UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

EL OPERADOR RAÍZ EN SUBESPACIOS INVARIANTES DE LOS ESPACIOS DE BERGMAN CON PESO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

IVÁN LÓPEZ SALMORÁN

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. FRANCISCO MARCOS LÓPEZ GARCÍA

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE, 2011

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Introducción

Stefan Bergman ([3]) en 1922 descubrió una elegante teoría de espacios de Hilbert de funciones analíticas tanto en dominios del plano complejo, como en dominios de espacios complejos de dimensión mayor; para dicha teoría se basó fuertemente en el núcleo reproductor del espacio de Hilbert en cuestión, ahora llamado núcleo de Bergman. Sus resultados fueron aplicados principalmente a la dinámica de fluidos, mapeos conformes y teoría del potencial. Bergman se enfocó principalmente en los espacios de funciones analíticas cuadrado integrables respecto a la medida de Lebesgue de área o de volumen, más ahora se consideran espacios de funciones analíticas p-integrables y se ha añadido una función de peso.

Diferentes problemas surgieron en los ahora llamados "Espacios de Bergman", parte de ellos están íntimamente relacionados con los resultados que se tenían para los espacios de Hardy. Dichos problemas se consideraban complicados pues se sabía que las funciones de los espacios de Bergman no tenían un buen comportamiento en la frontera de los dominios de definición. Fue hasta la década de 1970 cuando Horowitz y Korenblum hicieron importantes avances en problemas relacionados principalmente con "subespacios invariantes", "conjuntos de ceros" y "vectores cíclicos"(ver [12], [15]).

El núcleo reproductor de un subespacio invariante de un espacio de Bergman no es fácil de calcular, excepto en algunos casos muy particulares. Es por eso que no había jugado un papel importante en el estudio de estos subespacios; pero recientemente han aparecido algunos trabajos que exhiben algunas propiedades estructurales de estos núcleos ([5], [20], [17]), lo que ha llevado a probar nuevos resultados acerca de los subespacios invariantes.

Los subespacios invariantes de los espacios de Bergman han vuelto a capturar la atención en años recientes debido a que están relacionados con el antiguo problema del subespacio invariante: Cada operador lineal acotado en un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita tiene un subespacio invariante no trivial. En [11] se muestra que es equivalente al problema de los subespacios invariantes en el espacio de Bergman $A^2(\mathbb{D})$, a saber: Dados dos subespacios invariantes I, J en $A^2(\mathbb{D})$ con $I \subset J$ y $\dim J \ominus I = \infty$ ¿Existe un subespacio invariante M de $A^2(\mathbb{D})$ contenido estrictamente entre I y J?

El presente trabajo está dividido en 4 capítulos, a lo largo de los cuales hacemos enfásis en los resultados que son nuevos o que se han mejorado respecto a la bibliografía existente.

En el primero consideramos la teoría de los llamados espacios de Hilbert con núcleo reproductor (EHNR), tratamos algunas propiedades generales de los núcleos reproductores y damos algunos resultados importantes como el debido a H. Moore, que establece una correspondencia uno a uno entre las funciones definidas positivas y los espacios de Hilbert con núcleo reproductor. En el mismo capítulo consideramos también el llamado "problema de reconstrucción", que es el problema de encontrar un espacio de Hilbert con núcleo reproductor correspondiente a una función definida positiva dada.

El segundo capítulo está dividido en dos grandes partes. En la primera introducimos los espacios de Bergman con peso y tratamos algunas propiedades generales de estos espacios; mientras que en la segunda parte definimos los espacios de Hilbert sub-Bergman (ver [23], [14])y probamos algunas propiedades de estos espacios; ponemos particular atención al hecho de que estos espacios son ejemplos de espacios de Hilbert con núcleo reproductor y son soluciones de problemas de reconstrucción.

En el tercer capítulo siguiendo [25] y [21] se define un operador integral llamado "operador raíz" que es definido en términos del núcleo reproductor del espacio de Bergman y del núcleo reproductor de un subespacio invariante del espacio de Bergman. En esta parte se estudian propiedades relacionadas con su continuidad, su compacidad, su pertenencia a la clase de traza y su pertenencia a la clase de Hilbert-Schmidt.

En el cuarto capítulo calculamos el núcleo reproductor de algunos subespacios invariantes particulares, lo que nos ayudará en la tarea de determinar, entre otras cosas, si la dimensión del rango del operador raíz es finita.

Para finalizar, se ha añadido un apéndice, en el cual se han contemplado algunos resultados importantes con el fin de que la tesis sea lo más autocontenida posible.

Índice general

Capítulo 1

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

En este capítulo damos un panorama general de la teoría de los espacios de Hilbert con núcleo reproductor y tratamos algunos resultados de importancia en capítulos subsecuentes. El lector puede consultar [2], [18], por ejemplo.

1.1. Definiciones y teoría general

Dado un conjunto X, equipamos a la colección $\mathcal{F}(X)$ de todas las funciones de X en $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales de suma $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, y multiplicación por un escalar $(cf)(x) = cf(x)$, $c \in \mathbb{C}$. Así, $\mathcal{F}(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Definición 1.1 *Dado un conjunto X, decimos que $\mathcal{H}$ es un Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductor(EHNR) en X (sobre $\mathbb{C}$) si:*

i) *$\mathcal{H}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(X)$.*

ii) *$\mathcal{H}$ está dotado con un producto interior $\langle , \rangle$ respecto al cual es un espacio de Hilbert.*

iii) *Para cada $y \in X$, la funcional evaluación $E_y : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definida por $E_y(f) = f(y)$, es lineal y acotada.*

Sea $\mathcal{H}$ un EHNR en X. Dado que la funcional evaluación es acotada, por el teorema de representación de Riesz se tiene que para cada $y \in X$ existe una única función $k_y \in \mathcal{H}$, tal que $f(y) = \langle f, k_y \rangle$ para cada $f \in \mathcal{H}$.

Definición 1.2 *La función k_y se llama el núcleo reproductor para $y \in X$. La función $K : X \times X \to \mathbb{C}$ definida por $K(x, y) = k_y(x)$ se llama el núcleo reproductor para $\mathcal{H}$.*

Observación 1.3 *Sea $y \in X$. Como $k_y \in \mathcal{H}$ se tiene que*

$$K(x, y) = k_y(x) = \langle k_y, k_x \rangle, \quad x \in X, \tag{1.1}$$

además

$$K(x,y) = \langle k_y, k_x \rangle = \overline{\langle k_x, k_y \rangle} = \overline{K(y,x)}, \quad x, y \in X. \tag{1.2}$$

Dado que $\|E_y\| = \sup\{|E_y(f)| : \|f\| = 1\}$, *tenemos*

$$\|E_y\| = \sup\{|\langle f, k_y \rangle| : \|f\| = 1\} \leq \|k_y\|,$$

más aún, como $\frac{k_y}{\|k_y\|} \in \mathcal{H}$ *y tiene norma igual a 1 se sigue que*

$$\|E_y\| \geq \frac{|k_y(y)|}{\|k_y\|} = \|k_y\|.$$

Por lo tanto, $\|E_y\|^2 = \|k_y\|^2 = \langle k_y, k_y \rangle = K(y,y)$.

Si consideramos un subespacio vectorial cerrado de un EHNR, entonces es claro que es un espacio de Hilbert por sí mismo. Tal hecho lleva a preguntarse si dicho subespacio es o no un EHNR. El siguiente resultado da una respuesta afirmativa.

Proposición 1.4 *Sean* $\mathcal{H}$ *un EHNR en* X *y* $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ *un subespacio vectorial cerrado. Entonces* $\mathcal{H}_0$ *es un EHNR en* X *y el núcleo reproductor para* $y \in X$ *respecto a* $\mathcal{H}_0$ *es la función* $P_0(k_y)$, *donde* k_y *es el núcleo reproductor para* y *respecto a* $\mathcal{H}$ *y* $P_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_0$ *es la proyección ortogonal de* $\mathcal{H}$ *en* $\mathcal{H}_0$.

Demostración. Como $\mathcal{H}_0$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$, entonces es un espacio de Hilbert. Las propiedades $i)$ - $iii)$ de la Definición 1.1 las hereda $\mathcal{H}_0$ por ser subespacio vectorial de $\mathcal{H}$. Por tanto $\mathcal{H}_0$ es un EHNR.

Sea ahora $y \in X$. Como $\mathcal{H}$ es un EHNR, existe un único $k_y \in \mathcal{H}$ tal que $f(y) = \langle f, k_y \rangle$ para cada $f \in \mathcal{H}$; además como $\mathcal{H}_0$ es por sí mismo un EHNR, existe un único $\tilde{k}_y \in \mathcal{H}_0$ tal que $f(y) = \langle f, \tilde{k}_y \rangle$ para cada $f \in \mathcal{H}_0$.

Como $\mathcal{H}_0$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$, existe una única proyección ortogonal $P_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_0$. Así, P_0 es un operador autoadjunto y $P_0\tilde{k}_y = \tilde{k}_y$, por lo tanto

$$\tilde{k}_y(x) = \langle \tilde{k}_y, k_x \rangle = \langle P_0\tilde{k}_y, k_x \rangle = \langle \tilde{k}_y, P_0 k_x \rangle = \overline{(P_0 k_x)(y)},$$

para cada $x, y \in X$. De (1.2) se sigue que $\tilde{k}_x = P_0 k_x$ para todo $x \in X$. ∎

Por la proposición anterior el núcleo reproductor $K_0(x,y)$ para $\mathcal{H}_0$ está dado por $K_0(x,y) = \langle P_0 k_y, P_0 k_x \rangle$. Más adelante se tratarán algunas de las relaciones que existen entre el núcleo reproductor para $\mathcal{H}_0$ y el núcleo reproductor del espacio total $\mathcal{H}$.

Ahora mostramos que dado un conjunto X y $\mathcal{H}$ un EHNR en X con núcleo reproductor K, la función K determina completamente al espacio $\mathcal{H}$.

Lema 1.5 *Sea* $\mathcal{H}$ *un EHNR en* X *con núcleo reproductor* K. *Entonces el espacio vectorial generado por las funciones* $k_y(\cdot) = K(\cdot, y)$ *es denso en* $\mathcal{H}$.

Demostración. Sabemos que el espacio vectorial generado por un subconjunto no vacío de un espacio de Hilbert es denso en el espacio de Hilbert si y sólo si su complemento ortogonal es el vector cero. Ahora, una función $f \in \mathcal{H}$ pertenece al complemento ortogonal del espacio generado por la colección $\{k_y : y \in X\}$ si y sólo si $0 = \langle f, k_y \rangle = f(y)$ para cada $y \in X$. Esto último se cumple si y sólo si $f = 0$. ∎

Lema 1.6 *Sea $\mathcal{H}$ un EHNR en X y $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red en $\mathcal{H}$, donde Λ es un conjunto dirigido. Si $\|f_\lambda - f\| \to 0$, entonces la red $\{f_\lambda(x)\}$ converge puntualmente a $f(x)$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Por las propiedades del núcleo reproductor K y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$|f_\lambda(x) - f(x)| = |\langle f_\lambda - f, k_x \rangle| \leq \|f_\lambda - f\| \|k_x\|.$$

∎

Teorema 1.7 *Sean $\mathcal{H}_1$,$\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert con núcleo reproductor K. Entonces $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ y $\|f\|_1 = \|f\|_2$ para cada f.*

Demostración. Ponemos $W_i = span\{k_x \in \mathcal{H}_i : x \in X\}$. Por el Lema 1.5, W_i es denso en $\mathcal{H}_i$. Notamos que para cada $f \in W_i$ se tiene que $f(x) = \sum_j \alpha_j k_{x_j}(x)$ y que sus valores como función no dependen de si f pertenece a W_1 o W_2.

Ahora, para dicha f se tiene

$$\|f\|_1^2 = \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle k_{x_i}, k_{x_j} \rangle_1 = \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\alpha_j} K(x_j, x_i) = \|f\|_2^2.$$

Así, $\|f\|_1 = \|f\|_2$ para cada $f \in W_1 = W_2$.

Sea $f \in \mathcal{H}_1$. Existe una sucesión $\{f_n\}$ en W_1 tal que $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Por la igualdad antes probada se sigue que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en W_2; más aún, existe $g \in \mathcal{H}_2$ tal que $\|f_n - g\|_2 \to 0$. Por el lema anterior, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ para cada $x \in X$. Así $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$, y por un argumento análogo, $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$. Por tanto $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$.

Finalmente, como $\|f\|_1 = \|f\|_2$ en un subconjunto denso, se sigue el resultado. ∎

En el caso de que un EHNR tenga una base ortonormal numerable, una manera de calcular el núcleo reproductor nos la da el siguiente resultado:

Teorema 1.8 *Sea $\mathcal{H}$ un EHNR en X, separable y con núcleo reproductor $K(x,y)$. Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal para $\mathcal{H}$, entonces $K(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \overline{e_n(y)} e_n(x)$, y la serie converge puntualmente en $X \times X$.*

Demostración. Para cada $y \in X$ tenemos que $\langle k_y, e_n \rangle = \overline{\langle e_n, k_y \rangle} = \overline{e_n(y)}$. Así,

$$k_y = \sum_{n=1}^\infty \langle k_y, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^\infty \overline{e_n(y)} e_n,$$

donde la serie converge respecto a la norma en $\mathcal{H}$. Como la funcional evaluación E_x es continua en $\mathcal{H}$ tenemos

$$K(x,y) = k_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(y)} e_n(x) \in \mathbb{C}.$$

En particular $\sum_{n=1}^{\infty} |e_n(y)|^2 = K(y,y) < \infty$. ∎

Como una aplicación inmediata de la proposición anterior consideramos el siguiente resultado que se conoce como la desigualdad de Cauchy-Schwarz para el núcleo reproductor, la cual se suele usar para determinar que cierta función no es núcleo reproductor.

Proposición 1.9 *Sea $\mathcal{H}$ un EHNR en X, separable y con núcleo reproductor $K(x,y)$. Entonces se cumple $|K(x,y)|^2 \leq K(x,x)K(y,y)$ para $x, y \in X$.*

Demostración. Por el teorema anterior se tiene que $K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(y)} e_n(x)$, donde $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal para $\mathcal{H}$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$|K(x,y)|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{e_n(y)}||e_n(x)| \right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |e_n(y)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |e_n(x)|^2 = K(x,x)K(y,y).$$

∎

1.2. Caracterización del núcleo reproductor

En esta sección centramos nuestra atención en encontrar condiciones necesarias y suficientes para que una función $K(x,y)$ sea el núcleo reproductor para algún EHNR.

Denotamos por $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ a las matrices de $n \times n$ con entradas complejas. Sea $A = (a_{i,j}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Decimos que A es positiva ($A \geq 0$) si y sólo si para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ se tiene que $\sum_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_i} \alpha_j a_{i,j} \geq 0$. De manera equivalente, $A \geq 0$ si y sólo si $\langle Az, z \rangle \geq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}^n$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interior en $\mathbb{C}^n$.

Definición 1.10 *Sean X un conjunto y $K : X \times X \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que K es una función definida positiva en X si cumple que para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera n puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en X la matriz $(K(x_i, x_j))$ es positiva.*

Un resultado inmediato es el siguiente.

Proposición 1.11 *Sea X un conjunto y $\mathcal{H}$ un EHNR sobre X con núcleo reproductor K. Entonces K es una función definida positiva.*

Demostración. Sean $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ fijos. Entonces tenemos que

$$\sum_{i,j=1} \overline{\alpha_i}\alpha_j K(x_i, x_j) = \sum_{i,j=1} \overline{\alpha_i}\alpha_j \langle k_{x_j}, k_{x_i}\rangle = \left\langle \sum_{j=1} \alpha_j k_{x_j}, \sum_{i=1} \alpha_i k_{x_i} \right\rangle = \left\| \sum_{i=1} \alpha_i k_{x_i} \right\|^2 \geq 0.$$

$\blacksquare$

A partir de una o varias funciones definidas positivas podemos construir más funciones definidas positivas en base al siguiente resultado.

Proposición 1.12 *Sea X un conjunto. Entonces la suma de funciones definidas positivas es una función definida positiva. Si K es una función definida positiva y $f : X \to \mathbb{C}$ es cualquier función, entonces $K_1(x, y) = f(x)K(x, y)\overline{f(y)}$ es una función definida positiva.*

Demostración. Sean K_1, K_2 funciones definidas positivas. Sea $n \geq 1$ arbitrario y sean $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ fijos.

Para la primera parte de la proposición tenemos que

$$\sum_{i,j=1} \overline{\alpha_i}\alpha_j (K_1 + K_2)(x_i, x_j) = \sum_{i,j=1} \overline{\alpha_i}\alpha_j K_1(x_i, x_j) + \sum_{i,j=1} \overline{\alpha_i}\alpha_j K_2(x_i, x_j) \geq 0.$$

Para la segunda parte de la proposición tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1} \overline{\alpha_i}\alpha_j K_1(x_i, x_j) &= \sum_{i,j=1} \overline{\alpha_i}\alpha_j f(x_i)K(x_i, x_j)\overline{f(x_j)} \\ &= \sum_{i,j=1} \left(\overline{\alpha_i \overline{f(x_i)}}\right) \left(\alpha_j \overline{f(x_j)}\right) K(x_i, x_j) \geq 0. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

A continuación introducimos el producto de Schur de matrices en $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, para posteriormente construir otro ejemplo de función definida positiva.

Definición 1.13 *Sean $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, el producto de Schur de A y B, denotado por $A * B$, es la matriz $A * B = (a_{i,j}b_{i,j}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.*

Observación 1.14 *Es bien sabido que dadas las matrices positivas A y B, el producto de Schur $A * B$ es una matriz positiva (ver [13, pág. 458]). Así, si consideramos a un conjunto X y a $K_1, K_2 : X \times X \to \mathbb{C}$ funciones definidas positivas y definimos su producto $K : X \times X \to \mathbb{C}$ como $K(x, y) = K_1(x, y)K_2(x, y)$, entonces K es una función definida positiva.*

La Proposición 1.11 es evidente, más tiene un recíproco, el cual es un resultado muy importante que nos dará una completa caracterización de las funciones definidas positivas.

Teorema 1.15 (Moore, [18]) *Sean X un conjunto y $K : X \times X \to \mathbb{C}$ una función definida positiva. Entonces existe un único espacio de funciones definidas en X que es de Hilbert y tiene como núcleo reproductor a K.*

Demostración. Consideramos a $W \subset \mathcal{F}(X)$ como el espacio vectorial generado por el conjunto $\{k_y : y \in X\}$, donde $k_y(x) = K(x, y)$.

Sean $f = \sum_j \alpha_j k_{y_j}$, $g = \sum_i \beta_i k_{y_i}$ en W. Consideramos a la forma $B : W \times W \to \mathbb{C}$ definido por $B(f, g) = \sum_i \sum_j \alpha_j \overline{\beta_i} K(y_i, y_j)$. Afirmamos que B define un producto interior en W.

Veamos que B está bien definida en W, esto es, debemos mostrar que $B(f, w) = 0$ para cada $w \in W$ si y sólo si f es idénticamente cero en X. Sea $f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j k_{y_j}(x)$. Supongamos que f es idénticamente cero, por la definición de W es suficiente mostrar que $B(f, k_y) = 0$ para cada $y \in X$. Por la definición tenemos que $B(f, k_y) = \sum_j \alpha_j K(y, y_j) = f(y) = 0$, luego $B(f, w) = 0$ para cada $w \in W$, en particular $B(f, f) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $B(f, w) = 0$ para cada $w \in W$, en particular $B(f, k_y) = 0$ para cada $y \in X$, luego $f(y) = 0$. Por tanto B está bien definido, más aún, para cada $f \in W$ se tiene que $f(x) = B(f, k_x)$.

Es claro que B es sesquilineal. Además, como K es una función definida positiva, para cada $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j k_{y_j}$ se tiene $B(f, f) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_j \overline{\alpha_i} K(y_i, y_j) \geq 0$, esto implica que B define un producto interior semidefinido en W y en particular se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz, esto es,

$$|f(y)|^2 = |B(f, k_y)|^2 \leq B(f, f)B(k_y, k_y).$$

Así, $B(f, f) = 0$ implica que $f(y) = 0$ para cada $y \in X$. Por tanto B define un producto interior en W, por ende W es un espacio vectorial con producto interior.

La construcción del espacio requerido aún no termina pues W no es necesariamente completo, para este fin debemos considerar la completación de este espacio en la forma usual; esto es, debemos tomar las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en W para obtener un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Sea $[\{f_n\}] \in \mathcal{H}$, donde $\{f_n\} \subset W$ es una sucesión de Cauchy. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$|f_m(y) - f_n(y)| = |B(f_m - f_n, k_y)| \leq ||f_m - f_n||_B^{1/2} K(y, y)^{1/2},$$

luego $\{f_n(y)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ para cada $y \in X$, esto implica que existe el límite $h(y) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(y)$, $y \in X$. Por tanto h es una función en X. Así, identificamos a $\mathcal{H}$ con el conjunto $\mathcal{H}(K)$ de las funciones que son límites puntuales de sucesiones de Cauchy en $(W, B(\cdot, \cdot))$. Si $f, g \in \mathcal{H}(K)$ definimos

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}(K)} = \lim_{n\to\infty} B(f_n, g_n) = \langle [\{f_n\}], [\{g_n\}]\rangle_{\mathcal{H}},$$

por lo tanto la completación de $(W, B(\cdot, \cdot))$ es isométricamente isomorfo a $(\mathcal{H}(K), \langle\cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{H}(K)})$.

