UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN.

“TEMAS SELECTOS DE MECÁNICA DE MATERIALES”

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A:

MARCOS MOLINA ELVIRA

ASESOR: ING. PASCUAL GARCÍA CUEVAS

MÉXICO D.F. 2011

DEDICATORIA:

A MI MADRE (MARÍA DE LOS ÁNGELES ELVIRA CELEDÓN).

POR APOYARME DURANTE TODA MI TRAYECTORIA ESCOLAR, DARME UNA FORMACIÓN EDUCATIVA MUY SOLIDA Y ANIMARME A NO CONFORMARME CON POCO Y DECIRME QUE SIEMPRE DE MAS DE MI.

A MIS ABUELOS MATERNOS (IGNACIO ELVIRA SUAREZ Y SOCORRO CELEDÓN AGUILAR):

GRACIAS POR EL APOYO INCONDICIONAL Y AL ANIMARME A ESTUDIAR MI LICENCIATURA.

INGENIERO PASCUAL GARCÍA CUEVAS:

POR DARME LA FORMACIÓN EN EL ÁREA DE ESTRUCTURAS, CABE DECIR QUE SOBRE ESTA RAMA HE APRENDIDO TODO DE EL, POR SU CONFIANZA HACIA MI Y POR EL GRAN APOYO Y AMISTAD QUE SIEMPRE ME BRINDA.

INGENIERO RICARDO HERAS CRUZ:

LE AGRADEZCO SU AMISTAD BRINDADA LA FORMACIÓN QUE ME DIO SOBRE EL ÁREA DE ESTRUCTURAS Y TODOS SUS GRANDIOSOS CONSEJOS QUE ME HA DADO.

M. en I. GILBERTO GONZALES GARCÍA SANTAMARÍA:

POR SU APOYO Y ENORME CONFIANZA QUE ME HA TENIDO A LO LARGO DE LA CARRERA, POR BRINDARME LA GRAN OPORTUNIDAD DE FORMAR PARTE A LA DOCENCIA DENTRO DE ESTA GRANDIOSA FACULTAD DE LA UNAM.

M. en I. MARIO SOSA RODRÍGUEZ.

POR TODO EL APOYO Y AMISTAD BRINDADA DESDE EL INICIO DE MI CARRERA, SOBRE TODO LA CONFIANZA Y SU RECOMENDACIÓN PARA SER DOCENTE DENTRO DE ESTA CASA DE ESTUDIOS.

INGENIERO JOSÉ ANTONIO DIMAS CHORA.

GRACIAS POR SU AMISTAD, POR TODOS SUS CONSEJOS QUE ME HAN SERVIDO PARA MI FORMACIÓN COMO INGENIERO CIVIL.

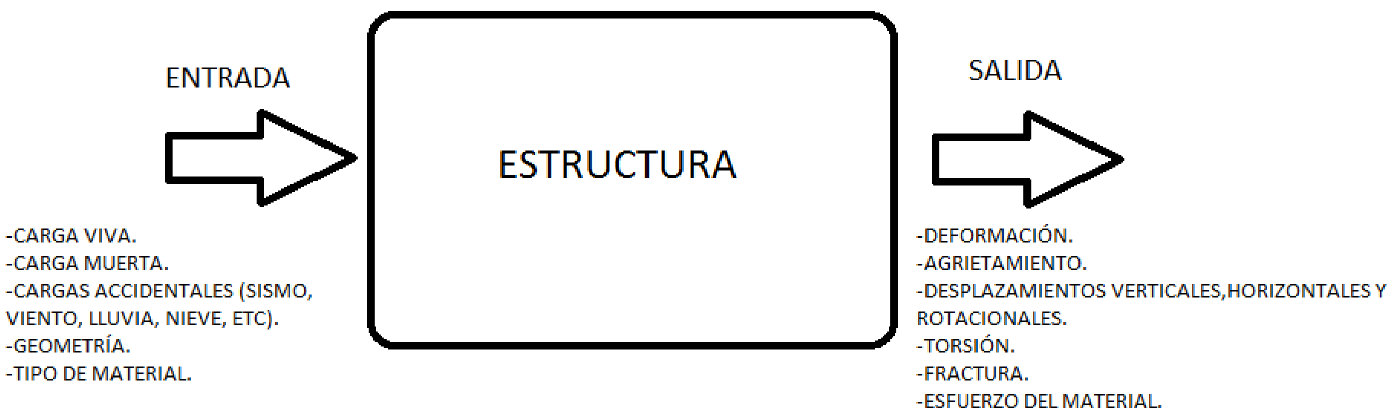
Í N D I C E:

1. INTRODUCCIÓN.

LA MECÁNICA DE MATERIALES INVESTIGA EL EFECTO DE LAS FUERZAS APLICADAS SOBRE LOS CUERPOS Y LAS PROPIEDADES FÍSICAS DE LOS MATERIALES.

INTERVIENE AMPLIAMENTE EN TODAS LAS RAMAS DE LA INGENIERÍA, DONDE TIENE UN GRAN NUMERO DE APLICACIONES.

POR LO TANTO PODEMOS DECIR QUE LA MECÁNICA DE MATERIALES ESTUDIA LA RELACIÓN EXISTENTE ENTRE CARGAS QUE SE APLICAN Y SU COMPORTAMIENTO BAJO LA ACCIÓN DE ESTAS.



DISEÑO ESTRUCTURAL:

EL DISEÑO ESTRUCTURAL ES UN PROCESOS CREATIVO MEDIANTE EL CUAL SE DEFINE LAS CARACTERÍSTICAS DE UN SISTEMA DE MANERA QUE CUMPLA EN FORMA OPTIMA CON SUS OBJETIVOS.

EL OBJETIVO DE UN SISTEMA ESTRUCTURAL ES RESISTIR LAS FUERZAS A LAS QUE VA A ESTAR SOMETIDO SIN COLAPSO O MAL COMPORTAMIENTO DE LA ESTRUCTURA.

- **ESTRUCTURACIÓN:**

EN ESTA PARTE DEL PROCESO SE DETERMINA LOS MATERIALES POR LOS QUE SE VA A ESTAR CONSTITUIDA LA ESTRUCTURAL, LA FORMA GLOBAL DE ESTA, EL ARREGLO DE SUS ELEMENTOS CONSTITUIDOS COMO SON LAS DIMENSIONES Y CARACTERÍSTICAS MAS ESENCIALES.

- **ANÁLISIS:**

SE INCLUYE BAJO ESTA DENOMINACIÓN LAS ACTIVIDADES QUE SE LLEVA A LA DETERMINACIÓN DE LA RESPUESTA DE LA ESTRUCTURA ANTE LAS DIFERENTES ACCIONES EXTERIORES QUE PUEDAN AFECTARLA.

- **RESISTENCIA:**

LA RESISTENCIA DE UNA ESTRUCTURA SE DETERMINA MEDIANTE PROCEDIMIENTOS ANALÍTICOS BASADOS EN EL CONOCIMIENTO DE LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA ESTRUCTURA Y MECÁNICA DE LOS MATERIALES QUE LA COMPONEN, EN EL CONTEXTO DEL PLANTEAMIENTO DE LOS ESTADO LÍMITE, EL CÁLCULO DE LA RESISTENCIA CONSISTE EN LA DETERMINACIÓN DE LA FUERZA INTERNA QUE PRODUCE ALGÚN ESTADO LIMITE POR EJEMPLO, LA RESISTENCIA DE UNA VIGA A FLEXIÓN SERIA EL MOMENTO FLEXIONANTE MÁXIMO QUE ES CAPAZ DE RESISTIR LA SECCIÓN, DE LA MISMA FORMA QUE PUEDE HABLARSE DE LA RESISTENCIA EN CORTANTE O TORSIÓN.

FACTOR DE SEGURIDAD O FACTOR DE CARGA:

ESTE PUEDE DEFINIRSE COMO EL COCIENTE ENTRE LA RESISTENCIA Y EL VALOR ESTIMADO DE LA ACCIÓN CORRESPONDIENTE EN CONDICIONES DE SERVICIO.

EN TODO DISEÑO LA ESTRUCTURA DEBE TENER UN FACTOR DE SEGURIDAD RAZONABLE, MEDIANTE ESTE FACTOR SE TRATA DE TOMAR EN CUENTA EN EL DISEÑO LA INCERTIDUMBRE EXISTENTE RESPECTO A LOS EFECTOS DE CIERTAS ACCIONES Y LOS VALORES USADOS EN VARIAS ETAPAS DEL PROCESO DE DISEÑO.

ENTRE LAS PRINCIPALES INCERTIDUMBRES SE PUEDEN MENCIONAR EL DESCONOCIMIENTO DE LAS ACCIONES REALES Y SU DISTRIBUCIÓN, LA VALIDEZ DE LA HIPÓTESIS Y SIMPLIFICACIONES UTILIZADAS EN EL ANÁLISIS, LA DIFERENCIA ENTRE EL COMPORTAMIENTO REAL Y EL SUPUESTO DE LAS PROPIEDADES DE LOS MATERIALES.

- **ESFUERZO:**

EL ESFUERZO ES UN CONCEPTO BÁSICO QUE SE USA PARA DENOTAR LA INTENSIDAD DE UNA FUERZA INTERNA.

EL ESFUERZO SE DEFINE COMO LA FUERZA POR UNIDAD DE ÁREA Y ES UNA BASE CONVENIENTE PARA ANALIZAR LA RESISTENCIA A UNA ESTRUCTURA SUJETA A CARGA Y PARA SELECCIONAR EL MATERIAL Y DIMENSIONES MAS APROPIADAS EN SU DISEÑO.

- **ESFUERZO UNITARIO:**

SE DEFINE COMO LA FUERZA ENTRE EL ÁREA PERPENDICULAR A LA FUERZA Y SE REPRESENTA CON LA SIGUIENTE EXPRESIÓN:

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \text{ó} \qquad \sigma = \frac{P}{A}$$

DONDE:

$$\sigma = \ ESFUERZO\ EN\ kg/cm^2$$

$$P = F = CARGA\ TOTAL\ (TONELADAS, KILOGRAMOS\ ETC.)$$

$$A = ÁREA\ DE\ LA\ SECCIÓN$$

- **CARGA AXIAL:**

ES LA FUERZA QUE SE APLICA EN EL CENTROIDE DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DE UN ELEMENTO Y PUEDE SER DE COMPRESIÓN SI SE APLASTA EL ELEMENTO O DE TENSIÓN SI SE ESTIRA.

- **DEFORMACIÓN:**

ES EL CAMBIO DE FORMA QUE SUFRE UN ELEMENTO A CONSECUENCIA DE UNA ACCIÓN EXTERNA (CARGA), FENÓMENO FÍSICO O CAMBIO DE TEMPERATURA.

- **ELASTICIDAD:**

ES LA PROPIEDAD DE UN ELEMENTO A RECUPERAR SU FORMA ORIGINAL AL DEJAR DE ACTUAR UNA ACCIÓN EXTERNA QUE PROVOCA SU DEFORMACIÓN.

TIPOS DE ESFUERZOS:

EXISTEN DIFERENTES ESFUERZOS DE ACUERDO CON LA DISTRIBUCIÓN Y DIRECCIÓN DE LAS FUERZAS EXTERIORES QUE ACTÚA SOBRE UN CUERPO Y SON:

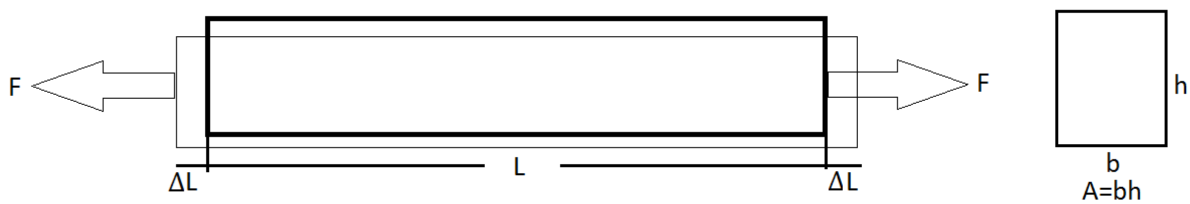
- ESFUERZOS DE TENSIÓN.
- ESFUERZOS DE COMPRESIÓN.
- ESFUERZOS CORTANTES.
- ESFUERZOS A FLEXIÓN.
- ESFUERZOS DE TORSIÓN.
- ESFUERZOS COMBINADOS.

LOS ESFUERZOS DE TENSIÓN Y DE COMPRESIÓN SE LLAMAN ESFUERZOS DIRECTOS.

EL ESFUERZO CORTANTE SE PRODUCE CUANDO LAS FUERZAS EXTERIORES TIENDEN HACER DESLIZAR UNA PARTÍCULA SOBRE OTRA DEL CUERPO, ESTE ESFUERZO ACTÚA TANGENCIALMENTE O PARALELAMENTE A LA SECCIÓN EN QUE SE PRODUCE.

2. LEY DE HOOKE:

DENTRO DE CIERTO LIMITE MÁXIMO LA CARGA DISTINTA PARA CADA MATERIAL, LA RELACIÓN ENTRE EL ESFUERZO Y LA DEFORMACIÓN UNITARIA ES CONSTANTE E IGUAL AL MODULO DE ELASTICIDAD.



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad ------- ECUACIÓN\ 1$$

DONDE:

$$E = MODULO\ DE\ ELASTICIDAD\ EN\ \ kg/cm^2$$

$$\sigma = ESFUERZO$$

$$\varepsilon = DEFORMACIÓN\ UNITARIA\ (cm)$$

TAMBIÉN:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad ------- ECUACIÓN\ 2$$

DONDE:

$$\Delta L = ALARGAMIENTO$$

$$L = LONGITUD\ DE\ LA\ PIEZA$$

PERO SABEMOS QUE:

$$\sigma = \frac{F}{A} ------- ECUACIÓN\ 3$$

SI TOMAMOS LA ECUACIÓN 1 Y SUSTITUIMOS EL ESFUERZO POR LA ECUACIÓN 3 Y LA DEFORMACIÓN UNITARIA POR LA ECUACIÓN 2 TENEMOS:

$$E = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{FL}{A\Delta L}$$

ENTONCES PODEMOS DEDUCIR VARIAS EXPRESIONES QUE SON:

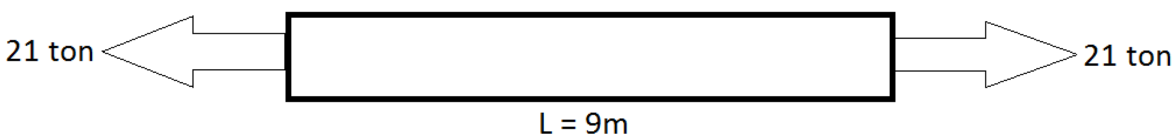
$$\mathbf{E = \frac{FL}{A\Delta L}}$$

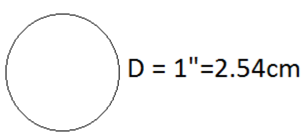
$$\mathbf{A = \frac{FL}{E\Delta L}}$$

$$\mathbf{\Delta L = \frac{FL}{EA}}$$

PROBLEMA 1:

CALCULAR EL ESFUERZO, LA DEFORMACIÓN UNITARIA Y EL MODULO DE ELASTICIDAD DE UNA VARILLA DE ACERO DE 1" DE DIÁMETRO CON UNA LONGITUD DE 9m, AL APLICARLE UNA FUERZA DE 21 TONELADAS, EXPERIMENTA UN ALARGAMIENTO DE 1.8cm.





Datos:

$$D = 1" = 2.54cm$$

$$L = 9m$$

$$\Delta L = 1.8cm$$

$$F = 21\ ton$$

Solución:

Calculo del área de la sección:

$$A = \frac{\pi(2.54)^2}{4} = 5.0671cm^2$$

Calculo del esfuerzo:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{21000\ kg}{5.0671 cm^2} = 4144.3824\ kg/cm^2$$

Calculo de la deformación unitaria:

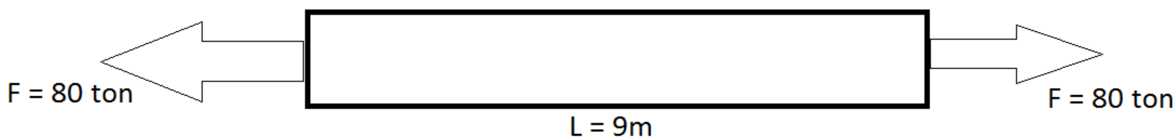
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1.8\ cm}{900\ cm} = 0.0020$$

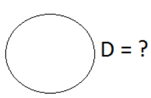
Calculo del módulo de elasticidad:

$$\mathbf{E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{4144.3824\ kg/cm^2}{0.0020} = 2072191.2\ kg/cm^2}$$

PROBLEMA 2:

DETERMINAR EL DIÁMETRO Y EL ALARGAMIENTO DE UNA VARILLA DE 9m DE LONGITUD SOMETIDA A UNA FUERZA DE 80 TONELADAS.





DATOS:

$$F = 80\ ton$$

$$E = 2000000\ kg/cm^2$$

$$D = ?$$

$$\Delta L = ?$$

$$\sigma = 1518\ kg/cm^2$$

SOLUCIÓN:

DE LA FORMULA $\sigma = \frac{F}{A}$ DESPEJAMOS “A” QUE ES EL ÁREA DE LA SECCIÓN:

$$A = \frac{F}{\sigma} = \frac{80000kg}{1518\ kg/cm^2} = 52.7009\ cm^2$$

De la fórmula:

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

Despejamos el diámetro:

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(52.7009cm^2)}{\pi}} = 8.1915\ cm$$

Calculo de la deformación unitaria:

De la formula $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ despejamos la deformación unitaria:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{1518\ kg/cm^2}{2000000\ kg/cm^2} = 0.000759$$

Por tanto aplicamos la fórmula de la deformación unitaria y despejamos el alargamiento:

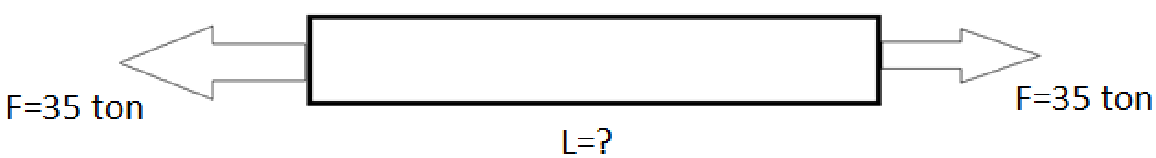
$$\Delta L = \varepsilon L = (0.000759)(900cm) = 0.6831\ cm$$

O bien para calcular el alargamiento aplicamos la siguiente formula:

$$\mathbf{\Delta L = \frac{FL}{EA} = \frac{(80000kg)(900cm)}{(2000000\ kg/cm^2)(52.7009cm^2)} = 0.6831cm}$$

Problema 3:

Que longitud tendrá una barra de acero con una carga de 35 toneladas, con una área de $25cm^2$ de sección transversal, un alargamiento de $\frac{1}{3}cm$ y un módulo de elasticidad es de $2100000\ kg/cm^2$.



Datos:

$$F = 35\ toneladas.$$

$$L = ?$$

$$E = 2100000\ kg/cm^2$$

$$\Delta L = \frac{1}{3} cm$$

Calculo del esfuerzo:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{35000kg}{25\ cm^2} = 1400\ kg/cm^2$$

Calculo de la deformación unitaria:

De la fórmula: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ Despejamos la deformación unitaria:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{1400kg/cm^2}{2100000kg/cm^2} = 0.000667$$

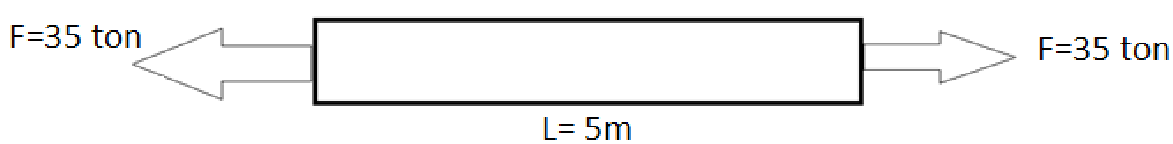
Calculo de la longitud de la barra de acero:

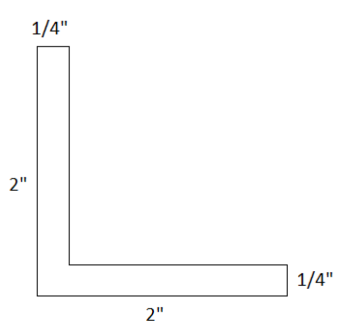
De la fórmula: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ Despejamos la longitud:

$$L = \frac{\Delta L}{\varepsilon} = \frac{\frac{1}{3}cm}{0.000667} = 499.7501\ cm = 4.997501m \approx 5\ m$$

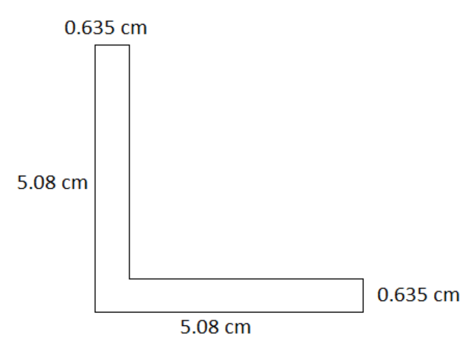
PROBLEMA 4:

Determinar si el área de una sección transversal en forma de "L" sometida a un esfuerzo de $1520kg/cm^2$ es lo suficiente para soportar una carga de 35 toneladas, una longitud de 5 metros y un módulo de elasticidad de $2039000kg/cm^2$. Si esta sección no tiene la suficiente área para soportar la carga, rediseñar la sección o cambiar alguna de las propiedades dadas, así como también calcular el alargamiento de esta barra.





Sección en forma de "L"



En pulgadas.

En centímetros.

Datos:

$$E = 2039000 kg/cm^2$$

$$\sigma = 1520\ kg/cm^2$$

$$A = ?$$

$$\Delta L = ?$$

Calculo del área de la sección en "L":

$A = (5.08)(0.635) + (4.445)(0.635) = 6.0484 cm^2$

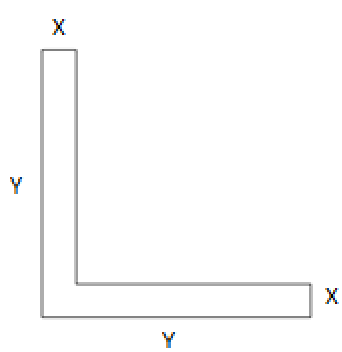
Calculo del área necesaria:

De la formula $\sigma = \frac{F}{A}$ Despejamos el área:

$$A = \frac{F}{\sigma} = \frac{35000 kg}{1520\ kg/cm^2} = 23.0263 cm^2$$

$$\therefore\ 6.0484 cm^2 < 23.0263 cm^2 \text{ No se acepta}$$

Rediseñando:



Dando un valor inicial en "X" o en "Y", cuidando que $X < Y$ porque "X" es el ancho de la sección en forma de "L".

$$Si\ Y = 10 cm$$

$$A = XY + (Y - X)(X)$$

$$A = XY + XY - X^2$$

$$A = 2XY - X^2$$

El valor mínimo del Área (A) es de 23.0263 cm^2, entonces consideramos un valor de área un poco sobrado, que sería de 23.05cm^2

Sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$23.05 = 2(10)X - X^2$$

$$X^2 - 20X + 23.05 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

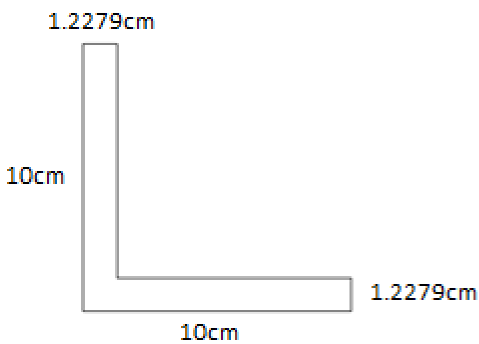
$$\frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(1)(23.05)}}{2(1)} =$$

$$X_1 = 18.7721$$

$$X_2 = 1.2279$$

Tomamos el segundo valor por el menor y con esto determinamos la geometría correcta de nuestra sección en forma de "L".

$$\therefore Y = 10cm \qquad y \qquad X = 1.2279cm$$



$$A = (10)(1.2279) + (10 - 1.2279)(1.2279) = 23.0503cm^2$$

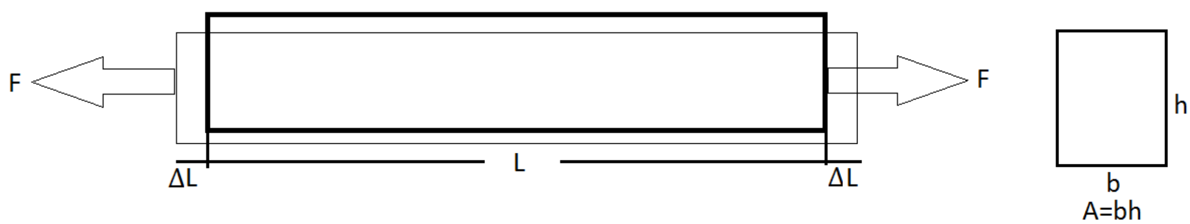
Calculo del alargamiento:

$$\Delta L = \frac{FL}{EA} = \frac{35000(500)}{2039000(23.0503)} = 0.3723cm$$

3. Relación de Poisson:

Cuando una barra de un material elástico está sometido a una carga de tensión longitudinal se produce en ella un aumento longitudinal en la dirección de la carga, así como una disminución de las dimensiones laterales perpendiculares a esta, la relación entre estas deformaciones unitarias transversal y longitudinal es una constante que se llama relación de Poisson y se representa con la siguiente letra:

$$\mu = \frac{\varepsilon t}{\varepsilon L} = \frac{DEFORMACIÓN\ TRANSVERSAL}{DEFORMACIÓN\ LONGITUDINAL}$$



Dónde:

$$L = sección\ longitudinal.$$

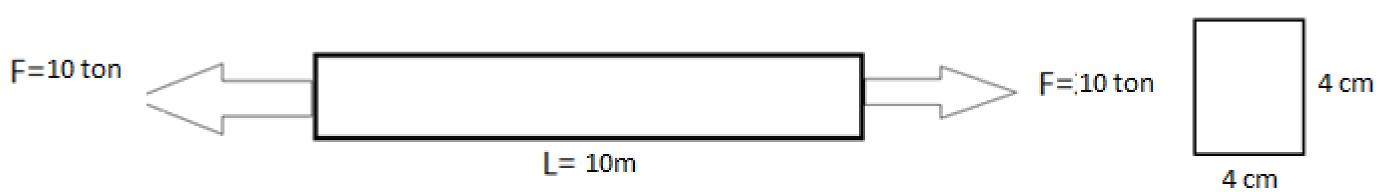
$$h = sección\ transversal.$$

Tomando en cuenta que la fuerza “F” está siendo aplicada perpendicularmente a “h” es decir; está tensando a la barra de acero. Notando que “h” se reduce de tamaño.

El valor que encontró Poisson para la letra μ considerando un sólido ideal fue de 0.25, pero para fines prácticos se toma igual a 0.30.

PROBLEMA 5:

Una barra de acero de sección de 4x4cm y una longitud de 10m sometida a una tensión de 16 toneladas. Determinar el esfuerzo, la deformación longitudinal, la deformación transversal y la variación de volumen, considerando el módulo de elasticidad como 2100000 kg/cm^2 y la relación de Poisson $\mu = 0.25$.



Datos:

$$F = 10\ toneladas$$

$$E_S = 2100000\ kg/cm^2$$

$$A = (4)(4) = 16cm^2$$

$$L = 10m$$

$$\mu = 0.25$$

Calculo el esfuerzo:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{10000\ kg}{16\ cm^2} = 625kg/cm^2$$

Calculo de la deformación unitaria longitudinal:

$$\varepsilon_L = \frac{\sigma}{E_S} = \frac{625\ kg/cm^2}{2100000\ kg/cm^2} = 0.000298$$

Aplicando la relación de Poisson:

$$\mu = \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$$

Y despejando a "ε_T":

$$\varepsilon_T = \mu * \varepsilon_L = (0.25)(0.000298) = 0.000075$$

Por definición tenemos $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ $\ y\ despejando\ a\ \Delta L,$ para poder calcular el alargamiento longitudinal y transversal:

Alargamiento longitudinal:

$$\Delta L_{longitudinal} = \varepsilon_L * L = 0.000298(1000cm) = 0.298cm$$

Alargamiento transversal:

$$\Delta L_{transversal} = \varepsilon_T * L_T = 0.000075(4cm) = 0.0003cm$$

Alargamientos totales:

$$\Delta L_{TOTAL\ LONGITUDINAL} = 1000cm + 0.298cm = 1000.298cm$$

$$\Delta L_{TOTAL\ TRANSVERSAL} = 4cm - 0.0003cm = 3.9997cm$$

Variación de volumen:

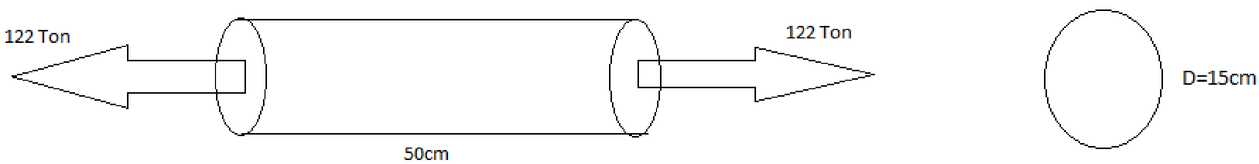
$$V_{INICIAL} = (1000cm)(4cm)(4cm) = 16000cm^3$$

$$V_{FINAL} = (1000.298cm)(3.9997cm)(3.9997cm) = 16002.3674cm^3$$

$$V_{FINAL} - V_{INICIAL} = 16002.3674cm^3 - 16000cm^3 = 2.3674cm^3$$

Problema 6:

Un cilindro solido de acero de 15cm de diámetro y una longitud de 50cm se le aplica una carga de 122 toneladas, se considera un módulo de elasticidad de $2100000\, kg/cm^2$ y una relación de Poisson de 0.30. Determinar el incremento de la longitud, la disminución de su diámetro y la variación de volumen.



Datos:

$$F = 122\ toneladas$$

$$E_S = 2100000\ kg/cm^2$$

$$D = 15cm$$

$$L = 50cm$$

$$\mu = 0.30$$

Calculo del área:

$$A = \frac{\pi(15)^2}{4} = 176.7146cm^2$$

Calculo del esfuerzo:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{122000\ kg}{176.7146cm^2} = 690.3787kg/cm^2$$

Calculo de la deformación unitaria longitudinal y transversal:

$$\varepsilon_L = \frac{\sigma}{E_S} = \frac{690.3787kg/cm^2}{2100000kg/cm^2} = 0.000329$$

$$\varepsilon_T = \mu * \varepsilon_L = 0.30(0.000329) = 0.000099$$

Calculo del alargamiento:

Alargamiento longitudinal:

$$\Delta L_{longitudinal} = \varepsilon_L * L = 0.000329(50cm) = 0.016450cm$$

Alargamiento transversal:

$$\Delta L_{transversal} = \varepsilon_T * L_T = 0.000099(15cm) = 0.001485cm$$

Alargamientos totales:

$$\Delta L_{TOTAL\ LONGITUDINAL} = 50cm + 0.016450cm = 50.016450cm$$

$$\Delta L_{TOTAL\ TRANSVERSAL} = 15cm - 0.001485cm = 14.998515cm$$

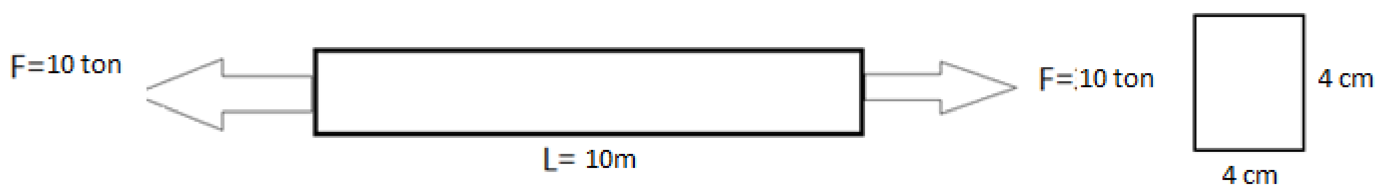
Variación de volumen:

$$V_V = V_{FINAL} - V_{INICIAL}$$

$$V_V = \left(\frac{\pi(14.998515)^2}{4}\right)(50.016450) - \left(\frac{\pi(15)^2}{4}\right)(50) = 1.156992cm^3$$

PROBLEMA 7:

Una barra de aluminio de sección de 4x4cm y una longitud de 10m sometida a una tensión de 16 toneladas. Determinar el esfuerzo, la deformación longitudinal, la deformación transversal y la variación de volumen, considerando el módulo de elasticidad como 2100000 kg/cm^2 y la relación de Poisson $\mu = 0.30$.



Datos:

$$F = 10\ toneladas$$

$$E_S = 70000\ kg/cm^2$$

$$A = (4)(4) = 16cm^2$$

$$L = 10m$$

$$\mu = 0.30$$

Calculo el esfuerzo:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{10000\ kg}{16\ cm^2} = 625kg/cm^2$$

Calculo de la deformación unitaria longitudinal:

$$\varepsilon_L = \frac{\sigma}{E_S} = \frac{625\ kg/cm^2}{70000\ kg/cm^2} = 0.008929$$

Aplicando la relación de Poisson:

$$\mu = \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$$

Y despejando a "ε_T":

$$\varepsilon_T = \mu * \varepsilon_L = (0.30)(0.008929) = 0.002679$$

Por definición tenemos $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ $\ y\ despejando\ a\ \Delta L,$ para poder calcular el alargamiento longitudinal y transversal:

Alargamiento longitudinal:

$$\Delta L_{longitudinal} = \varepsilon_L * L = 0.008929(1000cm) = 8.929cm$$

Alargamiento transversal:

$$\Delta L_{transversal} = \varepsilon_T * L_T = 0.002679(4cm) = 0.0107cm$$

Alargamientos totales:

$$\Delta L_{TOTAL\ LONGITUDINAL} = 1000cm + 8.929m = 1008.929cm$$

$$\Delta L_{TOTAL\ TRANSVERSAL} = 4cm - 0.0107cm = 3.9893cm$$

Variación de volumen:

$$V_{INICIAL} = (1000cm)(4cm)(4cm) = 16000cm^3$$

$$V_{FINAL} = (1008.929cm)(3.9893cm)(3.9893cm) = 16056.6152cm^3$$

$$V_{FINAL} - V_{INICIAL} = 16056.6152cm^3 - 16000cm^3 = 56.6152cm^3$$

4. Esfuerzos de compresión:

Recordemos un poco algunas fórmulas ya mencionadas y veamos algunos problemas.

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\mathbf{E = \frac{FL}{A\Delta L}} \qquad \mathbf{A = \frac{FL}{E\Delta L}} \qquad \mathbf{\Delta L = \frac{FL}{EA}}$$

Pero de la fórmula de esfuerzo, podemos aplicarla al concreto y al acero para poder deducir una ecuación entre fuerza del concreto más la fuerza del acero igual a la carga de compresión.

Para la fuerza del concreto:

$$\sigma_C = \frac{F_C}{A_C} \qquad despejando\ F_C\ tenemos: \boldsymbol{F_C = \sigma_C A_C}$$

Y para la fuerza del acero:

$$\sigma_S = \frac{F_S}{A_S} \qquad despejando\ F_S\ tenemos: \boldsymbol{F_S = \sigma_S A_S}$$

Dónde:

$$\sigma_C = esfuerzo\ del\ concreto\ (kg/cm^2)$$

$$F_C = fuerza\ del\ concreto\ (toneladas\ o\ kilogramos)$$

$$A_C = area\ del\ concreto\ (cm^2)$$

$$\sigma_S = esfuerzo\ del\ acero\ (kg/cm^2)$$

$$F_S = fuerza\ del\ acero\ (toneladas\ o\ kilogramos)$$

$$A_S = area\ del\ acero\ (cm^2)$$

Por tanto llegamos a la conclusión de:

$$\boldsymbol{\sigma_S A_S + \sigma_C A_C = P}$$

Donde según la deducción anterior:

Fuerza del acero:

$$F_S = \sigma_S A_S$$

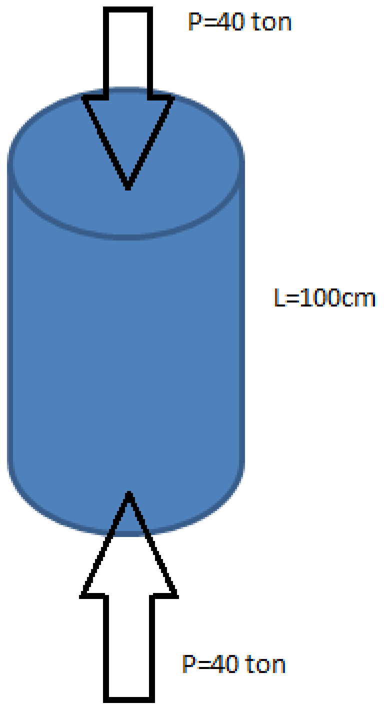
Fuerza del concreto:

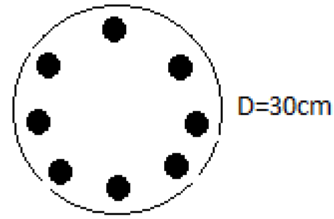
$$F_C = \sigma_C A_C$$

$$P = CARGA\ A\ COMPRESIÓN\ (toneladas\ o\ kilogramos)$$

Problema 8:

Un cilindro circular de concreto armado de 100cm de largo, con un diámetro de 30cm reforzado con 8 varillas del número 5 y está sometido a una fuerza de compresión de 40 toneladas, el módulo de elasticidad del acero es de $2100000 kg/cm^2$ y el módulo de elasticidad del concreto es de $210000 kg/cm^2$. Determinar la fuerza en el concreto y en el acero, los esfuerzos y si deformación.





