

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---



FACULTAD DE CIENCIAS

PROYECCIÓN ESTOCÁSTICA DE LA  
MORTALIDAD MEXICANA. UNA APLICACIÓN  
AL SISTEMA PRIVADO DE PENSIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A :

RENÉ FERNANDO CERVANTES GONZÁLEZ



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. VÍCTOR MANUEL GARCÍA GUERRERO

2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.  
Apellido paterno: Cervantes  
Apellido materno: González  
Nombre (s): René Fernando  
Teléfono: 57 44 33 08  
Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad o escuela: Facultad de Ciencias  
Carrera: Actuaría  
No. de cuenta: 300182248
2. Datos del tutor  
Grado: Dr  
Apellido paterno: García  
Apellido materno: Guerrero  
Nombre (s): Víctor Manuel
3. Datos del sinodal 1  
Grado: M en D  
Apellido paterno: Mina  
Apellido materno: Valdés  
Nombre (s): Alejandro
4. Datos del sinodal 2  
Grado: M en P  
Apellido paterno: Castro  
Apellido materno: Méndez  
Nombre (s): Nina
5. Datos del sinodal 3  
Grado: M en P  
Apellido paterno: Gloria  
Apellido materno: Hernández  
Nombre (s): Laura Elena
6. Datos del sinodal 4  
Grado: Act  
Apellido paterno: Valencia  
Apellido materno: Trujillo  
Nombre (s): José Antonio
7. Datos del trabajo escrito  
Título: Proyección estocástica de la mortalidad mexicana.  
Subtítulo: Una aplicación al sistema privado de pensiones.  
No. de páginas: 100 p  
Año: 2011



# Índice general

Índice general	III
Introducción	VII
<b>1. Evolución de la mortalidad mexicana en el siglo XX</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. La mortalidad en el México del siglo XX . . . . .	2
1.3. La estructura por edad de la población mexicana . . . . .	4
1.3.1. Desafíos del envejecimiento demográfico . . . . .	7
<b>2. La tabla de mortalidad, su análisis y construcción</b>	<b>9</b>
2.1. Mortalidad . . . . .	9
2.2. La tabla de mortalidad . . . . .	10
2.3. Funciones biométricas de una tabla de mortalidad . . . . .	12
2.4. Probabilidades relacionadas con el tiempo de supervivencia . . . . .	14
2.4.1. La relación entre las funciones biométricas y la función de supervivencia	16
2.4.2. Modelos que proponen una distribución probabilística para modelar la variable $T(x)$ . . . . .	19
2.5. Construcción de una tabla de mortalidad . . . . .	21
<b>3. Proyecciones de la mortalidad mexicana</b>	<b>27</b>
3.1. El tiempo como factor en la mortalidad . . . . .	27

---

3.2.	El Modelo Lee-Carter . . . . .	29
3.2.1.	Estimación de los parámetros . . . . .	31
3.2.2.	Ajustes al modelo . . . . .	34
3.2.3.	Criterio de comparación de modelos . . . . .	39
3.2.4.	Elaboración del pronóstico . . . . .	40
3.2.5.	Ventajas y desventajas del modelo Lee-Carter . . . . .	44
3.3.	Aplicación del modelo a datos de México . . . . .	45
3.3.1.	Mortalidad Femenina . . . . .	47
3.3.2.	Mortalidad Masculina . . . . .	55
<b>4.</b>	<b>Los planes privados de pensiones y la influencia de la mortalidad en ellos</b>	<b>63</b>
4.1.	Los planes de pensiones . . . . .	63
4.1.1.	Clasificación de los planes de pensiones . . . . .	63
4.1.2.	Situación actual de los planes de pensiones en México . . . . .	65
4.2.	Variables que influyen en el costo de un plan de pensiones . . . . .	66
4.2.1.	Hipótesis demográficas . . . . .	67
4.2.2.	Hipótesis económicas . . . . .	68
4.3.	Metodología . . . . .	69
4.3.1.	Anualidad de Vida . . . . .	69
4.3.2.	Beneficio por Jubilación . . . . .	70
4.3.3.	Decrementos múltiples . . . . .	71
4.3.4.	Función compuesta de supervivencia . . . . .	72
4.3.5.	Valor Presente de Obligaciones . . . . .	73
4.3.6.	La influencia del tiempo en los decrementos . . . . .	75
4.4.	Aplicación de la metodología . . . . .	77
4.4.1.	Hipótesis demográficas . . . . .	78
4.4.2.	Hipótesis económicas . . . . .	80

4.4.3. Resultados . . . . .	81
<b>Conclusiones</b>	<b>87</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>
<b>Anexos</b>	<b>97</b>
4.1. Demostraciones . . . . .	97
4.2. Tablas . . . . .	98



# Introducción

De acuerdo a datos del *Censo de Población y Vivienda 2010* (INEGI, 2011, pag. 6), para el año 2010 la población mexicana menor de 15 años representaba el 29.3 por ciento de la población total, mientras que la que se encuentra en edad de 15 años o más constituía el 70.7 por ciento de los habitantes del país. En contraste, en el año 2000 la participación de estos grupos de edad era de 34.1 y 65.9 por ciento, respectivamente. Asimismo, la edad mediana, es decir, la que divide a la población en dos partes iguales, en el año 2010 era de 26 años, cuando en 2000 fue de 22. A grandes rasgos, aunque la población mexicana continúa siendo predominantemente joven, está experimentando un envejecimiento paulatino. Los principales factores causantes de este fenómeno son los bajos niveles actuales de fecundidad y mortalidad, siendo este último factor el tema principal que se aborda en este trabajo.

El descenso en los niveles de mortalidad conlleva un impacto importante en los cálculos de los pasivos que se generan en el ámbito de los planes de pensiones al retiro, así como en los seguros de vida. En los planes de pensiones al retiro, se otorga un beneficio (pensión) con cierta periodicidad a una persona que ha concluido con su etapa laboral hasta el momento de su fallecimiento y/o el de sus beneficiarios. En un seguro de vida, se otorga una compensación a los beneficiarios de una persona al momento del fallecimiento de esta última, por lo que en ambos casos la mortalidad juega un papel fundamental para calcular la obligación derivada (pasivos) de dichos beneficios. Una buena estimación de la mortalidad nos asegura una mejor rentabilidad de dichos pasivos, mientras que una mala estimación de esta podría derivar en muchos casos en una insuficiencia de fondos para poder cumplir con el compromiso de pago adquirido.

Actualmente la tabla de mortalidad es la herramienta más utilizada para medir el fenómeno de la mortalidad y cuantificar así las correspondientes probabilidades de muerte o de supervivencia. Sin embargo, las tablas de mortalidad cuentan con una *fecha de caducidad* implícita, ya que éstas son calculadas con la información de cierto periodo de tiempo, por lo que únicamente son un reflejo del comportamiento de la mortalidad de dicho periodo, lo que representa un problema cuando son usadas para estimar el comportamiento de la mortalidad a futuro, como es el caso de las pensiones y los seguros de vida.

A grandes rasgos, la probabilidad de fallecimiento de una persona de edad  $x$  que nació en el año  $t$ , no es la misma probabilidad de fallecimiento de una persona de la misma edad  $x$  pero nacida en el año  $t+n$ , esto debido a los avances en salubridad, medicina, etc., por lo que es necesario tomar en cuenta el dinamismo que se crea con el paso del tiempo al momento

de elaborar las tablas de mortalidad.

El objetivo principal del presente trabajo consiste en desarrollar un grupo de tablas de mortalidad para la población femenina y masculina en México, donde se vea reflejado el efecto del tiempo en las mismas. El método que se va a utilizar para la construcción de dichas tablas actualmente goza de gran popularidad para la modelación y pronóstico de funciones asociadas a la mortalidad, y es conocido como el modelo Lee-Carter. El segundo objetivo de este trabajo consiste en realizar un ejercicio práctico cuya finalidad es analizar el impacto que se obtiene de la aplicación de dicho grupo de tablas de mortalidad en un colectivo asegurado bajo un plan de pensiones de beneficio definido, comparándolas con distintas tablas de mortalidad comúnmente empleadas en la valuación de pasivos de dichos planes.

En el Capítulo 1 se explica la evolución de la mortalidad mexicana, desde inicios de siglo XX hasta nuestros días, a través de la evolución de la esperanza de vida al nacimiento. De igual manera se muestra el cambio que ha experimentado la estructura de la población mexicana en los años recientes, y las problemáticas que se derivan de la tendencia de dicho cambio, en particular aquellas que aquejan a los planes de pensiones.

En el Capítulo 2 se estudia el tema de las tablas de mortalidad, su clasificación, construcción, y la importancia de las funciones biométricas en la elaboración de las mismas. Estas últimas son analizadas desde un punto de vista práctico e intuitivo, así como desde un punto de vista teórico y matemático. También se muestran algunos métodos matemáticos que tratan de modelar la mortalidad a través de variables aleatorias relacionadas con el tiempo de supervivencia. Se finaliza con un ejemplo práctico sobre la construcción de dichas tablas.

En el Capítulo 3 se introduce el concepto de dinamismo en la mortalidad, para dar pie al modelo Lee-Carter, las características de dicho modelo, sus ventajas y desventajas, así como varias propuestas para la estimación de sus parámetros. Se finaliza el capítulo con la aplicación del modelo, esto a través del comparativo de varias de las propuestas hechas para la estimación de los parámetros, eligiendo la más adecuada para al final elaborar las tablas de mortalidad para la población mexicana, del año 2006 al 2050, por sexo.

En el Capítulo 4 se habla sobre los planes de pensiones privados, su clasificación y las hipótesis y variables actuariales involucradas en la estimación de los pasivos derivados de los mismos. Se finaliza con un ejercicio práctico cuya finalidad es mostrar el impacto que se tiene de la aplicación de las tablas creadas en el Capítulo 3 en el cálculo de los pasivos de un plan de pensiones, y se realiza una comparación de sus resultados con aquellos obtenidos con algunas tablas comúnmente usadas en el ámbito actuarial.

# Capítulo 1

## Evolución de la mortalidad mexicana en el siglo XX

### 1.1. Antecedentes

Uno de los retos demográficos del siglo XXI lo constituye el envejecimiento de la población. El fenómeno de la transición demográfica, el cual alude al paso de niveles de natalidad altos y de mortalidad sin control, a niveles bajos y controlados (Partida, 2005, pag. 10) conlleva al rápido incremento de la población de adultos mayores. Por un lado, el declive de la mortalidad da origen a un progresivo aumento de la esperanza de vida y, en consecuencia, un número cada vez mayor de personas llega con vida a edades avanzadas. Por el otro, la caída de la fecundidad se refleja a la larga tanto en una cantidad menor de nacimientos, como en una reducción sistemática de la proporción de niños y jóvenes en la población total. De esta manera, la combinación de una esperanza de vida cada vez mayor y de una fecundidad en continuo descenso provoca un aumento significativo de la edad media de la población y una proporción ascendente de adultos mayores.

México no está exento de esta situación ya que se encuentra dentro del proceso de la transición demográfica, cuya primera etapa, caracterizada por las tasas de mortalidad en rápido descenso y tasas de natalidad relativamente constantes e incluso ascendentes, comenzó con la finalización de la Revolución Mexicana entre 1945 y 1960. La segunda etapa puede ubicarse a partir de 1970, cuando el descenso de la fecundidad se acentuó. La tercera etapa del proceso (cuando los niveles de natalidad y mortalidad convergen) tendrá lugar durante la primera mitad del siglo XXI (Partida, 2005, pag. 10).

En el presente capítulo se hace un breve resumen de la evolución la mortalidad Mexicana, abarcando desde inicios del siglo XX hasta nuestros días. Para ello se analizan los cambios ocurridos en la esperanza de vida al nacimiento a lo largo de dicho periodo. También se analiza la situación actual de la población mexicana a raíz del fenómeno de la transición demográfica, y las repercusiones de este fenómeno en la misma.

## 1.2. La mortalidad en el México del siglo XX

En esta sección se analiza la evolución de la mortalidad a través de los cambios en la esperanza de vida al nacimiento obtenida de dos distintas fuentes de información, el texto elaborado por Camposortega (1997)<sup>1</sup>, y las proyecciones de población 2005-2050 elaboradas por Partida (2008) y publicadas por el Consejo Nacional de Población (CONAPO). Esto debido a que el análisis presentado por Camposortega explica más a detalle la evolución de la mortalidad a inicios y mediados de siglo, mientras que los datos del CONAPO son de gran utilidad para años recientes.

Camposortega (1997) divide el siglo XX en cuatro etapas; la primera abarca del año 1900 hasta el año 1920, la cual se caracteriza por la permanencia de niveles altos y variables de la mortalidad. El autor observa que la esperanza de vida al nacimiento pasa de 25.4 años en 1900 a 28.9 años en 1920, mostrando un decremento hacia el año 1915, donde la esperanza de vida se reduce para alcanzar los 24.2 años. Durante ese periodo, de acuerdo a sus estimaciones, la mortalidad infantil supera las 200 muertes por cada mil nacidos vivos y a los 5 años de edad las cohortes iniciales se reducen en más del 35 %. También estima que la población se reducía a la mitad entre los 15 y los 20 años y a la cuarta parte entre los 45 y los 50 años. A los 65 años sólo llegaba entre el 10 % y el 15 %, a los 75 años el 5 % y a los 85 años alrededor del 1 %.

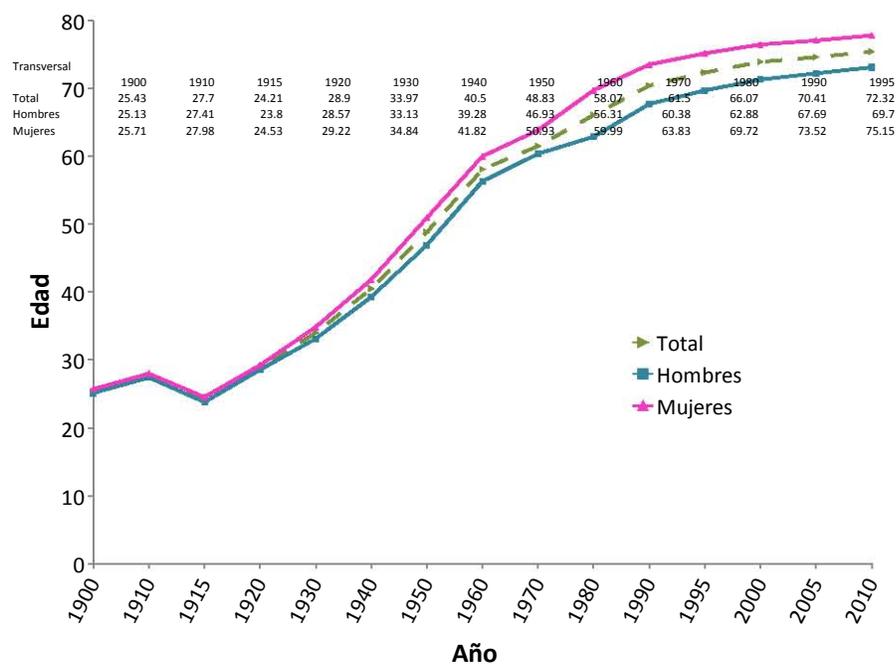
Es a raíz de la culminación de la Revolución Mexicana (1910-1921) que la mortalidad en nuestro país comienza a experimentar un descenso continuo, dando lugar a un prolongamiento de la sobrevivencia de la población. Es a partir de aquí donde comienza la segunda etapa, donde se observa una evidente disminución de la mortalidad, lo que derivó en que la esperanza de vida al nacimiento alcanzara los 33.1 años para hombres y 34.8 años para mujeres en 1930 y los 39.3 años para hombres y 41.8 años para mujeres en 1940, con lo que entre 1920 y 1940, el aumento anual de la esperanza de vida es de 0.6 años a nivel general. Camposortega (1997, pag. 11) relaciona la disminución de la mortalidad en este periodo con las modificaciones en el nivel de vida de la población, ya que durante dichos años se hacen evidentes los primeros efectos de la Revolución, por ejemplo, se inician los primeros programas de salud pública y es posible observar ligeras modificaciones en las condiciones sociales.

La disminución más notable de la mortalidad tuvo lugar entre 1940 y 1960 (periodo de tiempo considerado por Camposortega como la tercera etapa en su análisis). De acuerdo a Camposortega, la esperanza de vida al nacer alcanzada por los hombres en 1960 fue de 56.3 años, mientras que en las mujeres fue de 60 años. Esta aceleración es una de las más rápidas observadas a nivel mundial ya que, por ejemplo, los países europeos nunca lograron incrementos superiores a medio año y muy pocos países en vías de desarrollo han obtenido incrementos similares en periodos tan cortos (Camposortega, 1997, pag. 11). La disminución de la mortalidad durante este periodo se explica principalmente por la extensión de los

---

<sup>1</sup>Camposortega (1997) divide su análisis en uno transversal y otro longitudinal. Los datos usados para este trabajo fueron únicamente los basados en el análisis transversal. Aunque el análisis longitudinal que realiza tiene gran similitud con lo que se busca exponer en este trabajo, el método bajo el cual está realizado tiene demasiados supuestos, por lo cual no fue considerado.

servicios de salud, comenzando con la creación del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) en 1942 y, un año más tarde, la transformación del Departamento de Salubridad en la Secretaría de Salud (Partida, 2008, pag. 12).



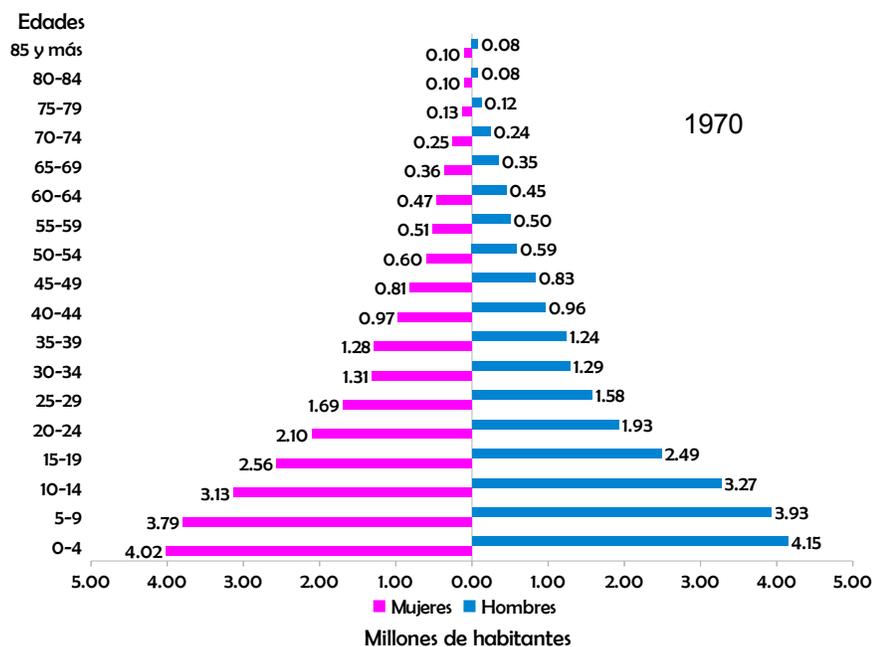
**Figura 1.1.** Esperanzas de vida al nacimiento del año 1900 al año 2010 para la población mexicana, por sexo y a nivel total. **Fuente:** De 1900 a 1980, Camposortega, (1997). De 1990 a 2005, Partida, (2008). Para 2010, INEGI

La cuarta y última de las etapas de acuerdo a Camposortega se da a partir del año 1960, año en el cual la disminución de la mortalidad se da más lenta. La desaceleración se encuentra asociada, por lo que toca a las causas de defunción, al incremento proporcional de las muertes por accidentes y violencia, enfermedades circulatorias y cáncer, y a la dificultad de vencer estas nuevas causas (Camposortega, 1997, pag. 11). De acuerdo a las proyecciones oficiales del CONAPO (Partida, 2008, pag. 67), la esperanza de vida se incrementó anualmente, en promedio, apenas cinco meses en el periodo comprendido entre 1960 y 1990.

Para años más recientes, la vida media de los mexicanos ascendió de 73.9 años en 2000 (71.3 para hombres y 76.5 para mujeres) a 74.6 años en 2005 (72.2 y 77.0 años respectivamente). El incremento anual de 0.15 años fue casi de la mitad de 0.29 años observado entre 1995 y 2000 (Partida, 2008, pag. 70). Finalmente, la esperanza de vida para el año 2010 fué de 75.4 (73.1 para hombres y 77.8 para mujeres), esto de acuerdo a datos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). En la Figura 1.1 se puede apreciar la evolución de la esperanza de vida a lo largo del siglo XX.

### 1.3. La estructura por edad de la población mexicana

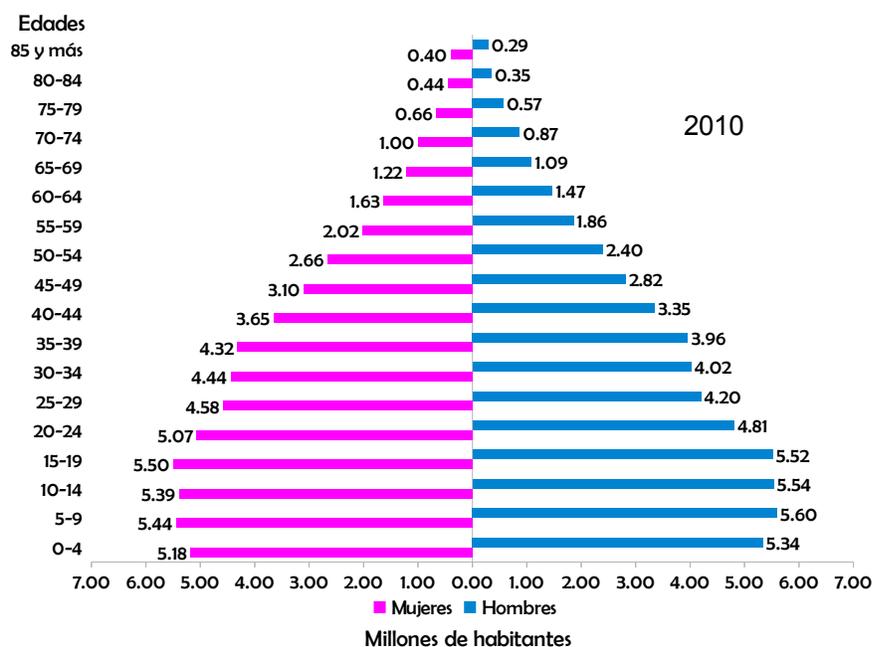
La evolución de la mortalidad vista en la Sección 1.2, sumada a la de la fecundidad y la migración, se refleja en cambios sustanciales en la estructura por edades de la población mexicana. En el año 1970 por ejemplo, la pirámide de población de México tenía la forma de un triángulo con una base muy amplia y una cúspide muy estrecha, donde las altas proporciones de población infantil y juvenil caracterizaban a la población mexicana. En el año 2010 se presenta una pirámide más abultada en el centro, y se puede observar un estrechamiento de la base, que corresponde a una disminución en la proporción de niños y un incremento relativo en la población joven y en edad laboral. En la Figura 1.2 se aprecia la pirámide poblacional mexicana del año 1970, mientras que en la Figura 1.3 la del 2010.



**Figura 1.2.** Pirámide de la población mexicana, año 1970. **Fuente:** INEGI

Actualmente, la dinámica demográfica en México está caracterizada por una fecundidad cercana o por debajo de los niveles de reemplazo y una esperanza de vida que continúa su ascenso, pero esta vez con mayores ganancias en las edades intermedias y avanzadas (Zúñiga y Enrique, 2008, pag. 94). En el transcurso de la primera mitad del siglo XXI, estas tendencias seguirán teniendo profundas repercusiones en la estructura por edad de la población y se manifestarán en un acelerado proceso de envejecimiento demográfico. En la medida que se reduzca la fecundidad, la base de la pirámide poblacional se reducirá cada vez más, por lo que la población infantil y juvenil tendrá un menor peso relativo y será menos numerosa. A su vez, un creciente número de individuos alcanzará los 65 años de edad, lo que engrosará gradualmente la cúspide de la pirámide poblacional.

Según datos del INEGI, (2011, pag. 6), en el año 2010 la población menor de 15 años



**Figura 1.3.** Pirámide de la población mexicana, año 2010. *Fuente:* INEGI

representaba el 29.3 por ciento del total, mientras que la que se encuentra en edad laboral (aquella de 15 a 64 años), constituía el 64.4 por ciento, y la población en edad avanzada representaba el 6.3 por ciento de los habitantes del país. En contraste, en el año 2000 la participación de estos grandes grupos de edad era 34.1, 60.9 y 5.0 por ciento, respectivamente. Esta transformación en la estructura por edad es muy importante, porque muestra que el país transita por una etapa donde el volumen de la población en edades laborales alcanza su mayor peso relativo con relación a las poblaciones en edades dependientes. La población mexicana continúa siendo predominantemente joven; sin embargo, tanto la disminución de la mortalidad como el descenso de la fecundidad han propiciado su envejecimiento paulatino. Ello explica que la edad mediana, es decir, la que divide a la población en dos partes iguales, en el año 2010 sea de 26 años, cuando en 2000 este indicador era de 22 y en 1990 de 19 años (INEGI, 2011, pag. 7).

La razón de dependencia es un cociente entre distintos grupos de edad de una misma población. Dicho cociente se realiza de la siguiente manera:

$$\text{Razón de dependencia} = 100 * \left( \frac{\text{Población de 0 a 14 años} + \text{Población de 65 años ó más}}{\text{Población de 15 a 64 años}} \right)$$

Esta razón ha disminuido, de 74 en 1990 a 55 por cada 100 personas en edades productivas en 2010. En la Tabla 1.1 se observa la evolución de dicho cociente, mostrando el peso que tiene cada grupo de edad en él. Al analizar por separado la dependencia infantil y la de la

vejez se observa que la primera sigue disminuyendo, pero el crecimiento de la población de adultos mayores ha hecho que la razón de dependencia de este grupo se incremente, al pasar de 7 en 1990 a 10 por cada 100 personas entre 15 y 64 años de edad en 2010, mientras que de acuerdo a las proyecciones oficiales de población del CONAPO, (Partida, 2008), la razón de dependencia de los adultos mayores será del de 17.6 por ciento en el año 2030 y del 34.3 por ciento en 2050, lo que indica un incremento sustancial de dicha razón, en particular en el segundo cuarto del siglo XXI, logrando incluso revertir la tendencia decendiente de la razón de dependencia total.

	1990	2000	2010	2030	2050
Infantil	67	56	45	30.9	27.2
Vejez	7	8	10	17.6	34.3
Total	74	64	55	48.4	61.5

**Tabla 1.1.** Razones de dependencia de la población mexicana. **Fuente:** Elaboración propia con base en información del INEGI, (2011, pag. 7) para los años 1990, 2000 y 2010, y de las proyecciones del CONAPO (Partida, 2008) para los años 2030 y 2050

Zúñiga y Enrique (2008) comentan que el proceso de envejecimiento demográfico no es exclusivo de México, sino que se extiende a todas aquellas sociedades que se encuentran en fases avanzadas del proceso de transición demográfica, incluyendo a todos los países desarrollados y a la mayoría de las naciones de América Latina y el Caribe. De acuerdo con las proyecciones elaboradas por la ONU (Population Division, 2011), la proporción de población con 65 años o más en América Latina y el Caribe pasará de 8.22 por ciento en el año 2010 a 14.34 por ciento en 2030 y a 23.33 en 2050. En números absolutos, se proyecta que el monto de la población de adultos mayores también se incrementará en forma sustancial, particularmente a partir del segundo cuarto de siglo. Para el año 2010 se estimó que existían 49.2 millones de personas con 65 años o más; a éstas se sumarán 54 millones entre los años 2010 y 2030, y 81.7 millones entre 2030 y 2050, para llegar a un total de 184.9 millones hacia mediados de siglo. Esta cifra es 3.76 veces mayor a la estimada en 2010.

El proceso de envejecimiento que experimentarán las sociedades latinoamericanas durante las próximas décadas será muy similar al que experimentaron los países desarrollados durante el transcurso del siglo pasado. Sin embargo, ocurrirá en un periodo de tiempo mucho menor. Si se considera como indicador del proceso de envejecimiento el número de años que transcurre para que el porcentaje de la población de 65 años o más aumente de siete a catorce por ciento, en los países desarrollados este incremento llevó entre 45 y más de 100 años, mientras que en el caso de la mayoría de los países latinoamericanos se estima que llevará entre 20 y 30 años (Zúñiga y Enrique, 2008, pag. 95).

En síntesis, durante las próximas décadas México experimentará un acelerado proceso de envejecimiento demográfico, el cual ocurrirá en un lapso bastante menor al observado en países desarrollados y en un contexto socioeconómico menos favorable. Esto significa que se tendrá menos tiempo y se dispondrá de menores recursos para adaptarse a las consecuencias sociales del envejecimiento de la población, por lo que debemos anticiparnos a ellas e instru-

mentar desde hoy estrategias y programas que nos permitan afrontar con éxito los desafíos por venir.

### 1.3.1. Desafíos del envejecimiento demográfico

Podría suponerse que el comportamiento demográfico en México ha cambiado a favor de la sociedad, al mostrar un descenso en los niveles de la mortalidad y de la fecundidad, sin embargo, los cambios demográficos y sus consecuencias en la estructura de la población han determinado nuevos y complejos desafíos. Entre ellos se encuentra una mayor demanda de servicios de salud, ya que para los adultos mayores se presentan mayores tasas de morbilidad y necesidades de atención médica que el resto de la población. Esto implicará una mayor inversión en infraestructura y personal para brindar una mejor atención, así como la instrumentación de mecanismos institucionales que amplíen el acceso a servicios de salud de calidad a los segmentos de la sociedad que hoy no cuentan con ellos.

Otro de los retos al que habrá de enfrentarse la sociedad mexicana es el de proveer los recursos económicos para que el creciente contingente de adultos mayores pueda gozar de una vida digna. Este problema tiene varias aristas. En primer lugar, el envejecimiento de la población generará importantes presiones sobre algunos de los esquemas de pensiones ya existentes, por lo que será necesario impulsar reformas que permitan recobrar la viabilidad actuarial de estos sistemas, ya que la solvencia de estos depende en principal medida de las aportaciones que ejerce toda la población laboral, por lo que, al incrementarse la población de adultos mayores que dependan de la población en edad laboral, y al disminuir esta última, pudiera llegar el momento en el que se tendrían que tomar diversas medidas, tales como incrementar la aportación económica de la población en edad laboral para sustentar las pensiones por jubilación, recorrer las edades de jubilación con tal de reducir el tiempo que estas se estarían otorgando, o inclusive podría pensarse en una reducción de los montos de las mismas.

En segundo lugar, una importante proporción de trabajadores llegarán a las edades de retiro sin un ingreso asegurado, pues no tendrán derecho a una pensión debido a que pasaron la mayor parte de su vida en el sector informal; finalmente, si prevalecen las condiciones actuales, una fracción considerable de la población de adultos mayores permanecerá en el mercado laboral, lo cual puede incidir negativamente sobre la oferta de empleo y representa un problema en sí mismo, debido a que las personas en edades avanzadas que trabajan se encuentran por lo general en ocupaciones de baja calidad o desempeñando labores para las que ya no son aptos.

Hasta ahora, el aspecto sobre el envejecimiento que más ha Gráficoado en la agenda política es el de los sistemas de retiro y pensiones, todo ello en relación con las reformas a la seguridad social (Ham Chande, 1999, pag. 50), primero en el IMSS en el año de 1997 y posteriormente en el Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (ISSSTE) en el 2007, migrando de un sistema de primas medias escalonadas (pero que en la práctica se ha acercado a uno de reparto con beneficios definidos) a uno de capitalización plena

mediante cuentas individuales y de contribuciones definidas, esto a través de la creación de las Administradoras de Fondos para el Retiro (AFOREs). Sin embargo, a pesar de estos cambios, aún se debe de considerar para la carga pública los costos de las pensiones en curso de pago en los antiguos regimenes, así como los costos de la pensión mínima garantizada establecida en los actuales regimenes.

Este impacto está relacionado principalmente a dos causas, la primera tiene que ver con la estructura de la población, ya que al haber un mayor número de personas que lleguen a edades avanzadas (y por consiguiente mayor número de pensionados) con respecto al número de trabajadores en edades jóvenes, se produce un déficit fiscal, haciendo inviables los sistemas tradicionales de pensiones en el largo plazo; la segunda se deriva en que al ir en descenso los niveles de mortalidad, el gasto que se tiene que realizar por cada jubilado que este recibiendo una pensión se incrementa conforme la esperanza de vida aumenta al transcurrir el tiempo.

Supongamos que al día de hoy una persona de 60 años decide jubilarse y se le otorga una pensión mensual de 1,000 pesos y que su esperanza de vida restante calculada con la información que se cuenta actualmente en las estadísticas vitales y censos es de 15 años, esto quiere decir que se espera que se le paguen dichos 1,000 pesos de manera mensual a lo largo de 15 años. Sin embargo, dado que dicha esperanza de vida se calculó con información de un periodo de tiempo determinado, se puede ver como una esperanza de vida transversal, la cual no refleja el descenso que se espera tener en la mortalidad a futuro, lo que resulta en que dicho pago no se realice por 15 años, sino tal vez en 16 o 17 años. Lo ideal sería predecir el comportamiento de la mortalidad, con lo cual se reduciría la incertidumbre de cuanto tiempo de vida restante tiene aproximadamente dicha persona.

Es aquí donde cobra vital importancia el poder pronosticar de una manera adecuada el comportamiento futuro de la mortalidad. Un pronóstico adecuado de dicho comportamiento nos ayudará para poder elaborar, por un lado, proyecciones de población, mientras que por otro para elaborar tablas de mortalidad para cada año que se desee pronosticar, lo cual reflejará de una manera más precisa el comportamiento de las esperanzas de vida.

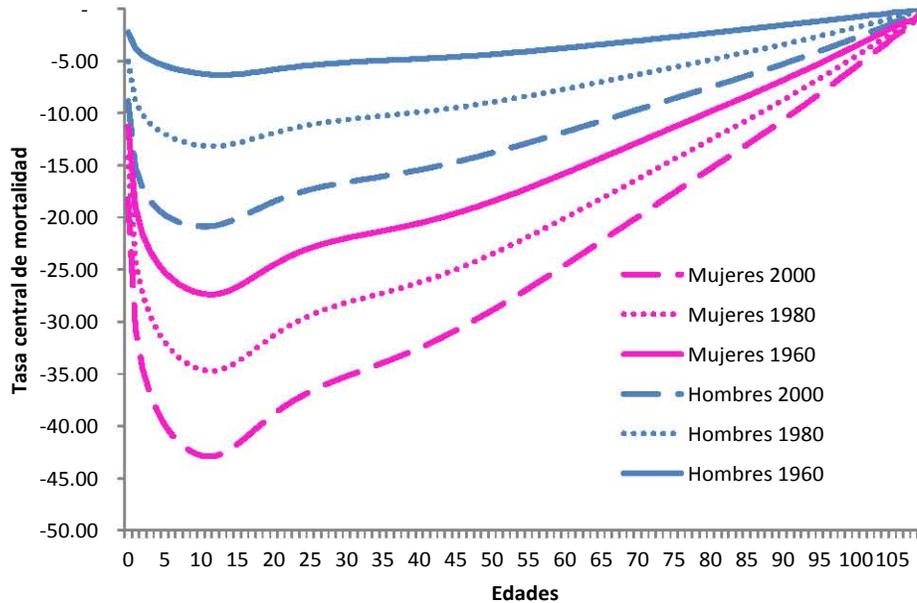
# Capítulo 2

## La tabla de mortalidad, su análisis y construcción

### 2.1. Mortalidad

La tabla de mortalidad constituye una herramienta matemática que resume la experiencia de mortalidad de una población, que muestra varias piezas de información acerca de la mortalidad de una cohorte (Preston, 2000, pag. 38). La mortalidad es un fenómeno demográfico que se caracteriza por ser inevitable, no repetible e irreversible. Es inevitable, porque todo individuo perteneciente a una generación lo experimentará, quedando únicamente por determinar el momento en que esta ocurra. Es no repetible, porque cada persona sólo lo puede experimentar una sola vez. Y es irreversible, porque supone un cambio de estado sin posibilidad de retorno al anterior. Estas tres características distinguen a la mortalidad de otros fenómenos demográficos, y determinan cualquier análisis que se lleve a cabo sobre ella, y puede ser definida como la acción que tiene la muerte sobre los integrantes de una población (Vélez *et al.*, 2005, pag. 36).

