Universidad Nacional Autónoma de México

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

Introducción a las Acciones Isométricas

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS
PRESENTA:

Jesús Ángel Núñez Zimbrón

DIRECTOR DE TESINA:
Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco

2011

Índice general

Introducción

El problema de clasificación de objetos, es un problema fundamental en casi cualquier teoría matemática. Ya sea en la teoría de grupos, en álgebra, o en variedades, en geometría; dar una clasificación no trivial constituye un gran avance, que por lo general, tiene consecuencias muy agradables de gran alcance. En el segundo caso mencionado, el de la geometría (diferencial), una primera clasificación está dada por la dimensión que tiene la variedad. En efecto, dos variedades no pueden ser difeomorfas si tienen dimensiones distintas. Sin embargo, en principio, la dimensión no dice mucho más. Se necesita encontrar *invariantes* de distintos índoles (topológicos, diferenciables, topológico-algebraicos) para distinguir varios tipos de variedades.

Ya se han clasificado exitosamente las variedades de dimensión 1 y 2, y recientemente el trabajo de Grigori Perel'man, resultó en una de las clasificaciones más sensatas de las variedades (compactas) de dimensión 3. En la actualidad se busca clasificar las variedades de dimensión 4. Este problema es extremadamente difícil. Se ha encontrado que tan sólo analizar el aspecto de la curvatura seccional de dichas variedades es una tarea formidable. Por otra parte, sin hacer suposiciones de ningún tipo, parece que todavía no tenemos las herramientas necesarias para entenderlas. Como ejemplo de esto, está la famosa conjetura de Hopf que propone el problema de investigar si $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ admite métricas riemannianas de curvatura seccional estrictamente positiva en todos sus puntos.

Se tienen algunos teoremas clásicos como el de Bonnet-Myers y Synge en esta dirección, pero con técnicas clásicas no se pudieron generalizar estos resultados para llegar a una clasificación. Fue hasta 1991, que Karsten Grove propuso agregar suposiciones a las variedades que se estudian para tratar de obtener nuevos ejemplos y buscar un camino hacia una clasificación. Él propuso estudiar variedades de curvatura seccional positiva (o en algunos casos no-negativa) con un grupo *grande* de isometrías. Parte de la motivación de Grove, es el teorema de Hsiang-Kleiner que bosquejaremos al final de la penúltima sección de este trabajo.

El programa de Grove se cimienta sobre la herramienta de los grupos de transformaciones y las acciones isométricas (o riemannianas). Nuestro objetivo en este trabajo, será desarrollar algunas propiedades básicas de dichos conceptos a manera de introducción. De ninguna manera tratamos de ser extensivos y este trabajo tampoco contiene todo el material del tema. Haremos la introducción asumiendo que el lector está familiarizado con los grupos de Lie, los conceptos básicos de las variedades diferenciables y las acciones de grupos diferenciables (o como mínimo, topológicos).

En el capítulo 1 obtenemos propiedades básicas de los grupos de transformaciones y demostramos dos de los teoremas más importantes en esta área: El de la rebanada y el de la órbita principal. Posteriormente a manera de ilustración, en el capítulo 2 introducimos los grupos de transformaciones riemannianos y bosquejamos la prueba del teorema de Hsiang-Kleiner. Por último, comentamos algunas direcciones en las que se puede proseguir en el estudio del tema aquí desarrollado. Por razones de espacio, hemos omitido las demostraciones de algunos resultados cuyas pruebas no sean muy difíciles y damos referencias para que el lector pueda consultarlas.

Capítulo 1

Elementos Previos

Durante todo este trabajo consideraremos variedades diferenciables conexas, de Hausdorff y segundo-numerables. También asumiremos que el lector está familiarizado con el lenguaje y los resultados básicos de la teoría de grupos de transformaciones. A manera de recordatorio y como punto de partida, comenzaremos con definiciones básicas y enunciaremos algunos resultados bien conocidos (que ofrecemos sin demostración).

1.1. Propiedades Básicas de las Acciones Diferenciables

Definición 1.1.1. *Un grupo de transformaciones izquierdo (o una acción diferenciable izquierda) es una triada (G, M, μ), donde G es un grupo de Lie, M una variedad suave y*

$$\mu : G \times M \to M$$

es suave y satisface para todo $p \in M$ y $g, h \in G$ que:

(1) $\mu(e, p) = p$ *donde* $e \in G$ *es el neutro.*

(2) $\mu(g, \mu(h, p)) = \mu(gh, p)$.

En muchos casos, por conveniencia, se utiliza la notación *multiplicativa*, para resumir la definición anterior, en donde se omite la mención a μ. Así, la propiedad (1) se escribiría como $ep = p$ y la (2) como $g(hp) = (gh)p$. Una acción diferenciable derecha se define de manera análoga. Otros nombres usados para la definición anterior son por ejemplo que G actúa (diferenciablemente) sobre M o que M es una G-variedad. A veces cuando queda claro del contexto, se escribe al grupo de transformaciones simplemente como (G, M).

Ejemplo. El ejemplo más sencillo de la definición anterior, es cuando un grupo de Lie G actúa sobre sí mismo por traslaciones. Podemos ampliar un poco este ejemplo, considerando H un subgrupo cerrado de G actuando sobre G por traslaciones.

En seguida, daremos una definición que engloba a los objetos asociados con la definición 1.1.1, y que serán los que nos permitiran un estudio más profundo de las acciones diferenciables.

Definición 1.1.2. *(1) Sean (G, M, μ) y (G, N, ν) dos grupos de transformaciones. Una función $\varphi : M \to N$ se llama G-equivariante, si $\varphi(\mu(g, p)) = \nu(g, \varphi(p))$. ($\varphi(gp) = g\varphi(p)$).*

(2) Para cada $p \in M$, se define $G_p = \{g \in G \mid gp = p\}$. Es fácil verificar que este conjunto es un subgrupo de G y es llamado el subgrupo de isotropía de p.

(3) Para cada $p \in M$ definimos el conjunto $G(p) = \{gp \in M \mid g \in G\} \subset M$ llamado la órbita de p.

(4) La acción sobre M se llama libre si $G_p = \{e\}$ para todo p.

(5) La acción sobre M se llama transitiva, si $G(p) = M$ para algún $p \in M$. (En este caso, también se dice que la variedad es G-homogénea).

Para finalizar este breve recordatorio, enunciamos las propiedades básicas de los objetos de la definición anterior. Estos hechos son estándar en un curso básico de grupos de Lie y pueden consultarse por ejemplo en [bred] o [warn].

Proposición 1.1.3. *(1) G_p es un subgrupo cerrado de G (y por lo tanto un grupo de Lie).*

(2) Si $q \in G(p)$, entonces G_q y G_p son isomorfos. Más precisamente, el isomorfismo está dado por conjugación: $G_q = gG_pg^{-1}$, donde $q = gp$.

(3) Si la acción es transitiva, entonces M es difeomorfa a G/G_p para cada $p \in M$. El difeomorfismo es el natural, $gG_p \mapsto gp$. En particular, si la acción es transitiva y libre, $M \cong G$.