Por último, para $h \in \mathcal{H}(K)$ tenemos $\langle h, k_y \rangle_{\mathcal{H}(K)} = \lim_{n\to\infty} B(f_n, k_y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y) = h(y)$. Por tanto $\mathcal{H}(K)$ es un EHNR y como k_y es el núcleo reproductor para el punto y tenemos que $K(x,y) = k_y(x)$ es el núcleo reproductor para $\mathcal{H}(K)$. ■

Por el Teorema 1.7 se tiene que el espacio encontrado en el teorema anterior es único. El Teorema de Moore y la proposición anterior muestran que hay una correspondencia uno a uno entre las funciones definidas positivas y los espacios de Hilbert con núcleo reproductor.

Definición 1.16 *Dada una función definida positiva $K : X \times X \to \mathbb{C}$, denotamos por $\mathcal{H}(K)$ al espacio determinado por el Teorema de Moore.*

Del Teorema de Moore se sigue que dada una función definida positiva K existe un espacio de Hilbert con núcleo reproductor K; más en la práctica es difícil dar una descripción concreta de dicho espacio, pues la construcción de tal espacio en la demostración del teorema es abstracta. Dicho problema se conoce como el problema de reconstrucción. A continuación presentamos un ejemplo.

Proposición 1.17 *Sean X un conjunto y f una función no cero definida en X. Ponemos $K(x,y) = f(x)\overline{f(y)}$, $x, y \in X$. Entonces K es una función definida positiva, $\mathcal{H}(K)$ es el espacio vectorial generado por f y $||f||_{\mathcal{H}(K)} = 1$.*

Demostración. K es una función definida positiva pues dados $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_i}\alpha_j K(x_i, x_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_i}\alpha_j f(x_i)\overline{f(x_j)} = \left|\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} f(x_i)\right|^2 \geq 0.$$

Como en el Teorema de Moore ponemos $W = span\{k_y : y \in X\} = span\{\overline{f(y)}f : y \in X\}$, que coincide con el espacio generado por la función f; el cual es completo por tener dimensión 1. Por tanto, $\mathcal{H}(K)$ es el espacio generado por f. En este caso el producto interior en $\mathcal{H}(K)$ está dado por $B(cf, df) = c\overline{d}$, luego $\|f\|^2_{\mathcal{H}(K)} = B(f,f) = 1$. ■

1.3. El Teorema de Beatrous y Burbea

En este apartado tratamos el Teorema de Beatrous y Burbea, el cual nos da una forma no trivial de generar nuevas funciones definidas positivas a partir de otras. Este teorema será de mucha importancia en la construcción de los llamados espacios de Hilbert sub-Bergman, los cuales introducimos más adelante.

Primero mostramos unos resultados que serán de gran utilidad en la demostración del resultado principal de esta sección.

Definición 1.18 *Dadas dos matrices $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, escribimos $A \leq B$ si $B - A$ es una matriz positiva.*

Lema 1.19 *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz positiva y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ un vector en $\mathbb{C}^n$. Si $xx^* := (x_i\overline{x_j})_{i,j} \leq cA$, para algún $c > 0$, entonces x está en el rango de A. Más aún, si y es cualquier vector tal que $x = Ay$, entonces $0 \leq \langle x, y\rangle \leq c$.*

Demostración. Denotamos por $\mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{N}(A)$ al rango y núcleo de A respectivamente. Sabemos que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A)^{\perp}$, así que podemos escribir $x = v + w$ con $v \in \mathcal{R}(A)$, $w \in \mathcal{N}(A)$. Como $\langle x, w\rangle = \langle w, w\rangle$, entonces

$$\|w\|^4 = \langle w, x\rangle\langle x, w\rangle = \sum_{i,j} w_i\overline{x_i}x_j\overline{w_j} = \langle xx^*w, w\rangle \leq \langle cAw, w\rangle = 0,$$

pues $Aw = 0$. Así, $w = 0$ lo que implica que $x = v \in \mathcal{R}(A)$.

Por último, si $x = Ay$ entonces $\langle x, y\rangle = \langle Ay, y\rangle \geq 0$. Procediendo como antes se tiene

$$\langle x, y\rangle^2 = \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle = \langle xx^*y, y\rangle \leq \langle cAy, y\rangle = c\langle x, y\rangle.$$

■

Basado en el lema anterior, el siguiente resultado caracteriza a las funciones que pertenecen a un EHNR en términos del núcleo reproductor.

Proposición 1.20 *Sea $\mathcal{H}$ un EHNR en X con núcleo reproductor K y $f : X \to \mathbb{C}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$f \in \mathcal{H}$.*
2. *Existe $c > 0$ tal que para cada conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$, existe una función $h \in \mathcal{H}$ con $\|h\| \leq c$ y $f(x_i) = h(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*
3. *Existe una constante $c > 0$ tal que la función $c^2K(x, y) - f(x)\overline{f(y)}$ es definida positiva.*

Demostración. 1)⇒3) Sean $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ y $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{C}$, $n \geq 1$. Si ponemos $g = \sum_i \alpha_i k_{x_i}$, entonces

$$\sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j f(x_i)\overline{f(x_j)} = \left|\sum_i \overline{\alpha_i} f(x_i)\right|^2 = |\langle f, g\rangle|^2 \leq \|f\|^2\|g\|^2 = \|f\|^2 \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j K(x_i, x_j).$$

Como la elección de F y de los escalares es arbitraria, tenemos que

$$\|f\|^2 K(x, y) - f(x)\overline{f(y)}$$

es definida positiva.

3)$\Rightarrow$2) Sea $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$. Aplicando el Lema 1.19 a la matriz $A = (K(x_i, x_j))$, al vector $x = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))^t$ y tomando c^2 en lugar de c, se obtiene que x está en el rango de $(K(x_i, x_j))$. Así que existe un vector $w = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^t$ tal que $(K(x_i, x_j))w = x$. Es fácil verificar que la función $h = \sum_i a_i k_{x_i} \in \mathcal{H}$ satisface $h(x_i) = f(x_i)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Además $\|h\|^2 = \langle x^t, w^t\rangle \leq c^2$ por el Lema 1.19.

2 $\Rightarrow$1) Por hipótesis, para cada $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ existe $h_F \in \mathcal{H}$ tal que $\|h_F\| \leq c$ y $h_F(x) = f(x)$ para cada $x \in F$. Consideramos la proyección ortogonal

$$P_F : \mathcal{H} \rightarrow span\{k_{x_1}, k_{x_2} \ldots, k_{x_n}\}$$

y ponemos $g_F = P_F h_F$. Dado que

$$h_F(x_i) = \langle h_F, k_{x_i}\rangle = \langle h_F, P_F k_{x_i}\rangle = \langle P_F h_F, k_{x_i}\rangle = P_F h_F(x_i),$$

entonces $g_F(x) = h_F(x) = f(x)$ para cada $x \in F$ y $\|g_F\| \leq \|h_F\| \leq c$. Afirmamos que la red $\{g_F\}_{F\in\mathcal{P}(X)}$ es de Cauchy y que converge a f, donde consideramos a $\mathcal{P}(X)$ como un conjunto dirigido respecto al orden parcial dado por la inclusión de conjuntos.

Ponemos $r = \sup \|g_F\| \leq c$ y tomamos $\epsilon > 0$. Existe un conjunto $F_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tal que $r - \frac{\epsilon^2}{8r} < \|g_{F_0}\|$. Sea $F \in \mathcal{P}(X)$ con $F_0 \subset F$. Es claro que $h_F(x) = h_{F_0}(x)$ para cada $x \in F_0$, esto implica que para cada $x_i \in F_0$ se cumple $\langle P_{F_0} h_{F_0}, k_{x_i}\rangle = \langle P_F h_F, k_{x_i}\rangle$, luego $\langle g_{F_0}, k_{x_i}\rangle = \langle g_F, k_{x_i}\rangle$, así $\langle g_{F_0}, k_{x_i}\rangle = \langle g_{F_0}, P_{F_0} k_{x_i}\rangle = \langle P_{F_0} g_F, k_{x_i}\rangle$. Por tanto $P_{F_0}(g_F) = g_{F_0}$. En particular, $\langle g_F - g_{F_0}, g_{F_0}\rangle = 0$, luego $\|g_F - g_{F_0}\|^2 = \|g_F\|^2 - \|g_{F_0}\|^2$, lo que implica $\|g_{F_0}\| \leq \|g_F\|$. Por tanto $0 \leq \|g_F\| - \|g_{F_0}\| \leq \frac{\epsilon^2}{8r}$ y $\|g_F - g_{F_0}\|^2 = (\|g_F\| + \|g_{F_0}\|)(\|g_F\| - \|g_{F_0}\|) \leq 2r\frac{\epsilon^2}{8r}$. Así, $\|g_F - g_{F_0}\| < \frac{\epsilon}{2}$ y para cualesquiera $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(X)$ con $F_0 \subset F_1$, $F_0 \subset F_2$ se sigue que $\|g_{F_1} - g_{F_2}\| < \epsilon$.

Hemos probado que la red $\{g_F\}_{F\in\mathcal{P}(X)}$ es de Cauchy. Así, existe $g \in \mathcal{H}$ que es límite de esta red y cumple $\|g\| \leq r \leq c$. Dado que cada red convergente en norma converge puntualmente en X se tiene $g(x) = f(x)$ para cada $x \in X$. ■

Basado en los dos resultados preliminares mostramos un resultado debido a *Aronszajn*. Dicho resultado es muy importante pues caracteriza cuándo la diferencia de dos funciones definidas positivas es una función definida positiva.

Definición 1.21 *Dadas K y K' funciones definidas positivas en X, denotamos por $K \leq K'$ si $K' - K$ es una función definida positiva.*

Teorema 1.22 (Aronszajn, [18]) *Sean X un conjunto y $K_i : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ una funcion definida positiva con $(\mathcal{H}(K_i), \|\cdot\|_i)$ su EHNR, $i = 1, 2$. Entonces $\mathcal{H}(K_1) \subset \mathcal{H}(K_2)$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $K_1 \leq c^2 K_2$. En este caso, $\|f\|_2 \leq c\|f\|_1$ para cada $f \in \mathcal{H}(K_1)$.*

Demostración. Primero mostramos que la condición es suficiente. Asumamos que existe tal constante $c > 0$. Si $f \in \mathcal{H}(K_1)$ con $\|f\|_1 = 1$, el resultado previo (1)$\Rightarrow$3)) implica que $f(x)\overline{f(y)} \leq K_1(x, y)$. Usando la hipótesis se sigue que $f(x)\overline{f(y)} \leq c^2 K_2(x, y)$, y nuevamente por el resultado previo (3)$\Rightarrow$1)) $f \in \mathcal{H}(K_2)$ y $\|f\|_2 \leq c$.

Ahora suponemos que $\mathcal{H}(K_1) \subset \mathcal{H}(K_2)$ y consideramos el operador inclusión $T : \mathcal{H}(K_1) \to \mathcal{H}(K_2)$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{H}(K_1)$ y $f \in \mathcal{H}(K_1)$, $g \in \mathcal{H}(K_2)$ tales que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ y $\|Tf_n - g\|_2 \to 0$, entonces

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} Tf_n(x) = g(x), \quad x \in X.$$

Así, $g = Tf$ y por el teorema de la gráfica cerrada T es acotado. Poniendo $c = \|T\|$ se tiene que $\|f\|_2 \leq c\|f\|_1$ para toda $f \in \mathcal{H}(K_1)$.

Ahora consideramos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Como K_1 es una función definida positiva entonces

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j K_1(x_i, x_j) &= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j \langle K_1(\cdot, x_j), K_2(\cdot, x_i)\rangle_2 \\
&= \left\langle \sum_j \alpha_j K_1(\cdot, x_j), \sum_i \alpha_i K_2(\cdot, x_i) \right\rangle_2 \\
&\leq \left\| \sum_j \alpha_j K_1(\cdot, x_j) \right\|_2 \left\| \sum_i \alpha_i K_2(\cdot, x_i) \right\|_2 \\
&\leq c \left\| \sum_j \alpha_j K_1(\cdot, x_j) \right\|_1 \left\| \sum_i \alpha_i K_2(\cdot, x_i) \right\|_2 .
\end{aligned}$$

Dado que $\sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j K_l(x_i, x_j) = \| \sum_j \alpha_j K_l(\cdot, x_j)\|_l^2$, $l = 1, 2$, elevando al cuadrado se concluye fácilmente el resultado. ■

Definición 1.23 *Sean $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ dos E´sHNR en X con núcleo reproductor K_1, K_2 respectivamente. Una función $\varphi : X \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ es llamada un multiplicador de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$. Denotamos por $\mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ al conjunto de multiplicadores de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$.*

Dado un multiplicador $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $M_\varphi : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ denotará el operador lineal definido como $M_\varphi(f) = \varphi f$.

Proposición 1.24 *Sean $\mathcal{H}$ un EHNR en X con núcleo reproductor K, $f : X \to \mathbb{C}$ una función, $\mathcal{F}_0 = \{h \in \mathcal{H} : fh = 0\}$ y $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0^\perp$. Ponemos $\mathcal{H}_f = f\mathcal{H} = f\mathcal{F}_1$ y definimos un producto interior en $\mathcal{H}_f$ como $\langle fh_1, fh_2\rangle_f = \langle h_1, h_2\rangle$ para $h_1, h_2 \in \mathcal{F}_1$. Entonces $\mathcal{H}_f$ es un EHNR en X con núcleo reproductor $K_f(x, y) = f(x)K(x, y)\overline{f(y)}$.*

Demostración. Por definición, $\mathcal{H}_f$ es un espacio vectorial de funciones en X y el mapeo $h \to fh$ es una isometría lineal sobreyectiva de $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{H}_f$. Así, $\mathcal{H}_f$ es un espacio de Hilbert pues $\mathcal{F}_1$ lo es.

Sea $y \in X$. Escribimos $k_y = k_y^0 + k_y^1$ con $k_y^i \in \mathcal{F}_i$, por la Proposición 1.4 tenemos que $K_i(x, y) = k_y^i(x)$ es el núcleo reproductor para $\mathcal{F}_i$, $i = 0, 1$.

Para ver que $\mathcal{H}_f$ es un EHNR notemos que para cada $y \in X$ fijo y $h \in \mathcal{F}_1$,

$$f(y)h(y) = f(y)\langle h, k_y\rangle = \langle fh, \overline{f(y)}fk_y^1\rangle_f.$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la igualdad anterior se tiene que la funcional evaluación es acotada y que $K_f(x,y) = f(x)k_y^1(x)\overline{f(y)}$. Como $fk_y^0 = 0$ entonces $K_f(x,y) = f(x)K(x,y)\overline{f(y)}$. ∎

Ahora estamos preparados para caracterizar a los multiplicadores.

Teorema 1.25 *Sean $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ E'sHNR en X con núcleo reproductor K_1, K_2 respectivamente y sea $\varphi : X \to \mathbb{C}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.*
2. *$\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y M_φ es un operador acotado.*
3. *Existe $c > 0$ tal que $\varphi(x)K_1(x,y)\overline{\varphi(y)} \leq c^2 K_2(x,y)$.*

En cualquier caso $\|M_\varphi\|$ es la menor constante $c > 0$ que satisface la desigualdad en 3.

Demostración. $2 \Rightarrow 1$) Es evidente.

1)$\Rightarrow$ 3) Por la Proposición 1.24 $\mathcal{H}_\varphi = \varphi\mathcal{H}_1$, con el producto interior definido en ese resultado, es un EHNR con núcleo reproductor $K_\varphi(x,y) = \varphi(x)K_1(x,y)\overline{\varphi(y)}$. Como $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, entonces $\mathcal{H}_\varphi \subset \mathcal{H}_2$. Por el Teorema 1.22 existe $c > 0$ tal que $K_\varphi(x,y) \leq c^2 K_2(x,y)$.

3)$\Rightarrow$ 2) Como el núcleo reproductor de $\mathcal{H}_\varphi = \varphi\mathcal{H}_1$ cumple

$$K_\varphi(x,y) = \varphi(x)K_1(x,y)\overline{\varphi(y)} \leq c^2 K_2(x,y),$$

por el Teorema 1.22 $\mathcal{H}_\varphi = \varphi\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$. Como en la proposición anterior, descomponemos $\mathcal{H}_1 = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$, donde $\varphi\mathcal{F}_0 = \{0\}$. Para $h \in \mathcal{H}_1$ ponemos $h = h_0 + h_1$ con $h_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 0, 1$, entonces nuevamente por el Teorema 1.22

$$\|\varphi h\|_{\mathcal{H}_2} = \|\varphi h_1\|_{\mathcal{H}_2} \leq c\|\varphi h_1\|_{\mathcal{H}_\varphi} = c\|h_1\|_{\mathcal{F}_1} \leq c\|h\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Por tanto M_φ es acotado y $\|M_\varphi\| \leq c$.

Finalmente, si $\|M_\varphi\| = C$, entonces para cada $h_1 \in \mathcal{F}_1$,

$$\|\varphi h_1\|_{\mathcal{H}_2} = \|M_\varphi h_1\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|h_1\|_{\mathcal{H}_1} = C\|\varphi h_1\|_{\mathcal{H}_\varphi}.$$

Esto implica que $\mathcal{H}_\varphi \subset \mathcal{H}_2$. Se sigue por el Teorema 1.22 que $\varphi(x)K_1(x,y)\overline{\varphi(y)} = K_\varphi(x,y) \leq C^2 K_2(x,y)$. ∎

Definición 1.26 *Un multiplicador φ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se dice contractivo si $\|\varphi f\| \leq \|f\|$ para cada $f \in \mathcal{H}$.*

Es tiempo de presentar el resultado que nos propusimos como objetivo en este apartado.

Teorema 1.27 (Beatrous & Burbea, [18]) *Sea $\mathcal{H}$ un EHNR en $\mathbb{D}$ con núcleo reproductor K y sea φ una función analítica y acotada en $\mathbb{D}$ tal que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Entonces la función*

$$K^*(x,y) := (1-\varphi(x)\overline{\varphi(y)})K(x,y)$$

es una función definida positiva si y sólo si φ es un multiplicador contractivo de $\mathcal{H}$.

Demostración. Supongamos que $K^*(x,y)$ es una función definida positiva. Por el resultado anterior, φ es un multiplicador en $\mathcal{H}$ y el operador multiplicación M_φ es acotado con norma menor o igual a 1. Luego $\|\varphi f\| = \|M_\varphi f\| \leq \|f\|$.

Supongamos que φ es un multiplicador contractivo. Por el resultado anterior $(c^2 - \varphi(x)\overline{\varphi(y)})K(x,y)$ es una función definida positiva, donde $c = \|M_\varphi\| \leq 1$. Si $c = 1$ se tiene que $K^*(x,y)$ es una función definida positiva; mientras que si $c < 1$, entonces $(1-c^2)K(x,y)$ es una función definida positiva y por tanto $K^*(x,y)$ es una función definida positiva. ■

Capítulo 2

Espacios de Bergman

En este capítulo introducimos los espacios de Bergman con peso definidos en el disco complejo unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y tratamos algunas de sus propiedades generales. También presentamos los llamados espacios de Hilbert sub-Bergman, los cuales servirán de ejemplo a lo que anteriormente llamamos el problema de reconstrucción.

2.1. Generalidades

La medida de área normalizada en $\mathbb{D}$ será denotada por $dA(z)$. Para $-1 < \alpha < \infty$, denotamos por $dA_\alpha(z)$ a la medida $dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z)$. Para $1 \leq p < \infty$ y $-1 < \alpha < \infty$, $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ denota el espacio de Banach de las clases de funciones f Lebesgue-medibles en $\mathbb{D}$ tales que

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left[\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z)\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definición 2.1 *Para $1 \leq p < \infty$ y $-1 < \alpha < \infty$, el espacio de Bergman con peso $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ es el subespacio de $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ que consiste de las funciones analíticas en $\mathbb{D}$. En particular, si $\alpha = 0$ entonces $A^p(\mathbb{D})$ es llamado p-espacio de Bergman.*

A menos que se diga lo contrario el parámetro p será siempre mayor o igual que 1.

Proposición 2.2 *Sean $1 \leq p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ y K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Entonces existe una constante positiva $C = C(n, K, p, \alpha)$ tal que*

$$\sup\{|f^{(n)}(z)| : z \in K\} \leq C\|f\|_{p,\alpha}$$

para cada $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$ y cada entero no negativo n.

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que $K = \overline{B}(0,r)$, para algún $r \in (0,1)$.

Ponemos $\sigma = (1-r)/2 > 0$. Como $|f|^p$ es subarmónica (ver [9, pág. 35]), se tiene

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{\sigma^2} \int_{B(z,\sigma)} |f(w)|^p dA(w)$$

para cada $z \in K$. Del hecho que $|w| \leq |z| + \sigma \leq \frac{r+1}{2}$ para cada $w \in B(z,\sigma)$, se tiene que

$$1 - |w|^2 = (1+|w|)(1-|w|) \geq \sigma,$$

así,

$$\begin{aligned}
\int_{B(z,\sigma)} |f(w)|^p dA_\alpha(w) &= \int_{B(z,\sigma)} |f(w)|^p (\alpha+1)(1-|w|^2)^\alpha dA(w) \\
&\geq (\alpha+1)\sigma^\alpha \int_{B(z,\sigma)} |f(w)|^p dA(w) \\
&\geq (\alpha+1)\sigma^{\alpha+2} |f(z)|^p,
\end{aligned}$$

lo que implica que existe $C = C(r,\alpha) > 0$ tal que

$$|f(z)|^p \leq C \int_{B(z,\sigma)} |f(w)|^p dA_\alpha(w) \leq C \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA_\alpha(w) = C\|f\|_{p,\alpha}^p$$

para cada $z \in K$. Esto resuelve el caso $n = 0$.

