $Y \times Y$. Es claro que si $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ es una sucesión de Cauchy en Y, también es una sucesión de Cauchy en X, luego como X es completo, tal sucesión converge a un punto de X. Pero como $x \in \bar{Y}$ y Y es cerrado, $x \in Y$. Por lo tanto Y es completo. Para ver que Y es separable, observemos que como X es métrico y separable es segundo numerable y por lo tanto Y también es segundo numerable, pero esto implica que Y es separable, pues Y es métrico. Así que Y es polaco.

2. Sea X_n un espacio polaco para cada $n \in \omega$. Vamos a mostrar que $\prod_{n\in\omega} X_n$ es polaco. Por el teorema de Hewitt-Marzcewiski-Pondicery $\prod_{n\in\omega} X_n$ es separable. Probaremos ahora que $\prod_{n\in\omega} X_n$ es completamente metrizable. Sea d_n una métrica compatible con la topología de X_n acotada por 1, para cada $n \in \omega$. Definamos para cada $x, y \in \prod_{n\in\omega} X_n$, $d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n))$, d es una métrica compatible con la topología producto (topológico) $\prod_{n\in\omega} X_n$. Veamos que d es una métrica completa para el producto topológico. Sea $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ una sucesión de Cauchy en $\prod_{n\in\omega} X_n$, entonces $\langle \pi_i(x_n) : n \in \omega\rangle$ es de d_i-Cauchy, para cada $i \in \omega$. Luego, como d_i es completa en X_i para cada $i \in \omega$, $\pi_i(x_n)$ converge a $z_i \in X_i$ para cada $i \in \omega$. Por lo tanto, x_n converge a $z = \langle z_0, z_1, \ldots\rangle \in \prod_{n\in\omega} X_n$ y así $\prod_{n\in omega} X_n$ es completamente metrizable. ❑

Un conjunto A en un espacio topológico X se llama G_δ si es igual a una intersección numerable de conjuntos abiertos de X. Ahora caracterizaremos a los subespacios de espacios polacos los cuales son polacos (en la topología relativa).

Teorema 1.7. *Sea X un espacio polaco y $Y \subseteq X$. Entonces Y es polaco si y sólo si Y es un G_δ en X.*

Demostración. Sean Y subespacio polaco de X y d una métrica completa sobre Y compatible con la topología de subespacio de Y. Sean $\mathcal{B}$ una base para X y

$$A = \{x \in \bar{Y} : (\forall \epsilon > 0)(\exists V \in \mathcal{B})(x \in V \wedge diam(V \cap Y) < \epsilon)\}$$

donde el diámetro se determina usando la métrica d. Observe que

$$A = \bar{Y} \cap \bigcap_{n\in\omega} \bigcup \{V \in \mathcal{B} : diam(V \cap Y) < \frac{1}{n}\}$$

es un subespacio G_δ de X. Ahora veamos que $A = Y$. Claramente, $Y \subseteq A \subseteq \bar{Y}$. Sea $x \in A$. Para cada $n \in \omega$ existe una vecindad $V_n \in \mathcal{B}$ de x con $0 < diam(V_n \cap Y) < \frac{1}{n}$. Por cada $n \in \omega$ eligiremos un elemento $y_n \in Y \cap V_0 \cap \ldots \cap V_n$. La sucesión $\langle y_n\rangle_{n\in\omega}$ es de Cauchy en Y, y como Y es completo, $\langle y_n\rangle_{n\in\omega}$ converge a un elemento de Y, pero dado que converge a x, tenemos que $x \in Y$.
Conversamente, empezaremos por probar que si Y es un subconjunto abierto de X, entonces Y es completamente metrizable. Para tal efecto definiremos una métrica d sobre Y, veremos que es compatible con la topología de subespacio de Y y finalmente veremos que es completa. A continuación los detalles. Sea $\rho \leq 1$ una métrica completa sobre X que es compatible con su topología. La función $\rho(x, X \setminus Y)$ es continua y positiva en Y. Definimos la función $f : Y \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$f(x) = \frac{1}{\rho(x, X \setminus Y)}$$

f es claramente continua. Por tanto, la función $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \rho(x, y) + |f(x) - f(y)|$$

es una métrica para Y.

- d es compatible con la topología de Y como subespacio de X.

  En efecto, la desigualdad $d \geq \rho$ prueba que $B_d(x, \epsilon) \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$. La continuidad de la función $|f(x) - f(y)|$ (como función en y), garantiza que hay $\delta > 0$ tal que $B_\rho(x, \delta) \subseteq B_d(x, \epsilon)$.
- (Y, d) es un espacio métrico completo.

  Sea $\{x_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión d-Cauchy en Y. La desigualdad $d \geq \rho$ demuestra que $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es también ρ-Cauchy, de modo que es convergente a un punto $x \in \bar{Y}$. Supongamos que $x \notin Y$. Para cada $k \in \omega$ elegimos $x_{n_k} \in Y \cap B_\rho(x, \frac{1}{k})$. De este modo, para cada $k \in \omega,\ f(x_{n_k}) \geq k$. Pero en tal caso, para todo $N \in \omega$ la sucesión $|f(x_N) - f(n_k)|$ tiende a infinito, de modo que, para cada $N \in \omega$ $d(x_N, x_{n_k})$ también tiende a infinito. Esto quiere decir que $\{x_n\}_{n\in\omega}$ no es una sucesión d-Cauchy, lo cual es una contradicción.

  Ahora, supongamos que $Y = \bigcap_{n\in\omega} A_n$ donde cada A_n es abierto en X. Para cada $n \in \omega$, sea d_n una métrica completa para A_n compatible y acotada por 1. Sea $\psi : Y \to \prod_{n\in\omega} A_n$ la función tal que $\psi(x)$ es la sucesión constante x. Claramente ψ es inyectiva. Veremos que es continua y abierta, con lo cual tendremos que es un homeomorfismo sobre su imágen. Finalmente veremos que la imágen de Y bajo ψ es un subespacio cerrado del espacio completamente metrizable $\prod_{n\in\omega} A_n$, con lo cual quedará establecido que $\psi(Y)$ es completamente metrizable y en consecuencia Y también lo es. A continuación los detalles:
- ψ es continua.

  Sea U un subconjunto abierto de A_n. Así U es abierto en X (porque A_n es abierto en X) y en consecuencia, $U \cap Y$ es abierto en Y. Pero la preimágen del abierto subbásico $\pi_{A_n}^{-1}(U)$ bajo ψ es justamente $U \cap Y$. En consecuencia, las preimágenes bajo ψ de abiertos subbásicos son abiertas en Y, con lo cual se tiene que f es continua.
- ψ es abierta en su imágen.

  Si U es un subconjunto abierto en Y, existe U_0 abierto en A_0 tal que $U = Y \cap U_0$. Pero $\psi(U_0) = \pi_{A_0}^{-1}(U_0) \cap \psi(Y)$ es abierto, lo cual prueba que ψ es abierta.
- $\psi(Y)$ es un subespacio cerrado de $\prod_{n\in\omega} A_n$.

  Sea $\{y_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en Y tal que la sucesión $\{\psi(y_n)\}$ converge en una función, digamos g. Particularmente, $\{\psi(y_n)\}$ converge en la coordenada A_0, a un punto, digamos $x = g(0)$. Como cada $\psi(y_n)$ es una sucesión constante, tenemos que para cada $k \in \omega,\ g(k) =$

x. Pero esto prueba que para cada $k \in \omega$, $x \in A_k$. Así pues, $\psi(x) = g$, con lo que queda demostrado que $\psi(Y)$ es cerrado en $\prod_{n\in\omega} A_n$.

❑

Terminamos esta sección probando que los espacios polacos son imágen continua del espacio de Baire ω^ω.

Definición 1.8. Sea X un conjunto. Una familia $\langle A_s : s \in \omega^{<\omega}\rangle$ de subconjuntos de X es un *esquema de Luzin* si para cualesquiera $s, t \in \omega^{<\omega}$ y $k \neq l \in \omega$:

1. $s \subseteq t \Rightarrow A_t \subseteq A_s$;
2. $A_{s^\frown k} \cap A_{s^\frown l} = \emptyset$.

Teorema 1.9. *Sea X un espacio polaco. Entonces existe un conjunto cerrado $F \subseteq \omega^\omega$ y una biyección continua $h : F \to X$. En particular, si X es no vacío, existe una función suprayectiva continua $g : \omega^\omega \to X$ extendiendo a f.*

Demostración. La segunda afirmación se sigue de la primera y de 1.4.
Sea $d \leq 1$ una métrica completa compatible con la topología de X. Por recursión se construye un esquema de Luzin $\langle A_s : s \in \omega^{<\omega}\rangle$ tal que:

1. $A_\emptyset = X$.
2. $(\forall s \in \omega^{<\omega})(A_s \text{ es } F_\sigma)$.
3. $A_s = \bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n} = \bigcup_{n\in\omega} \overline{A_{s^\frown n}}$.
4. $diam(A_s) \leq \frac{1}{2^{|s|}}$.

Demostraremos inductivamente que es posible hacer esta construcción. Supongamos que A_s es un subconjunto F_σ de X. Sea $\{C_n\}$ una familia de subconjuntos cerrados de X tal que $A_s = \bigcup_{n\in\omega} C_n$. Podemos suponer que si $n \in \omega$ entonces $C_n \subseteq C_{n+1}$, pues de otro modo, haciendo $D_n = \bigcup_{m\leq n} C_n$ tendríamos una suceción creciente de cerrados cuya unión es A_s. Entonces $A_s = \bigcup_{n\in\omega} C_{n+1}\backslash C_n$. Cada $C_{n+1}\backslash C_n$ es un subconjunto F_σ de X, por ser la intersección de un cerrado con un abierto. Sólo falta verificar que cada $C_{n+1}\backslash C_n$ se puede descomponer como la unión ajena de subconjuntos F_σ de X con diámetro menor que $\frac{1}{2^{|s|}}$. Mejor aún, probemos que si $C = D \cap U$, con D cerrado, U abierto y $\epsilon > 0$, entonces C se puede descomponer como unión ajena de subconjuntos F_σ de X mutuamente ajenos con diámetro menor que ϵ y $\overline{C} \subseteq C$.
En efecto, sea $\{U_n\}$ una familia de subconjuntos abiertos de X con diám $(U_n) < \epsilon$ y tal que $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n = \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n}$. Sea $E_n = D \cap (U_n\backslash(\bigcup_{k\leq n-1} U_k))$. Así, cada E_n es F_σ, con diámetro menor que ϵ, $\overline{E_n} \subseteq \overline{U_n} \subseteq U$ y por tanto $E_n \subseteq C$, y $\bigcup_{n\in\omega} \overline{E_n} = C$.

Sea $F = \{f \in \omega^\omega : \bigcap_{n\in\omega} A_{f\restriction n} \neq \emptyset\}$. Definimos $h : F \to X$ por $\{h(x)\} = \bigcap_{n\in\omega} A_{x\restriction n}$. Es inmediato que h es inyectiva y continua. Por 3. h es suprayectiva. Sólo falta mostrar que F es cerrado. Sea $\{x_n : n \in \omega\}$ una sucesión en F tal que $x_n \to x$. Observemos en primer lugar que $\{h(x_n) : n \in \omega\}$ es de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$ y sea $2^N > \frac{1}{\epsilon}$. Sea $M \in \omega$ tal que para todo $n \geq M$ $x_n \restriction N = x \restriction N$, es decir, para todo $n \geq M$ x_n pertenece al cerrado abierto $\langle x \restriction N\rangle$. En consecuencia, para todo $n \geq M$, $h(x_n) \in A_{x\restriction N}$ pero como $diam(A_{x\restriction N}) < \frac{1}{2^N} < \epsilon$, tenemos que $d(h(x_n), h(x_m)) < \epsilon$ siempre que $n, m \geq M$, es decir, la sucesión $\{h(x_n) : n \in \omega\}$ es de Cauchy. Como X es completo, existe $y \in X$ tal que $h(x_n) \to y$. Además, por ser h suprayectiva existe $z \in F$ tal que $h(z) = y$. Por inducción se prueba que $y \in A_{x\restriction n}$ para todo $n \in \omega$. De este modo, $z = x$, lo cual prueba que $x \in F$ y así se concluye que F es cerrado. ❏

3. Conjuntos Borel

Sea X un conjunto. Recordemos que una σ-álgebra sobre X es una colección de conjuntos de X conteniendo $\emptyset$ y cerrada bajo complementos e intersecciones numerables. Además dado $A \subseteq P(X)$, la intersección de σ-álgebras que contienen a A es una σ-álgebra y se llama σ-álgebra generada por A.

Definición 1.10. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se define la σ-álgebra de Borel de X como sigue:

$$Borel(X) = \bigcap\{\mathcal{B} \subseteq P(X) : \mathcal{B} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \tau \subseteq \mathcal{B}\}.$$

Así que la σ-álgebra de Borel de X es la generada por los abiertos del espacio topológico (X, τ).

Un ejemplo de conjuntos definibles son los conjuntos de Borel. Enseguida veremos como está dada la jerarquía de los conjuntos borelianos, para esto ω_1 denota el primer ordinal no numerable.

Definición 1.11. Sea (X, τ) un espacio topológico. Para cada $\alpha \in \omega_1$ se definen las clases Δ^0_α, Σ^0_α y Π^0_α recursivamente como $\Delta^0_0 = \Sigma^0_0 = \Pi^0_0 = \emptyset$ y

$$\Sigma^0_1 = \tau = \{U \subseteq X : U \text{ es abierto}\}$$

$$\Sigma^0_\alpha = \{\bigcup_{n\in\omega} A_n : (\forall n)(\exists\beta n < \alpha)(A_n \in \Pi^0_{\beta_n})\}$$

$$\Pi^0_\alpha = \{X\backslash A : A \in \Sigma^0_\alpha\}$$

$$\Delta^0_\alpha = \Pi^0_\alpha \cap \Sigma^0_\alpha.$$

Observemos que Π^0_1 consiste de todos los F subconjuntos cerrados de X, Π^0_α es la colección de todas las intersecciones $\bigcap_{n\in\omega} A_n$, donde $A_n \in \Sigma^0_{\beta_n}$ para toda $n \in \omega$ y algún $\beta_n < \alpha$, Σ^0_2 es la familia de todos los subconjuntos U de X de tipo F_σ y Π^0_2 de todos los subconjuntos U de X de tipo G_δ. Cuando haya motivo de confusión denotaremos con $\Sigma^0_\alpha(X)$, $\Pi^0_\alpha(X)$, $\Delta^0_\alpha(X)$, a las clases recién definidas.

Lema 1.12. *Sean X un espacio polaco y $\alpha \in \omega_1$.*

1. Σ^0_α *es cerrada bajo uniones numerables.*
2. Π^0_α *es cerrada bajo intersecciones numerables.*
3. $\Pi^0_\alpha \subseteq \Pi^0_{\alpha+1}$ *y* $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}$.
4. Δ^0_α *es cerrada bajo complementos.*
5. $\Sigma^0_\alpha, \Pi^0_\alpha$*y* Δ^0_α *son cerradas bajo uniones e intersecciones finitas.*
6. $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Delta^0_{\alpha+1} \subseteq \Pi^0_{\alpha+1}$.
7. $\Pi^0_\alpha \subseteq \Delta^0_{\alpha+1} \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}$.

Demostración. 1: Para cada $n \in \omega$, sea $B_n \in \Sigma^0_\alpha$, entonces $B_n = \bigcup_{m\in\omega} B_{mn}$, donde $\{B_{mn} : m \in \omega\}$ es una familia de conjuntos $B_{mn} \in \bigcup_{\gamma<\alpha} \Pi^0_\gamma$. Luego $\bigcup_{n\in\omega} B_n = \bigcup_{n\in\omega} \bigcup_{m\in\omega} B_{mn}$ es la unión numerable de la familia $\{B_{mn} : (n,m) \in \omega \times \omega\}$. Así $\bigcup_{n\in\omega} B_{mn} \in \Sigma^0_\alpha$.
2: Para cada $n \in \omega$, sea $A_n \in \Pi^0_\alpha$, luego, para cada $n \in \omega$ $A_n = X\backslash B_n$ para algún $B_n \in \Sigma^0_\alpha$. Como $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \bigcap_{n\in\omega} X\backslash B_n = X\backslash \bigcup_{n\in\omega} B_n$ y $\bigcup_{n\in\omega} B_n \in \Sigma^0_\alpha$ (por 1), tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in \Pi^0_\alpha$.
3: La demostración se hará de manera simultánea por inducción. Para $\alpha = 1$ lo tenemos por hipótesis. Supongamos que para $\gamma < \beta \leq \alpha$ se cumple $\Pi^0_\gamma \subseteq \Pi^0_\beta$ y $\Sigma^0_\gamma \subseteq \Sigma^0_\beta$.

