



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

**Instrumentación y control para un Sistema de
medición de propiedades acústicas en
materiales biológicos**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

Ingeniería Eléctrica-Instrumentación

P R E S E N T A :

Elisa Iseth Cepeda Pérez

TUTOR:

Dr. Gabriel Eduardo Sandoval Romero

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presi d e n t e: Dr. Qureshi Naser

Secre t a r i o: Dr. Kolokolstev Flatov Oleg Viktorovich

Vocal: Dr. Sandoval Romero Gabriel Eduardo

1^{er.} Suple n t e: Dra. Curiel Laura

2^{do.} Suple n t e: Dr. Hernández Cordero Juan Arnaldo

Lugar o lugares donde se realizó la
tesis: Ciudad Universitaria, México, D.F.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Sandoval Romero Gabriel Eduardo



FIRMA

Resumen

Uno de los objetivos que persigue la investigación en nuevas tecnologías para tratamiento de cáncer es el eliminar los tumores mediante procedimientos no invasivos.

Los tumores producidos debidos al cáncer metastático de hígado son muy difíciles extraer por cirugía convencional debido a la forma en la que se extienden por el tejido. Una propuesta es utilizar un haz de ultrasonido focalizado de alta intensidad, debido a que es más fácil restringir el área a tratar sin dañar el tejido cercano al tumor y por medio de ablación, lograr una necrosis en el tejido maligno. Sin embargo, debido a que el hígado se encuentra en la zona detrás de las costillas, es necesario encontrar una manera de evitar los efectos de dispersión y atenuación del haz causados por el hueso. Hasta la fecha las terapias reportadas con ultrasonido focalizado para esa zona se basan en retirar una parte de las costillas para dar la terapia, pero esto resulta de nueva vez en un método invasivo.

Este trabajo de tesis forma parte de un proyecto que tiene como objetivo generar un dispositivo que sea capaz de eliminar o neutralizar los efectos de atenuación y dispersión producidos por las costillas para poder dar tratamiento sin necesidad de abrir al paciente.

Para poder diseñar dicho dispositivo es necesario determinar los parámetros acústicos característicos del hueso de las costillas, hasta ahora no hay estudios suficientes para poder determinar dichos parámetros.

La contribución a dicho proyecto que se presenta en esta tesis consiste en el diseño y evaluación para un sistema de medición que permita realizar un estudio preliminar en costillas de cerdo.

El objetivo de este trabajo es realizar la herramienta computacional que permita la reconstrucción matricial de cada costilla utilizando imágenes de tomografía asistida por computadora para establecer un sistema de referencia que permita conocer con precisión las condiciones de incidencia del haz de ultrasonido así como implementar un sistema de medición del campo de presión acústica en la zona detrás de las costillas, realizar varias mediciones de dicho campo y determinar la validez del sistema de medición propuesto.

Índice general

1. Introducción	8
1.1. Métodos actuales para tratamiento de cáncer en hígado	10
1.2. Principios físicos del ultrasonido focalizado de alta intensidad (HIFU)	12
1.3. Propiedades de los huesos	14
1.4. HIFU para tratamiento en hígado	16
1.5. Medición de parámetros ultrasonoros en huesos	17
2. Medición de las propiedades acústicas	21
2.1. Propiedades acústicas y técnicas para medición	21
2.2. Montaje experimental	29
2.3. Sensor y metodología para las mediciones	31
2.3.1. Transductor	31
2.3.2. Hidrófono	31
2.3.3. Caracterización de la velocidad del sonido en el medio	32
2.3.4. Medición y Alineación	34
2.4. Cuidado y manejo de las muestras biológicas elegidas	38
2.5. Disposición para las medidas	49
3. Mediciones	66
3.1. Muestras	66
3.2. Adquisición de datos	66
3.3. Las señales obtenidas	68
3.4. La velocidad del sonido	73
3.5. Atenuación	74
3.6. Efectos no lineales	76
4. Conclusión y discusión	79
A. Programas	88
B. Acústica no lineal	100
B.1. El parámetro B/A	101
B.2. Deformación de una onda ultrasonora de amplitud finita	104

B.2.1. Las ecuaciones de onda a segundo orden y modelos matemáticos	107
B.2.2. Métodos computacionales	117

Índice de figuras

1.0.1.Localización anatómica del hígado	9
1.3.1.Estructura del hueso esponjoso del fémur [18].	15
1.5.1.Dispositivo para medir la densidad en los dedos de la mano uti- lizando ultrasonido focalizado de manera transversal [18].	18
1.5.2.Técnica de medición por transmisión transversal[18].	18
2.1.1.Transmisión con y sin la muestra	27
2.1.2.Curva de atenuación en función de la frecuencia[18].	28
2.1.3.Criterios para estimar el tiempo de vuelo[18].	29
2.2.1.Vista superior y perfil del tanque de agua utilizado para el mon- taje experimental.	30
2.3.1.Hidrófono y elementos necesarios para la medición del campo acústico.	32
2.3.2.Ejemplo de señales a obtener [18].	33
2.3.3.Trayectoria del haz de ultrasonido.	35
2.3.4.Vista superior de la disposición entre el hidrófono y el transductor.	36
2.4.1.Costillas limpias y enmarcadas.	39
2.4.2.Costillas en el marco vistas de frente y de perfil.	40
2.4.3.Soporte para el marco de las costillas.	41
2.4.4.Marcadores ubicados en el marco de policarbonato.	42
2.4.5.Imagen de las costillas en TAC	43
2.4.6.Reconstrucción preliminar de las costillas en MATLAB.	46
2.4.7.Reconstrucción de la superficie de las costillas utilizando una tri- angulación.	46
2.4.9.Imagen de las costillas en el sistema de coordenadas del labora- torio con los marcadores, el marco y mostrando las dimensiones del transductor.	47
2.4.8.Imagen de las costillas en el sistema de coordenadas del labora- torio con los marcadores.	47
2.4.11Pantalla con los resultados sobre el angulo que se debe girar el soporte y la desviación estándar en la zona.	48
2.4.10Superficie de las costillas mostrando el valor de los ángulos en la superficie de las costillas.	48
2.5.1.Vista superior del tanque con los absorbentes.	49

2.5.2.	Alineación del transductor	50
2.5.3.	Vista de perfil del soporte	51
2.5.4.	Marco con las costillas sujeto al soporte	52
2.5.5.	Alineación del soporte	53
2.5.6.	Transductor en modo de eco	54
2.5.7.	Pantalla del osciloscopio mostrando la señal de excitación y su eco	54
2.5.8.	Alineación de el soporte con el transductor en el plano XY	56
2.5.9.	Foco del transductor sobre el marco.	56
2.5.10.	Foco del transductor sobre el marcador.	57
2.5.11.	Gráfica del perfil de las costillas	58
2.5.12.	Alineación del transductor con el hidrófono	59
2.5.13.	Montaje experimental para la adquisición del campo de presión de la onda de ultrasonido	59
2.5.14.	Señal de excitación para el transductor	60
2.5.15.	Ejemplo de la trayectoria sobre la cual se movió el hidrófono en el caso de la adquisición sobre el plano XY	61
2.5.16.	Ejemplo del campo de presiones adquirido	63
3.3.1.	Campo de presión acústica sin la muestra (en agua desionizada y desgasificada).	69
3.3.2.	Campo de presión acústica con la muestra en agua (las costillas colocadas entre el transductor y el hidrófono)	69
3.3.3.	Señal adquirida en agua utilizando el amplificador para el transductor.	70
3.3.4.	Señal adquirida en agua sin utilizar el amplificador para el transductor	70
3.3.5.	Campo acústico adquirido sin utilizar el amplificador para el transductor	71
3.3.6.	Espectro de frecuencias de las señales adquiridas utilizando el amplificador para el transductor	72
3.3.7.	Espectro de frecuencias de la señal adquirida sin utilizar el amplificador para el transductor.	72
B.2.1	Deformación espacial y temporal de una onda senoidal durante la propagación no lineal.	105

Índice de cuadros

2.1.1. Valores típicos para velocidad del sonido, impedancia acústica característica y atenuación para diferentes materiales biológicos (* La atenuación en agua varía como el cuadrado de la frecuencia f , el coeficiente de atenuación en $dB \cdot cm^{-1}$ está dado por $\alpha(f) = 0.002f^2$).	26
2.1.2. Velocidad del sonido en diferentes tipos de hueso.	26
2.5.1. Ejemplo de parámetros para realizar un adquisición.	62
3.5.1. Valores experimentales para la atenuación en el hueso de las costillas	76
B.1.1. Valores del parámetro B/A para algunos materiales biológicos . .	104

Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo se plantean los antecedentes y principios generales en los que se basa este trabajo. Está dividido en cinco secciones mediante las cuales se exponen la importancia y motivación para realizar esta tesis.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un montaje experimental con el cual sea posible medir la presión acústica en la zona detrás de las costillas y que permita la caracterización de las propiedades acústicas de la caja torácica en un modelo ex vivo. Estos datos son necesarios para asistir en la modelización y desarrollo de dispositivos que utilizan ondas acústicas que atraviesan las costillas.

Una de las aplicaciones principales es el uso de ondas acústicas en el hígado. Por medio de ondas acústicas se propone dar tratamiento a las metástasis en hígado que a la fecha son muy difíciles de tratar por los métodos existentes.

El hígado es uno de los órganos más grandes del cuerpo, se encuentra ubicado en el cuadrante superior derecho de la cavidad abdominal debajo del diafragma y detrás de las costillas[1].

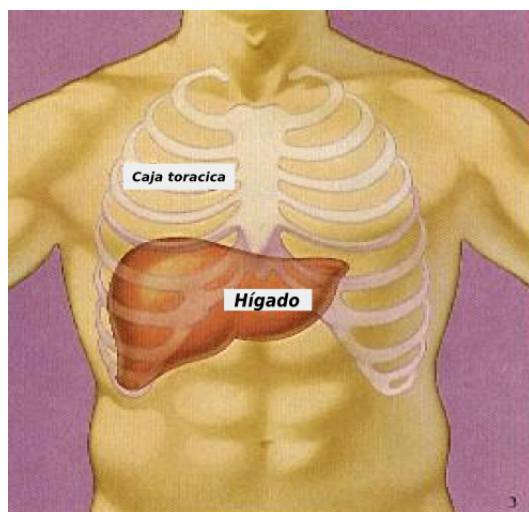


Figura 1.0.1: Localización anatómica del hígado

El borde inferior del hígado normalmente llega justo hasta el borde inferior de las costillas (margen costal) sobre el lado derecho. El borde del hígado normalmente es delgado y firme y no puede sentirse con las puntas de los dedos por debajo del borde de las costillas, excepto al tomar una respiración profunda[1].

Está a la derecha del estómago y se superpone a la vesícula biliar y está dividido en cuatro lóbulos. Está conectado con dos vasos sanguíneos importantes, la arteria hepática y la vena porta. La arteria hepática transporta sangre de la aorta, mientras que la vena porta transporta sangre con nutrientes provenientes del tracto digestivo, el bazo y el páncreas. Estos vasos sanguíneos se subdividen en capilares cada uno de los cuales conduce a un lobulillo hepático los cuales están formados por millones de células hepáticas[1].

El hígado lleva a cabo una variedad de funciones dentro de las cuales está la desintoxicación, síntesis de proteínas y producción de químicos necesarios para la digestión. Esta comunicación del hígado con otros órganos y sistemas es lo que promueve que la metástasis al hígado ocurra con facilidad[1].

El cáncer es una enfermedad que se caracteriza por el crecimiento anormal y descontrolado de un grupo de células. Este crecimiento anormal puede invadir, destruir el tejido y transportarse a otras partes del cuerpo por medio de la linfa o la sangre, esto último se conoce como metástasis.

El cáncer de hígado propiamente dicho es aquel que se origina en el hígado, es diferente de aquel que se origina en otra parte del cuerpo y posteriormente viaja al hígado, éste último se conoce como cáncer metastásico de hígado.

La mayoría de los cánceres encontrados en el hígado son metástasis de tumores localizados en otras partes del cuerpo, frecuentemente del tracto gastrointestinal, pero también del pecho, ovarios, pulmón, riñones y próstata[2].

1.1. Métodos actuales para tratamiento de cáncer en hígado

Los métodos actuales paliativos y para tratamiento de cáncer de hígado comprenden: cirugía, quimioterapia, radioterapia, radiofrecuencia, crioterapia y ultrasonido focalizado. En un tratamiento para cáncer dependiendo de las características de la enfermedad generalmente se utilizan combinaciones de dos o más de estos métodos.

1. Cirugía: La cirugía es el tratamiento más antiguo, y con frecuencia la primera opción para muchos casos de cáncer. Si el cáncer está localizado en una zona puede utilizarse la cirugía consiste en extirparlo junto con un poco del tejido circundante que pudiera contener células cancerosas. La cirugía es una terapia que depende fundamentalmente de la localización regional, es decir, si se ha comprobado clínicamente que el tumor está diseminado, no es curable por este método. Una minoría de las metástasis hepáticas son las que se pueden curar mediante intervenciones quirúrgicas[3].
2. Quimioterapia: La quimioterapia es el tratamiento de enfermedades por medio de introducir químicos en el cuerpo. Una característica de las células cancerígenas es su rápida reproducción celular, estos químicos actúan eliminando a las células que tienen un crecimiento celular rápido. Pero además de las células cancerígenas existen otros tipos de células que de manera natural tienen un crecimiento rápido, como es el caso de la médula y el tracto digestivo por ejemplo, las cuales también son afectadas por la quimioterapia[4]. La quimioterapia se aplica en forma de tabletas, inyectándola directamente a una vena y en ocasiones se puede inyectar directamente sobre el tumor. El cáncer de hígado más comúnmente tratado con quimioterapia es el hepatoblastoma. Este cáncer ocurre principalmente en niños menores[4]. Además, quimioterapia para el cáncer de hígado es comúnmente utilizada antes de la cirugía para disminuir el tamaño del tumor y hacer más fácil el removerlo. También puede ser utilizada para poder disminuir el número de metástasis y hacer la cirugía posible[4]. La quimioterapia también puede ayudar a que el cáncer no reincida [4].
3. Radioterapia: La radioterapia es el uso de radiación ionizante para tratamiento médico del cáncer controlando las células malignas. La radiación actúa dañando el DNA de las células cancerosas como resultado del impacto de las células con partículas cargadas. Este daño en el DNA tiene como resultado un crecimiento más lento de las células o la muerte de las mismas. La radioterapia puede ser utilizada para terapia curativa o como método paliativo[4]. El uso de la radioterapia está limitado por el hecho de que la radiación ionizante puede inducir cáncer. Generalmente los tratamientos actuales para cáncer combinan radioterapia, quimioterapia y cirugía[4]. Pero debido a los efectos secundarios, riesgos y lo invasivo de estos tratamientos, nuevas formas de tratamiento son necesarias y son

actualmente investigadas. Para el tratamiento de hígado, dependiendo del estado del paciente, la radiación se puede aplicar desde fuera del cuerpo utilizando radiomarcadores, sustancias que se pegan al tumor debido a la capacidad del tejido cancerígeno para atraer energía, con esto se puede guiar el tratamiento.

4. **Radiofrecuencia:** El procedimiento de radiofrecuencia consiste en colocar una sonda directamente en el tejido que se quiere eliminar. Un conjunto de varios electrodos curvos se extienden desde el extremo de la sonda. La energía de radiofrecuencia fluye a través de los electrodos, causando agitación iónica en el tejido. Esta fricción genera calor, y una vez que las temperaturas son lo suficientemente altas, el calor destruye el tejido en pocos minutos. Para guiar el tratamiento y controlar el proceso de tratamiento normalmente se utiliza ultrasonido[5]. El tamaño de la zona de ablación se determina en gran medida por el tamaño de la sonda, la temperatura del tejido, y la duración del tiempo de la energía se aplica. Hay un límite claro entre el tejido muerto y el tejido circundante no afectado[5]. La ablación por radiofrecuencia se usa para tratar muchos tipos de cáncer de hígado. En general, la ablación por radiofrecuencia es eficaz en el tratamiento de tumores de menos de una pulgada y media de diámetro. La ablación por radiofrecuencia es una opción de tratamiento viable y eficaz para el caso en que después de la extirpación quirúrgica de un tumor hepático, quedaron remanentes del tumor que no han respondido a la quimioterapia o se tienen varios tumores hepáticos pequeños que se han extendido demasiado como para ser extirpados quirúrgicamente [6].
5. **Crioterapia:** La crioterapia también llamada criocirugía, es el uso de frío extremo producido por nitrógeno líquido (o gas argón) para destruir el tejido anormal [7]. Para tumores hepáticos, nitrógeno líquido o gas argón se distribuye a través de un instrumento hueco llamado criosonda, que se pone en contacto con el tumor. Para guiar la criosonda y vigilar la congelación de las células generalmente se utilizan ultrasonido o resonancia magnética. Una bola de cristales de hielo se forma alrededor de la sonda de congelación. A veces más de una sonda es utilizada para entregar el nitrógeno líquido a diferentes partes del tumor. Las sondas pueden introducirse en el tumor durante la cirugía o por la piel (vía percutánea). Después de la criocirugía, el tejido congelado y muerto se descongela y es absorbido por el cuerpo.
6. **Ultrasonido focalizado de alta intensidad:** El ultrasonido focalizado de alta intensidad (High Intensity Focused Ultrasound, HIFU por sus siglas en inglés) es un procedimiento que focaliza un haz de ultrasonido de alta intensidad en la zona a tratar para calentar y por ablación destruir tejido patógeno. La terapia con ultrasonido focalizado en combinación con técnicas de quimioterapia ha funcionado para alargar la vida en caso de pacientes con carcinomas hepáticos avanzados[12]. La siguiente sección está dedicada a describir esta técnica con mayor detalle.

1.2. Principios físicos del ultrasonido focalizado de alta intensidad (HIFU)

El ultrasonido corresponde a perturbaciones mecánicas que se propagan en medios compresibles, como el aire y el agua, a una frecuencia mayor que el límite superior audible por el ser humano (aproximadamente 20 kHz). El ultrasonido es utilizado en muchos campos, típicamente para penetrar un medio y medir la reflectancia o para focalizar energía[8].

La reflectancia nos puede dar información sobre la estructura interna del medio, lo cual es utilizado por algunos animales como los murciélagos para cazar. La sonografía médica (ultrasonografía) es una técnica de diagnóstico basada en reflectancia de ondas ultrasonoras para generar imágenes médicas, se utiliza para ver músculos tendones y varios órganos, saber su tamaño, estructura y lesiones patológicas con imágenes en tiempo real[8].

El ultrasonido ha sido utilizado para obtener imágenes del cuerpo humano por más de 50 años y se ha convertido en una de las técnicas de diagnóstico más utilizadas en la medicina moderna[8]. Esta técnica es relativamente económica y transportable, comparada con otras técnicas para imágenes como resonancia magnética (IRM) y tomografía computarizada (o Computed Tomography, CT, por sus siglas en inglés). La aplicación más conocida del ultrasonido es en sonografía médica para producir imágenes de fetos dentro del útero, esta técnica es conocida como sonografía obstétrica[8].

Conforme una onda acústica se propaga a través del tejido, una parte de ella es absorbida y convertida en calor[8]. La energía de un haz de ultrasonido se puede enfocar en un área muy pequeña dentro del tejido.

Cuando el tejido se calienta lo suficiente como resultado de focalizar ésta energía se produce una coagulación térmica[9]. Si la intensidad de la energía acústica es suficientemente alta puede ocurrir que se formen pequeñas burbujas que interactúan con el campo de ultrasonido y a esto se le llama cavitación[9].

Estas microburbujas oscilan y crecen debido a factores como rectificación difusa, y eventualmente implotan (esto se conoce como cavitación inercial) produciendo una onda de choque que puede dañar mecánicamente el tejido[12]. El fenómeno de cavitación se ha propuesto para potencializar los efectos de ablación[12].

Utilizando este principio de absorción de energía acústica por los tejidos se han realizado terapias por ablación de tejidos. A esta tecnología se le llama ultrasonido focalizado de alta intensidad o HIFU. Los tratamientos clínicos con HIFU son típicamente acompañados con algún sistema de imagen para planear el tratamiento y delimitar el área antes de aplicar la terapia con HIFU[12].

La técnica que utiliza imagen por resonancia magnética (IRM) para guiar el tratamiento se conoce como Ultrasonido Focalizado guiado por Resonancia Magnética, abreviado por sus siglas en inglés a MRgFUS[9], la técnica de guiado también puede ser ultrasonografía y la técnica es conocida como Ultrasonido Focalizado guiado por Ultrasonido (USgFUS)[9].

La obtención de imágenes por IRM, se utiliza para identificar tejidos que

podrían ser destruidos por el ultrasonido focalizado. MRgFUS se utiliza actualmente en Australia, Estados Unidos, Canadá, Israel, Europa y Asia para tratar fibromas uterinos[9]. La técnica de HIFU guiada por ultrasonido se utiliza en México, Italia, España, Corea, Japón, Hong Kong, Malasia, Rusia, China, Reino Unido, Rumania y Bulgaria[9]. Actualmente nuevas tecnologías para tratar cáncer en el cerebro, pecho, hígado, hueso y próstata se encuentran en investigación[9].

El primer tratamiento reconocido con HIFU fue para tratar cáncer de próstata, por ello existen muchos estudios clínicos y artículos sobre este tratamiento[13]. Los estudios se llevaron a cabo utilizando equipo de ultrasonido transrectal. Este tratamiento es comparable a la cirugía en términos de control del área tratada, eliminación del tejido canceroso y las posibles complicaciones después del tratamiento[13].

La terapia con ultrasonido focalizado también es efectiva para controlar el cáncer de próstata después de radioterapia externa[10].

El útero, debido a que se encuentra localizado estáticamente cerca de la pared abdominal, también ha sido tratado con HIFU. La mayoría de los estudios clínicos realizados con dispositivos HIFU para leiomioma uterino (fibromas) esta región han sido asistidos por imagen obtenida con resonancia magnética, estos tratamientos ya están avalados por la FDA (Food and Drug Administration, Estados Unidos) y han demostrado ser eficientes controlando los leiomiomas uterinos[14].

El pecho es también un órgano estático y superficial, pero debido a las dificultades para tratar los ganglios linfáticos en la axila las aplicaciones clínicas para la terapia con HIFU son limitadas[12]. La posibilidad de utilizar esta técnica como método inicial o principal para terapia en cáncer de mama necesita ser estudiado con mayor profundidad, únicamente se ha evaluado su eficiencia para controlar el crecimiento del tumor localmente.

El cáncer de páncreas es otra área en la que se puede aplicar ultrasonido focalizado como método paliativo. En un estudio se reportó que el total de los pacientes experimentaron menos dolor después del tratamiento. Los efectos de la terapia con ultrasonido focalizado en cáncer renal, tumores malignos en hueso, sarcomas en tejido blando, tumores en testículos y en el cerebro han sido evaluados y han mostrado ser eficientes como métodos paliativos[11].

El hígado, especialmente el lóbulo derecho, no ha mostrado ser un área de fácil aplicación para ultrasonido focalizado debido a los movimientos respiratorios y los efectos debidos a las costillas[15]. La mayoría de los estudios están basados en tratamientos paliativos pero no con propósitos curativos.

La terapia con HIFU tiene un gran potencial en el campo de la oncología debido a es un método no invasivo y es fácil limitar el área a tratar además de que la tasa de complicaciones es baja[15]. La técnica HIFU se puede combinar con otras formas de terapia o diagnóstico para generar nuevas tecnologías como distribución de fármacos, nuevos métodos de cirugía robot e imagen molecular[16]. Aunque los estudios sobre la terapia con HIFU están aun en su fase inicial en estos momentos, se puede predecir que producirá una revolución en cuanto a las técnicas de terapia[16].

Potencialmente HIFU permite conservar las funciones del órgano a tratar dependiendo del lugar donde se encuentre el tumor. No es tóxico, ni deja cicatrices en la piel. Se reduce el dolor en el postoperatorio, la reincorporación a la vida normal ocurre en horas o en pocos días. Se permite repetir la operación las veces necesarias. El impacto sobre los órganos vecinos es mínimo[16].

Se han realizado pruebas clínicas con HIFU para probar su capacidad de ser una herramienta para el tratamiento de tumores en el hígado, todos los informes publicados se detallan los tratamientos clínicos de tumores hepáticos han descrito el uso de dispositivos guiada por ecografía[16].

Recientemente se han llevado a cabo pruebas clínicas para evaluar la eficacia de diferentes dispositivos HIFU para el tratamiento de tumores hepáticos alrededor del mundo. El objetivo de estas pruebas es evaluar la seguridad y efectividad del dispositivo en cuestión, a la fecha once pacientes han sido tratados con dispositivos de HIFU para hígado y la técnica ha demostrado ser una alternativa de tratamiento[17].

Sin embargo, una de las consideraciones más importantes para el tratamiento con HIFU es la ubicación anatómica del órgano. Cuando la onda atraviesa un medio como el cuerpo humano, experimenta las diferencias de densidad del medio, la velocidad de propagación de la onda depende de la densidad del medio, también la onda se atenúa dependiendo del medio. En el caso del hígado debemos considerar que se encuentra detrás de las costillas por lo cual, para desarrollar un tratamiento con HIFU debemos primero estudiar las propiedades acústicas del hueso de las costillas.

Al atravesar la zona de las costillas el haz de ultrasonido la intensidad del haz de ultrasonido disminuirá debido a los efectos de absorción y dispersión que producirá el hueso, para poder garantizar que se deposita la cantidad necesaria de energía en la zona deseada sin dañar el tejido cercano es fundamental caracterizar el proceso de atenuación, para esto es necesario determinar además la velocidad del sonido en el hueso de las costillas.

1.3. Propiedades de los huesos

Los huesos están formados por tejido conectivo mineralizado. Este tejido está formado por células llamadas osteoblastos las cuales liberan colágeno, calcio, iones de fosfato y magnesio. Al combinarse estas sustancias químicamente crean un mineral cristalino que forma los huesos. Es la combinación de minerales duros y colágeno flexible lo que le da a los huesos una consistencia más dura que el cartílago sin ser quebradizos[18].

El hueso compacto está formado por estructuras llamadas osteones, cada uno de ellos está formado por capas concéntricas del material mineralizado y en el centro del osteón se encuentra el canal Harvesiano que contiene sangre y nervios. Existen dos tipos principales de tejido óseo, compacto y esponjoso[18].

El tejido compacto es el que forma la parte exterior y dura del hueso y el tejido esponjoso se encuentra en el interior. Biológicamente ambos tejidos son idénticos, la diferencia está en el arreglo de la microestructura[18].

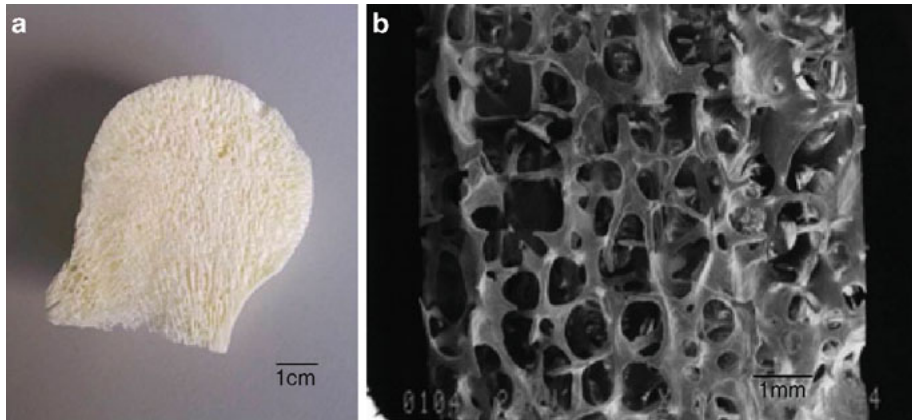


Figura 1.3.1: Estructura del hueso esponjoso del fémur [18].

El grupo de huesos que tienen como objetivo la protección de órganos o la presentación de superficies amplias son llamados huesos planos, ejemplos de ellos son el cráneo, el hueso ilíaco (pelvis), el esternón, las costillas, el sacro y la escápula. Debido a que su conformación interna es similar podríamos esperar que sus características acústicas también lo sean[19].

Las costillas son arcos elásticos de hueso, forman una gran parte del esqueleto torácico. Son doce en cada lado, pero este número puede ser incrementado por el desarrollo de una costilla cervical o lumbar, o puede ser reducido a once[19].

Las siete primeras se conectan por detrás con la columna vertebral y por delante a través de la intervención de los cartílagos costales, con el esternón, que se llaman costillas verdaderas o vertebro-esternal. Las cinco restantes son las costillas falsas, de las cuales las tres primeras tienen sus cartílagos unidos al cartílago de la costilla superior (vertebro-condral), las dos últimas son libres en sus extremidades anteriores y se denominan costillas flotantes o vertebrales. Las costillas varían en su curvatura, las superiores son menos oblicuas de la parte inferior; la oblicuidad alcanza su máximo en la novena costilla, y disminuye gradualmente a partir de que la costilla a la duodécima[19].

Las costillas están situadas una debajo de la otra de tal manera que espacios llamados espacios intercostales aparecen entre ellas[19].

El tamaño de cada espacio corresponde a la de las costillas adyacentes y sus cartílagos. Varía entre la parte posterior y frontal, así como de arriba a abajo.

Cuando el ultrasonido interactúa con el hueso, una parte de la energía es atenuada y reflejada lo que afecta la deposición de energía del ultrasonido, disminuyendo la eficacia del tratamiento con HIFU y aumentando la posibilidad de eventos adversos, como quemaduras en zonas no deseadas cuando los tumores intra-abdominales se encuentran ocultos por las costillas.

Debido a que la atenuación de un haz de ultrasonido depende de la frecuencia y que la atenuación en hueso es alta, los dispositivos de ultrasonido para hueso utilizan bajas frecuencias, en el rango de 250KHz a 1.25 MHz [18], mientras que

altas frecuencias se han probado experimentalmente, por ejemplo para investigar la microestructura del tejido esponjoso y medir las propiedades elásticas del tejido compacto[18]. En hueso compacto la velocidad del sonido es de 4000m/s, para una longitud de onda de 16mm a 250 kHz y a 4mm a 1MHz. En el caso del hueso esponjoso la velocidad es 1500 m/s con longitud de onda de 3.1mm a 500kHz [18].

1.4. HIFU para tratamiento en hígado

Estudios recientes en animales han demostrado la capacidad de la técnica HIFU para la ablación extracorpórea de objetivos dentro del tejido en el hígado sin necesidad de la exposición quirúrgica del hígado o la inserción de instrumentos en el hígado. El valor potencial del HIFU en un tratamiento no invasivo local para los cánceres hepáticos ha atraído considerable interés[20].

En un estudio realizado en cerdos se concluye que la destrucción del hígado con HIFU sin necesidad de abrir al animal es posible, aunque aún no se ha logrado dar tratamiento en regiones específicas del hígado[21].

Sin embargo, la mayoría de los estudios reportados son exponiendo el hígado, ya sea al retirar las costillas [22] o extrayendo el hígado del cuerpo, esta última modalidad ya ha sido probada en humanos y se ha observado que el mejor método para dar seguimiento en la zona son las imágenes por resonancia magnética[16].

También se ha propuesto utilizar un transductor formado con elementos múltiples y poder controlarlo de manera que se puedan apagar aquellos elementos que se encuentren frente al hueso y dejar encendidos los que estén en el espacio intercostal. En un estudio realizado en hígado de conejo se concluyó que utilizando HIFU a 1,1 MHz con $500W/cm^2$ y en una exposición de 20 s se logró destruir con precisión el tumor en el hígado del conejo y la necrosis de coagulación se observó 24 horas más tarde. Los cambios ocurridos durante el proceso de necrosis se pueden observar mediante imágenes de ultrasonido de manera eficiente[23].

Un estudio realizado en ratones mostró que HIFU puede destruir el cáncer de hígado con mayor eficacia combinando un tratamiento con agentes anti-angiogénicos de heparina y cortisona[24].

Para poder dar terapia en el hígado sin la necesidad de abrir al paciente también es importante considerar los movimientos propios del hígado y los producidos por la respiración del paciente. En un estudio realizado en cerdos se observó que la magnitud de éstos movimiento es de 8.2-10.0 mm[25].

Recientemente en diversos lugares se ha comenzado con el desarrollo y prueba en fantasmas que sean capaces de simular el efecto de los huesos de las costillas [26] en el ultrasonido pero aún no hay resultados conclusivos y falta profundizar en las propiedades acústicas del hueso. Una propuesta para poder tratar extracorporalmente el hígado es el desarrollo de un dispositivo multielementos que permita compensar la deformación del foco debida a las costillas. Para poder asegurar esto necesitamos un alto número de elementos haciendo la téc-

nica económica y tecnológicamente costosa. Por medio de modelos matemáticos podemos optimizar el diseño, encontrando el número mínimo de elementos que deberá tener el dispositivo para funcionar adecuadamente y para acoplarse a diferentes formas de costilla. El desarrollo de los modelos requiere un buen conocimiento de las propiedades acústicas del tejido que se encuentra frente al hígado. Hasta este momento no se han reportado los valores para velocidad del sonido y atenuación específicos para los huesos de las costillas, por lo tanto la obtención de dichos valores es uno de los pasos iniciales en el desarrollo del dispositivo.

1.5. Medición de parámetros ultrasonoros en huesos

La primera aplicación clínica en el hueso de las ondas de ultrasonido se describió en 1950 para supervisar la curación de fracturas en la tibia. En un estudio publicado en 1984 se demostró que la dependencia en la frecuencia de la atenuación varía dependiendo de la composición interna del hueso y este estudio se utilizó para identificar osteoporosis en pacientes [18]. Estudios realizados en muestras de hueso ex vivo se basan en un método de transmisión transversal, que consiste en sumergir la muestra, un transductor de ultrasonido y el receptor (hidrófono) en agua.

En un análisis simplificado, no considerando los efectos de dispersión que se podrían producir dentro del hueso debido a las diferencias de densidad internas del mismo, el procedimiento es el siguiente: se coloca la muestra entre el transductor y el hidrófono y se captura la señal que recibe el hidrófono, luego se retira la muestra enviando la onda de ultrasonido directamente del transductor al hidrófono y de nuevo capturamos la señal.