Existe $M > 0$ tal que $|f(w)| \leq M\|f\|_{p,\alpha}$ para cada w tal que $|w| = R = (1+r)/2$. Si $z \in K$, por la fórmula integral de Cauchy se tiene

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}},$$

ya que $R > r$. Dado que $|w - z| \geq R - r = \sigma$ obtenemos

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!MR}{\sigma^{n+1}} \|f\|_{p,\alpha}$$

para cada $z \in K$, $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$ y $n \geq 1$. ∎

Sea $z \in \mathbb{D}$ fijo. Definimos la funcional lineal evaluación $E_z : A^p_\alpha(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ como $E_z(f) = f(z)$. Tomando $n = 0$ y $K = \{z\}$ en la proposición anterior se tiene que existe $C > 0$ tal que

$$|E_z(f)| = |f(z)| \leq C\|f\|_{p,\alpha}$$

para cada $f \in A^p_\alpha$, esto es, E_z es una funcional lineal acotada en todos los espacios de Bergman con peso.

Proposición 2.3 *Para cada $1 \leq p < \infty$ y $-1 < \alpha < \infty$, el espacio de Bergman con peso $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ tal que $f_n \to f$ en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. Dado un subconjunto compacto K de $\mathbb{D}$, por la proposición anterior existe $C > 0$ tal que

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq C\|f_n - f_m\|_{p,\alpha}$$

para cada $z \in K$, $n, m \in \mathbb{N}$. Como $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ se sigue que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy uniforme en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Así que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ a f, por lo que se sigue que f es analítica en $\mathbb{D}$. ■

Por la proposición anterior $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert, además la funcional lineal evaluación en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ es acotada, entonces $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ es un EHNR. Así que existe una función $k^\alpha_z \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$ tal que

$$f(z) = \langle f, k^\alpha_z \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{k^\alpha_z(w)}dA_\alpha(w) \tag{2.1}$$

para cada f en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. La función $K_\alpha(z, w) = \overline{k^\alpha_z(w)}$ es llamado el núcleo de Bergman para $A^2_\alpha(\mathbb{D})$.

En algunas aplicaciones necesitamos aproximar las funciones del espacio de Bergman $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ por funciones que se comportan mejor, para lo cual tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.4 *Para una función f analítica en $\mathbb{D}$ y $0 < r < 1$, sea f_r la función dilatación definida como $f_r(z) = f(rz)$, para $z \in \mathbb{D}$. Entonces*

1. *Para cada $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$, tenemos $\|f - f_r\|_{p,\alpha} \to 0$ cuando $r \to 1^-$.*
2. *Para cada $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$, existe una sucesión $\{p_n\}$ de polinomios tal que $\|p_n - f\|_{p,\alpha} \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Sea $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$, definimos

$$M_p(\rho, f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}, \ 0 \leq \rho < 1.$$

Es claro que $M_p(\rho r, f) = M_p(\rho, f_r)$ para cada $0 < r < 1$. Como $|f|^p$ es subarmónica (ver [9, pág. 35]), el Teorema 1.6 en [7] implica que para $0 \leq \rho < 1$

$$\begin{aligned} M^p_p(\rho, f - f_r) &\leq 2^p(M^p_p(\rho, f) + M^p_p(\rho, f_r)) \\ &= 2^p(M^p_p(\rho, f) + M^p_p(\rho r, f)) \leq 2^{p+1}M^p_p(\rho, f), \end{aligned}$$

pues $\rho r < \rho$.

Sea $0 \leq \rho < 1$ fijo. Dado que $\{\rho e^{i\theta} : \ 0 \leq \theta < 2\pi\}$ es compacto y f_r converge a f uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ cuando $r \to 1^-$, entonces $M^p_p(\rho, f - f_r)$ converge a cero cuando $r \to 1^-$. Además la hipótesis $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$ es equivalente a decir que $M_p^p(\rho, f)$ es integrable en el intervalo $[0,1)$ respecto a la medida $(1-\rho^2)^\alpha \rho d\rho$, así, por el teorema de la convergencia dominada se tiene que

$$\|f - f_r\|_{p,\alpha}^p = 2\int_0^1 M_p^p(\rho, f - f_r)(1-\rho^2)^\alpha \rho d\rho \longrightarrow 0,$$

cuando $r \to 1^-$.

Sea $\epsilon > 0$. Por la afirmación anterior existe $0 < r < 1$ tal que

$$\|f - f_r\|_{p,\alpha} < \epsilon/2.$$

Como la función f_r es analítica en $\frac{1}{r}\mathbb{D}$, entonces la serie de Taylor de f_r converge uniformemente en $\overline{\mathbb{D}}$ a f_r; esto es, existe un polinomio p tal que

$$\|p - f_r\|_{p,\alpha} \leq \|p - f_r\|_\infty < \epsilon/2.$$

La segunda afirmación se sigue. ■

Para cada entero no negativo n y para cada $z \in \mathbb{D}$, ponemos

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}} z^n.$$

Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ al producto interior en $A_\alpha^2(\mathbb{D})$. La sucesión de funciones $\{e_n\}_{n\geq 0}$ es un conjunto ortonormal en $A_\alpha^2(\mathbb{D})$, pues tenemos

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m \rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{D}} e_n(z)\overline{e_m(z)} dA_\alpha(z) \\
&= \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}} \sqrt{\frac{\Gamma(m+2+\alpha)}{m!\Gamma(2+\alpha)}} \int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z^m} dA_\alpha(z) \\
&= \frac{\alpha+1}{\pi} \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} \frac{\Gamma(m+2+\alpha)}{m!\Gamma(2+\alpha)}} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^\alpha r^{n+m+1} e^{i(n-m)\theta} dr d\theta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle e_n, e_m \rangle_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m \\ 1 & \text{si} \quad n = m. \end{cases}$$

Además, por la proposición anterior sabemos que el conjunto de los polinomios es denso en $A_\alpha^2(\mathbb{D})$, por lo que concluimos que $\{e_n\}_{n\geq 0}$ es una base ortonormal para $A_\alpha^2(\mathbb{D})$.

Por el Teorema 1.8 ahora podemos calcular el núcleo reproductor para $A_\alpha^2(\mathbb{D})$, esto es,

$$\begin{aligned}
k_w^\alpha(z) = K_\alpha(z, w) &= \sum_{n=0}^\infty e_n(z)\overline{e_n(w)} \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} (z\overline{w})^n = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Por lo cual, de (2.1) se sigue que

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w)$$

para cada $f \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Por último, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$ se tiene

$$\langle f, g \rangle_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} a_n \overline{b_n},$$

en particular

$$\|f\|^2_{2,\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} |a_n|^2. \tag{2.2}$$

Proposición 2.5 *Para cada $-1 < \alpha < \infty$, sea P_α la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sobre $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Entonces*

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w)$$

para cada $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Demostración. Por (2.1) se sigue que

$$\begin{aligned} P_\alpha f(z) &= \langle P_\alpha f, k^\alpha_z \rangle \\ &= \langle f, P_\alpha k^\alpha_z \rangle = \langle f, k^\alpha_z \rangle \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w). \end{aligned}$$

■

Los operadores P_α antes descritos son llamados proyecciones de Bergman con peso en $\mathbb{D}$. En el caso que $\alpha = 0$, sólo pondremos P.

Definición 2.6 *Para $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$ introducimos el operador $T_\varphi : A^2_\alpha(\mathbb{D}) \to A^2_\alpha(\mathbb{D})$ dado por*

$$T_\varphi(f) = P_\alpha(\varphi f),$$

donde P_α es la proyección de Bergman sobre $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. El operador T_φ es llamado operador de Toeplitz en el espacio de Bergman $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ con símbolo φ.

Notamos que T_φ es un operador lineal acotado con $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$ pues $\|P_\alpha\| = 1$. A continuación presentamos algunas propiedades básicas de los operadores de Toeplitz.

Proposición 2.7 *Sean $a, b \in \mathbb{C}$ y $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{D})$. Entonces*

1. $T_{a\varphi + b\psi} = aT_\varphi + bT_\psi$.

2. $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.

3. Si ψ *es analítica en* $\mathbb{D}$ *entonces* $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$ *y* $T_{\overline{\psi}} T_\varphi = T_{\overline{\psi}\varphi}$.

Demostración. Sean $f, g \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$.

1. Es evidente de la linealidad de la integral.
2. Se sigue del hecho que

$$\begin{aligned}
\langle T_\varphi^* f, g\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} &= \langle f, T_\varphi g\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} = \langle f, P_\alpha(\varphi g)\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} \\
&= \langle P_\alpha f, \varphi g\rangle_{L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)} = \langle f, \varphi g\rangle_{L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)} \\
&= \langle \overline{\varphi} f, g\rangle_{L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)} = \langle \overline{\varphi} f, P_\alpha g\rangle_{L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)} \\
&= \langle P_\alpha(\overline{\varphi} f), g\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} = \langle T_{\overline{\varphi}} f, g\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})}.
\end{aligned}$$

3. Como ψ es analítica en $\mathbb{D}$ y $\psi \in L^\infty(\mathbb{D})$, entonces $\psi A^2_\alpha(\mathbb{D}) \subset A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Luego

$$T_\varphi T_\psi f = T_\varphi P_\alpha(\psi f) = T_\varphi(\psi f) = P_\alpha(\varphi\psi f) = T_{\varphi\psi} f.$$

   Para la segunda igualdad observamos que $T_{\overline{\varphi}} T_\psi = T_{\overline{\varphi}\psi}$, entonces por (2) de este mismo resultado, $T_{\varphi\overline{\psi}} = T^*_{\overline{\varphi}\psi} = (T_{\overline{\varphi}} T_\psi)^* = T_\psi^* T_{\overline{\varphi}}^* = T_{\overline{\psi}} T_\varphi$.

■

El núcleo reproductor de los espacios de Bergman con peso está relacionado con las transformaciones de Möbius. Para $a \in \mathbb{D}$ consideramos la transformación de Möbius $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$, $z \in \mathbb{D}$. Se sabe que el determinante del Jacobiano de φ_a en z es

$$|\varphi_a'(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\overline{a}z|^4} \tag{2.3}$$

y además se cumple

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}. \tag{2.4}$$

El siguiente resultado es conocido como la invariancia de Möbius del núcleo reproductor K_α.

Proposición 2.8 *Sea* φ_a *una transformación de Möbius en* $\mathbb{D}$. *Entonces*

$$K_\alpha(z,w) = \frac{\varphi_a'(z)(1-|a|^2)^{\alpha/2}}{(1-\overline{a}z)^\alpha} K_\alpha(\varphi_a(z), \varphi_a(w)) \frac{\overline{\varphi_a'(w)}(1-|a|^2)^{\alpha/2}}{(1-\overline{w}a)^\alpha}, \ z, w \in \mathbb{D}. \tag{2.5}$$

Demostración. Sea $\{e_n\}_{n\geq 0}$ una base ortonormal para $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Entonces

$$\sigma_n(z) = \frac{e_n(\varphi_a(z))\varphi_a'(z)(1-|a|^2)^{\alpha/2}}{(1-\overline{a}z)^\alpha} = -\frac{e_n(\varphi_a(z))(1-|a|^2)^{\alpha/2+1}}{(1-\overline{a}z)^{\alpha+2}}, \quad n \geq 0$$

es un conjunto ortonormal en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. En efecto, considerando (2.3) y (2.4) se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \sigma_n(z)\overline{\sigma_m(z)}dA_\alpha(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{e_n(\varphi_a(z))\overline{e_m(\varphi_a(z))}|\varphi_a'(z)|^2(1-|a|^2)^\alpha}{|1-\overline{a}z|^{2\alpha}}(1-|z|^2)^\alpha dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} e_n(\varphi_a(z))\overline{e_m(\varphi_a(z))}|\varphi_a'(z)|^2(1-|\varphi_a(z)|^2)^\alpha dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} e_n(\eta)\overline{e_m(\eta)}(1-|\eta|^2)^\alpha dA(\eta) \\
&= \int_{\mathbb{D}} e_n(\eta)\overline{e_m(\eta)}dA_\alpha(\eta) = \langle e_n, e_m\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} = \delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

Si $g \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$ entonces $f(z) = g(\varphi_a(z))(1-\overline{a}\varphi_a(z))^{\alpha+2}$ es una función analítica en $\mathbb{D}$, usando (2.3) y (2.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA_\alpha(z) &= \int_{\mathbb{D}} |g(\varphi_a(z))|^2|1-\overline{a}\varphi_a(z)|^{2\alpha+4}dA_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |g(\xi)|^2|1-\overline{a}\xi|^{2\alpha+4}(1-|\varphi_a(\xi)|^2)^\alpha|\varphi_a'(\xi)|^2 dA(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |g(\xi)|^2|1-\overline{a}\xi|^{2\alpha+4}\frac{(1-|a|^2)^{\alpha+2}(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\overline{a}\xi|^{2\alpha+4}}dA(\xi) \\
&= (1-|a|^2)^{\alpha+2}\int_{\mathbb{D}} |g(\xi)|^2 dA_\alpha(\xi) < \infty,
\end{aligned}$$

por lo tanto $f \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$.

Sea $g \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$ tal que $\langle \sigma_n, g\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} = 0$ para cada $n \geq 0$. Definimos $f(z) = g(\varphi_a(z))(1-\overline{a}\varphi_a(z))^{\alpha+2}$, $z \in \mathbb{D}$, entonces $f(\varphi_a(z)) = g(z)(1-\overline{a}z)^{\alpha+2}$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{D}} \sigma_n(z)\overline{g(z)}dA_\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{e_n(\varphi_a(z))(1-|a|^2)^{\alpha/2+1}}{(1-\overline{a}z)^{\alpha+2}}\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\alpha dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{e_n(\varphi_a(z))(1-|a|^2)^{1-\alpha/2}\overline{f(\varphi_a(z))}}{|1-\overline{a}z|^4}\frac{(1-|a|^2)^\alpha(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\overline{a}z|^{2\alpha}}dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} e_n(\varphi_a(z))(1-|a|^2)^{-1-\alpha/2}\overline{f(\varphi_a(z))}|\varphi_a'(z)|^2(1-|\varphi_a(z)|^2)^\alpha dA(z) \\
&= (1-|a|^2)^{-1-\alpha/2}\int_{\mathbb{D}} e_n(\xi)\overline{f(\xi)}dA_\alpha(\xi), \; \textit{para todo } n \geq 0.
\end{aligned}$$

Como $\{e_n\}$ es base ortonormal de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ entonces $f \equiv 0$, así $g \equiv 0$. Por tanto $\{\sigma_n\}$ es una base ortonormal para $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Por el Teorema 1.8 se sigue que

$$\begin{aligned}
K_\alpha(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\sigma_n(w)}\sigma_n(z) \\
&= \frac{\varphi_a'(z)(1-|a|^2)^{\alpha/2}}{(1-\overline{a}z)^\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n(\varphi_a(z))\overline{e_n(\varphi_a(w))}\right)\frac{\overline{\varphi_a'(w)}(1-|a|^2)^{\alpha/2}}{(1-a\overline{w})^\alpha} \\
&= \frac{\varphi_a'(z)(1-|a|^2)^{\alpha/2}}{(1-\overline{a}z)^\alpha}K_\alpha(\varphi_a(z),\varphi_a(w))\frac{\overline{\varphi_a'(w)}(1-|a|^2)^{\alpha/2}}{(1-a\overline{w})^\alpha}.
\end{aligned}$$

■

La proposición anterior se tuvo que generalizar a los espacios de Bergman con peso, pues mediante ésta se podrán calcular algunos núcleos reproductores de ciertos subespacios invariantes. Un hecho importante de la proposición anterior es que se muestra que para cada $a \in \mathbb{D}$, el conjunto $\left\{\sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}}\frac{\varphi_a'(z)(1-|a|^2)^{\alpha/2}}{(1-\overline{a}z)^\alpha}(\varphi_a(z))^n\right\}_{n\geq 0}$ es otra base ortonormal para $A^2_\alpha(\mathbb{D})$.

Para finalizar esta sección enunciamos un resultado que será usado en la sección siguiente.

Teorema 2.9 *Suponemos que a, b, c son números reales y que $d\mu(z) = (1-|z|^2)^c dA(z)$. Sea S el operador integral definido por*

$$Sf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^a(1-|w|^2)^{b-c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}}f(w)d\mu(w).$$

Entonces S es acotado en $L^2(\mathbb{D},d\mu)$ si $-2a < c+1 < 2(b+1)$.

Demostración. La condición $-2a < c+1 < 2(b+1)$ es equivalente a las condiciones $-(b+1) < b-c$, $-(a+c+1) < a$. Entonces existe $s \in (-(b+1),a) \cap (-(a+c+1), b-c)$.

Consideramos a la función $h(z) = (1-|z|^2)^s$, $z \in \mathbb{D}$, que es claramente estrictamente positiva. Como $b+s > -1$, $a-s > 0$ y

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^a(1-|w|^2)^{b-c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}}h(w)d\mu(w) = (1-|z|^2)^a\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^{b+s}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}}dA(w),$$

entonces en base al Teorema 1.7 en [10], existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^{b+s}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}}dA(w) \leq \frac{C}{(1-|z|^2)^{a-s}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

También, como $s+a+c > -1$, $b-c-s > 0$ y

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^a(1-|w|^2)^{b-c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}}h(z)d\mu(z) = (1-|w|^2)^{b-c}\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|z|^2)^{c+s+a}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}}dA(z),$$

entonces por el Teorema 1.7 en [10] se tiene que

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{c+s+a}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} dA(z) \leq \frac{C}{(1-|w|^2)^{b-c-s}}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Por el Corolario A.5, S es un operador acotado en $L^2(\mathbb{D}, d\mu)$. ∎

Para el lector interesado en espacios de Bergman sugerimos ver [10].

2.2. Espacios de Hilbert Sub-Bergman con peso

Consideramos una contracción T definida en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es decir, $\|T\| \leq 1$. Es claro que el operador $I - TT^*$ es positivo, entonces por el Teorema 2.2.1 en [16] existe el operador positivo $(I-TT^*)^{1/2}$. Denotamos por $\mathcal{H}(T)$ al espacio de Hilbert dado por el rango del operador autoadjunto $(I-TT^*)^{1/2}$ dotado con el producto interior definido como sigue

$$\langle (I-TT^*)^{1/2}x, (I-TT^*)^{1/2}y \rangle_{\mathcal{H}(T)} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}, \quad x, y \in \mathcal{H} \ominus \ker(I-TT^*)^{1/2}.$$

El siguiente resultado muestra que de hecho $\mathcal{H}(T)$ es un EHNR y calcula su núcleo reproductor asociado.

Proposición 2.10 *Si $\mathcal{H}$ es un EHNR en $\mathbb{D}$ con núcleo reproductor $k_w^{\mathcal{H}}$ en $w \in \mathbb{D}$ y T es una contracción en $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{H}(T)$ es un EHNR con núcleo reproductor $(I-TT^*)k_w^{\mathcal{H}}$ en $w \in \mathbb{D}$.*

Demostración. Sea $(I-TT^*)^{1/2}f \in \mathcal{H}(T)$ con $f \in \mathcal{H} \ominus \ker(I-TT^*)^{1/2}$, entonces para cualquier $g \in \ker(I-TT^*)^{1/2}$ se tiene que

$$\langle (I-TT^*)^{1/2}k_w^{\mathcal{H}}, g \rangle = \langle k_w^{\mathcal{H}}, (I-TT^*)^{1/2}g \rangle = 0,$$

lo que implica que $(I-TT^*)^{1/2}k_w^{\mathcal{H}} \in \mathcal{H} \ominus \ker(I-TT^*)^{1/2}$ y por ende se tiene

$$\begin{aligned}
\langle (I-TT^*)^{1/2}f, (I-TT^*)k_w^{\mathcal{H}} \rangle_{\mathcal{H}(T)} &= \langle (I-TT^*)^{1/2}f, (I-TT^*)^{1/2}(I-TT^*)^{1/2}k_w^{\mathcal{H}} \rangle_{\mathcal{H}(T)} \\
&= \langle f, (I-TT^*)^{1/2}k_w^{\mathcal{H}} \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle (I-TT^*)^{1/2}f, k_w^{\mathcal{H}} \rangle_{\mathcal{H}} = (I-TT^*)^{1/2}f(w),
\end{aligned}$$

para cada $w \in \mathbb{D}$. El resultado se sigue de la unicidad del núcleo reproductor en un punto. ∎

En caso que la contracción T sea un operador de Toeplitz en $A_\alpha^2(\mathbb{D})$ inducido por una función analítica φ o por $\overline{\varphi}$, denotamos los espacios resultantes $\mathcal{H}(T_\varphi)$ y $\mathcal{H}(T_{\overline{\varphi}})$ por

$\mathcal{H}_\alpha(\varphi)$ y $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ respectivamente. A dichos espacios les llamamos espacios de Hilbert Sub-Bergman. Resultados acerca de estos espacios han sido estudiados principalmente en [14], [23] y [26], todos ellos motivados por la teoría hecha sobre los espacios de Hardy en [19].

Sea $\mathcal{H}^\infty$ el espacio de las funciones analíticas acotadas en $\mathbb{D}$, dotado con la norma del supremo. Denotamos por $(\mathcal{H}^\infty)_1$ a la bola cerrada unitaria de $\mathcal{H}^\infty$.

Observación 2.11 *Sea $\varphi \in (\mathcal{H}^\infty)_1$.*

1. *Entonces φ es un multiplicador contractivo de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ y se sigue del Teorema de Beatrous y Burbea que la función*

$$K^\alpha_\varphi(z,w) = \frac{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}$$

   es una función definida positiva en $\mathbb{D}$.