Algunos de los factores determinantes de la mortalidad son los biológicos y la estructura por edad de la población. Es común que las mujeres presenten una mortalidad menor que en los hombres (García, 2010, pag. 220), por lo que la población masculina tiende a ser biológicamente más débil que la femenina. Asimismo, la mortalidad de la raza humana es alta en los primeros momentos de la vida (por lo general durante el primer año de vida), después es relativamente baja durante la niñez, posteriormente aumenta lentamente a partir de los 20 años hasta alrededor de los 40 a 50 años, y finalmente incrementa para alcanzar niveles elevados en las últimas edades. En la Figura 2.1 se muestra un ejemplo de esto.



**Figura 2.1.** Comparativo entre las tasas centrales de mortalidad de Hombres y Mujeres de los años 1960, 1980 y 2000 a escala logarítmica de acuerdo a los datos de la conciliación demográfica INEGI-CONAPO-COLMEX (2006). **Fuente:** Elaboración propia

## 2.2. La tabla de mortalidad

De acuerdo a Shryock y Siegel (1973, pag. 429) una tabla de mortalidad es una forma de combinar tasas de mortalidad de una población a diferentes edades dentro de un modelo estadístico simple. Dichas tablas (llamadas también tablas de vida) son diseñadas principalmente como una herramienta para medir la mortalidad, pero son empleadas por distintos especialistas en una variedad de maneras. Por ejemplo, son usadas por trabajadores del sector salud para realizar estudios sobre la mortalidad a causa de distintas enfermedades; los demógrafos las usan para realizar análisis sobre longevidad, fertilidad, migración, crecimiento de la población, así como también en la elaboración de proyecciones de poblaciones, mientras que diversos actuarios las utilizan, por un lado en el sector asegurador para el cálculo de las primas de seguros, mientras que por otro lado en el sector de las pensiones para el cálculo de las reservas necesarias para solventar los pasivos derivados de las mismas pensiones; entre otros.

Una tabla de mortalidad describe el proceso de extinción por defunciones de una cohorte hipotética o ficticia de un cierto número de nacimientos (denominado “radix de la tabla”) sometidos a las probabilidades de fallecimiento por edad (o grupos de edad) calculadas con base en las tasas centrales de mortalidad de la población real para la cual se busca la

construcción de la tabla. Las tablas pueden ser creadas para el total de una población o para un subgrupo específico, como lo son mujeres, hombres, diabéticos, fumadores, etc.; y entre sus aplicaciones se encuentran la medición de la mortalidad, el análisis de los sobrevivientes y el cálculo del tiempo promedio de vida restante (llamado también esperanza de vida) de un grupo determinado de individuos.

Las tablas de mortalidad, se pueden clasificar en dos tipos dependiendo de su “periodo de referencia” (Shryock y Siegel, 1973, pag. 429), es decir, del lapso de tiempo bajo el cual se tomó la información para su construcción:

- **Tabla de mortalidad transversal o de periodo:** Ese tipo de tabla basa su experiencia en un periodo determinado de tiempo, el cual puede ser uno, tres, cinco años, etc., de modo que se puede asumir que en ese periodo de tiempo la mortalidad se mantiene sin grandes variaciones entre cada periodo observado. Por tanto, este tipo de tabla representa la experiencia de mortalidad de una población en dicho periodo de tiempo y no representa necesariamente la experiencia de mortalidad de dicha población en un periodo de tiempo más avanzado, siendo básicamente una imagen de la mortalidad en cuyo periodo fue creada (*Ibid.*).
- **Tabla de mortalidad longitudinal o de cohorte:** Este tipo de tablas basan su experiencia en las tasas de mortalidad de una misma cohorte, es decir, aquellos individuos nacidos en el mismo año. Para su construcción, se tiene que observar la experiencia de mortalidad desde el instante en que nacen todos los individuos de dicha cohorte, hasta el fallecimiento del último. De toda la información recolectada se procede a la creación de una única tabla de mortalidad (*Ibid.*).

Cada uno de estos tipos tiene sus ventajas y desventajas. El primer tipo de tablas nos brinda cierta facilidad para su elaboración, ya que se hacen con información de cierto periodo de tiempo y sirven muy bien para un análisis de la mortalidad en dicho periodo. Sin embargo la información de dichas tablas no nos ayuda para analizar la evolución de la mortalidad a futuro, esto debido a que la mortalidad no es un fenómeno que se mantenga estable con el transcurrir del tiempo, y dichas tablas no son capaces de reflejar dicha evolución, es decir, solo nos sirven para cualquier análisis basadas en el periodo de tiempo bajo el cual fueron creadas, y no a futuro. El segundo tipo es creado para analizar el comportamiento de la mortalidad de cierta cohorte a lo largo del tiempo. Sin embargo su construcción representa el mayor de los desafíos, ya que se tendría que esperar una gran cantidad de años (alrededor de 100) hasta que fallezca el último miembro de la cohorte para concluir este estudio.

Una tabla de mortalidad cuenta con ciertas limitaciones, que son las mismas que presenta cualquier medida basada en censos de población y registros vitales, las cuales son:

- Los datos sobre las edades y los registros de mortalidad pueden ser incompletos o sesgados, lo que puede afectar de forma sensible el resultado de las tablas (por ejemplo, el subregistro en la mortalidad infantil puede conducir a errores en el cálculo de la esperanza de vida al nacer).

- La poca viabilidad que implica la construcción de una tabla para poblaciones pequeñas, donde el movimiento migratorio suele ser el de mayor peso en la estructura poblacional.

Para poder construir una tabla de mortalidad es necesario primero desarrollar una serie de probabilidades, cuya finalidad es la de estimar el tiempo que se espera una persona viva en promedio.

### 2.3. Funciones biométricas de una tabla de mortalidad

La tabla de mortalidad está compuesta por una serie de funciones, conocidas como “funciones biométricas”, las cuales se enuncian a continuación:

- **Función de sobrevivientes**  $l_x$ : Representa el número de personas de la generación inicial que llegaron con vida a la edad  $x$ . El valor de  $l_0$  representa nuestro *radix* o el tamaño de la cohorte inicial ficticia, y se conoce como el “radix de la tabla”. Es común que a dicho “radix” se le asocien valores del orden de 10, 000 o 100, 000. En la Figura 2.2 se muestra una representación gráfica de esta función, donde  $l_x$  es la curva decreciente en función a la edad.
- **Función de defunciones**  ${}_n d_x$ : Representa el número de defunciones ocurridas entre las edades  $x$  y  $x+n$ , las cuales corresponden a la cohorte ficticia, por lo que se les llama “defunciones de la tabla”, las cuales no son las mismas que las defunciones observadas en la población real. La relación entre  $l_x$  y  $d_x$ , es la siguiente:

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n} \quad (2.1)$$

Es decir, el número de defunciones que se espera tener en la cohorte ficticia entre las edades  $x$  y  $x+n$  corresponde al total de personas que llegan con vida a la edad  $x$  menos el total de personas que llegan con vida a edad  $x+n$ . En la Figura 2.2 se puede observar con claridad este fenómeno, ejemplificado con la edad  $y$ .

- **Función de probabilidad de muerte**  ${}_n q_x$ : Representa la probabilidad de que una persona perteneciente a la cohorte ficticia fallezca entre las edades  $x$  y  $x+n$ . Esta es una función creciente que en el último grupo de edad alcanza su nivel máximo, el uno. Dado que  ${}_n q_x$  es una probabilidad, su cálculo es obtenido como el cociente entre los eventos probables (en este caso las defunciones) y la población total. Matemáticamente:

$${}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x} \quad (2.2)$$

Aplicando la igualdad de la función 2.1 en 2.2 tenemos:

$${}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \quad (2.3)$$

- **Función de probabilidad de supervivencia**  ${}_n p_x$ : Representa la probabilidad de que una persona de edad  $x$  perteneciente a la cohorte hipotética llegue con vida a la edad  $x + n$ . Esta función la podemos definir como:

$${}_n p_x = 1 - {}_n q_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (2.4)$$

- **Años persona vividos**  ${}_n L_x$ : Representa los años-persona vividos entre las edades exactas  $x$  y  $x + n$  por la cohorte de la tabla. El problema con esta función es determinar el aporte en tiempo vivido de las personas que mueren entre estas edades, pues seguir a la población en su periodo de exposición al riesgo es muy difícil (el aporte de las personas que no murieron será la longitud del grupo, es decir  $n$  años), por lo que se incluye una variable denominada como  ${}_n a_x$ , que representa el aporte de los años persona vividos en promedio por las personas que fallecen entre las edades  $x$  y  $x + n$ . De este modo podemos definir a  ${}_n L_x$  como:

$${}_n L_x = n l_{x+n} + {}_n a_x n d_x \quad (2.5)$$

Si suponemos que las defunciones se distribuyen de manera uniforme durante el intervalo de edades, es decir,  ${}_n a_x = n/2$ , entonces los años persona vividos son:

$${}_n L_x = \frac{n}{2}(l_x + l_{x+n}) \quad (2.6)$$

En la Figura 2.2 se ejemplifica esta función con la edad  $y$ , donde  ${}_n L_y$  no es más que el área bajo la curva definida por la función  $l_x$  y comprendida entre los puntos  $l_y$  y  $l_{y+n}$ .

- **Años persona vividos a partir de la edad  $x$ ,  $T_x$** . Su valor está dado por:

$$T_x = \sum_{y=x}^{w-x} {}_n L_y \quad (2.7)$$

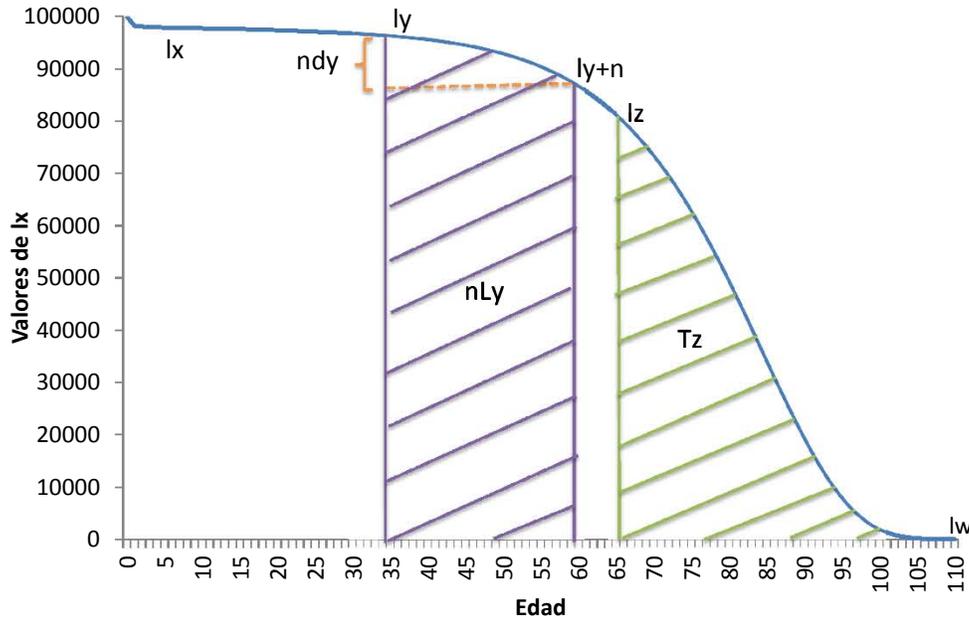
donde  $w$  es una edad extrema avanzada límite de la vida humana, es decir, aquella a la que nadie sobrevive ( $l_w = 0$ ). En la Figura 2.2 se ejemplifica esta función con la edad  $z$ , donde  $T_z$  no es más que el área bajo la curva definida por la función  $l_x$  y comprendida entre los puntos  $l_z$  y el último punto de la función,  $l_w$ .

- **Función de la esperanza de vida**  $\dot{e}_x$ : La esperanza de vida para una persona de edad  $x$ , corresponde al número de años que le restaría por vivir. Su valor se obtiene de la razón entre el número de años que le resta vivir a la generación completa a partir de la edad  $x$  entre el número de sobrevivientes a esta edad, es decir:

$$\dot{e}_x = \frac{T_x}{l_x} \quad (2.8)$$

Este es un excelente indicador de la mortalidad pues no está afectado por la estructura por edad de la población y es especial para comparar los niveles de mortalidad entre países o regiones.

A pesar de que ya se han enunciado a las funciones biométricas, es necesario también conocer su origen y planteamiento matemático, esto a través de probabilidades relacionadas con el tiempo de supervivencia.



**Figura 2.2.** Algunas funciones biométricas vistas de manera gráfica. **Fuente:** Elaboración propia

## 2.4. Probabilidades relacionadas con el tiempo de supervivencia

Sea  $T(x)$ <sup>1</sup> una variable aleatoria que denote el tiempo restante de vida que una persona de edad  $x$ . Por ejemplo, si al día de hoy, una persona tiene 30 años de edad, y se espera que fallezca a la edad de 80 años con seis meses, el valor de  $T(x)$  sería de 50 años con seis meses. Se puede observar que  $T(x) \in [0, w]$ , donde  $w$  representa el límite superior de supervivencia.

La función de distribución de  $T(x)$ ,  $F_{T(x)}(t)$  es:

$$F_{T(x)} = P(T(x) \leq t), \quad \forall t > 0 \quad (2.9)$$

es decir,  $F_{T(x)}$  es la probabilidad de que un individuo de edad  $x$  fallezca antes de alcanzar la edad  $x + t$ , es decir,  $F_{T(x)} = {}_t q_x$

<sup>1</sup>No confundir con la función biométrica  $T_x$ , ya que, aunque la notación es semejante, denotan conceptos distintos

El complemento de  ${}_tq_x$  se representa por  ${}_tp_x$ , es decir:

$${}_tp_x = P(T(x) > t) = 1 - P(T(x) \leq t) = 1 - {}_tq_x$$

como ya lo hemos visto, dicha probabilidad la podemos interpretar como la probabilidad de que una persona de edad  $x$  fallezca después de alcanzar la edad  $x+t$ , o visto de otra manera, la probabilidad de que una persona de edad  $x$  llegue con vida a la edad  $x+t$ .

Para poder encontrar las demás funciones biométricas, es necesario primero introducir el concepto de fuerza de mortalidad, la cual se interpreta como la probabilidad de que un individuo de edad  $x$  fallezca al tiempo  $t$ , habiendo ya sobrevivido hasta dicho tiempo  $t$ . Es decir, denotando a la fuerza de mortalidad como  $\mu_{x+t}$ , entonces

$$\mu_{x+t} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T(x) < t+z | T(x) \geq t)}{z}$$

Usando la función de distribución de  $T(x)$ ,  $F_{T(x)}$  y la definición de probabilidad condicional<sup>2</sup> obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{P(\{t \leq T(x) < t+z\} \cap \{T(x) \geq t\})}{P(T(x) \geq t)z} \\ \mu_{x+t} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T(x) < t+z)}{(1 - P(T(x) < t))z} \\ \mu_{x+t} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{F_{T(x)}(t+z) - F_{T(x)}(t)}{(1 - F_{T(x)}(t))z}, \end{aligned}$$

de donde podemos observar que  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{F_{T(x)}(t+z) - F_{T(x)}(t)}{z}$  es la definición de la derivada de  $F_{T(x)}(t)$  con respecto a  $t$ , la cual por definición es la función de densidad de  $T(x)$ ,  $f_{T(x)}(t)$ , por lo que se tiene que:

$$\mu_{x+t} = \frac{f_{T(x)}(t)}{1 - F_{T(x)}(t)} \Rightarrow f_{T(x)}(t) = (1 - F_{T(x)}(t))\mu_{x+t}$$

y recordando que  $1 - F_{T(x)}(t) = {}_tp_x$  tenemos finalmente que:

$$f_{T(x)}(t) = {}_tp_x \mu_{x+t} \quad (2.10)$$

Con esto, podemos definir la esperanza de vida completa,  $\dot{e}_x$ , como:

$$\dot{e}_x = E[T(x)] = \int_0^w t f_{T(x)}(t) dt = \int_0^w t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \quad (2.11)$$

<sup>2</sup>Dados los eventos  $A$  y  $B$ , con  $P(B) > 0$ , la probabilidad condicional de  $A$  dado  $B$  está definida como  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$

Recordemos que  $f_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt} {}_tq_x$ , y de igual manera podemos observar que:

$$\frac{d}{dt} {}_tq_x = \frac{d}{dt} (1 - {}_t p_x) = -\frac{d}{dt} ({}_t p_x)$$

Con esto, y haciendo uso de la relación vista en (2.10) podemos integrar por partes<sup>3</sup> la integral resultante de (2.11), donde  $u = t$  y  $dv = -{}_t p_x$

$$\dot{e}_x = \int_0^w {}_t p_x \mu_{x+t} dt = t(-{}_t p_x)|_0^w + \int_0^w {}_t p_x dt \quad (2.12)$$

Por definición de la edad  $w$ , tenemos que  ${}_w p_x = 0$ , por lo tanto, la ecuación (2.12) se reduce a:

$$\dot{e}_x = \int_0^w {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^w {}_t p_x dt \quad (2.13)$$

### 2.4.1. La relación entre las funciones biométricas y la función de supervivencia

Consideremos un grupo de recién nacidos  $l_0$ , por ejemplo,  $l_0 = 100,000$ . Adicionalmente denotemos como  $\mathfrak{L}(x)$  el número de sobrevivientes de dicho grupo de recién nacidos  $l_0$  a la edad  $x$ . Podemos enumerar a este grupo desde  $j = 1, 2, 3, \dots, l_0$ , donde podemos observar que:

$$\mathfrak{L}(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

donde  $I_j$  es un indicador para la supervivencia de la vida  $j$ , es decir,

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si la vida } j \text{ llega con vida a la edad } x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dado que  $E[l_j] = (1)P(l_j = 1) + (0)P(l_j = 0)$  y por la definición de  $l_j$  tenemos que<sup>4</sup>  $P(l_j = 1) = {}_x p_0$ , por lo tanto  $E[l_j] = {}_x p_0$ , de tal manera que,

$$E[\mathfrak{L}(x)] = E\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right] = \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j] = l_0 {}_x p_0$$

<sup>3</sup>La integral por partes está definida como  $\int_{-\infty}^{\infty} u dv = uv|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} v du$ , donde  $u$  y  $v$  son funciones, y  $du$  y  $dv$  sus respectivas derivadas

<sup>4</sup> ${}_x p_0$  denota la probabilidad de que una persona de edad 0 llegue con vida a la edad  $x$

Si denotamos a  $E[\mathfrak{L}(x)]$  como  $l_x$ , podemos definir a  $l_x$  como el número esperado de sobrevivientes a edad  $x$  de los recién nacidos  $l_0$

$$l_x = l_0 {}_x p_0 \quad (2.14)$$

De una manera similar, definamos  ${}_n \mathfrak{D}_x$  como el número de defunciones entre las edades  $x$  y  $x+n$  del grupo inicial de vivos  $l_0$ , y denotemos a  $E[{}_n \mathfrak{D}_x]$  por  ${}_n d_x$ . Dado que un recién nacido tiene probabilidad<sup>5</sup>  ${}_x p_0 - {}_{x+n} p_0$  de fallecer entre las edades  $x$  y  $x+n$ , podemos entonces, con un argumento similar a (2.14) expresar lo siguiente:

$$\begin{aligned} {}_n d_x &= E[{}_n \mathfrak{D}_x] = l_0({}_x p_0 - {}_{x+n} p_0) \\ &= l_x - l_{x+n} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Con estas bases podemos encontrar la relación que existe entre  $l_x$  y las probabilidades  ${}_t q_x$  y  ${}_t p_x$ , mencionadas anteriormente.

Recordemos que  ${}_t p_x = P(T(x) > t)$ , donde  $\{T(x) > t\}$  es un evento que nos indica que el tiempo restante de vida una persona de edad  $x$  será, al menos, de  $t$  años más. Esto es equivalente al evento  $\{T(0) > x + t | T(0) > x\}$ , es decir, el tiempo restante de vida de un recién nacido será, al menos, de  $x + t$  años, dado que su tiempo restante de vida es de al menos  $x$  años. De esta equivalencia de eventos tenemos que,

$${}_t p_x = P(T(0) > x + t | T(0) > x)$$

Usando la definición de probabilidad condicional se sigue que,

$${}_t p_x = \frac{P(\{T(0) > x + t\} \cap \{T(0) > x\})}{P(T(0) > x)}$$

Se puede observar que la intersección entre el evento  $\{T(0) > x + t\}$  y  $\{T(0) > x\}$  es igual al evento  $\{T(0) > x + t\}$ , por lo tanto,

$${}_t p_x = \frac{P(T(0) > x + t)}{P(T(0) > x)} \quad (2.16)$$

Dado que  $P(T(0) > x) = {}_x p_0$  y por (2.14) podemos obtener que  ${}_x p_0 = l_x/l_0$ , decimos entonces,

$$P(T(0) > x) = {}_x p_0 = \frac{l_x}{l_0} \quad (2.17)$$

---

<sup>5</sup>La probabilidad de que un individuo de edad  $x$  fallezca entre las edades  $x + s$  y  $x + s + t$  está dada por  $P(s \leq T(x) \leq s + t) = P(T(x) \leq s + t) - P(T(x) \leq s) = {}_{s+t} q_x - {}_s q_x = {}_s p_x - {}_{s+t} p_x$

De manera análoga a (2.17) se obtiene que  $P(T(0) > x + t) = {}_{x+t}p_0 = l_{x+t}/l_0$

Finalmente, sustituyendo estos valores en (2.16) obtenemos que,

$${}_t p_x = \frac{P(T(0) > x + t)}{P(T(0) > x)} = \frac{l_{x+t}/l_0}{l_x/l_0} = \frac{l_{x+t}}{l_x} \quad (2.18)$$

Con esto podemos demostrar que,

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{{}_t d_x}{l_x} \quad (2.19)$$

Finalmente, para encontrar el valor esperado de  $T(x)$  en términos de las demás funciones biométricas, definamos la variable aleatoria discreta,  $K(x)$  como  $K(x) = [T(x)]$ , que representa el número entero de años que restan de vida a una personas de edad  $x$ . Por ejemplo, si al día de hoy, una persona tiene 30 años de edad, y se espera que fallezca a la edad de 80 años con seis meses, el valor de  $K(x)$  sería de 50 años exactos. Su función de de densidad viene dada por:

$$P(K(x) = k) = P(k \leq T(x) < k + 1) = {}_k p_x q_{x+k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

y su valor esperado, conocido como la esperanza abreviada de vida,  $e_x$ , es:

$$e_x = \sum_{k=0}^{w-x} k P(K = x) = \sum_{k=0}^{w-x} k {}_k p_x q_{x+k},$$

donde  $w$  es la edad máxima alcanzada. Finalmente, y de manera análoga a (2.13) se tiene que,

$$e_x = \sum_{k=0}^{w-x} k {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=1}^{w-x} k p_x \quad (2.20)$$

La demostración completa de esta igualdad se puede encontrar en los anexos de este trabajo.

Ahora, sea  $S(x)$  una variable aleatoria definida como  $S(x) = T(x) - K(x)$ . Esta variable,  $S(x)$ , denota el tiempo adicional de vida de una persona respecto al último año de vida entero vivido. Por ejemplo, si al día de hoy, una persona tiene 30 años de edad, y se espera que fallezca a la edad de 80 años con seis meses, el valor de  $S(x)$  sería de 6 meses, o en términos de años,  $1/2$ .  $S(x)$  es continua y toma valores en  $[0, 1]$ . Si suponemos que  $S(x)$  se distribuye de manera *uniforme*<sup>6</sup> podemos aproximar el valor esperado de  $T(x)$  de la siguiente manera:

<sup>6</sup> Si  $S(x) \sim \mathbf{U}(0, 1)$  entonces  $E[S(x)] = 1/2$

$$\begin{aligned}
S(x) = T(x) - K(x) &\Rightarrow T(x) = S(x) + K(x) \Rightarrow \\
E[T(x)] = E[S(x) + K(x)] &= \frac{1}{2} + e_x \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Aplicando el resultado de la función (2.20) en 2.21 obtenemos que:

$$\dot{e}_x = E[T(x)] = \frac{1}{2} + e_x = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{w-x} {}_k p_x \quad (2.22)$$

Usando la igualdad de 2.16 en 2.22 finalmente obtenemos

$$\dot{e}_x = E[T(x)] = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{w-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \quad (2.23)$$

Este resultado final podría parecer que difiere del visto en (2.8), sin embargo ambas maneras de calcular la esperanza de vida son equivalentes (dicha equivalencia se demuestra en los anexos de este trabajo).

### 2.4.2. Modelos que proponen una distribución probabilística para modelar la variable $T(x)$

La modelización de  $T(x)$  a partir de una función de distribución explícita,  $F_{T(x)}(t)$ , tiene la ventaja de permitir su estimación mediante un reducido número de parámetros, una ventaja que resulta nada despreciable cuando se dispone de pocos datos. A lo largo del tiempo diversos autores han propuesto modelos para el comportamiento probabilístico de  $T(x)$ , desde modelos bastante sencillos hasta modelos de gran complejidad con un gran número de parámetros a estimar. A continuación se expone a grandes rasgos la evolución de dichos modelos:

**Modelo de Moivre:** De Moivre (1725) desarrolló un modelo que describe de forma muy simplificada el fenómeno de la mortalidad. La hipótesis en la que se basa es el considerar la función de supervivencia como una progresión aritmética decreciente, así como la existencia de una edad  $w$  máxima. De Moivre (1725) especifica a la fuerza de mortalidad como una función siempre creciente respecto a la edad, lo que restringe su utilidad a los tramos altos de esta.

$$\mu_x = \frac{1}{\frac{a}{b} - x}; \quad 0 \leq x < w, \quad a, b > 0$$

**Modelo de Gompertz:** Gompertz (1825) describe a la fuerza de mortalidad como una función de 2 parámetros, la cual crece exponencialmente con la edad, con la ventaja de que no requiere la hipótesis de la edad máxima  $w$ .

$$\mu_x = Bc^x, \quad B > 0, \quad c > 1, \quad x \geq 0$$

La conclusión importante de Gompertz fue que la fuerza de la mortalidad incrementaba a razón de una progresión geométrica con la edad. Esta ley ha demostrado ser un buen modelo en diferentes poblaciones y en diferentes épocas, y muchas leyes posteriores son modificaciones de la misma (Forfar, 2006, pag. 1). A este modelo se le conoce como *la primera ley de Gompertz*

**Modelo de Makeham:** Makeham (1859) describe a la fuerza de mortalidad como una función con dos componentes: uno fijo para cualquier edad  $A$  y otro que crece exponencialmente con la edad  $Bc^x$ . Su modelo es una extensión de la primera ley de Gompertz, donde se está incluyendo un término independiente de la edad ( $A$ ), que representa a las muertes ajenas a la vejez, como por ejemplo, las ocurridas por accidentes.

$$\mu_x = A + Bc^x, \quad B > 0, \quad c > 1, \quad x \geq 0$$

**Modelo de Thiele:** Thiele (1871) propuso una modificación del modelo propuesto por Makeham (1859), donde sugiere una fórmula de siete parámetros que abarca el tramo completo de vida.

$$\mu_x = A \exp(-Bx) + C \exp(-D(x - E)^2) + FG^x$$

Cada término representa un rasgo de la mortalidad humana. El primer término representa la mortalidad infantil, la cual va disminuyendo abruptamente después del nacimiento, el segundo término representa la “joroba de accidentes”, y el tercer término es la primera ley de Gompertz, apropiada para edades avanzadas.

**Modelo de Perks:** Perks (1932), desarrolló un modelo el cual no recibió tanta atención en Norteamérica como los modelos de Gompertz (1825) y Makeham (1859). En su modelo, la fuerza de mortalidad está dada por una función de cuatro parámetros, la cual es conocida como la curva logística (Forfar, 2006, pag. 2) ya que, a medida que el valor de  $x$  incrementa, dicha función tiende asintóticamente a una constante.

$$\mu_x = \frac{A + Bc^x}{1 + Dc^x}$$

Perks (1932) también propuso una fórmula de 5 parámetros

$$\mu_x = \frac{A + Bc^x}{Kc^{-x} + 1 + Dc^x}$$

El efecto de los denominadores es “aplanar” el incremento exponencial del término de Gompertz en el numerador, perceptible para edades superiores a los 80 años, que es ahora una característica bien establecida de la mortalidad (Forfar, 2006).

**Modelo de Heligman y Pollard:** Heligman y Pollard (1980) proponen un nuevo modelo aplicado por primera vez a datos de la población australiana de posguerra (1946-48, 1960-62, 1970-72). Se trata de una mejora del modelo de Thiele (1871), el cual contiene tres componentes diseñado para ajustar el rango completo de edades humanas.

El modelo original de Heligman y Pollard (1980) consta de ocho parámetros para  $q_x$ , cuya expresión básica:

$$q_x = \frac{f(x)}{1 + f(x)}$$

donde:

$$f(x) = A^{(x+B)^c} + D \exp(-E(\ln(x) - \ln(F))^2 + GH^x)$$

La expresión del modelo describe a la probabilidad de fallecimiento como una función con tres componentes aditivos:

- El primero es una exponencial con decrecimiento rápido que refleja la caída de la mortalidad en los años de infancia. El parámetro  $A$ , que es casi igual a la tasa  $q_1$ , refleja el nivel de la mortalidad infantil, el parámetro  $C$  representa la tasa de caída de la mortalidad en la infancia, y  $B$  es un parámetro de localización.
- El segundo término es una función similar a la lognormal y representa la curva debido a accidentes, es decir, la mortalidad adicional superpuesta a la curva natural de mortalidad, originada principalmente por accidentes de tráfico en edades comprendidas entre los 15 y los 40 años. El parámetro  $F$  indica la localización,  $E$  representa la dispersión y  $D$  la severidad de la joroba de accidentes.
- El tercer término se deriva del modelo de Gompertz (1825), que representa el incremento geométrico de la mortalidad en las edades adultas y seniles. El parámetro  $G$  representa el nivel base de esta mortalidad y el parámetro  $H$  la tasa de incremento.

Una descripción más detallada y un listado más exhaustivo de las leyes de mortalidad puede encontrarse en Forfar (2006).

## 2.5. Construcción de una tabla de mortalidad

Como se mencionó en la Sección 2.4, la base para la construcción de una tabla de mortalidad es el cálculo de las funciones biométricas y basta con calcular una sólo para poder encontrar las demás puesto que todas están relacionadas entre sí. Comúnmente la función biométrica a calcular de manera inicial es  ${}_nq_x$ , debido a la relación directa entre esta función y la tasa central de mortalidad.

La tasa central de mortalidad, también llamada tasa específica de mortalidad por edad, representa la frecuencia con que ocurren las defunciones en un determinado grupo de edad respecto al total de la población de ese grupo en un tiempo determinado, y se denota de la siguiente manera:

${}_nM_x[0, T]$  = Número de defunciones ocurridas en el rango de edades de  $x$  a  $x + n$  entre el tiempo 0 y  $T$  dividido entre el número de años persona vividos en el rango de edades de  $x$  a  $x + n$  entre el tiempo 0 y  $T$ .

Para efectos prácticos y con la información de datos obtenidos en censos, conteos de población y estadísticas vitales no existe gran dificultad en poder obtener la número de defunciones ocurridas en un grupo de ciertas edades; sin embargo, la situación es distinta con el número de años personas vividos, por lo que se opta tomar a la población a mitad del periodo (es decir, la población al tiempo  $T/2$ ) como un estimador. Para efectos de este trabajo se trabaja con información recolectada en periodos de tiempo anuales.

La tasa central de mortalidad está definida como:

$${}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} \quad (2.24)$$

donde:

${}_nd_x$  = número de defunciones de la cohorte poblacional ficticia entre las edades  $x$  y  $x + n$

${}_nL_x$  = número de años persona vividos de la cohorte ficticia entre las edades  $x$  y  $x + n$

El valor estrictamente matemático de  ${}_nL_x$  esta dado por:

$${}_nL_x = \int_x^{x+n} l_y dy \quad (2.25)$$

Esta igualdad tiene la siguiente explicación: supongamos que  $l_y$  es una función continua entre las edades exactas  $x$  y  $x + n$  y sea  $dy$  un pequeño periodo medido en años (quizás una milésima de segundo aún es *grande*). Al cabo de ese pequeño intervalo, cada uno de los sobrevivientes vive  $dy$  años y el conjunto vive un total de  $l_y dy$  años. Como una integral definida, en el sentido de Riemman, es la suma de la función sobre todos los infinitésimos de tiempo que cubre el rango de variación (de  $x$  a  $x + n$ ), entonces los años-persona vividos por la cohorte de la tabla son el lado derecho de (2.25).

Otra manera de analizar los años persona vividos es la siguiente:

$${}_nL_x = {}_nl_{x+n} + {}_na_{xn}d_x \quad (2.26)$$

donde  ${}_n a_x$  son los años-persona vividos entre las edades exactas  $x$  y  $x + n$  por las defunciones ocurridas en ese intervalo de edades. Su valor claramente está acotado entre 0 (todos los decesos tienen lugar a la edad exacta  $x$ ) y  $n$  (todos acontecen a la edad  $x + n$ )

Rescribiendo la ecuación y recordando que  $l_x - l_{x+n} = {}_n d_x$  tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} {}_n L_x &= n(l_x - {}_n d_x) + {}_n a_x {}_n d_x \Rightarrow \\ n l_x &= {}_n L_x + n {}_n d_x - {}_n a_x {}_n d_x \Rightarrow \\ l_x &= \frac{1}{n}({}_n L_x + (n - {}_n a_x) {}_n d_x) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ahora, recordando que  ${}_n q_x = {}_n d_x / l_x$  y sustituyendo el valor de  $l_x$  en 2.27 obtenemos que:

$${}_n q_x = \frac{n {}_n d_x}{({}_n L_x + (n - {}_n a_x) {}_n d_x)} \quad (2.28)$$

Multiplicando tanto el numerador como el denominador situados en el lado derecho de la igualdad (2.28) por  $1/{}_n L_x$  obtenemos que

$${}_n q_x = \frac{n {}_n d_x / {}_n L_x}{\frac{{}_n L_x}{{}_n L_x} + (n - {}_n a_x) \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}} = \frac{n {}_n m_x}{1 + (n - {}_n a_x) {}_n m_x} \quad (2.29)$$

La igualdad (2.29) fue obtenida por Greville (1943) y Chiang (1968) y nos dice que para una cohorte, la conversión de  ${}_n m_x$  a  ${}_n q_x$  depende únicamente del parámetro  ${}_n a_x$ , el número promedio de años persona vividos de aquellos que fallecieron en el intervalo.

