UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

El Fenómeno de la Aplicación Matemática a la Ciencia.

"Síntesis Estructural": una propuesta alternativa a las explicaciones monista y dualista de la aplicación matemática

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Doctor en Filosofía de la Ciencia

P R E S E N T A

Jesús Jasso Méndez

Director de Tesis: Dr. Axel Arturo Barceló Aspeita

Comité Tutoral:

Dra. Atocha Aliseda Llera

Dr. Mario Gómez Torrente

Dr. Sergio Martínez Muñoz

Dr. Mario Casanueva López

México, Distrito Federal, 2011

Índice

Apartado III

AGRADECIMIENTOS

Dedico estas líneas a todas aquellas personas e instituciones que respaldaron y consolidaron mi trabajo y formación de doctorado.

Agradezco al Posgrado en Filosofía de la Ciencia, UNAM, particularmente al Dr. León Olivé Morett y al Dr. Jorge Enrique Linares quienes han coordinado el posgrado y que bajo su gestión pude desarrollar y concluir mi trabajo de tesis doctoral.

Agradezco al Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, en especial a la Dra. Paulette Dieterlen y al Dr. Guillermo Hurtado quienes me permitieron, junto con la Subcomisión de Superación Académica ser parte del programa de Estudiantes Asociados del Instituto, durante mis estudios de maestría y parte de mis estudios de doctorado.

Agradezco a la Dirección General de Estudios de Posgrado por becarme para mis estudios de doctorado (Septiembre 2003 – Julio 2005).

Agradezco al programa de Movilidad Internacional de Estudiantes, DGEP-UNAM, por otorgarme una beca para realizar una estancia de investigación doctoral en la Universidad de Barcelona, España (2005).

Agradezco al Dr. Manuel García-Carpintero, catedrático del Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Barcelona, coordinador general del programa de doctorado *Ciencia Cognitiva i Llenguatge* (2005) y director del grupo de Investigación *Grup de Recerca en Logica, Llenguatge i Cognitió* (LOGOS) por aceptarme para realizar una estancia académica con el citado grupo, bajo su supervisión directa. Este periodo fue crucial para el desarrollo inicial de mi tesis doctoral, además de permitirme participar activamente en los seminarios del grupo, exponer avances de mi trabajo de tesis para su supervisión y corrección y, conversar con especialistas sobre mi tema de investigación. Particularmente agradezco al Dr. Max Kölbel y al Dr. José Antonio Díez por sus inteligentes charlas y excelentes observaciones a mi entonces proyecto doctoral.

Agradezco a la Dra. Atocha Aliseda Llera por su apoyo personal y académico constante. Gracias Atocha por tu sensibilidad ante mis circunstancias formativas y personales, por tu fino trato, por tus rigurosas observaciones hacia mi trabajo, por permitirme utilizar tu oficina en el IIFs-UNAM en tu año sabático con la finalidad de no interrumpir el desarrollo de mi tesis. En fin Atocha, gracias por todo tu apoyo y acompañamiento académico.

Agradezco Al Dr. Mario Gómez Torrente por su invaluable soporte académico y solidaridad. Gracias por tus comentarios filosos pero siempre atinados sobre mis trabajos. Gracias por compartirme tus conocimientos en el aula desde la licenciatura, pasando por la maestría y ahora en el doctorado. Gracias por hacer más agradable aun mi estancia académica en España, por compartir amenos e inteligentes momentos en esta gran experiencia.

Agradezco al Dr. Sergio Martínez por sus agudas observaciones a mi trabajo de tesis. Dr. Martínez, sin duda, parte de los aciertos de este trabajo se los debo a sus comentarios y correcciones. Gracias por las charlas en su oficina y por su acompañamiento.

Agradezco al Dr. Mario Casanueva por la lectura de este trabajo, pero especialmente por sus valiosas observaciones. Gracias Mario.

Muy especialmente quiero agradecer al Dr. Axel Arturo Barceló Aspeitia, quien no solo ha sido mi director de tesis en la maestría y ahora en el doctorado, sino además ha sido un maestro y amigo genuino. Gracias Axel por abrirme las puertas de tu casa y oficina para conversar siempre rigurosa y amenamente sobre los diferentes aspectos de mi trabajo de tesis. Mil gracias Axel por tu paciencia, por tu excelente trato, por tu exigencia, por tu profesionalismo, en fin, gracias por tus enseñanzas.

Por último agradezco profundamente a mi familia. Gracias mamá, papá, hermanas y sobrino. Gracias por los buenos y malos momentos. Gracias por aguantarme y disfrutarme. Sobre todo gracias por compartir conmigo su luz contante.

Dedico este trabajo a mi madre Carmen Méndez Pozos y
a mi padre Salomón Jasso Cervantes,
los amo.

Introducción

La explicación del carácter científico de las matemáticas ha sido uno de los temas más importantes en la Filosofía de las Matemáticas del siglo XX. Propuestas interesantes en torno a la epistemología de las matemáticas vinculan el problema general de la naturaleza científica de las matemáticas con el problema particular de su aplicación a la ciencia, por ejemplo, G. Frege (1884), B. Russell (1919), R. Carnap (1935-37, 1963), P. Kitcher (1984, 88), S. Shapiro (1997, 2000).[1] Sin embargo, desde nuestra perspectiva hay buenas razones para pensar en la incompletud de las explicaciones de la aplicación hasta ahora disponibles.

---

[1] Un punto de convergencia entre estos distintos programas es considerar a "la aplicabilidad" como un problema indispensable para ofrecer una explicación fundacional de la matemática. Solo para ilustrar esta concepción general veamos algunos ejemplos desde programas distintos:

Carnap en su autobiografía habla de su posición respecto a la relación entre matemáticas y mundo incluyendo algunos presupuestos fregianos:

> "…no nos satisfacía el escepticismo de Hilbert sobre la posibilidad de dar una interpretación del sistema formal total de la matemática. Ya Frege había resaltado enfáticamente que los problemas de los fundamentos de las matemáticas solo pueden resolverse si no nos detenemos exclusivamente en la matemática pura, sino también en el uso de los conceptos matemáticos en enunciados fácticos. El mismo Frege había llegado a su explicación de los números cardinales preguntándose "¿qué significa 'cinco' en contextos como 'tengo cinco dedos en mi mano derecha'?" Supongamos que las matemáticas han sido construidas, en un primer momento, como un sistema formal a la Hilbert y que a continuación se añaden reglas para la aplicación de los símbolos y enunciados matemáticos en física, así como para utilizar los teoremas matemáticos para deducciones en el lenguaje de la física. En tal caso, a mi entender, éstas reglas deben dar implícitamente una interpretación de las matemáticas. Sabía que esta interpretación se ajustaba esencialmente a la interpretación logicista de Frege y Russell." (*Cfr*. Carnap, R., [1963] (1991), Rudolf Carnap. Autobiografía Intelectual, Paidos Ibérica-Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Barcelona, Barcelona, p. 93).

En ésta línea Russell señala: *Logic is concerned with the real world just as truly as zoology, though with is more abstract and general features. Cfr*. Rusell (1919), *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen and Unwin, London, p. 169. "La lógica tiene que ver con el mundo real, tan verdaderamente como la zoología, aunque con características más abstractas y generales". La traducción es responsabilidad mía.

Por su parte, Shapiro señala:

¿Cuál sería una explicación filosóficamente satisfactoria de la integración del lenguaje matemático al diseño y desarrollo de teorías matematizadas, por ejemplo, teorías físicas?[2] Filosóficamente, ¿cómo explicamos la aplicación matemática a las ciencias naturales?

El objetivo principal de esta investigación es desarrollar una respuesta personal a las dos preguntas anteriores identificando sus implicaciones filosóficas. Estas respuestas serán una

> …one central concern for philosophy of mathematics is to understand the relationship between mathematics and the rest of scientific and ordinary discourse. Given the extensive interactions, the philosopher must at least begin with the hypothesis that there is a relationship between the subject-matter of mathematics (what ever it is) and the subject-mater of science (whatever that is as well), and that it is no accident that mathematics applies to material reality. Any philosophy of mathematics or philosophy of science that does not provide and account of this relationship is incomplete at best. The problem associated with the applications of mathematics have taken on a greater urgency in recent decades. *Cfr*., Shapiro, S., (2000), *Thinking about mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, p. 34.
>
> ... una preocupación central para la filosofía de las matemáticas es comprender la relación entre las matemáticas y el resto del discurso científico y ordinario. Teniendo en cuenta las amplias interacciones, el filósofo debe comenzar al menos con la hipótesis de que existe una relación entre el objeto de las matemáticas (sea lo que esto sea) y el objeto de la ciencia (sea lo que esto sea), y que no es casualidad que las matemáticas se apliquen a la realidad material. Cualquier filosofía de las matemáticas o la filosofía de la ciencia que no considere esta relación es incompleta en el mejor de los casos. El problema asociado con las aplicaciones de las matemáticas han adquirido una mayor urgencia en las últimas décadas. La traducción es responsabilidad mía.

[2] Nos referimos a la física por ser el caso paradigmático de las ciencias naturales. Pero es claro que las matemáticas se han aplicado a un gran número de ciencias empíricas en distintas áreas del conocimiento. *Gran parte de las ciencias biológicas [están matematizadas] incluso en …la taxonomía, se usan algunos procedimientos cuantitativos. Las más avanzadas de las ciencias humanas, la economía (y parte) de la psicología, se distinguen por su alto grado de matematización., presente también en menor medida en…la sociología, la lingüística, la arqueología o, incluso los estudios literarios*. *Cfr*. Díez y Moulines, (2008), Fundamentos de la Filosofía de la Ciencia, Ariel, Barcelona, p. 184.

Por otra parte, hablamos de física también pues en esta investigación incluimos un estudio de caso restringido a ciertos aspectos de la Termodinámica. La finalidad de este estudio será explicar mediante la termometría, la calorimetría, la transferencia del calor, la teoría del calor y el equivalente mecánico del calor nuestra tesis estructural sobre la aplicación matemática.

explicación alternativa de la aplicación a las que denominamos monista y dualista en matemáticas.

Los términos 'Monistas' y 'Dualistas' los tomo de Axel Barceló[3] y refieren a dos tendencias generales en Filosofía de las Matemáticas. Estas tendencias agrupan distintas respuestas en torno a la naturaleza científica de las matemáticas. Como parte de estas respuestas existe una explicación del vínculo entre el lenguaje matemático y físico en el diseño y funcionamiento de teorías científicas.[4] De acuerdo con nuestra perspectiva, las respuestas de estas tendencias serán incompletas al no explicar con precisión cuál es la naturaleza de ésta última relación. En ambos casos, no se ofrece una respuesta sobre las propiedades epistemológicas y semánticas particulares implicadas en la aplicación matemática, nos referimos, a la generación de conceptos por la aplicación, a la posibilidad de constituir principios o leyes generales de la física a partir de funciones matemáticas y a establecer la semejanza entre estructuras matemáticas y físicas como consecuencia de la descripción matemática de estados, procesos y fenómenos físicos.

Considerando la importancia de la aplicabilidad en el tema de los fundamentos de las matemáticas es importante desarrollar una nueva perspectiva sobre ésta, más completa respecto a las disponibles. El nombre de esta nueva propuesta será "Síntesis Estructural".

Para alcanzar nuestro objetivo hemos elegido la siguiente estrategia temática y expositiva.

El primer apartado: **I. "Acotación semántica de 'la aplicación matemática'"** se propone fundamentalmente a identificar distintas maneras de preguntarse sobre el fenómeno de la aplicación matemática. El resultado de éste propósito será acotar nuestra propuesta a dos maneras específicas de interrogarnos sobre la aplicación: a. ¿Surgen nuevos conceptos de la

[3] Comunicación personal (2007).

[4] Más adelante explicaremos con detalle cada una de estas dos tendencias. En todo caso, lo importante ahora es señalar la importancia para las dos tendencias la explicación de la aplicación matemática como una vía fundamental para comprender el sentido de la cientificidad matemática.

aplicación matemática a la física?, b. ¿La semejanza estructural entre sistemas matemáticos y sistemas físicos es anterior o posterior a la aplicación?[5]

En el segundo apartado: **II. "Tensión entre la perspectiva monista y dualista. Algunos casos clásicos y contemporáneos en Filosofía de las Matemáticas"** desarrollaré el centro de la explicación monista y dualista en matemáticas. Veremos cómo estas dos tendencias explican el estatus científico de las matemáticas incluyendo una explicación incompleta de la relación entre matemáticas y ciencias empíricas. El resultado de éste análisis nos conducirá adicionalmente a una tensión entre ambas respuestas respecto al problema de la aplicación.

Para ilustrar las particularidades de cada tendencia y la tensión monismo/dualismo nos enfocaremos en algunas propuestas clásicas y contemporáneas en filosofía de las matemáticas: Monismo platonista de Gottlob Frege (1884, 79)[6] y Stewart Shapiro (1997,

[5] Una tercera pregunta importante sobre la aplicación y no resuelta centralmente en este trabajo es: ¿qué tienen las matemáticas que los científicos las usan tanto en sus teorías y explicaciones? Con nuestra investigación ofreceremos una respuesta parcial a ésta pregunta. Mostraremos la importancia de la aplicación matemática como la posibilidad de ordenar una regularidad física —sea ésta una regularidad de un estado, de un proceso, o de un fenómeno constituido de estados y procesos físicos— mediante una descripción matemática. Esta propiedad epistemológica de la aplicación como un dispositivo de ordenamiento físico, mostrando matemáticamente una regularidad física, será parte de la motivación del científico para utilizar las matemáticas en sus teorías y explicaciones. En este aspecto, nuestra investigación tocará tangencialmente con la generación de conceptos por la aplicación y con la semejanza *a posteriori* entre estructuras de distinta naturaleza matemáticas y físicas, una respuesta a la tercera pregunta señalada arriba.

[6] Frege, G., [1884] (1968), *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, Veerlag von Wilhelm Koebner, en edición bilingüe Alemán-Inglés, Frege, G., *The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number*, Trad. J.L. Austin, M.A., Basil Blackwell, Oxford.

Frege, G., [1884] (1972), Los Fundamentos de la Aritmética, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Frege, G. [1879] (1972), Conceptografía, Los Fundamentos de la Aritmética. Otros Estudios Filosóficos. Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

2000)[7], Monismo no-platonista de Philip Kitcher (1984, 88 y 2000)[8] y Dualismo de Rudolf Carnap (1931, 1935-37, 1963)[9].

Mediante la exposición anterior veremos que las respuestas monistas y dualista, si bien, explican de distinta manera la relación entre los componentes matemáticos y los componentes no matemáticos de una teoría empírica, ambas respuestas se centran en una pregunta muy particular sobre la aplicación: ¿qué ganan los científicos al usar las matemáticas? La pregunta anterior origina explicaciones bastante generales de éste fenómeno, además de subordinarse a un interés general sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su referencia. Por otra parte, esta pregunta difiere de los cuestionamientos más básicos sobre la aplicación —señalados en el apartado I. La consecuencia de esta particularidad, veremos, no ha sido únicamente generar un estado del arte pobre respecto a

[7] Shapiro, S. (1997), *Philosophy of mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, New York

Shapiro, S., (2000), *Thinking about mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford

[8] Kitcher, P., (1984), *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, New York.

Kitcher, P. y Aspray, W., (1988), History *and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press.

Kitcher, P., (1988), "*Mathematical Progress*", *Revue Internationale de Philosophie*, Vol. 42, N° 67, 529.

Kitcher, p., (2000), en Boghossian y Peacock (eds.), (2000), *New Essays on the A priori*, Oxford University Press, New York.

[9] Carnap, R. (1931) "*Überwindung der Metaphysik durch Logische Analyse der Sprache*" en Ayer, A.J., (eds.) (1965), El positivismo lógico, Fondo de Cultura Económica, México

Carnap, R., [1935] (1996), "*Logical Syntax of language*" en Carnap, *Philosophy and Logical Syntax*, Thoemmes, Bristol. Copyright Kegan Paul, Trench, Trubner & Co., Londres

Carnap, R. [1937] (1967), *Logical Syntax of Language*, Routledge & Kegan Paul LTD, London.

Carnap, R., [1963] (1991), Rudolf Carnap. Autobiografía Intelectual, Paidos Ibérica-Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Barcelona, Barcelona.

Carnap, R. (1947), *Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic*, University of Chicago Press, Chicago.

la explicación de la aplicación, sino considerar seriamente la necesidad de desarrollar una perspectiva alternativa a las explicaciones monista y dualista.

El tercer apartado **III. ""Síntesis Estructural" una explicación alternativa de la aplicación matemática"** está dedicado al desarrollo de mi propuesta: "Síntesis Estructural". Ésta nueva perspectiva sobre la aplicación ofrecerá una respuesta a: ¿surgen nuevos conceptos de la aplicación matemática a la física?, b. ¿la semejanza estructural entre sistemas matemáticos y físicos es anterior o posterior a la aplicación matemática?

Para desarrollar nuestra posición explicaremos seis puntos particulares.

En primer lugar, veremos en qué términos las representaciones matemáticas son diferentes a otros estilos representacionales en ciencia. La finalidad será mostrar el carácter científico de la representación matemática.

En segundo lugar, explicaremos la aplicación matemática en términos de una *representación estructural*. En este caso nos basamos inicialmente en el trabajo de Chris Swoyer (1991)[10] y Stewart Shapiro (1997, 2000).

En tercer lugar, acotaremos nuestro uso de la aplicación en términos de una representación estructural en los siguientes términos: en una teoría matematizada la conexión entre aspectos matemáticos y no matemáticos implicará una relación descriptivista de los sistemas físicos mediante estructuras matemáticas. La función descriptiva de la aplicación tendrá diferentes propiedades. Por una parte, presupondrá una relación de correspondencia entre sistemas físicos y estructuras matemáticas, mediada por un proceso interpretativo. Por otra parte, la descripción matemática tendrá un perfil semántico. Esto es, mediante la descripción se redefinirán o generarán conceptos nuevos para la teoría física. Estos nuevos conceptos que llamaremos de "aplicación" tendrán consecuencias epistemológicas al formar parte de explicaciones posteriores de una ciencia física más madura y sofisticada en términos cuantitativos. Una consecuencia adicional de la aplicación como descripción

[10] Swoyer, Ch., (1991), "*Structural Representation and Surrogative Reasoning"*, en Synthese 87 (3), pp. 449 - 508.

matemática de estados, procesos y fenómenos físicos será ver en las funciones matemáticas principios generales de la física[11]. Por último, en virtud de la aplicación se podrá sostener la semejanza estructural entre matemáticas y física.

En cuarto lugar, veremos que la explicación de la aplicación matemática en términos de una síntesis estructural conciliará la tensión estándar monismo/dualismo en matemáticas. La síntesis estructural integra consistentemente los aspectos de semejanza estructural entre sistemas de distinta naturaleza (vena monista) con el papel auxiliar de las matemáticas en el diseño y desarrollo de las teorías científicas (vena dualista) en una sola propuesta. Se dirimirá con ello la tensión entre algunos compromisos monistas y dualistas sobre la aplicación.

En quinto lugar, explicaremos cómo nuestra perspectiva estructural hace énfasis en las *relaciones* en y entre estructuras matemáticas y físicas y *no* en la *naturaleza* de los objetos relacionados en una representación estructural. De tal suerte que, si hacemos énfasis en las relaciones y no en los objetos cuando hablamos de aplicación, la relación entre matemáticas y ciencias podrá verse no como un problema entre posiciones realistas/nominalistas/ficcionalistas de las matemáticas y ciencias naturales. La posibilidad de explicar el fenómeno de la aplicación matemática a la ciencia será independiente a una respuesta sobre la relación entre el conocimiento y la referencia de objetos abstractos matemáticos, con el conocimiento y la referencia de objetos concretos físicos. De hecho la aplicación matemática, veremos, será una vía pictórica o representacional para establecer un orden de espacios no visibles directamente en los sistemas físicos, pero sí medibles, mediante funciones y relaciones matemáticas. Si lo anterior es correcto, entonces la condición básica de la aplicación matemática será la explicación de un mundo no matemático descrito u ordenado matemáticamente, determinando nuevos significados para la ciencias de la naturaleza.