Veamos entonces que $\Pi^0_\gamma \subseteq \Pi^0_{\alpha+1}$ y $\Sigma^0_\gamma \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}$, para esto basta probar para $\alpha = \beta$. Sea $A \in \Sigma^0_\gamma$, por hipótesis $A \in \Sigma^0_{\gamma+1}$, luego $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, tal que para toda $n \in \omega, A_n \in \Pi^0_\gamma$, pero por hipótesis tenemos que $\Pi^0_\gamma \subseteq \Pi^0_\beta$, así que para toda $n \in \omega$, $A_n \in \Pi^0_\beta$, luego $A \in \Sigma^0_{\beta+1}$ y entonces $\Sigma^0_\gamma \subseteq \Sigma^0_{\beta+1}$. La otra contención se prueba de manera similar.
4: Sea $A \in \Delta^0_\alpha$. Entonces $A \in \Pi^0_\alpha$, luego existe $B \in \Sigma^0_\alpha$ tal que $A = X\backslash B$, pero como $A \in \Sigma^0_\alpha$, $X\backslash A = B \in \Pi^0_\alpha$, así $B = X\backslash A \in \Delta^0_\alpha$.

5: Sean $A, B \in \Sigma^0_\alpha$, entonces $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ y $B = \bigcup_{m\in\omega} B_m$, tal que para cada $n, m \in \omega$, $A_n, B_m \in \bigcup_{\gamma<\alpha} \Pi^0_\gamma$, luego $(A_n \cap B_m) \in \bigcup_{\gamma<\alpha} \Pi^0_\gamma$. Pero como $A \cap B = \bigcup_{m\in\omega} \bigcup_{n\in\omega}(A_n \cap B_m)$, tenemos que

$(A \cap B) \in \Sigma^0_\alpha$. De la definición de Π^0_α y de lo antes probado se sigue que Π^0_α es cerrado bajo uniones finitas.

Que Δ^0_α sea cerrada bajo uniones e intersecciones finitas se sigue de la definición de Δ^0_α, de 1, 2 y de que Σ^0_α es cerrada bajo intersecciones finitas y Π^0_α es cerrada bajo uniones finitas.

De 3 se siguen 6 y 7. ❑

Con este lema queda establecido que las jerarquías Σ^0_α y Π^0_α están ordenadas por contención de la manera que se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma^0_1 \arrow[dr] & & \Sigma^0_2 \arrow[dr] & & \cdots \\
\Delta^0_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Delta^0_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Delta^0_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \Pi^0_1 \arrow[ur] & & \Pi^0_2 \arrow[ur] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.13. *Sea X un espacio polaco. Entonces*

$$Borel(X) = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Sigma^0_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Pi^0_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Delta^0_\alpha.$$

Demostración. Es inmediato del lema anterior que $\bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Sigma^0_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Pi^0_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Delta^0_\alpha$. Veamos que $\bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Sigma^0_\alpha$ es una σ-álgebra. Puesto que X es un abierto, $X \in \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Sigma^0_\alpha$. Por parte 2 del lema anterior, $\bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Sigma^0_\alpha$ es cerrada bajo uniones numerables y por parte 4 del mismo lema, es cerrada bajo complementos. Así $Borel(X) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Sigma^0_\alpha$.
Ahora mostremos el recíproco, probaremos por inducción sobre $\alpha < \omega_1$ que $\Sigma^0_\alpha \subseteq Borel(X)$ y $\Pi^0_\alpha \subseteq Borel(X)$. Supongamos que para todo $\beta < \alpha$, $\Sigma^0_\beta \subseteq Borel(X)$ y $\Pi^0_\beta \subseteq Borel(X)$. Sean $A \in \Sigma^0_\alpha$ y $B \in \Pi^0_\alpha$. Entonces $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ y $B = \bigcap_{n\in\omega} B_n$, donde para toda $n \in \omega$ existe $\beta_n < \alpha$ tal que $A_n \in \Pi^0_{\beta_n}$ y $B_n \in \Sigma^0_{\beta_n}$. Por hipótesis para cada $n \in \omega$ tenemos que $A_n \in Borel(X)$ y $B_n \in Borel(X)$, luego como $Borel(X)$ es una σ-álgebra, se tiene que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n \in Borel(X)$ y $B = \bigcap_{n\in\omega} B_n \in Borel(X)$. ❑

Otra propiedad muy importante de las clases Σ^0_α y Π^0_α, es que son cerradas bajo preimágenes continuas, para todo $\alpha < \omega_1$. Esto se enuncia formalmente en la siguiente proposición:

Proposición 1.14. *Sean X, Y espacios polacos, $f : X \to Y$ continua y $\alpha < \omega_1$. Si $A \in \Sigma^0_\alpha(Y)$ entonces $f^{-1}(A) \in \Sigma^0_\alpha(X)$. Si $A \in \Pi^0_\alpha(Y)$ entonces $f^{-1}(A) \in \Pi^0_\alpha(X)$.*

Demostración. Demostraremos simultáneamente ambas implicaciones por inducción sobre $\alpha < \omega_1$. El caso base ($\alpha = 1$) se satisface por definición de continuidad. Supongamos que para todo $\beta < \alpha$, $B \in \Sigma^0_\beta(Y)$ implica $f^{-1}(B) \in \Sigma^0_\beta(X)$ y supongamos que para todo $\beta < \alpha$, $B \in \Pi^0_\beta(Y)$ implica $f^{-1}(B) \in \Pi^0_\beta(X)$. Sea $A \in \Sigma^0_\alpha(Y)$. Sea $\{A_n : n \in \omega\}$ una familia tal que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ y para cada $n \in \omega$ existe $\beta_n < \alpha$ tal que $A_n \in \Pi^0_{\beta_n}$. Por hipótesis inductiva, $f^{-1}(A_n) \in \Pi^0_{\beta_n}$. Así pues, $f^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(A_n) \in \Sigma^0_\alpha$. Análogamente se prueba el resto. ❑

4. Conjuntos Analíticos y Coanalíticos

Definición 1.15. Sea X un espacio polaco. Un conjunto $A \subseteq X$ es analítico si y sólo si existe $B \subseteq X \times \omega^\omega$ cerrado tal que $A = \pi_1[B]$. A la familia de los conjuntos analíticos se denota por Σ^1_1 y Π^1_1 denota a los complementos de tales conjuntos, los cuales se les llama conjuntos coanalíticos.

Se deduce inmediatamente que todo conjunto cerrado de un espacio polaco es analítico.

Proposición 1.16. *Sea X un espacio polaco. Un conjunto $A \subseteq X$ es analítico si y sólo si es imágen continua del espacio de Baire.*

Demostración. Supongamos primero que $A \subseteq X$ es analítico. Entonces existe un conjunto cerrado $C \subseteq X \times \omega^\omega$ tal que $\pi_1[C] = A$. Ahora como C es cerrado en un polaco ($X \times \omega^\omega$ es polaco, pues X y ω^ω son polacos), C es también polaco y por lo tanto existe una función continua g, tal que $g[\omega^\omega] = C$, entonces $\pi_1[g[\omega^\omega]] = \pi_1[C] = A$. Ahora supongamos que $A \subseteq X$ es imágen continua del espacio de Baire. Sea $f : \omega^\omega \to X$ función continua tal que $f[\omega^\omega] = A$. El conjunto $C = \{\langle x, y\rangle \in X \times \omega^\omega : f(y) = x\}$ es cerrado y $\pi_1[C] = A$, luego A es analítico. ❑

Con esta caracterización de los conjuntos analíticos se sigue inmediatamente que imágen continua de un conjunto analítico es un conjunto analítico. Otras caracterizaciones de conjuntos analíticos se dán en el siguiente teorema que es fácil de probar, por tal motivo se omite la prueba.

Teorema 1.17. *Sea X un espacio polaco y $A \subseteq X$. Son equivalentes:*
a) A es analítico.
b) Existe un G de tipo G_δ en $X \times 2^\omega$ tal que $\pi_1(G) = A$.
c) Existe un espacio polaco Y y existe un subconjunto G boreliano de $X \times Y$ tales que $\pi_1(G) = A$.

De c) implica a) del teorema anterior se sigue que si A es abierto, entonces es analítico. A continuación presentamos algunas propiedades básicas de cerradura de los conjuntos analíticos.

Proposición 1.18. *Sean X, Y espacios polacos y sea $f : X \to Y$ continua.*

1. *La clase* Σ^1_1 *es cerrada bajo intersecciones numerables y* Π^1_1 *es cerrada bajo uniones numerables.*
2. *Si* $\{A_n : n \in \omega\}$ *es una sucesión de subconjuntos analíticos de X, entonces* $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ *es un analítico.*
3. *si* $B \in \Sigma^1_1(Y)$ *entonces* $f^{-1}(B) \in \Sigma^1_1(X)$.

Demostración.

1. Para cada $n \in \omega$, sea $A_n \in \Sigma^1_1$. Entonces para cada $n \in \omega$ existe un subconjunto cerrado $B_n \subseteq X \times \omega^\omega$ tal que $\pi_1[B_n] = A_n$. Como $\bigcap_{n\in\omega} B_n$ es un subconjunto cerrado de $X \times \omega^\omega$ y $\pi_1[\bigcap_{n\in\omega} B_n] = \bigcap_{n\in\omega} A_n$, se sigue que $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in \Sigma^1_1$.
Que Π^1_1 sea cerrada bajo uniones numerables se sigue por definición y por lo antes probado.

2. Para cada $n \in \omega$, sea $f_n : \omega^\omega \to A_n$ continua y suprayectiva. Sea $f : \omega \times (\omega^\omega) \to \bigcup_{n\in\omega} A_n$ dada por

$$f(n, x) = f_n(x).$$

Es fácil ver que f es continua y suprayectiva. Puesto que $\omega \times (\omega^\omega)$ es homeomorfo a ω^ω se tiene que $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ es imágen continua de ω^ω.

3. Definamos

$$F = \{\langle y, x\rangle \in Y \times X : y \in B \wedge f(x) = y\} = (Graf(f^{-1})) \cap (B \times X).$$

$Graf(f^{-1})$ es un subconjunto cerrado de $Y \times X$ y $B \times Y$ es un subconjunto analítico de $Y \times X$. En consecuencia, F es un subconjunto analítico de $Y \times X$. Es claro que $f^{-1}(B) = \pi_X(F)$. Pero como la imágen continua de un analítico es analítico, $f^{-1}(B)$ es analítico. ❏

Se deduce de esta proposición y del hecho que $Borel(X)$ es una σ-álgebra, que todo conjunto Borel es analítico.

5. Conjuntos Analíticos y Conjuntos Borel

En esta sección daremos dos resultados de importancia fundamental que trata con la relación entre conjuntos borelianos y los conjuntos analíticos y coanalíticos.

Dados A y B subconjuntos ajenos de un espacio polaco X, se dice que A y B son *separables* si existen conjuntos Borel ajenos $A', B' \subseteq X$ tales que $A \subseteq A'$ y $B \subseteq B'$. Equivalentemente, dos conjuntos A y B son *separables* si existe un conjunto Borel C separando A de B, es decir, $A \subseteq C$ y $C \cap B = \emptyset$.

LEMA 1.19. *Si* $C = \bigcup_{n\in\omega} C_n$ *y* $D = \bigcup_{n\in\omega} D_n$ *y para toda pareja* $n, m \in \omega$ *los conjuntos* C_n, D_m *son separables, entonces C y D también son separables.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $R_{m,n}$ un conjnto Borel que separa a C_m y D_n, entonces $R = \bigcup_{m\in\omega}\bigcap_{n\in\omega} R_{m,n}$ es un conjunto Borel que separa a C y D. ❑

TEOREMA 1.20. (de separación, Lusin 1927). *Sean X un espacio polaco y* A, B *subconjuntos analíticos de X ajenos. Entonces existen conjuntos Borel disjuntos* $A', B' \subseteq X$ *tales que* $A \subseteq A'$ *y* $B \subseteq B'$.

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que $A, B \subseteq X$ son dos conjuntos analíticos disjuntos no separables. Por proposición 1.16, existen funciones $f : \omega^\omega \longrightarrow A$ y $g : \omega^\omega \longrightarrow B$ suprayectivas y continuas.
En seguida construiremos dos sucesiones infinitas de conjuntos no separables. Para cada $n \in \omega$ sea

$$A_n = \{f(x) : x \in \omega^\omega, x(0) = n\} \text{ y } B_n = \{g(x) : x \in \omega^\omega, x(0) = n\}.$$

Entonces $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ y $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$, luego, como A y B no son separables existen $n_0, m_0 \in \omega$ tales que A_{n_0} y B_{m_0} son no separables. Definimos ahora para cada $n, m \in \omega$

$$A^0_n = \{f(x) : x \in \omega^\omega, x(0) = n_0, x(1) = n\} \text{ y } B_m = \{g(x) : x \in \omega^\omega, x(0) = n_0, x(1) = m\}.$$

Entonces $A_{n_0} = \bigcup_{n\in\omega} A^0_n$ y $B_{m_0} = \bigcup_{n\in\omega} B^0_m$. Puesto que A_{n_0} y B_{m_0} son no separados existen $n_1, m_1 \in \omega$ tales que $A^0_{n_1}$ y $B^0_{m_1}$ son no separables. Ahora sean para cada $n, m \in \omega$

$$A^1_n = \{f(x) : x \in \omega^\omega, x(0) = n_0, x(1) = n_1, x(2) = n\},$$

$$B^1_m = \{g(x) : x \in \omega^\omega, x(0) = n_0, x(1) = m_1, x(2) = m\}.$$

Luego, $A^0_{n_1} = \bigcup_{n\in\omega} A^1_n$ y $B^0_{m_1} = \bigcup_{m\in\omega} B^1_m$. Dado que $A^0_{n_1}$ y $B^0_{m_1}$ son no separados existen $n_2, m_2 \in \omega$ tales que $A^1_{n_2}$ y $B^1_{m_2}$ son no separables.
De esta manera podemos continuar y obtener dos sucesiones infinitas $\langle n_i : i \in \omega\rangle$ y $\langle m_i : i \in \omega\rangle$, tal que para todo $i \in \omega$ los conjuntos $\bar{A}_i = \{f(x) : x \in \omega^\omega, \forall j \in i\ x(j) = n_j\} \subseteq A$ y $\bar{B}_i = \{g(x) : x \in \omega^\omega, \forall j \in i\ x(j) = n_j\} \subseteq B$ son no separables. Los puntos $r = f(n_0, n_1, n_2, ...) \in A$ y $s = g(m_0, m_1, m_2, ...) \in B$ son distintos (pues A y B son disjuntos), entonces existen abiertos disjuntos O_r, O_s separando a r y s. Pero como f y g son continuas, existe $i \in \omega$ tal que $\overline{A_i} \subseteq O_r$ y $\overline{B_i} \subseteq O_s$, lo cual contradice que $\overline{A_i}$ y $\overline{B_i}$ son no separables. ❑

TEOREMA 1.21. (Suslin,1917) *Sea X un espacio polaco. Un conjunto $A \subseteq X$ es Borel si y sólo si es analítico y coanalítico; es decir,*

$$Borel(X) = \Sigma_1^1(X) \cap \Pi_1^1(X).$$

DEMOSTRACIÓN.

Si A es Borel, $X \setminus A$ también es Borel, entonces ambos son analíticos y por lo tanto A es también coanalítico. Ahora si A es analítico y coanalítico, por teorema de separación existen dos conjuntos Borel separando a A y $X \setminus A$, pero los únicos conjuntos que separan a tales conjuntos son ellos mismos, así A es Borel. ❑

Consideremos un espacio polaco X. Llamamos un conjunto $A \subseteq X$ *nunca denso* en X si $X \setminus \bar{A}$ es denso en X. Note que si A es un conjunto nunca denso en X, entonces para cualquier abierto G en X no vacío existe un abierto no vacío H en X tal que $A \cap H = \emptyset$.

Un conjunto $A \subseteq X$ es *magro* (o de *primera categoría*) si A es la unión de una familia numerable de conjuntos nunca densos en X.

DEFINICIÓN 1.22. Un conjunto A tiene la *propiedad de Baire* si existe un conjunto abierto G tal que $A \triangle G$ es magro.

Terminamos esta sección con un teorema de suma importancia:

TEOREMA 1.23. (Teorema de la categoría de Baire) *Si X es un espacio de Hausdorff compacto o un espacio métrico completo entonces para cualquier familia numerable $\{A_n\}$ de conjuntos cerrados de X, todos ellos con interior vacío en X, su unión $\bigcup A_n$ también tiene interior vacío en X.*

DEMOSTRACIÓN. Dada una familia numerable $\{A_n\}$ de conjuntos cerrados de X con interiores vacíos, queremos probar que su unión $\bigcup A_n$ tiene también interior vacío en X. Así, dado un conjunto abierto no vacío U_0 de X, debemos encontrar un punto x de U_0 que no pertenezca a ninguno de los conjuntos A_n.