(4) *$G(p)$ es G-invariante, es decir $G(G(p)) = G(p)$ y la función $\mu_p : G/G_p \to M$, que manda $gG_p \mapsto gp$ es una inmersión inyectiva que tiene como imagen a $G(p)$. Más aún, μ_p es G-equivariante.*

(5) *Si G es compacto, entonces $G(p)$ es cerrada en M y la función μ_p es un encaje.*

Muchas de las aplicaciones más importantes de las acciones diferenciables (en particular las acciones por isometrías, que definiremos más adelante), se basan en el estudio del espacio M/G, el cociente dado por la acción, llamado *espacio de órbitas*. Podemos preguntarnos si podemos dar alguna estructura al espacio de órbitas, e.g., de espacio topológico. En el caso mencionado, la respuesta es afirmativa y la topología coherente es la topología cociente, dada por la función $\pi : M \to M/G$. Sin embargo, sin hipótesis extras, esta estructura no se puede forzar más, es decir, no necesariamente se puede dotar a M/G de estructura de variedad topológica o diferenciable. Daremos a continuación una condición que será suficiente en el caso de acciones libres, para dotar a M/G de estructura diferenciable. En lo que sigue, trabajaremos en esa dirección.

Definición 1.1.4. *Sea (G, M, μ) un grupo de transformaciones. Decimos que μ es propia si la función $\varphi : G \times M \to M \times M$ dada por $\varphi(g, p) = (gp, p)$ es propia, es decir, preimagen de compactos, es compacta.*

Lema 1.1.5. *Sea $\mu : G \times M \to M$ una acción Son equivalentes:*

(1) *La acción es propia.*

(2) *Dadas sucesiones $\{g_n\}$ en G y $\{p_n\}$ en M, la convergencia de $\{g_n p_n\}$ y $\{p_n\}$ implica que $\{g_n\}$ tiene una subsucesión convergente.*

(3) *Dados dos compactos $K, L \subseteq M$, el conjunto $(K, L) = \{g \in G \mid gK \cap L \neq \emptyset\}$ es compacto.*

Demostración:

(1)$\Rightarrow$(2) Supongamos que tenemos sucesiones $\{g_n\}$ en G y $\{p_n\}$ convergente en M de tal forma que $\{g_n p_n\}$ es convergente en M. Entonces la sucesión $\{g_n p_n, p_n\}$ es convergente en $M \times M$. Denotemos por $K = \{g_n p_n, p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\lim(g_n p_n, p_n)\}$, al conjunto de los elementos de la sucesión $\{g_n p_n, p_n\}$ y a su límite. Claramente K es compacto. Entonces, como la acción de G en M es propia, $\varphi^{-1}(K)$ es compacto en

$G \times M$. Pero $(g_n, p_n) \in \varphi^{-1}(K)$ para cada n. Entonces la sucesión $\{g_n, p_n\}$ tiene una subsucesión convergente. En particular, la sucesión $\{g_n\}$ tiene una subsucesión convergente como se quería demostrar.

(2)⇒(1) Sea K un compacto en $M \times M$. Queremos ver que $\varphi^{-1}(K)$ es compacto en $G \times M$. Consideremos una sucesión $\{(g_n, p_n)\}$ en $\varphi^{-1}(K)$. Entonces la sucesión $\{\varphi(g_n, p_n) = (g_n p_n, p_n)\}$ en K, tiene una subsucesión convergente por la compacidad de K, digamos $\{(g_{n_k} p_{n_k}, p_{n_k})\}$. Entonces por (2), la sucesión $\{g_{n_k}\}$ es convergente.

(2)⇒(3) Consideremos una sucesión $\{g_n\}$ en (K, L). Para cada n elegimos $p_n \in g_n K \cap L$. Entonces para cada n, existe $q_n \in K$ tal que $p_n = g_n q_n$. Como las sucesiones $\{g_n q_n\}$ y q_n están contenidas en K compacto, entonces tiene subsucesiones convergentes. Sin pérdida de generalidad podemos escribir tales subsucesiones con los mismos índices, $\{g_{n_k} q_{n_k}\}$ y $\{q_{n_k}\}$. Entonces por (2), $\{g_{n_k}\}$ es convergente.

(3)⇒(2) Sean $\{g_n p_n\}$ y $\{p_n\}$ convergentes. Definimos conjuntos compactos

$$L = \{g_n p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\lim g_n p_n\}$$

$$K = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\lim p_n\}$$

Entonces por (3), (K, L) es compacto y tenemos que $g_n \in (K, L)$ para cada n. Entonces $\{g_n\}$ tiene una subsucesión convergente.

□

Las acciones propias tienen las propiedades geométricas más deseables como las que contiene la siguiente proposición.

Proposición 1.1.6. *Sea (G,M) un grupo de transformaciones de modo que G actúa propiamente sobre M.Entonces:*

(1) G_p es compacto para cada $p \in M$.

(2) La función μ_p definida en 1.1.3 (4), es cerrada y por lo tanto, un encaje sobre $G(p)$. En particular, $G(p)$ es cerrada.

(3) M/G es de Hausdorff.

Demostración:

Para el primer inciso, notemos que $\{p\}$ es compacto, y por el lema 1.1.5, $(\{p\}, \{p\}) = \{g \in G \mid g\{p\} \cap \{p\}\} = \{g \in G \mid gp = p\} = G_p$ es compacto.

Para el segundo inciso, la proposición 1.1.3 nos dice que μ_p es una inmersión inyectiva sobre $G(p)$. Resta probar que μ_p es un homeomorfismo. Entonces basta probar que μ_p es cerrada. Consideremos la función $\tilde{\mu}_p : G \to M$ dada por la composición:

$$\begin{array}{ccccccc} G & \longrightarrow & G \times M & \longrightarrow & M \times M & \longrightarrow & M \\ \\ g & \longmapsto & (g,p) & \longmapsto & (gp,p) & \longmapsto & gp \end{array}$$

Entonces $\tilde{\mu}_p = \varphi|_{G\times\{p\}}$, pero $G \times \{p\} = \varphi^{-1}(M \times \{p\})$ y como φ es propia, entonces $\tilde{\mu}_p$ lo es y por lo tanto es cerrada. Pero entonces si denotamos por $\pi : G \to G/G_p$ a la proyección canónica, tenemos que $\tilde{\mu}_p = \mu_p \circ \pi$ y por lo tanto μ también es cerrada.

Para el último inciso, Observamos que φ es cerrada por ser propia. Luego, su imagen $\varphi(G \times M) = \{(gp, p) \in M \times M\}$ es cerrada. La prueba, entonces es una aplicación directa del resultado clásico de topología que dice que si se tiene una función continua $\pi : X \to Y$, abierta y suprayectiva con X de Hausdorff, entonces Y es de Hausdorff si y sólo si el conjunto $\{(x_1, x_2) \in X \times X \mid \pi(x_1) = \pi(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$, para $X = M$, $Y = M/G$ y $\pi : M \to M/G$ la proyección canónica dada por la acción.

$\square$

Para proseguir definiremos el concepto de *rebanada*, que nos auxiliará en el camino a dar estructura al espacio orbital de variedad diferenciable. Probaremos un importante teorema, conocido como el teorema de la rebanada (en inglés *Slice Theorem*) que tiene una gran cantidad de aplicaciones y en cierto sentido, es la herramienta básica para el estudio más formal de las acciones diferenciables. La versión que probaremos es una versión adaptada a nuestras necesidades y que no utiliza el lenguaje de haces fibrados.