Dado que hemos supuesto que los fallecimientos se distribuyen de manera uniforme en el intervalo (véase ecuación (2.6)), podemos esperar que las mismas sucedan en la mitad del intervalo, es decir, en  ${}_n a_x = n/2$ , por lo que la igualdad (2.28) se reduce a:

$${}_n q_x = \frac{n {}_n m_x}{1 + (n/2) {}_n m_x} = \frac{2n {}_n m_x}{2 + n {}_n m_x} \quad (2.30)$$

Finalmente recordemos que  ${}_n M_x$ , es decir, la tasa de mortalidad observada ( ${}_n D_x$ /Población media del intervalo) es un estimador de  ${}_n m_x = {}_n d_x / {}_n L_x$ .

Con las tasas observadas  ${}_n M_x$  y las fórmulas (2.24) y (2.30) se obtienen las probabilidades de fallecimiento y con ellas es posible elaborar la tabla de mortalidad, para la cual se fija arbitrariamente un valor para el r adix  $l_0$ , pudiendo ser uno, cien mil o un millón. Un ejemplo de una tabla de mortalidad puede apreciarse en forma y estructura en la Tabla 2.1, misma que se explica a continuación:

- Los elementos en la primera columna corresponden a la edad a la cual haga referencia cada renglón.

$x$	$P_x$	$D_x$	$m_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$\dot{e}_x$
0	1,149,148	20,729	0.01804	0.01788	100,000	1,788	76.03
1	1,123,539	1,652	0.00147	0.00147	98,212	144	76.4
2	1,107,779	894	0.00081	0.00081	98,068	79	75.52
3	1,106,845	625	0.00056	0.00056	97,989	55	74.58
4	1,107,125	489	0.00044	0.00044	97,934	43	73.62
5	1,105,143	408	0.00037	0.00037	97,890	36	72.65
6	1,104,467	358	0.00032	0.00032	97,854	32	71.68
7	1,104,174	326	0.0003	0.0003	97,822	29	70.7
8	1,102,272	304	0.00028	0.00028	97,794	27	69.72
9	1,096,990	292	0.00027	0.00027	97,767	26	68.74
10	1,088,445	288	0.00026	0.00026	97,741	26	67.76
11	1,079,969	292	0.00027	0.00027	97,715	26	66.78
12	1,071,970	305	0.00028	0.00028	97,688	28	65.79
13	1,062,172	326	0.00031	0.00031	97,661	30	64.81
14	1,050,631	354	0.00034	0.00034	97,631	33	63.83
15	1,039,973	386	0.00037	0.00037	97,598	36	62.85
16	1,030,021	420	0.00041	0.00041	97,561	40	61.88
17	1,018,370	452	0.00044	0.00044	97,522	43	60.9
18	1,004,885	480	0.00048	0.00048	97,478	47	59.93
19	989,652	503	0.00051	0.00051	97,432	50	58.96
20	974,232	523	0.00054	0.00054	97,382	52	57.99
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
100	1,787	666	0.37269	0.31415	1,920	603	2.29
101	1,189	489	0.41127	0.34112	1,317	449	2.1
102	749	339	0.4526	0.36908	868	320	1.93
103	430	215	0.5	0.4	547	219	1.77
104	245	135	0.55102	0.432	328	142	1.62
105	136	83	0.61029	0.46761	187	87	1.47
106	71	47	0.66197	0.49735	99	49	1.33
107	35	27	0.77143	0.5567	50	28	1.14
108	17	13	0.76471	0.55319	22	12	0.95
109	7	6	0.85714	0.6	10	10	0.5
110	0	0	0	1	0	0	0

**Tabla 2.1.** Extracto de la tabla de mortalidad femenina usando los datos de el año 2000 de la conciliación demográfica INEGI-CONAPO-COLMEX (2006). **Fuente:** Elaboración propia

- Los elementos en la segunda columna corresponden a la población femenina por edad a mitad del año 2000.
- Los elementos de la tercera columna corresponde a las defunciones femeninas por edad

ocurridas a lo largo del año 2000.

- La cuarta columna corresponde a la tasa de mortalidad  $m_x$ , la cual se estima como el cociente de las defunciones  $D_x$  y la población  $P_x$ . Por ejemplo, para la edad  $x = 10$ ,

$$m_{10} = \frac{D_{10}}{P_{10}} = \frac{288}{1,088,445} = 0.0002646$$

- La quinta columna corresponde a las  $q_x$ , la cual es la probabilidad de que una persona de edad  $x$  fallezca antes de alcanzar la edad  $x + 1$  y se calcula con base en  $m_x$ . Por ejemplo, para la edad  $x = 5$ ,

$$q_5 = \frac{2m_5}{2 + m_5} = \frac{2(0.0003691)}{2 + (0.0003691)} = 0.0003692$$

es decir, por cada 10,000 personas de 5 años, se espera que fallezcan aproximadamente 4 personas en un año.

- La sexta columna,  $l_x$ , es la cantidad de personas de la cohorte ficticia que llegan con vida a la edad  $x$ . Para poder construir esta columna, partimos de un número arbitrario para comenzar la tabla, (en este caso  $l_0 = 100,000$ ), a partir del cual se obtienen los demás valores. Por ejemplo, para la edad  $x = 1$ ,

$$l_1 = (1 - q_0)l_0 = (1 - 0.01787)100,000 = 98,212$$

lo que quiere decir que de 100,000 personas de edad “cero” (es decir, recién nacidos) se espera lleguen con vida a la edad de un año 98,212.

- La séptima columna son las defunciones por edad de nuestra cohorte ficticia. Por ejemplo, para la edad  $x = 20$ ,

$$d_{20} = l_{20} - l_{21} = 97,382 - 97,330 = 52$$

- La última columna es la esperanza de vida a la edad  $x$ , así que, para la edad  $x = 0$  (es decir, la esperanza de vida la nacer), tenemos

$$\dot{e}_0 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{110} \frac{l_k}{l_0} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{110} \frac{98,212 + 98,068 + 97,989 + \dots + 0}{100,000} = 76.03$$

Es decir, la esperanza de vida al nacimiento de la población femenina para México en el año 2000 es de 76.03 años.

Los siguientes postulados constituyen la base fundamental de las deducciones que nos han conducido a la construcción de la tabla de mortalidad (Debón, 2003, pag. 11), los cuales son:

- **Principio de Homogeneidad.** Todos los individuos del grupo son equivalentes en lo que se refiere a mortalidad, en el sentido de que tienen la misma función de distribución de probabilidad para la variable edad de muerte.
- **Principio de Independencia.** Los individuos que integran el grupo en cuestión se definen con variables estocásticamente independientes. Esto equivale a decir que el suceso de que un cierto individuo sobreviva o no a una determinada edad, tiene una probabilidad que no depende de la supervivencia de cualquier otro individuo del grupo.
- **Principio de Estacionariedad.** La probabilidad de un individuo de no sobrevivir a una edad concreta es independiente del año de su cálculo.

Si el estudio del fenómeno de la mortalidad toma como referencia únicamente a la edad, es porque se admite la hipótesis de estacionariedad del fenómeno. En consecuencia, si todas las consideraciones y formulaciones que se hacen vienen referidas a la edad, con exclusión de toda referencia al tiempo, construimos una tabla de mortalidad transversal o de periodo. Sin embargo, estas tablas cuentan con un gran detalle a considerar, ya que nacen con una fecha de caducidad implícita, esto debido a que con el transcurrir de los años, la mortalidad descende y la esperanza de vida aumenta. Es por ello que para un estudio completo de la mortalidad se debe considerar no sólo el factor de la edad, sino también el del tiempo.

# Capítulo 3

## Proyecciones de la mortalidad mexicana

### 3.1. El tiempo como factor en la mortalidad

El análisis de la tendencia futura de la mortalidad se requiere para un gran número de cálculos actuariales y aplicaciones, en particular para aquellos referentes a pensiones, anualidades de vida, y otros beneficios que dependen del tiempo de vida. Para evitar subestimaciones de los pasivos relevantes, las compañías de seguros o aquellas que se dedican a la elaboración de planes de pensiones deben de adoptar una apropiada estimación de la mortalidad a futuro, la cual deberá tomar en cuenta los sucesos más importantes de la tendencia de la mortalidad en el pasado.

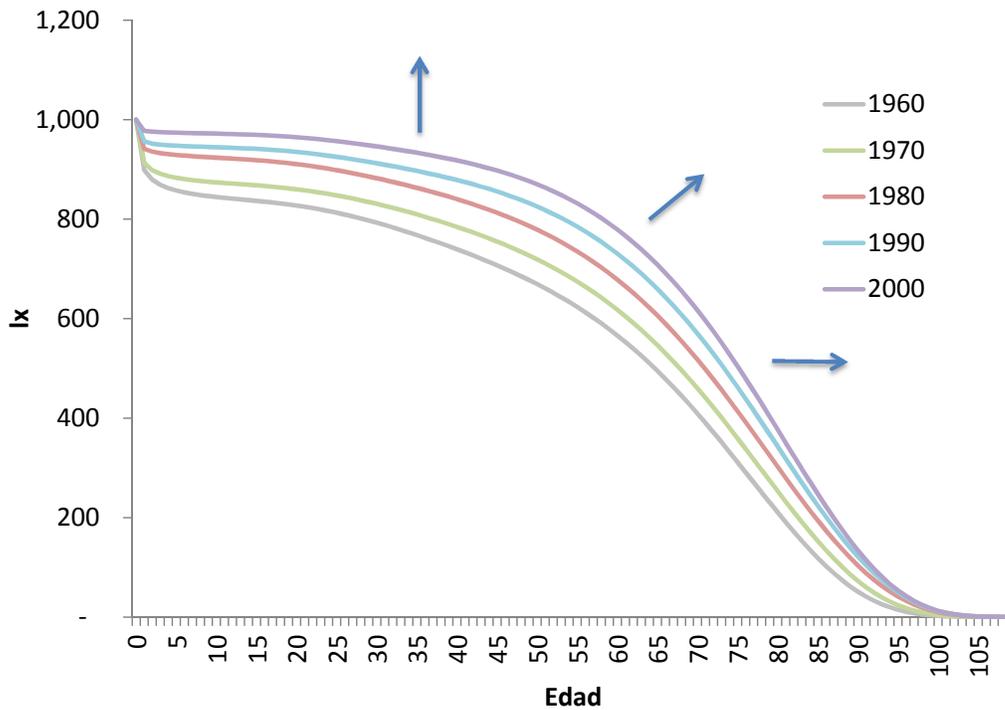
Los aspectos de la tendencia de la mortalidad pueden ser analizados al observar el comportamiento, a través del tiempo, de funciones representativas de la misma por grupos de edad. Por ejemplo, es cada vez más común observar en la gráfica que se obtiene al comparar la evolución de la función de supervivencia  $l_x$ , para alguna edad fija  $x$ , contra el tiempo  $t$  una tendencia de la misma hacia una forma “rectangular”<sup>1</sup>, esto debido a que la mortalidad con el paso del tiempo tiene a decrecer. En la Gráfica 3.1 podemos apreciar mejor este fenómeno.

Estas tendencias nos indican que para poder hacer estimaciones de la mortalidad, no podemos conformarnos con la información del momento, sino que tenemos que idear alguna manera de pronosticar su comportamiento a futuro, en función del tiempo. Cuando se está trabajando en un contexto dinámico, la idea básica es la de expresar la mortalidad como una función del tiempo calendario  $t$ , y no únicamente como función de la edad, de modo que se asume que la mortalidad es una función de 2 parámetros, la edad  $x$  y el tiempo calendario  $t$ . En términos matemáticos, un modelo dinámico de la mortalidad es una función  $f(x, t)$ .

Podemos asumir que tanto la edad específica, así como el tiempo calendario son enteros,

---

<sup>1</sup>Este fenómeno se conoce como *rectangularización* (Pitacco *et al.*, 2009, pag. 138).



**Figura 3.1.** Ejemplo de la “rectangularización” de la mortalidad, utilizando los datos de la población femenina de la Conciliación Demográfica INEGI-CONAPO-COLMEX (2006). **Fuente:** Elaboración propia.

por tanto,  $f(x, t)$  puede ser representado por una matriz, donde los renglones correspondan a las edades y las columnas al año calendario. En particular, sea  $f(x, t) = q_x(t)$ , donde  $q_x(t)$  denota la probabilidad de que un individuo de edad  $x$  en el año calendario  $t$  fallezca dentro de un año.

Edad \ Tiempo	...	$t - 1$	$t$	$t + 1$	...
0	...	$q_0(t - 1)$	$q_0(t)$	$q_0(t + 1)$	...
1	...	$q_1(t - 1)$	$q_1(t)$	$q_1(t + 1)$	...
...	...	...	...	...	...
$x$	...	$q_x(t - 1)$	$q_x(t)$	$q_x(t + 1)$	...
$x + 1$	...	$q_{x+1}(t - 1)$	$q_{x+1}(t)$	$q_{x+1}(t + 1)$	...
...	...	...	...	...	...
$w - 1$	...	$q_{w-1}(t - 1)$	$q_{w-1}(t)$	$q_{w-1}(t + 1)$	...

**Tabla 3.1.** Probabilidades de fallecimiento en un contexto dinámico. **Fuente:** Pitacco et al., (2009, pag. 140).

Los elementos de la matriz mostrados en la Tabla 3.1 pueden ser leídos de acuerdo a los

siguientes tres arreglos:

1. Un arreglo *vertical* (i.e. por columnas),

$$q_0(t), q_1(t), \dots, q_x(t), \dots$$

correspondiente a la secuencia de una tabla de mortalidad transversal, donde cada tabla hace referencia a un año calendario  $t$ . Bajo este arreglo, se tendrían diversas tablas de momento por cada año  $t$  del que se dispusiera información, y sería útil para analizar la mortalidad por cada año, con tal de tratar de identificar diferencias notorias entre uno y otro.

2. Un arreglo *horizontal* (i.e. por renglones),

$$\dots, q_x(t-1), q_x(t), q_x(t+1), \dots$$

mostrando las probabilidades de fallecimiento por edad, y mostrando la evolución de cada una de estas a lo largo del tiempo. Este tipo de arreglo nos sirve para analizar los cambios y la evolución de la mortalidad por edad, para, por ejemplo, tratar de encontrar algún patrón de tendencia de las mismas.

3. Un arreglo *diagonal*,

$$q_0(t), q_1(t+1), \dots, q_x(t+x), \dots$$

donde nos indica la evolución de una cohorte ficticia a lo largo del tiempo  $t$ , iniciando dicha cohorte en la edad  $y$  en el tiempo que deseemos ubicarnos. Este tipo de arreglo es al que más relevancia tiene en el presente trabajo, ya que es la manera en como se realizan las proyecciones de la población.

La presente sección tiene por objetivo elaborar una serie de probabilidades de fallecimiento para la población Mexicana por sexo, involucrando el factor tiempo en la elaboración de las mismas, de tal suerte que se obtenga un arreglo semejante al de la Tabla 3.1, utilizando el modelo Lee-Carter, el cual se encuentra basado en el trabajo de Gómez de León <sup>2</sup>. En su documento metodológico se desarrolló uno de los modelos que más impacto ha tenido en los últimos tiempos para la modelación y pronóstico de la mortalidad. Con este modelo, Lee y Carter pronostican las tasas centrales de mortalidad utilizando el análisis estadístico de series de tiempo.

## 3.2. El Modelo Lee-Carter

El modelo propuesto por Lee y Carter (1992), permite realizar proyecciones de las tasas futuras relacionadas a la mortalidad. Las características de dicho modelo es que es de carácter

---

<sup>2</sup>Gómez de León, J. (1990), "Empirical DEA Models to Fit and Project Time Series of Age-Specific Mortality Rates", no publicado, Central Bureau of Statistics, Noruega.

extrapolativo y no hace ningún esfuerzo en considerar información extra, como pudiesen ser factores sociales, de conducta o incluso médicos en los cambios de la mortalidad. Su virtud radica en que combina un modelo demográfico con métodos estadísticos de series de tiempo y está basado en la tendencia histórica observada durante el periodo de estudio en el que se encuentran los datos. También proporciona intervalos de confianza para las proyecciones derivadas de este modelo.

El modelo de Lee y Carter (llamado también modelo Lee-Carter) nos brinda tres cosas, un modelo para la mortalidad, una metodología para ajustar dicho modelo y un modelo de series de tiempo para pronosticar el parámetro llamado “índice de mortalidad”.

El modelo consiste en expresar la medida de mortalidad elegida como una función exponencial que depende de la edad y del tiempo. Para el presente trabajo, de igual manera a lo hecho por Lee y Carter (1992) se opta por modelar las tasas centrales de mortalidad  $m_{x,t}$ , aunque otros autores (Debón, 2003) han modelado la probabilidad de fallecimiento,  $q_{x,t}$  con resultados semejantes. Matemáticamente,

$$m_{x,t} = \exp(a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t})$$

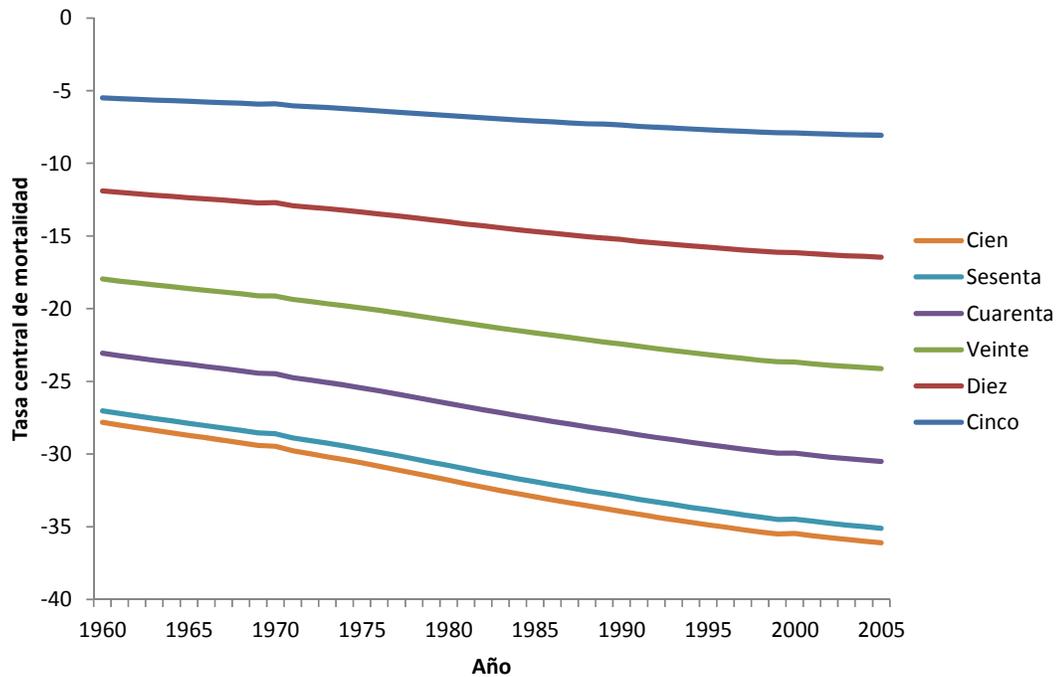
o de forma equivalente, usando los logaritmos de la tasa central de mortalidad,

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (3.1)$$

y la interpretación de los parámetros es la siguiente (Lee y Carter, 1992, pag. 600),

- $m_{x,t}$  es la tasa central de mortalidad de edad  $x$  en el tiempo  $t$ .
- $a_x$  son constantes de edades específicas los cuales describen el perfil general del esquema de mortalidad a lo largo de la edad.
- $b_x$  son constantes de edades específicas que nos indican de cómo responde la tasa  $m_{x,t}$  a cambios en  $k_t$ ,  $\left(\frac{d \ln(m_{x,t})}{dt} = b_x \frac{dk_t}{dt}\right)$ . Es decir, este parámetro nos indica la “intensidad”, a nivel de grupos de edad, con la que la tasa de mortalidad varía al transcurrir el tiempo  $t$  (cabe mencionar que los valores de  $b_x$  no varían con el tiempo).
- $k_t$  es conocida como el “índice de mortalidad”, y sus valores representan la tendencia de la mortalidad a lo largo del tiempo  $t$ .
- $\varepsilon_{x,t}$  son el conjunto de residuos u errores, los cuales reflejan influencias históricas que no son capturadas por el modelo.

Lo que este modelo nos quiere decir de manera muy concreta es que el logaritmo de las tasas centrales de mortalidad tienen un comportamiento lineal a través del tiempo, como puede apreciarse mejor en la Figura 3.2. Asimismo, conforme  $k_t \rightarrow \infty$ , cada  $m_{x,t} \rightarrow 0$ . Por lo tanto, no pueden ocurrir valores negativos en las tasas de mortalidad bajo este modelo.



**Figura 3.2.** Comparativo entre las tasas centrales de mortalidad de Mujeres en edades 5, 10, 20, 40, 60 y 100 años a escala logarítmica, utilizando los datos del año 2005 de la Conciliación Demográfica INEGI-CONAPO-COLMEX (2006). **Fuente:** Elaboración propia

La principal crítica al modelo Lee-Carter es que los parámetros  $a_x$  y  $b_x$  dependen únicamente de la edad, ya que la predicción de futuros valores de la mortalidad se basa sólo en el parámetro  $k_t$ , lo que supone admitir que no existe interacción entre la edad y el tiempo, mientras que su principal ventaja es la fácil interpretación de sus parámetros. El modelo goza actualmente de mucha popularidad debido a sus buenos resultados y a su simplicidad, por lo que hay una amplia literatura sobre su tratamiento y mejora.

### 3.2.1. Estimación de los parámetros

Una vez propuesto el modelo, el siguiente paso es encontrar un conjunto de valores para  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$  que se ajusten lo mejor posible a los logaritmos de la tasa central de mortalidad observada.

Lee y Carter (1992) recurren al método de mínimos cuadrados ordinarios (*OLS* por sus siglas en inglés) para encontrar los valores de los parámetros de la ecuación (3.1), específicamente, el conjunto de valores  $\hat{a}_x$ ,  $\hat{b}_x$ , y  $\hat{k}_t$  tales que minimicen la siguiente función,

$$\sum_x \sum_t (\ln(m_{x,t}) - a_x - b_x k_t)^2 \quad \forall x, t \quad (3.2)$$

Este modelo es indeterminado ya que, dada una solución particular  $(\check{a}, \check{b}, \check{k})$  son soluciones también  $(\check{a} - \check{b}c, \check{b}, \check{k} + c)$  y  $(\check{a}, \check{b}c, \check{k}/c)$ , donde  $c$  es una constante cualquiera, de modo que para establecer una solución única, se normalizan los parámetros  $b_x$  y  $k_t$ , es decir, hacer que  $\sum_x b_x = 1$  y  $\sum_t k_t = 0$ , lo cual indica que el parámetro  $a_x$  es el promedio a lo largo del tiempo de los  $\ln(m_{x,t})$ . Es decir,

$$\begin{aligned} \sum_x \sum_t \ln(m_{x,t}) &= \sum_x \sum_t (a_x + b_x k_t) \\ &= \sum_x \sum_t a_x + \sum_x \sum_t b_x k_t \\ &= \sum_x a_x \sum_t 1 + \sum_x b_x \sum_t k_t \end{aligned} \quad (3.3)$$

bajo la restricción mencionada,

$$\sum_t k_t = 0 \text{ y } \sum_x b_x = 1 \quad (3.4)$$

desaparece el segundo sumando de (3.3), y entonces,

$$\sum_x \sum_t \ln(m_{x,t}) = T \sum_x a_x \Rightarrow \sum_x a_x = \frac{\sum_x \sum_t \ln(m_{x,t})}{T}$$

donde  $T$  es el número total de valores que puede tomar el tiempo  $t$ . Si se propone  $a_x = \{\sum_t \ln(m_{x,t})\}/T$ , se cumple con la restricción.

El segundo sumando de (3.3) también podría ser cero si se considera  $\sum_x b_x = 0$ , por lo que habría algunas edades  $x$  donde dicho parámetro fuera negativo, indicando que la mortalidad a esas edades tiende a subir mientras cae para otras edades, sin embargo Lee y Carter (1992, pag. 660) mencionan que esto en la práctica no les ocurre a lo largo de un periodo largo de años. Por otra parte Wilmoth (1993, pag. 2) expone que es preferible hacer la suma del parámetro  $k_t$  cero pues esto facilita la comparación entre poblaciones.

El modelo (3.2) no puede ser ajustado por métodos de regresión habituales, pues a su derecha tiene una función cuyos parámetros no son observables. Por lo tanto se recurre al método de descomposición en valores singulares (*SVD* por sus siglas en inglés) aplicado a la matriz de los logaritmos de las tasas centrales de mortalidad menos los valores de las  $a_x$ . Matemáticamente se tiene que resolver el siguiente sistema:

$$\mathbf{M} - \mathbf{A} = \mathbf{b}\mathbf{k} \quad (3.5)$$

donde  $\mathbf{M}$  es una matriz de dimensión  $r \times n$  en la que cada elemento  $\mathbf{M}_{ij}$ , corresponde al logaritmo natural de la tasa de mortalidad para el grupo de edad  $i$  en el año  $j$ ,  $\mathbf{A}$  es una

matriz de tamaño  $r \times n$  en la que todos los elementos del renglón  $j$  son iguales y corresponden al término  $a_j$  en la ecuación (3.3), mientras que  $\mathbf{b}$  es un vector de dimensión  $r \times 1$  donde su elemento  $j$  corresponde al término  $b_j$  de la ecuación (3.3) y  $\mathbf{k}$  es un vector  $1 \times n$  donde su elemento  $j$  corresponde al término  $k_j$  de la ecuación (3.3).

Si llamamos a la matriz  $\mathbf{Z}$  como  $\mathbf{M} - \mathbf{A}$  podemos reescribir la ecuación (3.5) de la siguiente manera:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{b}\mathbf{k} \quad (3.6)$$

El método de *SVD* nos dice que cualquier matriz  $\mathbf{Z}$  de dimensiones  $r \times n$  puede ser factorizada como:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$$

Donde  $\mathbf{U}$  es una matriz ortogonal<sup>3</sup> de dimensiones  $r \times r$  cuyas columnas son los vectores propios de la matriz  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T$ ,  $\mathbf{V}$  es una matriz ortogonal de dimensiones  $n \times n$  cuyas columnas son los vectores propios de la matriz  $\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}$ , y  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal de dimensiones  $r \times n$  con  $m$  elementos distintos de cero, donde  $m < r, n$ . Los elementos de  $\mathbf{D}$ , denominados  $d_i$ , tienen la propiedad de que  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_m > 0$  y  $m = \text{rango}(\mathbf{Z})$ . Propiamente,  $d_1, \dots, d_m$  son las raíces cuadradas de los eigenvalores de  $\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}$ . Ellos son llamados los valores singulares de  $\mathbf{Z}$ .

Lo que proponen Lee y Carter es considerar que el parámetro  $b_x$  sea estimado como el primer vector propio de  $\mathbf{U}$  y  $k_t$  sea determinado por la primera componente principal considerando el primer vector propio de  $\mathbf{V}$  determinado por el máximo eigenvalor  $d_1$ . Desarrollando  $\mathbf{Z} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$  obtenemos que:

$$Z_{hj} = \sum_{i=1}^m U_{hi}d_{ii}V_{ji}$$

La descomposición produce la suma de  $m$  términos cuyo resultado ajusta exactamente el elemento  $Z_{hj}$ , de la matriz  $\mathbf{Z}$ . Sin embargo, los términos sucesivos de dicha suma tendrán menor valor absoluto (debido a las propiedades de las matrices  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$ ) por lo que, si la mayoría de los elementos en la diagonal de  $\mathbf{D}$  son iguales o cercanos a cero, se puede lograr una buena aproximación de cada elemento de la matriz  $\mathbf{Z}$  considerando únicamente los primeros términos de la suma resultante. A medida que se incrementa el número de términos usados, el grado de precisión en el ajuste mejorará sólo marginalmente.

En particular, el primer término  $U_{h1}d_{11}V_{j1}$  constituye la mejor aproximación de una dimensión para cada elemento  $(h, j)$ . Por lo cual, en este paso se debe buscar el menor número de términos que den una aproximación razonable a la matriz  $\mathbf{Z}$ . Sin embargo, si bien un mayor número de términos proporcionan un mejor ajuste a los datos, puede que no exista una razón adicional en el modelo para incluirlos, como señalan Lee y Carter (1992).

De este modo, decimos que:

$$Z_{hj} = U_{h1}d_{11}V_{j1} + \sum_{i=2}^m U_{hi}d_{ii}V_{ji},$$

<sup>3</sup>Una matriz ortogonal  $\mathbf{U}$  cumple que  $\mathbf{U}\mathbf{U}' = \mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{I}$  y que  $\mathbf{U}'$  es la matriz transpuesta de  $\mathbf{U}$ .

y de la ecuación (3.6) tenemos que  $Z_{hj} = b_h k_j + \varepsilon_{hj}$ , entonces:

$$b_h k_j + \varepsilon_{hj} = U_{h1} d_{11} V_{j1} + \sum_{i=2}^m U_{hi} d_{ii} V_{ji}, \quad (3.7)$$

considerando para la aproximación únicamente el primer término de la ecuación (3.7) tenemos que:

$$b_h k_j = U_{h1} d_{11} V_{j1}$$

$$\varepsilon_{hj} = \sum_{i=2}^m U_{hi} d_{ii} V_{ji},$$

específicamente,  $b_h = U_{h1}$  y  $k_j = d_{11} V_{j1}$ , es decir,

$$\hat{b}_x = (U_{11}, U_{21}, U_{31}, \dots, U_{r1})$$

$$\hat{k}_t = (V_{11}, V_{21}, V_{31}, \dots, V_{n1})$$

con lo que se obtiene la primera aproximación de los parámetros de la ecuación (3.1).

### 3.2.2. Ajustes al modelo

A raíz de la postulación del modelo Lee-Carter, varios autores han descrito diversos métodos para la estimación de los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$ , por lo que en esta sección nos enfocaremos en los métodos más representativos.

Los mismos Lee y Carter (2000, pag. 661) mencionan que las tasas centrales de mortalidad estimadas originalmente por el método de SVD, no conducen necesariamente al número real de muertes para el total de edades, puesto que  $k_t$  ha sido estimada minimizando los errores en los logaritmos de las tasas centrales de mortalidad y no en las mismas tasas centrales de mortalidad, por lo que proponen un segundo ajuste al parámetro  $k_t$  con tal de poder reproducir el número de fallecimientos totales para el año  $t$ , sin embargo, debido a ciertas dificultades que implicaría el implementar este nuevo ajuste con la información que contaban en aquel momento para las edades más avanzadas, decidieron no aplicarlo. Es finalmente Lee (2000, pag. 82) quién retoma este ajuste, para lo cual propone utilizar la siguiente ecuación:

$$D_t = \sum_x N_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t) \quad \forall x \quad (3.8)$$

donde  $D_t$  es el número total de fallecimientos en el año  $t$  y  $N_{x,t}$  es la población expuesta al riesgo de morir (población a mitad de año) a cada edad  $x$  en el año  $t$ , para realizar una segunda estimación del parámetro  $k_t$ , sustituyendo los  $a_x$  por la estimación original de los mismos y los  $b_x$  por la estimación obtenida mediante *SVD*. Estos valores de  $k_t$  se encuentran mediante una búsqueda iterativa y difieren de las estimaciones directas mediante *SVD*.

Lee y Miller (2001) propusieron otra alternativa, la cual consiste en hacer la segunda estimación del parámetro  $k_t$  respecto a la esperanza de vida al nacimiento, en lugar de ajustar

respecto al total de defunciones. De igual manera, propusieron modificar el año a partir del cual se tomarían los datos para ajustar el modelo, ya que observaron que el comportamiento de las tasas centrales de mortalidad no era constante a lo largo de todo los años.

Booth *et al.* (2002) proponen nuevas alternativas al método original de Lee y Carter, entre las que destacan la implementación de un método para identificar el periodo de datos más apropiado para aplicar el modelo Lee-Carter, tomando como base la hipótesis de linealidad del parámetro  $k_t$ . Asimismo, proponen un nuevo método para ajustar el parámetro  $k_t$  de tal manera que las defunciones anuales a cada edad,  $D_{x,t}$ , son estimadas ajustando un modelo de regresión de Poisson a las mismas. Esto es posible debido a que el número estimado de defunciones es una variable aleatoria, por lo que, de acuerdo con Brillinger (1986), el supuesto de una distribución Poisson parece plausible. Se parte del supuesto de que las defunciones anuales se distribuyen Poisson con parámetro  $N_{x,t}m_{x,t}$ , es decir,  $D_{x,t} \sim Poisson(N_{x,t}m_{x,t})$ . De aquí se ajusta una regresión Poisson a las  $D_{x,t}$ , quedando el modelo como sigue:

$$\ln(\hat{D}_{x,t}) = \ln(N_{x,t}\hat{m}_{x,t}) + \hat{\varepsilon}_{x,t} = \ln(N_{x,t}) + \ln(\hat{m}_{x,t}) + \hat{\varepsilon}_{x,t}$$

donde  $\hat{D}_{x,t}$  son las defunciones anuales estimadas a cada edad,  $N_{x,t}$  es la población expuesta al riesgo de morir (población a mitad de año) a cada edad,  $a_x$  y  $b_x$  son los parámetros estimados por el método original de Lee y Carter,  $\ln(\hat{m}_{x,t}) = a_x + b_x\hat{k}_t$  donde  $\hat{k}_t$  es el ajuste de  $k_t$  con este modelo y  $\hat{\varepsilon}_{x,t}$  son los residuales obtenidos después del ajuste de  $k_t$ .

En una regresión Poisson, el criterio para determinar si nuestros datos se ajustan o no a dicho modelo es por medio del cálculo de la devianza,

$$devianza_t = 2 \sum_x \left\{ D_{x,t} \ln \left( \frac{D_{x,t}}{\hat{D}_{x,t}} \right) - (D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}) \right\} \quad (3.9)$$

Entre más pequeño sea el valor de la devianza, se tiene más confianza al asegurar que nuestros datos sigue una distribución Poisson, es por ello que Booth *et al.* (2002) proponen encontrar el parámetro  $\hat{k}_t$  óptimo que logre minimizar la función (3.9). Para ello se puede obtener la derivada parcial de (3.9) respecto al parámetro  $k_t$  e igualar a cero dicho resultado, es decir

$$\frac{\partial devianza_t}{\partial k_t} = \sum_x b_x (D_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t) - D_{x,t}) = 0 \quad (3.10)$$

Por lo que nuestro problema se reduce a encontrar los valores de  $k_t$  que hagan la ecuación (3.10) cero. Para corroborar lo anterior, se obtiene la segunda parcial de la devianza respecto al parámetro  $k_t$ , matemáticamente:

$$\frac{\partial^2 devianza_t}{\partial (k_t)^2} = \sum_x (b_x)^2 (D_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t)) \quad (3.11)$$

donde se observa que la función (3.11) es mayor a cero bajo cualquier valor que pudieran tomar los parámetros (esto debido a que  $(b_x)^2$  es mayor a cero bajo cualquier valor de  $b_x$ , por definición los valores  $D_{x,t}$  no pueden ser menores a cero, finalmente el valor de  $\exp(a_x + b_x k_t)$  nunca es menor a cero por que la función exponencial sólo arroja valores en los positivos), por lo tanto, al ser la segunda parcial mayor a cero, implica que los valores del parámetro  $k_t$  que hagan que se cumpla la igualdad de la ecuación (3.10) son aquellos que minimizan la ecuación (3.9).