Consideremos el primer conjunto A_1. Por hipótesis, $A_1 \not\supseteq U_0$. Por tanto, podemos elegir un punto y de U_0 tal que $y \notin A_1$. La regularidad de X, junto con el hecho de que A_1 es cerrado, nos permite escoger un abierto U_1 que contenga a y tal que

$$\overline{U_1} \cap A_1 = \emptyset,$$
$$\overline{U_1} \subseteq U_0.$$

Si X es un espacio métrico, escogemos U_1 satisfaciendo que su diámetro sea menor que 1.

En general, dado un conjunto abierto no vacío U_{n-1}, escogemos un punto de U_{n-1} que no pertenece al conjunto cerrado A_n y entonces elegimos un abierto U_n que contenga a dicho punto verificando

$$\begin{gathered}\overline{U_n} \cap A_n = \emptyset, \\ \overline{U_n} \subseteq U_{n-1}, \\ \text{diám} U_n < \tfrac{1}{n} \text{ en el caso métrico.}\end{gathered}$$

Afirmamos que la intersección $\bigcap \overline{U_n}$ es no vacía, de lo que se concluye el teorema. En efecto, si consideramos un punto x de $\bigcap \overline{U_n}$, entonces $x \in U_0$ ya que $\overline{U_1} \subseteq U_0$. Además, para cada $n \in \omega$ $x \notin A_n$, ya que $\overline{U_n}$ y A_n son conjuntos disjuntos.

La prueba de que la intersección $\bigcap \overline{U_n}$ es no vacía se realiza en dos partes, dependiendo de que X sea un espacio Hausdorff compacto o un espacio métrico completo. Si X es un espacio Hausdorff compacto, consideramos la sucesión encajada $\overline{U_1} \supseteq \overline{U_2} \supseteq \ldots$ de subconjuntos no vacíos de X. La familia $\{\overline{U_n}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita; como X es compacto, la intersección $\bigcap \overline{U_n}$ debe ser no vacía.

Si X es un espacio métrico completo, entonces aplicamos el siguiente lema.

❏

LEMA 1.24. *Sea $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ una sucesión encajada de conjuntos cerrados no vacíos en un espacio métrico completo X. Si diám $C_n \to 0$ entonces $\bigcap C_n \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $n \in \omega$ escogemos un punto x_n en C_n. Como $x_n, x_m \in C_N$, para $n, m \geq N$, y diám C_N puede hacerse menor que cualquier ϵ dado con tal de elegir un N suficientemente grande, la sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Supongamos que converge a un punto x. Entonces dado k, la subsucesión $x_k, x_{k+1}, \ldots$ también converge a x. Por tanto, $x \in \overline{C_k} = C_k$ y en consecuencia, $x \in \bigcap C_k$, como deseábamos. ❏

CAPíTULO 2

EL TEOREMA DE MARTIN

Uno de los mayores resultados en la teoría descriptiva de conjuntos es la prueba de Martin de que para todo conjunto Borel X, el juego $J(T,X)$ es determinado. El presente capítulo está dedicado a dar una prueba de este resultado. Antes de esto probaremos otro resultado importante en la teoría de juegos que es base fundamental en la prueba del teorema de Martin, la determinación de juegos cerrados y abiertos conocido como el teorema de Gale-Stewart. Además veremos como existen conjuntos (o juegos) en 2^ω y ω^ω que no son determinados.

1. Determinación

Sea A un conjunto con $|A| \geq 2$, $T \subseteq A^{<\omega}$ un árbol bien podado y $X \subseteq [T]$. En el juego $J(T,X)$ participan dos jugadores: I y II, el jugador I escoge un elemento x_0 de A, a continuación II escoge un elemento x_1 de A, después toca el turno a I para escoger otra véz un elemento de A , etc. De este modo se obtiene una sucesión $\langle x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\rangle \in A^\omega$, donde para cada $n \in \omega$, $x \upharpoonright 2n+1$ es una jugada de I y $x \upharpoonright 2n$ es una jugada de II. Formalmente, definiremos el juego $J(T,X)$ auxiliándonos de las siguientes nociones:

1. Una sucesión finita $s \in A^n$ es una *posición legal* si $s \in T$.
2. Una sucesión infinita $\vec{t} \in A^\omega$ es una *instancia del juego* si para cada $n \in \omega$, $\vec{t} \upharpoonright n \in T$ (es decir, $\vec{t} \upharpoonright n$ es una posición legal).
3. Dada una instancia $\vec{t}$ del juego, diremos que I gana la instancia $\vec{t}$, si $\vec{t} \in X$. En otro caso diremos que II gana la instancia $\vec{t}$. Al conjunto X se le llama *conjunto de paga*.
4. Una *estrategia ganadora* para I es un árbol bien podado $\Sigma \subseteq A^{<\omega}$ tal que:
   - $\Sigma \subseteq T$, es decir, todo elemento de Σ es posición legal.
   - $(\forall n \in \omega)(\forall t \in \Sigma_{2n})(\exists! a \in A)(t^\frown a \in \Sigma)$.
   - $(\forall n \in \omega)(\forall t \in \Sigma_{2n+1})(\forall a \in A)(t^\frown a \in T \Rightarrow t^\frown a \in \Sigma)$.
   - Para toda instancia $\vec{t}$ del juego en la cual I juega consistente con Σ (es decir, $\vec{t} \in [\Sigma]$), $\vec{t} \in X$.
   - De manera análoga se puede definir *estrategia ganadora* para II. Note que no es posible que ambos jugadores tengan estrategia ganadora.

El árbol Σ estrategia ganadora para I da lugar a una función σ definida en $\bigcup_{n\in\omega} T^{2n} \cap \Sigma$ y toma valores en A. Definimos $\sigma(\emptyset)$ como el único elemento de A tal que $\langle\sigma(\emptyset)\rangle \in \Sigma$. Si $t \in \Sigma_{2n}$, entonces $\sigma(t)$ es el único elemento de A tal que $t^\frown\sigma(t) \in \Sigma$. Si Σ es estrategia ganadora para II, Σ da lugar a una función σ definda en $\bigcup_{n\in\omega} T^{2n+1} \cap \Sigma$ y toma valores en A. Si $t \in \Sigma_{2n+1}$, entonces $\sigma(t)$ es el único elemento de A tal que $t^\frown\sigma(t) \in \Sigma$.

Si σ es estrategia ganadora para I, las movidas de I se obtienen apliacando σ a la sucesión de movidas anteriores. Decimos en este caso que I juega consistente con σ (independientememente de las movidas de II). Luego, para cualquier sucesión $y = \langle y_0, y_1, \ldots\rangle$ (movidas de II) la sucesión $\sigma^*y = \langle\sigma(\emptyset), y_0, \sigma(\sigma(\emptyset), y_0), y_1, \sigma(\sigma(\emptyset), y_0, \sigma(\sigma(\emptyset), y_0), y_1), \ldots\rangle \in X$

Análogamente se define lo que es una estrategia σ ganadora para II en $J(T, X)$: para toda sucesión $x = \langle x_0, x_1, \ldots\rangle$ la sucesión $x^*\sigma = \langle x_0, \sigma(\langle x_0\rangle), \ldots\rangle \notin X$.

Decimos que el juego $J(T, X)$ es *determinado* si y sólo si alguno de los jugadores tiene estrategia ganadora. En este caso también se dice que X es *determinado*.

Naturalmente, $\emptyset$ y ω^ω son determinados, y es fácil ver que las vecindades básicas del espacio ω^ω, $u_{\langle n_0,\ldots n_k\rangle} = \{x \in \omega^\omega | x_0 = n_0, x_1 = n_1, \ldots, x_k = n_k\}$, son determinadas. (Por ejemplo, para $u_{\langle n_0\rangle}$, cualquier estrategia σ tal que $\sigma(\emptyset) = n_0$ es ganadora para I, y para $u_{\langle n_0,\ldots n_k\rangle}$ toda σ tal que $\sigma(\langle n_0\rangle) \neq n_1$ es ganadora para II).

Sin embargo, como veremos más adelante, no todo subconjunto de ω^ω es determinado, por ejemplo, daremos un conjunto determinado cuyo complemento no es determinado.

Definición 2.1. Un árbol T tiene la propiedad de bifurcación si para todo $t \in T$ de longitud n existen al menos dos extensiones de t de longitud $n + 1$.

Sea X un espacio topológico. Decimos que $A \subseteq X$ es *perfecto* en X si A es cerrado y no tiene puntos aislados. Una observación importante es que si T es un árbol con propiedad de bifurcación y $A \subseteq [T]$ es determinado, entonces A o su complemento contienen un subconjunto perfecto. En efecto, si Σ es estrategia ganadora para I o II, $[\Sigma]$ es el conjunto perfecto y $[\Sigma] \subseteq A$ o $[\Sigma] \subseteq [T] \setminus A$ dependiendo si Σ es estrategia ganadora para I o II.

Definición 2.2. Sea X un espacio topológico. $A \subseteq X$ es totalmente imperfecto si no contiene un conjunto perfecto ni su complemento contiene un tal conjunto.

A continuación mencionamos un resultado que se debe a Kuratowski el cual nos ayudará a concluir que en 2^ω y ω^ω hay conjuntos no determinados.

TEOREMA 2.3. (Kuratowski) *Si T es un árbol numerable y tiene la propiedad de bifurcación, entonces existe un subconjunto totalmente imperfecto de* $[T]$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**12**]. ❑

Por observación anterior, si A es un conjunto totalmente impefecto, entonces A no es determinado. Luego por teorema anterior ω^ω y 2^ω contienen subconjuntos no determinados.

Ahora daremos el ejemplo que prometimos de un conjunto no determinado cuyo complemento es determinado. De ahora en adelante escribiremos EG en véz de estrategia ganadora.

Sea $A \subseteq \omega^\omega$ un conjunto totalmente imperfecto. Entonces A y $\omega^\omega \backslash A$ son no determinados. Sea $C = \{n^\frown x : x \in A,\ n > 0\}$. Entonces $\omega^\omega \backslash C$ es determinado, pues I tiene EG para el juego $J(\omega^{<\omega}, \omega^\omega \backslash C)$, ya que en la primera movida de I de cada instancia, I puede tirar 0 y así tal instancia no pertenecerá a C. Ahora veamos que C no es determinado. Supongamos que C es determinado y supongamos que I tiene EG σ para $J(\omega^{<\omega}, C)$. Entonces $\sigma^\backprime$ es estrategia para II en $J(\omega^{<\omega}, \omega^\omega \backslash A)$, donde $\sigma^\backprime(s) = \sigma(\sigma(\emptyset)^\frown s)$ para $s \neq \emptyset$. De hecho, $\sigma^\backprime$ es EG para II en $J(\omega^{<\omega}, \omega^\omega \backslash A)$; en efecto, sea $\vec{y} \in \omega^\omega$ instancia del juego $J(\omega^{<\omega}, \omega^\omega \backslash A)$ consistente con $\sigma^\backprime$, entonces $\sigma(\emptyset)^\frown \vec{y}$ es instancia del juego $J(\omega^{<\omega}, C)$ consistente con σ, por lo tanto $\sigma(\emptyset)^\frown \vec{y} \in C$, luego $\vec{y} \in A$ y por lo tanto II gana la instancia de $J(\omega^{<\omega}, \omega^\omega \backslash A)$ y como la instancia era arbitraria II gana $J(\omega^{<\omega}, \omega^\omega \backslash A)$, pero esto contradice que $\omega^\omega \backslash A$ es no determinado. Supongamos ahora que II tiene EG σ para $J(\omega^{<\omega}, C)$. La función $\sigma^\backprime$ definida como $\sigma^\backprime(s) = \sigma(b_0^\frown s)$ para algún $b_0 > 0$, es EG para I en $J(\omega^{<\omega}, \omega^\omega \backslash A)$; en efecto, sea $\vec{y} \in \omega^\omega$ instancia del juego $J(\omega^{<\omega}, \omega^\omega \backslash A)$ consistente con $\sigma^\backprime$, entonces $b_0^\frown \vec{y}$ es instancia del juego $J(\omega^{<\omega}, C)$ consistente con σ, luego $b_0^\frown \vec{y} \notin C$, entonces $\vec{y} \notin A$ y por lo tanto I gana la instancia $\vec{y}$. Como la instancia era arbitraria, I gana $J(\omega^{<\omega}, \omega^\omega \backslash A)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto C es no determinado.

Un avance muy importante sin lugar a dudas en la teoría de juegos fué el que dieron David Gale y Frank Stewart en 1953, al probar que todo conjunto abierto o cerrado es determinado. A continuación presentamos la prueba de este resultado:

TEOREMA 2.4. (Gale-Stewart [1953]) *Sea T un árbol bien podado sobre un conjunto A. Si X es un subconjunto cerrado de* $[T]$*, entonces* $J(T, X)$ *es determinado.*

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que II no tiene EG. Para $t \in T$, diremos que t es perdedor si II tiene EG para el juego $J(R, X \cap [R])$, donde $R = \{s \in T : s \subseteq t \vee t \subseteq s\}$. Observemos que si $t \in T$ no es perdedor y $|t| = 2n + 1$ entonces para cada $a \in A$, $t^\frown a \in T$ implica que existe un $b \in A$ tal que $t^\frown a^\frown b$ no es perdedor. La estrategia σ para I consiste en elegir de modo que las jugadas parciales de I sean no perdedoras. Es posible construir tal σ por la observación anterior. Veamos que σ es una estrategia ganadora para I en $J(T, X)$. Sea $\vec{a} \in [T]$ una instancia del juego consistente con σ. Si $\vec{a} \notin X$ entonces existe $n \in \omega$ tal que $\langle \vec{a} \restriction n \rangle \cap X = \emptyset$, pues X es cerrado. Por lo tanto $t = \vec{a} \restriction n$ es perdedor, lo cual contradice que $\vec{a}$ es una instancia del juego según σ. ❑

Análogamente, podemos definir posición perdedora para II. Repitiendo los papeles de los jugadores, obtenemos que todo abierto de $[T]$ es determinado.

Gale y Stewart además se plantearon la pregunta: ¿todo conjunto Borel de reales es determinado? Donald A. Martin en 1975 afirma y prueba: todo juego $J(S, A)$ con A Borel es determinado. La respuesta de Martin va mas allá de la pregunta que hicieron Gale y Stewart, pues A es cualquier conjunto, no sólo de reales.

Decimos que un juego $J(S^*, A^*)$ es más fuerte que el juego $J(S, A)$ si se cumple lo siguiente: si el juego $J(S^*, A^*)$ es determinado entonces $J(S, A)$ es determinado.

La idea de la primera demostración es la siguiente: para el juego $J(S, A)$ se construye un juego más fuerte $J(S^*, A^*)$, de modo que si n es impar y $A \in \Sigma^0_{n+1}$, entonces $A^* \in \Sigma^0_n$ y si n es par con $A \in \Pi^0_{n+1}$, entonces $A^* \in \Pi^0_n$. Aplicando inducción se prueba que todo conjunto de la clase Σ^0_n es determinado. Para los borelianos de clase infinita Σ^0_ξ se itera transfinitamente la construcción A^*.

La construcción consiste en lo siguiente: dada la tupla $\langle S, A, f, \{b_n\} \rangle$, con $f : \omega \to \{-1, 0\}$ tal que $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(-1)$ son ambos infinitos y $\{b_n\}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados de $[S]$, se construye otra tupla, de la forma $\langle S^*, A^*, r, i, Q \rangle$, donde S^* es un nuevo árbol bien podado, $A^* \subseteq [S^*]$, $r : S^* \to S$, $i : S^* \to \omega$ y $Q : S^* \to \{\text{Estrategias en } S\}$.

Los términos de las posiciones de S^* serán términos de posiciones de S o estrategias en S. La función r transforma una posición $s^* \in S^*$ en una posición $r(s^*) \in S$, que se obtiene eliminando los términos de s^* que son estrategias. Para una posición $s^* \in S^*$, $i(s^*)$ es el subíndice de un cierto b_n y $Q(s^*)$ es una estrategia que debe ser respetada de ese punto en adelante.
El árbol S^* se construye por niveles usando inducción y los elementos del nivel $2n + 1$ y $2n + 2$ dependerán del valor de f en n. Al final hacemos $A^* = \{x^* \in [S^*] : r(x^*) \in A\}$. Es así como conseguimos la tupla $\langle S^*, A^*, r, i, Q \rangle$. Además el juego construido $J(S^*, A^*)$ es más fuerte que $J(S, A)$.

Entonces dado un $A_n \in \Sigma^0_n$, lo que se hace es codificar el A_n con conjuntos cerrados en $[S]$ para así obtener una sucesión $\{b_m\}$ de conjuntos cerrados. Ya que se tiene la tupla $\langle S, A, f, \{b_m\}\rangle$ (donde f es cualquier función con $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(-1)$ ambos infinitos) se considera el juego auxiliar determinado por esta tupla y se prueba la segunda condición. Por último, por inducción se muestra que todo boreliano de clase finita es determinado.

