



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

ANÁLISIS HOLOGRÁFICO DE LA DINÁMICA
DE LA CUERDA EN AdS_5

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA

SAÚL RODRÍGUEZ BENAVIDES

DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSÉ ANTONIO GARCÍA ZENTENO

COMITÉ TUTORAL

DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RÍOS

DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO D.F., 2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ANÁLISIS HOLOGRÁFICO DE LA DINÁMICA DE LA CUERDA EN AdS_5

SAÚL RODRÍGUEZ BENAVIDES

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
2011

A mis hermanas: Sara, Priscila y Rebeca.

Resumen

La presente tesis tiene por objetivo estudiar la dinámica clásica de la cuerda en un espacio-tiempo AdS_5 con el propósito de entender mejor la teoría de norma que vive en la frontera de dicha teoría.

A través de la dualidad AdS/CFT entendemos que la punta de la cuerda representa un quark ‘vestido’ de una nube de gluones en una teoría de norma de super Yang-Mills fuertemente acoplada. Resulta interesante estudiar la dinámica de la punta de la cuerda a través de un mapeo holográfico entre el espacio fase del bulto y su frontera. De este modo es posible construir el principio variacional de la dinámica de la punta de la cuerda, tal que al suponer que el movimiento de ésta se debe a una fuerza externa. Al hacer esto se puede reconstruir la ecuación de (Abraham-)Lorentz-Dirac.

La primer parte de la tesis se enfoca en el caso particular de un defecto 2-dimensional (una cuerda), sin embargo el plantamiento aquí presentado permite extender el análisis para estudiar defectos n -dimensionales en un espacio-tiempo de mayor dimensión dado por AdS_{d+1} . Poder entender la dinámica de un defecto inmerso en dichos espacio permitirá entender la forma más general de la dualidad AdS/CFT , la correspondencia Norma/Gravedad.

Abstract

The present thesis has for goal the study of the classical dynamics for a string embedded in a spacetime AdS_5 , with the purpose of understanding in a better way the gauge theory that lives in the boundary of AdS.

Through the duality AdS/CFT we can understand that the end point of the string represents a dressed quark by a gluons cloud in the gauge theory of super Yang-Mills in the strong coupled regime. It is interesting, by itself, the study of dynamics of the end point of the string using an holographic mapping between the phase space of the bulk and the phase space of the boundary. Using this is possible to construct the variational principle for the dynamics of the end of point of the string, supposing that the movement of the end point is due by a external force. By doing this we can obtain a generalization for the (Abraham-)Lorentz-Dirac equation.

The first part of the thesis is focused in studying a 2-dimensional defect (a string), however the analysis can be extended to n-dimensional defects in an spacetime of higher dimension AdS_{d+1} . By understanding the dynamics of a defect embedded in these kind of spacetimes we can understand in a better the most general form of the AdS/CFT duality, the Gauge/Gravity correspondence.

Índice general

Índice General	I
Introducción	1
1. Dualidad AdS/CFT	5
1.1. Dualidad Norma/Cuerdas	5
1.2. Conceptos Básicos de Teoría de Cuerdas	7
1.3. Dp-branas	9
1.3.1. Dp-branas y Teorías de Norma	9
1.3.2. D-branas como geometría del espacio-tiempo	10
1.4. La correspondencia AdS/CFT	12
1.5. SYM Fuertemente Acoplado	14
1.5.1. Quarks como Cuerdas	16
2. Dinámica de una cuerda relativista en AdS₅	19
2.1. Acción de Nambu-Goto	19
2.1.1. Ecuaciones de Movimiento de Nambu-Goto	22
2.2. Solución de Mikhailov	23
2.2.1. Potenciales de Liénard–Wiechert	25
2.3. Formulación Hamiltoniana	27
2.3.1. Mapeo Holográfico entre el Espacio Fase del Bulto y la Frontera	31
3. Holografía para la cuerda en AdS₅	35
3.1. Ecuación de Movimiento para $p^\mu(\tau)$	37
3.1.1. Fuerza de Arrastre	39
3.2. Ecuaciones de (Abraham-)Lorentz-Dirac Generalizadas	41
3.3. Soluciones a ALD	44
3.4. Apuntes Finales	47
4. Defectos extendidos en un fondo AdS_{d+1}	49
4.1. Defecto n -dimensional	50
4.1.1. Defectos con Volumen	52
4.2. Formulación geométrica de ALD	54
4.2.1. Ejemplos de la relación entre V y \mathcal{F}	57

4.3. Apuntes Finales	60
Conclusiones	61
A. Solución de Mikhailov a las ecuaciones de Nambu-Goto	63
A.1. Para masa infinita	63
A.2. Para masa finita	64
Bibliografía	67

Introducción

El descubrimiento de la correspondencia AdS/CFT a finales de los años 90 y su generalización a la correspondencia Norma/Cuerdas (o Norma/Gravedad) ha significado un nuevo acercamiento al estudio de teorías de campo no-abelianas fuertemente acopladas. Uno de los casos más simples de esta dualidad es el considerar una teoría supersimétrica de Yang-Mills, la cual se considera equivalente a una teoría de cuerdas en un espacio curvo diez-dimensional. La dualidad Norma/Cuerdas nos permite de analizar teorías de norma con diversas características incluyendo el caso de teorías confinadas que pueden ser cualitativamente parecidas a la cromodinámica cuántica (QCD).

Esta dualidad nos ofrece acceso directo a la región fuertemente acoplada de las teorías en cuestión. Por ejemplo, en el caso de Yang-Mills supersimétrico ($\mathcal{N} = \Delta$) tenemos una teoría conforme cuya función beta es idénticamente cero, pero que mantiene el comportamiento de una teoría con interacciones fuertes. La correspondencia ha permitido estudiar Yang-Mills supersimétrico logrando avances significativos en entender QCD al ofrecer perspectivas geométricas en el confinamiento de quarks y gluones que no se habían considerado con anterioridad.

El interés de este trabajo es estudiar el *volumen-mundo* de defectos encajados en un espacio AdS, esto con el fin de entender a través de la dualidad la teoría de campos conforme que vive en la frontera del espacio. Prestaremos especial atención a defectos dos-dimensionales, es decir, cuerdas que viven en un espacio $\text{AdS}_5 \times S^5$. Para el estudio de éstos, consideramos una cuerda de prueba en AdS_5 y estudiaremos la dinámica de las puntas de la cuerda obteniendo información de los objetos ‘puntuales’ en la teoría dual, Yang-Mills maximalmente supersimétrica.

La dinámica de la cuerda en este tipo de fondos ya se ha estudiado en diversos trabajos anteriores, desde diferentes perspectivas, siendo de principal interés para el presente trabajo las estudiadas en [1, 2]. En [3], Mikhailov logró construir de forma geométrica una solución que resuelve la ecuaciones de movimiento para la cuerda en este fondo. Esta solución describe el perfil de la cuerda en el bulto como función del tiempo para cualquier trayectoria del quark en la frontera de AdS. Resulta sorprendente que al especificar una trayectoria en la frontera se obtenga el perfil completo de la cuerda en el bulto. En este sentido la solución de Mikhailov es un mapeo holográfico entre el bulto y la frontera. Quisiéramos indagar más sobre este mapeo holográfico, desde un formalismo hamiltoniana que se ha estudiado poco en la literatura. Estudiando en el espacio fase, plantear las correspondientes ecuaciones de Hamilton, y estudiar de qué manera la información en la

frontera (la punta de la cuerda) codifica la dinámica completa de toda la cuerda.

En una segunda instancia nos interesa generalizar este mapeo holográfico a otro tipo de dualidades en más dimensiones introduciendo en lugar de cuerdas defectos tales como membranas o en general defectos topológicos de más dimensiones cuya dinámica sería descrita por información dinámica de objetos de menor dimensión en la frontera respectiva.

Es importante recalcar que nuestra descripción es completamente clásica y no depende de ninguna realización particular de la conjetura AdS/CFT, aunque tiene cabida directa a partir de ésta. Sobre todo debido a que en los últimos años se ha intentado aplicar la dualidad AdS/CFT al estudio de la pérdida de energía de quarks en teorías de norma fuertemente acopladas. En el caso que se considera el vacío de dichas teorías, el caso de la presente tesis, cuando un quark se acelera emite radiación cromoelectromagnética. Es de esperar que dicha radiación amortigüe el movimiento del quark, induciendo una pérdida de energía [4].

La tesis está organizada de la siguiente manera. El Capítulo 1 introduce a grandes rasgos el marco teórico en el cual la tesis tiene cabida y las herramientas teóricas necesarias para el entendimiento de la misma. En especial se discute cómo una teoría de cuerdas es dual a una teoría conforme con los grados de libertad necesarios para tener quarks a partir del estudio de sistemas de D3-branas y la geometrías que inducen.

En el Capítulo 2 estudiamos la dinámica clásica de la cuerda en AdS. Primeramente buscamos construir el principio variacional correcto para la punta de la cuerda, para esto proponemos como ansatz una generalización al mapeo holográfico propuesto por Mikhailov al espacio de coordenadas (x^μ, p_μ) definidas en la frontera de AdS. El analizar la estructura dinámica del espacio fase dicta que la ecuación de movimiento de la punta de la cuerda (quark) no es la de una partícula sino de un objeto con volumen. Dicho capítulo esta motivado por responder: ¿qué está jugando un papel dinámico detrás de esta postura?

En el Capítulo 3, hemos sido capaces de deducir la generalización a las ecuaciones de (Abraham-)Lorentz-Dirac encontrada en [4] a partir de un análisis puramente clásico de la dinámica en el “espacio fase” de la punta de la cuerda. Dicha generalización es válida para partículas que interactúan fuertemente donde correcciones cuánticas y relativistas se pueden interpretar a través de la dualidad AdS/CFT. El estudio del Capítulo 3 se basa en la construcción de una condición sobre (x^μ, p_μ) en la frontera de AdS siendo dicha condición, al ser interpretada como una ecuación de movimiento, la que codifica la física de nuestro sistema.

Por último en el Capítulo 4 buscamos estudiar casos menos conocidos de la dualidad. En este capítulo nos interesa usar la dualidad para estudiar un *volumen-mundo* encajados en AdS_{d+1} , con este fin extenderemos la hoja-mundo de la cuerda parametrizada por τ y σ a un volumen-mundo en un espacio AdS de mayor dimensión. Consideraremos de especial interés aquellos defectos que pueden ser caracterizados por su volumen n -dimensional y nos permitan simplificar su acción a una acción tipo cuerda con volumen. Se estudiará dicho tipo de defectos usando el mapeo holográfico explorado en el capítulo anterior, lo que nos permite establecer una relación entre la dinámica y la geometría del

defecto.

Capítulo 1

Dualidad AdS/CFT

La presente tesis busca analizar ciertos aspectos clásicos de la dinámica de una cuerda encajada en $\text{AdS}_5 \times S^5$. Expondremos brevemente los conceptos necesarios de la teoría de cuerdas que nos permitirán introducir la correspondencia AdS/CFT y su realización para el movimiento clásico de una cuerda. Esta dualidad en general se conoce como Norma/Cuerdas y se ha aplicado en áreas como física de materia condensada y ha provisto resultados alentadores en fenómenos fuertemente acoplados.

1.1. Dualidad Norma/Cuerdas

La dualidad AdS/CFT fue originalmente propuesta por Juan Maldacena [9] al estudiar D-branas y hoyos negros en la teoría de cuerdas, sin embargo el hecho de que esta dualidad pueda existir puede ser motivada al estudiar ciertos aspectos de teorías de norma y cuerdas. En este capítulo buscaremos motivar la dualidad, resaltando lo elementos de mayor importancia para los capítulos posteriores.

Buscamos entonces motivar la dualidad entre las teorías de norma y cuerdas. Recordemos que la teoría de cuerdas surge a partir de los intentos de entender la fuerza fuerte al querer reformular QCD como una teoría de cuerdas motivados por el hecho de que QCD contiene objetos parecidos a una cuerda: tubos de flujo entre el par quark-antiquark, responsables del confinamiento de dicho par. Entonces debido al confinamiento, los gluones a bajas energías se comportan como tubos extendidos de flujo que se pueden cerrar en sí mismos o conectar con un par quark-antiquark, lo que sugiere formular la descripción de dicho sistema a partir de cuerdas.

Una fuerte indicación de que una descripción fundamental puede existir a partir de teoría de cuerdas para campos de norma no-abelianos en general, proviene de la expansión de 't Hooft para N_c grandes [10]. La idea de 't Hooft era tratar el número de colores N_c de la teoría de norma no-abeliana como un parámetro, que consideramos en límite a infinito y expandir en series de $1/N_c$. Por ejemplo, si consideramos la función de partición Z para una teoría de norma $U(N_c)$ con acoplamiento g , e introducimos el acoplamiento de 't Hooft

$$\lambda = g^2 N_c,$$

se encuentra que la expansión en potencias de $1/N_c$ para la amplitud $\log Z$ vacío a vacío es

$$\log Z = N_c^2 f_0(\lambda) + f_1(\lambda) + \frac{1}{N_c^2} f_2(\lambda) + \dots \quad (1.1)$$

Resulta sorprendente que para (1.1), se pueden organizar los diagramas de Feynman de acuerdo a la topología de superficies compactas de dos dimensiones, para λ fijo.

Dicha expansión es en extremo parecida a la expansión perturbativa para la teoría de una cuerda cerrada, que expresa las cantidades físicas en términos de la propagación de una cuerda en el espacio-tiempo. La *hoja-mundo* de una cuerda cerrada es una superficie compacta dos-dimensional y la expansión perturbativa de la cuerda está dada por la suma sobre las topologías de superficies dos-dimensionales. Por ejemplo, la amplitud vacío a vacío puede ser escrita en esta teoría como

$$\mathcal{A} = \frac{1}{g_s^2} F_0(\alpha') + F_1(\alpha') + g_s^2 F_2(\alpha') + \dots, \quad (1.2)$$

donde g_s es el acoplamiento de la cuerda, $2\pi\alpha'$ es el inverso de la tensión T y $F_h(\alpha')$ es la contribución de las superficies dos-dimensionales con h hoyos.

De comparar (1.1) y (1.2), podemos pensar en identificar (1.1) con la expansión perturbativa de alguna teoría de cuerdas con $g_s \equiv 1/N_c$, y el acoplamiento de 't Hooft λ como una función de α' . Ahora bien, dicha identificación va más allá de una analogía matemática como se explicará más adelante. A partir de esta identificación el límite planar de una teoría de norma corresponde al límite clásico de la teoría de cuerdas. Sin embargo, este análisis no nos dice como construir la teoría de cuerdas a la cual es dual una teoría de norma específica.

Ahora bien, la dualidad Norma/Cuerdas pide que del lado la teoría de cuerdas viva en una geometría dada por AdS. Supongamos que la dualidad AsS/CFT es válida, ésta nos dice que una teoría de campo puede ser descrita en una teoría de cuerdas o gravedad de $(d+1)$ -dimensiones, entonces la métrica más general en $d+1$ dimensiones consistente con las simetrías de Poincaré d -dimensionales puede ser escrita como

$$ds^2 = \Omega^2(z)(-dt^2 + d\vec{X}^2 + dz^2), \quad (1.3)$$

donde z es la extra dimensión espacial. Para tener simetrías traslacionales en las direcciones (t, \vec{X}) es necesario pedir que $\Omega(z)$ dependa solamente de z . Consideremos teorías de campo conformes (CFTs), haciendo esto podemos determinar $\Omega(z)$ al considerar que la teoría debe ser invariante ante transformaciones de escala

$$(t, \vec{X}) \rightarrow C(t, \vec{X}),$$

con C una constante. Para el fondo propuesto en (1.3) la métrica debe de respetar al reescalamiento propuesto junto con el reescalamiento $z \rightarrow Cz$. En este caso, necesitamos que $\Omega(z)$ escale como

$$\Omega(z) \rightarrow C^{-1}\Omega(z),$$

lo cual determina de manera única que

$$\Omega(z) = \frac{R}{z},$$

con R una constante.

Entonces, podemos reescribir la métrica (1.3) como

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{X}^2 + dz^2), \quad (1.4)$$

que es precisamente el elemento de línea de un espacio anti-de Sitter en $d+1$ dimensiones: AdS_{d+1} . Este espacio-tiempo es maximalmente simétrico con radio de curvatura R y una curvatura negativa constante proporcional a $1/R^2$. En [12] se encuentra con más detalle una discusión de los espacios AdS.

Recordemos que, además de las simetrías de Poincaré y la de escala, una teoría de campo conforme en d -dimensiones es invariante ante d transformaciones especiales conformes; todas estas simetrías juntas forman el grupo conforme d -dimensional $SO(2, d)$. Resulta que el grupo de isometrías (transformaciones que dejan invariante la métrica) de (1.4) es precisamente $SO(2, d)$.

Bajo las implicaciones ya mencionadas, esperamos que la teoría conforme de campo tenga una descripción en términos de una teoría de cuerdas en un espacio-tiempo AdS. Sin embargo, a partir de la discusión anterior no es posible deducir la teoría de cuerdas que es dual a una teoría de campos específica. Para poder dar una formulación más precisa de la dualidad, al menos para ciertas teorías de norma, es necesario repasar algunos conceptos básicos de teoría de cuerdas que serán de gran relevancia a lo largo de esta tesis. Además repasaremos el concepto de D-branas que nos permitirá establecer una equivalencia entre una teoría de cuerdas de tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ y una teoría de Super Yang Mills con $\mathcal{N} = 4$.

1.2. Conceptos Básicos de Teoría de Cuerdas

La premisa de la teoría de cuerdas es que a un nivel fundamental, la materia no consiste en partículas puntuales, sino más bien en pequeños lazos de ‘cuerda’. Contrario a la teoría de campos cuánticos, que describe la dinámica de partículas puntuales, la teoría de cuerdas es una teoría cuántica de objetos unidimensional cuánticos que interactúan. Está caracterizada por la tensión de la cuerda T y una constante de acoplamiento adimensional g_s que controla la intensidad de las interacciones. La tensión de la cuerda puede escribirse en términos de la escala de longitud fundamental l_s (que se conoce como la longitud de la cuerda) como

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad \text{con } \alpha' \equiv l_s^2.$$

A lo largo del presente trabajo consideraremos la dinámica de una sola cuerda propagándose en el espacio-tiempo. Resulta claro que una cuerda barre una *hoja-mundo*

dos-dimensional. Por analogía a una partícula relativista cuya acción es la longitud de su *línea-mundo*, la acción que rige la dinámica de la cuerda es el área de la hoja-mundo. Para escribir esta acción de forma explícita, parametrizamos la hoja-mundo con las coordenadas locales σ^α para $\alpha = 0, 1$ y tomamos X^M las coordenadas del espacio-tiempo D -dimensional para $M = 0, 1, \dots, D - 1$. La trayectoria de la cuerda es descrita al especificar X^M como función de σ^a , en términos de estas funciones, la métrica dos-dimensional g_{ab} inducida en la hoja-mundo de la cuerda tiene componentes

$$g_{ab} = G_{MN} \partial_a X^M \partial_b X^N,$$

donde G_{MN} es la métrica del espacio-tiempo. La acción de la cuerda queda dada por

$$S_{NG} = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det g_{ab}},$$

la cual es llamada la acción de Nambu-Goto. En el Capítulo 2, ahondaremos en la dinámica de esta acción.

Para construir los estados cuánticos de una sola cuerda, necesitamos cuantizar la acción anterior. Resulta que dicha cuantización impone fuertes constricciones sobre el espacio-tiempo G_{MN} , es decir, no todos los espacio-tiempos permiten una propagación consistente de la cuerda. Por ejemplo, si tomamos el caso de un espacio-tiempo de Minkowski D -dimensional, la teoría de cuerdas bosónica consistente existe sólo si $D = 26$; de lo contrario el grupo de Lorentz se vuelve anómalo a un nivel cuántico y la teoría contiene estados con norma negativa.

Físicamente, los diferentes estados corresponden a los diferentes modos de vibración de la cuerda. Desde la perspectiva del espacio-tiempo, cada uno de estos modos aparece como una partícula de una masa y espín dado. El espectro contiene, típicamente, un número finito de modos no-masivos y una torre con infinitud de estados con masa del orden de $m_s \equiv l_s^{-1}$. Resulta relevante notar que un modo masivo para una cuerda cerrada es una partícula de espín 2: un gravitón, que describe pequeñas fluctuaciones de la métrica del espacio-tiempo (esto implica que el espacio-tiempo fijo con el cual se comenzó es dinámico). Esta es la razón por la cual la teoría de cuerdas, es en particular una teoría de gravedad cuántica.

Podemos construir otras teorías de cuerdas al agregar grados de libertad a la hoja-mundo de la cuerda. La teoría que es de interés para establecer la dualidad, es una teoría supersimétrica llamada teoría de supercuerdas IIB [13], que puede ser obtenida al añadir los grados de libertad de una hoja-mundo dos dimensional fermiónica a la acción de Nambu-Goto. Para que una supercuerda no tenga estados con norma negativa requerimos que la dimensión del espacio-tiempo sea $D = 10$. Se encuentra que el espectro de estados no masivos de la teoría de cuerdas IIB, además del gravitón, incluye escalares (el dilatón entre estos), tensores antisimétricos y sus compañeros supersimétricos como requiere la supersimetría.

A bajas energías $E \ll m_s$, podemos integrar sobre los modos masivos de la cuerda y obtener una teoría efectiva para los modos no-masivos. Dado que el espectro no-masivo para la cuerda cerrada siempre contiene al gravitón, a segundo orden en derivadas, la

acción efectiva a bajas energías tiene la forma de la gravedad de Einstein acoplada a otros campos de materia (no-masivos)

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^D X \sqrt{-\det G_{MN}} \mathcal{R} + \dots,$$

donde \mathcal{R} es el escalar de Ricci para el espacio-tiempo con D dimensiones y G_N la constante de Newton. Para la teoría tipo IIB, le acción efectiva completa a bajas energías esta dada por la llamada supergravedad de tipo IIB [13].

1.3. Dp-branas

La teoría de cuerdas contiene objetos que no se pueden describir de manera perturbativa (solitones) que se llaman Dp-branas. Una Dp-brana es un ‘defecto’ en el cual cuerdas abiertas pueden terminar ocupando un espacio p -dimensional. Las puntas de la cuerda abierta pueden moverse libremente a lo largo de las direcciones de la D-brana, pero no pueden salirse de ésta, es decir, moverse sobre las coordenadas transversas a la D-brana. Una Dp-brana barre al desplazarse un *volumen-mundo* $(p + 1)$ -dimensional (este caso general lo consideraremos en el Capítulo 4). En particular una D0-brana es un objeto de tipo partícula, las D1-branas son tipo cuerdas, las D2-branas son tipo membranas y así sucesivamente. Las Dp-branas estables en la teoría de Tipo IIB (10-dimensional) es para $p = 1, 3, 5, 7$ [14].