El tiempo de tránsito a través del agua con y sin muestra se mide, es importante conservar siempre la misma separación entre los elementos del sistema. Sabemos que debido a la diferencia entre la densidad del agua y del hueso el tiempo de tránsito será diferente, si conocemos el ancho del hueso muestra podemos saber la distancia que recorrió la onda en este medio y utilizando la diferencia en tiempo entre ambas señales se puede derivar la velocidad del sonido para el tejido óseo en esa región.

Este método se puede generalizar por medio de modelos matemáticos para el caso en que el ángulo de incidencia varía y se deben considerar las componentes transversales y longitudinales de la onda.

Durante los últimos 20 años se han utilizado mediciones de los parámetros acústicos del hueso esponjoso para caracterizar clínicamente el estado de este tejido. Esto ha sido utilizado para medir hueso cortical como el calcáneo, dedos falanges, el radio, la tibia y el fémur[18].

Existen principalmente dos técnicas para diferentes tipos de hueso.

1. Transmisión transversal: La técnica de transmisión transversal utiliza dos transductores piezoeléctricos, un transmisor y un receptor, colocado en

los lados opuestos del sitio del esqueleto que se medirá. Este método ha sido utilizado clínicamente para el calcáneo (hueso del talón), las falanges del dedo, el radio ultradistal en el antebrazo y el fémur proximal en la cadera[18].



Figura 1.5.1: Dispositivo para medir la densidad en los dedos de la mano utilizando ultrasonido focalizado de manera transversal [18].

2. Transmisión axial: En las técnicas de transmisión axial que se desarrollaron inicialmente en la década de 1950 para estudiar consolidación de las fracturas de hueso cortical. Al igual que en el caso anterior un transmisor y un receptor se utilizan para medir la velocidad del sonido a lo largo del hueso de manera paralela a su eje longitudinal. En este caso se utilizan varios receptores y se colocan paralelamente de manera que el receptor recibe la información de la onda reflejada. Nuevamente capturando el tiempo de tránsito de la señal y conociendo la ubicación de cada receptor podemos obtener información[18].

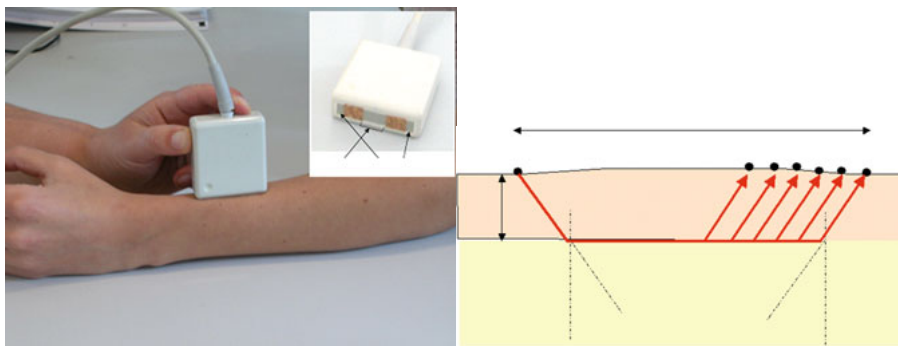


Figura 1.5.2: Técnica de medición por transmisión transversal[18].

El objetivo de este trabajo de tesis es el desarrollo de un montaje experi-

mental que permita la medición de la presión del campo acústico en la zona detrás de las costillas de forma reproducible, para poder posteriormente obtener los valores relevantes que caracterizan las propiedades acústicas de las costillas. Para ello se requiere realizar la instrumentación adecuada que permita el control específico que requieren las medidas. Esto ayudará a que en un futuro se pueda modelar la trayectoria del haz de ultrasonido que permitirá el diseño de un dispositivo de múltiples elementos que sea capaz de focalizarse en el hígado. Basados en métodos ya propuestos para la medición de estas características acústicas, se formula en este trabajo un montaje adecuado para obtener valores correctos de estas características que podrán ser utilizados en el futuro para modelizaciones y desarrollo de dispositivos para HIFU.

Resumen

Los métodos actuales para tratamiento de cáncer en hígado son: cirugía, quimioterapia, radioterapia, crioterapia y ultrasonido focalizado. Actualmente todas estos tratamientos se aplican de forma invasiva, es decir ya sea introduciendo sustancias al cuerpo o abriendo la cavidad torácica.

Los tumores producto del cáncer metastásico de hígado son difíciles de eliminar por medio de cirugía por la manera en la que se propagan y las cirugías tienden a ser muy complejas.

El ultrasonido focalizado de alta intensidad (HIFU por sus siglas en inglés) es una técnica que se basa en la ablación del tejido canceroso por medio de un haz de ultrasonido focalizado. Esta técnica muestra una resolución milimétrica por lo que es adecuada para tratar tumores pequeños y difícilmente operables.

El hígado es un órgano que se encuentra en la zona detrás de las costillas, si se envía un haz de ultrasonido a través de las costillas, el hueso interactúa desviando y atenuando el haz, es por ello que las técnicas para tratamiento con HIFU actuales para hígado consisten en retirar las costillas antes de dar tratamiento, lo cual resulta en un procedimiento invasivo y doloroso.

Hasta la fecha no hay suficientes estudios que permitan caracterizar las propiedades acústicas del hueso de las costillas con el fin de saber como se podría eliminar los efectos causados por las mismas y así evitar tener que abrir al paciente para el tratamiento.

Para poder comenzar una investigación sobre cómo tendría que ser el dispositivo capaz de eliminar los efectos causados por el hueso de las costillas es necesario caracterizar los parámetros que describen el comportamiento del hueso de las costillas. Existen datos experimentales sobre el comportamiento de diferentes tipos de hueso con respecto a un haz de ultrasonido focalizado, estos datos pertenecen principalmente a huesos largos debido a que realizar las mediciones con este tipo de hueso es más fácil, sin embargo es sabido que los huesos de diferentes partes del cuerpo se comportan de manera diferente y aunque se pueden realizar ciertas aproximaciones, el desarrollo de un dispositivo confiable requiere un análisis cuidadoso del tipo de hueso en cuestión.

Los métodos actuales de medición están basados en el principio de enviar un haz de ultrasonido utilizando un transductor directamente al hueso y medir cuanto de este haz es transmitido así como el tiempo que tarda en llegar la señal comparado con el tiempo que tarda en ausencia de material.

Capítulo 2

Medición de las propiedades acústicas

En este capítulo se presentan la teoría, planeación y realización del montaje experimental, así como el proceso de preparación que fue necesario para las muestras biológicas que se estudiaron.

Para planear el montaje experimental que nos permitirá medir el campo acústico detrás de las costillas, se retomó la idea general de los dispositivos utilizados en trabajos previos[27]. En particular aquellos que utilizan el modo de transmisión transversal debido a la forma y localización de las costillas.

Antes de exponer el montaje experimental que se utilizó, es adecuado presentar la teoría que se debe considerar cuando deseamos medir las propiedades acústicas en un material y en particular en hueso.

2.1. Propiedades acústicas y técnicas para medición

Debido a que el ultrasonido es una onda, se deben primero retomar algunos conceptos de propagación de estas ondas.

Las variables características que describen la propagación de una onda monocromática en tiempo y espacio son la frecuencia f o período T y longitud de onda λ dada por: $c = \lambda f$, donde c es la velocidad de propagación de la onda (también llamada velocidad del sonido).

Los aparatos de ultrasonido diagnóstico emplean frecuencias cercanas a 15.2 MHz [18].

Debido a la dependencia de la atenuación con la frecuencia, en altas frecuencias hay mayor atenuación, en dispositivos clínicos para hueso se utilizan frecuencias más bajas, en el rango de 250 kHz a 1,25 MHz. Frecuencias más altas se han empleado en hueso esponjoso para investigar experimentalmente su microestructura, o para medir las propiedades microelásticas de hueso cortical[18].

Podemos definir dos diferentes velocidades. La velocidad de fase corresponde a la velocidad de propagación de una fase, una sola componente de las frecuencias de una onda periódica. Un medio es dispersivo cuando la velocidad de fase es función de la frecuencia o longitud de onda, que es el caso en todos los medios atenuantes. La velocidad de grupo corresponde físicamente a la velocidad a la que la energía y se transmite a lo largo de la dirección de propagación. En el caso de un medio dispersivo, la velocidad de grupo puede ser diferente de la velocidad de fase. La dispersión de velocidades en un medio está relacionada con la atenuación de la onda en el medio [18]. Cuando una onda acústica se propaga en un fluido, las partículas del medio están sujetas a desplazamientos en torno a sus posiciones de reposo. La velocidad de estos desplazamientos recibe el nombre de velocidad de partícula acústica que será denotada por v . Para ondas planas en un medio no atenuante, la presión de acústica (p) y velocidad (v) de las partículas cumplen la siguiente relación:

$$P = \rho cv = Zv \quad (2.1.1)$$

donde ρ es la densidad de masa del medio en reposo, y $Z = \rho \cdot c$ se llama impedancia acústica específica.

La energía transportada en una onda de ultrasonido se caracteriza generalmente por la intensidad acústica que se define como la energía transmitida por unidad de tiempo (generalmente de 1s) y por unidad de área (generalmente de $1cm^2$) en dirección normal al área en unidades de $[W \cdot cm^{-2}]$. En el campo lejano de un transductor no enfocado, el frente de onda puede ser considerado como plano, en el foco de un transductor enfocado, la intensidad de una onda monocromática se relaciona con la presión acústica de la siguiente manera:

$$I = \frac{P^2}{2Z} \quad (2.1.2)$$

En el régimen de propagación lineal (perturbación diminuta o amplitud de la onda pequeña) la velocidad del sonido es una característica del medio. Es independiente de la amplitud de la onda y se puede determinar a partir del material y las propiedades geométricas del medio. Podemos entonces definir un módulo elástico (M_e) y una densidad de masa efectiva (ρ_e). El módulo de elasticidad efectivo relaciona las características elásticas y geométricas del medio, que determinan la rigidez con respecto a un determinado tipo de onda. La densidad de masa efectiva se relaciona con la inercia del medio de propagación mediante la relación[18]:

$$c = \sqrt{\frac{M_e}{\rho_e}} \quad (2.1.3)$$

En un medio no ideal la velocidad del sonido también puede depender de la amplitud de la onda, lo que lleva a una propagación de onda no lineal.

En los líquidos las ondas que se propagan son ondas de compresión pura. La velocidad del sonido en el agua depende de la temperatura, $1482m \cdot$

s^{-1} a $20^{\circ}C$. Entre el $20^{\circ}C$ y $37^{\circ}C$ se incrementa con un coeficiente de temperatura de alrededor de $2.5m \cdot s^{-1} \cdot ^{\circ}C^{-1}$. Como los tejidos blandos se componen en gran parte de agua la velocidad del sonido es cercana a la del agua y también aumenta con la temperatura.

En la grasa la velocidad del sonido disminuye cuando aumenta la temperatura. También se observa disminución de la velocidad del sonido al aumentar la temperatura en la médula ósea, esto es debido a la influencia de la grasa, un importante componente del hueso en la médula. En sólidos, M_e viene dado por una combinación de las propiedades elásticas. En general, esta combinación se expresa mediante el tensor de rigidez elástica, cada una de las componentes del tensor $[C_{ij}]$ proviene de una relación lineal del tensor de esfuerzos y deformaciones del medio.

Los coeficientes de Lamé (λ, μ) se pueden expresar en función de los coeficientes de rigidez $[C_{ij}]$ o en función del módulo de Young (E) y el coeficiente de Poisson (ν). Para obtener la ecuación de propagación lineal en un medio isotrópico necesitamos las siguientes tres ecuaciones [18].

La primera ecuación, que corresponde a la ley constitutiva (ley de Hooke) para un medio isotrópico considerado, expresa la relación general que existe entre el tensor de esfuerzos y el de deformaciones.

$$\sigma = \lambda \cdot tr(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon \tag{2.1.4}$$

donde σ representa el tensor de esfuerzos, ε es el tensor de deformaciones y $tr(\varepsilon)$ es la traza de ε .

La ecuación de movimiento del medio está dada por:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div(\sigma) \tag{2.1.5}$$

donde ρ es la densidad de masa del sólido y u es el vector de desplazamiento de la partícula. La última ecuación es la que relaciona el tensor de deformaciones con el campo de desplazamientos.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(grad(u) + {}^T grad(u)) \tag{2.1.6}$$

Donde $grad$ indica el operador gradiente y la T simboliza la operación transpuesta. Combinando la primera y la última ecuación y teniendo en cuenta el caso en que el desplazamiento de la partícula es paralelo y perpendicular a la dirección de propagación, las ecuaciones para la onda longitudinal y transversal están dadas por:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \cdot \Delta u \quad y \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \cdot \Delta u \tag{2.1.7}$$

donde Δ denota el operador laplaciano.

En resumen, en un cuerpo sólido infinito, isotrópico y homogéneo, en el que la onda que se propaga no interactúa con la frontera, las velocidades de propagación longitudinal y transversal están dadas por:

$$c_l = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (2.1.8)$$

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}}{2\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1+\nu)}} \quad (2.1.9)$$

En los medios homogéneos anisotrópicos las velocidades dependen de la dirección de propagación, por ejemplo en los sólidos cristalinos depende la simetría del cristal. Para una dirección arbitraria en un cristal existen generalmente tres ondas: una cuasi longitudinal y dos cuasi transversales. Sin embargo, hay direcciones especiales llamadas ejes de simetría a lo largo de las cuales se propagan ondas puramente longitudinales o transversales[18].

El hueso compacto es considerado un material ortotrópico, y se caracteriza por nueve coeficientes de rigidez independientes. El modelo más desarrollado considera el hueso compacto como un sólido isotrópico y elástico, lo que reduce el número de coeficientes independientes en la matriz de rigidez a cinco[18].

En el caso en que el medio se considera finito, la muestra es delgada comparada con la longitud de onda, la onda puede ser representada como una superposición de modos de resonancia. Estos modos se han estudiado para placas delgadas y son llamadas ondas de Lamb. En un rango de frecuencias de 0.25–2 MHz el hueso compacto puede ser modelado como una placa delgada. La velocidad del sonido en este caso está dada por[18]:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \iff E = \rho c^2 \quad (2.1.10)$$

Si una onda viaja por la corteza del hueso con una velocidad de fase mayor que la de la onda de compresión de los tejidos blandos circundantes, la energía que se propaga en la corteza del hueso puede penetrar en el tejido blando. Por lo tanto, continuamente radia energía en el tejido cercano, y colocando sensores en la superficie podemos detectar la energía depositada y conocer la velocidad de propagación de la onda en el hueso[18].

Debemos ahora considerar que el hueso puede considerarse altamente heterogéneo a pequeña escala, y se puede considerar como un medio poroelástico. En este caso el módulo elástico se convierte en un valor complejo y su derivación resulta muy complicada y requiere el desarrollo de un enfoque teórico nuevo que permita trabajar con funciones para el módulo elástico. Debido a estas dificultades se ha modelado hasta ahora como un medio homogéneo, asumiendo que la longitud de onda siempre será mayor que las inhomogeneidades[18].

A escalas del orden de la longitud de onda, las investigaciones se han centrado en encontrar un valor para el módulo elástico que sea el más adecuado para modelar el hueso. La porosidad del hueso compacto humano es más bien baja y el tamaño de los poros (50 a 100 micrómetros) es menor que las longitudes de onda típicas (> 1mm). Por lo tanto, las teorías de homogeneización mencionadas se pueden aplicar a el hueso compacto. La propagación del ultrasonido en las

frecuencias de diagnóstico (alrededor de 1 MHz) en el hueso cortical se puede describir, en primera aproximación, como la propagación en un medio homogéneo anisotrópico.

Por el contrario, esta hipótesis no es válida para el hueso esponjoso donde los valores de porosidad son bastante altos. El tamaño de los poros (500 a 1000 micras) es comparable a la longitud de onda (de 1,5 mm a 500 kHz). Varios modelos teóricos para medios poroelásticos, como la teoría de Biot [28] y la teoría de Schoenberg para medios de varias capas [29] se han aplicado para describir la propagación del ultrasonido en el hueso esponjoso.

Los mecanismos que contribuyen a la atenuación del ultrasonido principalmente son absorción y dispersión. Diferentes mecanismos son responsables de los fenómenos de absorción (transferencia de calor, efectos de la conductancia, efectos químicos, los efectos viscosos, no linealidad, entre otros). Hasta ahora, los fenómenos responsables de la absorción del ultrasonido en los tejidos biológicos no se conocen con exactitud. En los líquidos las fuerzas viscosas entre partículas vecinas son las principales fuentes de absorción de la onda acústica. En el agua la atenuación varía con el cuadrado de la frecuencia. Sin embargo, este modelo para la viscosidad no explica las medidas experimentales de absorción en los tejidos blandos biológicos o el hueso [18].

En el rango de frecuencia donde los tiempos característicos de relajación de las moléculas en el tejido están cerca del periodo de tiempo de onda, se observa una variación casi lineal del coeficiente de atenuación con la frecuencia [18].

Las fuentes principales de atenuación para hueso son la fricción debida al movimiento relativo entre la médula y el hueso, la dispersión debida a heterogeneidades del hueso esponjoso principalmente y las conversiones entre modo longitudinal y transversal [18].

En general la atenuación de la onda de ultrasonido está dada por las relaciones $p = p_0 e^{-\alpha z}$ y $I = I_0 e^{-2\alpha z}$, para presión e intensidad respectivamente, z es la distancia de viaje. p_0 e I_0 son la presión y la intensidad en $z = 0$, respectivamente.

El coeficiente α (expresado en cm^{-1}) representa la atenuación de la presión, varía dependiendo de la frecuencia.

El factor 2 corresponde a que la intensidad es proporcional al cuadrado de la presión. En aplicaciones biomédicas las unidades para α y su pendiente cuando se grafica contra frecuencia son $dB \cdot cm^{-1}$ y $dB \cdot cm^{-1} \cdot Mhz^{-1}$, respectivamente. La conversión de cm^{-1} a $dB \cdot cm^{-1}$ es:

$$\alpha [dB \cdot cm^{-1}] = \frac{1}{Z} \cdot 10 \ln \frac{I_0}{I} = 8.686 \alpha [cm^{-1}] \quad (2.1.11)$$

En la mayoría de los tejidos blandos, los valores para la pendiente de atenuación contra frecuencia se encuentran en el rango de $0.5-1.0 dB \cdot cm^{-1} \cdot Mhz^{-1}$. En hueso el valor es el doble que para el caso de tejido blando, esto explica porqué en hueso el rango de frecuencias en investigación está en $0.5-1 Mhz$.

A pesar de que la dispersión de los huesos ha recibido menos atención que la velocidad y la atenuación de sonido, debido a que todavía se necesita profundizar más en el estudio de la estructura interna del hueso, su estudio es importante ya

que puede explicar los mecanismos responsables de la atenuación y divergencia de velocidad.

En el cuadro 2.1 se presentan los valores típicos para velocidad del sonido, impedancia acústica característica y atenuación para diferentes materiales biológicos en un rango de temperaturas de 20°C a 37°C , estos valores son significativos únicamente en orden de magnitud debido a la gran variabilidad presente en los materiales biológicos[18].

Tejido	Velocidad de propagación	Impedancia acústica Z	Coefficiente de atenuación
Agua(20°C)	1480 ($m \cdot s^{-1}$)	$1.48 \times 10^6 (kg \cdot s^{-1} \cdot m^{-2})$	*
Hueso esponjoso	1450-1800($m \cdot s^{-1}$)	$1.54 \times 10^6 - 2.2 \times 10^6 (kg \cdot s^{-1} \cdot m^{-2})$	10-40 ($dB \cdot cm^{-1} \cdot MHz^{-1}$)
Hueso compacto	3000-4000($m \cdot s^{-1}$)	$4 \times 10^6 - 8 \times 10^6 (kg \cdot s^{-1} \cdot m^{-2})$	1-10 ($dB \cdot cm^{-1} \cdot MHz^{-1}$)
Grasa	1450 ($m \cdot s^{-1}$)	$1.38 \times 10^6 (kg \cdot s^{-1} \cdot m^{-2})$	0.8 ($dB \cdot cm^{-1} \cdot MHz^{-1}$)
Músculo	1550-1630 ($m \cdot s^{-1}$)	$1.65 \times 10^6 - 1.74 \times 10^6 (kg \cdot s^{-1} \cdot m^{-2})$	0.5-1.5($dB \cdot cm^{-1} \cdot MHz^{-1}$)
Piel	1600($m \cdot s^{-1}$)	$1.7 \times 10^6 (kg \cdot s^{-1} \cdot m^{-2})$	2-4 ($dB \cdot cm^{-1} \cdot MHz^{-1}$)

Cuadro 2.1.1: Valores típicos para velocidad del sonido, impedancia acústica característica y atenuación para diferentes materiales biológicos (* La atenuación en agua varía como el cuadrado de la frecuencia f , el coeficiente de atenuación en $dB \cdot cm^{-1}$ está dado por $\alpha(f) = 0.002f^2$).

Tejido	Temperatura °C	Frecuencia	Velocidad del sonido $m \cdot s^{-1}$	Referencia
Cortical humano, tibia	23	0.1MHz	3526±100	Abendschein y Hyatt 1970
Cortical humano, femur	22	5MHz	3850-4040	Meunier 1982
Cortical humano, tibia	-	10MHz (axial)	3760±100	Lees 1983
Cortical humano, tibia	-	10MHz (radial)	3130±140	Lees 1983
Cortical bovino, femur	-	0.5MHz	3380±99	McKelvie y Palmer 1987
Cortical bovino, tibia	-	10MHz (axial)	41080±50	Lees 1983
Cortical bovino, tibia	-	10MHz(radial)	3320±80	Lees 1983
Cortical bovino, femur	40	15MHz	4170±60	Yoon y Katz 1979
Cortical bovino, falange	-	5MHz	4030±110	Lang 1970
Cortical bovino, falange	-	2.25MHz	1660±90	Lang 1970
Cortical bovino, falange	-	5MHz	3160±170	Lang 1970
Cortical porcino	-	1MHz	2941±614	Lehmann y Johnson 1958
Cortical conejo, femur	-	-	3254-3430	Less 1987
Trabecular humano	-	0.5MHz	1688-2084	McKelvie y Palmer 1987
Trabecular porcino	-	1MHz	2407±554	Lehman y Johnson 1958
Cráneo humano	25	3-4MHz	2650-3050	Martin y McElhaney 1971
Cráneo humano	37	1.5MHz	2770±185	Fry y Barger 1978
Cráneo humano	37	3.5MHz	311	Fry y Barger 1978

Cuadro 2.1.2: Velocidad del sonido en diferentes tipos de hueso.

La mayoría de los valores reportados conocidos son de estudios realizados

con huesos largos, esto es debido a que en el caso de huesos largos se puede suponer que en una localidad existe homogeneidad en cuanto a las propiedades mecánicas del material óseo, muchos de los cambios que ocurren en los huesos y que se deben a patologías, envejecimiento o distribución del peso dependen del volumen del hueso, además una vez obtenida la velocidad del sonido se pueden estudiar las estructuras internas del hueso con mayor detalle[30].

En transmisión transversal y suponiendo que la respuesta del sistema y la propagación son lineales, la atenuación y velocidad del sonido se pueden obtener comparando la señal transmitida cuando se utiliza un medio de referencia entre emisor y receptor y cuando colocamos el hueso dentro del material de referencia.

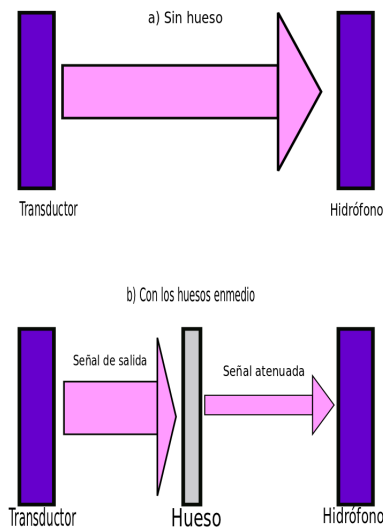


Figura 2.1.1: Transmisión con y sin la muestra

Normalmente se utiliza el agua como material de referencia. La atenuación del ultrasonido en agua a frecuencias inferiores a 1 MHz es despreciable.

La atenuación como función de la frecuencia, se obtiene a partir del análisis espectral de las dos señales, por lo general con el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés). En estudios realizados para el hueso del talón muestran los siguientes resultados para la curva de atenuación en función de la frecuencia.

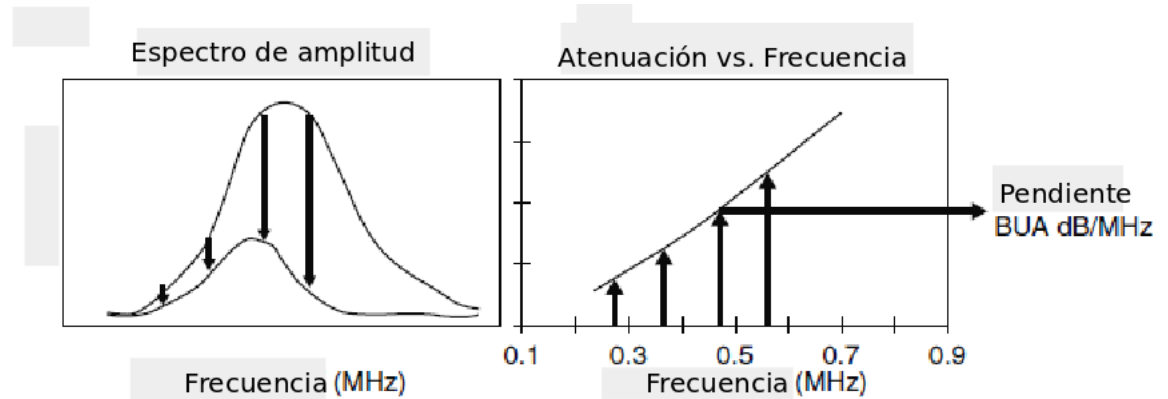


Figura 2.1.2: Curva de atenuación en función de la frecuencia[18].

Para medir la velocidad del sonido existen dos enfoques principales. El primero asume que la velocidad c es independiente de la frecuencia y utiliza métodos sencillos en el dominio del tiempo. La velocidad se obtiene a partir de la diferencia en los tiempos de vuelo (TOF por sus siglas en inglés) entre la señal transmitida a través del material de referencia solamente y la señal que se transmite a través del material de referencia y el hueso.

Sea L la distancia entre el transmisor y el receptor, y l el ancho del hueso en la dirección de propagación, tenemos las siguientes relaciones para el tiempo de vuelo:

- Cuando solo está el material de referencia

$$TOF^{ref} = \frac{L}{c_{ref}}$$

- Cuando tenemos el hueso sumergido

$$TOF = \frac{L-l}{c_{ref}} + \frac{l}{c}$$

diferencia entre ambos tiempos

$$\Delta TOF = \frac{l}{c} - \frac{l}{c_{ref}} \quad (2.1.12)$$

Para estimar el tiempo de vuelo se utilizan varios criterios, por ejemplo, el primer punto donde llega la señal, el primer cruce por cero o un valor umbral fijo en el valor de la amplitud. En el siguiente esquema se presentan los criterios, (1) llegada de la señal, (2) valor fijo en amplitud, (3) cruce por cero, (4) punto de máxima amplitud.

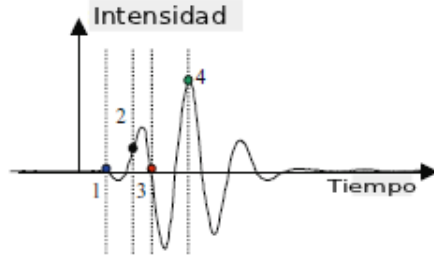


Figura 2.1.3: Criterios para estimar el tiempo de vuelo[18].

Como la señal se distorsiona cuando se propaga a través del hueso, la envolvente de la señal recibida puede diferir considerablemente de la señal de referencia. Las ambigüedades de los métodos de dominio de tiempo para las mediciones de velocidad en hueso esponjoso se han reportado y en ocasiones son considerables, especialmente debido a la dependencia de la atenuación en frecuencia[18]. Generalmente estas ambigüedades se corrigen utilizando modelos matemáticos.

Actualmente no hay un consenso sobre un protocolo para la determinación de la velocidad del sonido en los huesos por lo que la comparación de las mediciones obtenidas en diferentes dispositivos resulta difícil, de la misma manera la extrapolación de los resultados en diferentes tipos de hueso.

El segundo enfoque consiste en analizar a la velocidad como función de la frecuencia. La velocidad se obtiene calculando la fase de la razón compleja entre los espectros de amplitud de las señales.

$$\phi(f) = \text{atan}\left[\frac{A(f)}{A_{ref}(f)}\right] = 2\pi l f \left(\frac{l}{c_{ref}} - \frac{l}{c(f)}\right) \quad (2.1.13)$$

La función arcotangente muestra valores de fase entre $-\pi$ y π . Para el espectro de fase continua de módulo 2π necesitamos desdoblar la fase. En este caso la fase se expresa como[18]:

$$\phi_u(f) = \phi(f) \pm 2k\pi \quad (2.1.14)$$

donde k es un número entero.

Y la expresión para la velocidad del sonido como función de la fase es[18]:

$$\phi(f) = \frac{1}{\frac{1}{c_{ref}} - \frac{\phi_u(f)}{2\pi l f}} \quad (2.1.15)$$

2.2. Montaje experimental

El método propuesto para obtener el campo de presión acústica y a través de este poder obtener un valor para la velocidad del sonido y atenuación en las

costillas es el de transmisión transversal, basado en el análisis del tiempo de vuelo. El montaje experimental que se empleó se muestra en la siguiente figura.

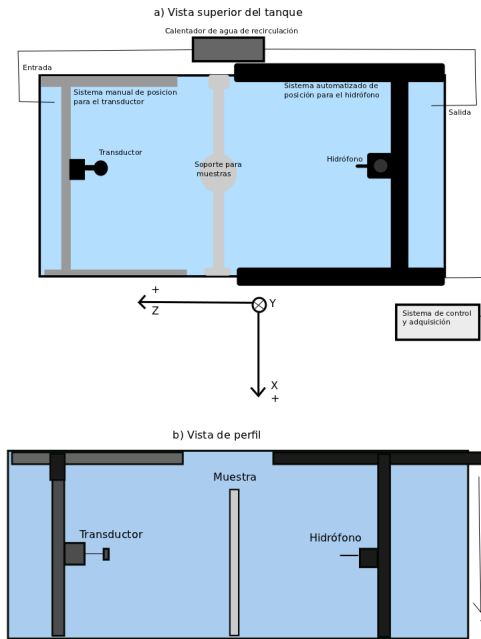


Figura 2.2.1: Vista superior y perfil del tanque de agua utilizado para el montaje experimental.

El sistema consta de un tanque con agua desionizada y desgasificada. Dentro del tanque se colocan la muestra, el transductor y el hidrófono en las posiciones que se muestran en la figura anterior.

El transductor está montado en un sistema de movimiento que se controla manualmente y cuenta con tres direcciones de movimiento. Cada uno de los ejes de movimiento cuenta con un vernier que permite conocer la distancia de un punto de referencia a la posición actual del transductor para ese eje.

El sistema de movimiento para el hidrófono está controlado por computadora, al igual que en el caso del transductor, cuenta con tres direcciones de movimiento. Por convención para ambos sistemas se utilizó el eje Y positivo en la dirección del fondo del tanque, mientras que los ejes X y Z se encuentran en el plano de la superficie superior del tanque como se muestra en la figura 2.2.1.

Se eligió utilizar un sistema automatizado en el caso del hidrófono pues es de este sensor de donde obtendremos las mediciones de la presión acústica, para lo cual necesitamos que el movimiento del hidrófono esté en comunicación con el osciloscopio y el generador de funciones. Mas adelante se presenta el desarrollo del este sistema. Entre el transductor y el hidrófono se coloca la muestra, la cual

está montada en un soporte especial de manera que el frente de las costillas es paralelo al plano XY (o plano paralelo a la superficie del transductor).

Como la velocidad del sonido depende de la temperatura y dado que los resultados tienen como objetivo servir en aplicaciones médicas, el agua se calienta a 37 grados centígrados para reproducir las condiciones en que se encuentra el hueso de las costillas dentro del cuerpo. Para calentar el agua se utilizó un calentador de recirculación colocando la entrada y la salida lo más lejos posible de la muestra para evitar perturbaciones debidas al movimiento del agua.

Frente a las paredes internas del tanque se colocó un material absorbente de caucho, con el objetivo de evitar reflexiones internas y posibles efectos de interferencia que pudieran afectar las mediciones.

2.3. Sensor y metodología para las mediciones

2.3.1. Transductor

Un transductor ultrasónico es un dispositivo que convierte energía eléctrica en ondas de ultrasonido y viceversa, tiene como principio de funcionamiento el efecto piezoeléctrico (una diferencia de voltaje se genera al ejercer presión en el material) y el efecto piezoeléctrico inverso (cambios en la corriente que circula por el material producen cambios en la distancia entre los elementos del cristal). Otras formas de crear y detectar ondas de ultrasonido son magnetostricción y actuación capacitiva.

Como emisor para la señal de ultrasonido empleamos un transductor ultrasónico elaborado con un material piezoeléctrico de plomo y zirconato de titanio (PZT). La geometría del transductor es una fracción de esfera con una distancia focal de 5 cm (una curvatura correspondiente a una esfera de 10 cm de diámetro) y un diámetro de 3 cm. El transductor tiene una frecuencia central de 1 MHz (FUS Instruments, Toronto, Canada).

Este transductor se utilizó para dos procesos, el primero fue la alineación que asegura que la onda acústica incida de manera normal sobre la muestra, y el segundo fueron las mediciones del campo acústico a través de las costillas.

2.3.2. Hidrófono

El sensor utilizado es un hidrófono de aguja de 0.2 mm de diámetro (SN1426, Precision Acoustics, Dorset, Reino Unido). Este hidrófono funciona bajo el mismo principio de transducción previamente descrito a base de piezoelectricidad.

El hidrófono está calibrado para trabajar en agua y convierte las diferencias de presión en señales eléctricas. Dado que estas señales son muy pequeñas primero pasan a un preamplificador que proporciona una amortiguación inmediata a la señal, actuando como fuente para 50 ohms.

El preamplificador se conecta a un acoplador de DC que actúa como una fuente para el mismo. Luego la señal pasa a un amplificador que se conecta al osciloscopio donde finalmente se captura la señal.