Booth *et al.* (2002) destacaron algunas ventajas de utilizar este criterio, como el hecho de que se usa un criterio estándar de minimización en la práctica estadística, como lo es la devianza. Sin embargo, la ventaja más significativa de este modelo es que, al enfocarse en el ajuste de los valores de las  $D_{x,t}$  de manera individual, otorga mayores pesos a las edades que tienen mayor número de fallecimientos, mientras que la corrección planteada inicialmente por Lee y Carter (1992, pag. 661), corrige sobre el total de muertes en cada año sin distinguir entre grupos de edad. Aunque con este método no se ajuste exactamente el número de fallecimientos por año, esta pérdida se compensa con la mejor exactitud en ajustar los fallecimientos por grupos de edad.

Finalmente, Wilmoth (1993) propuso dos maneras de estimar los parámetros del modelo original de Lee y Carter: una a través de mínimos cuadrados ponderados (WSL por sus siglas en inglés), y un método de máxima verosimilitud (MLE por sus siglas en inglés), con la ventaja de que ambas de sus propuestas estiman dichos parámetros en un sólo proceso, evitando la necesidad de ajustar posteriormente alguno de los parámetros.

El método de WLS está basado en el hecho de que uno podría ponderar la primera etapa del modelo Lee-Carter, de tal manera que la diferencia entre las defunciones observadas y las estimadas sea muy pequeña. De manera concreta, Wilmoth (1993, pag. 3) sugiere estimar los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$  de tal manera que sean solución a un problema de mínimos cuadrados ponderados,

$$\min \sum_x \sum_t D_{x,t} (\ln(m_{x,t}) - a_x - b_x k_t)^2 \quad (3.12)$$

donde  $D_{x,t}$  son la defunciones totales de los individuos a edad  $x$  ocurridas durante el año  $t$ . Las ventajas de este método es que, al ponderar el error por el número observado de muertes, automáticamente asigna más peso a aquellas edades donde se hayan registrado mayor número de fallecimientos, por lo que las defunciones estimadas serán más parecidas a las defunciones observadas por grupos de edad, evitando así el ajuste visto en la ecuación (3.8). Entre sus desventajas está el hecho de que el cálculo de los parámetros es más complicado, y los supuestos para realizar esta aproximación no parecen ser estadísticamente confiables (Girosi y King, 2007, pag. 29).

El método de MLE propone especificar un modelo probabilístico, cuyos parámetros puedan ser estimados a través de máxima verosimilitud. Se parte del supuesto de que las defunciones anuales pueden ser vistas como variables aleatorias *Poisson* (el mismo supuesto que utilizarían posteriormente Booth *et al.* (2002)). Es decir, se define  $\hat{D}_{x,t}$  como una variable

aleatoria que represente el total de fallecimientos de edad  $x$  en el año  $t$ , y sea  $D_{x,t}$  el número real de los fallecimientos observados. Como ya se mencionó en esta sección,  $\hat{D}_{x,t}$  puede ser satisfactoriamente aproximada por una distribución *Poisson* con media  $\lambda(x,t)$ , donde  $\lambda(x,t) = m_{x,t}N_{x,t}$ , es decir

$$\hat{D}_{x,t} = E(D_{x,t}) = \lambda(x,t) = N_{x,t}m_{x,t} = N_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t) \quad (3.13)$$

Wilmoth (1993) sugiere maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud  $L(a,b,k)$  basada en (3.13), es decir, maximizar la siguiente función, (para efectos de notación, llamaremos  $\lambda$  a  $\lambda(x,t)$  y  $d$  a  $D_{x,t}$ )

$$L(a,b,k) = \ln \left( \prod_x \prod_t \frac{\lambda^d \exp(-\lambda)}{d!} \right) \quad \forall x,t \quad (3.14)$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos y simplificando términos, la ecuación (3.14) puede reducirse a la siguiente expresión:

$$L(a,b,k) = \sum_x \sum_t (d \ln(\lambda) - \lambda - \ln(d!)) \quad (3.15)$$

Si no existieran restricciones sobre  $\lambda$ , se puede verificar que la ecuación (3.15) alcanza su máximo cuando  $\lambda = d$ . Sin embargo, en el modelo Lee-Carter se requiere que  $\lambda$  satisfaga la ecuación (3.13), por lo que, al sustituir los parámetros  $\lambda$  y  $d$  obtenemos:

$$\begin{aligned} L(a,b,k) &= \sum_x \sum_t \{D_{x,t} \ln(\exp(a_x + b_x k_t) N_{x,t}) - \exp(a_x + b_x k_t) N_{x,t} - \ln(D_{x,t}!)\} \\ &= \sum_x \sum_t \{D_{x,t} ((a_x + b_x k_t) + \ln(N_{x,t})) - \exp(a_x + b_x k_t) N_{x,t} - \ln(D_{x,t}!)\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

reagrupando los términos obtenemos que

$$L(a,b,k) = \sum_x \sum_t \{D_{x,t}(a_x + b_x k_t) - N_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t) - \{\ln(D_{x,t}!) + \ln(N_{x,t})\}\} \quad (3.17)$$

Puesto que el último término de la función (3.17), es decir  $\ln(D_{x,t}!) + \ln(N_{x,t})$  no depende de los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  ó  $k_t$ , puede ser omitido, ya que no será un factor que influya en el proceso de maximización, por tanto, la función a maximizar es:

$$L(a,b,k) = \sum_x \sum_t \{D_{x,t}(a_x + b_x k_t) - N_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t)\} \quad (3.18)$$

Debido a la presencia del termino bilinear  $b_x k_t$ , no es posible estimar el modelo propuesto por medio de métodos de regresión Poisson habituales, situación que posteriormente Brouhns *et al.* (2002, pag. 378) resolverían usando  $LEM^4$ , un software de distribución libre creado para el análisis de datos categóricos. El algoritmo implementado por dicho software es el de resolver las ecuaciones de verosimilitud como un método unidimensional o elemental de Newton. Goodman (1979) fue el primero que propuso este método iterativo para estimar modelos log-lineares con términos bilineares.

En el paso  $\nu + 1$  de la iteración, un sólo conjunto de parámetros es actualizado ajustando los otros parámetros a sus estimados actuales usando el siguiente procedimiento de actualización:

$$\hat{\theta}^{(\nu+1)} = \hat{\theta}^{(\nu)} - \frac{\partial L^{(\nu)} / \partial \theta}{\partial^2 L^{(\nu)} / \partial \theta^2} \quad (3.19)$$

donde  $L^{(\nu)} = L(\hat{\theta}^{(\nu)})$

En nuestra aplicación existen tres conjuntos de parámetros, es decir,  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$ . Aplicando la función iterativa (3.19) en la ecuación (3.18) obtenemos los siguientes métodos de actualización (se recomienda comenzar con  $\hat{a}_x^{(0)} = 0$ ,  $\hat{b}_x^{(0)} = 1$  y  $\hat{k}_t^{(0)} = 0$ , sin embargo otro tipo de valores también pueden ser empleados).

$$\begin{aligned} \hat{a}_x^{(\nu+1)} &= \hat{a}_x^{(\nu)} - \frac{\sum_t (D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}^{(\nu,\nu,\nu)})}{-\sum_t \hat{D}_{x,t}^{(\nu,\nu,\nu)}} \\ \hat{k}_t^{(\nu+1)} &= \hat{k}_t^{(\nu)} - \frac{\sum_x (D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}^{(\nu+1,\nu,\nu)}) \hat{b}_x^{(\nu)}}{-\sum_t \hat{D}_{x,t}^{(\nu+1,\nu,\nu)} (\hat{b}_x^{(\nu)})^2} \\ \hat{b}_x^{(\nu+1)} &= \hat{b}_x^{(\nu)} - \frac{\sum_t (D_{x,t} - \hat{D}_{x,t}^{(\nu+1,\nu,\nu+1)}) \hat{k}_t^{(\nu+1)}}{-\sum_t \hat{D}_{x,t}^{(\nu+1,\nu,\nu+1)} (\hat{k}_t^{(\nu+1)})^2} \end{aligned}$$

donde  $\hat{D}_{x,t}^{(\nu,\nu,\nu)} = N_{x,t} \exp(\hat{a}_x^{(\nu_a)} + \hat{b}_x^{(\nu_b)} \hat{k}_t^{(\nu_k)})$  es el número estimado de muertes después de  $\nu_a$  actualizaciones del parámetro  $a_x$ ,  $\nu_b$  actualizaciones del parámetro  $b_x$  y  $\nu_k$  actualizaciones del parámetro  $k_t$ . El criterio usado para detener el procedimiento es el de observar un muy pequeño incremento del logaritmos de la función de verosimilitud (3.18).

La estimación por MLE de los parámetros tienen que ser adaptados de modo que cumplan completamente con las restricciones iniciales del modelo Lee-Carter, específicamente pasamos de los parámetros estimados  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  y  $\hat{k}$  a los nuevos parámetros por medio de las siguientes transformaciones:

<sup>4</sup>LEM viene de "log-lineal y el análisis del historial de eventos con datos faltantes utilizando el algoritmo EM" (Vermunt, 1997).

$$\begin{aligned}\hat{a}_x &\leftarrow \hat{a}_x + \hat{b}_x \bar{k} \\ \hat{k}_t &\leftarrow (\hat{k}_t - \bar{k}) \sum_x \hat{b}_x \\ \hat{b}_x &\leftarrow \frac{\hat{b}_x}{\sum_x \hat{b}_x}\end{aligned}$$

donde  $\bar{k}$  es la media de los valores  $\hat{k}_t$  iniciales. Estas nuevas estimaciones cumplen completamente las restricciones iniciales y arrojan el mismo valor de  $\hat{D}_{x,t}$ , dado que el valor resultante de  $\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}_t$  no es alterado con la transformación.

Bajo este método, tal y como sucedía con el método de WSL, no hay necesidad de realizar un nuevo ajuste al parámetro  $k_t$ , ya que las ecuaciones de verosimilitud garantizan que el modelo recree el número total de fallecimientos en cada año  $t$ , es decir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a_x} L(a, b, k) = 0 &\Leftrightarrow \sum_t (D_{x,t} - N_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_t D_{x,t} = \sum_t N_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t)\end{aligned}\tag{3.20}$$

Así, las  $k_t$  estimadas son tales que las tasas de mortalidad resultantes aplicadas a los expuestos reales al riesgo producen el número total de fallecimientos observados en la información para cada edad  $x$ .

En virtud de lo anterior, en este trabajo se calculan y comparan los métodos propuestos por Lee y Carter (1992), así como 2 métodos basados en el ajuste al parámetro  $k_t$ , el primero es aquel propuesto por Lee y Carter, retomado posteriormente por Lee (2000), mientras que el segundo es el propuesto por Booth *et al.* (2002). El último método a considerar es el de MLE propuesto por Wilmoth (1993).

### 3.2.3. Criterio de comparación de modelos

Para poder comparar el desempeño de cada uno de los métodos propuestos para el cálculo de los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$  es necesario comparar los errores que nos arrojan cada uno de dichos métodos. Podría pensarse en un criterio que cuantificara los errores derivados directamente de la ecuación (3.1), sin embargo, dichos errores van en función del logaritmo de la tasas centrales de mortalidad, y no propiamente en función de dichas tasas. Es por ello que se propone comparar los modelos en función de los errores derivados de comparar las defunciones observadas y las estimadas. Para ello se propone utilizar la prueba Ji-cuadrada

para la bondad de ajuste de  $\hat{D}_{x,t}$ , la cual se define bajo la siguiente fórmula,

$$\chi^2 = \sum_x \sum_t \left\{ \frac{(D_{x,t} - \hat{D}_{x,t})^2}{\hat{D}_{x,t}} \right\} \quad (3.21)$$

donde  $D_{x,t}$  son las defunciones observadas y  $\hat{D}_{x,t}$  son las defunciones estimadas, específicamente,

$$\hat{D}_{x,t} = N_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t)$$

con  $N_{x,t}$  la población total observada a mitad de año. El criterio de discriminación es: aquel modelo que presente la  $\chi^2$  menor es el que se ajusta mejor a los datos de las defunciones.

Adicionalmente, es calculado el coeficiente de determinación,  $R^2$ , para medir el nivel de variabilidad explicado por la aproximación de primer orden, definido como:

$$\begin{aligned} R^2 &= 1 - \frac{\sum_x \sum_t \ln[(m_{x,t}) - a_x - b_x k_t]^2}{\sum_x \sum_t \ln[(m_{x,t}) - a_x]^2} \\ &= 1 - \frac{\sum_x \sum_t \varepsilon_{x,t}^2}{\sum_x \sum_t \ln[(m_{x,t}) - a_x]^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.2.4. Elaboración del pronóstico

Una vez que se ha elegido el método apropiado para la estimación de los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$ , el siguiente paso es el realizar la modelación del “índice de la mortalidad”, por lo que se requiere ajustar una serie de tiempo a la sucesión previamente estimada de dicho índice, es decir, de los valores de  $k_t$ . Lee y Carter realizaron dicho pronóstico a través de la familia de los modelos ARIMA.

Los modelos ARIMA fueron propuestos por Box y Jenkins (1976), los cuales son una expresión algebraica que muestra como una variable en series de tiempo ( $z_t$ ) está relacionada con sus propios valores pasados ( $z_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3}, \dots$ ). Propiamente no existe un modelo establecido que sea adecuado para ciertos datos en particular, sino que los modelos ARIMA son una familia de modelos, de los cuales se debe de seleccionar aquel que sea más apropiado de acuerdo a la información con la que se cuenta. Pankratz (1983, pag. 20) describe algunas de las características de los modelos ARIMA:

- Son modelos de pronóstico univariantes, es decir, el pronóstico de los datos dependen únicamente de una sola variable, y de los valores pasados de la misma.
- Dichos modelos están restringidos a datos discretos e igualmente espaciados en el tiempo.

- Estos modelos sirven únicamente para series de tiempo estacionarias<sup>5</sup>.

La palabra ARIMA significa Modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles, debido a que su construcción se deriva de una combinación de modelos Autorregresivos, y de modelos de medias móviles (posteriormente se explicará el porque de la palabra *Integrados*)

Los modelo autorregresivos son aquellos donde la variable de un período  $t$ , ( $z_t$ ), es explicada por las observaciones de ella misma correspondientes a períodos anteriores, ( $z_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3}, \dots$ ), añadiéndose un término de error ( $a_t$ ). Los modelos autorregresivos se abrevian como AR tras la que se indica el orden del modelo: AR(1), AR(2), ... etc. El orden del modelo indica el número de observaciones pasadas de la serie temporal analizada que interviene en la ecuación. Así, por ejemplo, en un modelo AR(1) tendría la siguiente expresión:

$$z_t = \phi_0 + \phi_1 z_{t-1} + a_t$$

El término de error de los modelos de este tipo son variables aleatorias que se denominan generalmente como ruido blanco cuando su media es nula, tienen varianza constante y covarianza nula entre errores correspondientes a observaciones diferentes (De Arce, 2007, pag. 3). La expresión genérica de un modelo autorregresivo, ya no de un AR(1) sino de un AR(p) es la siguiente:

$$z_t = \phi_0 + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \phi_3 z_{t-3} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t$$

Esta misma expresión se puede escribir de forma abreviada,

$$\phi_p(B)z_t = \phi_0 + a_t$$

donde  $\phi_p(B)$  es lo que se conoce como *operador polinomial de retardo*, es decir,

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3 - \dots - \phi_p B^p$$

y, donde a su vez, el término  $B$  es lo que se conoce como *operador de retardo*, de modo que, aplicado al valor de una variable en el tiempo  $t$ , da como resultado el valor de esa misma variable en el tiempo  $t - 1$ , es decir,

$$Bz_t = z_{t-1}$$

,

y aplicado sucesivamente  $p$  veces, retarda el valor en  $p$  periodos, es decir,

$$B^p z_t = z_{t-p}$$

Los modelos de medias móviles son aquellos que explican el valor de una determinada variable en un período  $t$ , ( $z_t$ ), en función de un término independiente ( $C$ ) y una sucesión

<sup>5</sup>Una serie estacionaria como aquella que tiene media, varianza y función de autocorrelación, mismas que son constantes sobre el tiempo (*Ibid.*)

de errores correspondientes a períodos precedentes,  $(a_t, a_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3}, \dots)$ . Estos modelos se denotan normalmente con las siglas MA, seguidos del orden entre paréntesis. Un modelo con  $q$  términos de error MA( $q$ ) corresponde a la siguiente expresión:

$$z_t = C + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \theta_3 z_{t-3} + \dots \theta_q z_{t-q}$$

Dicho modelo también puede abreviarse utilizando el polinomio de retardo:

$$z_t = \theta_q(B)a_t + C$$

Los modelos de medias móviles podrían causar un poco de confusión, ya que de primera instancia pareciera que la variable  $z_t$  no depende de sus valores pasados; sin embargo, puede demostrarse que los errores  $a_t$  pueden ser remplazados en términos de las variables  $z_t$ , es decir, que cualquier modelo MA es a su vez un modelo AR (y viceversa).

Los modelos AR( $p$ ) y MA( $q$ ) forman los modelos ARMA( $p, q$ ), o Modelos autorregresivos de Medias Móviles. Estos modelos son aquellos que explican el valor de una determinada variable en un período  $t$ ,  $(z_t)$ , es explicada por las observaciones de ella misma correspondientes a períodos anteriores,  $(z_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3}, \dots)$ , en función de un término independiente ( $C$ ) y una sucesión de errores correspondientes a períodos precedentes,  $(a_t, a_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3}, \dots)$ , y su expresión es la siguiente:

$$z_t = \phi_0 + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots \phi_p z_{t-p} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \theta_3 z_{t-3} + \dots \theta_q z_{t-q} + C$$

O, usando operadores de retardo y haciendo algunos despejes, como sigue:

$$\phi_p(B)z_t = \theta_q(B)a_t + C$$

Hasta este punto se ha mencionado la estructura de los modelos ARMA, sin embargo no hemos mencionado nada sobre el factor final con el cual obtendremos los modelos inicialmente propuestos, es decir, el factor de *Integración*, con el cual podemos pasar de modelos ARMA a modelos ARIMA. Una de las características de los modelos ARMA es que funcionan únicamente para series de tiempo estacionarias, por lo que si se cuenta con una serie de tiempo no estacionaria, no se puede aplicar un modelo ARMA de forma inmediata, afortunadamente es posible en muchos casos transformar series de tiempo no estacionarias en series de tiempo estacionarias.

Supongamos que tenemos una serie de tiempo no estacionaria  $\{z_t\}$ , entonces definimos la variable  $\{w_t\}$  como la primera diferencia de las variables  $\{z_t\}$ , es decir,

$$w_t = z_t - z_{t-1}$$

es decir,  $w_t$  es la razón de cambio entre  $z_t$  y  $z_{t-1}$ , Una vez definida la serie de tiempo  $\{w_t\}$  se procede a averiguar si dicha serie es estacionaria o no. En caso de que la nueva serie  $\{w_t\}$  siga sin ser estacionaria, se redefine como la primera diferencia de la primera diferencia de la serie  $\{z_t\}$ , es decir,

$$w_t = (z_t - z_{t-1}) - (z_{t-1} - z_{t-2}) \quad (3.23)$$

Este proceso se realiza  $d$  veces, hasta que encontremos una serie de variables  $\{w_t\}$  cuya serie de tiempo sea estacionaria. Una vez encontrada dicha serie, podemos encontrar las variables asociadas a nuestro modelo ARMA( $\phi$ ,  $\theta$  y  $C$ ), sin embargo, nosotros queremos retomar nuestras variables originales  $\{z_t\}$ , por lo que es necesario aplicar  $d$  veces una *integración* sobre nuestras variables  $\{w_t\}$  con tal de retomar las originales  $\{z_t\}$ , dando pie al modelo mencionado originalmente, el modelo ARIMA.

Es decir, en un modelo ARIMA( $p,d,q$ ), el valor de  $d$  nos indica el número de diferencias (y por tanto, de integraciones) que tuvieron que realizarse con tal de transformar nuestra serie de tiempo no estacionaria, en una serie de tiempo estacionaria.

En muchos casos, la serie  $\{w_t\}$  no necesariamente se encuentra de manera tan trivial con la simple diferencia de los valores de la serie original  $\{z_t\}$ , por lo que dependiendo de los datos, es necesario realizar una transformación sobre la serie original  $\{z_t\}$  (como podría ser el logaritmo, o la raíz cuadrada) antes de iniciar las diferencias.

De esta manera, la expresión para un modelo ARIMA ( $p,d,q$ ) queda, usando operadores de retardo, como sigue:

$$\phi_p(B)(1 - B)^d z_t = \theta_q(B)a_t + C \quad (3.24)$$

donde  $(1 - B)^d z_t$  es la diferenciación  $d$ -ésima de la variable  $z_t$

El último paso consiste en la estimación de los parámetros  $p,d,q$ ,  $\phi$  y  $\theta$ , lo cual no es algo sencillo, sin embargo, en la actualidad existen varios paquetes estadísticos que realizan dicha estimación. Si se requiere buscar a fondo el cálculo de dicha estimación se sugiere consultar a Pankratz (1983).

Lee y Carter (1992) usaron como modelo una caminata aleatoria con deriva, la cual no es más que un modelo ARIMA(0,1,0) con deriva, la cual es expresada siguiente manera:

$$k_t = c + k_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde  $c$  es el término constante de deriva (es decir, el término que va a determinar la tendencia del modelo) y  $\varepsilon_t$  es el error que se distribuye como una variable aleatoria normal con media 0 y varianza,  $\sigma^2$ , constante. Si se utiliza la primera diferencia,  $w_t$ , entonces el modelo anterior se puede simplificar de la siguiente manera,

$$w_t = k_t - k_{t-1} = c + \varepsilon_t \quad (3.25)$$

Dadas las propiedades de los errores,  $w_t$  se distribuye como una variable aleatoria normal con media  $c$  y varianza  $\sigma^2$ .

Finalmente, la predicción para los años  $t+s$ , con  $s = 1, 2, 3, \dots$ , posteriores al último año con el que se cuenta información,  $t$ , se realiza sustituyendo en la ecuación (3.1) la predicción  $k_{t+s}$  obtenida a partir de la serie temporal ajustada, considerando los valores de  $a_x$  y  $b_x$  calculados en su momento.

$$\ln(m_{x,t+s}) = a_x + b_x k_{t+s} \quad s > 0$$

Obteniendo los pronósticos de las tasas de mortalidad podemos construir tablas de mortalidad para cada grupo de edad y año que estamos proyectando (esto utilizando la relación entre dicha tasa y la probabilidad de fallecimiento  $q_x$ ), tablas con las que finalmente podremos predecir el comportamiento de la mortalidad a lo largo del tiempo.

### 3.2.5. Ventajas y desventajas del modelo Lee-Carter

De acuerdo a Debón (2003, pag. 64-66), el modelo Lee-Carter presenta las siguientes ventajas y desventajas.

En primer lugar resalta que este procedimiento puede ser utilizado aún cuando haya pocos datos disponibles, como por ejemplo en el tercer mundo. Es posible generar una familia entera de tablas de mortalidad a partir de dos tablas de mortalidad observadas en los periodos que denotamos  $r$  y  $r + s$ , para ello,

1. Tomamos  $k_r = 0$  para una de las tablas y  $k_s = 1$  para la otra.
2. Sea  $a_x = \ln(m_{x,r})$  y  $b_x = \ln(m_{x,r}) - \ln(m_{x,r+s})$ .
3. Para obtener predicciones daríamos valores a  $k_t$ . Para  $k_t$  entre 0 y 1, el modelo interpolaría geoméricamente entre las dos tablas; para  $k_t$  menor de cero y  $k_t$  mayor de 1, el modelo extrapola a partir de las dos tablas.

Sin embargo, en la mayoría de los casos este procedimiento tan sencillo resulta ineficiente y es mucho mejor estimar  $a_x$  y  $b_x$  con  $k_t$  minimizando las desviaciones al cuadrado a partir de una matriz de tasas específicas para cada edad.

Seguidamente se enumeran algunas de las ventajas del método frente a la estimación independiente de cada tasa central de mortalidad,

1. El modelo Lee-Carter explota el alto grado de correlación entre años a lo largo de las edades de forma que todas las edades dependen de un mismo parámetro que varía con el año ( $k_t$ ), por lo que se evita el tener que pronosticar cada tasa central de mortalidad de manera independiente.
2. Si cada tasa central de mortalidad se modelara individualmente por un proceso ARIMA de diferente orden, se requerirían de muchos más parámetros.
3. Si se realizaran predicciones individuales de las tasas centrales de mortalidad, en el futuro lejano estas podrían combinarse para formar perfiles de edad muy poco plausibles. En cambio, utilizando el modelo Lee-Carter las tasas centrales de mortalidad individuales están siempre sujetas a pertenecer a un sistema de tablas de mortalidad que se ajusta a los datos históricos. Esta cohesión se obtiene al predecir un sólo parámetro  $k_t$ , el cual por sí mismo es una especie de compromiso entre las tendencias de todas las tasas centrales de mortalidad individuales correspondientes a cada edad.

A pesar de esto también Lee (2000, pag. 85-86) discute algunos de los problemas y limitaciones del método.

1. La expresión de una tabla requiere un número de coeficientes  $(a_x, b_x)$  igual a dos veces el número de grupos de edad considerados.
2. El método asume que el cambio en la distribución de la mortalidad según la edad, dada por las tasas de decrecimiento a diferentes edades,  $b_x(dk_t/dt)$ , son constantes a lo largo del tiempo. Pero en la práctica, la velocidad relativa de decrecimiento a diferentes edades puede variar. El problema estaría en la predicción cuando estos cambios comiencen.
3. El método no está preparado para acomodarse a información inesperada sobre futuras tendencias, basa sus predicciones en que las tendencias presentes continuarán en un futuro.
4. Los intervalos de confianza no reflejan incertidumbre sobre si la especificación del modelo es correcta, ni tampoco acerca de si el futuro se parece al pasado. Mientras unos piensan que mayores avances en la tecnología médica acelerarían el descenso de la mortalidad, otros esperan enfermedades extrañas que proliferarían y causarían un retardo del descenso.

### 3.3. Aplicación del modelo a datos de México

El pronosticar la mortalidad a través del modelo Lee-Carter para el caso particular de México no es algo novedoso, ya que existen algunos trabajos que lo han hecho. Las proyecciones oficiales de el CONAPO, realizadas por Partida (2008), se basan en un modelo muy similar al de Lee y Carter y consiste en extrapolar el logaritmo de las probabilidades de fallecimiento individuales usando el siguiente modelo:

$$\ln(q_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x B_t \quad (3.26)$$

Los parámetros  $\alpha_x$  y  $\beta_x$  tienen la misma interpretación que en el modelo Lee-Carter, sin embargo su estimación se realiza de manera distinta a la planteada originalmente. La principal diferencia recae en el cálculo del denominado parámetro de tendencia temporal  $B_t$ . Para la evolución futura del indicador  $B_t$  se supuso que en los años venideros, aumentaría siguiendo una función logística y se aproximaría paulatinamente al límite teórico de 60 años (en realidad el límite teórico que plantean es de 65 años, pero al considerar la esperanza de vida parcial<sup>6</sup> a partir de los 5 años tiene que descontar dicha edad),

---

<sup>6</sup>La esperanza de vida parcial de 5 a 64 años es, de acuerdo a Partida (2008, pag. 73), el número de años que espera vivir, en promedio, un niño de 5 años antes de alcanzar los 65 años de edad.

$${}_6e_5(2005 + y) = \frac{60}{1 + \exp(-3.009522 - y(0.022886))} \quad (3.27)$$

El parámetro de tendencia temporal  $B_t$  se obtiene de tal manera que reprodujera la esperanza de vida parcial 0-64 en (3.27). Por lo tanto, la proyección de la mortalidad se realiza para satisfacer el objetivo resultante de la ecuación (3.27) y no como en el modelo Lee-Carter, donde cada tasa se proyecta a partir de su tendencia histórica.

González y Guerrero (2007) hicieron sus propias proyecciones de la mortalidad a nivel general (es decir, no hacen distinción sobre la población femenina y masculina) utilizando el modelo de Lee-Carter, encontrando los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$  a través del método propuesto por Booth *et al.* (2002). Asimismo, utilizaron como fuente de información las tablas de mortalidad quinquenales publicadas por la Secretaría de Salud en su anuario estadístico, desde el año 1989 hasta el 2003, así como las tablas de mortalidad revisadas por Camposortega<sup>7</sup> de los años 1940, 1950, 1960, 1970 y 1980. Por lo mismo, los resultados que arrojan en su proyecto son tablas quinquenales de mortalidad.

Más recientemente, García (2010) utiliza el modelo Lee-Carter para realizar proyecciones de la mortalidad, la fecundidad y el movimiento migratorio. Para efectos de la proyección de la mortalidad, calcula de manera separada los parámetros y los pronósticos de la población por sexo (femenina y masculina), y utiliza el método de SVD para la estimación de los parámetros basándose en los datos de la conciliación demográfica INEGI-CONAPO-COLMEX (2006), la cual arroja datos de defunciones y de población a mitad de año, desde la edad 0 hasta la edad 109, partiendo desde el año 1960 hasta el año 2005. Sin embargo, García (2010) sólo utiliza los datos hasta el año 2000 con tal de comparar el resultado de sus proyecciones con los años 2001, 2002, 2003, 2004 y 2005.

La necesidad de realizar nuevas proyecciones basadas en el modelo Lee-Carter recaen en tratar de optimizar los resultados arrojados por dicho modelo, al utilizar una fuente de información muy completa (la conciliación demográfica INEGI-CONAPO-COLMEX (2006)), así como el realizar la estimación de los parámetros a través de diversos métodos propuestos y elegir así aquel que arroje mejores resultados (esto es mejor que basarnos únicamente en uno sólo). También se analiza si existen mejoras significativas en los resultados al eliminar los datos relacionados con la población infantil, ya que el propósito de este trabajo está enfocado en la elaboración de tablas de mortalidad, tanto para la población en edad laboral (aquella de 15 a 64 años), así como para aquella en edad avanzada (65 años o más). Para fines de este trabajo y gracias a la facilidad que nos permiten los datos, se modelara de manera separada a las mujeres y a los hombres, puesto que como se mencionó en el capítulo anterior, la mortalidad a nivel sexo suele tener diferencias significativas. Por último, se decidió que las proyecciones se realizarán hasta el año 2050, esto debido a que, a pesar de que el modelo nos permite proyectar tantos años deseemos, se consideró como parámetro para realizar las proyecciones, el número de años de los cuales se disponía información (46 años, de 1960 a 2005).

<sup>7</sup>Camposortega C., Sergio (1992). *Análisis demográfico de la Mortalidad en México 1940-1980*. Centro de Estudios Demográficos y de Desarrollo Urbano, El Colegio de México, primera edición, México.

### 3.3.1. Mortalidad Femenina

El primer paso es seleccionar el método más adecuado para la estimación de los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$  de la ecuación (3.1), para posteriormente realizar el pronóstico de las tasas centrales de mortalidad con base en el parámetro  $k_t$ . El criterio para seleccionar el método más apropiado es a través del cálculo de la Ji-cuadrada referida en la ecuación (3.21), así como el cálculo del coeficiente de determinación  $R^2$  visto en (3.22). El criterio de selección de modelo se basó en aquel con un valor menor del parámetro Ji-cuadrada, tomando en consideración el valor de  $R^2$ , ya que si este último es bajo, nuestro modelo no puede ser considerado apropiado. En la Tabla 3.2 se encuentra el comparativo de los cálculos.

Método de ajuste	Ji-cuadrada	$R^2$
SVD original	27,459	<b>0.9911</b>
SVD con ajuste de $k_t$ de Lee	25,427	0.9894
SVD con ajuste de $k_t$ de Booth	21,598	0.9881
MLE propuesto por Wilmoth	<b>20,503</b>	0.9876

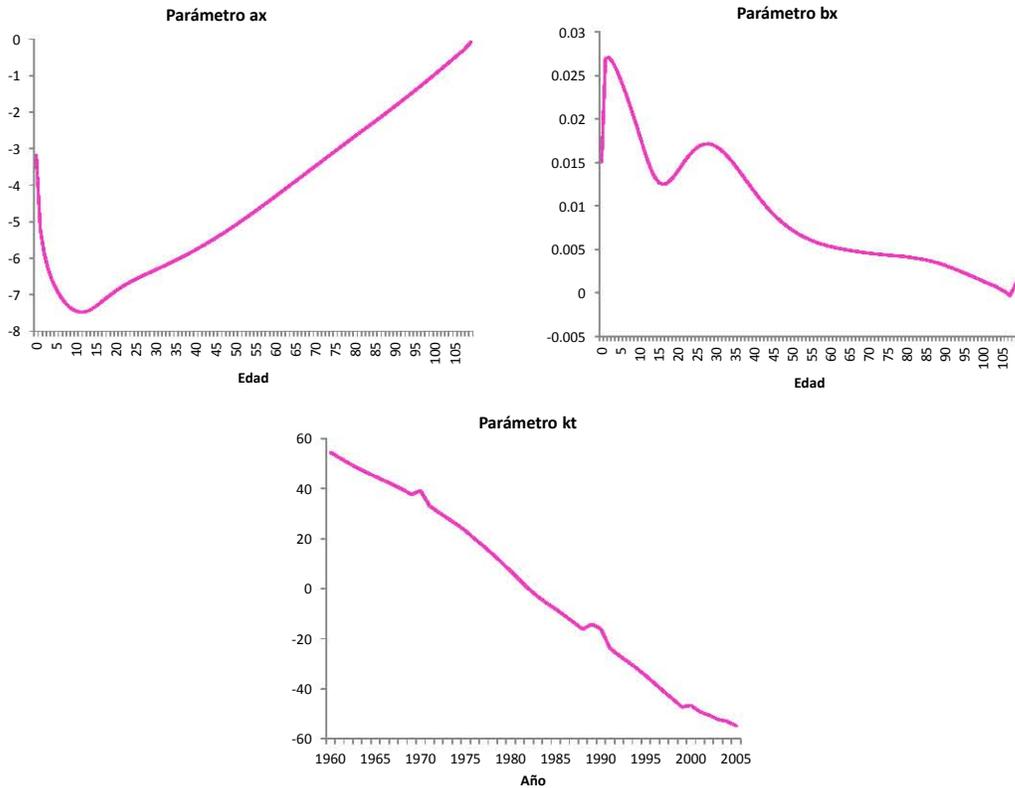
**Tabla 3.2.** Comparación de los métodos utilizados para la obtención de los parámetros del modelo Lee-Carter. **Fuente:** Elaboración propia

Bajo estos resultados, el modelo que mejor desempeño logró en el ajuste de los parámetros fue el método de MLE propuesto por Wilmoth (1993), ya que presenta el menor valor de Ji-cuadrada, y pese a dicho método arrojó el valor de  $R^2$  tiene el menor valor de todos, es lo suficientemente alto para poder aceptar dicho modelo. En la Figura 3.3 se muestran los parámetros obtenidos a través del método de MLE.