Introducir una D-brana añade un nuevo sector para la teoría de cuerdas cerradas, que consiste en cuerdas abiertas con puntas sobre una D-brana y dichas puntas deben de satisfacer las condiciones de frontera en la D-brana donde terminan. Recordemos que en el caso de cuerdas cerradas comenzamos la descripción de estas con un espacio-tiempo fijo y encontramos, al cuantizar, que el espectro corresponde a fluctuaciones dinámicas del espacio-tiempo. Una situación análoga sucede para una cuerda abierta en una D-brana. Supongamos que empezamos con una Dp-brana que se extiende en las direcciones $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^p)$ y tiene como direcciones transversas $y^i = (x^{p+1}, \dots, x^9)$, al cuantizar obtenemos que el espectro de una cuerda abierta puede ser identificado con las fluctuaciones de una D-brana. De manera más explícita, el espectro de la cuerda abierta consiste en un número finito de modos no-masivos y una torre infinita de modos con masa del orden $m_s = 1/l_s$. Para una sola Dp-brana, el espectro no-masivo consiste en campos de norma abelianos $A_\mu(x)$, $\mu = 0, 1, \dots, p$ y campos escalares $\phi^i(x)$, $i = 1, \dots, 9 - p$ así como sus supercompañeros. Dado que estos campos viven en la D-brana, dependen solamente de las x^μ coordenadas a lo largo de la hoja mundo, y no de las coordenadas transversas y^i .

1.3.1. Dp-branas y Teorías de Norma

Una característica importante de las D-branas, es la aparición de campos de norma no-Abelianos cuando múltiples D-branas se acercan unas a otras [15], ya que en adición a los grados de libertad que pertenecen a cada D-brana, ahora tenemos sectores

correspondientes a cuerdas abiertas que se extienden a diferentes branas. Por ejemplo, si consideramos dos branas paralelas separadas una de otra por una distancia r , las cuerdas abiertas que se extienden entre dos branas dan lugar a dos campos de norma adicionales que tienen una masa dada por $m = r/2\pi\alpha'$ (los cuales se vuelven no masivos si $r \rightarrow 0$). En el caso general, para N_c D-branas paralelas encontramos un multiplete $U(N_c)$ de campos de norma no-Abelianos con $9 - p$ campos escalares en la representación adjunta de $U(N_c)$.

Consideremos N_c D3-branas para cuerdas de una teoría Tipo IIB (Figura 1.1). El espectro no-masivo consiste en un campo de norma A_μ , seis campos escalares ϕ^i ($i = 1, \dots, 6$) y cuatro fermiones de Weyl χ_a ($a = 1, \dots, 4$), todos están en la representación adjunta de $U(N_c)$ y pueden ser escritos como matrices $N_c \times N_c$. La acción efectiva a baja energía para estos modos resulta ser precisamente Super Yang-Mills (SYM) $\mathcal{N} = 4$ con grupo de norma $U(N_c)$ en (3+1) dimensiones [16, 17]. La parte bosónica del lagrangiano de SYM puede ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g_{YM}^2} \text{Tr} \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \phi^i D^\mu \phi^i + [\phi^i, \phi^j]^2 \right), \quad (1.5)$$

donde la constante de acoplamiento de Yang-Mills está dada por

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s. \quad (1.6)$$

Debido al gran número de supersimetrías de dicha teoría se encuentra que la función beta se hace cero (no exhibe divergencias ultravioletas en sus funciones de correlación). En consecuencia, la constante de acoplamiento es independiente de escala y la teoría es invariante conforme.

Como discutiremos en la siguiente sección, a bajas energías el lagrangiano (1.5) contiene modos de cuerdas cerradas no interactuantes que se propagan en el bulto del espacio diez-dimensional mas un sector desacoplado de cuerdas abiertas que interactúan entre sí y corresponde a $SU(N_c)$ SYM $\mathcal{N} = 4$ en cuatro dimensiones.

1.3.2. D-branas como geometría del espacio-tiempo

El mismo sistema que analizamos en la sección anterior, N_c D3-branas para cuerdas de una teoría Tipo IIB, puede ser descrito como una 3-brana negra: un objeto solitónico que es solución a las ecuaciones de movimiento clásicas de supergravedad IIB, debido a que la D-brana es masiva, su presencia deforma el espacio-tiempo en el cual está inmersa. La métrica del espacio-tiempo generado por N_c Dp-branas puede ser encontrada al resolver de forma explícita las ecuaciones de movimiento de Einstein [19]. Por ejemplo, para el caso de tener D3-branas en una teoría de Tipo IIB, encontramos que

$$ds^2 = H^{-1/2}(-dt^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2) + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2). \quad (1.7)$$

La segunda parte de la métrica es sólo la parte plana en las direcciones transversas Y^i a las D3-branas escritas en coordenadas esféricas, con coordenada radial $r^2 = Y_1^2 + \dots + Y_6^2$.

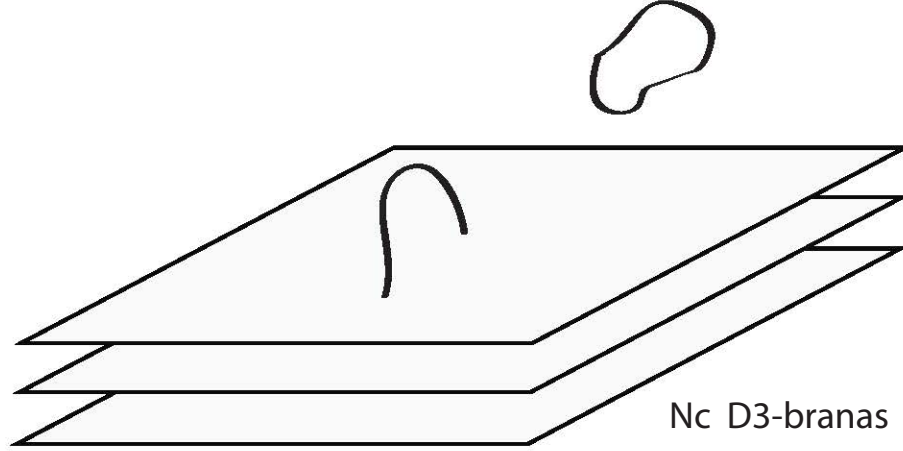


Figura 1.1: Conjunto de N_c D3-branas en un espacio 10-dimensional, con cuerdas abiertas y cerradas como excitaciones del sistema. A bajas energías las cuerdas cerradas se desacoplan de las cuerdas abiertas siendo el sector interactuante $SU(N_c)$ $\mathcal{N} = 4$ SYM.

La función $H(r)$ está dada por

$$H = 1 + \frac{R^4}{r^4}.$$

La métrica (1.7) depende solamente de la coordenada radial r en la dirección transversa, para $r \gg R$ tenemos que $H \simeq 1$ y la métrica se reduce a un espacio plano.

Podemos considerar el parámetro R como la longitud de escala característica de los efectos del rango gravitacional de las N_c D3-branas. Este efecto es débil para $r \gg R$, pero se vuelve fuerte para $r \ll R$. En éste último límite la métrica (1.7) se reduce a

$$ds^2 = ds_{AdS_5}^2 + R^2 d\Omega_5^2,$$

donde

$$ds_{AdS_5}^2 = \frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2,$$

es la métrica de un espacio-tiempo 5-dimensional anti-de Sitter.. En términos de $z = R^2/r \in (0, \infty)$ se puede reescribir como

$$ds_{AdS_5}^2 = G_{MN} dX^M dX^N = \frac{R^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu + dz^2), \quad X^M = (X^\mu, z). \quad (1.8)$$

Vemos entonces, que en la región para gravedad fuertemente acoplada la métrica 10-dimensional se reduce a $AdS_5 \times S^5$. Podemos concluir que la geometría generada por las D3-branas es de acuerdo a la figura 1.2. Notamos entonces que lejos de las branas el espacio-tiempo es plano, 10-dimensional de tipo Minkowski, y cerca de las branas una geometría en forma de ‘garganta’ emerge de la forma $AdS_5 \times S^5$ como se muestra en la Figura (1.2). El tamaño de la garganta está dado por la longitud de escala R .

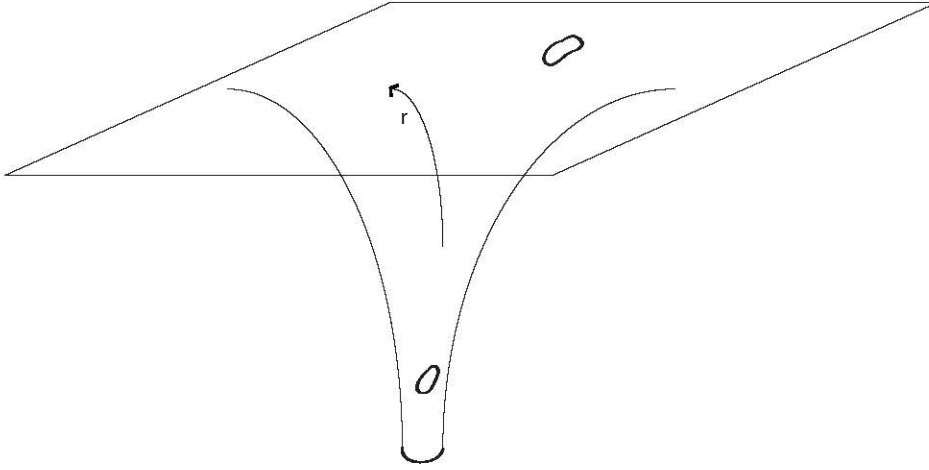


Figura 1.2: Geometría inducida por las D3-branas. Lejos de las branas la geometría es asintóticamente plana 10-dimensional. Cerca de las branas, se tiene una ‘garganta’ con geometría $\text{AdS}_5 \times S^5$ con longitud de escala R . Las cuerdas cerradas son las excitaciones del sistema.

1.4. La correspondencia AdS/CFT

Para motivar esta dualidad, consideremos el ‘estado base’ de una teoría de cuerdas tipo IIB en la presencia de N_c D3-branas tal como consideramos en la sección anterior. Aunque la figura (1.1) pudiera sugerir que el espacio-tiempo alrededor de las branas es plano, sabemos ya que esto no es así. Las D-branas tienen masa y carga, por lo tanto curvan el espacio-tiempo alrededor de ellos de acuerdo a la figura (1.2). Lejos de las branas el espacio es Minkowski 10-dimensional, y cerca a las branas se forma una geometría $\text{AdS}_5 \times S^5$.

Consideremos entonces excitaciones alrededor del estado base en las dos descripciones para el sistema de N_c D3-branas y consideremos el límite a bajas energías (también conocido como límite de desacople como se entenderá más adelante). En la descripción hecha en 1.3.1, las excitaciones de las D-branas son cuerdas abiertas viviendo sobre las branas, y las cuerdas cerradas se propagan por fuera de las branas las cuales interactúan unas con otras. La cuantización de las cuerdas abiertas lleva a un multiplete $\mathcal{N} = 4$ $SU(N_c)$ SYM no-masivo mas una torre de excitaciones de la cuerda masivos. Dado que las puntas de la cuerda abierta están constreñidas a permanecer en la D3-brana, estos modos deben de propagarse en 3+1 dimensiones planas. Análogamente, la cuantización de las cuerdas cerradas lleva a un supermultiplete no-masivo (gravitón) mas una torre de modos masivos de la cuerda, los cuales se propagan en un espacio-tiempo plano 10-dimensional. La fuerza de las interacciones entre los modos de la cuerda cerrada esta controlada por la constante de Newton G_N , por lo tanto la constante de acoplamiento adimensional a cierta energía E es $G_N E^8$. Esta constante se anula a bajas energías lo que implica que en este límite las cuerdas cerradas se vuelven no-interactuantes.

Las interacciones entre las cuerdas abiertas y cerradas están controladas por el mismo parámetro, por ende a bajas energías las cuerdas cerradas se desacoplan de las cuerdas abiertas. En contraste, las interacciones entre cuerdas abiertas son controladas por la constante de acoplamiento adimensional de $\mathcal{N} = 4$ SYM en cuatro dimensiones, $g_{YM} \sim g_s$. Podemos concluir que a bajas energías, el sistema de N_c D3-branas, se reduce a $\mathcal{N} = 4$ SYM en 4 dimensiones más una teoría de gravedad libre en 10 dimensiones.

En la segunda descripción del sistema en cuestión, que se vio en en la sección 1.3.2, el límite a bajas energías consiste en las excitaciones que tienen una energía arbitrariamente baja respecto a un observador en la región asintóticamente plana de Minkowski. Tenemos entonces dos diferentes grados de libertad, aquellos que se propagan en la región de Minkowski y aquellos que se propagan en la ‘garganta’ del fondo. En la región de Minkowski los únicos modos que permanecen son los modos no-masivos del supermultiplete del gravitón en 10 dimensiones, que son sólo modos de supergravedad propagándose libremente; a bajas energías estos modos se desacoplan uno de otro debido a que sus interacciones están gobernadas por GE^8 . En la región cercana a la garganta la torre completa de excitaciones masivas de la cuerda sobreviven; consecuentemente una cuerda cerrada con energía propia arbitrariamente grande en la garganta puede tener una energía arbitrariamente pequeña para un observador localizado en infinito. Conforme nos fijamos en energías más bajas, la torre completa de excitaciones masivas de la cuerda se localiza a mayor profundidad dentro de la garganta desacoplándose de los modos en la región asintóticamente plana. Podemos concluir que en el límite de bajas energías la segunda descripción de las N_c D3-branas, se reduce a cuerdas cerradas interactuantes en $AdS_5 \times S^5$ más una teoría de gravedad libre en 10 dimensiones.

Para resumir, las dos descripciones de N_c D3-branas son

1. Un hiperplano en un espacio-tiempo plano con cuerdas abiertas en él. El límite de bajas energías está descrito por la teoría SYM $\mathcal{N} = 4$ (1.5) con grupo de norma $SU(N_c)$ más una teoría de gravedad libre en 10 dimensiones.
2. Un espacio-tiempo curvo con geometría dada por (1.7) donde sólo cuerdas cerradas se propagan. El límite de bajas energías, está descrito por cuerdas cerradas de tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$ más una teoría de gravedad libre en 10 dimensiones.

Es entonces natural pensar que estas dos descripciones son equivalentes, en particular a bajas energías podemos proponer la conjetura:

La teoría de norma cuatro-dimensional SYM $\mathcal{N} = 4$ $SU(N_c)$ es equivalente a la teoría de cuerdas de tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$.

Quisiéramos comparar el radio gravitacional R de las D3-branas con la escala de la longitud de la cuerda l_s . Para esto tenemos que la constante de Newton esta dada por

$$16\pi G_N = (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8.$$

Ahora bien, las D3-branas son objetos solitónicos cuya tensión escala como $T_{D3} \sim 1/g_s l_s^4$. Relacionando estos dos parámetros se puede mostrar que la relación entre R , g_s y N_c debe

ser

$$\frac{R^4}{l_s^4} = 4\pi g_s N_c. \quad (1.9)$$

Para cálculos futuros convendrá reescribir dicha relación como

$$\lambda = \frac{R^4}{l_s^4}. \quad (1.10)$$

Notemos que de acuerdo a la métrica (1.8), cada rebanada a z constante de AdS_5 es isomorfo a Minkowski en 4 dimensiones, donde $X^\mu(\tau, z)$ está identificado con las coordenadas de la teoría de norma $x^\mu(\tau)$. Conforme $z \rightarrow 0$ nos aproximamos a la ‘frontera’ de AdS_5 , y como hemos motivado en las secciones anteriores resulta natural pensar que la teoría de Yang-Mills vive en la frontera de AdS_5 . En este límite los estados de la teoría de cuerdas IIB quedan descritos por una geometría puramente $\text{AdS}_5 \times S^5$ y corresponden al vacío de la teoría de SYM (Figura 1.3).

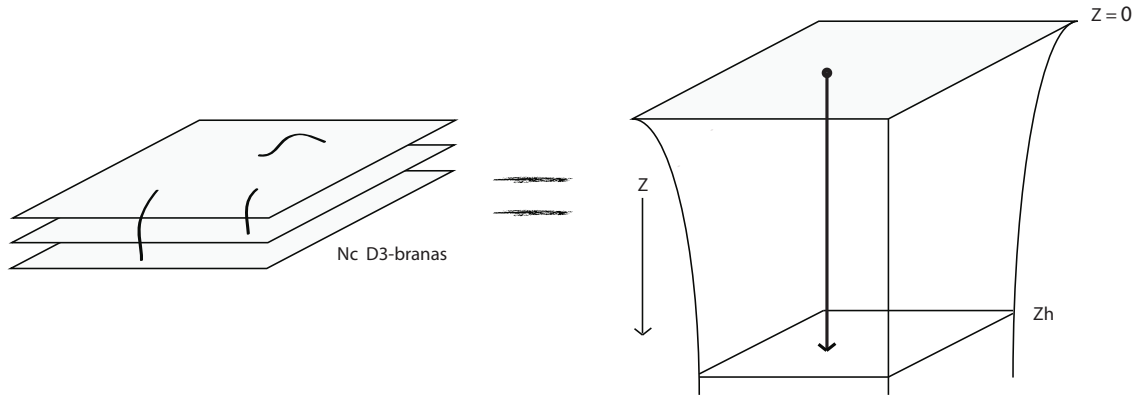


Figura 1.3: Dualidad AdS/CFT a bajas energías.

1.5. SYM Fuertemente Acoplado

Una de las aplicaciones más importantes de la dualidad AdS/CFT es permitirnos describir teorías fuertemente acopladas a través de hacer cálculos ‘sencillos’ del lado de teoría de cuerdas (que no lo serían en su teoría dual). Más en general la correspondencia Norma/Cuerdas se ha establecido como una herramienta que garantiza el acceso a teorías no-abelianas fuertemente acopladas a través de reescribir ésta en términos de una teoría de cuerdas (usualmente supergravidad) que vive en una geometría curva de mayor número de dimensiones.

Consideremos SYM $\mathcal{N} = 4$, que como ya sabemos, es una teoría invariante conforme que contiene un campo de norma, seis campos escalares reales y 4 fermiones de Weyl (todos en la representación autoadjunta del grupo de norma). El grupo de simetría es

$SU(N_c)$ y la constante de acoplamiento dada por la constante de 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2 N_c$. De acuerdo a la correspondencia AdS/CFT dicha teoría de norma es equivalente a una teoría de cuerdas que vive en una geometría $\text{AdS}_5 \times S^5$.

La teoría de norma SYM $\mathcal{N} = 4$ queda especificada por el rango de del grupo de norma, N_c , y la constante de acoplamiento de 't Hooft, λ . La teoría de cuerdas esta determinada por la constante de acoplamiento de las cuerdas g_s y por el tamaño del espacio $\text{AdS}_5 \times S^5$, que es un espacio maximalmente supersimétrico que está completamente especificado por una sola escala, el radio de curvatura R . Como ya mencionamos, estos parámetros se relacionan de acuerdo a

$$\frac{R^2}{\alpha'} \sim \sqrt{g_s N_c} \sim \sqrt{\lambda}. \quad (1.11)$$

Esto significa que la llamada expansión α' ($= l_s^2$) del lado de teoría de cuerdas (la cual controla las correcciones asociadas al tamaño finito de la cuerda comparada con el tamaño del espacio-tiempo donde se propagan) corresponde a un acoplamiento fuerte, expansión $1/\sqrt{\lambda}$ en la teoría de norma.

Se sigue de (1.11) como condición necesaria para que el límite de supergravedad en la teoría de cuerdas sea una buena aproximación dual debemos de pedir $\lambda \rightarrow \infty$ (para λ grande la teoría esta fuertemente acoplada en 3+1 dimensiones planas). Sin embargo esta condición no es suficiente, se debe de pedir que $g_s \rightarrow 0$ (lo que implica $N_c \rightarrow \infty$, suprimiendo la naturaleza cuántica de la cuerda en la teoría de norma) para asegurar que grados de libertad adicionales, como las cuerdas, cuya tensión escala como $1/g_s$, se mantengan pesadas. De igual forma, podemos notar que el radio R en unidades de la longitud de Planck, l_p , es precisamente

$$\frac{R^4}{l_p^4} \sim \frac{R^4}{\sqrt{G_N}} \sim N_c,$$

por lo que correcciones del lado de teoría de cuerdas son suprimidas por potencias de $1/N_c$. En particular, el límite clásico del lado de teoría de cuerdas corresponde al límite planar de la teoría de norma.

En resumen, la cuantización de la teoría completa IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ es realmente complicada y no existe un tratamiento sistemático de ésta. Sin embargo, en los límites

$$\frac{l_p^4}{R^4} \ll 1, \quad \frac{l_s^2}{R^2} \ll 1, \quad (1.12)$$

la teoría se simplifica considerablemente. Notemos que en relación al tamaño de la cuerda, la geometría esta débilmente curvada. La condición $l_s^2 \ll R^2$ nos lleva a tratar a las cuerdas como partículas puntuales e ignorar su naturaleza extendida; como esperamos que pase cuando su tamaño característico l_s es mucho menor que el tamaño típico del espacio donde se propagan R . Considerando que la razón l_p^4/R^4 controla la intensidad de las fluctuaciones gravitacionales, en el régimen $l_p^4 \ll R^4$ podemos ignorar dichas fluctuaciones en la métrica del espacio-tiempo y hablar de un espacio-tiempo fijo dado por $\text{AdS}_5 \times$

S^5 . Cuando ambos límites (1.12) son tomados simultáneamente en cuenta, la teoría de cuerdas completa se reduce a una teoría de gravedad clásica.

The string theory description is under calculational control only for small string coupling and low curvatures, which translates into $N_c \gg 1$, $g_s \ll 1$, i.e., a large number of colors and strong ('t Hooft) coupling.

1.5.1. Quarks como Cuerdas

Todos los grados de libertad de materia en SYM $\mathcal{N} = 4$, los fermiones y escalares, transforman en la representación adjunta del grupo de norma. Sin embargo en QCD, los quarks transforman en la representación fundamental. Entonces, para poder construir modelos holográficos que sean cercanos a QCD debemos de introducir grados de libertad en la representación fundamental. En [23] se ha analizado que la introducción de dichos grados de libertad se simplifica si se considera que el número de sabores de quarks es mucho menor que el número de colores: $N_f \ll N_c$. En este límite, la introducción de N_f sabores corresponde a introducir N_f D7-branas de prueba en la geometría de AdS debida a las D3-branas [23].

En la sección 1.3.1 las excitaciones del sistema eran descritas de forma acertada por cuerdas interactuantes cerradas y abiertas que viven en el espacio plano. En este caso, la sección de cuerdas abiertas es aún más rica en su descripción pues tendremos cuerdas abiertas cuyas puntas terminan en D3-branas (cuerdas 3-3), en las Dp-branas (cuerdas p-p) y el sector de cuerdas abiertas con una punta sobre la D3-branas y la otra punta en las Dp-branas (cuerdas 3-p). En el límite a bajas energías, el sistema de las D3/Dp se desacopla en dos sectores. El primer sector es libre y consiste en cuerdas cerradas 10-dimensionales en un espacio plano y cuerdas p-p propagándose en el volumen-mundo de las N_f Dp-branas. El segundo sector es interactuante y consiste en un multiplete cuatro-dimensional SYM $\mathcal{N} = 4$ en la representación adjunta de $SU(N_c)$, acoplado a los grados de libertad más ligeros que provienen de las 3-p cuerdas. Estos grados de libertad transforman en la representación de grupo de norma $SU(N_c)$ y en la representación fundamental del grupo de simetría global de sabor $SU(N_f)$. Estos son los grados de libertad que llamaremos 'quarks', a pesar de que incluyen campos con espín 1/2 y espín 0. Este nuevo sector rompe la supersimetría de la teoría a $\mathcal{N} = 2$.