Definición 1.1.7. *Sea (G, M) un grupo de transformaciones. Decimos que una subvariedad S de M es una rebanada en $p \in M$ si existe una vecindad abierta U de $G(p)$, G-invariante (es decir, tal que $G(U) \subseteq U$) y una retracción suave G-equivariante $r : U \to G(p)$ tal que $S = r^{-1}(p)$.*

Ejemplo. Consideremos la acción de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ dada por $\mu((s, l), (z, t)) = (sz, t + l)$. Veamos que esta acción es propia. Para esto consideremos sucesiones $\{(g_n, t_n)\}$ en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y $\{(z_n, s_n)\}$ en $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ de tal forma que ésta última sea convergente y tal que $\{(g_n z_n, t_n + s_n)\}$ converge. Ahora, como $||g_n|| = 1$ para toda n, entonces $\{g_n\}$ tiene una subsucesión convergente en $\mathbb{S}^1$. Por otro lado, como $\{t_n + s_n\}$ converge y $\{s_n\}$ converge entonces $\{t_n\}$ converge. Luego $\{(g_n, t_n)\}$ tiene una subsucesión convergente, de modo que por el inciso (2) de la proposición anterior, la acción es propia.

Podemos calcular los grupos de isotropía, las órbitas y las rebanadas. Sea $p = (z_0, t_0)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} G_p &= \{(g,t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid \mu((g,t),(z_0,t_0)) = (z_0,t_0)\} \\ &= \{(g,t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid (gz_0, t+t_0) = (z_0,t_0)\} \\ &= \{(g,t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid gz_0 = z_0 \text{ y } t = 0\} \end{aligned}$$

de modo que tenemos dos casos, $z_0 = 0$ y $z_0 \neq 0$, así que

$$G_p = \begin{cases} \{(e,0)\} & z_0 \neq 0 \\ \mathbb{S}^1 \times \{0\} & z_0 = 0 \end{cases}$$

Por otro lado, las órbitas corresponden a cilindros con eje la recta $(0,t)$ en el caso de $z_0 \neq 0$ y el cilindro degenerado en la recta mencionada en el caso de $z_0 = 0$. Por último si usamos la retracción $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ que manda a los cilindros de radio distinto de 1 en el cilindro de radio 1, podemos tomar como rebanadas, un segmento de recta que una a p con $(0, t_0)$ que no interseque al eje, para $z_0 \neq 0$ y un disco $\{(z, t_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid ||z|| < \varepsilon\}$.

Las rebanadas son un tipo muy particular de subvariedades como lo muestra el siguiente argumento: Tomemos S en p una rebanada y U la vecindad de la definición. Como U es G-invariante, entonces $G(S) \subset U$. Por otro lado, si consideramos $q \in U$, entonces $r(q) \in G(p)$ por lo que $r(q) = gp$ para algún $g \in G$. Por la equivariancia de r, se sigue que $g^{-1}r(q) = r(g^{-1}q) = p$ y por lo tanto $g^{-1}q \in S$. Entonces $q \in G(S)$. Claramente también $p \in S$ pues $r(p) = p$ por ser retracción. Entonces $G(S) = U$.
Ahora, si $g \in G_p$ y $q \in S$, entonces $r(gq) = gr(q) = gp = p$, pero como $S = r^{-1}(p)$, se tiene que $gq \in S$. Entonces hemos probado que S es G_p-invariante. Por último, si $g \in G$ es un elemento que deja invariante a S, entonces $gp \in S$ por lo que $gp \in r^{-1}(p)$. Entonces $r(gp) = p$ y por la equivariancia de r, se sigue que $r(gp) = gr(p) = gp = p$. Entonces

$$G_p = (S,S) = \{g \in G \mid gS \cap S \neq \emptyset\}.$$

Entonces hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 1.1.8. *Sea M una G-variedad y S una rebanada. Entonces para cada $p \in S$, se tiene que $G_p(S) = S$, de modo que la acción de G*

sobre M, induce una acción diferenciable de G_p sobre S, es decir, S es una G_p-variedad. Más aún, $G_p = (S, S)$.

$\square$

Como hemos visto hasta ahora, las órbitas juegan un papel fundamental en el entendimiento de las acciones diferenciables. Las órbitas guardan una relación muy estrecha con las rebanadas, y es esta relación la que nos permitirá darle estructura de variedad a M/G. Para finalizar esta sección definiremos los *tipos de órbita*, y los relacionaremos con las rebanadas. Esto nos dará información clave.

Definición 1.1.9. *Sea (G, M) un grupo de transformaciones.*

(1) Si H es un subgrupo de isotropía ed G, decimos que la órbita $G(p)$ es de tipo (H) si G_p es conjugado de H.

(2) Sean H y K subgrupos de isotropía de G. Decimos que el tipo de órbita (H) es menor o igual que el tipo de órbita (K), denotado por $(H) \preceq (H)$, si K es conjugado de un subgrupo de H.

(3) Denotamos por $\mathcal{O}(G, M)$ al conjunto de tipos de órbita.

La relación de la definición anterior, constituye un orden parcial en $\mathcal{O}(G, M)$. Para ver esto, sean $(H), (K), (L) \in \mathcal{O}(G, M)$. Entonces, como $H = eHe^{-1}$, se tiene que $(H) \preceq (H)$, así que la relación es reflexiva. Ahora, si $(H) \preceq (K)$ y $(K) \preceq (H)$, entonces cualquier órbita que tenga tipo (H), tiene tipo (K) y viceversa. Se sigue que $(H) = (K)$. Por último, supongamos que $(H) \preceq (K)$ y $(K) \preceq (L)$. Entonces para algunos $a, b \in G$ y subgrupos $K' \leq K$, $H' \leq H$ se tiene que $K = aH'a^{-1}$ y $L = bK'b^{-1}$. Se sigue que $L \subseteq baH'a^{-1}b^{-1}$. Luego, existe $H'' \leq H'$ tal que $L = baH''a^{-1}b^{-1}$. Así, $(H) \preceq (L)$.

Hecha esta observación, resulta natural la siguiente definición:

Definición 1.1.10. *Una órbita $G(p)$ se llama principal, si existe una vecindad de p abierta, $U \subset M$, tal que para todo $q \in U$, se tiene que $(G_q) \preceq (G_p)$. En este caso se dice que G_p es un subgrupo de isotropía principal.*

En la siguiente proposición recolectamos las relaciones básicas que hay entre las rebanadas y las órbitas principales.

Proposición 1.1.11. *Sea (G, M) un grupo de transformaciones y S una rebanada en p y denotemos $H = G_p$.*

(1) Para cada $q \in S$, $G_q \subset G_p$ y $H_q = G_q$. Más aún, para cada $u \in G(S)$, $(G_p) \preceq (G_u)$.

(2) Si $G(p)$ es principal, entonces para cada $q \in S$, $G_q = G_p$.

(3) Si $q_1, q_2 \in S$, entonces las órbitas $H(q_1)$ y $H(q_2)$ son del mismo tipo si y sólo si las órbitas $G(q_1)$ y $G(q_2)$ son del mismo tipo.

(4) $S/G_p = G(S)/G$ que es una vecindad abierta de $G(p)$ en el espacio de órbitas M/G.

Demostración: Sea $g \in G_q$. Entonces $p = r(q) = r(gq) = gr(q) = gp$, donde r es la retracción dada por la rebanada S. Entonces como g fue arbitrario, $G_q \subset G_p$. Entonces cualquier órbita en $G(S)$ es de tipo al menos (G_p). Ahora, si consideramos la acción de G restringida a H, sobre S, tenemos que $H_q = G_q \cap H$, así que claramente $G_q = H_q$. De este modo, los tipos de órbitas de $(G, G(S))$ están en correspondencia con los de (G_p, S). Entonces, como M/G tiene la topología cociente, $G(S)/G$ es abierto y la función $G(S)/G \to S/G_p$ dada por $G(q) \mapsto H(q)$ es un homeomorfismo.