Datos:

$$P = 40 \; toneladas$$

$$E_C = 210000 \; kg/cm^2$$

$$E_S = 2100000 kg/cm^2$$

$$A_S = 8\#5$$

Calculo del área del acero:

$$A_S = \left(\frac{\pi \left(\left(\frac{5}{8} \right) (2.54) \right)^2}{4} \right) * (8) = 15.8346 cm^2$$

De la fórmula:

$$\sigma_S A_S + \sigma_C A_C = P$$

Por compatibilidad de deformaciones:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c \quad sí \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\therefore \; \frac{\sigma_C}{E_C} = \frac{\sigma_S}{E_S}$$

$$\sigma_C = \frac{E_C * \sigma_S}{E_S} = \frac{(210000kg/cm^2)\sigma_s}{2100000kg/cm^2} = 0.10\sigma_s$$

$$\therefore \quad \sigma_c = 0.10\sigma_s$$

De la relación área del concreto y área del acero expresada en porcentaje tenemos:

$$\frac{A_C}{A_S} = \%$$

$$\frac{A_C}{A_S} = \frac{\frac{\pi * (30)^2}{4}}{15.8346} = 44.6401$$

$$\therefore \quad A_C = 44.6401A_S$$

De la fórmula: $\sigma_S A_S + \sigma_C A_C = P$ sustituimos σ_C, P y A_C:

$$\sigma_S A_S + 0.10\sigma_S(44.6401A_S) = 40$$

$$\sigma_S A_S + 4.464\sigma_S A_S = 40$$

$$\sigma_S A_S(1 + 4.464) = 40$$

$$\sigma_S A_S = \frac{40}{5.464} = 7.3206\ toneladas$$

$$\therefore \quad fuerza\ del\ acero \ \rightarrow F_S = \sigma_S A_S = 7.3206\ toneladas$$

Para calcular la fuerza del concreto únicamente sustituimos $\sigma_S A_S$ $y\ P$ $de\ la\ formula$: $\sigma_S A_S + \sigma_C A_C = P$

$$7.3206 + \sigma_C A_C = 40$$

$$\therefore \quad fuerza\ del\ concreto \ \rightarrow F_C = \sigma_C A_C = 32.6797\ toneladas$$

Calculo del esfuerzo del concreto:

$$\sigma_C = \frac{F_C}{A_C} = \frac{32.6797 * 1000}{\frac{\pi * (30)^2}{4}} = 46.2323\ kg/cm^2$$

Calculo del esfuerzo del acero:

$$\sigma_S = \frac{F_S}{A_S} = \frac{7.3206 * 1000}{15.8346} = 462.3167\ kg/cm^2$$

Calculo de las deformaciones unitarias:

$$\varepsilon_S = \frac{\sigma_S}{E_S} = \frac{462.3167\ kg/cm^2}{2100000kg/cm^2} = 0.000220$$

$$\varepsilon_C = \frac{\sigma_C}{E_C} = \frac{46.2323\ kg/cm^2}{210000kg/cm^2} = 0.000220$$

Notamos que las deformaciones unitarias en el concreto y en el acero son las mismas debido a que desde un principio establecimos una compatibilidad de deformaciones.

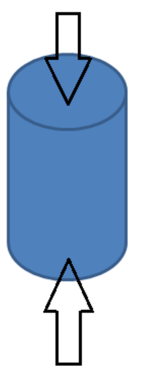
Calculo del alargamiento:

$$\Delta L_S = \frac{F_S L}{A_S E_S} = \frac{(7.3206 * 1000)kg * (100cm)}{(15.8346cm^2) * (2100000kg/cm^2)} = 0.0220cm$$

$$\Delta L_C = \frac{F_C L}{A_C E_C} = \frac{(32.6797 * 1000)kg * (100cm)}{\left(\frac{\pi * (30)^2}{4}\right) cm^2 * (210000kg/cm^2)} = 0.0220cm$$

Problema 9:

Determinar la fuerza del concreto y en el acero de una sección circular sometida a una fuerza de compresión de 90 toneladas, el área del acero es $\frac{1}{15}$ del área del concreto, el módulo de elasticidad del concreto es de $210000kg/cm^2$ y el módulo de elasticidad del acero es de $2100000kg/cm^2$.



DATOS:

$$P = 90\ toneladas.$$

$$E_C = 210000kg/cm^2$$

$$E_S = 2100000kg/cm^2$$

$$A_S = \frac{1}{15} A_C$$

Para la solución del problema utilizaremos las formula establecidas de la ley de Hooke:

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{FL}}{\mathrm{A\Delta L}} \qquad \mathrm{A} = \frac{\mathrm{FL}}{\mathrm{E\Delta L}} \qquad \Delta\mathrm{L} = \frac{\mathrm{FL}}{\mathrm{EA}}$$

En este caso usaremos la fórmula del alargamiento y estableceremos una compatibilidad de alargamientos:

$$\frac{\mathrm{F}_S \mathrm{L}}{\mathrm{E}_S \mathrm{A}_S} = \frac{\mathrm{F}_C \mathrm{L}}{\mathrm{E}_C \mathrm{A}_C}$$

Despejando la fuerza del concreto y sustituyendo los datos tenemos:

$$F_C = \frac{F_S * L * E_C * A_C}{E_S * A_S * L} = \frac{F_S * E_C * A_C}{\frac{1}{15} A_C * E_S} = \frac{F_S * E_C}{\frac{1}{15} * E_S} = \frac{210000 F_S}{\left(\frac{1}{15}\right)(2100000)} = \frac{3}{2} F_S$$

$$\therefore \quad F_C = \frac{3}{2} F_S$$

Nota: sabemos que, $F_S = \sigma_S A_S \quad y \quad F_C = \sigma_C A_C$

Por lo que aplicamos la fórmula: $\sigma_S A_S + \sigma_C A_C = P$

$$F_S + F_C = 90$$

Pero: $F_C = \frac{3}{2} F_S$

$$\frac{3}{2} F_S + F_S = 90$$

$$F_S \left(1 + \frac{3}{2}\right) = 90$$

$$F_S = \frac{90}{\frac{5}{2}} = 36 \; toneladas$$

$$\therefore \quad F_S = 36 \; toneladas$$

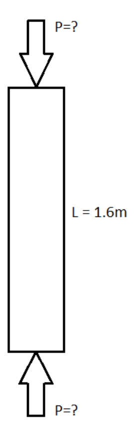
Y finalmente despejamos F_C de $F_S + F_C = 90$:

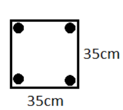
$$36 + F_C = 90$$

$$\therefore \quad F_C = 54 \; toneladas$$

Problema 10:

Una columna de concreto armado de longitud de 1.6 metros, sección rectangular de 35x35cm, un módulo de elasticidad del concreto de $180000 \, kg/cm^2$, el módulo de elasticidad del acero es de $2100000 kg/cm^2$, esta armada con 4 varillas del número 10, tiene un esfuerzo del concreto de $170 kg/cm^2$. Determinar la carga "P" que soporta la columna, la fuerza del concreto y del acero, así como las deformaciones unitarias y el alargamiento.





Datos:

$$E_C = 180000 kg/cm^2$$

$$E_S = 2100000 kg/cm^2$$

$$A_S = 4\#10$$

$$\sigma_C = 170kg/cm^2$$

$$L = 1.60m$$

$$P = ?$$

ÁREA DEL ACERO:

$$A_S = \left[\frac{\pi * \left(\left(\frac{10}{8}\right)(2.54)\right)^2}{4}\right] * (4) = 31.6692cm^2$$

Aplicando la compatibilidad de deformaciones:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c \quad sí \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\therefore \ \frac{\sigma_C}{E_C} = \frac{\sigma_S}{E_S}$$

$$\frac{170}{180000} = \frac{\sigma_S}{2100000}$$

$$\sigma_S = 1983.3333kg/cm^2$$

Aplicando : $\mathrm{\sigma_S A_S + \sigma_C A_C = P}$

$$P = (1983.3333)(31.6692) + (170)(35^2)$$

$$P = 271060.5789kg \cong 271.0606\ toneladas$$

Calculo de la fuerza del concreto y la fuerza del acero:

Aplicando: $F_S = \sigma_S A_S \quad y \quad F_C = \sigma_C A_C$

$$F_C = \sigma_C A_C = (170)(35^2) = 208250kg = 208.250\ toneladas$$

$$F_S = \sigma_S A_S = (1983.3333)(31.6692) = 62810.5789kg = 62.8106\ toneladas$$

Calculo de las deformaciones unitarias:

$$\varepsilon_S = \frac{\sigma_S}{E_S} = \frac{1983.3333kg/cm^2}{2100000kg/cm^2} = 0.000944$$

$$\varepsilon_C = \frac{\sigma_C}{E_C} = \frac{170kg/cm^2}{180000kg/cm^2} = 0.000944$$

Calculo del alargamiento:

$$\Delta L_S = \frac{F_S L}{A_S E_S} = \frac{(62810.5789kg) * (160cm)}{(31.6692cm^2) * (2100000kg/cm^2)} = 0.1511cm$$

$$\Delta L_C = \frac{F_C L}{A_C E_C} = \frac{(208250kg) * (160cm)}{(35^2)cm^2 * (180000kg/cm^2)} = 0.1511cm$$

5. Dimensionamiento y revisión de elementos de acero sujetos a tensión axial:

Como sabemos el acero es uno de los materiales más usados a pesar de su alto costo.

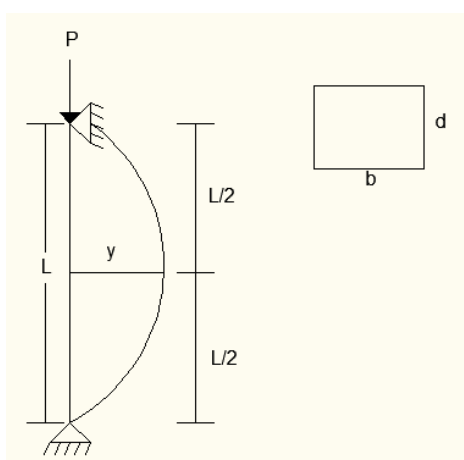
En la construcción se usar para unir los miembros de una estructura empleando soldadura, tornillos o remaches, con esto logramos formas de secciones compuestas y así simplificar el montaje de la obra, también se utiliza en conjunto con el concreto para distintos elementos constructivos como trabes, columnas ya que el concreto no resiste tensiones y se utiliza comúnmente en elementos de refuerzo llamados varillas y se fabrican tanto en caliente como en frio y su límite de fluencia para las laminadas en caliente es de $2300kg/cm^2$ a 4200kg/cm^2 y las trabajadas en frio tienen un límite de fluencia de 4000kg/cm^2 a 6000kg/cm^2.

Elementos a compresión.

En el diseño de miembros a compresión el problema se limita a determinar un área en función de la carga actuante y un esfuerzo permisible, pero la dificultad se encuentra al tratar de evaluar el esfuerzo permisible, ya que intervienen el fenómeno de pandeo que es de primordial importancia en todo diseño y aún más cuando los elementos son esbeltos como ocurre en los miembros que forman las estructuras.

Para la obtención de las fórmulas de diseño se parte de la fórmula de Euler que es:

Pero primero partimos de:



Tomando momentos:

$$Mx=-Px$$

$$My=-Py \qquad \text{(momento critico por estar en el eje y)}$$

De la fórmula de la elástica obtenemos:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Py$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{Py}{EI}$$

Haciendo:

$$-\frac{P}{EI}=K^2$$

Tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=K^2y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-K^2y=0$$

Sacando la doble derivada:

$$y=csenkx+dcoskx$$

Haciendo: $y=0$ y $x=0$

$$0=0+d$$

$$d=0$$

Si $x=L$

$$0=csen(kL)+0$$

$$sen(kL)=0$$

$$\therefore \quad c=0$$

Para que esto sea cierto:

$$KL=n\pi \qquad \text{donde} \qquad n=1,2,3,4\ldots\infty$$

$$K=\frac{n\pi}{L}$$

Por tanto tenemos:

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2}=\frac{P}{EI}$$

Haciendo: $n=1$

$$P=\frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\therefore \quad P_{CRIT}=\frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

Para el esfuerzo crítico tomamos: $\sigma=\frac{P}{A}$

$$\sigma_{CRIT}=\frac{P_{CRIT}}{A}$$

$$\sigma_{CRIT}=\frac{\frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}}{A}$$

$$\sigma_{CRIT}=\frac{\pi^2 EI}{A(KL)^2}$$

Considerando el radio de giro tenemos:

$$r^2=\frac{I}{A}$$

$$A=\frac{I}{r^2}$$

Sustituyendo tenemos:

$$\sigma_{CRIT}=\frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{I}{r^2}\right)(KL)^2}$$

$$\sigma_{CRIT}=\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

Introduciendo un factor de seguridad elástico tenemos:

$$\mathrm{F.S}=\frac{23}{12}$$

Obteniendo el esfuerzo admisible:

$$\mathrm{Fa}=\frac{\pi^2\mathrm{E}}{\mathrm{F.S}\left(\frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{r}}\right)^2}$$

$$Fa=\frac{12\pi^2E}{23\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

Para esta fórmula se debe considerar lo siguiente:

La mitad del esfuerzo de fluencia es igual al esfuerzo crítico:

$$\frac{\mathrm{Fy}}{2}=\frac{\pi^2\mathrm{E}}{\left(\frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{r}}\right)^2}$$

Despejando $\frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{r}}$ que llamaremos relación de esbeltez:

$$\frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{r}}=\sqrt{\frac{2\pi^2\mathrm{E}}{\mathrm{Fy}}}$$

Para simplificar literales llamaremos coeficiente de columna (C.C) a $\sqrt{\frac{2\pi^2E}{Fy}}$

$$\mathrm{C.C}=\sqrt{\frac{2\pi^2\mathrm{E}}{\mathrm{Fy}}}$$

Por tanto solo usaremos:

$$\boldsymbol{Fa=\frac{12\pi^2E}{23\left(\frac{KL}{r}\right)^2}} \qquad \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{\frac{KL}{r}>C.C}$$

<u>Rango elástico</u>

Para el caso contrario y tomando en cuenta como base una distribución de esfuerzos residuales promedio obtenida de un gran número de experiencias de laboratorio en piezas reales, se llega a la siguiente expresión, que con una buena aproximación permite evaluar el esfuerzo crítico dentro del rango inelástico:

$$\sigma_{CRIT}=Fy\left[1-\frac{Fy}{4\pi^2 E}\left(\frac{KL}{r}\right)^2\right]$$

Y para este caso se tomara el coeficiente de columna ya mencionado que es:

$$C.C=\sqrt{\frac{2\pi^2 E}{Fy}}$$

Y el factor de seguridad será:

$$F.S=\frac{5}{3}+\frac{3\left(\frac{KL}{r}\right)}{8C.C}-\frac{\left(\frac{KL}{r}\right)^3}{8C.C^3}$$

Factorizando tenemos:

$$\sigma_{CRIT}=Fy\left[1-\frac{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}{2C.C^2}\right]$$

Introduciendo el factor de seguridad obtenemos:

$$\sigma_{CRIT}=\frac{Fy\left[1-\frac{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}{2C.C^2}\right]}{F.S}$$

$$\sigma_{CRIT}=\frac{Fy\left[1-\frac{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}{2C.C^2}\right]}{\frac{5}{3}+\frac{3\left(\frac{KL}{r}\right)}{8C.C}-\frac{\left(\frac{KL}{r}\right)^3}{8C.C^3}}$$

La usaremos solo para:

$$\boldsymbol{Fa} = \sigma_{CRIT} = \frac{Fy\left[1-\frac{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}{2C.C^2}\right]}{\frac{5}{3}+\frac{3\left(\frac{KL}{r}\right)}{8C.C}-\frac{\left(\frac{KL}{r}\right)^3}{8C.C^3}} \qquad \text{si} \qquad \frac{KL}{r} < C.C$$

<u>Rango inelástico</u>

Dónde:

$$FA = Esfuerzo\ permitido\ en\ compresión\ axial\ en\ ausencia\ de\ esfuerzos.$$

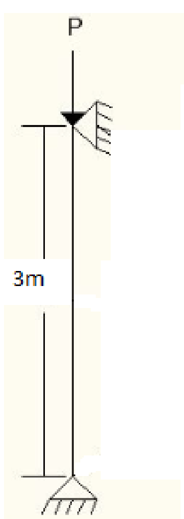
$$C.c = Coeficiente\ de\ columna\ y\ depende\ \text{únicamente}\ de\ la\ característica\ del\ material.$$

$$Fy = Esfuerzo\ de\ fluencia\ mínimo\ especificado\ para\ el\ tipo\ de\ acero\ en\ este\ caso\ A-36 = 2530kg/cm^2$$

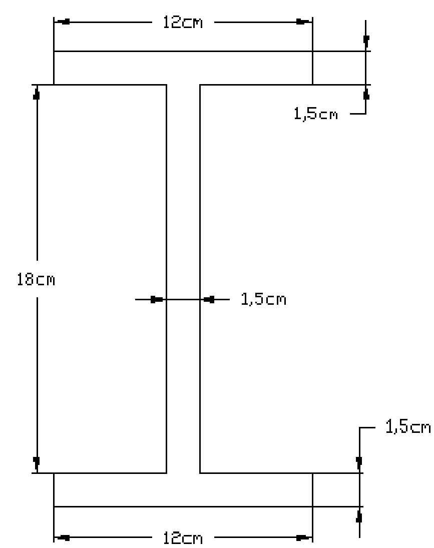
$$F.S = Factor\ de\ seguridad.$$

<u>Problema 11:</u>

Determinar la capacidad de carga de la siguiente columna en acero A-36.



K=1.0



Calculo del área de la sección:

$$A = 2(12 \times 1.5) + (18 \times 1.5) = 63cm^2$$

Calculo del centroide:

$$\bar{y} = \frac{(12 \times 1.5 \times 0.75) + (18 \times 1.5 \times 10.5) + (12 \times 1.5 \times 20.25)}{63} = 10.5cm$$

Calculo de momento de inercia por el teorema de los ejes paralelos:

Inercia en el eje "x":

$$I_X = I + Ady^2$$

$$I_X = 2 * \left[\frac{12 \times 1.5^3}{12} + (12)(1.5)(9.75)^2\right] + \left[\frac{1.5 \times 18^3}{12} + (1.5)(18)(0)^2\right] = 4158cm^4$$

Inercia en el eje "y":

$$I_Y = I + Adx^2$$

$$I_Y = 2 * \left[\frac{12^3 \times 1.5}{12}\right] + \left[\frac{1.5^3 \times 18}{12}\right] = 437.0625cm^4$$

Calculo del radio de giro:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{4158}{63}} = 8.124cm$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{437.0625}{63}} = 2.6339cm$$

Calculo de la relación de Esbeltez:

$$\frac{KL}{r_x} = \frac{(1.0)(300)}{8.124} = 36.9276$$

$$\frac{KL}{r_y} = \frac{(1.0)(300)}{2.6339} = 113.8995$$

La relación de esbeltez siempre debe ser menor a 200, por tanto podemos continuar con el problema.

Calculo del coeficiente de columna:

$$Cc. = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{Fy}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(2039000)}{2530}} = 126.1285$$

Tomando la relación de esbeltez mayor tenemos:

$$\frac{KL}{r_y} < C.c$$

Rango inelástico

Usaremos:

$$Fa = \frac{\left[1 - \frac{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}{2C.c^2}\right] Fy}{F.S}$$

$$F.S = \frac{5}{3} + \frac{3\left(\frac{KL}{r}\right)}{8C.c} - \frac{\left(\frac{KL}{r}\right)^3}{8C.c^3}$$

Sustituyendo:

$$Fa = \frac{\left[1 - \frac{(113.8995)^2}{2(126.1285)^2}\right](2530)}{\frac{5}{3} + \frac{3(113.8995)}{8(126.1285)} - \frac{(113.8995)^3}{8(126.1285)^3}} = \frac{1498.4086}{1.9133} = 783.1728kg/cm^2$$

Calculo de la capacidad de carga de la columna:

$$P = Fa \times A = (783.1728)(63) = 49339.8838kg$$

$$\mathbf{P = 49.34\ toneladas}$$

Revisión por la carga critica de Euler:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 \times E \times I}{(KL)^2} = \frac{\pi^2(2039000)(437.0625)}{(1.0 \times 300)^2} = 97727.7741kg$$

Carga admisible:

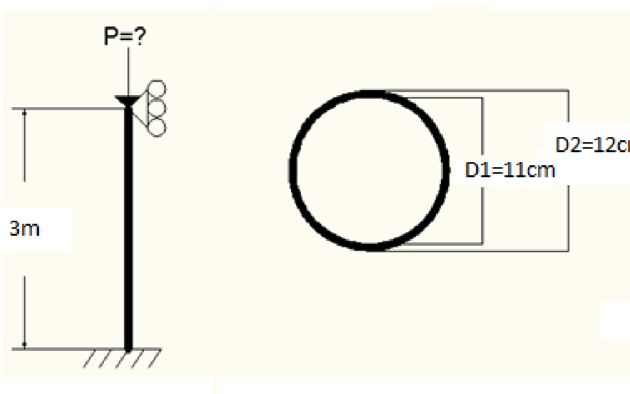
$$P_{adm} = \frac{P_{crit}}{F.S} = \frac{97727.7741}{1.9133} = 51079.3443kg$$

$$Fa = \frac{P_{adm}}{A} = \frac{51079.3443}{63} = 810.7832kg/cm^2$$

$$\therefore\ \mathbf{810.7832kg/cm^2 < 1518kg/cm^2} \qquad \textbf{SE ACEPTA}$$

Problema 12:

Determinar la capacidad de carga de la siguiente columna:



Para este caso K=0.8

$$AREA = \frac{\pi(12)^2}{4} - \frac{\pi(11)^2}{4} = 18.0642cm^2$$

Calculo del momento de inercia (para el circulo: $\frac{\pi D^4}{64}$)

$$I_X = I_Y = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi(12)^4}{64} - \frac{\pi(11)^4}{64} = 299.1876cm^4$$

Calculo del radio de giro:

$$r_x = r_y = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{299.1876}{18.0642}} = 4.0697cm$$

Calculo de la relación de esbeltez:

$$\frac{KL}{r_x} = \frac{KL}{r_y} = \frac{(0.8)(450)}{4.0697} = 88.4586$$

La relación de esbeltez siempre debe ser menor a 200, por tanto podemos continuar con el problema.

Calculo del coeficiente de columna:

$$Cc. = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{Fy}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(2039000)}{2530}} = 126.1285$$

$$\frac{KL}{r_y} < C.c$$

Rango inelástico

Usaremos:

$$Fa=\frac{\left[1-\frac{(88.4586)^2}{2(126.1285)^2}\right](2530)}{\frac{5}{3}+\frac{3(88.4586)}{8(126.1285)}-\frac{(88.4586)^3}{8(126.1285)^3}}=\frac{1907.7797}{1.8865}=1011.2800kg/cm^2$$

Cálculo de la capacidad de carga de la columna:

$$P=Fa\times A=(1011.28)(18.0642)=18267.9640kg$$

$$\mathbf{P=18.27\ toneladas}$$

Revisión por la carga critica de Euler:

$$P_{crit}=\frac{\pi^2\times E\times I}{(KL)^2}=\frac{\pi^2(2039000)(299.1876)}{(0.8\times 450)^2}=46457.4705kg$$

Carga admisible:

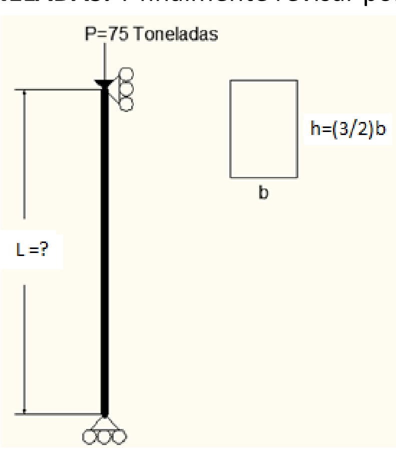
$$P_{adm}=\frac{P_{crit}}{F.S}=\frac{46457.4705}{1.8865}=24626.2764kg$$

$$Fa=\frac{P_{adm}}{A}=\frac{24626.2764}{18.0642}=1363.2642kg/cm^2$$

$$\therefore\ \mathbf{1363.2642kg/cm^2<1518kg/cm^2}\qquad \mathbf{SE\ ACEPTA}$$

Problema 13:

Determinar las dimensiones de la columna de sección rectangular “b” y “h y la longitud de la columna y $\frac{KL}{r_Y}=199$. **UNA VEZ ENCONTRADAS LAS DIMENSIONES “b” Y “h” VOLVER A CALCULAR TODOS LOS ELEMENTOS COMO SON: MOMENTO DE INERCIA, RADIO DE GIRO, RELACIÓN DE ESBELTEZ Y CON ESOS DATOS REVISAR SI SOPORTA 75 TONELADAS.** Y finalmente revisar por la carga critica de Euler.



DATOS:

$$\frac{\mathrm{kL}}{\mathrm{r_y}}=199$$

k=1.0

Sabemos: $P=Fa\times A$

Calculo del coeficiente de columna:

$$Cc. = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{Fy}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(2039000)}{2530}} = 126.1285$$

$$\frac{KL}{r_y} > C.c$$

Rango elástico

Se usara:

$$Fa = \frac{12\pi^2 E}{23(KL)^2} = \frac{12\pi^2(2039000)}{23(199)^2} = 265.1333kg/cm^2$$

$$75000 = 265.1333A$$

$$A = \frac{75000}{265.1333} = 282.8766cm^2$$

Calculo de las dimensiones de la sección igualando las áreas:

$$282.8766 = b\left(\frac{3}{2}b\right)$$

$$b = \sqrt{\frac{2(282.8766)}{3}} = 13.7326cm$$

$$\therefore b = 13.7326cm \cong 14cm \qquad y \qquad h = \frac{3}{2}b = \frac{3}{2}(13.7326) = 20.5989cm \cong 21cm$$

Revisando:

Calculo del área:

$$A = 14 \times 21 = 294cm^2$$

Calculo de la inercia:

$$I_X = \frac{bh^3}{12} = \frac{(14)(21)^3}{12} = 10804.5cm^4$$

$$I_Y = \frac{b^3h}{12} = \frac{(14^3)(21)}{12} = 4802cm^4$$

Calculo del radio de giro:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{10804.5}{294}} = 6.0622cm$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{4802}{294}} = 4.0415cm$$

Calculo de la longitud:

De:

$$\frac{KL}{r_y} = 199$$

$$\frac{(1.0)L}{4.0415} = 199$$

$$L = 199(4.0415) = 804.2585cm \cong 8m$$

Revisión de la relación de esbeltez:

$$\frac{KL}{r_x} = \frac{(1.0)(800)}{6.0622} = 131.9653$$

$$\frac{KL}{r_y} = \frac{(1.0)(800)}{4.0415} = 197.9463$$

Calculo del coeficiente de columna:

$$Cc. = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{Fy}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(2039000)}{2530}} = 126.1285$$

$$\frac{KL}{r_y} > C.c$$

Rango elástico

Se usara:

$$Fa = \frac{12\pi^2 E}{23(KL)^2} = \frac{12\pi^2(2039000)}{23(197.9463)^2} = 267.9635kg/cm^2$$

$$P = Fa \times A = 267.9635 \times 294 = 78781.2623kg \cong 78.78\ toneladas$$

$$\therefore \mathbf{78.78 > 75\ toneladas} \quad \mathbf{SE\ ACEPTA}$$

Revisión por la carga critica de Euler:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 \times E \times I}{(KL)^2} = \frac{\pi^2(2039000)(4802)}{(1.0 \times 800)^2} = 150993.8132kg$$

Carga admisible:

PARA ESTE CASO EL F.S = 1.9167 ESTO ES POR LA FORMULA USADA.

$$P_{adm} = \frac{P_{crit}}{F.S} = \frac{150993.8132}{1.9167} = 78779.3808kg$$

$$Fa = \frac{P_{adm}}{A} = \frac{78779.3808}{294} = 267.9571kg/cm^2$$

$$\therefore \mathbf{267.9571kg/cm^2 < 1518kg/cm^2} \quad \mathbf{SE\ ACEPTA}$$

6. DIMENSIONAMIENTO EN COLUMNAS DE MADERA.

La madera es un material que ofrece resistencia a la tensión y a la compresión por lo que un material que se utiliza mucho en la construcción.

La madera se clasifica en:

- Madera de primera: también se denominan maderas duras y son compactas, provienen de árboles corpulentos y de lento crecimiento como son: el encino, el roble, olmo, fresno, etc.

Estos tipos de árboles presentan nudos firmes no mayores de 2.5cm y sin torceduras o deformaciones longitudinales y exentas de rajaduras.

- Maderas de segunda: son maderas blandas poco densas y de escasa resistencia como son el álamo, cople, huecote, etc. Y son las que presentan nudos flojos pequeños de hasta 1.5cm o nudos firmes mayores de 2.5cm pero sin exceder de 3/10 el ancho de la pieza, puede tener rajaduras longitudinales menores del ancho de la sección o grietas que no lleguen a 1/2 del espesor y con longitudes de 1/6 de la pieza.
- Maderas de tercera: son maderas resinosas y provienen generalmente de las coníferas y remplaza a las maderas duras y son: cedro, pino, ocote, etc.

Para la construcción se tienen las siguientes características:

- Su módulo de elasticidad varia de $40000\ kg/cm^2\ a\ 100000\ kg/cm^2$ su peso volumétrico se considera de $400\ kg/m^3$ a $8500\ kg/m^3$.

Al dimensionar debe tomarse en cuenta que las dimensiones reales sean mayores a las aplicables. Esto puede hacerse trabajando con los esfuerzos permisibles reducidos. Las longitudes usuales varían según su escuadría por ejemplo la tabla o duela se considera cuando sus dimensiones son menores de 2” de espesor.

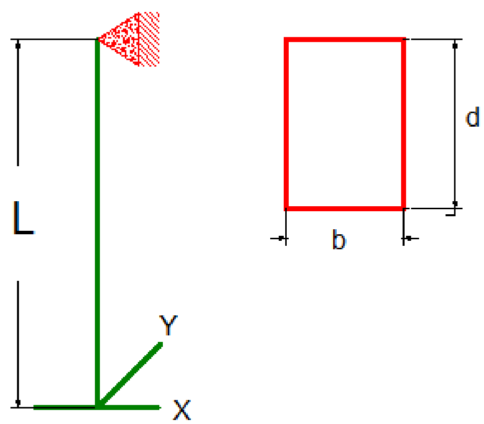
Los miembros a tensión se presentan principalmente en armaduras de todo tipo en cuyo diseño es frecuentemente considerar que las barras que las integran están sometidas únicamente a cargas axiales con frecuencia las dimensiones de un miembro en tensión no está determinada por la resistencia a esfuerzos cortantes si no por los esfuerzos cortantes que se presentan en los detalles de conexión.

Miembros a compresión:

Los miembros estructurales de madera sometidos a compresión se presentan bajo la forma de columnas y miembros de armaduras. Se construyen de madera que las fibras queden paralelas a los esfuerzos de compresión, ya que la resistencia a este tipo de esfuerzos en sentido perpendicular a las fibras es baja.

Cuando un miembro de madera sometido a compresión es relativamente corto el efecto de esbeltez es poco significativo y la falla es por aplastamiento.

Deducción de fórmulas:



$$A = bd$$

$$I_X = \frac{bd^3}{12} \qquad\qquad I_Y = \frac{b^3 d}{12}$$

De la fórmula de la carga critica de Euler:

$$P_{CRIT} = \frac{\pi^2 E\, I}{(KL)^2}$$

De la fórmula de esfuerzos:

$$\sigma_{CRIT} = \frac{P_{CRIT}}{A}$$

Sustituyendo la carga critica:

$$\sigma_{CRIT} = \frac{\frac{\pi^2 E\, I}{(KL)^2}}{A} = \frac{\pi^2 E\, I}{A(KL)^2}$$

Si: $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ $\quad despejando$ "A" $\quad$ A$=\frac{I}{r^2}$

$$\sigma_{CRIT} = \frac{\pi^2 E\, I}{\frac{I}{r^2}(KL)^2} = \frac{\pi^2 E}{\frac{(KL)^2}{r^2}}$$

También: $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ $\quad sabemos\ que: A = bd\ y\ I_Y = \frac{b^3 d}{12}$ $\quad r = \sqrt{\frac{\frac{b^3 d}{12}}{bd}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}}$ $\quad \therefore\ r^2 = \frac{b^2}{12}$

Sustituyendo en el esfuerzo crítico:

$$\sigma_{CRIT} = \frac{\pi^2 E}{\frac{(KL)^2}{\frac{b^2}{12}}} = \frac{\pi^2 E}{12\left(\frac{KL}{b}\right)^2}$$

$$\therefore\ \sigma_{CRIT} = \frac{\pi^2 E}{12\left(\frac{KL}{b}\right)^2}$$

Agregando el factor de seguridad:

$$fcd = \frac{\sigma_{CRIT}}{F.S}$$

$$fcd = \frac{\frac{\pi^2 E}{12\left(\frac{KL}{b}\right)^2}}{F.S}$$

$$F.S = 2.75$$

$$fcd = \frac{\frac{\pi^2 E}{12\left(\frac{KL}{b}\right)^2}}{2.75} = \frac{\pi^2 E}{33\left(\frac{KL}{b}\right)^2}$$

$$\therefore\ \mathbf{fcd} = \frac{\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{2}}\mathbf{E}}{\mathbf{33}\left(\frac{\mathbf{KL}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{2}}}$$

Haciendo: $fcd = fcp$

$$fcp = \frac{\pi^2 E}{33\left(\frac{KL}{b}\right)^2}$$

$$\left(\frac{KL}{b}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{33fcp}$$

$$\frac{KL}{b} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{33fcp}}$$

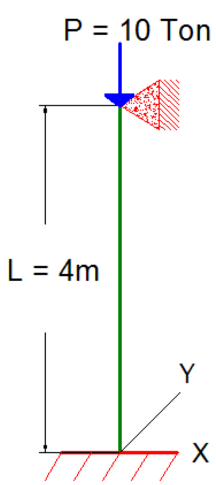
Si:

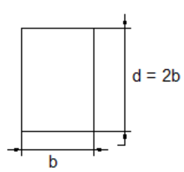
$$\frac{KL}{b} < \sqrt{\frac{\pi^2 E}{33fcp}} \quad No\ se\ presenta\ Pandeo$$

$$\frac{KL}{b} > \sqrt{\frac{\pi^2 E}{33fcp}} \quad Se\ presenta\ Pandeo$$

Problema 14:

Determinar las dimensiones de la siguiente columna empotrada si se aplica una carga de 10 toneladas. Una vez obtenidas las dimensiones revisar si soporta la carga aplicada.





Datos:

$$P = 10\ ton$$

$$E_m = 70000kg/cm^2$$

$$f_{cp} = 80kg/cm^2$$

$$F.S = 2.75$$

$$k = 0.8$$

$$L = 4m$$

Calculo de la carga crítica:

$$P_{CRIT} = F.S(P)$$

$$P_{CRIT} = 2.75(10) = 27.5\ Ton$$

De la fórmula de la carga crítica:

$$P_{CRIT} = \frac{\pi^2 E\, I}{(KL)^2}$$

Despejamos la inercia:

$$I = \frac{P_{CRIT}\,(KL)^2}{\pi^2 E} = \frac{(27.5 \times 1000)(0.8 \times 400)^2}{\pi^2(70000)} = 4076.006473 cm^4$$

Sabemos que la inercia es:

$$I_y = \frac{b^3 h}{12}$$

Tomándola en función de “b”:

$$I_y = \frac{b^3(2b)}{12} = \frac{1}{6} b^4$$

Igualando las inercias:

$$\frac{1}{6} b^4 = 4076.006473$$

Despejando “b”:

$$b = \sqrt[4]{6(4076.006473)} = 12.50536951 cm$$

$$\therefore b \approx 13 cm$$

$$h = 2(13) = 26 cm$$

Revisión:

Relación de esbeltez:

$$\frac{KL}{b} = \frac{0.8(400)}{13} = 24.61538462$$

Calculo del coeficiente de columna:

$$C.c = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{33 f cp}} = \sqrt{\frac{\pi^2(70000)}{33(80)}} = 16.17696066$$

$$\therefore \frac{KL}{b} > C.c \qquad se\ pandea$$

Se usara:

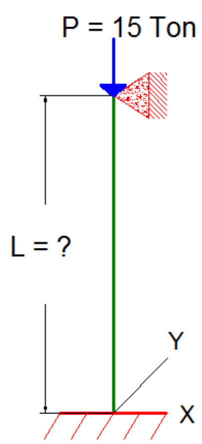
$$fcd = \frac{\pi^2 E}{33\left(\frac{KL}{b}\right)^2} = \frac{\pi^2(70000)}{33(24.61538462)^2} = 34.55179333kg/cm^2$$

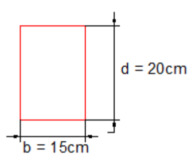
$$C = P = A \times fcd = (13 \times 26)(34.55179333) = 11678.50615kg$$

$$\therefore P = 11.67850615\ Ton\ > 10\ Ton \quad se\ acepta\ la\ sección$$

Problema 15:

Determinar la longitud de la siguiente columna bajo las siguientes solicitaciones y revisar si soporta la carga aplicada.





Datos:

$$f_{cp} = 80kg/cm^2$$

$$P = 15\ Ton$$

$$E_m = 70000kg/cm^2$$

$$F.S = 2.75$$

Calculo de la inercia:

$$I_y = \frac{b^3 h}{12} = \frac{(15)^3(20)}{12} = 5625cm^4$$

Calculo de la carga crítica:

$$P_{CRIT} = F.S(P)$$

$$P_{CRIT} = 2.75(15) = 41.25\ Ton$$

De la fórmula:

$$P_{CRIT} = \frac{\pi^2 E\ I}{(KL)^2}$$

Despejamos "L":

$$(KL)^2 = \frac{\pi^2 E\, I}{P_{CRIT}} \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \quad L = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\pi^2 E\, I}{P_{CRIT}}}$$

$$L = \frac{1}{0.80}\sqrt{\frac{\pi^2(70000)(5625)}{41.25 \times 1000}} = 383.6703097cm$$

$$L = \cong 380cm = 3.80m$$

Revisión:

$$\frac{KL}{b} = \frac{0.8(380)}{15} = 20.26666667$$

$$C.c = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{33fcp}} = \sqrt{\frac{\pi^2(70000)}{33 \times 80}} = 16.17696066$$

$$\therefore \frac{KL}{b} > C.c \qquad se\ pandea$$

$$fcd = \frac{\pi^2 E}{33\left(\frac{KL}{b}\right)^2} = \frac{\pi^2(70000)}{33(20.26666667)^2} = 50.97053549kg/cm^2$$

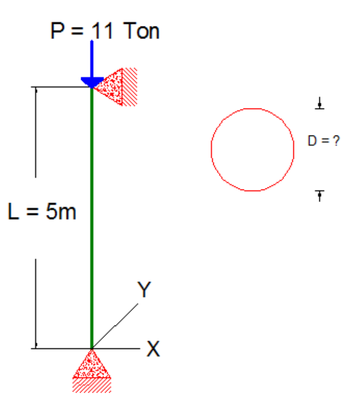
$$C = P = A \times fcd = (20 \times 15)(50.97053549) = 15291.16065kg$$

$$P = 15.29116065\, Ton > 15\, Ton \quad se\ acepta$$

Problema 16:

Determinar el diámetro de una columna sometida a una carga de 11 toneladas con las siguientes características y revisar si pasa con la carga aplicada:

(nota: para convertir a la sección circular se recomienda calcular primeramente como una columna cuadrada para después utilizar una sección circular con la misma área transversal).