[11] Este aspecto particularmente se trabajará con detalle en el sub-apartado III.I Estudio de caso, particularmente en la segunda sección de este estudio.

Por último, señalaremos los retos de las tendencias monista y dualista al intentar incluir en sus consideraciones, la propiedad semántica de la aplicación considerada por la síntesis estructural.

Para confirmar nuestra propuesta será importante ilustrarla a partir de la formación de diferentes conceptos y principios generales de una teoría física matematizada. En consecuencia incluimos en este apartado un estudio de caso. El sub-apartado **III. 1 "Estudio de Caso: Termometría, Calorimetría y Equivalente Mecánico del Calor"** se propone a explicar la síntesis estructural a la luz de algunos aspectos de la Termodinámica.

En la sección (1) veremos cómo los conceptos de temperatura, transferencia de calor y calor específico, serán conceptos de aplicación matemática, esto es, cómo tales conceptos cuyas referencias serán estados o procesos físicos solo tendrán sentido por la aplicación. Veremos cómo la matematización de una teoría física cobrará sentido, por una parte, gracias a la noción de observación cuantitativa y, por otra, en consecuencia de la descripción algebraica de resultados experimentales. Ilustraremos estos aspectos a partir de algunos trabajos sobre el calor desarrollados por Joseph Black.

En la sección (2) haremos énfasis en la forma en que las descripciones algebraicas podrán constituir leyes o principios físicos generales. Para ilustrar este caso, veremos cómo James Prescott Joule llega a la formulación del Equivalente Mecánico del Calor ($\Delta U = W_{ad}$) como un principio general termodinámico.

A partir de estas dos secciones del estudio de caso confirmaremos todos los aspectos distintivos de nuestra propuesta sobre la aplicación matemática.

El quinto apartado: **IV. "Conclusiones"** sistematizaremos los diferentes resultados de nuestra investigación.

APARTADO I

Acotación semántica de 'la aplicación matemática'

Apartado I

I. Acotación semántica de 'la aplicación matemática'

Objetivos del Apartado

Objetivo (1): identificar distintas maneras de preguntarse por el fenómeno de la aplicación matemática a la ciencia.

Objetivo (2): restringir nuestro uso de 'la aplicación matemática' en función de dos preguntas sobre la aplicación: a. ¿Surgen nuevos conceptos de la aplicación matemática a la física?, b. ¿La semejanza estructural entre sistemas matemáticos y sistemas físicos es anterior o posterior a la aplicación?

¿Es necesario hablar de la aplicación matemática para explicar la naturaleza científica de las matemáticas? o bien ¿la cientificidad matemática puede explicarse vía el problema de la aplicación matemática a las ciencias naturales?

Alemán (2001)[1] y Livio (2011) [2] consideran la posibilidad de hablar del carácter científico de las matemáticas prescindiendo de alguna consideración sobre su aplicación a las ciencias empíricas:

> La geometría no euclidiana de Riemann estuvo guardada durante mucho tiempo en el cajón de la historia hasta que Einstein la desempolvó para emplearla en su teoría física. Pero tal geometría, en cuanto a teoría matemática, era la misma antes y después de su aplicación. Su fructífera aplicación incrementa indudablemente nuestro interés en la teoría; pero ni aumenta ni disminuye su carácter en cuanto teoría matemática (Alemán, 2001, p. 58).

[1] Alemán, A., (2001), Lógica, Matemáticas y Realidad, TECNOS, Madrid.

[2] Livio, M., (2011), "*Why Math Works*." Scientific American, Vol. 305, Num. 2, Agosto, 2011, pp. 60-63.

…perhaps, mathematicians sometimes develop entire fields of study with no application in mind…Examples of this kind of passive effectiveness abound. French mathematician Évariste Galois, for example, developed group theory in the early 1800s for the sole purpose of determining the solvability of polynomial equations. Very broadly, groups are algebraic structures made up of sets of objects (say, the integers) united under some operation (for instance, addition) that obey specific rules (among them the existence of an identity element such as 0, which, when added to any integer, gives back that same integer). In 20th-century physics, this rather abstract field turned out to be the most fruitful way of categorizing elementary particles—the building blocks of matter.

The study of knots offers another beautiful example of passive effectiveness. Mathematical knots are similar to everyday knots, except that they have no loose ends. In the 1860s Lord Kelvin hoped to describe atoms as knotted tubes of ether. That misguided model failed to connect with reality, but mathematicians continued to analyze knots for many decades merely as an esoteric arm of pure mathematics (Livio, M., 2011, p. 61).

... tal vez, los matemáticos a veces desarrollan campos enteros de estudio, sin aplicaciones en mente ... Ejemplos de este tipo de eficacia (effectiveness) pasiva abundan. El matemático francés Evariste Galois, por ejemplo, desarrolló la teoría de grupos a principios de 1800 con el único propósito de determinar la solvencia de las ecuaciones polinómicas. En términos muy generales, los grupos son estructuras algebraicas hechas de conjuntos de objetos (por ejemplo, los números enteros) unidos bajo una operación (por ejemplo, la adición) que obedecen a reglas específicas (entre ellas la existencia de un elemento de identidad, tal como el 0, el cual, cuando se añade a cualquier número entero, ofrece como resultado ese mismo número entero). En física del siglo 20, este campo más bien abstracto resultó ser la forma más fructífera de la clasificación de las partículas elementales —los bloques de construcción de la materia.

El estudio de los nudos ofrece otro bello ejemplo de la eficacia pasiva [de las matemáticas]. Los nudos matemáticos son similares a los nudos de todos los días, excepto que no tienen cabos sueltos. En la década de 1860 Lord Kelvin esperaba describir los átomos como los tubos de nudos de éter. Ese modelo equivocado no pudo conectarse con la realidad, pero los matemáticos continuaron analizando nudos durante muchas décadas como una mera rama esotérica de las matemáticas puras.[3]

[3] La traducción es responsabilidad mía.

Con este tipo de observaciones podemos ilustrar una respuesta afirmativa a la primera pregunta señalada arriba. Para algunos investigadores en filosofía y ciencia es efectivamente posible reconocer de las teorías matemáticas su cientificidad sin considerar su propiedad aplicativa. Sin embargo, en términos filosóficos es mucho más interesante tratar de conciliar en una explicación sobre la aplicabilidad matemática, la relación entre, digamos por ahora, dos lenguajes tan distintos, como lo son la matemática y la física y, desde ahí, hacer una defensa de la cientificidad matemática. Esta tendencia se relaciona con la segunda pregunta considerada más arriba. Los términos de nuestra investigación quedan acotados en este contexto de discusión al considerar las siguientes condiciones.

En primer lugar, nuestro interés será identificar en la literatura de filosofía de las matemáticas diferentes propuestas sobre la cientificidad matemática. Particularmente nos interesan aquellas propuestas que hemos denominado monistas y dualistas. En segundo lugar, nos interesa identificar el compromiso de éstas tendencias con una particular explicación de la aplicación matemática, al ofrecer una respuesta general sobre la naturaleza científica de las matemáticas. En tercer lugar, nuestro interés será mostrar la insuficiencia de tales propuestas como explicaciones de la aplicación. En ésta orden, nuestro compromiso está sobre la segunda incógnita arriba señalada y no sobre la primera.[4]

Gran parte del problema sobre la explicación del fenómeno de la aplicación matemática a la ciencia es cómo pueden teorías sobre objetos independientes del mundo natural servirnos para estudiar y describir dicho mundo natural (Shapiro, S., 2000, p. 149 ss). Este problema es análogo a los famosos problemas benacerrafianos del conocimiento y referencia de los

[4] Si bien la aplicabilidad es un rasgo propio de la ciencia matemática, de esto no se sigue su necesidad para establecer la naturaleza científica de las matemáticas. Afirmar lo opuesto es evidentemente falaz. Sin embargo, es posible determinar en qué consiste la cientificidad matemática a partir de una explicación de dicha aplicabilidad. Esta es nuestra línea de análisis.

Cualquier matemático puro o físico sin pretensiones filosóficas puede simplemente conceder la gran utilidad de las matemáticas para la física, atendiendo a su historia y a su práctica científica actual y, con ello, desentenderse de cualquier explicación de ésta relación. Sin embargo, cuando la defensa de la naturaleza científica de las matemáticas se pone en juego considerando su carácter auxiliar con las otras ciencias, entonces, la necesidad de encontrar una satisfactoria explicación de ésta relación surge, pues de ello dependerá la conceptualización de las matemáticas mismas y su ubicación en el conjunto general de la ciencia.

objetos matemáticos y no es de sorprender que hayan resultado tan difíciles de resolver a lo largo de los años.

El primer paso para ofrecer una respuesta clara sobre la relación entre matemáticas y física es distinguir preguntas específicas en torno a la aplicación. Las respuestas a estas preguntas ceñirán las referencias particulares de la expresión 'aplicación matemática'.

Al menos existen nueve maneras distintas de preguntarnos sobre la aplicación matemática a la física:[5]

i. Caracterización. ¿Qué hacen los físicos con las matemáticas, esto es, qué es la aplicación de las matemáticas a la física?

ii. Cómo. ¿Cómo usan los físicos a las matemáticas?

iii. Para qué. ¿Qué ganan los físicos —al hacer física— al usar matemáticas?

iv. Por qué. ¿Por qué los físicos usan las matemáticas?, ¿cómo sería la física sin las matemáticas?, ¿qué tan distinta sería la física sin las matemáticas?, ¿seguiría existiendo la física sin las matemáticas?

v. Objetos. ¿Tiene la física con las matemáticas objetos diferentes a los de la matemática sin física o la física sin matemáticas?

vi. Conceptos. ¿Surgen nuevos conceptos de la aplicación matemática a la física?, ¿Qué tipo de conceptos son éstos?, ¿Son conceptos matemáticos o físicos?

vii. ¿Qué tiene la física —y no tanto, digamos la biología o el futbol— que hace que los físicos usen las matemáticas?, ¿por qué hay tanta matemática en la física, pero no tanta matemática en la biología o en el futbol?

[5] Recordemos hablamos de la física al ser la pionera de las ciencias cuantitativas.

viii. ¿Por qué hay tanta matemática en física, pero no hay tanto futbol o biología o cocina en la física? Más específicamente, ¿es necesario que las matemáticas sean una ciencia para que los matemáticos la usen como de hecho la usan?

ix. Semejanza estructural. ¿La semejanza entre estructuras matemáticas y físicas es anterior o posterior a la aplicación?

Siguiendo a Shapiro (1997) comúnmente las preguntas sobre la aplicación matemática están señaladas por los puntos (iii) y (iv). Sin embargo, si bien estas preguntas motivan respuestas generales sobre la aplicación, descuidan aspectos básicos de su naturaleza. Desde nuestra perspectiva, falta ofrecer una respuesta a preguntas importantes sobre la aplicación develando con ello sus propiedades más básicas. Estas preguntas están señaladas por los puntos (vi) y (ix).

Antes de tomar estas preguntas como el centro de nuestra propuesta veamos de qué manera algunos filósofos de la matemática y de la ciencia hablan de la aplicación matemática.[6]

¿Cómo explicamos mejor la aplicación matemática?: ¿bajo la hipótesis de que la matemática es una ciencia o bajo la hipótesis de que no lo es sino sólo una herramienta? Distingamos dos aspectos de la naturaleza de las matemáticas[7]. Por una parte está el

---

[6] En el apartado II de esta investigación analizaremos con mayor detalle las propuestas de Kitcher y Maddy. Ahora tan solo hacemos un acercamiento preliminar de estas propuestas en función de los objetivos específicos de este apartado.

[7] Las discusiones actuales en filosofía de las matemáticas y de la ciencia han tomado diferentes vertientes. Estas discusiones pueden agruparse en dos amplios intereses básicos. En primer lugar, existe una gran preocupación por decir con verdad algo de la ontología matemática y de la objetividad de su conocimiento. Los argumentos van desde compromisos realistas, anti-realistas, empiristas naturalizados, empiristas radicales, pasando por enfoques nominalistas-conceptualistas, tocando también argumentos ficcionalistas e intuicionistas. Todos estos enfoques ocupan un lugar central en la epistemología y metafísica matemática. En segundo lugar, existe un interés por discutir la cientificidad de las matemáticas. Esto es, decidir si las matemáticas son científicas en el mismo sentido que las otras ciencias, si las matemáticas son de un tipo especial de ciencia, si la aplicación matemática contribuye en la determinación de su cientificidad, cómo explicamos la incorporación de las matemáticas a la ciencia natural. Nuestra investigación se incluye principalmente en ésta segunda tendencia, aun cuando pueda ser consistente en algún sentido con propuestas conceptualistas e incluso realistas en matemáticas. De hecho nuestra propuesta final "síntesis estructural" tiende a asumir que la importancia de la aplicación matemática no está en explicar cómo se relacionan objetos de naturaleza diferente (matemáticos y físicos), sino en enfatizar un mismo orden entre las estructuras matemáticas y físicas cuando una función matemática describe una regularidad fenoménica.

problema de explicar en qué consiste la aplicabilidad matemática a la ciencia y advertir sus propiedades filosóficas. En segundo lugar, está el interés por explicar la cientificidad matemática a partir de sus aplicaciones.

Para algunos filósofos la aplicación de las matemáticas puede explicarse como una consecuencia *natural* de la relación entre matemáticas y el mundo físico. Un ejemplo de este caso es el empirismo-holista de Quine (1951, 1963, 1981)[8] y el empirismo radical defendido por Maddy (1980)[9] y Kitcher (1984)[10]. Para el primer caso, las verdades matemáticas están imbuidas de contenido empírico a través de su empleo en teorías claramente empíricas, afirmando que no existen dos dominios separados de enunciados científicos (Alemán, 2001, p. 49). Para el segundo caso, las verdades matemáticas se basan en último término en la percepción sensorial y posteriormente en generalizaciones inductivas a partir de ellas:

> The totality of our so-called knowledge or beliefs, from the most casual matters of geography and history to the profoundest laws of atomic physics or even of pure mathematics and logic, is a man-made fabric which impinges on experience only along the edges. Or, to change the figure, total science is like a field of force whose boundary conditions are experience. A conflict with experience at the periphery occasions readjustments in the interior of the field. Truth values have to be redistributed over some of our statements (Quine, [1951] (1962), p. 47).[11]

[8] Quine, W. O. [1951] (1962), "*Two Dogmas of Empiricism*" en Hart, W. D. eds., *The Philosophy of Mathematics*, pp. 31- 51.

Quine, W. V. (1963) "*Carnap and logical truth*", en P. Benacerraf and H. Putnam (eds.) (1983) *Philosophy of mathematics. Selected readings*, Cambridge University Press, pp. 355-376.

Quine W.O., (1981), *Theories and Things*, Harvard University Press, Massachusetts.

[9] Maddy, P., (1980), "*Perception and Mathematical Intuition*". *The Philosophical Review*, No. 89, pp. 163-196.

[10] Kitcher, P. (1984), *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford.

[11] Quine, [1951] (1962), "*Two Dogmas of Empiricism*" en Hart, W. D. eds., *The Philosophy of Mathematics*, pp. 31- 51.

> La totalidad de lo que llamamos nuestro conocimiento, o creencias, desde las más casuales cuestiones de la geografía y la historia hasta las más profundas leyes de la física atómica o incluso de la matemática o de la lógica puras, es una fábrica construida por el hombre y que no está en contacto con la experiencia más que a lo largo de sus lados. O, con otro símil, el todo de la ciencia es como un campo de fuerza cuyas condiciones límite da la experiencia. Un conflicto con la experiencia en la periferia da lugar a reajustes en el interior del campo: hay que redistribuir los valores veritativos entre algunos de nuestros enunciados. (Quine, [1951] (1985), p. 63).[12]

> …en el proceso de adquirir la habilidad de percibir conjuntos, adquirimos también creencias intuitivas muy generales acerca de ellos, y los más simples axiomas de la teoría de conjuntos son versiones lingüísticas de aquellas,…(Maddy, 1980, p. 196).

> To summarize, my theory of mathematical knowledge traces the knowledges of the contemporary individual, through the knowledge of her authorities, through a chain of prior authorities, to perceptual knowledge acquired by our remote ancestors (Kitcher, 1984, p. 7).
>
> En resumen, mi teoría del conocimiento matemático traza los conocimientos del individuo contemporáneo, a través del conocimiento de sus autoridades, a través de una cadena de autoridades anteriores, hasta el conocimiento perceptual adquirido por nuestros antepasados remotos.[13]

Quine particularmente explica además la aplicación matemática a partir de su gran utilidad epistemológica a la ciencia. La tesis de indispensabilidad quineniana supone una relación de ayuda ineludible entre las matemáticas y la ciencia natural. Parte de las consecuencias de dicha relación es conocer la naturaleza científica de las matemáticas mismas, así como la naturaleza de la ciencia física y sus productos:

> El discurso científico habitualmente interpretado está tan irremediablemente comprometido con objetos abstractos –nociones,

[12] Quine, [1951] (1985), Desde un punto de vista lógico, Orbis, Barcelona, pp.49-81

[13] La traducción es responsabilidad mía.

> especies, números, funciones, conjuntos– como con manzanas y otros cuerpos. Todas estas cosas figuran como valores de las variables en nuestro sistema global del mundo. Los números y las funciones contribuyen a la teoría física tan genuinamente como lo hacen las partículas hipotéticas" (Quine 1981, pp. 149-150).
>
> Una teoría auto-contenida que podamos contrastar con la experiencia incluye, en realidad, no sólo sus diversas hipótesis teóricas de la denominada ciencia natural, sino también aquellas porciones de lógica y matemática de las que hace uso. (Quine 1963, p. 367).
>
> La cuantificación sobre entidades matemáticas es indispensable para la ciencia, tanto para la ciencia formal como para la física; por consiguiente, deberíamos aceptar tal cuantificación; pero esto no nos compromete con aceptar la existencia de las entidades matemáticas en cuestión. Este tipo de argumento, procede, por supuesto, de Quine, quien, desde hace años, subrayó tanto la indispensabilidad de la cuantificación sobre entidades matemáticas, como la deshonestidad intelectual de negar la existencia de lo que uno presume diariamente (Putnam, 1972, p. 57).[14]

Para el empirismo defendido por Kitcher, la aplicación matemática se explica como una circunstancia epistemológica natural de la ciencia. Las verdades matemáticas se justifican, como las verdades físicas, en última instancia por la percepción, así como, por la lógica de prácticas científicas específicas. La matemática y la realidad física se encuentran fuertemente relacionadas en tanto no hay una nítida frontera ni temática, ni metodológica entre matemáticas y física (Kitcher, 1984, 1988; S. Shapiro, 2000):

> …hay una nítida conexión entre racionalidad y verdad matemática, pero es de tal índole que, en vez de ver racionalidad como maximización de las posibilidades para obtener la verdad, la verdad matemática debe ser entendida como aquello que se genera, idealmente, a largo plazo, según una secuencia de pasos racionales entre prácticas [de los científicos] (Kitcher, 1988, p 529).[15]
>
> One of Kuhn's mayor insights about scientific change is to view the history of a scientific field as a sequence of practices: I propose to

[14] Putnam, H., (1972), Filosofía de la Lógica, Georges Allen and Unwin, London.

[15] Kitcher, P., (1988), "*Mathematical Progress*", *Revue Internationale de Philosophie*, 42 (67), 529.