2. Demostración del Teorema de Martin

La primer prueba de Martin consiste básicamente de dos partes: 1) la construcción de un juego más fuerte, 2) para cada conjunto Borel de clase α infinita iteramos transfinitamente la construcción reduciendo el juego Borel a un juego abierto. El juego auxiliar es más complicado, pues los términos del árbol de posiciones legales en tál juego involucran árboles.

La segunda prueba del teorema tiene dos cambios importantes: 1) Se construye un juego auxiliar en el cual sólo ocurren dos movimientos auxiliares. 2) Se introduce una propiedad de conjuntos la cual implica determinación y se prueba por inducción transfinita sobre el rango Borel que todos los conjuntos Borel tienen tal propiedad.

A continuación se presenta la segunda prueba del teorema de Martin, cabe mencionar que todo lo que se hace es válido en ZFC.

Teorema 2.5. (Martin) *Sea T un árbol bien podado sobre un conjunto B. Si A es un conjunto boreliano de $[T]$ entonces A es determinado.*

Sea $S(T)$ el conjunto de todas las estrategias de juegos para ambos jugadores en T.

Una *cubierta* de un árbol T es una terna $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ donde:
1) $\tilde{T}$ es un árbol bien podado;
2) $\pi : [\tilde{T}] \to [T]$;
3) $\varphi : S(\tilde{T}) \to S(T)$ y cada $\varphi(\tilde{s})$ es una estrategia para el mismo jugador como en $\tilde{s}$;
4) si x es una instancia consistente con $\varphi(\tilde{s})$, existe una instancia $\tilde{x}$ consistente con $\tilde{s}$ tal que $\pi(\tilde{x}) = x$.

Una cubierta $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ de T *desenreda* un conjunto $A \subseteq [T]$ si $\pi^{-1}(A)$ es un cerrado-abierto.

Lema 2.6. *Sea $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ una cubierta de T que desenreda a $A \subseteq [T]$, entonces $J(T, A)$ es determinado.*

Demostración. $\pi^{-1}(A)$ es un cerrado-abierto, por lo tanto $J(\tilde{T}, \pi^{-1}(A))$ es determinado. Sea $\tilde{s}$ una EG para I en el $J(\tilde{T}, \pi^{-1}(A))$. De la definición de cubierta tenemos que $\varphi(\tilde{s})$ es una estrategia para I en el juego $J(T, A)$. Veamos que $\varphi(\tilde{s})$ es una EG para I en el juego $J(T, A)$. Sea x una instancia del juego $J(T, A)$ consistente con $\varphi(\tilde{s})$, como $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ es una cubierta de T, existe $\tilde{x}$ instancia del juego $J(\tilde{T}, \pi^{-1}(A))$ consistente con $\tilde{s}$ tal que $\pi(\tilde{x}) = x$. Tenemos que $\tilde{x} \in \pi^{-1}(A)$, luego $x \in A$, así I gana la instancia x y como tal instancia era arbitraria, I gana el juego $J(T, A)$. Similarmente se prueba si II tiene EG en $J(\tilde{T}, \pi^{-1}(A))$. ❑

Lema 2.7. *Sea (T_1, π_1, φ_1) una cubierta de T_0 y sea (T_2, π_2, φ_2) una cubierta de T_1. Entonces $(T_2, \pi_1 \circ \pi_2, \varphi_1 \circ \varphi_2)$ es una cubierta de T_0*

Demostración. $(T_2, \pi_1 \circ \pi_2, \varphi_1 \circ \varphi_2)$ cumple con 1) y 2) de la definición de cubierta, veamos que cumple con 3). Si $\tilde{s} \in S(T_2)$, $\varphi_2(\tilde{s}) \in S(T_1)$ es una estrategia para el mismo jugador como en $\tilde{s}$, luego $\varphi_1(\varphi_2(\tilde{s})) \in S(T_0)$ es una estrategia para el mismo jugador como en $\varphi_2(\tilde{s})$ y por lo tanto como en $\tilde{s}$. Ahora veamos que se cumple 4). Sea x_0 una instancia consistente con $\varphi_1(\varphi_2(\tilde{s}))$, entonces existe una instancia x_2 consistente con $\varphi_2(\tilde{s})$ tal que $\pi_1(x_2) = x_0$, luego para la instancia x_2 existe una instancia x_1 consistente con $\tilde{s}$ tal que $\pi_2(x_1) = x_2$. Entonces tenemos que $(\pi_1 \circ \pi_2)(x_1) = \pi_1(\pi_2(x_1)) = \pi_1(x_2) = x_0$. ❑

Note que si $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ es una cubierta de T, $A \subseteq [T]$, $A \in \sum_\alpha^0$ y π es continua, entonces $\pi^{-1}(A) \in \sum_\alpha^0$. En particular, si componemos cubiertas como en el lema anterior y π_2 es continua, entonces si (T_1, π_1, φ_1) desenreda a A se sigue que $(T_2, \pi_1 \circ \pi_2, \varphi_1 \circ \varphi_2)$ desenreda a A.

Vamos a probar por inducción sobre α (simultáneamente para todo T) que todo conjunto en $\sum_\alpha^0$ puede ser desenredado por una cubierta. La continuidad ayuda, pero para llevar a cabo la inducción necesitamos una condición más fuerte:

Una cubierta $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ de T es una *k-cubierta* si:

(a) $(\pi(\tilde{x})) \upharpoonright n$ depende sólo de $\tilde{x} \upharpoonright n$;

(b) $\varphi(\tilde{s})$ restringida a posiciones de longitud $\leq n$ depende sólo de $\tilde{s}$ restringido a posiciones de longitud $\leq n$.

(c) Por (a) podriamos pensar a π como $\pi : \tilde{T} \to T$. Pedimos que $\pi \upharpoonright \tilde{T}^{\leq k}$ sea una función biyectiva sobre $T^{\leq k}$, donde $T^{\leq k} = \{t \in T : \text{long}(t) \leq k\}$.

Observemos que si $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ es una k-cubierta de T, entonces $\pi : \tilde{T}^{\leq k} \to T^{\leq k}$ es un isomorfismo, en efecto: Si $s, t \in \tilde{T}^{\leq k}$ con $s \leq t$, tenemos que $\pi(s) = \pi(t \upharpoonright |s|)$, pero por (c) de la definición de k-cubierta $\pi(t \upharpoonright |s|) = \pi(t) \upharpoonright |s|$, por lo tanto $\pi(s) \leq \pi(t)$. Ahora si $\pi(s) \leq \pi(t)$, con $s, t \in \tilde{T}^{\leq k}$, $\pi(s) = \pi(t) \upharpoonright |\pi(s)|$ y otra vez por (c) de la definición de k-cubierta $\pi(t) \upharpoonright |\pi(s)| = \pi(t \upharpoonright |\pi(s)|)$, pero $\pi \upharpoonright \tilde{T}^{\leq k}$ es inyectiva, luego $s = t \upharpoonright |\pi(s)|$ y por lo tanto $s \leq t$.

Lema 2.8. *Sea $A \subseteq [T]$ un cerrado y $k \in \omega$. Entonces existe una k-cubierta de T que desenreda a A.*

Demostración. Describiremos a $\tilde{T}$ implícitamente al describir como son jugados los juegos en $\tilde{T}$. Por la definición de k-cubierta en c), si un terna es una $k+1$-cubierta, entonces es una k-cubierta. Podemos entonces asumir que k es par, ya que si k es impar sumamos uno para obtener una $k+1$-cubierta y por lo tanto una k-cubierta.

Un juego en $\tilde{T}$ será de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c|cccccccccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & \dots & a_{k-2} & & (a_k, T_I) & & & a_{k+2} & & \dots \\ \hline \mathrm{II} & & a_1 & & \dots & & a_{k-1} & & (T_{II}, a_{k+1}) & & & a_{k+3} & & \dots \end{array}$$

Donde para toda $j \in \omega$, $\langle a_0, ..., a_j \rangle \in T$. T_I es un subárbol I-impuesto (o cuasi-estrategia para I) de T: es decir, un subárbol $\Sigma \subseteq T$ bien podado tal que si $\langle a_0, ..., a_{2j} \rangle \in \Sigma$ y $\langle a_0, ..., a_{2j}, a_{2j+1} \rangle \in T$, entonces $\langle a_0, ..., a_{2j}, a_{2j+1} \rangle \in \Sigma$, eso significa que siempre que I juegue consistente con Σ, II siempre juega legalmente en el árbol Σ, de esta manera I impone a II a jugar en Σ. Nótese que como Σ es bien podado, si $\langle a_0, ..., a_{2j-1} \rangle \in \Sigma$ entonces existe algún a_{2j} tal que $\langle a_0, ..., a_{2j} \rangle \in \Sigma$, pero este a_{2j} puede no ser único. Además el T_I subárbol I-impuesto debe ser tal que para cada $\sigma \in T_1$, $\sigma \subseteq \langle a_0, ..., a_k \rangle$ o $\langle a_0, ..., a_k \rangle \subseteq \sigma$.

Hay dos opciones para II:
Primera opción: T_{II} puede ser un subárbol II-impuesto de T_1 (que se define de manera similar como el I-impuesto) tal que $[T_{II}] \subseteq A$.
Segunda opción: T_{II} puede ser $\{\sigma \in T : \sigma \subseteq \tau \text{ o } \tau \subseteq \sigma\}$ para algún $\tau \in T_I$ tal que $\langle a_0, ..., a_k \rangle \subseteq \tau$ y $A \cap \langle \tau \rangle = \emptyset$.

Para $j > k$, se debe tener que $\langle a_0, ..., a_j \rangle \in T_{II}$. La función π es la obvia, es decir, si

$$x = \langle a_o, \dots, a_{k-1}, (a_k, T_I), (T_{II}, a_{k+1}), a_{k+2}, \dots \rangle \in [\tilde{T}]$$

entonces $\pi(x) = \langle a_o, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots \rangle \in [T]$. Notemos que (a) y (c) de la definición de k-cubierta se satisfacen. Veamos ahora como está dada φ.

Primero sea $\tilde{s} \in S(\tilde{T})$ una estrategia para I. Sea $\varphi(\tilde{s})$ consistente con $\tilde{s}$ para posiciones de longitud $\leq k$. Sea $\langle a_0, \dots, a_{k-1} \rangle$ una posición consistente con $\varphi(\tilde{s})$, entonces $\langle a_0, \dots, a_{k-1} \rangle$ es consistente con $\tilde{s}$. Sea (a_k, T_I) el movimiento dado por $\tilde{s}$. $\varphi(\tilde{s})$ juega a_k para $\langle a_0, \dots, a_{k-1} \rangle$.
Consideremos el juego $J(T_I, [T_I] \backslash A)$. Como $[T_I] \backslash A$ es abierto, este juego es determinado. Si II tiene EG, sea T_{II} el subárbol II-impuesto de T_I, consistente de posiciones en T_I, las cuales no son perdedoras para II en $J(T_I, [T_I] \backslash A)$ (en este caso T_{II} es una cuasi-estrategia ganadora maximal, en el sentido de que si en algún paso II juega inconsistente con T_{II}, entonces I tiene una EG de ese punto

en adelante). Si II juega a_{k+1} para $\langle a_0, \ldots, a_k\rangle$, $\varphi(\tilde{s})$ asume que la primera opción es tomada para $\langle a_0, \ldots, a_{k-1}, (a_k, T_I)\rangle$ y (T_{II}, a_{k+1}) fué jugada. Después $\varphi(\tilde{s})$ es como $\tilde{s}$ si no existe $\tau \in T_I$ tal que $\tau \notin T_{II}$. Si existe tal τ, o si inmediatamente $\langle a_0, \ldots, a_{k+1}\rangle \notin T_{II}$, puesto que T_{II} es cuasi-estrategia ganadora maximal para II, $[T_{II}] = A \cap [T_I]$ y ahora I tiene EG Σ para $J(R, [T_I] \backslash A \cap [R])$, donde $R = \{\sigma \in T_I : \sigma \subseteq \tau \text{ o } \tau \subseteq \sigma\}$, luego $\langle\tau\rangle \cap A = \emptyset$, entonces $\varphi(\tilde{s})$ asume que II tomó la segunda opción para $\langle a_0, \ldots, a_{k-1}, (a_k, T_I)\rangle$ y jugó $T_{II} = \{\sigma \in T : \sigma \subseteq \tau \text{ o } \tau \subseteq \sigma\}$. Ahora, si I tiene EG en $J(T_I, [T_I] \backslash A)$, entonces existe el τ tal que $\langle\tau\rangle \cap A = \emptyset$ y entonces volvemos al caso anterior. Después $\varphi(\tilde{s})$ procede como $\tilde{s}$.
Ahora sea $\tilde{s} \in S(\tilde{T})$ estrategia para II. Para posiciones de longitud $\leq k$, $\varphi(\tilde{s})$ es como $\tilde{s}$. Sea $\langle a_0, ..., a_k\rangle$ consistente con $\varphi(\tilde{s})$, luego $\langle a_0, ..., a_{k-1}\rangle$ es consistente con $\tilde{s}$.
Consideremos el juego $J(T, B)$ donde B se define de la siguiente manera:

$x \in B$ si y sólo si no existe τ, tal que $\tau \subseteq x$ y si para algún T_I' I juega (a_k, T_I') en $\langle a_0, ..., a_{k-1}\rangle$, entonces $\tilde{s}$ toma la segunda opción para II y juega $T_{II} = \{\sigma \in T : \sigma \subseteq \tau \text{ o } \tau \subseteq \sigma\}$.

Entonces II gana $J(T, B)$ si existe una posición $\tau \subseteq \langle a_0, \ldots, a_k\rangle$ tal que $\langle\tau\rangle \cap A = \emptyset$ y

$$\langle a_0, \ldots, a_{k-1}, (a_k, T_I'), (\{\sigma \in T : \sigma \subseteq \tau \text{ o } \tau \subseteq \sigma\}, a_{k+1})\rangle$$

es consistente con $\tilde{s}$ para algún T_I' y algún a_{k+1}. Observemos que B es cerrado, pues si $x \in [T] \setminus B$, entonces existe $\tau \subseteq x$ tal $\tilde{s}$ contestó con segunda opción y entonces $A \cap \langle\tau\rangle = \emptyset$, luego $\langle\tau\rangle \subseteq [T] \setminus A$. Es fácil verificar que $B \subseteq A$ y entonces tendremos que $\langle\tau\rangle \subseteq [T] \setminus B$.

Supongamos que $\langle a_0, \ldots, a_k\rangle$ es posición perdedora para II en $J(T, B)$. Sea $T_I = \{\sigma \in T : \sigma \subseteq \langle a_0, ..., a_k\rangle$ o $\langle a_0, ..., a_k\rangle \subseteq \sigma$ y σ no es perdedor para I en $J(T, B)\}$, es decir, T_I es cuasi-estrategia ganadora maximal para I en el juego $J(R, B \cap [R])$, donde $R = \{\sigma \in T : \sigma \subseteq \langle a_0, ..., a_k\rangle \text{ o } \langle a_0, ..., a_k\rangle \subseteq \sigma\}$. Supongamos que I juega (a_k, T_1) para $\langle a_0, ..., a_{k-1}\rangle$. Claramente $\tilde{s}$ no tomó la segunda opción para $\langle a_0, \ldots, a_{k-1}, (a_k, T_I)$, pues en tal caso deberia existir la correspondiente τ en T_I, la cual es posición perdedora para I en $J(T, B)$ (restringido a la posición τ). Entonces $\varphi(\tilde{s})$ procede asumiendo que (a_k, T_I) es jugado y sigue a $\tilde{s}$.

Si toda posición de T_I que extiende a $\langle a_0, ..., a_k\rangle$ o inmediatamente, si $\langle a_0, ..., a_k\rangle$ es posición perdedora para I en $J(T, B)$, existe una posición τ tal que $\langle a_0, ..., a_k\rangle \subseteq \tau$ y $\langle\tau\rangle \cap A = \emptyset$, y para algún T_I' y a_{k+1}, si I juega (a_k, T_I') para $\langle a_0, ..., a_{k-1}\rangle$, entonces $\tilde{s}$ toma para II la segunda opción y juega $(\{\sigma \in T : \sigma \subseteq \tau \text{ o } \tau \subseteq \sigma\}, a_{k+1})$. Entonces $\varphi(\tilde{s})$ sigue a $\tilde{s}$ asumiendo que (a_k, T_I') fué jugado por I.

La construcción de φ demuestra que π y φ satisfacen 4) en la definición de cubierta y φ satisface b) en la definición de k-cubierta.