Podemos suponer que SYM $\mathcal{N} = 4$ acoplado a los N_f sabores de los grados de libertad fundamentales es dual a una teoría de cuerdas cerradas tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$, acoplada a cuerdas abiertas que se propagan en el volumen-mundo de las N_f branas de prueba. Si asumimos que $g_s N_f \ll 1$, lo cual es consistente con $N_f \ll N_c$, podemos ignorar el efecto gravitacional de las Dp-branas en la geometría. Entonces, del lado de la teoría de cuerdas, las excitaciones de éste sistema son cuerdas cerradas y p-p branas propagándose en dos regiones diferentes, la asintóticamente plana y la garganta $AdS_5 \times S^5$. Estas regiones se desacoplan una de otra en el límite de bajas energías.

Las D7-branas cubren las cuatro direcciones de la teoría de norma X^μ , extendiéndose a lo largo de la dirección radial z en AdS desde la frontera $z = 0$ hasta $z = z_m$ donde las branas terminan. Las cuerdas abiertas con un extremo en las D7-branas y el otro

en el horizonte de AdS representan quarks. Mientras que los modos más bajos de las cuerdas con ambos extremos en las D7-branas corresponden a estados ligados de quarks-antiquarks: mesones [24, 26].

A través de la dualidad AdS/CFT, un quark aislado en el vacío de SYM $\mathcal{N} = 4$ es dual a una cuerda abierta que se extiende radialmente desde las D7-branas hasta el horizonte de AdS ubicado en $z_h \rightarrow \infty$. Resulta ser que la punta de la cuerda es dual al quark, y el resto de la cuerda codifica el perfil de los campos gluónicos [24] (Ver Figura 1.4). Trataremos a la cuerda de acuerdo al formalismo de primera cuantización, y mientras sea pesada será consistente con tratarla clásicamente. Del lado de la teoría de norma estamos acoplando un quark a los campos de SYM $\mathcal{N} = 4$. La integral de trayectoria sobre los campos fuertemente acoplados se realiza de manera exacta, lo cual está codificado en el fondo AdS. Mientras que la integral de trayectoria del quark se realiza en la aproximación del punto de silla.

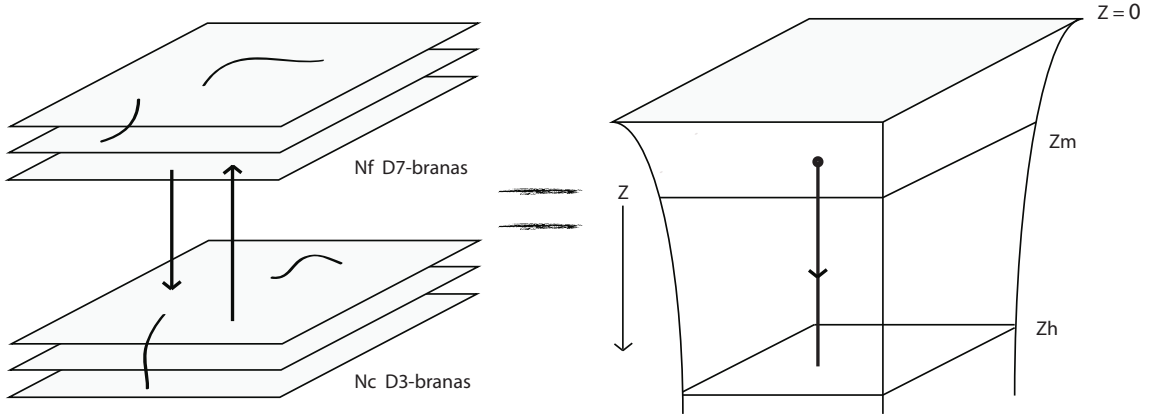


Figura 1.4: Se introducen D7-branas de prueba para tener ‘quarks’ con masa finita.

De acuerdo a [29], el extremo de la cuerda se ubica necesariamente en $z = z_m$. Si consideramos una masa estática y puramente radial, corresponde a un quark estático. Al calcular la energía de dicha cuerda, se encuentra que z_m está relacionada con la masa de m del quark a través de

$$z_m = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m}. \quad (1.13)$$

Se puede entender a z_m como la longitud de onda de Compton del quark, dado que este es el tamaño de la nube de partículas virtuales que rodean al quark.

Para el interés de esta tesis conviene considerar que la dualidad original puede ser considerada como la equivalencia de SYM $\mathcal{N} = 4$ (fuertemente acoplada) a una teoría de cuerdas en AdS_5 solamente; ignorando la parte de la 5-esfera. De esta forma hacemos primeramente explícita la realización del principio holográfico donde el bulto del espacio-tiempo es AdS_5 y la frontera es un espacio de Minkowski 4-dimensional.

Consideraremos que una cuerda de prueba

In our work the entire string will be taken (consistently with the corresponding equations of motion) to lie at the ‘North Pole’ of the S^5 (the point where the $S^3 \times S^2$ that the D7-branes are wrapped on collapses to zero size), so the angular components of the metric (which are associated with the orientation of the gauge theory fields in the internal $SU(4)$ symmetry group) will not play any role, and the lower endpoint of the string will necessarily lie at $z = z_m$.

Capítulo 2

Dinámica de una cuerda relativista en AdS_5

En el capítulo anterior hemos estudiado a grandes rasgos la dualidad AdS/CFT, motivandola de forma heurística que resulta conveniente para los propósitos de esta tesis. Cabe resaltar que la dualidad AdS/CFT es probablemente la realización más concreta del principio holográfico [10, 11], dado que una teoría de gravedad (en este caso teoría de cuerdas) es un espacio-tiempo dado es equivalente la teoría que reside en la frontera de dicho espacio. Como se ha discutido, en el límite $\lambda \ll 1$ la teoría de cuerdas puede ser tratada clásicamente.

En el presenta capítulo estudiaremos la dinámica clásica de una cuerda en un fondo AdS_5 . Será de especial interés estudiar la dinámica en el espacio fase de la frontera de AdS_5 a través del principio holográfico.

2.1. Acción de Nambu-Goto

La teoría de cuerdas parte de la hipótesis de que los objetos fundamentales de la materia no son puntuales, sino que son objetos extendidos unidimensionales a los que llamamos ‘cuerdas’. Una partícula cubre una *línea-mundo* en el espacio de Minkowski, ahora una cuerda cubre una *hoja-mundo* que parametrizaremos por una coordenada de tipo tiempo τ y una coordenada de tipo espacio σ a las que denotaremos como σ^a para $a = 0, 1$.

Tenemos entonces que la cuerda barre una superficie en el espacio-tiempo que define un mapeo de la hoja-mundo, un espacio curvo. A este mapeo lo denotaremos por $X^M(\tau, \sigma)$ con $M = 0, \dots, D - 1$ para D dimensiones. En este contexto, nos referiremos al espacio-tiempo de fondo como el bulto, para distinguirlo de la frontera que definiremos más adelante. La dinámica de la cuerda queda descrita por el lagrangiano de Nambu-Goto

$$S_{NG} = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det g_{ab}},$$

con g_{ab} la métrica inducida en la hoja-mundo debido a estar inmersa en un espacio-tiempo

con métrica G_{MN} . Está dada por

$$g_{ab} = G_{MN} \frac{\partial X^M}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^N}{\partial \sigma^b}. \quad (2.1)$$

T es una constante de proporcionalidad que resulta ser la *tensión* de la cuerda, es decir la masa por unidad de longitud. Es común escribir dicha constante como

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}.$$

Mediante un análisis dimensional α' tiene unidades de longitud al cuadrado, por lo tanto es común asociarle una escala de longitud (l_s), dada por

$$\alpha' = l_s^2. \quad (2.2)$$

La *escala de la cuerda* l_s es la longitud natural que aparece en la teoría de cuerdas, de hecho, se puede considerar en cierto sentido que esta escala es el único parámetro de la teoría.

Consideraremos para este trabajo la dinámica de la punta de la cuerda en la frontera del espacio curvo. A primera vista pareciera que se trata de la dinámica de un punto material, i.e., de la dinámica de una partícula pero como veremos más adelante el hecho de que esta partícula sea a su vez un punto de la cuerda hace que su descripción dinámica sea mucho más elaborada que el de una simple partícula puntual. Desde un punto de vista físico, usando la conjetura AdS/CFT esta partícula corresponde a un quark en el vacío de SYM $\mathcal{N} = 4$. Como hemos visto hay razones suficientes para convencerse de que este quark debe verse ya sea como una partícula compuesta (de mesones que son objetos mas ligeros en el régimen de acoplamiento fuerte) o una partícula ‘gorda’ descrita en términos de una nube de campos gluónicos que le acompañan. Esta información esta codificada en la cuerda y su dinámica en el bulto ya sea considerándola como una cuerda fundamental o en términos de la descripción de los campos de norma de las D7-branas como una cuerda Born-Infeld.

Quisiéramos enfatizar que en este trabajo estamos interesados en la descripción de la dinámica *clásica* de la cuerda y del punto de la cuerda que se encuentra en la frontera. Esta dinámica tiene consecuencias físicas sorprendentes desde el punto de vista de la conjetura AdS/CFT.

El espacio de fondo relevante para nuestras consideraciones es puramente $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$, dado por la métrica

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + dz^2) + R^2 d\Omega_5^2, \quad (2.3)$$

con $\eta_{\mu\nu}$ la métrica en el espacio plano. De acuerdo al Capítulo 1 ignoraremos en nuestro análisis la contribución de la 5-esfera. Entonces, podemos considerar solamente la métrica para AdS

$$ds_{AdS}^2 = G_{MN} dX^M dX^N, \quad (2.4)$$

con

$$G_{MN} = \frac{R^2}{z^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

y calcular la métrica inducida en la hoja mundo, la cual tiene la forma genérica de

$$g_{ab} = \frac{R^2}{z^2} \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & X'^2 \end{pmatrix},$$

donde $\dot{X}^M = \partial X^M / \partial \tau$ y $X^{M'} = \partial X^M / \partial \sigma$. De esta forma, encontramos que la acción de Nambu-Goto toma la forma

$$S = -\frac{R^2}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \frac{1}{z^2} \sqrt{(\dot{X}^M X'_M)^2 - (\dot{X}^M \dot{X}_M)(X^{M'} X'_M)} \equiv \int d^2\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^M, X^{M'}). \quad (2.5)$$

Para simplificar el análisis conviene fijar una norma. En la sección 2.3 desarrollaremos el formalismo hamiltoniano correspondiente mostrando que una buena norma para analizar la dinámica del sistema es la llamada norma semi-estática $\sigma \equiv z$: tomar la coordenada σ , un parámetro de la hoja-mundo, e identificarla con la coordenada radial del fondo AdS (z). Dicha norma nos conviene para poder resolver las ecuaciones de movimiento de forma más sencilla. Bajo esta norma la métrica del fondo puede reescribirse de la siguiente forma. Considerando a la coordenada $X^0(\tau, z)$, calculamos dX^0 como

$$\begin{aligned} dX^0(\tau, z) &= \frac{\partial X^0}{\partial z} dz + \frac{\partial X^0}{\partial \tau} d\tau \\ &= X^{0'} dz + \dot{X}^0 d\tau. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Sustituyendo (2.6) en (2.4) podemos reescribir la métrica del bulto como

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{R^2}{z^2} (-(X^{0'} dz + \dot{X}^0 d\tau)^2 + dX^2 + dz^2), \\ &= \frac{R^2}{z^2} \left(-(\dot{X}^0)^2 d\tau^2 - 2\dot{X}^0 X^{0'} d\tau dz + (1 - (X^{0'})^2) dz^2 + dX^2 \right). \end{aligned}$$

Entonces la métrica inducida en la hoja-mundo tiene ahora por componentes

$$\begin{aligned} g_{\tau\tau} &= -\frac{(\dot{X}^0)^2}{z^2} + \frac{\dot{X}^2}{z^2}, \\ g_{zz} &= \frac{(1 - (X^{0'})^2)}{z^2} + \frac{X'^2}{z^2}, \\ g_{\tau z} &= -\frac{\dot{X}^0 X^{0'}}{z^2} + \frac{\dot{X} X'}{z^2} = g_{z\tau}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el lagrangiano en la acción de Nambu-Goto queda escrito como

$$\mathcal{L} = -\frac{R^2}{2\pi\alpha' z^2} \sqrt{(\dot{X}^0)^2 (X'^2 + 1) + \dot{X}^2 ((X^{0'})^2 - 1) - 2\dot{X}^0 X^{0'} \dot{X} X'}, \quad (2.7)$$

que podemos escribir de manera covariante como

$$\mathcal{L} = -\frac{R^2}{2\pi\alpha'z^2} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2(1 + X'^2)}. \quad (2.8)$$

Este lagrangiano es central para todo el análisis del resto de la tesis.

2.1.1. Ecuaciones de Movimiento de Nambu-Goto

Variando respecto a X^μ la acción de Nambu-Goto, el principio variacional nos dice que

$$\frac{\delta S}{\delta X^\mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = 0.$$

Considerando que el lagrangiano \mathcal{L} no depende de la coordenadas X^μ del bulto, sino de derivadas de ésta, podemos escribir la ecuación de movimiento como

$$\frac{d\Pi_\mu^\tau}{d\tau} + \frac{d\Pi_\mu^z}{dz} = 0. \quad (2.9)$$

A ésta última nos referiremos como ecuación de movimiento de Nambu-Goto, que está en términos de los momentos canónicos de la cuerda definidos como

$$\Pi_\mu^\tau \equiv \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{X}^\mu}, \quad (2.10)$$

$$\Pi_\mu^z \equiv \frac{d\mathcal{L}}{dX^{\mu'}}. \quad (2.11)$$

Cabe señalar que el principio variacional nos pide fijar dos términos de frontera, dados por

$$\int dz (\Pi_\mu^\tau \delta X^\mu) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0,$$

$$\int d\tau (\Pi_\mu^z \delta X^\mu) \Big|_0^\infty = 0.$$

Resulta conveniente escribir esta ecuación de movimiento explícitamente. Considerando en particular el lagrangiano (2.8) los momentos a lo largo de τ y z en la hoja mundo en la norma semi-estática son,

$$\Pi_\mu^z = -\frac{R^2}{2\pi\alpha'z^2} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - \dot{X}^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2(X'^2 + 1)}}, \quad (2.12)$$

y

$$\Pi_\mu^\tau = -\frac{R^2}{2\pi\alpha'z^2} \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - (X'^2 + 1)\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2(X'^2 + 1)}}. \quad (2.13)$$

La ecuación de movimiento queda dada por

$$\begin{aligned}
& \left((\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 (X'^2 + 1) \right) \left[\frac{2}{z} \left((\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - \dot{X}^2 X'_\mu \right) + \dot{X}^2 X''_\mu + (X'^2 + 1) \ddot{X}_\mu - 2(\dot{X} \cdot X') \dot{X}'_\mu \right] \\
& - 2(\dot{X} \cdot X') \left[X'_\mu \left(\dot{X}^2 (X' \cdot \dot{X}') - (\dot{X} \cdot X') (\dot{X} \cdot \dot{X}') \right) + \dot{X}_\mu \left((X'^2 + 1) (\dot{X} \cdot \dot{X}') - (\dot{X} \cdot X') (X' \cdot \dot{X}') \right) \right] \\
& + \left(\dot{X}^2 (\dot{X} \cdot X'') + (X'^2 + 1) (\dot{X} \cdot \ddot{X}) \right) \left((X'^2 + 1) \dot{X}_\mu - (\dot{X} \cdot X') X'_\mu \right) \\
& + \left(\dot{X}^2 (X' \cdot X'') + (X'^2 + 1) (X' \cdot \ddot{X}) \right) \left(\dot{X}^2 X'_\mu - (\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Si además fijamos la norma $X^0(\tau, z) = \tau$ conocida como norma estática las ecuaciones de movimiento se simplifican bastante. En la sección 2.3 veremos que esta norma esta bien definida desde el punto de vista Hamiltoniano. En particular en esta norma es posible extraer información física sobre el comportamiento dinámico del sistema y por ello haremos uso frecuente de esta descripción. Sin embargo, para los fines de nuestro trabajo bastará con la norma semi-estática. La ventaja de esta norma es que la descripción es completamente covariante, mientras que en la norma estática la descripción será no-covariante. Por completez escribimos aquí las ecuaciones de movimiento en la norma estática en una dimensión. La parte temporal no tiene información dinámica y la parte espacial de las ecuaciones de movimiento (para la coordenada X) toma la forma

$$\ddot{X} - X'' + \ddot{X} X'^2 + X'' \dot{X}^2 - 2\dot{X} X' \dot{X}' + \frac{2}{z} X' \left(1 + X'^2 - \dot{X}^2 \right) = 0, \tag{2.15}$$

donde por simplicidad hemos escrito solamente la ecuación de movimiento de Nambu-Goto para una dirección espacial $X(\tau, z)$. Su generalización a más dimensiones es directa.

2.2. Solución de Mikhailov

Para resolver las ecuaciones de movimiento de Nambu-Goto, en [3] Mikhailov construyó geoméricamente una solución a dicha ecuación diferencial a temperatura cero y masa infinita. Dicha solución, covariante, en la norma semi-estática se escribe de la forma

$$X^\mu(\tau, z) = z \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau) + x^\mu(\tau), \tag{2.16}$$

y resuelve idénticamente (2.14) considerando que el parámetro τ es el tiempo propio de la punta de la cuerda en $z = 0$, $x^\mu(\tau)$, es decir

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = -1. \tag{2.17}$$

Esta interesante solución relaciona una trayectoria $x^\mu(\tau)$ en la frontera de AdS ($z = 0$) con en el perfil de la cuerda en el bulto dado por $X^\mu(\tau, z)$. Además a partir de esta solución es posible realizar una detallada descripción dinámica de la punta de la cuerda usando la correspondencia AdS/CFT. La deducción geométrica de esta solución se presenta de manera resumida en el Apéndice A1.

Convendrá en ciertas secciones de la tesis, escribir la solución parametrizada no por τ sino por la posición del quark en la frontera: $x^0(\tau)$ (a su vez función de τ). Usando la propiedad (2.17) podemos relacionar los dos diferentes parámetros $x^0(\tau)$ y $X^0(\tau, z)$ de la siguiente manera. Reescribiendo (2.17) de la forma

$$-\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dx^0}\right)^2 \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = -1,$$

encontramos que

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2(x^0)}} \equiv \gamma(x^0),$$

con $v(x^0) \equiv dx/dx^0$. éste cambio de parámetro es posible hacerlo en X^μ debido que la acción es invariante ante reparametrizaciones.

Entonces la solución propuesta por Mikhailov la podemos reescribir para la coordenada '0' como

$$X^0(\tau, z) \rightarrow X^0(x^0, z) = \frac{z}{\sqrt{1-v^2(x^0)}} + x^0.$$

En la sección 2.3 mostraremos que esta es una condición de norma en el bulto si se identifica $x^0(\tau) = \tau$. Es importante notar que esta condición de norma es distinta a la norma estática $X^0(\tau, z) = \tau$ descrita anteriormente y que da origen a las ecuaciones de movimiento (2.15).

Para hacer contacto con la notación usada en otros trabajos [4, 38], y con el mismo trabajo original de Mikhailov, renombramos $x^0 \equiv t_{ret}$ y fijemos la norma estática $X^0 \equiv t$, entonces

$$t(t_{ret}, z) = \frac{z}{\sqrt{1-v^2(t_{ret})}} + t_{ret}. \quad (2.18)$$

El resto de las coordenadas espaciales i se expresan como

$$X^i(t_{ret}, z) = \frac{zv^i(t_{ret})}{\sqrt{1-v^2(t_{ret})}} + x^i(t_{ret}), \quad (2.19)$$

donde $x^i(t_{ret})$ y $v^i(t_{ret})$ son la posición y velocidad del extremo de la cuerda en la frontera $z = 0$. Es importante señalar que (2.18) y (2.19) no se pueden escribir de forma covariante en una sola ecuación, razón por la cual no trabajaremos en general con x^0 como parámetro salvo que se indique lo contrario. Sin embargo, dicha parametrización nos permitirá hacer contacto con trabajos previos e interpretar físicamente algunos resultados de manera directa, por ejemplo, podemos observar que el comportamiento de un segmento de cuerda en una posición radial z y a un tiempo t está completamente determinado por el comportamiento del extremo de la cuerda en la frontera a un tiempo anterior t_{ret} . De aquí el nombre de *tiempo retardado* para x^0 .

Gran parte de la dificultad para extraer información dinámica de las soluciones (2.18) y (2.19), proviene del hecho de que mientras estas soluciones se escriben en términos de parámetro t_{ret} las ecuaciones de movimiento mas simples posibles en el espacio curvo AdS

se escriben en la norma $X^0(\tau, z) = \tau$. Para apreciar correctamente esta dificultad resumiremos aquí el cálculo presentado en [36] donde se realiza el cambio de parametrización adecuado para mostrar que la solución de Mikhailov resuelve la ecuación de movimiento (2.15). Este es un cambio de parametrización entre dos normas distintas la estática y la de t_{ret} . Detalles de este hecho pueden verse en la sección 2.3.

Para analizar la solución de Mikhailov en dicha norma notemos que en la ecuación diferencial a resolver (2.15) las derivadas temporales son respecto al parámetro t y la solución propuesta por Mikhailov depende de t_{ret} . Entonces, debemos de calcular las derivadas de $X(t_{ret}, z)$ respecto a t_{ret} y no respecto de t . De (2.18) notamos que

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{1-v^2}} + dt_{ret} \left[z \frac{va}{(1-v^2)^{3/2}} + 1 \right],$$

donde $a \equiv dv/dt_{ret}$. Usando esta relación entre los elementos dt y dt_{ret} podemos calcular explícitamente el resto de los términos que aparecen en (2.15) al realizar los cambios de variable necesarios. Obtenemos que

$$\dot{X} = \frac{az + v(1-v^2)^{3/2}}{vaz + (1-v^2)^{3/2}}, \quad (2.20)$$

$$X' = -\frac{az(1-v^2)^{1/2}}{vaz + (1-v^2)^{3/2}}, \quad (2.21)$$

$$\ddot{X} = \frac{-a^3 z^2 (1-v^2)^{3/2} + 3va^2 z (1-v^2)^3 + jz(1-v^2)^4 + a(1-v^2)^{9/2}}{[vaz + (1-v^2)^{3/2}]^3}, \quad (2.22)$$

$$X'' = \frac{-a^3 z^2 (1-v^2)^{1/2} + va^2 z (1-v^2)^2 + jz(1-v^2)^3 - a(1-v^2)^{7/2}}{[vaz + (1-v^2)^{3/2}]^3}, \quad (2.23)$$

$$\dot{X}' = \frac{a^3 z^2 (1-v^2) - 2va^2 z (1-v^2)^{5/2} - jz(1-v^2)^{7/2}}{[vaz + (1-v^2)^{3/2}]^3}, \quad (2.24)$$

donde $j \equiv da/dt_{ret}$. Estas soluciones satisfacen idénticamente (2.15).