DATOS:

$$f_{cp} = 80kg/cm^2$$

$$E_m = 100000kg/cm^2$$

$$K = 1.0$$

$$F.S = 2.75$$

$$P_{CRIT} = F.S(P)$$

$$P_{CRIT} = 2.75(11) = 30.25\ Ton$$

De la fórmula de la carga crítica:

$$P_{CRIT} = \frac{\pi^2 E\, I}{(KL)^2}$$

Despejamos la inercia:

$$I = \frac{P_{CRIT}\,(KL)^2}{\pi^2 E} = \frac{(30.25 \times 1000)(1.0 \times 500)^2}{\pi^2(100000)} = 7662.414513 cm^4$$

Inercia para una sección cuadrada:

$$I_y = \frac{b^4}{12}$$

Despejando “b”:

$$b = \sqrt[4]{12 \times I_y} = \sqrt[4]{12 \times 7662.414513} = 17.41352614 cm$$

$$b \approx 18 cm$$

Calculo del área como sección cuadrada:

$$A = 18 \times 18 = 324 cm^2$$

Área como sección circular:

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

Despejando el diámetro:

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 324}{\pi}} = 20.31082501 cm$$

$$D \approx 21 cm$$

$$\frac{KL}{b} = \frac{1.0(500)}{18} = 27.77777778$$

$$C.c = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{33 f cp}} = \sqrt{\frac{\pi^2(100000)}{33 \times 80}} = 19.33516619$$

$$\therefore \frac{KL}{b} > C.c \qquad se\ pandea$$

$$fcd = \frac{\pi^2 E}{33\left(\frac{KL}{b}\right)^2} = \frac{\pi^2(100000)}{33(27.77777778)^2} = 38.76062819 kg/cm^2$$

$$C = P = A \times fcd = (18 \times 18)(38.76062819) = 12558.44353 kg$$

$$P = 12.55844353\, Ton > 11\, Ton \quad se\ acepta$$

7. DIMENSIONAMIENTO EN COLUMNAS DE CONCRETO.

El concreto es un material pétreo artificial obtenido de la mezcla en proporciones determinadas de cemento, agregados (arena, grava) y agua.

El cemento y el agua forman una pasta que rodea a los agregados constituyendo un material heterogéneo.

- Concreto simple.

Es un material económico con una resistencia a la compresión relativamente alta pero con escasa resistencia a la tensión. Su resistencia a la tensión es tan reducida que nunca se utiliza en miembros bajo este tipo de acción, para resistir tensiones se emplea refuerzo de acero en forma de barras colocadas en las zonas donde se prevé que se desarrollaran las tensiones bajo las acciones de servicio.

El acero restringe el desarrollo de las grietas originadas por la poca resistencia a la tensión del concreto a esta combinación el concreto simple con refuerzo constituye lo que se llama concreto reforzado. El concreto es uno de los materiales más usados en obra de ingeniería civil debido a las ventajas que tiene como son:

1. Alta resistencia a la compresión.
2. Durabilidad.
3. Resistencia al intemperismo.
4. Resistencia al fuego.
5. Facilidad de fabricación.

Su peso volumétrico es de aproximadamente de 1.9 a 2.4 t/m^3, su módulo de elasticidad varía según las hipótesis y los reglamentos de la construcción.

Si su peso volumétrico es $< a$ 2.2 t/m^3 o si $f\,'c < 250 kg/cm^2$

$$E_C = 8000\sqrt{f\,'c}$$

Si su peso volumétrico es $> a$ 2.2 t/m^3 o si $f\,'c \geq 250 kg/cm^2$

$$E_C = 14000\sqrt{f\,'c}$$

El índice de resistencia más común en el caso del concreto es el obtenido del ensaye de experimentos a compresión simple, no existe una convención aceptada universalmente sobre qué tipo de espécimen es el mejor para realizar este tipos de ensayes, comúnmente se utiliza un cilindro de 15x30cm, de 30x60cm o de 60x120cm, generalmente las resistencias se determinan a los 28 días de edad del concreto.

En una prueba de resistencia esta se mide a cada aumento cuando vale la carga y cuánto vale la deformación unitaria, si dividimos la carga entre el área de la probeta se obtiene el esfuerzo.

- Elementos a carga axial.

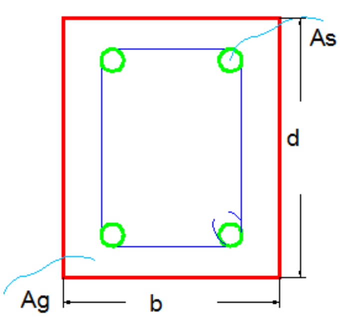
No es común que los elementos del concreto reforzado de estructuras reales se encuentren únicamente a compresión axial debido a que casi siempre las estructuras son continuas, la carga axial se encuentra actuando simultáneamente por un momento flexionante como es el caso de las columnas.

Existen 2 tipos básicos de columnas de concreto reforzado y son: columnas con estribos y columnas con suncho.

Las columnas con estribos el refuerzo transversal está formado por anillos cerrados colocados a distancias de acuerdo a las hipótesis de los reglamentos de construcción.

El número mínimo de varillas será de 4 varillas #5 (5/8) o mínimo $7.9173043608984cm^2$expresado en área. El factor de resistencia se considera de 0.70 para las columnas rectangulares.

Deducción de las formulas:



(Sección rectangular de concreto con un armado mínimo)

$$A_C = A_g - A_S$$

Dónde:

$$A_C = \acute{a}rea\ de\ la\ columna.$$

$$A_g = \acute{a}rea\ de\ concreto.$$

$$A_S = \acute{a}rea\ del\ acero.$$

De la fórmula de esfuerzos:

$$\sigma_c A_C + \sigma_S A_S = P$$

Haciendo un cambio de esfuerzos por $f\,{'}c$ y $f\,{'}s$:

$$A_C f\,{'}\,c + A_S f\,{'}s = P_{CRIT} \quad ----1$$

Por compatibilidad:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c$$

Y el modulo elástico:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c = \frac{f{'}c}{E_C} \qquad \therefore \qquad \frac{f{'}c}{E_C} = \frac{f{'}s}{E_S}$$

Despejando el esfuerzo del acero:

$$f{'}s = \frac{E_S\, f\,{'}c}{E_C}$$

Involucrando la relación modular:

$$n = \frac{E_S}{E_C}$$

Por compatibilidad:

$$f{'}s = nf\,{'}c$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación 1:

$$A_C f\,{'}c + A_S n f\,{'}c = P_{CRIT}$$

Despejando la resistencia a la compresión simple del concreto:

$$f\,{'}c\,(A_C + nA_S) = P_{CRIT}$$

$$f\,{'}c = \frac{P_{CRIT}}{(A_C + nA_S)}$$

Sustituyendo el área de la columna:

$$f\,{'}c = \frac{P_{CRIT}}{(A_g - A_S) + nA_S}$$

También:

$$\rho = \frac{A_S}{A_g}$$

$$A_S = \rho A_g$$

Sustituyendo:

$$f\,'c = \frac{P_{CRIT}}{A_g - \rho A_g + n\rho A_g} = \frac{P_{CRIT}}{A_g(1 - \rho + n\rho)} = \frac{P_{CRIT}}{A_g[1 + (n-1)\rho]}$$

$$\therefore\ \ \mathbf{f\,'c = \frac{P_{CRIT}}{A_g[1 + (n-1)\rho]}}$$

<u>Fórmula para el cálculo de la revisión del esfuerzo del concreto</u>

Según la experimentación se plantea la fórmula para la carga critica que es:

$$\mathbf{P_{CRIT} = Fr\left[A_g f''c + A_s f'y\right]}$$

Dónde:

$$P_{CRIT} = CARGA\ CRITICA\ (FUERZA\ AXIAL\ DE\ LA\ COLUMNA)$$

$$A_g = \text{á}rea\ del\ concreto$$

$$f'y = esfuerzo\ de\ fluencia\ del\ acero\ (4200kg/cm^2)$$

Y $f''c$:

$$f^*c = 0.80f'c$$

Si:

$$f^*c \leq 280kg/cm^2$$

$$f''c = \beta f^*c$$

Dónde:

$$\beta = 0.85$$

Si:

$$f^*c > 280kg/cm^2$$

$$f''c = \beta f^*c$$

Dónde:

$$\beta = 1.05 - \frac{f^*c}{1400} \geq 0.65$$

Acero longitudinal mínimo y máximo (cuantía):

$$\rho_{min} = \frac{20}{f'y}$$

$$\rho_{max} = 0.06$$

Para la separación de los estribos usaremos:

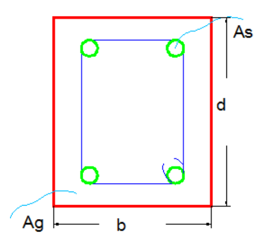
$$Sep_{max} = \begin{cases} \dfrac{850}{\sqrt{f'y}}\theta_{varilla} \\ 48\theta_{estribo} \\ \dfrac{1}{2}(lado\ menor\ de\ la\ sección\ de\ la\ columna) \end{cases}$$

Nota: para el cálculo de estas fórmulas se propondrá el diámetro del estribo.

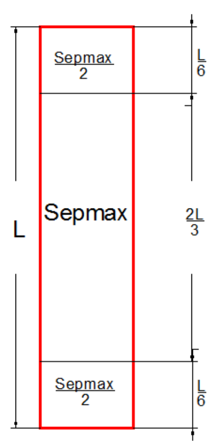
De estas tres vamos a tomar la más desfavorable que en este caso la separación menor.

También adoptaremos la siguiente configuración de separación de estribos de la columna:

a) La dimensión transversal máxima de la columna:



b) Un sexto de su altura libre:



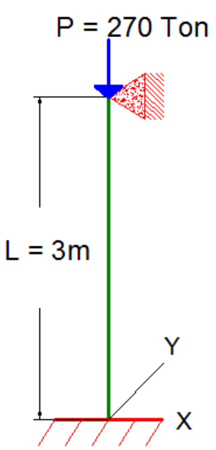
c) De 600mm

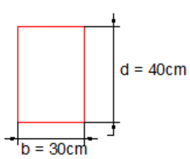
Para los problemas planteados anexaremos una tabla de área de acero: (TABLA N° 1)

VARILLA #	Número de varillas. Area(cm^2)													
/#8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2.50	0.49483152	0.98966305	1.48449457	1.97932609	2.47415761	2.96898914	3.46382066	3.95865218	4.45348370	4.94831523	5.44314675	5.93797827	6.43280979	6.92764132
3	0.71255739	1.42511478	2.13767218	2.85022957	3.56278696	4.27534435	4.98790175	5.70045914	6.41301653	7.12557392	7.83813132	8.55068871	9.26324610	9.97580349
4	1.26676870	2.53353740	3.80030609	5.06707479	6.33384349	7.60061219	8.86738088	10.13414958	11.40091828	12.66768698	13.93445568	15.20122437	16.46799307	17.73476177
5	1.97932609	3.95865218	5.93797827	7.91730436	9.89663045	11.87595654	13.85528263	15.83460872	17.81393481	19.79326090	21.77258699	23.75191308	25.73123917	27.71056526
6	2.85022957	5.70045914	8.55068871	11.40091828	14.25114785	17.10137742	19.95160699	22.80183656	25.65206613	28.50229570	31.35252527	34.20275484	37.05298441	39.90321398
7	3.87947914	7.75895827	11.63843741	15.51791655	19.39739568	23.27687482	27.15635396	31.03583309	34.91531223	38.79479137	42.67427051	46.55374964	50.43322878	54.31270792
8	5.06707479	10.13414958	15.20122437	20.26829916	25.33537395	30.40244875	35.46952354	40.53659833	45.60367312	50.67074791	55.73782270	60.80489749	65.87197228	70.93904707
9	6.41301653	12.82603306	19.23904960	25.65206613	32.06508266	38.47809919	44.89111573	51.30413226	57.71714879	64.13016532	70.54318186	76.95619839	83.36921492	89.78223145
10	7.91730436	15.83460872	23.75191308	31.66921744	39.58652180	47.50382617	55.42113053	63.33843489	71.25573925	79.17304361	87.09034797	95.00765233	102.92495669	110.84226105
11	9.57993828	19.15987655	28.73981483	38.31975311	47.89969138	57.47962966	67.05956794	76.63950621	86.21944449	95.79938277	105.37932104	114.95925932	124.53919760	134.11913587
12	11.40091828	22.80183656	34.20275484	45.60367312	57.00459140	68.40550968	79.80642796	91.20734624	102.60826452	114.00918280	125.41010108	136.81101936	148.21193764	159.61285592

Problema 17:

Calcular el área de acero longitudinal de una columna de concreto armado con una carga axial de 270 toneladas y una sección de 40x30cm con un concreto de $360 kg/cm^2$ y un esfuerzo del acero de $4200 kg/cm^2$, determinar la separación de los estribos así como el diámetro del mismo. Y revisar si dicho armado y sección soporta la carga aplicada.





Datos:

$$f'c = 360 kg/cm^2$$

$$f'y = 4200 kg/cm^2.$$

$$r = 5cm$$

$$\frac{A_S}{A_g} = 2.0\%$$

$$Fr = 0.7$$

Calculo del área del concreto:

$$A_g = 40 \times 30 = 1200 cm^2$$

$$A_S = 0.02 A_g$$

$$A_S = 0.02(1200) = 24 cm^2$$

Checando el acero mínimo y máximo:

$$\rho_{min} = \frac{20}{f'y} = \frac{20}{4200} = 0.00476190$$

$$A_{SMIN} = \rho_{min}bd = 0.00476190(40)(30) = 5.71428cm^2$$

$$\rho_{max} = 0.06$$

$$A_{SMAX} = \rho_{max}bd = 0.06(40)(30) = 72cm^2$$

Cumple con el acero mínimo y no sobre-pasa el acero máximo.

$$\therefore A_{Sreq} = 24cm^2$$

Usando la tabla N° 1:

$$\mathbf{A_{Sdis} = 5\#8 = 25.33537395cm^2}$$

Revisión de la carga de la columna:

$$\mathrm{P_{CRIT} = Fr\left[A_g f"c + A_s f'y\right]}$$

En este caso sustituiremos el área del concreto por el área de la columna:

$$A_C = A_g - A_S = 1200 - 25.33537395 = 1174.66462605cm^2$$

$$f^*c = 0.80f'c = 0.80 \times 360 = 288kg/cm^2$$

$$f^*c > 280kg/cm^2$$

$$f"c = \beta f^*c$$

$$\beta = 1.05 - \frac{f^*c}{1400} \geq 0.65$$

$$\beta = 1.05 - \frac{288}{1400} = 0.84428571 > 0.65$$

$$f"c = \beta f^*c = 0.84428571 \times 288 = 243.15428448kg/cm^2$$

$$\mathrm{P_{CRIT}} = 0.7[(1174.66462605 \times 243.15428448) + (25.33537395 \times 4200)] = 274423.3151kg$$

$$\therefore \mathrm{P_{CRIT}} = 274.4233151\,Ton > 270\,Ton \quad se\ acepta$$

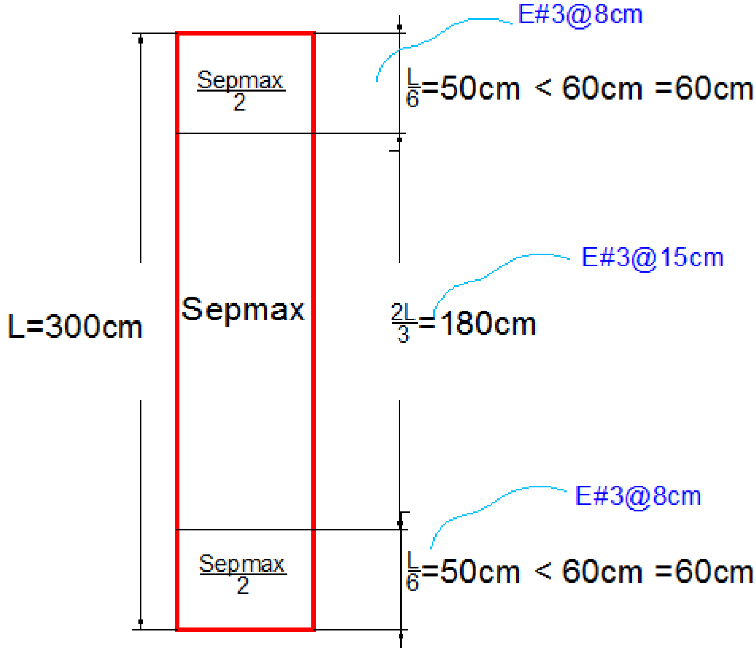
Para la separación de los estribos usaremos:

Proponiendo: $ESTRIBO\ \#3, \theta = 0.9525cm$

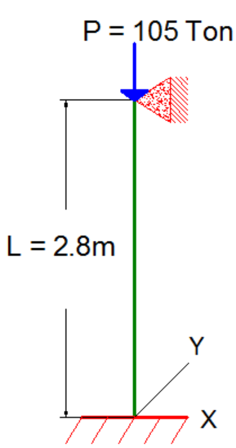
$$Sep_{max} = \begin{cases} \dfrac{850}{\sqrt{f'y}}\theta_{varilla} = \dfrac{850}{\sqrt{4200}}\left(\dfrac{\left(\frac{8}{8}\times 2.54\right)^2(\pi)}{4}\right) = 66cm \\ 48\theta_{estribo} = 48(0.9525) = 45cm \\ \dfrac{1}{2}(lado\ menor\ de\ la\ secci\acute{o}n\ de\ la\ columna) = \dfrac{30}{2} = 15cm \end{cases}$$

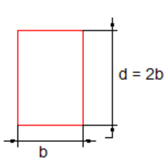
$$\therefore \boldsymbol{se\ usara\ E\#3@15cm}$$

Según la reglamentación ya mencionada la columna se armara así:



Problema 18:





Determinar las dimensiones de la siguiente columna de concreto, área de acero y separación de estribos sometida a la siguiente carga.

Datos:

$$f'c = 200kg/cm^2$$

$$f'y = 4200kg/cm^2.$$

$$r = 5cm$$

$$\frac{A_S}{A_g} = 1.5\%$$

$$Fr = 0.7$$

$$f^{*}c = 0.80f'c$$

Si:

$$f^{*}c \leq 280kg/cm^{2}$$

$$f''c = \beta f^{*}c$$

Dónde:

$$\beta = 0.85$$

$$f^{*}c = 0.80f'c = 0.8(200) = 160kg/cm^{2}$$

$$f''c = \beta f^{*}c = 0.85(160) = 136kg/cm^{2}$$

$$\frac{A_S}{A_g} = 1.5\%$$

Despejamos el área de acero:

Sabemos que $A_g = área\ del\ concreto = b(2b) = 2b^{2}$

$$A_S = 0.015A_g = 0.015(2b^{2}) = 0.03b^{2}$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\mathrm{P_{CRIT}} = \mathrm{Fr}\left[\mathrm{A_g f''c + A_s f'y}\right]$$

$$105000 = 0.7[(2b^{2})(136) + (0.03b^{2})(4200)]$$

Despejando "b":

$$b = 19.41351132 \cong 20cm$$

$$h = 2b = 2(20) = 40cm + r = 40 + 5 = 45cm$$

$$\therefore b = 20cm \quad y \quad h = 45cm$$

Revisión de la relación de esbeltez:

$$\frac{kL}{b} < 15 = \frac{0.80(280)}{20} = 11.2 < 15$$

(Se tomara como "b" a la sección menor de la columna y la esta relación de esbeltez tiene que ser menor a 15 para columna de concreto).

Área de acero:

$$A_S = 0.03(20)^2 = 12cm^2$$

Usando la tabla N°1:

$$\boldsymbol{A_{S\ REQUERIDO} = 4\#7 = 15.5179cm^2}$$

Revisión:

$$\mathrm{P_{CRIT}} = \mathrm{Fr[A_c f"c + A_s f'y]}$$

Para la revisión usaremos la literal: $A_c = área\ de\ la\ concreto(área\ de\ la\ columna - área\ de\ acero)$

$$\mathrm{P_{CRIT}} = \frac{0.7\big[\big((20)(45) - (15.5179)\big)(136) + (15.5179)(4200)\big]}{1000} = 129.8253Ton$$

$$\therefore 129.8253Ton > 105Ton \quad SE\ ACEPTA$$

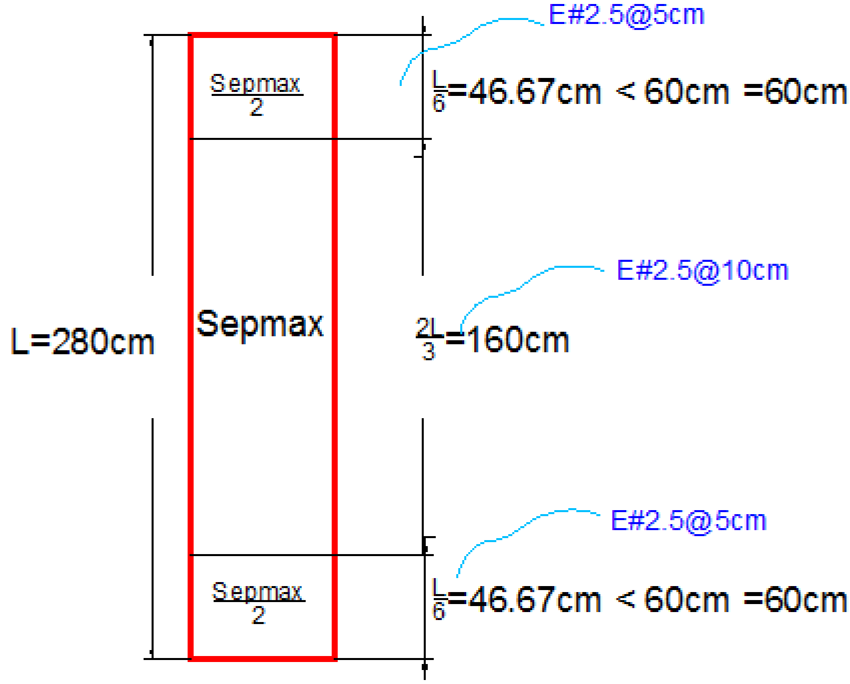
Para la separación de los estribos usaremos:

Proponiendo: $ESTRIBO\ \#2.5, \theta = 0.79375cm$

$$Sep_{max} = \begin{cases} \dfrac{850}{\sqrt{f'y}}\theta_{varilla} = \dfrac{850}{\sqrt{4200}}\left(\dfrac{\left(\frac{7}{8}\times 2.54\right)^2(\pi)}{4}\right) = 50cm \\ 48\theta_{estribo} = 48(0.79375) = 38.1cm \\ \dfrac{1}{2}(lado\ menor\ de\ la\ sección\ de\ la\ columna) = \dfrac{20}{2} = 10cm \end{cases}$$

$$\therefore\ se\ usara\ E\#2.5@10cm$$

Según la reglamentación ya mencionada la columna se armara así:



8. DEFLEXIÓN EN VIGAS.

Método de la ecuación diferencial de la elástica unificado con el método de trabajo virtual.

El siguiente tema tratara de deflexión en vigas el cual tendrá el objetivo de determinar analíticamente la posición de la flecha máxima así como la propia flecha máxima para ello se empleara el método de la ecuación diferencial de la elástica que es:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

Dónde:

$$E\ = MODULO\ DE\ ELASTICIDAD\ (\frac{fuerza}{longitud\ cuadrada}, \frac{Ton}{m^2}, \frac{kg}{cm^2}\ etc)$$

$$I = INERCIA\ DE\ LA\ SECCIÓN\ DE\ LA\ VIGA.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = SEGUNDA\ DERIVADA\ DE\ LA\ FUNCIÓN.$$

$$M = ECUACIÓN\ DEL\ MOMENTO\ DE\ CADA\ TRAMO\ DE\ LA\ VIGA.$$

Dado al número de constantes de integración según el número de tramos de la viga a analizar y la complejidad de la misma para calcular las condiciones iniciales usaremos la fórmula de trabajo virtual para obtener la rotación y la flecha o deflexión en un cierto punto.

Formula del desplazamiento rotacional en cualquier punto de la viga.

$$\theta_x = \int_{L1}^{L2} \frac{Mm}{EI}$$

Dónde:

$$M = ecuación\ de\ momento\ de\ la\ viga\ real\ de\ cada\ tramo.$$

$$m = ecuación\ de\ momento\ de\ la\ viga\ ficticia\ con\ un\ momento\ unitario\ en\ el\ punto\ donde\ se$$

$$desea\ conocer\ el\ desplazamiento\ rotacional.$$

$$E = MODULO\ DE\ ELASTICIDAD\ (\frac{fuerza}{longitud\ cuadrada}, \frac{Ton}{m^2}, \frac{kg}{cm^2}\ etc)$$

$$I = INERCIA\ DE\ LA\ SECCIÓN\ DE\ LA\ VIGA.$$

Formula del desplazamiento vertical en cualquier punto de la viga.

$$y_x = \int_{L1}^{L2} \frac{Mm}{EI}$$

Dónde:

$$M = ecuación\ de\ momento\ de\ la\ viga\ real\ de\ cada\ tramo.$$

$$m = ecuación\ de\ momento\ de\ la\ viga\ ficticia\ con\ una\ carga\ puntual\ unitaria\ en\ el\ punto\ donde\ se$$

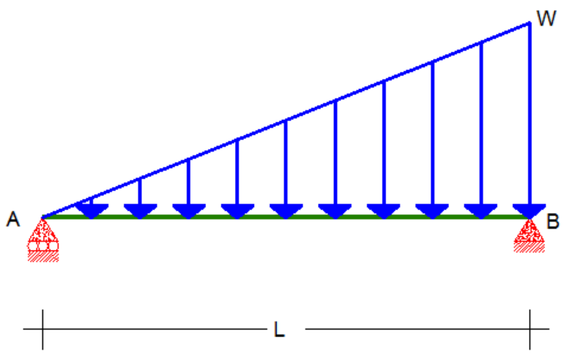
$$desea\ conocer\ el\ desplazamiento\ rotacional.$$

$$E = MODULO\ DE\ ELASTICIDAD\ (\frac{fuerza}{longitud\ cuadrada}, \frac{Ton}{m^2}, \frac{kg}{cm^2}\ etc)$$

$$I = INERCIA\ DE\ LA\ SECCIÓN\ DE\ LA\ VIGA.$$

Problema 19:

Encontrar la flecha máxima de la siguiente viga:



$$\sum M_A = 0$$

$$\frac{WL}{2}\left(\frac{2}{3}L\right) - LR_{BY} = 0$$

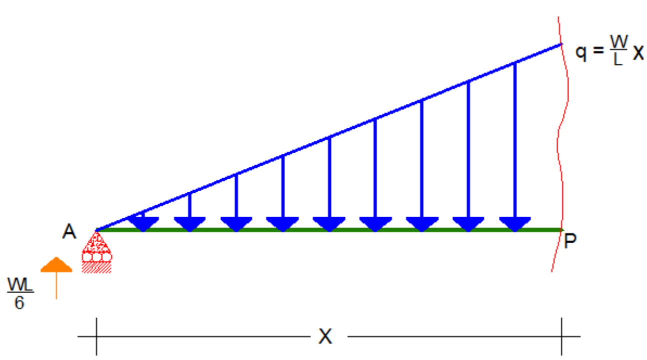
$$R_{BY} = \frac{WL}{3} \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - \frac{WL}{2} + \frac{WL}{3} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{WL}{6} \uparrow$$

Obteniendo la ecuación de momento:



$$0 \leq X \leq L$$

$$q - x$$

$$W - L$$

$$q = \frac{W}{L}x$$

$$\sum M_P = 0$$

$$M = \frac{WL}{6}x - \frac{(x)\left(\frac{W}{L}x\right)}{2}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{WL}{6}x - \frac{W}{6L}x^3$$

$$\mathbf{M = \frac{WL}{6}x - \frac{W}{6L}x^3}$$

Aplicando la ecuación diferencial:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

Integrando una vez se obtiene la ecuación del giro:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{WL}{6}x - \frac{W}{6L}x^3$$

$$EI\int\frac{d^2y}{dx} = \int\left(\frac{WL}{6}x - \frac{W}{6L}x^3\right)dx = \frac{WL}{12}x^2 - \frac{W}{24L}x^4 + C_1$$

$$\therefore EI\frac{dy}{dx} = \frac{WL}{12}x^2 - \frac{W}{24L}x^4 + C_1$$

Si:

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

$$\mathbf{EI\theta = \frac{WL}{12}x^2 - \frac{W}{24L}x^4 + C_1}$$

Integrando nuevamente se tiene la ecuación de la flecha:

$$EI\int dy = \int\left(\frac{WL}{12}x^2 - \frac{W}{24L}x^4 + C_1\right)dx = \frac{WL}{36}x^3 - \frac{W}{120L}x^5 + C_1x + C_2$$

$$\mathbf{EIy = \frac{WL}{36}x^3 - \frac{W}{120L}x^5 + C_1x + C_2}$$

Calculo de las constantes de integración, según los grados de libertad de la viga:

Cuando:

$$x = 0 \quad \rightarrow \; y = 0 \quad pero \;\; \theta = ?$$

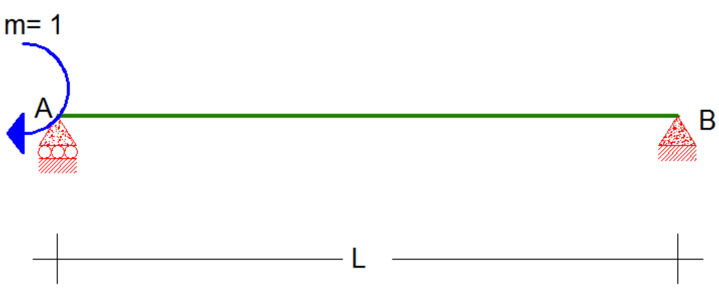
La flecha cuando hay una distancia de cero, es cero ya que en ese punto tenemos el apoyo móvil lo cual nos indican los grado de libertad que la deflexión es de cero, pero el giro a una distancia de cero no lo conocemos ya que los grados de libertad nos dicen que cuando hay un apoyo móvil o fijo la rotación es diferente de cero.

Calculo de la rotación cuando $x = 0$

Aplicamos trabajo virtual:

Para conocer la rotación en el punto que deseamos aplicamos un momento unitario sobre la viga a una distancia de cero ya que nos interesa conocer esa rotación a esa distancia:

VIGA FICTICIA PARA LA ROTACIÓN:



Obtenemos las ecuaciones de momento si es el caso:

$$\sum m_A = 0$$

$$1 - LR_{BY} = 0$$

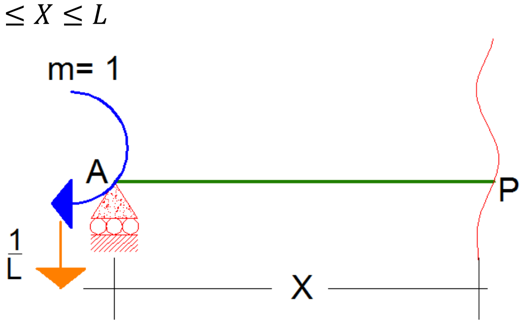
$$R_{BY} = \frac{1}{L} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} + \frac{1}{L} = 0$$

$$R_{AY} = -\frac{1}{L} \downarrow$$

$0 \leq X \leq L$

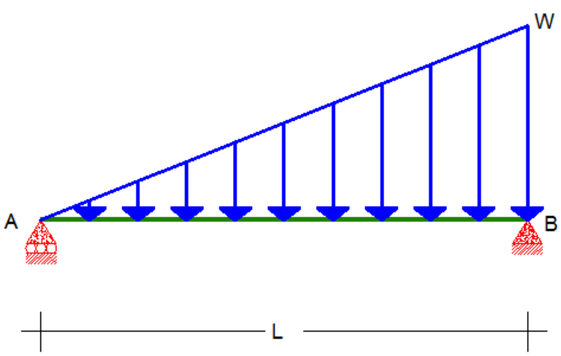


$$\sum m_P = 0$$

$$\mathbf{m = 1 - \frac{1}{L}X}$$

Ahora recordamos la ecuación de momento de la viga original que es:

<u>VIGA REAL:</u>



$$\mathbf{M = \frac{WL}{6}x - \frac{W}{6L}x^3}$$

Y aplicamos la fórmula de trabajo virtual para la rotación en cualquier punto que es:

$$\theta_X = \int_{L_2}^{L_1} \frac{Mm}{EI}\, dx$$

Dónde:

$$M = Ecuación\ de\ momento\ de\ la\ viga\ real.$$

$$m = Ecuación\ de\ momento\ de\ la\ viga\ ficticia\ (momento\ unitario\ o\ carga\ unitaria).$$

$$L_1 = Limite\ superior\ del\ tramo\ 1\ o\ n.$$

$$L_2 = Limite\ inferior\ del\ tramo\ 2\ o\ m.$$

$$\therefore \theta_x = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{\mathrm{WL}}{6}\mathrm{X} - \frac{\mathrm{W}}{6\mathrm{L}}\mathrm{X}^3\right)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{L}}\mathrm{X}\right)dx = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{\mathrm{WL}}{6}\mathrm{X} - \frac{\mathrm{W}}{6\mathrm{L}}\mathrm{X}^3 - \frac{W}{6}X^2 + \frac{W}{6L^2}X^4\right)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{WL}{12}X^2 - \frac{W}{24L}X^4 - \frac{W}{18}X^3 + \frac{W}{30L^2}X^5\right]_0^L = \frac{1}{EI}\left(\frac{WL}{12}L^2 - \frac{W}{24L}L^4 - \frac{W}{18}L^3 + \frac{W}{30L^2}L^5\right) =$$

$$\theta_x = \frac{1}{EI}\left(\frac{WL^3}{12} - \frac{WL^3}{24} - \frac{WL^3}{18} + \frac{WL^3}{30}\right) = \frac{7WL^3}{360EI}$$

$$\therefore \boldsymbol{\theta_x = \frac{7WL^3}{360EI}}$$

Ahora si ya conocemos todas las condiciones de frontera que son:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$$

Y el giro ya está calculado a una distancia de cero pero hay que cambiarle de signo porque el método de trabajo virtual y la ecuación diferencial trabaja diferentes criterios de signos:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = -\frac{7WL^3}{360EI}$$

Por lo cual ya podemos calcular las constantes de integración:

$$\boldsymbol{EI\theta = \frac{WL}{12}x^2 - \frac{W}{24L}x^4 + C_1}$$

$$\boldsymbol{EIy = \frac{WL}{36}x^3 - \frac{W}{120L}x^5 + C_1x + C_2}$$

Si

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{7WL^3}{360EI}$$

$$EI\left(-\frac{7WL^3}{360EI}\right) = \frac{WL}{12}(0)^2 - \frac{W}{24L}(0)^4 + C_1$$

$$\therefore C_1 = -\frac{7WL^3}{360}$$

Y:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$$

$$0 = \frac{WL}{36}(0)^3 - \frac{W}{120L}(0)^5 - \frac{7WL^3}{360}(0) + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Finalmente:

$$\mathbf{EI\theta = \frac{WL}{12}x^2 - \frac{W}{24L}x^4 - \frac{7WL^3}{360}}$$

$$\mathbf{EIy = \frac{WL}{36}x^3 - \frac{W}{120L}x^5 - \frac{7WL^3}{360}x}$$

Para la conocer la posición de la flecha máxima la ecuación del giro del tramo de la viga que deseamos conocer la igualamos a cero, en este caso para la viga solo tenemos un tramo:

$$\theta = 0$$

$$0 = \frac{WL}{12}x^2 - \frac{W}{24L}x^4 - \frac{7WL^3}{360}$$

Y resolvemos la ecuación de cuarto grado:

Haciendo un cambio de variable:

$$m = x^2$$

$$\frac{WL}{12}m - \frac{W}{24L}m^2 - \frac{7WL^3}{360} = 0$$

Nos queda una ecuación de segundo grado:

Aplicamos:

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = -\frac{W}{24L}$$

$$b = \frac{WL}{12}$$

$$c = -\frac{7WL^3}{360}$$

Pero para fines matemáticos podemos de momento despreciar “W” y “L” para poder resolver la ecuación y al final pondremos los resultados en función de “L^2” ya que finalmente estamos calculando una cierta distancia pero al cuadrado por el cambio de variable que aplicamos:

$$a = -\frac{1}{24}$$

$$b = \frac{1}{12}$$

$$c = -\frac{7}{360}$$

$$m = \frac{-\left(\frac{1}{12}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{24}\right)\left(-\frac{7}{360}\right)}}{2\left(-\frac{1}{24}\right)} =$$

$$m = 1 \pm \frac{2\sqrt{30}}{15}$$

$$m_1 = \left(1 - \frac{2\sqrt{30}}{15}\right)L^2 \cong 0.2697032566L^2$$

$$m_2 = m_1 = \left(1 + \frac{2\sqrt{30}}{15}\right)L^2 \cong 1.730296743L^2$$

Ahora aplicamos el cambio de variable hecho inicialmente:

$$m = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{m}$$

$$x_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{2\sqrt{30}}{15}\right)L^2} \cong 0.5193296223L$$

$$x_2 = -\sqrt{\left(1 - \frac{2\sqrt{30}}{15}\right)L^2} \cong -0.5193296223L$$

$$x_3 = \sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{30}}{15}\right)L^2} \cong 1.315407443L$$

$$x_4 = -\sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{30}}{15}\right)L^2} \cong -1.315407443L$$

Nuestra solución será "x_1" porque esta dentro del intervalo de la viga que es $[0, L]$ es decir nuestra solución debe de estar entre cero y una distancia "L" y además positiva ahí tiene que estar la posición de la flecha máxima.

$$x_{max} = 0.5193296223L$$

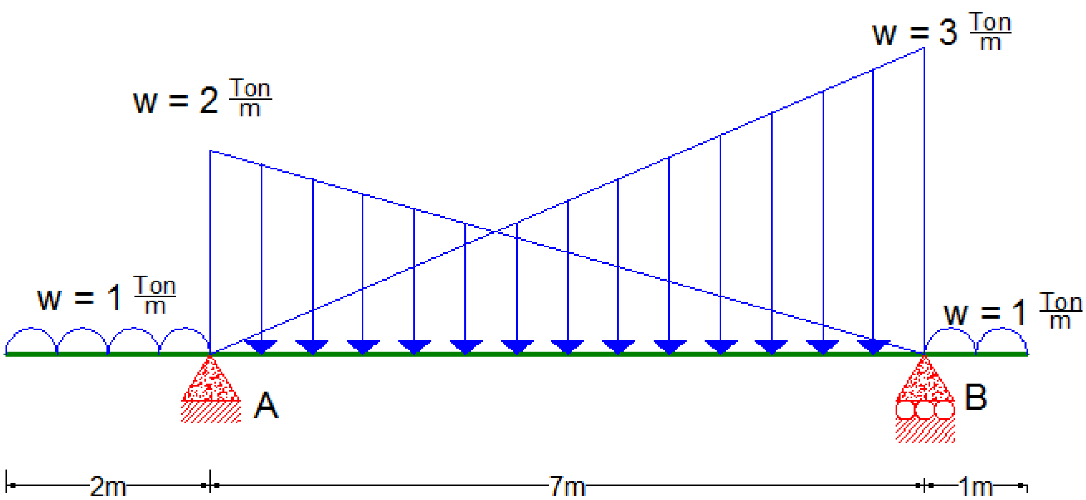
Ahora ese valor lo sustituimos en la ecuación de la flecha máxima:

$$EIy_{max} = \frac{WL}{36}(0.5193296223L)^3 - \frac{W}{120L}(0.5193296223L)^5 - \frac{7WL^3}{360}(0.5193296223L)$$

$$\mathbf{y_{max} = -\frac{0.006522184231WL^4}{EI}}$$

Problema 20:

Obtener la flecha máxima de cada tramo de la siguiente viga y detallar los resultados:



$$\sum M_A = 0$$

$$-1(2)\left(\frac{1}{2}(2)\right) + \frac{2(7)}{2}\left(\frac{1}{3}(7)\right) + \frac{3(7)}{2}\left(\frac{2}{3}(7)\right) + (1)(1)\left(\frac{1}{2}(1) + 7\right) - 7R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = \frac{425}{42} Ton \uparrow \cong 10.119048 Ton \uparrow$$

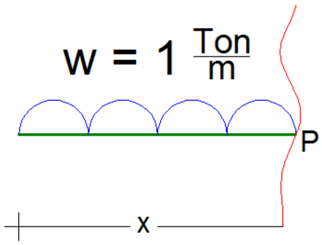
$$\sum F_Y = 0$$

$$-1(2) + R_{AY} - \frac{2(7)}{2} - \frac{3(7)}{2} + \frac{425}{42} - 1(1) = 0$$

$$R_{AY} = \frac{218}{21} Ton \uparrow \cong 10.380952 Ton \uparrow$$

Obteniendo las ecuaciones de momento de cada tramo:

$$0 \leq X \leq 2m$$



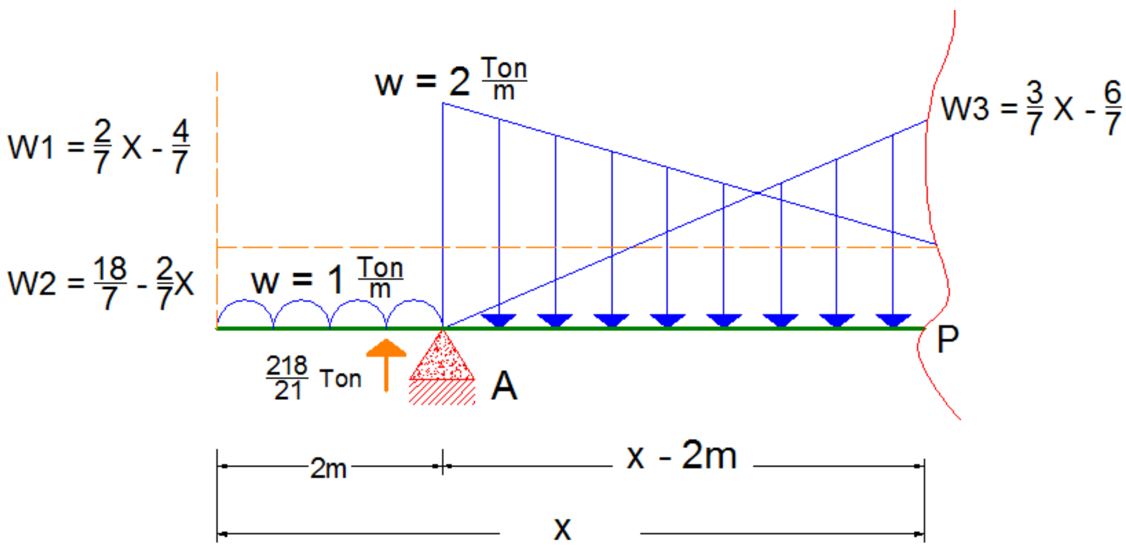
$$\sum M_P = 0$$

$$M_1 = -1(X)\left(\frac{X}{2}\right) = -\frac{1}{2}X^2$$

$$\therefore M_1 = -\frac{1}{2}X^2$$

$$2 \leq X \leq 9m$$

Porque los triángulos traslapados están en la misma longitud de la barra, y por eso solo se hace un solo corte.