En la siguiente figura se muestra el sistema del sensor.

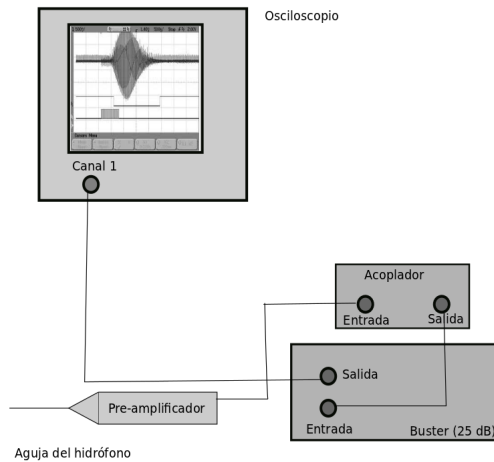


Figura 2.3.1: Hidrófono y elementos necesarios para la medición del campo acústico.

2.3.3. Caracterización de la velocidad del sonido en el medio

Sabemos que la velocidad de la onda de ultrasonido es mayor en el hueso que en el agua y por lo tanto esperamos que la señal llegue antes en este caso, una vez capturadas las señales en tiempo tanto para el sistema transductor-agua-hidrófono como para el sistema transductor-agua-hueso-agua-hidrófono, considerando modo de propagación lineal, la velocidad del sonido se puede obtener mediante el siguiente análisis.

Sabemos que habrá un retraso en tiempo entre ambas señales y este retraso corresponderá al tiempo que la onda viajó en el hueso. Si conocemos el ancho el hueso, entonces podemos obtener un valor para la velocidad del sonido en ese punto al sustituir en la tercera ecuación 2.1.12. La siguiente figura es un ejemplo del tipo de señales que deseamos obtener.

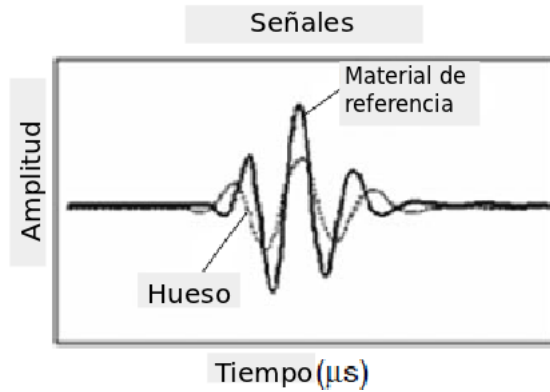


Figura 2.3.2: Ejemplo de señales a obtener [18].

Como se puede ver en la figura, al atravesar el hueso la onda se atenuará, esta atenuación se verá reflejada en valores menores para la amplitud en la señal de salida, al comparar las señales en ambos casos podremos obtener un valor para la atenuación que sufre al atravesar el hueso.

Por otro lado, necesitamos conocer esta diferencia en tiempo entre la llegada de las señales. Existen varios métodos para calcular la diferencia de tiempo entre señales. Uno de estos métodos es por medio de la correlación de dos funciones.

La correlación es una medida de la similitud entre dos señales, frecuentemente se utiliza para encontrar características relevantes en una señal desconocida por medio de la comparación con otra que sí se conoce.

Está en función del tiempo relativo entre las señales, a veces por su forma matemática también se la llama *producto escalar desplazado*.

Dadas dos funciones discretas f_i y g_i la correlación se define como:

$$(f \star g)_i = \sum_j f_j^* g_{i+j} \quad (2.3.1)$$

donde la suma se realiza sobre valores enteros de j apropiados; el asterisco está indicando el conjugado.

Para el caso de dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ la correlación cruzada se define como:

$$(f \star g) = \int f^*(t)g(x+t)dt \quad (2.3.2)$$

donde la integral se realiza para valores apropiados de t .

La correlación cruzada tiene una naturaleza similar a la convolución de dos funciones. Una convolución es un operador matemático que transforma dos funciones f y g en una tercera función que en cierto sentido representa la magnitud en la que se superponen f y una versión trasladada e invertida de g .

La correlación se relaciona con la convolución de la siguiente manera:

$$f(t) \star g(t) = f^*(-t) * g(t) \quad (2.3.3)$$

Donde el \star representa la convolución y f^* es la función conjugada.

Conociendo el valor de la correlación cruzada entre nuestras señales podemos conocer el tiempo de retraso entre ellas y calcular la velocidad del sonido.

Otro método consiste en utilizar la transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés). El retraso entre las señales aparece como un corrimiento lineal en la fase en el dominio de las frecuencias. Por lo que se puede tomar la FFT de ambas señales, calcular la diferencia en fase y obtener el retraso en tiempo a partir de la pendiente de la fase. Una posible dificultad que presenta este método es que en ocasiones la fase está envuelta y hay que considerar este posible caso.

Podemos aplicar la correlación pero en este caso a las transformadas de las funciones. El retraso puede determinarse a partir de la fase de la densidad espectral cruzada. El valor máximo de la correlación corresponde al punto en que la diferencia entre señales es menor. La fase obtenida corresponde al corrimiento que experimenta cada frecuencia producto del retraso en tiempo.

Para que este desarrollo matemático resulte el adecuado para el caso de la señales que obtuve, la hipótesis de que la propagación de dichas señales es lineal es necesaria.

2.3.4. Medición y Alineación

El transductor genera una onda acústica que se propaga en el agua. Esta onda se puede aproximar por geometría: el foco tiene la forma de una elipse de aproximadamente 1.5 cm de largo y 1.5 mm de radio[31].

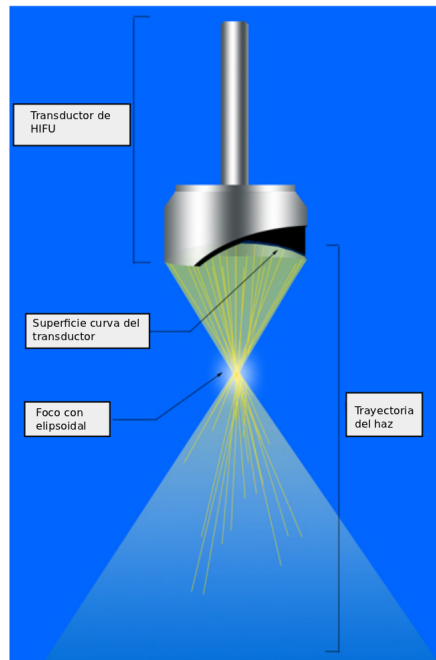


Figura 2.3.3: Trayectoria del haz de ultrasonido.

En una vista transversal del cono podemos observar que el campo se propaga con simetría circular en forma de anillos concéntricos, presentando el máximo de la intensidad en el anillo central.

Dado que el campo formado es tridimensional, para medirlo necesitaremos un sistema de movimiento de tres direcciones independientes. Con esto seremos capaces de adquirir mediciones en los diferentes planos que caracterizan la propagación del ultrasonido. En particular para este trabajo nos centramos en los planos perpendiculares a la dirección de propagación. Las costillas se colocaron en el plano focal del transductor para poder concentrar la mayor parte de la energía en las mismas.

Donde el eje Y apunta *hacia dentro* de la página.

En la frontera entre dos medios, como es en este caso la frontera entre el agua y las costillas, con diferentes impedancias acústicas ocurren reflexión y refracción de la onda acústica. En superficies suaves las reflexiones son especulares mientras que en superficies ásperas la reflexión es difusa.

La reflexión especular es la base de la imagen por ultrasonido, la cual se forma a partir del eco. Más adelante se explica cómo se utiliza el principio de reflexión como método de alineación del sistema.

Cuando una onda plana incide sobre una superficie plana se generan una onda reflejada y una transmitida. Cuando la incidencia es normal únicamente

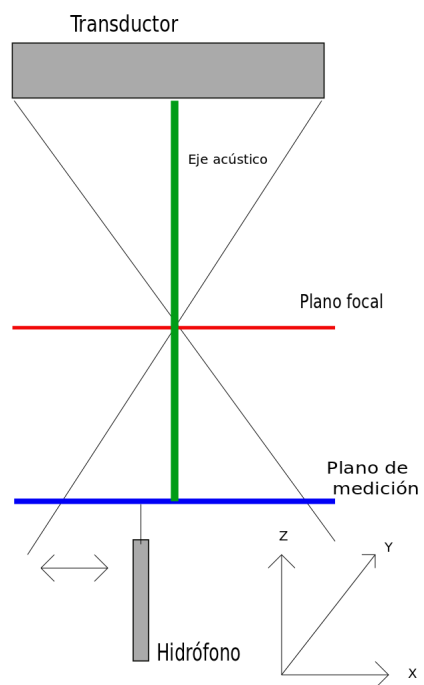


Figura 2.3.4: Vista superior de la disposición entre el hidrófono y el transductor.

se generan ondas longitudinales. De acuerdo a la ley de Snell-Descartes el ángulo de reflexión θ_1 es igual al ángulo de incidencia de la onda y la onda transmitida se refracta a un ángulo θ_2 de acuerdo con la ecuación[18]:

$$\frac{\text{sen}\theta_2}{c_2} = \frac{\text{sen}\theta_1}{c_1} \tag{2.3.4}$$

Donde c_1 y c_2 son las velocidades del sonido del primer y segundo medio. En incidencia normal ($\theta_1 = 0^\circ$), las ondas reflejada y transmitida son también normales a la superficie de incidencia.

La razón entre la amplitud entre la onda incidente y la reflejada (razón entre la presión acústica) se llama coeficiente de reflexión (r). La razón entre la amplitud de la onda incidente y la transmitida se llama coeficiente de transmisión (t). Los coeficientes r y t para el caso de incidencia normal están dados por[18]:

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{2.3.5}$$

En el caso de la intensidad, de manera similar los coeficientes R y T están dados por:

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \quad T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \tag{2.3.6}$$

Cuando no estamos en condiciones de incidencia normal, también se generan ondas transversales y se requiere un análisis más complicado.

Para simplificar el análisis nos limitaremos al caso de incidencia normal, por lo cual una parte fundamental en el montaje experimental será el garantizar que las ondas de ultrasonido incidan perpendicularmente en las costillas.

Para utilizar las fórmulas 2.1.12 es necesario asegurar que la onda llega con la misma fase al plano de medición (plano sobre el cual se moverá el sensor), por ello el plano de medición debe ser paralelo al plano focal.

Un primer criterio de alineación corresponde a alinear el transductor con el marco, para asegurar incidencia normal con la superficie de las costillas.

Por otra parte, también se requiere que al iniciar las mediciones el hidrófono se encuentre alineado con el eje acústico, una forma de validar nuestras mediciones es observando el patrón de anillos concéntricos que esperamos obtener.

Si los sistemas no están alineados, o el hidrófono se desalinea durante el movimiento, el plano en el que se moverá el mismo al intersecar el cono, formará una elipse y ya no podremos garantizar simetría en los mapas ni utilizar la fase para calcular la diferencia en tiempos, ya que dependiendo de la pendiente del plano con respecto al eje acústico la onda llegará antes o después al hidrófono y las mediciones no serán confiables para calcular la velocidad del sonido.

Pequeñas desviaciones entre el eje del transductor y el hidrófono o entre el eje del transductor y el marco de las costillas, pueden afectar las mediciones haciéndolas poco confiables para el cálculo de velocidad del sonido y atenuación.

El transductor se montó en un sistema manual descrito anteriormente, una vez en la posición deseada para comenzar las mediciones ya no se movió.

Para alinear el transductor con el hidrófono se utilizó un programa hecho en MATLAB que realiza un barrido automatizado en un plano XY, guarda los datos registrados en el osciloscopio y muestra después como un mapa de intensidades. Observando el mapa podemos saber cómo corregir la posición del hidrófono hasta que la distribución de intensidades esté centrada, los detalles de cómo se alineó el sistema se presentan más adelante.

2.4. Cuidado y manejo de las muestras biológicas elegidas

Debido a su similitud con el tejido humano se utilizaron costillas de cerdo para las mediciones, dichas muestras pertenecían a diferentes partes del costillar, algunas eran de la parte baja y otras a la parte alta, por lo que es importante considerar que pueden existir ligeras variaciones en la composición del hueso y esto puede resultar en variaciones para la velocidad del sonido. Es importante que las condiciones de medición se apeguen lo más posible a las condiciones que tendría un sistema actuando sobre un ser humano vivo. Para ello se adquirieron frescas de manera que las propiedades del tejido fueran lo más cercano a las del animal vivo, a pocos minutos de la muerte del animal, y fueron sumergidas en formalina. La formalina penetra en las células y sustituye el plasma celular por gel. De esta forma el tejido no se deshidrata al morir y conserva algunas de sus propiedades.

Otra parte importante es la limpieza de las muestras. Cuando nos entregaron las costillas estaban cubiertas por las capas de carne, grasa y piel. Fue necesario eliminar estas capas para exponer lo más posible la superficie del hueso sin dañarla, dejando la carne entre las costillas para que no se separen para garantizar que los efectos de atenuación ocurridos son únicamente producto del hueso y que los cálculos para la velocidad del sonido corresponderán exclusivamente al hueso.



Figura 2.4.1: Costillas limpias y enmarcadas.

Una vez limpias las costillas se regresaron al contenedor con formalina.

Después se procedió a desgasificarlas para eliminar y prevenir la formación de burbujas. Si tenemos burbujas en la muestra durante las mediciones, pueden ocurrir efectos de cavitación y dado que la velocidad de propagación será diferente dentro de la burbuja los cálculos podrían verse afectados. Además las burbujas fomentan la dispersión, y esto tiene como resultado que nuestras mediciones mostrarán una atenuación no necesariamente debida a las propiedades del hueso[18].

Para solucionar esto cada una de las costillas se retiró del contenedor con formalina y se introdujo en un contenedor de plástico con agua, una vez en el contenedor se introdujo en una campana de vacío por ocho horas para eliminar el gas disuelto.

Al terminar las ocho horas se retiraron las costillas del contenedor con agua desgasificada y se introdujeron de nuevo en el contenedor con formalina. Como las costillas entraron en contacto con el aire en el momento de sacarlas del contenedor con agua y regresarlas a la formalina, antes de cada medición fue necesario repetir el proceso de desgasificación al menos por cuatro horas.

Montaje de las muestras dentro del tanque

Se requiere obtener el campo acústico en la zona posterior a las costillas y que la incidencia del ultrasonido al hueso de las costillas sea normal, para garantizar esto es necesario pensar en un soporte que mantenga las costillas fijas durante las mediciones. Lo que se hizo fue colocarlas en marcos de policarbonato, estos marcos están formados por dos piezas de policarbonato entre las cuales se colocan las costillas, ambas piezas se juntan con tornillos de plástico y se aprietan de forma que las costillas quedan prensadas entre las dos piezas que

conforman el marco. Si alguna parte de las costillas queda floja o suelta se utilizó hilo para pescar para sujetarla al marco.

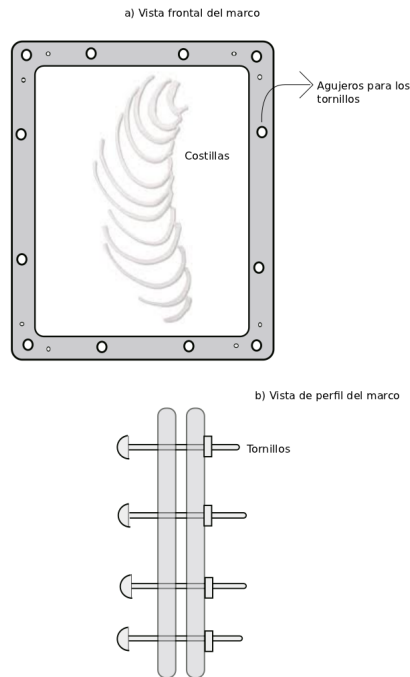


Figura 2.4.2: Costillas en el marco vistas de frente y de perfil.

Para poder tener garantizada una incidencia normal el marco de policarbonato va montado en un soporte que permite girar el marco sobre dos de sus ejes de simetría (X y Y).

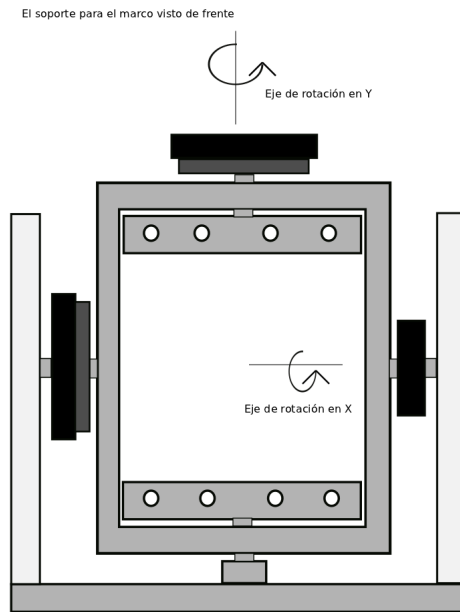


Figura 2.4.3: Soporte para el marco de las costillas.

La superficie de las costillas es irregular y se necesita una forma para identificar las zonas donde podremos garantizar una incidencia normal considerando que el transductor permanece fijo durante las mediciones.

La propuesta es generar una manera de identificar cada punto de las costillas con respecto al marco al que se fijan. Para ello es necesario definir un sistema de referencia a partir del marco. Esto se hizo identificando puntos en el marco y construyendo a partir de ellos el plano de referencia del marco.

Una vez que se tiene definida la superficie del plano de referencia, podemos utilizarla de base para recrear la superficie de las costillas y por coordenadas seleccionar los puntos en la superficie que servirán para tomar los datos.

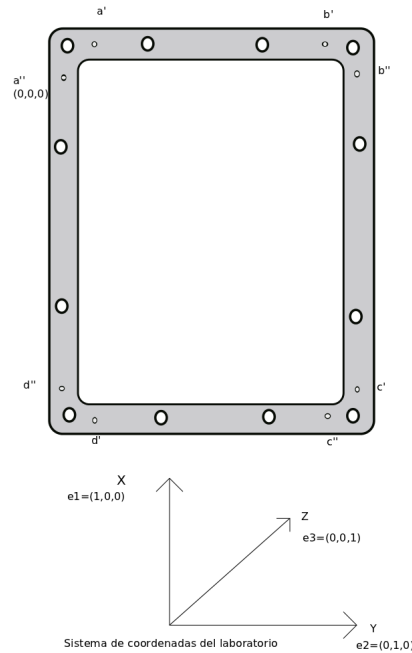


Figura 2.4.4: Marcadores ubicados en el marco de policarbonato.

Los orificios pequeños corresponden a los marcadores y los orificios grandes son los lugares donde entran los tornillos para fijar el marco. Cada marcador se identificó con una letra y se eligió uno de los marcadores como el cero del plano, los demás marcadores recibieron coordenadas con respecto a éste. Este juego de coordenadas son referidas en este texto como el sistema de coordenadas en el laboratorio, con el eje de propagación acústica paralelo al vector canónico $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

La propuesta es utilizar estos 8 orificios como marcadores por medio de los cuales se construirá un sistema de referencia que permitirá identificar con coordenadas puntos en la superficie de las costillas, y conociendo las coordenadas de estos puntos podemos identificar los lugares en la superficie de las costillas cuyo vector normal es paralelo al eje z .

Para poder obtener con precisión los puntos en las costillas en los que obtenemos incidencia normal, requerimos imágenes precisas de cada muestra individual. Para ello se utilizó la reconstrucción matricial de las costillas a partir de imágenes de tomografía asistida por computadora (TAC).

Estas imágenes se obtuvieron después de desgasificar las muestras para evitar burbujas que puedan afectar las imágenes. Las costillas se retiraron de la formalina y se introdujeron en un molde totalmente lleno con agua desgasificada y esto se introdujo a campana de vacío por 4 horas. Al terminar de desgasificar

la muestra se tapó el molde y se transportaron al sistema de TAC, donde se tomaron las imágenes.

Al final las costillas se regresaron a la formalina.

Las imágenes contenidas en el estudio están en formato conocido como Digital Imaging and Communications in Medicine (DICOM por sus siglas en inglés).

Estas imágenes fueron procesadas por medio varios programas, los programas a los que se hace referencia en esta sección se encuentran en el apéndice A, los primeros programas son para extraer la información del estudio (p.ej. la posición en coordenadas del TAC y el espacio entre pixeles), estos fueron elaborados en PYTHON y MATLAB. Después se elaboró una interfaz en MATLAB para localizar las imágenes de costilla que muestran con claridad los marcadores. Una vez que se obtienen las imágenes otro programa las grafica y da las coordenadas del TAC punto a punto utilizando la información contenida en el archivo DICOM, por lo tanto podemos identificar la posición de los marcadores en las coordenadas del TAC.

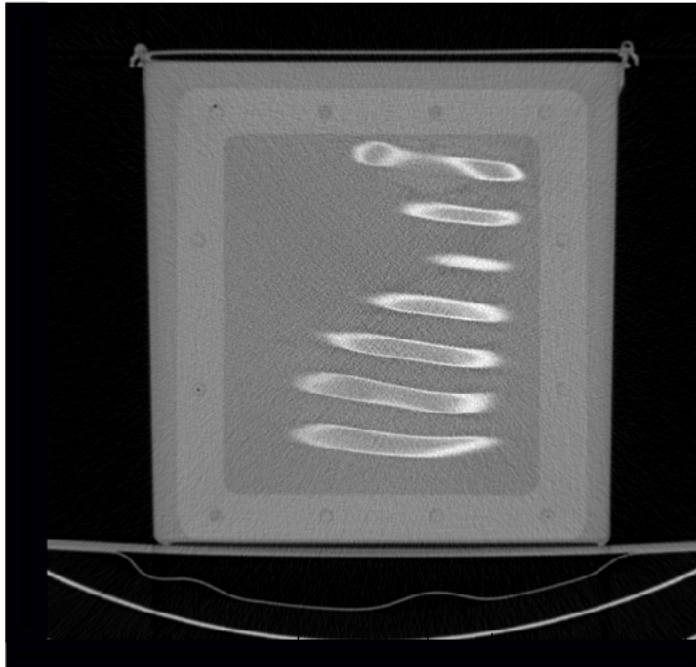


Figura 2.4.5: Imagen de las costillas en TAC

Una vez que se tienen las coordenadas cartesianas de los marcadores en dos sistemas de referencia diferentes, las coordenadas del laboratorio y las coorde-

nadas que del sistema de referencia del estudio del TAC.

Se requiere encontrar la transformación entre ambos sistemas de referencia. Para ello se elaboró un programa en MATLAB que utiliza el algoritmo propuesto por P. Horn[32].

La transformación para ir de un sistema de referencia al otro se puede considerar como el movimiento de un cuerpo sólido, por lo cual se puede descomponer en rotaciones y traslaciones. A esta transformación se le conoce como la orientación absoluta. Para poder definir un sistema de referencia en el espacio necesitamos al menos tres puntos, con ellos primero se define un plano. La mayoría de los métodos para encontrar la transformación de orientación absoluta funcionan únicamente para 3 puntos en el espacio, la diferencia entre estos métodos y el propuesto por P.Horn es que este último puede utilizar una mayor cantidad de puntos, y entre mayor sea la cantidad de puntos la precisión de la transformación aumenta.

Considerando un sistema donde se tienen 3 grados de libertad rotacional y tres grados de libertad de traslación y uno extra de escalamiento, en total tenemos 7 grados de libertad. Para encontrar la rotación, se comienza considerando la línea que une a dos puntos como uno de los ejes y otro eje se coloca de manera perpendicular a éste, de manera que la mayor parte de los puntos queden dentro del plano formado por ambos ejes, el tercer eje se puede obtener calculando el vector normal al plano, este procedimiento se realiza para ambos sistemas. La rotación que lleva los ejes de un sistema al otro es la rotación que estamos buscando. Existen muchos métodos para encontrar la transformación entre dos sistemas de coordenadas a partir de las matrices de rotación, la propuesta escribir las coordenadas de los puntos como cuaterniones de Hamilton, un cuaternion puede ser pensado como un número complejo con tres partes imaginarias.

$$\widehat{q} = q_0 + iq_x + jq_y + kq_zl \tag{2.4.1}$$

los cuaterniones serán expresados mediante el símbolo \widehat{q} .

Debido al álgebra que conservan, las rotaciones pueden ser expresadas como una multiplicación de cuaterniones unitarios, es decir, su normal tiene valor unitario. Queremos encontrar una transformación de la forma

$$r_1 = sR(r_2) + r_0 \tag{2.4.2}$$

donde r_1 son las coordenadas en el primer sistema, s es el factor de escalamiento $R(r_2)$ es la transformación de rotación aplicada al segundo sistema y r_0 representa el vector de traslación.

Podemos ahora expresar las coordenadas de nuestros marcadores como cuaterniones puramente imaginarios, es decir $q_0 = 0$. Para el análisis es útil definir el centroide los puntos, este se puede expresar como la suma de las coordenadas entre el número de puntos. Podemos entonces expresar cada punto en función del centroide. Los centroides están definidos como:

$$\bar{r}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{1,i} \quad \bar{r}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{2,i} \quad (2.4.3)$$

Y podemos redefinir las coordenadas de cada punto con respecto a su centroide de la forma:

$$r'_{1,i} = r_{1,i} - \bar{r}_1 \quad r'_2 = r_{2,i} - \bar{r}_2 \quad (2.4.4)$$

Después se define la una matriz cuyos elementos son la suma de los productos de las coordenadas en ambos sistemas de forma que los elementos de la matriz M de 3×3 quedan definidos como:

$$M = \sum_{i=1}^n r'_{1,i} r'^T_{2,i} \quad M = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

donde la T simboliza que es el vector traspuesto.

Esta matriz contiene la información necesaria para construir la matriz de rotación.

$$N = \begin{bmatrix} (S_{XX} + S_{yy} + S_{zz}) & S_{yz} - S_{zy} & S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} - S_{yx} \\ S_{yz} - S_{zy} & (S_{XX} - S_{yy} - S_{zz}) & S_{xy} + S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} \\ S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} + S_{yx} & (-S_{XX} + S_{yy} - S_{zz}) & S_{yz} + S_{zy} \\ S_{xy} - S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} & S_{yz} + S_{zy} & (-S_{XX} - S_{yy} + S_{zz}) \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

Se calcula el eigenvalor máximo de esta matriz, pues el eigenvector de este es el que está relacionado con el cuaternión que se utiliza para construir la matriz de rotación que mejor mapea los puntos de un sistema a otro. Es decir el valor del error definido como:

$$e_i = r_{1,i} - sR(r_{2,i}) - r_o \quad (2.4.7)$$

El factor de escala se obtiene calculando la raíz cuadrada de la razón entre las normas al cuadrado de las coordenadas en cada sistema.

$$s = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \|r'_{2,i}\|^2}{\sum_{i=1}^n \|r'_{1,i}\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.8)$$

Una vez que la rotación y el factor de escala están definidos la traslación es simplemente la diferencia entre el centroide de un sistema y el centroide del otro sistema multiplicado por el factor de escala.

Con esto ya se tiene la información necesaria para poder identificar puntos sobre la superficie de las costillas.

Se realizó una reconstrucción preliminar de las costillas, la cual se muestra en la figura 2.4.6.

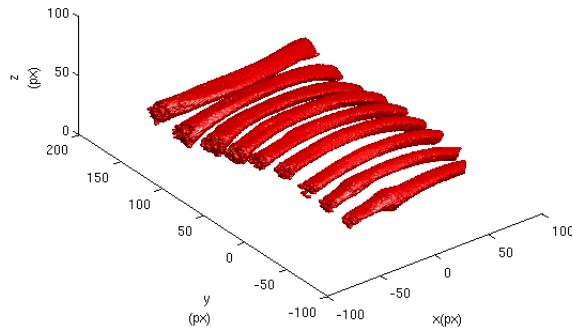


Figura 2.4.6: Reconstrucción preliminar de las costillas en MATLAB.

Para aplicar un filtrado, de manera que el contorno de las costillas sea más suave, y guardar los datos de la matriz para manipularlos se elaboró el programa. Este programa aplica un filtro de manera que únicamente los pixeles que pasan un valor umbral tendrán un valor en la escala de grises y los demás se fijarán a cero. Después el programa reconstruye la superficie con triángulos pequeños, al final tenemos un listado de triángulos que juntos construyen la superficie de las costillas, el programa contiene las coordenadas de los vértices de cada triángulo y el vector normal a la superficie de cada elemento, la imagen de las costillas utilizando la triangulación se muestra en la figura 2.4.7.

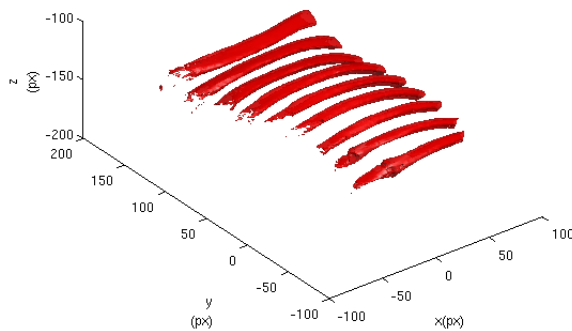


Figura 2.4.7: Reconstrucción de la superficie de las costillas utilizando una triangulación.

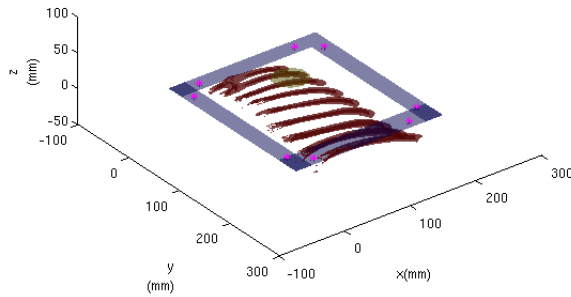


Figura 2.4.9: Imagen de las costillas en el sistema de coordenadas del laboratorio con los marcadores, el marco y mostrando las dimensiones del transductor.

El siguiente programa toma el arreglo creado por el anterior y utilizando las coordenadas del laboratorio y las que se obtuvieron del TAC para cada marcador, encuentra la transformación que rota y traslada las costillas para que ambos sistemas concuerden, de esta manera aseguramos que las coordenadas que aparecen en la imagen son las mismas que tendremos en el laboratorio.

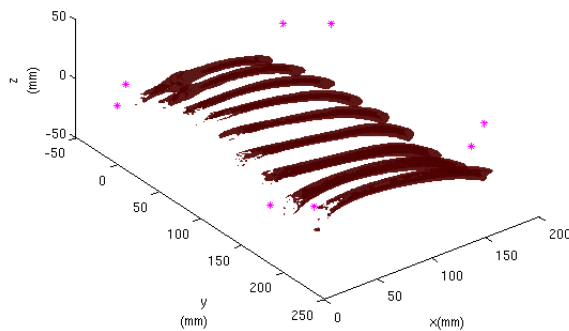


Figura 2.4.8: Imagen de las costillas en el sistema de coordenadas del laboratorio con los marcadores.

Como ya podemos conocer las coordenadas de cada punto en la imagen en el sistema del laboratorio ahora podemos calcular el ángulo entre el vector normal a cada elemento de la triangulación y el vector $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ del sistema de

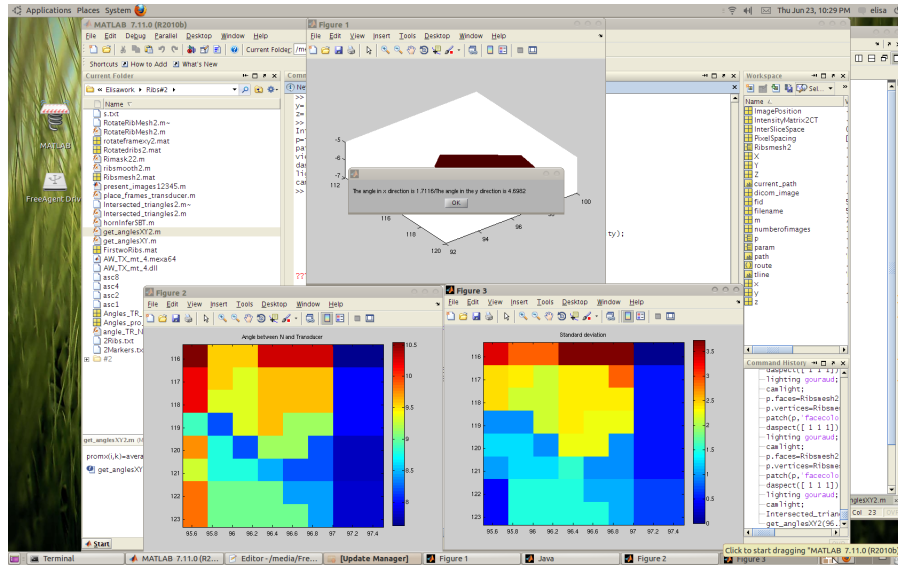


Figura 2.4.11: Pantalla con los resultados sobre el ángulo que se debe girar el soporte y la desviación estándar en la zona.

laboratorio.

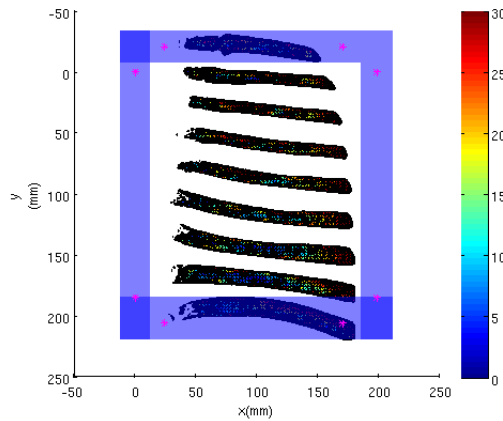


Figura 2.4.10: Superficie de las costillas mostrando el valor de los ángulos en la superficie de las costillas.

Así se pueden identificar las zonas donde el ángulo entre el vector normal de cada triángulo y el vector e_3 es cercano a cero.

Una vez que identificamos un triángulo para el cual la incidencia sea nor-

mal, es importante revisar que los triángulos vecinos muestren el mismo comportamiento. Para ello un último programa calcula la desviación estándar de los vectores normales a las superficies en una región circular de 2mm de diámetro centrada en el triángulo elegido, también nos dice si hay que rotar el marco de las costillas en los ejes X y Y para que la incidencia sea completamente normal, en la figura (2.4.11) se muestra una foto de la pantalla en donde se observan los resultados de este programa, el programa muestra un mapa de intensidad de ángulo y desviación estándar, así como el valor de los ángulos que es necesario rotar el marco en cada eje para asegurar incidencia normal.