El parámetro  $a_x$  en la ecuación (3.1) se refiere a la forma que tiene el logaritmo de la mortalidad respecto a la edad. Como se puede observar en la Figura 3.3, este parámetro indica que el logaritmo de la mortalidad tiene forma de “U”, como usualmente se encuentra en cualquier población humana (García, 2010, pag. 213). El parámetro  $b_x$  se refiere a la “velocidad” del decremento de las tasas centrales de mortalidad por edad en respuesta a cambios en  $k_t$ , es decir, cada valor de  $a_x$  tiene asociado un valor de  $b_x$ , el cual va a indicar la “intensidad” con la que la tasa  $m_{x,t}$  va a ir variando. Dicha variación se dará al involucrar al parámetro  $k_t$ , por lo que, para cada tiempo  $t$ , el valor de  $m_{x,t}$  variará en proporción a la “intensidad” dada por el parámetro  $b_x$ .

Como se puede apreciar en la Figura (3.1), el parámetro  $b_x$  es muy alto el primer año de vida, después decrece rápidamente hasta los 13 años, para volverse a incrementar hasta los 30 años, para después comenzar un descenso continuo. Esto quiere decir que, a partir de los 30 años, la “intensidad” con la que disminuirá la mortalidad será muy pequeña; en particular, a partir de los 50 años de edad, a diferencia de las edades jóvenes donde la variación será alta.

El *índice de mortalidad*, denotado por  $k_t$ , es el único parámetro que se proyecta hacia el futuro, y es el mismo que nos da la tendencia de nuestras proyecciones. Se aprecia que la tendencia de dicho parámetro es casi decreciente en todo el rango de valores, con pequeños



**Figura 3.3.** *Parámetros para la mortalidad femenina obtenidos a través del método de MLE de Wilmoth. Fuente: Elaboración propia*

saltos en los años de 1970 y 1990, indicando que en esos años la mortalidad tuvo un ligero incremento respecto a la tendencia de años pasados. De igual manera, su estructura es prácticamente lineal durante todos los años observados.

Una vez estimados los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$ , el siguiente paso consiste en pronosticar el índice de mortalidad de acuerdo al modelo ARIMA que mejor se ajuste a dicho índice. El que ofreció un mejor ajuste fue un modelo ARIMA(0,1,0) con deriva. Es decir, sea  $w_t = k_t - k_{t-1}$  una serie estacionaria (ya que al ser un modelo ARIMA (0,1,0) implica que tuvo que realizarse una diferenciación sobre el parámetro  $k_t$  para convertir la serie en una estacionaria), entonces

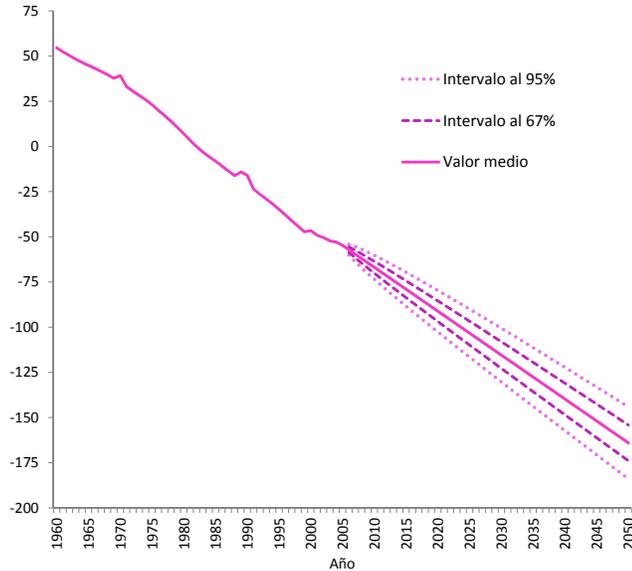
$$w_t = \theta_0 + e_t \quad (3.28)$$

Sustituyendo la variable  $w_t$  en términos de  $k_t$  y despejando la misma tenemos que

$$\begin{aligned} k_t &= \theta_0 + k_{t-1} + e_t \\ &= -2.4283 + k_{t-1} + e_t \\ &\quad (0.2256) \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde la varianza de los residuales  $e_t$  es  $\sigma_e^2 = 2.29$ , y los valores mostrados entre paréntesis son los errores estándar asociados a cada una de las variables calculadas. Con estos valores

es posible pronosticar, ya sea por métodos analíticos o a través de la simulación de los residuales, el índice de la mortalidad femenina hasta el año 2050, así como los intervalos de predicción. La Figura 3.4 muestra los valores pronosticados y los intervalos de predicción del 67 y 95 por ciento.



**Figura 3.4.** Valores medios pronosticados del parámetro  $k_t$  con intervalos de confianza. **Fuente:** Elaboración propia

Finalmente, con el pronóstico del parámetro  $k_t$  nos es posible calcular los valores pronosticados de la tasa central de mortalidad  $m_{x,t}$ , y a partir de estos el resto de los indicadores propios de una tabla de mortalidad, como las probabilidades de fallecimiento  $q_{x,t}$  y las esperanzas de vida  $e_{x,t}$ .

Hasta este punto hemos estimado los parámetros del modelo Lee-Carter considerando todos los datos de la conciliación demográfica INEGI-CONAPO-COLMEX (2006). Esto es, con los datos de la población media y las defunciones para edades desde los 0 hasta los 109 años tomados a partir del año 1960 hasta el 2005; sin embargo, vale la pena cuestionarse si los resultados obtenidos pueden ser mejorados si consideramos restricciones en los datos mismos, particularmente en las edades jóvenes, debido a las dificultades existentes en la estimación de la mortalidad infantil.

Recordemos que el propósito de este trabajo no va enfocado en un análisis de la mortalidad para todas las edades posibles, sino para aquellas de 15 años o más. Con la finalidad de poder observar la variación que pudiese existir en dichas edades considerando una restricción sobre los datos aplicados al modelo, se decide realizar el mismo análisis desarrollado previamente, bajo la restricción de considerar únicamente datos de edades de 5 años de edad en adelante. Es decir, estamos omitiendo todos los datos con edades 0, 1, 2, 3 y 4, para todos los años, desde 1960 hasta 2005.

Como se realizó previamente, el primer paso es decidir el método óptimo para la esti-

mación de los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$ , esto a través de un comparativo entre los 4 métodos analizados en este trabajo, dichos resultados se ven en la Tabla 3.3

Método de ajuste	Ji-cuadrada	$R^2$
SVD original	9,131	<b>0.9905</b>
SVD con ajuste de $k_t$ de Lee	10,856	0.9813
SVD con ajuste de $k_t$ de Booth	8,453	0.9893
MLE propuesto por Wilmoth	<b>8,282</b>	0.9889

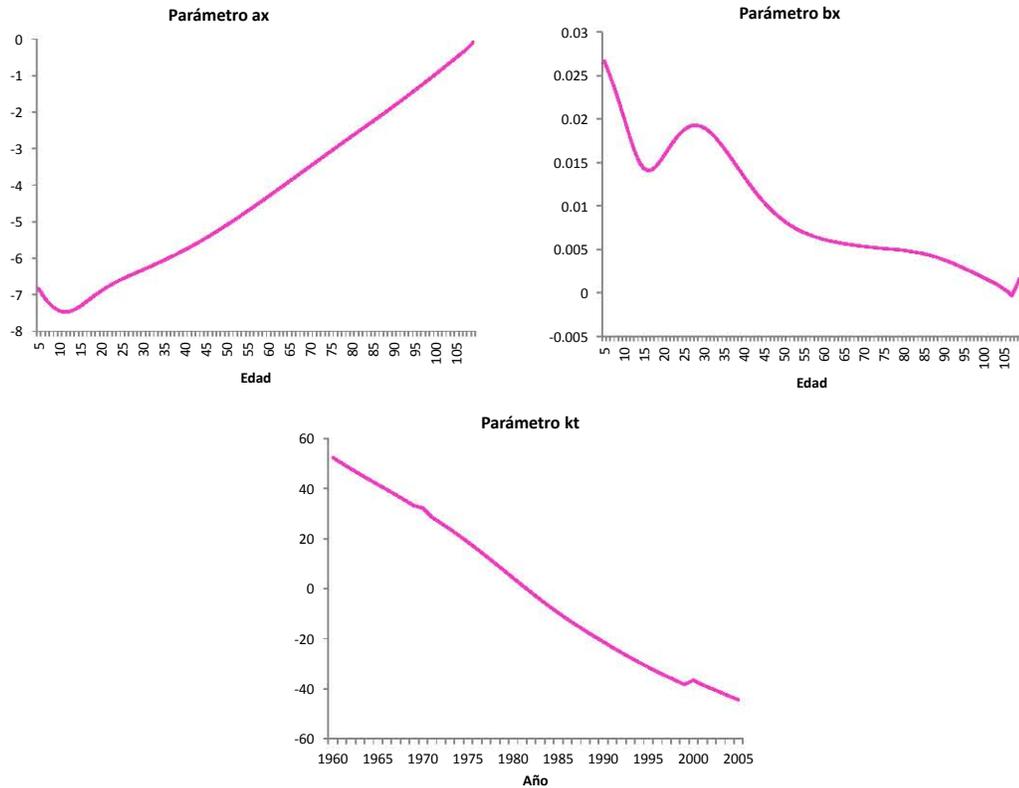
**Tabla 3.3.** Comparación de modelos omitiendo datos de edades de 0 a 4 años. **Fuente:** Elaboración propia

Analizando los resultados obtenidos, hay tres observaciones que vale la pena mencionar:

1. El método de MLE vuelve a ser el que arroja mejores resultados, por lo que es el método que consideraremos para efectos de las comparaciones futuras.
2. A diferencia del análisis pasado, el ajuste al parámetro  $k_t$  propuesto por Lee (2000), es decir, aquel donde se busca ajustar el total de las muertes estimadas al total de las muertes observadas por año, resultó ser el modelo con los valores más altos del estimador Ji-Cuadrada, lo cual nos muestra que dicho ajuste no en todos los casos será más eficaz del obtenido directamente por el método de SVD.
3. Hay que prestar atención al notable descenso en el valor del estimador Ji-Cuadrada, ya que pasamos de números del orden de veinte mil a números del orden de ocho mil, esto comparando los resultados obtenidos entre los métodos donde se usaron todos los datos (Tabla 3.2), y los métodos usando únicamente datos de los cinco años de edad en adelante, lo cual nos indica que el mayor peso de los errores se da en las edades infantiles.

Este comparativo podría parecer “injusto”, ya que en la Tabla 3.2 estamos considerando la suma de datos provenientes de una matriz de  $110 \times 46$  (edad por tiempo), mientras que en la Tabla 3.3 estamos considerando la suma de datos de una matriz de  $105 \times 46$ , por lo que para hacer comparables los resultados, se obtuvo el valor del estimador Ji-Cuadrada (ver función (3.21)) considerando solamente edades de 5 años en adelante bajo el caso donde estimamos los parámetros por medio de MLE con todos los datos. El valor de dicho estimador es de  $\chi^2 = 13,130$ , que comparado con el mismo valor de la Tabla 3.3 (8,282), resulta ser significativamente más alto, por lo que podemos asumir que una restricción sobre nuestros datos es deseable con tal de poder tener mejores estimaciones de la mortalidad en las edades buscadas. En la Figura 3.5 se muestran los parámetros calculados con el método MLE bajo las restricciones de los datos mencionadas anteriormente, mientras que en las Tablas 3.4 y 3.5 se muestran los valores numéricos de dichos parámetros.

Vale la pena mencionar que la principal diferencia de estos parámetros contra los observados en la Figura 3.3 se da en el parámetro  $k_t$ , donde la línea está mas “suavizada” (prácticamente no presenta saltos en su estructura, posiblemente causados por la mortalidad infantil).



**Figura 3.5.** Parámetros para la mortalidad femenina obtenidos a través del método de MLE de Wilmoth considerando edades de 5 años en adelante. **Fuente:** Elaboración propia

Bajo este análisis queda la cuestión de saber si reduciendo de nuevo la cantidad de datos a considerar con base en las edades se siguen obteniendo ganancias significativas en las estimaciones de los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$ , por lo que se realiza una nueva estimación, omitiendo las edades desde 0 hasta 9 años. Los resultados se muestran en la Tabla 3.6, donde podemos observar que la variación entre los resultados obtenidos en la Tabla 3.3 no es significativa, además hay que considerar que los valores de los estimadores fueron calculados bajo una matriz de datos más reducida, por lo que al comparar los datos entre las matrices correspondientes la diferencia será aun menor, razón por lo que no es necesario una nueva restricción sobre los datos.

El siguiente paso consiste en pronosticar el índice de mortalidad  $k_t$  de acuerdo al modelo ARIMA que mejor se ajuste a dicho índice. Contrario a lo que ocurrió bajo el escenario donde consideramos todas las edades, para este nuevo índice el modelo que ofreció mejor ajuste fue un modelo ARIMA(1,1,1) con deriva, resultado semejante a los resultados obtenidos por García (2010) en sus propias estimaciones. Sea  $w_t = k_t - k_{t-1}$  la serie estacionaria resultante después de la primera diferenciación del parámetro  $k_t$ , entonces el modelo queda como sigue,

$$w_t = \theta_0 + \phi_1(w_{t-1}) + e_t + \theta_1 e_{t-1} \quad (3.30)$$

Sustituyendo  $w_t$  en términos de  $k_t$  y despejando la misma obtenemos que

Edad $x$	$a_x$	$b_x$	Edad $x$	$a_x$	$b_x$	Edad $x$	$a_x$	$b_x$
5	-6.8344	0.0267	40	-5.7691	0.0134	75	-3.066	0.0051
6	-7.025	0.0255	41	-5.7077	0.0127	76	-2.9834	0.0051
7	-7.1767	0.0243	42	-5.6451	0.0121	77	-2.9008	0.005
8	-7.2959	0.023	43	-5.5807	0.0115	78	-2.8184	0.005
9	-7.3849	0.0215	44	-5.5149	0.0109	79	-2.7363	0.005
10	-7.4435	0.0201	45	-5.4478	0.0104	80	-2.6548	0.0049
11	-7.4709	0.0186	46	-5.3791	0.0099	81	-2.5737	0.0048
12	-7.4673	0.0171	47	-5.309	0.0095	82	-2.4931	0.0047
13	-7.4354	0.0158	48	-5.2375	0.009	83	-2.4126	0.0047
14	-7.38	0.0149	49	-5.1649	0.0086	84	-2.3322	0.0046
15	-7.3077	0.0143	50	-5.091	0.0083	85	-2.2512	0.0045
16	-7.225	0.0141	51	-5.0161	0.008	86	-2.1695	0.0044
17	-7.1382	0.0142	52	-4.9401	0.0077	87	-2.087	0.0043
18	-7.0513	0.0146	53	-4.863	0.0074	88	-2.0039	0.0041
19	-6.9677	0.0151	54	-4.7853	0.0072	89	-1.9201	0.004
20	-6.8884	0.0158	55	-4.7068	0.0069	90	-1.8358	0.0038
21	-6.8149	0.0165	56	-4.6276	0.0067	91	-1.751	0.0036
22	-6.7467	0.0172	57	-4.5477	0.0066	92	-1.6657	0.0034
23	-6.6833	0.0178	58	-4.4673	0.0064	93	-1.5798	0.0032
24	-6.624	0.0184	59	-4.3864	0.0063	94	-1.4935	0.0031
25	-6.5681	0.0188	60	-4.305	0.0061	95	-1.4067	0.0028
26	-6.5149	0.0191	61	-4.2234	0.006	96	-1.3193	0.0026
27	-6.4633	0.0193	62	-4.1414	0.0059	97	-1.2313	0.0024
28	-6.4128	0.0193	63	-4.0591	0.0058	98	-1.1426	0.0022
29	-6.3627	0.0192	64	-3.9768	0.0057	99	-1.0533	0.002
30	-6.3128	0.019	65	-3.8941	0.0057	100	-0.9628	0.0017
31	-6.2626	0.0187	66	-3.8114	0.0056	101	-0.8719	0.0015
32	-6.2118	0.0183	67	-3.7287	0.0055	102	-0.7804	0.0013
33	-6.1604	0.0178	68	-3.6458	0.0055	103	-0.6875	0.001
34	-6.1079	0.0172	69	-3.5629	0.0054	104	-0.5947	0.0008
35	-6.0546	0.0166	70	-3.48	0.0053	105	-0.5042	0.0004
36	-6.0001	0.016	71	-3.3971	0.0053	106	-0.4083	0.0001
37	-5.9442	0.0154	72	-3.3142	0.0052	107	-0.3255	-0.0003
38	-5.8874	0.0147	73	-3.2314	0.0052	108	-0.2136	0.0007
39	-5.8289	0.014	74	-3.1487	0.0051	109	-0.0847	0.0017

**Tabla 3.4.** Parámetros  $a_x$  y  $b_x$  obtenidos con el método MLE omitiendo las edades de 0 a 4 años edad para el caso femenino. **Fuente:** Elaboración propia

$$\begin{aligned}
k_t &= \theta_0 + k_{t-1} + \phi_1(k_{t-1} - k_{t-2}) + e_t + \theta_1 e_{t-1} \\
&= \underbrace{-2.0480}_{(0.3395)} + k_{t-1} + \underbrace{0.9204}_{(0.0754)}(k_{t-1} - k_{t-2}) + e_t - \underbrace{0.6816}_{(0.1204)}e_{t-1}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Año $t$	$k_t$	Año $t$	$k_t$	Año $t$	$k_t$	Año $t$	$k_t$
1960	52.4191	1972	26.2247	1984	-7.0008	1996	-33.1766
1961	50.1322	1973	23.7687	1985	-9.6034	1997	-34.9382
1962	47.8975	1974	21.2231	1986	-12.0908	1998	-36.6093
1963	45.7414	1975	18.5763	1987	-14.4851	1999	-38.215
1964	43.6544	1976	15.844	1988	-16.812	2000	-36.5288
1965	41.6207	1977	13.0262	1989	-19.0443	2001	-38.3795
1966	39.5792	1978	10.1526	1990	-21.1942	2002	-39.8912
1967	37.5057	1979	7.2339	1991	-23.4117	2003	-41.393
1968	35.3756	1980	4.3021	1992	-25.4897	2004	-42.9287
1969	33.1788	1981	1.3807	1993	-27.5018	2005	-44.414
1970	32.2314	1982	-1.493	1994	-29.4557		
1971	28.6086	1983	-4.2825	1995	-31.3379		

**Tabla 3.5.** Parámetro  $k_t$  obtenido con el método MLE omitiendo las edades de 0 a 4 años para el caso femenino. **Fuente:** Elaboración propia

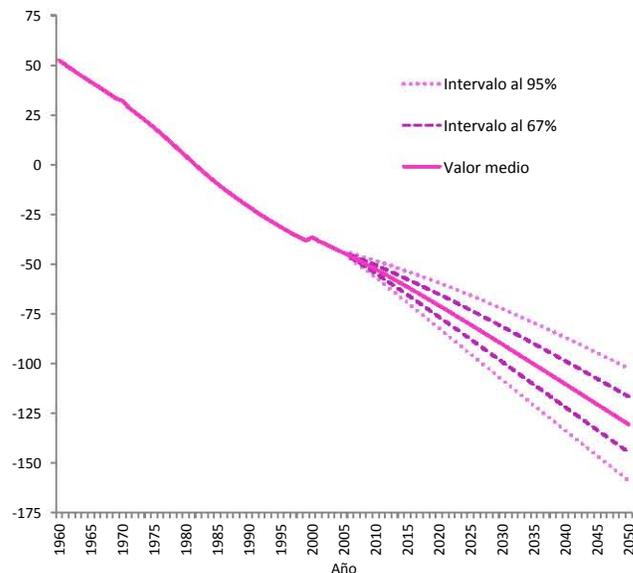
Método de ajuste	Ji-cuadrada	$R^2$
SVD original	9,047	<b>0.9882</b>
SVD con ajuste de $k_t$ de Lee	10,339	0.9773
SVD con ajuste de $k_t$ de Booth	8,240	0.9866
MLE propuesto por Wilmoth	<b>8,079</b>	0.9861

**Tabla 3.6.** Comparación de modelos omitiendo datos de edades de 0 a 9 años. **Fuente:** Elaboración propia

donde la ecuación (3.31) representa el modelo de pronóstico del parámetro  $k_t$  usando datos de los cinco años de edad en adelante, con varianza de los residuales  $e_t$ ,  $\sigma_e^2 = 0.427$ . La Figura 3.6 muestra los valores pronosticados y los intervalos de predicción del 67 y 95 por ciento, mientras que la Tabla 3.7 se muestra los valores medios obtenidos del pronóstico del parámetro (los valores de los pronósticos de los intervalos de confianza se muestran en los anexos de este trabajo).

Nuevamente, con el pronóstico del parámetro  $k_t$  podemos calcular los valores de la tasa central de mortalidad  $m_{x,t}$  para los años  $t$  pronosticados, y a partir de estos podemos calcular pronósticos con sus respectivos intervalos de confianza para el resto de los indicadores propios de una tabla de mortalidad.

Mostraremos especial atención en los valores pronosticados de la esperanza de vida, en los cuales vale la pena mostrar un comparativo de la evolución de este indicador bajo las dos condiciones que hemos mostrado en este apartado. Es decir, el pronóstico de la esperanza de vida calculado bajo el escenario donde consideramos todos los datos, y el escenario donde consideramos datos únicamente a partir de los 5 años de edad, esto con tal de analizar las variaciones entre una estimación y otra. En la Figura 3.7 se muestra un comparativo de las

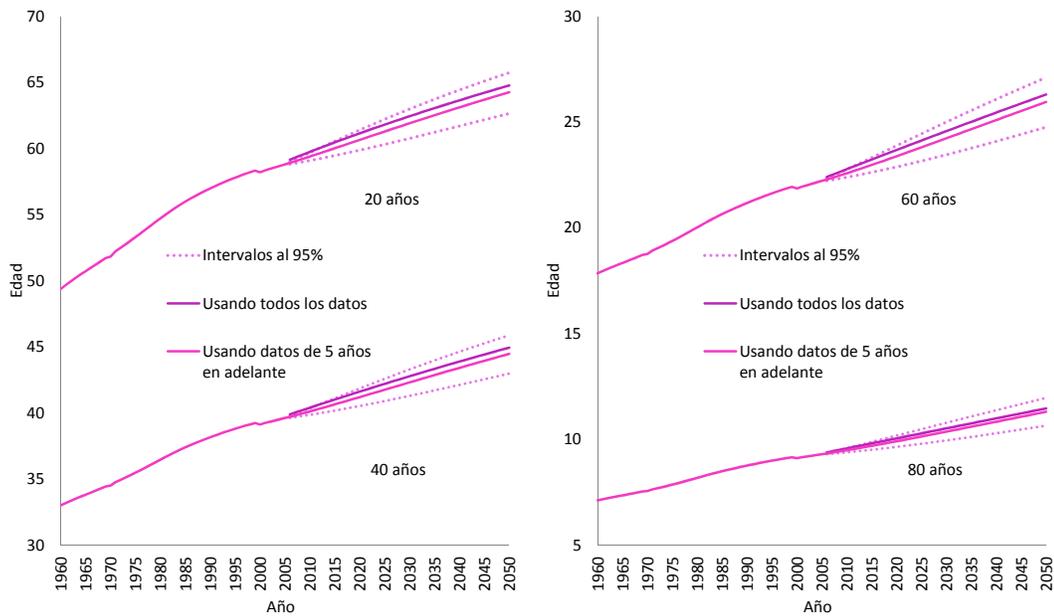


**Figura 3.6.** Valores medios pronósticados del parámetro  $k_t$  con intervalos de confianza. **Fuente:** Elaboración propia

Año $t$	Media	Año $t$	Media	Año $t$	Media	Año $t$	Media
2006	-57.1628	2018	-86.3024	2030	-115.442	2042	-144.5817
2007	-59.5911	2019	-88.7307	2031	-117.8703	2043	-147.01
2008	-62.0194	2020	-91.159	2032	-120.2986	2044	-149.4383
2009	-64.4477	2021	-93.5873	2033	-122.7269	2045	-151.8666
2010	-66.876	2022	-96.0156	2034	-125.1553	2046	-154.2949
2011	-69.3043	2023	-98.4439	2035	-127.5836	2047	-156.7232
2012	-71.7326	2024	-100.8722	2036	-130.0119	2048	-159.1515
2013	-74.1609	2025	-103.3005	2037	-132.4402	2049	-161.5798
2014	-76.5892	2026	-105.7288	2038	-134.8685	2050	-164.0081
2015	-79.0175	2027	-108.1571	2039	-137.2968		
2016	-81.4458	2028	-110.5854	2040	-139.7251		
2017	-83.8741	2029	-113.0137	2041	-142.1534		

**Tabla 3.7.** Pronostico medio del parámetro  $k_t$  para el caso femenino. **Fuente:** Elaboración propia

esperanzas de vida a distintas edades, Podemos observar como la esperanza de vida en el escenario donde se consideraron todos los datos es ligeramente mayor a la proyectada bajo el escenario donde se consideraron únicamente datos de las edades de 5 años en adelante, lo que nos indica que en el primer caso estábamos sobre estimando la mortalidad femenina, sin embargo, esta sobre estimación sigue estando dentro de los niveles de confianza pronosticados.



**Figura 3.7.** Pronóstico de la esperanza de vida en distintas edades, comparando aquella pronosticada con todos los datos con aquella pronosticada usando datos de 5 años de edad en adelante, mostrando los intervalos de confianza de esta última. **Fuente:** Elaboración propia

### 3.3.2. Mortalidad Masculina

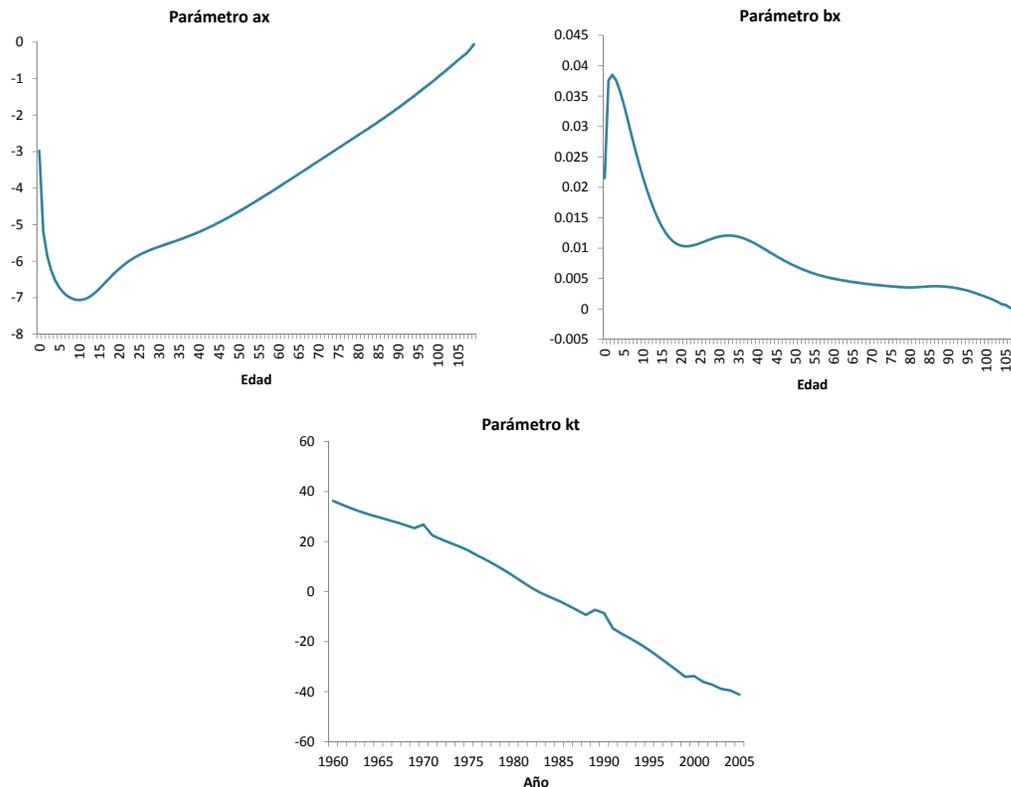
De igual manera que en el caso de la población femenina, el primer paso es seleccionar el método más adecuado para la estimación de los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$  de la ecuación (3.1), para posteriormente realizar el pronóstico de las tasas centrales de mortalidad con base en el parámetro  $k_t$ . Nuevamente el criterio para seleccionar el método más apropiado es a través del cálculo de la Ji-cuadrada referida en la ecuación (3.21), así como el cálculo del coeficiente de determinación  $R^2$  visto en (3.22). En la Tabla 3.8 se encuentra el comparativo de los cálculos.

Método de ajuste	Ji-cuadrada	$R^2$
SVD original	20,230	<b>0.9839</b>
SVD con ajuste de $k_t$ de Lee	16,624	0.9829
SVD con ajuste de $k_t$ de Booth	15,447	0.9809
MLE propuesto por Wilmoth	<b>14,212</b>	0.9792

**Tabla 3.8.** Comparación de modelos para la población masculina **Fuente:** Elaboración propia

Como en el caso de la población femenina, el método que mejor desempeño logró en el ajuste de los parámetros fue el MLE propuesto por Wilmoth (1993), puesto que presenta el menor valor de Ji-cuadrada, y un valor de  $R^2$  suficientemente alto para no rechazar dicho método. En la Figura 3.8 se muestran los parámetros obtenidos bajo este método. Se puede

observar que el parámetro  $a_x$  indica la forma que tiene el logaritmo de la mortalidad, y podemos observar que, a diferencia de la mortalidad femenina, a partir de los 15 años y hasta los 40 se presenta un abultamiento en su gráfica, siendo este abultamiento la “joroba de accidentes”. El parámetro  $b_x$  se refiere a la “velocidad” del decrecimiento de las tasas centrales de mortalidad por edad en respuesta a cambios en  $k_t$ , donde, a diferencia del caso femenino, a partir de los 20 años no presenta cambios sustanciales, lo que nos habla un poco de la “estabilidad” con la que se comporta la variación en dicha mortalidad. Finalmente se aprecia que la tendencia del parámetro  $k_t$  es muy similar al observado en la mortalidad femenina, mostrando ligeros saltos en los mismos años que en esta última, pero en general siguiendo una tendencia lineal.

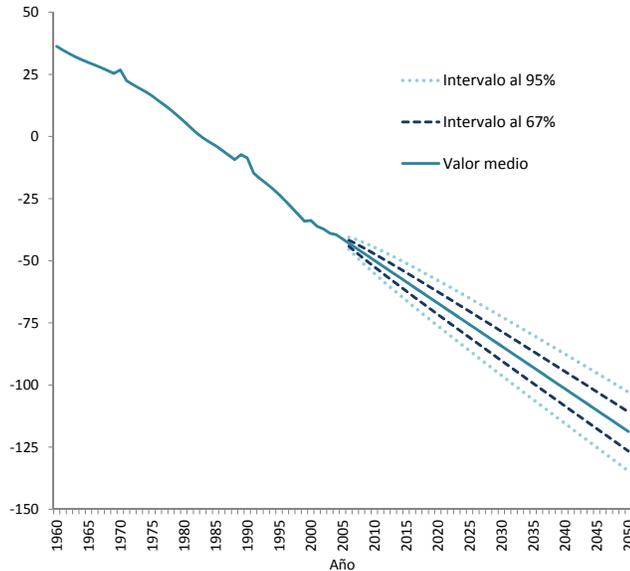


**Figura 3.8.** *Parámetros para la mortalidad masculina obtenidos a través del método de MLE de Wilmoth. Fuente: Elaboración propia*

El siguiente paso consiste en pronosticar el índice de mortalidad  $k_t$  de acuerdo al modelo ARIMA que mejor se ajuste a dicho índice. El que ofreció un mejor ajuste fue un modelo ARIMA(0,1,0) con deriva (dado que ya se explicó en el caso de la mortalidad femenina el componente de integración, mostramos directamente el modelo final),

$$\begin{aligned}
 k_t &= \theta_0 + k_{t-1} + e_t \\
 &= -1.7216 + k_{t-1} + e_t \\
 &\quad (0.1798)
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

donde la varianza de los residuales  $e_t$  es  $\sigma_e^2 = 1.454$ . Con estos valores se puede pronosticar el índice de la mortalidad masculina hasta el año 2050, así como los intervalos de predicción. La Figura 3.9 muestra los valores pronosticados y los intervalos de predicción del 67 y 95 por ciento.



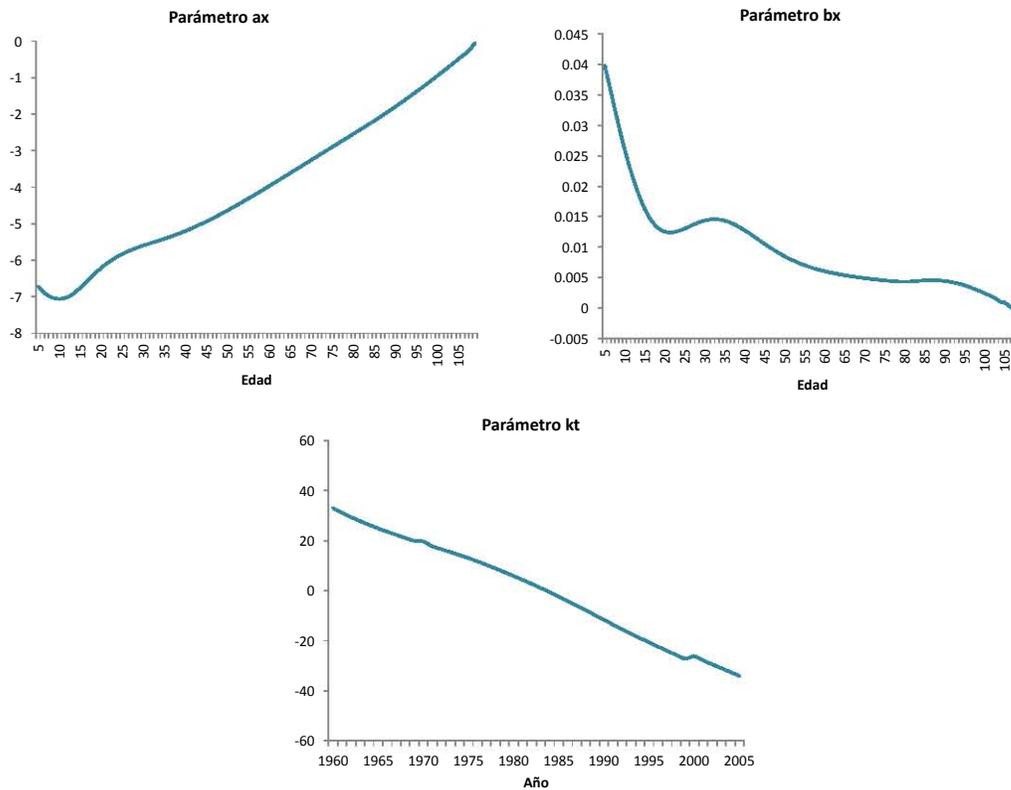
**Figura 3.9.** Valores medios pronósticados del parámetro  $k_t$  para la población masculina con intervalos de confianza al 67% y al 95%. **Fuente:** Elaboración propia

Nuevamente, con la finalidad de tratar de optimizar los resultados obtenidos, se recalculan los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$  bajo la restricción propuesta en la edad, es decir, considerando únicamente datos de los 5 años de edad en adelante. El primer paso es decidir el método óptimo para la estimación de dichos parámetros a través del comparativo entre los cuatro métodos analizados en este trabajo. Los resultados se muestran en la Tabla 3.9.