> adopt an analogous thesis about mathematical change. I suggest that we focus on the development of mathematical practice, and that we view a mathematical practice as consisting of five components: a language, a set of accepted statements, a set of accepted reasonings, a set of questions selected as important, and a set of metamathematical views…(Kitcher, 1984, p. 163).
>
> Uno de los puntos de vista principales (mayor) de Kuhn sobre el cambio científico es ver la historia de un campo científico como una secuencia de prácticas: me propongo adoptar una tesis análoga acerca del cambio en matemáticas. Sugiero que nos centremos en el desarrollo de la práctica matemática, y que observemos cinco componentes de esta práctica: un lenguaje, un conjunto de declaraciones aceptadas, un conjunto de razonamientos aceptados, un conjunto de preguntas seleccionadas como importantes, y una conjunto observaciones metamatemáticos.[16]

> The history of science is full of cases where branches of 'pure' mathematics eventually found application in science. In other words, the overall goals of the scientific enterprise have been well served by mathematician pursuing their own disciplines with their own methodology (Shapiro, S., 2000, p. 18-19).
>
> La historia de la ciencia está llena de casos donde las ramas de la matemática "pura" eventualmente han encontrado una aplicación en la ciencia. En otras palabras, los objetivos generales de la actividad científica han estado bien servidos por matemáticos que persiguen su propia disciplina, con su propia metodología.[17]

En consonancia con lo anterior, hay quienes han sostenido que las matemáticas se encuentran a la base de nuestras ideas empíricas (Gödel, 1964, pp. 483-4). Por su parte, Shapiro (2000) explica también la aplicación matemática a partir del uso (in)formal de conceptos y métodos cuasi-matemáticos por parte de la ciencia, la ingeniería, la tecnología y la vida cotidiana:

> …much of the theoretical and practical work in science consists of constructing or discovering mathematical models of physical

[16] La traducción es responsabilidad mía.

[17] La traducción es responsabilidad mía.

> phenomena. Many scientific and engineering problems are task of finding a differential equation, a formula, or a function associated with a class of phenomena (Shapiro, *Op. Cit.*, p. 34).
>
> ... la mayor parte del trabajo teórico y práctico de la ciencia consiste en construir o descubrir modelos matemáticos de fenómenos físicos. Muchos de los problemas científicos y de ingeniería consisten en encontrar una ecuación diferencial, una fórmula o una función asociada a una clase de fenómenos.[18]

> …a mathematical structure, description, model, or theory cannot serve as an explanation of a non-mathematical event without some account of the relationship between mathematics per se and scientic reality (Shapiro, *Ibidem*, p. 35).
>
> ...una estructura matemática, una descripción, un modelo o una teoría no puede servir como una explicación de un suceso no-matemáticos al margen de una consideración sobre la relación entre las matemáticas *per se* y la realidad científica.[19]

> We apply the *concepts* of mathematics —numbers, functions, integrals, Hilbert spaces— in describing non-mathematical phenomena. We also apply the *theorems* of mathematics in determining facts about the world and how it works…(Shapiro, *Ibidem*, pp. 36ss.)
>
> Aplicamos los *conceptos* de las matemáticas — números, funciones, integrales, espacios de Hilbert — en la descripción de fenómenos no-matemáticos. También aplicamos los *teoremas* de las matemáticas en la determinación de hechos del mundo [físico] y en la determinación de cómo éste mundo funciona.[20]

Aun cuando distintos programas hablan explícitamente de la aplicabilidad matemática, las respuestas no han sido del todo satisfactorias. Como veremos en el apartado II, gran parte del desacierto se basa en hacer depender las respuestas sobre la aplicación al desarrollo

[18] La traducción es responsabilidad mía.

[19] La traducción es responsabilidad mía.

[20] La traducción es responsabilidad mía.

general de posturas específicas sobre la realidad matemática. El empirismo-holista de Quine, el empirismo radical de Maddy, el realismo de Shapiro ilustran estos casos, así como, posiciones de corte ficcionalista e intuicionista en el campo controvertido de la ontología matemática.

Desde nuestra perspectiva, la explicación de la aplicación es independiente de cualquier presupuesto metafísico sobre la ontología y la referencia de los objetos matemáticos. La aplicabilidad se mantiene por las relaciones entre los elementos de estructuras matemáticas y físicas independientemente de la naturaleza ontológica de tales elementos.

Y, ¿entonces, desde nuestra lectura, en qué consiste la aplicación? Como hemos señalado nuestras preguntas sobre la aplicación están contenidas en los puntos (iv) y (ix). Desde nuestra perspectiva y, por ahora, de manera general[21] explicamos a la aplicación matemática como un dispositivo representacional de sistemas físicos mediante funciones matemáticas. Las funciones matemáticas describen el orden de los estados, procesos y fenómenos involucrados en los sistemas físicos. Al margen de las matemáticas, no tiene sentido decir "conocemos una regularidad física", salvo aquellas creencias sobre el mundo basadas en la percepción directa. Si creemos que existe una regularidad en los fenómenos físicos, debemos reconocer que toda regularidad física implica, en principio, la aplicación de un patrón de medición que haga cognoscible su comportamiento. Al margen de esto, no tiene sentido seguir hablando de regularidades en el mundo físico.[22]

[21] En el apartado III de esta investigación explicaremos cómo nuestra propuesta sobre la aplicación se ha inspirado inicialmente en los trabajos estructuralistas de Chris Swoyer (1991) y Stewart Shapiro (2000). También en este apartado restringiremos nuestro uso de aplicación matemática como una representación estructural.

[22] Esto es distinto a preguntarse por ejemplo si un "gas ideal" (gas teórico compuesto de un conjunto de partículas puntuales con desplazamiento aleatorio que no interactúan entre sí) es un objeto matemático o físico. Esto es importante para el realista natural y de las matemáticas. Lo sustancial, para nosotros, en este caso, es ver en el gas ideal un concepto que solo cobra sentido por la aplicación, esto es, por la constitución de una ley de los gases descrita por una ecuación de estado simplificada (modelo de gas ideal). En esta línea, un gas ideal ilustra un concepto de aplicación. El tema de conceptos de aplicación se explicará con detalle en el apartado III de esta investigación.

Lo importante entonces será escudriñar en qué consiste la representación de éstos estados, procesos y fenómenos físicos mediante funciones matemáticas. ¿Cómo se da este proceso?, ¿cómo interpretamos los resultados matemáticos como resultados físicos?, ¿se generan "cosas" nuevas con la aplicación?, en caso afirmativo, ¿cuál es la naturaleza de estas "cosas" nuevas?, ¿son conceptos? La representación matemática ¿nos dice algo sobre la condición explicativa de la homomorfía entre sistemas matemáticos y físicos?

Hemos acotado nuestras preguntas sobre la aplicación, aunque por ahora quedan pendientes sus respuestas. Estas serán el objeto central de los siguientes apartados.

A continuación en el apartado II desarrollaremos el centro de la explicación monista y dualista en matemáticas. Nos detendremos en la tensión prevaleciente entre estas propuestas. Ilustraremos las particularidades de cada tendencia y la tensión monismo/dualismo a partir de algunas propuestas clásicas y de vanguardia desde la filosofía de las matemáticas. Por último, veremos la pobreza explicativa de la aplicación desde este contexto.

APARTADO II

Tensión entre la perspectiva monista y dualista. Algunos casos clásicos y contemporáneos en Filosofía de las Matemáticas

Apartado II

II. Tensión entre la perspectiva monista y dualista. Algunos casos clásicos y contemporáneos en Filosofía de las Matemáticas

Objetivos del Apartado:

Objetivo (1): desarrollar el centro de las explicaciones dualista y monista en matemáticas.

Objetivo (2): explicar la tensión monismo/dualismo respecto al problema de la aplicación matemática.

Objetivo (3): ilustrar la tensión monismo/dualismo a la luz de algunas propuestas en filosofía de las matemáticas.

Objetivo (4): indicar la pobreza explicativa de la aplicación matemáticas como una consecuencia de preguntarse sobre su composición en términos de ¿qué ganan los científicos al usar matemáticas?

Monismo y Dualismo en Matemáticas

Any philosophy of mathematics or philosophy of science that does not provide and account of this relationship [between mathematics and the rest of scientific] is incomplete at best (Shapiro, 2000, p. 34). Filósofos de la matemática manifiestan su interés en el problema de la aplicación como una parte importante de su respuesta ante el problema de los fundamentos de la matemática.

Podemos agrupar en dos grandes tendencias las distintas respuestas de la aplicación matemática: Dualistas y Monistas.

Para el primer caso, en términos de un dualismo ontológico la realidad descrita por los enunciados matemáticos no es la realidad empírica percibida directamente a partir de los sentidos, sino en todo caso, una realidad abstracta perceptible solo mediante una facultad de la razón denominada comúnmente "intuición intelectual". Para el dualismo ontológico los objetos matemáticos y los objetos empíricos son de naturaleza distinta y, relacionarlos implica postular un tipo especial de acceso cognitivo.

En el caso del monismo ontológico, la realidad de los objetos empíricos y de los objetos abstractos no está escindida, hay una especie de continuidad en su ontología. La realidad matemática no es de una naturaleza distinta a la realidad física. La realidad matemática y física es una sola realidad con muchas caras. Esta realidad está constituida, por una parte, por rasgos particulares y concretos (características físicas de objetos espacio-temporales: color, forma, textura, etc.) y, por otra, por rasgos generales y abstractos (por ejemplo, el supuesto lógico-matemático de la identidad de los indiscernibles). En estos términos, los enunciados de la ciencia empírica describen la realidad en condiciones más o menos generales, mientras los enunciados matemáticos describirán las características más generales del mundo físico. Una variación adicional de este monismo es considerar la existencia de los objetos matemáticos análogamente a la existencia de los objetos físicos.

Sin duda existen variaciones en la manera de entender la ontología matemática en relación con la ontología física. También existen variaciones en la explicación de la relación entre enunciados matemáticos y enunciados físicos en el marco de una teoría científica. Estas variaciones pueden producir movimientos de una tendencia a otra dependiendo del énfasis puesto sobre algunos elementos ontológicos o epistemológicos en sus concepciones de la realidad matemática.[1]

[1] El dualismo matemático puede identificarse también —y, de hecho paradigmáticamente— desde el empirismo lógico de Carnap (1937). Esta corriente es distinta al empirismo radical propuesto por Kitcher (1984) o Maddy (1980).

El dualismo carnapiano se explica en términos completamente distintos a ciertos compromisos dualistas del realismo matemático. Es curiosa la convergencia en posturas dualistas entre el platonismo (realismo) y el empirismo lógico. Convergencia entre aspectos dualistas restringida al siguiente aspecto. El platonismo integra una vertiente dualista ontológica por un lado, al enfatizar y radicalizar la escisión entre la realidad matemática y la realidad empírica y, por otro, un dualismo epistemológico, al preguntase por la aplicación de las verdades matemáticas al mundo empírico como parte de su respuesta de la fundamentación matemática. Sin embargo, el realismo matemático en general representa *una postura monista ontológica* al reivindicar la ontología matemática, la existencia de objetos matemáticos en términos altamente similares a la existencia de los objetos físicos. Por su parte, el empirismo lógico de corte carnapiano es paradigmáticamente una concepción dualista epistemológica al señalar otros aspectos. Considera a las matemáticas como una ciencia

En consecuencia podemos considerar una tendencia monista de corte epistemológico. En este caso, la ciencia matemática y las ciencias naturales, por ejemplo, la física, la química, la biología, etc., tienen un mismo carácter científico. Esto es, ambos casos son ciencias en exactamente el mismo sentido. ¿Qué implica esta homologación? Implica considerar a las matemáticas con una estructura teórica, con compromisos ontológicos y epistemológicos, con métodos de investigación, por lo menos altamente similares a los de las distintas ciencias naturales. Después de todo, de acuerdo con su concepción del mundo, ambos casos, matemática y física, se comprometen epistemológica y ontológicamente con una sola realidad cuyos objetos y relaciones se explican bajo una gradiente de generalidad. En este caso, consideran, gran parte de la consistencia en el diseño y funcionamiento de las teorías científicas físicas se debe a la participación de la ciencia matemática como parte de su misma estructura.

Desde una perspectiva dualista epistemológica, la homologación anterior no tiene sentido. En este caso, las ciencias naturales y las matemáticas son disciplinas científicas claramente distintas. Por decirlo de alguna manera, el campo de aplicación primaria de las matemáticas está escindido del campo de aplicación primaria de las ciencias naturales.

Las matemáticas, para los dualistas epistemológicos, tipo Carnap (1937), constituyen una ciencia general que poco o nada tiene que ver con las ciencias naturales en tanto su constitución, funcionamiento y compromisos teóricos. ¿De dónde proviene, en este caso, el carácter científico de las matemáticas?, ¿cómo se consolida la cientificidad matemática? La respuesta dualista epistemológica es predecible: las matemáticas requieren de un análisis epistemológico diferente. Este análisis debe identificar metodologías, objetivos y estructuras teóricas propias e independientes a la estructura y diseño general de las teorías empíricas. La naturaleza científica de las matemáticas se derivará o bien del papel de las matemáticas con las otras ciencias por antonomasia (aspecto auxiliar), o bien provendrá de

---

que poco o nada tiene que ver con los objetos que pueden ser explicados vía teorías empíricas matematizadas. Las matemáticas tan solo auxilian metodológicamente en el diseño de teorías empíricas cuantitativas. Incluso desde esta postura, la existencia de los objetos de aplicación de la matemática pueden quedar en entre dicho.

una epistemología independiente al conjunto general de la ciencia. Esta epistemología normará el diseño de las teorías matemáticas y la aplicación en su campo.

Aun considerando las distinciones entre dualismo ontológico/dualismo epistemológico y monismo ontológico/monismo epistemológico, los desacuerdos entre un monismo general y un dualismo general en matemáticas se originan al intentar explicar un mismo punto de partida sobre la constitución de las matemáticas: los hechos matemáticos básicos. Las matemáticas están constituidas por ciertos objetos, datos y relaciones, *ex. gr.* teoremas, axiomas, pruebas, el carácter deductivo de las matemáticas, el margen aplicativo de las matemáticas a las otras ciencias, al tiempo, de considerar la posibilidad de ordenarse deductivamente las ciencias no matemáticas. Incluirse en las filas monistas o dualista dependerá, entonces, de cómo se explican los datos antes señalados, considerando también sus distintas relaciones. Es falso entonces implicar un monismo por el simple hecho de reconocer la existencia de verdades matemáticas, e implicar un dualismo por el simple hecho de reconocer la importancia de las matemáticas para estructurar la ciencia en general.[2]

El tipo de monismo más arraigado pese a sus compromisos platonistas puede ejemplificarse con Gottlob Frege (1879, 1884, 1892)[3] y con platonistas contemporáneos como Stewart

---

[2] En consecuencia con la observación anterior, de manera estándar en filosofía de las matemáticas las concepciones monistas y dualistas pueden bien ilustrarse por el realismo descriptivista y el empirismo lógico respectivamente. Pues ambos casos, explican de manera muy distinta y con referencias a los compromisos generales de un monismo y un dualismo, los hechos matemáticos.

[3] Si bien el platonismo fregeano defiende una tesis monista sobre la existencia de objetos matemáticos, éste enfoque también defiende una tesis dualista comprometida con la demarcación entre realidad matemática y realidad física. Para este caso es necesario correlacionar ambas dimensiones con el propósito de ofrecer respuestas completas en torno a la ontología y epistemología del mundo. Esto es, Frege se esfuerza por conciliar su platonismo con la tesis dualista de que el carácter científico de las matemáticas proviene de su aplicación.

Frege, G., [1879] (1972), Conceptografía, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Frege, G., [1892] (1973), "*Uber Sinn und Bedeutung*", en Versión española, T.H. Simpson, Semántica Filosófica. Problemas y discusiones, Siglo XXI, Buenos Aires.

Shapiro (1997, 2000) o James Robert Brown (1999)[4]. Estos programas tienen una concepción descriptivista de las matemáticas, esto es, no solo comparten la tesis de que las matemáticas describen una realidad abstracta, sino adicionalmente, al ser la matemática una ciencia descriptiva más, la única diferencia entre ella y las ciencias naturales es la naturaleza de sus objetos y el tipo de justificación de sus verdades. En este campo, los objetos matemáticos son abstractos y su conocimiento *a priori*, mientras los objetos del resto de las ciencias son concretos y su conocimiento será *a posteriori*.

Como es de esperarse si consideramos programas monistas anti-descriptivistas la explicación de los hechos matemáticos y su relación con los hechos físicos difiere a los planteamientos realistas. La versión empirista radical de las matemáticas ilustra este caso. Si consideramos la versión empirista radical de las matemáticas veremos en ella un programa de corte monista no-platonista. El ejemplo paradigmático de ésta posición es el empirismo-naturalista de P. Kitcher (1984). Kitcher sostiene una continuidad metodológica y epistemológica entre las matemáticas y las ciencias naturales, en donde incluso la aprioridad de las verdades matemáticas incluye elementos de percepción. Más adelante señalaremos los detalles de esta alternativa.

Por su parte, el dualismo tiene su origen con el empirismo lógico. Sin duda fue Carnap quien le dio su formulación paradigmática radicalizando la distinción epistemológica *a priori*/*a posteriori* y la distinción semántica analítico/sintético como una forma de establecer criterios de demarcación entre las proposiciones científicas. Liga a la matemática con la estructura *a priori* y analítica de la ciencia y relaciona a las ciencias naturales con el contenido *a posteriori* y sintético de sus enunciados (Carnap, 1935). Más recientemente, filósofos como Penélope Maddy (1997) o Michel Friedman (1990)[5] han tratado de revivir el dualismo carnapiano para mantener que la matemática es una ciencia de un tipo especial

[4] Brown, J.R., (1999), Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures, Routledges, New York.

[5] Michael, F., (1990), "*Kant on Concepts and Intuitions in the Mathematical Sciences*", en Synthese, 84 (2), pp.213 - 257.

ligado a su papel con la ciencia natural. De una manera completamente distinta, Hartry Field (1980, 1989)[6] ha propuesto un dualismo en el que la diferencia entre matemáticas y ciencias naturales es tan drástica al ser las primeras, en su mayor parte falsas y sólo las segundas verdaderas.

En suma, de acuerdo con la tendencia monista las matemáticas y las ciencia empírica son científicas exactamente en el mismo sentido o bien, por coincidir sus teorías en los mismos rasgos estructurales (monismo epistemológico), o bien por considerar a la ontología matemática y a su conocimiento y, a la ontología física y a su conocimiento como partes de una sola realidad comprehensiva (monismo ontológico), o bien por considerar la existencia de los objetos matemáticos análoga a la existencia de los objetos físicos (monismo ontológico). Desde una perspectiva dualista tenemos al menos cinco posibilidades: i. la realidad matemática está escindida de la realidad física (dualismo ontológico), ii. la matemática requiere un análisis epistemológico distinto al de las otras disciplinas científicas (dualismo epistemológico), iii. no existe la ontología matemática y, con ello, no tienen objetos de estudio como en el caso de las otras ciencias (dualismo estándar); iv. como consecuencia de (iii), si las matemáticas no tienen objetos de aplicación entonces no son ciencias (dualismo estándar); iv. las matemáticas son ciencias pero su estructura es independiente al resto de las disciplinas científicas (dualismo epistemológico).

Tensión entre la perspectiva monista y dualista en matemáticas

La tensión entre las tendencias monista y dualista es evidente al explicar la naturaleza de los hechos matemáticos. Conciliar esta tensión ha sido uno de los retos más importantes de la filosofía de las matemáticas en los últimos años. ¿En qué términos podemos sintetizar la tensión entre estas dos tendencias?

[6] Field, H.H., (1980), *Science Without Numbers: A Defence of Nominalism*, Blackwell, Oxford.

Field, H.H., 1989, *Realism, Mathematics and Modality*, O Blackwell, Oxford.

Tensión ontológica

Para la tendencia monista la realidad de los objetos matemáticos y la realidad de los objetos físicos es una sola. En consecuencia, la relación entre los enunciados matemáticos y físicos consiste en describir, para el primer caso, las propiedades más generales de los objetos físicos. Para el segundo caso, las propiedades más o menos generales de estos objetos. Otra alternativa de mantener un monismo ontológico es considerar la existencia de los objetos matemáticos análogamente a la existencia de los objetos físicos.

Para la tendencia dualista la realidad matemática y física está escindida. En este caso surge el problema dualista de la aplicación. Una variante del dualismo ontológico es negar la existencia de los objetos matemáticos. Una doble consecuencia de esta consideración es, por una parte, considerar a la matemática sin objetos de aplicación, y con ello, restarle todo valor a su naturaleza científica.