El soporte del marco permitirá realizar esta corrección en grados.

2.5. Disposición para las medidas

A continuación se describe como se preparó el montaje experimental para cada medición. Las costillas se pusieron a desgasificar un día antes y están en un molde con agua desgasificada.

Metodología para la instalación

Con el tanque vacío, lo primero es colocar el material absorbente en las paredes y fondo del mismo.



Figura 2.5.1: Vista superior del tanque con los absorbentes.

Lo siguiente es introducir el soporte vacío, sin las costillas ya que es una pieza grande y pesada y se quieren evitar golpes accidentales al hidrófono o transductor. Después de introdujeron las mangueras del sistema de calentamiento de recirculación.

Después se colocó el transductor en el soporte manual y con ayuda de un nivel verificamos que el mismo estuviera alineado como se muestra en el esquema 2.5.2.

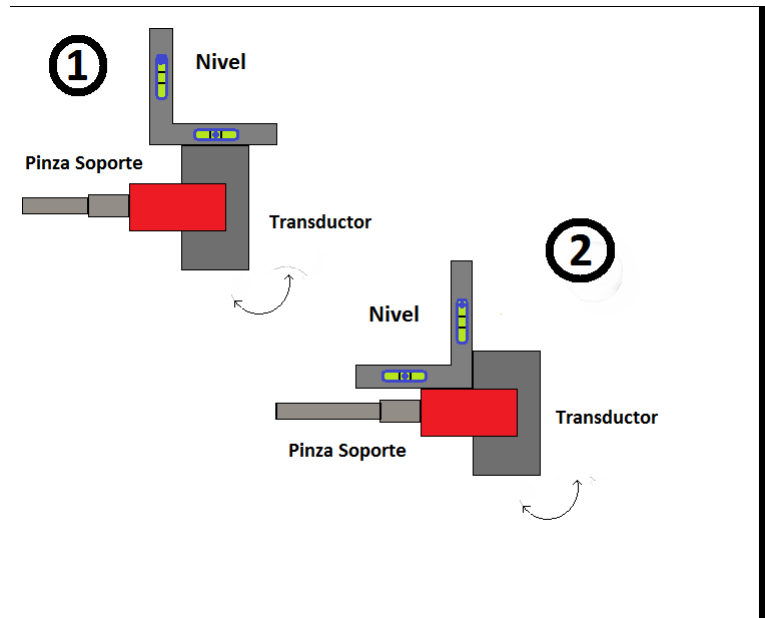


Figura 2.5.2: Alineación del transductor

En este punto es importante que el soporte esté colocado de manera perpendicular al fondo del tanque, como se muestra en el siguiente esquema, para que no se interponga en el momento de colocar y mover el hidrófono.

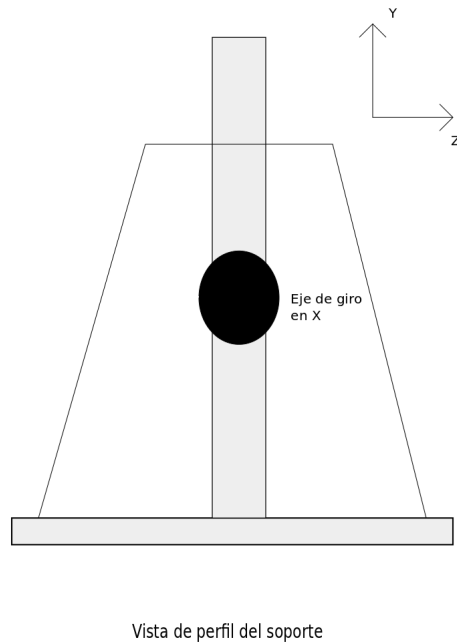


Figura 2.5.3: Vista de perfil del soporte

Antes de colocar el hidrófono es importante revisar que los límites de movimiento del sistema automatizado se encuentren adecuadamente colocados de manera que el hidrófono no choque con las paredes del tanque ni con ningún otro elemento.

Una vez que estos elementos estuvieron colocados se comenzó a llenar el tanque con agua desgasificada y desionizada libre de partículas, el objetivo es que una vez que las costillas estén inmersas en el tanque, el sistema reproduzca las condiciones del cuerpo humano.

El agua es desgasificada debido a que como ya se mencionó anteriormente las burbujas interactúan con el haz de ultrasonido y pueden afectar las mediciones. Se utiliza agua desionizada puesto que dentro del tanque se colocarán dispositivos eléctricos, con frecuencia necesitaremos introducir las manos al tanque para modificar la posición de las costillas y se quiere evitar el riesgo de recibir una descarga eléctrica.

En cuanto el agua llega a un cierto nivel se encendió el calentador para obtener 37 C.

Una vez que el tanque se encuentra lleno de agua a 37 C se introducen las costillas, el molde con agua se introduce tapado dentro del tanque y cuando está completamente sumergido se destapa y se sacan las costillas, de esta manera aseguramos que nunca entren en contacto con el aire.

El marco de las costillas se fija en el soporte como se muestra en el siguiente esquema.

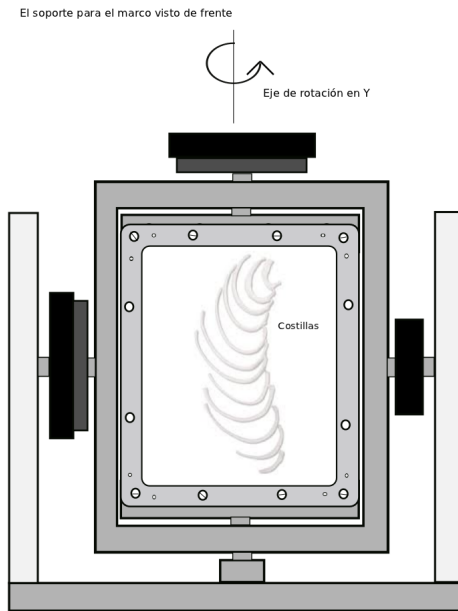


Figura 2.5.4: Marco con las costillas sujeto al soporte

De manera análoga a como se alineó el transductor utilizando el nivel, se alineó el soporte para las costillas con respecto a los ejes de rotación X y Y. Primero se colocaron horizontales y se rotan en el eje Y hasta que se nivelan como se muestra en el siguiente esquema. Después se colocan verticales y se rotan en el eje X hasta que el nivel indica que el sistema está alineado.

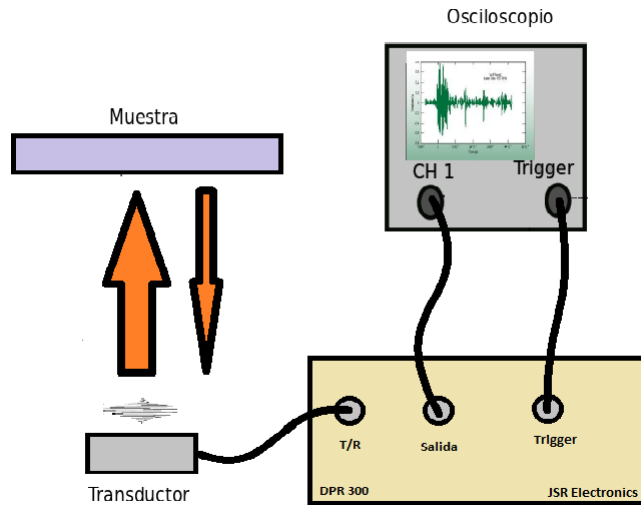


Figura 2.5.6: Transductor en modo de eco

Para esto se utilizó un Pulse -Receiver de ultrasonido (DPR300, JSR Electronics).

El transductor fue excitado en modo eco y la señal recibida fue observada en un osciloscopio. El pulso de mayor amplitud corresponde a excitación y un tiempo mas tarde, mostrando atenuación se observa el eco de la señal.

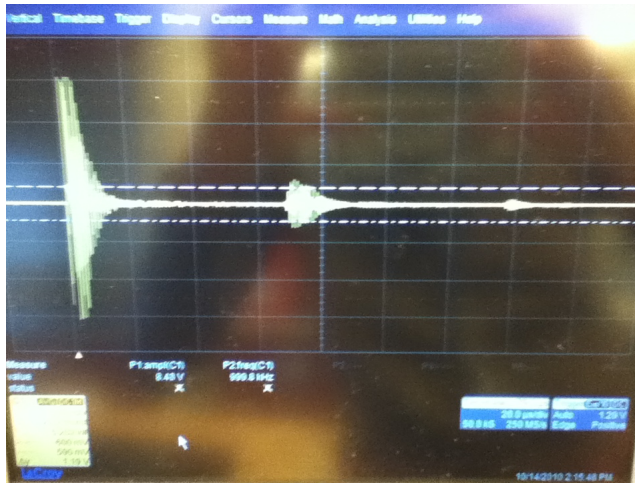


Figura 2.5.7: Pantalla del osciloscopio mostrando la señal de excitación y su eco

Lo primero es colocar el foco del transductor sobre la superficie del marco.

Hay dos criterios por medio de los cuales podemos saber cuando el marco se encuentra a la distancia focal. El primero es conociendo la distancia focal, con ella y considerando el valor de la velocidad del sonido a la temperatura que se encuentra el agua podemos calcular el tiempo que deberá tardar la señal en ir y regresar cuando la superficie que envía la señal reflejada se encuentra a la distancia focal. Así, utilizando el sistema de posicionamiento podemos variar la distancia del transductor moviéndolo hacia adelante o atrás según sea el caso. El otro criterio consiste en observar la amplitud del eco en la señal que se observa en el osciloscopio, sabemos que cuando la amplitud de la señal reflejada sea máxima nos encontraremos a la distancia focal. Ambos criterios se utilizaron para considerar que el marco se encontraba aproximadamente en el foco. Una vez encontrado el máximo, esa posición del transductor se utilizó como el cero en el eje Z.

Después de esto se realizó una revisión final para verificar que el marco se encuentra perfectamente alineado con respecto al transductor. Para ello lo que se hizo fue colocar el transductor frente al marco de las costillas, se desplazó a lo largo de uno de los ejes una distancia de 2 cm y se observó el tiempo al que se registró el eco y se regresó a la posición inicial. Después se desplazó hacia la otra dirección sobre el mismo eje la misma distancia (2cm) y se repitió la medida del tiempo de eco. Si el tiempo de eco registrado no es igual, significa que el marco no es perfectamente paralelo al plano del transductor. Conociendo la velocidad del sonido a la temperatura que se encuentra el agua en ese momento y el tiempo de vuelo, podemos calcular las distancias y con ello el ángulo que debemos girar el soporte para hacer ambos planos paralelos.

En la figura se muestra este procedimiento de alineación, donde d es la distancia focal a la que colocamos el transductor, d_1 y d_2 son las diferentes distancias que viaja el haz, de esto podemos calcular el ángulo que se debe corregir y la dirección de giro. Una vez que uno de los ejes se ha alineado, se fija y el procedimiento para el otro eje de rotación es análogo.

Una vez que el transductor y el marco están alineados, comienza el proceso de encontrar el marcador que seleccionamos como origen (ver figura 2.4.4).

Para ello se dirige el transductor frente al lugar donde esperamos encontrar el marcador. El marcador es un pequeño orificio, de aproximadamente 1mm de diámetro.

Cuando la señal pasa por el orificio vemos como se retrasa (el eco llega más tarde en el tiempo) y disminuye en amplitud. Donde la mínima amplitud es encontrada está el centro del marcador. Las siguientes imágenes muestran lo anterior, en a) el foco está sobre el marco, en b) está sobre el marcador.

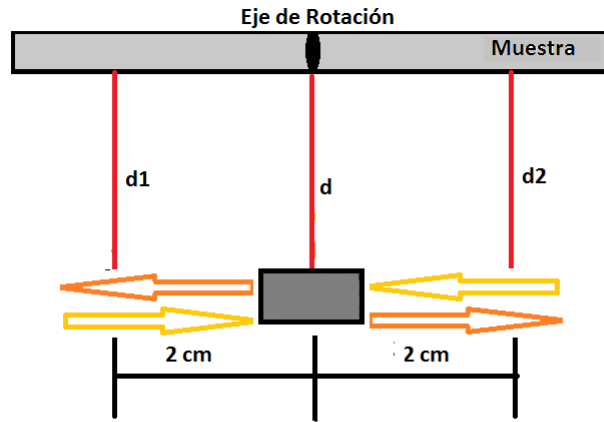


Figura 2.5.8: Alineación de el soporte con el transductor en el plano XY

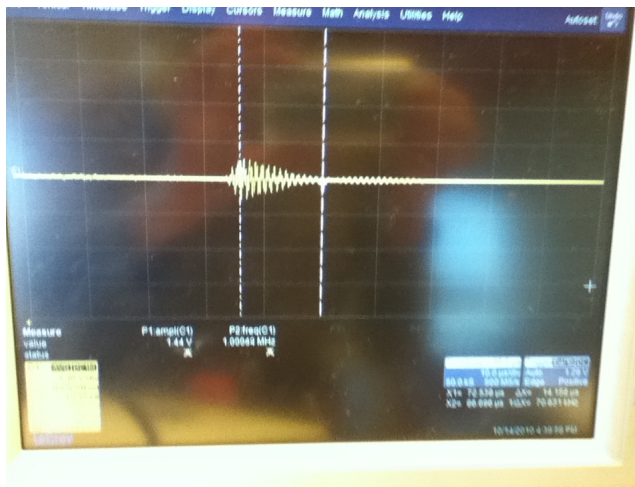


Figura 2.5.9: Foco del transductor sobre el marco.

Una vez encontrado el marcador, la posición se estableció como el cero en los ejes X y Y del transductor.

Lo siguiente fue confirmar que los resultados de los programas, respecto al

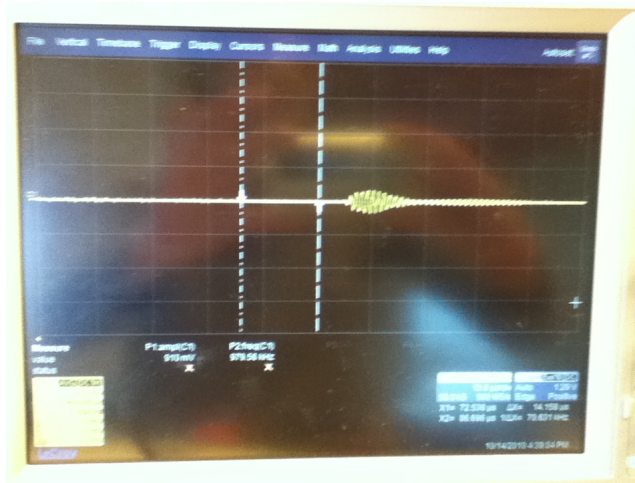


Figura 2.5.10: Foco del transductor sobre el marcador.

cálculo del vector normal a la superficie de las costillas, fueran correctos decir verificar que los resultados de los programas fueran adecuados antes de realizar las mediciones. Para verificar esto, se eligió un punto en uno de los ejemplares de las costillas, para el cual de acuerdo con los programas el vector normal fuera paralelo al eje Z.

Conociendo las coordenadas del punto se realizó un barrido en ambas direcciones del plano XY, para obtener un perfil de las costillas. Como la superficie es irregular, si mantenemos el transductor fijo en el eje Z, es decir no lo acercamos ni lo alejamos, el tiempo que tarde en llegar el eco cambia cuando movemos el transductor sobre alguno de los ejes X o Y.

Las coordenadas del punto elegido son $(x, y, z) = (96.38, 116.6, 4.17)$ en el sistema de coordenadas del laboratorio, se dirigió el transductor a este punto y una vez ahí, se movió en Y hasta el borde superior de las costillas, de ahí se bajó en pasos de 0.1 mm hasta llegar al límite inferior de las costillas, guardando el tiempo que tardaba en llegar a cada eco en cada paso, después se regresó al punto inicial y ahora se trasladó en el eje X hasta la orilla izquierda de las costillas y análogamente se trasladó hasta la orilla derecha, de nuevo registrando los tiempos en cada incremento. A continuación se presentan los datos graficados.

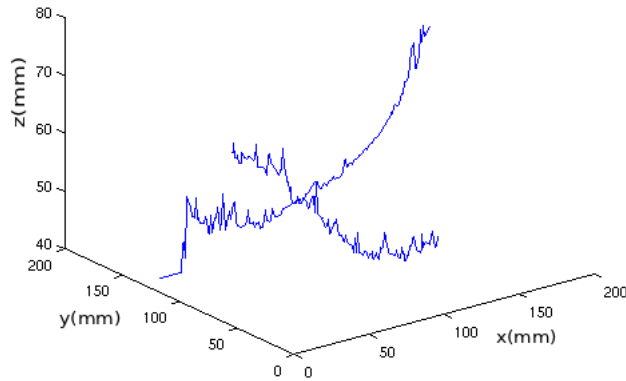


Figura 2.5.11: Gráfica del perfil de las costillas

Lo que esperamos es que si ajustamos un plano a los puntos en una vecindad de 2mm de radio, centrada en el punto elegido, el vector normal al plano formado por los puntos en esta sea paralelo al vector canónico $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Al realizar los cálculos se obtuvo que el ángulo entre el vector \vec{e}_3 y el normal al plano es de 0.5 grados, esta pequeña rotación se puede corregir al rotar el marco como lo indica el cálculo de los programas en MATLAB.

Con esto verificamos que en primer lugar los sistemas de referencia coinciden y que podemos confiar en los resultados de los programas.

Una vez que el transductor y el marco están alineados, se puede colocar el hidrófono. Para alinear el transductor con el hidrófono es necesario retirar las costillas para que el hidrófono pueda recibir las ondas de manera directa y podamos localizar fácilmente el centro del campo.

Para ello lo que se hizo fue rotar el marco 90 grados sobre el eje X y se colocó el transductor frente al hidrófono por arriba de las costillas.

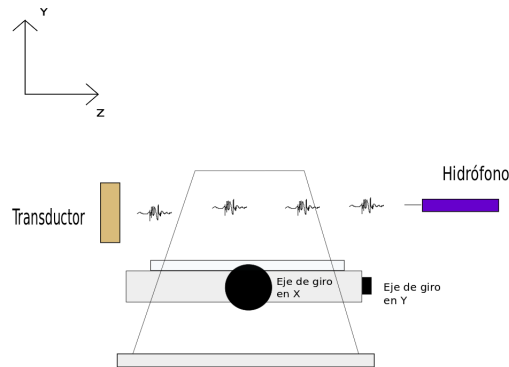


Figura 2.5.12: Alineación del transductor con el hidrófono

Para poder alinear el hidrófono es necesario que los elementos del sistema de adquisición se encuentren conectados de acuerdo con el siguiente esquema.

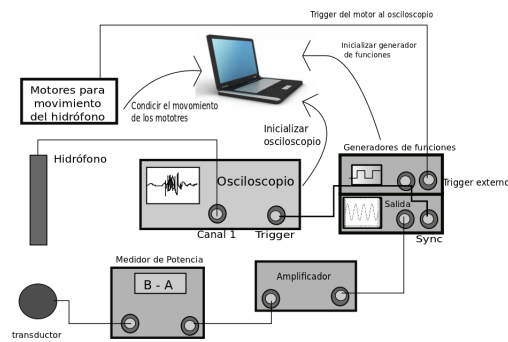


Figura 2.5.13: Montaje experimental para la adquisición del campo de presión de la onda de ultrasonido

Para la alineación del hidrófono ya se hace uso entonces del montaje que se muestra en la figura 2.1.1 y del figura de adquisición que se muestra en la figura 2.5.11.

A continuación se presentan las especificaciones del equipo utilizado. Los generadores de funciones son Tabor Electronics modelos WS 8101 y WS 8102, programados via TCP-IP, amplificador de RF para banda ancha de 100KHz a 10 Mhz, con una ganancia de 35-50 dB. Medidor de potencia Agilent E4419B con dos sondas 8482H y un atenuador/adaptador de señal reflejada -directa de -30dB. Osciloscopio de dos canales (Marca Le Croy).

La computadora se encuentra conectada vía Ethernet con el motor del hidrófono, el osciloscopio (Waverunner, Le Croy) y los generadores de funciones (Tabor Electronics modelos WS 8101 y WS 8102).

Programas en MATLAB se encargan de inicializar y sincronizar los instrumentos.

El programa de MATLAB para la adquisición de la señal realiza el siguiente procedimiento: primero inicializa el osciloscopio en el modo de secuencia, este modo nos permite particionar la memoria de adquisición en segmentos y capturar eventos específicos en largos periodos de tiempo para después ver y analizar cada segmento individualmente.

Los generadores de funciones se conectan para trabajar en sincronía. Un primer generador crea una señal de pulso cuadrado a 10 KHz, el segundo generador crea una señal senoidal a 1MHz, esta señal se sincroniza para ser enviada dentro del pulso cuadrado que envía el primer generador, esta es la señal con la cual se alimentará al transductor.

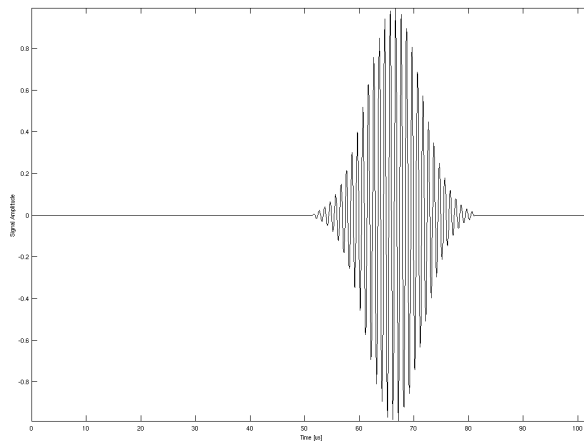


Figura 2.5.14: Señal de excitación para el transductor

Sabemos que la adquisición que realiza el hidrófono debe estar sincronizada con la señal enviada por el transductor, para ello un programa en MATLAB coordina el movimiento del hidrófono. En resumen este programa inicializa el osciloscopio y los generadores de funciones, el programa considera la posición donde se encuentra el hidrófono al inicio como el centro del mapa, entonces dirige al hidrófono a lo que será la esquina superior izquierda de un cuadrado y se mueve continuamente como se muestra en la siguiente figura para generar un mapa considerando los tiempos en que el transductor envía la onda. El programa controla la velocidad del motor (considerando aceleración y desaceleración), da la indicación de moverse al hidrófono al punto en donde se realizará una adquisición.

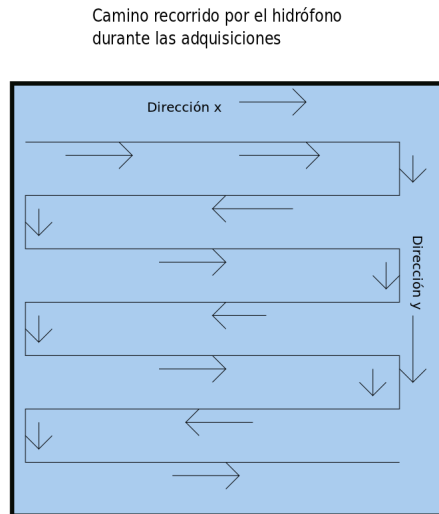


Figura 2.5.15: Ejemplo de la trayectoria sobre la cual se movió el hidrófono en el caso de la adquisición sobre el plano XY

Cuando ya se tiene alineada la muestra de costillas, se comenzó con las adquisiciones. Utilizando el sistema automatizado se hicieron tres adquisiciones con cada una de las muestras:

1. Adquisición Plano XY.
2. Adquisición Plano XZ.
3. Adquisición Plano XY sin muestra.

En el programa que controla las adquisiciones tenemos que especificar ciertos parámetros que ayudan a obtener las señales en el tiempo y espacio requerido en la siguiente tabla se muestra el ejemplo del valor de los parámetros para una adquisición:

Longitud de ventana de tiempo	105	μs
Número de promedios	3	
Largo/ancho de la adquisición	50.4	mm
Tamaño de paso espacial	0.7	mm
Número de pulsos	30	
Frecuencia de la señal	1000	KHz
Amplitud de la señal	10	V_{pp}
Tipo de plano de adquisición	XY	

Cuadro 2.5.1: Ejemplo de parámetros para realizar un adquisición.

La longitud de la ventana de tiempo corresponde a la longitud en tiempo de la señal desplegada en el osciloscopio, ya que necesitamos capturar desde el inicio de la señal y esto lo podemos ajustar directamente en el osciloscopio y después introducir este tiempo como parametro de la adquisición. El número de promedios se refiere a que el osciloscopio promedia 3 señales para después archivar ese resultado y así eliminar un poco el ruido que pudiera presentarse. Las dimensiones de la adquisición se definieron como cuadrados de fue de 5.04 x 5.04 cm. El paso espacial se designa así porque es menor a la mitad de la longitud de onda del ultrasonido que es de 0.15 cm. El número de pulsos que se envían con forma senoidal se definió en 30. La frecuencia de la señal es de 1 MHz que es la que se utiliza en ultrasonido focalizado en aplicaciones médicas. Para la amplitud, se utilizó la amplitud de 10 Vpp esto para obtener las señales lo más amplias posibles y sin utilizar un amplificador ya que hacer esto provocaría efectos no lineales.

Después de especificar estos parámetros, se inicia la adquisición, cada adquisición requería de 30 minutos para completarse. Al finalizar cada adquisición es necesario revisar el mapa de campo acústico que despliega el programa para verificar si no hubo algún error durante la misma y también renombrar el archivo de datos que se generó para poder ser almacenado con los demás archivos.

El mapeo del campo acústico se realizó en un región cuadrada centrada en el punto donde el haz incide de manera perpendicular a la superficie de las costillas. El área que nos interesa debe ser lo suficientemente grande como para que podamos observar las variaciones de la intensidad en el campo, también queremos que la distancia entre adquisiciones no sea lo más pequeña posible para que los campos de presiones sean lo más detallados posible. Dadas las especificaciones de los equipos utilizados para el sistema de adquisición, el área del campo capturado fue de $50.4mm^2$, la distancia entre adquisiciones fue de $0.7mm$, con 72 adquisiciones en cada dirección. La distancia espacial entre adquisiciones se eligió considerando el teorema de Nyquist, el teorema demuestra que la reconstrucción exacta de una señal periódica continua en banda base a partir de sus muestras, es matemáticamente posible si la señal está limitada en banda y la tasa de muestreo es superior al doble de su ancho de banda.

Una vez que las costillas se retiraron del camino entre el transductor y el hidrófono, estos dos se colocaron uno frente a otro lo mejor posible. Después se

utiliza el programa encargado de realizar el mapeo del campo, si al final obtenemos un campo centrado, sabemos que el hidrófono está debidamente alineado con el eje acústico, de lo contrario se corrige la posición del hidrófono y se realiza otra serie de mediciones hasta obtener un campo centrado como se muestra en la imagen 2.5.16.

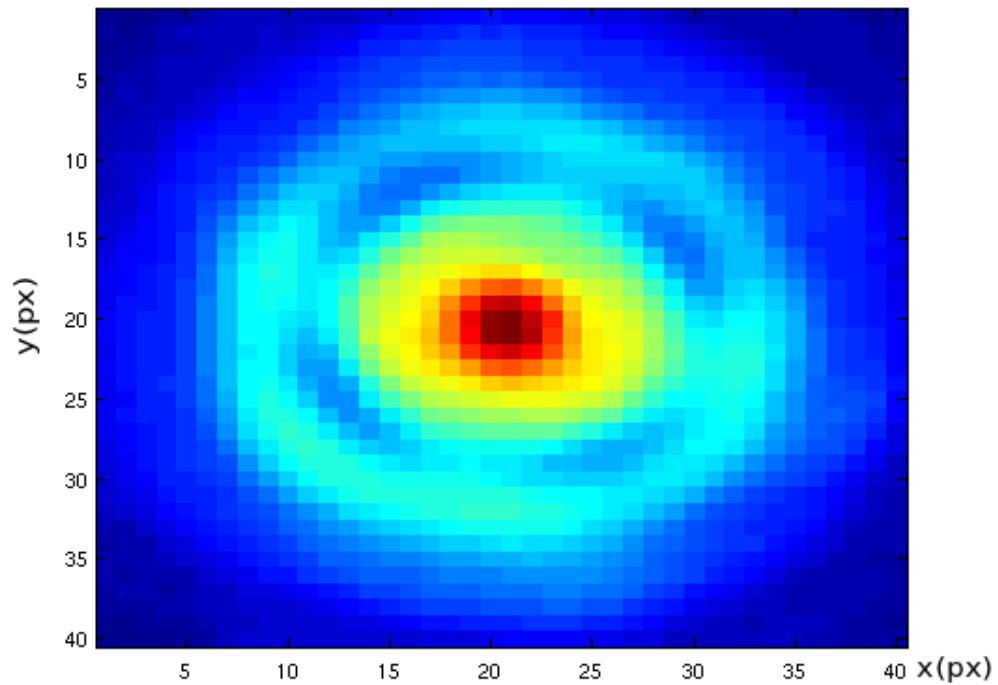


Figura 2.5.16: Ejemplo del campo de presiones adquirido

Una vez hecho esto se regresan las costillas a la posición original y ya se comenzó con la adquisición de datos.

Resumen

Existen diferentes técnicas que permiten medir las propiedades acústicas de los materiales bilógicos. La velocidad con la que viaja el sonido en un medio esta determinada por parámetros acústicos como la impedancia y presión acústicas propios del medio de propagación. En el régimen de propagación lineal la velocidad del sonido es una característica del medio y puede ser calculada utilizando un medio como referencia, generalmente se utiliza el agua. La velocidad

del sonido se obtiene a partir de la diferencia en tiempo de llegada de una onda de ultrasonido que atraviesa el material.

El hueso es un tejido que presenta una estructura porosa a pequeña escala por lo que el módulo elástico se convierte en un valor complejo, su derivación resulta muy complicada y requiere el desarrollo de un enfoque teórico nuevo que permita trabajar con funciones para el módulo elástico. Debido a estas dificultades se ha modelará como un medio homogéneo. Esta aproximación resulta mas adecuada en el caso del hueso compacto, las costillas están principalmente formadas por hueso compacto.

Los mecanismos que contribuyen a la atenuación de la onda de ultrasonido son principalmente absorción y dispersión. En el rango de frecuencia donde los tiempos característicos de relajación de las moléculas en el tejido están cerca del periodo de tiempo de onda, se observa una variación casi lineal del coeficiente de atenuación con la frecuencia.

Para poder obtener esta diferencia en tiempos entre la llegada de ambas señales existen diferentes técnicas matemáticas, como la correlación y la transformada de Fourier.

La velocidad del sonido se calculará a partir del campo de presión cústica. El método por medio del cual se realizará la medición de este campo se basa en la transmisión transversal utilizando agua como medio de referencia, esto quiere decir que se realizan dos mediciones, en la primera se sumerge la muestra en agua y utilizando un transductor se envía una señal de ultrasonido de manera que la dirección de propagación resulta perpendicular al plano de incidencia sobre la superficie de la muestra, la señal viaja atravesando la muestra y es capturada del otro lado por un hidrófono. Conectando la señal recibida por el hidrófono a un sistema de adquisición se realiza la reconstrucción del campo de presión acústica, después se retira la muestra y sin variar las posiciones del transductor y el hidrófono se repite el proceso. Utilizando estos campos se puede calcular la diferencia en tiempos de viaje con la muestra y sin la muestra conociendo la velocidad del sonido en el agua. Se plantea el análisis basado en una propagación lineal bajo la hipótesis de que utilizando el montaje experimental a diseñar las señales que obtendremos tendrán un comportamiento lineal.

Debido a que la totalidad del proyecto se dirige al desarrollo de un dispositivo que sea capaz de dar tratamiento al hígado, las muestras biológicas elegidas fueron costillas de cerdo por su similitud con el hueso humano en esa región. Para poder ser utilizadas como muestra biológicas las costillas necesitan recibir una preparación previa que incluye: descubrir la zona del hueso sobre la cual incidirá la onda, desgasificación de las costillas para evitar que las burbujas de aire interactúen con la onda de ultrasonido y la conservación de las muestras en formalina.

Para garantizar que la incidencia de la onda de ultrasonido fuera perpendicular a la superficie de las costillas, se diseñaron primero marcos de policarbonato que permitieron que las costillas se mantuvieran fijas dentro del tanque y se pudiera entonces construir un sistema de coordenadas a partir de dicho marco. Una vez establecido dicho sistema de coordenadas se calculó el ángulo formado por la superficie de las costillas y el eje acústico, conociendo los ángulos se selec-

cionaron las regiones en las que el eje acústico era perpendicular a la superficie de las costillas, estos puntos fueron utilizados para realizar las mediciones.

Capítulo 3

Mediciones

En este capítulo se describe como fue el proceso de adquisición de los datos, las consideraciones que fueron necesarias para garantizar las condiciones de medición deseadas.

Se presentan algunas imágenes de los resultados así como un análisis preliminar para determinar el tipo de análisis que resulta necesario para los datos obtenidos. Se presentan los valores obtenidos para la velocidad del sonido considerando la teoría previamente planteada y se realiza una discusión sobre los valores obtenidos para la velocidad del sonido.

3.1. Muestras

Como se comentó en el capítulo anterior las mediciones se realizaron utilizando costillas de cerdo frescas, conservadas en el laboratorio utilizando formalina al 10 %. Se utilizaron 5 ejemplares de costillar de cerdo, los cortes utilizados pertenecen a diferentes regiones del costillar.

Se realizaron 4 mediciones en diferentes puntos de las costillas, este número de mediciones corresponde al número aproximado de puntos encontrados por costillar en donde al ser colocados en el marco, la superficie de las costillas resulta casi paralela a la dirección de propagación de la onda.

3.2. Adquisición de datos

La propagación del campo de ultrasonido focalizado tiene la forma que se presenta en la figura 2.3.3.

El campo tiene una simetría axisimétrica y debido a esto si caracterizamos la propagación en los planos XY y YZ se puede reconstruir el campo de propagación de manera tridimensional. Cabe recordar que, el objetivo central de este trabajo de tesis es la implementación y operación del montaje experimental que permita la medición de dichos campos. La reconstrucción tridimensional del

campo requiere la elaboración de modelos matemáticos que se realizará en un trabajo posterior.