2. *El operador de Toeplitz T_φ en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ es una contracción, entonces define un espacio de Hilbert Sub-Bergman $\mathcal{H}_\alpha(\varphi)$.*

Los siguientes resultados fueron probados en [14] en 2010 y son la generalización a los espacios de Bergman con peso de los resultados para los espacios de Bergman estándar que aparecen en [23] y [26].

Proposición 2.12 *Sean $\varphi \in (\mathcal{H}^\infty)_1$, $\alpha > -1$. Entonces el núcleo reproductor de $\mathcal{H}_\alpha(\varphi)$ es*

$$K^\alpha_\varphi(z,w) = \frac{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}.$$

Demostración. Por la proposición anterior el núcleo reproductor de $\mathcal{H}_\alpha(\varphi)$ en w es $(I - T_\varphi T^*_\varphi)k^\alpha_w = (I - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})k^\alpha_w$, donde k^α_w es el núcleo reproductor de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ en $w \in \mathbb{D}$. Para cada $z \in \mathbb{D}$ tenemos

$$\begin{aligned}
T_{\overline{\varphi}}k^\alpha_w(z) &= P_\alpha(\overline{\varphi}k^\alpha_w)(z) = \int_{\mathbb{D}} \overline{\varphi}(u)k^\alpha_w(u)K_\alpha(z,u)dA_\alpha(u) \\
&= \overline{\int_{\mathbb{D}} \varphi(u)K_\alpha(u,z)k^\alpha_u(w)dA_\alpha(u)} \\
&= \overline{\varphi(w)K_\alpha(w,z)} = \overline{\varphi(w)}k^\alpha_w(z),
\end{aligned}$$

y $T_\varphi(k^\alpha_w) = P_\alpha(\varphi k^\alpha_w) = \varphi k^\alpha_w$, entonces

$$\begin{aligned}
K^\alpha_\varphi(z,w) &= (I - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})k^\alpha_w(z) \\
&= k^\alpha_w(z) - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}k^\alpha_w(z) \\
&= \frac{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}.
\end{aligned}$$

■

Antes de continuar con el tema de esta sección introducimos el espacio de Hardy H^2.

Definición 2.13 *El espacio de Hardy, denotado por H^2, consiste de todas las series de potencias con coeficientes complejos que son cuadrado-sumables. Esto es,*

$$H^2 = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\; : \;\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Claramente H^2 contiene a todos los polinomios. El producto interior en H^2 está dado por

$$\langle f, g \rangle_{H^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n},$$

para

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\; y \;\; g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ en } H^2.$$

El mapeo lineal $L : \ell^2 \to H^2$ definido como $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ claramente es un isomorfismo isométrico, en particular H^2 es un espacio de Hilbert. En lo siguiente vemos que de hecho H^2 es un EHNR.

Proposición 2.14 *Cada función en H^2 es analítica en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$. Sea $z \in \mathbb{D}$, de la desigualdad

$$|f(z)| \leq \|\{a_n\}\|_{\ell^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \right)^{1/2} = \|f\|_{H^2} \frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}}, \tag{2.6}$$

se sigue que la serie de potencias converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. ∎

Proposición 2.15 *Para cada $z \in \mathbb{D}$ la funcional lineal evaluación E_z es acotado en H^2.*

Demostración. Fijemos $z \in \mathbb{D}$. Por (2.6) se sigue que

$$|E_z(f)| \leq \|f\|_{H^2} \frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}},$$

para cada $f \in H^2$. Por tanto la funcional evaluación E_z es acotada en H^2 y su norma es a lo más $(1 - |z|^2)^{-1/2}$. ∎

La proposición anterior implica que H^2 es un EHNR en $\mathbb{D}$. Para calcular el núcleo reproductor en un punto $w \in \mathbb{D}$, notamos que $g_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w}^n z^n \in H^2$ pues $\sum_{n=0}^{\infty} |w|^{2n} < \infty$. Para cualquier $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$ se tiene

$$\langle f, g_w \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = f(w).$$

Así, g_w es el núcleo reproductor de $w \in \mathbb{D}$, más aún,

$$K(z,w) = g_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w}^n z^n = \frac{1}{1 - z\overline{w}}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

A la función K se le llama el núcleo de Szëgo.

Cuando $\alpha = 0$, el siguiente corolario de la Proposición 2.12 nos ofrece un ejemplo concreto del problema de reconstrucción, además produce un espacio muy conocido.

Corolario 2.16 *Sea n un entero positivo. Entonces $\mathcal{H}(z^n) = H^2$ con el nuevo producto interior para H^2 dado por*

$$\langle f, g \rangle_n := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k \bar{b}_k}{k+1} + \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} a_k \bar{b}_k,$$

donde

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \in H^2.$$

Demostración. Por la Proposición 2.12 el núcleo reproductor para $\mathcal{H}(z^n)$ está dado por

$$K_n(z,w) = \frac{1 - (z\overline{w})^n}{(1 - z\overline{w})^2} = \frac{1}{1 - z\overline{w}} \sum_{k=0}^{n-1} (z\overline{w})^k.$$

Por otro lado, $\{\sqrt{k+1} z^k\}_{k=0}^{n-1} \bigcup \{\sqrt{n} z^k\}_{k=n}^{\infty}$ es una base ortonormal de H^2 respecto al producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$, entonces por el Teorema 1.8 tenemos que

$$\widetilde{K}_n(z,w) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(z\overline{w})^k + \sum_{k=n}^{\infty} n(z\overline{w})^k$$

es el núcleo reproductor de H^2 respecto al producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$. Un cálculo sencillo muestra que $K_n(z,w) = \widetilde{K}_n(z,w)$, y por el Teorema de Moore sabemos que el núcleo reproductor determina de manera única el espacio de Hilbert asociado, por tanto $\mathcal{H}(z^n) = H^2$. ■

Al considerar $\overline{\varphi}$ en lugar de φ se obtienen dos resultados análogos a los previos.

Proposición 2.17 *Sean $\varphi \in (\mathcal{H}^\infty)_1$, $\alpha > -1$. El núcleo reproductor de $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ está dado por*

$$K_{\overline{\varphi}}^{\alpha}(z,w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1 - |\varphi(u)|^2}{(1 - z\overline{u})^{\alpha+2}(1 - u\overline{w})^{\alpha+2}} dA_\alpha(u).$$

Demostración. Por la Proposición 2.10 el núcleo reproductor para $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ en w está dado por $(I - T_{\overline{\varphi}}T_{\overline{\varphi}}^*)k_w^\alpha = (I - T_{|\varphi|^2})k_w^\alpha = T_{1-|\varphi|^2}k_w^\alpha$, donde k_w^α es el kernel reproductor de $A_\alpha^2(\mathbb{D})$ en el punto $w \in \mathbb{D}$. Esto es,

$$\begin{aligned} K_{\overline{\varphi}}^\alpha(z,w) &= T_{1-|\varphi|^2}k_w^\alpha(z) = P((1-|\varphi|^2)k_w^\alpha)(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\varphi(u)|^2)k_w^\alpha(u)}{(1-z\overline{u})^{\alpha+2}}dA_\alpha(u) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\varphi(u)|^2}{(1-z\overline{u})^{\alpha+2}(1-u\overline{w})^{\alpha+2}}dA_\alpha(u). \end{aligned}$$

■

Observación 2.18 *Dado que* $(1-z\overline{w})^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(z\overline{w})^k$, *entonces*

$$\frac{1}{(1-z\overline{u})^2(1-u\overline{w})^2} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(u,w,z),$$

donde $C_k(u,w,z) = \sum_{j=0}^{k}(j+1)(z\overline{u})^j(k-j+1)(u\overline{w})^{k-j}$. *Poniendo* $u = re^{i\theta}$ *se tiene*

$$\begin{aligned} K_{\overline{u}^n}(z,w) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|u|^{2n})dA(u)}{(1-z\overline{u})^2(1-u\overline{w})^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} z^j\overline{w}^{k-j}(j+1)(k-j+1)\int_0^1\int_0^{2\pi} r^{k+1}(1-r^{2n})e^{i(k-2j)\theta}dr\frac{d\theta}{\pi}, \end{aligned}$$

pero $\int_0^{2\pi} e^{i(k-2j)\theta}d\theta \neq 0$ *si y sólo si* $k = 2j$. *Así, considerando sólo los índices pares en* k *se obtiene que*

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{1-|u|^{2n}}{(1-z\overline{u})^2(1-u\overline{w})^2}dA(u) = \sum_{l=0}^{\infty} z^l\overline{w}^l(l+1)^2\int_0^1 2r^{2l+1}(1-r^{2n})dr = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{n(l+1)}{l+n+1}(z\overline{w})^l.$$

Corolario 2.19 *Sea* n *un entero positivo. Entonces* $\mathcal{H}(\overline{z}^n) = H^2$ *con el nuevo producto interior para* H^2 *dado por*

$$\langle f,g\rangle_{\overline{n}} := \langle f,g\rangle_{A^2(\mathbb{D})} + \frac{1}{n}\langle f,g\rangle_{H^2}, \quad f,g \in H^2.$$

Demostración. Por la Proposición 2.17 y la observación anterior, el núcleo reproductor de $\mathcal{H}(\overline{z}^n)$ está dado por

$$K_{\overline{n}}(z,w) := \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|u|^{2n}}{(1-z\overline{u})^2(1-u\overline{w})^2}dA(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(k+1)}{k+n+1}(z\overline{w})^k.$$

Es claro que $K_{\overline{n}}(\cdot, w) \in H^2$, luego para $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ en H^2 se tiene

$$\begin{aligned} \langle f, K_{\overline{n}}(\cdot, w)\rangle_{\overline{n}} &= \langle f, K_{\overline{n}}(\cdot, w)\rangle_{A^2(\mathbb{D})} + \frac{1}{n}\langle f, K_{\overline{n}}(\cdot, w)\rangle_{H^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{k+n+1} a_k w^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k+n+1} a_k w^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k = f(w). \end{aligned}$$

Así, $K_{\bar{n}}(z, w)$ es el núcleo reproductor para H^2. Por el Teorema de Moore sabemos que el núcleo reproductor determina de manera única al espacio de Hilbert asociado, por lo tanto $\mathcal{H}(\overline{z}^n) = H^2$. ■

De los dos corolarios anteriores se tiene $\mathcal{H}(z^n) = \mathcal{H}(\overline{z}^n) = H^2$. Esto nos lleva a preguntarnos si $\mathcal{H}_\alpha(\varphi) = \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ para cada $\varphi \in (\mathcal{H}^\infty)_1$, asunto que tratamos más adelante.

Definición 2.20 *Sean $\varphi \in (\mathcal{H}^\infty)_1$ y $\alpha > -1$. Ponemos $dA_{\alpha,\varphi}(z) = (1 - |\varphi(z)|^2)dA_\alpha(z)$ y definimos a $A^2_{\alpha,\varphi}$ como el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D}, dA_{\alpha,\varphi})$ que contiene a las funciones analíticas en $\mathbb{D}$.*

El siguiente resultado determina completamente a los espacios de Hilbert sub-Bergman con peso, inducidos por el conjugado de una función analítica $\varphi \in (\mathcal{H}^\infty)_1$. Este es un ejemplo más del llamado problema de reconstrucción.

Proposición 2.21 *Sean $\varphi \in (\mathcal{H}^\infty)_1$ y $\alpha > -1$. Entonces $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ consiste de las funciones analíticas de la forma*

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1 - |\varphi(w)|^2}{(1 - z\overline{w})^{\alpha+2}} g(w) dA_\alpha(w),$$

donde g es analítica y cumple que

$$\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^2 (1 - |\varphi(z)|^2) dA_\alpha(z) < \infty.$$

Demostración. Consideramos el operador $S_\varphi : A^2_{\alpha,\varphi} \to A^2_\alpha(\mathbb{D})$ definido como

$$S_\varphi g(z) := P_\alpha((1 - |\varphi|^2)g)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1 - |\varphi(w)|^2}{(1 - z\overline{w})^{\alpha+2}} g(w) dA_\alpha(w),$$

donde P_α es la proyección de Bergman sobre $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Como P_α tiene norma igual a 1, entonces

$$\|S_\varphi g\|_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} = \|P_\alpha((1 - |\varphi|^2)g)\|_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} \le \|(1 - |\varphi|^2)g\|_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} \le \|g\|_{A^2_{\alpha,\varphi}},$$

por lo que S_φ es una contracción, en particular existe S_φ^*. Más aún, para $f \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$ y $g \in A^2_{\alpha,\varphi}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle S_\varphi^* f, g\rangle_{A^2_{\alpha,\varphi}} &= \langle f, S_\varphi g\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} = \langle f, P_\alpha((1-|\varphi|^2)g)\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} \\
&= \langle f, (1-|\varphi|^2)g\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} = \langle f, g\rangle_{A^2_{\alpha,\varphi}},
\end{aligned}$$

así que el operador $S_\varphi^* : A^2_\alpha(\mathbb{D}) \to A^2_{\alpha,\varphi}$ es simplemente el operador inclusión. Sea $\mathcal{M}(S_\varphi)$ la imagen de S_φ en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ junto con el producto interior dado por

$$\langle S_\varphi f, S_\varphi g\rangle_{\mathcal{M}(S_\varphi)} = \langle f, g\rangle_{A^2_{\alpha,\varphi}}, \quad f, g \in A^2_{\alpha,\varphi} \ominus \ker(S_\varphi).$$

Procediendo como en la Proposición 2.10 se ve que $\mathcal{M}(S_\varphi)$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor en $w \in \mathbb{D}$ igual a $S_\varphi S_\varphi^* k_w^\alpha$, donde k_w^α es el núcleo reproductor de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ en w, así,

$$S_\varphi S_\varphi^* k_w^\alpha(z) = S_\varphi k_w^\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\varphi(u)|^2}{(1-z\overline{u})^{\alpha+2}(1-u\overline{w})^{\alpha+2}} dA_\alpha(u),$$

el cual por la Proposición 2.17 coincide con el núcleo reproductor de $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$. Por el Teorema 1.7 concluimos que $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi}) = \mathcal{M}(S_\varphi)$. El resultado se sigue claramente. ■

Sea φ una función analítica acotada y sea T_φ el operador de Toeplitz en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ asociado. Definimos $\mathcal{M}(T_\varphi) := \varphi A^2_\alpha(\mathbb{D})$ junto con el producto interior dado por

$$\langle \varphi f, \varphi g\rangle_{\mathcal{M}(T_\varphi)} = \langle f, g\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})}.$$

Análogamente a la Proposición 2.10 se muestra que $\mathcal{M}(T_\varphi)$ es un EHNR y tiene como núcleo reproductor en $w \in \mathbb{D}$ a $T_\varphi T_\varphi^* K_\alpha(\cdot, w)$.

El siguiente lema se sigue de los resultados en $I-8$, $I-9$ de [19].

Lema 2.22 *Sean $\varphi \in (\mathcal{H}^\infty)_1$, $\alpha > -1$ y $f \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Entonces*

1. *$f \in \mathcal{H}_\alpha(\varphi)$ si y sólo si $T_{\overline{\varphi}} f \in \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$, en este caso*

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}_\alpha(\varphi)} = \|f\|^2_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} + \|T_{\overline{\varphi}} f\|^2_{\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})}.$$

2. *$f \in \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ si y sólo si $T_\varphi f \in \mathcal{H}_\alpha(\varphi)$, en este caso*

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})} = \|f\|^2_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} + \|T_\varphi f\|^2_{\mathcal{H}_\alpha(\varphi)}.$$

3. *$\mathcal{M}(T_\varphi) \bigcap \mathcal{H}_\alpha(\varphi) = \varphi \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$.*

Ahora estamos en posición de responder la pregunta que nos hacíamos acerca de la igualdad de los espacios $\mathcal{H}_\alpha(\varphi)$ y $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$, más en [14] sólo se resuelve para $\alpha > 0$. Antes de enunciar dicho resultado presentamos un lema auxiliar y una definición.

Lema 2.23 *Sean $\varphi \in (\mathcal{H}^\infty)_1$, $\alpha > 0$. Entonces cada $\psi \in \mathcal{H}^\infty$ es un multiplicador de $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ y $\mathcal{H}_\alpha(\varphi)$.*

Demostración. Supongamos que $\|\psi\|_\infty = 1$. Por la Proposición 2.12 las funciones

$$\frac{1-\psi(z)\overline{\psi(w)}}{(1-z\overline{w})^{1+\alpha/2}}, \quad \frac{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}}{(1-z\overline{w})^{1+\alpha/2}}$$

son núcleos reproductores de $\mathcal{H}_{\alpha/2-1}(\psi)$ y $\mathcal{H}_{\alpha/2-1}(\varphi)$ respectivamente. Por la Observación 1.14

$$\frac{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)})(1-\psi(z)\overline{\psi(w)})}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}$$

es una función definida positiva en $\mathbb{D}$. Se sigue del Teorema de Beatrous y Burbea que ψ es un multiplicador contractivo en $\mathcal{H}_\alpha(\varphi)$. Si $f \in \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ entonces el lema anterior implica que $\varphi f \in \mathcal{H}_\alpha(\varphi)$, y así por la primera parte $\psi(\varphi f) \in \mathcal{H}_\alpha(\varphi)$. Por el punto 2. del lema anterios se sigue que $\psi f \in \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$. Por tanto ψ es un multiplicador en $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$. ■

Definición 2.24 *Sea S un operador en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. S es subnormal si existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ y si existe un operador normal N en $\mathcal{F}$ tal que $N\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ y S es la restricción de N a $\mathcal{H}$. S es un operador hiponormal si $S^*S \geq SS^*$, esto es, si $S^*S - SS^*$ es un operador positivo.*

Teorema 2.25 *Sean $\varphi \in (\mathcal{H}^\infty)_1$, $\alpha > 0$. Entonces $\mathcal{H}_\alpha(\varphi) = \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ con equivalencia de normas.*

Demostración. Por el resultado anterior $\varphi\mathcal{H}_\alpha(\varphi) \subset \mathcal{H}_\alpha(\varphi)$. Por otro lado $\varphi\mathcal{H}_\alpha(\varphi) \subset \varphi A^2_\alpha(\mathbb{D}) = \mathcal{M}(T_\varphi)$. Se sigue del Lema 2.22 que

$$\varphi\mathcal{H}_\alpha(\varphi) \subset \mathcal{M}(T_\varphi) \bigcap \mathcal{H}_\alpha(\varphi) = \varphi\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi}),$$

esto implica que $\mathcal{H}_\alpha(\varphi) \subset \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$.

Para la otra inclusión consideramos T el operador multiplicación por φ en $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. T es acotado y T^* es el operador multiplicación por $\overline{\varphi}$, así

$$T^*Tf = |\varphi|^2 f = TT^*f, \ f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha),$$

se sigue que T es un operador normal en $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, por lo que su restricción a $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ es un operador subnormal, se sigue que tal restricción es un operador hiponormal (ver [6, pág. 46]), entonces

$$T_\varphi T_{\overline{\varphi}} = T_\varphi T^*_\varphi \leq T^*_\varphi T_\varphi = T_{\overline{\varphi}} T^*_{\overline{\varphi}}, \ en \ A^2_\alpha(\mathbb{D}).$$

Dado que $T_\varphi T^*_\varphi \leq T_{\overline{\varphi}} T^*_{\overline{\varphi}}$ si y sólo si $\mathcal{H}_\alpha(\varphi) \supseteq \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ y el mapeo inclusión de $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ en $\mathcal{H}_\alpha(\varphi)$ es continuo (ver [19, I-5, pág. 3]), se sigue que $\mathcal{H}_\alpha(\varphi) = \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$.

Como $I_d : \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi}) \longrightarrow \mathcal{H}_\alpha(\varphi)$ es un mapeo continuo y $\mathcal{H}_\alpha(\varphi) = \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$, por el Teorema del mapeo abierto las normas de $\mathcal{H}_\alpha(\varphi)$ y $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ son equivalentes. ■

Como consecuencia del resultado anterior se tiene que el espacio de las funciones analíticas acotadas está contenido en $\mathcal{H}_\alpha(\varphi)$, siempre que $\varphi \in (\mathcal{H}^\infty)_1$.

Teorema 2.26 *Sean $\varphi \in (\mathcal{H}^\infty)_1$, $\alpha > 0$. Entonces $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}_\alpha(\varphi) = \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$.*

Demostración. Por el resultado anterior basta mostrar que $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$. Es suficiente mostrar que $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$ contiene una función constante no cero, pues por el Lema 2.23 cada función en $\mathcal{H}^\infty$ es un multiplicador de $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$.

Consideramos a E como el subespacio cerrado de $A^2_{\alpha,\varphi}$ generado por $\{z^n\}_{n\geq 1}$. Como $f(0) = 0$ para cada $f \in E$ y $1 \in A^2_{\alpha,\varphi}$, se puede ver que E es subespacio propio de $A^2_{\alpha,\varphi}$. Tomamos $g \in A^2_{\alpha,\varphi} \ominus E$ con $\|g\|_{A^2_{\alpha,\varphi}} = 1$. Como $K_\alpha(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}(z\overline{w})^n$ y $\langle g, z^n\rangle_{A^2_{\alpha,\varphi}} = 0$ para cada $n \geq 1$, entonces

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\varphi(u)|^2}{(1-z\overline{u})^{\alpha+2}} g(u)dA_\alpha(u) = \int_{\mathbb{D}} g(u)(1-|\varphi(u)|^2)dA_\alpha(u) = \langle g, 1\rangle_{A^2_{\alpha,\varphi}} =: f(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Por la Proposición 2.21 la función constante f pertenece a $\mathcal{H}_\alpha(\overline{\varphi})$. Por último, la función f no puede ser idénticamente cero, pues si$\langle g, 1\rangle_{A^2_{\alpha,\varphi}} = 0$ para cada $g \in A^2_{\alpha,\varphi} \ominus E$, entonces $1 \in E$, lo cual es imposible. ∎

Ahora vamos a dar una descripción de $\mathcal{H}_\alpha(B)$ y $\mathcal{H}_\alpha(\overline{B})$, donde B es un producto finito de Blaschke. En particular z^n es un producto finito de Blaschke y en los Corolarios 2.16 y 2.19 se mostró que $\mathcal{H}(z^n) = \mathcal{H}(\overline{z}^n) = H^2$; más aún, Kehe Zhu en [26] demostró que considerando los espacios de Bergman estándar se tiene que

$$\mathcal{H}(B) = \mathcal{H}(\overline{B}) = H^2$$

para cada producto finito de Blaschke B. Ahora consideramos los espacios de Bergman con peso y mostramos un resultado que extiende el antes mencionado.