□

1.2. Los Teoremas de la Rebanada y de la Órbita Principal

En la sección anterior desarrollamos herramientas que se consumarán en la prueba de dos teoremas fundamentales: El teorema de la rebanada y el de la órbita principal. Ambos son muy fáciles de formular. El primero asegura la existencia de rebanadas en cada punto para acciones propias y el segundo, que existen órbitas principales. El teorema de la rebanada tendrá como corolario que M/G tiene estructura de variedad diferenciable. Comenzaremos por probar el Teorema de la rebanada, para lo cual necesitaremos un par de proposiciones. La primera concierne a las *rebanadas cercanas*, (en inglés *near slice*) que definiremos a continuación. Paul Mostert mostró en 1952 que bajo ciertas hipótesis sobre G, estos objetos existen. Se puede probar que en el caso de las acciones propias, estos objetos existen, y la prueba depende de la existencia de una métrica para para M, G-invariante. No probaremos este resultado, pero el lector puede consultar su demostración y algunas propiedades en [most], [krupka, p.555-559] y [A-B, p.27].

Definición 1.2.1. *Supongamos que G actúa sobre M y sea $p \in M$. Denotemos por $\pi : G \to G/G_p$ a la proyección canónica. Una subvariedad M es una* *rebanada cercana en p si $p \in S$, S es G_p-invariante y existe una sección local suave $\sigma : U \to G$, (es decir, una función tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$ con $U \subset G/G_p$ abierto y $G_p \in U$ tal que la función*

$$\psi : U \times S \to M$$

$$\psi(u, s) = \sigma(u)s$$

es un difeomorfismo sobre una vecindad abierta de p en M.

La existencia de secciones locales, se tiene por un argumento de haces fibrados. Como $G_p \subset G$ es cerrado si la acción es propia, entonces $\pi : G \to G/G_p$ es un haz fibrado con fibra G_p. Pero G_p actúa sobre sí mismo por traslaciones, por lo que G es un G_p-haz principal y por tanto tiene secciones locales. Para una introducción a la teoría de haces fibrados, el lector puede consultar [huse] o [A-B, cap. 2].

Lema 1.2.2. *Supongamos que G actúa propiamente sobre M. Sean $p \in M$ y $U' \subset G/G_p$ una vecindad abierta de G_p. Entonces existe una vecindad abierta V de p en M, tal que $(V, V) \subset U$ donde $U = \pi^{-1}(U')$ y $\pi : G \to G/G_p$ es la proyección canónica.*

Demostración: Considremos la función $\tilde{\mu}_p$ que definimos en 1.1.6. Vimos en dicha proposición que esta función es cerrada, entonces $\tilde{\mu}_p(G \setminus U) = (G \setminus U)(p)$ es cerrado en $G(p)$. Como $G(p)$ es cerrada en M, entonces $(G \setminus U)(p)$ es cerrado en M. Entonces podemos encontrar una vecindad abierta W de p, de cerradura compacta de modo que $W \cap (G \setminus U)(p) = \emptyset$. Por el lema 1.1.5, el conjunto $(\overline{W}, \overline{W})$ es compacto en G. Ahora, por el argumento dado en la demostración del lema mencionado, el conjunto $K = \{g \in G \setminus U \mid g\overline{W} \cap \overline{W} \neq \emptyset\}$ es cerrado en G y está contenido en $(\overline{W}, \overline{W})$. Por tanto es un compacto de $G \setminus U$. Ahora, sea $k \in K$; entonces $kp \in (G \setminus U)(p)$ y por tanto kp es un elemento del abierto $M \setminus \overline{W}$. Por la continuidad de la acción, podemos encontrar vecindades Q_k en G y V_k en M, de k y p respectivamente, de tal forma que $Q_k(V_k) \subset M \setminus \overline{W}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que V_k son suficientemente pequeñas para que $V_k \subset W$. Tenemos de esta forma una cubierta abierta $\{Q_k\}_{k \in K}$ de K, y por lo tanto podemos extraer una subcubierta finita $\{Q_i\}_{i=1}^n$. Definimos entonces $V = \bigcap_{i=1}^n V_i \subset W$ y afirmamos que ésta es la vecindad que buscamos. Para demostrarlo, consideremos $g \in (V, V)$. Entonces $gV \cap V \neq \emptyset$. Se sigue que $gW \cap W \neq \emptyset$. Luego, $g \in U \cup K$. Pero de hecho, $g \notin K$, ya que si se tuviera lo contrario, entonces tendríamos que $g \in Q_i$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces $gV \subset Q_i(V_i) \subset M \setminus W \subset M \setminus V$, así que $gV \cap V = \emptyset$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $(V, V) \subset U$.

$\square$

Ya estamos en posición de demostrar los teoremas principales de esta sección:

Teorema 1.2.3 (de la Rebanada). *Supongamos que G actúa propiamente sobre M. Entonces para cada $p \in M$ existe una rebanada S por p.*

Demostración: Sea S^* una rebanada cercana en p y sea $\sigma : U \to G$ la función de la definición 1.2.1. Supongamos que $\sigma(G_p) = e$ y sea $U' = \pi^{-1}(U) \subset G$ donde $\pi : G \to G/G_p$ es la función cociente. Por el lema anterior, existe V vecindad abierta tal que $(V, V) \subset U'$ y como G_p es compacto, V es G_p-invariante. Definimos $S = S^* \cap V$ que es G_p-invariante gracias a que S^* es G_p-invariante por definición. Queremos mostrar que S es una rebanada en p. Primero construiremos la vecindad invariante. Primero notemos lo siguiente: Para cada $aG_p \in U$, $\sigma(aG_p) = g \in G$ para algún g. Como σ es sección, $\pi(g) = gG_p = aG_p$ y por tanto, $g = ab$ para algún $b \in G_p$, es decir, $\sigma(aG_p) = ab$.
Consideremos $U'(S) = \{u's \mid u' \in U', s \in S\}$. Pero si $u' \in U'$, entonces $u'G_p \in U$ y por tanto $\sigma(u'G_p) = u'b$ para algún $b \in G_p$. Entonces $u' = \sigma(u'G_p)b^{-1}$. Luego, como S es G_p-invariante, $b^{-1}s \in S$ para toda $s \in S$. Entonces podemos escribir

$$U'(S) = \{\sigma(u)s \mid u \in U, s \in S\}.$$

Por otra parte, como U' es abierta en G y S es abierta en S^*, entonces $U'(S)$ es abierta en M. Se sigue que $G(S) = G(U'(S))$ es una vecindad abierta G-invariante de $G(p)$ en M. Resta construir una retracción G-equivariante, r, de tal forma que $S = r^{-1}(p)$. Definimos

$$r : G(S) \to G(p)$$

$$r(as) = ax.$$

Inmediatamente observamos que $S = r^{-1}(p)$ en efecto se cumple, pues $r^{-1}(p) = \{as \in G(S) \mid a \in G_p\}$ y S es G_p-invariante. Para demostrar las propiedades que faltan de r, primero demostremos que $(S, S) = G_p$. Claramente $G_p \subset (S, S)$. Para la otra contención, sea $a \in (S, S)$. Entonces $aS \cap S \neq \emptyset$, pero entonces $a \in U'$ ya que $S \subset V$, $(S, S) \subset (V, V) \subset U'$. Tenemos entonces que $aG_p \in U$. Consideremos $s_1, s_2 \in S$ de tal forma que $as_1 = s_2$ y supongamos que $\sigma(aG_p) = ab$ con $b \in G_p$. Entonces

$$\sigma(aG_p)b^{-1}s_1 = abb^{-1}s_1 = as_1 = s_2 = es_2 = \sigma(G_p)s_2.$$

Reescribiendo esto en términos de ψ de la definición 1.2.1, tenemos que

$$\psi(aG_p, b^{-1}s_1) = \psi(G_p, s_2).$$

Pero ψ es un difeomorfismo, en particular es inyectiva, y entonces $aG_p = G_p$. Entonces $a \in G_p$ y como a fue arbitrario, se sigue que $(S, S) \subset G_p$. Ya con esta fórmula en mano podemos proceder: Veamos que r está bien definida. Sean $a_1, a_2 \in G$ y $s_1, s_2 \in S$ tales que $a_1 s_1 = a_2 s_2$. Entonces $a_2^{-1} a_1 s_1 = s_2$ y entonces $a_2^{-1} a_1 S \cap S \neq \emptyset$. Por tanto $a_2^{-1} a_1 \in G_p$. Se sigue que $a_2^{-1} a_1 p = p$, esto es, $r(a_2 s_1) = r(a_1 s_1)$. Por último, es claro que r es suave y por definición, es G-equivariante.