Como se describió en el capítulo anterior la preparación del montaje experimental requiere la alineación del hidrófono con el transductor, el cual se encuentra previamente alineado con el plano formado por el marco de las costillas.

Cuando llevamos el transductor a las coordenadas en donde se quiere realizar la medición se debe considerar que, debido a que la superficie de las costillas presenta cierta curvatura será necesario realizar una corrección en el eje Z de tal forma que el foco del transductor este sobre la superficie de las costillas. Para ello se utilizó nuevamente el modo eco del transductor (ver figura 2.5.6).

Sabemos que cuando el ángulo de incidencia es normal a la superficie y el foco está colocado sobre la misma la amplitud de la señal en el eco será máxima, por lo cual primero se rotó el marco en los ejes X y Y tanto como el programa que calcula las rotaciones lo indicó y después se desplazó el transductor en el eje Z hasta que la señal obtenida era máxima, cuando el transductor se encontraba en el lugar deseado para realizar las mediciones entonces se desconectaba el modo de eco y los elementos se conectaron de acuerdo con la figura 2.5.11.

Una vez que el sistema se encontraba alineado (garantizando la incidencia normal lo mejor posible) y tanto el transductor como el hidrófono se encontraban en el punto en donde se desea realizar la medición se realizó la adquisición de ambos campos de manera consecutiva, primera el XY y después el YZ. Se anotó la posición exacta, para los tres ejes de movimiento del transductor e hidrófono en donde se realizó la medición así como el valor de la rotación del marco para cada uno de los ejes con el objetivo de poder regresar el marco a su lugar original antes de la siguiente medición. Una vez completada la adquisición de ambos campos, transductor e hidrófono se movieron al siguiente punto donde se realizaría la medición, el proceso se repitió para cada uno de los puntos.

Después se retiraron las costillas, teniendo cuidado de golpear ni mover ninguno de los elementos del sistema. Entonces se regresaron transductor e hidrófono a la posición del primer punto de adquisición y se realizó la adquisición del campo en el plano XY. Esta adquisición es la que más tarde se utilizará para obtener la velocidad del sonido al ser comparada con la adquisición cuando se tenían las costillas.

Es importante cuidar que las condiciones del sistema de medición con y sin costillas sean exactamente las mismas.

Debido a que primero se realizaron las mediciones del campo para los cuatro puntos con las costillas, y después sin costillas, el tiempo que transcurrió entre la medición en un punto con las costillas y sin ellas fue de aproximadamente 3 horas. Durante este periodo de tiempo el parámetro que se mantuvo en observación fue la temperatura, ya que cambios en la temperatura pueden afectar la velocidad del sonido. Para ello se fijó una temperatura en el sistema de calentamiento por recirculación y el cambio de temperatura entre mediciones nunca fue mayor a medio grado centígrado, y en promedio fue de 0.3 grados centígrados. La diferencia en velocidad para este cambio de temperatura es de 0.6 m/s.

Sabemos que al atravesar los huesos de las costillas la onda sufrirá una atenuación correspondiente con la densidad y ancho de las costillas.

Para poder obtener datos con los que se puedan realizar los cálculos para la velocidad del sonido, necesitamos que la distribución de amplitud de presión varíe por lo menos en tres órdenes de magnitud a lo largo de los campos adquiridos, de lo contrario no se pueden realizar cálculos confiables para la velocidad del sonido y la atenuación.

En un principio el experimento se planteó utilizando un transductor a 1 MHz, pero al realizar la adquisición de los datos se observó que la atenuación producida por el hueso de las costillas era tan alta que la magnitud de la presión en los campos obtenidos era muy pequeña. Por ello se eligió utilizar un amplificador de potencia al cual se le fijó una potencia de salida de 30 W, para verificar la potencia entregada por el amplificador se utilizó un medidor de potencia el cual valoraba la potencia de salida y la potencia reflejada, la potencia en continuo que recibía el transductor era de 30 W, esta potencia estaba modulada por la señal senoidal con la que era alimentado el transductor.

El análisis de los datos que se presenta a continuación está basado en los datos adquiridos durante los mapeos del plano XY, es sobre este plano que podemos utilizar la teoría mencionada anteriormente para transmisión transversal. Como se comentó anteriormente, la información contenida en los mapeos del plano YZ se utilizará en un trabajo posterior para modelar la propagación tridimensional del campo.

3.3. Las señales obtenidas

A continuación se presentan las imágenes de los datos graficados para un punto de cada costillar así como algunos ejemplos de las señales que se utilizaron para producir dichos campos.

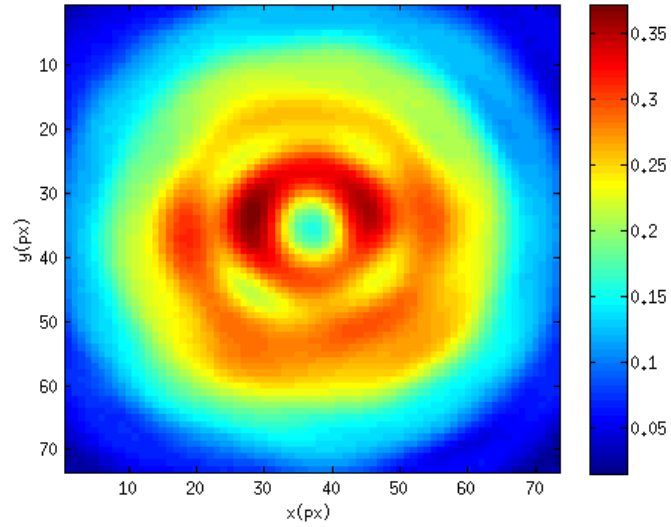


Figura 3.3.1: Campo de presión acústica sin la muestra (en agua desionizada y desgasificada).

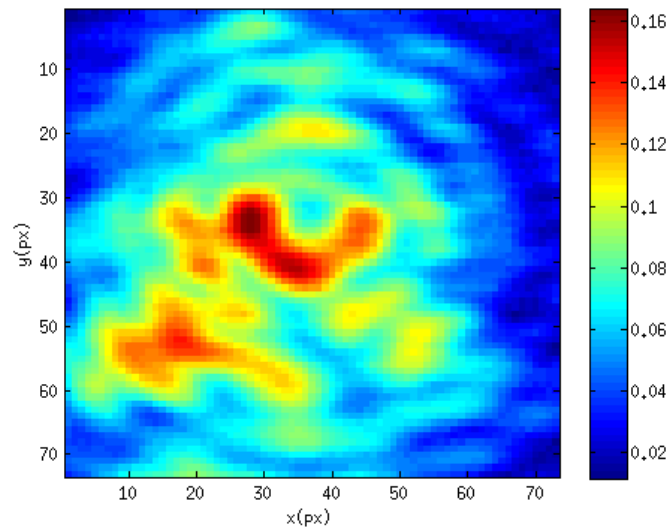


Figura 3.3.2: Campo de presión acústica con la muestra en agua (las costillas colocadas entre el transductor y el hidrófono)

Al ver el mapas en la figura 3.3.1 se puede notar como la forma del campo

en agua no es totalmente circular como se esperaba, la deformación del campo después de atravesar las costillas es muy grande.

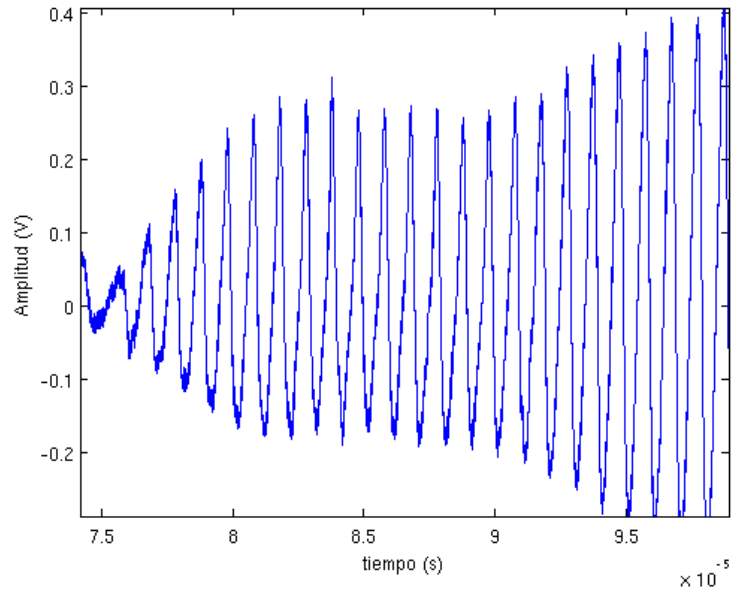


Figura 3.3.3: Señal adquirida en agua utilizando el amplificador para el transductor.

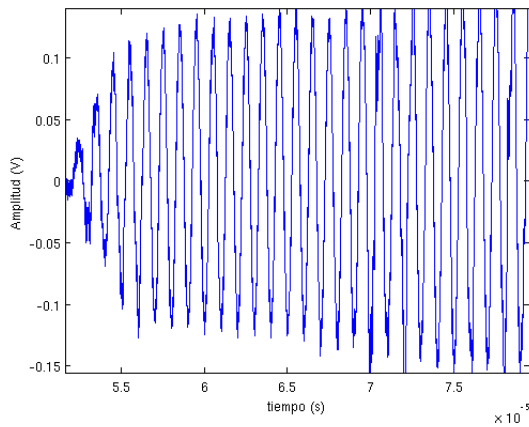


Figura 3.3.4: Señal adquirida en agua sin utilizar el amplificador para el transductor

Observando la figura anterior se ve que las variaciones entre los campos utilizando el amplificador de potencia y retirandolo no son grandes, sin embargo se observa que el campo adquirido sin el amplificador de potencia es ligeramente mas circular.

La siguiente figura corresponde al campo acústico considerando una serie de adquisiciones en agua utilizando el mismo montaje experimental pero sin el amplificador de potencia para el transductor.

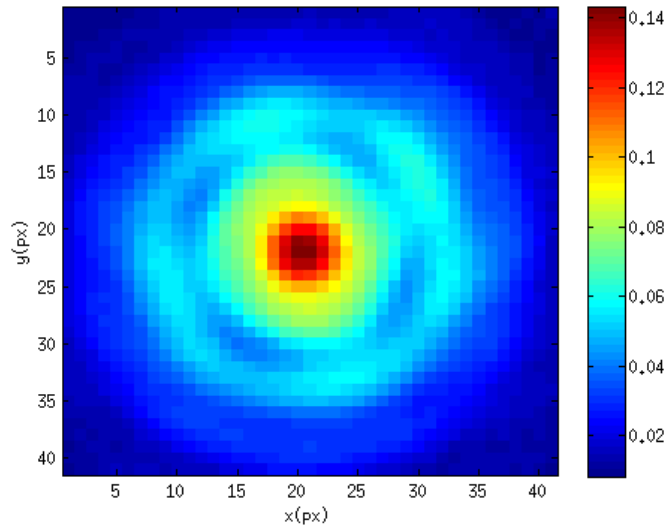


Figura 3.3.5: Campo acústico adquirido sin utilizar el amplificador para el transductor

En esta figura se observa un campo con simetría más circular. Por ello se realizó el análisis espectral de las señales en agua para el caso en que se utilizaron 30 W y el caso en que no se utilizó la amplificación, esto con el objetivo de obtener información sobre la distribución de las frecuencias que componen las señales.

Las siguientes figuras corresponden al análisis espectral de algunas de las señales, en diferentes costillares y en diferentes puntos del costillar que se obtuvieron utilizando una potencia de 30 W.

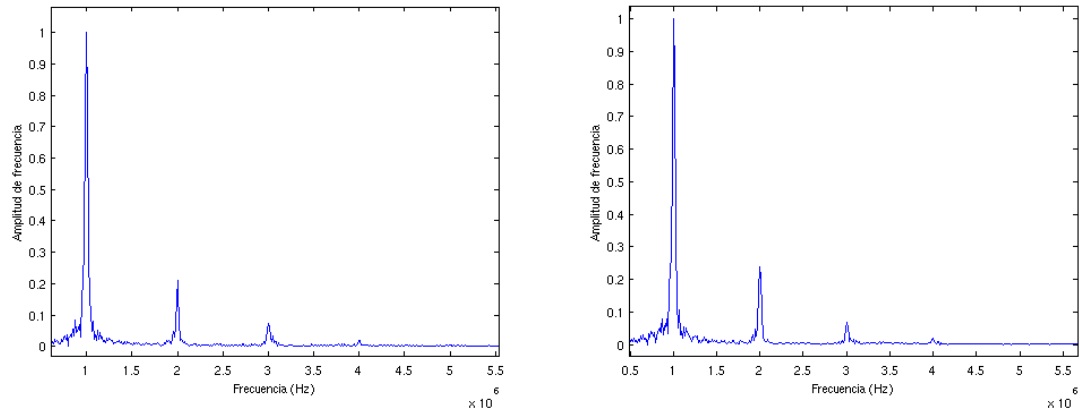


Figura 3.3.6: Espectro de frecuencias de las señales adquiridas utilizando el amplificador para el transductor

En las figuras anteriores se puede observar que efectivamente la frecuencia que presenta mayor amplitud corresponde con la frecuencia que envía el generador de funciones al transductor 1MHz. Sin embargo, se observa la aparición de armónicos, es decir el espectro muestra componentes espectrales a otras frecuencias. Un armónico es un componente de la frecuencia de una señal y es un múltiplo entero de la frecuencia fundamental, de modo que si la frecuencia fundamental es f , los armónicos tienen frecuencias $2f$, $3f$, etc. Por esto, como era de esperar, encontramos un armónico a 2MHz.

La siguiente figura corresponde al espectro de las señales para caso en que no se utilizó el amplificador.

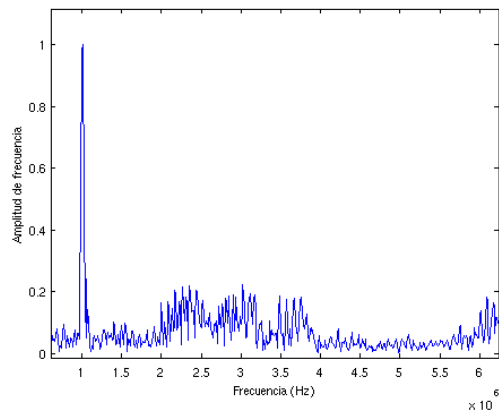


Figura 3.3.7: Espectro de frecuencias de la señal adquirida sin utilizar el amplificador para el transductor.

En este caso se puede observar que la señal no tiene armónicos. Por lo tanto se puede concluir que la generación de armónicos en este caso está relacionada con el aumento de potencia. El hecho de encontrar armónicos en el espectro implica que la onda se propaga de manera no lineal. En el siguiente capítulo se explicarán las implicaciones de tener efectos no lineales en nuestra señal y la necesidad de en un futuro, elaborar un modelo numérico que nos permita trabajar con los datos en condiciones de propagación no lineal.

3.4. La velocidad del sonido

Los métodos propuestos en el capítulo 2 para calcular la velocidad del sonido están basados en el cálculo de la diferencia en tiempos de llegada de la señal cuando entre emisor y receptor solo hay agua y en el caso en que entre ellos está la muestra.

Estos métodos consideran que la propagación de la onda es lineal, la hipótesis es que con el sistema propuesto las señales obtenidas tendrán un comportamiento lineal. En el apéndice A se muestran los programas elaborados para el cálculo de la velocidad del sonido en propagación lineal. Cuando utilizamos dichos programas para el cálculo de la velocidad del sonido en las costillas utilizando las señales obtenidas al aplicar el amplificador de potencia a 30 W, los valores obtenidos para la velocidad del sonido en el hueso de las costillas son muy similares al valor para el agua, el valor obtenido para la velocidad del sonido en el hueso de las costillas es $1549.6 \frac{m}{s}$ a $37.2^{\circ}C$, mientras que el valor de la velocidad del sonido en agua a esa temperatura es $1524.7 \frac{m}{s}$ (no se si utilizar un promedio por que da valores diferentes para cada costilla o poner varios valores especificando).

Sabemos que por la composición y ancho del hueso de las costillas el valor esperado debe encontrarse cerca de los valores reportados para el cráneo que es de $2054(+ - 120) \frac{m}{s}$, al observar los resultados obtenidos podemos concluir que los modelos de propagación lineal no son adecuados para el análisis de los datos obtenidos con este montaje experimental.

Por otro lado, consideremos una serie de señales adquiridas sin el amplificador de potencia [Ref. Son de carlos]. Para la adquisición estas señales en lugar de las costillas se colocó una placa de polycarbonato con el ancho de $\frac{1}{4}$ de pulgada.

Ahora se utilizarán estas señales para calcular la velocidad del sonido utilizando los mismos programas que en el caso anterior. El valor obtenido es $2807.1 \frac{m}{s}$, en este caso los valores obtenidos si corresponden con lo esperado [37] por lo tanto se puede concluir que los programas están realizando los cálculos adecuadamente y los valores obtenidos en el caso de las señales amplificadas no corresponden debido a que el modelo de propagación en este caso no es lineal. Cuando una onda se distorsiona de manera que su propagación es no-lineal encontramos armónicos de la frecuencia fundamental en el espacio de la frecuencia. Esto es lo que observamos en el punto 3.3 del capítulo anterior.

La hipótesis que plantea que la propagación de la señal es lineal no es válida. Para poder obtener la velocidad del sonido, utilizando las señales adquiridas

por este montaje será necesario analizar las herramientas matemáticas para propagación no-lineal de ondas en fluidos y posteriormente realizar un modelo matemático que permita el cálculo de la velocidad del sonido utilizando métodos computacionales. Esto último está fuera del objetivo de esta tesis, pero el enfoque de propagación no-lineal y las ecuaciones que lo modelan se presentan mas adelante.

3.5. Atenuación

Se puede observar que la amplitud de una onda plana que viaja en un medio homogéneo, decrece conforma se aleja de la fuente. Esto es debido a la absorción de energía del medio. La amplitud de la onda decrece exponencialmente, cuando no hay dependencia en la frecuencia el comportamiento es de la forma[38]

$$P(x) = P_0 e^{-\alpha x} \quad (3.5.1)$$

P_0 es la presión acústica en la fuente y $P(x)$ es la presión a una distancia x de la fuente.

La constante α es una característica del medio.

Para algunas aplicaciones es conveniente considerar la intensidad de la onda, la intensidad es proporcional al cuadrado de la potencia de la forma $I = P^2/2z$, donde z es la impedancia acústica del medio.

La expresión para la intensidad con respecto a la distancia a la fuente está dada por

$$I(x) = I_0 e^{-2\alpha x} = I_0 e^{-\mu x} \quad (3.5.2)$$

I_0 es la intensidad acústica en la fuente e $I(x)$ es la intensidad a una distancia x de la fuente y $\mu = 2\alpha$.

Esta ecuación puede ser escrita de la forma

$$\frac{I(x)}{I_0} = e^{-\mu x} \quad (3.5.3)$$

la razón anterior es comunmente medida en decibeles

$$db = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_1} \quad (3.5.4)$$

donde I_1 e I_2 son los valores medidos en dos diferentes lugares[38].

Recordando la relación entre intensidad y presión, para el caso de la presión se puede escribir

$$dB = 10 \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^2 = 20 \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \quad (3.5.5)$$

Cuando se quiere medir la atenuación en la amplitud de la onda se utiliza la relación anterior.

Cuando una onda es atenuada el valor en decibeles será negativo, puesto que la razón que aparece en el paréntesis es menor a uno en este caso. Para una

atenuación en la presión del 50 %, el valor en decibeles es -6dB, mientras que para la intensidad es de -3dB[38].

En la mayoría de los artículos sobre HIFU, la unidad utilizada para el coeficiente de atenuación es el Neper $[Np]$, y los resultados son reportados en Neper·m⁻¹. Para convertir decibeles a Nepers se utiliza la relación:

$$1Np = 20\log_{10}e \cdot dB \approx 8.685889638dB \quad (3.5.6)$$

Lo anterior es válido para el caso en que la onda viaja a través de un medio perfectamente elástico, esto implica que la relación entre la presión aplicada y los esfuerzos y deformaciones causados dentro del medio por la misma es lineal. En un medio perfectamente elástico, la cantidad de energía necesaria para producir la deformación es la misma que es liberada cuando se retira la presión causante de la deformación. Sin embargo en los sistemas reales es un fenómeno llamado histéresis, este fenómeno ocurre cuando existe una diferencia entre la energía depositada y la liberada, esta diferencia corresponde a la energía que es absorbida por el material, la cual en su mayoría se transforma en calor. Podemos pensar en este proceso como si el sistema consistiera de un ensamble de pequeñas masas unidas por un resorte amortiguado. Sea D el coeficiente de amortiguamiento, la fuerza producida por el amortiguamiento es $F = D \cdot dx/dt$. La dirección de la fuerza producida por el amortiguamiento siempre es contraria a la dirección de deformación del sistema, por lo tanto el amortiguamiento siempre absorbe energía. Al aumentar la frecuencia, el número de oscilaciones por unidad de tiempo también aumenta y por lo tanto la velocidad de las partículas, como resultado de esto la cantidad de energía absorbida es mayor, por lo cual se espera un aumento de atenuación a mayores frecuencias.

A primer orden se puede estimar la tasa de deformación como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau_r}(\bar{x} - x) \quad (3.5.7)$$

\bar{x} es el estado final de la deformación y τ_r es la constante característica de la deformación. En el caso de la propagación de una onda acústica armónica, el tiempo característico se puede asociar con la frecuencia de relajación característica f_r de la forma

$$f_r = \frac{1}{\tau_r} \quad (3.5.8)$$

El coeficiente de atenuación generalmente denotado con la letra α y se relaciona con la frecuencia de relajación y la frecuencia de la onda por medio de la expresión

$$\frac{\alpha}{f^2} = \frac{A_1 \cdot f_r^2}{f_r^2 + f^2} + B \quad (3.5.9)$$

donde A_1 y B son dos constantes empíricas, en términos de la longitud de onda tenemos

$$\alpha \cdot \lambda = \frac{A_2 \cdot f_r \cdot f}{f_r^2 + f^2} \quad (3.5.10)$$

A_2 es otra constante que depende de A_1 . El valor máximo de esta función está alrededor de f_r .

Considerando una dependencia lineal de la atenuación con respecto a la frecuencia podemos escribir

$$\alpha(f) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot f \quad (3.5.11)$$

α_0 y α_1 son constantes características del medio[38].

Las mediciones realizadas en este trabajo son a una sola frecuencia (1MHz), y de las mismas se pudo obtuvo el valor para la presión en mega pascales (MPa). Utilizando las ecuaciones 3.5.5 y 3.5.6 en los datos experimentales obtenidos, se obtuvieron los resultados que se muestran en la siguiente tabla.

Ancho de la costilla [mm]	Atenuación [dB]	$Np \cdot m^{-1}$
6.196	-4.346	80.75
7.181	-11.34	181.8
6.69	-8.31	143
5.426	-6.6	178.37

Cuadro 3.5.1: Valores experimentales para la atenuación en el hueso de las costillas

El promedio de los valores obtenidos es $145.98 Np \cdot m^{-1}$. De acuerdo con los resultados de otros estudios, el valor esperado para este tipo de hueso debería ser cercano a $258.3 Np \cdot m^{-1}$ [27]. Esta variación se debe a que el modelo utilizado para realizar los cálculos fue lineal y no se consideró la distribución de energía en los otros armónicos.

3.6. Efectos no lineales

En la sección anterior se comentaron ciertas observaciones que indican que dar un tratamiento lineal a los datos obtenidos mediante este sistema de adquisición no es del todo adecuado.

Los cálculos de la velocidad del sonido utilizando un modelo lineal aplicado a los datos obtenidos difieren de los valores esperados para el hueso de las costillas.

Al observar las gráficas del campo de presión acústica se puede notar como el patrón no corresponde a círculos concéntricos, si bien el patrón presenta formas concéntricas estas presentan deformaciones en cada anillo. Cuando se realiza la transformada de Fourier a las señales, el espectro muestra valores importantes para los armónicos de la frecuencia fundamental.

Los datos muestran una tendencia a que la forma de propagación del haz es no-lineal, por lo tanto la hipótesis de que los datos podrían analizarse de

manera lineal no es verdadera y se debe considerar una aproximación no-lineal. En la sección anterior se mostró la necesidad de utilizar un modelo no lineal para poder obtener la velocidad del sonido y la atenuación a partir de los datos obtenidos con el sistema de adquisición propuesto.

Matemáticamente, la velocidad de propagación de la onda está directamente relacionada con la ecuación de la misma, por lo tanto si la propagación experimental es no-lineal no podemos adecuar un modelo lineal para obtener la velocidad en este caso. Se deben incluir en la ecuación de onda los armónicos correspondientes a la frecuencia fundamental que son observados en el espectro de frecuencias de la señal. Entre mas armónicos se incluyen en la ecuación más difícil será encontrar solución a la misma. Una vez que se encuentre una aproximación adecuada para la onda se puede entonces generar un modelo matemático que permita el cálculo de la velocidad.

La atenuación también es afectada por la no-linealidad de propagación, la atenuación no es la misma para todos los armónicos y de nuevo se requiere la generación de un modelo específico para obtener los valores de atenuación en cada armónico.

En este caso, la no-linealidad observada es debida a la potencia utilizada en el transductor, ya que cuando se realizó el experimento en agua sin utilizar el amplificador de potencia, las señales no mostraron armónicos en su espectro.

Una forma de utilizar el montaje experimental para obtener el valor de la velocidad utilizando aproximaciones lineales consistiría en utilizar el osciloscopio en una forma que pueda capturar señales de baja intensidad. De esta manera podríamos tener un campo acústico definido sin aumentar la potencia.

Actualmente las aplicaciones médicas del ultrasonido no-lineal son variadas, la más estudiada es para obtener imagen utilizando los armónicos generados [41].

Por otro lado se ha estudiado la transferencia de energía producida por una onda de ultrasonido que se propaga de manera no-lineal, en este caso la energía es transferida a frecuencias más altas en las que la atenuación es mayor. En un estudio se mostró que en comparación con los tejidos blandos, el cráneo tiene parámetros de material fuertemente heterogéneo, de manera similar sería el caso del hueso de las costillas.

Se han realizado experimentos para establecer un método numérico que se pueda describir los efectos de las componentes no lineales de propagación de las ondas ultrasónicas en el cráneo para la aplicación de ultrasonido de gran intensidad (HIFU) para terapia en el cerebro.

De esta forma se pretende conocer el impacto de la propagación no lineal en la deposición de calor y la administración de la dosis térmica para cuantificar y comparar con los métodos lineales[42].

Los resultados de dichos experimentos muestran que la dosis térmica no-lineal fue más de un orden de magnitud más grande en el foco que la dosis térmica lineal y el volumen necrótico fue mayor en al menos un factor de 2. Estos resultados tienen aplicaciones concretas para la planificación del tratamiento[42].

Considerando lo anterior a pesar de que la hipótesis de que un modelo lineal sería suficiente para analizar los datos obtenidos es falsa, podría considerarse

entonces el sistema de medición presentado como una propuesta para caracterizar la propagación no-lineal en las costillas y en un futuro ser útil para diseñar el dispositivo que daría tratamiento en esta zona.

Utilizar estos datos para obtener información requiere la implementación y desarrollo de otras herramientas matemáticas. El objetivo central de la tesis es el desarrollo del dispositivo que permita realizar las mediciones, por lo cual no se pretende generar ni implementar el modelo matemático, sin embargo, en el apéndice C se muestran las herramientas matemáticas que serían necesarias para general el modelo que permita obtener los valores utilizando el montaje experimental.

Resumen

Se utilizaron 5 ejemplares de costillas de cerdo, los cortes utilizados pertenecen a diferentes regiones del costillar. Utilizando las herramientas computacionales desarrolladas para obtener en cada punto el ángulo entre el vector normal a la superficie de las costillas y el eje acústico, se seleccionaron 4 puntos por cada costilla para realizar la adquisición de datos.

Se diseñó un montaje experimental que permitió la adquisición del campo acústico formado por la onda incidente de ultrasonido de alta intensidad. El montaje consistió en un sistema de adquisición y un sistema posicionador para las muestras biológicas (costillas de cerdo) y para los sensores utilizados (transductor e hidrófono), el transductor se colocó en un sistema manual de movimiento y el hidrófono en un sistema automatizado controlado por computadora.

Con las señales capturadas se realizó la reconstrucción del campo de presión acústica en computadora.

El procedimiento de adquisición de datos consistió en los siguientes pasos: degasificación de las costillas, llenar el tanque de agua degasificada y desionizada, calentar el agua del tanque a 37°C , preparar los elementos del sistema de adquisición, colocar las costillas dentro del tanque alineando el soporte de las mismas con el transductor, colocar el transductor frente a uno de los puntos elegidos, enviar la señal y capturar con el hidrófono el campo de presión acústica transmitido, repetir esto para los cuatro puntos elegidos en ese costillar, retirar las costillas y realizar el procedimiento en agua para comparar ambos campos.

En un principio se utilizó un transductor de 1MHz para enviar la señal, al observar los campos registrados, la intensidad de las señales era muy pequeña, por ello se utilizó un amplificador de potencia de 30 W y se realizaron las mediciones.

Al realizar los cálculos para la velocidad del sonido utilizando un modelo lineal no se obtuvieron valores cercanos a lo esperado para este tipo de hueso. Cuando se obtuvo el espectro de las señales se observó la presencia de armónicos de la frecuencia fundamental. Esto llevó a la conclusión de que para obtener la velocidad de que para poder calcular la velocidad de la onda utilizando los datos obtenidos con el montaje experimental desarrollado es necesario utilizar un modelo no-lineal.

Capítulo 4

Conclusión y discusión

Los métodos actuales para tratamiento de cáncer en hígado son: cirugía, quimioterapia, radioterapia, crioterapia y ultrasonido focalizado. Actualmente todas estos tratamientos se aplican de forma invasiva, es decir ya sea introduciendo sustancias al cuerpo o abriendo la cavidad torácica.

Los tumores producto del cáncer metastásico de hígado son difíciles de eliminar por medio de cirugía por la manera en la que se propagan y las cirugías tienden a ser muy complejas.

El ultrasonido focalizado de alta intensidad (HIFU por sus siglas en inglés) es una técnica que se basa en la ablación del tejido canceroso por medio de un haz de ultrasonido focalizado. Esta técnica muestra una resolución milimétrica por lo que es adecuada para tratar tumores pequeños y difícilmente operables.

El hígado es un órgano que se encuentra en la zona detrás de las costillas, si se envía un haz de ultrasonido a través de las costillas, el hueso interactúa desviando y atenuando el haz, es por ello que las técnicas para tratamiento con HIFU actuales para hígado consisten en retirar las costillas antes de dar tratamiento, lo cual resulta en un procedimiento invasivo y doloroso.

Para poder diseñar un dispositivo capaz de eliminar o neutralizar los efectos de atenuación y dispersión producidos por las costillas y poder dar tratamiento sin necesidad de abrir al paciente necesario determinar los parámetros acústicos característicos del hueso de las costillas.

Hasta la fecha no hay suficientes estudios reportados que permitan caracterizar las propiedades acústicas del hueso de las costillas con el fin de saber como se podría eliminar los efectos causados por las mismas y así evitar tener que abrir al paciente para el tratamiento.

En este trabajo se implementó un montaje experimental que permite la medición del campo acústico en la zona detrás de las costillas y se desarrolló la herramienta computacional que permite garantizar las condiciones de medición, se mostró una investigación preliminar que permite establecer las condiciones de validez del dispositivo de medición propuesto y que permitirá conocer algunas de las características necesarias para generar un instrumento capaz de eliminar los efectos causados por el hueso de las costillas.

El hueso es un tejido que presenta una estructura porosa a pequeña escala por lo que el módulo elástico se convierte en un valor complejo, su derivación resulta muy complicada y requiere el desarrollo de un enfoque teórico nuevo que permita trabajar con funciones para el módulo elástico. Debido a estas dificultades se modeló como un medio homogéneo. Esta aproximación resulta mas adecuada en el caso del hueso compacto, es importante considerar que las costillas están principalmente formadas por hueso compacto.

Debido a que la totalidad del proyecto se dirige al desarrollo de un dispositivo que sea capaz de dar tratamiento al hígado, las muestras biológicas elegidas fueron costillas de cerdo por su similitud con el hueso humano en esa región. Para poder ser utilizadas como muestras biológicas las costillas recibieron una preparación previa que incluyó: descubrir la zona del hueso sobre la cual incidió la onda, desgasificación de las costillas para evitar que las burbujas de aire interactúen con la onda de ultrasonido y la conservación de las muestras en formalina.

Cada una de las muestras se encontraba en perfecto estado para realizar las mediciones debido a que se adquirieron frescas y se conservaron de manera adecuada.

Existen publicaciones con datos experimentales sobre el comportamiento de diferentes tipos de hueso con respecto a un haz de ultrasonido focalizado, estos datos pertenecen principalmente a huesos largos debido a que realizar las mediciones con este tipo de hueso es más fácil, sin embargo es sabido que los huesos de diferentes partes del cuerpo se comportan de manera diferente, es por ello que este trabajo muestra una propuesta de montaje experimental y tratamiento de muestras específico para el hueso de las costillas.

Existen diferentes técnicas que permiten medir las propiedades acústicas de los materiales biológicos. Los métodos de medición actuales están basados en el principio de enviar un haz de ultrasonido utilizando un transductor dirigido al hueso y medir cuanto de este haz es transmitido así como el tiempo que tarda en atravesar el material y compararlo con el tiempo que tarda en ausencia de material, este trabajo se basó en este mismo principio de medición.

La velocidad con la que viaja el sonido en un medio esta determinada por parámetros acústicos como la impedancia y presión acústicas propias del medio de propagación. En el régimen de propagación lineal la velocidad del sonido es una característica del medio y puede ser calculada utilizando un medio como referencia, generalmente se utiliza el agua por su parecido con los fluidos corporales y por ello se eligió como material de referencia para esta investigación. La velocidad del sonido se obtuvo a partir de la diferencia en tiempo de llegada de una onda de ultrasonido que atraviesa el material.

El método por medio del cual se realizó la medición de este campo se basa en la transmisión transversal.