Calculo de "W1":

$$2\frac{t}{m} - - - - 7m$$

$$W1 - - - - (X-2)$$

$$7W1 = 2X - 4$$

$$W1 = \frac{2}{7}X - \frac{4}{7}$$

Calculo de "W2":

$$W2 = 2 - \left(\frac{2}{7}X - \frac{4}{7}\right)$$

$$W2 = \frac{18}{7} - \frac{2}{7}X$$

Calculo de “W3”:

$$3\frac{t}{m} - - - - -7m$$

$$W3 - - - - -(X-2)$$

$$7W3 = 3X - 6$$

$$W3 = \frac{3}{7}X - \frac{6}{7}$$

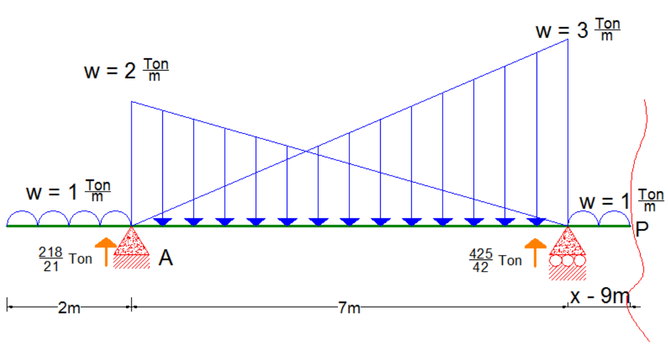
$$\sum M_P = 0$$

$$M_2 = -1(2)\left(\frac{1}{2}(2) + X - 2\right) + \frac{218}{21}(X-2) - \left(\frac{18}{7} - \frac{2}{7}X\right)(X-2)\left(\frac{X-2}{2}\right) - \frac{\left(\frac{2}{7}X - \frac{4}{7}\right)(X-2)}{2}\left(\frac{2(X-2)}{3}\right) - \frac{\left(\frac{3}{7}X - \frac{6}{7}\right)(X-2)}{2}\left(\frac{X-2}{3}\right)$$

$$M_2 = \frac{176}{21}X - \frac{394}{21} - \left(\frac{9}{7} - \frac{1}{7}X\right)(X^2 - 4X + 4) - \left(\frac{2}{21}X - \frac{4}{21}\right)(X^2 - 4X + 4) - \left(\frac{1}{14}X - \frac{1}{7}\right)(X^2 - 4X + 4)$$

$$M_2 = \frac{176}{21}X - \frac{394}{21} - \left(\frac{9}{7}X^2 - \frac{1}{7}X^3 - \frac{36}{7}X + \frac{4}{7}X^2 + \frac{36}{7} - \frac{4}{7}X\right) - \left(\frac{2}{21}X^3 - \frac{4}{21}X^2 - \frac{8}{21}X^2 + \frac{16}{21}X + \frac{8}{21}X - \frac{16}{21}\right) - \left(\frac{1}{14}X^3 - \frac{1}{7}X^2 - \frac{2}{7}X^2 + \frac{4}{7}X + \frac{2}{7}X - \frac{4}{7}\right)$$

$$M_2 = -\frac{1}{42}X^3 - \frac{6}{7}X^2 + \frac{254}{21}X - \frac{158}{7}$$



$9 \leq X \leq 10m$

$$\sum M_P = 0$$

$$M_3 = -1(2)\left(\frac{1}{2}(2) + 7 + X - 9\right) + \frac{218}{21}(7 + X - 9) - \left(\frac{2(7)}{2}\right)\left(\frac{2}{3}(7) + X - 9\right) - \left(\frac{3(7)}{2}\right)\left(\frac{1}{3}(7) + X - 9\right) + \frac{425}{42}(x-9) - 1(x-9)\left(\frac{x-9}{2}\right)$$

$$M_3 = X - \frac{19}{2} - \frac{1}{2}(X^2 - 18X + 81)$$

$$M_3 = -\frac{1}{2}X^2 + 10X - 50$$

Aplicando la ecuación diferencial para cada tramo de las ecuaciones de momento:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$M_1 = -\frac{1}{2}X^2$$

$$2 \leq X \leq 9m$$

$$M_2 = -\frac{1}{42}X^3 - \frac{6}{7}X^2 + \frac{254}{21}X - \frac{158}{7}$$

$$9 \leq X \leq 10m$$

$$M_3 = -\frac{1}{2}X^2 + 10X - 50$$

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$EI\theta_1 = -\frac{1}{6}X^3 + C_1$$

$$EIY_1 = -\frac{1}{24}X^4 + C_1X + C_2$$

$$2 \leq X \leq 9m$$

$$EI\theta_2 = -\frac{1}{168}x^4 - \frac{2}{7}x^3 + \frac{127}{21}x^2 - \frac{158}{7}x + C_3$$

$$EIY_2 = -\frac{1}{840}X^5 - \frac{1}{14}X^4 + \frac{127}{63}X^3 - \frac{79}{7}X^2 + C_3X + C_4$$

$$9 \leq X \leq 10m$$

$$EI\theta_3 = -\frac{1}{6}x^3 + 5x^2 - 50x + c_5$$

$$EIY_3 = -\frac{1}{24}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - 25X^2 + C_5X + C_6$$

Cuando:

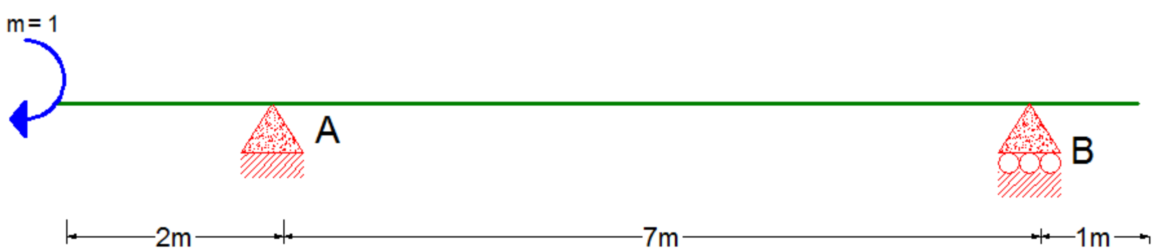
$$x = 0 \quad \rightarrow \; y = ? \quad Y \; \theta = ?$$

La rotación y la flecha no la conocemos a una distancia de cero, porque ese nodo tiene 3 grados de libertad, es decir no tiene ningún apoyo por lo cual pude rotar, girar y moverse vertical u horizontalmente.

Aplicamos el método del trabajo virtual para conocer cuánto vale la rotación o el giro y la flecha a una distancia de cero:

Para conocer la rotación, aplicamos un momento unitario de la misma viga:

VIGA FICTICIA PARA OBTENER LA ROTACIÓN:



$$\sum M_A = 0$$

$$1 - 7R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = \frac{1}{7}\uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} + \frac{1}{7} = 0$$

$$R_{AY} = -\frac{1}{7}\downarrow$$

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$m_1 = 1$$

$$2 \leq X \leq 9m$$

$$m_2 = 1 - \frac{1}{7}(x-2)$$

$$m_2 = -\frac{1}{7}x + \frac{9}{7}$$

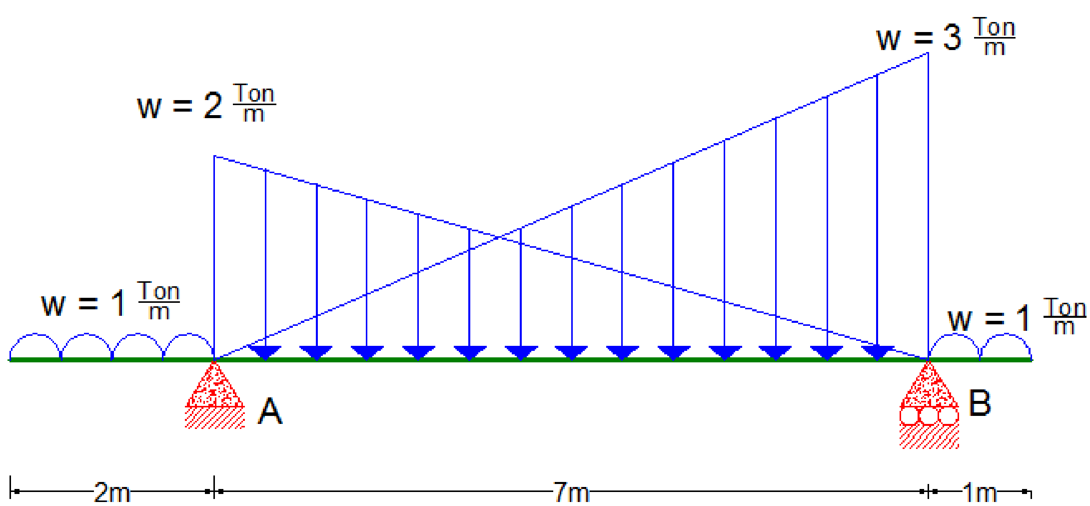
$$m_3 = 1 - \frac{1}{7}(7 + x - 9) + \frac{1}{7}(x-9)$$

$$m_3 = 0$$

Y aplicamos la fórmula de trabajo virtual para la rotación en cualquier punto que es:

$$\theta_X = \int_{L_2}^{L_1} \frac{Mm}{EI}\,dx$$

VIGA ORIGINAL:



$$0 \leq X \leq 2m$$

$$M_1 = -\frac{1}{2}X^2$$

$$2 \leq X \leq 9m$$

$$M_2 = -\frac{1}{42}X^3 - \frac{6}{7}X^2 + \frac{254}{21}X - \frac{158}{7}$$

$$9 \leq X \leq 10m$$

$$M_3 = -\frac{1}{2}X^2 + 10X - 50$$

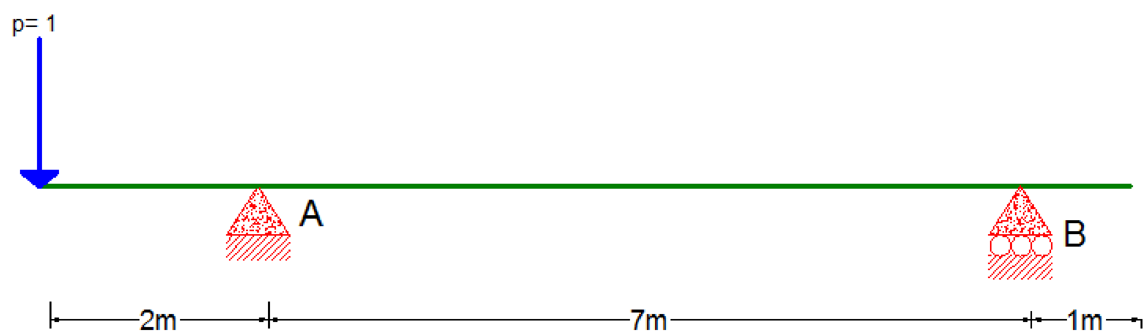
$$\theta_X = \frac{1}{EI}\int_0^2 \left(-\frac{1}{2}X^2\right)(1)dx + \frac{1}{EI}\int_2^9 \left(-\frac{1}{42}X^3 - \frac{6}{7}X^2 + \frac{254}{21}X - \frac{158}{7}\right)\left(-\frac{1}{7}x + \frac{9}{7}\right)dx$$
$$+ \frac{1}{EI}\int_9^{10} \left(-\frac{1}{2}X^2 + 10X - 50\right)(0)dx$$

$$\theta_X = -\frac{4}{3EI} + \frac{10801}{360EI} + 0EI$$

$$\theta_X = \frac{10321}{360EI}$$

Para conocer la flecha a cero metros, ahora se la aplica una carga puntual unitaria de la misma viga:

VIGA FICTICIA PARA OBTENER LA DEFLEXIÓN:



$$\sum M_A = 0$$

$$-1(2) - 7R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = -\frac{2}{7}\downarrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$-1 + R_{AY} - \frac{2}{7} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{9}{7}\uparrow$$

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$m_1 = -X$$

$$2 \leq X \leq 9m$$

$$m_2 = -X + \frac{9}{7}(X-2)$$

$$m_2 = \frac{2}{7}X - \frac{18}{7}$$

$$9 \leq X \leq 10m$$

$$m_3 = -X + \frac{9}{7}(7 + X - 9) - \frac{2}{7}(X-9)$$

$$m_3 = 0$$

Y aplicamos la fórmula de trabajo virtual para la deflexión en cualquier punto que es:

$$\mathrm{Y}_X = \int_{\mathrm{L}_2}^{\mathrm{L}_1} \frac{\mathrm{Mm}}{EI}\,\mathrm{dx}$$

$$Y_X = \frac{1}{EI}\int_0^2 \left(-\frac{1}{2}X^2\right)(-X)dx + \frac{1}{EI}\int_2^9 \left(-\frac{1}{42}X^3 - \frac{6}{7}X^2 + \frac{254}{21}X - \frac{158}{7}\right)\left(\frac{2}{7}X - \frac{18}{7}\right)dx$$
$$+ \frac{1}{EI}\int_9^{10} \left(-\frac{1}{2}X^2 + 10X - 50\right)(0)dx$$

$$Y_X = 2EI - \frac{10801}{180EI} + 0EI$$

$$Y_X = -\frac{10441}{180EI}$$

Ahora si cuando "X" vale cero ya tenemos la rotación y la flecha, pero al agregarla le cambiamos el signo porque el método de trabajo virtual y la ecuación diferencial tienen diferentes criterios de signos:

$$x = 0 \quad \rightarrow \; y = \frac{10441}{180EI} \quad y \quad \theta = -\frac{10321}{360EI}$$

Retomamos las ecuaciones:

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$EI\theta_1 = -\frac{1}{6}X^3 + C_1$$

$$EIY_1 = -\frac{1}{24}X^4 + C_1X + C_2$$

$$2 \leq X \leq 9m$$

$$EI\theta_2 = -\frac{1}{168}x^4 - \frac{2}{7}x^3 + \frac{127}{21}x^2 - \frac{158}{7}x + C_3$$

$$EIY_2 = -\frac{1}{840}X^5 - \frac{1}{14}X^4 + \frac{127}{63}X^3 - \frac{79}{7}X^2 + C_3X + C_4$$

$$9 \leq X \leq 10m$$

$$EI\theta_3 = -\frac{1}{6}x^3 + 5x^2 - 50x + C_5$$

$$EIY_3 = -\frac{1}{24}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - 25X^2 + C_5X + C_6$$

Si:

$$x = 0 \qquad \rightarrow Y_1 = \frac{10441}{180EI} \quad y \quad \theta_1 = -\frac{10321}{360EI}$$

$$EI\left(-\frac{10321}{360EI}\right) = -\frac{1}{6}(0)^3 + C_1$$

$$C_1 = -\frac{10321}{360}$$

$$EI\left(\frac{10441}{180EI}\right) = -\frac{1}{24}(0)^4 + -\frac{10321}{360}(0) + C_2$$

$$C_2 = \frac{10441}{180}$$

Por continuidad:

$$\theta_1 = \theta_2 \qquad cuando \quad x = 2m$$

$$Y_1 = Y_2 \qquad cuando \quad x = 2m$$

$$-\frac{1}{6}(2)^3 - \frac{10321}{360} = -\frac{1}{168}(2)^4 - \frac{2}{7}(2)^3 + \frac{127}{21}(2)^2 - \frac{158}{7}(2) + C_3$$

$$C_3 = -\frac{2401}{360}$$

$$-\frac{1}{24}(2)^4 - \frac{10321}{360}(2) + \frac{10441}{180} = -\frac{1}{840}(2)^5 - \frac{1}{14}(2)^4 + \frac{127}{63}(2)^3 - \frac{79}{7}(2)^2 - \frac{2401}{360}(2) + C_4$$

$$C_4 = \frac{1219}{28}$$

Por continuidad:

$$\theta_2 = \theta_3 \qquad cuando \qquad x = 9m$$

$$Y_2 = Y_3 \qquad cuando \qquad x = 9m$$

$$-\frac{1}{168}(9)^4 - \frac{2}{7}(9)^3 + \frac{127}{21}(9)^2 - \frac{158}{7}(9) - \frac{2401}{360} = -\frac{1}{6}(9)^3 + 5(9)^2 - 50(9) + C_5$$

$$C_5 = \frac{35857}{180}$$

$$-\frac{1}{840}(9)^5 - \frac{1}{14}(9)^4 + \frac{127}{63}(9)^3 - \frac{79}{7}(9)^2 - \frac{2401}{360}(9) + \frac{1219}{28} = -\frac{1}{24}(9)^4 + \frac{5}{3}(9)^3 - 25(9)^2 + \frac{35857}{180}(9) + C_6$$

$$C_6 = -\frac{28379}{40}$$

$$\therefore \quad C_1 = -\frac{10321}{360} \quad C_2 = \frac{10441}{180} \quad C_3 = -\frac{2401}{360} \quad C_4 = \frac{1219}{28} \quad C_5 = \frac{35857}{180} \quad C_6 = -\frac{28379}{40}$$

$$0 \le X \le 2m$$

$$EI\theta_1 = -\frac{1}{6}X^3 - \frac{10321}{360}$$

$$EIY_1 = -\frac{1}{24}X^4 - \frac{10321}{360}X + \frac{10441}{180}$$

$$2 \le X \le 9m$$

$$EI\theta_2 = -\frac{1}{168}x^4 - \frac{2}{7}x^3 + \frac{127}{21}x^2 - \frac{158}{7}x - \frac{2401}{360}$$

$$EIY_2 = -\frac{1}{840}X^5 - \frac{1}{14}X^4 + \frac{127}{63}X^3 - \frac{79}{7}X^2 - \frac{2401}{360}X + \frac{1219}{28}$$

$$9 \le X \le 10m$$

$$EI\theta_3 = -\frac{1}{6}x^3 + 5x^2 - 50x + \frac{35857}{180}$$

$$EIY_3 = -\frac{1}{24}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - 25X^2 + \frac{35857}{180}X - \frac{28379}{40}$$

Las flechas máximas sin aplicar métodos analíticos se encuentran en los extremos de los voladizos, pero la flecha máxima de apoyo a apoyo tenemos que igualar la ecuación del giro 2 a cero y despejar “X”:

Es decir: $\theta_2 = 0$

$$0 = -\frac{1}{168}x^4 - \frac{2}{7}x^3 + \frac{127}{21}x^2 - \frac{158}{7}x - \frac{2401}{360}$$

Ahora resolvemos una ecuación pura de cuarto grado. Para resolverla sabemos que la posición de la flecha máxima debe de estar en el intervalo de los reales: $[2,9]$ justamente ahí tenemos una solución de la ecuación deseada, y aplicamos el método de tanteos es decir evaluamos de 2 a 9 y donde hay cambio de signo tenemos solución y vamos a evaluar “n” veces hasta que nuestra solución sea lo más exacta posible:

Evaluamos el polinomio que es la ecuación:

$$f(x) = -\frac{1}{168}x^4 - \frac{2}{7}x^3 + \frac{127}{21}x^2 - \frac{158}{7}x - \frac{2401}{360}$$

X	f(x)
2	-30.002778
3	-28.151587
4	-20.002778
5	-7.770635
6	6.187698
7	19.372222
8	29.140079
9	32.705556

El cambio de signo esta entre “5” y “6”. Significa que ahí está la solución de la ecuación y nuevamente evaluamos de $(5,6)$ pero con intervalos de 0.1:

X	f(x)
5	-7.770635
5.1	-6.412350
5.2	-5.039121
5.3	-3.653397
5.4	-2.257644
5.5	-0.854340
5.6	0.554022

5.7	1.964936
5.8	3.375879
5.9	4.784317
6	6.187698

Y ahora notamos que la solución de la ecuación esta entre “5.5” y “5.6” y repetimos todos los pasos anteriores hasta tener una cifra de 6 decimales que es más exacta:

X	f(x)
5.5	-0.854340
5.51	-0.713690
5.52	-0.572992
5.53	-0.432249
5.54	-0.291462
5.55	-0.150635
5.56	-0.009770
5.57	0.131131
5.58	0.272065
5.59	0.413030
5.6	0.554022

X	f(x)
5.56	-0.009770
5.561	0.004319
5.562	0.018408
5.563	0.032497
5.564	0.046587
5.565	0.060677
5.566	0.074767
5.567	0.088857
5.568	0.102948
5.569	0.117040
5.57	0.131131

X	f(x)
5.56	-0.009770
5.5601	-0.008361
5.5602	-0.006952
5.5603	-0.005543

5.5604	-0.004134
5.5605	-0.002725
5.5606	-0.001317
5.5607	0.000092
5.5608	0.001501
5.5609	0.002910
5.561	0.004319

X	f(x)
5.5606	-0.001317
5.56061	-0.001176
5.56062	-0.001035
5.56063	-0.000894
5.56064	-0.000753
5.56065	-0.000612
5.56066	-0.000471
5.56067	-0.000330
5.56068	-0.000189
5.56069	-0.000049
5.5607	0.000092

X	f(x)
5.56069	-0.000049
5.560691	-0.000035
5.560692	-0.000020
5.560693	-0.000006
5.560694	0.000008
5.560695	0.000022
5.560696	0.000036
5.560697	0.000050
5.560698	0.000064
5.560699	0.000078
5.5607	0.000092

Finalmente notamos que nuestra solución está entre "5.560693" y "5.560694", notamos que ambas a evaluarlas en el polinomio de cuarto grado se acercan a cero y tomaremos el valor positivo más cercano a cero:

La posición de la flecha máxima para el tramo $2 \leq X \leq 9m$ será:

$$X_{2max} = 5.560694m$$

Y como anteriormente mencionamos las posiciones de las flechas máximas restantes están en los extremos de los voladizos:

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$X_{1max} = 0m$$

$$9 \leq X \leq 10m$$

$$X_{3max} = 10m$$

¿Por qué estas dos posiciones están a esas distancias?

$$EI\theta_1 = -\frac{1}{6}X^3 - \frac{10321}{360}$$

$$EI\theta_3 = -\frac{1}{6}x^3 + 5x^2 - 50x + \frac{35857}{180}$$

Al igualar $\theta_1 = 0 \quad y \quad \theta_3 = 0$

Notamos lo siguiente:

Para $\theta_1 = 0$ del tramo $0 \leq X \leq 2m$

$$0 = -\frac{1}{6}X^3 - \frac{10321}{360}$$

La solución de esa ecuación debe de estar en el intervalo de los reales $[0{,}2]m$

X1 = 2.780738694 - 4.816380701 x2 = 2.780738694 + 4.816380701 x3 = -5.561477389

Tenemos 2 soluciones imaginarias y una real, la real es negativa fuera del intervalo de la barra, podemos concluir lo siguiente:

<u>conclusión:</u>

<u>“AL IGUALAR UNA ECUACIÓN DEL GIRO A CERO DEL TRAMO DE UNA BARRA PARA OBTENER LA POSICIÓN DE LA FLECHA MÁXIMA, SI SUS RAÍCES O SOLUCIONES NO TIENEN SENTIDO NUMÉRICO (NO ESTÁN DENTRO DEL INTERVALO NUMÉRICO DE LA BARRA) O SON IMAGINARIAS TODAS LAS RAÍCES DE LA SOLUCIÓN, ENTONCES PODEMOS CONCLUIR QUE SU POSICIÓN DE LA FLECHA MÁXIMA ÚNICAMENTE ESTARÁ EN UNO DE LOS EXTREMOS DONDE NO EXISTA NINGÚN TIPO DE APOYO”</u>

$$\therefore \quad \mathrm{X}_{1\mathrm{max}} = 0\mathrm{m} \quad \text{porque es un extremo de la barra sin apoyo}$$

Para $\theta_3 = 0$ del tramo $9 \leq X \leq 10m$

La solución debe de estar en ese intervalo, si no lo está, la posición estará en el extremo de la barra que no tenga apoyo:

$$0 = -\frac{1}{6}x^3 + 5x^2 - 50x + \frac{35857}{180}$$

X1 = 7.099398988 - 5.023988324 x2 = 7.099398988 + 5.023988324 x3 = 15.80120202

Vemos que tenemos 2 soluciones imaginarias y una real, pero la real está fuera del intervalo, por tanto la posición de la flecha máxima será:

$$\therefore \quad \mathrm{X}_{3\mathrm{max}} = 10\mathrm{m} \quad \text{porque es un extremo de la barra sin apoyo}$$

<u>Obtención de las flechas máximas:</u>

$$0 \leq X \leq 2m$$

POSICIÓN:

$$X_{1max} = 0m$$

$$EIY_{1max=} -\frac{1}{24}(0)^4 - \frac{10321}{360}(0) + \frac{10441}{180}$$

$$Y_{1max} = \frac{10441}{180EI} \cong \frac{58.005556}{EI}$$

$$2 \leq X \leq 9m$$

POSICIÓN:

$$X_{2max} = 5.560694m$$

$$EIY_{2max} = -\frac{1}{840}(5.560694)^5 - \frac{1}{14}(5.560694)^4 + \frac{127}{63}(5.560694)^3 - \frac{79}{7}(5.560694)^2 - \frac{2401}{360}(5.560694) + \frac{1219}{28}$$

$$Y_{2max} = -\frac{70.527237}{EI}$$

$$9 \leq X \leq 10m$$

POSICIÓN:

$$X_{3max} = 10m$$

$$EIY_{3max} = -\frac{1}{24}(10)^4 + \frac{5}{3}(10)^3 - 25(10)^2 + \frac{35857}{180}(10) - \frac{28379}{40}$$

$$Y_{3max} = \frac{11729}{360EI} \cong \frac{32.580556}{EI}$$

Y finalmente obtenemos la flecha máxima de toda la viga, que será la de mayor valor absoluto de las flechas máximas de los tramos de la viga:

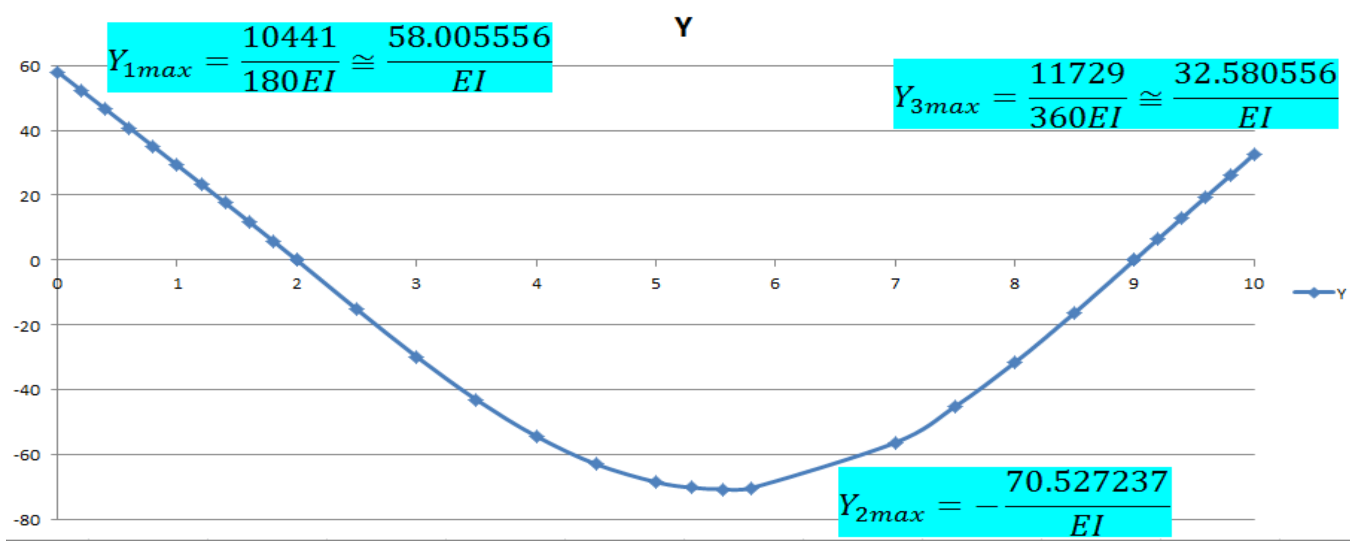
$$Y_{2max} = -\frac{70.527237}{EI}$$

Los signos nos indican para donde se va a flechar más el tramo de cada viga, hacia arriba la flecha es positiva y hacia abajo la flecha es negativa:

Tabulando los valores y graficando:

X	Y
0	58.0055555556
0.2	52.2716000000
0.4	46.5367111111
0.6	40.7984888889
0.8	35.0529333333
1	29.2944444444
1.2	23.5158222222
1.4	17.7082666667
1.6	11.8613777778
1.8	5.9631555556
2	0.0000000000
2	0.0000000000

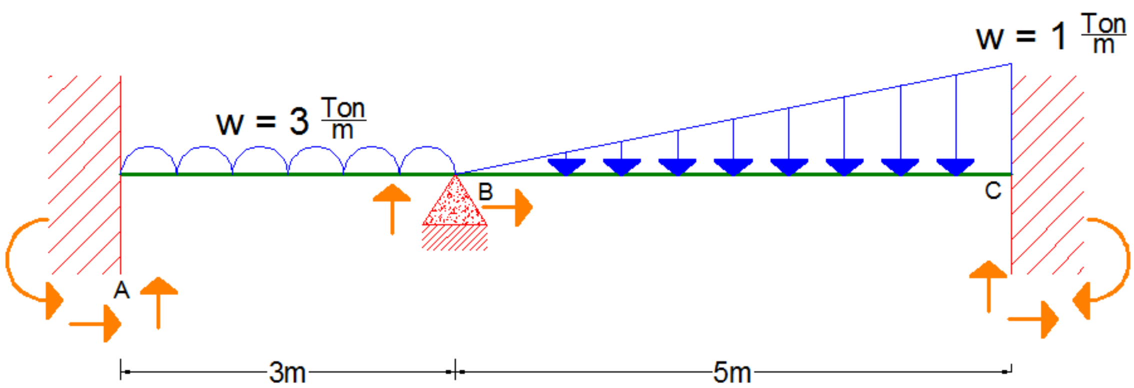
2.5	-15.0820312500
3	-29.6904761905
3.5	-42.9707961310
4	-54.2023809524
4.5	-62.8030133929
5	-68.3333333333
5.3	-70.0500249167
5.560694	-70.5272365240
5.8	-70.1233615238
7	-56.2142857143
7.5	-45.1151413690
8	-31.5595238095
8.5	-16.2330729167
9	0.0000000000
9	0.0000000000
9.2	6.5323777778
9.4	13.0518222222
9.6	19.5639333333
9.8	26.0727111111
10	32.5805555556



Deflexión exagerada.

Problema 21:

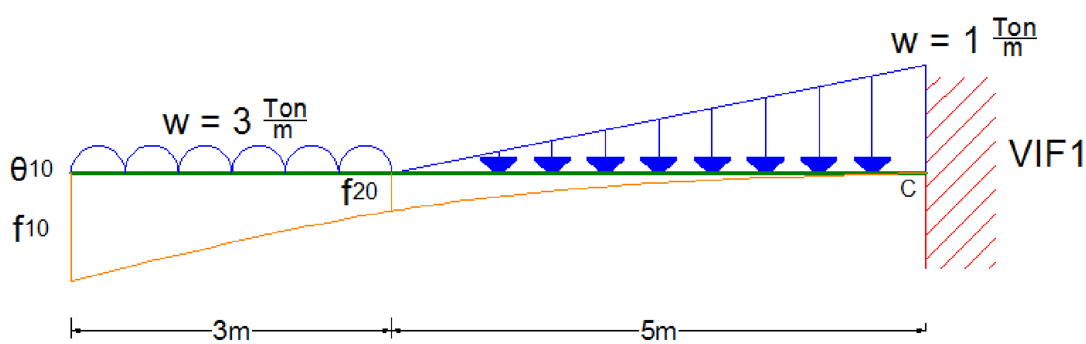
Obtener la flecha máxima de cada tramo y detallar los resultados:



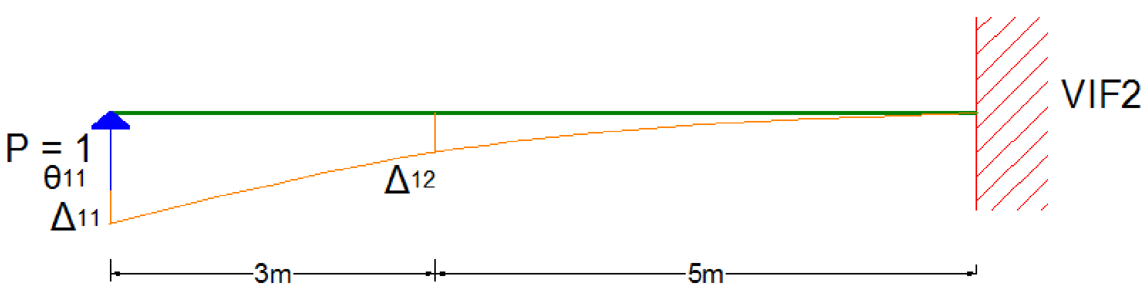
En este problema la $\sum F_X = 0$ la despreciamos ya que no hay cargas horizontales.