Resulta interesante notar que en la norma estática en una sola dirección de movimiento ($i = 1$)

$$\mathcal{L} = -\frac{R^2}{2\pi\alpha' z^2} \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}.$$

Sustituyendo (2.19) para $i = 1$, el lagrangiano se puede escribir como

$$\mathcal{L} = -\frac{R^2}{2\pi\alpha' z^2} \sqrt{1 - v^2(t_{ret})},$$

que corresponde al lagrangiano de una partícula relativista, que escala con masa $1/z^2$.

2.2.1. Potenciales de Liénard–Wiechert

De este resultado puede deducirse el potencial de Liénard que tiene exactamente la misma estructura que el potencial de Liénard de la electrodinámica clásica, pero aquí se

aplica a un plasma de quarks-gluones que es un sistema cuántico a acoplamiento fuerte. La única diferencia entre los dos resultados es la constante que aparece enfrente de ambos. En el caso del plasma de quarks-gluones el resultado es proporcional a $\sqrt{\lambda}$. De aquí es también posible deducir la ecuación de (Abraham-)Lorentz-Dirac (ALD) a orden $\sqrt{\lambda}$. Es necesario tener en mente que estos resultados son para un quark infinitamente masivo pues es solo en ese límite que es válido. Las modificaciones de estos resultados para el caso de masa finita pueden verse en [4].

Para hacer un primer contacto con la ecuación de (Abraham-)Lorentz-Dirac consideremos la forma covariante del cuadrimomento P^μ de la cuerda en AdS [3]

$$P^\mu(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} \frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} + p_q(t), \quad (2.25)$$

donde hemos usado las soluciones propuestas por Mikhailov (2.16). El segundo término en la ecuación anterior corresponde a una derivada total, y se puede escribir como

$$p_q^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}.$$

donde el segundo término lo hemos construido de modo tal que se recupere la forma covariante genérica de la ecuación de (Abraham-)Lorentz-Dirac. Esta corrección en el momento del quark jugará un papel fundamental en la construcción de la teoría hamiltoniana en la frontera para la dinámica de dicho quark. De hecho, esta corrección de orden $\sqrt{\lambda}/2\pi$ es la primera de un conjunto infinito de correcciones que modificarán tanto el potencial de Liénard (dado por el término bajo la integral en la expresión del cuadri-momento), como el momento del quark. Estas modificaciones son análogas a las modificaciones de la ecuación de (Abraham-)Lorentz-Dirac en presencia de una distribución de carga [33].

Cabe recalcar que en todas estas relaciones, τ es el tiempo propio de la partícula en la frontera $d^2\tau = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Derivando respecto de τ obtenemos la ecuación de (Abraham-)Lorentz-Dirac

$$m \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left(\frac{d^3x^\mu}{d\tau^3} - \frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} \frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \mathcal{F}^\mu. \quad (2.26)$$

Esta ecuación toma en cuenta los efectos que la carga (en este caso el quark) experimenta como fuerza de frenado debido a su propio campo electromagnético. τ es el tiempo propio de quark y $\mathcal{F}^\mu \equiv \gamma(\vec{F} \cdot \vec{v}, \vec{F})$ es la quadri-fuerza. Los parámetros en esta ecuación son diferentes que en la ecuación usual de (Abraham-)Lorentz-Dirac.

En electromagnetismo, el electrón se modela como una distribución de carga que es esféricamente simétrica caracterizada por el radio del electrón $r_e \equiv 2e^2/3m$. En el caso del quark el parámetro que juega este mismo papel es $z_m \equiv \sqrt{\lambda}/2\pi m$. La descripción dinámica contiene una derivada de tercer orden en τ lo que ha dado lugar a muchas discusiones sobre la consistencia de la descripción que van desde aspectos puramente físicos hasta aspectos filosóficos. La consistencia dinámica de la ecuación de (Abraham-)Lorentz-Dirac se recupera si insistimos en que se aplique a una distribución de carga cuya

longitud característica sea mayor al radio del electrón. En ese caso aparecen derivadas de mayor orden en τ que sorpresivamente hacen que la descripción sea consistente [33].

Esperaríamos que la descripción en términos de la cuerda insertada en el espacio AdS contribuya a aclarar estos aspectos. De hecho ahora sabemos que en efecto la conjetura AdS/CFT nos ayuda a corregir la solución de Mikhailov de modo que ahora se toman en cuenta todas las correcciones de la ecuación de (Abraham-)Lorentz-Dirac en z_m . Afortunadamente estas correcciones pueden agruparse en una expresión algebraica sencilla. Nuestro objetivo es analizar estos interesantes resultados desde el punto de vista de la descripción clásica que subyace a la conjetura AdS/CFT.

2.3. Formulación Hamiltoniana

Hemos ya analizado la cuerda inmersa en AdS₅ desde la formulación Lagrangiana, sin embargo, la presente tesis se basa en el comportamiento del ‘espacio fase’ en la frontera en términos del espacio fase en el bulto para lo cual es necesario considerar la formulación hamiltoniana. Además de estudiar dicha formulación enfatizaremos el uso de la norma semi-estática y la estática, identificando como se mapean estas normas del bulto a la frontera.

La dinámica de la cuerda inmersa en el fondo AdS₅ es un ejemplo de una teoría con constricciones. Conviene por ello analizarla desde el punto de vista Hamiltoniano. Para construir el Hamiltoniano de nuestra teoría, debemos de considerar el momento canónico asociado a $\dot{X}^M(\tau, \sigma)$ (para $M = \mu, z$, para AdS₅ $\mu = 0, 1, 2, 3$) esta definido como

$$P_M \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{X}^M, X^{M'})}{\partial \dot{X}^M} = -\frac{R^2}{2\pi\alpha' z^2} \frac{(\dot{X}^N X'_N) X'_M - (X^{N'} X_{N'}) \dot{X}_M}{\sqrt{(\dot{X}^N X'_N)^2 - (\dot{X}^N \dot{X}_N)(X^{N'} X_{N'})}}.$$

No mostraremos en detalle el cálculo para obtener las constricciones de una cuerda en AdS₅. Este problema esta muy bien explicado y entendido en la literatura [5, 6], aquí sólo mostraremos dicho resultado. El análisis Hamiltoniano permite encontrar dos constricciones primarias de primera clase que son

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X, P) &\equiv \frac{1}{2} \left[G^{MN} P_M P_N + G_{MN} X^{M'} X^{N'} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{z^2}{R^2} (\eta^{\mu\nu} P_\mu P_\nu + P_z^2) + \frac{R^2}{z^2} \left(\eta_{\mu\nu} X^{\mu'} X^{\nu'} + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma} \right)^2 \right) \right], \\ \mathcal{H}_1(X, P) &\equiv P_M X^{M'} \\ &= P_\mu X^{\mu'} + P_z \frac{\partial z}{\partial \sigma}. \end{aligned}$$

donde G_{MN} es la métrica del espacio fondo y G^{MN} su inversa.

Estas constricciones generan la simetrías de norma que corresponden a reparametrizaciones en la hoja-mundo y los correspondientes difeomorfismos en el espacio tiempo. En

el siguiente análisis obviaremos la constante $R^2/2\pi\alpha'$ por simplicidad, esta puede reestablecerse en su sitio por análisis dimensional de cada expresión. Dadas estas constricciones podemos construir entonces el *lagrangiano de primer orden* de la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= P_M \dot{X}^M - \eta \mathcal{H} - \eta_1 \mathcal{H}_1 \\ &= P_\mu \dot{X}^\mu + P_z \dot{z} - \eta \mathcal{H} - \eta_1 \mathcal{H}_1,\end{aligned}\tag{2.27}$$

con η, η_1 multiplicadores de Lagrange. Tomaremos ahora como condición de norma $z = \sigma$ que corresponde a lo que hemos llamado norma semi-estática. Bajo esta condición de norma la restricción \mathcal{H}_1 se ve de la forma

$$P_z = -P_\mu X^{\mu'}.$$

Desarrollando la restricción \mathcal{H} y sustituyendo lo encontrado para P_z podemos reducir nuestra teoría a la restricción $\mathcal{H} = 0$, dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \left[z^2 (\eta^{\mu\nu} P_\mu P_\nu + (P_\mu X^{\mu'})^2) + \frac{1}{z^2} (\eta_{\mu\nu} X^{\mu'} X^{\nu'} + 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[z^2 (P^2 + (P \cdot X')^2) + \frac{1}{z^2} (1 + X'^2) \right].\end{aligned}\tag{2.28}$$

Es entonces (2.28) la restricción hamiltoniana de nuestra teoría con la cual podemos construir el *lagrangiano de primer orden* en la norma semi-estática, dado por

$$\mathcal{L} = P_\mu \dot{X}^\mu - \eta(\tau, z) \mathcal{H}.\tag{2.29}$$

Las ecuaciones de movimiento para dicho lagrangiano son

$$\mathcal{H} = 0,\tag{2.30}$$

$$\dot{X}^\mu - \eta \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\mu} = 0,\tag{2.31}$$

$$-\dot{P}_\mu + \left(\eta \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X^{\mu'}} \right)' = 0.\tag{2.32}$$

De (2.31) podemos despejar a P_μ en términos de las coordenadas del bulto X^μ , el parámetro radial z y el multiplicador de Lagrange η como

$$P_\mu = -\frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (1 + X'^2) \dot{X}_\mu}{z^2 \eta (1 + X'^2)}.$$

Si sustituimos lo forma encontrada para P_μ en el lagrangiano de primer orden (2.29), encontramos que éste se puede reescribir como

$$\mathcal{L} = -\frac{\tilde{G}_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu}{2\eta(1 + X'^2)} - \frac{\eta(1 + X'^2)}{2z^2},\tag{2.33}$$

donde hemos definido

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 1 + (X^{i'})^2 & -X^{0'} X^{i'} \\ -X^{0'} X^{i'} & (X^{0'})^2 - 1 \end{pmatrix},$$

para $\mu = 0, i$.

Esta forma del lagrangiano restringido nos recuerda el lagrangiano relativista para un partícula clásica libre, que esta dado por

$$\mathcal{L}_p = \dot{x}^\mu p_\mu - \xi \mathcal{H}_p, \quad (2.34)$$

con la restricción $\mathcal{H}_p \equiv \frac{1}{2}(p^2 + m^2)$.

Con el objeto de comparar el procedimiento usual para obtener el respectivo lagrangiano de segundo orden consideremos primero el caso de la partícula relativista. Variando \mathcal{L}_p respecto a p_μ encontramos que

$$p_\mu = \frac{\dot{x}_\mu}{\xi}. \quad (2.35)$$

Por otro lado, la variación de (2.34) respecto a x^μ nos da la ecuación de movimiento $\dot{p}^\mu = 0$. Sustituyendo entonces (2.35) en (2.34) obtenemos

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{2\xi} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - \frac{\xi}{2} m^2. \quad (2.36)$$

Por último, si variamos (2.36) respecto a ξ encontramos que

$$\xi = \frac{1}{m} \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu},$$

que al sustituir de nuevo en (2.36), reproduce el lagrangiano de la partícula libre relativista.

$$\mathcal{L}_p = -m \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}. \quad (2.37)$$

Esencialmente el mismo procedimiento nos llevó del lagrangiano de primer orden (2.29) al lagrangiano de segundo orden dado por (2.33) en el caso de la cuerda en AdS. Usando la ecuación de movimiento asociada al multiplicador de Lagrange η podemos despejarlo en términos de las variables X

$$\eta = z \frac{\sqrt{\tilde{G}_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu}}{(1 + X'^2)}, \quad (2.38)$$

sustituyendo dicha forma de η en el lagrangiano, obtenemos que éste es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{z} \sqrt{\tilde{G}_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu}. \quad (2.39)$$

Si, por último, sustituimos explícitamente la métrica $\tilde{G}_{\mu\nu}$ tenemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{z^2} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 (1 + X'^2)}, \quad (2.40)$$

que coincide justamente con el ya encontrado en (2.8), salvo la constante $R^2/2\pi\alpha'$ que hemos omitido desde el inicio. Hemos recuperado el lagrangiano de Nambu-Goto para una cuerda moviéndose en AdS_5 a través del formalismo Hamiltoniano, el cual tiene como ecuaciones de movimiento a (2.14).

Llamaremos norma estática a la relación $X^0(\tau, z) = \tau \equiv t$. Para construir el espacio fase reducido en la norma estática consideremos la constricción hamiltoniana (2.28) y sustituyendo $X^0 = \tau$ obtenemos

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[z^2 \left(-P_0^2 + P_i P^i (P_i X^{i'})^2 \right) + \frac{1}{z^2} (1 + X_i' X^{i'}) \right] = 0.$$

De aquí es posible despejar P_0 y sustituirlo en el lagrangiano de primer orden (2.29). El resultado es el lagrangiano restringido

$$\mathcal{L}_R = P_i \frac{dX^i}{dt} - \sqrt{(P_i P^i + (P_i X^{i'})^2) + \frac{1}{z^4} (1 + X_i' X^{i'})}.$$

Entonces, la acción de la cuerda en la norma estática, donde no hay más grados de libertad por fijar, es

$$S_R = \int dz dt \mathcal{L}_R,$$

que podemos escribir de manera explícita al considerar que P_i está definido de acuerdo a Π_i^τ dada por (2.13). En la norma estática y considerando sólo una dirección de movimiento podemos simplificar la expresión de este momento obteniendo

$$P_X = \frac{1}{z^2} \frac{\dot{X}}{\sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}}.$$

Al considerar la variación de S_R respecto a X recuperamos las ecuaciones de movimiento en la norma estática (2.15) en una dirección espacial (i.e. $i = 1$).

Como sabemos Mikhailov construyó de forma geométrica un mapeo holográfico entre las coordenadas del bulto ($X^\mu(\tau, z)$) y las coordenadas de la frontera ($x^\mu(\tau)$) dado por (2.16). Resulta interesante entender dicho mapeo como un mapeo entre la norma estática en el bulto y la elección de norma de la teoría en la frontera que como sabemos esta dada en términos del tiempo propio de la partícula correspondiente a la punta de la cuerda en la frontera. El mapeo holográfico de Mikhailov para la coordenada temporal X^0 está dado por

$$t \equiv X^0(\tau, z) = z \dot{x}^0(\tau) + x^0(\tau). \quad (2.41)$$

Donde hemos usado la norma estática $X^0 = t$. Por tanto este mapeo nos permite escribir

$$t(t_{ret}, z) = z \frac{1}{\sqrt{1 - v^2(t_{ret})}} + t_{ret}, \quad (2.42)$$

donde hemos denotado $x^0(\tau) \equiv t_{ret}$ como el tiempo propio de la punta de la cuerda en la frontera. Esta relación puede leerse de dos maneras diferentes: En el caso covariante como solución de las ecuaciones de movimiento de la cuerda, y en el caso en donde hemos fijado completamente la norma esta relación es un mapeo holográfico entre la condición de norma usada en el bulto y la condición de norma usada en la frontera.

2.3.1. Mapeo Holográfico entre el Espacio Fase del Bulto y la Frontera

En el formalismo Hamiltoniano para la cuerda en el bulto hemos usado las variables conjugadas (X^μ, P_μ) que definen el espacio fase en el bulto. Ahora bien, nos interesa conocer la estructura del espacio fase para las variables (x^μ, p_μ) que ‘viven’ en la frontera. El primer acercamiento para estudiar la estructura de dicho espacio fase es utilizar la solución propuesta por Mikhailov (2.16). Una manera de implementar este mapeo holográfico entre el espacio fase del bulto y el espacio fase en la frontera es partir de un ansatz inspirado por la solución de Mikhailov. Dicho ansatz es

$$X^\mu(\tau, z) = zp^\mu(\tau) + x^\mu(\tau). \quad (2.43)$$

Es importante señalar que aquí p^μ no es el momento conjugado a x^μ . Sin embargo cumple la relación $p^2 + m^2 = 0$ y x^μ sigue siendo como en el mapeo de Mikhailov, la coordenada de la punta de la cuerda en la frontera $z = 0$ con la condición $\dot{x}^2 + 1 = 0$. En esta sección nos interesa escribir la relación entre p^μ y las variables x^μ y sus derivadas respecto al tiempo e interpretar dicha función como el momento de la partícula en la frontera.

Al sustituir la propuesta (2.43) en las ecuaciones de movimiento de Nambu-Goto obtenemos

$$\dot{x}_\mu + (\dot{x} \cdot p) p_\mu = 0. \quad (2.44)$$

Esta relación implica que $p^\mu = \dot{x}^\mu$ y por el principio variacional de la cuerda tenemos el movimiento correspondiente a una partícula libre relativista. Esto está relacionado al hecho que la partícula en cuestión tiene masa infinita como ha sido ya discutido. Además de reducir las posibilidades de descripción dinámica esencialmente a la partícula libre. En este sentido el ansatz propuesto es demasiado restringido.

Proponemos entonces usar el mecanismo que da masa finita a la partícula en la frontera insertando D7-branas de prueba como lo hemos planteado en el Capítulo 1. Para nuestros fines basta observar que el parámetro responsable de la introducción de la masa finita del quark es $z_m = \sqrt{\lambda}/2\pi m$, donde m es la masa del quark. Por experiencias previas sabemos que el mapeo de Mikhailov para masa finita modifica la dependencia en z se modifica a $(z - z_m)$, puesto que la punta de la cuerda ya no se esta en $z = 0$ sino en $z = z_m$. Por tanto, introduzcamos como ansatz una generalización de (2.43) como

$$X^\mu(\tau, z) = (z - z_m) \frac{p^\mu(\tau, z_m)}{m} + x^\mu(\tau). \quad (2.45)$$

Cabe mencionar, que estamos escribiendo explícitamente la dependencia de p^μ en z_m . Por construcción, el momento ‘físico’ del quark dependerá de dicho parámetro.

Al sustituir el mapeo holográfico (2.45) en la ecuación de movimiento de Nambu-Goto (2.14) se simplifica la dependencia en z obteniendo

$$z_m \frac{\dot{p}_\mu}{m} = \dot{x}_\mu + \left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right) \frac{p_\mu}{m}. \quad (2.46)$$

Sorprendentemente esta relación NO depende de z , lo cual implica que todo punto de la cuerda debe obedecer (2.46) como ecuación de movimiento, en particular para $z = z_m$.

Esta ecuación jugará un papel central en el resto de esta tesis. La deducción de (2.46) y el estudio de esta serán presentados en detalle en el siguiente capítulo. Por ahora usaremos este resultado para construir el espacio fase en la frontera.

Ahora bien, recordemos que las ecuaciones de movimiento en la teoría hamiltoniana clásica son de la forma

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(p, x), \\ \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(p, x).\end{aligned}$$

Podemos considerar que la ecuación obtenida en (2.46) es la primer ecuación de Hamilton. Para encontrar la ecuación de movimiento restante podemos considerar un desarrollo de potencias para $p^\mu(\tau, z_m)$ en z_m alrededor de $z_m = 0$

$$p^\mu(\tau, z_m) = p_0^\mu(\tau, 0) + z_m p_1^\mu(\tau, 0) + z_m^2 p_2^\mu(\tau, 0) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} z_m^i p_i^\mu(\tau, 0). \quad (2.47)$$

Entonces, la ecuación de movimiento (2.46), usando la serie (2.47) puede escribirse en la forma

$$\sum_{i=0} z_m^{i+1} \dot{p}_i^\mu = m \dot{x} + \frac{1}{m} \sum_{i,j=0} z_m^{i+j} (\dot{x} \cdot p_i) p_j^\mu. \quad (2.48)$$

De esta manera podemos determinar los coeficientes $p_i^\mu(\tau, 0)$ de la serie a cada orden de z_m . Por tanto, sustituyendo (2.47) en (2.46) encontramos que a orden '0' en z_m se tiene

$$0 = \dot{x}^\mu + \frac{1}{m^2} (\dot{x} \cdot p_0) p_0^\mu,$$

la cual se se resuelve idénticamente sí

$$p_0^\mu(\tau, 0) = m \dot{x}^\mu. \quad (2.49)$$

A orden lineal en z_m tenemos

$$\dot{p}_0^\mu = \frac{1}{m} ((\dot{x} \cdot p_0) p_1^\mu + (\dot{x} \cdot p_1) p_0^\mu),$$

Usando (2.49) encontramos que esta ecuación se resuelve idénticamente sí

$$p_1^\mu(\tau, 0) = -m \ddot{x}^\mu. \quad (2.50)$$

donde hemos considerado que $\dot{x}^\mu \ddot{x}_\mu = 0$ (relación que proviene del hecho de que $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -1$). A orden cuadrático en z_m tenemos

$$\dot{p}_1^\mu = \frac{1}{m} ((\dot{x} \cdot p_0) p_2^\mu + (\dot{x} \cdot p_1) p_1^\mu + (\dot{x} \cdot p_2) p_0^\mu), \quad (2.51)$$

usando (2.49) y (2.50) encontramos que esta ecuación se resuelve idénticamente sí

$$-m\ddot{x}^\mu = (\dot{x} \cdot p_2)\dot{x}^\mu - p_2^\mu,$$

que al contraer con \dot{x}_μ de ambos lados obtenemos

$$(\dot{x} \cdot p_2) = \frac{m}{2}(\dot{x} \cdot \ddot{x}).$$

Por tanto

$$p_2^\mu(\tau, 0) = m\ddot{x}^\mu + \frac{m}{2}(\dot{x} \cdot \ddot{x})\dot{x}^\mu.$$

A todo orden $n \geq 1$ de z_m , la ecuación diferencial a resolver para p_n^μ es

$$\begin{aligned} \dot{p}_{n-1}^\mu &= \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n (\dot{x} \cdot p_i) p_{n-i}^\mu, \\ &= \frac{1}{m} (\dot{x} \cdot p_0) p_n^\mu + \frac{1}{m} (\dot{x} \cdot p_n) p_0^\mu + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n-1} (\dot{x} \cdot p_i) p_{n-i}^\mu. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que resolver una relación recursiva para p_n^μ , en términos de los momentos a órdenes más bajos. Además, como ya habíamos notado en los casos para $n = 1, 2$, no hay derivadas temporales sobre p_n^μ ; por lo tanto el encontrar p_n^μ en términos de los momentos a ordenes más bajos se vuelve un simple despeje. Haciendo el álgebra y considerando que a orden $n = 0$ sabemos que $p_0^\mu = m\dot{x}^\mu$ se tiene

$$p_n^\mu(\tau) = - \left(\dot{p}_{n-1}^\mu + \frac{\dot{x}^\mu}{2} (\dot{x} \cdot \dot{p}_{n-1}) \right) + \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (\dot{x} \cdot p_i) \left(p_{n-i}^\mu + \frac{\dot{x}^\mu}{2} (\dot{x} \cdot p_{n-i}) \right) \right], \quad (2.52)$$

para toda $n \geq 1$. Encontramos entonces una serie para p^μ que contiene derivadas temporales a orden n de la coordenada x^μ . Podemos considerar la ecuación anterior como la ecuación de Hamilton restante por dos razones; la primera, a orden cero en z_m recuperamos el caso de una partícula relativista de manera correcta. Como segunda razón debemos de considerar que tener un conjunto completo de derivadas sobre $x^\mu(\tau)$, desde el punto de la mecánica clásica, nos dice que tenemos la dinámica de un objeto extendido y no puntual como podía suponerse. La dinámica de la punta de la cuerda en $z = z_m$ no puede ser el de una partícula debido a que le cuelga una cuerda, analizar dicha dinámica no es trivial por lo que en el siguiente capítulo la estudiaremos con detalle.