Teorema 2.27 *Sea B un producto finito de Blaschke y $\alpha > 0$. Entonces*

$$\mathcal{H}_\alpha(B) = \mathcal{H}_\alpha(\overline{B}) = A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D}).$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}_\alpha(\overline{B})$. Como $B \in (\mathcal{H}^\infty)_1$ entonces por la Proposición 2.21 se tiene que la función f se puede escribir como sigue

$$f(z) = Tg(z) := \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|B(w)|^2}{(1-z\overline{w})^{\alpha+2}} g(w)dA_\alpha(w) \tag{2.7}$$

donde g es analítica en $\mathbb{D}$ y cumple que

$$\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^2(1-|B(z)|^2)dA_\alpha(z) < \infty. \tag{2.8}$$

Por el Lema A.6 existe $C > 0$ tal que

$$C^{-1}(1-|z|^2) \leq 1-|B(z)|^2 \leq C(1-|z|^2)$$

para cada $z \in \mathbb{D}$, lo que implica junto con (2.8) que $g \in A^2_{\alpha+1}(\mathbb{D})$. Para cada $z \in \mathbb{D}$ se tiene de (2.7) que

$$(1-|z|^2)^{-1}|f(z)| \leq C(1-|z|^2)^{-1} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha+1}}{|1-z\overline{w}|^{\alpha+2}}|g(w)|dA(w). \tag{2.9}$$

Ponemos $d\mu(z) = (1-|z|^2)^{\alpha+1}dA(z)$, entonces por el Teorema 2.9 el operador

$$\Lambda g(z) = (1-|z|^2)^{-1} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha+1}}{|1-z\overline{w}|^{\alpha+2}} g(w)dA(w)$$

es acotado en $L^2(\mathbb{D}, d\mu)$. De (2.9) se tiene

$$(1-|z|^2)^{-2}|f(z)|^2 \leq C^2|\Lambda g(z)|^2, \ z \in \mathbb{D}, \tag{2.10}$$

por lo que podemos encontrar una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|f\|^2_{A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2(1-|z|^2)^{-2}d\mu(z) \leq C_1\|g\|^2_{L^2(\mathbb{D},d\mu)} = \frac{C_1}{\alpha+2}\|g\|^2_{A^2_{\alpha+1}}.$$

Esto muestra que $f \in A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})$, lo que implica $\mathcal{H}_\alpha(\overline{B}) \subset A^2_{\alpha-1}$ y que $T : A^2_{\alpha,B} \to A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})$ es un operador acotado. Así, con la notación de la Proposición 2.21, hemos probado que $\mathcal{H}_\alpha(\overline{B})$ es igual al rango del operador $T : A^2_{\alpha,B} \to A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})$.

Ahora consideramos el operador $S : A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D}) \to A^2_{\alpha,B}$ definido como

$$h(z) = Sf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{\alpha+2}} dA_{\alpha-1}(w), \ z \in \mathbb{D}.$$

Si $f \in A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})$ entonces $f(z) = \langle f, k_z^{\alpha-1}(\cdot)\rangle_{A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})}$ y diferenciando se obtiene

$$\begin{aligned} f(z) + \frac{zf'(z)}{\alpha+1} &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{\alpha+1}} dA_{\alpha-1}(w) + \frac{z}{\alpha+1}\int_{\mathbb{D}} \frac{(\alpha+1)\overline{w}f(w)}{(1-z\overline{w})^{\alpha+2}} dA_{\alpha-1}(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{\alpha+2}} dA_{\alpha-1}(w) = Sf(z), \end{aligned}$$

de lo cual se sigue que si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entonces

$$Sf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\alpha+1}{\alpha+1} a_n z^n.$$

Por el Lema A.6 sabemos que $1-|B(z)|^2 \asymp 1-|z|^2$, entonces por (2.2)

$$\begin{aligned} \|Sf\|^2_{A^2_{\alpha,B}} \asymp \|Sf\|^2_{A^2_{\alpha+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(\alpha+3)(n+\alpha+1)^2}{\Gamma(n+\alpha+3)(\alpha+1)^2}|a_n|^2 \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}|a_n|^2 = \|f\|^2_{A^2_{\alpha-1}}, \end{aligned}$$

lo que significa que S está acotado por abajo. Como S es invertible, el rango de la bola unitaria de $A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})$ bajo S contiene una bola de radio $r > 0$ centrada en cero. Por lo tanto para cada vector unitario $g \in A^2_{\alpha,B}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|Tg\|_{A^2_{\alpha-1}} &= \sup\{|\langle Tg, f\rangle_{A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})}| : \|f\|_{A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})} \leq 1\} \\
&= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{D}} g(w)\overline{Sf(w)}(1-|B(w)|^2)dA_\alpha(w)\right| : \|f\|_{A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})} \leq 1\right\} \\
&\geq \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{D}} g(w)\overline{h(w)}(1-|B(w)|^2)dA_\alpha(w)\right| : \|h\|_{A^2_{\alpha,B}} \leq r\right\} \\
&\geq \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{D}} g(w)\overline{h(w)}(1-|B(w)|^2)dA_\alpha(w)\right| : \|h\|_{A^2_{\alpha,B}} = r\right\} \\
&= r\|g\|_{A^2_{\alpha,B}} = r.
\end{aligned}$$

Esto significa que T es acotado por abajo, más aún, su rango $\mathcal{H}_\alpha(\overline{B})$ es cerrado en $A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})$. Como $\mathcal{H}_\alpha(\overline{B}) = \mathcal{H}_\alpha(B)$ contiene a $\mathcal{H}^\infty$ y de la Proposición 2.4 se sabe que $\mathcal{H}^\infty$ es denso en el espacio de Bergman con peso $A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})$, entonces se concluye que $\mathcal{H}_\alpha(\overline{B}) = \mathcal{H}_\alpha(B) = A^2_{\alpha-1}(\mathbb{D})$. ■

Capítulo 3

El operador raíz

En este capítulo estudiamos un operador integral definido en un subespacio invariante I del espacio de Bergman (con o sin peso), el cual involucra el núcleo reproductor de I.

3.1. Introducción

Consideramos el operador traslación de Bergman dado por

$$B_z f(z) = zf(z), \quad f \in A^2_\alpha(\mathbb{D}), \quad \alpha > -1.$$

Una propiedad importante de este operador se describe a continuación.

Observación 3.1 *Sea $\alpha > -1$. Si $f \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$, entonces $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Luego,*

$$\begin{aligned} \|B_z(f)\|^2_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} \right\|^2_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha+(n+1))} |a_n|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2+\alpha+n} \right) \frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha+n)} |a_n|^2 \geq \frac{1}{2+\alpha} \|f\|^2_{A^2_\alpha(\mathbb{D})}, \end{aligned}$$

pues $(2+\alpha+n) \leq (n+1)(2+\alpha)$ para todo $n \geq 0$.

Definición 3.2 *Un subespacio vectorial cerrado I de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ es un subespacio invariante si es invariante respecto a B_z, esto es, $zI := B_z I \subset I$.*

Ejemplos:

1. Claramente $I = \{0\}$, $I = A^2_\alpha(\mathbb{D})$ son subespacios invariantes triviales de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$.

2. Para cualquier $f \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$, sea I_f la cerradura en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ del conjunto cuyos elementos son de la forma pf, donde p es un polinomio. A I_f se le llama el subespacio invariante generado por f.

3. Consideramos una sucesión de puntos $A := \{a_n\}$ en $\mathbb{D}$. Denotamos por I_A al conjunto de todas las funciones en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ cuyo conjunto de ceros contiene a A, entonces I_A es un subespacio invariante de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. A I_A se le conoce como el subespacio invariante con ceros basados en $\{a_n\}$.

Para cada subespacio invariante I de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$, T_I denota la restricción del operador B_z a I. Es claro que T_I es un operador lineal acotado en I, dado que B_z lo es, entonces podemos determinar entre otras cosas su norma y su espectro.

Proposición 3.3 *Para cada subespacio invariante $I \neq \{0\}$ de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ se tiene que $\|T_I\| = 1$ y $\sigma(T_I) = \overline{\mathbb{D}}$, donde $\sigma(T_I)$ denota el espectro de T_I.*

Demostración. Es obvio que $\|T_I\| \leq 1$. Como el radio espectral $r(T_I)$ del operador T_I satisface $r(T_I) \leq \|T_I\|$ entonces $\sigma(T_I) \subset \overline{\mathbb{D}}$.

Sea $\lambda \in \mathbb{D}$. Afirmamos que $(\lambda - z)I$ es un subespacio vectorial cerrado de I: Si $\{f_n\}$ es una sucesión en $(\lambda - z)I$ que converge en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ a una función $g \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$, entonces $\{f_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{D}$ a g, por lo que λ es un cero de g, se sigue que $g \in (\lambda - z)I$. También se tiene que $(\lambda - z)I$ es un subespacio vectorial propio de I, pues en caso de que $I = (\lambda - z)I$ entonces para $f \in I$ se tiene que existe $g_0 \in I$ tal que $f(z) = (\lambda - z)g_0(z)$, siguiendo este mismo argumento existe $g_1 \in I$ tal que $f(z) = (\lambda - z)^2 g_1(z)$, continuando este proceso concluimos que f tiene un cero de orden infinito en λ, por lo tanto $f \equiv 0$.

Por tanto $\emptyset \neq I \ominus (\lambda - z)I$. Sean $f \in I \ominus (\lambda - z)I$, $g \in I$, entonces

$$\langle T_I^* f, g\rangle = \langle f, T_I g - \lambda g\rangle + \langle f, \lambda g\rangle = \langle f, \lambda g\rangle = \langle \overline{\lambda} f, g\rangle,$$

esto es, $T_I^* f = \overline{\lambda} f$. Luego cada $\lambda \in \mathbb{D}$ es valor propio de T_I^*, lo que implica que $\overline{\mathbb{D}} \subset \sigma(T_I^*)$; pues el espectro de un operador acotado es compacto. Por la simetría de $\overline{\mathbb{D}}$ se tiene que $\overline{\mathbb{D}} \subset \sigma(T_I)$, luego $\sigma(T_I) = \overline{\mathbb{D}}$. Esto último implica que $\|T_I\| = 1$. ■

En lo siguiente tratamos algunas propiedades interesantes del operador T_I que ayudan a comprender de mejor manera dicho operador y que son útiles en la demostración de algunos hechos posteriores.

Proposición 3.4 *Para cada subespacio invariante I de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$, T_I es un operador hiponormal, es decir, el autoconmutador $[T_I^*, T_I] := T_I^* T_I - T_I T_I^*$ de T_I es un operador positivo.*

Demostración. Sean $f, g \in I$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\langle T_I^* f, g\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})}| &= |\langle f, T_I g\rangle_{A^2_\alpha(\mathbb{D})}| = \left|\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{T_I g(z)}\, dA_\alpha(z)\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} |f(z)| \left|\overline{z g(z)}\right| dA_\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} |z f(z)||g(z)|\, dA_\alpha(z) \\
&\leq \|T_I f\|_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} \|g\|_{A^2_\alpha(\mathbb{D})}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|T_I^* f\|_{A_\alpha^2(\mathbb{D})} \leq \|T_I f\|_{A_\alpha^2(\mathbb{D})}$ para cada $f \in I$. ■

Observación 3.5 *Sea $I \neq \{0\}$ un subespacio invariante de $A_\alpha^2(\mathbb{D})$.*

1. *Si $\|T_I f\|_{A_\alpha^2(\mathbb{D})} = \|f\|_{A_\alpha^2(\mathbb{D})}$, entonces*

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f(z)|^2 dA_\alpha(z) = 0,$$

   por lo tanto $f \equiv 0$. Así, $\|T_I f\| < \|f\|$ para cada $f \neq 0$. Además por la hiponormalidad de T_I se tiene que $\|T_I^* f\| < \|f\|$ para cada $f \neq 0$.

2. *Sea $f \in I$ tal que $T_I f = 0$. Luego $zf(z) = 0$ para cada $z \in \mathbb{D}$, lo que implica que $f(z) = 0$ para cada $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. De la continuidad de f se sigue que $f \equiv 0$, por tanto T_I es inyectivo.*

3. *$zI \subsetneq I$ y $\ker T_I^* = I \cap (zI)^\perp = I \ominus zI$.*

4. *Claramente el operador $I_d - T_I T_I^*$ es positivo. Ahora, si consideramos el Lema 2.2.2 en [16, pág. 46] entonces $I_d - T_I T_I^*$ es una contracción. Dado que un operador S es contracción si y sólo si el operador S^*S es contracción, se sigue que $(I_d - T_I T_I^*)^{1/2}$ es una contracción.*

3.2. El operador raíz en subespacios invariantes del espacio de Bergman

Fijamos un subespacio invariante I de $A_\alpha^2(\mathbb{D})$ y consideramos al operador T_I que es la restricción del operador B_z a I. Recordamos que por sí mismo I es un EHNR, entonces existe su núcleo reproductor $K_\alpha^I(z,w)$. Definimos la función raíz R_α^I en $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ como

$$R_\alpha^I(z,w) = \frac{K_\alpha^I(z,w)}{K_\alpha(z,w)},$$

y el operador raíz en I está dado por

$$C_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} R_\alpha^I(z,w) f(w) dA_\alpha(w), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Cuando $\alpha = 0$, sólo escribimos $A^2(\mathbb{D})$, K, K^I, R^I y C en lugar de $A_\alpha^2(\mathbb{D})$, K_α, K_α^I, R_α^I y C_α respectivamente.

Observación 3.6 *Sea $\alpha > -1$. Sabemos que*

$$(1 - z\overline{w})^{\alpha+2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha+2}{k} z^k \overline{w}^k, \quad z, w \in \mathbb{D},$$

donde $\binom{\alpha+2}{k} := \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. *Luego la función raíz se puede escribir como*

$$\begin{aligned} R_\alpha^I(z,w) &= \frac{K_\alpha^I(z,w)}{K_\alpha(z,w)} = (1-z\overline{w})^{\alpha+2}K_\alpha^I(z,w) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha+2}{k}\overline{w}^k z^k K_\alpha^I(z,w). \end{aligned}$$

Como $K_\alpha^I(\cdot,w) \in I$ *para toda* $w \in \mathbb{D}$, *entonces* $z^k K_\alpha^I(z,w) \in I$ *para toda* $k \geq 0$ *y para toda* $w \in \mathbb{D}$. *Por lo tanto* $R_\alpha^I(\cdot,w) \in I$ *para toda* $w \in \mathbb{D}$.

Más adelante veremos que el operador C_α involucra de alguna manera a los operadores T_I^{*j}, $j \geq 0$, es por eso que damos una forma explícita de dichos operadores.

Proposición 3.7 *Sea I un subespacio invariante de $A_\alpha^2(\mathbb{D})$, $\alpha > -1$. Entonces para cada entero no negativo j se cumple que*

$$T_I^{*j}g(z) = \int_{\mathbb{D}} \overline{w}^j f(w)K_\alpha^I(z,w)dA_\alpha(w),\ z \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Sea $j \geq 0$ fijo. Ponemos $\varphi(z) = z^j$ y observamos que φ es analítica y acotada en $\mathbb{D}$. Por la Proposición 2.7 el operador adjunto del operador de Toeplitz T_φ es el operador de Toeplitz $T_{\overline{\varphi}}$, esto es,

$$T_\varphi^* f = T_{\overline{\varphi}}f = P_\alpha(\overline{\varphi}f),\ \ f \in A_\alpha^2(\mathbb{D}).$$

Dado que I es un subespacio T_φ-invariante, por la Proposición A.10 tenemos que

$$(T_\varphi|_I)^* = P_I T_{\overline{\varphi}}|_I,$$

donde P_I es la proyección ortogonal de $A_\alpha^2(\mathbb{D})$ sobre I.

Sea $f \in I$. Por las propiedades del núcleo reproductor y por la Proposición 1.4 se tiene para cada $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} (P_I T_{\overline{\varphi}})f(z) &= \langle (P_I T_{\overline{\varphi}})f, K_\alpha(\cdot,z)\rangle_{A_\alpha^2(\mathbb{D})} \\ &= \langle T_{\overline{\varphi}}f, P_I K_\alpha(\cdot,z)\rangle_{A_\alpha^2(\mathbb{D})} \\ &= \langle P_\alpha(\overline{\varphi}f), K_\alpha^I(\cdot,z)\rangle_{A_\alpha^2(\mathbb{D})} \\ &= \langle \overline{\varphi}f, K_\alpha^I(\cdot,z)\rangle_{L^2(\mathbb{D},dA_\alpha)} \\ &= \int_{\mathbb{D}} \overline{\varphi(w)}f(w)K_\alpha^I(z,w)dA_\alpha(w). \end{aligned}$$

El resultado se sigue del hecho que $(T_\varphi|_I)^* = T_I^{*j}$. ■

Sea $\{e_n\}_{n\geq 0}$ una base ortonormal para I, entonces por el Teorema 1.8

$$K_\alpha^I(z,z) = \sum_n |e_n(z)|^2.$$

Luego, completando $\{e_n\}_{n\geq 0}$ a una base ortonormal para el espacio total $A_\alpha^2(\mathbb{D})$ se ve que $K_\alpha^I(z,z) \leq K_\alpha(z,z)$ para cada $z \in \mathbb{D}$. Así, $0 \leq R_\alpha^I(z,z) \leq 1$. Esta observación es útil para calcular la traza del operador raíz C_α.

3.2.1. La representación del operador raíz

La mayor parte del análisis que hacemos en esta sección está basada en la relación que guardan el operador T_I con el operador C_α.

El siguiente resultado da una forma de expresar al operador raíz en términos del operador T_I y su adjunto T_I^*.

Lema 3.8 *Sea α un entero no negativo. Para cada subespacio invariante I de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$, tenemos que*

$$C_\alpha = \sum_{j=0}^{\alpha+2} (-1)^j \binom{\alpha+2}{j} T_I^j T_I^{*j}.$$

Demostración. Sea $f \in I$. Por la Proposición 3.7 tenemos

$$\begin{aligned}
C_\alpha f(z) &= \int_{\mathbb{D}} (1 - z\overline{w})^{2+\alpha} K^I_\alpha(z,w) f(w) dA_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \sum_{j=0}^{2+\alpha} (-1)^j \binom{\alpha+2}{j} z^j \overline{w}^j K^I_\alpha(z,w) f(w) dA_\alpha(w) \\
&= \sum_{j=0}^{2+\alpha} (-1)^j \binom{\alpha+2}{j} z^j \int_{\mathbb{D}} \overline{w}^j K^I_\alpha(z,w) f(w) dA_\alpha(w) \\
&= \sum_{j=0}^{\alpha+2} (-1)^j \binom{\alpha+2}{j} (T_I^j T_I^{*j} f)(z).
\end{aligned}$$

■

Observación 3.9 *En base al lema anterior C_α es un operador acotado, autoadjunto y $C_\alpha f = f$ si $f \in \ker T_I^* = I \ominus zI$.*

En algunas ocasiones la forma en que se expresa al operador C_α en el resultado anterior no será la más adecuada, es por eso que en el siguiente resultado se encuentra una manera alterna de expresar a dicho operador. Antes de enunciar el resultado hacemos una convención:

$$\binom{a}{b} = 0,$$

siempre que $b < 0$ ó $b > a$.

Lema 3.10 *Sea α un entero no negativo. Para cada subespacio invariante I de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$, tenemos que*

$$C_\alpha = \sum_{j=0}^{\alpha+1} (-1)^j \binom{\alpha+1}{j} T_I^j (I_d - T_I T_I^*) T^{*j}.$$

Demostración. Por el lema anterior y la identidad de Pascal tenemos

$$\begin{aligned}
C_\alpha &= \sum_{j=0}^{\alpha+2}(-1)^j\binom{\alpha+2}{j}T_I^jT_I^{*j} \\
&= \sum_{j=0}^{\alpha+2}(-1)^j\left(\binom{\alpha+1}{j}+\binom{\alpha+1}{j-1}\right)T_I^jT_I^{*j} \\
&= \sum_{j=0}^{\alpha+1}(-1)^j\binom{\alpha+1}{j}T_I^jT_I^{*j}+\sum_{j=1}^{\alpha+2}(-1)^j\binom{\alpha+1}{j-1}T_I^jT_I^{*j} \\
&= \sum_{j=0}^{\alpha+1}(-1)^j\binom{\alpha+1}{j}T_I^jT_I^{*j}+\sum_{j=0}^{\alpha+1}(-1)^{j+1}\binom{\alpha+1}{j}T_I^{j+1}T_I^{*j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\alpha+1}(-1)^j\binom{\alpha+1}{j}T_I^j(I_d-T_IT_I^*)T_I^{*j}.
\end{aligned}$$

■

Nuestro primer resultado importante en esta sección es el siguiente, en concreto el resultado da información más precisa acerca del espectro y la norma del operador C_α.