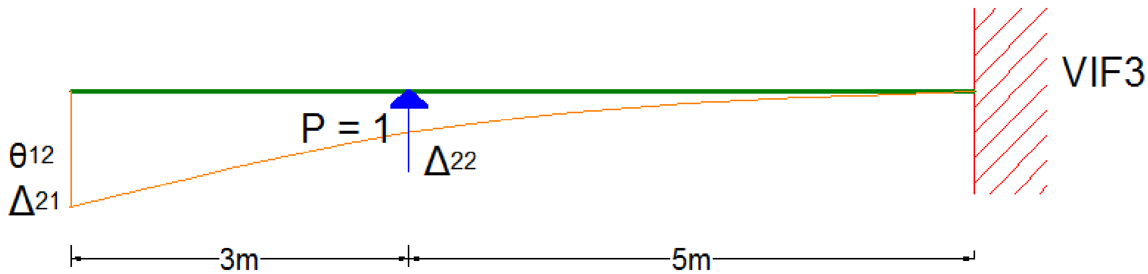
Por el método de flexibilidades obtendremos las reacciones:

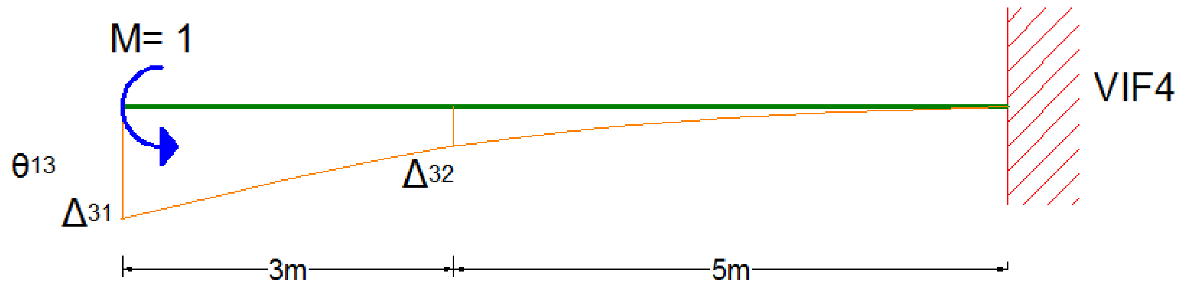
Quitamos el empotramiento izquierdo y el apoyo fijo, de esta forma se hace isostática nuestra viga, pero al quitar esos apoyos la viga se flechara de la siguiente forma:



Donde quitamos los apoyos si es empotramiento aplicamos una carga unitaria y un momento unitario en el sentido supuesto de la viga original, y en el apoyo fijo ponemos una carga unitaria en el sentido supuesto:







Ahora obtendremos las ecuaciones de momento de cada viga ficticia:

VIF1:

$$0 \leq X \leq 3m$$

$$M_1 = -\frac{3}{2}x^2$$

$$3 \leq x \leq 8m$$

$$1\frac{T}{m} ----5m$$

$$w ----(X-3)$$

$$w = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$$

$$M_2 = -3(3)\left(\frac{1}{2}(3) + X - 3\right) - \frac{(X-3)\left(\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}\right)}{2}\left(\frac{X-3}{3}\right)$$

$$M_2 = -9X + \frac{27}{2} - \frac{1}{6}(X^2 - 6X + 9)\left(\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}\right)$$

$$M_2 = -9X + \frac{27}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}X^3 - \frac{6}{5}X^2 + \frac{9}{5}X - \frac{3}{5}X^2 + \frac{18}{5}X - \frac{27}{5}\right) =$$

$$M_2 = -\frac{1}{30}X^3 + \frac{3}{10}X^2 - \frac{99}{10}X + \frac{72}{5}$$

VIFI2:

$$0 \leq X \leq 8m$$

$$m_3 = x$$

VIFI3:

$$0 \leq X \leq 3m$$

$$m_4 = 0$$

$$3 \leq x \leq 8m$$

$$m_5 = X - 3$$

VIF4:

$$0 \leq X \leq 8m$$

$$m_6 = -1$$

Ahora calculamos todas las deflexiones de cada viga usando trabajo virtual:

$$\mathrm{Y}_X = \int_{\mathrm{L}_2}^{\mathrm{L}_1} \frac{\mathrm{Mm}}{EI}\,\mathrm{dx}$$

$$\theta_X = \int_{\mathrm{L}_2}^{\mathrm{L}_1} \frac{\mathrm{Mm}}{EI}\,\mathrm{dx}$$

$$f_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^3 \left(-\frac{3}{2}x^2\right)(X)dx + \frac{1}{EI}\int_3^8 \left(-\frac{1}{30}X^3 + \frac{3}{10}X^2 - \frac{99}{10}X + \frac{72}{5}\right)(X)dx =$$

$$f_{10} = -\frac{243}{8EI} - \frac{26885}{24EI} =$$

$$f_{10} = -\frac{13807}{12EI}$$

$$f_{20} = \frac{1}{EI}\int_0^3 \left(-\frac{3}{2}x^2\right)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_3^8 \left(-\frac{1}{30}X^3 + \frac{3}{10}X^2 - \frac{99}{10}X + \frac{72}{5}\right)(X-3)dx =$$

$$f_{20} = 0EI - \frac{6775}{12EI}$$

$$f_{20} = -\frac{6775}{12EI}$$

$$\Delta_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^8 (X)(X)dx =$$

$$\Delta_{11} = \frac{512}{3EI}$$

$$\Delta_{12} = \frac{1}{EI}\int_0^3 (X)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_3^8 (X)(X-3)dx =$$

$$\Delta_{12} = \frac{475}{6EI}$$

$$\Delta_{21} = \frac{1}{EI}\int_0^3 (0)(X)dx + \frac{1}{EI}\int_3^8 (X-3)(X)dx =$$

$$\Delta_{21} = \frac{475}{6EI}$$

$$\Delta_{22} = \frac{1}{EI}\int_3^8 (X-3)(X-3)dx$$

$$\Delta_{22} = \frac{125}{3EI}$$

$$\Delta_{31} = \frac{1}{EI}\int_0^8 (-1)(x)dx =$$

$$\Delta_{31} = -\frac{32}{EI}$$

$$\Delta_{32} = \frac{1}{EI}\int_0^3 (0)(-1)dx + \frac{1}{EI}\int_3^8 (-1)(X-3)dx =$$

$$\Delta_{32} = -\frac{25}{2EI}$$

Calculo de las rotaciones:

$$\theta_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^3 \left(-\frac{3}{2}x^2\right)(-1)dx + \frac{1}{EI}\int_3^8 \left(-\frac{1}{30}X^3 + \frac{3}{10}X^2 - \frac{99}{10}X + \frac{72}{5}\right)(-1)dx =$$

$$\theta_{10} = \frac{27}{2EI} + \frac{4445}{24EI} =$$

$$\theta_{10} = \frac{4769}{24EI}$$

$$\theta_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^8 (X)(-1)dx =$$

$$\theta_{11} = -\frac{32}{EI}$$

$$\theta_{12} = \frac{1}{EI}\int_0^3 (0)(-1)dx + \frac{1}{EI}\int_3^8 (X-3)(-1)dx =$$

$$\theta_{12} = -\frac{25}{2EI}$$

$$\theta_{13} = \frac{1}{EI}\int_0^8 (-1)(-1)dx =$$

$$\theta_{13} = \frac{8}{EI}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$f_{10} + \Delta_{11}R_{AY} + \Delta_{21}R_{BY} + \Delta_{31}M_A = 0$$

$$f_{20} + \Delta_{21}R_{AY} + \Delta_{22}R_{BY} + \Delta_{32}M_A = 0$$

$$\theta_{10} + \theta_{11}R_{AY} + \theta_{12}R_{BY} + \theta_{13}M_A = 0$$

$$-\frac{13807}{12} + \frac{512}{3}R_{AY} + \frac{475}{6}R_{BY} - 32M_A = 0$$

$$-\frac{6775}{12} + \frac{475}{6}R_{AY} + \frac{125}{3}R_{BY} - \frac{25}{2}M_A = 0$$

$$\frac{4769}{24} - 32R_{AY} - \frac{25}{2}R_{BY} + 8M_A = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{512}{3} & \frac{475}{6} & -32 & \frac{13807}{12} \\ \frac{475}{6} & \frac{125}{3} & -\frac{25}{2} & \frac{6775}{12} \\ -32 & -\frac{25}{2} & 8 & -\frac{4769}{24} \end{bmatrix} \to R1\left(\frac{3}{512}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{475}{1024} & -\frac{3}{16} & \frac{13807}{2048} \\ \frac{475}{6} & \frac{125}{3} & -\frac{25}{2} & \frac{6775}{12} \\ -32 & -\frac{25}{2} & 8 & -\frac{4769}{24} \end{bmatrix} \to \begin{matrix} R2 + R1\left(-\frac{475}{6}\right) \\ R3 + R1(32) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{475}{1024} & -\frac{3}{16} & \frac{13807}{2048} \\ 0 & \frac{10125}{2048} & \frac{75}{32} & \frac{126425}{4096} \\ 0 & \frac{75}{32} & 2 & \frac{3269}{192} \end{bmatrix} \rightarrow R2\left(\frac{2048}{10125}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{475}{1024} & -\frac{3}{16} & \frac{13807}{2048} \\ 0 & 1 & \frac{64}{135} & \frac{5057}{810} \\ 0 & \frac{75}{32} & 2 & \frac{3269}{192} \end{bmatrix} \rightarrow R3 + R2\left(-\frac{75}{32}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{475}{1024} & -\frac{3}{16} & \frac{13807}{2048} \\ 0 & 1 & \frac{64}{135} & \frac{5057}{810} \\ 0 & 0 & \frac{8}{9} & \frac{517}{216} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad R_{AY} + \frac{475}{1024} R_{BY} - \frac{3}{16} M_A = \frac{13807}{2048}$$

$$R_{BY} + \frac{64}{135} M_A = \frac{5057}{810}$$

$$\frac{8}{9} M_A = \frac{517}{216}$$

$$M_A = \frac{517}{192}$$

$$R_{BY} + \frac{64}{135}\left(\frac{517}{192}\right) = \frac{5057}{810}$$

$$R_{BY} = \frac{149}{30}$$

$$R_{AY} + \frac{475}{1024}\left(\frac{149}{30}\right) - \frac{3}{16}\left(\frac{517}{192}\right) = \frac{13807}{2048}$$

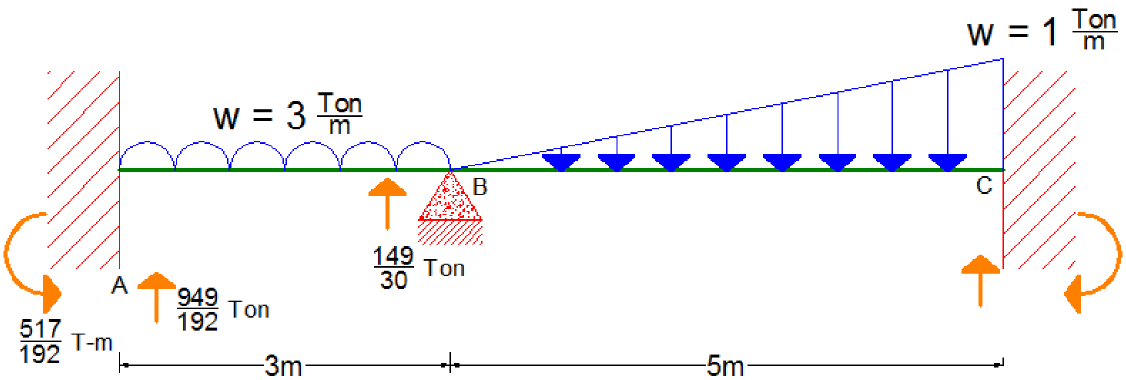
$$R_{AY} = \frac{949}{192}$$

$$\therefore$$

$$R_{AY} = \frac{949}{192} \, Ton \uparrow$$

$$R_{BY} = \frac{149}{30} \, Ton \uparrow$$

$$M_A = \frac{517}{192} \, T - m \circlearrowleft$$



$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{949}{192} - 3(3) + \frac{149}{30} - \frac{1(5)}{2} + R_{CY} = 0$$

$$R_{CY} = \frac{509}{320}\ Ton \uparrow$$

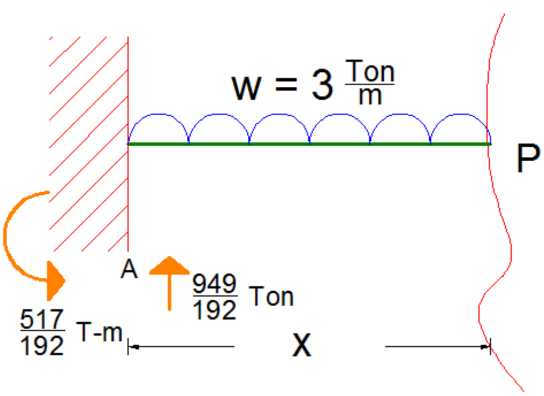
$$\sum M_A = 0$$

$$-\frac{517}{192} + 3(3)\left(\frac{1}{2}(3)\right) - \frac{149}{30}(3) + \frac{1(5)}{2}\left(\frac{2}{3}(5) + 3\right) - \frac{509}{320}(8) + M_C = 0$$

$$M_C = \frac{63}{64} T - m \curvearrowleft$$

Obtener las ecuaciones de momento:

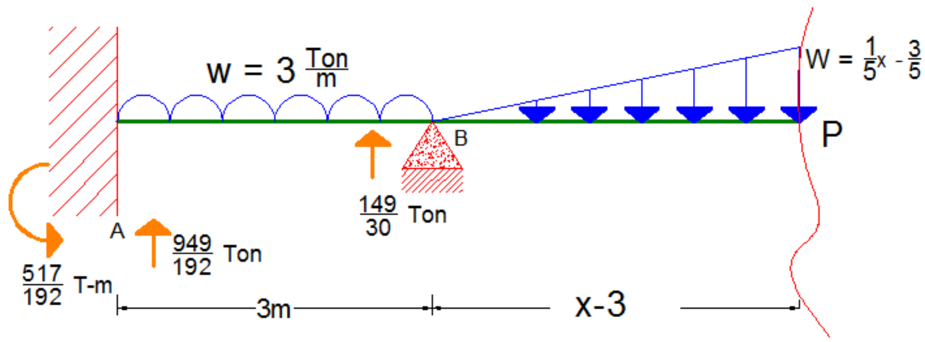
$$0 \leq X \leq 3m$$



$$\sum M_P = 0$$

$$M_1 = -\frac{517}{192} + \frac{949}{192}X - \frac{3}{2}X^2$$

$$3 \leq X \leq 8m$$



$$1\frac{T}{m}----5m$$

$$W----(X-3)$$

$$W = \frac{1}{5}X - \frac{3}{5}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$M_2 = -\frac{517}{192} + \frac{949}{192}X - 3(3)\left(\frac{1}{2}(3) + X - 3\right) + \frac{149}{30}(X-3) - \frac{(x-3)\left(\frac{1}{5}X - \frac{3}{5}\right)}{2}\left(\frac{x-3}{3}\right)$$

$$M_2 = \frac{291}{320}X - \frac{3929}{960} - \frac{1}{6}(X^2 - 6X + 9)\left(\frac{1}{5}X - \frac{3}{5}\right)$$

$$M_2 = \frac{291}{320}X - \frac{3929}{960} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}X^3 - \frac{6}{5}X^2 + \frac{9}{5}X - \frac{3}{5}X^2 + \frac{18}{5}X - \frac{27}{5}\right)$$

$$M_2 = -\frac{1}{30}X^3 + \frac{3}{10}X^2 + \frac{3}{320}X - \frac{613}{192}$$

Aplicando la ecuación diferencial para cada tramo:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$0 \leq X \leq 3m$$

$$M_1 = -\frac{517}{192} + \frac{949}{192}X - \frac{3}{2}X^2$$

$$3 \leq X \leq 8m$$

$$M_2 = -\frac{1}{30}X^3 + \frac{3}{10}X^2 + \frac{3}{320}X - \frac{613}{192}$$

$$0 \le X \le 3m$$

$$EI\theta_1 = -\frac{517}{192}X + \frac{949}{384}X^2 - \frac{1}{2}X^3 + C_1$$

$$EIY_1 = -\frac{517}{384}X^2 + \frac{949}{1152}X^3 - \frac{1}{8}X^4 + C_1X + C_2$$

$$3 \le X \le 8m$$

$$EI\theta_2 = -\frac{1}{120}X^4 + \frac{1}{10}\ X^3 + \frac{3}{640}X^2 - \frac{613}{192}X + C_3$$

$$EIY_2 = -\frac{1}{600}X^5 + \frac{1}{40}\ X^4 + \frac{1}{640}X^3 - \frac{613}{384}X^2 + C_3X + C_4$$

Para este caso no aplicamos trabajo virtual para la primera condición cuando “X” es igual a cero, porque los apoyos empotrados no tienen grados de libertad y las condiciones iniciales son las siguientes:

Cuando:

$$x = 0 \qquad \rightarrow \ Y_1 = 0 \quad Y \ \ \theta_1 = 0 \quad por\ estar\ empotrado$$

Por tanto:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

Aplicando continuidad:

$$\theta_1 = \theta_2 \quad si \qquad x = 3m$$

$$-\frac{517}{192}(3) + \frac{949}{384}(3)^2 - \frac{1}{2}(3)^3 = -\frac{1}{120}(3)^4 + \frac{1}{10}\ (3)^3 + \frac{3}{640}(3)^2 - \frac{613}{192}(3) + C_3$$

$$C_3 = \frac{327}{40}$$

$$si \ \ x = 8m \quad Y_2 = 0$$

$$0 = -\frac{1}{600}(8)^5 + \frac{1}{40}\ (8)^4 + \frac{1}{640}(8)^3 - \frac{613}{384}(8)^2 + \frac{327}{40}(8) + C_4$$

$$C_4 = -\frac{591}{50}$$

Reescribiendo las ecuaciones tenemos:

$$0 \leq X \leq 3m$$

$$EI\theta_1 = -\frac{517}{192}X + \frac{949}{384}X^2 - \frac{1}{2}X^3$$

$$EIY_1 = -\frac{517}{384}X^2 + \frac{949}{1152}X^3 - \frac{1}{8}X^4$$

$$3 \leq X \leq 8m$$

$$EI\theta_2 = -\frac{1}{120}X^4 + \frac{1}{10}X^3 + \frac{3}{640}X^2 - \frac{613}{192}X + \frac{327}{40}$$

$$EIY_2 = -\frac{1}{600}X^5 + \frac{1}{40}X^4 + \frac{1}{640}X^3 - \frac{613}{384}X^2 + \frac{327}{40}X - \frac{591}{50}$$

Calculo de la posición de la flecha máxima de cada tramo:

Como no hay voladizos podemos igualar las ecuaciones del giro con cero de cada tramo y despejar "X"

$$0 \leq X \leq 3m$$

$$si \quad \theta_1 = 0$$

$$0 = -\frac{517}{192}X + \frac{949}{384}X^2 - \frac{1}{2}X^3$$

Factorizando tenemos:

$$x\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{949}{384}x - \frac{517}{192}\right) = 0$$

$$X_1 = 0$$

Para la otra parte factorizada usaremos le formula general para ecuaciones de 2° grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{949}{384}$$

$$c = -\frac{517}{192}$$

$$x = \frac{-\left(\frac{949}{384}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{949}{384}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{517}{192}\right)}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$X_2 = \left(\frac{949}{384} - \frac{\sqrt{106489}}{384}\right) m \cong 1.621546m$$

$$X_3 = \left(\frac{949}{384} + \frac{\sqrt{106489}}{384}\right) m \cong 3.321163m$$

La solución de la posición de la flecha máxima debe de estar en el intervalo del primer tramo que es $[0,3]$, por tanto de las soluciones anteriores escogemos a X_2

$$0 \leq X \leq 3m$$

$$\therefore \; X_{1max} = \left(\frac{949}{384} - \frac{\sqrt{106489}}{384}\right) m \cong 1.621546m$$

$$posición\ de\ la\ flecha\ máxima\ del\ tramo:\ 3 \leq X \leq 8m$$

$$si \quad \theta_2 = 0$$

$$0 = -\frac{1}{120}X^4 + \frac{1}{10}X^3 + \frac{3}{640}X^2 - \frac{613}{192}X + \frac{327}{40}$$

Esta es una ecuación de 4° grado completamente pura, para resolverla utilizaremos el método de los tanteos ya que esta ecuación tiene solución en un intervalo de $[3,8]$:

Lo evaluaremos como un polinomio:

$$f(x) = -\frac{1}{120}X^4 + \frac{1}{10}X^3 + \frac{3}{640}X^2 - \frac{613}{192}X + \frac{327}{40}$$

x	f(x)
3	0.6640625
4	-0.254166667
5	-0.3796875
6	-0.0125
7	0.347395833
8	3.55271E-15

La solución está entre “6” y “7” metros y seguiremos aproximando hasta obtener 6 decimales de precisión:

x	f(x)
6	-0.0125
6.1	0.033800208
6.2	0.0795825
6.3	0.124216875
6.4	0.167053333
6.5	0.207421875
6.6	0.2446325
6.7	0.277975208
6.8	0.30672
6.9	0.330116875
7	0.347395833

x	f(x)
6	-0.0125
6.01	-0.007864215
6.02	-0.003228093
6.03	0.001407762
6.04	0.006042745
6.05	0.01067625
6.06	0.015307667
6.07	0.019936385
6.08	0.024561792
6.09	0.029183272
6.1	0.033800208

x	f(x)
6.02	-0.003228093
6.021	-0.002764486
6.022	-0.002300881
6.023	-0.001837281
6.024	-0.001373685
6.025	-0.000910094
6.026	-0.000446509
6.027	1.70695E-05
6.028	0.000480641
6.029	0.000944206
6.03	0.001407762

x	f(x)
6.026	-0.000446509
6.0261	-0.000400151
6.0262	-0.000353793
6.0263	-0.000307435
6.0264	-0.000261077
6.0265	-0.000214719
6.0266	-0.000168361
6.0267	-0.000122003
6.0268	-7.56458E-05
6.0269	-2.92881E-05
6.027	1.70695E-05

x	f(x)
6.0269	-2.92881E-05
6.02691	-2.46524E-05
6.02692	-2.00166E-05
6.02693	-1.53808E-05
6.02694	-1.07451E-05
6.02695	-6.10932E-06
6.02696	-1.47356E-06
6.02697	3.16219E-06
6.02698	7.79795E-06
6.02699	1.24337E-05
6.027	1.70695E-05

La solución de la ecuación es: $X = 6.026964m$

x	f(x)
6.02696	-1.47356E-06
6.026961	-1.00999E-06
6.026962	-5.46413E-07
6.026963	-8.2837E-08
6.026964	3.80739E-07
6.026965	8.44314E-07
6.026966	1.30789E-06
6.026967	1.77147E-06
6.026968	2.23504E-06
6.026969	2.69862E-06
6.02697	3.16219E-06

La posición de la flecha máxima del tramo $3 \leq X \leq 8m$ es:

$$X_{2max} = 6.026964m$$

Calculo de la flecha máxima de cada tramo:

$$0 \leq X \leq 3m$$

$$X_{1max} = \left(\frac{949}{384} - \frac{\sqrt{106489}}{384}\right)m \cong 1.621546m$$

$$EIY_1 = -\frac{517}{384}X^2 + \frac{949}{1152}X^3 - \frac{1}{8}X^4$$

Sustituyendo:

$$EIY_{1max} = -\frac{517}{384}\left(\frac{949}{384} - \frac{\sqrt{106489}}{384}\right)^2 + \frac{949}{1152}\left(\frac{949}{384} - \frac{\sqrt{106489}}{384}\right)^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{949}{384} - \frac{\sqrt{106489}}{384}\right)^4$$

$$Y_{1max} = -\frac{101058061\sqrt{106489} + 25204730063}{65229815808EI} \cong \frac{-0.8919641282}{EI}$$

La posición de la flecha máxima del tramo $3 \leq X \leq 8m$ es:

$$X_{2max} = 6.026964m$$

$$EIY_2 = -\frac{1}{600}X^5 + \frac{1}{40}X^4 + \frac{1}{640}X^3 - \frac{613}{384}X^2 + \frac{327}{40}X - \frac{591}{50}$$

Sustituyendo:

$$EIY_{2max} = -\frac{1}{600}(6.026964)^5 + \frac{1}{40}(6.026964)^4 + \frac{1}{640}(6.026964)^3 - \frac{613}{384}(6.026964)^2 + \frac{327}{40}(6.026964) - \frac{591}{50}$$

$$Y_{2max} = -\frac{0.461418522}{EI}$$

Por tanto en valor absoluto la flecha máxima de toda la viga está a una posición y bale:

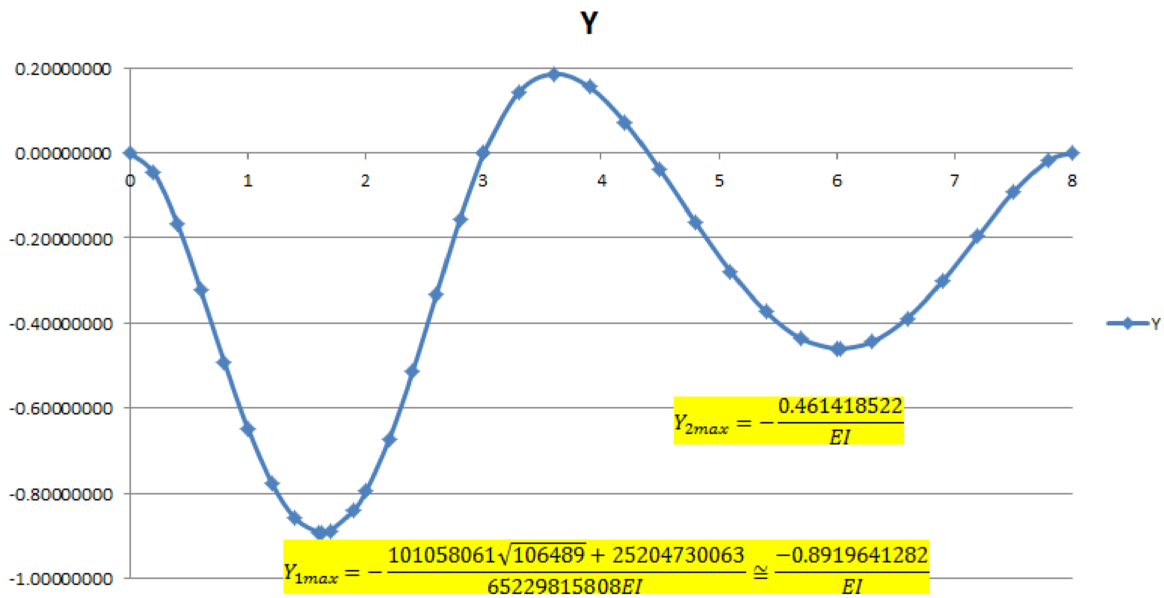
$$X_{1max} = \left(\frac{949}{384} - \frac{\sqrt{106489}}{384}\right)m \cong 1.621546m$$

$$Y_{1max} = -\frac{101058061\sqrt{106489} + 25204730063}{65229815808EI} \cong \frac{-0.8919641282}{EI}$$

Deformación exagerada de la deflexión de cada tramo de la viga:

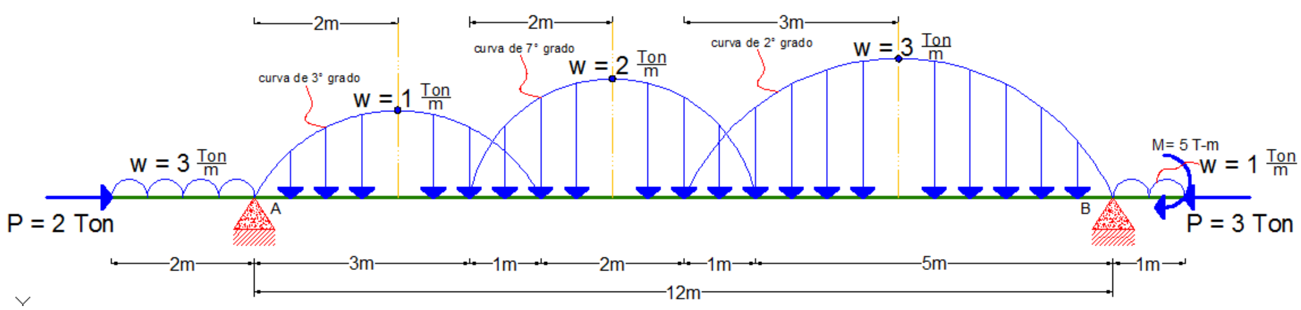
X	Y
0	0.00000000
0.2	-0.04746389
0.4	-0.16589444
0.6	-0.32295000
0.8	-0.49108889
1	-0.64756944
1.2	-0.77445000
1.4	-0.85858889
1.6	-0.89164444
1.621546	-0.89196413
1.7	-0.88772170
1.9	-0.83901163
2	-0.79513889
2.2	-0.67289444
2.4	-0.51420000
2.6	-0.33471389
2.8	-0.15489444
3	0.00000000
3	0.00000000
3.3	0.14190064
3.6	0.18542040
3.9	0.15450491
4.2	0.07212780
4.5	-0.04019531
4.8	-0.16289280
5.1	-0.27882304
5.4	-0.37376040
5.7	-0.43688126
6	-0.46125000
6.026964	-0.46141852
6.3	-0.44430499
6.6	-0.38834460
6.9	-0.30101321
7.2	-0.19578720
7.5	-0.09246094
7.8	-0.01763280
8	0.00000000

Como podemos apreciar, en la tabulación de las ecuaciones de la flecha, vemos que en los apoyos es cero, por lo que podemos concluir que los cálculos son correctos.



Problema 22:

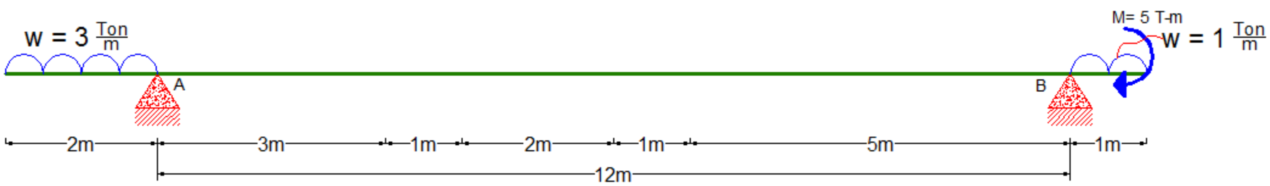
Encontrar la flecha máxima de cada tramo de la siguiente viga y obtener la deflexión horizontal de los extremos de los voladizos y detallar los resultados:



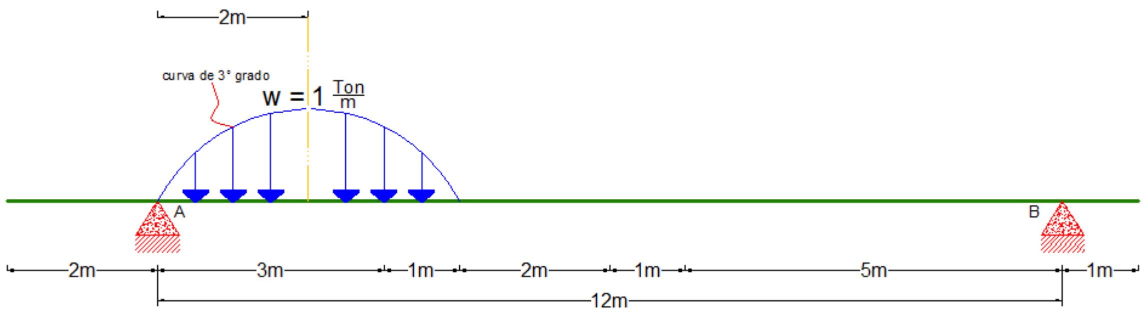
Para resolver la estructura es conveniente hacerlo por superposición, es decir separar la viga por las cargas que tiene y al final conjuntar todo. Otra ventaja es que al tener 2 apoyos fijos de momento podemos ignorar las $\sum F_X = 0$ y únicamente encontrar las reacciones verticales en "A" y en "B" y al final por el método de flexibilidades obtendremos las reacciones horizontales.

Para las reacciones verticales solo desglosáremos la viga así:

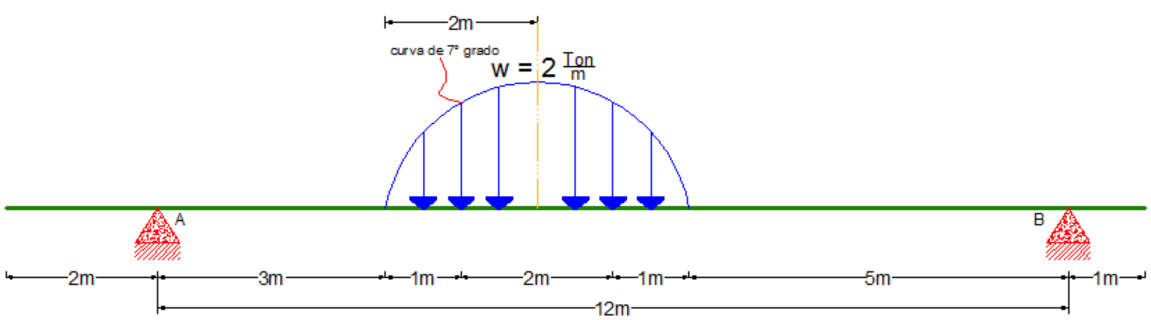
a)


w = 3 Ton/m
M= 5 T-m
w = 1 Ton/m
A
B
2m
3m
1m
2m
1m
5m
1m
12m

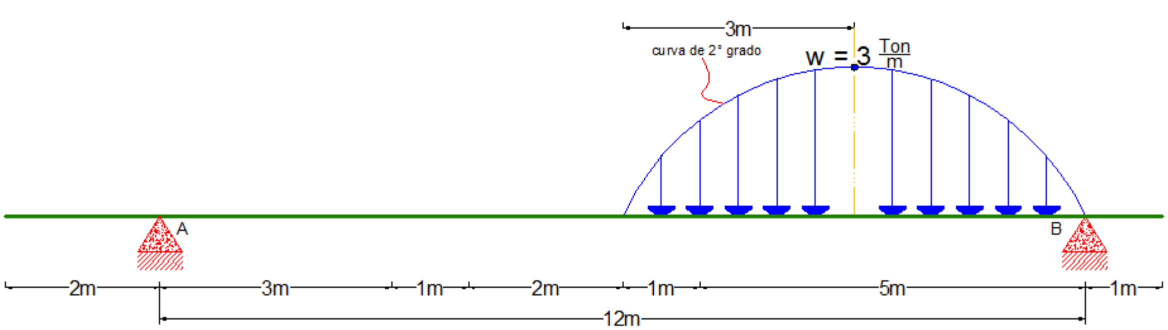
b)


2m
curva de 3° grado
w = 1 Ton/m
A
B
2m
3m
1m
2m
1m
5m
1m
12m

c)

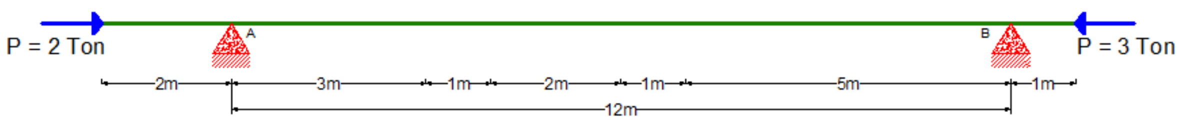

2m
curva de 7° grado
w = 2 Ton/m
A
B
2m
3m
1m
2m
1m
5m
1m
12m

d)

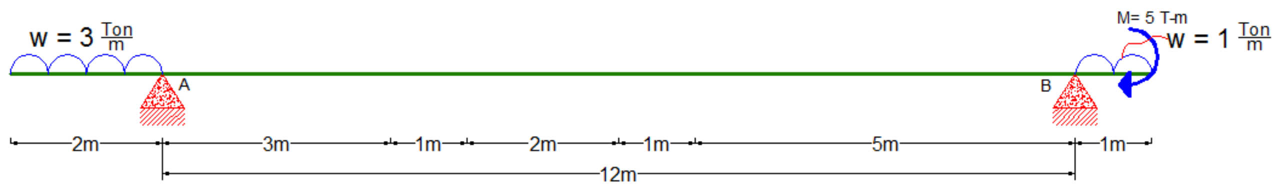

3m
curva de 2° grado
w = 3 Ton/m
A
B
2m
3m
1m
2m
1m
5m
1m
12m

Y para las fuerzas horizontales al final resolveremos:

e)



Partimos con la viga “a”:



$$\sum M_A = 0$$

$$-3(2)\left(\frac{1}{2}(2)\right) - 12R_{BY} + 1(1)\left(\frac{1}{2}(1) + 12\right) = 0$$

$$R_{BY} = \frac{23}{24} Ton \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$-3(2) + R_{AY} + \frac{23}{24} - 1(1) = 0$$

$$R_{AY} = \frac{145}{24} Ton \uparrow$$

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$M_1 = -\frac{3}{2}X^2$$

$$2 \leq X \leq 14m$$

$$M_2 = -3(2)\left(\frac{1}{2}(2) + X - 2\right) + \frac{145}{24}(X - 2)$$

$$M_2 = \frac{1}{24}X - \frac{73}{12}$$

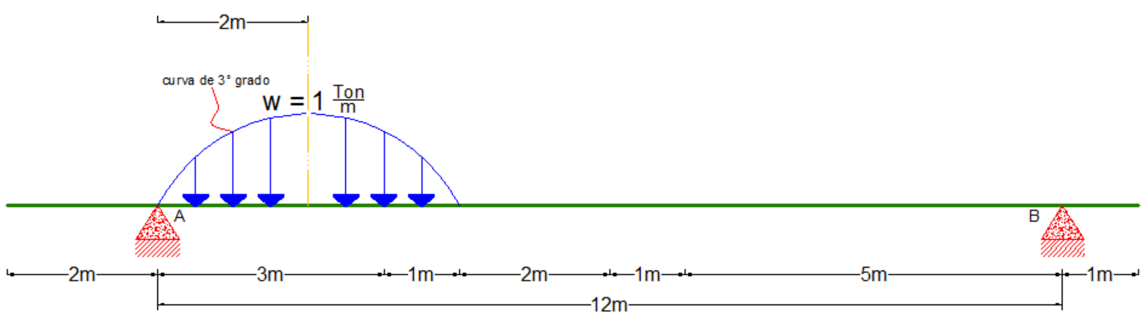
$$14 \leq X \leq 15m$$

$$M_3 = -3(2)\left(\frac{1}{2}(2) + 12 + X - 14\right) + \frac{145}{24}(12 + X - 14) + \frac{23}{24}(X - 14) - 1(X - 14)\left(\frac{X - 14}{2}\right)$$

$$M_3 = X - \frac{39}{2} - \frac{1}{2}(X^2 - 28X + 196)$$

$$M_3 = -\frac{1}{2}X^2 + 15X - \frac{235}{2}$$

Ecuaciones de momento de la viga “b”:



La carga es una curva de 3° grado por lo cual debemos de ver la forma de la ecuación que son las siguientes:

1) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
2) $y = ax^3 + bx^2 + cx$
3) $y = ax^3 + bx^2 + d$
4) $y = ax^3 + cx + d$

Tenemos 3 datos para poder construir la ecuación:

Si:

$$X = 2m \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow y = 0$$

$$X = 4m \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow y = 1$$

$$X = 6m \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow y = 0$$

Podemos escoger las opciones: “2”, “3” y “4”. Ya que tenemos 3 datos conocidos pero tomaremos la opción “4” porque es la forma de ecuación más fácil:

Por tanto construimos nuestro sistema de ecuaciones:

$$a(2)^3 + b(2) + d = 0$$

$$a(4)^3 + b(4) + d = 1$$

$$a(6)^3 + b(6) + d = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 64 & 4 & 1 & 1 \\ 216 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow R_1\left(\frac{1}{8}\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 64 & 4 & 1 & 1 \\ 216 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} R_2 + R_1(-64) \\ R_3 + R_1(-216) \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -12 & -7 & 1 \\ 0 & -48 & -26 & 0 \end{array}\right] \rightarrow R_2\left(-\frac{1}{12}\right)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & -48 & -26 & 0 \end{array}\right] \rightarrow R_3 + R_2(48) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right]$$

$$\therefore \;\; a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{8}c = 0$$

$$b + \frac{7}{12}c = -\frac{1}{12}$$

$$2c = -4$$

$$c = -2$$

$$b + \frac{7}{12}(-2) = -\frac{1}{12}$$

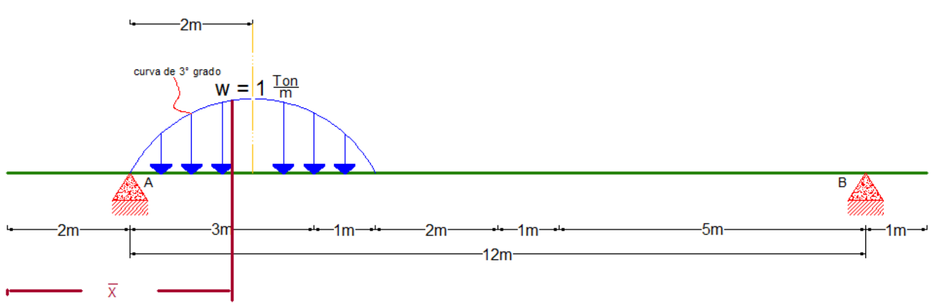
$$b = \frac{13}{12}$$

$$a + \frac{1}{4}\left(\frac{13}{12}\right) + \frac{1}{8}(-2) = 0$$

$$a = -\frac{1}{48}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{48}X^3 + \frac{13}{12}X - 2$$

Con la función podemos calcular el brazo de palanca y el área bajo la curva que este caso será la carga:



Calculo del brazo de palanca $\overline{x}$:

Como la ecuación la construimos partiendo del origen el brazo de palanca empieza en el origen:

$$\overline{X} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} \tilde{x} y \, dA}{\int_{L_1}^{L_2} y \, dA}$$

Dónde:

$$\overline{X} = Centroide\ con\ respecto\ a\ \text{"X" o brazo de palanca.}$$

$$\tilde{x} = Brazo\ de\ palanca\ de\ referencia\ que\ con\ respecto\ a\ \text{"X" será}\ siempre: \tilde{x} = X$$

$$y = función\ de\ la\ curva\ o\ carga.$$

$dA = diferencial\ del$ Área que en este caso es la base ficticia infinitesimal de un rectángulo con respecto a "X" por lo cual $dA = dx$

Entonces:

$$\overline{X} = \frac{\int_2^6 X\left(-\frac{1}{48}X^3 + \frac{13}{12}X - 2\right)dx}{\int_2^6 \left(-\frac{1}{48}X^3 + \frac{13}{12}X - 2\right)dx} = \frac{\left[-\frac{1}{240}X^5 + \frac{13}{36}X^3 - X^2\right]_2^6}{\left[-\frac{1}{192}X^4 + \frac{13}{24}X^2 - 2X\right]_2^6} = \frac{\frac{488}{45}}{\frac{8}{3}} = \frac{61}{15}m$$

$$\therefore\ \overline{X} = \frac{61}{15}m$$

El área bajo la curva será igual a la carga de la curva y será:

$$A_C = \int_{L_1}^{L_2} Y dx$$

Es decir siempre será el denominador de la fórmula para calcular el brazo de palanca:

$$A_C = \int_2^6 \left(-\frac{1}{48}X^3 + \frac{13}{12}X - 2\right)dx = \left[-\frac{1}{192}X^4 + \frac{13}{24}X^2 - 2X\right]_2^6 = \frac{8}{3}Ton \downarrow$$

Con esto ya podemos encontrar las reacciones que son:

$$\sum M_A = 0$$

$$\frac{8}{3}\left(\frac{61}{15} - 2\right) - 12R_{BY} = 0$$

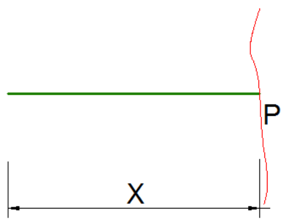
$$R_{BY} = \frac{62}{135}Ton \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} - \frac{8}{3} + \frac{62}{135} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{298}{135} Ton \uparrow$$

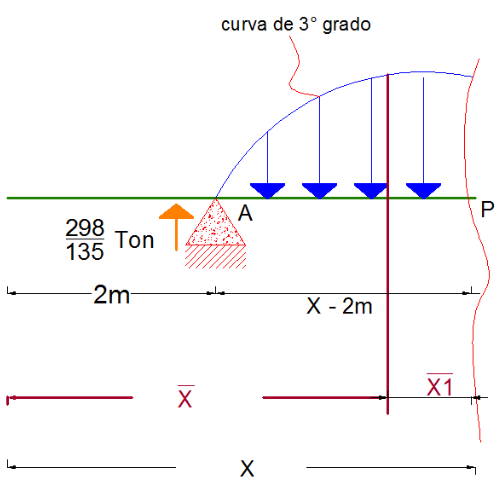
$$0 \leq X \leq 2m$$



$$\sum M_P = 0$$

$$M_1 = 0$$

$$2 \leq X \leq 6m$$



$$\overline{X} = \frac{\left[-\frac{1}{240}X^5 + \frac{13}{36}X^3 - X^2\right]_2^X}{\left[-\frac{1}{192}X^4 + \frac{13}{24}X^2 - 2X\right]_2^X} = \frac{-\frac{1}{240}(X^5 - 2^5) + \frac{13}{36}(X^3 - 2^3) - (X^2 - 2^2)}{-\frac{1}{192}(X^4 - 2^4) + \frac{13}{24}(X^2 - 2^2) - 2(X - 2)}$$

$$A_C = -\frac{1}{192}(X^4 - 2^4) + \frac{13}{24}(X^2 - 2^2) - 2(X - 2)\overline{X1} = X - \overline{X}$$

$$\sum M_P = 0$$

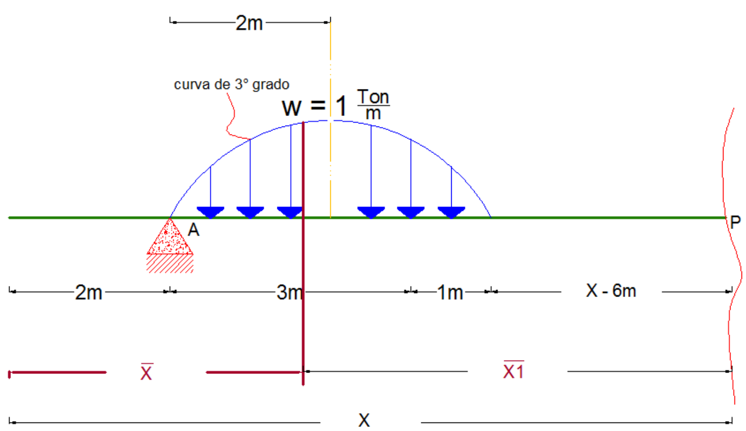
$$M_2 = \frac{298}{135}(X-2) - \left(-\frac{1}{192}(X^4-2^4) + \frac{13}{24}(X^2-2^2) - 2(X-2)\right)\left(X - \frac{-\frac{1}{240}(X^5-2^5) + \frac{13}{36}(X^3-2^3) - (X^2-2^2)}{-\frac{1}{192}(X^4-2^4) + \frac{13}{24}(X^2-2^2) - 2(X-2)}\right)$$

$$M_2 = \frac{298}{135}X - \frac{596}{135} - \left(-\frac{X}{192}(X^4-2^4) + \frac{13X}{24}(X^2-2^2) - 2X(X-2) + \frac{1}{240}(X^5-2^5) - \frac{13}{36}(X^3-2^3) + (X^2-2^2)\right)$$

$$M_2 = \frac{298}{135}X - \frac{596}{135} - \left(-\frac{1}{960}X^5 + \frac{13}{72}X^3 - X^2 + \frac{23}{12}X - \frac{56}{45}\right)$$

$$M_2 = \frac{1}{960}X^5 - \frac{13}{72}X^3 + X^2 + \frac{157}{540}X - \frac{428}{135}$$

$$6 \le X \le 14m$$



$$\sum M_P = 0$$

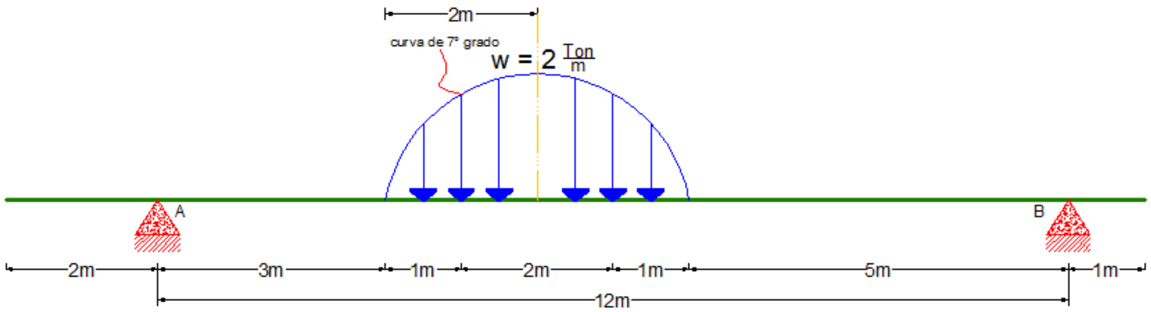
$$M_3 = \frac{298}{135}(4 + X - 6) - \frac{8}{3}\left(X - \frac{61}{15}\right)$$

$$M_3 = -\frac{62}{135}X + \frac{868}{135}$$

$$14 \le X \le 15m$$

$$M_4 = 0 \;\; en\ el\ voladizo\ no\ hay\ cargas\ ni\ momentos\ puros$$

Ecuaciones de momento de la viga "c":



La curva es de 7° grado y conocemos 3 puntos así que la forma general de esa ecuación en su expresión más fácil será:

$$Y = ax^7 + bx + c$$

Si:

$$X = 5m \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow y = 0$$

$$X = 7m \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow y = 2$$

$$X = 9m \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow y = 0$$

Por tanto construimos nuestro sistema de ecuaciones:

$$a(5)^3 + b(5) + d = 0$$

$$a(7)^3 + b(7) + d = 1$$

$$a(9)^3 + b(9) + d = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 78125 & 5 & 1 & 0 \\ 823543 & 7 & 1 & 2 \\ 4782969 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow R_1\left(\frac{1}{78125}\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{15625} & \frac{1}{78128} & 0 \\ 823543 & 7 & 1 & 2 \\ 4782969 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} R_2 + R_1(-823543) \\ R_3 + R_1(-4782969) \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{15625} & \frac{1}{78128} & 0 \\ 0 & -45.706752 & -9.5413504 & 2 \\ 0 & -297.110016 & -60.2220032 & 0 \end{array}\right] \rightarrow R_2\left(-\frac{1}{45.706752}\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{15625} & \frac{1}{78128} & 0 \\ 0 & 1 & 0.208751442 & -0.043757211 \\ 0 & -297.110016 & -60.2220032 & 0 \end{array}\right] \rightarrow R_3 + R_2(297.110016)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{15625} & \frac{1}{78128} & 0 \\ 0 & 1 & 0.208751442 & -0.043757211 \\ 0 & 0 & 1.800141073 & -13.00070566 \end{array}\right]$$

$$\therefore a + \frac{1}{15625}b + \frac{1}{78125}c = 0$$

$$b + 0.208751442 = -0.043757211$$

$$1.800141073c = -13.00070566$$

$$c = -7.222048236$$

$$b + 0.208751442(-7.222048236) = -0.043757211$$

$$b = 1.463855772$$

$$a + \frac{1}{15625}(1.463855772) + \frac{1}{78125}(-7.222048236) = 0$$

$$a = -0.000001245$$

$$\therefore y = -0.000001245X^7 + 1.463855772X - 7.222048236$$

Para el brazo de palanca:

$$\overline{X} = \frac{\int_5^9 X(-0.000001245X^7 + 1.463855772X - 7.222048236)dx}{\int_5^9(-0.000001245X^7 + 1.463855772X - 7.222048236)dx} =$$

$$\overline{X} = \frac{[-0.000000138X^9 + 0.487951924X^3 - 3.611024118X^2]_5^9}{[-0.000000156X^8 + 0.731927886X^2 - 7.222048236X]_5^9} = \frac{39.31111526}{5.445417696}$$

$$\overline{X} = 7.219118432m$$

El área bajo la curva o la carga es el denominador de la expresión anterior:

$$A_C = 5.445417696\,Ton$$

Calculo de las reacciones:

$$\sum M_A = 0$$

$$5.445417696(7.219118432 - 2) - 12R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = 2.368356656\,Ton \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

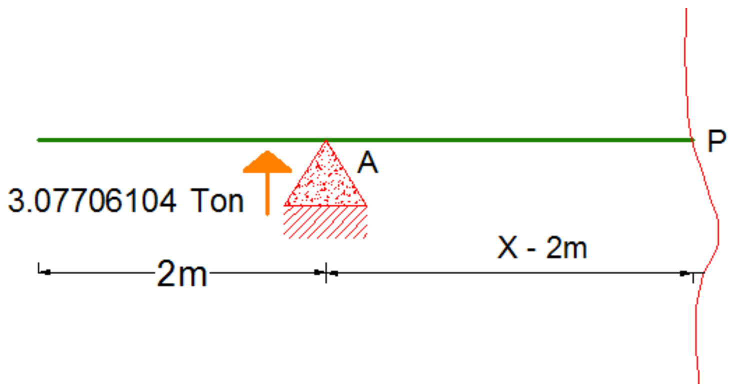
$$R_{AY} - 5.445417696 + 2.368356656 = 0$$

$$R_{AY} = 3.07706104\,Ton \uparrow$$

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$M_1 = 0 \quad Por\ que\ en\ el\ voladizo\ no\ hay\ cargas\ ni\ momentos\ puros$$

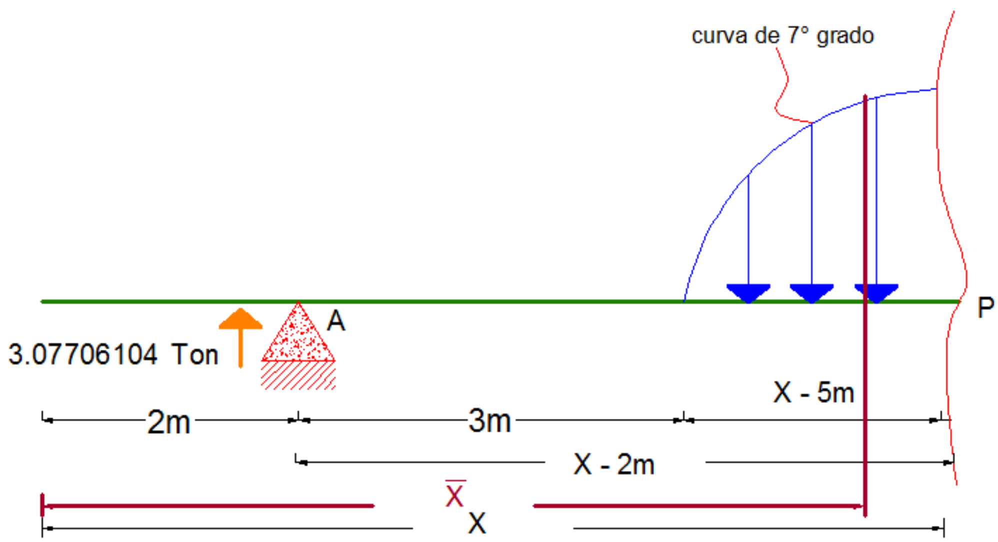
$$2 \leq X \leq 5m$$



$$M_2 = 3.07706104(X-2)$$

$$M_2 = 3.07706104X - 6.15412208$$

$$5 \leq X \leq 9m$$



$$\overline{X} = \frac{[-0.000000138X^9 + 0.487951924X^3 - 3.611024118X^2]_5^X}{[-0.000000156X^8 + 0.731927886X^2 - 7.222048236X]_5^X}$$

$$\overline{X} = \frac{-0.000000138(X^9 - 5^9) + 0.487951924(X^3 - 5^3) - 3.611024118(X^2 - 5^2)}{-0.000000156(X^8 - 5^8) + 0.731927886(X^2 - 5^2) - 7.222048236(X - 5)}$$

$$A_C = -0.000000156(X^8 - 5^8) + 0.731927886(X^2 - 5^2) - 7.222048236(X - 5)$$

$$\sum M_P = 0$$

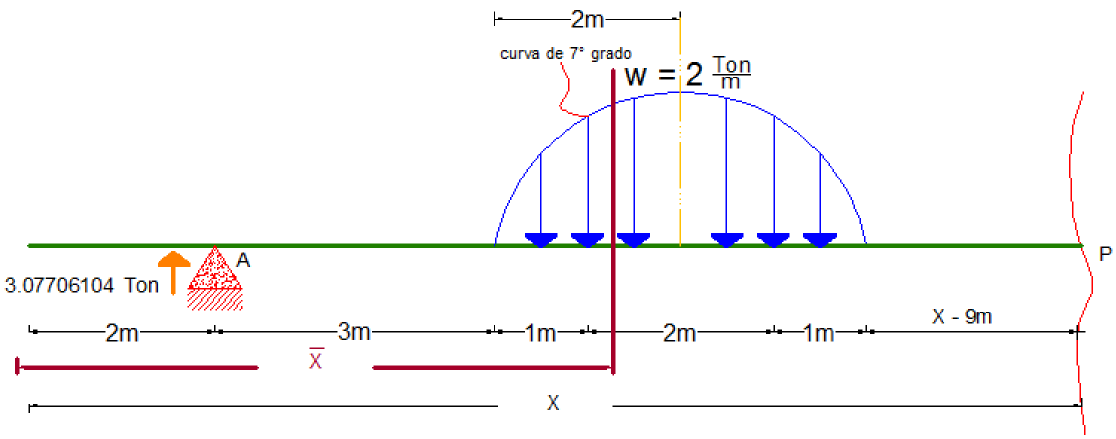
$$M_3 = 3.07706104(X-2) - \left(-0.000000156(X^8-5^8)+0.731927886(X^2-5^2)-7.222048236(X-5)\right)\left(X - \frac{-0.000000138(X^9-5^9)+0.487951924(X^3-5^3)-3.611024118(X^2-5^2)}{-0.000000156(X^8-5^8)+0.731927886(X^2-5^2)-7.222048236(X-5)}\right)$$

$$M_3 = 3.07706104X - 6.15412208 - \left(-0.000000156X(X^8-5^8)+0.731927886X(X^2-5^2)-7.222048236X(X-5)+0.000000138(X^9-5^9) - 0.487951924(X^3-5^3)+3.611024118(X^2-5^2)\right)$$

$$M_3 = 3.07706104X - 6.15412208 - (-0.000000018X^9 + 0.243975962X^3 - 3.611024118X^2 + 17.87298153X - 29.5511437)$$

$$M_3 = 0.000000018X^9 - 0.243975962X^3 + 3.611024118X^2 - 14.79592049X + 23.39702162$$

$$9 \le X \le 14m$$



$$\sum M_P = 0$$

SI:

$$\overline{X} = 7.219118432m$$

$$A_C = 5.445417696\,Ton \downarrow$$

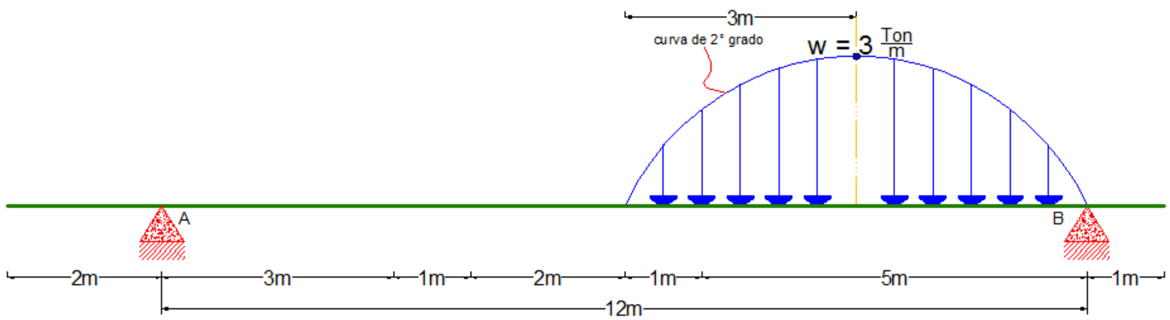
$$M_4 = 3.07706104(X-2) - 5.445417696(X - 7.219118432)$$

$$M_4 = -2.368356656X + 33.15699318$$

$$14 \le X \le 15m$$

$$M_4 = 0 \;\; en\ el\ voladizo\ no\ hay\ cargas\ ni\ momentos\ puros$$

Para la viga "d":



La ecuación de la curva tendrá la siguiente forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Si:

$$X = 8m \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow y = 0$$

$$X = 11m \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow y = 3$$

$$X = 14m \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow y = 0$$

Por tanto construimos nuestro sistema de ecuaciones:

$$a(8)^2 + b(8) + c = 0$$

$$a(11)^2 + b(11) + c = 3$$

$$a(614 + b(14) + c = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 64 & 8 & 1 & 0 \\ 121 & 11 & 1 & 3 \\ 196 & 14 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow R_1\left(\frac{1}{64}\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{64} & 0 \\ 121 & 11 & 1 & 3 \\ 196 & 14 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} R_2 + R_1(-121) \\ R_3 + R_1(-196) \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & -\frac{33}{8} & -\frac{57}{64} & 3 \\ 0 & -\frac{21}{2} & -\frac{33}{16} & 0 \end{array}\right] \rightarrow R_2\left(-\frac{8}{33}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{88} & -\frac{8}{11} \\ 0 & -\frac{21}{2} & -\frac{33}{16} & 0 \end{array}\right] \rightarrow R_3 + R_2\left(\frac{21}{2}\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{88} & -\frac{8}{11} \\ 0 & 0 & \frac{9}{44} & -\frac{84}{11} \end{array}\right]$$

$$\therefore \; a + \frac{1}{8}b + \frac{1}{64}c = 0$$

$$b + \frac{19}{88}c = -\frac{8}{11}$$

$$\frac{9}{44}c = -\frac{84}{11}$$

$$c = -\frac{112}{3}$$

$$b + \frac{19}{88}\left(-\frac{112}{3}\right) = -\frac{8}{11}$$

$$b = \frac{22}{3}$$

$$a + \frac{1}{8}\left(\frac{22}{3}\right) + \frac{1}{64}\left(-\frac{84}{11}\right) = 0$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{3}X^2 + \frac{22}{3}X - \frac{112}{3}$$

$$\overline{X} = \frac{\int_8^{14} X\left(-\frac{1}{3}X^2 + \frac{22}{3}X - \frac{112}{3}\right)dx}{\int_8^{14}\left(-\frac{1}{3}X^2 + \frac{22}{3}X - \frac{112}{3}\right)dx} = \frac{\left[-\frac{1}{12}X^4 + \frac{22}{9}X^3 - \frac{56}{3}X^2\right]_8^{14}}{\left[-\frac{1}{9}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - \frac{112}{3}X\right]_8^{14}} = \frac{132}{12}$$

$$\overline{X} = 11m$$

$$A_C = 12\ Ton \downarrow$$

$$\sum M_A = 0$$

$$12(11-2) - 12R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = 9\ Ton \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

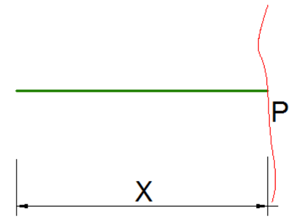
$$R_{AY} - 12 + 9 = 0$$

$$R_{AY} = 3\ Ton \uparrow$$

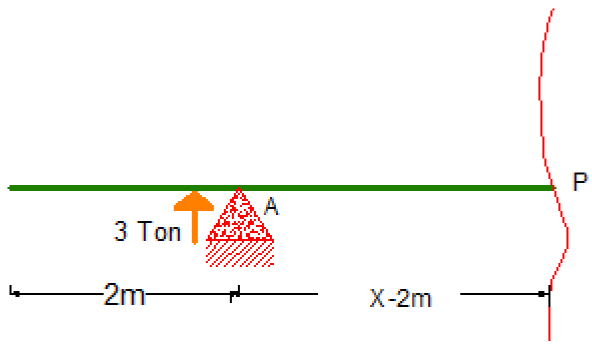
$$0 \leq X \leq 2m$$

$$\sum M_P = 0$$

$$M_1 = 0$$



$$2 \leq X \leq 8m$$

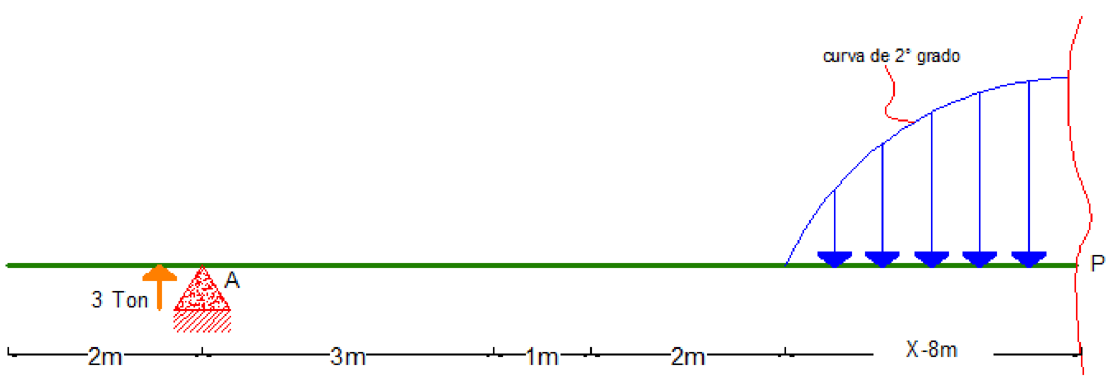


$$\sum M_P = 0$$

$$M_2 = 3(X-2)$$

$$M_2 = 3X - 6$$

$$8 \leq X \leq 14m$$



$$\overline{X}=\frac{\left[-\frac{1}{12}X^4+\frac{22}{9}X^3-\frac{56}{3}X^2\right]_8^X}{\left[-\frac{1}{9}X^3+\frac{11}{3}X^2-\frac{112}{3}X\right]_8^X}=\frac{-\frac{1}{12}(X^4-8^4)+\frac{22}{9}(X^3-8^3)-\frac{56}{3}(X^2-8^2)}{-\frac{1}{9}(X^3-8^3)+\frac{11}{3}(X^2-8^2)-\frac{112}{3}(X-8)}$$

$$A_C=-\frac{1}{9}(X^3-8^3)+\frac{11}{3}(X^2-8^2)-\frac{112}{3}(X-8)$$

$$\sum M_P=0$$

$$M_3=3(X-2)-\left(-\frac{1}{9}(X^3-8^3)+\frac{11}{3}(X^2-8^2)-\frac{112}{3}(X-8)\right)\left(X-\frac{-\frac{1}{12}(X^4-8^4)+\frac{22}{9}(X^3-8^3)-\frac{56}{3}(X^2-8^2)}{-\frac{1}{9}(X^3-8^3)+\frac{11}{3}(X^2-8^2)-\frac{112}{3}(X-8)}\right)$$

$$M_3=3X-6-(-\frac{X}{9}(X^3-8^3)+\frac{11X}{3}(X^2-8^2)-\frac{112X}{3}(X-8)+\frac{1}{12}(X^4-8^4)-\frac{22}{9}(X^3-8^3)+\frac{56}{3}(X^2-8^2)$$

$$M_3=3X-6-\left(-\frac{1}{36}X^4+\frac{11}{9}X^3-\frac{56}{3}X^2+\frac{1088}{9}X-\frac{2560}{9}\right)$$

$$M_3=\frac{1}{36}X^4+\frac{11}{9}X^3+\frac{56}{3}X^2-\frac{1061}{9}X+\frac{2506}{9}$$

Ahora si podemos hacer la sumatoria de las fuerzas verticales en "A" y en "B"

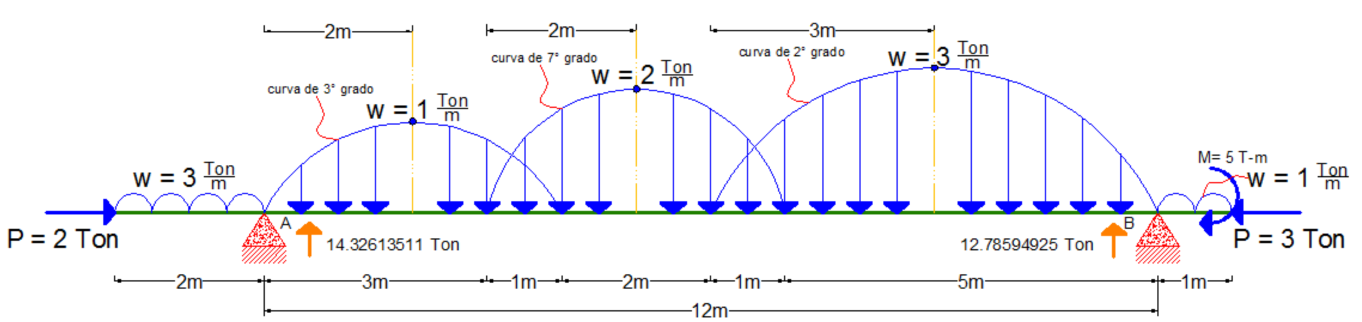
$$\sum R_{AY}=\frac{145}{24}+\frac{298}{135}+3.07706104+3=$$

$$R_{AY}=14.32613511\ Ton\uparrow$$

$$\sum R_{BY}=\frac{23}{24}+\frac{62}{135}+2.368356656+9$$

$$R_{BY}=12.78594925\ Ton\uparrow$$

Por tanto:

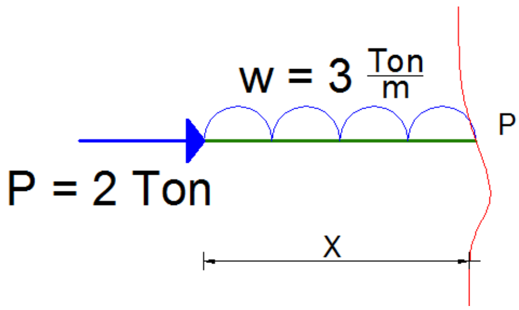


Obtención de las ecuaciones de momento de cada tramo:

Para ello vamos a incluir todas las expresiones algebraicas de cada viga pero vamos a omitir las expresiones algebraicas en los apoyos:

De las vigas "a", "b", "c" y "d" agregamos las expresiones algebraicas con excepción de las expresiones algebraicas de los apoyos, es decir solo vamos a considerar las cargas. Pero hay que tomar en cuenta para qué tramos son validas tales expresiones. Y de esta viga real solo tomamos momentos únicamente de los apoyos:

$$0 \le X \le 2m$$

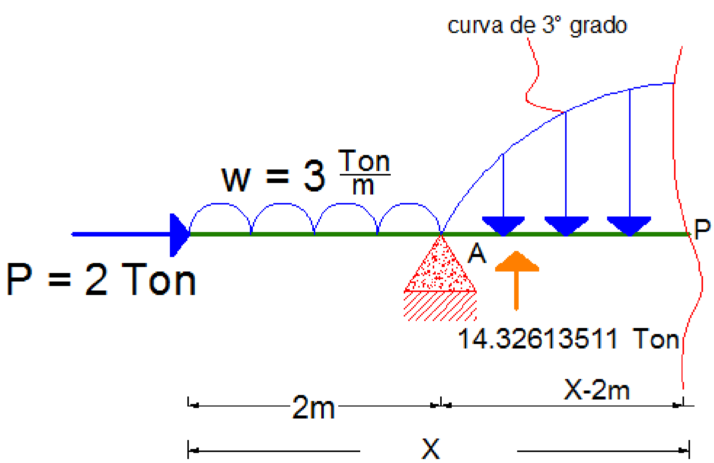


$$\sum M_P = 0$$

$$M_1 = -\frac{3}{2}X^2$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = -3X$$

$$2 \le X \le 5m$$



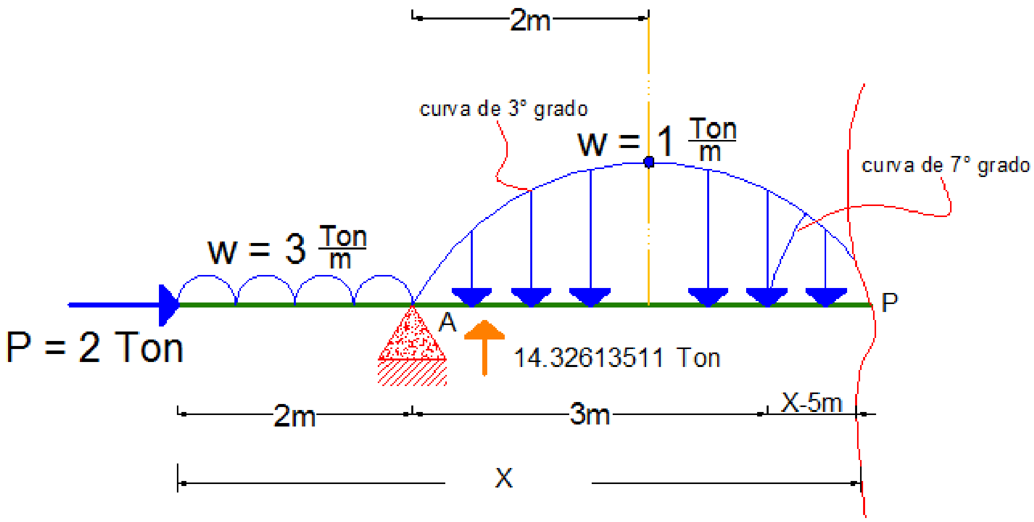
$$\sum M_P = 0$$

$$M_2 = -3(2)(X-1) - \left(-\frac{1}{960}X^5 + \frac{13}{72}X^3 - X^2 + \frac{23}{12}X - \frac{56}{45}\right) + 14.32613511(X-2)$$

$$M_2 = \frac{1}{960}X^5 - \frac{13}{72}X^3 + X^2 + 6.409468443X - 21.40782578$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = \frac{1}{192}X^4 - \frac{13}{24}X^2 + 2X + 6.409468443$$

$$5 \leq X \leq 6m$$



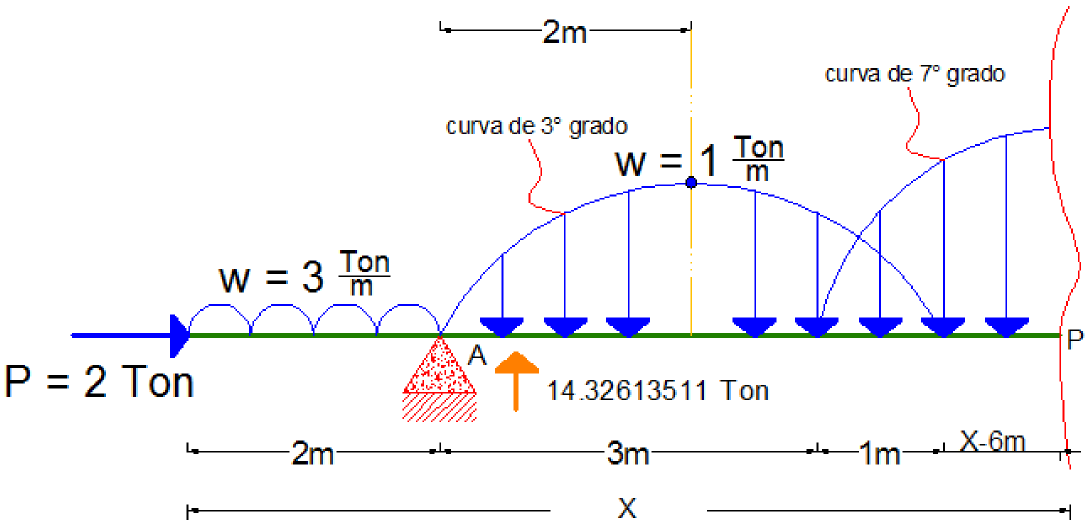
$$\sum M_P = 0$$

$$M_3 = -3(2)(X-1) - \left(-\frac{1}{960}X^5 + \frac{13}{72}X^3 - X^2 + \frac{23}{12}X - \frac{56}{45}\right) + 14.32613511(X-2)$$
$$- (-0.000000018X^9 + 0.243975962X^3 - 3.611024118X^2 + 17.87298153X - 29.5511437)$$

$$M_3 = 0.000000018X^9 + \frac{1}{960}X^5 - 0.424531518X^3 + 4.611024118X^2 - 11.46351309X + 8.143317924$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx} = 0.000000162X^8 + \frac{1}{192}X^4 - 1.273594554X^2 + 9.222048236X - 11.46351309$$

$$6 \leq X \leq 8m$$



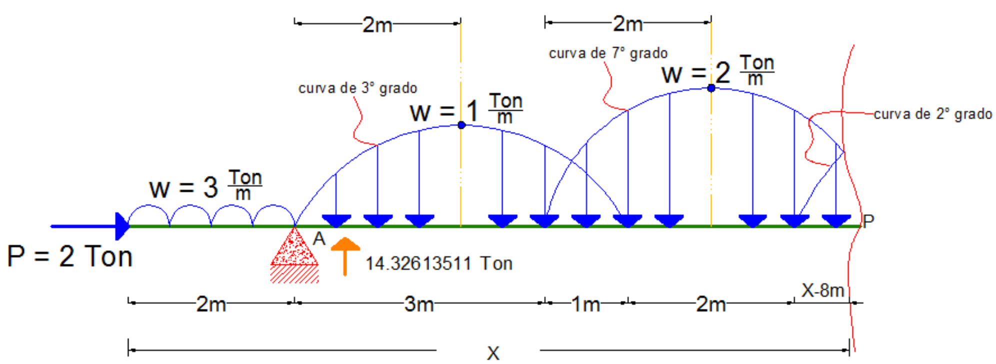
$$\sum M_P = 0$$

$$M_4 = -3(2)(X-1) + 14.32613511(X-2) - \frac{8}{3}\left(X - \frac{61}{15}\right) - (-0.000000018X^9 + 0.243975962X^3 - 3.611024118X^2 + 17.87298153X - 29.5511437)$$

$$M_4 = 0.000000018X^9 - 0.243975962X^3 + 3.611024118X^2 - 12.21351309X + 17.74331792$$

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx} = 0.000000162X^8 - 0.731927886x^2 + 7.222048236x - 12.21351309$$

$$8 \leq X \leq 9m$$



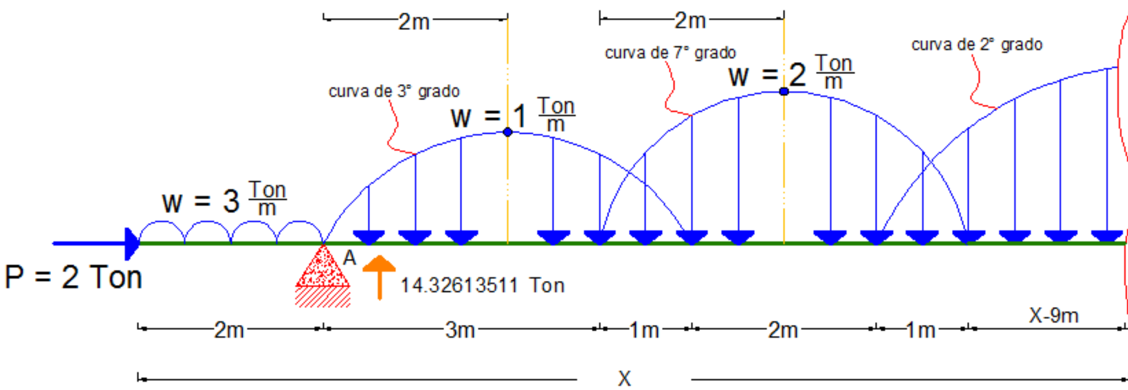
$$\sum M_P = 0$$

$$M_5 = -3(2)(X-1) + 14.32613511(X-2) - \frac{8}{3}\left(X - \frac{61}{15}\right) - (-0.000000018X^9 + 0.243975962X^3 - 3.611024118X^2 + 17.87298153X - 29.5511437) - \left(-\frac{1}{36}X^4 + \frac{11}{9}X^3 - \frac{56}{3}X^2 + \frac{1088}{9}X - \frac{2560}{9}\right)$$

$$M_5 = 0.000000018X^9 + \frac{1}{36}X^4 - 1.466198184X^3 + 22.27769078X^2 - 133.1024020X + 302.1877624$$

$$V_5 = \frac{dM_5}{dx} = 0.000000162X^8 + \frac{1}{9}x^3 - 4.398594552X^2 + 44.55538156X - 133.1024020$$

$$9 \leq X \leq 14m$$



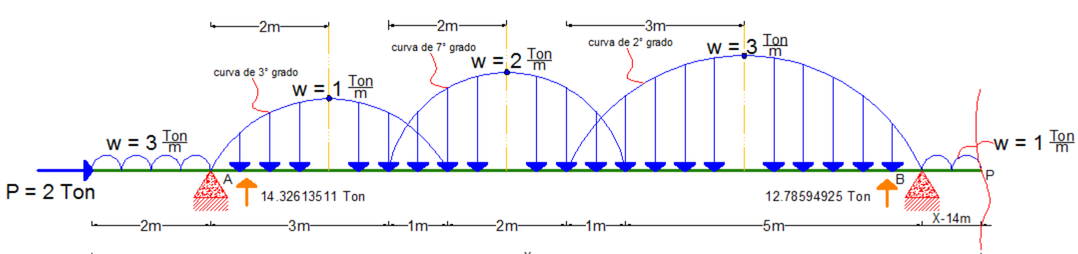
$$\sum M_P = 0$$

$$M_6 = -3(2)(X-1) + 14.32613511(X-2) - \frac{8}{3}\left(X - \frac{61}{15}\right) - 5.445417696(X - 7.219118432) - \left(-\frac{1}{36}X^4 + \frac{11}{9}X^3 - \frac{56}{3}X^2 + \frac{1088}{9}X - \frac{2560}{9}\right)$$

$$M_6 = \frac{1}{36}X^4 - \frac{11}{9}X^3 + \frac{56}{3}X^2 - 120.6748381X + 311.9477339$$

$$V_6 = \frac{dM_6}{dx} = \frac{1}{9}X^3 - \frac{11}{3}X^2 + \frac{112}{3}X - 120.6748381$$

$$14 \leq X \leq 15m$$



$$\sum M_P = 0$$

$$M_7 = -3(2)(X-1) + 14.32613511(X-2) - \frac{8}{3}\left(X - \frac{61}{15}\right) - 5.445417696(X - 7.219118432) - 12(X-11) + 12.78594925(X-14) - 1(X-14)\left(\frac{X-14}{2}\right)$$

$$M_7 = X - 19.5 - \frac{1}{2}(X^2 - 28X + 196)$$

$$M_7 = -\frac{1}{2}X^2 + 15X - \frac{235}{2}$$

$$V_7 = \frac{dM_7}{dx} = -X + 15$$

Con esto concluimos el cálculo de las ecuaciones de momento y de cortante para cada tramo de la viga.