□

Ya podemos probar el importante resultado que hemos venido anunciando a lo largo de la sección anterior:

Corolario 1.2.4. *Sea (G, M) un grupo de transformaciones de manera que G actúa propiamente y tal que sólo hay un tipo de órbita. Entonces M/G es una variedad diferenciable de modo que $\pi : M \to M/G$ es suave.*

Demostración: Como sólo hay un tipo de órbita, éste debe ser principal. Entonces por el inciso (2) de la proposición 1.1.11, G_p fija a S y por el inciso (4) de la misma proposición se tiene que si S es una rebanada por p, entonces $S \cong G(S)/G$. Luego, para cada $p \in M$, como $G(S)/G$ es una vecindad abierta de $G(p)$ y S tiene estructura de subvariedad de M, podemos introducir un atlas diferenciable en M/G y como este atlas está dado mediante π, ésta resulta suave.

□

Teorema 1.2.5 (de la Órbita Principal)**.** *Supongamos que G actúa propiamente sobre M. Entonces existen órbitas principales.*

Demostración: Probamos en la proposición 1.1.6 que en el caso de las acciones propias, los subgrupos de isotropía son compactos y por lo tanto el número de componentes conexas de estos, debe de ser finito. Elijamos H subgrupo de isotropía de manera que su dimensión y el número de sus componentes conexas sean mínimos. Afirmamos que (H) es principal. Para ver esto, consideremos $p \in M$ de manera que $H = G_p$, y sea S_p una rebanada por p. Consideremos el abierto $U = G(S_p)$. Entonces por la proposición 1.1.11, para cada $q \in U$, se tiene que $(H) \preceq (G_q)$, pero por la definición de U, existe $s \in S_p$ tal que $q = gs$ para algún g. Entonces $(G_q) = (G_s)$. Nuevamente por la proposición 1.1.11, $G_s \subset H$, pero por la elección de H se sigue que $G_s = H$. Entonces hemos encontrado una vecindad de H, a saber

U, tal que todas las órbitas son del mismo tipo. entonces por el inciso (2) de la proposición mencionada, (H) es principal.

$\square$

Finalizamos la sección con la definición de la *representación isotrópica*. Sea (G, M, μ) un grupo de transformaciones. Definimos un homomorfismo de grupos de Lie, $\rho_p : G_p \to Gl(T_pM)$ de la siguiente forma. Notemos que G_p actúa linealmente sobre T_pM considerando las diferenciales $d\mu_a|_p : T_pM \to T_pM$ donde $\mu_a(x) = \mu(a, x)$ y $a \in G_p$. Entonces definimos $\rho_p(a) = d\mu_a|_p$.

Capítulo 2

Acciones por Isometrías

En este capítulo introducimos el concepto de acción riemanniana y algunas propiedades básicas; Como ilustración del gran alcance de este tipo de grupos de transformaciones, bosquejaremos el celebrado teorema de 1989 de Wu-Yi Hsiang y Bruce Kleiner que clasifica las variedades de dimensión 4 que admiten un cierto tipo de acción isométrica.

2.1. Definición y Propiedades Básicas

Partiremos de los hechos bien conocidos de que si (M, g) es una variedad riemanniana completa, (conexa), entonces el grupo de isometrías $\mathrm{Iso}(M, g)$ de M es un grupo de Lie (con la topología compacto-abierta). Más aún, si M es compacta, entonces $\mathrm{Iso}(M, g)$ es compacto. Este grupo actúa naturalmente sobre M

$$\mathrm{Iso}(M, g) \times M \to M$$
$$(\varphi, p) \longmapsto \varphi(p).$$

De aquí en adelante supondremos M con las características mencionadas.

Definición 2.1.1. *Sea (G, M) un grupo de transformaciones, donde (M, g) es una variedad riemanniana. Decimos que la acción de G sobre M es riemanniana o que G actúa por isometrías sobre M, si G es (isomorfo a) un subgrupo cerrado de* $\mathrm{Iso}(M, g)$ *y la acción es la restricción de la acción natural de* $\mathrm{Iso}(M, g)$ *sobre M.*

Observe el lector que al pedir que G sea cerrado, adquiere estructura de subgrupo de Lie de $\mathrm{Iso}(M, g)$. Veremos que de hecho las acciones por isometrías son todas propias por lo que la herramienta desarrollada en el capítulo anterior se aplica sin problemas:

Proposición 2.1.2. *Supongamos que G actúa sobre (M, g) por isometrías. Entonces la acción es propia.*

Demostración:
Necesitamos el siguiente lema. Su demostración es sencilla; el lector puede consultarla en [K-N, p. 47].

Lema 2.1.3. *Dada una sucesión de isometrías $\{a_n\}$ en $\mathrm{Iso}(M, g)$, si existe $p \in M$ tal que $\{a_n(p)\}$ converge, entonces existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ que converge uniformemente en subconjuntos compactos a una isometría a.*

Usaremos el criterio dado por el lema 1.1.5. Sea $\{a_n p_n\}$ y $\{p_n\}$ sucesiones convergentes donde $a_n \in G$ y $p_n \in M$. Digamos que $a_n p_n \to q$ y $p_n \to p$. Por la desigualdad del triángulo, $d(a_n p, q) \leq d(a_n p, a_n p_n) + d(a_n p_n, q)$, donde d es la distancia intrínseca de M inducida por la métrica riemanniana. Como a_n es isometría y $\{p_n\}$ converge, la desigualdad anterior implica que $a_n p \to q$. ahora, por el lema 2.1.3, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ uniformemente convergente en compactos que converge a una isometría $a \in \mathrm{Iso}(M, g)$. Como G es cerrado, esto implica que $a \in G$ y por tanto la acción es propia.

$\square$

Podemos mostrar una especie de proposición inversa en el siguiente sentido:

Proposición 2.1.4. *Sea $\mu : G \times M \to M$ una acción propia. Entonces existe una métrica riemanniana G-invariante para M de tal modo que $\mu^G = \{\mu^g \mid g \in G\}$, es un subgrupo cerrado de $\mathrm{Iso}(M)$, donde $\mu^g : M \to M$ es la función inducida por la acción al fijar g en la primera coordenada.*

Demostración:
M/G es de Hausdorff, localmente compacto y segundo numerable, gracias a que M/G tiene la topología cociente inducida por $\pi : M \to M/G$. Entonces es paracompacto. Entonces podemos tomar una cubierta abierta localmente finita de la forma $\{\pi(S_{p_\alpha})\}_{\alpha \in A}$ donde las S_{p_α} son las rebanadas del teorema de la rebanada para cada p. Los $\pi(S_p)$ son abiertos pues $\pi^{-1} \circ \pi(S_p) = \bigcup_{q \in S_p} G(q)$ y como vimos en la observación previa a la proposición 1.1.8 esta unión es precisamente la vecindad abierta de la definición de rebanda. Definimos $U_\alpha = \pi^{-1}(\pi(S_{p_\alpha}))$. Ahora, invocamos el siguiente resultado que el lector puede consultar en [palais].