Capítulo 3

Holografía para la cuerda en AdS₅

En el capítulo anterior propusimos un ansatz como solución a la ecuación de movimiento de Nambu-Goto (2.45), dicho ansatz mapea el espacio fase en el bulto en el ‘espacio fase’ de la frontera. Esta holografía nos permitió establecer algunas de las peculiaridades del espacio fase en la frontera. Estamos interesados ahora en estudiar el contenido dinámico de las ecuaciones de movimiento en el espacio fase de la frontera. Quisiéramos responder la pregunta: ¿Cuáles son las interacciones relativistas codificadas en dichas ecuaciones de movimiento? Otro de nuestros objetivos en este capítulo, será presentar de manera convincente y cuidadosa el paso de sustituir el ansatz en las ecuaciones de movimiento del bulto y como a partir de ellas se deduce la ecuación de movimiento ‘hamiltoniana’ para la partícula en la frontera (2.46).

La dualidad nos permite entender que la dinámica de la punta de la cuerda encajada en un espacio fondo AdS representa un quark ‘vestido’, es decir, no una partícula puntual. Este hecho se refleja en el formalismo hamiltoniano, al encontrar que la expresión del momento en términos de las velocidades contiene en realidad infinitas derivadas respecto al tiempo de la coordenada $x^\mu(\tau)$. Sin embargo, la segunda ecuación de Hamilton propuesta como una serie de potencias en z_m , no nos permite extraer información dinámica, es decir, cuales son las fuerzas implicadas o a que se debe que la partícula se comporte ahora como un objeto extendido.

De acuerdo a las ecuaciones de movimiento de Nambu-Goto, es necesario fijar las condiciones a la frontera tal que el principio variacional extremize la acción. Las condiciones a la frontera nos permitirán ahondar en la dinámica de la punta de la cuerda a través del mapeo holográfico

$$X^\mu(\tau, z, z_m) = (z - z_m) \frac{p^\mu(\tau, z_m)}{m} + x^\mu(\tau), \quad (3.1)$$

donde p^μ cumple la condición de capa de masa $p^2 = -m^2$.

Empecemos por analizar como este ansatz es solución de las ecuaciones de Nambu-Goto (2.14) para toda coordenada radial z y un $p^\mu(\tau, z_m)$ dado. En la construcción hecha por Mikhailov (A.6) puede entenderse como está codificado el comportamiento de la cuerda para todo punto z a través de parámetros definidos en $z = 0$ (a los cuales llamaremos parámetros auxiliares). Usando la dualidad entendemos que la punta de la

cuerda representa una partícula con masa infinita. Análogamente, considerando como nuestro ansatz generaliza la idea de Mikhailov para el caso de masa finita, podemos leer como se comportará un punto de la cuerda para la misma coordenada radial z , pero ahora a través de los parámetros ‘físicos’ del quark en $z = z_m$. La idea es desplazar la frontera de z a z_m y reescribir la solución inicialmente propuesta por Mikhailov en términos de los parámetros definidos a $z = z_m$. Esta idea fue explorada con éxito en [4, 39] en donde se presenta la solución de Mikhailov generalizada que ha dado origen a la ecuación de (Abraham-)Lorentz-Dirac en la teoría de SYM a acoplamiento fuerte usando la conjetura AdS/CFT.

Consideremos que en (3.1) el parámetro z_m podemos fijarlo a cierto valor en el bulto. Entonces podemos recuperar la solución original de Mikhailov si fijamos $z_m = 0$ (lo que implica que $m \rightarrow \infty$)

$$X^\mu(\tau, z)|_{z=0} = z \frac{p^\mu(\tau, 0)}{m} + x^\mu(\tau). \quad (3.2)$$

Si consideramos que

$$\frac{p^\mu(\tau, 0)}{m} = \dot{x}^\mu(\tau) \quad (3.3)$$

y se satisface $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -1$, (3.2) es solución de las ecuaciones de movimiento pues recuperamos (A.6).

Retomando (3.1), esta expresión en $z = 0$ nos permite leer

$$X^\mu(\tau, z_m)|_{z=0} = -z_m \frac{p^\mu(\tau, z_m)}{m} + x^\mu(\tau) \equiv \tilde{x}^\mu(\tau, z_m), \quad (3.4)$$

con $\tilde{x}^\mu(\tau, z_m)$ la punta de la cuerda en la frontera $z = 0$ escrita ahora en términos de los parámetros físicos (x^μ, p_μ) (en $z = z_m$) y queda claro que en el límite $z_m \rightarrow 0$, $\tilde{x}^\mu = x^\mu$. Sin embargo p_μ es función de z_m y τ (no de $\tilde{\tau}$, el tiempo propio de la punta de la cuerda en $z = 0$). Aunque usando la expresión dada por (A.14), es posible cambiar el parámetro τ en $\tilde{x}(\tau, z_m)$ por $\tilde{x}(\tilde{\tau})$. Reescribiendo (3.1) en términos de $\tilde{x}^\mu(\tau, z_m)$, obtenemos

$$X^\mu(\tau, z, z_m) = z \frac{p^\mu(\tau, z_m)}{m} + \tilde{x}^\mu(\tau, z_m). \quad (3.5)$$

Por lo tanto, de aquí resulta claro que nuestro ansatz será solución de las ecuación de Nambu-Goto sí

$$p^\mu(\tau, z_m) = m \dot{\tilde{x}}^\mu(\tau, z_m), \quad (3.6)$$

para todo z_m . Sin embargo, nos interesa escribir esta condición en términos de la variable física $x^\mu(\tau)$ y no en términos de la variable auxiliar $\tilde{x}(\tau, z_m)$. Al hacer esto obtendremos una relación modificada de (3.6) entre p^μ y \dot{x}^μ . Este análisis nos permite considerar a (3.1) escrita en términos de los parámetros físicos del quark, una solución válida de las ecuaciones de Nambu-Goto en todo el bulto sí se satisface (3.6).

3.1. Ecuación de Movimiento para $p^\mu(\tau)$

Para analizar la dinámica de la punta de la cuerda, consideremos el lagrangiano de la acción de Nambu-Goto para el espacio fondo AdS₅ escrito de forma covariante

$$\mathcal{L} = -\frac{R^2}{2\pi\alpha'z^2} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2(X'^2 + 1)}, \quad (3.7)$$

para el análisis posterior convendrá reescribir $R^2/2\pi\alpha'$ en términos de los parámetros m y z_m que están inversamente relacionados. Usando las relaciones (1.10), (1.13) y (2.2) tenemos

$$\frac{R^2}{2\pi\alpha'} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} = mz_m.$$

Dado (3.7) podemos construir los momentos canónicos asociados a la acción de Nambu-Goto. Estos son

$$\begin{aligned} \Pi_\mu^z(\tau) &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \\ &= -m \frac{z_m}{z^2} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - \dot{X}^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2(X'^2 + 1)}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

y

$$\begin{aligned} \Pi_\mu^\tau(\tau) &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \\ &= -m \frac{z_m}{z^2} \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - (X'^2 + 1)\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2(X'^2 + 1)}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para hacer el análisis de la ecuación de movimiento de Nambu-Goto en términos de nuestro ansatz conviene reescribir las derivadas de estos momentos en términos de las funciones $(x^\mu(\tau), p^\mu(\tau, z_m))$, encontrando que son de la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{mz_m} \frac{d\Pi_\mu^\tau}{d\tau} &= \frac{1}{z^2} \frac{\dot{p}_\mu}{m}, \\ \frac{1}{mz_m} \frac{d\Pi_\mu^z}{dz} &= \frac{1}{z^2 \left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m}\right)} \left[\left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m}\right) \frac{\dot{p}_\mu}{m} - 2 \frac{p_\mu}{m} \left((z - z_m) \frac{\dot{p}^2}{m^2} + \left(\dot{x} \cdot \frac{\dot{p}}{m}\right) \right) \right] \\ &\quad - \frac{2}{z^3 \left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m}\right)} \left[\left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m}\right) \left(\dot{x}_\mu + (z - z_m) \frac{\dot{p}_\mu}{m}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{p_\mu}{m} \left((z - z_m)^2 \frac{\dot{p}^2}{m^2} + 2(z - z_m) \left(\dot{x} \cdot \frac{\dot{p}}{m}\right) - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Donde ha sido básico suponer que $x^\mu(\tau)$ esta parametrizada por el tiempo propio del quark, es decir, satisface que $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -1$ y que p^μ cumple con la condición de capa de

masa: $p^2 = -m^2$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento de Nambu-Goto

$$\frac{d\Pi_\mu^z}{dz} + \frac{d\Pi_\mu^\tau}{d\tau} = 0,$$

bajo nuestro ansatz (3.1), se reescribe como

$$\begin{aligned} & - \left[\left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right) \dot{x}_\mu + \frac{p_\mu}{m} \right] + z \left[\left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right) \frac{\dot{p}_\mu}{m} - \left(\dot{x} \cdot \frac{\dot{p}}{m} \right) \frac{p_\mu}{m} \right] \\ & - (z - z_m) \left[z_m \frac{\dot{p}^2}{m^2} \frac{p_\mu}{m} + \left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right) \frac{\dot{p}_\mu}{m} - 2 \left(\dot{x} \cdot \frac{\dot{p}}{m} \right) \frac{p_\mu}{m} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para simplificar la relación anterior conviene contraer (3.10) con \dot{p}^μ/m . Esto produce la relación

$$z_m \frac{\dot{p}^2}{m^2} = \left(\dot{x} \cdot \frac{\dot{p}}{m} \right),$$

que al sustituir de nuevo en (3.10), nos permite escribir dicha condición en la forma

$$z_m \left[\left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right) \frac{\dot{p}_\mu}{m} - \left(\dot{x} \cdot \frac{\dot{p}}{m} \right) \frac{p_\mu}{m} \right] = \left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right) \dot{x}_\mu + \frac{p_\mu}{m}. \quad (3.11)$$

donde la dependencia en z se ha eliminado por completo. Esto implica que la condición es válida para todo punto z de la cuerda en el bulto, aunque es importante notar que está escrita en términos de los parámetros de la punta de la cuerda (x^μ, p_μ) en $z = z_m$.

Para reescribir de forma más compacta (3.11) conviene hacer una última contracción con p^μ/m , encontrando que $(\dot{x} \cdot \dot{p}/m)$ se puede escribir como

$$z_m \left(\dot{x} \cdot \frac{\dot{p}}{m} \right) = \left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right)^2 - 1,$$

que al sustituir en (3.11) obtenemos finalmente

$$z_m \left(\frac{\dot{p}^\mu}{m} \right) = \dot{x}^\mu + \frac{p^\mu}{m} \left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right). \quad (3.12)$$

Esta condición resulta sobre las funciones (x^μ, p_μ) para que el ansatz propuesto (3.1) sea solución de las ecuaciones de movimiento de la cuerda en AdS. Podemos interpretarla como la ecuación de movimiento de la punta de la cuerda en la frontera. Resulta sorprendente que una ecuación tan compacta emerja al considerar un ansatz tan general para $X^\mu(\tau, z)$ escrito en el ‘espacio fase’, y más aún que la dependencia en la coordenada radial del bulto z desaparezca.

Es entonces (3.12) una ecuación de movimiento para las coordenadas del quark en $z = z_m$ que se debe de satisfacer en todo punto z para que (3.1) sea solución de las ecuaciones Nambu-Goto. Y bajo el mapeo holográfico entre las coordenadas de la frontera de AdS y las coordenadas del bulto, de acuerdo a (3.12), podemos estudiar el espacio de

la frontera a partir de dinámica del bulto. Dicho estudio nos permitirá encontrar el perfil de la cuerda moviéndose en este fondo.

Antes de continuar notemos que si el quark tiene masa infinita ($z_m \rightarrow 0$) la ecuación de movimiento se reduce a

$$\dot{x}^\mu(\tau) = -\frac{1}{m^2} (\dot{x}(\tau) \cdot p(\tau, 0)) p^\mu(\tau, 0)$$

que se resuelve idénticamente si $p^\mu(\tau, 0) = m\dot{x}^\mu(\tau)$, tal como habíamos pedido en (3.3) y esta en total acuerdo con (2.44). En este caso al considerar un quark con masa infinita los grados de libertad, que de acuerdo a la dualidad representan la dinámica de una partícula vestida, colapsan a los grados de libertad de una partícula usual.

De acuerdo a la serie (2.47), encontramos que p^μ se escribe en términos de infinitas derivadas sobre x^μ , lo cual nos lleva a concluir que dicha ecuación no se refiere al movimiento de una partícula sino de un *objeto extendido* sobre la frontera. Y por otro lado sabemos por estudios previos que usando la dualidad AdS/CFT un quark con masa finita no es un quark ‘desnudo’ sino que es automáticamente un quark ‘vestido’ o ‘compuesto’ que tiene un tamaño característico z_m y puede ser entendido como un quark desnudo rodeado de una nube gluónica [43]. La punta de la cuerda, representada por la mecánica clásica en la frontera, está en completo acuerdo con la descripción que proviene de la conjetura AdS/CFT.

Del lado de la teoría de norma, z_m es el tamaño característico de la ‘nube gluónica’ que rodea al quark. Esto es lo que esperábamos: que quarks masivos tuvieran un grosor en la teoría fuertemente acoplada. La conjetura AdS/CFT codifica automáticamente dicha información. Del lado de la teoría de gravedad, $z_m = \sqrt{\lambda}/2\pi m$ está relacionado con la longitud de onda de Compton del quark con su masa.

3.1.1. Fuerza de Arrastre

En esta sección consideraremos en detalle los términos de borde de la acción de Nambu-Goto y propondremos una forma de incorporarlos en nuestro análisis de la dinámica de la punta de la cuerda en la frontera. De este análisis se desprenderá la idea de que la trayectoria de la partícula en la frontera $x^\mu(\tau)$, que es en principio cualquier trayectoria preescrita (pues sobre esta función no hay condiciones adicionales para que el ansatz propuesto sea solución de las ecuaciones de movimiento de la cuerda en el bulto), esta relacionada con una fuerza externa que es la responsable de que la partícula se mueva con cierta trayectoria. Para introducir esa fuerza seguiremos el argumento planteado en [4, 29, 31], tal que el quark (o la punta de la cuerda) siga un trayectoria particular, $x^\mu(\tau) \equiv X^\mu(\tau, z_m)$, debemos de aplicar una fuerza externa sobre éste: F^μ . Para esto, podemos ‘prender’ un campo eléctrico $F_{0i} \equiv F_i$ en las D7-branas, por ejemplo. Debemos de agregar a la acción de Nambu-Goto el término

$$S_F = \int d\tau A_\mu^{D7}(x(\tau)) \partial_\tau x^\mu(\tau), \quad (3.13)$$

que resulta en un acoplamiento mínimo entre el campo de norma A_μ^{D7} y la punta de la cuerda. Al variar la acción dada por $S_{NG} + S_F$, encontramos las mismas ecuaciones de

Nambu-Goto (2.14) más una condición a la frontera que nos fija Π_μ^z , la 4-corriente de momento, como

$$\Pi_\mu^z(\tau)\Big|_{z=z_m} = \Pi_\mu^{z_m} \equiv -\mathcal{F}_\mu(\tau), \quad (3.14)$$

donde hemos definido $\mathcal{F}_\mu \equiv F_{\mu\nu}\partial_\tau x^\nu$, con $F_{\mu\nu}$ la fuerza de Lorentz proveniente del campo de norma A_μ^{D7} . Si consideramos que τ es el tiempo propio tenemos $\mathcal{F}_\mu = \gamma(-\vec{F} \cdot \vec{v}, \vec{F})$. Debido a que $F_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico, se satisface que $\mathcal{F}^\mu\partial_\tau x_\mu = 0$.

Ahora bien, de la expresión para Π_μ^z (3.8), al sustituir nuestro ansatz (3.1) podemos reescribir dicho momento en términos de las coordenadas en la frontera (x^μ, p_μ) como

$$\Pi_\mu^z\Big|_{z=z_m} = -\frac{m}{z_m} \frac{(\dot{x} \cdot p)\dot{x}_\mu + p_\mu}{(\dot{x} \cdot p)} \equiv -\mathcal{F}_\mu. \quad (3.15)$$

Si contraemos (3.15) consigo misma podemos despejar el término $(\dot{x} \cdot p)$ en términos de la fuerza en la frontera como

$$\left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \mathcal{F}^2}}.$$

Tal que, al sustituir esta expresión de nueva cuenta en (3.15) podemos leer que el momento asociado al quark en términos de \dot{x} y \mathcal{F} es

$$\frac{p^\mu(\tau, z_m)}{m} = \frac{\dot{x}^\mu - \frac{z_m}{m}\mathcal{F}^\mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \mathcal{F}^2}}. \quad (3.16)$$

Esta expresión implica una nueva relación de p^μ en términos de \dot{x}^μ . ¿Será esta relación consistente con el resultado que previamente hemos obtenido (p^μ en términos de una serie infinita (2.47))? Resulta interesante notar que (3.16) es la misma encontrada en (A.16), cuando hay una condición de frontera dada por (3.14), aun cuando ambas expresiones se dedujeron a partir de argumentos distintos. En nuestro caso la dinámica clásica de la punta de la cuerda en términos de nuestro ansatz ha bastado para su deducción.

Para responder la pregunta planteada, notemos que de acuerdo a (3.16), el momento del quark p^μ depende explícitamente del parámetro z_m . Por lo tanto podemos realizar la expansión en potencias de z_m para esta expresión obteniendo

$$p^\mu(\tau, z_m) = (m\dot{x}^\mu - z_m\mathcal{F}^\mu) \sum_{n=0} \frac{1}{2^n} \frac{(2n-1)!!}{n!} \left(\frac{z_m}{m}\mathcal{F}\right)^{2n}. \quad (3.17)$$

Si consideramos los primeros términos de esta serie tenemos

$$\begin{aligned} p_0^\mu(\tau, 0) &= m\dot{x}^\mu \\ p_1^\mu(\tau, 0) &= -\mathcal{F}^\mu \\ p_2^\mu(\tau, 0) &= \frac{1}{2}m\dot{x}^\mu \left(\frac{\mathcal{F}^2}{m^2}\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podemos intentar comparar dichos términos con los que provienen de la serie (2.47), la cual hemos construido para $p^\mu(\tau, z_m)$ pidiendo que satisfaga (3.12). Los primeros términos de dicha serie son

$$\begin{aligned} p_0^\mu(\tau, 0) &= m\dot{x}^\mu, \\ p_1^\mu(\tau, 0) &= -m\ddot{x}^\mu, \\ p_2^\mu(\tau, 0) &= m\ddot{x}^\mu + \frac{m}{2}(\dot{x} \cdot \ddot{x})\dot{x}^\mu, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ambas series coinciden en el término a orden cero en z_m , sin embargo para que el término a primer orden coincida es necesario identificar

$$\mathcal{F}^\mu \equiv m\ddot{x}^\mu. \quad (3.18)$$

Esta identificación no es otra cosa que la ecuación de movimiento (relativista) de una partícula sobre la que actúa la fuerza \mathcal{F}^μ .

En el caso $n = 2$ usamos la restricción $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -1$ y la derivamos dos veces para obtener

$$\ddot{x}^\mu \dot{x}_\mu + \dot{x}^2 = 0,$$

y de aquí obtenemos que $\ddot{x}^\mu = \dot{x}^\mu \dot{x}^2$. Sustituyendo en el coeficiente $p_2^\mu(\tau, 0)$ obtenemos

$$p_2^\mu(\tau, 0) = m\ddot{x}^2 \dot{x}^\mu + \frac{m}{2}(\dot{x} \cdot \dot{x})\ddot{x}^2 \dot{x}^\mu = \frac{1}{2}m\dot{x}^\mu \left(\frac{\mathcal{F}^2}{m^2} \right),$$

mostrando explícitamente que los coeficientes a segundo orden coinciden. Este procedimiento puede continuarse a cualquier orden en z_m usando información de todos los órdenes en z_m anteriores. Concluimos entonces que las dos series (2.47) y (3.17) coinciden.

De acuerdo a (3.12) esperábamos que cualquier relación válida entre p^μ y \dot{x}^μ , que satisfaga la condición de capa de masa, fuera en principio válida para estudiar el movimiento del quark en la frontera. Sin embargo, del análisis anterior, dada la condición a la frontera $\Pi_\mu^z \Big|_{z=z_m} \equiv -\mathcal{F}_\mu$ nos determina de manera única la forma que puede tener el momento asociado al quark. Es entonces (3.16) la ecuación de Hamilton (2.52) reescrita en términos de una condición a la frontera. Por lo tanto conociendo la fuerza ejercida sobre la punta de la cuerda, en principio, somos capaces de estudiar la dinámica del quark.

3.2. Ecuaciones de (Abraham-)Lorentz-Dirac Generalizadas

En la sección anterior hemos encontrado la forma que debe de tener el momento del quark/punta de la cuerda cuando hay una condición de frontera presente, dicha condición la identificamos con una fuerza de Lorentz que actúa solamente en la punta de la cuerda en

la frontera desplazando este punto en la trayectoria $x^\mu(\tau)$. Esta trayectoria es arbitraria, pues no hay condiciones sobre ella para que el ansatz holográfico sea solución de las ecuaciones de movimiento en el bulto. La fuerza que actúa sobre la punta de la cuerda es también arbitraria y será la causa del movimiento en la trayectoria $x^\mu(\tau)$.

Podemos estudiar la dinámica del quark si retomamos la ecuación de movimiento

$$z_m \left(\frac{\dot{p}^\mu}{m} \right) = \dot{x}^\mu + \frac{p^\mu}{m} \left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right),$$

al sustituir la forma encontrada para p^μ dada por (3.16) en términos de \mathcal{F}^μ . De esta forma podemos determinar la ecuación de movimiento que debe obedecer el quark, es decir, la ecuación diferencial que debe satisfacer x^μ . Encontramos que dicha ecuación es de la forma

$$m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}^\mu - \frac{z_m}{m} \mathcal{F}^\mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \mathcal{F}^2}} \right) = \frac{\mathcal{F}^\mu - \frac{z_m}{m} \mathcal{F}^2 \dot{x}^\mu}{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \mathcal{F}^2}. \quad (3.19)$$

Esta ecuación se reduce correctamente a

$$m \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \mathcal{F}^\mu$$

que describe la dinámica de una partícula puntual en el límite $m \rightarrow \infty$ ($z_m \rightarrow 0$). La pregunta que surge de manera natural es: ¿Cuál es el significado de las correcciones a esta descripción puntual de la dinámica? Considerando la ecuación (3.19) hasta términos lineales en z_m obtenemos la ecuación de (Abraham-)Lorentz-Dirac (Capítulo 2). Por tanto esta ecuación reproduce a primer orden una importante ecuación de la electrodinámica clásica que describe la interacción de una partícula con su propio campo de radiación. Es importante notar que en el caso de la electrodinámica el concepto partícula tiene sentido para distancias mucho mayores que el radio del electrón r_e .