Método de ajuste	Ji-cuadrada	$R^2$
SVD original	6,503	<b>0.9794</b>
SVD con ajuste de $k_t$ de Lee	7,330	0.9767
SVD con ajuste de $k_t$ de Booth	6,450	0.9792
MLE propuesto por Wilmoth	<b>6,326</b>	0.9785

**Tabla 3.9.** Comparación de modelos para la población masculina omitiendo datos de edades de 0 a 4 años **Fuente:** Elaboración propia

Los resultados obtenidos son similares a los vistos en la mortalidad femenina; es decir, el método MLE vuelve a ser el que arroja los mejores resultados, el ajuste al parámetro  $k_t$  propuesto por Lee (2000) resultó ser el modelo con los valores más altos del estimador Ji-Cuadrada, y finalmente, existe un notable descenso en el valor del estimador Ji-Cuadrada, ya que pasamos de números del orden de catorce mil a números del orden de seis mil, esto



**Figura 3.10.** Parámetros para la mortalidad masculina obtenidos a través del método de MLE de Wilmoth considerando edades de 5 años en adelante. **Fuente:** Elaboración propia

comparando los resultados obtenidos entre los métodos donde se consideraron todos los datos (Tabla 3.8), y los métodos donde únicamente se usaron datos de los cinco años de edad en adelante, lo cual nos indica que el mayor peso de los errores se da en las edades jóvenes.

Para realizar un comparativo más adecuado se obtuvo el valor del estimador Ji-Cuadrada (ver función (3.21)) considerando edades de 5 años en adelante bajo el caso donde estimamos los parámetros por medio de MLE con todos los datos. El valor de dicho estimador es de  $\chi^2 = 8,379$ , que comparado con el mismo valor de la Tabla 3.9 (6,326) resulta ser más alto (similar a lo ocurrido en la mortalidad femenina, sólo que en este caso el incremento no es tan grande como el visto en esta última), por lo que podemos asumir que una restricción sobre nuestros datos es deseable con tal de poder tener mejores estimaciones de la mortalidad en las edades buscadas. En la Figura 3.10 se muestran los parámetros calculados con el método MLE bajo las restricciones de los datos mencionadas anteriormente, mientras que en las Tablas 3.10 y 3.11 se muestran los valores numéricos de dichos parámetros. De manera similar al caso femenino, el cambio importante se da en el parámetro  $k_t$ , volviéndose prácticamente lineal, sin alteraciones en su estructura.

Finalmente se realiza una nueva estimación de los parámetros omitiendo las edades desde 0 hasta 9 años. Los resultados se muestran en la Tabla 3.12, donde podemos observar que la variación entre dichos resultados y los obtenidos en la Tabla 3.9 no es significativa, razón

Edad $x$	$a_x$	$b_x$	Edad $x$	$a_x$	$b_x$	Edad $x$	$a_x$	$b_x$
5	-6.7102	0.0398	40	-5.2021	0.0128	75	-2.9027	0.0045
6	-6.8476	0.0371	41	-5.154	0.0123	76	-2.8315	0.0045
7	-6.9448	0.0342	42	-5.104	0.0119	77	-2.7604	0.0044
8	-7.0107	0.0313	43	-5.052	0.0114	78	-2.6894	0.0044
9	-7.0495	0.0286	44	-4.9983	0.011	79	-2.6184	0.0043
10	-7.0626	0.026	45	-4.9427	0.0105	80	-2.547	0.0043
11	-7.0497	0.0237	46	-4.8856	0.0101	81	-2.4753	0.0043
12	-7.0103	0.0215	47	-4.827	0.0097	82	-2.4033	0.0044
13	-6.9459	0.0195	48	-4.7668	0.0093	83	-2.3313	0.0044
14	-6.8597	0.0178	49	-4.7054	0.0089	84	-2.2592	0.0045
15	-6.7578	0.0163	50	-4.6427	0.0085	85	-2.1859	0.0045
16	-6.6465	0.015	51	-4.5789	0.0082	86	-2.1113	0.0046
17	-6.532	0.014	52	-4.5142	0.0078	87	-2.0354	0.0046
18	-6.4191	0.0133	53	-4.4484	0.0075	88	-1.9584	0.0045
19	-6.3111	0.0128	54	-4.3818	0.0073	89	-1.8804	0.0045
20	-6.2104	0.0125	55	-4.3146	0.007	90	-1.8014	0.0044
21	-6.1179	0.0124	56	-4.2466	0.0068	91	-1.7213	0.0043
22	-6.034	0.0124	57	-4.1781	0.0066	92	-1.6403	0.0042
23	-5.9585	0.0126	58	-4.109	0.0064	93	-1.5585	0.0041
24	-5.891	0.0128	59	-4.0395	0.0062	94	-1.4755	0.0039
25	-5.8304	0.013	60	-3.9696	0.006	95	-1.3916	0.0037
26	-5.7761	0.0133	61	-3.8994	0.0059	96	-1.3067	0.0035
27	-5.7269	0.0136	62	-3.8289	0.0057	97	-1.2208	0.0033
28	-5.6819	0.0139	63	-3.758	0.0056	98	-1.1339	0.003
29	-5.6403	0.0142	64	-3.6871	0.0055	99	-1.046	0.0027
30	-5.601	0.0144	65	-3.616	0.0054	100	-0.9569	0.0024
31	-5.5633	0.0145	66	-3.5448	0.0053	101	-0.8662	0.0021
32	-5.5264	0.0146	67	-3.4735	0.0052	102	-0.7762	0.0018
33	-5.4897	0.0146	68	-3.4021	0.0051	103	-0.6839	0.0015
34	-5.4526	0.0145	69	-3.3307	0.005	104	-0.5924	0.001
35	-5.4146	0.0144	70	-3.2593	0.0049	105	-0.4959	0.0009
36	-5.3754	0.0141	71	-3.1879	0.0048	106	-0.4076	0.0004
37	-5.3348	0.0139	72	-3.1166	0.0047	107	-0.3232	-0.0001
38	-5.2924	0.0135	73	-3.0452	0.0047	108	-0.2032	0.0014
39	-5.2482	0.0132	74	-2.9739	0.0046	109	-0.0633	0.0031

**Tabla 3.10.** Parámetros  $a_x$  y  $b_x$  obtenidos con el método MLE omitiendo las edades de 0 a 4 años edad para el caso masculino. **Fuente:** Elaboración propia

por lo que no es necesario una nueva restricción sobre los datos.

Se pronostica nuevamente el índice de mortalidad  $k_t$  de acuerdo al modelo ARIMA que mejor se ajuste a dicho índice, resultando en este caso nuevamente un modelo ARIMA(0,1,0)

Año $t$	$k_t$	Año $t$	$k_t$	Año $t$	$k_t$	Año $t$	$k_t$
1960	32.9802	1972	16.5592	1984	-0.6183	1996	-22.3593
1961	31.1272	1973	15.4362	1985	-2.3624	1997	-24.0371
1962	29.4088	1974	14.2621	1986	-4.148	1998	-25.6904
1963	27.7958	1975	13.0148	1987	-5.9834	1999	-27.3106
1964	26.2961	1976	11.6937	1988	-7.8633	2000	-26.0313
1965	24.8714	1977	10.3117	1989	-9.738	2001	-27.8935
1966	23.5631	1978	8.8746	1990	-11.6014	2002	-29.4366
1967	22.3211	1979	7.3909	1991	-13.5374	2003	-30.9555
1968	21.0896	1980	5.8654	1992	-15.3823	2004	-32.499
1969	19.9354	1981	4.3091	1993	-17.1832	2005	-34.0326
1970	19.6944	1982	2.7126	1994	-18.9378		
1971	17.6691	1983	1.0799	1995	-20.661		

**Tabla 3.11.** Parámetro  $k_t$  obtenido con el método MLE omitiendo las edades de 0 a 4 años para el caso masculino. **Fuente:** Elaboración propia

Método de ajuste	Ji-cuadrada	$R^2$
SVD original	5,972	<b>0.9700</b>
SVD con ajuste de $k_t$ de Lee	6,913	0.9644
SVD con ajuste de $k_t$ de Booth	5,901	0.9698
MLE propuesto por Wilmoth	<b>5,815</b>	0.9688

**Tabla 3.12.** Comparación de métodos omitiendo datos de edades de 0 a 9 años para la mortalidad masculina **Fuente:** Elaboración propia

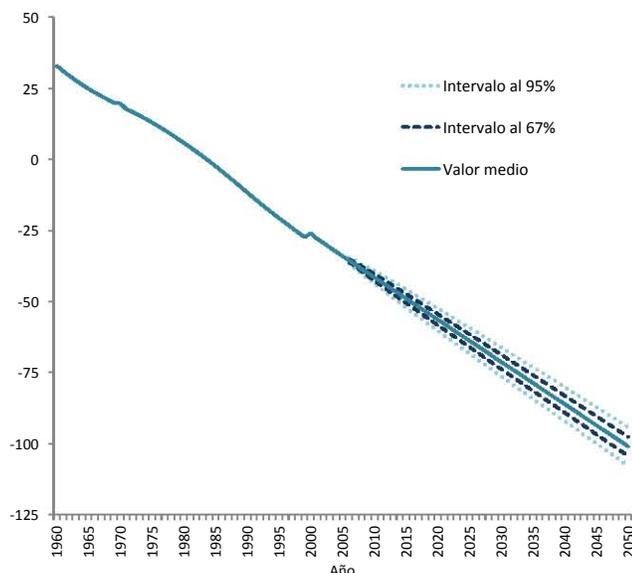
con deriva. El modelo queda como sigue,

$$\begin{aligned}
 k_t &= \theta_0 + k_{t-1} + e_t \\
 &= -1.4892 + k_{t-1} + e_t \\
 &\quad (0.0772)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde la ecuación (3.33) representa el modelo de pronóstico del parámetro  $k_t$  usando datos de los cinco años de edad en adelante, con varianza de los residuales  $e_t$ ,  $\sigma_{e_t}^2 = 0.2684$ . La Figura 3.11 muestra los valores pronosticados y los intervalos de predicción del 67 y 95 por ciento, mientras que la Tabla 3.13 se muestra los valores medios obtenidos del pronóstico del parámetro (los valores de los pronósticos de los intervalos de confianza se muestran en los anexos de este trabajo).

Nuevamente, con el pronóstico del parámetro  $k_t$  podemos calcular los valores de la tasa central de mortalidad  $m_{x,t}$  para los años  $t$  pronosticados, y a partir de estos podemos calcular pronósticos con sus respectivos intervalos de confianza para el resto de los indicadores propios de una tabla de mortalidad.

Como en el caso de la mortalidad femenina, se compararán los valores pronosticados



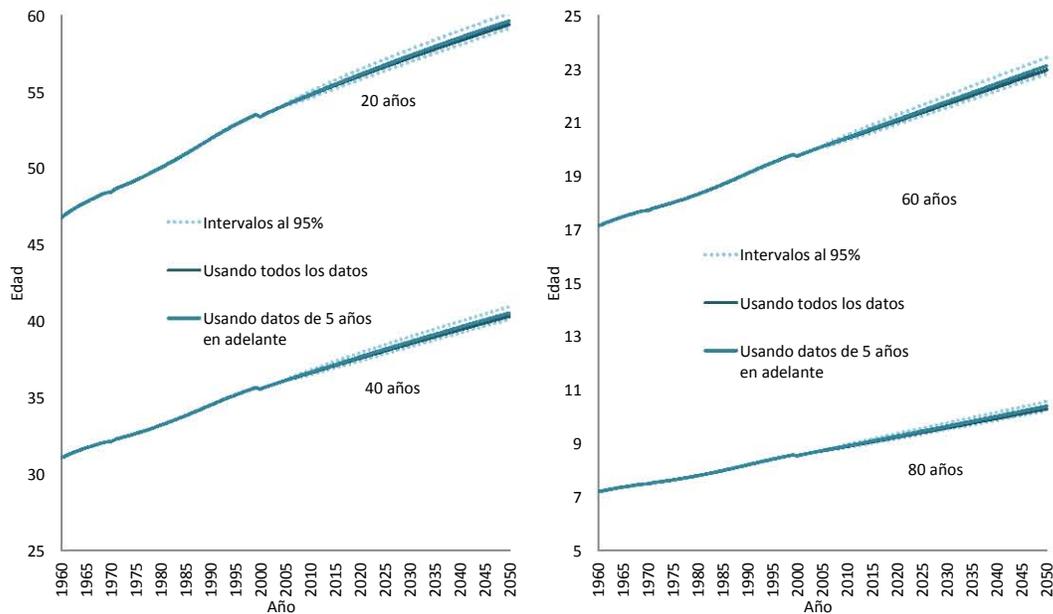
**Figura 3.11.** Valores medios pronósticos del parámetro  $k_t$  con intervalos de confianza.  
**Fuente:** Elaboración propia

Año $t$	Media						
2006	-35.5218	2018	-53.3919	2030	-71.262	2042	-89.1321
2007	-37.011	2019	-54.8811	2031	-72.7511	2043	-90.6212
2008	-38.5001	2020	-56.3702	2032	-74.2403	2044	-92.1104
2009	-39.9893	2021	-57.8594	2033	-75.7295	2045	-93.5996
2010	-41.4785	2022	-59.3486	2034	-77.2187	2046	-95.0888
2011	-42.9677	2023	-60.8378	2035	-78.7078	2047	-96.5779
2012	-44.4568	2024	-62.3269	2036	-80.197	2048	-98.0671
2013	-45.946	2025	-63.8161	2037	-81.6862	2049	-99.5563
2014	-47.4352	2026	-65.3053	2038	-83.1754	2050	-101.0455
2015	-48.9244	2027	-66.7944	2039	-84.6645		
2016	-50.4135	2028	-68.2836	2040	-86.1537		
2017	-51.9027	2029	-69.7728	2041	-87.6429		

**Tabla 3.13.** Pronostico medio del parámetro  $k_t$  para el caso masculino. **Fuente:** Elaboración propia

de la esperanza de vida bajo las dos condiciones analizadas en este apartado. Es decir, el pronóstico de la esperanza de vida calculado bajo el escenario donde consideramos todos los datos, y el escenario donde consideramos datos únicamente a partir de los 5 años de edad, esto con tal de analizar las variaciones entre una estimación y otra. En la Figura 3.12 se muestra un comparativo de las esperanzas de vida a distintas edades.

En este caso observamos que la esperanza de vida considerando todos los datos es muy ligeramente menor a la proyectada usando únicamente datos de edad de 5 años en adelante,



**Figura 3.12.** Pronóstico de la esperanza de vida en distintas edades, comparando aquella pronosticada con todos los datos contra aquella pronosticada usando datos de 5 años de edad en adelante, mostrando los intervalos de confianza de esta última. **Fuente:** Elaboración propia

lo que nos indica que en el primer caso estábamos subestimando la mortalidad masculina, sin embargo, la diferencia entre ambas proyecciones de la esperanza de vida es mínima, casi imperceptible, acentuando más el hecho de que la estimación se encuentra dentro de los niveles de confianza pronosticados.

La construcción de las tablas se realiza a través de los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$  obtenidos en esta sección, aplicadas a la ecuación (3.26), y pueden crearse tantos grupos de tablas de mortalidad como pronósticos del parámetro  $k_t$  se realicen. Para este trabajo se eligió la media del pronóstico de  $k_t$  para elaborar la serie de tablas de mortalidad de los años 2006 a 2050, mismas que son aplicadas en el Capítulo siguiente. Se elaboró adicionalmente otro grupo de tablas de mortalidad con el pronóstico alto y bajo al 95% con fines comparativos. Dado que el mostrar dichas tablas en el presente trabajo hubiera requerido una gran cantidad de espacio, se decidió mostrar únicamente el valor de los parámetros necesarios para su construcción.

# Capítulo 4

## Los planes privados de pensiones y la influencia de la mortalidad en ellos

### 4.1. Los planes de pensiones

Un plan de pensiones es un mecanismo técnico y legal, mediante el cual un organismo estipula el pago de un cierto tipo de beneficios bajo ciertas normas, en forma de una pensión a los trabajadores y/o dependientes económicos, así como la forma en que estos se deberán financiar (Reyes, 2005, pag. 7). Se entiende como pensión el pago periódico (generalmente mensual) otorgado a una persona, a partir del momento y mientras que subsisten, las causas establecidas para su pago (*Ibid.*). Lo que se busca al momento de instalar un plan de pensiones, es el establecer un mecanismo mediante el cual se permita a las personas de edad avanzada, obtener un beneficio decoroso sustitutivo del que dejarán de percibir al momento del retiro.

#### 4.1.1. Clasificación de los planes de pensiones

Existen diversos criterios para clasificar los planes de pensiones, los más utilizados son de acuerdo al patrocinador o administrador del plan y de acuerdo al tipo de beneficio. Bajo el primer criterio, los planes se clasifican en públicos o privados. Los planes públicos pueden ser ofrecidos por empresas públicas o por instituciones de seguridad social o asistencial a nivel federal o local. Los planes privados pueden ser provistos por las empresas a sus trabajadores (planes ocupacionales) o pueden ser adquiridos de manera voluntaria por cada trabajador a través de algún intermediario financiero, generalmente, una aseguradora (planes personales) (Lagarda y Mandujano, 2008, pag. 13).

Utilizando el criterio del tipo de beneficio, los sistemas de pensiones pueden clasificarse en sistemas de de contribución definida (CD), beneficio definido (BD), o mixtos.

**Planes de Contribución Definida:** Como su nombre lo indica, este tipo de planes establecen un monto definido de las contribuciones del trabajador y/o patrón y/o gobierno, generalmente como un determinado porcentaje del salario. El beneficio del trabajador al retiro está determinado por la cantidad que haya logrado acumular hasta dicho momento, de esta forma, los beneficios dependerán de los fondos acumulados de manera individual. Al momento del retiro, el trabajador recibe el saldo acumulado o se le obliga a adquirir una renta vitalicia o a llevar a cabo un retiro programado.

- *La renta vitalicia:* Consiste en el pago de una pensión por parte de una aseguradora al trabajador o sus beneficiarios. El nivel de la pensión estará determinado por el precio de la renta vitalicia, que se establece de acuerdo con la rentabilidad que la aseguradora le garantiza al trabajador por sus recursos durante la etapa de desacumulación y a la probabilidad de sobrevivencia del trabajador y sus beneficiarios. De esta forma, el trabajador transfiere a la aseguradora los riesgos respecto a la rentabilidad de sus recursos y de sobrevivir un número de años mayor a lo esperado.
- *El retiro programado:* Consiste en una desacumulación gradual del fondo de acuerdo con la probabilidad de sobrevivencia del trabajador. Bajo esta modalidad el trabajador asume los riesgos inherentes a la inversión de los recursos y de sobrevivir más tiempo del esperado.

Para un plan de CD, las contribuciones anuales a un fondo especificado están definidas, mientras que el beneficio que el trabajador recibirá al momento del retiro será desconocido hasta dicho momento.

**Planes de Beneficio Definido:** Son aquellos donde el beneficio al retiro es una cantidad definida, generalmente expresada en términos del salario del trabajador y de sus años laborados. Por ejemplo, un plan podría proveer un beneficio del 1.5 por ciento del salario promedio del último año del trabajador, por cada año laborado. Un empleado con 20 años trabajando recibirá, entonces, un beneficio equivalente al 30 por ciento de su salario promedio final.

Dado que el ejemplo está basado en el salario del trabajador, el beneficio preciso no será conocido hasta el momento del retiro, como en el caso de un plan de CD; sin embargo, la fórmula del beneficio, a diferencia de la fórmula de la contribución, está definida, de allí el término de plan de beneficio definido.

**Planes Mixtos:** Consisten en combinaciones de sistemas de BD y CD, por ejemplo, un plan de CD podría estipular un nivel mínimo de pensión, que equivale a un BD mínimo, independientemente del nivel de ahorro acumulado por el trabajador.

Los planes de BD, a diferencia de los de CD, comprometen al patrocinador a cumplir con los beneficios ofrecidos, por lo cual éste último debe contar con los recursos suficientes para hacer frente a sus obligaciones. Para dicho fin, el patrocinador puede estimar el valor presente de los pasivos que ha asumido, mediante la estimación actuarial de los pagos que deberá realizar a los miembros del plan utilizando distribuciones de probabilidad de sobrevivencia del trabajador y sus beneficiarios y algún factor de descuento. En la Tabla 4.1 se

muestra un comparativo entre las características de los planes de pensiones de BD contra los de CD.

Beneficio Definido (BD)	Contribución Definida (CD)
El monto del beneficio al cual será acreedor un afiliado (o sus beneficiarios) se especifica por adelantado.	El monto de la pensión está en función de las aportaciones, los rendimientos obtenidos y las comisiones cobradas.
El beneficio se establece en la ley o en las reglas del plan (generalmente corresponde a un porcentaje del salario del trabajador).	Típicamente, estos sistemas tienen cuentas de capitalización a nombre de cada trabajador.
El envejecimiento de la población permite que estos esquemas de pensiones sean vulnerables en viabilidad financiera.	Mantienen su equilibrio y viabilidad financiera ante cualquier cambio demográfico.
Pueden ser totalmente fondeados, parcialmente fondeados o de reparto.	Por definición, los sistemas de pensiones de cuentas individuales están fondeados.
Generalmente, no reconoce la carrera laboral de los trabajadores, lo que no necesariamente es equitativo para los trabajadores, especialmente, para los de menores ingresos.	Los beneficios equivalen a lo ahorrado más los rendimientos generados, por lo que reconocen la carrera laboral de los trabajadores.
El trabajador puede perder lo aportado por no cumplir con los requisitos (semanas de cotización o edad de retiro), afectando principalmente a trabajadores de menores ingresos y a mujeres.	El trabajador tiene la propiedad de los recursos; pudiendo disponer de ellos aún cuando éste no haya cumplido los requisitos necesarios para obtener una pensión.

**Tabla 4.1.** Comparación entre planes de beneficio definido y contribución definida. **Fuente:** Lagarda y Mandujano (2008, pag. 12)

#### 4.1.2. Situación actual de los planes de pensiones en México

Los sistemas públicos de pensiones, como lo son los ofrecidos por el IMSS y más recientemente el ISSSTE han migrado su esquema de pensiones, originalmente diseñados de BD a los recientes de CD con la incorporación de las AFOREs. Sin embargo, el entorno de los planes privados de pensiones es distinto. De acuerdo a los datos recolectados por la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (CONSAR, 2011) al 31 de mayo de 2011 se menciona lo siguiente:

- Existen registrados en México 1,946 planes de pensiones privados, de los cuales el 56 por ciento son de beneficio definido, mientras que el 10 por ciento opera bajo un esquema de contribución definida. Adicionalmente, 34 por ciento tiene un carácter mixto.
- El total de los activos acumulados por estos planes privados de pensiones asciende a más de 412,595 millones de pesos, lo que representa 3.2 por ciento del Producto Interno Bruto (PIB). Esta cifra se suma a los recursos de ahorro para el retiro del sistema obligatorio con el cual se habrá de enfrentar el envejecimiento poblacional en las próximas décadas.
- Existe una tendencia gradual de las empresas hacia el establecimiento de esquemas de contribución definida y planes mixtos. En este sentido, el número de nuevos planes de beneficio definido ha descendido de 92 por ciento (planes instalados hasta 1995) a 21 por ciento (planes instalados en 2011).
- La preocupación por mejorar las condiciones de retiro en el país ha adquirido mayor relevancia en los últimos años, lo cual se refleja en que el 42 por ciento de los planes existentes en la actualidad han sido creados en los últimos cinco años. Asimismo, el 65 por ciento de los planes existentes tiene menos de 10 años de haberse establecido.
- El total de los planes registrados cubre a 1,430,058 personas, de las cuales 1,349,971 (es decir, el 94 por ciento del total) son empleados activos, 57,617 (el 4 por ciento) son pensionados y 22,470 (el 2 por ciento) son ex-empleados con derechos adquiridos.

Estos datos nos sirven para tener un mejor panorama sobre la importancia de los planes de pensiones privados en México, destacando que, a diferencia de los sistemas públicos de pensiones, los planes de BD aun siguen prevaleciendo como mayoría en el entorno privado, por lo que una estimación adecuada de los pasivos que dichas compañías están adquiriendo es crucial para el financiamiento adecuado de dichos planes.

Es por ello que para fines prácticos, los ejercicios que se muestran en el último apartado de este capítulo, en donde se ilustrará la relevancia de la estimación de la mortalidad en estos planes, estarán enfocados en planes de pensiones de BD. Vale la pena mencionar que también existe un efecto de la mortalidad en los planes de CD, ya que a pesar de que su financiamiento depende únicamente del capital acumulado al momento del retiro, la renta vitalicia o el retiro programado derivados de este capital tendrá algún cambio dependiendo del tipo de tabla de mortalidad que se use para su cálculo.

## **4.2. Variables que influyen en el costo de un plan de pensiones**

Uno de los principales puntos que se deben considerar para determinar el costo de los pasivos adquiridos en los planes de pensiones, es la adecuada aplicación de hipótesis actuariales con fundamentos lo más reales posibles, de acuerdo a la experiencia propia de cada empresa

y a la situación económica que se vive. Las Hipótesis Actuariales son las mejores estimaciones de una compañía de las variables que determinaran los costos de la obligación contraída de la implementación de algún tipo de beneficio al retiro (IAS 19, 2011, párrafo 76). Estas hipótesis están fundamentadas en la extrapolación de la experiencia. Es decir, reconociendo el hecho de lo que sucedió en el pasado como una guía de lo que probablemente sucederá en el futuro (Reyes, 2005, pag. 19). Dichas hipótesis abarcan demográficas y económicas.

#### 4.2.1. Hipótesis demográficas

De acuerdo a Winklevoss (1977, pag. 12), los participantes activos de un plan están expuestos a las contingencias de muerte, invalidez, rotación y retiro, mientras que los participantes ya retirados están expuestos únicamente al factor muerte. Dichas contingencias deben de ser cuantificadas y actúan como fuerzas que disminuyen las obligaciones en un plan de pensiones al retiro. El grado de confiabilidad de estos resultados, comunmente registrados en tablas depende, entre otras cosas, de la veracidad con la que estos representan a la población, ya que se asume que la muestra tendrá un comportamiento muy similar al de la población original. Al compendio de estos resultados se les conoce como hipótesis demográficas.

Las causas que representan la probabilidad de salir del grupo, y por tanto, perder el estatus de “trabajador activo”, se dividen en:

- **Mortalidad:** Representan el efecto que tendrá la mortalidad en un determinado grupo. La sobrestimación de esta hipótesis implicaría el fallecimiento (supuesto) de un mayor número de personas, y como consecuencia una reducción en los costos de los pasivos ya que se supone que menos empleados llegarán con vida a la edad de retiro, haciendo necesario generar reservas más pequeñas para el pago de la pensión. El caso contrario es el de subestimar esta hipótesis, lo que da como resultado una población más grande a la edad de retiro, implicando mayores pasivos y por consecuencia, la necesidad de crear mayores reservas para el pago de las obligaciones.
- **Invalidez:** La hipótesis de invalidez representa un comportamiento semejante a la mortalidad pero a un nivel menos significativo, a menos que el plan otorgue beneficios adicionales por esta causa de decremento o se trate de empresas cuya actividad refleje un alto índice de riesgos ya que en este caso se incrementará dependiendo del beneficio que se otorgue o del riesgo a que estén expuestos los trabajadores.
- **Rotación:** Representa al número de empleados que se espera se separen de la empresa por cualquier causa (separación voluntaria o despido). El efecto de ésta hipótesis es el que más impacta a la valuación de los pasivos, ya que suele ser el factor más representativo para determinar el número de empleados activos que dejarán de serlo a lo largo del tiempo, y por consiguiente, determina el número de empleados que llegarán a condiciones de retiro. Hay diferentes variables que influyen en la construcción de una tabla de rotación, pero las dos más utilizadas son la edad y los servicios en la empresa.

En consecuencia los esquemas de rotación frecuentemente involucran estos dos puntos y son llamadas tasas selectas y últimas, aunque muchos actuarios aún siguen utilizando tasas de rotación que involucran a la edad como única variable.

- **Retiro o Jubilación:** Representa al número de empleados que, ya habiendo cumplido con los requisitos para retirarse bajo el plan, hagan efectivo ese derecho. Esta hipótesis depende de las condiciones que se establezcan en el plan, ya que habrá planes que otorguen cierta holgura en cuestión de edad y años de servicios para poder retirarse, mientras que habrá otros que fijen cierta edad para poder hacerlo. La construcción de una tabla de retiro, así como en el caso de la tabla de rotación, está basada en la edad y los años de servicio; sin embargo, en este caso la implementación de los años de servicio como variable dependerá de lo estipulado en cada plan.

#### 4.2.2. Hipótesis económicas

Son los criterios adoptados por los actuarios en el ámbito financiero para la valuación del financiamiento de planes de pensiones. Las hipótesis económicas que deben seleccionarse para efectos de una valuación actuarial son:

- **Tasa de descuento:** La tasa de descuento refleja el valor del dinero en el tiempo, más no así el riesgo actuarial o de inversión (IAS 19, 2011, párrafo 84). Es utilizada para descontar un pago futuro al tiempo presente y juega un papel crucial en la determinación del costo de un plan de pensiones, ya que ligeras variaciones en la misma pueden alterar significativamente el valor de dicho costo.
- **Tasa de incremento de salarios:** Es la tasa usada para determinar los futuros incrementos que se espera reciban los empleados en cuestión de salario, y por lo tanto, es la tasa que va a determinar el posible salario futuro de un empleado al momento de llegar a la edad de jubilación  $w$ . La importancia de esta tasa radica en que el beneficio a otorgar al empleado al momento de su jubilación suele estar en función del salario que tenga dicho empleado en ese momento.
- **Tasa de rendimientos de activos:** Al momento de la creación de un plan de pensiones, es necesario la creación de un fondo para solventar las obligaciones que se han adquirido por la implementación del primero. La tasa de rendimiento de los activos es la tasa de rendimiento que se espera tenga dicho de manera anual.
- **Tasa de actualización de beneficios:** El beneficio que se espera otorgar al empleado una vez que esté en calidad de “jubilado”, dependiendo de lo estipulado en el plan, podrá incrementarse de manera anual bajo las condiciones estipuladas en el mismo plan. La tasa de actualización de beneficios es la tasa de incremento derivada de dichas condiciones.

A pesar de que existen muchas variables involucradas en la valuación de un plan privado de pensiones, en este trabajo se busca profundizar únicamente en el impacto que tiene la

tabla de mortalidad en dicha valuación. Para ello, se realizará un ejercicio práctico en el cual se calculará el valor del pasivo total de una compañía que cuenta con un plan de pensiones, donde la única variable que no se mantendrá constante entre los comparativos es la mortalidad. Dicha compañía tendrá tanto personal activo, como personal que ya se encuentra actualmente recibiendo una pensión por jubilación.

El ejercicio consistirá en tres partes, en la primera se medirá la variación del pasivo al utilizar, por un lado las tablas generadas en este trabajo en su totalidad, mientras que por el otro, se utilizará únicamente una tabla fija, dependiendo del año que seleccionemos para ello. Esto con el fin de apreciar el impacto de realizar proyecciones de la mortalidad y aplicarlas a la valuación de un plan de pensiones, en lugar de utilizar una tabla de periodo. La segunda parte del ejercicio consiste en calcular el pasivo de dicha compañía utilizando distintas tablas de mortalidad existentes y las tablas generadas en este trabajo, para finalmente comparar los pasivos obtenidos. Lo que se busca con este ejercicio es determinar que tan sobrevaluados o subvaluados están los pasivos al compararlos con las tablas creadas en este trabajo. La tercera parte muestra alguna de las ventajas que dicha compañía podría tener al utilizar tablas de mortalidad elaboradas a través de pronósticos, ya que la misma puede tener toda una gama de opciones dependiendo de sus necesidades.

## 4.3. Metodología

En esta sección se explica la metodología a seguir para la realización del ejercicio. El propósito del ejercicio es el de comparar los pasivos totales de una compañía que cuenta con un plan de pensiones privados que se obtienen al modificar la tabla de mortalidad utilizada en la valuación de dichos pasivos. Para ello, se introducirán algunos conceptos y se explicará la participación que juegan las hipótesis demográficas y económicas en la valuación del plan.

### 4.3.1. Anualidad de Vida

De acuerdo a Bowers *et al.* (1997, pag. 133), una anualidad de vida es una serie de pagos que se realizan continuamente o en intervalos iguales de tiempo (como pueden ser meses, semanas, años) mientras un individuo dado se mantiene con vida. La anualidad puede ser temporal, es decir, limitada a una cantidad dada de años, o puede ser pagada de manera vitalicia. Los pagos pueden ser hechos al inicio de los intervalos de tiempo (anualidad anticipada) o al final de los mismos (anualidad vencida).

Una anualidad de vida anticipada de una persona de edad  $x$  que paga 1 peso anualmente de manera vitalicia en se denota como  $\ddot{a}_x$ , y está definida de la siguiente manera:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{z-x} V_i^k {}_k p_x, \quad \forall x < z \quad (4.1)$$

donde,

- $V_i^k = (1 + i)^{-k}$  es el valor presente de 1 peso que se encuentra  $k$  periodos después, usando la tasa de interés anual de  $i$
- ${}_k p_x$  es la probabilidad de que una persona de edad  $x$  llegue con vida a la edad  $x + k$
- $z$  es la edad de la tabla de mortalidad utilizada para el cálculo de la anualidad tal que  $q_z = 1$

Mientras que una anualidad de vida vencida que paga 1 peso anualmente de manera vitalicia se denota como  $a_x$ , y está definida como sigue:

$$a_x = \sum_{k=1}^{z-x} V_i^k {}_k p_x \quad \forall x < z \quad (4.2)$$

Cuando los pagos, en lugar de realizarse de anualmente, se realizan  $m$  veces en intervalos anuales, se tiene una anualidad pagadera  $m$  veces en un año. Una anualidad de vida anticipada que paga la cantidad de  $1/m$  pesos  $m$  veces anualmente de manera vitalicia en se denota como  $\ddot{a}_x^{(m)}$ , y está definida de la siguiente manera.

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \quad (4.3)$$

Mientras que una anualidad de vida vencida que paga  $1/m$  pesos  $m$  veces anualmente de manera vitalicia en se denota como  $a_x^{(m)}$ , y está definida de la siguiente manera.

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} \quad (4.4)$$

En adelante habrá términos que se pueden expresar en función de anualidades de vida, sin embargo, para efectos de este trabajo consideraremos únicamente la anualidad de vida vista en la ecuación (4.4), por lo que todas las expresiones que se definan en términos de anualidades de vida se harán tomando como base esta anualidad, sin que esto implique que alguna otra más no pueda ser utilizada. Asimismo, siempre que se haga mención de alguna anualidad, quedará implícito que el único decremento asociado a dicha anualidad será la mortalidad.

### 4.3.2. Beneficio por Jubilación

El Beneficio por Jubilación es el beneficio que se le otorgará al trabajador cuando este cumpla con los requisitos establecidos en el Plan para jubilarse. Para los planes de beneficio definido, existen tres tipos de Beneficio por Jubilación (Winklevoss, 1977, pag. 5,6):

- **Beneficio constante:** Consiste en otorgarle al trabajador, una cantidad determinada de dinero (por ejemplo, 1000 pesos) por cada año de servicio laborado en la compañía.