Lema 2.1.5. *Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta localmente finita que consiste de abiertos G-invariantes. Entonces existe una partición de la unidad $\{f_\alpha\}$ subordinada a dicha cubierta de tal forma que cada f_α es G-invariante.*

Consideramos entonces una partición de la unidad G-invariante $\{f_\alpha\}$ subordinada a $\{U_\alpha\}$. Ahora, definamos en $TM|_{S_{p_\alpha}}$,

$$\langle X, Y\rangle_p^\alpha = \int_{G_{p_\alpha}} \beta(d\mu^g(X), d\mu^g(Y))_{gp} \ \ \omega$$

donde ω es una forma de volumen invariante derecha en G_{p_α} y β es cualquier métrica riemanniana sobre M. El producto definido es G_{p_α}-invariante pues componer μ^g con μ^h es μ^{gh} para cada $g, h \in G_{p_\alpha}$. Entonces definimos sobre cada U_α la métrica G-invariante dada por

$$\langle d\mu^g(X), d\mu^g(Y)\rangle_{gp}^\alpha = \langle X, Y\rangle_p^\alpha$$

que está bien definida pues el producto del lado derecho es G_{p_α}-invariante. Por último, definimos la métrica en G-invariante en M como

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha \langle X, Y\rangle^\alpha .$$

Resta verificar que μ^G es un subgrupo cerrado de $\mathrm{Iso}(M)$. Consideremos una sucesión $\{\mu^{g_n}\}$ convergente, digamos a una isometría $f : M \to M$ y la sucesión constante p. Entonces tenemos que $\lim \mu(g_n, p) = f(p)$, pero entonces como la acción es propia, existe una subsucesión $\{g_{n_i}\}$ que converge a algún $g \in G$. Pero entonces $\{\mu^{g_{n_i}}\}$ converge a μ^g, luego, $\mu^g = f \in G$.

$\square$

Una acción se llama *efectiva* si el conjunto $\{g \in G \mid gp = p \text{ para todo } p \in M\}$ sólo tiene como único elemento al neutro de G. Podemos interpretar esta definición de otro modo. Consideremos el morfismo de grupos $\varphi : G \to \mathrm{Dif}(M)$ de G en el grupo de difeomorfismos de M, dado por $\varphi(g) = \mu^g$. Si la acción es efectiva, entonces dicho morfismo es inyectivo. Entonces la proposición anterior nos dice que si μ es efectiva y propia, podemos identificar G con un subgrupo cerrado de $\mathrm{Iso}(M)$ para alguna métrica en particular. Más aún, siempre podemos suponer que la acción es efectiva, mediante el siguiente argumento. Notamos que $\ker\varphi = \bigcap_{p\in M} G_p$. Entonces la condición de efectividad quiere decir que $\ker\varphi = \emptyset$. Observamos entonces que dada cualquier acción, $H = \ker\varphi$ es un subgrupo cerrado de G y por lo tanto un subgrupo de Lie de G que de hecho, claramente es normal. Entonces podemos considerar la acción inducida en $\tilde{G} = G/H$, que ya es efectiva. En vista de esto, hablar de acciones efectivas y propias es esencialmente lo mismo que hablar de acciones isométricas.

Continuando con nuestra exposición, desviamos nuestra atención al tipo de órbitas. Mostraremos una propiedad muy importante de las órbitas principales en las acciones isométricas; Tomemos $G(p)$ una órbita de una acción por isometrías $G \times M \to M$. Consideremos el haz normal sobre $G(p)$ dado por $NG_p = \amalg_{p \in G(p)} (T_pG(p))^{\perp}$. Sea S una rebanada por p y U la vecindad equivariante de la definición; entonces podemos considerar $r > 0$ tal que $S = \exp_p(B_r(0) \cap N_pG(p)) \subset U$ y tal que $\exp_p : B_r(0) \to M$ es un difeomorfismo. Entonces exp es un difeomorfismo sobre $\cup_{p \in G(p)}(B_r(0) \cap N_pG(p))$. Entonces podemos identificar T_pS con $(T_pG(p))^{\perp}$ y tenemos la descomposición $T_pM \cong T_pS \oplus T_pG(p)$.

Definición 2.1.6. *Definimos la representación normal de la rebanada (o simplemente, la representación de la rebanada) S como la restricción de la representación isotrópica a T_pS.*

Entonces tenemos la siguiente caracterización,

Proposición 2.1.7. *Supongamos que G actúa por isometrías sobre M y sea $p \in M$. Entonces $G(p)$ es principal si y sólo si la representación de la rebanada en p es trivial, i.e., si $a \in G_p$ implica que $da_p(v) = v$ para todo $v \in T_pS$.*

Demostración: Si $q \in S$ entonces $G_q \subset G_p$ y por tanto, $G(p)$ es principal si y sólo si $G_p = G_q$ si y sólo si G_p fija a S. Ahora, notemos que si G_p fija a T_pS, como las isometrías quedan totalmente determinadas por su valor en un punto y el valor de sus diferenciales en dicho punto, tenemos que G_p fija a S. Entonces por la cadena de equivalencias anterior tenemos que $G(p)$ es principal si y sólo si G_p fija a T_pS, es decir si la representación de S es trivial. □

En el estudio de las G-variedades riemannianas, resulta ser de gran importancia el conjunto de puntos fijos de un subconjunto H de G (no necesariamente un subgrupo de Lie), que recordamos se define como

$$\mathrm{Fix}(H) = \{p \in M \mid gp = p \text{ para todo } g \in H\}$$

Dicho conjunto nos proporciona información sobre la geometría de M como veremos a continuación en las dos proposiciones siguientes. La primera de ellas nos dice que Fix está conformado por subvariedades totalmente geodésicas de M. Para la segunda, tomaremos $G = \mathbb{S}^1$, y la informacíón del conjunto de puntos fijos, resulta en información geométrica (o más estrictamente, topológica) de M.