Para garantizar que la incidencia de la onda de ultrasonido fuera perpendicular a la superficie de las costillas, se diseñaron primero marcos de policarbonato que permitieron que las costillas se mantuvieran fijas dentro del tanque y se pudiera entonces construir un sistema de coordenadas a partir de dicho marco. Una vez establecido dicho sistema de coordenadas se calculó el ángulo formado

por la superficie de las costillas y el eje acústico, conociendo los ángulos se seleccionaron las regiones en las que el eje acústico era perpendicular a la superficie de las costillas, estos puntos fueron utilizados para realizar las mediciones.

Se utilizaron 5 ejemplares de costillas de cerdo, los cortes utilizados pertenecen a diferentes regiones del costillar. En total se realizaron 20 mediciones, las cuales se llevaron a cabo de manera que se realizaron 4 mediciones en cada uno de las 5 muestras.

De desarrolló la herramienta computacional que permite la reconstrucción matricial de cada costilla de cerdo utilizando imágenes de tomografía asistida por computadora estableciendo un sistema de referencia que permite conocer con precisión las condiciones de incidencia del haz de ultrasonido. Utilizando las herramientas computacionales desarrolladas para obtener en cada punto el ángulo entre el vector normal a la superficie de las costillas y el eje acústico lo que permitió asegurar las condiciones de medición. Se seleccionaron 4 puntos por cada costilla para realizar la adquisición de datos.

Se diseñó un montaje experimental que permitió la adquisición del campo acústico formado por la onda incidente de ultrasonido de alta intensidad. El montaje consistió en un sistema de adquisición y un sistema posicionador para las muestras biológicas (costillas de cerdo) y para los sensores utilizados (transductor e hidrófono), el transductor se colocó en un sistema manual de movimiento y el hidrófono en un sistema automatizado controlado por computadora.

El procedimiento de adquisición de datos consistió en los siguientes pasos: desgasificación de las costillas, llenar el tanque de agua desgasificada y desionizada, calentar el agua del tanque a $37^{\circ}C$, preparar los elementos del sistema de adquisición, colocar las costillas dentro del tanque alineando el soporte de las mismas con el transductor, colocar el transductor frente a uno de los puntos elegidos, enviar la señal y capturar con el hidrófono el campo de presión acústica transmitido, repetir esto para los cuatro puntos elegidos en ese costillar, retirar las costillas y realizar el procedimiento en agua para comparar ambos campos.

En un principio se utilizó únicamente el transductor de 1MHz para enviar la señal, al observar los campos registrados, la intensidad de las señales era muy pequeña, por ello se utilizó un amplificador de potencia de 30 W eléctricos y se realizaron las mediciones.

Con las señales capturadas se realizó la reconstrucción del campo de presión acústica en computadora.

La velocidad del sonido se calculó a partir del campo de presión acústica. Se realizaron dos mediciones, en la primera se sumergió la muestra en agua, después con el transductor se envió una señal de ultrasonido de manera que la dirección de propagación fue perpendicular al plano de incidencia sobre la superficie de la muestra, la señal viajó atravesando la muestra y fue capturada del otro lado por un hidrófono. La señal recibida por el hidrófono se envió a un sistema de adquisición y por computadora se realizó la reconstrucción del campo de presión acústica, después se retiró la muestra y sin variar las posiciones del transductor y el hidrófono se repite el proceso enviando la misma señal en agua. Utilizando estos campos se calculó la diferencia en tiempos de llegada de la señal que atravesó las costillas inmersas en agua y la viajó por agua

unicamente. Conociendo la velocidad del sonido en el agua a la temperatura en que se realizaron las mediciones y la diferencia en tiempos se calculó la velocidad del sonido por medio de un análisis basado en una propagación lineal, basado en la hipótesis de que utilizando el montaje experimental propuesto las señales tendrían un comportamiento lineal.

Para obtener la diferencia en tiempos entre la llegada de ambas señales se emplearon dos técnicas matemáticas: la correlación y transformada de Fourier.

Se realizó el cálculo de la velocidad de sonido y atenuación de acuerdo al modelo lineal y los resultados se encuentran lejos de los valores promedio para este tipo de hueso, si bien no se han reportado valores específicos para el hueso de las costillas, al conocer el tipo de hueso que las compone se puede saber la magnitud esperada para la velocidad del sonido. Al calcular el espectro de frecuencias se observaron armónicos, los cuales son característica de una propagación no lineal.

Al realizar los cálculos para la velocidad del sonido utilizando un modelo lineal no se obtuvieron valores cercanos a lo esperado para este tipo de hueso.

El valor promedio obtenido para la velocidad del sonido utilizando los datos obtenidos por el sistema de medición y aplicando una aproximación lineal fue de $1549.6 \frac{m}{s}$, el valor para la velocidad del sonido en agua es $1524.7 \frac{m}{s}$, esto se debe que por causa de los efectos no lineales, la señal adquirida en agua sin las costillas y la señal obtenida con las costillas llegan casi al mismo tiempo. Cuando se obtuvo el espectro de las señales se observó la presencia de armónicos de la frecuencia fundamental. Esto llevó a la conclusión de que para obtener la velocidad de que para poder calcular la velocidad de la onda utilizando los datos obtenidos con el montaje experimental desarrollado es necesario utilizar un modelo no-lineal.

Los mecanismos que contribuyen a la atenuación de la onda de ultrasonido son principalmente absorción y dispersión. Para el cálculo de la atenuación se consideró que la frecuencia elegida se encuentra en el rango donde los tiempos característicos de relajación de las moléculas en el tejido están cerca del periodo de tiempo de onda, para este caso se observa una variación casi lineal del coeficiente de atenuación con la frecuencia. El promedio de los valores obtenidos para la atenuación es $145.98 Np \cdot m^{-1}$. De acuerdo con los resultados de otros estudios, el valor esperado para este tipo de hueso debería ser cercano a los $258.3 Np \cdot m^{-1}$ [27]. Esta variación se debe a que el modelo utilizado para realizar los cálculos fue lineal y no se consideró la distribución de energía en los otros armónicos.

El hecho de que la onda se propague en forma no-lineal fue resultado de utilizar un amplificador de potencia. Debido a esto se plantean las ecuaciones necesarias para trabajar con un modelo no lineal y se mencionan algunos de los métodos computacionales que podrían ser útiles para poder obtener las propiedades acústicas del hueso de las costillas utilizando este montaje experimental.

La teoría matemática para propagación no-lineal que permitirá en un futuro el cálculo de la velocidad del sonido y la atenuación para el hueso de las costillas se presenta en el apéndice B.

En general, cuando se trata de aplicaciones terapéuticas de HIFU los modelos

lineales no son capaces de modelar adecuadamente el comportamiento de las ondas de ultrasonido[39]. En estudios previos se ha observado que el depósito de energía en el caso de propagación no-lineal puede ser mayor, lo cual podría ser útil para aplicaciones en las que se quiere eliminar el tumor por ablación, además de que está la posibilidad de generar imagen simultánea a partir de los armónicos. Por ello sería relevante continuar con la investigación sobre la propagación no-lineal.

Bibliografía

- [1] M. Anthea; J. Hopkins, C.W. McLaughlin, S. Johnson, M. Warner, D. LaHart, J. D.Wright, *Human Biology and Health*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall, 1993.
- [2] <http://www.liverfoundation.org/education/info/progression/>
- [3] B. Nordlinger, P. Rougier, *Liver Metastases From Colorectal Cancer: The Turning Point*, Hospital Ambroise Paré, University of Paris, Paris-Boulogne, France . *Journal of Clinical Oncology*, Vol 20, Issue 6 (March), 2002
- [4] R. Pazdur, L.D. Wagman, K.A. Camphausen, W. J. Hoskins, Eds. *Cancer Management: A Multidisciplinary Approach*. 11th ed. 2009
- [5] <http://www.surgery.usc.edu/divisions/hep/radiofrequencyablation.html>
- [6] A. Rosen, M.A. Stuchly, A.V. Vorst, *Transactions on microwave theory and techniques, Applications of RF/Microwaves in Medicine*. IEEE, VOL. 50, NO. 3, MARCH 2002.
- [7] M. Weaver, J. Ashton, R. Zemel, *Treatment of colorectal liver metastases by cryotherapy*, *Seminars in Surgical Oncology*, Special Issue: Hepatic Cryotherapy, March 1998.
- [8] P. Hauff, M. Reinhardt, S. Foster, *Molecular Imaging I, Handbook of Experimental Pharmacology*, Springer-Verlag 2008
- [9] T.J. Dubinsky T.J, C. Cuevas, M.K. Dighe, et al. *High-Intensity Focused Ultrasound: Current Potential and Oncologic Applications*. *AJR* 2008.
- [10] L. Poissonnier , J.Y Chapelon, O. Rouviere, L. Curiel, R. Bouvier, X. Martin, et al. *Control of prostate cancer by transrectal HIFU in 227 patients*. *Eur Urol* 2007.
- [11] Liu Lin Xiong, Joo Ha Hwang, Xiao Bo Huang, Song Sen Yao, Chong Jun He, Xiao Hua Ge, Hui Yu Ge, Xiao Feng Wang, *Early Clinical Experience Using High Intensity Focused Ultrasound*

- for Palliation of Inoperable Pancreatic Cancer*, Department of Urology, People's Hospital, Peking University. Beijing, China. Department of Medicine, Division of Gastroenterology, University of Washington. Seattle, WA, USA, JOP. J Pancreas 2009.
- [12] Y. Kim, H. Rhim, M. Joo Choi, H. Keun Lim, D. Choi, *High-Intensity Focused Ultrasound Therapy: an Overview for Radiologists*, The Korean Radiological Society, Korean J Radiology, 2008.
- [13] J.C. Rewcastle, *High intensity focused ultrasound for prostate cancer : A review of the scientific foundation, technology and clinical outcomes*, Technology in cancer research & treatment, 2006
- [14] J. Fruehauf, W. Back, A. Eiermann, M.C. Lang, M. Pessel, E. Marlinghaus, F. Melchert, S. Volz-Köster, J. Volz, *High-intensity focused ultrasound for the targeted destruction of uterine tissues: experiences from a pilot study using a mobile HIFU unit*, Archives of Gynecology and Obstetrics, 2008.
- [15] J.E. Kennedy, F.Wu, G.R. Ter Haar, F.V. Gleeson, R.R. Phillips, M.R. Middleton, D. Cranson, *High-intensity focused ultrasound for the treatment of liver tumours*, Ultrasonics, Volume 42, 2004.
- [16] T.A. Leslie, J.E. Kennedy, R.O. Illing, G.R. Ter Haar, R.R. Phillips, P.J. Friend, I.S.D. Roberts, D.W. Cranston, M.R. Middleton, *High-intensity focused ultrasound ablation of liver tumours: can radiological assessment predict the histological response?*, Churchill Hospital, Oxford OX3 7LJ, UK , British Journal of Radiology, 2008.
- [17] J.E. Kennedy, F.Wu, G.R. Ter Haar, F.V. Gleeson, R.R. Phillips, M.R. Middleton, D. Cranson, *High-intensity Focused Ultrasound For The Treatment Of Liver Tumours*, Ultrasonics, Volume 42, 2004.
- [18] P. Laugier, G. Haiat, Editors, *Bone Quantitative Ultrasound*, Universit ´ Pierre et Marie Curie, CNRS, Laboratoire d'Imagerie Parametrique, Paris France, 2011.
- [19] http://www.theodora.com/anatomy/the_ribs.html
- [20] R. Yang, N.T. Sanghvi, F.J. Rescorla, K.K. Kopecky, J.L. Grosfeld, *Liver cancer ablation with extracorporeal high-intensity focused ultrasound*, Department of Surgery, Indiana. University School of Medicine, Indianapolis. Eu. Urol, 1993.
- [21] B.M Gignoux, J.Y. Scoazec, L. Curiel, C. Beziat, J.Y. Chapelon, *High intensity focused ultrasonic destruction of hepatic parenchyma*, Service d'urgence chirurgicale visc´erale, hˆopital Edouard-Herriot, place d'Arsonval, Lyon, France 2003.

- [22] H. Zhu, K. Zhou, L. Zhang, C. Jin, Song Peng, W. Yang, K. Li, H. Su, W. Chen, J. Bai, F. Wu, Z. Wang, *High intensity focused ultrasound (HIFU) therapy for local treatment of hepatocellular carcinoma: Role of partial rib resection*, European Journal of Radiology, 2009.
- [23] S.Q. Cheng, X.D. Zhou, Z.Y. Tang, Y. Yu, H.Z. Wang, S.S. Bao, D.C. Qian, *High-intensity focused ultrasound in the treatment of experimental liver tumour*. Liver Cancer Institute, Zhong Shan Hospital, Shanghai Medical University, P.R. China 2010.
- [24] C. Shuqun, Z. Xinda, T. Zhaoyou, Y. Yao, B. Susu, Q. Dechu, *Effects of high-intensity focused ultrasound and anti-angiogenic agents on the ablation of experimental liver cancers*, Chinese Journal of Digestive Diseases, November 2000.
- [25] W. A. N'Djin, N. R. Miller, J. C. Bamber, J. Y. Chapelon, D. Melodelima, *Effects of respiratory motion on in-vivo HIFU treatments: a comparative study in the liver*, 9th International symposium on therapeutic ultrasound, United Kingdom-France, 2010.
- [26] S. Bobkova, L. Gavrilov, V. Khokhlova, A. Shaw, J. Hand, *Focusing of High-Intensity Ultrasound Through the Rib Cage Using a Therapeutic Random Phased Array*, Ultrasound in Medicine & Biology, Volume 36, Issue 6, June 2010.
- [27] S. Pichardo, V.W. Sin, K. Hynynen, *Multi-frequency characterization of the speed of sound and attenuation coefficient for longitudinal transmission of freshly excised human skulls*, Physics in Medicine and Biology, Volume 56, 2010.
- [28] J.L. Williams, *Ultrasonic wave propagation in cancellous and cortical bone: Prediction of experimental results by Biot's theory*, Journal of the Acoustical Society of America, 1992.
- [29] K. A. Wear, *A stratified model to predict dispersion in trabecular bone*, Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions, 2001.
- [30] A. Tatarinov, A. Sarvazyan, *Topography of Acoustical Properties of Long Bones: From Biomechanical Studies to Bone Health Assessment*, Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions, 2008.
- [31] G. ter Haar, D. Sinnett, I. Rivens et al, *High intensity focused ultrasound-a surgical technique for the treatment of discrete liver tumours*, Physics in Medicine and Biology, 1989.

- [32] K. P. Horn, *Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions*, Department of Electrical Engineering, University of Hawaii at Manoa, Honolulu, Hawaii, Journal of the Optical Society of America, 1987.
- [33] Leif Bjorno, *Introduction to Nonlinear Acoustics*, International Congress on Ultrasonics, 2009.
- [34] Leif Bjorno, *Forty years of nonlinear ultrasound*, Ultrasonics 40, 2002.
- [35] Johann Hoffelner, Herman Landes, Reinhard Lerch, *Numerical simulation of nonlinear effects in high power ultrasound applications*, IEEE Ultrasonics Symposium, 2001.
- [36] Mark F. Hamilton, David T. Blackstock, *Nonlinear Acoustics*, Academic Press, 1998.
- [37] D.L. Folds, C.D. Loggins, *Transmission and reflection of ultrasonic waves in layered media*, Journal of the Acoustical Society of America, 1977.
- [38] H. Azhari, *Basics of biomedical ultrasound for engineers*, IEEE, John Wiley & sons, inc., publication, Canada, 2010.
- [39] S. Ginter, M. Liebler, E. Steiger, T. Dreyer, R. E. Riedlinger, *Full-wave modeling of therapeutic ultrasound: Nonlinear ultrasound propagation in ideal fluids*, Institut für Hochfrequenztechnik und Elektronik/Akustik, Universität Karlsruhe, 2002.
- [40] F. A. Duck, *Physical Properties of Tissue: A Comprehensive Reference Book*, Academic Press, 1990.
- [41] J. A. Jensen, P. D. Fox, J. E. Wilhjelm, L. K. Taylor, *Simulation of non-linear ultrasound fields*, Center for Fast Ultrasound Imaging, IEEE International Ultrasonics Symposium, Munich, 2002.
- [42] G. Pinton, J. Aubry, M. Fink, M. Tanter, *Effects of nonlinear ultrasound propagation on high intensity brain therapy*, Institut Langevin, Laboratoire Ondes et Acoustique, Med Phys. 2011.

Apéndice A

Programas

La primera parte consistió en obtener la imagen de cada una de las cinco costillas utilizando tomografía asistida por computadora (TAC), las imágenes obtenidas por el estudio estaban en un formato llamado Digital Imaging and Communications in Medicine (DICOM por sus siglas en inglés). En una carpeta se guardaron cada uno de los cinco estudios en formato DICOM, y cada estudio contiene un directorio con la información y rutas hacia diferentes partes del estudio. Este directorio se llama DICOMDIR y a partir de este se puede tener una vista preliminar de la imagen generada.

Para comenzar a utilizar la información contenida en el DICOMDIR, generé el siguiente código en Python, el cual genera un archivo de texto con la información relevante extraída del DICOMDIR, este archivo de texto contiene el nombre del paciente, el estudio, el número de la serie de imágenes y el sistema de referencia de dichas imágenes en el TAC y la ruta a cada una de las imágenes de la serie, en este ejemplo se llama DICOMDIR1.

```
>>>#This is the programm I used to create the .txt files in Python
>>>import dicom
>>>d = dicom.read_file("DICOMDIR1")
>>>L = len(d.DirectoryRecords[:])
>>>f = open('new1Ribs.txt','w')
>>>for i in range(0,L):
>>>try:
>>>print >> f, d.DirectoryRecords[i].PatientID
>>>except:
>>>try:
>>>print >> f, d.DirectoryRecords[i].StudyID
>>>except:
>>>try:
>>>print >> f, d.DirectoryRecords[i].SeriesNumber
>>>except:
>>>try:
>>>print >> f, d.DirectoryRecords[i].ReferencedFileID
```

```
>>except:
>>continue
```

Este programa se puede ejecutar en terminal con Python o desde Matlab instalando la librería de Pydicom en el mismo directorio y generando la función para ejecutar Python desde Matlab.

Otra alternativa que genera el mismo archivo de texto desde la terminal en código bash se muestra a continuación utilizando el estudio número 2 como ejemplo :

```
>rm prueba1.txt
>awk '{ print NR, $1, $2, $6}' ribstudy2.txt | grep "(0010, 0020)" |
awk '{ print $1, "Patient ID:", $4}' >> prueba1.txt
>awk '{ print NR, $1, $2, $6}' ribstudy2.txt | grep "(0020, 0010)" |
awk '{ print $1, "Study ID:", $4}' >> prueba1.txt
>awk '{ print NR, $1, $2, $6}' ribstudy2.txt | grep "(0020, 0011)" |
awk '{ print $1, "Series Number:", $4}' >> prueba1.txt
>awk '{ print NR, $1, $2, $7, $8, $9}' ribstudy2.txt | grep "(0020, 0032)" |
awk '{ print $1, "Image Position:", $4, $5, $6}' >> prueba1.txt
>awk '{ print NR, $1, $2, $7, $8, $9}' ribstudy2.txt | grep "(0020, 0037)" |
awk '{ print $1, "Image Orientation:", $4, $5, $6}' >> prueba1.txt
>awk '{ print NR, $1, $2, $7, $8, $9, $10, $11}' ribstudy2.txt | grep "(0004,
1500)" |
awk '{ print $1, "Referenced File ID:", $4,$5, $6, $7, $8, $9}' >> prue-
ba1.txt
>sort -n prueba1.txt > newDicomDirs.txt rm prueba1.txt
>grep "Patient" newDicomDirs.txt | awk '{print $4}' | sed -e "s//g" > p
>grep "Study" newDicomDirs.txt | awk '{print $4}' | sed -e "s//g" > s1
>grep "Series" newDicomDirs.txt | awk '{print $4}' | sed -e "s//g" > sn1
>for i in `cat p`; do mkdir $i; done
>cd `cat p`
>for i in `cat ../s1`; do mkdir $i; done
>cd `cat ../s1`
>for i in `cat ../../sn1`; do touch $i.txt; done
>awk '{if ($1 >= 39 && 104>$1) print $0}' ../../newDicomDirs.txt >>
01.txt
>awk '{if ($1>=104 && 8973>$1) print $0}' ../../newDicomDirs.txt >>
05.txt
>awk '{if ($1>=8973) print $0}' ../../newDicomDirs.txt >> 06.txt
>cd ../.; rm p; rm s1; rm sn1
```

De este punto en adelante todos los códigos son para Matlab.

Una vez que se tiene el archivo con las rutas a las imágenes es necesario seleccionar las imágenes del DICOM que serán útiles para realizar la reconstrucción matricial de las costillas para ello se utilizó el siguiente código, el cual presenta las imágenes una por una:

```
%STEP 1 WAS MAKING THE .TXT USING BASH CODE, STEP 2
fid = fopen('3Markers.txt');
filename=fid;
```

```

current_path = cd;
current_path = strcat(cd,'/Ribs12345/Ribsstudies/#3');
for m = 1:3;
tline = fgetl(fid);
disp(tline)
end
for m=4:264;
tline = fgetl(fid);
route = textscan(tline,'%s' );
path = cell2mat(route{1});
change_path = path(1:26);
cd (change_path);
imagename = path(28:end);
dicom_image=dicomread(imagename);
imagesc(dicom_image);
colormap('gray');
title(tline) cd (current_path);
pause(1);
end

```

Para seleccionar aquellas imágenes en las que los marcadores se vean con claridad y por lo tanto que se utilizarán como referencia para el sistema de coordenadas es necesario verlas por separado, para esto se utilizó el siguiente código, el cual muestra la imagen seleccionada en coordenadas del TAC y podemos conocer las coordenadas de los marcadores:

```

info=dicominfo('Ribs12345/Ribsstudies/#5/P0000001/ST000001/SE000001/IN000096');

```

```

I = dicomread ('Ribs12345/Ribsstudies/#5/P0000001/ST000001/SE000001/IN000096');
info.ImagePositionPatient;
L=info.StudyID;
N=info.SeriesNumber;
Z=info.ImagePositionPatient(3);
xf=info.ImagePositionPatient(1):info.PixelSpacing(1):info.ImagePositionPatient(1)+
double(info.Rows-1)*info.PixelSpacing(1);
yf=info.ImagePositionPatient(2):info.PixelSpacing(2):info.ImagePositionPatient(2)+
double(info.Columns-1)*info.PixelSpacing(2);
H = fspecial('gaussian');
Sm=imfilter(I,H);
imagesc(xf,yf,Sm);
daspect([ 1 1 1]);
colormap bone;
title({'abajo izq':[StudyID =',num2str(L)];[SeriesNumber =',num2str(N)];
[Z Coordinate =',num2str(Z)]})

```

En este punto ya se puede obtener una vista preliminar de las costillas utilizando el código:

```

%Reconstruct the image in 3-D of a DICOM study.

```

```

function Rimask(finput,nameoutput,numberofimages,thresholdribs)
%In the case when we don't enter any arguments to the function, it will
%take the following data
if nargin==0 finput='2Ribs.txt';
nameoutput = 'FirstwoRibs';
numberofimages = 140;
thresholdribs = 1380;
ROIX = [151 381 381 151];
%these next two lines will be the interest area in the mask
ROIY=[69 69 430 430];
end
%In the case when we enter our arguments to the function
fid = fopen(finput);
filename=fid; c
urrent_path = cd;
%searching the path
current_path = strcat(cd,'/Ribs12345/Ribsstudies/#2');
%adding a / because it was needed to create the route check it for your file!
for m = 1:3;
%now display the first three lines of the file, they are not a route
tline = fgetl(fid);
disp(tline)
end
IntensityMatrix2CT= zeros (512,512,numberofimages,'uint16');
%create the matrix
ImagePosition = zeros (numberofimages,3);
A=poly2mask(ROIX,ROIY,512,512);
%create mask
for i=numberofimages:-1:1;
%fill the matrix using the routes
tline = fgetl(fid);
route = textscan(tline,'%s' );
path = cell2mat(route{1});
%change path = path(1:26);
%cd (change path);
%imagenam e = path(28:end);
dicom_image=dicomread([current_path filesep path]);
info=dicominfo([current_path filesep path]);
if i ==1 PixelSpacing=info.PixelSpacing;
ImageOrientation=info.ImageOrientationPatient;
end
ImagePosition(i,:)=info.ImagePositionPatient;
C=dicom_image>thresholdribs;
% apply threshold
D=C.*A; IntensityMatrix2CT(:, :,i)=D;
cd (current_path);

```

```

    %'refresh' to add a new image
end
InterSliceSpace=mean(diff(ImagePosition(:,3)));
x=[1:5 12].*PixelSpacing(1)+info.ImagePositionPatient(1);
y=[1:5 12].*PixelSpacing(2)+info.ImagePositionPatient(2);
z=[1:numberofimages].*InterSliceSpace;
%now take the matrix and display it as isosurface
[X,Y,Z]=meshgrid(x,y,z);
IntensityMatrix2CT=smooth3(IntensityMatrix2CT,'gaussian');
p=isosurface(X,Y,Z,IntensityMatrix2CT,0);
hold on;
patch(p,'facecolor','red','edgecolor','none');
view(3);
daspect([ 1 1 1]);
lighting gouraud;
camlight; save(nameoutput,'IntensityMatrix2CT',
    'PixelSpacing','ImagePosition','PixelSpacing','numberofimages');

```

El siguiente programa aplica un filtrado a la imagen y crea un nuevo archivo de datos que permiten realizar una teselación triangular sobre la superficie de las costillas.

```

% method to create a reconstructed and smoothed image
function ribssmooth02(fininput)
if nargin==0
    %if we don't give the argument to the function
    fininput = 'FirstwoRibs.mat'
end
load(fininput,'IntensityMatrix2CT','PixelSpacing','ImagePosition','PixelSpacing',
    'numberofimages');
%moving the axes to get same zero of the CT
param.filter_for_smoothing = 'gaussian';
param.filter_multiplier=120;
param.MaxFiltering =3;
param.threshold=80;
B=IntensityMatrix2CT;
namefile=strcat('smoothed_ribs2');
InterSliceSpace=mean(diff(ImagePosition(:,3)))
%gives the pixel spacing for z
image_resolution_new=[PixelSpacing(:), InterSliceSpace];
%calculatin resolution
surfaceintensity=0.7;
% setting system coordinates and filter iterations
%CoordInit=[0,0,0];
% CoordInit=ImagePosition(1,:);
rawname = 'smoothed_ribs2';
xsyzs=size(B);
B=B*param.filter_multiplier;

```

```

% smothing the data
for nFilter=1:param.MaxFiltering
regionofinterest=smooth3(B,param.filter_for_smoothing);
end
regionofinterest=int16(regionofinterest);
F=fopen(rawname,'wb');
fwrite(F,regionofinterest,'uint8');
fclose(F);
% choose a smoothing program for a given resolution
% if Low_Res==1
cmd =sprintf('./asc4 -dr1 %s %i %i %i -t %i -s %f %f %f -f %s 2>
s.txt',rawname,xsyszs,param.threshold,image_resolution_new,namefile);
% else
%cmd =sprintf('./asc1 -dr1 %s %i %i %i -t %i -s %f %f %f -f %s 2>
s.txt',rawname,xsyszs,threshold,image_resolution_new,namefile);
% end
unix(cmd);
[a,b]=unix('grep Triangles s.txt');
NTriangles = sscanf(b,'Total no of Triangles: %f');
F=fopen(namefile,'rb');
AllData=ones(6,NTriangles*3);
[AllData(:,count)]=fread(F,NTriangles*6*3,'float32');
fclose(F);
cmd = ['rm -f ' namefile];
unix(cmd);
AllData=AllData';
H.vertices=AllData(:,1:3);
H.vertices=[H.vertices(:,2), H.vertices(:,1),
H.vertices(:,3)]; H.faces=reshape([1:size(H.vertices,1)],3,NTriangles)';
[H.vertices, indu, inds]= unique(H.vertices,'rows');
for n=1:NTriangles H.faces(n,1)=inds(H.faces(n,1));
H.faces(n,2)=inds(H.faces(n,2));
H.faces(n,3)=inds(H.faces(n,3));
end
H.vertices(:,1)=H.vertices(:,1)+CoordInit(1);
H.vertices(:,2)=H.vertices(:,2)+CoordInit(2);
H.vertices(:,3)=H.vertices(:,3)+CoordInit(3);
Mesh.FaceCenter=(H.vertices(H.faces(:,1),:)+ ...
H.vertices(H.faces(:,2),:)+ ... H.vertices(H.faces(:,3),:))/3;
Mesh.N=-cross (H.vertices(H.faces(:,1),:)- ...
H.vertices(H.faces(:,2),:), ... H.vertices(H.faces(:,1),:)- ...
H.vertices(H.faces(:,3),:));
normsize=sqrt (Mesh.N(:,1).^2+Mesh.N(:,2).^2+Mesh.N(:,3).^2);
Mesh.N(:,1)=Mesh.N(:,1)./normsize;
Mesh.N(:,2)=Mesh.N(:,2)./normsize;
Mesh.N(:,3)=Mesh.N(:,3)./normsize;

```

```

aa = sqrt ( (H.vertices( H.faces(:,1), 1) - H.vertices( H.faces(:,2), 1)).^2
+ ... (H.vertices( H.faces(:,1), 2) - H.vertices( H.faces(:,2), 2)).^2
+ ... (H.vertices( H.faces(:,1), 3) - H.vertices( H.faces(:,2), 3)).^2);
bb = sqrt ( (H.vertices( H.faces(:,1), 1) - H.vertices( H.faces(:,3), 1)).^2 +
... (H.vertices( H.faces(:,1), 2) - H.vertices( H.faces(:,3), 2)).^2 +
... (H.vertices( H.faces(:,1), 3) - H.vertices( H.faces(:,3), 3)).^2);
cc = sqrt ( (H.vertices( H.faces(:,3), 1) - H.vertices( H.faces(:,2), 1)).^2 +
... (H.vertices( H.faces(:,3), 2) - H.vertices( H.faces(:,2), 2)).^2 +
... (H.vertices( H.faces(:,3), 3) - H.vertices( H.faces(:,2), 3)).^2);
S = (aa+bb+cc)/2;
Mesh.ds=(sqrt( S.*(S-aa).*(S-bb).*(S-cc)));
Mesh.faces= H.faces;
Mesh.vertices = H.vertices;
Mesh.OrigNormal=-[AllData(:,5),
AllData(:,4), AllData(:,6)]; Mesh.OrigNormal=Mesh.OrigNormal(indu,:);
p.faces=Mesh.faces; p.vertices=Mesh.vertices; Ribsmesh2=Mesh;
patch(p,'facecolor','r','linestyle','none','facealpha',surfaceintensity);
daspect([ 1 1 1]);
lighting gouraud;
view(3);
camlight;
save('Ribsmesh2','Ribsmesh2','param');

```

El siguiente programa utiliza la teselación triangular generada en el programa anterior y realiza la transformación entre las coordenadas en el TAC y el sistema del laboratorio para poder caracterizar las posiciones de cada uno de los puntos en las costillas con respecto a los ejes móviles del hidrófono y transductor:

```

function RotationAllRibs()
% First we give the markers positions in the polycarbonate frame
a2=[0 0 0];
a1=[2.4 -2.1 0];
b1=[17 -2.1 0];
b2=[19.8 0 0];
d2=[0 18.5 0];
d1=[2.4 20.6 0];
c2=[17 20.6 0];
c1=[19.8 18.5 0];
% Now we calculate the positions considering the CT coordinate system
posa2=[-92.04 -42.44 -118.03]; posa1=[-66.07 -64.89 -117.63];
posb1=[77.79 -65.6 -115.63]; posb2=[104.5 -45.25 -112.03];
posd2=[-92.04 141.4 -126.03]; posd1=[-66.07 163.9 -128.43];
posc2=[79.19 163.2 -125.43];
posc1=[104.5 140.7 -125.43];
CoordSupport=[a2;a1;b1;b2;d2;d1;c2;c1]*10;
CoordCT=[posa2;posa1;posb1;posb2;posd2;posd1;posc2;posc1];
finput = 'Ribsmesh2.mat';

```



```

nameoutput='Rotatedribs2';
RotationRibs(finput,nameoutput,CoordCT,CoordSupport)
function RotationRibs(finput,nameoutput,CoordSupport,CoordCT)
load(finput);
CTTN=hornInferSBT(CoordSupport',CoordCT');
RibsMesh2=RotateMesh(Ribsmesh2,CTTN);
save(nameoutput,'RibsMesh2','CTTN','CoordSupport','CoordCT');
surfaceintensity=0.7;
p.faces=RibsMesh2.faces;
p.vertices=RibsMesh2.vertices;
patch(p,'facecolor','r','linestyle','none','facealpha',surfaceintensity);
set(gca,'YDir','rev') daspect([ 1 1 1]);
lighting gouraud;
view(3);
camlight;
hold on;
plot3(0,0,0,'m*')
hold on;plot3(24,-21,0,'m*')
hold on;plot3(170,-21,0,'m*')
hold on;plot3(198,0,0,'m*')
hold on;plot3(0,185,0,'m*')
hold on;plot3(24,206,0,'m*')
hold on;plot3(170,206,0,'m*')
hold on;plot3(198,185,0,'m*')
function Mesh=RotateMesh(InputMesh,CTTN) Mesh=InputMesh;
Mesh.vertices = CTTN * [Mesh.vertices ones(size(Mesh.vertices,1),1)]';
Mesh.vertices = Mesh.vertices(1:3,:);
Mesh.FaceCenter=CTTN*[Mesh.FaceCenterones(size(Mesh.FaceCenter,1),1)]';
Mesh.FaceCenter = Mesh.FaceCenter(1:3,:);
Mesh.N=cross (Mesh.vertices(Mesh.faces(:,1),:)-
... Mesh.vertices(Mesh.faces(:,2),:), ... Mesh.vertices(Mesh.faces(:,1),:)-
...Mesh.vertices(Mesh.faces(:,3),:));
normsize=sqrt (Mesh.N(:,1).^2+Mesh.N(:,2).^2+Mesh.N(:,3).^2);
Mesh.N(:,1)=Mesh.N(:,1)/normsize;
Mesh.N(:,2)=Mesh.N(:,2)/normsize;
Mesh.N(:,3)=Mesh.N(:,3)/normsize;
xlabel('X');
ylabel('Y');