Ahora veremos los diagramas de momento y de cortante:

X	V	M
0	0	0
0.5	-1.5	-0.375
1	-3	-1.5
1.5	-4.5	-3.375
2	-6	-6
2	8.32613511	-6.000000005
2.5	8.227502297	-1.853609968
3	7.956343443	2.198704549
3.5	7.555627297	6.081097191
4	7.07613511	9.741159103
4.5	6.576460631	13.15382518
5	6.12301011	16.32528032
5	6.125353823	16.32528026
5.1	6.040424822	16.93363608
5.2	5.947879091	17.5331113
5.3	5.848557758	18.12298601
5.4	5.743334367	18.70262607
5.5	5.63311645	19.27148636
5.6	5.518847196	19.82911428
5.7	5.401507218	20.3751534
5.8	5.282116408	20.90934732
5.9	5.161735907	21.43154364
6	5.041470174	21.94169827
6	5.041470222	21.94169836

6.2	4.781589006	22.92466834
6.4	4.483818872	23.85180661
6.6	4.152492336	24.71595718
6.8	3.792673914	25.51090225
7	3.41025591	26.23151803
7.2	3.0120633	26.87395065
7.4	2.605968298	27.43581392
7.6	2.201015164	27.91641119
7.8	1.807555847	28.31698301
8	1.437397086	28.64098331
8	1.437397033	28.64098299
8.1	1.255292785	28.77569761
8.2	1.064848418	28.89176342
8.3	0.868688566	28.98847664
8.4	0.669560951	29.06540206
8.5	0.470342495	29.12238565
8.6	0.274045658	29.15956779
8.7	0.08382501	29.17739716
8.8	-0.097015966	29.17664527
8.9	-0.265017826	29.15842175
9	-0.41655787	29.12419025
9	-0.6748381	29.124191
9.5	-1.660949211	28.55239695
10	-2.897060322	27.42157512
10.5	-4.2998381	25.62755885
11	-5.785949211	23.10784813
11.5	-7.272060322	19.84160964
12	-8.6748381	15.8496767
12.5	-9.910949211	11.19454932
13	-10.89706032	5.980394156
13.5	-11.5498381	0.35304455
14	-11.78594921	-5.4999995
14	1	-5.5
14.1	0.9	-5.405
14.2	0.8	-5.32
14.3	0.7	-5.245
14.4	0.6	-5.18
14.5	0.5	-5.125
14.6	0.4	-5.08
14.7	0.3	-5.045
14.8	0.2	-5.02

14.9	0.1	-5.005
15	0	-5

DIAGRAMA DE CORTANTE: (TONELADAS)

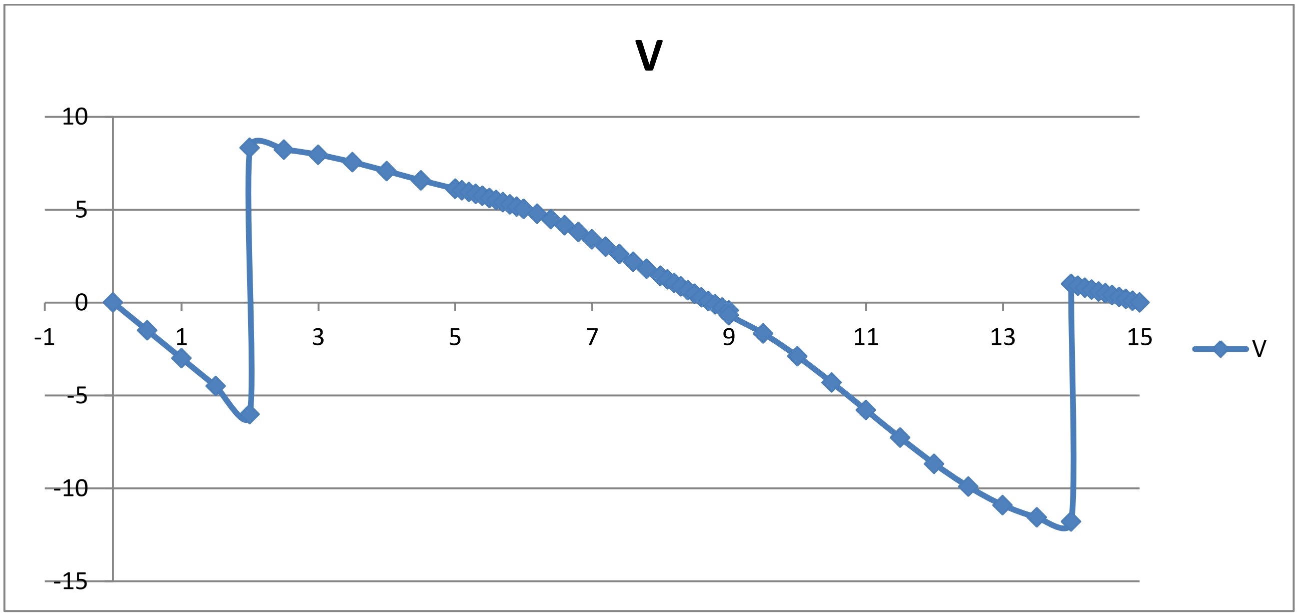
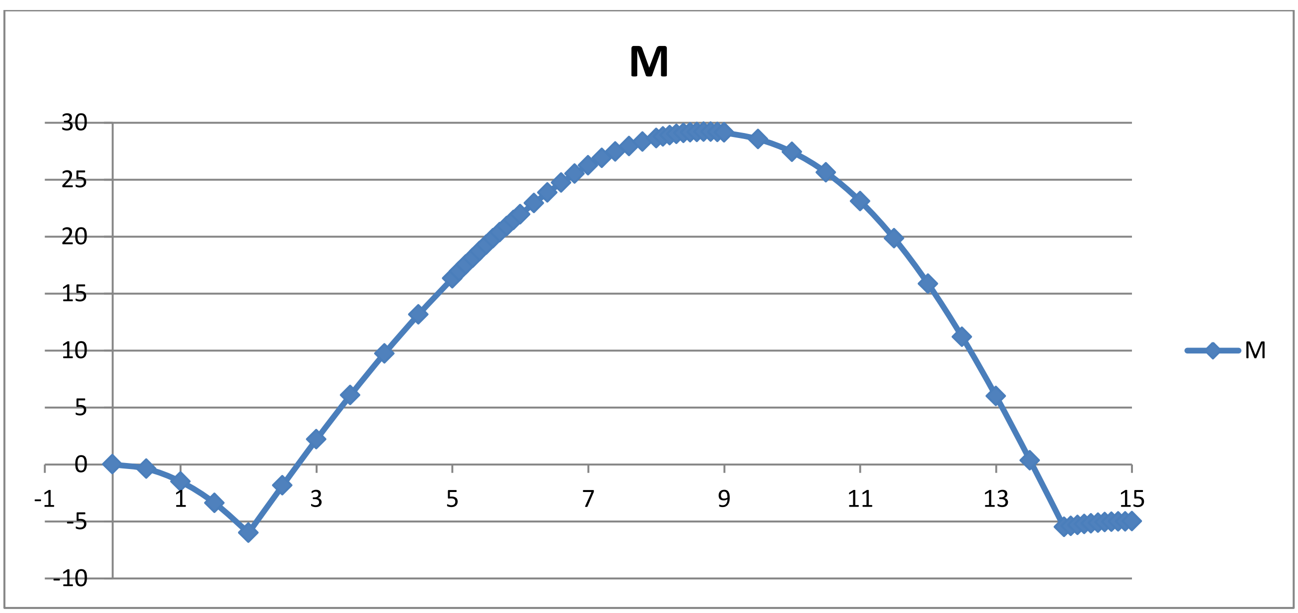


DIAGRAMA DE MOMENTO ($Ton - m$):



El momento máximo, según la tabla anterior debe de estar entre "8.7m" y "8.8m", es decir esta en el tramo: $8 \leq X \leq 9m$ para saber cual es la posición exacta usaremos la ecuación de ese cortante igualarla a cero y resolver la ecuación:

$$0.000000162 \cdot x^8 + \frac{1}{9} \cdot x^3 - 4.398594552 \cdot x^2 + 44.55538156 \cdot x - 133.102402$$

Solución de la ecuación:

$x = 6.953112879 - 13.60571098 \cdot i \vee x = 6.953112879 + 13.60571098 \cdot i \vee x = -9.521971107 - 15.88739533 \cdot i \vee x = -9.521971107 + 15.88739533 \cdot i \vee x = 8.745596475 \vee x = -19.60408968 \vee x = 10.03241391 \vee x = 5.963795758$

La solución lógica es:

$$x = 8.745596475m$$

Sustituimos en la ecuación de momento:

$$0.000000018 \cdot x^9 + \frac{1}{36} \cdot x^4 - 1.466198184 \cdot x^3 + 22.27769078 \cdot x^2 - 133.102402 \cdot x + 302.1877624$$

$$\therefore \quad M_{MÁX} = 29.17930020\,Ton - m$$

Vemos que cuando $x = 15m$ el momento es de $-5\,Ton - m$, este valor se le suma $5\,Ton - m$ de la viga original y tenemos cero ya que en ese ultimo punto se neutralizan los momentos, por tanto podemos decir que nuestros cálculos son correctos. Y finalmente vemos que hay continuidad en los momentos en cada tramo nuestras aproximaciones son muy buenas.

<u>Calculo de las flechas máximas de cada tramo:</u>

Recordando las ecuaciones de momento:

$$0 \le X \le 2m$$

$$M_1 = -\frac{3}{2}X^2$$

$$2 \le X \le 5m$$

$$M_2 = \frac{1}{960}X^5 - \frac{13}{72}X^3 + X^2 + 6.409468443X - 21.40782578$$

$$5 \le X \le 6m$$

$$M_3 = 0.000000018X^9 + \frac{1}{960}X^5 - 0.424531518X^3 + 4.611024118X^2 - 11.46351309X + 8.143317924$$

$$6 \leq X \leq 8m$$

$$M_4 = 0.000000018X^9 - 0.243975962X^3 + 3.611024118X^2 - 12.21351309X + 17.74331792$$

$$8 \leq X \leq 9m$$

$$M_5 = 0.000000018X^9 + \frac{1}{36}X^4 - 1.466198184X^3 + 22.27769078X^2 - 133.1024020X + 302.1877624$$

$$9 \leq X \leq 14m$$

$$M_6 = \frac{1}{36}X^4 - \frac{11}{9}X^3 + \frac{56}{3}X^2 - 120.6748381X + 311.9477339$$

$$14 \leq X \leq 15m$$

$$M_7 = -\frac{1}{2}X^2 + 15X - \frac{235}{2}$$

Aplicando la ecuación diferencial:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$EI\theta_1 = -\frac{1}{2}X^3 + C_1$$

$$EIY_1 = -\frac{1}{8}X^4 + C_1X + C_2$$

$$2 \leq X \leq 5m$$

$$EI\theta_2 = \frac{1}{5760}X^6 - \frac{13}{288}X^4 + \frac{1}{3}X^3 + 3.204734222X^2 - 21.40782578X + C_3$$

$$EIY_2 = \frac{1}{40320}X^7 - \frac{13}{1440}X^5 + \frac{1}{12}X^4 + 1.068244741X^3 - 10.70391289X^2 + C_3X + C_4$$

$$5 \leq X \leq 6m$$

$$EI\theta_3 = \frac{9}{5000000000}X^{10} + \frac{1}{5760}X^6 - \frac{212265759}{2000000000}X^4 + \frac{2305512059}{1500000000}X^3 - \frac{1146351309}{200000000}X^2 + \frac{2035829481}{250000000}X + C_5$$

$$EIY_3 = \frac{9}{55000000000}X^{11} + \frac{1}{40320}X^7 - \frac{212265759}{10000000000}X^5 + \frac{2305512059}{6000000000}X^4 - \frac{382117103}{200000000}X^3 + \frac{2035829481}{500000000}X^2 + C_5X + C_6$$

$$6 \leq X \leq 8m$$

$$EI\theta_4 = \frac{9}{5000000000}X^{10} - \frac{121987981}{2000000000}X^4 + \frac{601837353}{500000000}X^3 - \frac{1221351309}{200000000}X^2 + \frac{110895737}{6250000}X + C_7$$

$$EIY_4 = \frac{9}{55000000000}X^{11} - \frac{121987981}{10000000000}X^5 + \frac{601837353}{2000000000}X^4 - \frac{407117103}{200000000}X^3 + \frac{110895737}{12500000}X^2 + C_7X + C_8$$

$$8 \leq X \leq 9m$$

$$EI\theta_5 = \frac{9}{5000000000}X^{10} + \frac{1}{180}X^5 - \frac{183274773}{500000000}X^4 + \frac{1113884539}{150000000}X^3 - \frac{66551201}{1000000}X^2 + \frac{377734703}{1250000}X + C_9$$

$$EIY_5 = \frac{9}{55000000000}X^{11} + \frac{1}{1080}X^6 - \frac{183274773}{2500000000}X^5 + \frac{1113884539}{600000000}X^4 - \frac{66551201}{3000000}X^3 + \frac{377734703}{2500000}X^2 + C_9X + C_{10}$$

$$9 \leq X \leq 14m$$

$$EI\theta_6 = \frac{1}{180}X^5 - \frac{11}{36}X^4 + \frac{56}{9}X^3 - \frac{1206748381}{20000000}X^2 + \frac{3119477339}{10000000}X + C_{11}$$

$$EIY_6 = \frac{1}{1080}X^6 - \frac{11}{180}X^5 + \frac{14}{9}X^4 - \frac{1206748381}{60000000}X^3 + \frac{3119477339}{20000000}X^2 + C_{11}X + C_{12}$$

$$14 \leq X \leq 15m$$

$$EI\theta_7 = -\frac{1}{6}X^3 + \frac{15}{2}X^2 - \frac{235}{2}X + C_{13}$$

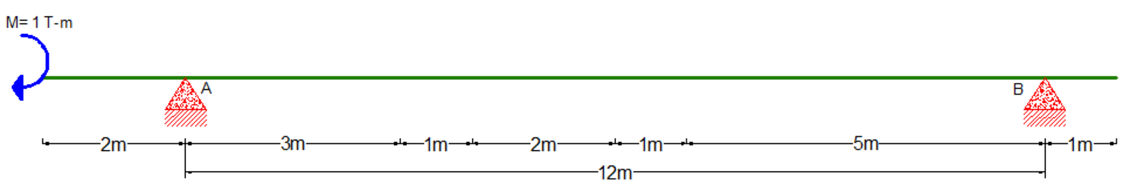
$$EIY_7 = -\frac{1}{24}X^4 + \frac{5}{2}X^3 - \frac{235}{4}X^2 + C_{13}X + C_{14}$$

Para las condiciones iniciales:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = ? \quad Y \;\; \theta = ?$$

Aplicamos trabajo virtual:

Para el giro:



$$\sum M_A = 0$$

$$1 - 12R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = \frac{1}{12}\; Ton \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} + \frac{1}{12} = 0$$

$$R_{AY}=-\frac{1}{12}\,Ton\downarrow$$

$$0\leq X\leq 2m$$

$$m_1=1$$

$$2\leq X\leq 14m$$

$$m_2=1-\frac{1}{12}(x-2)$$

$$m_2=-\frac{1}{12}X+\frac{7}{6}$$

$$14\leq X\leq 15m$$

$$m_3=0$$

Aplicando la fórmula:

$$\theta_X=\int_{L_2}^{L_1}\frac{Mm}{EI}\,dx$$

$$\theta_X=\frac{1}{EI}\int_0^2\left(-\frac{3}{2}X^2\right)(1)dx+\frac{1}{EI}\int_2^5\left(\frac{1}{960}X^5-\frac{13}{72}X^3+X^2+6.409468443X-21.40782578\right)\left(-\frac{1}{12}X+\frac{7}{6}\right)dx$$

$$+\frac{1}{EI}\int_5^6\left(0.000000018X^9+\frac{1}{960}X^5-0.424531518X^3+4.611024118X^2-11.46351309X+8.143317924\right)\left(-\frac{1}{12}X+\frac{7}{6}\right)dx$$

$$+\frac{1}{EI}\int_6^8(0.000000018X^9-0.243975962X^3+3.611024118X^2-12.21351309X+17.74331792)\left(-\frac{1}{12}X+\frac{7}{6}\right)dx$$

$$+\frac{1}{EI}\int_8^9\left(0.000000018X^9+\frac{1}{36}X^4-1.466198184X^3+22.27769078X^2-133.1024020X+302.1877624\right)\left(-\frac{1}{12}X+\frac{7}{6}\right)dx$$

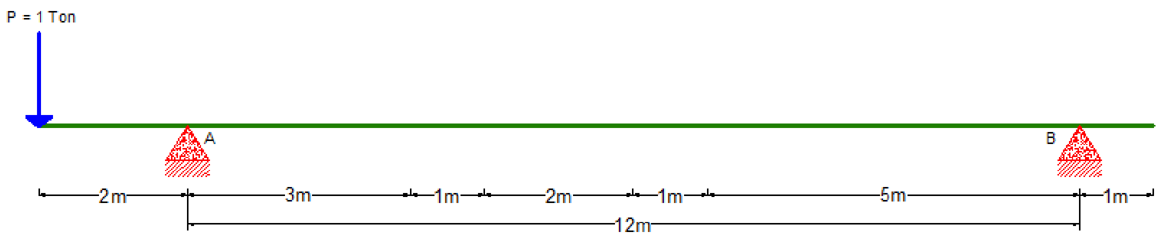
$$+\frac{1}{EI}\int_9^{14}\left(\frac{1}{36}X^4-\frac{11}{9}X^3+\frac{56}{3}X^2-120.6748381X+311.9477339\right)\left(-\frac{1}{12}X+\frac{7}{6}\right)dx$$

$$+\frac{1}{EI}\int_{14}^{15}\left(-\frac{1}{2}X^2+15X-\frac{235}{2}\right)(0)dx$$

$$\theta_X=-\frac{4}{EI}+\frac{576375654209}{42000000000EI}+\frac{1129210303007909}{83160000000000EI}+\frac{1239330770147}{41250000000EI}+\frac{237136325071097}{17820000000000EI}+\frac{247394177}{10368000EI}+0EI$$

$$\boldsymbol{\theta_X=\frac{7527228575977367}{83160000000000EI}\cong\frac{90.51501414}{EI}}$$

Para la flecha:



$$\sum M_A = 0$$

$$-1(2) - 12R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = -\frac{1}{6}\ Ton \downarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-1 + R_{AY} - \frac{1}{6} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{7}{6}\ Ton \uparrow$$

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$m_1 = -X$$

$$2 \leq X \leq 14m$$

$$m_2 = -X + \frac{7}{6}(X-2)$$

$$m_2 = \frac{1}{6}X - \frac{7}{3}$$

$$14 \leq X \leq 15m$$

$$m_3 = 0$$

Aplicando la fórmula:

$$Y_X = \int_{L_2}^{L_1} \frac{Mm}{EI}\ dx$$

$$Y_X = \frac{1}{EI}\int_0^2 \left(-\frac{3}{2}X^2\right)(-X)dx + \frac{1}{EI}\int_2^5 \left(\frac{1}{960}X^5 - \frac{13}{72}X^3 + X^2 + 6.409468443X - 21.40782578\right)\left(\frac{1}{6}X - \frac{7}{3}\right)dx$$

$$+\frac{1}{EI}\int_5^6 \left(0.000000018X^9 + \frac{1}{960}X^5 - 0.424531518X^3 + 4.611024118X^2 - 11.46351309X + 8.143317924\right)\left(\frac{1}{6}X - \frac{7}{3}\right)dx$$

$$+\frac{1}{EI}\int_{6}^{8}(0.000000018X^9-0.243975962X^3+3.611024118X^2-12.21351309X+17.74331792)\left(\frac{1}{6}X-\frac{7}{3}\right)dx$$

$$+\frac{1}{EI}\int_{8}^{9}\left(0.000000018X^9+\frac{1}{36}X^4-1.466198184X^3+22.27769078X^2-133.1024020X+302.1877624\right)\left(\frac{1}{6}X-\frac{7}{3}\right)dx$$

$$+\frac{1}{EI}\int_{9}^{14}\left(\frac{1}{36}X^4-\frac{11}{9}X^3+\frac{56}{3}X^2-120.6748381X+311.9477339\right)\left(\frac{1}{6}X-\frac{7}{3}\right)dx$$

$$+\frac{1}{EI}\int_{14}^{15}\left(-\frac{1}{2}X^2+15X-\frac{235}{2}\right)(0)dx$$

$$Y_X=\frac{6}{EI}-\frac{576375654209}{21000000000EI}-\frac{1129210303007909}{41580000000000EI}-\frac{1239330770147}{20625000000EI}-\frac{237136325071097}{8910000000000EI}-\frac{247394177}{5184000EI}+0EI$$

$$\mathbf{Y_X=-\frac{7610388575977367}{41580000000000EI}\cong\frac{-183.03002828}{EI}}$$

Por tanto:

$$x=0\qquad\rightarrow\ \theta_X=-\frac{90.51501414}{\mathrm{EI}}\qquad y\qquad Y_X=\frac{183.03002828}{\mathrm{EI}}$$

Para las ecuaciones:

$$0\le X\le 2m$$

$$EI\theta_1=-\frac{1}{2}X^3+C_1$$

$$EIY_1=-\frac{1}{8}X^4+C_1X+C_2$$

$$EI\left(-\frac{90.51501414}{\mathrm{EI}}\right)=-\frac{1}{2}(0)^3+C_1$$

$$C_1=-90.51501414$$

$$EI\left(\frac{183.03002828}{\mathrm{EI}}\right)=-\frac{1}{8}(0)^4-90.51501414(0)+C_2$$

$$C_2=183.03002828$$

$$2\le X\le 5m$$

$$EI\theta_2=\frac{1}{5760}X^6-\frac{13}{288}X^4+\frac{1}{3}X^3+3.204734222X^2-21.40782578X+C_3$$

$$EIY_2=\frac{1}{40320}X^7-\frac{13}{1440}X^5+\frac{1}{12}X^4+1.068244741X^3-10.70391289X^2+C_3X+C_4$$

Por continuidad:

$$\theta_1 = \theta_2 \quad en \quad X = 2m$$

Y:

$$Y_1 = Y_2 \quad en \quad X = 2m$$

Para ello:

$$EI\theta_{1(2m)} = -\frac{1}{2}(2)^3 - 90.51501414$$

$$\theta_{1(2m)} = -\frac{94.51501414}{EI}$$

$$Y_{1(2m)} = -\frac{1}{8}(2)^4 - 90.51501414(2) + 183.03002828$$

$$Y_{1(2m)} = 0$$

Haciendo las igualaciones:

Si: $X = 2m$

$$-94.51501414 = \frac{1}{5760}(2)^6 - \frac{13}{288}(2)^4 + \frac{1}{3}(2)^3 + 3.204734222(2)^2 - 21.40782578(2) + C_3$$

$$C_3 = -66.47385502$$

$$0 = \frac{1}{40320}(2)^7 - \frac{13}{1440}(2)^5 + \frac{1}{12}(2)^4 + 1.068244741(2)^3 - 10.70391289(2)^2 - 66.47385502(2) + C_4$$

$$C_4 = 166.1697846$$

Y=-274.4575683

$$5 \leq X \leq 6m$$

$$EI\theta_3 = \frac{9}{5000000000}X^{10} + \frac{1}{5760}X^6 - \frac{212265759}{2000000000}X^4 + \frac{2305512059}{1500000000}X^3 - \frac{1146351309}{200000000}X^2 + \frac{2035829481}{250000000}X + C_5$$

$$EIY_3 = \frac{9}{55000000000}X^{11} + \frac{1}{40320}X^7 - \frac{212265759}{10000000000}X^5 + \frac{2305512059}{6000000000}X^4 - \frac{382117103}{200000000}X^3 + \frac{2035829481}{500000000}X^2 + C_5X + C_6$$

Por continuidad:

$$\theta_2 = \theta_3 \quad en \quad X = 5m$$

Y:

$$Y_2 = Y_3 \quad en \quad X = 5m$$

Para ello:

$$EI\theta_{2(5m)}=\frac{1}{5760}(5)^6-\frac{13}{288}(5)^4+\frac{1}{3}(5)^3+3.204734222(5)^2-21.40782578(5)-66.47385502$$

$$\theta_{2(5m)}=-\frac{77.22709365}{EI}$$

$$EIY_{2(5m)}=\frac{1}{40320}(5)^7-\frac{13}{1440}(5)^5+\frac{1}{12}(5)^4+1.068244741(5)^3-10.70391289(5)^2-66.47385502(5)+166.1697846$$

$$Y_{2(5m)}=-\frac{274.4575683}{EI}$$

$$-77.22709365=\frac{9}{5000000000}(5)^{10}+\frac{1}{5760}(5)^6-\frac{212265759}{2000000000}(5)^4+\frac{2305512059}{1500000000}(5)^3-\frac{1146351309}{200000000}(5)^2+\frac{2035829481}{250000000}(5)+C_5$$

$$C_5=-103.1729766$$

$$-274.4575683=\frac{9}{55000000000}(5)^{11}+\frac{1}{40320}(5)^7-\frac{212265759}{10000000000}(5)^5+\frac{2305512059}{6000000000}(5)^4-\frac{382117103}{200000000}(5)^3+\frac{2035829481}{500000000}(5)^2-103.1729766(5)+C_6$$

$$C_6=202.6689595$$

$$6\le X\le 8m$$

$$EI\theta_4=\frac{9}{5000000000}X^{10}-\frac{121987981}{2000000000}X^4+\frac{601837353}{500000000}X^3-\frac{1221351309}{200000000}X^2+\frac{110895737}{6250000}X+C_7$$

$$EIY_4=\frac{9}{55000000000}X^{11}-\frac{121987981}{10000000000}X^5+\frac{601837353}{2000000000}X^4-\frac{407117103}{200000000}X^3+\frac{110895737}{12500000}X^2+C_7X+C_8$$

$$\theta_3=\theta_4\quad en\quad X=6m$$

Y:

$$Y_3=Y_4\quad en\quad X=6m$$

Para ello:

$$EI\theta_{3(6m)}=\frac{9}{5000000000}(6)^{10}+\frac{1}{5760}(6)^6-\frac{212265759}{2000000000}(6)^4+\frac{2305512059}{1500000000}(6)^3-\frac{1146351309}{200000000}(6)^2+\frac{2035829481}{250000000}(6)-103.1729766$$

$$\theta_{3(6m)}=\frac{-58.00194089}{EI}$$

$$EIY_{3(6m)}=\frac{9}{55000000000}(6)^{11}+\frac{1}{40320}(6)^7-\frac{212265759}{10000000000}(6)^5+\frac{2305512059}{6000000000}(6)^4-\frac{382117103}{200000000}(6)^3+\frac{2035829481}{500000000}(6)^2)-103.1729766(6)+202.6689595$$

$$Y_{3(6m)}=\frac{-342.5406742}{EI}$$

$$-58.00194089 = \frac{9}{5000000000}(6)^{10} - \frac{121987981}{2000000000}(6)^4 + \frac{601837353}{500000000}(6)^3 - \frac{1221351309}{200000000}(6)^2 + \frac{110895737}{6250000}(6) + C_7$$

$$C_7 = -125.6729767$$

$$-342.5406742 = \frac{9}{55000000000}(6)^{11} - \frac{121987981}{10000000000}(6)^5 + \frac{601837353}{2000000000}(6)^4 - \frac{407117103}{200000000}(6)^3 + \frac{110895737}{12500000}(6)^2 - 125.6729767(6) + C_8$$

$$C_8 = 236.6118171$$

$$8 \leq X \leq 9m$$

$$EI\theta_5 = \frac{9}{5000000000}X^{10} + \frac{1}{180}X^5 - \frac{183274773}{500000000}X^4 + \frac{1113884539}{150000000}X^3 - \frac{66551201}{1000000}X^2 + \frac{377734703}{1250000}X + C_9$$

$$EIY_5 = \frac{9}{55000000000}X^{11} + \frac{1}{1080}X^6 - \frac{183274773}{2500000000}X^5 + \frac{1113884539}{600000000}X^4 - \frac{66551201}{3000000}X^3 + \frac{377734703}{2500000}X^2 + C_9X + C_{10}$$

$$\theta_4 = \theta_5 \quad en \quad X = 8m$$

Y:

$$Y_4 = Y_5 \quad en \quad X = 8m$$

PARA ELLO:

$$EI\theta_{4(8m)} = \frac{9}{5000000000}(8)^{10} - \frac{121987981}{2000000000}(8)^4 + \frac{601837353}{500000000}(8)^3 - \frac{1221351309}{200000000}(8)^2 + \frac{110895737}{6250000}(8) - 125.6729767$$

$$EI\theta_{4(8m)} = \frac{-6.176052552}{EI}$$

$$EIY_{4(8m)} = \frac{9}{55000000000}(8)^{11} - \frac{121987981}{10000000000}(8)^5 + \frac{601837353}{2000000000}(8)^4 - \frac{407117103}{200000000}(89^3 + \frac{110895737}{12500000}(8)^2 - 125.6729767(8) + 236.6118171$$

$$EIY_{4(8m)} = \frac{-408.9672982}{EI}$$

$$-6.176052552 = \frac{9}{5000000000}(8)^{10} + \frac{1}{180}(8)^5 - \frac{183274773}{500000000}(8)^4 + \frac{1113884539}{150000000}(8)^3 - \frac{66551201}{1000000}(8)^2 + \frac{377734703}{1250000}(8) + C_9$$

$$C_9 = -649.0507535$$

$$-408.9672982 = \frac{9}{55000000000}(8)^{11} + \frac{1}{1080}(8)^6 - \frac{183274773}{2500000000}(8)^5 + \frac{1113884539}{600000000}(8)^4 - \frac{66551201}{3000000}(8)^3 + \frac{377734703}{2500000}(8)^2 - 649.0507535(8) + C_{10}$$

$$C_{10} = 1025.471070$$

$$9 \leq X \leq 14m$$

$$EI\theta_6 = \frac{1}{180}X^5 - \frac{11}{36}X^4 + \frac{56}{9}X^3 - \frac{1206748381}{20000000}X^2 + \frac{3119477339}{10000000}X + C_{11}$$

$$EIY_6=\frac{1}{1080}X^6-\frac{11}{180}X^5+\frac{14}{9}X^4-\frac{1206748381}{60000000}X^3+\frac{3119477339}{20000000}X^2+C_{11}X+C_{12}$$

$$\theta_5=\theta_6 \quad en \quad X=9m$$

Y:

$$Y_5=Y_6 \quad en \quad X=9m$$

PARA ELLO:

$$EI\theta_{4(9m)}=\frac{9}{5000000000}(9)^{10}+\frac{1}{180}(9)^5-\frac{183274773}{500000000}(9)^4+\frac{1113884539}{150000000}(9)^3-\frac{66551201}{1000000}(9)^2+\frac{377734703}{1250000}(9)-649.0507535$$

$$EI\theta_{4(9m)}=\frac{22.86532726}{EI}$$

$$EIY_{4(8m)}=\frac{9}{55000000000}(9)^{11}+\frac{1}{1080}(9)^6-\frac{183274773}{2500000000}(9)^5+\frac{1113884539}{600000000}(9)^4-\frac{66551201}{3000000}(9)^3+\frac{377734703}{2500000}(9)^2$$
$$-649.0507535(9)+1025.471070$$

$$EIY_{4(8m)}=\frac{-400.6624891}{EI}$$

$$22.86532726=\frac{1}{180}(9)^5-\frac{11}{36}(9)^4+\frac{56}{9}(9)^3-\frac{1206748381}{20000000}(9)^2+\frac{3119477339}{10000000}(9)+C_{11}$$

$$C_{11}=-756.6333347$$

$$-400.6624891=\frac{1}{1080}(9)^6-\frac{11}{180}(9)^5+\frac{14}{9}(9)^4-\frac{1206748381}{60000000}(9)^3+\frac{3119477339}{20000000}(9)^2-756.6333347(9)+C_{12}$$

$$C_{12}=1347.622129$$

$$14\le X\le 15m$$

$$EI\theta_7=-\frac{1}{6}X^3+\frac{15}{2}X^2-\frac{235}{2}X+C_{13}$$

$$EIY_7=-\frac{1}{24}X^4+\frac{5}{2}X^3-\frac{235}{4}X^2+C_{13}X+C_{14}$$

$$\theta_6=\theta_7 \quad en \quad X=14m$$

Y:

$$Y_6=Y_7 \quad en \quad X=14m$$

PARA ELLO:

$$EI\theta_{6(14m)}=\frac{1}{180}(14)^5-\frac{11}{36}(14)^4+\frac{56}{9}(14)^3-\frac{1206748381}{20000000}(14)^2+\frac{3119477339}{10000000}(14)-756.6333347$$

$$EI\theta_{6(14m)}=\frac{107.9674728}{EI}$$

$$EIY_{6(14m)} = \frac{1}{1080}(14)^6 - \frac{11}{180}(14)^5 + \frac{14}{9}(14)^4 - \frac{1206748381}{60000000}(14)^3 + \frac{3119477339}{20000000}(14)^2 - 756.6333347(14) + 1347.622129$$

$$EIY_{6(14m)} = 0$$

$$107.9674728 = -\frac{1}{6}(14)^3 + \frac{15}{2}(14)^2 - \frac{235}{2}(14) + C_{13}$$

$$C_{13} = 740.3008061$$

$$0 = -\frac{1}{24}(14)^4 + \frac{5}{2}(14)^3 - \frac{235}{4}(14)^2 + 740.3008061(14) + C_{14}$$

$$C_{14} = -4108.544618$$

$\therefore$ *constantes de integración.*

$C_1 = -90.51501414$ $C_2 = 183.03002828$ $C_3 = -66.47385502$ $C_4 = 166.1697846$ $C_5 = -103.1729766$
$C_6 = 202.6689595$ $C_7 = -125.6729767$ $C_8 = 236.6118171$ $C_9 = -649.0507535$ $C_{10} = 1025.471070$
$C_{11} = -756.6333347$ $C_{12} = 1347.622129$ $C_{13} = 740.3008061$ $C_{14} = -4108.544618$