Proposición 2.1.8. *Sea M una variedad riemanniana y K cualquier subconjunto de* $\mathrm{Iso}(M)$*. Entonces las componentes conexas de* $\mathrm{Fix}(K)$ *son subvariedades cerradas totalmente geodésicas de M.*

Demostración: El resultado es trivial si $\mathrm{Fix}(K) = \emptyset$. Supongamos entonces que tenemos $p \in \mathrm{Fix}(K)$. Consideremos V el subespacio de T_pM que consta de todos los vectores que se quedan fijos por (las diferenciales de) los elementos de K. Consideremos una vecindad normal, geodésicamente convexa U de p y sea U^* una vecindad del origen en T_pM de tal forma que $\exp_p : U^* \to U$ es un difeomorfismo. Ahora, afirmamos que $U \cap \mathrm{Fix}(K) = \exp_p(U^* \cap V)$. En efecto, si $f \in$ K es tal que $f(p) = p$ y $df_p(v) = v$ entonces como las isometrías mandan geodésicas en geodésicas, f fija a toda la geodésica que inicia en p y tiene velocidad v. Por tanto $U \cap \mathrm{Fix}(K) \subseteq \exp_p(U^* \cap V)$. Por otro lado, supongamos que hay un punto $q \in U \cap F$ de tal manera que la única geodésica minimizante γ que une a p con q, no está contenida en $\mathrm{Fix}(K)$. Entonces existe alguna isometría en $f \in K$ tal que $f(\gamma(t)) \neq \gamma(t)$ para todo t en algún intervalo abierto contenido en el dominio de γ. Esto contradice la unicidad de las geodésicas minimizantes en U. Esto muestra que $U \cap F$ es una subvariedad de M. Entonces $\mathrm{Fix}(K)$ está compuesto por subvariedades de M. Claramente $\mathrm{Fix}(K)$ es cerrado pues si tenemos una sucesión $\{p_n\}$ convergente en tal conjunto, digamos a p, entonces para cada isometría f de K, se tiene por la continuidad que $\{f(p_n)\}$ es convergente y debe converger a f(p), pero por la unicidad del límite se tiene que $f(p) = p$. Luego $p \in \mathrm{Fix}(K)$. Solamente resta ver que las componentes son totalmente geodésicas, pero esto es claro: Sean dos puntos p y q de $\mathrm{Fix}(K)$ suficientemente cercanos para que exista una única geodésica minimizante que los una; tenemos que todos los puntos entre p y q también serán fijados por los elementos de K.

□

Proposición 2.1.9. *Sea M una variedad riemanniana sobre la cual actúa $\mathbb{S}^1$ por isometrías. Entonces la característica de Euler del conjunto de puntos fijos de $\mathbb{S}^1$ es igual a la característica de Euler de M.*

Demostración: Denotemos por $\{F_i\}_{i \in J}$ a la familia de componentes conexas de $\mathrm{Fix}(\mathbb{S}^1)$. Son hechos básicos de la teoría de transformaciones que $\mathrm{Fix}(\mathbb{S}^1)$ es cerrado en M y que J es finito, como puede consultar el lector en [neym]. Esto nos permite considerar dos familias, $\{U_i\}$ y $\{V_i\}$ dadas de la siguiente manera:
Definimos $U_i = \bigcup_{p \in F_i} B_{\epsilon_i}(p)$, las vecindades tubulares de radio ϵ_i de F_i, donde $\epsilon_i > 0$ son tales que las U_i son disjuntas dos a dos. Entonces, definimos

$V_i = \bigcup_{p\in F_i} B_{\epsilon_i/2}(p)$, de modo que $\overline{V_i} \subset U_i$. Entonces consideramos,

$$U = \bigcup_{i\in J} U_i, \quad V = \bigcup_{i\in J} V_i$$

Observamos, de inmediato que el complemento de ambos conjuntos, no contiene puntos fijos de $\mathbb{S}^1$, lo cual será útil más adelante. Queremos escribir la característica de Euler de M, en términos de la de V, lo cual haremos mediante un argumento de homología. Definamos los conjuntos

$$K = \overline{M \setminus U} \quad L = \overline{M \setminus V}$$

Entonces tenemos que $\partial U = U \cap K$ y $\partial V = V \cap L$. Entonces si consideramos la sucesión en homología, de la pareja (M, L),

$$\ldots \to H_q(L;\mathbb{Z}) \to H_q(M;\mathbb{Z}) \to H_q(M, L;\mathbb{Z}) \to \ldots$$

se sigue por inducción, utilizando la exactitud de la sucesión en cada nivel, que

$$\sum_{q\geq 0}(-1)^q \mathrm{ran} H_q(L;\mathbb{Z}) - \sum_{q\geq 0}(-1)^q \mathrm{ran} H_q(M;\mathbb{Z}) + \sum_{q\geq 0}(-1)^q \mathrm{ran} H_q(M, L;\mathbb{Z}) = 0$$

Se sigue que $\chi(L) - \chi(M) + \chi(M, L) = 0$. De manera análoga, obtenemos que $\chi(\partial V) - \chi(V) + \chi(V, \partial V) = 0$. Notamos ahora, que de la definición de U_i y V_i, se sigue que los primeros, son retractos (por deformación) de los segundos para cada i, de donde U es retracto de V. Por otro lado, definimos los conjuntos

$$W = K \setminus \partial U \quad R = L \setminus \partial V.$$

Entonces, es claro que $(V, \partial V) = (M \setminus R, L \setminus R)$ es retracto de $(M \setminus W, L \setminus W)$ y que $\overline{R} \subset$ L y por tanto $(V, \partial V) \hookrightarrow (M, L)$ es una escisión. Se sigue que $\chi(V, \partial V) = \chi(M, L)$.

Por otra parte, para cada $g \in \mathbb{S}^1$, la isometría inducida, $\theta_g : M \to M$ coincide con la identidad fuera de L y ∂V (y de hecho fuera de cualquier vecindad abierta que contenga a $\mathrm{Fix}(\mathbb{S}^1)$). Entonces el número de Lefschetz de la restricción a L es 0. Se puede ver que θ_g es homotópica a id_L y por el Teorema del punto fijo de Lefschetz [green, p.286] se tiene que $\chi(L) = \chi(\partial V) = 0$. Conlcuimos que $\chi(M) = \chi(V)$, pero V es un retracto de $\mathrm{Fix}(\mathbb{S}^1)$ y por tanto, $\chi(M) = \chi(\mathrm{Fix}(\mathbb{S}^1))$.

$\square$

Para finalizar esta sección bosquejaremos el teorema de Hsiang-Kliener que en esencia resulta de hacer un análisis de la geometría del espacio de órbitas $M/\mathbb{S}^1$ y de combinar el resultado anterior con el resultado siguiente que Freedman demostró en [freed], en sus teoremas 1.6 y 1.8.y que enunciamos a continuación.

Teorema 2.1.10 (Freedman)**.** *Sea M una variedad diferenciable de dimensión 4. Si M es del mismo tipo de homotopía que $\mathbb{S}^4$ o $\mathbb{C}P^2$, entonces es homeomorfa a alguna de dichas variedades.*

Teorema 2.1.11 (Hsiang-Kleiner, 1989)**.** *Sea M una variedad diferenciable de dimensión 4, orientable y compacta de curvatura seccional positiva. Supóngase que existe una acción por isometrías de $\mathbb{S}^1$ en M. Entonces M es homeomorfa a $\mathbb{S}^4$ o $\mathbb{C}P^2$.*

Demostración:

Calculemos la homología de M. Por el teorema de Synge [carmo, p. 206], tenemos que $\pi_1(M) = 0$, lo cual implica que $H_1(M;\mathbb{Z}) = 0$, pues por el Teorema de Hurewicz [green, p. 63], $H_1(M)$ es la abelianización de $\pi_1(M)$. Para calcular el segundo grupo de homología, consideremos la sucesión exacta dada por el morfismo de Kronecker

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_0(M;\mathbb{Z});\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_2(M;\mathbb{Z});\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Ahora, como $\mathbb{Z}$ es un dominio de ideales principales, tenemos que $H_0(M)$ es libre y por lo tanto, proyectivo. Luego $\mathrm{Ext}(H_0(M;\mathbb{Z});\mathbb{Z}) = 0$. Se sigue que

$$H^2(M;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_2(M;\mathbb{Z});\mathbb{Z}).$$