Analicemos ahora que significan las correcciones de mayor orden en z_m . Esperaríamos que de acuerdo a la conjetura AdS/CFT la ecuación (3.19) describa la dinámica de una partícula interactuando con su propio campo de radiación pero, ahora en la cromodinámica (ya que la teoría de norma subyacente es ahora SYM con $\mathcal{N} = 4$) donde el papel que jugaba el radio del electrón en la electrodinámica lo juegue el parámetro z_m . Tenemos razones suficientes para argumentar que en efecto la ecuación (3.19) es la generalización de la correspondiente ecuación de ALD al caso de la cromoelectrodinámica en SYM fuertemente acoplado. Esto fue estudiado en detalle en trabajos anteriores como [4] y [35]. Para nuestros fines basta considerar a la ecuación (3.19) como una descripción clásica de un sistema dinámico dado. Quisiéramos investigar cuál es la relación entre esta descripción y la descripción desarrollada en el capítulo anterior con ayuda de nuestro mapeo holográfico.

Si definimos P_μ como el momento total de la cuerda que es igual al momento del quark más el momento del campo de radiación, podemos escribir (3.19) en la forma

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{dP_{rad}^\mu}{d\tau} + \frac{dp^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu, \quad (3.20)$$

donde

$$\frac{p^\mu(\tau, z_m)}{m} = \frac{\dot{x}^\mu - \frac{z_m}{m} \mathcal{F}^\mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \mathcal{F}^2}},$$

es el momento intrínseco del quark que cumple, como debe, con la relación $p^2 + m^2 = 0$ y

$$\frac{dP_{rad}^\mu}{d\tau} = \frac{z_m}{m^2} \frac{\mathcal{F}^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \mathcal{F}^2}} p^\mu, \quad (3.21)$$

es la razón a la cual el momento se transfiere del quark al campo de radiación cromoelectromagnética.

Para comparar esta ecuación de movimiento con los resultados de la presente tesis consideremos la expansión en serie a primer orden en z_m de la ecuación (3.19), obteniendo

$$m\ddot{x}^\mu - z_m \dot{\mathcal{F}}^\mu = \mathcal{F}^\mu - \frac{z_m}{m} \mathcal{F}^2 \dot{x}^\mu. \quad (3.22)$$

Si recuperamos la condición para (x^μ, p_μ) dada por (3.12) escrita en series de p^μ

$$\sum_{i=0} z_m^{i+1} \dot{p}_i^\mu = m\dot{x} + \frac{1}{m} \sum_{i,j=0} z_m^{i+j} (\dot{x} \cdot p_i) p_j^\mu.$$

A segundo orden en z_m obtenemos una clara coincidencia con la expansión (3.22) al usar los coeficientes provenientes de (3.17). Este resultado no nos sorprende y es consecuencia de la comparación de las series para $p^\mu(z_m, \tau)$ analizada en la sección previa. Este procedimiento lo podemos realizar a todo orden en z_m , sin embargo hay que usar información de una cadena de ecuaciones de orden menor en z_m .

Como hemos dicho la dualidad AdS/CFT nos ha permitido dar una interpretación física de la ecuación (3.19) y mostrar que se trata de la generalización de la ecuación de (Abraham-)Lorentz-Dirac que automáticamente incorpora el tamaño z_m de nuestra fuente que es no-clásica, no-abeliana y no-puntual. Ahora entendemos con mayor profundidad que la ecuación

$$z_m \left(\frac{\dot{p}^\mu}{m} \right) = \dot{x}^\mu + \frac{p^\mu}{m} \left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right),$$

más la información del momento como función de las velocidades, que hemos obtenido imponiendo una condición de frontera, específica en el principio variacional de NG como fue descrito en la sección previa

$$\frac{p^\mu(\tau, z_m)}{m} = \frac{\dot{x}^\mu - \frac{z_m}{m} \mathcal{F}^\mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \mathcal{F}^2}},$$

es equivalente al resultado obtenido en [4]. Sin embargo, en el presente trabajo hemos deducido todo a partir del mapeo holográfico propuesto más la condición de frontera (3.15).

Los puntos sobresalientes de esta comparación pueden resumirse en la lista siguiente:

1. Para describir la dinámica de un quark en SYM a acoplamiento fuerte es necesario añadir un número infinito de derivadas respecto a τ . Cada coeficiente en esta serie en derivadas es proporcional a $(z_m)^n$. Esto se deduce de la serie en potencias de z_m planteada en la sección 3.1. Al compararla con los resultados obtenidos en esta sección, usando explícitamente la condición de frontera (3.15), resulta que ambos resultados coinciden a todo orden en z_m usando información de ordenes previos. Sorprendentemente dicha serie pueda sumarse en la serie asociada a $1/\sqrt{1-x^2}$ para x pequeñas.
2. La información dinámica contenida en la serie transforma profundamente las características básicas del espacio fase.
3. Resulta interesante notar que la ecuación (3.19) incorpora los efectos de frenado por radiación del quark, que ha sido obtenida a partir del mapeo holográfico (3.1). éste codifica información dinámica en la frontera que proviene del movimiento de la cuerda en el bulto, como efectos de frenado por radiación. Caracteriza la punta de la cuerda como un quark compuesto o vestido con tamaño característico dado por z_m .
4. Hemos presentado una deducción puramente holográfica de la generalización de la ecuación de ALD que captura la dinámica del quark en interacción con su propio campo de radiación. Nuestro análisis va más allá de la conjetura AdS/CFT usual en el sentido de que se basa solamente en el mapeo holográfico de los grados de libertad de la cuerda en el bulto cuya geometría es la de AdS₅ a la frontera.

3.3. Soluciones a ALD

Para finalizar este capítulo recuperemos resultados importantes de las soluciones a ALD. Estos resultados nos permitirán estudiar el movimiento de defectos extendidos con mayor número de dimensión en la frontera de AdS, tema central del Capítulo 4.

Dado p^μ/m por (3.16), nuestro ansatz como solución a las ecuaciones del bulto en el espacio fase tiene una forma muy específica dada por

$$X^\mu(\tau, z, z_m) = \frac{(z - z_m)}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \mathcal{F}^2}} \left(\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} - \frac{z_m}{m} \mathcal{F}^\mu \right) + x^\mu(\tau). \quad (3.23)$$

Dicha solución codifica el hecho de tener un quark en la frontera que esta ‘vestido’ por un campo gluónico y tiene masa finita m , sobre el cual actúa una fuerza externa \mathcal{F}^μ . Convendrá reescribir esta solución parametrizada por $x^0 \equiv t_{ret}$. Además bastará analizar para los fines del presente trabajo el caso en el que la fuerza externa se ejerce en una sola dimensión, por lo que el quark se moverá sólo en dicha dimensión que denotaremos por $x^1(\tau) \equiv x(\tau)$. Bajo estas consideraciones podemos reescribir (3.23) en su parte temporal

y espacial ya en el parámetro t_{ret} como

$$X^0(t_{ret}, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} \frac{(z - z_m)}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 F^2}} \left(1 - \frac{z_m}{m} F \dot{x}\right) + t_{ret}, \quad (3.24)$$

$$X(t_{ret}, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} \frac{(z - z_m)}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 F^2}} \left(\dot{x} - \frac{z_m}{m} F\right) + x, \quad (3.25)$$

donde $\dot{x} \equiv dx/dt_{ret}$ y $F \equiv F_{01}$.

Bajo este mapeo holográfico, la ecuación de movimiento que obedece la coordenada $x(t_{ret})$ está dada por (3.19) reescrita en el parámetro t_{ret} en una sola dimensión espacial. Reescribiendo (3.19) bajo estas consideraciones, la condición para la coordenada espacial es

$$ma = \frac{F}{\gamma^3 \sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 F^2}} + \frac{z_m \dot{F}}{\gamma^2 \left(1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 F^2\right)}, \quad (3.26)$$

donde $a \equiv d\dot{x}/dt_{ret}$. De (3.26), queda claro que si hay una fuerza externa distinta de cero aplicada sobre el quark, éste se acelera y por ende radiará. Estamos en condiciones de analizar el movimiento del quark bajo ciertas fuerzas externas relevantes para el presente trabajo.

Quark uniformemente acelerado en 1D

De la definición de \mathcal{F}^μ (3.15) resulta claro que es función de τ implícitamente, por tanto el caso más sencillo que podemos analizar es cuando se aplica una fuerza constante en el tiempo sobre el quark. Dejaremos el caso $\mathcal{F} = 0$ para la siguiente sección. De acuerdo a esta consideración, (3.26) se reduce a

$$\frac{d}{dt_{ret}} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} \right) = \frac{F}{m \sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 F^2}}. \quad (3.27)$$

Si consideramos que el quark se mueve con aceleración propia constante, la expresión para dicha aceleración esta dada por

$$A \equiv \sqrt{\ddot{x}^\mu(\tau) \ddot{x}_\mu(\tau)},$$

donde $\ddot{x} = d^2x/d\tau^2$. Reescribiendo en términos del parámetro t_{ret} la aceleración propia A toma la forma

$$A = \frac{d}{dt_{ret}} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} \right) = \frac{F}{m \sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 F^2}}, \quad (3.28)$$

de acuerdo a (3.27). De (3.28) la trayectoria para el quark debe ser una trayectoria hiperbólica dada por

$$x(t_{ret}) = \sqrt{A^{-2} + t_{ret}^2}, \quad (3.29)$$

que corresponde a la trayectoria descrita por una partícula uniformemente acelerada como era de esperarse al aplicar una fuerza constante.

De (3.28) podemos despejar a la aceleración propia del quark (A) en términos de la fuerza ejercida sobre éste (F) y reescribir la solución de Mikhailov en términos de la aceleración propia como

$$X^0(t_{ret}, z) = (z - z_m)\gamma \left(\sqrt{1 + z_m^2 A^2} - \dot{x} z_m A \right) + t_{ret}, \quad (3.30)$$

$$X(t_{ret}, z) = (z - z_m)\gamma \left(\dot{x} \sqrt{1 + z_m^2 A^2} - z_m A \right) + x. \quad (3.31)$$

Sin embargo, esta solución no extremiza la acción de Nambu-Goto en el bulto mismo (ni en la frontera de éste), es decir, no hace cero idénticamente las ecuaciones de Nambu-Goto (2.14). Esto se debe a que el mapeo holográfico propuesto no resuelve idénticamente la ecuación de movimiento de Nambu-Goto, sino que impone una condición de frontera sobre el quark en $z = z_m$ que a la postre interpretamos como una trayectoria particular del quark.

Sin embargo, en este caso en particular, es posible eliminar el parámetro t_{ret} de (3.31) usando la relación que da la solución Mikhailov para la parte temporal (3.30). Tal cálculo se muestra en [4], donde la solución para la coordenada espacial en el bulto se puede reescribir como

$$X(t, z) = \sqrt{A^{-2} + t^2 - z^2 + z_m^2}, \quad (3.32)$$

donde hemos considerado la norma estática $X^0 \equiv t$ para el tiempo en el bulto. Esta relación resuelve idénticamente las ecuaciones de movimiento de Nambu-Goto en la norma estática

$$\ddot{X} - X'' + \ddot{X} X'^2 + X'' \dot{X}^2 - 2\dot{X} X' \dot{X}' + \frac{2}{z} X' (1 + X'^2 - \dot{X}^2) = 0,$$

para toda z (recordemos que en esta expresión $\dot{X} = dX/dt$).

Solución para v constante

El caso más sencillo a analizar es cuando no hay fuerza externa aplicada sobre el quark, $\mathcal{F}^\mu = 0$. En el caso de una sola dirección de movimiento espacial, la condición sobre dicha condición se traduce en $ma = 0$ (v constante) de acuerdo a (3.26) como es de esperarse para un partícula libre.

Ahora bien, si en (3.26) consideramos que el quark se mueve a velocidad constante obtenemos una ecuación diferencial para la fuerza de la forma

$$\dot{F} = -\frac{F}{z_m \gamma} \sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 F^2}. \quad (3.33)$$

Esta ecuación diferencial, sorprendentemente, acepta soluciones más allá de la trivial ($F = 0$) tal como se estudió en [4]. Al fijar un valor para $\dot{x}(t_{ret})$ constante al resolver la

ecuación diferencial se obtiene como solución general

$$F(t_{ret}) = \pm \frac{m}{z_m} \frac{1}{\cosh\left(\frac{t_{ret}}{z_m \gamma}\right)}. \quad (3.34)$$

¿Cómo debemos de entender la existencia de dicha fuerza no trivial? La energía provista al sistema por $F(t_{ret})$ no se traduce en un incremento de la velocidad a la cual se mueve la punta de la cuerda, pero sí en una modificación continua de la cola de la cuerda, que entendido en la teoría de norma es un cambio del perfil del campo gluónico.

Reescribiendo el mapeo holográfico (3.24, 3.25) para la solución (3.34), éste toma la forma

$$X^0(t_{ret}, z) = (z - z_m)\gamma \coth\left(\frac{t_{ret}}{z_m \gamma}\right) \left[1 - \dot{x} \operatorname{sech}\left(\frac{t_{ret}}{z_m \gamma}\right)\right] + t_{ret}, \quad (3.35)$$

$$X(t_{ret}, z) = (z - z_m)\gamma \coth\left(\frac{t_{ret}}{z_m \gamma}\right) \left[\dot{x} - \operatorname{sech}\left(\frac{t_{ret}}{z_m \gamma}\right)\right] + x. \quad (3.36)$$

Notemos primeramente que el hecho de que exista (3.34) como solución a (3.33) se debe a tener una partícula con tamaño característico z_m ; lo cual se hace claro al tomar $z_m \rightarrow 0$ en (3.35) y (3.36) recuperamos la solución para una partícula puntual con masa infinita en $z = 0$, para la parte espacial

$$X = z\gamma\dot{x} + x.$$

Considerando la expresión para el perfil de la cuerda (3.25) para $F = 0$, este se ve de la forma

$$X = (z - z_m)\gamma\dot{x} + x,$$

que claramente difiere del mapeo (3.36). Aparentemente, para dos movimientos idénticos de la punta de la cuerda, velocidad constante, se tienen dos perfiles diferentes. La ambigüedad resulta en querer el mapeo holográfico en sentido inverso, de la frontera al bulto. Para poder hacer dicha lectura de forma correcta hay que tratar que considerar el análisis hecho en la sección anterior para aceleración constante, donde fue posible eliminar el parámetro t_{ret} y escribir el perfil de la cuerda en términos del tiempo en el bulto t .

3.4. Apuntes Finales

En este capítulo hemos estudiado un mapeo holográfico propuesto como ansatz para las ecuaciones de movimiento de Nambu-Goto (3.1), lo que nos ha permitido construir un mapeo entre el espacio fase del bulto y el espacio fase de la frontera.

Haciendo el análisis de las ecuaciones de Nambu-Goto, a través de el mapeo holográfico, logramos construir una condición sobre el espacio fase de la frontera (3.12) que deben satisfacer las funciones (x^μ, p_μ) . Dicha condición codifica toda la información dinámica de la cuerda moviéndose en AdS₅ como ya se sabía de acuerdo a trabajos anteriores.

Sin embargo, es de resaltar que dicha información se ha obtenido a partir de un análisis clásico del estudio de la punta de la cuerda.

En la segunda parte de este capítulo corroboramos la validez del mapeo holográfico a través de (3.12) al ser capaces de reconstruir la formulación generalizada de (Abraham-)Lorentz-Dirac, logrando un análisis más allá de la conjetura AdS/CFT.

Capítulo 4

Defectos extendidos en un fondo AdS_{d+1}

La correspondencia AdS/CFT ha resultado ser una herramienta muy poderosa que nos permite estudiar regímenes no triviales en una teoría de campo fuertemente acoplada a través de su dual gravitacional. En este capítulo nos interesa usar la dualidad para estudiar la dinámica *volumen-mundo* en el espacio $d+1$ -dimensional AdS_{d+1} que nos permitirá estudiar la correspondiente dinámica en teorías conformes definidas en la frontera de dicho espacio. Como puede verse del material presentado en capítulos anteriores no hay nada que impida la generalización de las mismas ideas a espacios con mayor número de dimensiones. De hecho la solución de Mikhailov, que ha sido fundamental en nuestro análisis y el correspondiente *ansatz* que de ella hemos derivado, no depende del número de dimensiones en el bulto. Claro está que la interpretación física cambiará radicalmente en espacios distintos a $\text{AdS}_5 \times S_5$ debido a las propiedades intrínsecas de AdS_5 y su respectiva frontera plana (Minkowski).

Consideraremos un análisis similar al hecho en el capítulo anterior, donde estudiaremos la dinámica de un defecto extendido inmerso en AdS_{d+1} , con particular interés en los defectos de tipo membrana en AdS_7 que han sido poco explorados en la literatura. En el mismo sentido en el que $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ SYM es dual a una teoría de cuerdas de tipo IIB compactificada en un fondo AdS_5 , la teoría de norma conforme CFT_6 y la *teoría M* 11-dimensional compactificada en AdS_7 son descripciones duales.

La cuerda inmersa en un espacio de fondo es el defecto más simple que podemos considerar, el cual ya hemos analizado a través del mapeo holográfico. Comenzaremos por plantear el caso general para defectos extendidos en n -dimensiones que nos permitan recuperar defectos similares cuya dinámica pueda analizarse utilizando ideas similares a nuestro *ansatz* como solución a las ecuaciones de movimiento correspondientes en el bulto. En la correspondiente frontera tendremos ahora defectos extendidos y con el objeto de hacer el análisis lo más manejable posible consideraremos casos simples en donde los grados de libertad en la frontera se reducen drásticamente. Los objetivos de este capítulo son

1. Generalizar las ideas expuestas en capítulos anteriores a espacios con más dimen-

siones.

2. Partir de una forma particular para el principio variacional en el bulto que permita analizar la dinámica del correspondiente objeto extendido usando las herramientas desarrolladas en esta tesis.
3. Relacionar el problema de la cuerda con condiciones de frontera específicas con el problema geométrico que surge del principio variaciones para el problema extendido. Esto es posible porque estamos interesados en introducir la fuerza que actúa sobre el quark y que aparece como una condición de frontera para la cuerda en AdS_5 con una fuerza que aparece ahora en el bulto de manera natural al considerar el movimiento del objeto extendido.

4.1. Defecto n -dimensional

Consideremos un fondo generalizado de la forma $AdS_{d+1} \times W$, donde W es una variedad compacta (para W la 5-esfera recuperamos $AdS_5 \times S_5$) con radio igual al radio de curvatura de AdS. La métrica de fondo $G_{\mu\nu}$ es entonces

$$ds^2 = R^2 \left(r^2 \left(-dX_0^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dX_i^2 \right) + \frac{dr^2}{r^2} + \frac{ds_W^2}{R^2} \right),$$

a temperatura $T = 0$, donde R es el radio de curvatura de AdS, ds_W^2 es el elemento de línea de W .

Estaremos interesados en estudiar defectos extendidos que ‘cuelguen’ en la dirección radial a partir de $z = z_m$ hacia infinito. En el acoplamiento fuerte, la teoría en el bulto será de gravedad clásica por lo que podemos usar la acción generalizada de Nambu-Goto para determinar el comportamiento del ‘defecto’. Entonces para el mapeo del *volumen-mundo* dado por $\sigma^i \rightarrow X^i$ (en particular $\sigma^0 = \tau$ y $\sigma^1 = z$) las ecuaciones clásicas de movimiento estarán dadas por la variación de la acción

$$S = -T \int \prod_i d\sigma_i \sqrt{-g},$$

donde T es la tensión del defecto y $g \equiv \det g_{ab}$ la métrica inducida en el volumen-mundo. Para trabajar el régimen clásico, en analogía a AdS_5 , será necesario pedir que $TR^{n+2} \gg 1$ tal que la solución clásica sea la que domine. Por ejemplo para un objeto extendido de dimensión cero (la cuerda) en AdS_5 recuperamos $TR^2 = \sqrt{\lambda}/2\pi$ con λ la constante de acoplamiento de 't Hooft como ya sabemos.

Consideremos que dichos objetos extendidos tienen n direcciones transversas \vec{Y} y pueden moverse en una dirección adicional transversa X . Estamos estudiando ya no una cuerda inmersa en un fondo curvo sino una n -brana inmersa en dicho fondo. La correspondiente teoría de norma conforme a la cual debe ser dual ha sido poco estudiada, en general se sabe muy poco acerca de teorías de campos conformes en d dimensiones. No

pretendemos aclarar aspectos de estas interesantes dualidades sino explorar ideas muy simples en donde los métodos desarrollados en esta tesis puedan aplicarse. Para hacer un análisis más simple, consideremos la norma estática, donde el mapeo del volumen-mundo será de la forma

$$X(t, z, \vec{Y}, X(t, z, \vec{Y}), \vec{Z}=\text{const}, W=\text{const}),$$

donde \vec{Z} son las coordenadas transversas adicionales de las cuales no depende el volumen-mundo. Además, estaremos interesados en defectos compactos. Consideraremos como caso particular que la forma espacial del defecto en la frontera sea una n -esfera con un radio no estático X y parametrizada por el ángulo azimutal Φ , y $n - 1$ ángulos polares Θ_i . Éste caso es el más sencillo de estudiar debido a las simetrías del problema. El perfil X en el bulto debe de ser independiente de los ángulos, por tanto la esfera podrá moverse sobre su coordenada radial que es perpendicular al resto de las coordenadas transversales sobre la frontera. Hechas estas consideraciones podemos encontrar que el determinante de la métrica inducida, bajo el ansatz de que X es una función solamente de τ y z esta dado por

$$-g = \left(\frac{R}{z}\right)^{2(n+2)} X^{2n} B^2 \left(1 + X'^2 - \dot{X}^2\right) \quad (4.1)$$

donde A es el producto de las partes angulares de la métrica que hemos supuesto estáticas y esta dada por

$$B^2 \equiv \sin^{2(n-1)}(\Theta_1) \sin^{2(n-2)}(\Theta_2) \dots \sin^2(\Theta_{n-1}).$$

De esta forma (4.1) es parecida a la métrica inducida en la hoja-mundo de una cuerda que esta en un fondo AdS_5 en la norma estática salvo por el factor de R .

Variando entonces, el lagrangiano respecto al radio de la n -esfera X , encontramos que las ecuaciones de movimiento en la norma estática son de la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{z^{n+2}} \frac{\dot{X} X^n}{\sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^{n+2}} \frac{X' X^n}{\sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}} \right) - n \frac{X^{n-1}}{z^{n+2}} \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}. \quad (4.2)$$

Para $n = 0$ esta ecuación se reduce a la ecuación de movimiento de Nambu-Goto en la norma (2.15). En [43] se propone como solución a esta ecuación de movimiento, inspirada en [22], a

$$X(t, z) = \sqrt{t^2 + b^2 - z^2 + z_m^2}. \quad (4.3)$$

Esta solución describe una configuración de un ‘tazón’, con b una constante de integración que resulta ser el radio inicial del tazón en la frontera.