Tensión epistemológica

En primer lugar, la tendencia monista explica la relación entre aspectos matemáticos y no matemáticos de una teoría física en términos de una continuidad epistemológica. El presupuesto es un monismo ontológico, esto es, la matemática es una ciencia descriptiva de objetos abstractos, que junto con los objetos físicos, constituyen una misma realidad.[7]

[7] Si para el monismo estándar las estructuras matemáticas y físicas refieren a dos caras de una misma realidad, entonces, es posible entender ciertas condiciones de conjuntos matemáticos a partir de sus instanciaciones físicas y, al tiempo, explicar las relaciones entre individuos de conjuntos físicos a partir de una teoría de conjuntos: *…[e]l mismo Frege había llegado a su explicación de los números cardinales preguntándose “¿qué significa ‘cinco’ en contextos como ‘tengo cinco dedos en mi mano derecha’?* (Carnap, R., [1963] (1991), p. 93). Esta es la intuición básica.

En esta línea monista las distintas aplicaciones matemáticas suelen verse como constancia de la similaridad científica entre matemáticas y ciencias naturales. De hecho, como veremos en el apartado III de esta investigación, para monistas tipo Swoyer (1991) la mejor explicación de por qué una teoría matemática se aplica a un fenómeno físico concreto exitosamente es porque la teoría matemática y el fenómeno a explicar tienen los mismos rasgos estructurales. La aplicación matemática puede darse entonces porque las matemáticas y la ciencia física comparten una estructura común (Swoyer, 1991, p. 451).

En segundo lugar, para el monismo epistemológico, la matemática y la física en cuanto ciencias comparten los mismos rasgos estructurales. Esto es, la estructura teórica, los compromisos ontológicos y epistemológicos, así como, los métodos de investigación de la matemática son por lo menos altamente similares a los de las distintas ciencias naturales.

Por su parte, para la tendencia dualista, la epistemología de la matemática es independiente a la epistemología de las ciencias naturales. En este caso, el lenguaje matemático utilizado para el diseño de las teorías físicas matematizadas, tan solo sirve como un instrumento metodológico[8] que poco o nada tiene que ver con la realidad física por explicar.

La idea de una independencia epistemológica está basada en la defensa del rasgo apriorista de la justificación de los enunciados matemáticos, a diferencia de la justificación *a posteriori* del resto de los enunciados científicos. Por esta razón, el conocimiento de la realidad matemática dependerá de una epistemología independiente a cualquier teoría del conocimiento de objetos fundada en la percepción —en el caso de reconocer en algún sentido la ontología matemática. El dualista, en este caso tendrá el reto de, por una parte, sostener la independencia de la validez matemática de la experiencia y, al tiempo, reconocer su gran utilidad para llegar a explicaciones y predicciones de fenómenos físicos.

Ejemplifiquemos ahora la tensión entre tesis monistas y dualistas a partir de algunos programas de investigación en filosofía de las matemáticas.

[8] Carnap suscribe la idea del carácter auxiliar de las matemáticas en la ciencia física como uno de los rasgos básicos de la matemática y como un rasgo general de la concepción dualista en matemáticas. De acuerdo con Carnap, uno de los aspectos más importantes por atender en la ciencia física es la explicación de una base empírica con consistencia metodológica. Las matemáticas ofrecen a la física tal consistencia (Carnap, 1935, 1956).

Algunos casos clásicos y contemporáneos en Filosofía de las Matemáticas

Monismo platonista: Gottlob Frege y Stewart Shapiro

Gottlob Frege

Un ejemplo clásico del monismo matemático es el realismo-descriptivista[9] propuesto por Frege en (1884). A la base de esta propuesta se encuentra la idea de considerar la existencia de los objetos matemáticos análoga y similarmente a la existencia de los objetos físicos. Esta semejanza no resulta de homologar las propiedades intrínsecas de ambos tipos de objetos, sino al considerar Frege el carácter existencial de los objetos matemáticos y físicos como partes constituyentes de dos realidades genuinas. Cada una de estas realidades será el objeto de descripción, de la matemática por una parte y, de las ciencias empíricas por otra. Para Frege (1884) las matemáticas y el resto de las ciencias se diseñan similarmente en función de sus rasgos estructurales: *en los trabajos de los matemáticos se encuentran expresiones totalmente similares [a los trabajos de las ciencias empíricas]* (Frege, [1884], 1972, p. 109).

[9] Uno de los problemas más importantes de la filosofía de las matemáticas puede enunciarse en su forma más general de la siguiente manera: ¿qué tipo de relación hay entre las matemáticas y el mundo que nos rodea? Alemán (2001) señala dos grandes tipos de concepciones sobre la naturaleza de la matemática y la realidad: las concepciones descriptivistas y las concepciones no-descriptivistas (o constructivistas).

Tomaremos de Alemán (2001) la noción de descriptivismo para caracterizar los programas platonistas de G. Frege y S. Shapiro. Tomaremos el término de no-descriptivismo para el programa empirista radical de P. Kitcher. En términos generales, los descriptivistas suponen que las matemáticas describen la realidad. Pero, según sea el ámbito de realidad que pretenden describir, este tipo de concepción se divide, en lo que denominado platonismo descriptivita o empiristas. Sin embargo, este último caso es distinto al empirismo radical de Kitcher el cual es un empirismo consistente con un constructivismo en matemáticas.

En consistencia con nuestra distinción monismo/dualismo, rápidamente para la perspectiva platonista-descriptivista las matemáticas no describen la realidad empírica sino una realidad abstracta escindida de la primera (vertiente dualista del realismo matemático). Por su parte, para la perspectivas empirista clásica las matemáticas no describen una realidad escindida, super-puesta a la realidad espacio-temporal, sino describen una sola realidad con propiedades que van de las más concretas a las más abstractas y generales (vertiente monista en matemáticas).

Por supuesto, como se ha mencionado, el realismo matemático de Frege también tiene una vertiente dualista epistemológica. Frege considera la aplicación de las matemáticas a las otras ciencias un aspecto de particular importancia para el problema general de los fundamentos de las matemáticas.

A continuación ilustraremos la respuesta fregiana sobre el tema de la aplicabilidad matemática a partir de algunas secciones de la "*Einleitung*" y de la sección 38 de *Die Grundlagen der Arithmetik*. El análisis de estas secciones será suficiente para mostrar tres aspectos de este programa.

En primer lugar, la ontología matemática existe así como las mesas, las sillas y los árboles existen en el mundo físico. La realidad matemática es una realidad abstracta no perceptible por los sentidos y por tanto distinta a la realidad espacio-temporal. Particularmente la ontología de la aritmética está constituida por objetos abstractos, por ejemplo, los números. Pese a la distinta naturaleza de los objetos matemáticos y los objetos físicos existe una relación entre ellos. En segundo lugar, el conocimiento de los objetos abstractos es parte de la investigación científica de las matemáticas. La ciencia matemática puede definirse de manera análoga al resto de la ciencia considerando sus objetivos disciplinares y la existencia de sus objetos de aplicación intencional. En tercer lugar, los dos aspectos anteriores serán el esfuerzo de Frege por conciliar al interior de su realismo matemático, la tesis monista sobre la existencia de los objetos matemáticos, con las tesis dualista sobre la distinta naturaleza entre realidad matemática y realidad empírica y, ambos aspectos, con la tesis de la fundamentación de la cientificidad matemática a partir de su rasgo aplicativo a la realidad física.

En términos generales el realismo matemático es una perspectiva sobre el estatus de los objetos matemáticos y la objetividad de la verdad matemática. Por una parte, los objetos matemáticos existen independientemente de la mente de los matemáticos y de sus teorías. En cuanto a la verdad matemática, ésta es objetiva y se mantiene también independientemente de mente y lenguaje. En términos de Stewart Shapiro: *…that* *mathematical objects exist independently of the mathematician and…mathematical truth is objective, holding (where it does) independent of the mind and language of the mathematical community* (*Cfr*. Shapiro, 1997, p. 8).[10] De acuerdo con Frege (1884) los objetos de las matemáticas son abstractos, eternos e independientes de nuestra capacidad cognoscitiva, sensaciones e imágenes mentales:

> ...mit Gefühlen hat die Arithmetik gar nichts zu schaffen. Ebensowenig mit inner Bildern, die aus Spuren früherer Sinneseindrücke zusammengeflossen sind. Das Schwankende und Unbestimme, welches alle diese Gestaltungen haben, steht im starken Gegensatze zu der Bestimmtheit und Festigkeit der mathematischen Begriffe und Gegenstände (Frege, [1884], (1968), pp. V-VI).

> ...la aritmética no tiene absolutamente nada que ver con las sensaciones. Tampoco con las imágenes mentales que confusamente surgen de impresiones sensoriales anteriores. Lo indeciso e indeterminado que ostentan todos estos desarrollos entra en fuerte contraste con la determinación y solidez de los conceptos y objetos matemáticos (Frege, [1879,84], 1972, p. 110).[11]

Si bien en la base de esta consideración está el intento por demostrar la analiticidad de las propiedades matemáticas, esto es, las proposiciones matemáticas o bien no dependen de la experiencia y presuponen únicamente las leyes generales de la lógica en conjunción con definiciones para su demostración, o bien son axiomas lógicos; también en este pasaje la ontología matemática aparece como un conjunto de objetos abstractos cuya realidad es independiente de nuestra experiencia y nuestras teorías. El pasaje ilustra claramente el compromiso realista de Frege en su concepción de las matemáticas.

[10] "…aquellos objetos matemáticos existen independientemente del matemático y …la verdad matemática es objetiva, manteniéndose [ambas cosas] (donde esto hace) de manera independiente de la mente y el lenguaje de la comunidad matemática" (*Cfr*. Shapiro, 1997, p. 8). La traducción es responsabilidad mía.

[11] Frege, G. [1879] (1972), *Conceptografía*, *Los Fundamentos de la Aritmética*. *Otros Estudios Filosóficos*. Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

En la sección 38 de *Die Grundlagen*, Frege se refiere a los "números" como objetos propios a la aritmética y, al mismo tiempo, considera a tal ontología de interés para la investigación científica de las matemáticas:

> ...Man sagt ‚die Zahl Eins" und deutet mit dem bestimmten Artikel einen bestimmten, einzelnen Gegenstand der wissenschaftkichen Forschung an. Es giebt nicht verschiedene Zahlen Eins, sondern nur Eine (*Cfr*., Frege, [1884], (1968), p. 49).
>
> ...se dice "el número uno", y con el artículo determinado se indica un objeto peculiar, determinado, de la investigación científica [matemática]. No hay diversos números uno, sino uno solo (*Cfr*. Frege, [1884], (1972), p. 151).

En la *Einleitung* señala:

> …debemos reconocerlo, hay en el concepto de número una estructura mucho más fina que en la mayoría de los conceptos de las restantes ciencias, si bien éste es uno de los conceptos aritméticos más simples (Frege, [1884], (1972), p. 109).

Para Frege entonces la aritmética es una ciencia entre ciencias. Como toda ciencia, la aritmética tiene sus propios objetos de conocimiento, sus objetos de investigación. Esta postura fregeana en torno a la existencia de los números como objetos abstractos y, a la posibilidad de conocerlos, constituye el centro de sus tesis platonistas-monistas.

De acuerdo con Penélope Maddy (1990)[12] comentando el realismo matemático, las matemáticas son las ciencias de los números, de los conjuntos y de las funciones en el mismo sentido en que la ciencia física estudia los objetos físicos ordinarios:

> Realism, then…, is the view that mathematics is the science of numbers, sets, functions, etc., just as physical science is the study of ordinary physical objects, astronomical bodies, subatomic particles, and so on. That is, mathematics is about these things, and the way these things are is what makes mathematical statements true or false (*Cfr*., Maddy, (1990) *Realism in Mathematics*, p. 2).

[12] Maddy, P. (1990), Realism in Mathematics, Oxford University Press, New York.

> El Realismo, entonces…, es la perspectiva que hace de las matemáticas la ciencia de los números, de los conjuntos, de las funciones, etc., tal y como la ciencia física es el estudio de los objetos físicos ordinarios, cuerpos astronómicos, partículas sub-atómicas, etc. De esta manera, las matemáticas estudian esas cosas [números, conjuntos, funciones] y el sentido de lo que estas cosas son es lo que hace verdaderas o falsas a los enunciados matemáticos.[13]

La observación de Maddy respecto al realismo matemático es claramente una extensión, o si se prefiere una observación consistente con la manera fregiana de entender la realidad y la ciencia matemática. De acuerdo con Frege entonces, por una parte, los objetos abstractos de la aritmética, por ejemplo, los números, las funciones, los conjuntos, existen de manera independiente a las teorías y a las creaciones mentales de los científicos y, por otra, supone la existencia de estos objetos análoga a la existencia de los objetos físicos.

La definición análoga de la ontología matemática respecto a la ontología física no hace de los objetos abstractos entidades cuasi-sensibles condicionados espacio-temporalmente, sino enfatiza en la posibilidad de sostener la existencia de ambas ontologías. La realidad de los objetos matemáticos puede ser tan evidente como la realidad de los objetos físicos aun cuando difieran en el tipo de evidencia. La fundamentación básica de la existencia de los objetos sensibles es su carácter espacio-temporal, esto es, la propiedad de ser en principio objetos de experiencia, por su parte, la evidencia de la existencia de los objetos abstractos está dada por la condición lógica de su prueba o su demostración.

En otras palabras, es posible acceder a los objetos físicos como a los objetos matemáticos. Solo que las formas de acceso son distintas. En el primer caso, los objetos físicos pueden conocerse y justificarse a través de la experiencia, en el segundo caso, los objetos matemáticos pueden conocerse a través de la lógica:

> So sehr sich nun die Mathematik jede Beihilfe vonseiten der Psychologie verbitten muss, so wening kann sie ihren engen

[13] Esta traducción es responsabilidad mía.

> Zusammenhang mit der Logik verleugnen...Soviel wird man zugeben, dass jude Untersuchung ubre die Bündigkeit einer Beweisfür order die Berechtigung einer Definition logisc sein muss (*Cfr*., Frege, [1884], (1968), p. IX).
>
> La matemática no debe pedir ninguna ayuda de parte de la psicología, como tampoco desconocer su estrecha conexión con la lógica...Se tiene que conceder que una investigación sobre la precisión de una prueba o sobre la justificación de una definición, debe ser algo lógico (*Cfr*. Frege, [1884], (1972), p. 112).

En este caso, es posible entonces acceder al objeto abstracto "0" (cero) considerándolo como la cardinalidad de un conjunto de todos aquellos individuos que no son idénticos a sí mismos. Este tipo de pruebas se basan en la noción de equinumericidad y relación biunivoca (*Cfr*., Frege, [1884], (1972), secc. 70 y ss, pp. 176-179).

Para Frege la posibilidad de acercarse al conocimiento de una realidad abstracta o sensible es una propiedad compartida por toda ciencia. Un objetivo epistemológico común entre las ciencias es la búsqueda de la verdad y la justificación de sus enunciados. El conjunto de verdades de cada ciencia quedan expresadas mediante enunciados cuyo sujeto gramatical cae bajo la extensión de determinado concepto. Esto sucede tanto en el caso de las matemáticas como en el resto de la ciencia. Siguiendo a Maddy (1990) comentando al realismo, la correspondencia entre la verdad de un enunciado y el hecho de que los objetos sean como se afirman que son, forma parte del realismo matemático.[14]

Evidentemente estamos frente a un planteamiento monista del realismo matemático. Las matemáticas y las ciencias empíricas epistemológicamente son similares. En ambos casos se cuentan con estructuras teóricas parecidas, con objetivos disciplinarios semejantes, con objetos de aplicación intencional, con formas adecuadas de acceder a sus objetos de

[14] Como se ha señalado, una de las consecuencias de este realismo será la independencia de los objetos matemáticos y las verdades de nuestro conocimiento. Al ser los objetos matemáticos independientes de la realidad sensible y de la realidad mental, también serán independientes de nuestras construcciones teóricas sobre ellos. Cualquier enunciado verdadero sobre un objeto, resulta verdadero independientemente de su formulación en el contexto de una teoría e independientemente de si contamos con los medios necesarios para su verificación.

aplicación. Sin embargo, este monismo colapsa en una respuesta sobre la aplicación matemática a la ciencia empírica, que en principio, parece derivarse de una concepción dualista entre realidades distintas. ¿Cómo se relacionan, entonces, las matemáticas con las ciencias empíricas si tales ciencias refieren a realidades escindidas?

Si bien Frege afirma la naturaleza distinta de los objetos matemáticos y los objetos físicos, también refiere no solo al carácter aplicativo de las matemáticas a las otras ciencias, sino a la importancia de armonizar este aspecto para ofrecer una respuesta acerca de la cientificidad matemática. En estas circunstancias será donde Frege intenta conciliar su monismo matemático con la tesis dualista de la aplicación.

Las matemáticas son una ciencia descriptiva más. La única diferencia entre ella y las ciencias naturales es el carácter abstracto de sus objetos y el carácter *a priori* de la justificación de sus enunciados. Estas condiciones hacen de la aplicabilidad matemática no solo un trabajo epistemológico posible entre estructuras cualitativamente parecidas, sino una propiedad importante para la definición misma del trabajo matemático. En ésta línea:

> …no fue Frege quien formuló los axiomas de Peano, o presentó la teoría del número como un sistema axiomático autosuficiente; por el contrario, él insistió en que los números naturales pueden ser explicados solo mediante su uso como números cardinales en proposiciones empíricas, …y pensaba que los números reales deben, igualmente, ser explicados por medio de una visión general de concepción de medida de la magnitud de una cantidad (Dummett, 1981, p. 30).[15]

Si lo anterior es correcto, para Frege parte de los fundamentos de la aritmética está en la relación entre conceptos matemáticos y su aplicación en proposiciones empíricas. No es posible en éste caso, si Dummett tiene razón siguiendo a Frege, tener una explicación

[15]Dummett, M., (1981) "*Frege and Wittgenstein*" en Block, (ed.), *Perspeclives on the Philosophy of Wittgenstein*, B. Blackwell, Oxford.

suficiente del concepto de número natural, si a su vez, no se considera como en el caso de los cardinales, su aplicación en proposiciones empíricas cuya referencia serán objetos físicos. La aplicación matemática parece necesaria en las respuestas sobre la referencia y conocimiento de los objetos matemático. Como se ha señalado anteriormente, Frege llega a una explicación de los números cardinales preguntándose por una aplicación matemática: *¿qué significa 'cinco' en contextos como 'tengo cinco dedos en mi mano derecha'?* (Carnap, R., [1963] (1991), p. 93).

De esta manera, Frege concilia la tesis monista sobre la existencia de los objetos matemáticos, con la tesis dualista sobre la diferente naturaleza entre realidad matemática y realidad empírica y, ambos aspectos, con la tesis en torno al establecimiento de la cientificidad matemática a partir de su propiedad aplicativa. La propiedad aplicativa de la matemática permite alcanzar una verdadera comprensión no solo de circunstancias físicas sino de conceptos básicos de la aritmética como es el caso del concepto de 'número'.

Pero, bajo estas condiciones ¿cuál es la definición filosófica de la aplicación según Frege?, ¿cuál es el funcionamiento de la aplicación?, ¿cuáles son las propiedades específicas de la aplicación? Falta una respuesta a estas preguntas. Por lo que aun con los resultados obtenidos, la consideración de Dummett (1981) se mantiene:

> Estamos todos tan acostumbrados al hecho de la existencia de algo como la Matemática aplicada que no nos detenemos para advertir que es una idea extraña el que una teoría -o una proposición- pueda ser 'aplicada' a alguna otra materia. No quiero con esto negar que la Matemática tenga aplicaciones; sólo sostengo que, hasta que podamos decir en qué consiste una aplicación, el recurso a la aplicación de la Matemática no puede ayudarnos filosóficamente… (Dummett, *Op. Cit*., p. 30).

Stewart Shapiro

En las filas de un platonismo matemático los trabajos estructuralistas de Stewart Shapiro (1997) y (2000) claramente ilustran también una tendencia monista ontológica y epistemológica en matemáticas. A continuación, a partir de algunos pasajes de (1997) señalaremos cómo Shapiro define el estatus ontológico de los objetos matemáticos a partir de su noción de 'estructura'. Posteriormente, veremos cómo a partir de esta noción se pueden homologar, de acuerdo con el monismo shapiriano, estructuras matemáticas con estructuras físicas y, cómo esta circunstancia condiciona una respuesta al problema de la aplicación matemática.