- **Promedio de los todos años de servicio:** Provee un beneficio definido en términos de algún porcentaje estipulado del salario promedio de todos los años de servicio, por ejemplo, un plan podría definir el beneficio como el 2 por ciento del salario mensual de cada año.
- **Promedio de los últimos años de servicio:** Este beneficio consiste en otorgar un porcentaje del último salario promedio por cada año de servicio brindado a la empresa. El último salario promedio deberá estar estipulado en cada plan. Algunos planes podrán considerar el salario promedio de los 12 meses previos a la fecha de jubilación, mientras que otros planes podrían considerar el promedio de los últimos 5 años, por ejemplo.

Para todos los casos, el salario que se considera para calcular dichos beneficios puede ser el salario base, o se puede considerar alguna integración adicional, como puede ser el aguinaldo, prima vacacional, fondo de ahorro, comisiones, etc., todo de acuerdo a lo estipulado en cada plan. En este trabajo consideraremos el último beneficio enlistado, y para facilitar los cálculos, en lugar de considerar para su cálculo el promedio de los salarios, se utilizará el último salario percibido por cada trabajador, quedando expresado el beneficio de la siguiente manera,

$$B_x^w = \alpha SM_x (1 + s)^{w-x} (w - y) \quad \forall x < w \quad (4.5)$$

donde,

- $B_x^w$  es el Beneficio por Jubilación de una persona de edad actual  $x$  cuya jubilación se dará al llegar a la edad  $w$ .
- $\alpha$  es el porcentaje del salario que se otorgará como beneficio.
- $SM_x$  es el Salario Mensual que percibe una persona de edad actual  $x$ .
- $(1 + s)^{w-x}$  es el incremento salarial que se espera que una persona de edad actual  $x$  acumule al llegar a la edad  $w$ , bajo una tasa anual  $s$ , que denota el incremento salarial anual que recibirán los trabajadores.
- $(w - y)$  son los años de servicios totales de un trabajador, donde  $y$  es la edad en la que el trabajador ingreso a la empresa.

### 4.3.3. Decrementos múltiples

Todas las contingencias presentadas en la Sección 4.2.1 son estimadas a través de tablas, las cuales están compuestas por tasas de decrementos. Una tasa de decremento se refiere a la proporción de participantes abandonando un estatus en específico debido a una causa dada, bajo el supuesto de que ningún otro decremento aplica (Winklevoss, 1977, pag. 12). Si una tasa es usada en un ambiente de un sólo decremento (es decir, donde no existan otros decrementos que interfieran), dicha tasa será igual a la probabilidad del decremento. Sin embargo en un ambiente de decrementos múltiples la tasa del decremento no es igual

a la probabilidad del mismo, debido a que los decrementos previenen a los participantes de exponerse a una contingencia en particular a través del año.

Un supuesto típico para transformar tasas en probabilidades es el que todos los decrementos ocurran de manera uniforme a lo largo de un año. Sea  $q^{(k)}$  la tasa de decremento por la causa  $k$ , y  $q^{(k)}$  la probabilidad de dicho decremento  $k$ , entonces la transformación de la tasa en una probabilidad en un ambiente de decrementos múltiples bajo el supuesto de distribución uniforme está dado por las siguientes expresiones (Winklevoss, 1977, pag. 13):

$$\begin{aligned}
 \text{Para } k = 2 \quad q^{(1)} &= q^{(1)} \left[ 1 - \frac{1}{2} q^{(2)} \right] \\
 \text{Para } k = 3 \quad q^{(1)} &= q^{(1)} \left[ 1 - \frac{1}{2} (q^{(2)} + q^{(3)}) + \frac{1}{3} q^{(2)} q^{(3)} \right] \\
 \text{Para } k = 4 \quad q^{(1)} &= q^{(1)} \left[ 1 - \frac{1}{2} (q^{(2)} + q^{(3)} + q^{(4)}) + \frac{1}{3} (q^{(2)} q^{(3)} + \right. \\
 &\quad \left. q^{(2)} q^{(4)} + q^{(3)} q^{(4)}) - \frac{1}{4} q^{(2)} q^{(3)} q^{(4)} \right]
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Podemos seguir esta relación para los siguientes valores de  $k$ , sin embargo el propósito era mostrar la metodología para desarrollar dichas probabilidades. Estas relaciones las utilizaremos más adelante para fines prácticos.

#### 4.3.4. Función compuesta de supervivencia

La función compuesta de supervivencia representa la probabilidad de que un trabajador activo conserve dicho estatus por un periodo de tiempo determinado, basado en todas las tasas de decremento a las que esté expuesto. Mientras que la probabilidad de permanecer un año más en un ambiente de un sólo decremento es igual al complemento de la tasa del decremento, la probabilidad de permanecer un año más en un ambiente de decrementos múltiples es igual al producto de tales complementos para cada tasa de decremento aplicada (Winklevoss, 1977, pag. 31). La probabilidad de que un trabajador activo de edad  $x$  permanezca activo un año más es:

$$p_x^{(T)} = \prod_{k=1}^m (1 - q_x^{(s_k)}) \tag{4.7}$$

donde  $q_x^{(s_k)}$  es la tasa de decremento asociada al decremento  $s_k$ , con  $m$  el número total de decrementos. A  $p_x^{(T)}$  suele llamársele la probabilidad compuesta de supervivencia. Dado que  $1 - q_x^{(s_k)} = p_x^{(s_k)}$ , la ecuación (4.7) es equivalente a decir que,

$$p_x^{(T)} = \prod_{k=1}^m p_x^{(s_k)} \tag{4.8}$$

La probabilidad  $p_x^{(T)}$  puede ser reexpresada, ya no en términos de *tasas* de decrementos múltiples, sino en términos de *probabilidades* de decrementos múltiples, es decir (Winklevoss,

1977, pag. 32),

$$p_x^{(T)} = 1 - \sum_{k=1}^m q_x^{(s_k)} = 1 - q_x^{(T)} \quad (4.9)$$

donde  $q_x^{(s_k)}$  es la probabilidad de decremento asociada al decremento  $s_k$ . Finalmente, la probabilidad de que un trabajador activo de edad  $x$  permanezca en dicho estatus por  $n$  años más es igual al producto de las probabilidades compuestas de supervivencia, es decir,

$${}_n p_x^{(T)} = \prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t}^{(T)} \quad (4.10)$$

Como podemos observar, una vez encontradas las probabilidades asociadas a cada decremento, en función a las tasas de los mismos, los cálculos posteriores son idénticos al caso exclusivo de la mortalidad, analizado con detalle en el capítulo anterior, por lo que con dichas probabilidades también podemos crear una “tabla de supervivencia”, donde  $l_x^{(T)}$  es la notación para el número total de participantes a la edad  $x$ . El número total de participantes que dejan de serlo durante un año se denota  $d_x^{(T)}$ , donde:

$$d_x^{(T)} = l_x^{(T)} q_x^{(T)} \quad (4.11)$$

El número total de decrementos de la población activa es igual a la suma de cada decremento por separado, esto es (Winklevoss, 1977, pag. 34):

$$\begin{aligned} d_x^{(T)} &= \sum_{k=1}^m d_x^{(r_k)} \\ &= l_x^{(T)} \sum_{k=1}^m q_x^{(s_k)} \end{aligned}$$

Para efectos de este trabajo consideraremos únicamente tres decrementos bajo los cuales un trabajador que se encuentra bajo el estatus de trabajador activo en una compañía deje de estarlo, la mortalidad, la invalidez y la rotación. Pese a que se habló también de tablas de retiro, para facilitar los cálculos del ejercicio que se presenta al final de esta sección, se consideró una edad de retiro  $w$  fija, es decir, cualquier trabajador que haya permanecido con el estatus de trabajador activo a la edad  $w - 1$ , dejará de estar en dicho estatus forzosamente a la edad  $w$ .

### 4.3.5. Valor Presente de Obligaciones

El Valor Presente de Obligaciones (VPO), también conocido como Valor Presente Actuarial (para efectos de un plan de pensiones), consiste en determinar a una fecha dada, el costo de las obligaciones actuales y futuras que una empresa a adquirido por la implementación de un plan de pensiones hacia sus trabajadores. Dicho VPO se divide en dos, el Valor Presente

de Obligaciones de los trabajadores Activos (VPOA) y en el Valor Presente de Obligaciones para Jubilados (VPOJ).

El VPOA está definido como el valor presente del total de los beneficios proyectados al retiro de un trabajador (Winklevoss, 1977, pag. 72) y se calcula para los trabajadores que aún se encuentran bajo el estatus de activos, por lo que se espera que en un futuro lleguen a recibir el beneficio por jubilación, siempre y cuando mantengan dicho estatus hasta cumplir con las condiciones para ser acreedores a dicho beneficio, y por tanto, pasar de un estatus de trabajador activo, a uno de trabajador jubilado. Para efectos de este trabajo, dichas condiciones se cumplirán al llegar a la edad de jubilación  $w$ , matemáticamente:

$$VPOA_x^w = B_x^w(1+b)^{z-w} {}_{w-x}p_x^{(T)} V_i^{(w-x)} ma_w^{(m)} \quad \forall x < w \quad (4.12)$$

donde,

- $VPOA_x^w$  es el Valor Presente de Obligaciones de los trabajadores Activos de una persona de edad actual  $x$  cuya jubilación se dará al llegar a la edad  $w$ .
- $B_x^w(1+b)^{z-w}$  es el Beneficio por Jubilación de un trabajador activo de edad  $x$  cuya jubilación se dará al llegar a la edad  $w$ , mismo que se incrementará de manera anual con una tasa de interés  $b$ .
- ${}_{w-x}p_x^{(T)}$  es la probabilidad de que un trabajador de edad  $x$  se mantenga activo en la empresa hasta llegar a la edad  $w$ .
- $V_i^{(w-x)}$  es el valor presente de 1 peso que se encuentra  $w-x$  periodos después, usando una tasa de interés  $i$ .
- $ma_w^{(m)}$  es la anualidad de vida que paga 1 peso de forma vitalicia durante  $m$  veces anualmente de manera vencida de una persona de edad  $w$ .
- $z$  es la edad de la tabla de mortalidad utilizada para el cálculo de la anualidad tal que  $q_z = 1$

El VPOJ se calcula para los trabajadores que ya se encuentran jubilados, y por tanto se encuentran percibiendo un beneficio derivado de dicho estatus. Matemáticamente (Winklevoss, 1977, pag. 69):

$$VPOJ_x^w = B_x(1+b)^{z-x} ma_x^{(m)} \quad \forall x \geq w \quad (4.13)$$

donde,

- $VPOJ_x^w$  es el Valor Presente de Obligaciones de para Jubilados de una persona de edad actual  $x$  cuya jubilación se dió al llegar a la edad  $w$ .
- $B_x(1+b)^{z-x}$  es el Beneficio por Jubilación de un trabajador jubilado de edad  $x$ , mismo que se incrementará de manera anual con una tasa de interés  $b$ .

### 4.3.6. La influencia del tiempo en los decrementos

Cada uno de los factores de decremento asociados en la probabilidad de que un trabajador activo conserve dicho estatus han sido analizados en este capítulo considerando únicamente a la edad como el factor determinante para el cálculo de las tasas y por consiguiente, de las probabilidades de cada decremento. Sin embargo, a lo largo del capítulo anterior se analizó el efecto generado por el dinamismo del tiempo en la mortalidad, por lo que es pertinente ver si las demás causas de decremento se encuentran exentas o no de dicho efecto.

Suena lógico que con el paso del tiempo las tasas de invalidez vayan a la baja debido al incremento en las medidas de prevención y seguridad, por lo que sería también muy interesante poder hacer un pronóstico de la evolución de dicho decremento. Las tasas restantes, es decir, rotación y retiro, obedecen a otras circunstancias, ya que éstas no dependen particularmente del año calendario, sino de las condiciones propias de las empresas, así como de los entornos y de las condiciones generales para hacer efectiva la situación del retiro (actualmente en México la gran mayoría de los sistemas privados de pensiones adecuan sus condiciones de retiro en concordancia a las condiciones de los sistemas públicos), por lo que el tiempo no es un factor influyente en estos casos.

Es por ello que en este trabajo nos hemos enfocado únicamente a la afectación del tiempo en la mortalidad, y para poder analizar dicho factor, tendremos que introducir una nueva notación para las probabilidades de decrementos.

Sea  $q_{x,t}^{(k)}$  la probabilidad de que un empleado activo de  $x$  años en el año  $t$  sea afectado por el decremento  $k$  (mortalidad, invalidez o rotación) antes de llegar a cumplir la edad  $x + 1$  en el año  $t + 1$ , de la misma manera, su complemento,  $p_{x,t}^{(k)}$  es la probabilidad de que un empleado activo de  $x$  años en el año  $t$  no sea afectado por el decremento  $k$  a la edad  $x + 1$  en el año  $t + 1$ .

De modo que, la probabilidad de que un trabajador activo de edad  $x$  en el año  $t$ , mantenga dicho estatus por un año más, es decir, al llegar a la edad  $x + 1$  en el año  $t + 1$  es:

$$p_{x,t}^{(T)} = 1 - (q_{x,t}^{(mort)} + q_{x,t}^{(inv)} + q_{x,t}^{(rot)}) \quad (4.14)$$

sin embargo, dado que para fines de este trabajo, la variable  $t$  únicamente afecta al decremento de la mortalidad, dicha expresión podemos verla como

$$p_{x,t}^{(T)} = 1 - (q_{x,t}^{(mort)} + q_x^{(inv)} + q_x^{(rot)}) \quad (4.15)$$

De la misma manera, denotaremos como  $l_{x,t}^T$  al número total de trabajadores activos de edad  $x$  en el año  $t$ . El número total de trabajadores de edad  $x$  que dejan de ser activos durante el año  $t$  se denota  $d_{x,t}^{(T)}$ , donde

$$d_{x,t}^{(T)} = l_{x,t}^{(T)} q_{x,t}^{(T)} \quad (4.16)$$

También podemos observar que,

$$l_{x+1,t+1}^{(T)} = l_{x,t} p_{x,t}^{(T)} \quad (4.17)$$

es decir, al transcurrir un año, no sólo la edad  $x$  se ve afectada por dicha situación, sino también la variable  $t$ , de modo que la probabilidad de mantener el estatus de trabajador activo por un tiempo de  $n$  años es igual a,

$${}_n p_{x,t}^{(T)} = \prod_{j=0}^{n-1} p_{x+j,t+j}^{(T)} \quad (4.18)$$

Análogamente, una anualidad de vida vencida que paga  $1/m$  pesos  $m$  veces anualmente de manera vitalicia, a partir del momento en que una persona tiene edad  $x$  en el año  $t$  se denota como  $a_{x,t}^{(m)}$ , y está definida de la siguiente manera:

$$a_{x,t}^{(m)} = \ddot{a}_{x,t}^{(m)} - \frac{1}{m} \quad (4.19)$$

sustituyendo el valor de  $\ddot{a}_{x,t}^{(m)}$  de acuerdo a (4.3) tenemos que:

$$a_{x,t}^{(m)} = \left( \ddot{a}_{x,t} - \frac{m-1}{2m} \right) - \frac{1}{m} \quad (4.20)$$

finalmente, sustituyendo el valor de  $\ddot{a}_{x,t}$  usando la ecuación (4.1) obtenemos finalmente que:

$$a_{x,t}^{(m)} = \left( \left( \sum_{k=0}^{w-x} (1+i)^{-k} {}_k p_{x,t} \right) - \frac{m-1}{2m} \right) - \frac{1}{m} \quad (4.21)$$

donde  ${}_k p_{x,t}$  es la probabilidad de que una persona de edad  $x$  en el año  $t$  llegue con vida a la edad  $x+k$  en el año  $t+k$ .

Con base a lo visto anteriormente, podemos definir el  $VPOA_{x,t}^w$  como,

$$VPOA_{x,t}^w = B_{x,t}^w (1+b)^{z-w} {}_{w-x} p_{x,t}^{(T)} V_i^{w-x} m a_{w,t+(w-x)}^{(m)} \quad (4.22)$$

donde,

- $VPOA_{x,t}^w$  es el Valor Presente de Obligaciones de los trabajadores Activos de una persona con edad  $x$  en el año  $t$ , cuya jubilación se dará al llegar a la edad  $w$ , esto en el año  $t+(w-x)$ <sup>1</sup>.
- $B_{x,t}^w (1+b)^{z-w}$  es el Beneficio por Jubilación de un trabajador activo de edad  $x$  en el año  $t$ , cuya jubilación se dará al llegar a la edad  $w$ , esto en el año  $t+(w-x)$ , mismo que se incrementará de manera anual con una tasa de interés  $b$ .
- ${}_{w-x} p_{x,t}^{(T)}$  es la probabilidad de que un trabajador de edad  $x$  en el año  $t$  mantenga el estatus de activo hasta llegar a la edad  $w$  en el año  $t+(w-x)$

<sup>1</sup>Si al año  $t$  un empleado tiene edad  $x$ , entonces, después de  $(w-x)$  años, el empleado tendrá  $x+(w-x) = w$  años, esto en el año  $t+(w-x)$ .

- $ma_{w,t+(w-x)}^{(m)}$  es la anualidad de vida vencida que paga 1 peso  $m$  veces en el año de manera vitalicia correspondiente a una persona de edad  $w$  en el año  $t + (w - x)$ .
- $V_i^{w-x}$  es el valor presente de 1 peso que se encuentra  $w - x$  años después, usando una tasa de interés anual de  $i$ .

De igual manera, podemos definir el  $VPOJ_{x,t}^w$  como,

$$VPOJ_{x,t}^w = B_{x,t}(1+b)^{z-x}ma_{x,t}^{(m)} \quad \forall x \geq w \quad (4.23)$$

donde,

- $VPOJ_{x,t}^w$  es el Valor Presente de Obligaciones de para Jubilados de una persona de edad actual  $x$  en el año  $t$  cuya jubilación se dio al llegar a la edad  $w$ .
- $B_{x,t}(1+b)^{z-x}$  es el Beneficio por Jubilación de un trabajador jubilado de edad  $x$  en el año  $t$ , mismo que se incrementará de manera anual con una tasa de interés  $b$ .

Finalmente, el Valor Presente de Obligaciones Totales de la compañía,  $VPOT$  será igual a la suma total, por trabajador, del Valor Presente de Obligaciones de los trabajadores Activos, más la suma total, por jubilado, del Valor Presente de Obligaciones por Jubilados, es decir,

$$VPOT = \sum_{i=1}^N VPOA_{x,t}^i + \sum_{j=i}^J VPOJ_{x,t}^j \quad (4.24)$$

donde  $VPOA_{x,t}^i$  representa el Valor Presente de Obligaciones del personal Activo del trabajador  $i$  con edad  $x$  en el año  $t$ ,  $VPOJ_{x,t}^j$  representa el Valor Presente de Obligaciones para Jubilados del jubilado  $j$  con edad  $x$  en el año  $t$ ,  $N$  es el número total de trabajadores activos y  $J$  es el número total de jubilados.

## 4.4. Aplicación de la metodología

Uno de los objetivos del presente trabajo es el de medir el impacto que tiene la implementación de un arreglo de tablas de mortalidad (las cuales dependen tanto de la edad como del tiempo) en la valuación de los pasivos laborales de un plan de pensiones. Asimismo se desea comparar el valor de los pasivos que se obtendrían de la aplicación de diversas tablas de mortalidad, manteniendo fijas las demás variables involucradas en la valuación, con tal de medir el nivel de variabilidad entre dichas tablas y las creadas en ese trabajo.

Para ello se considerará la plantilla de empleados de una cierta empresa, donde los datos de edad, antigüedad y salario son considerados al 1° de enero de 2011, por lo que los valores de las tablas de mortalidad serán tomados a partir del año 2011. Tanto la edad y la antigüedad se redondearon de modo que todos los empleados cumplirán un año más, tanto de edad como

de antigüedad en la empresa cada 1° de enero. Los datos estadísticos de los trabajadores activos se pueden apreciar en la Tabla 4.2, mientras que los datos del personal jubilado se pueden apreciar en la Tabla 4.3.

	Datos del Personal Activo		
	Mujeres	Hombres	Total
No. Participantes	633	1,031	1,664
Edad Promedio	41.08	40.73	40.86
Antigüedad Promedio	15.85	15.91	15.89
Salario Mensual Promedio	\$27,070	\$26,327	\$26,610
Nómina anual	\$205,626,543	\$325,722,272	\$531,348,815

**Tabla 4.2.** Estadísticas del personal activo de la empresa usada en el ejercicio. **Fuente:** Elaboración propia.

	Datos del Personal Jubilado		
	Mujeres	Hombres	Total
No. Jubilados	80	132	212
Edad Promedio	71.81	73.96	73.15
Pensión Mensual Promedio	\$30,396	\$20,663	\$25,548

**Tabla 4.3.** Estadísticas del personal jubilado de la empresa usada en el ejercicio. **Fuente:** Elaboración propia.

Para efecto de facilitar los cálculos, se consideró para todos los trabajadores la edad de jubilación  $w$  de 65 años, en concordancia con la edad de jubilación por vejez establecida en el IMSS. Para el cálculo del Beneficio por Jubilación,  $B_{x,w}$ , visto en (4.5), el Salario Mensual se consideró como el salario base mensual de cada trabajador, es decir, no se consideró ningún beneficio extra para su integración; se optó por un valor de  $\alpha=1.00$  por ciento, es decir, el Beneficio por Jubilación de un trabajador será el porcentaje del Salario Mensual de acuerdo a sus años de servicio, por ejemplo, si un trabajador llega a la edad de jubilación con 30 años de servicios, su Beneficio por Jubilación será el 30 por ciento de su Salario Mensual. Finalmente, el Beneficio por Jubilación se otorgará de manera mensual, por lo que, para efecto del cálculo de las anualidades temporales, el valor del parámetro  $m$  será igual a 12.

#### 4.4.1. Hipótesis demográficas

En lo que respecta a las hipótesis demográficas, se consideraron cinco grupos de tablas de mortalidad, las cuales son:

- **Experiencia Demográfica de Mortalidad para Activos EMSSA – 97:** Las tablas EMSSA – 97 surgen de las tablas de mortalidad proyectadas por el Consejo Nacional de Población (CONAPO) en su trabajo “*Proyecciones de la población nacional*”

1995-2050". Para el caso de los hombres se tomó la tabla proyectada para el año 2011, mientras que para las mujeres se tomó la tabla proyectada para el año 2013, esto por un acuerdo entre la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) y la Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros (AMIS) (IMSS, 2003, pag. 23). Dichas tablas fueron publicadas por la CNSF en su circular S-22.2 en el año de 1997 (CNSF, 1997). Estas tablas actualmente se utilizan para la valuación de un gran número de planes de pensiones privados.

- **Tablas de Mortalidad CONAPO 2005-2050** Estas tablas son resultado del trabajo elaborado por Partida (2008) y publicado por el CONAPO como sus proyecciones de población oficiales. En dicho trabajo se hicieron proyecciones de la mortalidad, fecundidad y migración, siendo las primeras las consideradas para este rubro. Consisten en una serie de tablas de mortalidad, abarcando desde el año 2006 hasta el año 2050.
- **Experiencia Demográfica de Mortalidad para Activos EMSSA – 09** Estas tablas fueron publicadas el día 19 de noviembre de 2009 por la CNSF en la circular S-22.2 en el año 2009 (CNSF, 2009), en la cual se indica que estas tablas deberán ser aplicadas para reflejar las tasas de mortalidad de asegurados no inválidos para las pensiones otorgadas por el IMSS y las otorgadas por el ISSSTE. Consisten en tablas de mortalidad base, e incluyen un factor de mejora para elaborar proyecciones de las probabilidades en años futuros. Dicha proyección queda definida como:

$$q_{x,2009+t} = q_{x,2009}(1 - TM_x)^t$$

donde,

- $q_{x,2009+t}$  es el valor de la probabilidad de muerte entre edades  $x$  y  $x + 1$ , ( $q_x$ ) proyectado con la mejora de la mortalidad al año  $2009 + t$ ,  $t = 0, 1, 2, 3 \dots$
- $q_{x,2009}$  es el valor  $q_x$  que corresponde a las tablas base de mortalidad de no inválidos de 2009.
- $TM_x$  es el factor de mejora.
- $t$  es el número de años desde el año base 2009 hasta el año de proyección.

Pese que el método de proyección usado por estas tablas permiten realizar proyecciones de manera indeterminada, se consideraron únicamente las proyecciones de dichas tablas hasta el año 2050 para que las comparaciones con las demás tablas fueran más adecuadas.

- **Tablas de Mortalidad Lee-Carter:** Son las tablas elaboradas en este trabajo bajo el método propuesto por Lee y Carter. Su elaboración se detalla en el capítulo anterior y consisten en una serie de tablas de mortalidad, desde los 5 hasta los 110 años, abarcando desde el año 2006 hasta el año 2050. Para el ejercicio a realizar, se consideran 3 grupos de tablas:
  - **Lee Carter:** Este grupo de tablas son las creadas tomando como base la media de la proyección del parámetro  $k_t$ .

- **Lee-Carter 2011:** Es la tabla que contiene la información del año 2011 derivada de las tablas elaboradas en este trabajo tomando como base la media de la proyección del parámetro  $k_t$ .
- **Lee-Carter 95 % sup e inf:** Este grupo de tablas son las creadas tomando como base los intervalos de confianza al 95 %, tanto superior como inferior, de la proyección del parámetro  $k_t$ .

Todas las tablas de mortalidad se encuentran divididas por sexo (femenino y masculino) y consideran datos únicamente hasta el año 2050 (en el caso de la tablas EMSSA - 97 y Lee-Carter 2011, por ser tablas de momento se encuentran están libres de esta consideración ya que únicamente se replica la misma tabla para todos los años) por lo que se puede experimentar dificultades si el pronóstico de supervivencia de algún trabajador llegase a rebasar dicho año (esto en particular para los empleados jóvenes), por lo que a partir del año 2050, la mortalidad seguirá la misma tendencia que la presentada en ese año, es decir,

$$q_{x,t} = q_{x,2050} \quad \forall t > 2050$$

Para efectos de la invalidez se usó la Tabla *Experiencia Demográfica de Invalidez EISS-97* publicada por la CNSF en su circular S-22.2 en el año de 1997 (CNSF, 1997), mientras que para efectos de la rotación se utilizó una tabla basada en la experiencia de la misma empresa.

#### 4.4.2. Hipótesis económicas

Las hipótesis económicas<sup>2</sup> usadas para efectos de este ejemplo son:

- **Tasa de descuento:** Se consideró una tasa de descuento del 8.00 por ciento anual nominal, la cual se mantiene constante a lo largo del tiempo, es decir, no se contempla alguna variación en la misma.
- **Tasa de incremento de salarios:** Se consideró una tasa de incremento de salarios del 5.00 por ciento anual nominal, la cual es aplicable para todo el personal, no importando su sexo, edad, antigüedad o salario percibido. El cálculo de esta tasa fue basado en la experiencia propia de la compañía, y así como la tasa de descuento, se considera que se mantiene constante a lo largo del tiempo.
- **Tasa de rendimientos de activos:** Dado que el propósito de este trabajo es medir el nivel de los pasivos derivados de la valuación de un plan de pensiones, no se considera la existencia o la posible creación de un fondo para solventar dichos pasivos, por lo que la tasa de rendimiento de los activos no tiene cabida en este trabajo.
- **Tasa de actualización de beneficios:** Se considerará que el beneficio que obtengan los empleados al momento de acogerse a la jubilación se incrementará de manera anual con una tasa de 4.00 por ciento anual nominal.

<sup>2</sup>Las tasas usadas son nominales con tal de cumplir los requerimientos establecidos por la *Norma de Información Financiera D-3, Beneficios a los empleados*, en su párrafo 77

### 4.4.3. Resultados

Primero se presentan los resultados derivados de comparar los pasivos de la compañía utilizando las tablas de mortalidad elaboradas en este trabajo en su totalidad (denominadas Tablas Lee-Carter), contra los pasivos derivados del uso de la tabla de mortalidad generada para el año 2011 (llamada Tabla Lee-Carter 2011).

Tabla	Mujeres	Hombres	Total
Lee-Carter	\$413,532,322	\$545,692,286	\$959,224,608
Lee-Carter 2011	\$375,096,049	\$496,954,532	\$872,050,581

**Tabla 4.4.** Comparación del VPOA usando las tablas de mortalidad generadas bajo el método de Lee-Carter. **Fuente:** Elaboración propia.

En la Tabla 4.4 se muestra el comparativo para el pasivo del personal activo, donde podemos observar una diferencia del 9.09 por ciento a nivel general, al comparar los pasivos derivados de la tabla que contempla únicamente la tabla pronosticada para el año 2011, y el uso de las tablas pronosticadas desde el año 2011 hasta el año 2050, esto debido al descenso de la mortalidad contemplada en estas últimas. La diferencia para el caso de las mujeres es del 9.29 por ciento, y para el caso de los hombres es del 8.93 por ciento.

Tabla	Mujeres	Hombres	Total
Lee-Carter	\$307,964,197	\$293,646,665	\$601,610,862
Lee Carter 2011	\$299,693,966	\$287,186,994	\$586,880,959

**Tabla 4.5.** Comparación del VPOJ usando las tablas de mortalidad generadas bajo el método de Lee-Carter. **Fuente:** Elaboración propia.

En la Tabla 4.5 se muestra el comparativo para el pasivo del personal jubilado, donde podemos observar una diferencia del 2.45 por ciento a nivel general, al comparar los pasivos derivados de la tabla que contempla únicamente la tabla pronosticada para el año 2010, y el uso de las tablas pronosticadas desde el año 2010 hasta el año 2050, esto debido al descenso de la mortalidad contemplada en estas últimas. La diferencia para el caso de las mujeres es del 2.69 por ciento, y para el caso de los hombres es del 2.20 por ciento.

Pese a que sigue existiendo un incremento, ya no se ve tan marcado como en el caso del personal activo, esto debido a que el tiempo en que se esta proyectando la mortalidad es menor por tratarse de personal jubilado, es decir, de personas mayores a los 65 años de edad, mientras que en el caso de los activos se proyecta la mortalidad de personas del rango de los 20 años de edad en adelante.

En la Tabla 4.6 se muestra el comparativo para el pasivo total de la compañía, donde podemos observar una diferencia del 6.53 por ciento a nivel general, al comparar los pasivos derivados de la tabla que contempla únicamente la tabla pronosticada para el año 2011, y el uso de las tablas pronosticadas desde el año 2011 hasta el año 2050, esto debido al descenso

Tabla	Mujeres	Hombres	Total
Lee-Carter	\$721,496,519	\$839,338,951	\$1,560,835,470
Lee Carter 2011	\$674,790,015	\$784,141,526	\$1,458,931,541

**Tabla 4.6.** Comparación del VPOT usando las tablas de mortalidad generadas bajo el método de Lee-Carter. **Fuente:** Elaboración propia.

de la mortalidad contemplada en estas últimas. La diferencia para el caso de las mujeres es del 6.47 por ciento, y para el caso de los hombres es del 6.58 por ciento.

Con estos resultados podemos concluir que la inclusión de proyecciones de la mortalidad para la valuación de pasivos marca una mayor diferencia en los pasivos del personal activo que del personal que ya se encuentra jubilado utilizando las tablas Lee-Carter, y aunque la diferencia tal vez no es muy grande, si vale la pena aplicar dichas proyecciones con tal de tener una mejor aproximación sobre los pasivos.

En la segunda parte de este ejercicio, se presentan los resultados derivados de comparar los pasivos de la compañía utilizando las distintas tablas de mortalidad mencionadas en la sección anterior, junto con las tablas de mortalidad elaboradas en este trabajo en su totalidad.

Tabla	Mujeres	Hombres	Total
EMSSA 97	\$407,677,493	\$516,100,431	\$923,777,924
CONAPO	\$409,209,235	\$547,727,681	\$956,936,916
EMSSA 09	\$513,875,132	\$645,850,137	\$1,159,725,269
Lee-Carter	\$413,532,322	\$545,692,286	\$959,224,608

**Tabla 4.7.** Comparación del VPOA usando distintas tablas de mortalidad. **Fuente:** Elaboración propia.

En la Tabla 4.7 se muestra el comparativo para el pasivo del personal activo, donde podemos realzar varias observaciones. Primero, los pasivos derivados de comparar las tablas de la CONAPO con las creadas en este trabajo son muy similares, con una variación apenas del 0.24 por ciento a nivel general. Segundo, la diferencia entre pasivos al comparar la tabla fija EMSSA 97 contra las tablas Lee-Carter es de apenas del 3.70 por ciento, y finalmente los resultados de los pasivos de utilizar la tabla EMSSA 09 son los más altos, presentando un incremento del 20.90 por ciento sobre los resultados obtenidos con las tablas Lee-Carter.

En la Tabla 4.8 se muestra el comparativo para el pasivo del personal jubilado, donde podemos observar un comportamiento casi similar a lo observado en la Tabla 4.7, es decir, la diferencia entre pasivos al comparar la tabla fija EMSSA 97 contra las tablas Lee-Carter es de apenas del 3.66 por ciento, mientras que los resultados de los pasivos de utilizar la tabla EMSSA 09 vuelven a ser los más altos, presentando un incremento del 18.81 por ciento sobre los resultados obtenidos con las tablas Lee-Carter. La única diferencia respecto a los resultados anteriores es que la variación de los pasivos entre las tablas CONAPO y Lee-Carter

es un poco más extensa, siendo del 3.49 por ciento.

Tabla	Mujeres	Hombres	Total
EMSSA 97	\$310,917,220	\$268,664,893	\$579,582,113
CONAPO	\$295,416,023	\$285,213,485	\$580,629,508
EMSSA 09	\$364,295,623	\$350,462,597	\$714,758,221
Lee-Carter	\$307,964,197	\$293,646,665	\$601,610,862

**Tabla 4.8.** Comparación del VPOJ usando distintas tablas de mortalidad. **Fuente:** Elaboración propia.

En la Tabla 4.9 se muestra el comparativo para el pasivo total de la compañía donde los pasivos derivados de comparar las tablas de la CONAPO con las tablas Lee-Carter tienen una variación del 1.49 por ciento, la diferencia entre pasivos al comparar la tabla fija EMSSA 97 contra las tablas Lee-Carter es de apenas del 3.68 por ciento, y finalmente los resultados de comparar los pasivos al utilizar la tabla EMSSA 09 son los más altos, presentando un incremento del 20.09 por ciento sobre los resultados obtenidos con las tablas Lee-Carter.

Tabla	Mujeres	Hombres	Total
EMSSA 97	\$718,594,713	\$784,765,324	\$1,503,360,037
CONAPO	\$704,625,258	\$832,941,166	\$1,537,566,424
EMSSA 09	\$878,170,755	\$996,312,734	\$1,874,483,489
Lee-Carter	\$721,496,519	\$839,338,951	\$1,560,835,470

**Tabla 4.9.** Comparación del VPOT usando distintas tablas de mortalidad. **Fuente:** Elaboración propia.

Analizando los resultados obtenidos, podemos concluir los siguientes puntos:

- Las tablas CONAPO y Lee-Carter presentan resultados muy similares, sin embargo, los pasivos derivados de las tablas Lee-Carter son superiores, lo que indica que las tablas de la CONAPO están sobre estimando los niveles de mortalidad (es decir, presentan tasas de mortalidad más altas) sobre las obtenidas en este trabajo.
- Los resultados obtenidos de la Tabla EMSSA 97 no presentan grandes diferencias respecto a los obtenidos de la aplicación de las tablas Lee-Carter, pese a que esta primera es una tabla fija. Esto se debe a que dichas tablas, como ya se especificó anteriormente, son resultados de proyecciones de la CONAPO realizadas en el año 1995, donde dichas proyecciones presentaban tasas de mortalidad más bajas que las observadas en proyecciones posteriores del mismo CONAPO (en dichas tablas EMSSA 97, la esperanza de vida al nacimiento para Hombres es de 74.65 años y para mujeres es de 80.94 años, mientras que en las proyecciones del CONAPO 2005-2050, la esperanza de vida al nacimiento para Hombres del año 2011 es de 72.56 años, mientras que para mujeres en el año 2013 es de 77.66 años), por lo que al presentar tasas de mortalidad bajas, eleva

de gran manera la expectativa de vida, logrando, en promedio, resultados similares a las tablas creadas en ese trabajo.