```

El siguiente código calcula el ángulo entre el vector normal a la superficie y el vector paralelo al eje acústico.

```

function angle_TR_N(finput,foutput)
if nargin==0
%if we don't give the argument to the function
finput = 'Rotatedribs2.mat';
foutput='Angles_TR_N2';
end

```

```

load(finput,'RibsMesh2');
V=[0 0 1];
m = size(RibsMesh2.N,1);
Dotv=zeros(m,1);
for i=1:m;
Dotv(i)=dot(V,RibsMesh2.N(i,:));
end
n=size(find(Dotv>0));
%Angle=zeros(n(1),1);
Angle=acosd(Dotv);
Angle(Angle>90)=90;
save(foutput,'Angle');
cdata=Angle;
close all;
p.faces=RibsMesh2.faces;
p.vertices=RibsMesh2.vertices;
set(gca,'CLim',[0 30]);
patch(p,'facecolor','flat','linestyle','-','FaceVertexCData',cdata);
daspect([ 1 1 1]);
view(0,90);
set(gca,'YDir','rev');
colorbar hold on;
plot3(0,0,0,'m*') hold on;
plot3(24,-21,0,'m*') hold on;
plot3(170,-21,0,'m*') hold on;
plot3(198,0,0,'m*') hold on;
plot3(0,185,0,'m*') hold on;
plot3(24,206,0,'m*') hold on;
plot3(170,206,0,'m*') hold on;
plot3(198,185,0,'m*') surfaceintensity=0.5;
v1 = [-13 -34 0;-13 -8 0;211 -8 0;211 -34 0];
f1=[1234]; patch('Vertices',v1,'Faces',f1,'facecolor','b','linestyle','none','facealpha',surfaceintensity);
v2 = [-13 -34 0;12 -34 0; -13 219 0; 12 219 0];
f2 = [1 2 4 3];
patch('Vertices',v2,'Faces',f2,'facecolor','b','linestyle','none','facealpha',surfaceintensity);
v3 = [-13 184 0;-13 219 0; 211 219 0; 211 184 0];
f3 = [1 2 3 4];
patch('Vertices',v3,'Faces',f3,'facecolor','b','linestyle','none','facealpha',surfaceintensity);

v4 = [185 -8 0;211 -8 0;211 219 0;185 219 0];
f4 = [1 2 3 4];
patch('Vertices',v4,'Faces',f4,'facecolor','b','linestyle','none','facealpha',surfaceintensity);

```

Una vez que se ha elegido una zona en la cual el ángulo sea cercano a cero, el siguiente programa nos da la desviación estándar y el el promedio de los ángulos en un radio de 2mm alrededor del punto elegido.

```

function get_anglesXY2(xcoord,ycoord,diameter)
foutput='rotateframexy2';
AngvalN=zeros(8,8);
promx=zeros(1,1);
promy=zeros(1,1);
Stdviat=zeros(8,8);
for k=1:8;
b=(ycoord-4*(diameter/4)+k*(diameter/4));
for i=1:8;
a=(xcoord-4*(diameter/4)+i*(diameter/4));
Intersected_triangles2(a,b,diameter);
load('Angles_pro_dev2');
promx=cat(1,promx,averagex);
promy=cat(1,promy,averagey);
AngvalN(k,i)=newAngle;
Stdviat(k,i)=std(newAngle);
end
save(foutput,'promx','promy','Stdviat','AngvalN');
end
promxt=sum(promx)/(size(promx,1)-1);
promyt=sum(promy)/(size(promy,1)-1);
promxt
promyt
h=msgbox(['The angle in x direction is ',num2str(promxt),
        '/The angle in the y direction is ',num2str(promyt)])
end
for i=1:8;
y(i)=(ycoord-4*(diameter/4)+1*(diameter/4));
end
imagesc(x,y,AngvalN);
colorbar;
title('Angle between N and Transducer');
figure;
imagesc(x,y,Stdviat);
colorbar;
title('Standard deviation');

```

Finalmente el programa que se utilizó para calcular la velocidad del sonido con los datos obtenidos es el siguiente

```

%TO RUN THIS PROGRAM YOU NEED THE FILE AND THE POINT
WHERE YOU WANT TO CUT THE TIME-WAVE VECTOR
load('/home/elisa/Desktop/Tesis/Elisa_Ribs_Data/XY_Ribs2_115.8_145.1_0.57_Temp37.2_Water_201

```

```

x=[1:73];
y=[1:73];
[X,Y]=meshgrid(x,y);
a=37;

```

```

b=35;
diameter=20;
Circ=(X-a).^2+(Y-b).^2;
Val=Circ<diameter;
Areaofinterest=RMSMap.*Val;
[r,n]=find(Areaofinterest);
PointsW=zeros(size(r,1),2);
for i=1:size(r,1);
PointsW(i,1)=(n(i));
PointsW(i,2)=(r(i));
end
for
i=1:size(PointsW,1);
ReadingsW(i)=Readings(PointsW(i,1),PointsW(i,2));
end
load('/home/elisa/Desktop/Tesis/Elisa Ribs Data/XY_Ribs2_115.8_145.1_0.57_Temp37.4_20110216T1
PointsR=zeros(size(r,1),2);
for i=1:size(r,1);
PointsR(i,1)=(n(i));
PointsR(i,2)=(r(i));
end
for i=1:size(PointsR,1);
ReadingsR(i)=Readings(PointsR(i,1),PointsR(i,2));
end
deg_delay_value=zeros(1,size(ReadingsR,2));
for k=1:size(ReadingsR,2);
timecutvalue=find((ReadingsR{1,k}.time)>8.17e-05,1);
ReadingsW{1,k}.time=ReadingsW{1,k}.time(timecutvalue:timecutvalue+1512);
ReadingsW{1,k}.wave=ReadingsW{1,k}.wave(timecutvalue:timecutvalue+1512);
%***** For Signal 1*****
w1_time=ReadingsW{1,k}.time;
w1_wave=ReadingsW{1,k}.wave;
w1_min_t=min(w1_time);
w1_max_t=max(w1_time);
time_step=mean(diff(w1_time));
ReadingsR{1,k}.time=ReadingsR{1,k}.time(timecutvalue:timecutvalue+1512);
ReadingsR{1,k}.wave=ReadingsR{1,k}.wave(timecutvalue:timecutvalue+1512);

%***** For Signal 2*****
w2_time=ReadingsR{1,k}.time;
% Extract time and wave arrays and rename
w2_wave=ReadingsR{1,k}.wave; w2_min_t=min(w2_time);
for w2_time vector w2_max_t=max(w2_time);
%***** Get Min & Max time of both signals*****

min_max_t=[w1_min_t w2_min_t w1_max_t w2_max_t];

```

```

min_time=min(min_max_t); max_time=max(min_max_t);
%*****
xi=(min_time:time_step:max_time)';
%new time vector
%*****
%*****Interpolate w1*****
x = w1_time';
y = w1_wave';
wave_1=interp1(x,y,xi);
wave_1=wave_1';
%*****Interpolate w2*****
x = w2_time';
y = w2_wave';
wave_2=interp1(x,y,xi);
wave_2 = wave_2'; xi=xi';
end
%*****Change NaNs for zeros *****
for m=1:length(wave_1) if isnan(wave_1(m))==1 wave_1(m)=0;
end
end
for m=1:length(wave_2)
if isnan(wave_2(m))==1 wave_2(m)=0;
end
end %*****
thickness=0.012;
freq_signal=1000000;
ref= wave_1;
%transmitted signal sig= wave_2;
%received signal %n=length(sig);
binFreq= freq_signal;
%(mod((0:n-1)+floor(n/2)), n)-floor(n/2))/n;
sig_FD=fft(sig);
ref_FD=fft(ref);
u=sig_FD .* conj(ref_FD);
if mod(n, 2) == 0 u(length(u)/2+1)=0;
end Xcor=abs(iff(u));
integerDelay=find(Xcor==max(Xcor));
integerDelay=integerDelay(1)-1;
rotN=exp(2i*pi*integerDelay .* binFreq);
uDelayPhase=-2*pi*binFreq;
%u=u .* rotN; weight=abs(u);
uDelayPhase=uDelayPhase.* weight;
ang=angle(u).* weight;
fractionalDelay=transpose(uDelayPhase)\transpose(ang);
result=(integerDelay+fractionalDelay)*time_step;
c=(thickness)/(result*10)

```

Apéndice B

Acústica no lineal

En este apéndice se presentan las bases de la acústica no-lineal, las ecuaciones matemáticas que son necesarias para describir la propagación de la onda a segundo orden, finalmente indican los modelos matemáticos que serían necesarios para en un futuro, modelar dicha propagación.

Las ecuaciones fundamentales para la propagación no lineal del ultrasonido se derivan de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos, este grupo de ecuaciones se conoce como las ecuaciones de Navier-Stokes. Las ecuaciones son, la ecuación de continuidad:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -(\rho\nabla \cdot u) \quad (\text{B.0.1})$$

Donde $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$ es la derivada total dependiente del tiempo.

La ecuación de movimiento, en este caso una para cada uno de los 3 grados de libertad traslacional:

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \nabla P = \mu \nabla^2 u + (\mu_B + \frac{1}{3}\mu) \nabla(\nabla \cdot u) \quad (\text{B.0.2})$$

Y la ecuación de conservación de energía:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = k \nabla^2 T + \mu_B (\nabla \cdot u)^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \quad (\text{B.0.3})$$

Donde p y ρ son la presión y la densidad respectivamente. x_i y t son las coordenadas espaciales ($i=1, j=2$ y $k=3$) y el tiempo respectivamente. u_i es la velocidad de partícula en la i -ésima dirección, μ y μ_B son los módulos de viscosidad de corte y de *bulk*. T es la temperatura absoluta.

Además de estas ecuaciones necesitamos la ecuación de estado constitutiva, estas 6 ecuaciones describen todo tipo de movimiento en fluidos.

B.1. El parámetro B/A

Sea $P = P(\rho, s)$ la ecuación de estado para la presión. Al realizar la expansión en serie de Taylor a lo largo de una iséntropa $s = s_0$ obtenemos:

$$p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s,0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{s,0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots \quad (\text{B.1.1})$$

Donde p y ρ son la presión y la densidad respectivamente, P_0 y ρ_0 son los valores sin perturbar, s es la entropía específica. Las derivadas parciales $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_s$, etc. Están evaluadas en el estado inalterado (ρ_0, s_0) , para indicar dicho estado se colocó un subíndice 0. La ecuación anterior se puede entonces escribir como:

$$p = A \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right) + \frac{B}{2!} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 + \frac{C}{3!} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right)^3 + \dots \quad (\text{B.1.2})$$

donde $p = P - P_0$ es la presión acústica, $\rho' = \rho - \rho_0$ es el exceso de densidad y los coeficientes están definidos como:

$$A = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s,0} \equiv \rho_0 c_0^2 \quad (\text{B.1.3})$$

$$B = \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{s,0} \quad (\text{B.1.4})$$

$$C = \rho_0^3 \left(\frac{\partial^3 P}{\partial \rho^3} \right)_{s,0} \quad (\text{B.1.5})$$

En la ecuación B.1.3 se define la velocidad del sonido para la iséntropa. Considerando las ecuaciones B.1.3 y B.1.4 podemos obtener una expresión para la razón B/A:

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{s,0} \quad (\text{B.1.6})$$

La obtención de dicha razón requiere variar la densidad adiabáticamente para medir el cambio en la presión, esto resulta difícil en líquidos debido a su baja compresibilidad. Existen otras definiciones para B/A más deseables, las cuales se expresan en términos de las variaciones en la velocidad del sonido c , definida como $c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$. Una alternativa es sustituir $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_s = \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right)_s = 2c^3 \left(\frac{\partial c}{\partial P} \right)_s$ en la ecuación B.1.6 y entonces se obtiene:

$$\frac{B}{A} = 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial P} \right)_{s,0} \quad (\text{B.1.7})$$

La presión debe variarse lo suficientemente suave y rápidamente de manera la condición de entropía constante se mantenga, en caso de ondas sonoras esto es posible.

Otra alternativa es expandir la derivada en la ecuación B.1.7 $\left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s \left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_P$ donde T es la temperatura, si ahora consideramos $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial s}\right)_P = \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T}\right)_P / \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P$, donde $1/\rho_0$ es el volumen específico e introduciendo las definiciones de la cantidades termodinámicas obtenemos

$$\frac{B}{A} = 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_{T,0} + \frac{2\alpha_T c_0 T_0}{c_p} \left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_{P,0} \equiv \left(\frac{B}{A}\right)_1 + \left(\frac{B}{A}\right)_2 \quad (\text{B.1.8})$$

Donde $\alpha_T = \rho_0 \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T}\right)_{P,0}$ es el coeficiente de expansión térmica y c_p es el calor específico a presión constante.

También es posible obtener un valor para el cociente $\frac{C}{A}$:

$$\frac{C}{A} = \frac{3}{2} \left(\frac{B}{A}\right)^2 + 2\rho_0^2 c_0^3 \left(\frac{\partial^2 c}{\partial P^2}\right)_{s,0} \quad (\text{B.1.9})$$

Los valores para $\frac{C}{A}$ no se utilizan comúnmente en la acústica no lineal y muy pocos han sido reportados.

Puede ser útil comparar los resultados anteriores con la expansión de la ecuación de estado a lo largo de una iséntropa en el caso de un gas ideal, en este caso cada uno de los coeficientes se conoce explícitamente:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^\gamma = 1 + \gamma \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) + \frac{\gamma}{2!}(\gamma-1) \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 = \frac{\gamma}{3!}(\gamma-1)(\gamma-2) \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^3 + \dots \quad (\text{B.1.10})$$

donde γ es la razón entre los calores específicos. Una comparación término a término entre las ecuaciones B.1.2 y B.1.10 lleva a la conclusión de:

$$\frac{B}{A} = \gamma - 1 \quad (\text{B.1.11})$$

Cuando se utilizan las ecuaciones que describen la propagación de la onda en un medio sin pérdidas se utilizan para describir la propagación de una onda de amplitud finita (términos cuadráticos) y los terminos no lineales de orden superior se descartan, podemos utilizar una regla muy simple para pasar del caso del gas ideal a los resultados necesarios para un fluido arbitrario. En los lugares en donde aparezca γ se debe reemplazar con $1 + B/A$. En el caso de la ecuación B.1.10 antes de aplicar la regla anterior se debe eliminar la presión P_0 .

B/A es conocido como el parámetro de no linealidad a segundo orden, el cual describe la no linealidad a segundo orden en un fluido dentro del cual una onda de amplitud finita se propaga. Existe una relación entre el parámetro de

no linealidad y la estructura molecular del fluido, involucrando los potenciales intermoleculares e interatómicos.

La magnitud de B/A para el caso de la mayoría de los materiales biológicos está entre 5 y 11, e indica la habilidad del medio para generar armónicos mayores en una onda senoidal de amplitud finita al alejarse de la fuente.

Esta habilidad para generar armónicos y la expresión termodinámica B.1.8, son la base para dos métodos fundamentales que determinan la no linealidad de materiales biológicos.

La importancia del parámetro B/A radica en su efecto en la velocidad del sonido. Si utilizamos la expresión termodinámica $c^2 = (\partial P / \partial \rho)_s$, al sustituir en la expansión en serie de Taylor para la presión se obtiene:

$$\frac{c^2}{c_0^2} = 1 + \frac{B}{A} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right) + \frac{c}{2A} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 + \dots \quad (\text{B.1.12})$$

Al tomar la raíz cuadrada de esta ecuación tenemos:

$$\frac{c}{c_0} = 1 + \frac{B}{2A} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right) + \frac{1}{4} \left[\frac{c}{A} - \frac{1}{2} \left(\frac{B}{A} \right)^2 \right] \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 + \dots \quad (\text{B.1.13})$$

El parámetro B/A determina entonces la importancia relativa del término de segundo orden para una velocidad del sonido c_0 .

En el caso de una onda plana tenemos la relación lineal $\rho' / \rho_0 = u / c_0$, donde u es la velocidad de partícula, esta relación se puede sustituir en la ecuación 4.3.16 para obtener la siguiente expresión, en la que se descartan los términos de orden superior:

$$c = c_0 + (B/2A) u \quad (\text{B.1.14})$$

Para la velocidad de propagación de la onda tenemos:

$$\frac{dx}{dt} \Big|_u = c_0 + \beta u, \beta = 1 + B/2A \quad (\text{B.1.15})$$

donde β se conoce como el coeficiente de no linealidad. La distancia a la que se forma la onda de choque está dada por $\bar{x} = 1/\beta \varepsilon k$, ahora $\varepsilon = u_0/c_0$, u_0 es la velocidad pico en la fuente, k es el número de onda correspondiente y β es la medida de no linealidad del medio.

Para estimar el valor del parámetro B/A podemos usar el método termodinámico. Este consiste en utilizar la ecuación B.1.8 y determinar los factores de ambos términos. En este caso las derivadas de la velocidad del sonido c con respecto a la presión y la temperatura T , para temperatura y presión constante respectivamente son parámetros clave.

El método de amplitud finita está basado en la medición de la amplitud de presión en los segundos armónicos $p_2(x)$ como función de la distancia a la fuente x . Cuando estamos en la fuente $x = 0$, la razón entre $\frac{p_2(x)}{x p_0}$ donde p_0 es la amplitud de la presión de ultrasonido en la fuente se puede expresar como:

$$\left[\frac{p_2(x)}{xp_0^2} \right]_{xp_0^2 \rightarrow 0} = \frac{(2 + B/A)\pi f}{2\rho_0 c_0^3} \exp [-(\alpha_1 + \alpha_2/2)x] \quad (\text{B.1.16})$$

α_1 y α_2 son los coeficientes de atenuación para la frecuencia fundamental y su primer armónico respectivamente. El uso de la expresión B/A en la ecuación requiere que la atenuación en las amplitudes de la frecuencia fundamental y su segundo armónico sean independientes y que la tasa de cambio con respecto a la distancia de propagación en la amplitud del segundo armónico corresponda con la suma de los cambios causados por la generación del segundo armónico y su atenuación.

Para determinar experimentalmente el valor de B/A utilizando el método de amplitud finita se requiere colocar dos transductores colocándolos coaxialmente y a pocos centímetros uno del otro, entre ellos debe encontrarse el material que se quiere analizar. Debido a que emisor y receptor se colocarán muy cerca se deben considerar los efectos de difracción y anulación de fase a través de la superficie del receptor por lo que se deberán realizar correcciones posteriores. Los valores medidos y publicados para B/A en materiales biológicos por varios autores se presentan en la siguiente tabla. Donde A.F se refiere a que se utilizó el método de amplitud finita y Term. al método termodinámico.

Material	$T, ^\circ C$	B/A
Agua destilada	20	5.0
Metanol	20	9.6
Sodio	110	2.7
Material biológico		Método
Albúmina de suero bovino ($25^\circ C$)		Term.
Hígado de vaca ($30^\circ C$)		F.A.
Hígado de cerdo ($25^\circ C$)		F.A.
Grasa de cerdo		Therm.
Grasa de cerdo		F.A.
Grasa humana en el pecho ($37^\circ C$)		Therm
Músculo de cerdo ($30^\circ C$)		F.A.

Cuadro B.1.1: Valores del parámetro B/A para algunos materiales biológicos

B.2. Deformación de una onda ultrasonora de amplitud finita

Cuando una onda senoidal de amplitud finita se propaga alejándose de la fuente dentro de un medio fluido, la onda se encontrará sometida a dos efectos

que modificarán su curso. estos efectos son disipación; la cual surge de la viscosidad, transferencia de calor y los procesos de relajación del medio, y los efectos no lineales. que llevan a la formación de armónicos mayores a la frecuencia fundamental de la onda. Estos efectos evolucionan de la forma que se muestra en la figura B.2.1, en donde se muestra la deformación que sufre la onda senoidal de manera espacial y temporal durante su propagación.

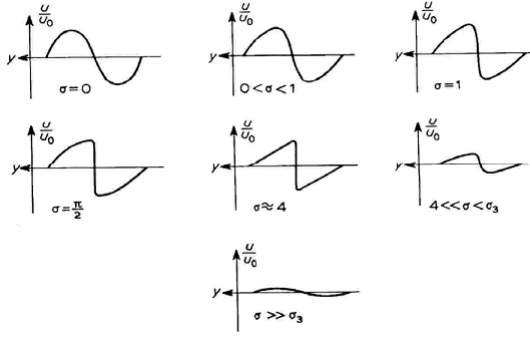


Figura B.2.1: Deformación espacial y temporal de una onda senoidal durante la propagación no lineal.

La distancia a la fuente está expresada mediante el parámetro adimensional σ , la fuente está situada a $\sigma = 0$, la primera tangente vertical a la onda se forma en el cruce por cero en $\sigma = 1$. En la figura U es la velocidad local de partícula, mientras que U_0 es la amplitud de la velocidad de partícula en la fuente. σ es la razón entre la distancia a la fuente x y la llamada distancia de discontinuidad l , $\sigma = \frac{x}{l}$, de manera que cuando $x = l$ se da la primera tangente vertical al cruce por cero, es en esta posición cuando ocurre la formación de la onda de choque. La propagación de la onda de choque corresponde a $\sigma > 1$.

$$l = \left\{ \left(\frac{B}{2A} + 1 \right) k \frac{u_0}{c_0} \right\}^{-1} \quad (\text{B.2.1})$$

$$c = c_0 + \left(\frac{B}{2A} \right) u \quad (\text{B.2.2})$$

Las ecuaciones anteriores muestran la relación entre l y $\frac{B}{A}$. Entre mayor sea la no linealidad del medio, el valor de l será más pequeño y por lo tanto la distancia entre la fuente la formación de la primera tangente al cruce por cero. La expresión para l también muestra que que inversamente proporcional al número de onda k y por lo tanto a la frecuencia fundamental de la onda así como al número acústico de Mach $\varepsilon = u_0/c_0$ definido en la sección anterior, el cual expresa la amplitud original de la onda en la fuente.

La deformación de la onda toma lugar en diferentes regiones del espacio en donde los efectos discipativos y no lineales ocurren. Hasta $\sigma = 1$ los efectos

discipativos son pequeños y los efectos no lineales dominan. La acumulación de efectos no lineales en esta región conduce a la deformación de la onda de manera que la pendiente es mayor en el frente de onda, lo cual eventualmente resulta en la formación de una onda de choque que está representada en una onda de diente de sierra. Después de $\sigma = 1$, los efectos discipativos no lineales y discipativos se cancelan unos a otros y a una distancia $\sigma \approx 4$ la forma de la onda se estabiliza, y se ve claramente la forma de una onda de diente de sierra. Debido a la discipación de la energía de la onda, el perfil de diente de sierra gradualmente pierde su pendiente y el grosor de la onda de choque aumenta. Finalmente el perfil de la onda regresa a su forma senoidal original, pero con una amplitud muy reducida. Esto ocurre a una distancia σ muy lejana a la fuente, donde la onda se propaga con amplitud infinitesimal y la atenuación está gobernada por las reglas de atenuación de onda pequeña como en el caso de ondas de sonido.

El hecho de que ocurra un incremento en la velocidad local del sonido c con respecto a la velocidad de fase c_0 depende del producto de la velocidad local de partícula u y el parámetro de no linealidad $\frac{B}{A}$, la deformación de la onsa senoidal original durante su propagación está afectada por dos efectos, los de convección del fluido y la no linealidad. Para $\frac{B}{A} > 2$, lo cual es el caso en la mayoría de los líquidos y materiales biológicos, la contribución a la deformación producida por la no linealidad del material, representada por $\frac{B}{A}$ en la ecuación de estado, es mayor que los efectos convectivos.

El que la forma de la onda senoidal presente todas las fases mostradas en la figura [FIGURA] depende del material, la no linealidad del medio ($\frac{B}{A}$), la presión inicial de la onda (p_0) de ultrasonido, su frecuencia fundamental (f_0) y la fuerza de las cualidades discipativas del fluido b .

$$b = (4/3) \eta + \eta' + k(1/c_v + 1/c_p) \quad (\text{B.2.3})$$

$$\Gamma = \left(\frac{B}{A} + 2 \right) p_0 / 2\pi f_0 b = \left(\frac{B}{A} + 2 \right) Re_a \quad (\text{B.2.4})$$

El número de Gol'dberg, representado por Γ representa los dos efectos de distorsión que sufre la onda, los efectos no lineales representados por $\frac{B}{A}$ y los efectos discipativos representados por b . En general los efectos discipativos y convectivos en mecánica de fluidos se detotan mediante del número de Reynolds acústico Re_a .

La distorsión de la onda mostrada, se representa en el dominio de la frecuencia mediante la formación de armónicos mayores a la frecuencia fundamental f_0 .

Mientras que la amplitud de la frecuencia fundamental se reduce continuamente al alejarse de la fuente, debido a la discipación y la transferencia de energía hacia los armónicos, la amplitud de los armónicos incrementa hasta llegar a $\sigma = 1$ y a partir de ese punto comienzan a decrecer debido a la discipación.

El coeficiente de absorción α depende del cuadrado de la frecuencia f y está definido como:

$$\alpha = 2\pi^2 f^2 b (\rho_0 c_0^3)^{-1} \quad (\text{B.2.5})$$

La atenuación de los armónicos está dada por 4α y 9α respectivamente para el caso del segundo y tercer armónico. Esto produce una reducción por disipación mayor en la amplitud de los armónicos que en el caso de la frecuencia fundamental. Por lo tanto la transferencia de energía no lineal de la frecuencia fundamental a sus armónicos incrementa el efecto global de atenuación en la frecuencia fundamental.

B.2.1. Las ecuaciones de onda a segundo orden y modelos matemáticos

Para poder describir la propagación no lineal del sonido en un medio disipativo es necesario realizar algunas aproximaciones para poder encontrar una solución al sistema de ecuaciones anterior. Queremos encontrar una serie de ecuaciones que describan el campo del movimiento tridimensional de una onda de sonido de amplitud finita a segundo orden considerando como parámetro de pequeñez el número de Mach $\varepsilon = u_0/c_0$ donde u_0 es la magnitud de la velocidad de la fuente en el medio y c_0 es la velocidad del sonido en el mismo. La posibilidad de utilizar ε como parámetro de orden pequeño está dana por su valor, el cual debe ser de $\varepsilon = 10^{-2}$ para 264 dB (1 micro Pascal) en agua.

Existe un segundo parámetro que se tomará en cuenta en la mayoría de los casos $\eta = \mu\omega/\rho_0 c_0^2$, donde ω es una frecuencia angular específica. Físicamente η es una medida de la importancia de los esfuerzos viscosos con respecto a la presión sobre una onda de sonido plana.

En condiciones estandar $\eta \sim 10^{-6}$ para 1MHz en agua. El parámetro que corresponde a la conducción de calor es $k\omega/\rho_0 c_0^2 c_p = \eta P_r$, donde P_r es el número de Prandtl definido como $P_r = \mu c_p/k$ es de orden uno en términos de ε y η . Más adelante se mostrará como al expandir las ecuaciones [1-4] limitando a primer orden en η se deriva una ecuación de onda.

En un fluido viscoso en donde ocurre transferencia de calor consideraremos que las variables $p = P - P_0$, $\rho' = \rho - \rho_0$, $T' = T - T_0$, $s' = s - s_0$, y u describen pequeñas perturbaciones relativas a un estado uniforme en reposo. Existen tres modos independientes para la perturbación de una onda en un medio lejos de las fronteras llamados los modos: acústico, de vorticidad y térmico (de la entropía). En general cada una de las variables del campo contiene contribuciones de cada uno de los tres modos, por ejemplo $u = u_{ac} + u_{vor} + u_{ent}$. En la presencia de fronteras los modos se acoplan. Por ejemplo en una frontera sólida $u_{ac} + u_{vor} + u_{ent} = 0$, si existe una perturbación incidente en alguno de los modos, esta será dispersada por la frontera produciendo campos reflejados en cada uno de los tres modos.

El hecho de que se consideren lineales a estos modos se debe a que en el límite termoviscoso $\eta \ll 1$ (Se asume que P_r es de primer orden), los modos no acústicos están gobernados por ecuaciones de difusión, en una escala del orden de $\eta^{1/2}$ de la longitud de onda. Específicamente se puede ver que cerca de la

frontera en la cual las ondas acústicas inciden, las magnitudes de cada uno de los modos se relacionan de la siguiente manera:

$$|u_{vor}/u_{ac}| \simeq e^{-x/l_{vor}}, |u_{ent}/u_{ac}| \simeq [(\gamma - 1)/P_r^{1/2}] \eta^{1/2} e^{-x/l_{ent}} \quad (\text{B.2.6})$$

x denota la distancia a la frontera y el ancho de la capa de frontera está dado por:

$$kl_{vor} = (2\eta)^{1/2}, kl_{ent} = (2\eta/P_r)^{1/2} \quad (\text{B.2.7})$$

$k = \omega/c_0$ es el número de onda acústico. Para η pequeña, el ancho de la capa de frontera es una fracción muy pequeña de la longitud de onda acústica. Fuera de la capa de frontera los modos de vorticidad y térmico son despreciables debido a los factores de decaimiento presentes en la ecuación B.2.6.

Consideremos a ε y a η de pequeñez comparable, despreciando a los términos $O(\eta^2\varepsilon)$ y $O(\eta\varepsilon^2)$ al igual que los términos $O(\varepsilon^3)$ en las ecuaciones B.0.1-B.1.1. El modelo resultante está en términos de $\varepsilon, \eta\varepsilon$ y ε^2 , este describe los efectos combinados de no linealidad y disipación para ondas tridimensionales no lineales. En lo siguiente se utilizará $\tilde{\varepsilon}$ para denotar la pequeñez de ε y η . El objetivo es derivar ecuaciones validas a orden $\tilde{\varepsilon}^2$ lejos de la capa termoviscosa de frontera.

En la ecuación B.0.1 se sustituye $\rho = \rho_0 + \rho'$, los términos de orden $O(\tilde{\varepsilon})$ se colocan del lado izquierdo y los de orden $O(\tilde{\varepsilon}^2)$ en el lado derecho

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot u = -\rho' \nabla \cdot u - u \cdot \nabla \rho' \quad (\text{B.2.8})$$

Considerando las identidades vectoriales $\nabla(\nabla \cdot u) = \nabla^2 u + \nabla \times \nabla \times u$ y $(u \cdot \nabla)u = \frac{1}{2} \nabla^2 u - u \times \nabla \times u$, donde $\mathbf{u}^2 = u \cdot u$ en la ecuación B.0.2. Sea $P = P_0 + p$, descartando los términos $O(\tilde{\varepsilon}^3)$ y agrupando los términos al igual que en la ecuación B.2.8 se obtiene:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = (\mu_B + \frac{4}{3}\mu) \nabla^2 u - \frac{1}{2} \rho_0 \nabla u^2 - \rho' \frac{\partial u}{\partial t} + (\mu_B + \frac{1}{3}\mu) \nabla \times \nabla \times u + \rho_0 u \times \nabla \times u \quad (\text{B.2.9})$$

En el caso del cuarto y quinto término del lado derecho de la ecuación, si se utiliza un modelo lineal para aproximar la vorticidad se obtienen que $\nabla \times u \simeq \nabla \times u_{vor}$. En la primera de las ecuaciones B.2.6 se muestra que estos dos términos caen exponencialmente lejos de la frontera y eventualmente se hacen muy pequeños en comparación con el primero y segundo términos del lado derecho, los cuales se encuentran dominados por el modo acústico. Para determinar la zona donde esto ocurre se considera que l_{vor} y k^{-1} caracterizan la longitud de la escala del modo de vorticidad y acústico respectivamente, con $kl_{vor} \ll 1$, y se define $E = e^{-x/l_{vor}}$, entonces la magnitud del cuarto término con relación al primero se puede escribir como $|\nabla \times \nabla \times u_{vor}| / |\nabla^2 u_{ac}| \sim \frac{E}{\eta^{1/2}}$. Tanto el cuarto como para el quinto término pueden ser descartados para $E/\eta \ll$

1, por ejemplo si $x/l_{vor} \gtrsim 20$ con $\eta \sim 10^{-6}$ se puede asumir que $E/\eta \ll 1$, por lo tanto la ecuación B.2.9 se puede escribir como

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = (\mu_B + \frac{4}{3}\mu) \nabla^2 u - \frac{1}{2} \rho_0 \nabla u^2 - \rho' \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{B.2.10})$$

La presencia de los coeficientes k, μ_B y μ al lado derecho de la ecuación B.0.3 indican que las perturbaciones en la entropía s' generadas por el campo acústico son de orden $O(\tilde{\varepsilon}^2)$, esto es válido únicamente lejos de las fronteras sólidas, en estas fronteras la teoría lineal predice $|T_{ent}| \simeq |T_{ac}|$.

De manera análoga a como se obtuvo la ecuación B.2.10 se puede mostrar que para $E/\eta \ll 1$, el lado derecho de la ecuación B.0.3 está dominado por el modo acústico, por lo tanto la ecuación para la entropía queda como

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s'}{\partial t} = k \nabla^2 T'_{ac} \quad (\text{B.2.11})$$

Finalmente expandiendo la ecuación de estado en serie de Taylor alrededor del estado de equilibrio (ρ_0, s_0) y agrupando los términos de orden $O(\tilde{\varepsilon}^2)$ se obtiene

$$p = c_0^2 \rho' + \frac{c_0^2 B}{2A} \rho'^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho,0} s' \quad (\text{B.2.12})$$

Estas últimas tres ecuaciones permiten realizar las correcciones a segundo orden al modelo lineal. Son válidas únicamente para $E/\eta \ll 1$, lo cual excluye a las capas termoviscosas que se forman cerca de un sólido.

Para el siguiente desarrollo de las ecuaciones será necesario aplicar el siguiente corolario, las relaciones de orden $O(\tilde{\varepsilon}^2)$ en las ecuaciones se sustituirán por relaciones de orden $O(\tilde{\varepsilon})$, esto debido a que los errores resultantes son de orden $O(\tilde{\varepsilon}^3)$.

Por ejemplo el primer término de la ecuación B.2.8 se puede reescribir como

$$-\rho' \nabla \cdot u = - \left(\frac{p}{c_0^2}\right) \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t}\right) = \frac{p}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{B.2.13})$$

considerando que a primer orden $p = \rho_0 c_0 u$, los signos de igualdad significan que ambos lados son iguales con respecto al orden $O(\tilde{\varepsilon}^2)$.