Algunos comentarios vienen al caso para el propósito de este capítulo. a) La ecuación de movimiento (4.2) puede escribirse de una manera muy sugerente como

$$\dot{\Pi}_X^t + \Pi_X^{z'} = \frac{n}{X} \left[\frac{1}{z^2} \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2} - \Pi_X^t \dot{X} - \Pi_X^z \left(X' - \frac{X}{z} \right) \right], \quad (4.4)$$

donde hemos definido

$$\Pi_X^t \equiv -\frac{\dot{X}}{z^2 \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}}, \quad \Pi_X^z \equiv \frac{X'}{z^2 \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}}.$$

Que identificamos inmediatamente con los flujos de momento de la cuerda en AdS. b) El lado izquierdo de esta ecuación corresponde a la ecuación de movimiento de la cuerda. Pero ahora en lugar de estar igualado a cero como en la cuerda usual esta igualado a una cierta función de X y z . c) Esta función juega el papel de una fuerza externa actuando sobre la cuerda en todo el bulto, es decir, para toda z . En particular se reduce a una cierta expresión en la frontera $z = z_m$. Podemos reconocer en la solución (4.3) la expresión de la solución presentada en el capítulo anterior para una partícula que se mueve con aceleración propia constante en la frontera. Sabemos entonces que (4.3) hace cero el lado izquierdo de la ecuación de movimiento (4.4). Por tanto el lado derecho también debe anularse usando (4.3). Esto sucede sí $n = 0$ lo cual nos regresa al planteamiento de una cuerda ‘sin volumen’ o si

$$\frac{1}{z^2} \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2} = \Pi_X^t \dot{X} + \Pi_X^z \left(X' - \frac{X}{z} \right). \quad (4.5)$$

Evaluando esta ecuación en la frontera $z = z_m$ y usando que $\Pi_X^{z_m} = -F/mz_m$ obtenemos

$$\frac{F}{mz_m} = \frac{1 + X'^2}{(zX - z^2X') \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}} \Big|_{z=z_m}. \quad (4.6)$$

Sustituyendo la solución propuesta (4.3) para la ecuación de movimiento (4.2), obtenemos

$$F = \frac{m}{\sqrt{b^2 + z_m^2}}.$$

Al comparar esta expresión con la expresión de la fuerza constante que produce la aceleración A dada por

$$F = \frac{mA}{\sqrt{1 + z_m^2 A^2}},$$

podemos identificar $b^{-1} \equiv A$.

Esta identificación entre geometría y dinámica (esfera/movimiento uniformemente acelerado) es la idea central de este capítulo. En la siguiente sección quisiéramos generalizar esta idea entre geometría y dinámica para otras configuraciones posibles. Un último comentario viene al caso: mientras que en la solución de Mikhailov para la cuerda en AdS₅ la trayectoria de la punta $x(\tau)$ es *arbitraria*, en este caso la ecuación (4.5) restringe la trayectoria $x(\tau)$ de la punta al dar una fuerza específica para la misma. Así que la condición (4.5) debe verse como una restricción sobre las posibles trayectorias de la partícula en la correspondiente frontera. Esto quedará más claro cuando desarrollemos las ideas de este capítulo.

4.1.1. Defectos con Volumen

En la sección anterior hemos analizado en particular un volumen-mundo n -dimensional como defecto moviéndose en AdS. Generalizando lo que aprendimos del problema de la n -esfera podemos considerar ahora métricas que difieran de AdS hasta un factor

$V(X^\mu(\tau, z), z)$. Entenderemos que V evaluado en $z = z_m$ es el ‘volumen del defecto’ en la frontera y depende de las coordenadas que han quedado como grados de libertad dinámicos después de realizar el encaje propuesto en la sección anterior. Tenemos ahora μ grados de libertad

$$G_{\mu\nu}(X) = V(X(\tau, z), z)g_{\mu\nu}^{AdS},$$

tal que al calcular la métrica inducida y tomar el determinante de ésta obtenemos

$$\sqrt{-g} \rightarrow V(X, z)\sqrt{-g_{AdS}}. \quad (4.7)$$

El volumen V es rígido en todas sus direcciones excepto los grados de libertad permitidos dados por X^μ .

De esta forma tenemos el lagrangiano usual para AdS con el cual hemos trabajado en esta tesis y podemos aplicar los mismos métodos para el análisis dinámico. Es necesario señalar que la dependencia en z de $V(X^\mu, z)$ es de la forma X^μ/z para que el volumen respectivo no tenga dimensiones. La acción es entonces

$$S_V = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int d^{n+2}\sigma V(X^\mu, z)\sqrt{-g_{AdS}}.$$

Considerando la norma semi-estática y variando la acción respecto a X^μ encontramos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial X^\mu} \mathcal{L}_{AdS} - (V\Pi_\mu^\tau)' - (V\Pi_\mu^z)' \right) \delta X^\mu + (V\Pi_\mu^\tau \delta X^\mu)' + (V\Pi_\mu^z \delta X^\mu)' = 0.$$

Al integrar los términos de punta, para que la acción sea extremal fijamos δX^μ igual a cero en los extremos de τ . Análogamente al capítulo anterior, consideraremos que a nuestra acción le falta un término de punta tal que cancele $V\Pi_\mu^z$ en $z = z_m$, es decir, consideraremos el término $V\Pi_\mu^z|_{z=z_m}$ que será cancelado por un término de punta puesto a mano a posteriori. Haciendo estas consideraciones, podemos reducir la ecuación de movimiento a la siguiente expresión

$$\left(\frac{\partial V}{\partial X^\mu} \mathcal{L}_{AdS} - \dot{V}\Pi_\mu^\tau - V'\Pi_\mu^z \right) - V \left(\frac{d\Pi_\mu^\tau}{d\tau} + \frac{d\Pi_\mu^z}{dz} \right) = 0. \quad (4.8)$$

Esta ecuación para el caso en el que V es el volumen de una n -esfera, en la norma estática, se reduce a la ecuación (4.4). Por tanto, hemos redefinido nuestro problema al pensar en un n -defecto sobre la hoja-mundo compacto que tiene como grados de libertad a las X^μ direcciones transversales en el bulto. Podemos analizar las ecuaciones de movimiento para dicho defecto al considerar solamente el volumen de éste y considerando cierto mapeo holográfico que anule la segunda parte de (4.8). Bajo esta consideración, resulta interesante escribir la parte que sobrevive en la norma estática. Recordemos que en esta norma tenemos que el lagrangiano en AdS esta dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{mz_m}{z^2} \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2},$$

considerando sólo una dirección de movimiento. Para esta dirección la primer parte de (4.8) se reduce a

$$\tilde{V} = X'(t, z), \quad (4.9)$$

donde hemos definido para toda μ (en este caso $\mu = 1$)

$$\tilde{V}_\mu \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial X^\mu} \right). \quad (4.10)$$

Por tanto, introducir un defecto con ‘volumen’ en el lagrangiano de Nambu-Goto (4.7) nos impone la constricción (4.9) sobre X' .

Veamos como trabaja dicha constricción en el caso de que el defecto es una n -esfera, donde sólo hay un grado de libertad $X(t, z)$ que es la coordenada radial. El volumen del defecto es

$$V = X^n / z^n.$$

Por lo tanto

$$\tilde{V} = -z/X.$$

Sustituyendo la expresión anterior en (4.9), obtenemos la restricción al movimiento para la coordenada radial $X(t, z)$

$$-z = X'X.$$

Al sustituir la solución original de Mikhailov parametrizada por t_{ret} en la norma estática (2.19, 2.21) obtenemos que la restricción al movimiento del radio de la esfera se puede reescribir en términos del la proyección del radio en la frontera $x(t_{ret})$ como

$$1 - \dot{x}^2 - x \frac{d\dot{x}}{dt_{ret}} = 0, \quad (4.11)$$

la ecuación para un objeto uniformemente acelerado para todo punto z sobre el bulto. Considerando que la solución de Mikhailov resuelve idénticamente la segunda parte de (4.8) que corresponde a la ecuación de movimiento de Nambu-Goto, resulta claro que el introducir un volumen V sobre la cuerda ocasiona que el movimiento de ésta esté restringido de acuerdo a (4.9).

4.2. Formulación geométrica de ALD

Para analizar más a fondo la n -brana que hemos considerado, en particular, como un defecto dado por una n -esfera sobre la frontera podemos extender las ecuaciones de movimiento considerando la idea de tener no una n -esfera sino un objeto parametrizado por μ grados de libertad (en el caso de la n -esfera el único grado de libertad es su radio). El objetivo de esta sección es plantear la solución a las ecuaciones de movimiento de la cuerda en AdS desde nuestro ansatz propuesto en el Capítulo 3.

Considerando nuestro ansatz el mapeo holográfico entre la frontera y el bulto de AdS, dado por

$$X^\mu(\tau, z) = (z - z_m) \frac{p^\mu(\tau)}{m} + x^\mu(\tau) \quad (4.12)$$

con $z_m = \sqrt{\lambda}/2\pi m$ podemos hacer un análisis a fondo del defecto relacionando su ‘volumen’ con una fuerza en la frontera. Bajo nuestro ansatz, la segunda parte en las ecuaciones de movimiento (4.8) se anulan si se satisface la ecuación (3.12)

$$z_m \left(\frac{\dot{p}^\mu}{m} \right) = \dot{x}^\mu + \frac{p^\mu}{m} \left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right).$$

Como veremos más adelante, de acuerdo a la primer parte de (4.8) dicho volumen restringirá la fuerza externa \mathcal{F}_μ que podrá actuar sobre los grados de libertad mapeados en la frontera. Por ejemplo, el volumen de una n -esfera específica la fuerza bajo la cual el radio proyectado en la frontera $x(\tau)$ satisfaga (4.11).

Sustituyendo nuestro mapeo holográfico en la parte restante de las ecuaciones de movimiento (la primera parte de (4.8)) obtenemos, mediante un procedimiento análogo al que se uso para obtener (3.12), la condición restante sobre las funciones (x^μ, p_μ) debido al volumen V

$$z_m \tilde{V}_\mu = z \left(\frac{p_\mu}{m} + \dot{x}_\mu \frac{\left(\frac{p}{m} \cdot \tilde{V} + 1 \right)}{\left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right)} \right) + (z - z_m) \left(\frac{p}{m} \cdot \tilde{V} \right) \frac{p_\mu}{m}. \quad (4.13)$$

Es entonces (4.13) la condición que deben satisfacer las coordenadas (x^μ, p_μ) dado el defecto \tilde{V} . Es necesario notar que hay dependencias implícitas en z a través del volumen \tilde{V} y que esta condición debe ser válida en todo el bulto. Esta es una restricción muy fuerte sobre las posibles funciones V para poder aplicar nuestro análisis. En adelante supondremos que la función V es tal que esta condición se satisface en todo el bulto. En particular nos interesa ahora extraer información sobre la dinámica en la frontera. Para ello vamos a evaluar la condición (4.13) en la frontera obteniendo

$$\tilde{V}_{z_m, \mu} = \frac{p_\mu}{m} + \dot{x}_\mu \frac{\left(\frac{p}{m} \cdot \tilde{V}_{z_m} + 1 \right)}{\left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right)}, \quad (4.14)$$

donde $\tilde{V}_{z_m, \mu}$ es \tilde{V}_μ evaluado en $z = z_m$.

Para despejar p^μ en términos del volumen V (a través de \tilde{V}_{z_m}) contraigamos a (4.14) con \dot{x}^μ obteniendo que

$$\frac{\left(\frac{p}{m} \cdot \tilde{V}_{z_m} \right) + 1}{\left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right)} = \left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right) - (\dot{x} \cdot \tilde{V}_{z_m}). \quad (4.15)$$

Al sustituir (4.15) en (4.14) y contrayendo consigo misma ambos lados de la ecuación se obtiene que

$$\left(\dot{x} \cdot \frac{p}{m} \right) = -\sqrt{1 + \tilde{V}_{z_m}^2 + (\dot{x} \cdot \tilde{V}_{z_m})^2}. \quad (4.16)$$

Por tanto, sustituyendo (4.15) y (4.16) en (4.14) tenemos la expresión final para p_μ en términos de \dot{x}^μ y $\tilde{V}_{z_m, \mu}$ dada por

$$\frac{p_\mu}{m} = \tilde{V}_{z_m, \mu} + \dot{x}_\mu \left((\dot{x} \cdot \tilde{V}_{z_m}) + \sqrt{1 + \tilde{V}_{z_m}^2 + (\dot{x} \cdot \tilde{V}_{z_m})^2} \right); \quad (4.17)$$

la cual satisface, sorprendente, la condición de capa de masa $p^2 = -m^2$. Es entonces (4.17) la expresión correcta de p_μ que debe de usarse en (4.12) para que el mapeo holográfico sea solución de las ecuaciones de movimiento (4.8).

Además, es importante señalar que la relación entre $\tilde{V}_{z_m, \mu}$ y el momento p_μ , dada por (4.17), proviene del principio variacional de la acción de Nambu-Goto modificada, en contraste a lo hecho en el capítulo anterior, donde se fijó una relación entre \mathcal{F}_μ con p_μ a través de una condición a la frontera $\Pi_z^\mu \rightarrow -\mathcal{F}^\mu$ cuando $z \rightarrow z_m$.

Recordando que el momento de la punta de la cuerda en la frontera lo podemos escribir en términos de una fuerza genérica \mathcal{F}_μ sobre ésta como

$$\frac{p_\mu}{m} = \frac{\dot{x}_\mu - \frac{z_m}{m} \mathcal{F}_\mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \mathcal{F}^2}},$$

podemos comparar la forma de este momento con la encontrada en (4.17); al hacer esto, en principio podemos reescribir (3.20) en términos de $\tilde{V}_{z_m, \mu}$. Esto implica construir una ecuación análoga a (Abraham-)Lorentz-Dirac en términos del volumen V y no de la fuerza \mathcal{F}_μ .

Ahora bien, (4.17) define el momento asociado a los grados de libertad del volumen a través del principio variacional para un fondo modificado, al introducir un defecto para la cuerda con volumen V . Aunque ambas formas de definir el momento p^μ son intrínsecamente diferentes y corresponden a objetos diferentes, ambas formas asocian p^μ a los mismos grados de libertad. Podemos preguntarnos por la relación entre \mathcal{F}_μ con el volumen V . Al igualar ambas expresiones de p^μ y despejar a \mathcal{F}_μ encontramos

$$\mathcal{F}_V^\mu = -\frac{m}{z_m} \frac{\tilde{V}_{z_m}^\mu + \dot{x}^\mu (\dot{x} \cdot \tilde{V}_{z_m})}{\sqrt{1 + \tilde{V}_{z_m}^2 + (\dot{x} \cdot \tilde{V}_{z_m})^2}}, \quad (4.18)$$

donde hemos usado la relación

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \mathcal{F}^2}} = \sqrt{1 + \tilde{V}_{z_m}^2 + (\dot{x} \cdot \tilde{V}_{z_m})^2},$$

que se obtiene de comparar $(\dot{x} \cdot p/m)$ para ambas expresiones de p^μ . Notemos que hemos puesto una etiqueta a la fuerza: \mathcal{F}_V^μ , señalando que dicha fuerza se debe al volumen del defecto y que además cumple con la condición $\dot{x}_\mu \mathcal{F}_V^\mu = 0$.

Por lo tanto, el volumen V del defecto genera una nueva ecuación de movimiento que se debe de satisfacer. Esta ecuación esta dada por (4.13) para toda z , y se traduce en la frontera como un movimiento específico sobre los grados de libertad correspondientes. A través de (4.18) podemos considerar un planteamiento análogo a tener un defecto con volumen V en AdS_{d+1} . Es decir, considerar una cuerda encajada en AdS_5 tal que la punta de ésta tiene como movimiento el generado por la fuerza \mathcal{F}_V^μ . En este sentido, de acuerdo a (3.20) hemos construido una formulación geométrica de (Abraham-)Lorentz-Dirac.

4.2.1. Ejemplos de la relación entre V y \mathcal{F}

Defecto n -esfera

Consideremos el caso más sencillo (no trivial): sólo hay una coordenada transversa $X(\tau, z)$ (de las $n-\mu$ posibles como hemos considerado hasta ahora) como grado de libertad del defecto. Si el defecto es una n -esfera, dicha coordenada resulta ser el radio de ésta. Entonces, $V = X^n/z^n$ hasta un factor constante que no juega ningún papel en esta sección. Para este volumen, encontramos que $\tilde{V} = -z/X$, y evaluado $z = z_m$ es de la forma

$$\tilde{V}_{z_m} = -\frac{z_m}{x},$$

con $x(\tau)$ el radio de la n -esfera en $z = z_m$. Hay que notar que V no depende de X^0 , por tanto $\tilde{V}_0 = 0$. Este volumen, a través de (4.18) nos permite considerar que el radio de la n -esfera en la frontera obedece una dinámica bajo la siguiente fuerza

$$\mathcal{F}_{\mu, V} = m \frac{\delta_\mu^1 + \dot{x}_\mu \dot{x}}{\sqrt{(x)^2 + z_m^2(1 + (\dot{x})^2)}}.$$

Además, aunque en este caso V depende del número de dimensiones de la n -esfera, $\tilde{V}_{z_m, \mu}$ ya no depende de las n dimensiones, por ende la fuerza asociada tampoco.

Para poder identificar de que tipo de fuerza se trata, calculemos $\mathcal{F}^2 = -F^{02} + F^2$. Usando que $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -1$ encontramos

$$\mathcal{F}_V^2 = m^2 \frac{\dot{x}_0^2}{x_1^2 + z_m^2 \dot{x}_0^2}.$$

Considerando el cambio de parámetro a $x_0 \equiv t_{ret}$, nos permite reescribir $\mathcal{F}_V^2 \rightarrow F_V^2$ como

$$F_V^2 = \frac{m^2}{x^2(1 - \dot{x}^2) + z_m^2}.$$

Identificando a $A^{-2} = x^2(1 - \dot{x}^2)$, con A la aceleración propia constante de un objeto puntual, resulta claro que dicha forma de la fuerza coincide con la encontrada en la (3.28). Por tanto, el considerar un defecto con volumen ‘esférico’ en la frontera, implica que su radio (único grado de libertad) obedece un movimiento uniformemente acelerado.

Conviene aclarar que el análisis hecho para la n -esfera esta funcionando de forma perfecta pues su volumen V cumple con hacer válida (4.13) para todo el bulto, es decir, elimina toda dependencia en z . Para hacer claro este hecho notemos que la forma que adquiere \tilde{V}_μ esta dada por

$$\tilde{V}_\mu = -\frac{z}{(z - z_m)p + x} \delta_\mu^1,$$

x es el radio de la n -esfera proyectado en la frontera y p el momento asociado a dicha variable. Sustituyendo \tilde{V}_μ en (4.13) encontramos que la condición sobre la coordenada radial x (y el momento asociado p) se simplifica en

$$x \frac{p}{m} + \frac{\dot{x}}{(\dot{x}^\mu \frac{p_\mu}{m})} \left(x - z_m \frac{p}{m} \right) + z_m = 0,$$

condición que resulta ser válida para cualquier z . Es interesante mencionar que si consideramos que el parámetro τ es el tiempo propio podemos despejar a p de la relación anterior, que al reescribirla en el parámetro $x_0 = t_{ret}$ es

$$\frac{p}{m} = \gamma \left(\dot{x} \sqrt{1 + z_m^2 \frac{\gamma^2}{x^2}} - z_m \frac{\gamma}{x} \right). \quad (4.19)$$

Identificando de nueva cuenta la forma de la aceleración constante para la coordenada x como $A = \gamma/x$, resulta que esta forma de p/m coincide con la dada en (3.31) como era de esperarse. El mismo análisis podemos hacerlo para la coordenada $\mu = 0$ en la condición (4.13).

Concluimos que al implementar un defecto con volumen en nuestra teoría, el considerar como ansatz la solución generalizada de Mikhailov (3.1) permite resolver las ecuaciones de movimiento del principio variacional. Aunque no esperamos que esto sea posible para todo volumen dado. En particular, en el caso de que dicho volumen es una n -esfera de acuerdo a (3.32) la solución en la norma estática es $X(t, z) = \sqrt{A^{-2} + t^2 - z^2 + z_m^2}$ que resuelve las ecuación (4.2).

Volumen Libre

En el caso anterior mostramos que al considerar un defecto con volumen esférico, resulta en considerar una fuerza constante sobre la frontera que expande la proyección del radio con aceleración uniforme. Esto nos lleva a pensar que otro tipo de volúmenes generarán diferentes ecuaciones de movimiento sobre los grados de libertad correspondientes. En vez de considerar diferentes volúmenes al azar, resulta interesante plantear la situación inversa al ejemplo pasado. Por ejemplo, cuál es el volumen correspondiente para obtener un movimiento sobre el que no se aplica ninguna fuerza sobre el defecto proyectado en la frontera. En general, consideramos un movimiento en específico para las coordenadas (x^μ, p_μ) , y a partir de la ecuación de movimiento analizar los volúmenes que generarían dicho movimiento.

Queremos analizar, el caso de tener un defecto libre. En este caso esperamos que un volumen V constante en $X(\tau, z)$ genere un defecto tal que sobre sus proyecciones no actúe ninguna fuerza. Sin embargo, resulta interesante la idea de que otro volumen con cierta dependencia en X de lugar a un defecto libre en la frontera. En analogía al Capítulo 3, donde una fuerza diferente de cero en la frontera actúa sobre el quark, da como resultado un partícula con aceleración cero.

Para esto debemos resolver la ecuación de movimiento para p^μ en términos de \tilde{V}_{z_m} . Reescribiendo (3.12) en el parámetro t_{ret} para $\mu = 1$ obtenemos

$$z_m \frac{\dot{p}}{m} = \dot{x} - \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \tilde{V}_{z_m}^2} \frac{p}{m}. \quad (4.20)$$

Donde hemos utilizado (4.16) que es válido sólo en la frontera, por tanto (4.20) es una condición sobre (x, p) válida sólo en $z = z_m$. En este mismo parámetro, podemos reescribir

p/m de acuerdo a (4.17) como

$$\frac{p}{m} = \gamma^2 \left(\tilde{V}_{z_m} + \dot{x} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \tilde{V}_{z_m}^2} \right). \quad (4.21)$$

Sustituyendo (4.21) en (4.20) encontramos, para velocidad constante, una ecuación de movimiento para \tilde{V}_{z_m} dada por

$$\dot{\tilde{V}}_{z_m} = -\frac{\tilde{V}_{z_m}}{z_m} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \tilde{V}_{z_m}^2}. \quad (4.22)$$

Recordemos que $\circ \equiv d/dt_{ret}$.