Por dualidad de Poincaré, tenemos que $H^2(M;\mathbb{Z}) \cong H_2(M;\mathbb{Z})$ y por el isomorfismo anterior, y el hecho de que $H_2(M;\mathbb{Z})$ es abeliano, se tiene que es libre. Entonces para alguna $r \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$H_2(M;\mathbb{Z}) \cong \oplus_1^r \mathbb{Z}$$

Por un argumento similar, usando que $\mathrm{Hom}(H_1(M;\mathbb{Z});\mathbb{Z}) = 0$ se tiene que $H_3(M;\mathbb{Z}) = 0$. Por último, como M es conectable por trayectorias, $H_0(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Ahora, podemos calcular el número total de Betti de M, $b(M;\mathbb{Z}) = 2 + r$ y por lo tanto,

$$2 \leq \chi(M) = 2 + r < \infty$$

Entonces por el teorema de Freedman y la proposición 2.1.9 basta demostrar que $\chi(\mathrm{Fix}(\mathbb{S}^1)) \leq 3$. Ahora si escribimos $\mathrm{Fix}(\mathbb{S}^1) = \coprod_{i\in J} F_i$ como unión de sus componentes conexas, por la aditividad de la homología singular, tenemos que

$$H_q(\mathrm{Fix}(\mathbb{S}^1);\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i\in J} H_q(F_i;\mathbb{Z})$$

Ahora, se puede ver que la dimensión de cada componente conexa necesariamente es par y por lo tanto es 0 ó 2. Afirmamos que hay a lo más una componente conexa de dimensión 2, pues de haber más, tendríamos una contradicción con el teorema de Frankel, es decir, tendríamos dos subvariedades totalmente geodésicas disjuntas de manera que la suma de sus dimensiones es igual a la dimensión de M.

Entonces dividimos la prueba en dos casos: Aquel en el que $Fix(\mathbb{S}^1)$ consta de puntos aislados, y aquel en el que contiene una componente de dimensión 2 y algunos puntos aislados. Observamos que en el primer caso, hay $\chi(M)$ puntos aislados y en el segundo $\chi(M) - 2$. Se puede ver mediante argumentos de comparación dentro del contexto de espacios de Alexandrov (en particular el teorema de Toponogov [shio, p. 42]) que si se supone que la característica de Euler es mayor que 3 en ambos casos se llega a una contradicción.

□

2.2. Desarrollos Posteriores

En la sección anterior vimos cómo la herramienta que desarrollamos a lo largo de este trabajo puede servir para descubrir ciertos aspectos clave de la geometría o topología de las variedades riemannianas. El teorema de Hsiang-Kleiner por ejemplo, conluye hechos geométricos a partir de la existencia de una acción riemanniana con grupo de Lie $\mathbb{S}^1$. En el desarrollo de este tipo de teoremas, se tiene la noción general de que entre más grande sea el grupo de Lie que actúa, más simetría tiene la variedad. Por ejemplo, en los espacios euclidianos se puede analizar los polígonos de la siguiente manera: Entre más vértices tiene un polígono, más fácil es aplicar una rotación o reflexión que lo deje invariante. Estás transformaciones generan un grupo que actúa sobre los vértices y abusando de la notación, sobre los polígonos mismos.

En 1981 Gromov probó el siguiente teorema

Teorema 2.2.1. *Sea M una variedad riemanniana de dimensión n completa y de curvatura seccional no negativa. Entonces el número total de Betti de M satisface que*

$$b \leq 10^{10n^4}$$

Se sabe que esta cota no es óptima y de hecho Gromov conjeturó que la mejor posible es 2^n que corresponde al número totale de Betti del toro T^n. Esto hace sospechar que los grupos de Lie T^n, (en particular $\mathbb{S}^1$), juegan un papel importante en la geometría.

En vista de este tipo de situaciones, en 1991 Grove propuso estudiar a las variedades que tuvieran mucha simetría. En este contexto, esto se puede interpretar al menos de dos maneras: Podríamos estudiar variedades con un grupo de isometrías muy grande o podríamos estudair aquellas que admitan una acción riemanniana de un toro de dimensión grande. Para finalizar enunciaremos un par de teoremas recientes, que han logrado aplicar estas ideas exitosamente, con la intención de ilustrar el alcance de este enfoque y del desarrollo avanzado de los conceptos que se trataron en este trabajo.

Definición 2.2.2. *Sea M una variedad riemanniana. Definimos el rango de simetría como* $\mathrm{symrank}(M) = \mathrm{rango}(\mathrm{Iso}(M))$.

Teorema 2.2.3 (Grove-Searle, 1994)**.** *Sea M una variedad riemanniana de dimensión n compacta y orientable, de curvatura seccional positiva. Entonces*

$$\mathrm{symrank}(M) \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

donde $[\ ]$ denota a la función mayor entero. Si se dá la igualdad, entonces M es difeomorfa a $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{C}P^{n/2}$ o a un espacio lente.

Teorema 2.2.4. *Sea M una variedad riemanniana de dimensión n con $n \geq 9$, simplemente conexa de curvatura seccional positiva. Supongamos que M admite una acción isométrica efectiva de un toro T^d con $d \geq \frac{n}{4}+1$. Entonces M es del mismo tipo de homotopía que $\mathbb{C}P^{n/2}$ o M es homeomorfa a $\mathbb{H}P^{n/4}$ o $\mathbb{S}^n$.*

Bibliografía

[A-B] Alexandrino M. M., Biliotti L., *Lectures on Isometric Actions*, XV Escola de Geometria Diferencial, IMPA, 2008.

[bred] Bredon G., *Introduction to Compact Transformation Groups.* Academic Press, New York, 1972.

[carmo] do Carmo M.P., *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.

[dieck] Dieck T., *Transformation Groups* Studies in Mathematics Vol. 8, Berlin, New York 1987.

[dgnj] Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[frank] Frankel T., *Manifolds with positive curvature*, Pacific J. Math, 11, 1961, 165-174.

[freed] Freedman M.H., *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geometry 17 (1982) no. 3, 357-453.

[green] Greenberg, Harper, *Algebraic Topology A First Course*, Addison-Wesley, 1981.

[gompf] Gompf, Stipsicz, *4-manifolds and Kirby Calculus*, AMS, Providence, 1999.

[H-K] Hsiang, Kleiner, *On the topology of positively curved 4-manifolds with symetry*, J. Differential Geometry 29 (1989), 615-621.

[huse] Husemoller D. *Fiber Bundles*, GTM 20, Springer-Verlag, New York, 1975.

[koba] Kobayashi S., *Transformation Groups in Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik 70, Springer-Verlag, New York, 1972.

[K-N] Kobayashi S., Nomizu K., *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Tracts in Pure and Applied Math. 15, Interscience, New York, 1963.

[koszul] Koszul J. L., *Sur certains groupes des transformations de Lie*, Colloque de Géométrie Différentielle, Strasbourg, 1953.

[krupka] Krupka D., *Handbook of Global Analysis*, Elsevier Science & Technology, 2009.

[most] Mostert P. S., *Local cross sections in locally compact groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 4, 645-649, 1953.

[neym] de Neymet S., *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones*, Aportaciones Matemáticas Num 23, SMM, México, 2005.

[palais] Palais R. S., *On the existence of slices for non-compact Lie groups*, Ann. of Math., 73, 295-323, 1961.

[peter] Petersen P., *Riemannian Geometry*, Graduate Texts In Math. 171, Springer, New York, 2006.

[shio] Shiohama K., *An introduction to the geometry of Alexandrov spaces*, Proc. Workshops in Pure Math, Daewoo, 12, part 3 (1992), 101-178.

[warn] Warner F., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, GTM 94, Springer, New York, 1983.