- La aplicación de las tablas EMSSA 09 arrojó los pasivos más elevados, con incrementos muy marcados respecto a la aplicación de las demás tablas, lo que nos indica que dichas tablas presentan tasas de mortalidad muy bajas, así como sus proyecciones, por lo que no representan un buen indicador de la mortalidad mexicana ni de su evolución estimada.

Finalmente, como última parte de este ejercicio, se presentan los resultados derivados de comparar los pasivos de la compañía utilizando la tabla de mortalidad Lee-Carter junto con los resultados derivados de las Tablas Lee-Carter 95 %.

Tabla	Mujeres	Hombres	Total
Lee-Carter 95 % sup	\$396,603,933	\$537,748,283	\$934,352,216
Lee-Carter	\$413,532,322	\$545,692,286	\$959,224,608
Lee-Carter 95 % inf	\$429,982,705	\$553,602,042	\$983,584,747

**Tabla 4.10.** Comparación del VPOA usando las tablas de mortalidad Lee-Carter y Lee Carter 95 %. **Fuente:** Elaboración propia.

En la Tabla 4.10 se muestra el comparativo para el pasivo del personal activo, donde podemos observar una variación en promedio del 2.56 por ciento de los pasivos calculados con las Tablas Lee-Carter, contra aquellos calculados con las tablas Lee-Carter 95 %. La variación para el caso de las mujeres oscila entre el 4.09 por ciento y el 3.98 por ciento, mientras que para el caso de los hombres es del 1.46 por ciento en ambos casos.

Tabla	Mujeres	Hombres	Total
Lee-Carter 95 % sup	\$302,229,243	\$291,559,233	\$586,880,959
Lee-Carter	\$307,964,197	\$293,646,665	\$601,610,862
Lee-Carter 95 % inf	\$313,722,833	\$295,740,015	\$609,462,848

**Tabla 4.11.** Comparación del VPOJ usando las tablas de mortalidad Lee-Carter y Lee Carter 95 %. **Fuente:** Elaboración propia.

En la Tabla 4.11 se muestra el comparativo para el pasivo del personal jubilado, donde podemos observar una variación aproximada del 1.30 por ciento de los pasivos calculados con las Tablas Lee-Carter, contra aquellos calculados con las tablas Lee-Carter 95 %. La variación para el caso de las mujeres es del 1.86 por ciento, mientras que para el caso de los hombres es del 0.71 por ciento en ambos casos.

La Tabla 4.12 muestra el comparativo para el pasivo del personal jubilado, donde podemos observar una variación promedio del 2.07 por ciento de los pasivos calculados con las Tablas Lee-Carter, contra aquellos calculados con las tablas Lee-Carter 95 %. La variación para el

Tabla	Mujeres	Hombres	Total
Lee-Carter 95 % sup	\$698,833,176	\$829,307,516	\$1,528,140,692
Lee-Carter	\$721,496,519	\$839,338,951	\$1,560,835,470
Lee-Carter 95 % inf	\$743,705,538	\$849,342,057	\$1,593,047,595

**Tabla 4.12.** Comparación del VPOT usando las tablas de mortalidad Lee-Carter y Lee Carter 95 %. **Fuente:** Elaboración propia.

caso de las mujeres oscila entre el 3.14 por ciento y el 3.08 por ciento, mientras que para el caso de los hombres es del 1.20 por ciento en ambos casos.

Analizando los resultados, podemos observar que no existen grandes variaciones entre los pasivos calculados con la media, y con los intervalos de confianza al 95 % superiores e inferiores, lo que nos da gran certidumbre sobre el hecho de que la variación que podrán llegar a tener nuestros pasivos será mínima, situación que facilita la toma de decisiones que la compañía pudiese tomar sobre el uso de dichas tablas.

Este ejercicio pretende mostrar diversas alternativas que las compañías podrían tener al poder contar con tablas de mortalidad realizadas a través de pronósticos de la mortalidad. Hay que recordar que las tablas Lee-Carter fueron elaboradas a través del pronóstico del parámetro  $k_t$ , por lo que propiamente no existe un único valor que dicho parámetro puede tomar, sino que puede tomar una serie de distintos valores, los cuales, en promedio, nos dan como resultado el parámetro medio del pronóstico de  $k_t$ , mismo que fue usado para la construcción de las Tablas Lee-Carter. De igual manera, al tratarse de pronósticos de un parámetro, podemos asociarle intervalos de confianza, los cuales nos indican que, del total de pronósticos que hagamos del parámetro  $k_t$ , en el 95 % de los casos dichos pronósticos se encontrarán entre los valores del parámetro  $k_t$  95 % sup e inf, mismos que pueden encontrarse en los anexos de este trabajo, y que fueron usados para la construcción de las Tablas Lee Carter 95 %.

Por lo que una empresa podría decidir que tablas usar para el cálculo de sus pasivos. Para el caso que estamos tratando en este ejercicio, si la compañía se quiere mostrar neutral, lo óptimo sería elegir la media de los pronósticos. Si quiere arriesgarse y reflejar la menor de cantidad de pasivo posible, lo ideal sería elegir el intervalo del 95 % superior, con la premisa de que será muy probable que los pasivos reales pudiesen llegar a ser más altos. Finalmente, si se quisiera mostrar muy conservadora tratando de evitar el mayor riesgo posible, podría elegir el intervalo del 95 % inferior, la cual arroja los pasivos más altos, pero podría tener más certeza sobre el hecho de que los pasivos en un caso muy extremo serían mayores a dicha cifra.

Otro de los criterios que pudiesen tomar las compañías es en relación a la aportación que año con año deben realizar con tal de solventar dichos pasivos, ya que, a mayor cantidad de pasivos, mayor es la cantidad de la aportación que tendrían que realizar.

Por último, la creación de dichos intervalos pudiera quedarse simplemente como un marco

de referencia para la compañía, la cual puede tomar el valor medio del pronóstico para la elaboración de las tablas, y usar los intervalos superior e inferior al 95 % simplemente como indicadores de los valores límites a los cuales los pasivos podrían variar, con la certeza de que muy difícilmente saldrían de dichos límites (claro, esto tomando en cuenta a la mortalidad como la única variable en el cálculo de los pasivos, y aunque en la práctica esto no es así, no deja de ser una herramienta útil con tal de tener un margen de decisiones).

Tabla	Mujeres		Hombres	
	60 años	65 años	60 años	65 años
EMSSA 97	23.14	18.90	21.07	17.32
CONAPO	23.94	19.79	21.46	17.81
EMSSA 09	29.14	24.32	25.60	21.76
Lee-Carter	23.97	19.87	20.29	16.49
Lee-Carter 2011	22.66	18.85	20.50	17.10
Lee-Carter 95 % sup	23.26	19.24	21.25	17.63
Lee-Carter 95 % inf	24.64	20.35	21.67	17.98

**Tabla 4.13.** *Esperanza de vida a edad alcanzada de 60 y 65 años. Fuente: Elaboración propia.*

Adicional a los ejercicios realizados, y con el objeto de tener una herramienta más para apreciar las diferencias entre las tablas mencionadas, se calcularon las esperanzas de vida para las edades alcanzadas de 60 y 65 años, mismas que se reflejan en la Tabla 4.13. En ella se observa la esperanza de vida tan alta resultante de la tabla de mortalidad EMSSA 09, mientras que la diferencia de las tablas restantes, contra las tablas Lee-Carter es menor a un año, con la excepción de la tabla Lee-Carter 2011, cuya diferencia sobrepasa la unidad en casi todos los casos. Cabe mencionar que dichas esperanzas de vida se calcularon considerando el efecto del tiempo en la mortalidad, tomando como año de partida el año 2011 (es decir, se comenzó con la probabilidad de supervivencia de un individuo de 60 años en el año 2011, después se consideró la probabilidad de supervivencia de una persona de 61 años en el año 2012, y así de manera consecutiva).

# Conclusiones

En el presente trabajo se mostró la evolución de la mortalidad mexicana desde inicios del siglo XX hasta nuestros días, donde se observó un descenso pronunciado de la misma a partir de la culminación de la revolución mexicana, hasta el año de 1960, donde el descenso comenzó a ser más lento, es por ello que se usaron los datos de la conciliación demográfica inegiconapocolmex2006 para la elaboración de las proyecciones, ya que reflejan la tendencia reciente que está experimentando la mortalidad mexicana.

El principal objetivo de este trabajo consistió en elaborar un conjunto de tablas de mortalidad para los años 2006 a 2050 a través de la proyección de esta última, para lo cual se utilizó el modelo de Lee y Carter. Dicho modelo consta de una gran cantidad de métodos propuestos por diversos autores para la estimación de sus parámetros, por lo cual en este trabajo se utilizaron algunos de estos métodos con tal de poder apreciar sus resultados y con base en ellos seleccionar el que mejor se ajustaba a los datos utilizados. A pesar de que en el presente trabajo el mejor método resultó ser el de Máxima Verosimilitud de Wilmoth, se deja abierta la posibilidad de que con otros datos el método a seleccionar pudiera ser algún otro. De igual manera, para optimizar los resultados obtenidos, se decidió eliminar el grupo de edades de 0 a 4 años, ya que se observó que al tomar dicha medida, los resultados obtenidos se ajustaban aún más a los datos utilizados en comparación al caso donde no se eliminó a dicho grupo de edad. Esto se pudo realizar gracias a que el sector para el cual se buscó la elaboración de las tablas de mortalidad son las personas de 15 años de edad en adelante (i.e., el sector laboralmente activo, y las personas de edad avanzada).

Las proyecciones elaboradas indicaron una tendencia más estable de la mortalidad masculina en comparación con la femenina, esto debido a que la variación que hubo entre la proyección media del parámetro  $k_t$  y las proyecciones de los intervalos de confianza superiores e inferiores, tanto al 67% como al 95%, fue muy pequeña, a diferencia del caso femenino cuya misma variación fue más grande. Es decir, la gran mayoría de los escenarios proyectados para el caso masculino son muy parecidos, con variaciones muy pequeñas, lo que indica una menor incertidumbre en la trayectoria de sus proyecciones, mientras que en el caso femenino dichas proyecciones tienden a experimentar mayores variaciones, lo que muestra una mayor incertidumbre en sus proyecciones. Finalmente fueron elaboradas las tablas deseadas, tomando la proyección media del parámetro  $k_t$  para dicho propósito, bautizadas como tablas Lee-Carter

El segundo objetivo consistió en utilizar las tablas elaboradas y aplicarlas en la estimación

de los pasivos en un colectivo asegurado por un plan privado de pensiones, con tal de observar la variación que pudiesen experimentar dichos pasivos tomando como único factor variable a la mortalidad. Esto se realizó por medio de la comparación entre los pasivos resultantes derivados de la aplicación de las tablas Lee-Carter y los pasivos arrojados por la aplicación de otras tablas de mortalidad comunmente utilizadas en el ámbito actuarial, así como con las tablas presentadas por el CONAPO como parte de sus proyecciones oficiales de población.

En general, las tablas Lee-Carter mostraron cantidades superiores a las de las demás tablas en los pasivos resultantes, con el caso excepcional de la tabla EMSSA 09, lo que indica una ligera sobre estimación en los niveles de mortalidad en las demás tablas, es decir, dichas tablas presentan probabilidades de fallecimiento mayor a las estimadas en las tablas Lee-Carter, provocando que se esperen más fallecimientos en el futuro, lo que ocasiona el que se reserve menos cantidad de dinero necesaria para hacer frente a las obligaciones resultantes. A pesar de que las diferencias entre las tablas Lee-Carter con las demás tablas usadas no fue tan marcada, si se recomienda la implementación de las primeras, con tal de tener un panorama más acertado en cuestión de la estimación de la mortalidad, y por lo tanto, de las obligaciones.

En el caso particular de las tablas EMSSA 09, a pesar de que son las tablas que deben de utilizarse para la valuación de los pasivos de las pensiones en el ámbito de la seguridad social (tanto para el IMSS como para el ISSSTE) se observó que dichas tablas muestran una subestimación muy marcada de la mortalidad en comparación contra las elaboradas en este trabajo, e incluso contra las del CONAPO mismo, por lo cual habría que poner en cuestionamiento su uso para la valuación de los pasivos de los planes privados de pensiones. De igual manera, a pesar de que se observaron pequeñas diferencias entre los resultados obtenidos con las proyecciones del CONAPO y las tablas elaboradas en este trabajo, las tablas bajo el modelo Lee-Carter brindan la ventaja de darnos la libertad de elegir el grupo de tablas que queramos utilizar, esto con base en la proyección utilizada del parámetro  $k_t$ .

Una de las ventajas de elaborar la proyección de tablas de mortalidad es el hecho de que dichas tabla se pueden actualizar las veces que se desee, siempre y cuando se disponga de la información necesaria, por lo que se puede renovar las tablas en periodos de tiempo relativamente cortos (como podrían ser 5 o 10 años), esto sumado al hecho de que las tablas ya muestran una actualización en los niveles de la mortalidad, por lo que al realizar la transición de un grupo de tablas a otro elaborado con datos más actualizados, la variación existente entre los valores de las probabilidades de fallecimiento sería menor, en comparación, con la transición de dos tablas de mortalidad de momento, donde la transición entre los valores suelen ser mucho más marcado. Cabe destacar que esta característica dependerá en su totalidad de si es factible o no conseguir la información necesaria para la actualización de las tablas.

Asimismo, vale la pena recordar que el modelo Lee-Carter realiza las proyecciones basándose en su totalidad en la información del pasado, por lo que no está preparado para algún eventual cambio en la tendencia de la misma, derivada, por ejemplo, de alguna epidemia o algún evento que en años futuros disparara los niveles de mortalidad, lo que representa un inconveniente en las proyecciones. De igual manera, para poder tener un panorama adecuado

de las proyecciones, se necesitada de una gran cantidad de datos del pasado, lo cual limita la aplicación de este modelo (o al menos, la proyección del parámetro  $k_t$  de la manera que aquí se presenta) cuando se trabaja con una base de datos reducida.

A pesar de que el presente trabajo se enfocó en su totalidad al fenómeno de la mortalidad, algunos autores han utilizado el modelo de Lee y Carter para pronosticar valores de migración y fecundidad, lo cual abre la posibilidad de poder realizar proyecciones con este método de otros factores involucrados en la valuación de los pasivos de un plan de pensiones, como pudiera ser la invalidez, sin embargo, debido a la cantidad de datos necesarios, es poco viable su aplicación para otras áreas, como pudiese ser la determinación de tablas específicas para la rotación del personal.



# Bibliografía

- Baker, Kirk (2005). *Singular Value Decomposition Tutorial*, Electronic document, consultado en [http://www.ling.ohio-state.edu/~kbaker/pubs/Singular\\_Value\\_Decomposition\\_Tutorial.pdf](http://www.ling.ohio-state.edu/~kbaker/pubs/Singular_Value_Decomposition_Tutorial.pdf)
- Bell, William. R. (1997). “Comparing and assessing time series methods for forecasting age specific demographic rates”, *Journal of Official Statistics*. Vol. 13, No. 3, pp. 279-303.
- Brillinger, D.R. (1986). “The natural variability of vital rates and associated statistics”, *Biometrics*. 42:693-734.
- Booth, Heather, J. Maindonald y L. Smith (2002). “Age-time interactions in mortality projection: Applying Lee-Carter to Australia”, Working Papers in Demography No. 85, Demography and Sociology Program, Research School of Social Sciences, The Australian National University.
- Booth, Heather, R. J. Hyndman, L. Tickle y Piet de Jong (2006), “Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions”, *Working papers in demography* **101**, The Australian National University, Australia
- Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., y Nesbitt, C.J. (1997). *Actuarial Mathematics*, Schaumburg, Illinois, The Society of Actuaries.
- Brouhns, N., Denuit, M. y Vermunt, J.K. (2002). “A Poisson log-bilinear approach to the construction of projected lifetables”, *Insurance: Mathematics & Economics* **31**, 373-393.
- Box, George y G. Jenkins (1976). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco-California, EUA.
- Camposortega C., Sergio (1997). “Cien años de mortalidad en México”, *Demos* **10**, pp. 11-13.
- Chiang, C. L. (1968). *An Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*. New York, Wiley & Sons, Inc.
- CONSAR (2011). *Estadísticas del Registro Electrónico de Planes Privados de Pensiones ante la CONSAR 2011*. Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro. <http://www.consar.gob.mx>

- CNSF (1997). *Circular S-22.2 mediante la cual se dan a conocer las hipótesis técnicas para los seguros de pensiones derivados de las leyes de seguridad social*. Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. Circular publicada el día 13 de marzo de 1997.
- CNSF (2009). *Circular S-22.2 mediante la cual se dan a conocer a las instituciones de seguros autorizadas para la práctica de los seguros de pensiones, derivados de las leyes de seguridad social, las hipótesis técnicas (bases biométricas y bases financieras) para los seguros de pensiones derivados de las leyes de seguridad social*. Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. Circular publicada el día 19 de noviembre de 2009.
- De Arce, Rafael y Ramón Mahía (2007). “Modelos ARIMA” Material del Programa Citius, *Técnicas de Previsión de variables financieras*. Dpto. Economía Aplicada. U.D.I. Economía e Informática.
- De Moivre, A. (1725). *Annuities upon Lives, or, the Valuation of Annuities upon any Number of Lives, as also, of Reversions to which is added, an Appendix Concerning the Expectations of Life, and Probabilities of Survivorship*. W.P., London.
- Debón, Ana (2003). *Graduación de Tablas de Mortalidad. Aplicaciones Actuariales*. Tesis de doctorado, Universitat de Valencia, Valencia.
- Debón, Ana, F. Montes y R. Sala (2008). *Tablas de mortalidad dinámicas para España. Una aplicación a la hipoteca inversa*, Universitat de Valencia, Valencia.
- Delwarde A., M. Denuit, M. Guillén y A. Vidiella-i-Anguera (2006). “Application of the Poisson log-bilinear projection model to the G5 mortality experience”, *Belgian Actuarial Bulletin*, Vol. 6, No. 1, pp. 54-68.
- Forfar, David O. (2006). “Mortality Laws”. *Encyclopedia of Actuarial Science*, John Wiley & Sons
- García Guerrero, Víctor (2010). *Proyecciones y políticas de población en México. Revisión crítica y propuesta metodológica*. Tesis de doctorado, El Colegio de México, México.
- Giroso F., King G. (2007). “Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method”, Technical Report, Rand Corporation.
- Gompertz, B. (1825). “On the nature of the function of the law of human mortality and on a new mode of determining the value of life contingencies”. *Transactions of The Royal Society* **115**, pp. 513-585.
- González Pérez, Carlos, y V. Guerrero Guzmán (2007). “Pronósticos estadísticos de mortalidad y su impacto sobre el sistema de pensiones de México”, trabajo ganador del Premio de Pensiones 2007 otorgado por la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro, consultado en [http://www.consar.gob.mx/premio\\_pensiones/premio\\_2007.shtml](http://www.consar.gob.mx/premio_pensiones/premio_2007.shtml)
- Goodman, L.A. (1979). “Simple models for the analysis of association in cross-classifications having ordered categories”. *Journal of the American Statistical Association* **74**, pp. 537-552.

- Greville T.N.E. (1943). "Short methods of constructing abridged life tables". *The Record of the American Institute of Actuaries*; 32(65), pp. 29-42, Part 1.
- Ham Chande, Roberto (2003). *El envejecimiento en México: el siguiente reto de la transición demográfica*, El Colegio de la Frontera Norte A.C.-Grupo Editorial Miguel Ángel Porrúa, México.
- Ham Chande, Roberto (1999). "Conceptos y significados del envejecimiento en las políticas de población", *El envejecimiento demográfico de México: retos y perspectivas*, Consejo Nacional de Población, pp. 42-54.
- Heligman, L. y J.H. Pollard (1980). "The age pattern of mortality", *Journal of the Institute of Actuaries* **107**, pp. 49-80.
- IAS 19 (2011). *International Accounting Standard 19, Employee Benefits*, International Accounting Standards Board, United Kingdom.
- IMSS (2003). *Valuación actuarial del seguro de invalidez y vida al 31 de diciembre de 2003*, Instituto Mexicano del Seguro Social, México.
- INEGI (Instituto Nacional de Estadística y Geografía). 2011. <http://www.inegi.gob.mx>
- INEGI (2011). *Principales resultados del Censo de Población y Vivienda 2010*, Instituto Nacional de Estadística y Geografía.
- INEGI-CONAPO-COLMEX (2006). *Conciliación de cifras sobre la dinámica demográfica de México*. Datos obtenidos en el seminario "Temas Selectos de Demografía 2010", mismos que fueron consultados el 27 de mayo de 2007 en <http://www.conapo.gob.mx>
- Lagarda Cuevas, Guillermo, y J.A. Mandujano Canto (2008). "Análisis de la movilidad en el mercado laboral y los efectos sobre el sistema de pensiones", trabajo ganador del tercer lugar del Premio de Pensiones 2008 otorgado por la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro, consultado en [http://www.consar.gob.mx/premio\\_pensiones/premio\\_2008.shtml](http://www.consar.gob.mx/premio_pensiones/premio_2008.shtml)
- Lee, Ronald. (2000). "The lee-carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications". *North American Actuarial Journal*, pp. 80-91.
- Lee, Ronald y L. Carter (1992). "Modeling and Forecasting U.S. Mortality", Supplement: Aging, Health, and Public Policy, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, No. 419 pp. 659-671.
- Lee, Ronald y T. Miller (2001). "Evaluating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality", *Demography*, Vol. 38, No. 4, pp. 537-549.
- Lee, Ronald y S. Tuljapurkar (1994). "Stochastic population forecast for the United States: Beyond high, medium and low", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 89, No. 428 pp. 1175-1189.

- Li, Nan, R. Lee y S. Tuljapurkar (2004). "Using the Lee-Carter method to forecast mortality for populations with limited data", en Wolfgang Lutz y Joshua Goldstein (eds.) *How to deal with uncertainty in population forecasting?*, Reprinted from *International Statistical Review*, 72(1&2):1-106, 157-208, pp.19-36.
- Makeham, W. M. (1859). "On the law of mortality and the construction of annuity tables", *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol 8, pp. 301–310.
- Pankratz, Alan (1983), *Forecasting with Univariate Box-Jenkins Models: Concepts and Cases*, John Wiley & Sons, Inc, New York.
- Partida, Virgilio (2005). "La transición demográfica y el proceso de envejecimiento en México", *Papeles de Población* **45**, Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, México, pp. 9-27.
- Partida, Virgilio (2008). *Proyecciones de la población de México, de las entidades federativas, de los municipios y de las localidades, 2005-2050. Documento metodológico*, Consejo Nacional de Población, México.
- Perks, W. (1932). "On some experiments in the graduation of mortality statistics", *Journal of the Institute of Actuaries* **63**, pp. 12–40.
- Pitacco, E., M. Denuit, S. Haberman, A. Olivieri (2009). *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. Oxford University Press, USA.
- "Population Division of the Department of Economic and Social Affairs of the United Nations Secretariat", *World Population Prospect: The 2010 Revision*
- Preston, Samuel, P. Heuveline y M. Guillot (2000). *Demography: Measuring and Modeling Population Processes*, Blackwell Publishers Ltd., Londres, Inglaterra.
- R Development Core Team (2005) *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, <http://www.R-project.org>
- Reyes Hernández, José Luis (2005). "Efecto del uso de las tasas reales con métodos de financiamiento para planes de pensiones y resultado en Boletín D-3", Tesis para obtener el título de actuario, Facultad de Ciencias, UNAM, México D.F.
- Renshaw, A. y Haberman, S. (2003). "Lee-Carter mortality forecasting: a parallel generalized linear modelling approach for England and Wales mortality projections". *Journal of the Royal Statistical Society C*, **52**(1), pp. 119–137.
- Jia, Yan Bin (2008), *Singular Value Decomposition*, Com S 477/577, Problem Solving Techniques for Applied Computer Science, Iowa State University.
- Shryock Henry S. y Jacob S. Siegel (1993). "Populatin Dynamics", en: *The methods and materials of demography*, Vol 2. pp. 372-672. Washington, Bureau of the Census.

- Thiele T.N. (1871) "On a Mathematical Formula to Express the Rate of Mortality Throughout the Whole of Life" Tested by a Series of Observations Made Use of by the Danish Life Insurance Company of 1871. *Journal of the Institute of Actuaries and Assurance Magazine* **16**, pp. 313-329.
- Vélez Álvarez, Gladis Adriana, L. Gallego y D. Jaramillo (2005). "Modelo de análisis de la muerte materna: Camino para la supervivencia", Medellín, Secretaría de Salud.
- Vermunt, J.K. (1997). "LEM: A General Program for the Analysis of Categorical Data". Users' manual. Tilburg University, Tilburg, The Netherlands'.
- Wilmoth, John, (1993). "Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change", *Technical Report*, Department of Demography, University of California, Berkeley, EUA.
- Winklevoss, H.E. (1977). *Pension Mathematics: With Numerical Illustrations*, University of Pennsylvania, Richard D. Irwin Inc., Homewood, Illinois.
- Zuñiga, Elena y J. Enrique (2008). "El envejecimiento demográfico en México, principales tendencias y características", *Horizontes* **13**, Consejo de Población del Estado de México, pp. 93-100.



# Anexos

## 4.1. Demostraciones

Se busca demostrar la siguiente igualdad:

$$e_x = \sum_{k=0}^{w-x} k_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=1}^{w-x} k p_x$$

Dado que  $q_{x+k} = p_{x+k}$  y que  ${}_{k+1}p_x = {}_k p_x p_{x+k}$ , se tiene entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned} e_x &= \sum_{k=0}^{w-x} k_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{w-x} k_k p_x (1 - p_{x+k}) \\ &= \sum_{k=0}^{w-x} k ({}_k p_x - {}_k p_x p_{x+k}) \\ &= \sum_{k=0}^{w-x} k ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \\ &= \sum_{k=0}^{w-x} k_k p_x - \sum_{k=0}^{w-x} k_{k+1} p_x \end{aligned} \tag{4.25}$$

Se observa que  $\sum_{k=0}^{w-x} k_k p_x = 0 + \sum_{k=1}^{w-x} k_k p_x$ , y además que  $\sum_{k=0}^{w-x} k_{k+1} p_x = \sum_{k=1}^{w-x} (k - 1)_k p_x$ , entonces:

$$\begin{aligned}
e_x &= \sum_{k=0}^{w-x} k_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{w-x} k_k p_x - \sum_{k=0}^{w-x} k_{k+1} p_x \\
&= \sum_{k=1}^{w-x} k_k p_x - \sum_{k=1}^{w-x} (k-1)_k p_x \\
&= \sum_{k=1}^{w-x} k_k p_x - \left( \sum_{k=1}^{w-x} k_k p_x - \sum_{k=1}^{w-x} k p_x \right) \\
&= \sum_{k=1}^{w-x} k p_x
\end{aligned} \tag{4.26}$$

lo cual es lo que se buscaba demostrar.

### Segunda demostración

Se busca demostrar que, bajo el supuesto de que la mortalidad se distribuye de manera uniforme a lo largo de los años, la siguiente igualdad se cumple:

$$\dot{e}_x = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{w-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{T_x}{l_x}$$

Se sabe que  $T_x = \sum_{y=x}^w {}_n L_y$  y bajo el supuesto de mortalidad uniforme,  ${}_n L_x = \frac{n}{2}(l_x + l_{x+n})$

Si suponemos intervalos de un año, entonces  $n = 1$ . De aquí se sigue que:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_x &= \frac{T_x}{l_x} = \sum_{y=x}^w \frac{l_y + l_{y+1}}{2l_x} \\
&= \frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots}{2l_x} \\
&= \frac{l_x + 2 \sum_{k=1}^{w-x} l_{x+k}}{2l_x} \\
&= \frac{l_x}{2l_x} + 2 \sum_{k=1}^{w-x} \frac{l_{x+k}}{2l_x} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{w-x} \frac{l_{x+k}}{l_x}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

lo cual es lo que se buscaba demostrar.

## 4.2. Tablas

Año $t$	67 % inf	67 % sup	Año $t$	67 % inf	67 % sup	Año $t$	67 % inf	67 % sup
2006	-46.616	-45.343	2021	-78.744	-66.721	2036	-112.885	-91.734
2007	-48.598	-46.571	2022	-81.001	-68.304	2037	-115.165	-93.476
2008	-50.598	-47.849	2023	-83.263	-69.903	2038	-117.444	-95.225
2009	-52.63	-49.162	2024	-85.53	-71.515	2039	-119.722	-96.981
2010	-54.693	-50.503	2025	-87.801	-73.14	2040	-121.999	-98.743
2011	-56.785	-51.87	2026	-90.076	-74.779	2041	-124.274	-100.511
2012	-58.904	-53.261	2027	-92.352	-76.429	2042	-126.547	-102.285
2013	-61.045	-54.676	2028	-94.631	-78.091	2043	-128.819	-104.064
2014	-63.208	-56.113	2029	-96.912	-79.763	2044	-131.09	-105.849
2015	-65.388	-57.571	2030	-99.193	-81.446	2045	-133.358	-107.638
2016	-67.585	-59.05	2031	-101.475	-83.139	2046	-135.625	-109.432
2017	-69.796	-60.549	2032	-103.758	-84.841	2047	-137.89	-111.231
2018	-72.018	-62.066	2033	-106.04	-86.552	2048	-140.154	-113.034
2019	-74.252	-63.601	2034	-108.323	-88.271	2049	-142.415	-114.842
2020	-76.494	-65.152	2035	-110.604	-89.998	2050	-144.675	-116.653

**Tabla 4.14.** Pronóstico del parámetro  $k_t$  con intervalos de confianza al 67% para el caso femenino. **Fuente:** Elaboración propia

Año $t$	95 % inf	95 % sup	Año $t$	95 % inf	95 % sup	Año $t$	95 % inf	95 % sup
2006	-47.261	-44.699	2021	-84.828	-60.637	2036	-123.589	-81.03
2007	-49.623	-45.545	2022	-87.425	-61.88	2037	-126.141	-82.5
2008	-51.989	-46.458	2023	-90.024	-63.142	2038	-128.688	-83.981
2009	-54.385	-47.407	2024	-92.622	-64.423	2039	-131.23	-85.473
2010	-56.813	-48.383	2025	-95.22	-65.722	2040	-133.767	-86.975
2011	-59.272	-49.383	2026	-97.816	-67.038	2041	-136.298	-88.486
2012	-61.759	-50.406	2027	-100.41	-68.371	2042	-138.825	-90.007
2013	-64.268	-51.453	2028	-103.001	-69.721	2043	-141.346	-91.537
2014	-66.798	-52.523	2029	-105.589	-71.086	2044	-143.862	-93.076
2015	-69.344	-53.616	2030	-108.174	-72.466	2045	-146.373	-94.623
2016	-71.904	-54.731	2031	-110.754	-73.86	2046	-148.88	-96.178
2017	-74.475	-55.869	2032	-113.33	-75.268	2047	-151.381	-97.741
2018	-77.055	-57.029	2033	-115.902	-76.69	2048	-153.877	-99.311
2019	-79.641	-58.211	2034	-118.469	-78.125	2049	-156.368	-100.889
2020	-82.233	-59.413	2035	-121.031	-79.571	2050	-158.855	-102.473

**Tabla 4.15.** Pronóstico del parámetro  $k_t$  con intervalos de confianza al 95% para el caso femenino. **Fuente:** Elaboración propia

Año $t$	67% inf	67% sup	Año $t$	67% inf	67% sup	Año $t$	67% inf	67% sup
2006	-36.026	-35.017	2021	-59.878	-55.841	2036	-83.007	-77.387
2007	-37.725	-36.297	2022	-61.43	-57.268	2037	-84.541	-78.831
2008	-39.374	-37.626	2023	-62.979	-58.696	2038	-86.075	-80.276
2009	-40.999	-38.98	2024	-64.527	-60.127	2039	-87.607	-81.722
2010	-42.607	-40.35	2025	-66.073	-61.559	2040	-89.14	-83.168
2011	-44.204	-41.731	2026	-67.618	-62.992	2041	-90.671	-84.615
2012	-45.792	-43.121	2027	-69.162	-64.427	2042	-92.202	-86.062
2013	-47.374	-44.518	2028	-70.704	-65.863	2043	-93.732	-87.51
2014	-48.949	-45.921	2029	-72.245	-67.3	2044	-95.262	-88.959
2015	-50.52	-47.328	2030	-73.786	-68.738	2045	-96.792	-90.408
2016	-52.087	-48.74	2031	-75.325	-70.178	2046	-98.32	-91.857
2017	-53.651	-50.154	2032	-76.863	-71.618	2047	-99.849	-93.307
2018	-55.212	-51.572	2033	-78.4	-73.059	2048	-101.377	-94.758
2019	-56.77	-52.993	2034	-79.937	-74.501	2049	-102.904	-96.208
2020	-58.325	-54.415	2035	-81.472	-75.943	2050	-104.431	-97.66

**Tabla 4.16.** Pronóstico del parámetro  $k_t$  con intervalos de confianza al 67% para el caso masculino. **Fuente:** Elaboración propia

Año $t$	95% inf	95% sup	Año $t$	95% inf	95% sup	Año $t$	95% inf	95% sup
2006	-36.537	-34.506	2021	-61.921	-53.797	2036	-85.851	-74.543
2007	-38.447	-35.575	2022	-63.536	-55.162	2037	-87.431	-75.942
2008	-40.259	-36.741	2023	-65.146	-56.529	2038	-89.009	-77.342
2009	-42.02	-37.958	2024	-66.753	-57.9	2039	-90.586	-78.743
2010	-43.749	-39.208	2025	-68.358	-59.275	2040	-92.161	-80.146
2011	-45.455	-40.48	2026	-69.959	-60.652	2041	-93.736	-81.55
2012	-47.144	-41.77	2027	-71.558	-62.031	2042	-95.309	-82.955
2013	-48.818	-43.074	2028	-73.154	-63.413	2043	-96.881	-84.361
2014	-50.482	-44.389	2029	-74.748	-64.798	2044	-98.452	-85.769
2015	-52.136	-45.713	2030	-76.339	-66.184	2045	-100.022	-87.177
2016	-53.782	-47.046	2031	-77.929	-67.573	2046	-101.591	-88.586
2017	-55.42	-48.385	2032	-79.517	-68.964	2047	-103.159	-89.997
2018	-57.053	-49.73	2033	-81.103	-70.356	2048	-104.726	-91.408
2019	-58.681	-51.081	2034	-82.687	-71.75	2049	-106.292	-92.82
2020	-60.303	-52.437	2035	-84.27	-73.146	2050	-107.858	-94.233

**Tabla 4.17.** Pronóstico del parámetro  $k_t$  con intervalos de confianza al 95% para el caso masculino. **Fuente:** Elaboración propia