En la Introducción de *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology* Shapiro nos presenta su realismo estructuralista en filosofía de las matemáticas. El espíritu de su propuesta está condensado en 'las matemáticas son la ciencia de la estructura':

> The philosophy of mathematics to be articulated in this book goes by the name "structuralism," and its slogan is "mathematics is the science of structure." (*Cfr*. Shapiro, 1997, p. 5).
>
> La filosofía de las matemáticas articulada en este libro lleva el nombre de "estructuralismo", y su lema es "la matemática es la ciencia de la estructura."[16]

En general Shapiro (1997) intenta resolver una tensión epistemológica entre dos aspectos. En primer lugar, cuál es el significado de los enunciados matemáticos. En segundo lugar, cómo se explica el estatus de los objetos matemáticos y el significado de los enunciados de la matemática considerando la estrecha relación entre matemáticas y física en el lenguaje de la ciencia. A la base de estos dos aspectos se encuentra, tal y como hemos visto en Frege, el problema de cómo desde el realismo matemático es posible relacionar el mundo abstracto de las matemáticas con el mundo concreto de la física (dualismo epistemológico).

En general, de acuerdo con Shapiro los enunciados matemáticos y los enunciados del lenguaje ordinario y de la ciencia tienen un mismo comportamiento semántico y gramatical. Esto es, los científicos y los matemáticos la mayor parte del tiempo saben de qué hablan

[16] La traducción es responsabilidad mía.

cuando utilizan sus enunciados, conocen el significado de sus afirmaciones en todos estos casos.

En el caso de las matemáticas, el sujeto proposicional de un enunciado nombra a un objeto matemático. Este objeto mantiene relaciones con otros objetos de su tipo. La descripción matemática de estas relaciones y objetos constituyen estructuras abstractas y eternas. La ontología de las matemáticas está constituida entonces por estructuras, esto es, por un conjunto de relaciones de algún tipo entre objetos abstractos. De acuerdo con Shapiro, las estructuras albergan modelos trazados por relaciones entre números, funciones y conjuntos en un lugar determinado de tal realidad matemática o estructura:

> The subject matter of arithmetic is the *natural-number structure*, the pattern common to any system of objects that has a distinguished initial objects and a successor relation that satisfies the induction principle. Roughly speaking, the essence of a natural number is the relations it has with other natural numbers. There is no more to being the natural number 2 than being the successor of the successor of 0... (Shapiro, *Op. Cit*., pp. 5-6).
>
> El tema de la aritmética es la *estructura de número-natural*, el patrón común a cualquier sistema de objetos, que tiene un objeto inicial identificable y una relación de sucesión que satisface el principio de inducción. En términos generales, la esencia de un número natural es la relación que este tiene con otros números naturales. Solo hay que ser el número natural 2 para ser el sucesor del sucesor de 0 ...[17]

> A natural number, then, is a place in the natural-number structure. From this perspective, the issue raised by Benacerraf and Kitcher concern the extent to which a place in a structure is an *object*. This depends on how structure and their places are construed (Shapiro, *Ibidem*, pp. 6).
>
> Un número natural, entonces, es un lugar en la estructura de número-natural. Desde esta perspectiva, la cuestión planteada por Benacerraf y Kitcher se ha relacionado con el lugar que ocupa un *objeto* en una estructura. Esto depende de cómo se estructura y cómo sus lugares son construidos (se construyen)[18]

[17] La traducción es responsabilidad mía.

[18] La traducción es responsabilidad mía.

Para el realismo de Shapiro la ontología matemática es abstracta como lo es para todo platonista matemático. Pero, particularmente para éste filósofo, la naturaleza de tal ontología se explica en términos de la posibilidad de axiomatizar sus relaciones. Si tal posibilidad existe, entonces existe la estructura como la forma general de un sistema:

> [...] defino un sistema como una colección de objetos con ciertas relaciones […] una estructura es la forma abstracta de un sistema, que resalta las interrelaciones entre los objetos, ignorando cualesquiera de sus rasgos que no afectan el cómo se relacionan con otros objetos en el sistema. (Shapiro, *Ibidem*, pp. 73–74).

> Los objetos matemáticos están ligados a estructuras y una estructura existe si hay una axiomatización coherente de ella. Una consecuencia aparentemente útil es que si es posible para una estructura existir, entonces existe. Una vez que estamos satisfechos de que una definición implícita es coherente, no queda ninguna duda de si caracteriza una estructura. (Shapiro, *Ibidem*, p. 134).

Si una estructura está coherentemente axiomatizada entonces existe. Si existe, entonces es la forma abstracta de un sistema, esto es, es la forma general de una colección de objetos con ciertas relaciones. Si lo anterior tiene sentido, surge la posibilidad de considerar diferentes tipos de realidad bajo la condición de axiomatizarse. De acuerdo con Shapiro, la realidad física constituida por un conjunto de sistemas físicos puede axiomatizarse o al menos parte de ella.

La realidad física es un sistema o un conjunto de sistemas que pueden estructurarse mediante una axiomatización. Según Shapiro, el lenguaje de la ciencia entrelaza enunciados matemáticos y físicos cuyos sujetos gramaticales serán por una parte, nombres de objetos abstractos en el caso de las matemáticas y, por otra, nombres de objetos físicos en el caso de la física. Pero, ¿cómo éste realismo matemático resuelve la relación entre objetos matemático y físicos sin ser inconsistente con su idea platonista de la esición entre la realidad física y la matemática?, ¿en qué sentido la estructura como una forma general de un sistema explica la aplicación entre estructuras de diferente naturaleza?

Shapiro es consciente de la necesidad por encontrar una forma de relacionar un universo abstracto, eterno, no-causal y escindido del mundo fenoménico como lo es el universo matemático, con los objetos de la ciencia y del lenguaje cotidiano. Desarrollar una propuesta al respecto implicará pronunciarse sobre el problema de la aplicación:

> The realist needs an account of the relationship between the eternal, acausal, detached mathematical universe and the subject matter of science and everyday language--the material world. How it is that an abstract, eternal, acausal realm manages to get entangled with the ordinary, physical world around us, so much so that mathematical knowledge is essential for scientific knowledge? (Shapiro, *Ibidem*, pp. 4-5).
>
> El realista necesita una consideración de la relación entre un universo eterno, no-causal e independiente como lo es el universo matemático con el tema de la ciencia y el lenguaje cotidiano —el mundo material. ¿Cómo es que un reino no-causal se las arregla para relacionarse con el mundo ordinario, físico que nos rodea, como de hecho ocurre, dado que el conocimiento matemático es esencial para el conocimiento científico?[19]

La clave de la respuesta estructuralista sobre el problema de la aplicación matemática la encontramos en la definición misma de estructura. Las estructuras son interesantes no solo por sus entidades constitutivas sino por el tipo de relaciones que mantienen entre ellas. De acuerdo con Shapiro, si bien existe una diferencia en la naturaleza de los objetos matemáticos y físicos, esta distinción ontológica, es independiente a la posibilidad de describir matemáticamente relaciones entre estructuras matemáticas y físicas en el seno de las teorías físicas particulares.

En la relación entre matemáticas y física deben distinguirse dos niveles de análisis. Por una parte está la reflexión ontológica sobre la naturaleza de diferentes realidades y, por otra

[19] La traducción es responsabilidad mía.

parte, está la reflexión epistemológica sobre la relación de estructuras matemáticas y físicas en el diseño de las teorías científicas.[20]

Como hemos señalado para el realismo matemático de Frege, tanto las matemáticas como las ciencias naturales tienen objetos de explicación. Las teorías matemáticas y físicas explican sus propios objetos. Los objetos de explicación matemática son reales pero no físicos. Los objetos de explicación de las ciencias naturales son espacio-temporales. En términos generales Shapiro suscribe estas condiciones. Particularmente, sostiene que el conjunto de verdades de cada ciencia está expresado por enunciados al interior de una estructura. Estos enunciados describen relaciones en un sistema con determinada forma general. Los objetos de explicación de la matemática y las ciencias empíricas serán entidades de diferente naturaleza pero, ambos, tendrán una determinada estructura.

En el caso de las ciencias matematizadas se relacionan estructuras matemáticas y estructuras físicas, como sistemas distintos en función de sus objetos de explicación, pero axiomatizables similarmente a través de una estructura (meta)matemática más general. La matemática axiomatiza sistemas físicos. ¿Cómo? De acuerdo con Shapiro la aplicación matemática manifiesta el orden matemático que los sistemas físicos tienen como parte intrínseca a su sistema. Y este orden queda develado a partir de una teoría meta-matemática cuyo propósito es fundar en un mismo lenguaje formal las relaciones entre sistemas matemáticos y físicos en tanto estructuras. Esta teoría matemática general es la teoría de modelos.

La semántica de la teoría de modelos es para Shapiro el marco explicativo no solo de la aplicación, sino del realismo matemático:

[20] De acuerdo con Shapiro es suficiente la posibilidad de axiomatizar coherentemente algún sistema (sea este matemático o físico) para atribuirle existencia. Nuestra posición sobre la aplicación se aleja de cualquier conclusión ontológica de este tipo. Desde nuestra perspectiva, de la aplicación matemática a la ciencia como una axiomatización coherente sobre un sistema físico no se sigue una respuesta sobre la naturaleza de los objetos matemáticos ni sobre su referencia, sino en todo caso, se sigue el carácter *a posteriori* del conocimiento de la homomorfía entre estructuras matemáticas y físicas. Este punto está considerado como uno de los puntos centrales del apartado III de esta investigación.

> I propose that model-theoretic semantics is the central frame of philosophical realism. In model theory, one specifies a range of the variables of a mathematical discourse--an ontology--and then one specifies extensions for the predicates and relations. This determines satisfaction conditions for the complex formulas of the language and truth conditions for the sentences, via the familiar program. The point here is that if realism is correct, then model theory provides the right picture, or "model," of how mathematical languages describe mathematical reality. According to realism, the relationship between language and reality is analogous to the relationship between a formal language and a model- theoretic interpretation of it. Of course, how we manage to "specify" the domains and the various extensions, without vicious circularity, is a major problem with realism (*Cfr*., Shapiro, *Ibidem*, p. 8).
>
> Yo propongo que la semántica de la teoría de modelos sea el marco central del realismo filosófico. En la teoría de modelos, uno especifica un rango de las variables de un discurso matemático —una ontología— y luego uno especifica las extensiones de los predicados y las relaciones. Esto determina las condiciones de satisfacción para las fórmulas complejas del lenguaje y las condiciones de verdad para los enunciados. El punto aquí es que si el realismo es correcto, entonces la teoría de modelos ofrece la imagen correcta, o "modelo" de cómo los lenguajes matemáticos describen la realidad matemática. De acuerdo con el realismo, la relación entre lenguaje y realidad es análoga a la relación entre el lenguaje formal y una interpretación modelo-teórica de ésta. Por supuesto, cómo nos las arreglamos para "especificar" los dominios y las diferentes extensiones, sin un círculo vicioso, es un gran problema para el realismo.[21]

La semántica de la teoría de modelos ofrece la posibilidad de describir una realidad física a partir de un lenguaje matemático especificando un rango de correspondencia entre los distintos predicados y relaciones matemáticas con aquellos predicados y relaciones físicas. De hecho, *the model-theoretic scheme be applied to mathematical and ordinary (or scientific) language alike, or else the scheme be rejected for both discourses* (Shapiro, *Ibidem*, p. 3).[22] La teoría de modelos entonces ofrece una imagen axiomática de la

[21] La traducción es responsabilidad mía.

[22] "…el esquema modelo-teórico [debe] ser aplicado tanto al lenguaje matemático como al lenguaje ordinario (o científico), o bien el esquema debe ser rechazado por los dos discursos". La traducción es responsabilidad mía.

estructura matemática anterior a cualquier sistema matemático o físico axiomatizado coherentemente. En este caso, la semejanza estructural entre matemáticas y física es anterior a la aplicación:

> ...Natural numbers are the places of this structure. Structures are prior to places in the same sense that any organization is prior to the offices that constitute it. The natural-number structure is prior to "6", just as "baseball defense" is prior to "shortstop" or "U.S. Government" is prior to "vice president" (Shapiro, *Ibidem*, p. 9).
>
> ... Los números naturales son los lugares de esta estructura. Las estructuras son anteriores a los lugares en el mismo sentido que cualquier organización es anterior a las oficinas que la constituyen. La estructura de número-natural es anterior a "6", así como "la defensa de béisbol" es anterior al "parador en corto" (shortstop) o "el Gobierno de EE.UU" es anterior al " vice-presidente".[23]

Adicionalmente Shapiro extiende su postura estructuralista a lo que él denomina otros aspectos de la matemática (Shapiro, 1997, III, Cap. 8). Estos aspectos corresponden a las ramificaciones y aplicaciones de las matemáticas a las ciencias como elementos imprescindibles al momento de ofrecer los fundamentos de la matemática —este es un punto de convergencia adicional con el platonismo fregiano. En este caso, Shapiro nuevamente señala su opinión sobre la utilidad de la teoría de modelos al servicio de las necesidades epistémicas y metodológicas de las ciencias físicas:

> Put simply, mathematics is applied when the theorist postulates that a given area of the physical world exemplifies a certain structure. In nearly all scientific theories, the structure of physical systems are modeled or described in terms of mathematical structures (Shapiro, *Ibidem*, p. 17).
>
> En pocas palabras, la matemática se aplica cuando el teórico postula que un área determinada del mundo físico ejemplifica cierta estructura. En casi todas las teorías científicas, la estructura de los sistemas físicos está modelada o descrita en términos de estructuras matemáticas.[24]

[23] La traducción es responsabilidad mía.

[24] La traducción es responsabilidad mía.

Una de las consecuencias de esta perspectiva es desvanecer la frontera entre matemáticas y ciencia natural del siguiente modo. De acuerdo con Shapiro, las matemáticas estudian estructuras independientemente de si estas son ejemplificadas o no. Esto es, su foco de estudio son las estructuras en sí mismas. Por su parte las ciencias empíricas se ocupan generalmente de lo que las estructuras ejemplifican es decir, modelos de sistemas físicos. El foco de estudio de estas ciencias es en términos de Shapiro lo estructurado: *there is not sharp distinction between the mathematical and the mundane. To speak of objects at all is to impose structure on the material world, and this is to broach the mathematical* (*Cfr*. Shapiro, *Ibidem*, p. 17).[25]

Como consecuencia de lo anterior es posible establecer, de acuerdo con Shapiro, una continuidad entre la semántica de las matemáticas y la semántica del lenguaje científico y ordinario. En todos estos casos, es posible encontrar una estructura para axiomatizar la forma general de sus relaciones. En esta línea, para el estructuralismo los objetos matemáticos, científicos y del lenguaje natural son lugares en estructuras.

A partir de estos elementos, el estructuralismo propuesto por Shapiro (1997) se consolida como una postura monista platonista de la aplicación y de la cientificidad matemática. Una de sus consecuencias principales y que explicita una forma particular de entender la homomorfía entre estructuras matemáticas y estructuras físicas es considerar a la aplicación como una manera de develar un orden matemático anterior a todo sistema axiomatizable, facilitando la misma aplicación. Bajo este presupuesto ontológico cobra sentido señalar una sola meta-teoría matemática, la teoría de modelos, para explicar diferentes sistemas relacionales sean estos matemáticos, científicos u ordinarios. Nuevamente la matemática es una ciencia descriptiva más donde la única diferencia entre ella y las ciencias naturales es que las estructuras matemáticas son abstractas y solo deductivamente definibles, *this is one*

[25] "…no hay distinción clara entre lo matemático y lo mundano. Para hablar de los objetos en lo absoluto se debe imponer la estructura sobre el mundo material, y esto se hace desde la matemática.". La traducción es responsabilidad mía.

source of the idea that mathematical knowledge is a priori (*Cfr*. Shapiro, *Ibidem*, p. 255)[26] en vez de *a posteriori*.[27]

Monismo no-platonista

Philip Kitcher

Toca el turno de revisar una concepción de la matemática y su aplicación de corte monista no-platonista. Para ilustrar este caso consideramos el empirismo matemático de Kitcher (1984). Ahora la fundamentación del conocimiento matemático recae en la percepción sensorial como el último eslabón de una cadena de generalizaciones inductivas:

> …my theory of mathematical knowledge traces the knowledge of the contemporary individual, through the knowledge of her authorities, through a chain of prior authorities, to perceptual knowledge acquired by our remote ancestors (Kitcher, 1984, p. 7).
>
> … mi teoría sobre el conocimiento matemático hace remontar el conocimiento de los individuos contemporáneos, a través del conocimiento de sus autoridades y mediante una cadena de autoridades previas, hasta el conocimiento perceptivo adquirido por nuestros ancestros (Kitcher, *Op. C*it., p. 7).

Para el empirismo radical la aplicabilidad matemática a la ciencia es una propiedad del conocimiento matemático entendido como una idealización teórica. Esta propiedad consiste

[26] "…esta es una fuente de la idea de que el conocimiento matemático es, *a priori…"*. La traducción es responsabilidad mía.

[27] Es importante dar constancia del hecho de que el programa estructuralista de Shapiro (1997) no es del todo compatible con la clasificación apriorista estándar del conocimiento matemático. En el Capítulo 4 de su trabajo de 1997 señala al apriorismo matemático como producto de una Teoría Causal del Conocimiento a la cual no se ajusta su propuesta sobre objetos matemáticos como *estructuras* abstractas y causalmente inertes. Sin embargo, también reconoce la gran influencia de los realistas ontológicos en su propuesta estructural, quienes mantienen la tesis apriorista del conocimiento matemático por tratarse no de objetos individuales ni concretos sino abstractos. Esto es, definibles solo deductivamente tal y como lo señala la definición de estructura matemática (*Cfr*., Shapiro, 1997, pp. 109-112 y pp. 255-256).

en supuestos órdenes estructurales ideales de sistemas físicos reales. La aplicación presupone una continuidad epistemológica entre el conocimiento matemático y físico pues no solo ambos casos se fundan en última instancia en la percepción, sino porque la aplicación parece dictar una ley matemática general que regula la extensión de predicados del lenguaje físico y matemático de la misma manera. Para el empirismo radical tanto el conocimiento matemático como el físico vincula la consistencia del lenguaje matemático con los aspectos de las prácticas científicas y la percepción:

> I construe arithmetic as an idealizing theory: the relation between arithmetic and the actual operations of human agents parallels that between the laws of ideal gases and the actual gases which exist in our world (Kitcher, *Ibidem*, p. 109).
>
> Interpreto a la aritmética como una teoría idealizada: la relación entre la aritmética y las operaciones efectivas de los agentes humanos [se explica] paralelamente, a la relación existente entre las leyes de los gases ideales y los gases reales que existen en el mundo.[28]

> I shall sometimes talk about the ideal operations of an ideal subject. That is not to suppose that is a mysterious being with superhuman powers. Rather, as I shall explain…,mathematical truths are true in virtue of stipulations which we set down, specifying conditions on the extensions of predicates which actually are satisfied by nothing at all but are approximately satisfied by operations we perform (including physical operations). This approach to idealizing theories will be very important to my account (Kitcher, *Ibidem*, p. 110).[29]
>
> A veces hablo de las operaciones ideales de un sujeto ideal. Esto no supone a un ser misterioso con poderes sobrehumanos. Más bien, como explicaré ..., las verdades matemáticas son verdaderas en virtud de las estipulaciones que establecemos, especificando las condiciones en las extensiones de los predicados que actualmente no son satisfechas por algo en absoluto, sino que son satisfechas aproximadamente por operaciones que nosotros realizamos (incluidas las operaciones físicas).

[28] La traducción es responsabilidad mía.

[29] Para Kitcher las operaciones reales son al final el fundamento de las operaciones ideales (matemáticas).

> Este enfoque de las teorías idealizadas será muy importante para mi consideración.[30]

Nos enfocamos en tres aspectos del programa empirista (1984) para identificar su propuesta sobre el problema de la aplicación matemática: el origen del conocimiento matemático, el carácter epistemológico compartido entre ciencias y matemáticas y la reconceptualización del apriorismo.