Proposición 3.11 *Sea α un entero no negativo, entonces el 1 es un valor propio del operador C_α. Más aún, $\|C_\alpha\| \leq 2^\alpha$ y el espacio propio E_1 correspondiente a 1 cumple $E_1 \supseteq I \ominus zI$. En particular cuando $\alpha = 0$, $\|C\| = 1$, $E_1 = I \ominus zI$ y -1 no es valor propio de C.*

Demostración. Por el Lema 3.8 tenemos que $C_\alpha f = f$ si $f \in \ker T_I^* = I \ominus zI$, entonces el 1 es valor propio de C_α, $\|C_\alpha\| \geq 1$ y $I \ominus zI \subseteq E_1$.

Por el Lema 3.10 y por 4. de la Observación 3.5 tenemos

$$\begin{aligned}
\langle C_\alpha f, f\rangle &= \sum_{j=0}^{\alpha+1}(-1)^j\binom{\alpha+1}{j}\langle T_I^j(I_d-T_IT_I^*)T_I^{*j}f, f\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{\alpha+1}(-1)^j\binom{\alpha+1}{j}\|(I_d-T_IT_I^*)^{1/2}T_I^{*j}f\|^2,
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$-\sum_{j\ impar}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{j}\|(I_d-T_IT_I^*)^{1/2}T_I^{*j}f\|^2 \leq \langle C_\alpha f, f\rangle \leq \sum_{j\ par}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{j}\|(I_d-T_IT_I^*)^{1/2}T_I^{*j}f\|^2.$$

Dado que $(I_d - T_IT_I^*)^{1/2}$ es una contracción, entonces $\|(I_d - T_IT_I^*)^{1/2}T_I^{*j}f\| \leq \|f\|$, así

$$-\|f\|^2\sum_{j\ impar}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{j} \leq \langle C_\alpha f, f\rangle \leq \|f\|^2\sum_{j\ par}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{j}.$$

Como $\sum_{j\ impar}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{j} = \sum_{j\ par}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{j} = 2^{\alpha}$, entonces $|\langle C_{\alpha}f,f\rangle| \leq 2^{\alpha}$ para cada $f \in I$ con $\|f\| \leq 1$. Por último, dado que C_{α} es autoadjunto tenemos que

$$\|C_{\alpha}\| = \sup\{|\langle C_{\alpha}f,f\rangle| : f \in I,\ \|f\| \leq 1\} \leq 2^{\alpha}.$$

En caso que $\alpha = 0$ se tiene que $\|C\| = 1$. Además, si $Cf = f$ para algún $f \in I$ entonces por el Lemma 3.8 tenemos

$$T_I(2I_d - T_IT_I^*)T_I^*f = 0.$$

Como T_I es inyectivo entonces $(2I_d - T_IT_I^*)T_I^*f = 0$ y tomando el producto interior con T_I^*f tenemos $2\|T_I^*f\|^2 = \|T_I^{*2}f\|^2 \leq \|T_I^*f\|^2$; así $f \in \ker T_I^*$, es decir, $E_1 \subset I \ominus zI$.

Por último, si -1 fuese valor propio de C y f fuera una función propia correspondiente, entonces $Cf = -f$; luego el Lema 3.10 implica que

$$T_IT_I^*f + T_I(I_d - T_IT_I^*)T_I^*f = 2f.$$

Tomando el producto interior con f en ambos lados obtenemos

$$\|T_I^*f\|^2 + \|(I_d - T_IT_I^*)^{1/2}T_I^*f\|^2 = 2\|f\|^2.$$

Como $(I_d - T_IT_I^*)^{1/2}$ es contracción se tiene

$$\|f\| \leq \|T_I^*f\|,$$

así $\|f\| = \|T_I^*f\|$. Por el el punto (1.) en la Observación 3.5 se sigue que $f = 0$. ∎

Observación 3.12 *Sea f tal que $C_1f = f$, entonces el Lema 3.8 implica que*

$$T_I(3I_d - 3T_IT_I^* + T_I^2T_I^{*2})T_I^*f = 0.$$

Dado que T_I es inyectivo tenemos $(3I_d - 3T_IT_I^* + T_I^2T_I^{*2})T_I^*f = 0$. Tomando el producto interior con T_I^*f en ambos lados obtenemos

$$3\|T_I^*f\|^2 + \|T_I^{*3}f\|^2 = 3\|T_I^{*2}f\|^2.$$

Por lo tanto $\|T_I^*f\| \leq \|T_I^{*2}f\|$. El punto 1. de la Observación 3.5 implica que $\|T_I^*f\| = 0$, esto es, $f \in I \ominus zI$. Así $E_1 = I \ominus zI$. Conjeturamos que para todo entero $\alpha \geq 2$ se tiene que $E_1 = I \ominus zI$.

Cabe señalar que la cota para la norma de C_{α} se ha mejorado respecto al resultado original; además el caso $\alpha = 0$ es un caso particular del resultado anterior.

3.2.2. Clases de Schatten

Para cada $0 < p < \infty$, la p-clase de Schatten, denotada por S_p, consiste de todos los operadores compactos S en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que la sucesión de valores propios $\{\lambda_n\}$ de $(SS^*)^{1/2}$ satisface

$$\|S\|_p = \left(\sum_n |\lambda_n|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Es bien conocido que para $1 \leq p < \infty$ la p-clase de Schatten es un espacio de Banach con la norma anterior, de hecho es un ideal bilateral en el álgebra de los operadores acotados en $\mathcal{H}$. Se recomienda ver la Sección 1.4 en [22].

Observación 3.13 *Cuando $p = 1$, la p-clase de Schatten es llamada la clase de traza. Si S está en la clase de traza y $\{e_n\}_{n\geq 0}$ es una base ortonormal para $\mathcal{H}$, entonces la serie $\sum\limits_n \langle Se_n, e_n\rangle$ converge y la suma es independiente de la elección de la base ortonormal. Esta suma es la traza de S y se denota por $tr(S)$.*

Si S es un operador autoadjunto en la clase de traza con valores propios $\{\lambda_n\}$ y si $\{e_n\}$ es una base ortonormal para $\mathcal{H}$ formada por los vectores propios asociados a tales valores propios, se obtiene

$$tr(S) = \sum_n \langle Se_n, e_n\rangle = \sum_n \langle \lambda_n e_n, e_n\rangle = \sum_n \lambda_n \langle e_n, e_n\rangle = \sum_n \lambda_n.$$

Observación 3.14 *Cuando $p = 2$, a la p-clase de Schatten se le llama clase de Hilbert-Schmidt. Si S esta en la clase de Hilbert-Schmidt y si $\{e_n\}$ es una base ortonormal para $\mathcal{H}$, entonces la serie $\sum\limits_n \|Se_n\|^2$ converge y la suma es independiente de la elección de la base ortonormal. La raíz cuadrada de esta suma es igual a la norma de Hilbert-Schmidt $\|S\|_2$.*

Sea Z_I la intersección de todos los conjuntos de ceros de las funciones en I. Para $z \in \mathbb{D} \setminus Z_I$, el núcleo reproductor normalizado de I en z está dado por

$$s^I_{\alpha,z}(w) = \frac{K^I_\alpha(w,z)}{\sqrt{K^I_\alpha(z,z)}}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Sea S un operador lineal continuo en I, definimos una función $\widetilde{S}$ en $L^\infty(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ como sigue

$$\widetilde{S}(z) = \langle Ss^I_{\alpha,z}, s^I_{\alpha,z}\rangle, \quad z \in \mathbb{D} \setminus Z_I.$$

La función $\widetilde{S}$ es llamada la transformada de Berezin de S.

El siguiente resultado responde a la pregunta de cuándo un operador definido en un subespacio invariante I pertenece a la clase de traza.

Lema 3.15 *Sean $\alpha > -1$, I un subespacio invariante de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ y S un operador lineal y compacto en I. Si S es positivo o está en la clase de traza, entonces*

$$tr(S) = \int_{\mathbb{D}} \tilde{S}(z) K^I_\alpha(z,z) dA_\alpha(z).$$

En particular, un operador positivo S en I pertenece a la clase de traza si y sólo si la integral anterior es finita.

Demostración. Fijemos una base ortonormal $\{e_n\}_{n\geq 0}$ de I. Por la Observación 3.13 tenemos

$$\begin{aligned}
tr(S) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle Se_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{D}} Se_n(z)\overline{e_n(z)} dA_\alpha(z) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{D}} \langle Se_n, K^I_\alpha(\cdot,z)\rangle \overline{e_n(z)} dA_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{D}} \langle \overline{e_n(z)} Se_n, K^I_\alpha(\cdot,z)\rangle dA_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left\langle S \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(z)} e_n, K^I_\alpha(\cdot,z) \right\rangle dA_\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} \langle SK^I_\alpha(\cdot,z), K^I_\alpha(\cdot,z)\rangle dA_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \langle Ss^I_{\alpha,z}, s^I_{\alpha,z}\rangle K^I_\alpha(z,z) dA_\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} \tilde{S}(z) K^I_\alpha(z,z) dA_\alpha(z),
\end{aligned}$$

donde usamos la hipótesis para aplicar el Teorema de Fubini. ■

Ahora establecemos una condición necesaria y suficiente para que un operador definido en un subespacio invariante I de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ pertenezca a la clase de Hilbert-Schmidt.

Lema 3.16 *Sean $\alpha > -1$, I un subespacio invariante de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Un operador lineal y continuo S en I está en la clase de Hilbert-Schmidt si y sólo si*

$$\int_{\mathbb{D}} \|Ss^I_{\alpha,z}\|^2 K^I_\alpha(z,z) dA_\alpha(z) < \infty.$$

Además, la raíz cuadrada de la integral anterior es igual a la norma de Hilbert-Schmidt de S.

Demostración. Sabemos que un operador S lineal y acotado en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ está en la clase de Hilbert-Schmidt si y sólo si S^*S esta en la clase de traza (ver [22, pág. 18]). Como

$$\widetilde{S^*S}(z) = \langle S^*Ss^I_{\alpha,z}, s^I_{\alpha,z}\rangle = \langle Ss^I_{\alpha,z}, Ss^I_{\alpha,z}\rangle = \|Ss^I_{\alpha,z}\|^2$$

y S^*S siempre es positivo, entonces por el lema anterior

$$tr(S^*S) = \int_{\mathbb{D}} \widetilde{S^*S}(z) K^I_\alpha(z,z) dA_\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} \|Ss^I_{\alpha,z}\|^2 K^I_\alpha(z,z) dA_\alpha(z).$$

De lo anterior se sigue la primera parte del resultado.

De la Observación 3.14 se sigue que

$$\|S\|_2^2 = \sum_n \|Se_n\|^2 = \sum_n \langle S^* S e_n, e_n\rangle = tr(S^*S) = \int_{\mathbb{D}} \|Ss^I_{\alpha,z}\|^2 K^I_\alpha(z,z) dA_\alpha(z).$$

La segunda parte del resultado se sigue. ■

A manera de ejemplo del lema anterior presentamos la siguiente observación.

Observación 3.17 *El operador $I_d - T_I^* T_I$ está en la clase de Hilbert-Schmidt para todo subespacio invariante I de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$, $\alpha > -1$. En efecto, la Proposición 3.7 implica*

$$(I_d - T_I^* T_I) f(z) = \int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2) f(w) K^I_\alpha(z,w) dA_\alpha(w), \ f \in I.$$

Por lo tanto $I_d - T_I^* T_I$ es un operador tipo Toeplitz cuyo símbolo converge a cero en la frontera, de donde se sigue que es compacto (ver [22, pág. 107]). En base al Lema 3.16 y a las propiedades del núcleo reproductor de I se tiene,

$$\begin{aligned}
\|I_d - T_I^* T_I\|_2^2 &= \int_{\mathbb{D}} \|(I_d - T_I^* T_I) s^I_{\alpha,z}\|^2 K^I_\alpha(z,z) d_A\alpha(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^2 |K^I_\alpha(w,z)|^2 dA_\alpha(w) dA_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^2 \left(\int_{\mathbb{D}} |K^I_\alpha(w,z)|^2 dA_\alpha(z) \right) dA_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^2 K^I_\alpha(w,w) dA_\alpha(w) = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^{2+\alpha} K^I_\alpha(w,w) dA(w) \\
&= (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} R^I_\alpha(z,z) dA(z) \leq (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} dA(z) = \alpha + 1,
\end{aligned}$$

pues $0 \leq R^I_\alpha(z,z) \leq 1$. Luego $I_d - T_I^* T_I$ está en la clase Hilbert-Schmidt.

Los resultados previos nos permiten calcular la traza y la norma de Hilbert-Schmidt del operador raíz según sea el caso.

Proposición 3.18 *Sean $\alpha > -1$ e $I \neq \{0\}$ un subespacio invariante de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Si el operador raíz C_α está en la clase de traza, entonces*

$$tr(C_\alpha) = \int_{\mathbb{D}} R^I_\alpha(z,z) dA_\alpha(z),$$

y la norma Hilbert-Schmidt de C_α es

$$\|C_\alpha\|_2^2 = \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |R^I_\alpha(z,w)|^2 dA_\alpha(z) dA_\alpha(w).$$

En particular, si C_α está en la clase de la traza, entonces $0 < tr(C_\alpha) \leq 1$, y $tr(C_\alpha) = 1$ si y sólo si $I = A^2_\alpha$.

Demostración. Por las propiedades del núcleo reproductor y por la Observación 3.6 se cumple que para toda $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} C_\alpha K_\alpha^I(\cdot, z)(w) &= \overline{\int_{\mathbb{D}} R_\alpha^I(w,\xi) K_\alpha^I(\xi, z) dA_\alpha(\xi)} \\ &= \overline{\int_{\mathbb{D}} R_\alpha^I(\xi, w) K_\alpha^I(z,\xi) dA_\alpha(\xi)} \\ &= \overline{R_\alpha^I(z,w)} = R_\alpha^I(w,z), \quad w \in \mathbb{D}, \end{aligned}$$

y así,

$$\langle C_\alpha K_\alpha^I(\cdot, z), K_\alpha^I(\cdot, z)\rangle = \langle R_\alpha^I(\cdot, z), K_\alpha^I(\cdot, z)\rangle = R_\alpha^I(z,z).$$

Por lo cual la transformada de Berezin de C_α está dada como

$$\widetilde{C_\alpha}(z) = \langle C_\alpha s_{\alpha,z}^I, s_{\alpha,z}^I\rangle = \frac{\langle C_\alpha K_\alpha^I(\cdot, z),^I, K_\alpha^I(\cdot, z)\rangle}{K_\alpha^I(z,z)} = \frac{R_\alpha^I(z,z)}{K_\alpha^I(z,z)}.$$

La fórmula para la traza se sigue del Lema 3.15 y la fórmula para la norma de Hilbert-Schmidt se sigue del Lema 3.16.

Por último, como $0 \leq R_\alpha^I(z,z) \leq 1$ y R_α^I no es idénticamente cero, entonces

$$0 < tr(C_\alpha) = \int_{\mathbb{D}} R_\alpha^I(z,z) dA_\alpha(z) \leq 1.$$

Además, si $I = A_\alpha^2$, entonces $R_\alpha^I(z,z) \equiv 1$, lo que implica que $tr(C_\alpha) = 1$. Por otro lado, si $tr(C_\alpha) = 1$ entonces $R_\alpha^I(z,z) \equiv 1$; así $K_\alpha^I(z,z) = K_\alpha(z,z)$, por lo que $I = A_\alpha^2$. ∎

3.2.3. Pertenencia de C_α a las clases de Schatten

En esta sección tratamos algunos resultados relacionados con la compacidad y la pertenencia a las clases de Schatten del operador raíz C_α. El índice de I definido como: $ind(I) := \dim(I \ominus zI)$ es clave en dichos resultados.

Teorema 3.19 *Si I es un subespacio invariante de $A^2(\mathbb{D})$ con índice n, entonces*

$$tr([T_I^*, T_I]) = n.$$

No presentamos la demostración de este teorema debido a que se necesitan resultados que no son relevantes para este tema. Referimos al lector interesado a [24, Teorema 3.2].

La demostración del teorema anterior está fuertemente basada en el hecho que para cada subespacio invariante I de $A^2(\mathbb{D})$ se cumple que I está generado por $I \ominus zI$, es decir, I está generado por $\dim I \ominus zI$ elementos. Tal hecho sólo ha podido ser generalizado para $-1 < \alpha \leq 0$, mientras que para $\alpha > 0$ el problema sigue abierto. Es por eso que el teorema anterior no se ha podido generalizar a los espacios de Bergman con peso.

Lema 3.20 *Sean $\alpha > -1$ e I un subespacio invariante de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Entonces el auto-conmutador $[T_I^*, T_I]$ es compacto si y sólo si $ind(I) < \infty$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $ind(I) = \infty$.

Sea $\{f_n\}_{n\geq 0}$ una base ortonormal para $I \ominus zI$. Por un lado $\langle f_n, g\rangle = 0$ para cada $g \in zI$ y por el otro lado $\sum |\langle f_n, h\rangle|^2 < \infty$ para cada $h \in I \ominus zI$. Se sigue de lo anterior que $\langle f_n, f\rangle \to 0$ para cada $f \in I = (I \ominus zI) \oplus zI$, esto es, $f_n \to 0$ débilmente en I.

Por la Observación 3.1 se tiene que $\|B(f)\|^2_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} \geq \frac{1}{2+\alpha}\|f\|^2_{A^2_\alpha(\mathbb{D})}$ para cada $f \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Como $\ker T_I^* = I \ominus zI$, entonces para cada $n \geq 0$ se cumple

$$\langle [T_I^*, T_I]f_n, f_n\rangle = \langle (T_I^* T_I - T_I T_I^*)f_n, f_n\rangle = \|T_I f_n\|^2 \geq (2+\alpha)^{-1}\|f_n\|^2 = (2+\alpha)^{-1}.$$

Dado que $[T_I^*, T_I]$ es un operador positivo tenemos que

$$\langle [T_I^*, T_I]f_n, f_n\rangle = \|[T_I^*, T_I]^{1/2} f_n\|^2 \geq \frac{1}{2+\alpha},$$

por lo tanto $[T_I^*, T_I]^{1/2}$ no es compacto (ver Teorema A.1). Por el Teorema A.2 se sigue que $[T_I^*, T_I]$ no es compacto.

$\Leftarrow$) Supongamos que $ind(I) < \infty$.

Consideramos la base ortonormal estándar $\{e_n(z)\}_{n\geq 0}$ de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ y ponemos $\omega_n = \frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha+n)}$. Como

$$B^* B e_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle B^* B e_n, e_k\rangle e_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle B e_n, B e_k\rangle e_k(z) = \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} e_n(z)$$

para cada $n \geq 0$, entonces el operador $B^* B$ puede ser representado como

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_1}{\omega_0} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\omega_2}{\omega_1} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Así, del hecho que $1 - \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \frac{1+\alpha}{n+2+\alpha}$ se sigue que

$$-K := I - B^* B = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha}{2+\alpha} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1+\alpha}{3+\alpha} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1+\alpha}{n+2+\alpha} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Como $-Kf = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\alpha}{n+2+\alpha}\langle f, e_n\rangle e_n$ para cada $f \in A_\alpha^2(\mathbb{D})$ y $\frac{1+\alpha}{n+2+\alpha} \to 0$, entonces $-K$ es un operador compacto (ver Proposición A.3).

Sean P_I, $P_{I^\perp}$ las proyecciones ortogonales de $A_\alpha^2(\mathbb{D})$ sobre I e $I^\perp$ respectivamente. Dado que para $f \in I$, $g \in I^\perp$ tenemos $B(f \oplus g) = T_I f + Bg = (Tf + P_I Bg) \oplus P_{I^\perp} Bg$, el operador traslación de Bergman tiene la siguiente representación matricial en bloques con respecto a la descomposición $A_\alpha^2(\mathbb{D}) = I \oplus I^\perp$:

$$B = \begin{pmatrix} T_I & P_I B \\ 0 & P_{I^\perp} B \end{pmatrix}.$$

Sea

$$S = \begin{pmatrix} T_I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$[S^*, S] = \begin{pmatrix} [T_I^*, T_I] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente $[T_I^*, T_I]$ es compacto en I si y sólo si $[S^*, S]$ es compacto en $A_\alpha^2(\mathbb{D})$.

Notamos que $S = BP_I$, entonces

$$\begin{aligned} [S^*, S]S &= (S^*S - SS^*)S = P_I B^* B P_I B P_I - B P_I B^* B P_I \\ &= P_I(I+K)P_I B P_I - B P_I (I+K) P_I \\ &= P_I K P_I B P_I - B P_I K P_I. \end{aligned}$$

Así, $[S^*, S]S$ es un operador compacto sobre $A_\alpha^2(\mathbb{D})$, por lo tanto $[T_I^*, T_I]T_I$ es un operador compacto sobre I.

Como T_I es inyectivo y $\dim(I \ominus zI) < \infty$, T_I es Fredholm.

Consideramos a $\mathcal{B}(I)$ como el conjunto de operadores acotados sobre I, y a $\mathcal{B}_0(I)$ como el conjunto de operadores compactos sobre I. Sea π el homomorfismo natural de $\mathcal{B}(I)$ en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}(I)/\mathcal{B}_0(I)$. Como $[T_I^*, T_I]T_I$ es compacto en I, entonces $0 = \pi([T_I^*, T_I]T_I) = \pi(T_I)\pi([T_I^*, T_I])$. Como T_I es Fredholm entonces por el Teorema de Atkinson (ver Teorema A.9) $\pi(T_I)$ es invertible en $\mathcal{B}(I)/\mathcal{B}_0(I)$, entonces $\pi([T_I^*, T_I]) = 0$. Por tanto, $[T_I^*, T_I]$ es compacto. ■

En la descomposición del operador raíz C_α que se hizo en el Lema 3.10 aparece el operador $I_d - T_I T_I^*$, entonces es natural averiguar propiedades de tal operador.