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$EI\theta_1 = -\frac{1}{2}X^3 - 90.51501414$$

$$EIY_1 = -\frac{1}{8}X^4 - 90.51501414X + 183.03002828$$

$$2 \leq X \leq 5m$$

$$EI\theta_2 = \frac{1}{5760}X^6 - \frac{13}{288}X^4 + \frac{1}{3}X^3 + 3.204734222X^2 - 21.40782578X - 66.47385502$$

$$EIY_2 = \frac{1}{40320}X^7 - \frac{13}{1440}X^5 + \frac{1}{12}X^4 + 1.068244741X^3 - 10.70391289X^2 - 66.47385502X + 166.1697846$$

$$5 \leq X \leq 6m$$

$$EI\theta_3 = \frac{9}{5000000000}X^{10} + \frac{1}{5760}X^6 - \frac{212265759}{2000000000}X^4 + \frac{2305512059}{1500000000}X^3 - \frac{1146351309}{200000000}X^2 + \frac{2035829481}{250000000}X - 103.1729766$$

$$EIY_3 = \frac{9}{55000000000}X^{11} + \frac{1}{40320}X^7 - \frac{212265759}{10000000000}X^5 + \frac{2305512059}{6000000000}X^4 - \frac{382117103}{200000000}X^3 + \frac{2035829481}{500000000}X^2 - 103.1729766X + 202.6689595$$

$$6 \leq X \leq 8m$$

$$EI\theta_4 = \frac{9}{5000000000}X^{10} - \frac{121987981}{2000000000}X^4 + \frac{601837353}{500000000}X^3 - \frac{1221351309}{200000000}X^2 + \frac{110895737}{6250000}X - 125.6729767$$

$$EIY_4 = \frac{9}{55000000000}X^{11} - \frac{121987981}{10000000000}X^5 + \frac{601837353}{2000000000}X^4 - \frac{407117103}{200000000}X^3 + \frac{110895737}{12500000}X^2 - 125.6729767X + 236.6118171$$

$$8 \leq X \leq 9m$$

$$EI\theta_5 = \frac{9}{5000000000}X^{10} + \frac{1}{180}X^5 - \frac{183274773}{500000000}X^4 + \frac{1113884539}{150000000}X^3 - \frac{66551201}{1000000}X^2 + \frac{377734703}{1250000}X - 649.0507535$$

$$EIY_5 = \frac{9}{55000000000}X^{11} + \frac{1}{1080}X^6 - \frac{183274773}{2500000000}X^5 + \frac{1113884539}{600000000}X^4 - \frac{66551201}{3000000}X^3 + \frac{377734703}{2500000}X^2 - 649.0507535X + 1025.471070$$

$$9 \leq X \leq 14m$$

$$EI\theta_6 = \frac{1}{180}X^5 - \frac{11}{36}X^4 + \frac{56}{9}X^3 - \frac{1206748381}{20000000}X^2 + \frac{3119477339}{10000000}X - 756.6333347$$

$$EIY_6 = \frac{1}{1080}X^6 - \frac{11}{180}X^5 + \frac{14}{9}X^4 - \frac{1206748381}{60000000}X^3 + \frac{3119477339}{20000000}X^2 - 756.6333347X + 1347.622129$$

$$14 \leq X \leq 15m$$

$$EI\theta_7 = -\frac{1}{6}X^3 + \frac{15}{2}X^2 - \frac{235}{2}X + 740.3008061$$

$$EIY_7 = -\frac{1}{24}X^4 + \frac{5}{2}X^3 - \frac{235}{4}X^2 + 740.3008061X - 4108.544618$$

Calculo de la posición de la flecha máxima de apoyo a apoyo (por definición sabemos que la posición de la flecha máxima en este caso de viga esta en los voladizos):

Para simplificar los cálculos se hará una tabulación con todas las ecuaciones para darnos una idea de dónde buscar la posición de la flecha máxima:

x(metros)	y(1/EI)
0	183.0300
0.25	160.4008
0.5	137.7647
0.75	115.1042
1	92.3900
1.25	69.5811
1.5	46.6247
1.75	23.4564
2	0.0000
2	0.0000
2.25	-23.7946
2.5	-47.8343
2.75	-71.9899
3	-96.1339
3.25	-120.1407
3.5	-143.8874
3.75	-167.2544
4	-190.1253
4.25	-212.3878
4.5	-233.9332
4.75	-254.6567
5	-274.4576
5	-274.4576
5.1	-282.0976
5.2	-289.5684
5.3	-296.8638
5.4	-303.9780
5.5	-310.9052
5.6	-317.6396
5.7	-324.1758
5.8	-330.5083
5.9	-336.6316
6	-342.5407
6	-342.5407
6.1	-348.2303
6.2	-353.6956
6.3	-358.9316
6.4	-363.9337
6.5	-368.6973
6.6	-373.2180
6.7	-377.4915
6.8	-381.5138
6.9	-385.2810
7	-388.7895
7.1	-392.0356
7.2	-395.0161
7.3	-397.7279
7.4	-400.1681
7.5	-402.3339
7.5	-402.3339
7.6	-404.2229
7.7	-405.8327
7.8	-407.1613
7.9	-408.2067
8	-408.9673
8	-408.9673
8.1	-409.4415
8.2	-409.6279
8.3	-409.5254
8.4	-409.1331
8.5	-408.4501
8.6	-407.4759
8.7	-406.2101
8.8	-404.6526
8.9	-402.8033
9	-400.6625
9	-400.6625
9.2	-395.5080
9.4	-389.1955
9.6	-381.7351
9.8	-373.1399
10	-363.4272
10.2	-352.6179
10.4	-340.7375
10.6	-327.8158
10.8	-313.8871
11	-298.9906
11.2	-283.1703
11.4	-266.4746
11.6	-248.9573
11.8	-230.6763
12	-211.6944
12.2	-192.0789
12.4	-171.9013
12.6	-151.2370
12.8	-130.1653
13	-108.7689
13.2	-87.1335
13.4	-65.3474
13.6	-43.5014
13.8	-21.6878
14	0.0000
14	0.0000
14.1	10.7694
14.2	21.4848
14.3	32.1469
14.4	42.7566
14.5	53.3145
14.6	63.8211
14.7	74.2769
14.8	84.6822
14.9	95.0374
15	105.3425

De la tabla anterior podemos notar que la flecha máxima de apoyo a apoyo esta entre 8 y 9 metros ya que ahí hay una variación de menor a mayor en cuanto a valor absoluto, así mismo ahí prevalece el valor máximo, por tanto podemos decir que igualaremos a cero la ecuación del giro 5:

$$EI\theta_5 = \frac{9}{5000000000}X^{10} + \frac{1}{180}X^5 - \frac{183274773}{500000000}X^4 + \frac{1113884539}{150000000}X^3 - \frac{66551201}{1000000}X^2 + \frac{377734703}{1250000}X - 649.0507535$$

Igualando a cero:

$$\frac{9}{5000000000}X^{10} + \frac{1}{180}X^5 - \frac{183274773}{500000000}X^4 + \frac{1113884539}{150000000}X^3 - \frac{66551201}{1000000}X^2 + \frac{377734703}{1250000}X - 649.0507535 = 0$$

$$x = -28.09857954 \lor x = 8.214586255$$

La solución es:

$$Xm\acute{a}x = 8.214586255m$$

Sustituyendo en:

$$EIY_{5(máx)} = \frac{9}{55000000000}(8.214586255)^{11} + \frac{1}{1080}(8.214586255)^{6} - \frac{183274773}{2500000000}(8.214586255)^{5} + \frac{1113884539}{600000000}(8.214586255)^{4} - \frac{66551201}{3000000}(8.214586255)^{3} + \frac{377734703}{2500000}(8.214586255)^{2} - 649.0507535(8.214586255) + 1025.471070$$

$$EIY_{5(máx=8.214586255m)} = \frac{-409.6309683}{EI}$$

De la tabla anterior tenemos las flechas en los extremos:

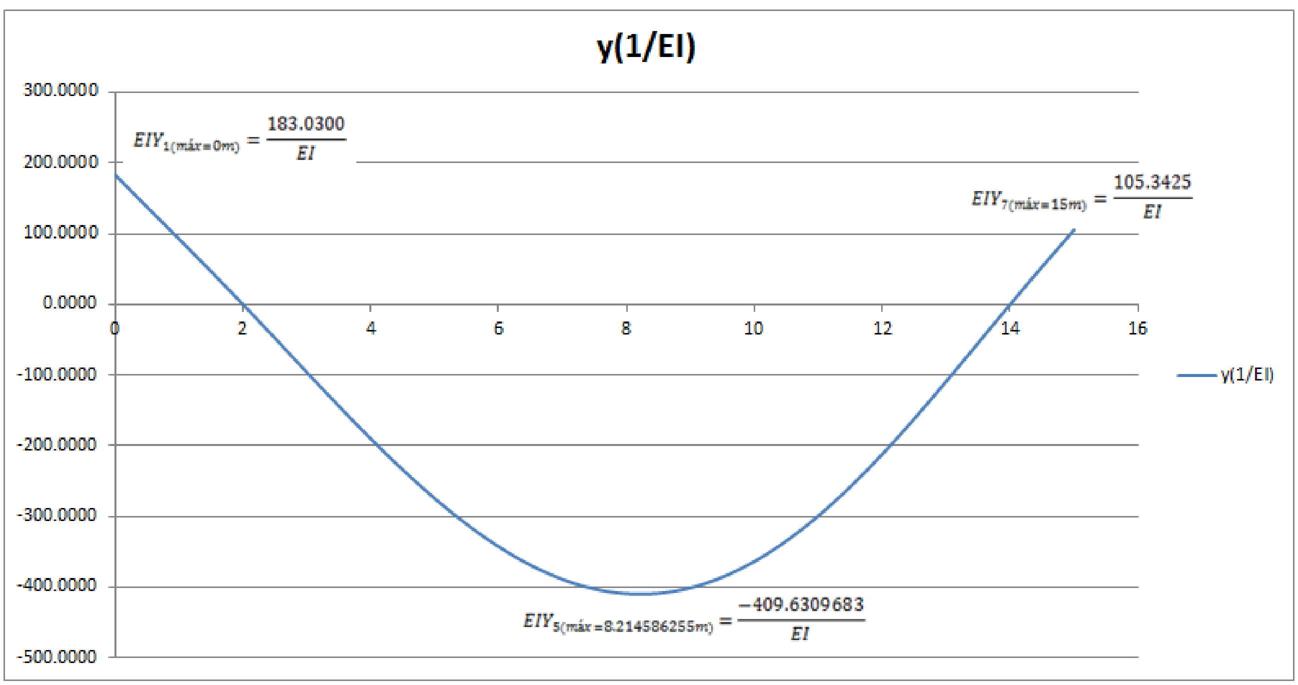
$$EIY_{1(máx=0m)} = \frac{183.0300}{EI}$$

$$EIY_{7(máx=15m)} = \frac{105.3425}{EI}$$

$$\therefore$$

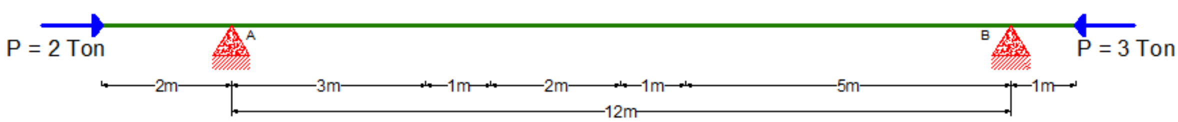
$$\mathbf{EIY_{5(máx=8.214586255m)} = \frac{-409.6309683}{EI}}$$

Grafica de la deflexión (exagerada):

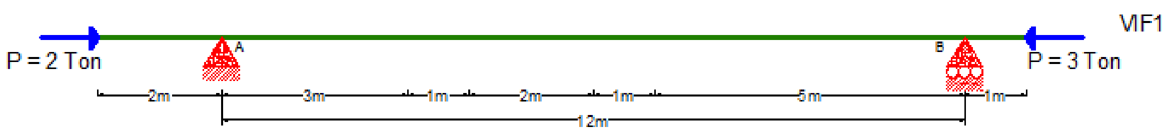


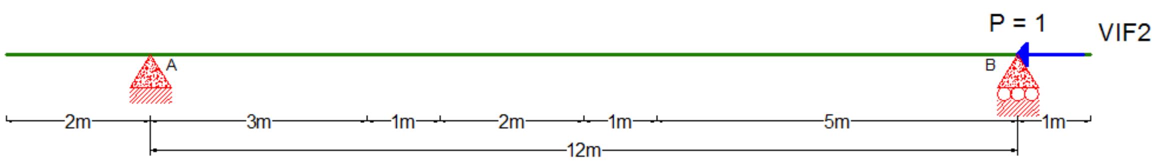
Cálculo para la deflexión horizontal en los extremos:

Para la viga vamos a considerar únicamente las fuerzas horizontales ya que estas únicamente generan reacciones horizontales en los apoyos fijos, anteriormente se calcularon las reacciones verticales:



Resolveremos las reacciones con el método de las flexibilidades:





Solución para VIF1:

$$\sum F_X = 0$$

$$2 + R_{AX} - 3 = 0$$

$$R_{AX} = 1\,Ton\ \rightarrow$$

Solución para VIF2:

$$\sum F_X = 0$$

$$R_{AX} - 1 = 0$$

$$R_{AX} = 1\,Ton \rightarrow$$

Cálculo de las deflexiones horizontales:

Para ello aplicaremos:

$$\Delta_X = \frac{NnL}{AE}$$

Fuerza axial de VIF1:

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$N_1 = 2\ [C]$$

$$2 \leq X \leq 15m$$

$$N_2 = 3\ [C]$$

Fuerza axial de VIF1:

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$n_1 = 0$$

$$2 \leq X \leq 14m$$

$$N_2 = 1\ [C]$$

$$14 \leq X \leq 15m$$

$$N_3 = 0$$

$$\Delta_{B1} = \frac{(-2)(0)(2)}{AE} + \frac{(-3)(-1)(12)}{AE} + \frac{(-3)(0)(1)}{AE} = \frac{36}{AE}$$

$$\Delta_{B2} = \frac{(0)(0)(2)}{AE} + \frac{(-1)(-1)(12)}{AE} + \frac{(0)(0)(1)}{AE} = \frac{12}{AE}$$

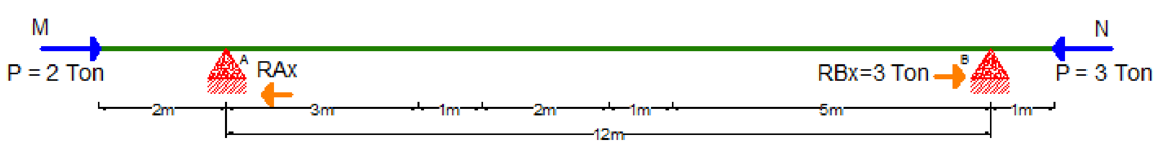
Sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$\Delta_{B1} + \Delta_{B2} R_{BX} = 0$$

$$36 + 12 R_{BX} = 0$$

$$R_{BX} = 3\ Ton \rightarrow$$

Por tanto:



$$\sum F_X = 0\ (DE\ TODA\ LA\ VIGA)$$

$$2 - R_{AX} + 3 - 3 = 0$$

$$R_{AX} = 2\ Ton \leftarrow$$

Calculo de la fuerza axial de cada tramo:

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$N_1 = 2\,Ton\,[C]$$

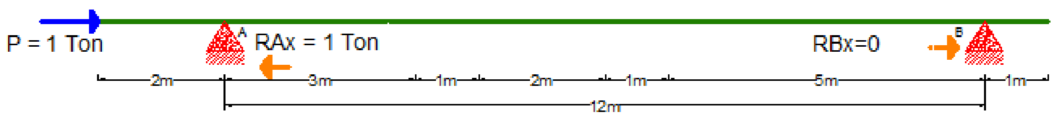
$$2 \leq X \leq 14m$$

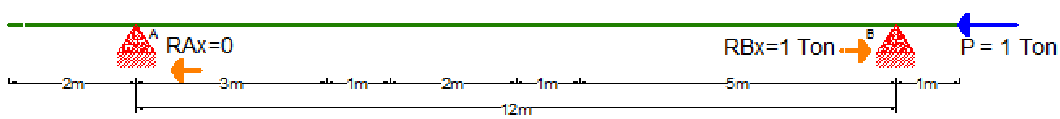
$$N_2 = 0$$

$$14 \leq X \leq 15m$$

$$N_3 = 3\,Ton\,[C]$$

Aplicando una carga unitaria en los extremos:





Nótese que las reacciones ya están resueltas debido a que al aplicar la carga unitaria; específicamente para este tipo de casi después se encuentra el apoyo fijo lo cual lleva una reacción contraria a la de la carga unitaria.

La fuerza axial para la primera viga con carga unitaria es:

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$n_1 = 1\,Ton\,[C]$$

$$2 \leq X \leq 14m$$

$$N_2 = 0$$

$$14 \leq X \leq 15m$$

$$N_3 = 0$$

La fuerza axial para la segunda viga con carga unitaria es:

$$0 \leq X \leq 2m$$

$$n_1 = 0$$

$$2 \leq X \leq 14m$$

$$N_2 = 0$$

$$14 \leq X \leq 15m$$

$$N_3 = 1\,Ton\,[C]$$

Ahora si finalmente aplicamos:

$$\Delta_X = \frac{NnL}{AE}$$

$$\Delta_M = \frac{(-2)(-1)(2)}{AE} + \frac{(0)(0)(12)}{AE} + \frac{(-3)(0)(1)}{AE} =$$

$$\boldsymbol{\Delta_M = \frac{4}{AE}}$$

$$\Delta_N = \frac{(-2)(0)(2)}{AE} + \frac{(0)(0)(12)}{AE} + \frac{(-3)(-1)(1)}{AE} =$$

$$\boldsymbol{\Delta_N = \frac{3}{AE}}$$

FIN DEL PROBLEMA

9. Cortante en vigas.

En este tema veremos la aplicación del diagrama de cortante en vigas para calcular la separación de estribos según la Normas Técnicas Complementarias para el diseño de Concreto.

Usaremos las formulas:

$$V_R = V_{CR} + V_{SR}$$

Si:

$$V_U < V_{CR} \quad (NO\ NECESITA\ ESTRIBOS).$$

$$A_{Vmin} = 0.30\sqrt{f^*c}\left(\frac{bs}{f'y}\right)$$

$$S_{máx} = \frac{d}{2}$$

Si:

$$V_U > V_{CR} \quad (NECESITA\ ESTRIBOS)$$

Si:

$$\rho < 0.015$$

Dónde:

$$\rho = \frac{A_S}{bd}$$

$$V_{CR} = F_R bd(0.2 + 20\rho)\sqrt{f^*c}$$

Si:

$$\rho \geq 0.015$$

$$V_{CR} = 0.5F_R bd\sqrt{f^*c}$$

Si $h > 70cm$

$$V_{CR} \quad SE\ MULTIPLICARA\ POR:$$

$$1 - 0.0004(h - 700)$$

(h en mm en donde está entre: $1.0 \leq FACTOR \leq 0.8$)

Para la separación de los estribos atenderemos:

Si:

$$V_U > V_{CR}$$

$$S = \frac{F_R A_V f´y(\sin\theta + \cos\theta)}{V_{SR}}$$

$$V_{SR} = V_U - V_{CR}$$

Si:

$$V_U > V_{CR}$$

Pero:

$$V_U \leq 1.5F_R bd\sqrt{f^*c}$$

$$S_{MÁX} \leq 0.5d$$

Si:

$$V_U > 1.5F_R bd\sqrt{f^*c}$$

$$S_{MÁX} \leq 0.25d$$

Donde a las literales de las formulas anteriores son:

$$V_{CR} = Contribución\ del\ cortante\ debida\ al\ concreto.$$

$$V_{SR} = Contribución\ del\ cortante\ debida\ al\ acero.$$

$$V_R = cortante\ total\ (debido\ al\ concreto\ y\ al\ acero).$$

$$V_U = Cortante\ ultimo\ .$$

$$S_{máx} = Separación\ máxima\ de\ los\ estribos.$$

$$S = separación\ de\ los\ estribos.$$

$$\rho = porcentaje\ balanceado.(relación\ de\ área\ de\ acero\ y\ área\ de\ concreto)$$

$$b = ancho\ de\ la\ viga.$$

$$d = peralte\ de\ la\ viga.$$

$$h = peralte\ más\ el\ recubrimiento.$$

$$f^*c = resistencia\ a\ la\ compresión\ simple\ redicida\ (f^*c = 0.8f´c).$$

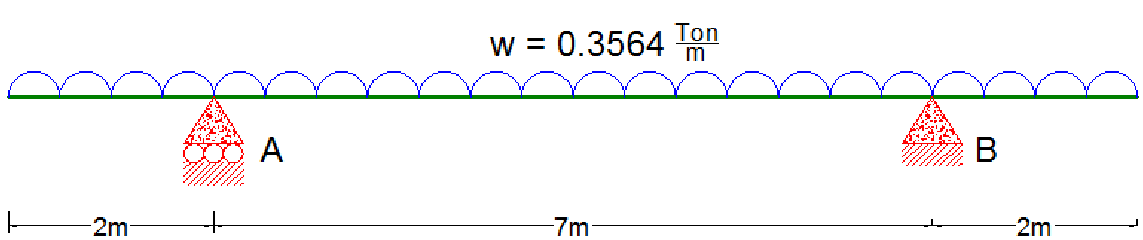
$$F_R = Factor\ de\ reducción.$$

$$A_v = área\ de\ acero\ del\ estribo.$$

$$f´y = esfuerzo\ de\ fluencia\ del\ acero\ \left(\frac{4200kg}{cm^2}\right)$$

Problema 23:

Diseñar por cortante el primer voladizo de la siguiente viga:



Datos:

$$f\,´\,c = 250kg/cm^2$$

$$f'y = 4200kg/cm^2$$

$$W_m = 1800kg/cm^2$$

$$W_v = 1000kg/cm^2$$

$$b = 20cm$$

$$h = 50cm$$

$$F.C = 1.4$$

$$W_U = 1.4(1.8 + 1.0) = 3.92\,Ton/m^2$$

$$W_U = \frac{3.92}{11} = 0.3564\,Ton/m$$

Obtención de las reacciones:

$$\sum M_A = 0$$

$$-0.3564(2)\left(\frac{1}{2}(2)\right) + 0.3564(9)\left(\frac{1}{2}(9)\right) - 7RB_Y = 0$$

$$RB_Y = 1.9602\,Ton \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$-0.3564(11) + RA_Y + 1.9602 = 0$$

$$RA_Y = 1.9602\,Ton \uparrow$$

Obteniendo las ecuaciones de cortante y momento.

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$M_1 = -0.3564x\left(\frac{x}{2}\right) = -0.1782x^2$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = -0.3564x$$

$$2 \leq x \leq 9m$$

$$M_2 = -0.3564x\left(\frac{x}{2}\right) + 1.9602(x - 2) = -0.1782x^2 + 1.9602x - 3.9204$$

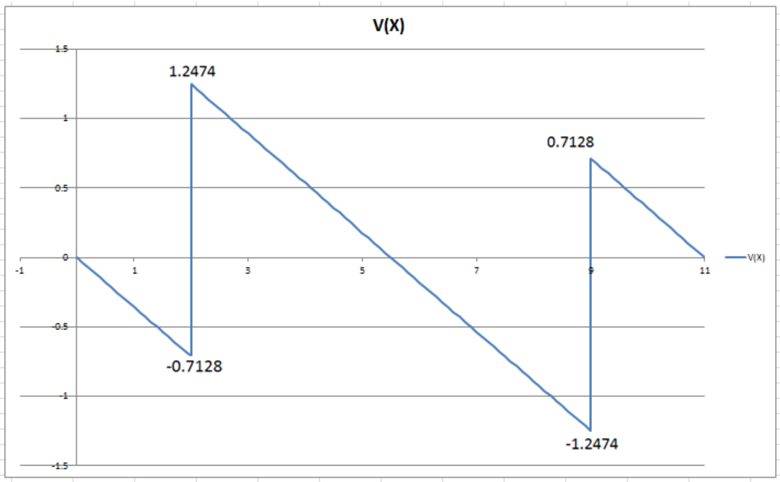
$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = -0.3564x + 1.9602$$

$$9 \leq x \leq 11m$$

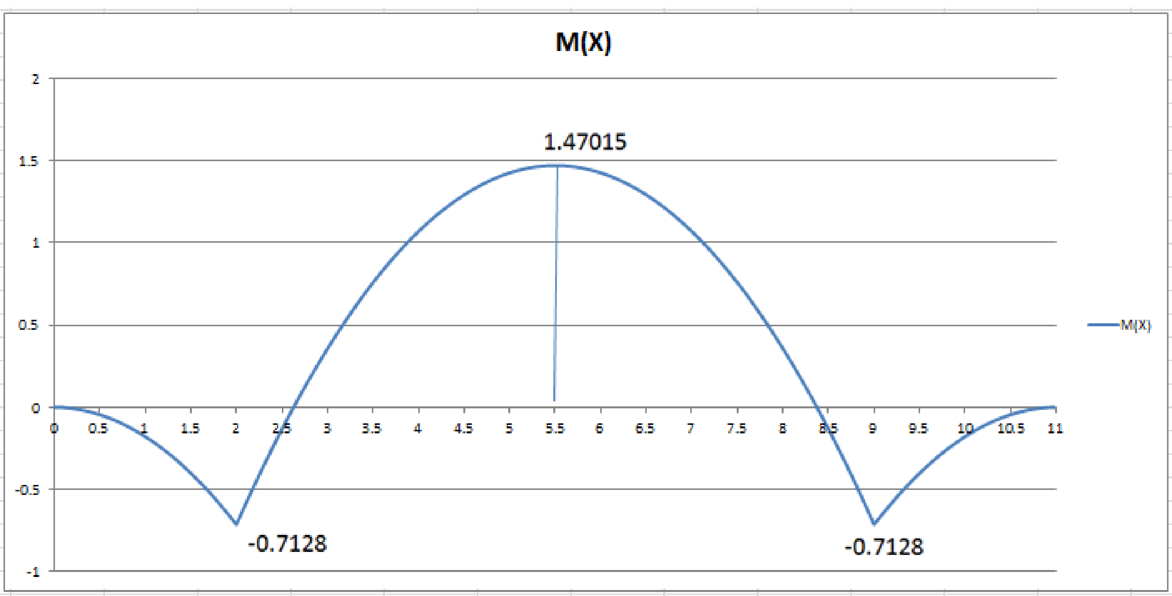
$$M_3 = -0.3564x\left(\frac{x}{2}\right) + 1.9602(x-2) + 1.9602(x-9) = -0.1782x^2 + 3.9204x - 21.5622$$

$$V_3 = \frac{dM_2}{dx} = -0.3564x + 3.9204$$

Graficando el diagrama de cortante y el diagrama de momento en Excel:



(Toneladas)



Para el tramo:

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$V_1 = 0.7128\,Ton$$

$$M_1 = 0.7128\,T - m\;(momento\;negativo)$$

Para cálcular la relación de área de acero entre área de concreto (ρ) usaremos la formula por flexión en vigas:

$$M_R = F_R b d^2 f''c\, q\, (1 - 0.5q)$$

Por carga gravitacional:

$$F_R = 0.9$$

$$f^*c = 0.80 f'c = 0.80(250) = 200 kg/cm^2$$

Si:

$$f^*c \leq 280 kg/cm^2$$

$$f"c = \beta f^*c$$

Dónde:

$$\beta = 0.85$$

$$f"c = \beta f^*c = 0.85(200) = 170 kg/cm^2$$

$$0.7128 \times 10^5 = 0.9(20)(45^2)(170) q (1 - 0.5q)$$

$$0.5q^2 - q + 0.0115 = 0$$

Despejando "q":

$$q = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(0.5)(0.0115)}}{2(0.5)}$$

$$q = 0.0116$$

$$\rho = q\left(\frac{f''c}{f'y}\right) = 0.0116\left(\frac{170}{4200}\right) = 0.0005$$

$$A_{S\ REQ\ (-)} = \rho b d = 0.0005(20)(45) = 0.45 cm^2$$

$$A_{S\ MIN} = \frac{0.7\sqrt{f'c}}{f'y} bd = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200}(20)(45) = 2.3717 cm^2$$

$$A_{S\ MAX} = F_R\left[\frac{\beta \times 6000}{f'y + 6000}\right]\left(\frac{f''c}{f'y}\right) bd = 0.9\left[\frac{0.85 \times 6000}{4200 + 6000}\right]\left(\frac{170}{4200}\right)(20)(45) = 16.3929 cm^2$$

Se tomara el área de acero mínima por ser mayor a la requerida:

$$A_{S\ REQ\ (-)} = 2.3717cm^2$$

$$\mathbf{A_{S\ PROPUESTA\ (-)} = 2\#4 = 2.534cm^2}$$

$$\rho = \frac{A_S}{bd} = \frac{2.534}{(20)(45)} = 0.0028$$

$$\rho < 0.015$$

Revisión:

$$q = \rho\left(\frac{f'y}{f''c}\right) = 0.0028\left(\frac{4200}{170}\right) = 0.0692$$

$$M_R = F_R bd^2 f''c\, q\,(1 - 0.5q)$$

$$M_R = \frac{0.9(20)(45^2)(170)(0.0692)(1 - 0.5 \times 0.0692)}{1 \times 10^5} = 4.1396\, T - m$$

(Se divide1×10^5 para convertir el resultado a tonelada por metro)

$$4.1396\, T - m > 0.7128\, T - m$$

Para el acero por estribos:

$$\rho = \frac{A_S}{bd} = \frac{2.534}{(20)(45)} = 0.0028$$

$$\rho < 0.015$$

Se usara:

$$V_{CR} = F_R bd(0.2 + 20\rho)\sqrt{f^*c}$$

$$F_R = 0.8$$

$$V_{CR} = 0.8(20)(45)(0.2 + 20 \times 0.0028)\sqrt{200}$$

$$V_{CR} = 2606.6784\, kg = 2.61\, Ton$$

Sabemos que:

$$V_U = 0.7128\, Ton$$

$$\therefore\ V_U < V_{CR}$$

NO NECESITA ESTRIBOS.

Se usara el refuerzo mínimo:

$$A_{Vmin} = 0.30\sqrt{f^*c}\left(\frac{bs}{f'y}\right)$$

$$S_{máx} = \frac{d}{2}$$

Se usara el área de estribo mínima que es de 2.5”:

$$A_{V\ (2.5")} = 0.49cm^2$$

$$A_{V\ MIN} = 2(0.49) = 0.98cm^2$$

(Se multiplica por el número de ramas del estribo, en este caso 2).

Sustituyendo:

$$0.98 = 0.3\sqrt{200}\left(\frac{20s}{4200}\right)$$

Despejando “s” (separación):

$$s = 48.51cm \cong 48cm$$

Checando con:

$$S_{máx} = \frac{d}{2} = \frac{45}{2} = 22.5cm \cong 22cm$$

Como la separación máxima es de 22cm se volverá a calcular el área de acero del estribo:

$$A_{Vmin} = 0.30\sqrt{f^*c}\left(\frac{bs}{f'y}\right) = 0.30\sqrt{200}\left(\frac{20 \times 22}{4200}\right) = 0.4445cm^2$$

Se dejara el área de acero mínima para estribos que es:

$$A_{V\ (2.5")} = 0.49cm^2$$

$$A_{V\ MIN} = 2(0.49) = 0.98cm^2$$

$$\therefore \textbf{el armado } \mathbf{1E\#2.5@22cm}$$

10.Flexión en vigas.

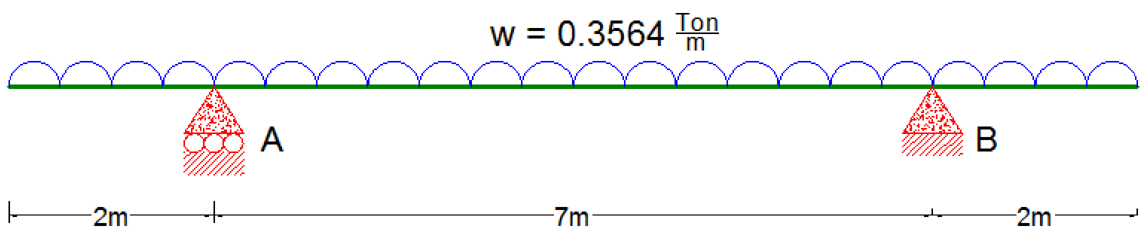
En este tema veremos la aplicación que se le da al diagrama de momento en vigas de igual forma se revisara bajo las Normas Técnicas Completarías para el diseño de estructuras de concreto.

Básicamente usaremos la formula a flexión que es:

$$M_R = F_R b d^2 f''c\, q\, (1 - 0.5q)$$

Problema 23:

Del problema anterior el tramo de apoyo a apoyo por flexión de la siguiente viga:



Datos:

$$f\,'\,c = 250kg/cm^2$$

$$f'y = 4200kg/cm^2$$

$$W_m = 1800kg/cm^2$$

$$W_v = 1000kg/cm^2$$

$$b = 20cm$$

$$h = 50cm$$

$$F.C = 1.4$$

$$W_U = 1.4(1.8 + 1.0) = 3.92\, Ton/m^2$$

$$W_U = \frac{3.92}{11} = 0.3564\, Ton/m$$

Para el tramo:

$$2 \leq x \leq 9m$$

$$M_1 = 1.47015\, T - m\ (momento\ negativo)$$

Para calcular la relación de área de acero entre área de concreto (ρ) usaremos la formula por flexión en vigas:

$$M_R = F_R b d^2 f''c\, q\, (1 - 0.5q)$$

Por carga gravitacional:

$$F_R = 0.9$$

$$f^*c = 0.80 f'c = 0.80(250) = 200 kg/cm^2$$

Si:

$$f^*c \leq 280 kg/cm^2$$

$$f"c = \beta f^*c$$

Dónde:

$$\beta = 0.85$$

$$f"c = \beta f^*c = 0.85(200) = 170 kg/cm^2$$

$$1.47015 \times 10^5 = 0.9(20)(45^2)(170) q (1 - 0.5q)$$

Despejando “q”:

$$q = 0.0240$$

$$\rho = q\left(\frac{f''c}{f'y}\right) = 0.0240\left(\frac{170}{4200}\right) = 0.00097$$

$$A_{S\,REQ\,(-)} = \rho b d = 0.000975(20)(45) = 0.8775 cm^2$$

$$A_{S\,MIN} = \frac{0.7\sqrt{f'c}}{f'y} bd = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200}(20)(45) = 2.3717 cm^2$$

$$A_{S\,MAX} = F_R\left[\frac{\beta \times 6000}{f'y + 6000}\right]\left(\frac{f''c}{f'y}\right) bd = 0.9\left[\frac{0.85 \times 6000}{4200 + 6000}\right]\left(\frac{170}{4200}\right)(20)(45) = 16.3929 cm^2$$

Se tomara el área de acero mínima por ser mayor a la requerida:

$$A_{S\,REQ\,(-)} = 2.3717 cm^2$$

$$\mathbf{A_{S\,PROPUESTA\,(-)} = 2\#4 = 2.534 cm^2}$$

$$\rho = \frac{A_S}{bd} = \frac{2.534}{(20)(45)} = 0.0028$$

$$\rho < 0.015$$

Revisión:

$$q = \rho \left(\frac{f'y}{f''c}\right) = 0.0028 \left(\frac{4200}{170}\right) = 0.0692$$

$$M_R = F_R b d^2 f''c\, q\, (1 - 0.5q)$$

$$M_R = \frac{0.9(20)(45^2)(170)(0.0692)(1 - 0.5 \times 0.0692)}{1 \times 10^5} = 4.1396\, T - m$$

(Se divide1×10^5 para convertir el resultado a tonelada por metro)

$$4.1396\, T - m > 1.47015\, T - m$$

11.Conclusiones.

EL PRINCIPAL PROBLEMA DE LA MECÁNICA DE MATERIALES ES LA INVESTIGACIÓN DE LA RESISTENCIA INTERNA DE UN CUERPO, ES DECIR, DE LA NATURALEZA DE LAS FUERZAS QUE SE ORIGINAN EN SU INTERIOR PARA EQUILIBRAR EL EFECTO DE LAS FUERZAS APLICADAS EXTERIORMENTE POR TAL MOTIVO PARA EFECTUAR EL DISEÑO DE ELEMENTOS, EL VALOR DEL ESFUERZO DENOMINADO: "ESFUERZO PERMISIBLE" SE FIJA CONSIDERABLEMENTE MAS BAJO LA RESISTENCIA ULTIMA. ESTA INFORMACIÓN RELATIVA A LAS CARACTERÍSTICAS DE ESTOS MATERIALES PROVIENE DEL LABORATORIO, DONDE LOS MATERIALES SE SOMETEN A LA ACCIÓN DE FUERZAS CONOCIDAS CON EXACTITUD, Y SE OBSERVAN EL COMPORTAMIENTO DE PROBETAS O DE ESPECÍMENES DE ENSAYO Y SE DA ATENCIÓN ESPECIAL AL FENÓMENO COMO LA APARICIÓN DE GRIETAS, DEFORMACIONES, HASTA OBSERVAR LA RUPTURA DEL MATERIAL.

CABE DECIR QUE AUNQUE LOS PROBLEMAS TRATADOS EN ESTE TRABAJO DE TESIS EN LA REALIDAD ES POCO PROBABLE QUE SE PRESENTEN POR SU NATURALEZA Y GRAN COMPLEJIDAD ES UN GRAN APOYO PARA EL ALUMNO, YA QUE LE DA LAS HERRAMIENTAS SOLIDAS NECESARIAS PARA QUE CUANDO SE LE PRESENTE UN PROBLEMA REAL TENGA LAS MAYORES FACILIDADES PARA RESOLVERLOS ADEMÁS DE DARLE UNA VISIÓN COMPLETAMENTE DIFERENTE A LOS PROBLEMAS DE MECÁNICA DE MATERIALES COMÚNMENTE TRATADOS.

12. BIBLIOGRAFÍA.

- APUNTES DE LA ASIGNATURA DE MECÁNICA DE MATERIALES I. IMPARTIDA POR EL CATEDRÁTICO ING. HERNÁNDEZ PÉREZ RÓMULO.
- APUNTES DE LA ASIGNATURA DE MECÁNICA DE MATERIALES II. IMPARTIDA POR EL CATEDRÁTICO ING. HERNÁNDEZ PÉREZ RÓMULO.
- NORMAS TÉCNICAS COMPLEMENTARIAS PARA EL DISEÑO Y LA CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO.
- MECÁNICA DE MATERIALES. ROBERT W. FITZGERALD. ED. ALFAOMEGA.