Finalmente demostremos que $\pi^{-1}(A)$ es un cerrado-abierto. Primero veamos que $\pi^{-1}(A)$ es un abierto, entonces sea $\tilde{x} \in \pi^{-1}(A)$, la afirmación es que $\langle \tilde{x} \restriction k+1 \rangle \subseteq \pi^{-1}(A)$. Tenemos que $\pi(\tilde{x}) \in A$, así que II eligió con primera opción. Sea $\tilde{y} \in \langle \tilde{x} \restriction k+1 \rangle$, entonces $\tilde{y}$ también elige con primera opción, por lo que $\tilde{y}(k+1) = (T_{II}, a_{k+1})$, luego $\pi(\tilde{y}) \in A$, así $\tilde{y} \in \pi^{-1}(A)$ y por lo tanto $\pi^{-1}(A)$ es abierto. Ahora probemos que $\pi^{-1}(A)$ es un cerrado. Sea $\tilde{x} \in [\tilde{T}] \backslash \pi^{-1}(A)$, entonces $\pi(\tilde{x}) \notin A$, por lo que II elige con segunda opción. Veamos que $\langle \tilde{x} \restriction k+1 \rangle \subseteq [\tilde{T}] \backslash \pi^{-1}(A)$. Sea $\tilde{y} \in \langle \tilde{x} \restriction k+1 \rangle$, entonces $\tilde{y}(k+1) = (T_{II}, a_{k+1})$, donde $T_{II} = \{\sigma \in T : \sigma \subseteq \tau \text{ o } \tau \subseteq \sigma\}$, luego $\pi(\tilde{y}) \notin A$ y por lo tanto $y \notin \pi^{-1}(A)$. Tenemos entonces que $[\tilde{T}] \backslash \pi^{-1}(A)$ es un abierto. ❑

Lema 2.9. *Sea $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ una $(k+i)$-cubierta de T_i, para cada $i \in \omega$. Entonces existe un árbol $\tilde{T}$ y $\tilde{\pi}_i, \tilde{\varphi}_i$ para $i \in \omega$ tal que:$(\tilde{T}, \tilde{\pi}_i, \tilde{\varphi}_i)$ es una $(k+i)$-cubierta de T_i y $\tilde{\pi}_i = \pi_{i+1} \circ \tilde{\pi}_{i+1}$ $\tilde{\varphi}_i = \varphi_{i+1} \circ \tilde{\varphi}_{i+1}$ para cada $i \in \omega$.*

Demostración. Por la definición de $(k+i)$-cubierta en c) y el isomorfismo obtenido de esta definición podemos ponener $(T_{i+1})^{\leq k+i} = (T_i)^{\leq k+i}$ y entonces $\pi_{i+1} \restriction (T_{i+1})^{\leq k+i}$ es la identidad para cada $i \in \omega$. Definimos $\tilde{T}$ como sigue: $\tilde{T}^{\leq k} = (T_0)^{\leq k}$ y $\tilde{T}^{k+i} = (T_i)^{k+i}$ para cada $i \in \omega \backslash \{0\}$. Sea $j \in \omega$, vamos a definir a $\tilde{\pi}_j$ como sigue: Si $\sigma \in \tilde{T}^{\leq k+j}$, $\tilde{\pi}_j(\sigma) = \sigma$ y si $\sigma \in \tilde{T}^{k+n}$ con $n > j$, entonces $\tilde{\pi}_j(\sigma) = \pi_{j+1} \circ \ldots \circ \pi_n(\sigma)$. Observemos que si $\Sigma \subseteq T_{i+1}$, donde i es cualquier natural, entonces Σ y $\varphi_{i+1}(\Sigma)$ coinciden en todo nodo de longitud $\leq k+i$, esto se sigue de la definición de $(k+i)$-cubierta b) y que $\pi_{i+1} \restriction (T_{i+1})^{\leq k+i}$ es la identidad para cada $i \in \omega$. Vamos a definir ahora $\tilde{\varphi}_j : S(\tilde{T}) \to S(T_j)$ para todo $j \in \omega$. Esto lo haremos por niveles: Sea $j \in \omega$ y $\Sigma \subseteq \tilde{T}$, entonces definimos $\tilde{\varphi}_j(\Sigma)^{k+j} = \tilde{\varphi}_j(\Sigma^{k+j}) = \Sigma^{k+j}$ y si $n > j$ entonces $\tilde{\varphi}_j(\Sigma)^{k+j} = \tilde{\varphi}_j(\Sigma^{k+j}) = \varphi_{j+1} \circ \ldots \circ \varphi_n(\Sigma)^{k+n}$. Sólo necesitamos verificar que se cumple 4) en la definición de cubierta. Sea $j \in \omega$ y $x_j \in \omega$ consistente con $\tilde{\varphi}_j(\Sigma) = \varphi_{j+1} \circ \varphi_{j+2} \circ \ldots$. Sean $x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots$ dados por 4) para las cubiertas $(T_{j+1}, \pi_{j+1}, \varphi_{j+1}), (T_{j+2}, \pi_{j+2}, \varphi_{j+2}), \ldots$ tales que para cada $n \in \omega \backslash \{0\}$ se tiene que $\pi_{j+n}(x_{j+n}) = x_{j+n-1}$. Observemos también que para cada $n \in \omega \backslash \{0\}$ se cumple $x_{j+n} \restriction k+j+n-1 = x_{j+n-1} \restriction k+j+n-1$. Sea $\tilde{x} = \bigcup_{n \in \omega} x_{j+n} \restriction k+j+n$. Probemos que $\tilde{\pi}_j(\tilde{x}) = x_j$. Puesto que para cada $m \in \omega$ $\tilde{\pi}_j(\tilde{x}) \restriction m = \tilde{\pi}_j(\tilde{x} \restriction m)$, entonces basta probar que para cada $m \in \omega$ $\tilde{\pi}_j(\tilde{x} \restriction m) = x_j \restriction m$. Si $m \leqslant k+j$, es claro que se cumple la igualdad anterior. Sea $n \in \omega \setminus \{0\}$, entonces $\tilde{\pi}_j(\tilde{x}) \restriction k+j+n) = (\pi_{j+1} \circ \ldots \circ \pi_{j+n})(\tilde{x}) \restriction k+j+n) = (\pi_{j+1} \circ \ldots \circ \pi_{j+n})(x_{j+n} \restriction k+j+n) = (\pi_{j+1} \circ \ldots \circ \pi_{j+n-1})(x_{j+n-1} \restriction k+j+n) = \ldots = \pi_{j+1}(x_{j+1} \restriction k+j+n) = x_j \restriction k+j+n$.

❑

Teorema 2.10. *Si A es un subconjunto Borel de $[T]$ y $k \in \omega$, existe una k-cubierta de T que desenreda a A.*

Demostración. Por lema 2.8, el teorema se cumple para todo $A \in \Pi^0_1$, para todo T. Obviamente cualquier cubierta que desenreda a A desenreda al complemento de A. Sea $\alpha < \omega_1$. Supongamos que para todo T, el teorema se cumple para cada conjunto en Σ^0_β para $\beta < \alpha$. Sea $A \in \Sigma^0_\alpha$. Entonces $A = \bigcup_{i\in\omega} A_i$ con cada $A_i \in \Pi^0_\beta$, $\beta < \alpha$. Sea (T_1, π_1, φ_1) una k-cubierta de $T_0 = T$ que desenreda A_0, sea (T_2, π_2, φ_2) una $k+1$-cubierta de T_1 que desenreda $\pi^{-1}(A_1)$. En general, sea $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ una $k+i$-cubierta de T_i que desenreda $\pi_i^{-1} \circ \pi_{i-1}^{-1} \circ \cdots \circ \pi_1^{-1}(A_i)$. Sean $\tilde{T}, \tilde{\pi}_i$ y $\tilde{\varphi}_i$ dados por el lema anterior. Tenemos que $(\tilde{T}, \tilde{\pi}_0, \tilde{\varphi}_0)$ desenreda $A_0, A_1 \ldots$. Como $\pi_0^{-1}(A) = \bigcup_{i\in\omega} \pi_0^{-1}(A_i)$, $\pi_0^{-1}(A)$ es abierto. Sea (T^*, π^*, φ^*) una k-cubierta de $\tilde{T}$ que desenreda $\pi_0^{-1}(A)$, entonces $(T^*, \tilde{\pi}_0 \circ \pi^*, \tilde{\varphi}_0 \circ \varphi^*)$ es una k-cubierta de T que desenreda A. ❑

Corolario 2.11. *Si $A \subseteq [T]$ es Borel, $J(T, A)$ es determinado.*

CAPíTULO 3

APLICACIONES DEL TEOREMA DE MARTIN

En este capítulo usaremos el teorema de Martin para obtener pruebas de algunos teoremas importantes utilizando juegos, los cuales se definen de manera distinta a un juego del tipo $J(T, X)$. Para poder usar este teorema importante se "traduce" el juego en cuestión en un juego $J(T, X)$. Empezemos a jugar con el PSP-juego.

1. El PSP-juego

El PSP-juego (PSP significa Perfect Set Property) también conocido como "corta y escoge", está definido de la siguiente manera: Sean X un espacio no vacío polaco perfecto, $A \subseteq X$ y $\mathcal{B}$ una base numerable para X.

- I elige un par (U_0^0, U_1^0) de elementos de $\mathcal{B}$ de diámetro < 1 tales que $\overline{U_0^0} \cap \overline{U_1^0} = \emptyset$.
- II elige un bit $b_0 \in \{0, 1\}$.
- I elige un par (U_0^{n+1}, U_1^{n+1}) de elementos de $\mathcal{B}$ tales que $\overline{U_0^{n+1}} \cap \overline{U_1^{n+1}} = \emptyset$ y $\overline{U_0^{n+1} \cup U_1^{n+1}} \subseteq U_{b_n}^n$, con diámetros menores a $\frac{1}{2^{n+1}}$.
- II elige un bit $b_{n+1} \in \{0, 1\}$.

A cada instancia del juego, corresponde un único $x \in X$ tal que $\{x\} = \bigcap_{i\in\omega} \overline{U_{b_i}^i} = \bigcap_{i\in\omega} U_{b_i}^i$. I gana la instancia si $x \in A$. En otro caso, gana II.
Denotaremos por $G^*(A)$ al juego PSP con parámetro $A \subseteq X$.
Antes de entrar a jugar en $G^*(A)$ veamos la siguiente definición:

Definición 3.1. Sea X un conjunto. Una familia $\langle A_s : s \in 2^{<\omega}\rangle$ de subconjuntos de X es un *esquema de Cantor* si:

1. $(\forall s, t \in 2^{<\omega})(s \subseteq t \Rightarrow A_t \subseteq A_s)$ y
2. $(\forall s \in 2^{<\omega})(A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1} = \emptyset)$.

Teorema 3.2. *Sea X un espacio polaco perfecto no vacío y $A \subseteq X$. Entonces*
a) I tiene una estategia ganadora en $G^*(A)$ si y sólo si A contiene un conjunto de Cantor.
b) II tiene una estrategia ganadora en $G^*(A)$ si y sólo si A es numerable.

Demostración. a) Sea Σ una estrategia ganadora para I en $G^*(A)$. Σ define un esquema de Cantor $\langle U_s : s \in 2^{<\omega}\rangle$, tal que para cada $s \neq \emptyset$, U_s es abierto, $\overline{U_{s^\frown 0} \cup U_{s^\frown 1}} \subseteq U_s$, $\operatorname{diam}(U_s) < \frac{1}{2^{\operatorname{long}(s)-1}}$, tal que para cada $y \in 2^\omega$, si $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} U_{y\restriction_n}$, entonces $x \in A$. Así A contiene un conjunto de Cantor.

Supongamos ahora que $C \subseteq A$ es un conjunto de Cantor, definiremos una estrategia para I como sigue: Sean $x_{\langle 0\rangle}, x_{\langle 1\rangle} \in C$ dos puntos distintos, entonces I elige (U_0^0, U_1^0), donde U_i^0 es abierto en X, para $i \in \{0,1\}$, además $x_{\langle 0\rangle} \in U_0^0$, $x_{\langle 1\rangle} \in U_1^0$ y $\overline{U_0^0} \cap \overline{U_1^0} = \emptyset$. Luego II escoge uno de tales abiertos, digamos que eligió U_0^0. Como C es perfecto, existen puntos $x_{\langle 0,0\rangle}$ y $x_{\langle 0,1\rangle}$ en tal abierto, entonces I elige (U_0^1, U_1^1), donde U_i^1 es abierto en X para $i \in \{0,1\}$, además $x_{\langle 0,0\rangle} \in U_0^0$, $x_{\langle 1,0\rangle} \in U_1^0$, $\overline{U_0^1} \cap \overline{U_1^1} = \emptyset$ y $\overline{U_0^1 \cup U_1^1} \subseteq U_0^0$. De esta manera I sigue jugando. Por teorema de Cantor tenemos que $\bigcap \overline{U_s} \cap C \neq \emptyset$ y además ésta intersección consiste de un sólo elemento, así que lo anterior define una estrategia ganadora para I en $G^*(A)$.

b) Si A es numerable podemos escribir $A = \{a_n : n \in \omega\}$. Entonces una estrategia ganadora para II se define cuando II juega a excluir a_n en la n-ésima jugada, es decir, II elige b_n tal que $a_n \notin U_{b_n}^n$.

Finalmente, supongamos que Σ es una EG para II. Para $p \in \Sigma$ y $x \in A$, digamos

$$p = ((U_0^0, U_1^0), b_0, \dots, (U_0^{n-1}, U_1^{n-1}), b_{n-1}),$$

decimos que p acepta a x, si y sólo si $x \in U_{b_{n-1}}^{n-1}$, con la convención de que $\emptyset$ acepta a todo $x \in A$. Para cada $p \in \Sigma$, sea

$$A_p = \{x \in A : p \text{ acepta a } x \wedge (\forall q > p)(q \text{ no acepta a } x)\}.$$

Para cada $p \in \Sigma$, $|A_p| \leq 1$, pues si $x \neq y$ pertenecen a A_p y I juega (U_0^n, U_1^n) con $x \in U_0^n$ y $y \in U_1^n$, tenemos una contradicción con el hecho de que $x, y \in A_p$. Esto establece una función inyectiva f de A en Σ definida por $f(x) = p_x$ tal que $x \in A_{p_x}$, por lo que $|A| \leq |\Sigma|$, pero como $|\Sigma| \leq \omega$ tenemos que $|A| \leq \omega$. ❑

De este teorema se tiene una consecuencia muy importante que probaremos en seguida:

Teorema 3.3. *Sea X un espacio polaco perfecto, entonces todo subconjunto boreliano de X es numerable o tiene cardinalidad del continuo.*

Demostración. Sea A un subconjunto boreliano de X y T el árbol de posiciones legales de $G^*(A)$. Sabemos que para cada instancia a del juego $G^*(A)$ existe $a_x \in X$, donde a_x es el único elemento de la intersección de los abiertos elegidos por I y II en la instancia a. Entonces definimos $f : [T] \longrightarrow X$ por $f(a) = a_x$, para cada $a \in [T]$. Esta función es claramente continua. Sea $f^{-1}[A] = \hat{A} = \{a \in [T] : a_x \in A\}$. Entonces por la continuidad de f, $\hat{A}$ es Borel y por lo tanto el juego $J(T, \hat{A})$ es determinado. Notemos que los juegos $J(T, \hat{A})$ y $G^*(A)$ tienen el mismo árbol de posiciones legales

T. Veamos que el juego $J(T, \hat{A})$ es más fuerte que el juego $G^*(A)$. Supongamos que I tiene EG Σ para $J(T, \hat{A})$, afirmamos que Σ es EG para I en el juego $G^*(A)$, en efecto, sea a una instancia en el juego $G^*(A)$ consistente con Σ, entonces a es instancia en el juego $J(T, \hat{A})$ consistente con Σ, luego $a \in \hat{A}$ y por lo tanto $a_x \in A$, así que I tiene EG en $G^*(A)$ y por teorema anterior $|A| \geq \mathfrak{c}$, pero como $|X| = \mathfrak{c}$, $|A| = \mathfrak{c}$. Similarmente se prueba que si II tiene EG en el juego $J(T, \hat{A})$, entonces II tiene EG en el juego $G^*(A)$ y una vez más, por teorema anterior A es numerable. ❏

Así que tenemos una prueba usando teoría de juegos de que todo subconjunto Borel A de un espacio polaco perfecto tiene la propiedad del conjunto perfecto, es decir, A es numerable o contiene un subconjunto perfecto.

2. Juegos Wadge

Introduciremos un nuevo juego para mostrar el teorema de Hurewicz aplicando el teorema de Martin.

Definición 3.4. Sean X, Y conjuntos y $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Una **reducción** de A en B es una función $f : X \to Y$ con $f^{-1}(B) = A$, es decir, $x \in A$ si y sólo si $f(x) \in B$. Si X, Y son espacios topológicos, decimos que A es **Wadge reducible** en B, en símbolos $A \leq_W B$, si existe una reducción continua de A en B.