Lema 3.21 *Sean $\alpha > -1$ e I un subespacio invariante de $A_\alpha^2(\mathbb{D})$. Las siguiente condiciones son equivalentes:*

1. El índice de I es finito.

2. El operador $I_d - T_I T_I^*$ es compacto.

Cuando $\alpha = 0$, las anteriores son equivalentes a

3. El operador $I_d - T_I T_I^*$ es de Hilbert-Schmidt.

Demostración. 1)$\Rightarrow$ 2) Supongamos que $ind(I) < \infty$. Por el lema anterior $[T_I^*, T_I]$ es compacto. Como

$$I_d - T_I T_I^* = I_d - T_I^* T_I + [T_I^*, T_I] \tag{3.1}$$

y $I_d - T_I^* T_I$ siempre es compacto por la Observación 3.17, entonces $I_d - T_I T_I^*$ es compacto.

2)$\Rightarrow$ 1) Si $I_d - T_I T_I^*$ es compacto, entonces $\overline{(I_d - T_I T_I^*)(\mathbb{B})}$ es compacto en I, donde $\mathbb{B} := \{f \in I : \|f\| \leq 1\}$. En particular, como $(I_d - T_I T_I^*) f = f$ en $I \ominus zI$, entonces $\overline{(I_d - T_I T_I^*)(\mathbb{B} \cap (I \ominus zI))}$ es compacto en $I \ominus zI$. Por tanto $I \ominus zI$ es finito dimensional.

1)$\Rightarrow$ 3) Si $ind(I) < \infty$ entonces el Teorema 3.19 implica que el autoconmutador $[T_I^*, T_I]$ está en la clase de traza. Por tanto $[T_I^*, T_I]$ está en la clase de Hilbert-Schmidt (pues los valores propios de $[T_I^*, T_I]$ son una sucesión acotada), usando la Observación 3.17 y (3.1) se sigue que $I_d - T_I T_I^*$ está en la clase de Hilbert-Schmidt.

Para finalizar, 3)$\Rightarrow$ 2) es evidente. ∎

Cuando $\alpha = 0$, el resultado anterior y el Teorema 3.19 proporcionan cotas para la norma Hilbert-Schmidt del operador $I_d - T_I T_I^*$, esto nos servirá para encontrar algunas cotas para la norma Hilbert-Schmidt de C.

Corolario 3.22 *Si n es el índice de un subespacio invariante I de $A^2(\mathbb{D})$, entonces*

$$\sqrt{n} \leq \|I_d - T_I T_I^*\|_2 \leq 1 + \sqrt{n}.$$

Demostración. Como T_I es hiponormal y $\|T_I\| = 1$ entonces $0 \leq [T_I^*, T_I] \leq I_d$. Esto implica que $\|[T_I^*, T_I]\| \leq 1$ y que todos los valores propios de $[T_I^*, T_I]$ están entre 0 y 1. Así,

$$\|[T_I^*, T_I]\|_2^2 \leq tr([T_I^*, T_I]).$$

En el Teorema 3.19 se vio que $tr([T_I^*, T_I]) = n$ y en la Observación 3.17 se mostró que $\|I_d - T_I^* T_I\|_2^2 \leq 1$, luego por (3.1) tenemos

$$\|I_d - T_I T_I^*\|_2 \leq \|I_d - T_I^* T_I\|_2 + \|[T_I^*, T_I]\|_2 \leq 1 + \sqrt{n}.$$

Tenemos que $\ker(T_I^*) = I \ominus zI$, esto implica que $I_d - T_I T_I^*$ fija cada $f \in I \ominus zI$. Como $\dim(I \ominus zI) = n$, entonces el valor propio 1 de $I_d - T_I T_I^*$ debe tener multiplicidad al menos n, esto implica que $\sqrt{n} \leq \|I_d - T_I T_I^*\|_2$. ∎

Ahora, el siguiente resultado da condiciones necesarias y suficientes para que el operador C_α sea compacto o bien pertenezca a la clase de traza; lo cual era nuestra meta en este apartado.

Teorema 3.23 *Sean α un entero no negativo e I un subespacio invariante de $A_\alpha^2(\mathbb{D})$. Las siguiente condiciones son equivalentes:*

1) El índice de I es finito.

2) El operador raíz C_α es compacto.

Cuando $\alpha = 0$, las anteriores son equivalentes a

3) El operador C está en la clase de traza.

Demostración. 1)$\Rightarrow$ 2) Supongamos que $ind(I)$ es finito. Por el Lema 3.21 el operador $I_d - T_I T_I^*$ es compacto. Como el álgebra de los operadores compactos es un ideal bilateral en el álgebra de los operadores lineales acotados sobre I, entonces el operador $T_I^j(I_d - T_I T_I^*)T_I^{*j}$ es compacto para $j = 0, 1, \ldots$. Por el Lema 3.10 tenemos que C_α es compacto.

2)$\Rightarrow$ 1) Supongamos que el operador C_α es compacto. Como $\overline{C_\alpha(\mathbb{B})}$ es compacto en I, donde $\mathbb{B} := \{f \in I : \|f\| \leq 1\}$, y como $C_\alpha f = f$ para cada $f \in I \ominus zI$ entonces $\overline{C_\alpha(\mathbb{B} \cap (I \ominus zI))}$ es compacto en $I \ominus zI$. Por tanto $I \ominus zI$ es finito dimensional.

Claramente 3)$\Rightarrow$ 2).

Sea $\alpha = 0$. Para mostrar 1)$\Rightarrow$ 3) observamos que

$$C - (I_d - T_I T_I^*)^2 = T_I^2 T_I^{*2} - T_I T_I^* T_I T_I^* = -T_I[T_I^*, T_I]T_I^*.$$

Así, si el índice de I es finito, por el Teorema 3.19 el auto-conmutador $[T_I^*, T_I]$ esta en la clase de la traza. Como la clase de la traza es de hecho un ideal en el álgebra de los operadores acotados en I, el operador $T_I[T_I^*, T_I]T_I^*$ está en la clase de la traza. Además por el Lema 3.21 el operador $I_d - T_I T_I^*$ está en la clase de Hilbert-Schmidt, esto implica que $(I_d - T_I T_I^*)^2$ está en la clase de la traza. Por tanto, C está en la clase de la traza. ■

Para finalizar este apartado, el siguiente corolario da cotas para la norma de Hilbert-Schmidt de C.

Corolario 3.24 *Si el subespacio invariante I de $A^2(\mathbb{D})$ tiene índice finito n, entonces*

$$\sqrt{n} \leq \|C\|_2 \leq 2(1 + \sqrt{n}).$$

Demostración. Por el Lema 3.10 tenemos

$$\|C\|_2 \leq \|I_d - T_I T_I^*\|_2 + \|T_I(I_d - T_I T_I^*)T_I^*\|_2.$$

Como $\|T_I\| = \|T_I^*\| = 1$, entonces por el Lema 3.16 tenemos

$$\begin{aligned} \|T_I(I_d - T_I T_I^*)T_I^*\|_2 &\leq \|T_I\|\|I_d - T_I T_I^*\|_2\|T_I^*\| \\ &\leq \|I_d - T_I T_I^*\|_2. \end{aligned}$$

Por el Corolario 3.22 se tiene $\|C\|_2 \leq 2(1 + \sqrt{n})$.

Por la Proposición 3.11 el espacio propio de C asociado al valor propio 1 es $E_1 = I \ominus zI$. Como $\dim(I \ominus zI) = n$, entonces el valor propio 1 tiene multiplicidad n, esto implica que $\sqrt{n} \leq \|C_\alpha\|_2$. ■

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capítulo damos algunos ejemplos del operador raíz C_α. Ponemos particular atención en la dimensión del rango de este operador, denotado por $rank(C_\alpha)$.

Antes de comenzar consideramos unos resultados necesarios para la demostración de dichos ejemplos. Siguiendo las ideas presentadas en [4] generalizamos los resultados a espacios de Bergman con peso. En concreto se muestra cuando un subespacio invariante es generado por un polinomio.

Lema 4.1 *Sean q un polinomio de grado n cuyas raíces estan en $\mathbb{D}$ y $-1 < \alpha < \infty$. Entonces $qA^2_\alpha(\mathbb{D})$ es un subespacio invariante de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$, más aún,* $\dim A^2_\alpha(\mathbb{D})/qA^2_\alpha(\mathbb{D})$ *es igual a n.*

Demostración. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{D}$ las distintas raíces de q con multiplicidad $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ respectivamente. Ponemos

$$M = \{f \in A^2_\alpha(\mathbb{D}) : f^{(j)}(\lambda_i) = 0,\ 1 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq \rho_i - 1\}.$$

Por la Proposición 2.2 para cada raíz λ_i existe $c(j, \lambda_i) > 0$ tal que

$$|f^{(j)}(\lambda_i)| \leq c(j, \lambda_i)\|f\|_{A^2_\alpha(\mathbb{D})}, \ \ \textit{para toda}\ \ f \in A^2_\alpha(\mathbb{D}), \tag{4.1}$$

para cada $0 \leq j \leq \rho_i - 1$. Esto implica que las funcionales lineales evaluación de una función y la j-ésima derivada de una función en cada λ_i son acotadas. Es claro que M es la intersección de los núcleos de tales n funcionales, luego M es cerrado.

Claramente $qA^2_\alpha(\mathbb{D}) \subset M$. Sea ahora $f \in M$, existe una función g analítica en $\mathbb{D}$ tal que $f = qg$. Como $f \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$ y $g(z)$ es acotada en una vecindad de λ_i para cada $1 \leq i \leq m$, entonces $g \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Así $M = qA^2_\alpha(\mathbb{D})$.

Es obvio que M es un subespacio invariante. Por último, dado que las n funcionales consideradas anteriormente son linealmente independientes se tiene que $\dim A^2_\alpha(\mathbb{D})/qA^2_\alpha(\mathbb{D}) = n$. ■

Lema 4.2 *Supongamos que* $(z-\lambda)A^2_\alpha(\mathbb{D})$ *es denso en* $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ *para cada* $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, $-1 < \alpha < \infty$. *Sea* I *un subespacio invariante con codimensión finita en* $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. *Entonces existe un polinomio* q *cuyas raíces están en* $\mathbb{D}$ *y tal que* $I = qA^2_\alpha(\mathbb{D})$.

Demostración. Definimos un operador $T : A^2_\alpha(\mathbb{D})/I \to A^2_\alpha(\mathbb{D})/I$ dado por $T(g+I) = zg+I$. T está bien definido debido a que I es un subespacio invariante. Para cada polinomio f se tiene

$$f(T)(g+I) = fg+I, \ \textit{para toda } g \in A^2_\alpha(\mathbb{D}).$$

Dado que $A^2_\alpha(\mathbb{D})/I$ es finito dimensional, por el Teorema de Cayley-Hamilton existe un polinomio p de grado a lo más $\dim A^2_\alpha(\mathbb{D})/I$ tal que $p(T) = 0$. Así $I = pg + I$ para toda $g \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$, luego $pA^2_\alpha(\mathbb{D}) \subset I$.

Ponemos $p = qh$, donde q es un polinomio cuyas raíces están en $\mathbb{D}$ y h es un polinomio con raíces en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, entonces $(z-\lambda)A^2_\alpha(\mathbb{D}) = A^2_\alpha(\mathbb{D})$, pues $z-\lambda$, $(z-\lambda)^{-1}$ son analíticas y acotadas en $\mathbb{D}$. Por hipótesis $\overline{(z-\lambda)A^2_\alpha(\mathbb{D})} = A^2_\alpha(\mathbb{D})$ para cada raíz λ de h, esto implica que $\overline{hA^2_\alpha(\mathbb{D})} = A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Como la multiplicación por q es un operador continuo en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ se tiene

$$qA^2_\alpha(\mathbb{D}) = q\overline{hA^2_\alpha(\mathbb{D})} \subset \overline{pA^2_\alpha(\mathbb{D})} \subset I.$$

Así, por el lema anterior tenemos

$$\dim A^2_\alpha(\mathbb{D})/I \leq \dim A^2_\alpha(\mathbb{D})/qA^2_\alpha(\mathbb{D}) = deg\ q \leq deg\ p \leq \dim A^2_\alpha(\mathbb{D})/I,$$

lo que implica que $\dim A^2_\alpha(\mathbb{D})/I = \dim A^2_\alpha(\mathbb{D})/qA^2_\alpha(\mathbb{D})$. Dado que $qA^2_\alpha(\mathbb{D}) \subset I$, se sigue que $I = qA^2_\alpha(\mathbb{D})$. ■

Ahora estamos listos para probar el recíproco del Lema 4.1.

Proposición 4.3 *Sean* $\alpha \geq 0$ *e* I *un subespacio invariante con codimensión* n *en* $A^2_\alpha(\mathbb{D})$, *entonces existe un polinomio* q *de grado* n *y con raíces en* $\mathbb{D}$ *tal que* $I = qA^2_\alpha(\mathbb{D})$.

Demostración. Por el resultado anterior basta mostrar que $(z-\lambda)A^2_\alpha(\mathbb{D})$ es denso en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ para cada $\lambda \in \partial\mathbb{D}$.

Sea $\lambda_1 \in \partial\mathbb{D}$, $\lambda_1 \neq \lambda$. Consideramos la función $\varphi(z) = \frac{z-\lambda_1}{z-\lambda}$. Como φ es analítica en $\mathbb{D}$ y no se anula en $\mathbb{D}$, entonces por [1, pág. 143] podemos definir la raíz cuadrada analítica de φ, que cumple

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \left|\sqrt{\frac{z-\lambda_1}{z-\lambda}}\right|^2 dA_\alpha(z) &= (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \left|\frac{z-\lambda_1}{z-\lambda}\right| (1-|z|^2)^\alpha dA(z) \\ &\leq C_1 \int_{|z-\lambda|\leq\epsilon} \frac{1}{|z-\lambda|} dA(z) + C_2 \int_{\mathbb{D}\bigcap\{|z-\lambda|\geq\epsilon\}} \frac{1}{|z-\lambda|} dA(z),\end{aligned}$$

para algunas constantes C_1, C_2 que acotan a las funciones $|z-\lambda_1|$, $(1-|z|^2)^\alpha$ en $\mathbb{D}$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. El primer término está acotado por $2\epsilon C_1$, mientras que el segundo está acotado por $\frac{C_2}{\epsilon}$, lo que implica que $\sqrt{\frac{z-\lambda_1}{z-\lambda}} \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$.

Sea $Y := \overline{(z-\lambda)A^2_\alpha(\mathbb{D})}$. Como $1 \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$, $z-\lambda \in Y$, y si suponemos que $z-\lambda_1 \in Y$ entonces $1 \in Y$. Dado que $\phi Y \subset Y$ para cada $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces $H^\infty(\mathbb{D}) \subset Y$. Como $H^\infty(\mathbb{D})$ es denso en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ entonces $\overline{(z-\lambda)A^2_\alpha(\mathbb{D})} = A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Por tanto basta mostrar que $z-\lambda_1 \in Y$.

Como $H^\infty(\mathbb{D})$ es denso en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ entonces existe una sucesión $\{h_n\} \subset H^\infty(\mathbb{D})$ tal que $\left\| h_n - \sqrt{\frac{z-\lambda_1}{z-\lambda}} \right\|_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} \to 0$. Dado que $(z-\lambda)\sqrt{\frac{z-\lambda_1}{z-\lambda}} \in H^\infty(\mathbb{D})$, tenemos

$$\left\| (z-\lambda)\sqrt{\frac{z-\lambda_1}{z-\lambda}} h_n - (z-\lambda_1) \right\|_{A^2_\alpha(\mathbb{D})} \to 0.$$

Notamos que $\sqrt{\frac{z-\lambda_1}{z-\lambda}} h_n \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$, por lo tanto $z-\lambda_1 \in Y$. ■

De la Proposición 4.3 y el Lema 4.1 deducimos que un subespacio invariante I tiene codimensión finita en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ si y sólo si es generado por un polinomio, esto es, dichos resultados caracterizan completamente a los subespacios invariantes con codimensión finita en los espacios de Bergman con peso. Este resultado es fundamental en nuestro primer ejemplo que presentamos a continuación.

Proposición 4.4 *Sea I un subespacio invariante de $A^2(\mathbb{D})$, con $N = \dim(A^2(\mathbb{D}) \ominus I) < \infty$. Entonces la dimensión del rango de C es a lo más $N+1$.*

Demostración. Por la Proposición 4.3 existe un polinomio q de grado N que genera a I. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ las raíces de q con multiplicidad $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ respectivamente. Entonces

$$I = \{f \in A^2(\mathbb{D}) : f^{(j)}(\lambda_i) = 0,\ 1 \le i \le m,\ 0 \le j \le \rho_i - 1\}.$$

En [5] Chailos prueba que en este caso la función raíz $R^I(z,w)$ está dada por

$$\begin{aligned} R^I(z,w) &= \overline{G(w)}G(z)\left(1 - \frac{p(\overline{w},z)}{\prod_{i=1}^m (z-A_i)(\overline{w}-\overline{A_i})}\right) \\ &= \frac{\overline{G(w)}G(z)}{\prod_{i=1}^m (z-A_i)\prod_{i=1}^m(\overline{w}-\overline{A_i})}\left(\prod_{i=1}^m (z-A_i)(\overline{w}-\overline{A_i}) - p(\overline{w},z)\right), \end{aligned}$$

donde G es un vector unitario en $I \ominus zI$, $A_i \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ y p es un polinomio simétrico (i.e. $p(z,w) = \overline{p(w,\overline{z})}$) con $\deg p = m$. Como $\prod_{i=1}^m (z-A_i)(\overline{w}-\overline{A_i}) - p(\overline{w},z)$ es un polinomio simétrico de grado a lo más $m \le N$, entonces la dimensión del rango de C es a lo más $N+1$. ■

Es preciso mencionar que el resultado anterior se encuentra en [25], más en dicho trabajo la cota para la dimensión del rango del operador raíz C era $2N$. Este resultado resuelve el problema de determinar la dimensión del rango de C cuando el subespacio invariante está basado en un conjunto de ceros.

Antes de continuar presentamos un resultado que fue fundamental para hacer este trabajo.

Lema 4.5 *Para $r \in [0,1)$, un número entero $\alpha \geq 0$ y $N \geq 1$ se cumple*

$$p(r) := 1-(1-r)^{\alpha+2}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{k!\Gamma(2+\alpha)}r^k = \frac{1}{(\alpha+1)!}\sum_{k=0}^{\alpha+1}(-1)^k\binom{\alpha+1}{k}\left(\prod_{k\neq j=0}^{\alpha+1}(N+j)\right)r^{N+k}. \quad (4.2)$$

Demostración. Sea $S(r) := \sum_{k=0}^{N-1} r^{k+\alpha+1} = r^{\alpha+1}\left(\frac{1-r^N}{1-r}\right)$. Ponemos $f(r) = (1-r)^{-1}$ y $g(r) = r^{\alpha+1} - r^{N+\alpha+1}$, entonces para $0 \leq j \leq \alpha+1$ tenemos

$$f^{(\alpha+1-j)}(r) = (\alpha+1-j)!(1-r)^{-(\alpha+2-j)}, \quad g^{(j)}(r) = j!\binom{\alpha+1}{j}r^{\alpha+1-j} - j!\binom{N+\alpha+1}{j}r^{N+\alpha+1-j}.$$

Usando la formula de Leibniz tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{k!\Gamma(2+\alpha)}r^k &= \frac{1}{(\alpha+1)!}S^{(\alpha+1)}(r) = \frac{1}{(\alpha+1)!}(fg)^{(\alpha+1)}(r)\\ &= \sum_{j=0}^{\alpha+1}(1-r)^{-(\alpha+2-j)}\left[\binom{\alpha+1}{j}r^{\alpha+1-j} - \binom{N+\alpha+1}{j}r^{N+\alpha+1-j}\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $r \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}p(r) &= 1 - r^{\alpha+1}\sum_{j=0}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{j}(1-r)^j r^{-j} + \sum_{j=0}^{\alpha+1}\binom{N+\alpha+1}{j}(1-r)^j r^{N+\alpha+1-j}\\ &= 1 - r^{\alpha+1}\left(1+\frac{1-r}{r}\right)^{\alpha+1} + \sum_{j=0}^{\alpha+1}\binom{N+\alpha+1}{j}(1-r)^j r^{N+\alpha+1-j}\\ &= \sum_{j=0}^{\alpha+1}\binom{N+\alpha+1}{j}(1-r)^j r^{N+\alpha+1-j}.\end{aligned}$$

Ahora usamos inducción para probar la siguiente igualdad:

$$\sum_{j=0}^{\alpha+1}\binom{N+\alpha+1}{j}(1-r)^j r^{N+\alpha+1-j} = \frac{1}{(\alpha+1)!}\sum_{j=0}^{\alpha+1}(-1)^j\binom{\alpha+1}{j}\left(\prod_{j\neq k=0}^{\alpha+1}(N+k)\right)r^{N+j}.$$

Para el caso $\alpha = 0$ tenemos

$$\sum_{j=0}^{1}\binom{N+1}{j}(1-r)^j r^{N+1-j} = r^{N+1} + (N+1)(1-r)r^N = (N+1)r^N - Nr^{N+1}.$$

Supongamos que la afirmación es cierta para algún número entero $\alpha \geq 0$. Dado que $\binom{N+\alpha+2}{j} = \binom{N+\alpha+1}{j-1} + \binom{N+\alpha+1}{j}$, $\binom{N+\alpha+1}{-1} = 0$, $(1-r)^{\alpha+2} = \sum_{j=0}^{\alpha+2}(-1)^j\binom{\alpha+2}{j}r^j$ y $\binom{\alpha+1}{\alpha+2} = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\alpha+2}\binom{N+\alpha+2}{j}(1-r)^j r^{N+\alpha+2-j} &= \sum_{j=0}^{\alpha+1}\binom{N+\alpha+1}{j}(1-r)^{j+1}r^{N+\alpha+1-j} + \sum_{j=0}^{\alpha+2}\binom{N+\alpha+1}{j}(1-r)^j r^{N+\alpha+2-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\alpha+1}\binom{N+\alpha+1}{j}(1-r)^j r^{N+\alpha+1-j} + \binom{N+\alpha+1}{\alpha+2}\sum_{j=0}^{\alpha+2}(-1)^j\binom{\alpha+2}{j}r^{N+j} \\
&= \frac{1}{(\alpha+1)!}\sum_{j=0}^{\alpha+1}(-1)^j\binom{\alpha+1}{j}\left(\prod_{j\neq k=0}^{\alpha+1}(N+k)\right)r^{N+j} \\
&+ \binom{N+\alpha+1}{\alpha+2}\sum_{j=0}^{\alpha+2}(-1)^j\binom{\alpha+2}{j}r^{N+j} \\
&= \sum_{j=0}^{\alpha+2}\left[\frac{1}{(\alpha+1)!}\binom{\alpha+1}{j}\prod_{j\neq k=0}^{\alpha+1}(N+k) + \binom{N+\alpha+1}{\alpha+2}\binom{\alpha+2}{j}\right](-1)^j r^{N+j}.
\end{aligned}$$

Pero para cada $j = 0, 1, \ldots, \alpha+2$ se cumple

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{\alpha+1}{j}}{(\alpha+1)!}\prod_{j\neq k=0}^{\alpha+1}(N+k) + \binom{N+\alpha+1}{\alpha+2}\binom{\alpha+2}{j} &= \frac{N(N+1)\cdots(N+\alpha+1)}{j!(\alpha+1-j)!(N+j)} + \frac{N\cdots(N+\alpha+1)}{j!(\alpha+2-j)!} \\
&= \frac{N(N+1)\cdots(N+\alpha+1)}{j!(\alpha+1-j)!(N+j)}\left[1 + \frac{N+j}{\alpha+2-j}\right] \\
&= \frac{N(N+1)\cdots(N+\alpha+1)(N+\alpha+2)}{j!(\alpha+2-j)!(N+j)} \\
&= \frac{1}{(\alpha+2)!}\binom{\alpha+2}{j}\prod_{j\neq k=0}^{\alpha+2}(N+k),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sum_{j=0}^{\alpha+2}\binom{N+\alpha+2}{j}(1-r)^j r^{N+\alpha+2-j} = \frac{1}{(\alpha+2)!}\sum_{j=0}^{\alpha+2}(-1)^j\binom{\alpha+2}{j}\left(\prod_{j\neq k=0}^{\alpha+2}(N+k)\right)r^{N+j}.$$

■

Sabemos que si tenemos una base ortonormal de un EHNR entonces podemos calcular el núcleo reproductor de dicho espacio. Enseguida presentamos un ejemplo.