El origen del conocimiento matemático

El empirismo matemático propuesto por Kitcher (1984) es una ruptura radical con la concepción tradicional del conocimiento matemático. Particularmente, Kitcher polemiza tres importantes aspectos. En primer lugar, rechaza el apriorismo matemático clásico. En segundo lugar, pone en el centro de su propuesta la importancia epistemológica de los expertos para la evolución y desarrollo de las teorías matemáticas (*Cfr*, Kitcher, 1984, p. 4). En tercer lugar, al relacionar los dos puntos anteriores, pone particular atención en el desarrollo histórico de las matemáticas:

> ...the knowledge of one generation of mathematicians is obtained by extending the knowledge of the previous generation. To understand the epistemological order of mathematics one must understand the historical order. (Kitcher, *Ibidem*, p. 4-5).[31]

> ... el conocimiento de una generación de matemáticos se obtiene extendiendo el conocimiento de la generación anterior. Para entender el orden epistemológico de las matemáticas hay que entender el orden histórico.[32]

[30] La traducción es responsabilidad mía.

[31] Kitcher no reduce el carácter epistemológico de las matemáticas a su carácter histórico. En todo caso, el orden histórico constituye uno de los puntos epistemológicamente más relevantes para comprender la naturaleza del conocimiento matemático. Este aspecto aleja al empirismo, sin lugar a dudas, de la concepción realista y apriorista de las matemáticas.

[32] La traducción es responsabilidad mía.

De acuerdo con Kitcher el carácter histórico del conocimiento matemático está relacionado con un supuesto "conocimiento rudimentario adquirido por percepción" —*rudimentary knowledge acquired by perception*. La relevancia epistemológica del desarrollo histórico de las matemáticas está relacionada con la justificación perceptual de la verdad matemática, esto es, con componentes empíricos o pragmáticos fundantes del conocimiento matemático:

> ...I shall suppose that the knowledge of an individual is grounded in the knowledge of community authorities. The knowledge of the authorities of later communities is grounded in the knowledge of the authorities of earlier communities. Putting these two points together, we can envisage mathematical knowledge of someone at the present day to be explained by reference to a chain of prior knowers. At the most recent end of the chain stand the authorities of our present community...Behind them is a sequence of earlier authorities. However, if this explanation is to be ultimately satisfactory, we must understand how the chain of the knowers is itself initiated. Here I appeal to ordinary perception. Mathematical knowledge arises from rudimentary knowledge acquired by perception (Kitcher, *Ibidem*, p. 5).

> ... Supondré que el conocimiento de un individuo se basa en el conocimiento de las autoridades de la comunidad. El conocimiento de las autoridades de las comunidades posteriores se basa en el conocimiento de las autoridades de las comunidades anteriores. Poniendo estos dos puntos juntos, podemos prever que los conocimientos matemáticos de alguien, en el día de hoy, son explicados por referencia a una cadena de conocedores anteriores. En el extremo más reciente de la cadena están las autoridades de nuestra comunidad actual ... Detrás de ellos hay una secuencia de autoridades anteriores. Sin embargo, si esta explicación es en última instancia satisfactoria, debemos entender cómo inicia en sí misma la cadena de conocedores. Aquí hago un llamamiento a la percepción ordinaria. El conocimiento matemático surge de conocimientos básicos (rudimentarios) adquiridos por la percepción.[33]

El origen del conocimiento matemático coincide con el origen del conocimiento físico: la percepción. Posteriormente el conocimiento matemático se va heredando de una comunidad a otra a partir de una cadena de información lingüística entre las comunidades de expertos.

[33] La traducción es responsabilidad mía.

Las operaciones lingüísticas de la transmisión del conocimiento serán aspectos pragmáticos de la justificación de las verdades matemáticas, de su desarrollo y establecimiento. Así, la propuesta monista del empirismo kitcheano se basa justamente en la convergencia epistemológica inicial entre matemáticas y la ciencia centrada en su origen: una cadena de conocedores, cuyo último eslabón será la percepción.

Para el empirismo naturalista la matemática es una ciencia idealizada constituida por diferentes tipos de operaciones entre distintos tipos de objetos. Estas operaciones van desde los ejercicios lingüísticos necesarios para transmitir proposicionalmente el conocimiento matemático de una comunidad a otra, hasta operaciones racionales llevadas a cabo por la capacidad lógica de los matemáticos con la finalidad de diseñar sus teorías —*...the cognitive capacities distinctive of humans* (*Cfr*. Kitcher, *Ibidem*, p. 27). En este orden, la dimensión empírica es un insumo (*input*) epistemológico necesario para iniciar el desarrollo del conocimiento matemático. Como un paso adicional hacia el conocimiento matemático, la capacidad o cognición humana interviene con un conjunto de operaciones mentales para constituir intelectualmente a la matemática sin una nueva influencia empírica en el seno de una comunidad de expertos. (*Cfr*. Kitcher, *Ibidem*, pp. 3-12 y 25-27).

En un artículo posterior "*Mathematical Naturalism*" (1988)[34] Kitcher resume su posición:

> La materia última de las matemáticas es la forma en la cual los seres humanos estructuramos el mundo, realizando manipulaciones físicas crudas o a través de las operaciones del pensamiento... las matemáticas (son) como una colección de historias sobre las realizaciones de un sujeto ideal al cual le atribuimos poderes con la esperanza de iluminar las habilidades que tenemos para estructurar el ambiente que nos rodea (Kitcher, 1988, pp. 313ss, en Aspray y Kitcher, 1988).

La matemática es entonces un conocimiento en el que convergen, por una parte, operaciones humanas y, por otra, el orden histórico de su epistemología considerando la

[34] En Kitcher, P. y Aspray, W. (1988), History *and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press.

evolución de las comunidades de especialistas. La relación de ambos aspectos constituye el modelo explicativo y de justificación de las verdades matemáticas y del conocimiento científico en general.

Esta concepción empirista de las matemáticas es inaceptable para la tradición apriorista clásica del conocimiento matemático que va desde la analítica kantiana, pasando por el platonismo fregiano, la posición sintacticista de Carnap y el formalismo de Hilbert. Estas posturas coinciden en caracterizar la justificación de las verdades matemáticas al margen de cualquier aspecto de experiencia. Los realistas matemáticos consideran a las matemáticas una ciencia cuyos objetos de aplicación son abstractos y cuya naturaleza está escindida de todo compromiso empírico. Por su parte los empiristas lógicos y formalistas consideran a las matemáticas construcciones racionales libres siempre de toda influencia empírica o práctica. En todo caso desde el apriorismo clásico la justificación de los enunciados matemáticos será *a priori* desde el uso más ortodoxo de este concepto.

Por su parte, para el empirismo naturalista, el apriorismo clásico de las matemáticas es inapropiado al rechazar aspectos empíricos que están a la base de los fundamentos de la matemática. Kitcher establece nuevamente el carácter empírico de los orígenes de las matemáticas proponiendo una posición constructivista consistente con su empirismo:

> The constructivist position I defend claims that mathematics is a idealized science of operations which we can perform on objects in our enviroment. Specifically, mathematics offers an idealized descriptions of operations of collecting and ordering which we are able to perform with respect to any objects (Kitcher, 1984, p. 12).
>
> La posición constructivista que defiendo afirma que las matemáticas son una ciencia idealizada de operaciones que podemos realizar sobre los objetos de nuestro entorno. En concreto, las matemáticas ofrecen una descripción idealizada de las operaciones de recopilación y ordenamiento que somos capaces de realizar con respecto a cualquier objeto.[35]

[35] La traducción es responsabilidad mía.

En esta parte, como bien lo señala Barceló (2005)[36] comentando versiones sofisticadas de la epistemología humeana respecto a la naturaleza del conocimiento matemático, la propuesta de Kitcher en general está basada también en la idealización de nuestras capacidades de cálculo y la manipulación de símbolos. Con esto Barceló hace hincapié tanto en los rasgos operacionales o capacidades cognitivas del ser humano como aspectos característicos de la propuesta de Kitcher para explicar el conocimiento matemático en general, así como en una relación primaria de estas capacidades cognitivas con aspectos de la realidad empírica (*Cfr*. Barceló, 2005, p. 8).[37]

Un marco epistemológico compartido entre las ciencias y las matemáticas

El constructivismo y empirismo naturalista de Kitcher también será inconsistente con los compromisos ontológicos del platonismo. El empirismo es incompatible con asumir a las matemáticas como una ciencia descriptiva de una realidad constituida por entidades abstractas como los números y los conjuntos. También será incompatible con la idea platonista de la existencia de una realidad matemática independiente de la mente de los matemáticos y de sus teorías. Para el empirismo, la epistemología de las matemáticas es independiente de cualquier presupuesto ontológico sobre la naturaleza de entidades matemáticas y físicas.

¿En qué sentido las ciencias y las matemáticas comparten un marco epistemológico? Como hemos señalado en la sección anterior uno de los puntos de convergencia entre la justificación de los enunciados matemáticos y la justificación de los enunciados de las ciencias no matemáticas será la percepción. Analicemos con mayor detalle este aspecto.

---

[36] Barceló, A., (2005), "El reto epistemológico del naturalismo", en http://www.filosoficas.unam.mx/~abarcelo/El_Reto_Epistemológico.pdf; pp. 1-13

[37] Mas adelante comentamos un poco más al respecto.

El carácter pragmático e histórico del conocimiento matemático, así como la ruptura con el carácter apriorista clásico de las matemáticas no traza una distinción epistemológica entre matemáticas y ciencias naturales. Contrario a esto, incluye al conocimiento matemático y al conocimiento de las ciencias empíricas en una misma concepción general de conocimiento científico. Particularmente las matemáticas y las ciencias empíricas comparten tres aspectos epistémicos: i. un criterio pragmático fundacional de la ciencia en general; ii. el conocimiento matemático como el conocimiento físico no se explica en términos de un apriorismo clásico; iii. en ambos casos se enfatiza en el orden histórico del conocimiento. Con esto Kitcher ha propuesto lo más polémico sobre el conocimiento matemático. Lo ha caracterizado como normalmente caracterizamos el conocimiento *a posteriori*, a partir de una fase empírica, operaciones racionales, criterios pragmáticos y componentes históricos.

Si lo anterior tiene sentido estamos completamente justificados en afirmar del empirismo naturalista de Kitcher una propuesta monista no-platonista de las matemáticas basados en la idea de una explicación monista epistemológica de la justificación última de las verdades científicas.

Finalmente, Kitcher (1984) y (2000) no se pronuncia a favor de alguna explicación ontológica de los objetos matemáticos.[38] En los términos constructivistas de este empirismo parece innecesario postular la existencia de alguna clase de objetos abstractos por describir, pues una idealización teórica no tiene alguna función descriptiva de corte platonista:

> …[según el constructuctivismo] los enunciados lógicos matemáticos no describen ningún tipo de realidad (ni ideal ni natural) preexistente a la propia actividad constructiva del matemático. La función propia de los

[38] En todo caso, los trabajos de Kitcher, (1978), "*Theories, theorists and theoretical change*" y (1993), El avance de la ciencia. Ciencia sin leyenda, objetividad sin ilusiones, dedicados en gran parte a desarrollar una teoría de los potenciales de referencias, podrían tener algún tipo de compromiso con la estructura profunda o naturaleza de los objetos matemático, aunque centralmente les interesa explicar la continuidad y el cambio conceptual en la ciencias.

Kitcher, P., (1978), "*Theories, theorists and theoretical change*" en *Philosophical Review*, Vol. 87.

Kitcher, P., [1993] (2001), El avance de la ciencia. Ciencia sin leyenda, Objetividad sin ilusiones. Universidad Autónoma de México, México.

> enunciados lógico-matemáticos no es describir sino constituir formas que pueden ser empleadas para la descripción de la realidad. Pero la realidad a la que se alude aquí no es la realidad ideal que pretende describir el platónico (Alemán, 2001, p. 17).

De acuerdo con Barceló, la propuesta de Kitcher se enlista en la perspectiva Humeana de la epistemología de las matemáticas, esto es: *El Humeanismo,..., requiere mas bien una historia epistemológica en la cual el conocimiento matemático se funda en conocimientos particulares, sin mediación de objetos universales alguna* (*Cfr*. Barceló, 2005, p. 7). A partir de estas posturas parece consistente considerar la obtención del conocimiento matemático del número "5" (cinco) a partir de la percepción, por ejemplo, de los dedos de las manos, sin comprometernos en algún sentido con una intuición intelectual de objetos abstractos, de objetos matemáticos. Siguiendo la observación de Barceló (2005), Philip Kitcher (1984) es, sin duda, una versión sofisticada de la epistemología matemática humeana.[39]

Paráfrasis y comentarios de una reconceptualización del apriorismo

Kitcher (2000) en sus primeras páginas señala su oposición a la justificación *a priori* del conocimiento matemático en términos clásicos (Kitcher, 2000, p. 65). Todos los argumentos en contra del apriorismo clásico —señala a pie de página de esta sección— se han considerado ya en (1984).

Kitcher (2000) coparte la caracterización clásica de la aprioridad como un predicado epistemológico aplicable a instancias de conocimiento. La particularidad de su argumento es considerar la noción de "verdad *a priori*" como una derivación de una proposición *que*

[39] No existen procesos intelectuales y de percepción dirigidos a la captación de objetos matemáticos, más bien la perspectiva del conocimiento matemático como una idealización debe girar hacia las situaciones empíricas y conceptuales de las prácticas científicas en activo como la condición generadora de dicho conocimiento.

podría ser conocida *a priori*. El propósito de Kitcher es distinguir —según él— el carácter *a priori* de una verdad, de la propiedad de ciertos enunciados al expresar una verdad lógica o al expresar una verdad explicable conceptualmente:

> …with the conception of *a priori* truth run the risk of conflating apriority with something quite different – the property of being a logical truth, or a proposition whose truth can be explained by features of concepts… (Kitcher, 2000, pp. 65-66).
>
> ... con la concepción de una verdad *a priori* se corre el riesgo de confundir apriorismo con algo muy diferente - la propiedad de ser una verdad lógica, o una proposición cuya verdad pueda ser explicada mediante rasgos de conceptos ...[40]

A partir de la distinción anterior Kitcher intenta renovar el concepto de aprioridad en los siguientes términos.

La consideración de un conocimiento *a priori* está inmersa (*embedded*) en un enfoque psicologista. De acuerdo con este enfoque podemos considerar un estado de creencia verdadera como un estado de conocimiento si depende de los procesos correctos causales de tal estado:

> If a state is produced by the right kind of causal process, so that it is a state of knowledge, then I say that the process is a *warrant* for the belief (Kitcher, *Op. Cit*., p. 66).
>
> Si un estado es producido por el tipo correcto de proceso causal, entonces este será un estado de conocimiento, considero entonces que el proceso es una garantía para la creencia.[41]

La garantía (*warrants*) de creencia es una versión del confiabilismo (*reliabilism*): las garantías (*warrants*) pertenecen a tipos de procesos en cuya regularidad producen creencias verdaderas. De acuerdo con Kitcher la definición de garantías (*warrants*) no incluye —ni se

[40] La traducción es responsabilidad mía.

[41] La traducción es responsabilidad mía.

requiere incluir— "razones" de un agente epistémico a las cuales puede apegarse para la justificación de su creencia. En este sentido un conocimiento *a priori* es un conocimiento producido por tipos especiales de procesos de garantía *a priori* (*a priori warrants*).

De acuerdo con Kitcher, la mayoría de los aprioristas clásicos permiten, aunque desconocen, la posibilidad de tener una justificación *a priori* de ciertos enunciados en cuyo contenido existan conceptos de experiencia, esto es, conceptos provenientes de la experiencia. En consecuencia, un agente epistémico puede tener un conocimiento *a priori* de *p* si es un ser de experiencia suficientemente rico para entender *p*. Esto es, el agente tuvo la experiencia de *p* adquiriendo los conceptos necesarios para entender *p*:

> Hence I explicate *a priori* knowledge by reference to the notion of an experience's being *sufficiently rich for p*, that is that someone who had that experience could acquire the concepts needed to entertain *p* (*Cfr*. Kitcher, *Ibidem*, pp. 66-67).
>
> Por lo tanto, explico conocimiento *a priori* con referencia a la noción de un ser de experiencia *suficientemente rico para p*, esto es, alguien que tuvo esa experiencia podría adquirir los conceptos necesarios para entender *p*.[42]

Si tiene sentido lo anterior, *X* conoce *a priori* que *p syss X* conoce que *p* y el conocimiento de *X* de que *p* fue producido por *ά* procesos que son una garantía *a priori* (*a priori warrant*) para *p*.

Con '*ά*' se señala una garantía *a priori* (*a priori warrant*) para las creencias de *X* de que *p* solo en el caso de que *ά* sea un proceso tal que para cualquier secuencia de experiencias sea suficientemente ricas para *X* para *p*, esto es:

a. algunos procesos del mismo tipo pudieron producir en *X* una creencia de que *p*;

[42] La traducción es responsabilidad mía.

b. si un proceso del mismo tipo produjo en *X* una creencia de que *p*, entonces esta podría garantizar a *X* en creer que *p*;
c. si un proceso del mismo tipo produjo en *X* una creencia de que *p*, entonces *p*.

Evidentemente la definición del predicado 'ser *a priori*' en términos de *a priori warrants* —como el propio Kitcher lo considera— no solo confronta tesis anti-psicologistas de la aprioridad, sino adicionalmente, permite incluir naturalmente el componente de la experiencia en la definición clásica de *a priori*. La verdad de '*X* conoce *a priori* que *p*' supone la defensa de una tesis epistemológica sobre la existencia de contenido psicológico previo en el conocimiento *a priori*.

Sea plausible o no una definición de *a priori* en estos términos lo importante para nosotros es observar en esta reformulación una forma distinta de explicar la continuidad epistemológica entre matemáticas y ciencias naturales. Ahora, esta continuidad puede explicarse desde la naturaleza *a priori* de la justificación de los enunciados matemáticos. Una consecuencia de esta precisión será eliminar la distinción clásica *a priori*/*a posteriori* como una distinción totalmente exhaustiva y excluyente de los enunciados científicos. La justificación *a priori* de los enunciados matemáticos considera conceptos provenientes de la experiencia.

Curiosamente, el papel de la experiencia en la justificación de enunciados, los principios causales, el criterio pragmatista y los componentes históricos, como aspectos explicativos del conocimiento matemático —comentados en las dos secciones anteriores— están resguardados en la noción misma de *apriorismo warrants* kitcheano.

Con todo lo dicho hasta ahora la aplicación matemática según esta propuesta monista-empirista es una idealización estructurante de la realidad física:

> ... las matemáticas (son) como una colección de historias sobre las realizaciones de un sujeto ideal al cual le atribuimos poderes con la esperanza de iluminar las habilidades que tenemos para estructurar el

> ambiente que nos rodea (Kitcher, 1988 en Aspray y Kitcher, 1988, pp. 313 ss.)

Para el empirismo constructivista no hay necesidad de postular dos tipos de realidad habitadas por diferentes tipos de objetos. No es necesario postular la existencia de objetos fuera del espacio-tiempo a fin de dar cuenta de la naturaleza de la matemática. Si los enunciados matemáticos no funcionan como descripciones no hace falta postular ninguna clase de objetos por describir.

Como la matemática no es una ciencia descriptiva de una realidad abstracta sino una manera de construir formas útiles para estructurar la realidad que nos rodea, y al ser una ciencia epistemológicamente similar a las ciencias físicas, la aplicación matemática constituye la posibilidad constructiva de la realidad en general. El espíritu constructivista de las matemáticas sobre el mundo natural es la razón empirista radical por la cual puede justificarse el uso de las matemáticas para los científicos.

Dualismo matemático

Rudolf Carnap y el positivismo lógico

El positivismo lógico es la fuente clásica del dualismo matemático. Rudolf Carnap es uno de los pioneros de esta tradición en filosofía de la ciencia. Una alternativa para escudriñar los compromisos dualistas de este filósofo respecto a la naturaleza de la aplicación matemática es su explicación de teoría científica. Será en este tema fundamental para la filosofía de la Ciencia donde Carnap distinguirá radicalmente la epistemología de las verdades matemáticas de la epistemología de las verdades físicas.