Sean S, T árboles bien podados no vacíos sobre ω y $A \subseteq [S]$, $B \subseteq [T]$. El **juego Wadge** $WG(A, B)$ se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & x(0) & & x(1) & & \ldots & \\ \hline \mathrm{II} & & y(0) & & y(1) & & \ldots \end{array}$$

$x(i), y(i) \in \omega$; $x \upharpoonright n \in S$, $y \upharpoonright n \in T$ para toda n. II gana si y sólo si $(x \in A \Leftrightarrow y \in B)$.

Supongamos que II tiene EG σ en $WG(A, B)$. Vamos a mostrar que tal σ la podemos ver como una función monótona $\varphi : S \to T$ tal que $\mathrm{long}(\varphi(s)) = \mathrm{long}(s)$. Definamos φ recursivamente como sigue:

$\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Sea $s \in S$ y supongamos que para s ya se definió φ. Sea $m \in \omega$, entonces definamos $\varphi(s^\frown m)$. Tenemos que $\sigma(\langle x(0), y(0), x(1), y(1) \ldots, x(n), y(n), m\rangle) = k$, para algún $k \in \omega$ y donde $s = \langle x(0), x(1), \ldots, x(n)\rangle$. Entonces hacemos $\varphi(s^\frown m) = \varphi(s)^\frown k$. La función φ da lugar a una función continua $\varphi^* : [S] \to [T]$ definida como $\varphi^*(s) = \bigcup_{n\in\omega}(\varphi(s) \upharpoonright n)$, para todo $s \in [S]$. La continuidad de φ^* se sigue del hecho de que sólo depende de tramos finitos. Luego como φ es EG para II, se tiene que $x \in A \Leftrightarrow \varphi^*(x) \in B$, entonces $\varphi^*(A) \subseteq B$ y $\varphi^*([S]\backslash A) \subseteq [T]\backslash B$, de esto tenemos que $A \leq_W B$.

Notemos que I tiene EG en este juego si $(x \notin A \Leftrightarrow y \in B)$. Si I tiene EG, como antes podemos mostrar que existe una función continua $f : [T] \to [S]$, tal que $y \in B \Leftrightarrow f(y) \notin A$, esto es, $(y \in [T]\backslash B \Rightarrow f(y) \in A)$ y $(y \in B \Rightarrow f(y) \notin A)$. En este caso $B \leq_W [S]\backslash A$.

De esto se sigue el siguiente teorema:

Teorema 3.5. *Sean S, T árboles bien podados no vacíos sobre ω y $A \subseteq [S]$, $B \subseteq [T]$ conjuntos Borel. Entonces $A \leq_W B$ o $B \leq_W [S]\backslash A$.*

3. Juegos de Separación y el Teorema de Hurewicz

Sean S, T árboles bien podados no vacíos sobre ω y $A \subseteq [S]$ y $B_0, B_1 \subseteq [T]$, con $B_0 \cap B_1 = \emptyset$. La siguiente generalización del juego Wadge, el cual se debe a Wadge, es llamado el **juego de separación** de A, B_0, B_1, denotado como $SG(A; B_0, B_1)$,

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & x(0) & & x(1) & & \dots & \\ \hline \mathrm{II} & & y(0) & & y(1) & & \dots \end{array}$$

$x(i), y(i) \in \omega$; $x \restriction n \in S$, $y \restriction n \in T$ para toda n. II gana si y sólo si $(x \in A \Rightarrow y \in B_0)$ y $(x \notin A \Rightarrow y \in B_1)$. En particular, $SG(A; B, [T]\backslash B) = WG(A, B)$. Como en el juego de Wadge, si I tiene EG, existe una función continua $f : [T] \to [S]$ inducida por esta EG tal que $(y \in B_1 \Rightarrow f(y) \in A)$ y $(y \in B_0 \Rightarrow f(y) \notin A)$, así $f^{-1}(A)$ separa B_1 de B_0. Si II tiene EG, existe una función continua $g : [S] \to [T]$ inducida por esa EG tal que $g(A) \subseteq B_0$ y $g([T]\backslash A) \subseteq B_1$.

Usaremos tales juegos para probar ahora el teorema de Hurewicz. Para los siguientes resultados es relevante recalcar el hecho de que todo subconjunto denso numerable de C (el espacio de Cantor 2^ω) es homeomorfo a $\mathbb{Q}$ y que su complemento es homeomorfo a $\mathcal{N}$ (el espacio de Baire ω^ω).

Teorema 3.6. ([**11**], *teorema 21.18) (Hurewicz) Sea X un espacio polaco y $A \subseteq X$ un conjunto analítico. Si A no es F_σ, entonces existe un conjunto de Cantor $C \subseteq X$ tal que $C\backslash A$ es denso numerable en C, así que $C \cap A$ es un subconjunto cerrado de A con la topología relativa que es homeomorfo a ω^ω. Por lo tanto, si $B \subseteq X$ es coanalítico, entonces B es G_δ o B contiene un conjunto cerrado con la topología relativa homeomorfo a $\mathbb{Q}$.*

Probaremos este teorema probando un resultado de "separación"más fuerte.

Teorema 3.7. (Kechris-Louveau-Woodin) *Sea X un espacio polaco, sea $A \subseteq X$ analítico y $B \subseteq X$ arbitrario con $A \cap B = \emptyset$. Si no existe conjunto F_σ separando A de B, entonces existe un conjunto de Cantor $C \subseteq X$ tal que $C \subseteq A \cup B$ y $C \cap B$ es un numerable y denso en C. En particular, $C \cap B$ es homeomorfo a $\mathbb{Q}$ y $C \cap A$ es homeomorfo a ω^ω.*

Así que el teorema de Hurewicz 3.1 se sigue tomando $B = X \backslash A$.

Demostración. (de 3.7) Primero verificaremos que es suficiente probar el teorema para $X = \mathcal{C}$.

Es claro que podemos reemplazar X por una compactificación $\bar{X}$ de X, supongamos entonces que X es compacto. Puesto que X es métrico compacto, sea $\pi : \mathcal{C} \to X$ una suprayección continua. Sea $A' = \pi^{-1}(A)$ y $B' = \pi^{-1}(B)$. Entonces A' es analítico, $A' \cap B' = \emptyset$ y si F' es un conjunto F_σ que separa A' de B', entonces como π es cerrada $\pi(F')$ es también un F_σ que separa A de B. Así, si el resultado se cumple para $\mathcal{C}$, existe un conjunto de Cantor $H \subseteq \mathcal{C}$ con $H \subseteq A' \cup B'$ y $H \cap B'$ numerable y denso en H. Entonces $K = \pi(H)$ es un subconjunto cerrado de X, $K \subseteq A \cup B$, $K \cap A$ y $K \cap B$ son disjuntos, además $K \cap B$ es numerable y denso en K.

K es perfecto, pues si x fuera un punto aislado de K, tendriamos $\pi^{-1}(\{x\}) \subseteq H \cap B'$ un abierto numerable y por lo tanto un abierto de primera categoría en H lo cual no puede ser, pues H es un espacio de Baire. Es fácil construir un conjunto de Cantor $C \subseteq \pi(H)$, teniendo las mismas propiedades, observar que $\pi(H)$ es polaco, pues es cerrado y X es polaco, luego contiene al Cantor. Construyamos por recursión un esquema de Cantor $\langle C_s : s \in 2^{<\omega} \rangle$, donde C_s es abierto en K con $\operatorname{diam}(C_s) < \frac{1}{2^{dom(s)}}$, $\overline{C_{s^\frown i}} \subseteq C_s$, junto con puntos $x_s \in C_s \cap B$ tal que $x_{s^\frown 0} = x_s$ para todo s.

Supongamos que ya tenemos C_s y $x_s \in C_s \cap B$. Nos fijamos en x_s y y cualquier punto de C_s en, luego podemos encontrar bolas $C_{s^\frown 0}$ y $C_{s^\frown 1}$ tales que $x_s \in C_{s^\frown 0},\ y \in C_{s^\frown 1}$ y además que cumplan las hipótesis. Entonces sea $x_{s^\frown 0} = x_s$ y $y = x_{s^\frown 1}$. Por lo tanto, el conjunto $C = \bigcup_{x \in 2^\omega} \bigcap_{n \in \omega} C_{x \restriction n}$ tiene todas las propiedades requeridas.

De este hecho es suficiente probar lo siguiente:

Sean $A, B \subseteq \mathcal{C},\ A$ analítico y $A \cap B = \emptyset$. Si no existe un conjunto F_σ separando A de B, entonces existe un conjunto cerrado $K \subseteq \mathcal{C}$, con $K \subseteq A \cup B,\ K \cap A, K \cap B$ densos en K y $K \cap B$ numerable.

Para probar esto, consideremos el juego de separación $SG(Q, B, A)$, donde $Q \subseteq \mathcal{C}$ es un conjunto numerable denso. Notemos primero que I no puede tener una EG en este juego, pues una EG induciría una función continua $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $(y \in A \Rightarrow f(y) \in Q)$ y $(y \in B \Rightarrow f(y) \notin Q)$, pero entonces $f^{-1}(Q)$ es F_σ y separa A de B, una contradicción.

Así, si este juego es determinado, II tiene EG, la cual induce una función continua $g : C \to C$ tal que $g(Q) \subseteq B$ y $g(C \backslash Q) \subseteq A$, luego si $K = g(C)$, $K \subseteq A \cup B$, $K \cap A, K \cap B$, son densos en K y $K \cap B$ es numerable, que es lo que queriamos probar, sin embargo, no sabemos si tal juego es determinado.

Lo que haremos es jugar el juego de separación con otros parámetros, de tal manera que el conjunto de paga sea un conjunto Borel. Sea $\pi_1 : C \times C \to C$ la proyección en la primera coordenada. Sea $G \subseteq C \times C$ un G_δ tal que $\pi_1(G) = A$ y $\mathcal{B}$ una base numerable para $C \times C$. Ponemos $U_0 = \bigcup\{U \in \mathcal{B} : \pi_1(U \cap G)$ puede ser separado por un F_σ de $B\}$. $G \backslash U_0 = G_0 \neq \emptyset$ ya que la unión numerable de conjuntos F_σ es un F_σ. Además G_0 es G_δ. Fijemos una base de conjuntos abiertos no vacíos $\{W_n\}$ en G_0 (en la topología relativa). Afirmamos que $\overline{\pi_1(W_n)} \cap B \neq \emptyset$, en otro caso, sea U_n' abierto tal que $U_n' \cap G_0 = W_n$, tenemos que $\pi_1(U_n' \cap G) \subseteq \pi_1(W_n) \cup \pi_1(U_0 \cap G) \subseteq \overline{\pi_1(W_n)} \cup \pi_1(U_0 \cap G)$, el cual puede ser separado por un F_σ de B. Entonces $U_n' \subseteq U_0$ y así $W_n = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Sea $x \in \overline{\pi_1(W_n)} \cap B$ y $B_0 = \{x_n : n \in \omega\}$. Entonces G_0 y $B_0 \times C$ son disjuntos y no existe F_σ (en $C \times C$) separando G_0 de $B_0 \times C$. Para ver esto procedamos por contradicción, sea F_n cerrado para cada $n \in \omega$ tal que $G_0 \subseteq \bigcup_n F_n$ y $(\bigcup_n F_n) \cap (B_0 \times C) = \emptyset$. Entonces por el teorema de la categoría de Baire (aplicado al espacio polaco G_0), existen m, n con $W_m \subseteq F_n$, así que $\overline{\pi_1(W_m)} \subseteq \pi_1(F_n)$. Luego, como $x_m \in \overline{\pi_1(W_m)} \cap B$, se tiene que $x_m \in \pi_1(F_n) \cap B$, por lo tanto $F_n \cap (B_0 \times C) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Consideremos ahora el juego $SG(Q; B_0 \times C, G_0)$. Para poner el juego en la forma como se describió al principio de esta sección, podemos identificar $C \times C$ con C bajo el homeomorfismo

$$\langle x, y \rangle = \langle x(0), y(0), x(1), y(1) \ldots \rangle$$

El conjunto de paga es combinación Boolena de conjuntos borelianos, luego es Borel y por lo tanto es determinado. Como no existe F_σ separando G_0 de $B_0 \times C$, el jugador I no tiene EG. Entonces II tiene un EG, la cual dá un conjunto cerrado $K' \subseteq G_0 \cup (B_0 \times C)$, $K' \cap G_0$, $K' \cap (B_0 \times C)$, densos en K' y $K' \cap (B_0 \times C)$ numerable. Entonces $K = \pi_1(K')$ es el que funciona. ❏

4. Una Caracterización de Ultrafiltros Selectivos

Ahora presentaremos una prueba de un teorema de Mathias usando teoría de juegos (el teorema de Martin), el cual afirma que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es selectivo si y sólo si intersecta a todos los ideales altos y analíticos. Antes de esto daremos los ingredientes necesarios.

Sea X un conjunto no vacío. Un *ideal* sobre X es una familia $\mathcal{I}$ de subconjuntos de X satisfaciendo:

- $\emptyset \in \mathcal{I}$ y $X \notin \mathcal{I}$,
- Si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$ y
- Si $A \subseteq B$ y $B \in \mathcal{I}$ entonces $A \in \mathcal{I}$.

La noción de un filtro es dual a la noción de ideal. Un *filtro* sobre X es una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X satisfaciendo:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y $X \in \mathcal{F}$,
- Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$ y
- Si $A \subseteq B$ y $A \in \mathcal{F}$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

Filtros maximales son llamados *ultrafiltros*. Dado un ideal $\mathcal{I}$ sobre X, denotamos por $\mathcal{I}^+ = \{A \subseteq X : A \notin \mathcal{I}\}$ la familia de conjuntos $\mathcal{I}$-positivos de X. Dado un conjunto $\mathcal{I}$-positivo Y, la restricción de $\mathcal{I}$ en Y está definida por

$$\mathcal{I} \upharpoonright Y = \{I \cap Y : I \in \mathcal{I}\}.$$

Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X. Decimos que $\mathcal{I}$ es un *ideal sobre* ω si X es numerable y $\mathcal{I}$ contiene todos los subconjuntos finitos de X. En general se asume que tal conjunto numerable X es ω.

Fin denota el ideal de todos los subconjuntos finitos de ω. Decimos que un ideal $\mathcal{I}$ sobre ω es *alto* si para todo subconjunto infinito de ω existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $I \cap A$ es infinita. Puesto que el espacio de Cantor 2^ω es homeomorfo al conjunto potencia $P(\omega)$, los ideales sobre ω como subconjuntos del conjunto potencia $P(\omega)$, pueden ser vistos como subespacios del espacio de Cantor 2^ω y así pueden ser estudiados a través de su complejidad analítica y de sus propiedades topológicas. Por ejemplo, se puede probar que la mínima complejidad posible de un ideal sobre ω es F_σ.

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre ω es *selectivo* si para toda partición $\{Y_n : n \in \omega\}$ de ω, se tiene que $Y_n \in \mathcal{U}$ para algún $n \in \omega$ o existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $|A \cap Y_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. Estos entes matemáticos son de gran importancia por sus aplicaciones, además se sabe que en ZFC no se puede mostrar su existencia.

Diremos que $A \subseteq^* B$ si y sólo si $A \setminus B$ es finito y decimos que $A =^* B$ si y sólo si $A \triangle B$ es finito.

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre ω es *P-punto* si para cada $\{Y_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $A \subseteq^* Y_n$ para todo $n \in \omega$ y diremos que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre ω es *Q-punto* si para cada partición de ω en piezas finitas $\{Y_n : n \in \omega\}$, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $|A \cap Y_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$.

A continuación damos una caracterización de ultrafiltros selectivos cuya prueba se puede consultar en [**1**].

TEOREMA 3.8. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω. $\mathcal{U}$ es selectivo si y sólo si es P-punto y Q-punto.*

El teorema de Mathias que probaremos enseguida aparece en [**14**] y el autor sólo dá la idea de la demostración. En este trabajo damos los detalles de tál demostración.

TEOREMA 3.9. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω. Si $\mathcal{U}$ es selectivo entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$ para todo ideal $\mathcal{I}$ sobre ω alto y analítico.*

Vamos a considerar el siguiente juego $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$ con $\mathcal{I}$ analítico definido por las siguientes reglas: En el paso k, el jugador I elige un elemento U_k de $\mathcal{U}$ y entonces el jugador II escoge un elemento $n_k \in U_k$. El jugador II gana una instancia del juego $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$ si $\{n_k : k < \omega\} \in \mathcal{I}^+$. En este juego no es claro como podemos aplicar el teorema de Martin, ni si quiera hemos visto si se puede aplicar tal teorema. Vamos a definir un juego en el que podamos aplicar el teorema de Martin, de tal modo que sea más fuerte que $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$.