Esta ecuación diferencial tiene como solución trivial a $\tilde{V}_{z_m} = 0$, lo cual nos dice que V es constante en X , tal y como habíamos argumentado al principio del ejemplo. Además de la solución trivial notamos que hay una familia de soluciones representadas por la siguiente solución particular

$$\tilde{V}_{z_m}(t_{ret}) = \pm \frac{1}{\gamma \sinh\left(\frac{t_{ret}}{z_m \gamma}\right)}.$$

Resulta interesante notar, que si sustituimos la forma encontrada para \tilde{V}_{z_m} en (4.18) (para $\mu = 1$) recuperamos (3.34), que es la fuerza obtenida en el capítulo anterior que genera un movimiento con aceleración cero en la frontera. Este hecho hace consistente la dualidad que se ha planteado para ALD en términos de dinámica y geometría.

Ahora bien, para encontrar la forma explícita de V recordemos que supusimos que V (y por ende \tilde{V}_{z_m}) no depende directamente del parámetro temporal, solamente de la(s) coordenada(s) espacial(es). Por lo tanto, podemos reescribir la ecuación diferencial (4.22) como

$$\frac{d\tilde{V}_{z_m}(x)}{dx} = -\frac{\tilde{V}_{z_m}(x)}{z_m \dot{x}} \sqrt{1 - \dot{x}^2 + \tilde{V}_{z_m}^2},$$

cuya solución a velocidad constante es

$$\tilde{V}_{z_m}(x(t_{ret})) = \pm \sqrt{1 - \dot{x}^2} \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{1 - \dot{x}^2}}{z_m \dot{x}} x\right).$$

Por último, recordemos que \tilde{V}_{z_m} está definido de acuerdo a (4.10), es decir, considerar \tilde{V}_{z_m} implica haber evaluado en $z = z_m$ por lo que sólo queda viva la dependencia en $X \rightarrow x$. De esta forma

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \pm \sqrt{1 - \dot{x}^2} \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{1 - \dot{x}^2}}{z_m \dot{x}} x\right),$$

integrando respecto a x obtenemos como solución particular

$$V(x(t_{ret})) = z_m \dot{x} \ln \left[\tanh\left(\frac{\sqrt{1 - \dot{x}^2}}{2z_m \dot{x}} x(t_{ret})\right) \right]. \quad (4.23)$$

Entonces, si el volumen del defecto con radio $X(t_{ret}, z)$ tiene como forma (4.23) al ser proyectado en la frontera, la dinámica de $x(t_{ret})$ (entendida como la punta de la cuerda) corresponde a un movimiento con velocidad constante.

4.3. Apuntes Finales

En este capítulo hemos analizado defectos n -dimensionales bajo un encaje muy característico en AdS_{d+1} . Dicho encaje nos ha permitido analizar un defecto compacto n -dimensional al considerar las ecuaciones de movimiento de una cuerda con volumen V . De esta forma hemos podido estudiar la dinámica de dichos defectos en la frontera usando el mapeo holográfico (4.12). A través de (4.17) hemos construido un momento asociado a los grados de libertad del defecto mapeados en la frontera de AdS.

Como consecuencia de considerar una cuerda con volumen V hemos podido identificar una relación entre la dinámica que genera considerar dicho volumen sobre los grados de libertad del volumen y la fuerza externa que se tendría que aplicar para generar dicha dinámica. De esta forma logramos una conexión directa con las ecuaciones de (Abraham-)Lorentz-Dirac. Más en general, (4.18) nos ha permitido establecer una relación entre la dinámica y la geometría del defecto.

Conclusiones

En el presente trabajo hemos sido capaces de estudiar la dinámica de la punta de la cuerda en la frontera ‘física’ de AdS_5 a partir de la dinámica en el bulto, esto al considerar una generalización del mapeo holográfico dado por Mikhailov al espacio fase. Dicha perspectiva nos ha servido para analizar el movimiento de la cuerda en este fondo permitiéndonos recuperar resultados de trabajos anteriores como ya se ha discutido a lo largo de la tesis. Cabe resaltar que los resultados encontrados no dependen de una realización de la dualidad AdS/CFT, aunque sí para su interpretación.

Primeramente, hemos sido capaces de identificar las ecuaciones de Hamilton en la frontera dadas por (3.12) y (3.16), cuya forma es consecuencia directa de la ecuación de movimiento del bulto. Dichas ecuaciones en el límite $z_m \rightarrow 0$ (considerar un quark con masa infinita en la frontera) se reducen a la dinámica de una partícula relativista en el espacio de Minkowski. Fijando apropiadamente la condición de frontera en el principio variacional de la cuerda en el bulto, podemos introducir una fuerza externa responsable del movimiento de la punta de la cuerda en la frontera. A todo orden en z_m formulamos la dinámica del quark en el espacio fase obteniendo, sorprendentemente, que estas ecuaciones representan la dinámica de una partícula extendida. Es decir, el mapeo holográfico es capaz de reproducir la dinámica del punto en la frontera codificando todos los grados de libertad de la cuerda de modo tal que ese punto material es ahora una partícula extendida. En particular con este esquema hemos recuperado una generalización de la ecuación de Abraham-Lorentz-Dirac presentada en trabajos previos.

Analizar la dinámica relativista de objetos extendidos encajados en un fondo curvo resulta complicado en si mismo, las ecuaciones de movimiento son altamente no lineales y acopladas entre sí. La ecuación para $p^\mu(\tau)$ codifican la dinámica de un objeto extendido (la cuerda en el caso más simple) a través de la trayectoria de la ‘partícula’, que sabemos ahora, podemos considerar como una partícula con radio z_m .

Por último, hemos analizado defectos de mayor dimensión encajados en AdS, reduciendo el análisis a defectos que podemos caracterizar por los grados de libertad de su ‘volumen’, dicho volumen juega en nuestro análisis el papel de la fuerza introducida como una condición de frontera en el estudio previo de la cuerda.

Durante la elaboración del presente trabajo surgieron varias inquietudes que resultarían de gran interés para establecer direcciones de trabajo en un futuro.

¿Cómo se modificarían las ecuaciones de Hamilton (en particular (3.12)) en otros fondos curvos? Solamente hemos considerado geometrías de tipo AdS, sin embargo, ge-

neralizar el estudio de la punta de la cuerda a otro tipo de fondos cuya frontera no sea necesariamente un espacio de Minkowski (relativista) sino que, por ejemplo, sea anisotrópico resulta de gran interés.

Así mismo, queda mucho por decir acerca del movimiento que se puede imponer sobre la punta de la cuerda. Estudiar ejemplos más complicados del movimiento del quark en la frontera. Una situación de interés sería considerar un movimiento caótico de la punta de la cuerda y buscar analizar el perfil de ésta. Otra pregunta que surge en esta dirección, ¿qué ocurre si la geometría de la frontera del bulto es no-conmutativa?

El hecho de que nuestro trabajo este inmerso en la dualidad AdS/CFT nos permitiría generalizar las ideas aquí obtenidas al caso de temperatura finita que corresponde a introducir un horizonte en el bulto, un hoyo negro, que altera de forma considerable la geometría en cuestión.

Apéndice A

Solución de Mikhailov a las ecuaciones de Nambu-Goto

A.1. Para masa infinita

Como ya habíamos mencionado, en [3] encontró una solución para (2.15), las ecuaciones de movimiento de Nambu-Goto de una cuerda abierta encajada en un espacio anti-de Sitter. A continuación presentamos un forma de deducir dicha solución siguiendo el trabajo [38].

El espacio cubriente de AdS₅ es

$$\mathcal{X}^M \mathcal{X}_M = -(\mathcal{X}^{-1})^2 - (\mathcal{X}^0)^2 + (\mathcal{X}^1)^2 + (\mathcal{X}^2)^2 + (\mathcal{X}^3)^2 + (\mathcal{X}^4)^2 = 1, \quad (\text{A.1})$$

en $\mathbb{R}^{2,4}$, donde el índice M es para los seis índices del espacio blanco $M = -1, 0, \dots, 4$ y hemos tomado la métrica $\eta_{MN} = (-, -, +, +, +, +)$. Para cada vector \mathcal{X}^M , se tiene que la hoja-mundo parametrizada por τ, σ y que es extremal en AdS puede ser escrita como

$$\mathcal{X}^M(\tau, \sigma) = \pm \partial_\tau l^M(\tau) + \sigma l^M(\tau), \quad (\text{A.2})$$

donde el parámetro $l^M(\tau)$ satisface

$$l^M l_M = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$(\partial_\tau l^M)(\partial_\tau l_M) = 1. \quad (\text{A.4})$$

Resulta claro mostrar que esta relación satisface (A.1), es decir, esta solución esta en un fondo AdS.

Por otro lado, podemos dar solución explícita para \mathcal{X}^M en términos de las coordenadas espacio-temporales del bulto X^μ . Consideremos las transformaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{-1} &= \frac{1}{2z}(1 - X^2 + z^2), \\ X^\mu &= \frac{X^\mu}{z}, \\ \mathcal{X}^4 &= \frac{1}{2z}(1 + X^2 - z^2), \end{aligned}$$

a las cuales se les conoce como el patch de Poincaré. Sabemos que la teoría dual CFT esta en un espacio $\mathbb{R}^{1,3}$ donde la métrica es la de Minkowski dada por $\eta_{\mu\nu} = \{- + + +\}$, por lo tanto el índice griego toma valores $\mu = 0, 1, 2, 3$. En este patch de Poincaré, la métrica en el espacio AdS_5 es

$$ds_5^2 = \eta_{MN} d\chi^M d\chi^N = \frac{1}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + dz^2),$$

con la frontera en $z = 0$.

Escribamos ahora el vector $l^M(\tau)$ en términos de un parámetro $x^\mu(\tau)$, que identificamos como la trayectoria de la punta de la cuerda en la frontera, como

$$\begin{aligned} l^{-1} &= \frac{1}{2}(1 - x(\tau))^2, \\ l^\mu &= x^\mu, \\ l^4 &= \frac{1}{2}(1 + x(\tau))^2. \end{aligned}$$

Para que se satisfaga (A.4) es necesario imponer que

$$\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x_\mu = -1, \tag{A.5}$$

donde consideramos a τ el tiempo propio de la punta de la trayectoria de la punta.

Bajo las identificaciones hechas, notamos que cuando σ esta fija a $\sigma = z$, entonces (A.2) se reduce a

$$X^\mu(\tau, z) = z \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} + x^\mu(\tau), \tag{A.6}$$

la solución de Mikhailov que resuelve idénticamente (2.14).

A.2. Para masa finita

En el caso de un quark con masa finita la punta de la cuerda esta en $z = z_m$ para $z_m > 0$. Conviene entonces reescribir la solución de Mikhailov ya discutida en términos de parámetros ‘físicos’. El siguiente cálculo se ha hecho con detalle en [4], sin embargo lo incluimos por completez.

La solución de interés puede ser considerada como la porción para $z > z_m$ de la solución A.6, que esta parametrizada por la información de la frontera de AdS ($z = 0$). Entonces, usaremos tildes para denotar estas soluciones y distinguirlas de las cantidades físicas asociadas con la punta de la cuerda en $z = z_m$. En esta notación tenemos

$$X^\mu(\tilde{\tau}, z) = z \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tilde{\tau}} + \tilde{x}^\mu(\tilde{\tau}). \tag{A.7}$$

considerando que la relación de dispersión que cumple la partícula de masa infinita en $z = 0$ es

$$\frac{\tilde{p}^\mu}{m} = \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tilde{\tau}}.$$

Cabe señalar que las cantidades tilde son meramente auxiliares y nos ayudarán a entender de mejor forma la solución retardada de Mikhailov truncada en $z = z_m$.

Como mencionamos, la cantidad física de interés es la posición del quark, que tiene una trayectoria dada por

$$x^\mu(\tilde{\tau}) \equiv X^\mu(\tilde{\tau}, z_m) = z_m \frac{d\tilde{x}^\mu(\tilde{\tau})}{d\tilde{\tau}} + \tilde{x}^\mu(\tilde{\tau}). \quad (\text{A.8})$$

Entonces la solución de Mikhailov en términos de la posición física del quark en la frontera dada por $z = z_m$ la podemos reescribir como

$$X^\mu(\tilde{\tau}, z) = (z - z_m) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tilde{\tau}} + x^\mu(\tilde{\tau}). \quad (\text{A.9})$$

De (A.9), resulta conveniente identificar ahora a $d\tilde{x}^\mu/d\tilde{\tau}$ con el momento del quark en la frontera física (p^μ), sin embargo para poder hacer dicha identificación es necesario escribir a $d\tilde{x}^\mu/d\tilde{\tau}$ en términos de variables sin tildar, es decir, en función de $dx^\mu/d\tau$. Buscamos una nueva relación de dispersión para p^μ respecto a \dot{x}^μ para $z = z_m$, para esto diferenciando (A.8) respecto a $\tilde{\tau}$ tenemos

$$\frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}} = z_m \frac{d^2\tilde{x}^\mu}{d\tilde{\tau}^2} + \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tilde{\tau}}, \quad (\text{A.10})$$

la cual dice que

$$dx^\mu = d\tilde{\tau} \left(z_m \frac{d^2\tilde{x}^\mu}{d\tilde{\tau}^2} + \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tilde{\tau}} \right)$$

y por lo tanto, el tiempo propio físico (τ) del quark masivo queda definido como

$$d\tau^2 \equiv -dx^\mu dx_\mu = d\tilde{\tau}^2 \left[1 - z_m^2 \left(\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{\tau}^2} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.11})$$

Podemos considerar el momento canónico asociado X^{μ} , dado por

$$\Pi_\mu^z(\tau) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu}};$$

que en términos tildados en $z \rightarrow z_m$ se reduce a

$$\tilde{\Pi}_\mu^{z_m} = m \left(\frac{d^2\tilde{x}_\mu}{d\tilde{\tau}^2} + z_m \left(\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{\tau}^2} \right)^2 \frac{d\tilde{x}_\mu}{d\tilde{\tau}} \right).$$

Es necesario notar, que la tilde del lado izquierdo de la ecuación no indica que se está evaluando en $z = 0$, sino mas bien el hecho de que la corriente se está definiendo como el flujo de carga (momento) por unidad de $\tilde{\tau}$. El flujo correspondiente por unidad de τ es entonces

$$\Pi_\mu^{z_m} = -\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \tilde{\Pi}_\mu^{z_m}. \quad (\text{A.12})$$

El signo menos se debe al hecho de considerar que en la frontera física $z = z_m$ se debe conservar dicho momento. Contrayendo consigo misma a $\Pi_\mu^{z_m}$, se encuentra que

$$\left(\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{\tau}^2}\right)^2 = \left(\frac{\Pi^{z_m}}{m}\right)^2. \quad (\text{A.13})$$

Podemos entonces reescribir (A.11) en términos de Π^{z_m} como

$$d\tilde{\tau} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \Pi_{z_m}^2}}. \quad (\text{A.14})$$

Por último, sustituyendo (A.10) en (A.12) obtenemos que

$$\frac{d^2\tilde{x}_\mu}{d\tilde{\tau}^2} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \Pi_{z_m}^2}} \left(\frac{\Pi_{z_m}^\mu}{m} + \frac{z_m}{m^2} \Pi_{z_m}^2 \frac{dx_\mu}{d\tau} \right). \quad (\text{A.15})$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_\mu}{d\tilde{\tau}} &= \frac{dx_\mu}{d\tilde{\tau}} - z_m \frac{d^2\tilde{x}_\mu}{d\tilde{\tau}^2}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{m}\right)^2 \Pi_{z_m}^2}} \left(\frac{dx_\mu}{d\tau} + \frac{z_m}{m} \Pi_{z_m}^{z_m} \right) \equiv \frac{p_\mu}{m}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Hemos encontrado la nueva relación entre el momento del quark $p^\mu(\tau, z_m)$ en función de una condición a la frontera. Esta ecuación relaciona entonces las cantidades en frontera física del bulto ($z = z_m$) con las cantidades auxiliares ($z = 0$). Reescribiendo la solución de Mikhailov (A.6) que estaba en términos de las cantidades auxiliares en términos de las cantidades físicas.

Bibliografía

- [1] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, “Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions,” arXiv:1101.0618 [hep-th].
- [2] M. Chernicoff, J. A. Garcia, A. Guijosa and J. F. Pedraza, “Holographic Lessons for Quark Dynamics,” arXiv:1111.0872 [hep-th].
- [3] A. Mikhailov, “Nonlinear waves in AdS / CFT correspondence,” [hep-th/0305196].
- [4] M. Chernicoff, J. A. Garcia, A. Guijosa, “A Tail of a Quark in N=4 SYM,” JHEP **0909**, 080 (2009). [arXiv:0906.1592 [hep-th]].
- [5] B. Zwiebach, “A first course in string theory,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (2009) 673 p
- [6] L. Brink and M. Henneaux, “Principles Of String Theory,” NEW YORK, USA: PLENUM (1988) 297p
- [7] J. Polchinski, “String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 402 p
- [8] J. Polchinski, “String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 531 p
- [9] J. M. Maldacena, “Large N field theories, string theory and gravity,” [hep-th/9905111].
- [10] G. 't Hooft, “Dimensional reduction in quantum gravity,” gr-qc/9310026.
- [11] L. Susskind, “The World as a hologram,” J. Math. Phys. **36**, 6377 (1995) [hep-th/9409089].
- [12] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, “The Large scale structure of space-time,” Cambridge University Press, Cambridge, 1973
- [13] M. B. Green and J. H. Schwarz, “Supersymmetrical String Theories,” Phys. Lett. B **109**, 444 (1982).

- [14] J. Polchinski, “Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges,” *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4724 (1995) [hep-th/9510017].
- [15] E. Witten, “Bound states of strings and p-branes,” *Nucl. Phys. B* **460**, 335 (1996) [hep-th/9510135].
- [16] L. Brink, J. H. Schwarz and J. Scherk, “Supersymmetric Yang-Mills Theories,” *Nucl. Phys. B* **121**, 77 (1977).
- [17] S. Kovacs, “N=4 supersymmetric Yang-Mills theory and the AdS / SCFT correspondence,” hep-th/9908171.
- [18] R. G. Leigh, “Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet Sigma Model,” *Mod. Phys. Lett. A* **4**, 2767 (1989).
- [19] D. Garfinkle, G. T. Horowitz and A. Strominger, “Charged black holes in string theory,” *Phys. Rev. D* **43**, 3140 (1991) [Erratum-ibid. *D* **45**, 3888 (1992)] [*Phys. Rev. D* **45**, 3888 (1992)].
- [20] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. W. Peet, “Entropy and temperature of black 3-branes,” *Phys. Rev. D* **54**, 3915 (1996) [hep-th/9602135].
- [21] A. W. Peet and J. Polchinski, “UV / IR relations in AdS dynamics,” *Phys. Rev. D* **59**, 065011 (1999) [hep-th/9809022].
- [22] B.-W. Xiao, “On the exact solution of the accelerating string in AdS(5) space,” *Phys. Lett.* **B665**, 173-177 (2008). [arXiv:0804.1343 [hep-th]].
- [23] A. Karch, E. Katz, “Adding flavor to AdS / CFT,” *JHEP* **0206**, 043 (2002). [arXiv:hep-th/0205236 [hep-th]].
- [24] J. L. Hovdebo, M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers and D. J. Winters, “Holographic mesons: Adding flavor to the AdS/CFT duality,” *Int. J. Mod. Phys. A* **20**, 3428 (2005).
- [25] E. Shuryak, “Emerging theory of strongly coupled quark-gluon plasma,” [hep-ph/0703208 [HEP-PH]].
- [26] M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers and D. J. Winters, “Meson spectroscopy in AdS / CFT with flavor,” *JHEP* **0307**, 049 (2003) [arXiv:hep-th/0304032 [hep-th]].
- [27] E. Caceres, M. Chernicoff, A. Guijosa, J. F. Pedraza, “Quantum Fluctuations and the Unruh Effect in Strongly-Coupled Conformal Field Theories,” *JHEP* **1006**, 078 (2010). [arXiv:1003.5332 [hep-th]].
- [28] S. S. Gubser, A. Karch, “From gauge-string duality to strong interactions: A Pedestrian’s Guide,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **59**, 145-168 (2009). [arXiv:0901.0935 [hep-th]].

- [29] C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz, L. G. Yaffe, “Energy loss of a heavy quark moving through N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma,” JHEP **0607**, 013 (2006). [hep-th/0605158].
- [30] J. Casalderrey-Solana and D. Teaney, “Heavy quark diffusion in strongly coupled N=4 Yang-Mills,” Phys. Rev. D **74**, 085012 (2006) [hep-ph/0605199].
- [31] A. Karch, “Recent Progress in Applying Gauge/Gravity Duality to Quark-Gluon Plasma Physics,” [arXiv:1108.4014 [hep-ph]].
- [32] R. B. Peschanski, “Quark-gluon plasma/black hole duality from gauge/gravity correspondence,” J. Phys. Conf. Ser. **110**, 032014 (2008). [arXiv:0710.0756 [hep-ph]].
- [33] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, 2nd. ed. (Addison Wesley, Redwood City, California, 1990); “The dynamics of a charged sphere and the electron,” Am. J. Phys. **65** (1997) 1051.
- [34] M. Chernicoff, A. Guijosa, “Acceleration, Energy Loss and Screening in Strongly-Coupled Gauge Theories,” JHEP **0806**, 005 (2008). [arXiv:0803.3070 [hep-th]].
- [35] M. Chernicoff and A. Guijosa, “Acceleration and Energy Loss in N=4 SYM,” AIP Conf. Proc. **1116**, 285 (2009) [arXiv:0903.0306 [hep-th]].
- [36] A. Guijosa and J. F. Pedraza, “Early-Time Energy Loss in a Strongly-Coupled SYM Plasma,” JHEP **1105**, 108 (2011) [arXiv:1102.4893 [hep-th]].
- [37] S. Janiszewski, A. Karch, “Moving Defects in AdS/CFT,” [arXiv:1106.4010 [hep-th]].
- [38] M. Chernicoff, A. Paredes, “Accelerated detectors and worldsheet horizons in AdS/CFT,” JHEP **1103**, 063 (2011). [arXiv:1011.4206 [hep-th]].
- [39] M. Chernicoff, J. A. Garcia, A. Guijosa, “Generalized Lorentz-Dirac Equation for a Strongly-Coupled Gauge Theory,” Phys. Rev. Lett. **102**, 241601 (2009). [arXiv:0903.2047 [hep-th]].
- [40] K. Balasubramanian, J. McGreevy, “Gravity duals for non-relativistic CFTs,” Phys. Rev. Lett. **101**, 061601 (2008). [arXiv:0804.4053 [hep-th]].
- [41] S. S. Gubser, S. S. Pufu, F. D. Rocha, A. Yarom, “Energy loss in a strongly coupled thermal medium and the gauge-string duality,” [arXiv:0902.4041 [hep-th]].
- [42] J. L. Hovdebo, M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, D. J. Winters, “Holographic mesons: Adding flavor to the AdS/CFT duality,” Int. J. Mod. Phys. **A20**, 3428-3433 (2005).
- [43] S. Janiszewski, A. Karch, “Moving Defects in AdS/CFT,” [arXiv:1106.4010 [hep-th]].

- [44] S. Janiszewski, “Perturbations of moving membranes in AdS_7 ,” arXiv:1112.0085 [hep-th].