A continuación revisaremos cuáles fueron las motivaciones filosóficas del positivismo y empirismo lógico para trazar distinciones entre sistemas axiomáticos (teorías matemáticas) y sistemas axiomáticos interpretados (teorías físicas). Este análisis nos conducirá a una versión dualista anti-descriptivista de las matemáticas y a una forma particular de entender la aplicación matemática como dispositivo auxiliar en el diseño de teorías científicas.

El proyecto filosófico del Círculo de Viena fue la cuna de la perspectiva estándar de la ciencia.[43] Las posturas generales de este Círculo son claramente contrarias a la metafísica. Muestra de ello es la herencia logicista del positivismo y empirismo lógico en sus diferentes versiones.[44]

De acuerdo con el positivismo lógico, sobre todo para las posturas iniciales, las hipótesis metafísicas al no ser contrastables empíricamente se consideraron expresiones lingüísticas estériles desde el punto de vista científico. Carnap en 1931[45] y 1935 al respecto escribió:

> …*en el campo de la metafísica* el análisis lógico ha conducido al resultado negativo de que las pretendidas proposiciones de dicho campo carecen totalmente de sentido (Carnap, [1931], en Ayer, 1965, p.66).[46]

---

[43] Los filósofos de la ciencia, hasta nuestros días, no han llegado a un acuerdo con lo que respecta a los *criterios de demarcación de la ciencia*. El Círculo de Viena, la escuela falsacionista popperiana y muchas otras tradiciones han intentado a lo largo del siglo XX si bien no dar una definición última de la ciencia, sí establecer criterios para identificar lo científico de lo que no lo es. En este Capítulo, al referirnos a la perspectiva estándar de las teorías científicas apuntamos a aquellos criterios y concepciones que de acuerdo con esta tradición nos permiten ubicar el discurso científico y explicar a las teorías científicas. Cabe señalar, que con el segundo momento del Círculo de Viena —emigración de varios de los miembros del Círculo a Estados Unidos— es cuando la perspectiva estándar toma nombre y se consolida. En gran parte de sus trabajos se mantienen los estándares lógicos y verificacionistas de la primera etapa para evaluar el lenguaje científico en general.

[44] El positivismo lógico es una corriente filosófica iniciada en el Círculo de Viena. Este Círculo fue un grupo de filósofos y científicos dispuestos a reforzar el análisis de la ciencia con los recursos de la lógica moderna. Si al lector le interesa conocer los trabajos principales de los miembros del Círculo puede remitirse a las siguientes publicaciones: *Erkenntnis* (en 1930 salió por primera vez esta revista bajo la dirección de Carnap y Reichenbach) , *Journal of Unified Science* (Neurath trató de continuar la publicación de *Erkenntnis* con esta publicación después de 1938) , *International Enciclopedy for the Unified Science* (esta enciclopedia vio la luz en Estados Unidos bajo la dirección de Carnap a partir de su residencia en Chicago, 1936). Una recopilación accesible en inglés y en español de estos trabajos está en: Ayer, A.J. (ed.) (1959), *Logical Positivism*, Free Press / Allen &Unwin, Glencoe-Londres. Versión en castellano Ayer A.J. (ed.) (1965), El positivismo lógico, Fondo de Cultura Económica, México. También pueden consultarse: Kraft, V. (1966), El Círculo de Viena, Taurus, Madrid; y Weinberg, J.R. (1959), Examen del positivismo lógico, Aguilar, Madrid.

[45] Carnap, R. (1931) "*Überwindung der Metaphysik durch Logische Analyse der Sprache*" en *Erkenntnis*, 2, pp. 219-241.

[46] Carnap, R. (1931) "*Überwindung der Metaphysik durch Logische Analyse der Sprache*" en Ayer, A.J., (eds.) (1965), El positivismo lógico, Fondo de Cultura Económica, México. pp. 66.

Carnap (1935):

> A la metafísica (en el sentido que le damos a esta palabra [...todos aquellas proposiciones que afirman representar conocimientos acerca de algo que se encuentra sobre o más allá de toda experiencia, por ejemplo acerca de la verdadera esencia de las cosas, acerca de las cosas en sí mismas...] pertenecen las doctrinas principales de Spinoza, Schelling, Hegel y —para ofrecer al menos un nombre contemporáneo— Bergson. Examinemos ahora este género de proposiciones desde el punto de su verificabilidad. Es fácil darse cuenta de que tales proposiciones no son verificables. De la proposición: "El principio del mundo es el agua" no podemos deducir ningún enunciado que afirma algunas percepciones, sensaciones o experiencias...Por consiguiente la proposición: "El principio del mundo es agua" no afirma nada (Carnap, 1935, pp. 10-11).

En general Carnap considera dos criterios, uno logicista y otro empirista, para descartar del discurso científico numerosos conceptos: i. la adecuación de la forma de los enunciados filosóficos a las prescripciones de la lógica matemática; ii. el criterio empirista del significado:

> ¿Cuál es entonces el método de verificación de una proposición? Aquí tenemos que distinguir entre dos tipos de verificación: directa e indirecta. Si el problema se refiere a una proposición que afirma algo respecto de una percepción actual…entonces la proposición puede probarse directamente por medio de mi percepción actual. ..Una proposición P que no es verificable directamente sólo puede ser verificada mediante la verificación directa de otras proposiciones **deducidas** de P y de otras proposiciones ya verificadas (Carnap, *Op. Cit*., p. 8).[47]

[47] El formato de negrita en 'deducidas' es responsabilidad mía. Con este pasaje Carnap relaciona el papel de la experiencia en la justificación indirecta de proposiciones en el marco de una prueba o demostración lógica. Toda proposición justificada indirectamente, está justificada solo en la medida en que puede obtenerse como una conclusión desde proposiciones antecedentes (premisas) ya anteriormente justificadas de manera directa —en el caso de sistemas axiomáticos interpretados. Por tanto, la justificación indirecta presupone no solo el papel de la experiencia en la justificación de las premisas, sino una relación de deducibilidad lógica entre premisas y conclusiones —justificación indirecta. (*Cfr*. Carnap, 1935, p.8 ss). Como veremos más adelante la justificación indirecta presupone la aplicación matemática.

De acuerdo con Carnap, la mejor manera de conocer la naturaleza de la verdad de de los enunciados en matemáticas y en la ciencia en general es la prueba formal y a partir de ella ordenar jerárquicamente por el rango de generalidad de tales verdades los enunciados.

Una de las consecuencias de la demarcación entre enunciados científicos y enunciados no científicos es una demarcación interna al conjunto de los enunciados de la ciencia. La matemática está constituida por un tipo enunciados. La física está constituida por una relación entre diferentes tipos de enunciados.

En el dominio de la ciencia entre el conjunto de enunciados posibles solo hay dos propiamente científicos. Por una parte están los enunciados analíticos y contradictorios. Por otra, los enunciados sintéticos cuyo contenido es confirmado por la experiencia. En términos de Carnap:

> Se llama *determinada L* a una oración si ésta es analítica o contradictoria [una oración que es verdadera exclusivamente por razones *L*]. Si las reglas *L* no son suficientes para la determinación de la verdad o de la falsedad de una oración dada, en otras palabras, si la oración no es *determinada L*, se denomina indeterminada *L o sintética*. Las oraciones sintéticas son aquellas que afirman una situación (Carnap, *Ibidem*, p. 30-31).[48]

Los enunciados analíticos constituyen el lenguaje de las matemáticas:

> la matemática es un sistema de símbolos determinados que se operan de acuerdo con determinadas reglas y por ningún lado se menciona el significado de los mismos, sino exclusivamente los distintos órdenes de símbolos y las operaciones formales a las que se someten (Carnap, *Ibidem*, p. 24).

Por su parte, la física está constituida por enunciados analíticos y enunciados sintéticos. Estos últimos paradigmáticos de las ciencias empíricas al estar verificados por la experiencia (*Cfr*. Echeverría, 1989, pp. 13-14).[49]

[48] Para una explicación de la sintaxis lógica de Carnap específicamente sobre estos términos, véase las secciones: "4. Términos sintácticos" y "5. Términos L" en Carnap, 1935, pp. 27 – 32.

[49] Echeverría, J. (1989), Introducción a la Metodología de la Ciencia. La Filosofía de la Ciencia en el siglo XX, Barcanova, Barcelona.

Un rasgo característico adicional como parte de la distinción entre los enunciados matemáticos y físicos es el tipo de justificación de su verdad. Los enunciados matemáticos no solo serán analíticos sino su justificación será *a priori*, mientras los enunciados de la física serán sintéticos y su justificación será *a posteriori*.[50]

[50] De acuerdo con Carnap, el camino correcto para conocer la naturaleza de la verdad de de los enunciados científicos en general es la prueba formal y a partir de ella ordenar jerárquicamente por el rango de generalidad de tales verdades los enunciados que ocurren en la ciencias. Los enunciados analíticos se encuentran en la parte más alta del ordenamiento sentencial pues su verdad tiene el mayor grado de generalidad al ser consecuencia lógica de la clase vacía de premisas. Carnap asume entonces a los enunciados analíticos como aquellos que expresan necesariamente verdades cognoscibles *a priori*.

La distinción semántica analítico/sintético y la distinción epistemológica *a priori*/*a posteriori* de Carnap (1935-37) es consistente con el espíritu logicista general de explicar estas distinciones. De acuerdo con la tradición logicista *ex. gr*. Frege (1879, 1884), Russell (1910) los enunciados pueden clasificarse de la siguiente manera:

a. Enunciados analíticos: un enunciado es analítico *syss* tiene la propiedad de ser consecuencia lógica de leyes lógicas generales y definiciones, o bien ser un axioma lógico.[50]
b. Enunciados cuya verdad se establece *a priori*: un enunciado expresa una verdad *a priori syss* queda justificada al ser consecuencia lógica tanto de (i) leyes lógicas generales y definiciones o (ii) leyes generales.[50]
c. Enunciados sintéticos: un enunciado es sintético *syss* no puede probarse sin utilizar enunciados que expresen verdades de naturaleza no lógica.
d. Enunciados cuya verdad se establece *a posteriori*: un enunciado expresa una verdad *a posteriori syss* su prueba no procede sin incluir situaciones de orden fáctico.
e. Enunciados sintéticos *a priori*: un enunciado es sintético *a priori syss* es consecuencia lógica de leyes generales y definiciones

Respecto a (d), de acuerdo con la perspectiva estándar, los enunciados analíticos agotan el campo de lo *a priori*. En el fondo para esta concepción no hay enunciados sintéticos *a priori*. Los enunciados sintéticos son todos *a posteriori*, esto es, empíricos al obtenerse por inducción a partir de los enunciados protocolares. El resto de las expresiones gramaticalmente construibles, pero que no son ni analíticas ni sintéticas, quedarán excluidas de la ciencia, *Cfr*. Carnap, R., (1932) "Die "*Überwindung der Metaphysik durch Logische Analyse der Sprache*" en *Erkenntnis*, 2, pp. 82-83.

Respecto a (e), este último caso aparece en Frege (1884) manteniendo la caracterización kantiana de los enunciados geométricos como sintéticos *a priori*. Sin embargo, como hemos señalado arriba, de acuerdo con la perspectiva estándar, al menos, la carnapiana, la justificación de los enunciados sintéticos sólo podrá ser *a posteriori*.

A partir de la obra semántica de Quine (1951, 1960) (una propuesta naturalista), y Kripke (1971, 1972) (un desarrollo naturalista/metafísico), las nociones de analiticidad y aprioricidad adquieren nuevos sentidos. Ambos proyectos rechazan la reducción de las dos nociones al concepto de verdad lógica. Quine impugna la distinción analítico/sintético y los intentos lógicos y semánticos de establecerla. Propone un significado estimulativo de la analiticidad al considerar factores mentales o de comportamiento, elementos culturales, así como factores naturales y convencionales para su definición. Por su parte, Kripke rehabilita la distinción

Ahora bien, la relación de deducibilidad entre tipos de enunciados en el marco de un sistema axiomático —definido como un conjunto de enunciados organizados deductivamente bajo el concepto de consecuencia lógica—, permitió localizar las diferencias y relaciones entre enunciados matemáticos y físicos al interior de la definición estándar de teoría científica.

De acuerdo con nuestra perspectiva, pensar a las teorías científicas como sistemas axiomáticos implica asumir la aplicación matemática en el caso de las teorías físicas como parte de la definición misma de teoría: sistema axiomático interpretado.

En el caso de los sistemas axiomáticos en general Carnap señala:

> Mucho más importantes que las reglas de formación son las reglas de transformación, pues estas determinan cómo determinadas oraciones pueden ser transformadas en otras. En otros términos: cómo de ciertas oraciones dadas podemos *inferir* otras (Carnap, 1935, p. 25).
>
> La totalidad de las reglas de transformación de un sistema O de un lenguaje puede ser formulada como la definición de la expresión "consecuencia de O". De este modo, las reglas de transformación de los *Principia Mathematica* pueden ser formuladas como sigue: En el sistema *PM*, una oración se establece como consecuencia directa de oraciones pertenecientes a otra clase —oraciones denominadas premisas— si, y solo si, se satisfacen una de las condiciones siguientes:
>
> Que la oración tenga la forma 'B' y que la clase de premisas conste de 'A' y 'A → C',
>
> 1. …,
>
> 2. …"

Lo anterior señala las relaciones deductivas características de todo sistema axiomático. Si consideramos ahora los distintos tipos de enunciados que pueden relacionarse de esta manera, que pueden relacionarse en la forma general de una teoría científica, obtendremos

---

analítico/sintético y *a priori*/*a posteriori* en términos del campo primario de aplicación de las nociones, la primera dicotomía pertenece a la semántica, mientras la segunda forma parte del campo de la epistemología.

la siguiente consecuencia: existen axiomatizaciones estrictamente matemáticas y axiomatizaciones que incluyan relaciones de deducibilidad entre enunciados analíticos cuya verdad se justifica *a priori* (matemáticos) y sintéticos cuya verdad se justifica *a posteriori* (físicos).

La consecuencia anterior parece trivial, pero no lo es si consideramos el problema de la aplicación. En el caso de incluir una axiomatización diferentes tipos de enunciados cobra sentido los dos criterios empiristas: i. la adecuación de la forma de los enunciados a las prescripciones de la lógica matemática y, ii. el criterio empirista del significado. Una teoría física será explicativa de un fenómeno espacio-temporal si esta teoría está organizada deductivamente y, además sus enunciados sintéticos pueden ser verificados mediante la experiencia de dicho fenómeno espacio-temporal.

Si lo anterior tiene sentido, para el positivismo y el empirismo lógico las matemáticas no son un lenguaje descriptivo de una realidad abstracta superpuesta a la realidad espacio-temporal, en donde se deba armonizar la realidad matemática y física cuando se intenta explicar la aplicación matemática. Lejos de esto, para el dualismo anti-descriptivista[51] las matemáticas son sistemas axiomáticos auxiliares en la constitución de axiomatizaciones interpretadas (teorías físicas). La matemática organiza la estructura deductiva de los

[51] El empirismo lógico no se compromete con tesis realistas en general. No se compromete con la realidad matemática pero tampoco con la realidad física:

> Mientras que de la aseveración sobre la realidad o sobre la existencia de los canguros podemos deducir proposiciones perceptivas, de la aseveración sobre la realidad del mundo físico esto no es posible, ni tampoco es posible sobre la afirmación opuesta sobre la irrealidad del mundo físico. Por consiguiente ambas afirmaciones carecen de contenido empírico, carecen totalmente de sentido…A veces se han mal interpretado los puntos de vista del Círculo de Viena, pues se han pensado que niegan la realidad del mundo físico, aun cuando nosotros no hagamos tal negación. Es cierto que rechazamos la tesis de la realidad del mundo físico, pero no la rechazamos por falsa sino porque carece de sentido…No afirmamos ni negamos estas tesis, rechazamos el problema en su conjunto (Carnap, 1935, pp. 12-13).

enunciados con compromiso empírico incluyendo axiomas, reglas de inferencia y teoremas.[52] La aplicación entonces se explica como un dispositivo auxiliar en el diseño de teorías físicas. [53]

El resultado anterior puede ilustrarse en términos generales de la siguiente manera: llamémosle *A* al argumento: 1. "todos los a son b" y 2. "todos los b son c", entonces 3. "todos los a son c". La corrección de este esquema se mantiene al margen del significado de a, b y c. Ahora llamémosle *B* al argumento: 1'. "todas las águilas son pájaros" y 2'. "todos los pájaros son animales", entonces, 3'. "todas las águilas son animales". En este caso suponemos que 1' y 2' están justificados directamente mediante la percepción. Y, tres es una implicación de 1' y 2' (aunque también puede verificarse directamente). *A* y *B* son dos sistemas deductivos. Sin embargo, mientras 3 en *A* tan solo es una conclusión general sobre las relaciones entre 'a', 'b' y 'c'; 3' en *B* es una conclusión particular entre ser un águila, ser un pájaro y ser un animal. Las verdades matemáticas son verdades con un mayor grado de generalidad —caso *A*—, mientras las verdades naturales tienen entre ellas mayor o menor grado de generalidad —caso *B*— (*Cfr*. Morado, 1987, pp. 45-56).[54] Si lo anterior es correcto, en el caso *B* se aplica la generalidad de las verdades matemáticas del caso *A*. Esta

[52] El punto de inicio de toda la cadena deductiva incluso en el caso de las teorías físicas lo constituyen los axiomas. A partir de los axiomas y mediante la aplicación de reglas de inferencia, se derivan otros componentes de la cadena deductiva denominados teoremas. Estos sistemas pueden estar interpretados o no mediante una semántica extra-lingüística la cual refiera a particulares.

[53] Como se ha señalado, de acuerdo con la perspectiva estándar, las ciencias empíricas o factuales se caracterizan por el empleo de un método análogo al método axiomático que en general puede llamarse método de contrastación empírica o método inductivo. De acuerdo con esta perspectiva, una ciencia empírica o factual además de incluir un sistema de enunciados organizados deductivamente para la demostración de sus teoremas, incluye el método de contrastación empírica en atención a sus objetos de estudio: hechos de experiencia. En este caso, el tribunal de la experiencia era fundamental para evaluar los resultados arrojados dada la aplicación de una teoría a un sistema físico. El método de contrastación permitía no sólo establecer el significado de los términos teóricos de una teoría matematizada, sino además ayudaba a caracterizar la serie de enunciados que aparecían en el corpus axiomático de este tipo de ciencias.

[54] Morado, R. (1987), "*Frege, Hempel and Dedekin: Definition of Number and Correferentiality*" en Ergo, Vol. I. No. 2, pp. 45-56

es la intuición dualista sobre la aplicación derivada de la explicación empirista estándar de la teoría científica.

La radicalidad de este dualismo sugiere una distinción tajante entre matemáticas como una ciencia constituida por enunciados analíticos *a priori* y ciencia física como un sistema axiomático interpretado constituido paradigmáticamente por enunciados sintéticos *a posteriori*. Parte de las consecuencias de esta escisión radical entre matemáticas y física será considerar a las matemáticas, en el mejor de los casos, como ciencias epistemológicamente diferentes al resto de las disciplinas científicas, o en el peor de los escenarios, conceder su cientificidad por antonomasia sólo en función de su aplicación, restándole todo valor a su ontología.[55]

La respuesta carnapiana de la aplicación responde entonces solo a la necesidad del físico por proveer en general de una metodología formal consistente al trabajo científico y, en particular, para ofrecer una estructura correcta al diseño de las teorías científicas reduciendo su margen de refutación lógica.