Sea $A = P(\omega)$ y $T \subseteq A^{<\omega}$ definido por $t = \langle B_0, B_1, \ldots, B_n \rangle \in T$ si para cualquier $i \leq n,\ B_i \in \mathcal{U}$ si i es par y si i es impar $|B_i| = 1$ y $B_i \subseteq B_{i-1}$. Sea $X \subseteq A^\omega$ definido por $x = \langle B_i : i < \omega \rangle \in X$ si $\bigcup_{i<\omega} B_{2i+1} \in \mathcal{I}$. Ahora ya tenemos un juego $J(T, X)$ definido como en el capítulo anterior. Es claro que si $\vec{x}$ es una instancia en $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$ podemos convertirla en una instancia $\hat{x}$ en $J(T, X)$ haciendo $B_{2i} = U_i$ y $B_{2i+1} = \{n_i\}$ para todo $i < \omega$ y viceversa. Veamos que efectivamente el juego $J(T, X)$ es más fuerte que el juego $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$.

Supongamos que I tiene EG Σ en $J(T, X)$. Sea $\vec{x}$ una instancia en $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$ consistente con la estrategia Σ' que sólo difiere de Σ en los nodos pares (II contesta naturales en véz de singuletes de naturales). Sea $\hat{x}$ la instancia en $J(T, X)$ que se obtiene al modificar $\vec{x}$. Tenemos que $\bigcup_{i<\omega} B_{2i+1} \in \mathcal{I}$, esto es, $\{n_i : i < \omega\} \in \mathcal{I}$. Entonces I gana la instancia $\vec{x}$ y por lo tanto Σ' es EG para I en $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$.

Supongamos ahora que II tiene EG Σ en $J(T, X)$. Sea $\vec{x}$ una instancia en $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$ consistente con la estrategia Σ' que sólo difiere de Σ en los nodos pares (como en el caso anterior) y sea $\hat{x}$ la instancia en $J(T, X)$ que se obtiene al modificar $\vec{x}$. Entonces $\bigcup_{i<\omega} B_{2i+1} \in \mathcal{I}^+$, esto es $\{n_i : i < \omega\} \in \mathcal{I}^+$. Por lo tanto II gana $\vec{x}$ y entonces Σ' es EG para II.

Definimos $f : [T] \to P(\omega)$ por $f(x) = \bigcup_{i<\omega} B_{2i+1}$. La función f es continua, pues segmentos iniciales de las uniones dependen sólo de sucesiones finitas. Además tenemos que $X = f^{-1}(\mathcal{I})$.

Con esta construcción probaremos un lema que nos ayudará a probar el teorema 3.9.

LEMA 3.10. *Si $\mathcal{I}$ es un ideal analítico, entonces el juego $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$ es determinado.*

Demostración. Consideramos el juego $J(T, X)$ construido anteriormente y la función f. Puesto que los conjuntos analíticos son cerrados bajo preimágenes continuas y $X = f^{-1}(\mathcal{I})$, X es analítico, entonces existe un conjunto G del tipo G_δ en $[T] \times 2^\omega$ tal que $\pi_1(G) = X$. Consideramos el juego $J(T \times 2^{<\omega}, G)$, el cual es determinado según Martin. Veamos que el juego $J(T \times 2^{<\omega}, G)$ es más fuerte que el juego $J(T, X)$.

Supongamos que I tiene EG Σ en $J(T \times 2^{<\omega}, G)$. Sea x una instancia en $J(T, X)$ tal que para algún $y \in 2^\omega$, $\langle x, y\rangle$ es una instancia consistente con Σ. Entonces $\langle x, y\rangle \in G$, así $\pi_1\langle x, y\rangle = x \in X$, luego I gana la instancia x y entonces I tiene EG en $J(T, X)$. Supongamos ahora que II tiene EG en $J(T \times 2^{<\omega}, G)$. Sea x una instancia en $J(T, X)$. Podemos elegir $y \in 2^\omega$ tal que $\pi_1\langle x, y\rangle = x \notin X$ y de esta manera II gana la instancia x en $J(T, X)$. Por lo tanto II tiene EG en $J(T, X)$. Así $J(T, X)$ es determinado, pero como $J(T, X)$ es más fuerte que $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$, el juego $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$ es también determinado. ❏

Demostración. *(del teorema de Mathias usando teoría de juegos).* Vamos a considerar el juego $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$. Es fácil ver que:

- El jugador I tiene EG en tal juego si y sólo si existe un árbol $T \subseteq \omega^{<\omega}$ con ramificaciones en $\mathcal{U}$ tal que $ran(f) \in \mathcal{I}$ para toda rama $f \in [T]$, y
- El jugador II tiene EG en tal juego si y sólo si existe un árbol $T \subseteq \omega^{<\omega}$ con ramificaciones en $\mathcal{U}$ tal que $ran(f) \in \mathcal{I}^+$ para toda rama $f \in [T]$.

Afirmación. *Si II tiene EG entonces $\mathcal{I}$ no es ideal alto.*

Demostración. Sea $T = \{t_n : n < \omega\}$ una enumeración de un árbol con ramificaciones en $\mathcal{U}$ tal que $ran(f) \in \mathcal{I}^+$ para toda rama $f \in [T]$. Definimos $A_n = \bigcap_{m\leq n} succ_T(t_m)$, para todo $n < \omega$. En primer lugar notemos que $\{A_n : n < \omega\}$ es una sucesión decreciente de elementos de $\mathcal{U}$. En segundo lugar, notemos que para todo $I \in \mathcal{I}$ existe $n < \omega$ tal que $I \cap A_n = \emptyset$, por que en otro caso, existiría una rama f de T con $ran(f) \in \mathcal{I}$. Definiremos una rama $f \in [T]$ tal que para todo $I \in \mathcal{I}$, se tendrá que $I \cap ran(f)$ es finito. Sea k_0 en A_0 y r_0 tal que $t_0^\frown k_0 = t_{r_0}$. Para toda $j < \omega$ sea k_{j+1} en A_{r_j} y r_{j+1} tal que $t_{r_j}^\frown k_{j+1} = t_{r_{j+1}}$. Es claro que $f = \bigcup_{j<\omega} t_{r_j}$ es una rama de T y $ran(f) \subseteq^* A_n$ para todo $n < \omega$. Entonces $|I \cap ran(f)| < \infty$ para todo $I \in \mathcal{I}$. ❏

Afirmación. *Si $\mathcal{U}$ es selectivo entonces para todo árbol T con ramificaciones en $\mathcal{U}$ existe una rama $f \in [T]$ tal que $ran(f) \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro selectivo y T un árbol con ramificaciones en $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es P-punto, existe $X \in \mathcal{U}$ tal que $X \subseteq^* succ_T(t)$ para todo $t \in T$. Definimos $g : \omega \to \omega$ por $g(0) = 0$ y $g(n + 1)$ como el mínimo $k > g(n)$ tal que para todo $t \in T$ creciente se tiene que $ran(t) \subseteq$ y

$g(n)$ $X \setminus k \subseteq succ_T(t)$. Como $\mathcal{U}$ es Q-punto, existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que $|Y \cap X \cap [g(n), g(n+1))| \leq 1$ para todo $n < \omega$. Entonces $Y_0 = \bigcup_{n<\omega}(Y \cap X \cap [2n, 2n+1)) \in \mathcal{U}$ o $Y_1 = \bigcup_{n<\omega}(Y \cap X \cap [2n+1, 2n+2)) \in \mathcal{U}$. Si $Y_i \in \mathcal{U}$, entonces Y_i es un conjunto positivo contenido en la imágen de una rama de $[T]$. ❑

Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω alto y analítico. Entonces el juego $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}^+)$ es determinado. El jugador II no tiene EG porque $\mathcal{I}$ es alto. Entonces el jugador I tiene EG, así que existe un árbol $T_0 \subseteq \omega^{<\omega}$ con ramificaciones en $\mathcal{U}$ tal que $ran(f) \in \mathcal{I}$ para todo $f \in [T_0]$. Por otro lado, como $\mathcal{U}$ es selectivo, para todo árbol T con ramificaciones en $\mathcal{U}$ existe una rama $f_0 \in [T]$ tal que $ran(f_0) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto $\mathcal{U} \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$. ❑

El teorema de Mathias es un "si y sólo si". Aquí solamente presentamos la parte de la implicación que tiene que ver con juegos. La otra implicación es considerada la parte fácil del teorema y puede consultarse en [**13**].

CAPíTULO 4

EL AXIOMA DE DETERMINACIÓN

A luz de los primeros resultados en la teoría de juegos, en 1962 matemáticos polacos introdujeron el Axioma de Determinación (AD), en gran medida porque estableció propiedades de regularidad de todos los conjuntos de reales, desapareciendo por ejemplo aquellos conjuntos "patológicos"no medibles y las restricciones de aplicaciones del Axioma de Elección (AC). En este capítulo veremos como AD y AC son incompatibles y estudiaremos algunas consecuencias de AD.

El *Axioma de Determinación* (AD) establece que para todo $A \subseteq \omega^\omega$, el juego $J(\omega^{<\omega}, A)$ es determinado.

En teoría de conjuntos a los elementos de ω^ω, 2^ω, $[0,1]$ y de $\mathbb{R}$ son llamados reales, pues muchos de los teoremas que se prueban para algún subconjunto de los espacios antes mencionados (y otros) tienen un análogo canónico en otro de ellos.

1. Determinación y Elección

Usando el proceso de diagonalización podemos mostrar que el Axioma de Elección es incompatible con el Axioma de Determinación:

LEMA 4.1. *Asumiendo el Axioma de Elección, existe $A \subseteq \omega^\omega$ tal que el juego $J(\omega^{<\omega}, A)$ es no determinado.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que el número de estrategias es $2^{\aleph_0}$, sean $\{\sigma_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ y $\{\tau_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ enumeraciones de todas las estrategias para I y de todas las estrategias para II, respectivamente. Construiremos conjuntos $X = \{x_\alpha : x_\alpha = \langle x_0^\alpha, x_1^\alpha, \ldots\rangle,\ \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ y $Y = \{y_\alpha : y_\alpha = \langle y_0^\alpha, y_1^\alpha, \ldots\rangle,\ \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, subconjuntos de ω^ω, como sigue: Dados $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ y $\{y_\xi : \xi < \alpha\}$ vamos a elegir algún y_α tal que $y_\alpha = \sigma_\alpha * b$ para algún b y $y_\alpha \notin \{x_\xi : \xi < \alpha\}$. Por el proceso de diagonalización, sea $b = \langle b_0, b_1, \ldots\rangle$ tal que para cada $i \in \omega$ se tiene que $b_i = x^i_{2i+1}$ y $x^i_{2i+1} = x_i(2i+1)$; silmilarmente, escogemos x_α tal que [1] $x_\alpha = a * \tau_\alpha$ para algún a y $x_\alpha \notin \{y_\xi : \xi \leq \alpha\}$. Es claro que los conjuntos X y

[1]Ver página 20.

Y son disjuntos, que para cada α existe un b tal que $\sigma_\alpha * b \notin X$, y existe a tal que $a * \tau_\alpha \in X$. Así que ni I ni II tienen una EG en el juego $J(\omega^{<\omega}, X)$, y por lo tanto $J(\omega^{<\omega}, X)$ es no determinado. ❑

Hemos mostrado ahora la existencia de subconjuntos A de ω^ω cuyo juego $J(\omega^{<\omega}, A)$ no es determinado sin tener que dar explícitamente tal conjunto como se hizo en el segundo capítulo.

En contraste con este lema, el Axioma de Determinación implica el Axioma de Elecciones Numerables:

Lema 4.2. *El Axioma de Determinación implica que toda familia contable de conjuntos no vacíos de números reales tiene una función de elección.*

Demostración. Probaremos que si $\chi = \{X_n : n \in \omega\}$ es una familia de subconjuntos no vacíos de ω^ω, entonces existe f sobre χ tal que $f(X_n) \in X_n$ para todo $n \in \omega$. Vamos a considerar el siguiente juego: Si I juega $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ y II juega $b = \langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle$, entonces II gana si y sólo si $b \in X_{a_0}$. Es claro que I no tiene una EG: Ya que si I juega un $a \in \omega^\omega$ con $a(0) = a_0$, II elige un $b \in X_{a_0}$ y juega entonces b, de esta manera II gana esta instancia. Pero para que II gane el juego definido, siempre que I juegue un $a \in \omega^\omega$, II tiene que elegir un $b \in \omega^\omega$ tal que $b \in X_{a(o)}$, es decir, se tienen que hacer infinitas elecciones, lo cual no es posible sin el Axioma de Elección. Como suponemos AD, II tiene una EG τ para este juego. Así que definimos f sobre χ como $f(X_n) = \langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle$, donde $\langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle$ es la sucesión de movimientos (respuestas) de II dados por τ a la sucesión $\langle n, 0, 0, \ldots \rangle$ de movimientos de I. ❑

2. Algunas Consecuencias de AD

Ahora probaremos que bajo la hipótesis de Determinación, los conjuntos de números reales son "bien portados".

Teorema 4.3. *Asumamos el Axioma de Determinación. Entonces:*

1. *Todo conjunto de reales es Lebesgue medible.*
2. *Todo conjunto de reales tiene la propiedad de Baire.*
3. *Todo conjunto de reales no numerable contiene un subconjunto perfecto.*

Demostración. Para la prueba del teorema necesitaremos algunos lemas los cuales iremos probando en su momento:

Lema 4.4. *Asumamos AD, sea S un conjunto de reales tal que todo medible $Z \subseteq S$ es nulo. Entonces S es nulo.*

Demostración. Sea S un conjunto de reales con la propiedad:

$$\text{Si } Z \subseteq S \text{ es Lebesgue medible, entonces } Z \text{ es nulo;}$$

usaremos AD para mostrar que S es nulo. Es claro que podemos restringirnos a subconjuntos del intervalo unidad; por lo tanto supongamos que $S \subseteq [0,1]$. Para mostrar que S es nulo, es suficiente probar que la medida exterior $\mu^*(S)$ es menor o igual que cualquier $\epsilon > 0$. Sea entonces ϵ un número real positivo fijo.

El juego de la Cubierta. Dados S y ϵ, vamos a considerar el siguiente juego: Si $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle$ es una sucesión de $0's$ y $1's$, sea a el número real

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

Para cada $n \in \omega$, sea G_k^n, $k \in \omega$, una enumeración del conjunto K_n de todos los conjuntos G tales que

i) G es unión finita de intervalos con extremos racionales;
ii) $\mu(G) \leq \epsilon/2^{2(n+1)}$.

El juego consiste en dos jugadores, el jugador I juega a construir un $a \in S$ y el jugador II juega a cubrir a por la unión $\bigcup_{n\in\omega}^{\infty} H_n$ tales $H_n \in K_n$ para toda n. Maś precisamente, una instancia $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots\rangle$ es ganada por I si:

1. $a_n = 0$ o 1, para todo n;
2. $a \in S$; y
3. $a \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{b_n}^n$.

Afirmamos que I no tiene una EG en el juego. Para ver esto, note que si σ es una EG para I, entonces la función f que a cada $b = \langle b_0, b_1, b_2, \ldots\rangle \in \omega^\omega$ asigna el número real $a = f(b)$ tal que $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots\rangle = \sigma * b$ es continua y por lo tanto el conjunto $Z = f(\omega^\omega)$ es analítico y entonces medible. Más aún, $Z \subseteq S$, entonces Z es nulo. Por otro lado, un conjunto nulo puede ser cubierto por una unión numerable $\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n$ tal que $H_n \in K_n$ para toda n, y entonces, si II juega $\langle b_0, b_1, b_2 \ldots\rangle$ con $G_{b_n}^n = H_n$ y I juega consistente con σ, II gana. Por lo tanto σ no puede ser EG para I.

Asumiendo AD, el juego de la cubierta es determinado, y entonces II tiene una EG. Sea τ una EG para II. Para cada sucesión finita $s = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle$ de $0's$ y $1's$, sea $G_s \in K_n$ el conjunto $G_{b_n}^n$, donde $\langle b_0, b_1, \ldots, b_n\rangle$ son los movimientos que II jugó consistente con τ en los movimientos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de I. Puesto que τ es una EG para II, para todo $a \in S$ se tiene que $a \in \bigcup\{G_s : s \subseteq a\}$

y por lo tanto

$$S \subseteq \bigcup\{G_s : s \in Seq(\{0,1\})\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s\in\{0,1\}^n} G_s.$$

Ahora para todo $n \geq 1$, si $s \in \{0,1\}^n$, entonces $\mu(G_s) \leq \epsilon/2^{2n}$ y por lo tanto

$$\mu(\bigcup_{s\in\{0,1\}^n} G_s) \leq \frac{\epsilon}{2^{2n}} \cdot 2^n = \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Se sigue que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s\in\{0,1\}^n} G_s) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon/2^n = \epsilon$ y por lo tanto $\mu^*(S) \leq \epsilon$. Puesto que ϵ era arbitrario, S es nulo. ❑

Es fácil ver que el lema implica que todo conjunto X es Lebesgue medible: Sea $A \supset X$ un conjunto medible con la propiedad que todo medible $Z \subseteq A - X$ es nulo. Entonces $A - X$ es nulo y por lo tanto X es medible.