Para la totalidad de las ecuaciones tenemos

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot u = \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial p^2}{\partial t} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (\text{B.2.14})$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left(\mu_B + \frac{4}{3}\mu\right) \nabla \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \mathcal{L} \quad (\text{B.2.15})$$

donde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho_0 u^2 - \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \quad (\text{B.2.16})$$

se conoce como la densidad Lagrangiana a segundo orden. Para ondas planas $\xi = 0$ debido a que en este caso la ecuación de momento es lineal y por lo tanto no contribuye a $O(\varepsilon^2)$.

Combinando las ecuaciones B.2.11 y B.2.12 de manera que se considera $\nabla^2 T' = c_0^{-2} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2}$ (la ecuación lineal de onda). Para eliminar la temperatura escribimos $T = T(\rho, s)$ y se utiliza la expansión a primer orden $T' = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_{s,0} \rho'$ para una vez realizadas las sustituciones a orden $O(\varepsilon)$ tenemos

$$\rho' = \frac{p}{c_0^2} - \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \frac{B}{2A} p^2 - \frac{k}{\rho_0 c_0^6 T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_{s,0} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho s}\right)_{\rho,0} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{B.2.17})$$

Las relaciones termodinámicas $(\partial P / \partial s)_\rho = \rho^2 (\partial T / \partial \rho)_s$ y $(\partial T / \partial \rho)_s^2 = RTc^2 / c_v c_p \rho^2$, donde $R = c_p - c_v$ se utilizan para escribir el tercer término de la ecuación anterior y se obtiene

$$\rho' = \frac{p}{c_0^2} - \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \frac{B}{2A} p^2 - \frac{k}{\rho_0 c_0^4} \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{B.2.18})$$

Para obtener la ecuación de onda deseada a segundo orden, se resta la derivada temporal en la ecuación B.2.14 de la divergencia en la ecuación B.2.15 y se utiliza la ecuación B.2.18 para eliminar ρ' , sustituyendo la relación de primer orden $\nabla^2 p = c_0^{-2} (\partial^2 p / \partial t^2)$ en el término de viscosidad se obtiene

$$\diamond^2 p + \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} - \left(\nabla^2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathcal{L} \quad (\text{B.2.19})$$

donde $\diamond^2 = \nabla^2 - c_0^{-2} (\partial^2 / \partial t^2)$ es el operador d'Alembertiano, $\beta = 1 + B/2A$ es el coeficiente de no linealidad y δ es la difusividad del sonido dada por

$$\delta = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4}{3}\mu + \mu_B\right) + \frac{k}{\rho_0} \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) = \nu \left(\frac{4}{3} + \frac{\mu_B}{\mu} + \frac{\gamma - 1}{P_r}\right) \quad (\text{B.2.20})$$

donde $\nu = \mu / \rho_0$ es la viscosidad cinemática. Los valores típicos para μ_B / μ son 3.0 a 2.7 para agua en un rango de temperaturas de 0 a 60°C , el término de condición térmica $\frac{(\gamma-1)}{P_r}$ es generalmente mas significativo en gases que en líquidos[36].

La ecuación B.2.20 es una ecuación de onda consistente para $O(\varepsilon^2)$ para el caso $\eta \ll 1$, lejos de la frontera.

El coeficiente de atenuación se define como $\alpha(\omega) = -Im\chi$ para el caso de una onda plana con soluciones de la forma $exp[j(\omega t - \chi x)]$. El número de onda característico está definido como $\chi = k(1 - j\delta\omega/c_0^2)^{1/2}$, donde $k = \omega/c_0$, realizando una expansión binomial se obtiene $\alpha \simeq \delta\omega^2/2c_0^3$ para $\alpha \ll k$.

La ecuación de Westerbelt

La ecuación de Westerbelt se obtiene de la ecuación B.2.19 al descartar el término que contiene \mathcal{L} . Como se comentó anteriormente a orden $O(\varepsilon^2)$, $\mathcal{L} = 0$

en el caso de ondas viajeras planas. Para generalizar, la justificación de omitir la densidad Lagrangeana se basa en la distinción entre los efectos no lineales acumulativos y locales.

A orden $O(\varepsilon^2)$ la ecuación B.2.16 puede escribirse en términos de una velocidad potencial, esta velocidad potencial se define como $u = \nabla\phi$ de manera que $\mathcal{L} = \frac{1}{4}\rho_0\Diamond^2\phi^2$, donde $p = -\rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$, esta última expresión proviene de la aproximación a primer orden de la presión con respecto al potencial para una onda esférica.

Considerando lo anterior, la ecuación B.2.19 puede escribirse como

$$\Diamond^2 \left[p + \frac{\rho_0}{4} \left(\nabla^2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi^2 \right] + \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \quad (\text{B.2.21})$$

Sea $\tilde{p} = p + \frac{\rho_0}{4} \left(\nabla^2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi^2$, sustituyendo esto en la ecuación B.2.21 e ignorando los términos de orden $O(\varepsilon^3)$ se obtiene

$$\Diamond^2 \tilde{p} + \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial t^3} = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 \tilde{p}^2}{\partial t^2} \quad (\text{B.2.22})$$

La expresión para la ecuación de Westerbelt proviene de asumir que $\tilde{p} \simeq p$, por lo tanto la ecuación de Westerbelt es

$$\Diamond^2 p + \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \quad (\text{B.2.23})$$

La validez de esta ecuación depende entonces de que la aproximación $\tilde{p} \simeq p$ sea válida.

Para evaluar dicha validez se puede observar que en orden $O(\varepsilon^2)$ la solución para la presión en la ecuación B.2.19 se puede obtener al resolver la ecuación B.2.22 para \tilde{p} y obteniendo la expresión para p de la definición de \tilde{p} . Al realizar lo anterior se observa que la solución esperada para p difiere de la solución obtenida con el procedimiento anterior por la función ϕ^2 , la cual depende únicamente de las propiedades locales del campo acústico en el punto de interés. Todos los efectos acumulativos no lineales se asocian al término del lado derecho en la ecuación B.2.22, este término representa la función de distribución espacial de fuentes virtuales creadas por la onda de sonido. El efecto integrado de dichas fuentes se acumula con la distancia en la dirección de propagación, estos efectos producen la deformación de la onda que se muestra en el esquema (TAL).

En resumen, cuando los efectos acumulativos no lineales predominan a los efectos locales, la ecuación de Westerbelt es una buena aproximación a la ecuación de onda a segundo orden. La dificultad proviene en conocer las circunstancias en que los efectos locales pueden ser descartados. Una vez que la distancia de propagación es mucho mayor que la longitud de onda los efectos no acumulativos son despreciables, estos efectos son por ejemplo el uso de teoría lineal para cambiar de variable. Como regla general, salvo que nos encontremos a una distancia de una longitud de onda de la fuente, los efectos locales pueden ser

ignorados en el caso de ondas casi planas. En el caso de ondas estacionarias, ondas no planas u ondas de sonido dispersadas por sonido los efectos locales deben ser considerados.

La ecuación de Burgers

La ecuación de Burger comprende el modelo más simple para describir la combinación de los efectos no lineales y de pérdidas durante la propagación de una onda plana. Para derivar la ecuación se parte de la ecuación de Westerbelt en su forma unidimensional

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p + \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \quad (\text{B.2.24})$$

Un método para simplificar la ecuación B.2.24 consiste en considerar las soluciones para el caso de onda plana en dos diferentes casos, primero considerando que no hay disipación y el segundo considerar que el sistema es lineal. En el primer caso se considera una solución de la forma $u = f(t - x/c_0 + \beta x u / c_0^2)$, para escribirlo en términos de la presión se debe considerar $u = p / \rho_0 c_0$ al sustituir esto en la primera expresión para u tenemos

$$p = f \left[\tau + \left(\frac{\beta p}{\rho_0 c_0^3} \right) x \right] \quad (\text{B.2.25})$$

Donde el retraso en tiempo está definido como $\tau = t - x/c_0$. Para el segundo caso se utiliza la expresión lineal para la presión

$$p = p_0 \exp [j\omega\tau - (\delta\omega^2/2c_0^3) x] \quad (\text{B.2.26})$$

En las dos ecuaciones anteriores el coeficiente de x es de orden $O(\varepsilon)$ por lo que las soluciones tienen la forma

$$p = p(x_1, \tau), \quad x_1 = \tilde{\varepsilon}x, \quad \tau = t - x/c_0 \quad (\text{B.2.27})$$

El significado de la ecuación B.2.27 es que en el sistema de referencia de un observador que se mueve a velocidad c_0 la no linealidad y la absorción producen efectos muy pequeños al variar la distancia y el orden de los efectos producidos por ambos efectos es el mismo, las variaciones son de orden $O(\varepsilon)$. La coordenada x_1 tiene como escala temporal a τ .

Al escribir la ecuación B.2.24 en coordenadas (x_1, τ) las derivadas parciales necesarias quedan como

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_t = \tilde{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_\tau - \frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)_{x_1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)_{x_1} \quad (\text{B.2.28})$$

Al sustituir esto en la ecuación B.2.24 se obtiene

$$\tilde{\varepsilon}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} - \tilde{\varepsilon} \frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial \tau} + \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} \quad (\text{B.2.29})$$

El primer término es de orden $O(\tilde{\varepsilon}^3)$ y por lo tanto será descartado. La integración de los otros términos con respecto a τ , tomando en cuenta que en ausencia de sonido la posición debe ser cero, y al multiplicar la ecuación resultante por $-\frac{1}{2}c_0$ se obtiene

$$\tilde{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p^2}{\partial \tau} \quad (\text{B.2.30})$$

En orden estos tres términos corresponden a las pérdidas, la no linealidad y la tasa de cambio con respecto a la distancia son del mismo orden. Esta ecuación es entonces de orden $O(\tilde{\varepsilon}^2)$ para el sistema (x_1, τ) .

Como $\tilde{\varepsilon}$ es simplemente un parámetro podemos regresar a la coordenada física x en lugar de x_1 al reemplazar $\tilde{\varepsilon}(\partial/\partial x_1)$ por $\partial/\partial x$

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = \frac{\beta p}{\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p}{\partial \tau} \quad (\text{B.2.31})$$

La ecuación anterior se conoce como ecuación de Burger.

La ecuación B.2.25 es una solución para la ecuación de Burger cuando $\delta = 0$ y la ecuación B.2.26 es solución en el caso $\beta = 0$.

Ecuación generalizada de Burger

La ecuación generalizada de Burger es una extensión de la ecuación B.2.31 que toma en cuenta la divergencia o convergencia de una onda esférica o cilíndrica y se reduce a la ecuación B.2.31 para el caso de ondas planas. Para derivarla partimos de nuevo de la ecuación de Westerbelt de la forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p + \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \quad (\text{B.2.32})$$

donde el Laplaciano está expresado en términos de la coordenada radial r para el campo de onda, con $m = 0, 1/2$, o 1 para el caso de una onda plana, cilíndrica o esférica respectivamente. Se asume que el campo depende únicamente de r y t . En el caso de una onda plana al escribir x en lugar de r se recupera la ecuación de Westerbelt.

Los efectos no lineales que se consideran en \mathcal{L} no están incluidos en la ecuación B.2.32 y de nuevo a orden $O(\tilde{\varepsilon}^2)$, para ondas planas $\mathcal{L} = 0$. De la teoría lineal sabemos que para ondas armónicas esféricas y cilíndricas, en el mismo orden, la presión y velocidad de partícula se relacionan de la forma $p = \pm \rho_0 c_0 u$ para $kr \gg 1$. Por lo tanto la ecuación B.2.32 es válida para dichas ondas en baja atenuación ($\alpha \ll k$) lo cual implica $kr_0 \gg 1$, donde r_0 es el radio de la fuente y k es el número de onda correspondiente a la componente de menor frecuencia significativa. La restricción $kr_0 \gg 1$ puede ser reemplazada por $r_0 > \lambda$, esto es que el radio de la fuente sea mayor que la máxima longitud de onda del sonido. Pero generalmente en el caso de ondas divergentes, las fuentes son menores que una longitud de onda. También es importante considerar que la ecuación B.2.32

no puede ser utilizada a una distancia menor que una longitud de onda lejos del foco en un campo convergente.

En el caso de ondas planas, de nuevo consideramos

$$p = p(r_1, \tau), r_1 = \tilde{\varepsilon}r, \tau = t \mp (r - r_0)/c_0 \quad (\text{B.2.33})$$

Según la convención de signos a utilizar, el signo de + corresponde a ondas convergentes, y el signo de - corresponde a ondas divergentes. La constante r_0/c_0 se introduce por cuestiones de conveniencia de tal manera que en la fuente $\tau = t$ y $r = r_0$. La transformación de coordenadas de (r, t) a (r_1, τ) es similar al caso de la onda plana, por lo tanto considerando la ecuación B.2.32 descartando los términos de orden $O(\tilde{\varepsilon}^3)$ y dejando únicamente los de orden $O(\tilde{\varepsilon}^2)$ se obtiene

$$\mp \tilde{\varepsilon} \frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial r_1 \partial \tau} \mp \tilde{\varepsilon} \frac{2m}{c_0 r_1} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} = - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} \quad (\text{B.2.34})$$

Al integrar la ecuación anterior con respecto a τ , aplicar la transformación de (r_1, τ) a (r, t) y multiplicar por $\mp \frac{1}{2} c_0$ obtenemos

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{m}{r} p \mp \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = \pm \frac{\beta p}{\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p}{\partial \tau} \quad (\text{B.2.35})$$

La ecuación anterior se conoce como ecuación generalizada de Burger y se reduce a la ecuación de Burger para $m = 0$ (para el caso en que $r = x$ y $r_0 = 0$). Para escribir la ecuación anterior en términos de la velocidad de partícula se utiliza la relación $p = \pm \rho_0 c_0 u$.

Atenuación

Considerando el caso en que la dispersión es lo suficientemente débil como para que la variación en la velocidad de fase como función de la frecuencia sea muy pequeña con respecto a la velocidad del sonido c_0 y variaciones en la forma de la onda, como función de la distancia son pequeñas en la escala de la longitud de onda, se puede analizar la evolución de la onda debido a la dispersión y no linealidad de la siguiente manera.

La ecuación de Burger para el caso de una onda plana, utilizando el tiempo retrasado $\tau = t - x/c_0$ tiene la forma

$$\frac{\partial p}{\partial x} + L_\tau(p) = \frac{\beta p}{\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p}{\partial \tau} \quad (\text{B.2.36})$$

Donde $p(x, \tau)$ es la presión de sonido, ρ_0 es la densidad ambiental, c_0 es la velocidad del sonido y β es el coeficiente de no linealidad. El operador lineal de retraso $L_\tau(p)$ describe las propiedades de atenuación y dispersión del medio. Para algunos casos se conoce la expresión analítica para L_τ .

Es conveniente expresar $L_\tau(p)$ en el espacio de frecuencias. Expandiendo la presión en serie de Taylor tenemos

$$p(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) e^{j\omega_n \tau} + c.c. \quad (\text{B.2.37})$$

donde $\omega_n = n\omega_0$, ω_0 es la frecuencia de referencia y *c.c* denota a los compeljos conjugados de los términos siguientes. Como $L_\tau(p)$ es un operador de retraso, su efecto en la ecuación B.2.33 es introducir constantes multiplicativas complejas en la suma. Para denotar estas constantes se utilizará $\tilde{\alpha}_n$ y se definen como

$$L_\tau(e^{j\omega_n \tau}) = \tilde{\alpha}_n e^{j\omega_n \tau} \quad (\text{B.2.38})$$

Al sustituir la ecuación B.2.37 en la ecuación B.2.36 se obtienen las siguientes ecuaciones acopladas para las amplitudes espectrales complejas p_n

$$\frac{dp_n}{dx} + \tilde{\alpha}_n p_n = \frac{j\omega_n \beta}{4\rho_0 c_0^3} \left(\sum_{m=1}^{n-1} p_m p_{n-m} + 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} p_m p_{m-n}^* \right) \quad (\text{B.2.39})$$

donde p_n^* es el complejo conjugado de p_n . La parte real del coeficiente complejo $\tilde{\alpha}_n$ esta asociada con la atenuación y la parte imaginaria con la variación en la velocidad de fase

$$\tilde{\alpha}_n = \alpha_n + j\omega_n (c_n^{-1} - c_0^{-1}) \quad (\text{B.2.40})$$

donde α_n es el coeficiente de atenuación y c_n la velocidad de fase a la frecuencia ω_n . Las ecuaciones B.2.37 y B.2.39 tienen soluciones lineales de la forma $\exp(-\tilde{\alpha}_n x + j\omega_n \tau) = \exp[-\alpha_n x + j\omega_n (t - x/c_n)]$.

La primera suma de la ecuación B.2.39 corresponde a la generación de suma de frecuencias y la segunda para generación de diferencia de frecuencias. Estas ecuaciones acopladas pueden resolverse analíticamente, por aproximaciones, métodos perturbativos o numéricamente por métodos de diferencias finitas.

La ecuación KZK

La ecuación KZK (Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov) es una generalización de la ecuación de Burger que combina los efectos de difracción, absorción y no linealidad para haces dirigidos de sonido. Sea el eje z el que apunta en la dirección de propagación siendo las coordenadas (x, y) perpendiculares a dicho eje. También es necesario realizar las siguientes suposiciones sobre la fuente: la fuente está definida en el plano $z = 0$, tiene un radio característico a y radia a frecuencias que satisfacen la relación $ka \gg 1$. Esta última suposición asegura que el haz es razonablemente direccional, por lo tanto sabemos que el sonido se encuentra en la vecindad del eje z y los frentes de onda son casi planos.

La teoría lineal para haces dirigidos muestra la existencia de un campo lejano y uno cercano, la frontera entre ellos está aproximadamente a la distancia de Rayleigh $\frac{1}{2}ka^2$ midiendo desde la fuente sobre el eje acústico. El campo cercano se caracteriza por frentes de onda aproximadamente planas mientras que para el campo lejano los frentes de onda son esféricos, aquí se cumple que $kz \gg 1$,

en donde $z > \frac{1}{2}ka^2$ y por lo tanto $kz > \frac{1}{2}(ka)^2$ de acuerdo con la derivación de la ecuación B.2.35 la escala elegible en la dirección de propagación es (z_1, τ) , donde $z_1 = \tilde{\varepsilon}z$ y $\tau = t - z/c_0$.

En el caso de las otras coordenadas (x, y) la elección para la escala es menos aparente. También se realizará la suposición de que al igual que los efectos de absorción y no linealidad la difracción será de orden $O(\tilde{\varepsilon}^2)$ por lo tanto los tres efectos contribuirán en el mismo orden. Se puede entonces demostrar que la escala adecuada para las coordenadas del sistema es

$$p = p(x_1, y_1, z_1, \tau), (x_1, y_1, z_1) = (\tilde{\varepsilon}^{1/2}x, \tilde{\varepsilon}^{1/2}y, \tilde{\varepsilon}z), \tau = t - z/c_0 \quad (\text{B.2.41})$$

Esta escala implica que para un observador moviéndose a una velocidad c_0 en dirección z ($\tau = \text{const.}$) las variaciones espaciales ocurrirán más lentamente a lo largo del eje que a través de él. De hecho, en el campo cercano la escala de longitud de las variaciones en el eje de propagación del haz causadas por difracción es la distancia de Rayleigh ($\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}(ka)a$) la cual es mayor que la escala (a) a través del haz, puesto que $ka \gg 1$.

Escribiendo la ecuación de Westerbelt a orden $O(\tilde{\varepsilon}^2)$, considerando la escala definida en B.2.41 y el Laplaciano que da expresado como

$$\nabla^2 = \tilde{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) + \tilde{\varepsilon}^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \tilde{\varepsilon} \frac{2}{c_0} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \tau} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (\text{B.2.42})$$

descartando los términos de orden $O(\tilde{\varepsilon}^3)$ se obtiene

$$\tilde{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) p - \tilde{\varepsilon} \frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z_1 \partial \tau} + \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} = - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} \quad (\text{B.2.43})$$

El cambio de la escala de (x_1, y_1, z_1) a (x, y, z) resulta

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial \tau} - \frac{c_0}{2} \nabla_{\perp}^2 p - \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} \quad (\text{B.2.44})$$

donde $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ es el Laplaciano que opera en el plano perpendicular al eje acústico. La ecuación B.2.44 es la ecuación KZK, es el modelo más ampliamente utilizado para describir los efectos de difracción, no linealidad y absorción en el caso de haces de sonido dirigidos. Cuando no hay difracción ($\nabla_{\perp}^2 p = 0$) se reduce a la ecuación de Burger.

Si escribimos el vector de velocidad de partícula en componentes de la forma $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{\perp}, u_z)$ donde $\mathbf{u}_{\perp} = (u_x, u_y)$. Utilizando las variables de escala B.2.41 tenemos que para la componente z en la ecuación B.2.19 tenemos $p = \rho_0 c_0 u_z + O(\tilde{\varepsilon}^2)$. Al igual que en casos anteriores se puede utilizar una relación lineal $p = \rho_0 c_0 u_z$ para el caso de una onda plana de manera que se pueda convertir entre la presión y la componente en z de la velocidad de partícula. El orden de \mathbf{u}_{\perp} es de $O(\tilde{\varepsilon}^{3/2})$, lo cual indica que el movimiento de la partícula es básicamente en la dirección z que es de orden $O(\tilde{\varepsilon})$. Esto es consistente con la noción de haces dirigidos compuestos por ondas casi planas.

Finalmente si se ignora al segundo término del lado derecho en la ecuación B.2.42 se llega a lo que se llama la aproximación parabólica, debido a que la ecuación de onda hiperbólica (dos derivadas en la dirección de propagación) se aproxima por una ecuación parabólica (una derivada en la dirección de propagación). La aproximación parabólica es un límite para altas frecuencias. La radiación a una frecuencia ω en la dirección predominante z y sea $p = q(x, y, z)e^{j\omega\tau}$, donde $\omega\tau = \omega t - kz$. La aproximación parabólica corresponde a la suposición $|\partial^2/\partial z^2| \ll 2k|\partial q/\partial z|$, esto implica que q es una función que varía lento en z para altas frecuencias. De esto se obtiene que $\diamond^2 p \simeq [-j2k(\partial q/\partial z) + \nabla_{\perp}^2 q] e^{j\omega\tau}$ que multiplicando por $-\frac{1}{2}c_0$ es la forma del dominio de la frecuencia para los primeros dos términos de la ecuación B.2.44.

B.2.2. Métodos computacionales

Los métodos computacionales que existen actualmente se basan en aplicar a la acústica no lineal las herramientas computacionales desarrolladas para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en mecánica de fluidos.

A continuación se presentan tres algoritmos útiles para resolver la ecuación KZK.

Al integrar la ecuación KZK B.2.39 con respecto del tiempo y se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta p}{\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + \frac{c_0}{2} \int_{-\infty}^{\tau} (\nabla_{\perp}^2 p) d\tau \quad (\text{B.2.45})$$

Al igual que anteriormente z es la dirección de propagación con $\tau = t - z/c_0$. Esta ecuación difiere de la ecuación de Burger únicamente por el término que contiene $(\nabla_{\perp}^2 p)$ mediante el cual se consideran los efectos de difracción en la aproximación paraxial para una región cercana al eje acústico. Únicamente se considerará la radiación axisimétrica para la cual $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}(\partial/\partial r)$, donde $r^2 = x^2 + y^2$. Como se comentó anteriormente en la aproximación parabólica es consistente el uso de la relación lineal dada por $p = \rho_0 c_0 u_z$. El uso de esta relación es importante pues muchos problemas relacionados con haces de sonido están obedecen que la velocidad esta dada por $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{\perp}, u_z)$, con u_z en la dirección de propagación.

Algoritmo combinado para el dominio de tiempo-frecuencia (HACER REFERENCIA AL APÉNDICE EN DONDE SE MOSTRARÁ EL PROGRAMA QUE HACE ESTO?)

En este caso se considera una versión adimensional de la ecuación B.2.40 expresada en términos de las siguientes cantidades

$$P = \frac{p}{p_0}, R = \frac{r/a}{1 + z/z_1}, Z = \frac{z}{z_0}, T = \omega_0 \tau \quad (\text{B.2.46})$$

Donde p_0 y ω_0 son la amplitud de la presión característica y la frecuencia angular en la fuente, respectivamente, $z_0 = \frac{1}{2}k_0 a^2$ es la distancia de Rayleigh

correspondiente en términos del radio característico de la fuente a y el número de onda $k_0 = \omega_0/c_0$, y z_1 es una longitud de escala ajustable, por lo tanto la ecuación B.2.45 se puede escribir de la forma

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = NP \frac{\partial P}{\partial T} + A \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} + \frac{1}{4(1+CZ)^2} \int_{-\infty}^T (\nabla_R^2 P) dT \quad (\text{B.2.47})$$

Donde $\nabla_R^2 = \partial^2/\partial R^2 + R^{-1}(\partial/\partial R)$ y $C = z_0/z_1$. En este caso z_0 define la longitud de la escala en la dirección de propagación. Con $A = \alpha_0 z_0$ y $N = z_0/\bar{x}$. El algoritmo calcula los efectos de absorción y difracción en el dominio de las frecuencias y calcula la deformación no lineal en el dominio temporal.

El propósito de reescalar a r como en la ecuación B.2.46 es que para $CZ \ll 1$, lo que corresponde al campo cercano ($C \sim 1$) tenemos $R \simeq r/a$, la cual es una coordenada cilíndrica apropiada para los cálculos cuando el haz está bien colimado. Para $CZ \gg 1$ se tiene $R \simeq (z_1/a)\tan\theta$ en este caso θ es el ángulo con respecto al eje definido como $\tan\theta = r/z$ en este caso $R = \text{const}$ y se tiene la divergencia esférica del haz en el campo lejano a una tasa de expansión definida por z_1 . El valor de C se elige empíricamente.

Al utilizar el algoritmo para el espacio de la frecuencia es necesario utilizar una solución en términos de la serie de Fourier de la forma

$$P(\sigma, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(\sigma) e^{jn\theta} \quad (\text{B.2.48})$$

Donde se tiene la siguiente notación adimensional

$$P = p/p_0, \sigma = x/\bar{x}, \theta = \omega_0\tau, A = \alpha_0\bar{x}, \bar{x} = \rho_0 c_0^3 / \beta p_0 \omega_0 \quad (\text{B.2.49})$$

\bar{x} es la distancia a la cual se formará la onda de choque para una presión $p = p_0 \text{sen}\omega_0 t$, y $\alpha_0 = \delta\omega_0^2/2c_0^3$ es el coeficiente de atenuación termoviscosa a frecuencia ω_0 .

Utilizando una expansión de la ecuación B.2.48 con P_n también dependiente de R y sustituyendo en la ecuación B.2.47 se obtiene un sistema de ecuaciones que incluye un término para la difracción. Ignorando los términos no lineales, la ecuación para la difracción se escribe

$$\frac{\partial P_n}{\partial Z} = \frac{\nabla_R^2 P_n}{j4n(1+CZ)^2} \quad (\text{B.2.50})$$

Debido a que la ecuación anterior es una ecuación parabólica, correspondiente a un proceso del tipo difusivo, puede ser integrada en la dirección $+Z$ sin considerar propagación hacia el sentido contrario. No es necesario establecer condiciones de frontera en $Z = \infty$. El campo está representado por una red de puntos uniformemente espaciados extendida en las direcciones radial y axial cubriendo la región de $R = 0$ a $R = R_{max}$. Se deben utilizar aproximaciones recursivas en diferencias finitas para las derivadas de Z y R . La condición de

axisimetría requiere $\partial P_n / \partial R = 0$ para $R = 0$ donde R_{max} se elige lo suficientemente grande como para que la presión sea lo suficientemente pequeña a esas distancias, por lo tanto para $R = R_{max}$ se debe cumplir $P_n = 0$.

La distribución de amplitudes de la fuente en $Z = 0$ puede ser descrita por una función polinomial $(1 - R^2)^2$ para $R < 1$ y vale cero para $R > 1$, o por una función exponencial $\exp(-R^{2m})$ donde m es un entero positivo.

Algoritmo para el dominio de las frecuencias

Este algoritmo ha sido ampliamente usado para analizar señales periódicas provenientes de pistones circulares, enfocadas y no enfocadas. De nuevo se realiza una expansión para la ecuación B.2.48 la cual al sustituirse en la ecuación KZK de nuevo lleva un sistema de ecuaciones.

En este caso se introduce una transformación de las coordenadas de la forma

$$P = \frac{p/p_0}{1 + z/z_0}, R = \frac{r/a}{1 + z/z_0}, Z = \frac{z}{z_0}, T = \omega_0 \tau - \frac{r^2/a^2}{1 + z/z_0} \quad (\text{B.2.51})$$

La cual, al ser sustituida en la ecuación B.2.45 tiene la forma

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{NP}{1 + Z} \frac{\partial P}{\partial T} + A \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} + \frac{1}{4(1 + Z)^2} \int_{-\infty}^T (\nabla_R^2 P) dT \quad (\text{B.2.52})$$

En este caso para la coordenada radial se asume el valor $R \simeq \frac{1}{2} k_0 a \tan \theta$ para $Z \gg 1$, el decaimiento en la amplitud y la curvatura en el frente de onda asociada a la dispersión esférica prácticamente se han eliminado en el cambio de variable. Si ahora se sustituye la expansión

$$P(R, Z, T) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M P_n(R, Z) e^{jnT} + c.c \quad (\text{B.2.53})$$

en la ecuación B.2.52 se obtienen las ecuaciones espectrales acopladas

$$\frac{\partial P_n}{\partial Z} = \frac{\nabla_R^2 P_n}{j4n(1 + Z)^2} - n^2 A P_n + \frac{jnN}{4(1 + Z)} \left(\sum_{m=1}^{n-1} P_m P_{n-m} + 2 \sum_{m=n+1}^M P_m P_{m-n}^* \right) \quad (\text{B.2.54})$$

Dada, por ejemplo, una fuente con una sola frecuencia $p = p_0 f(r) \text{sen} \omega_0 t$ en $z = 0$, donde $f(r)$ es una distribución arbitraria de amplitudes, la condición correspondiente para la fuente es $P_1(R, 0) = -j f(R) \exp(jR^2)$ con $P_n(R, 0) = 0$ para $n > 1$.

Existen dos métodos para calcular el término de difracción. Muy cerca de la fuente, donde el campo de la onda varía rápidamente, se utiliza un método de diferencias recursivas y el método de Crank-Nicolson se utiliza en el resto del campo. En el análisis numérico, el método de Crank-Nicolson es un método de

diferencias finitas utilizado para resolver numéricamente la ecuación del calor y ecuaciones similares en diferenciales parciales. Se trata de un método de segundo orden en el tiempo, implícito en el tiempo y numéricamente estable.

Existe una modificación para la transformación de coordenadas de las ecuaciones B.2.52 para el caso de un haz enfocado. Sea d la distancia focal y el plano de la fuente se encuentra en $z = -d$ por lo que el plano focal está en $z = 0$, la transformación es

$$P = (z/d \pm \delta) \frac{p}{p_0}, R = \frac{r/a}{z/d \pm \delta}, Z = \frac{z}{d}, T = \omega_0 \tau - \frac{Gr^2/a^2}{z/d \pm \delta} \quad (\text{B.2.55})$$

donde $G = k_0 a^2 / 2d$ es la ganancia lineal acústica característica y δ es una pequeña cantidad positiva que indica la tasa en que la red espacial converge en la vecindad del foco, una vez más el resultado de sustituir la transformación y una serie de Fourier compleja como la ecuación B.2.53 en la ecuación KZK es un conjunto de ecuaciones espectrales acopladas como las mostradas en la ecuación B.2.54 que permiten el uso de el método de diferencias finitas. Para la región entre la fuente y los planos focales se utiliza el signo de menos para producir una red convergente. Los cálculos después de los planos focales utilizan el signo positivo, lo que produce una red divergente. Las condiciones de frontera se obtienen de un procedimiento que consiste en el cálculo de armónicos en $z = 0$ que se obtienen de la solución en el plano prefocal.

Algoritmo para el dominio del tiempo

Este algoritmo resuelve la ecuación B.2.52 directamente en diferencias finitas. El conjunto de ecuaciones necesarias es el siguiente

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{NP}{1+Z} \frac{\partial P}{\partial T} \quad (\text{B.2.56})$$

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = A \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \quad (\text{B.2.57})$$

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{1}{4(1+Z)^2} \int_{-\infty}^T (\nabla_R^2 P) dT \quad (\text{B.2.58})$$

Las soluciones para el dominio del tiempo requieren discretizar la onda. Suponen que las muestras están separadas inicialmente por intervalos uniformes de tiempo, etiquetados por el subíndice i , donde $i = 1, 2, 3, \dots$. El superíndice corresponde al valor de σ , donde $\sigma = x/\bar{x}$.

$$T_i^{k+1} = T_i^k - NP_i^k \ln \left(1 + \frac{\Delta Z}{1+Z} \right) \quad (\text{B.2.59})$$

para el tamaño del paso se tiene la restricción

$$\ln \left(1 + \frac{\Delta Z}{1 + Z} \right) < \frac{\Delta T}{N_{max} |P_i^k - P_{i-1}^k|} \quad (\text{B.2.60})$$

Para el fenómeno de difracción es necesario elegir cuidadosamente la ventana de muestreo, definida como $T_{min} \leq T \leq T_{max}$, para tener seguimiento de la onda en el campo.

Una ventaja de utilizar el tiempo T como está definido en la ecuación B.2.51 es que este sigue la curvatura esférica del frente de onda y por lo tanto T_{min} y T_{max} se pueden mantener constantes. Sin esta transformación, utilizando el marco del tiempo original de retardo τ , sería necesario expresar a τ_{min} y τ_{max} como funciones de la distancia al eje. Para un pulso es suficiente tomar T_{min} solamente unos cuantos ciclos delante de la fuente, donde el campo es aproximadamente cero para el marco del tiempo de retardo τ .

El valor para T_{max} debe ser elegido mucho mas adelante del borde de salida del pulso, aproximadamente diez ciclos, para considerar la llegada del frente de onda difractado en el campo lejano.

La integral de la ecuación B.2.58 se realiza de acuerdo a la regla del trapecio, con el límite inferior en T_{min} . En el campo cercano, se utiliza un método recursivo y para el campo lejano se utiliza el método de Crank-Nicolson al igual que en el caso anterior.