Observación 4.6 *Siguiendo la misma idea de la demostración de la Proposición 2.8 es fácil ver que la colección*

$$\left\{\sqrt{\frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{k!\Gamma(2+\alpha)}}\frac{\varphi_a'(z)(1-|a|^2)^{\alpha/2}}{(1-\overline{a}z)^{\alpha}}(\varphi_a(z))^k\right\}_{k\geq N}$$

es una base ortonormal del subespacio invariante I_N de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ generado por la función $f(z) = (z-a)^N$. Por tanto, si consideramos (2.5) y (4.2) entonces el núcleo reproductor para I_N está dado por

$$\begin{aligned}
K_\alpha^{I_N}(z,w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{k!\Gamma(2+\alpha)} \frac{\varphi_a'(z)\overline{\varphi_a'(w)}(1-|a|^2)^\alpha}{(1-\overline{a}z)^\alpha(1-a\overline{w})^\alpha}(\varphi_a(z))^k\overline{(\varphi_a(w))}^k \\
&- \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{k!\Gamma(2+\alpha)} \frac{\varphi_a'(z)\overline{\varphi_a'(w)}(1-|a|^2)^\alpha}{(1-\overline{a}z)^\alpha(1-a\overline{w})^\alpha}(\varphi_a(z))^k\overline{(\varphi_a(w))}^k \\
&= \frac{\varphi_a'(z)(1-|a|^2)^{\alpha/2}}{(1-\overline{a}z)^\alpha} K_\alpha(\varphi_a(z),\varphi_a(w)) \frac{\overline{\varphi_a'(w)}(1-|a|^2)^{\alpha/2}}{(1-\overline{w}a)^\alpha} \\
&- \frac{\varphi_a'(z)\overline{\varphi_a'(w)}(1-|a|^2)^\alpha}{(1-\overline{a}z)^\alpha(1-a\overline{w})^\alpha} \frac{K_\alpha(\varphi_a(z),\varphi_a(w))}{K_\alpha(\varphi_a(z),\varphi_a(w))} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{k!\Gamma(2+\alpha)}(\varphi_a(z))^k\overline{(\varphi_a(w))}^k \\
&= K_\alpha(z,w)\left(1-\left(1-\varphi_a(z)\overline{\varphi_a(w)}\right)^{\alpha+2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{k!\Gamma(2+\alpha)}(\varphi_a(z))^k\overline{(\varphi_a(w))}^k\right) \\
&= \frac{K_\alpha(z,w)}{(\alpha+1)!} \sum_{k=0}^{\alpha+1}(-1)^k \binom{\alpha+1}{k} \left(\prod_{k\neq j=0}^{\alpha+1}(N+j)\right) (\varphi_a(z)\overline{\varphi_a(w)})^{N+k}.
\end{aligned}$$

Ahora estamos listos para presentar otro ejemplo.

Proposición 4.7 *Sea I_N el subespacio invariante generado por $f(z) = (z-a)^N$, para algún $N \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{D}$. Si α es un entero no negativo, entonces la función raíz de I_N es*

$$R_\alpha^{I_N}(z,w) = \frac{1}{(\alpha+1)!} \sum_{k=0}^{\alpha+1}(-1)^k \binom{\alpha+1}{k} \left(\prod_{k\neq j=0}^{\alpha+1}(N+j)\right) (\varphi_a(z)\overline{\varphi_a(w)})^{N+k}.$$

En particular, la dimensión del rango del operador raíz C_α es $\alpha+2$ y la suma de los valores propios de C_α es

$$\frac{1}{(\alpha+1)!} \sum_{k=0}^{\alpha+1}(-1)^k \binom{\alpha+1}{k} \left(\prod_{k\neq j=0}^{\alpha+1}(N+j)\right) \int_{\mathbb{D}} |\varphi_a(z)|^{2(N+k)} dA_\alpha(z).$$

Demostración. Por la observación anterior tenemos

$$R_\alpha^{I_N}(z,w) = \frac{1}{(\alpha+1)!} \sum_{k=0}^{\alpha+1}(-1)^k C_{\alpha+1}^k \prod_{k\neq j=0}^{\alpha+1}(N+j)(\varphi_a(z)\overline{\varphi_a(w)})^{N+k}.$$

Así la dimensión del rango del operador C_α es $\alpha+2$.

Dado que C_α es autoadjunto por la Proposición 3.18 tenemos

$$tr(C_\alpha) = \int_{\mathbb{D}} R_\alpha^{I_N}(z,z)dA_\alpha(z) = \frac{1}{(\alpha+1)!}\sum_{k=0}^{\alpha+1}(-1)^k\binom{\alpha+1}{k}\left(\prod_{k\neq j=0}^{\alpha+1}(N+j)\right)\int_{\mathbb{D}}|\varphi_a(z)|^{2(N+k)}dA_\alpha(z).$$

■

Observación 4.8 *El resultado anterior se ha mejorado respecto al del artículo original [21], pues en dicho artículo la cota que se daba para la dimensión del rango dependía de N; mientras que en nuestra demostración se halló que la cota no depende de N y que además coincide en el caso $\alpha = 0$ que se encuentra en [25]. Para demostrar dicho resultado se necesitó del Lema 4.5 que es un resultado completamente nuevo.*

En los dos ejemplos previos se ha encontrado una cota superior para la dimensión del rango de C_α pero no se dice nada acerca de si hay cotas inferiores. Dicha pregunta sólo se resuelve en el caso $\alpha = 0$.

Proposición 4.9 *Si $I \neq A^2(\mathbb{D})$ es un subespacio invariante con índice n, entonces $rank(C)$ es al menos $2n$.*

Demostración. El resultado es obvio cuando $rank(C)$ es infinito.

Supogamos que $I \neq A^2(\mathbb{D})$. Si $rank(C)$ es finito, entonces C es un operador compacto; más aún C está en la clase de traza por el Teorema 3.23. Como C es autoadjunto entonces

$$tr(C) = \sum_n \lambda_n,$$

donde λ_n son los valores propios de C repetidos de acuerdo a su multiplicidad, y por la Proposición 3.18, $0 < tr(C) < 1$. Por la Proposición 3.11 el espacio propio correspondiente al valor propio 1 es $I \ominus zI$, lo que implica que la suma de los valores propios positivos es al menos n, pues el índice de I es igual a n. Por tanto la suma de los valores propios negativos deben sumar algo menor que $1-n$. Pero la Proposición 3.11 muestra que -1 no es valor propio, lo que implica que todos los valores propios negativos tienen módulo menor que 1, así la fórmula de la traza anterior debe contener al menos n términos negativos. Esto muestra que $rank(C) \geq 2n$. ■

El resultado anterior no se ha podido generalizar a los espacios de Bergman con peso, pues en su demostración se usa fuertemente que el espacio propio asociado al valor propio 1 es $I \ominus zI$ en el caso $\alpha = 0$. Por tanto, si se resuelve la conjetura de que el espacio propio asociado al valor propio 1 es $I \ominus zI$ para cada entero no negativo α, entonces estaremos en posición de poder demostrar la generalización. En este caso se cree que la cota inferior de la dimensión del rango de C_α es $n(\alpha+2)$.

Si consideramos $\alpha = 0$ en la Proposición 4.7, entonces obtenemos que

$$R^I(z,w) = (N+1)\varphi_a(z)^N\overline{\varphi_a(w)}^N - N\varphi_a(z)^{N+1}\overline{\varphi_a(w)}^{N+1},$$

por lo cual $rank(C)$ es 2. Por el Teorema 3.23 C está en la clase de traza, entonces si ponemos a λ como el otro valor propio de C y recordamos que C es autoadjunto tenemos

$$\lambda = -1 + \int_{\mathbb{D}} \left((N+1)|\varphi_a(z)|^{2N} - N|\varphi_a(z)|^{2(N+1)}\right) dA(z).$$

Particularmente si $a = 0$, entonces integrando se obtiene $\lambda = -N/(N+2)$.

En la Proposición 4.4 se ha encontrado una cota para la dimensión del rango de C_α en el caso $\alpha = 0$, dicho resultado es exacto en el caso de que el subespacio invariante sea generado por un solo cero (ver Proposición 4.7). Sin embargo, en los espacios de Bergman con peso sólo se tiene la cota que da la siguiente proposición, la cual no coincide con el caso $\alpha = 0$, pero si coincide con la dimensión del rango de C_α en caso de que el subespacio invariante en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ sea generado por un solo cero.

Proposición 4.10 *Sea α un entero no negativo e I un subespacio invariante de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$. Supongamos que $N = \dim(A^2_\alpha(\mathbb{D}) \ominus I) < \infty$, entonces la dimensión del rango de C_α es a lo más $N(\alpha+2)$.*

Demostración. Probamos el resultado por inducción. Recordando la Proposición 4.3 el caso $N = 1$ se sigue de la Proposición 4.7.

Sea N fijo. Consideramos dos subespacios invariantes $I \subset J$ con

$$\dim(A^2_\alpha(\mathbb{D}) \ominus J) = N \ \ y \ \ \dim(A^2_\alpha(\mathbb{D}) \ominus I) = N+1,$$

luego $\dim(J \ominus I) = 1$. Si e es un vector unitario en $J \ominus I$, entonces podemos escribir

$$K^I_\alpha(z,w) = K^J_\alpha(z,w) - e(z)\overline{e(w)},$$

y así

$$R^I_\alpha(z,w) = R^J_\alpha(z,w) - (1-z\overline{w})^{\alpha+2} e(z)\overline{e(w)}.$$

Se sigue que para cada $f \in I \subset J$

$$\begin{aligned} C^I_\alpha f(z) &= C^J_\alpha f(z) - \int_{\mathbb{D}} (1-z\overline{w})^{\alpha+2} e(z)\overline{e(w)} f(w) dA_\alpha(w) \\ &= C^J f(z) - \sum_{k=0}^{\alpha+2} (-1)^k \binom{\alpha+2}{k} z^k e(z) \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{w^k e(w)} dA_\alpha(w) \\ &= C^J f(z) - \sum_{k=1}^{\alpha+2} (-1)^k \binom{\alpha+2}{k} (B^k e)(z)\langle f, B^k e\rangle, \end{aligned}$$

pues $\langle f, e\rangle = 0$, donde B es el operador traslación de Bergman. Si escribimos $\phi_k = Q(B^k e)$, donde Q es la proyección ortogonal de $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ sobre I, entonces

$$C^I_\alpha f = Q(C^J_\alpha f) - \sum_{k=1}^{\alpha+2} (-1)^k \binom{\alpha+2}{k} \phi_k \langle f, \phi_k\rangle, \ f \in I.$$

Esto muestra que si la dimensión del rango de C_α^J es a lo más $N(\alpha+2)$, entonces la dimensión del rango de C_α^I es a lo más $N(\alpha+2)+(\alpha+2)=(N+1)(\alpha+2)$. Se sigue el resultado por inducción. $\blacksquare$

Apéndice A

A.1. Operadores Compactos

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable. Los siguientes resultados se pueden encontrar en [22].

Teorema A.1 *Un operador lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es compacto si y sólo si $\|Tx_n\| \to 0$ siempre que $x_n \to o$ débilmente en $\mathcal{H}$.*

Teorema A.2 *Un operador lineal y acotado $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es compacto si y sólo si T^*T es compacto.*

Proposición A.3 *Suponga que $\{e_n\}$, $\{\sigma_n\}$ son conjuntos ortonormales en $\mathcal{H}$ y que $\{\lambda_n\}$ es una sucesión de numeros complejos que tiende a cero. Entonces el operador lineal definido como*

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle \sigma_n, \quad x \in \mathcal{H}$$

es compacto.

A.2. Lema de Schur

Sea (X, μ) un espacio de medida y sea K una función definida en $X \times X$. Sea T el operador integral inducido por K, esto es,

$$Tf(x) = \int_X K(x,y) f(y) d\mu(y).$$

Lema A.4 *Supongamos que K es una función medible no-negativa definida en $X \times X$, T es un operador integral inducido por K y $1 < p < \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si existe una constante $C > 0$ y una función medible positiva h en X tal que*

$$\int_X K(x,y) h(y)^q d\mu(y) \leq C h(x)^q$$

para μ-casi toda $x \in X$ y

$$\int_X K(x,y)h(x)^p d\mu(x) \leq Ch(y)^p$$

para μ-casi toda $y \in X$, entonces T es acotado en $L^p(X, d\mu)$ con norma menor o igual que C.

Corolario A.5 *Sea K una función medible no-negativa definida en $X \times X$. Si existe una constante $C > 0$ y una función medible positiva h en X tal que*

$$\int_X K(x,y)h(y)d\mu(y) \leq Ch(x)$$

para μ-casi toda $x \in X$ y

$$\int_X K(x,y)h(x)d\mu(x) \leq Ch(y)$$

para μ-casi toda $y \in X$, entonces el operador integral T inducido por K es acotado en $L^2(X, d\mu)$ con norma menor o igual que C

A.3. Producto finito de Blaschke

Lema A.6 *Si B es un producto finito de Blaschke entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$C^{-1}(1 - |z|^2) \leq 1 - |B(z)|^2 \leq C(1 - |z|^2)$$

para toda $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función analítica con $\varphi(0) = w_0$. Si $\varphi_{w_0}(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}w}$ entonces por el Lema de Schwarz

$$|\varphi_{w_0}(\varphi(z))| \leq |z|.$$

Luego por (2.4)

$$1 - |z|^2 \leq 1 - |\varphi_{w_0}(\varphi(z))|^2 = \frac{(1 - |\varphi(z)|^2)(1 - |w_0|^2)}{|1 - \overline{w_0}\varphi(z)|^2} \leq (1 - |\varphi(z)|^2)\frac{1 + |w_0|}{1 - |w_0|},\ z \in \mathbb{D}.$$

En particular el resultado es válido cuando φ es un producto finito de Blaschke.

Observamos que si $B = B_1B_2$ es un producto de dos productos finitos de Blaschke, entonces

$$1 - |B|^2 = 1 - |B_1|^2 + |B_1|^2(1 - |B_2|^2) \leq (1 - |B_1|^2) + (1 - |B_2|^2).$$

Por tanto basta probar la acotación faltante cuando $B = \varphi_{w_0}$, esto es claro, ya que por (2.4) se tiene que

$$1 - |\varphi_{w_0}(z)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|w_0|^2)}{|1-\overline{w_0}z|^2} \leq C(1-|z|^2).$$

■

Definición A.7 *Ponemos $a \asymp b$ si existe una constante $C > 0$ tal que $C^{-1}b \leq a \leq Cb$.*

A.4. Operadores de Fredholm

Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Consideramos a $\mathcal{B}(X)$ como el conjunto de operadores acotados sobre X, y a $\mathcal{B}_0(X)$ como el conjunto de operadores compactos sobre X. Al álgebra cociente $\mathcal{B}(X)/\mathcal{B}_0(X)$ se le conoce como el álgebra de Calkin.

Definición A.8 *Sean X, Y espacios de Banach. Decimos que el operador acotado $S : X \to Y$ es Fredholm si $\ker S$ es finito dimensional y $S(X)$ tiene codimensión finita en Y.*

El siguiente resultado se puede encontrar en [16, pág. 28].

Teorema A.9 (Atkinson) *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y sea $S \in \mathcal{B}(X)$. Entonces S es Fredholm si y sólo si $S + \mathcal{B}_0(X)$ es invertible en el álgebra de Calkin.*

A.5. Adjunto de un operador en un subespacio invariante

Proposición A.10 *Sean $\mathcal{M}$ un subespacio de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador acotado. Si $\mathcal{M}$ es T-invariante entonces $(T|_{\mathcal{M}})^* = PT^*|_{\mathcal{M}}$, donde $P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{M}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{M}$.*

Bibliografía

[1] Ahlfors L., *Complex Analysis*, Mc-Graw Hill, New York, 1966.

[2] Aronszajn N., *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. 68(1950), 337-404.

[3] Bergman S., *The kernel function and conformal mapping*, AMS, Providence, Rhode Island, 1970.

[4] Bourdon P., Axler S., *Finite Codimensional Invariant Subspaces of Bergman Space*, Trans. of AMS, 306(2)(1988), 805-817.

[5] Chailos G., *Reproducing kernel and invariant subspaces of the Bergman Shift*, Journal of Operator Theory. 51(2004), 181-200.

[6] Conway J. B., *The theory of subnormal operators*, Mathematical surveys and monographs, AMS, Providence, 1991.

[7] Duren P., *Theory of H^p spaces*, Academic Press, Inc, New York, 1970.

[8] Elias N., *Toeplitz operators on Weighted Bergman spaces*, Integral equations and operator theory, 11(1988),310-331.

[9] Garnett John B., *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, Inc, New York, 1981.

[10] Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K., *Theory of Bergman Spaces*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[11] Hedenlmalm H., Richter S., Seip K., *Interpolating sequences and invariant subspaces of given index in the Bergman Spaces*, J. Reine Angew. Math., 477(1996), 13-30.

[12] Horowitz C., *Zeros of functions in the Bergman spaces*, Duke Math. J., 41(1974), 693-710.

[13] Horn R., Johnson C., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1985.

[14] Kazvin A., Mahshahr J., *Weighted Sub-Bergman Hilbert spaces in the unit disk*, Czechoslovak Mathematical Journal, 60(135)(2010), 435-443.

[15] Korenblum B., *A Beurling-type theorem*, Acta Math., 135(1975), 265-293.

[16] Murphy G., *C^*-Algebras and Operators*, Academic Press, Inc., 1990.

[17] Richter S., McCullough S., *Bergman-type reproducing kernels, contractive divisors and dilations*, J. Funct. Anal. 190(2002), 447-480.

[18] Saitoh S., *Theory of reproducing kernels and its applications*, Pitman research notes in mathematics, New York, 1994.

[19] Sarason D., *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994.

[20] Shimorin S., *Approximate spectral synthesis in the Bergman space*, Duke Math. J. 101(2000), 1-40.

[21] Zhou X., Shi X., Lu Y., *The root operator on invariant subspaces of the Weighted Bergman spaces*, Journal of Mathematics Research and Exposition, 30(2010), 54-66.

[22] Zhu K., *Operator theory in function spaces*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Matemathics, New York,1990.

[23] Zhu K., *Sub-Bergman Hilbert spaces in the unit disk*, Indiana Univ. Math. J., 45(1996), 165-176.

[24] Zhu K., *Restriction of the Bergman shift to an invariant space*, Quart. J. Math. Oxford, 48(1997), 519-532.

[25] Zhu K., Yang R., *The root operator on invariant subspaces of the Bergman space*, Illinois Journal of Mathematics, 47(2003), 1227-1242.

[26] Zhu K., *Sub-Bergman Hilbert spaces in the unit disk,II*, Journal of Functional Analysis, 202(2003), 327-341.