Ahora consideraremos la propiedad de Baire:

El juego de Banach-Mazur. Sea $A \subseteq \omega^\omega$, defimimos el juego de Banach-Mazur $G^{**}(\omega^\omega, A)$ como sigue: Hay dos jugadores, I y II, en véz de escoger miembros de ω, eligen miembros de $\omega^{<\omega} - \{\emptyset\}$:

I	s_0		s_2	$\ldots$		
II		s_1			s_3	$\ldots$

Sea $x = s_0{}^\frown s_1{}^\frown s_2{}^\frown \ldots$, I gana la instancia si $x \in A$ y en otro caso II gana.

Primero verifiquemos que este juego puede ser reformulado como un juego $J(\omega^<\omega, A)$ (es decir, cuando los movimientos son naturales). Para el juego $G^{**}(\omega^\omega, A)$, sea $\langle s_i : i \in \omega\rangle$ una enumeración de $\omega^{<\omega}$ con $s_0 = \emptyset$ y definimos $B \subseteq (\omega - \{0\})^\omega$ por

$$x \in B \text{ si sólo si } s_{x(0)}{}^\frown s_{x(1)}{}^\frown s_{x(2)}{}^\frown \ldots \in A.$$

Entoces el juego $J(\omega^{<\omega}, B)$ es equivalente al juego $G^{**}(\omega^\omega, A)$. Así, si se cumple AD, el juego de Banach-Mazur es determinado, para todo $A \subseteq \omega^\omega$. Usaremos esto para probar que todo $A \subseteq \omega^\omega$ tiene la propiedad de Baire. Para evitar confusiones, de ahora en adelante el cono de una sucesión s lo denotaremos por $O(s)$.

Lema 4.5. ([**10**], Proposición 27.3). *Sea $A \subseteq \omega^\omega$,*
a) A es magro si y sólo si II tiene una EG en $G^{**}(\omega^\omega, A)$.
b) $O(s) - A$ es magro para algún $s \in \omega^{<\omega}$ si y sólo si I tiene una EG en $G^{**}(\omega^\omega, A)$.

Demostración. a) Supongamos primero que A es magro, luego $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} C_n$ donde cada C_n es cerrado y nunca denso. Entonces una estrategia τ para II puede ser definida como sigue: $\tau(\langle s_0\rangle)$ es algún t tal que $O(s_0{}^\frown t) \cap C_0 = \emptyset$; tal t existe porque C_0 es nunca denso, en general, $\tau(\langle s_0, s_1, \ldots, s_{2n}\rangle)$ es algún t tal que $O(s_0{}^\frown s_1{}^\frown \ldots{}^\frown s_{2n}{}^\frown t) \cap C_n = \emptyset$. Es inmediato observar que τ es un EG para II.

Supongamos ahora que II tiene una EG τ. Para cada instancia parcial consistente con τ de la forma $p = \langle s_0, \ldots, s_{2n+1}\rangle$, sea $p_* = s_0{}^\frown \ldots{}^\frown s_{2n+1}$ y

$$D_p = \{x \in \omega^\omega : p_* \subseteq x \Rightarrow \exists t \in \omega^{<\omega} - \{\emptyset\}(p_*{}^\frown t^\frown \tau(p^\frown\langle t\rangle) \subseteq x)\}.$$

Entonces cada D_p es abierto (observando en parte que $O(p_*)$ es un cerrado-abierto) y denso (pues si $u \in \omega^{<\omega}$, o bien $p_* \nsubseteq u$ y así $O(u) \subseteq D_p$, o bien existe un $t \in \omega^{<\omega} - \{\emptyset\}$ tal que $p_*{}^\frown t = u$ y así cualquier $x \in \omega^\omega$ con $p_*{}^\frown t^\frown \tau(p^\frown\langle t\rangle) \subseteq x$ satisface $x \in O(u) \cap D_p$). Más aún, para cualquier $x \in \bigcap_p D_p$ podemos definir recursivamente una instancia $\langle s_i : i \in \omega\rangle$ consistente con τ tal que $x = s_0{}^\frown s_1{}^\frown s_2 \ldots$, y entonces $x \notin A$. En consecuencia, $A \subseteq \bigcup_p(\omega^\omega - D_p)$, una unión numerable de conjuntos nunca densos.

b) Supongamos primero que $O(s) - A$ es magro para alguna $s \in \omega^{<\omega}$ la cual podemos considerarla distinta de la sucesión vacía. Entonces por a), I tiene una EG empezando con s en $G^{**}(\omega^\omega, A)$.

Para el converso, si I tiene una EG σ, con $\sigma(\emptyset) = s$, entonces es simple ver que II tiene una EG en $G^{**}(\omega^\omega, O(s) - A)$ derivada de σ, y así $O(s) - A$ es magro por a). ❑

Corolario 4.6. *Sea $A \subseteq \omega^\omega$ y*

$$O_A = \bigcup\{\langle s\rangle : s \in \omega^{<\omega} \wedge \langle s\rangle - A \text{ es magro}\},$$

si $G^{**}(\omega^\omega, A - O_A)$ es determinado, entonces A tiene la propiedad de Baire.

Demostración. Si I tuvo una EG en $G^{**}(\omega^\omega, A - O_A)$, entonces para algún $t \in \omega^{<\omega}$, $O(t) - (A - O_A)$ debería ser magro, en consecuencia, $O(t) - A$ también debería ser magro y entonces $O(t) \subseteq O_A$ y por lo tanto $O(t) - (A - O_A) = O(t)$, lo cual no es posible porque $O(t)$ es abierto. Entonces II tiene una EG en $G^{**}(\omega^\omega, A - O_A)$, y así $A - O_A$ es magro. Además, $O_A - A$ es magro por definición de O_A, luego A tiene la propiedad de Baire. ❑

Usaremos AD para probar que todo conjunto no numerable en el espacio de Cantor $C = 2^\omega$ tiene un subconjunto perfecto. Consideramos el siguiente juego:

El juego del Conjunto Perfecto. Sea $A \subseteq 2^\omega$, $G^*(2^\omega, A)$ es el juego formulado como sigue: I elige elementos de $2^{<\omega}$ y II, elementos de 2:

I	s_0		s_2	$\ldots$	
II		k_1		k_3	$\ldots$

Sea $x = s_0{}^\frown\langle k_1\rangle^\frown s_2{}^\frown\langle k_3\rangle^\frown \ldots$, I gana la instancia $\langle s_0, k_1, s_2, k_3, \ldots\rangle$ si $x \in A$ y en otro caso II gana.

Proposición 4.7. ([**10**], Proposición 27.5). *Sea $A \subseteq 2^\omega$,*
a) A es numerable si y sólo si II tiene una EG en $G^*(2^\omega, A)$.
b) A tiene un subconjunto perfecto si y sólo si I tiene una EG en $G^*(2^\omega, A)$.

Demostración. a) Supongamos primero que A es numerable. Sea $\langle a_n : n \in \omega\rangle$ una enumeración de A. Entonces II tiene una EG: II juega su n-ésimo movimiento asegurando que la concatenación de la instancia jugada difiera de a_n.

Supóngase ahora que II tiene una EG τ en $G^*(2^\omega, A)$. Procediendo como en la prueba de 4.5 a), para una instancia parcial consistente con τ de la forma $p = \langle s_0, k_1, \ldots, s_{2n}, k_{2n+1}\rangle$, sea $p_* = s_0{}^\frown\langle k_1\rangle^\frown \ldots{}^\frown s_{2n}{}^\frown\langle k_{2n+1}\rangle$ y

$$D_p = \{x \in 2^\omega : p_* \subseteq x \Rightarrow \exists t \in 2^{<\omega}(p_*{}^\frown t^\frown \tau(p^\frown\langle t\rangle) \subseteq x)\}.$$

Entonces como antes, $A \subseteq \bigcup_p (2^\omega - D_p)$.

Ahora para cada p, si $p_* \subseteq x$ y $(\forall t \in 2^{<\omega})(p_*{}^\frown t^\frown \tau(p^\frown\langle t\rangle) \nsubseteq x)$, tenemos que $x \in 2^\omega - D_p$. Pero entonces, $2^\omega - D_p$ tiene un único miembro x_p: con $|p_*| = m$, $x_p \restriction m = p_*$; necesariamente $x_p(m) = 1 - \tau(p^\frown\langle\emptyset\rangle)$ y recursivamente

$$x_p(e) = 1 - \tau(p^\frown\langle x_p(m), \ldots, x_p(e-1)\rangle)$$

para $e > m$. Por lo tanto, A es numerable.

b) Supóngase primero que A tiene un subconjunto perfecto P. Sea

$$T = \{x \restriction n : x \in P \land n \in \omega\},$$

una estrategia para I puede ser descrita como sigue: Sea el movimiento inicial un $s \in T$ tal que $s^\frown\langle 0\rangle$ y $s^\frown\langle 1\rangle$ están en T; tal s existe porque P no tiene puntos aislados. En general, para una instancia parcial p con concatenación $p_* \in T$ sea el movimiento un $s \in T$ tal que $p_*^\frown s^\frown\langle 0\rangle$ y $p_*^\frown s^\frown\langle 1\rangle$ están en T; otra véz, tal s existe porque P no tiene puntos aislados. Ésta es una EG para I, pues P es cerrado.

Para el converso, si σ es una EG para I, $\{\sigma * y : y \in 2^\omega\}$ es un subconjunto perfecto de A. ❑

Es simple hacer la transformación de 2^ω a ω^ω. Para $n, k \in \omega$ definimos $b_n^k : n+1 \to 2$ como sigue: si k es par, $b_n^k(i) = 1$ para $i < n$ y $b_n^k(n) = 0$; si k es impar, $b_n^k(i) = 0$ para $i < n$ y $b_n^k(n) = 1$. Entonces definimos $\psi : \omega^\omega \to 2^\omega$ por:

$$\psi(x) = b^0_{x(0)} {}^\frown b^1_{x(1)} {}^\frown b^2_{x(2)} {}^\frown \ldots$$

El rango de ψ consiste de una cantidad numerable de elementos de 2^ω que son eventualmente constante y tal ψ es un homeomorfismo sobre su rango considerado como subespacio de 2^ω. Además, para $B \subseteq 2^\omega$, B es perfecto si y sólo si $\psi^{-1}(B)$ es perfecto, y B es numerable si y sólo si $\psi^{-1}(B)$ es numerable. Esto nos lleva a lo siguiente:

Corolario 4.8. *Sea $A \subseteq \omega^\omega$, $G^*(2^\omega, \psi(A))$ es determinado si y sólo si A tiene la propiedad del conjunto perfecto.*

❑

Decimos que un filtro $\mathcal{U}$ sobre S es λ-completo si y sólo si para cualquier $\gamma < \lambda$ y $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq \mathcal{U}$, $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in \mathcal{U}$.

Una pregunta que surge en la teoría de ultrafiltros es la siguiente: ¿existen ultrafiltros no principales? Una respuesta parcial es: $\mathcal{U}$ es un ultralfiltro no principal si y sólo si extiende al filtro de Fréchet. Sabemos que todo filtro puede extenderse a un ultrafiltro y esto requiere AC y de hecho se sabe que en sólo ZF no se puede dar tal extensión.

Ahora en ZF+AD tenemos una respuesta a la pregunta antes mencionada en ω.

Proposición 4.9. *Asumamos AD. Entonces no existen ultrafiltros no principales sobre ω. Por lo tanto, todo ultrafiltro es ω_1-completo.*

Demostración. Supongamos que existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ no principal sobre ω. Consideramos un juego donde los jugadores eligen miembros de $[\omega]^{<\omega}$:

$$\begin{array}{c|ccccc} \mathrm{I} & s_0 & & s_2 & \ldots & \\ \hline \mathrm{II} & & s_1 & & s_3 & \ldots \end{array}$$

Si un movimento s_n no es disjunto de $\bigcup_{i<n} s_i$, entonces el jugador que hace primero uno de tales movimientos pierde. Asumiendo que esto no pasa, I gana si $\bigcup_{i\in\omega} s_{2i} \in \mathcal{U}$, y en otro caso II gana. Una contradicción se deriva probando que una EG para cualquiera de los jugadores puede ser convertida a una EG para el otro jugador.

Supongamos primero que σ es una EG para I. Definimos una estrategia τ_σ para II como sigue:

$$\tau_\sigma(\langle s_0 \rangle) = \sigma(\emptyset) - s_0, \text{ y para } 0 < i \in \omega, \ \tau_\sigma(\langle s_0, \ldots, s_{2i} \rangle) = \sigma(\langle s_1, \ldots, s_{2i} \rangle) - s_0,$$

es decir, ignoramos el primer movimiento s_0 y jugamos consistente con σ, restando s_0 para mantener los movimientos disjuntos. Para cualquier instancia $\langle s_0, s_1, s_2, \ldots \rangle$ consistente con τ_σ donde los movimientos son disjuntos, $s_0 \cup \bigcup_{i\in\omega} s_{2i+1} \in \mathcal{U}$ ya que σ es una EG para I, pero como $\mathcal{U}$ es no principal, $\bigcup_{i\in\omega} s_{2i+1} \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, τ_σ es EG para II, ya que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, una contradicción.

Supongamos ahora que τ es una EG para II. Primero modificaremos τ a una estrategia $\bar{\tau}$ para II definida por:

$$\bar{\tau}(\langle s_0, \ldots, s_{2i} \rangle) = \begin{cases} \tau(\langle s_0, \ldots, s_{2i} \rangle) \cup \{i\} & \text{si } i \notin \bigcup_{j\leq 2i} s_j, \\ \tau(\langle s_0, \ldots, s_{2i} \rangle) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $\bar{\tau}$ es además EG para II, mas aún para cualquier instancia $\langle s_0, s_1, s_2, \ldots \rangle$ consistente con $\bar{\tau}$ donde los movimientos son disjuntos, $\bigcup_{i\in\omega} s_{2i+1} \in \mathcal{U}$ ya que $\bigcup_{i\in\omega} s_i = \omega$ y $\mathcal{U}$ es ultrafiltro.

Ahora definimos una estrategia σ_τ, para I por:

$$\sigma_\tau(\langle s_0, \ldots, s_{2i-1} \rangle) = \bar{\tau}(\langle \emptyset, s_0, \ldots, s_{2i-1} \rangle),$$

es decir, asumimos que existe un primer movimiento $\emptyset$ y jugamos consistente con $\bar{\tau}$. Entonces como en el argumento anterior, σ_τ es una EG para I, una contradicción.

Para la segunda afirmación, si W fuera un ultrafiltro sobre un conjunto S el cual no es ω_1-completo, existiría una función $f : S \to \omega$ tal que

$$f_*(W) = \{X \subseteq \omega : f^{-1}(X) \in W\}$$

es un ultrafiltro no principal sobre ω. ❑

Para poder establecer la consistencia de ZFC+AD se requiere un tipo muy especial de cardinales grandes, cardinales de Woodin. Martin, Steel y Woodin probaron tal consistencia.

Bibliografía

[1] Bartoszyński Tomek.; Judah Haim. *Set Theory: On the Structure of the Real Line*. A.K Peters, 1995.

[2] Di Prisco Carlos A.; Pawel Zbierski. *Determinación de Conjuntos Borelianos y Conjuntos Proyectivos: Algunas aplicaciones de juegos infinitos*. Acta científica venezolana. 32 : 361–368, 1981.

[3] Donal A. Martin. *A Purely Inductive Proof of Borel Determinacy* . (Ithaca, N. Y., 1982), 303–308.

[4] Donal A. Martin. *Borel Determinacy*. Ann. of Math. (2) 102 (1975), 363–371.

[5] Engelking R. *General topology*. Heldermann Verlag, 1989

[6] Hernández Hernández Fernando. *Teoría de Conjuntos, Una Introducción*. Aportaciones matemáticas, 2003.

[7] Hrbacek K.; Jech Thomas. *Introduction to Set Theory*. CRC Press, 1999.

[8] Hrušák Michael. *Notas de Teoría Descriptiva de Conjuntos*. UNAM, Morelia Mich., 2006.

[9] Jech Thomas. *Set Theory*. Springer, 2002.

[10] Kanamori A. *The Higher Infinite*. Springer, 2003.

[11] Kechris S. Alexander. *Classical Descriptive Set Theory*. Springer-Verlag, 1994.

[12] Kuratowski K. *Topology*. volume I, Academic Press, 1966.

[13] Mathias A.R.D. *Happy Families*. Annals of Mathematical Logic 12 (1977) 59-111.

[14] Meza Alcántara David. *Ideals and Filter on Countable Sets*. Tesis doctoral, UNAM, México, D.F. 2009.

[15] Munkres James R. *Topología* . Pearson, 2002.

[16] Van Mill Jan. *Types of Weak P-Points in $\beta\omega \setminus \omega$*.

[17] Zapletal Jindřich. *Notes of Determinacy*. University of Florida, Spring, 2005.