Ya hemos analizado diferentes programas monistas y dualista en matemática. Este análisis nos ha permitido, en primer lugar, ilustrar la tensión monismo/dualismo considerando diferentes formas de explicar el fenómeno de la aplicación matemática. En segundo lugar, este análisis nos ha permitido constatar que la pregunta sobre la aplicación presente en estos desarrollos está dada sobre la ganancia del científico al usar las matemáticas —este aspecto lo sistematizaremos en la sección contigua — y no sobre la naturaleza misma de la aplicación como un dispositivo generador de conceptos y como la condición explicativa de

[55] Es posible compatibilizar las implicaciones monistas y dualistas de la perspectiva estándar. Por ejemplo, desarrollando un dualismo matemático compatible con un monismo epistémico entre teorías y no un monismo ontológico entre la existencia análoga de los objetos matemáticos y físicos. Otra manera, es asumir la distinción tajante entre enunciados matemáticos y físicos y, al tiempo, pronunciarse a favor de un realismo matemático que asuma tal distinción evidentemente y que sólo haga de la justificación de los enunciados matemáticos algo epistemológicamente distinto a la justificación de enunciados empíricos mediante la percepción. El hecho es notar en todo esfuerzo por conciliar el monismo con el dualismo matemático en la perspectiva estándar una empresa por conciliar el criterio radical de asumir a las matemáticas como algo distinto al resto de las disciplinas científicas.

la homomorfía entre sistemas matemáticos y sistemas físicos. A continuación, a partir de los resultados obtenidos indicaremos la pobreza explicativa de la aplicación matemática como consecuencia de las respuestas monistas y dualistas.

Pobreza explicativa de la aplicación matemática a partir de las propuestas monistas y dualistas

El panorama sobre la aplicación aun es incompleto. Las distintas aportaciones analizadas intentan centralmente consolidar respuestas sobre el estatus de los objetos matemático y su referencia. Este propósito central no implicó incluir todas las preguntas interesantes sobre la aplicación al considerar solo aquella que conducía el análisis hacia una forma particular de entender la ontología matemática: ¿qué ganan los científicos al usar las matemáticas? Por tanto, las respuestas hasta ahora proporcionadas han subordinado la respuesta particular sobre la naturaleza integral de la aplicación, a la respuesta de una pregunta general sobre la naturaleza los objetos matemáticos.

Para explicar la aplicación matemática integralmente, consideramos, es importante pensar en distintos aspectos propios a la aplicación. En primer lugar, una explicación de la aplicación debe aclararnos en qué sentido las matemáticas se relacionan con las otras ciencias. En segundo lugar, una explicación sobre la aplicación debe explicarnos cómo la aplicación es una forma de representar matemáticamente estados, procesos, fenómenos físicos. En tercer lugar, esta respuesta sobre la aplicación debe explicarnos cómo a partir de una estructura matemática se obtienen resultados de orden físicos. En cuarto lugar, una explicación sobre la aplicación debe señalarnos si en función de la aplicación matemática surgen elementos que solo se dan y cobran sentido por la aplicación. En quinto lugar, en caso de obtener una respuesta afirmativa al punto anterior, una explicación de la aplicación matemática debe explicar la naturaleza de tales elementos. Por último, una explicación integral sobre el fenómeno de la aplicación matemática debe señalar si la semejanza de las estructuras matemáticas con las estructuras físicas se debe a la aplicación o bien esta similaridad es anterior a ella.

Desde nuestro punto de vista son dos las preguntas cuyas respuestas pueden ofrecernos una salida a todos los aspectos propios a la aplicación arriba mencionados: a: ¿surgen nuevos conceptos de la aplicación matemática a la física?, b. ¿la semejanza estructural entre sistemas matemáticos y físicos es anterior o posterior a la aplicación matemática? Estas preguntas centran el análisis no en alguna postura particular sobre la ontología matemática y su referencia, sino en las particularidades de la relación entre matemáticas y física.

Antes de desarrollar las secciones dedicadas a nuestra propuesta, resumamos las limitadas contribuciones hasta ahora obtenidas sobre la aplicación.

Hemos constatado diferentes maneras de sostener un monismo y un dualismo en matemáticas. Al menos cuatro posibilidades se han considerado: i. monismo ontológico, ii. monismo epistemológico, iii. dualismo ontológico y, iv. dualismo epistemológico. En términos muy generales distingamos estas alternativas.

El monismo ontológico o bien considera la existencia de objetos matemáticos análogamente a la existencia de los objetos físico (G. Frege y S. Shapiro), o bien, la realidad matemática no es de una naturaleza especial y superpuesta a la realidad física, sino que ambas constituyen una misma realidad multifacética (P. Kitcher).

El monismo epistemológico define a la ciencia matemática en el mismo sentido de la física. Ambas disciplinas incluyen los mismos rasgos estructurales (G. Frege, S. Shapiro, P. Kitcher).

El dualismo ontológico considera que, de existir los objetos matemáticos, serán de una naturaleza completamente distinta a los objetos físicos, asumiendo el problema de su aplicación (G. Frege, S. Shapiro).

El dualismo epistemológico considera a las matemáticas como una ciencia por alguna de las siguientes dos condiciones. Por un lado las matemáticas son científicas por el papel que juegan con las otras ciencias por antonomasia (carácter auxiliar) (R. Carnap). Por el otro, si las matemáticas son ciencias, estas requieren un análisis epistemológico diferente al análisis epistemológico de la física (R. Carnap). Una versión distinta de este dualismo epistemológico, niega la cientificidad de las matemáticas al restarle todo valor a su ontología.

Frege intenta conciliar su monismo ontológico con su dualismo ontológico. Si bien los objetos matemáticos existen análogamente a los objetos físicos, su naturaleza es distinta. Entonces, ¿cómo explica Frege la relación entre objetos abstractos y concretos?

Frege se pregunta ¿cómo el matemático puede conocer integralmente la naturaleza de los objetos básicos de la aritmética? Su respuesta es: considerando también la aplicación. La única observación directa y concerniente al problema de la aplicación en Frege es: una explicación completa del concepto de número natural requiere considerarse en el contexto de una proposición empírica. La aplicación es vista, considerando solo esta preocupación, como un medio para conocer la naturaleza de los objetos matemáticos y no como un medio para conocer el mundo físico —esto último puede ser consistente con la preocupación central de Frege pero no es su análisis primario. ¿Qué gana el científico al usar las matemáticas? Gana comprensión de conceptos básicos de la aritmética. Si bien este resultado es compatible con el dualismo epistemológico, *frente a la realidad escindida en dos del platónico*, Frege no nos explica las condiciones de una supuesta relación armoniosa entre objetos matemáticos y objetos físicos. Por esta razón la aplicación sigue siendo un reto para el platonismo fregeano. ¿El platonismo realmente es consistente con el logicismo?

La respuesta de Shapiro sobre la aplicación se deriva de su particular manera realista de definir estructura. Una estructura es una axiomatización coherente de un sistema de relaciones. Las matemáticas y la física están constituidas por un conjunto de sistemas relacionales. Si tales sistemas ya sean de la matemática o de la física pueden axiomatizarse coherentemente entonces sus estructuras existen. El programa estructuralista de Shapiro es consistente con un monismo ontológico. Las estructuras matemáticas existen análogamente a las estructuras físicas por las mismas condiciones de axiomatización. Listo, Shapiro nos ha dicho que la realidad matemática y física existen estructuralmente de la misma manera. Pero también, considera que si los sistemas físicos pueden axiomatizarse coherentemente vía la teoría de modelos es por un orden matemático anterior e intrínseco a los sistemas físicos. Por lo que las estructuras físicas son similares a las estructuras matemáticas no por la aplicación sino por una condición propia a su ontología. Así, Shapiro explícitamente toma posición sobre la similaridad entre estructuras de diferente naturaleza, considerando dicha semejanza anterior a la aplicación. Esta condición conduce a Shapiro de un monismo ontológico hacia un monismo epistemológico. Las estructuras matemáticas se aplican a las estructuras físicas pues sus relaciones son altamente similares. Dicha condición puede ser explicada por una modelización altamente similar de ambas estructuras considerando correspondencias entre predicados físicos y matemáticos.

Al margen de ser correctos o no los resultados de Shapiro sobre los hechos matemáticos, éstos no explican la naturaleza de la aplicación sino una supuesta naturaleza compartida entre matemáticas y física: una naturaleza estructural. ¿Qué ganan los científicos al usar las matemáticas en este caso? Ganan un retrato estructural de los sistemas físicos. Este retrato aporta seguridad, de acuerdo con Shapiro, a una respuesta estructural particular sobre el conocimiento y referencia de los objetos matemáticos, pero no a una respuesta particular sobre la aplicación.

La propuesta estructuralista es incompleta a propósito de la aplicación matemática. Le falta considerar puntos adicionales propios a su naturaleza, por ejemplo: ¿surgen elementos que solo cobran sentido por la aplicación?, en caso afirmativo ¿cuál es la naturaleza de estos elementos?

Por su parte, serán dos las vías del empirismo radical de Kitcher para ofrecer una respuesta al problema de la aplicación matemática. La primera de ellas es su tesis central: conocemos las verdades matemáticas básicas mediante la evidencia de nuestra percepción. En segundo lugar, entender al conocimiento matemático como una idealización teórica.

A partir de estas dos vías, el programa de Kitcher desarrolla un monismo epistemológico. Entre física y matemáticas existe una continuidad epistemológica explicable en tres sentidos —sin implicar la defensa de una ontología matemática en la línea del platonismo. En primer lugar, la aplicabilidad matemática a la ciencia es una propiedad del conocimiento matemático entendido como una idealización. Esta propiedad consiste en suponer órdenes estructurales ideales de sistemas físicos reales. En segundo lugar, la reformulación de la aprioridad clásica en términos de una aprioridad (*warrants*) que hace de la justificación *a priori* de los enunciados matemáticos una justificación sensible a conceptos provenientes de la experiencia. En tercer lugar, existe un criterio pragmático fundacional de la ciencia en general. Estas circunstancias favorecen una definición de la aplicación en términos de un dispositivo constructivo de la realidad en general en prácticas científicas definidas. ¿Qué ganan los físicos al usar las matemáticas? Construir una realidad general fundando las condiciones de verdad en último término en la evidencia de los sentidos. Esta respuesta nuevamente nos habla sobre la naturaleza de los hechos matemáticos y la posibilidad de su conocimiento a partir de idealizaciones. Pero ¿estas idealizaciones por una parte, y la práctica científica, por otra, nos dice algo sobre la naturaleza de aplicación matemática como un dispositivo constructivo de la realidad? El problema aun queda abierto.

Por último, el positivismo y empirismo lógico de Carnap representa paradigmáticamente una posición dualista epistemológica en matemáticas. Por una parte, Carnap distingue radicalmente la matemática de la física considerando características semánticas y epistemológicas de los enunciados que constituyen a estas disciplinas. Por otra, las teorías físicas por definición serán sistemas axiomáticos interpretados. Pero en este caso el lenguaje matemático nada tiene que ver con la realidad física por explicar. La aplicación matemática desde esta perspectiva puede explicarse como un dispositivo auxiliar para el diseño y desarrollo de las teorías físicas. Si lo anterior tiene sentido, las matemáticas difícilmente podrían definirse análogamente con las otras ciencias. ¿Que ganan los científicos al usar las matemáticas? Ganan proveer en general de una metodología formal consistente al trabajo científico y, en particular, ofrecer una estructura correcta al diseño de las teorías científicas reduciendo su margen de refutación lógica.

El dualismo epistemológico, por una parte rechaza la función descriptiva de las matemáticas. Si esto tiene sentido, Carnap no ve la necesidad de armonizar dos mundos de diferente naturaleza considerando el problema de la aplicación. Por otra, el dualismo epistemológico considera la cientificidad de las matemáticas por el papel que juega por antonomasia con las otras ciencias. Carnap en este caso, no ve la necesidad de profundizar en la naturaleza del carácter auxiliar de las matemáticas. Al parecer, no se pregunta por qué las matemáticas pueden ayudar al diseño de las teorías físicas pues no hay nada por armonizar. Nuevamente, quedan abiertas preguntas importantes sobre la aplicación.

Con este panorama pobre sobre la explicación de la aplicación matemática parece necesario desarrollar una alternativa. Esta alternativa, obviamente deberá poner en el centro del análisis la aplicación y no una forma particular de entender la ontología matemática y su referencia. A continuación prepararemos el camino hacia una propuesta conciliadora de la tensión monismo/dualismo. Centraremos nuestro análisis en la generación de conceptos para las teorías físicas por la aplicación y en la explicación de la semejanza entre estructuras matemáticas y físicas a partir de la aplicación matemática. A la base de esta propuesta estarán compromisos monistas y dualistas en matemáticas, ambos de orden epistemológico.

APARTADO III

"Síntesis Estructural" una explicación alternativa de la aplicación matemática

Apartado III

III. "Síntesis Estructural" una explicación alternativa de la aplicación matemática

Objetivo General del Apartado

Ofrecer una respuesta a ¿Qué es la aplicación matemática? Por medio de: i. ¿Surgen nuevos conceptos de la aplicación matemática a la física?, ii. ¿la semejanza estructural entre sistemas matemáticos y físicos es anterior o posterior a la aplicación matemática?

Objetivos Particulares del Apartado III

Objetivo (1): distinguir la representación matemática de otros tipos de representación científica.

Objetivo (2): explicar la aplicación matemática en términos de una representación estructural basados en Chris Swoyer (1991) y Stewart. Shapiro (2000).

Objetivo (3): presentar teóricamente nuestra propuesta, restringiendo nuestro uso de representación estructural: "Síntesis Estructural" y "Conceptos de aplicación".

Objetivo (4): mostrar a la "Síntesis Estructural" como una explicación más fiel a las particularidades de la aplicación matemática.

Objetivo (5): explicar la "Síntesis Estructural" como una propuesta basada en las relaciones y no en la naturaleza de los objetos.

Objetivo (6): señalar los retos de las tendencias monistas y dualistas al intentar incluir la propiedad semántica de la aplicación.

Estilos Representacionales en Ciencia

La finalidad de esta breve sección es distinguir la representación matemática de otros tipos de representación en ciencia. En primer lugar, veremos cómo los modelos representacionales han jugado diferentes roles al servicio de distintas necesidades científicas. A estos roles les llamaremos estilos representacionales.[1] En segundo lugar, señalaremos la diferencia entre las representaciones matemáticas con los otros tipos de representaciones.

En la literatura de la filosofía de la ciencia y de las matemáticas podemos encontrar diferentes formas de explicar la representación en la práctica científica.

La concepción pictórica de la representación como la denomina Ibarra (*Cfr*. Ibarra, en Casanueva y Benítez, 2003, p. 15) ha sido una idea común. Para esta concepción lo representado *A* y lo representante *B* comparten una estructura común o son similares entre sí. Filósofos de la ciencia como Suppes (1989), Mundy (1986), Swoyer (1991), Suárez (1997, 2004) se enlistan en estas filas. Todos ellos consideran la idea de semejanza mediante relaciones de isomorfía u homomorfía entre sistemas.[2]

Filósofos de la ciencia como Griesemer (1990), Baird (1994) se interesan en la representación científica en otros términos. Para estos filósofos la representación es el uso de materiales para la construcción de objetos con algún significado relevante para la práctica científica. Por su parte, filósofos como Lynch y Woolgar (1990) enfatizan en los recursos visuales como medios representacionales en distintas ciencias, particularmente en la biología.

Los críticos a la versión pictórica intentan incluir la diversificación de las representaciones científicas en un nuevo concepto de representación. Por ejemplo, Latour (1999), Ibarra (2003), Casanueva (2003) consideran a los estilos representacionales en la práctica científica como alternativas amplias y complejas imposibles de reducir a un solo sentido de representación. Ibarra y Casanueva proponen una versión diagramática de la representación. Por medio de esta versión intentan explicar la diversificación de las representaciones en ciencia *ex. gr*. representaciones matemáticas, representaciones

[1] Tomamos la expresión "estilos representacionales" del trabajo de Lorenzano (2002).
[2] Una introducción clara a la definición de sistema isomórfico y homomórfico en matemáticas la podemos encontrar en Manzano, María (1999), *Model Theory*, Oxford University Press, New York, pp. 24 ss.

materiales, representaciones visuales, representaciones teóricas, etc., en términos de dispositivos para la investigación experimental y cognitiva (*Cfr*. Ibarra, 2003).

Nuestro interés sobre la representación científica no es desarrollar una teoría comprensiva de la representación, tampoco nos interesa ofrecer un argumento a favor o en contra de alguna de estas versiones. Nuestro interés es más específico. Nos interesa distinguir las representaciones matemáticas de los otros tipos de representaciones, particularmente, de aquellas representaciones materiales y visuales —cuyos exponentes son los modelos a escala, trazos, proyecciones en maquetas, representaciones visuales a través de grafos, representaciones icónicas. Las representaciones matemáticas son casos genuinos de representaciones científicas.

En general, se pueden representar los mismos objetos, sistemas o fenómenos de diferente manera. Esto es, el núcleo de un átomo puede representarse por medio de un *drop model* o de manera muy diferente por medio de un *shell model*. Las alas de los aeroplanos pueden representarse mediante un modelo a escala o, representar la estructura de las alas por medio de modelos estrictamente matemáticos haciendo uso de alguna descripción algebraica. Así mismo, las ciencias empíricas emplean diferentes tipos de modelos: modelos computacionales, de fenómenos, de datos, explicativos, de contrastación, idealizados, teóricos, a escala, heurísticos, didácticos, imaginarios, matemáticos, sustitutos, icónicos, formales, analógicos, etc. Estas diferentes posibilidades de modelar a un objeto, sistema o fenómeno pueden llamarse estilos representacionales.[3]

Entre estos estilos representacionales, los modelos a escala, los modelos idealizados, los modelos icónicos, los modelos analógicos, los modelos fenomenológicos, los modelos matemáticos y los modelos teóricos han jugado un papel muy importante en la ciencia moderna. Estos estilos no son necesariamente excluyentes. Algunos modelos a escala podrían considerarse también modelos ideales o icónicos. Podemos considerar modelos idealizados como modelos análogos a otros sistemas. Por su parte, hay modelos teóricos

[3] La propiedad general y más básica de los modelos es su carácter representacional. En este sentido, cuando hablamos de los diferentes tipos de modelos en ciencia hablamos de los diferentes tipos de representaciones científicas.

que pueden considerase modelos matemáticos. De manera general, veamos en qué consisten algunos de estos estilos representacionales:

Modelos a escala: son representaciones o reproducciones a tamaño menor o mayor de algo;

> Some models are basically downsized or enlarged copies of their target systems (Black, 1962).
>
> Algunos modelos son básicamente copias reducidas o ampliadas de los sistemas primariamente considerados.[4]

> Systems are then constructed that can be used as practical models… which can be taken as sufficiently representative of the first system to yield the desired information (Apostel, 1961, p. 2).
>
> Los sistemas construidos pueden ser utilizados como modelos prácticos….los cuales se pueden tomar como suficientemente representativos del primer sistema para obtener la información deseada.[5]

Modelos idealizados: son simplificaciones deliberadas de algo complicado con el objetivo de hacer más fácil su tratamiento;

> For a domain D of facts, we do have a full-fledged theory, but one too difficult mathematically to yield solutions, given ours present techniques. We then interpret the fundamental notions of the theory in a model, in such a way that simplifying assumptions can express…under these simplifying assumptions, the equations become soluble (Apostel, 1960, p. 2).
>
> Para un dominio D de los hechos, tenemos una teoría hecha y derecha, pero esta es muy complicada y es difícil producir soluciones matemáticas desde ella, considerando nuestras técnicas actuales. Tenemos que interpretar entonces las nociones fundamentales de la teoría a partir de un modelo, de tal manera que bajo la simplificación de los supuestos …las ecuaciones puedan resolverse.[6]

[4] La traducción es responsabilidad mía.
[5] La traducción es responsabilidad mía.
[6] La traducción es responsabilidad mía.

Modelos fenomenológicos: son representaciones de propiedades observables o propiedades independientes de las teorías;

> It often occurs that the theoretical level is far away from the observational level;...Models are then introduced to constitute the bridge between the theoretical and observational levels, the theoretical predicates being interpretable as predicates of the model, and the observational predicates being also interpretable as predicates of the model, the model furnishing lawful relationships between the two interpretations (Apostel, 1960, p.p. 2-3).
>
> A menudo ocurre que el punto de vista teórico está muy lejos del nivel de la observación, ... Los modelos son entonces introducidos para constituir el puente entre los niveles teórico y observacional, los predicados teóricos y observacionales serán interpretables como predicados del modelo, el modelo constituirá la base legal de las relaciones entre las dos interpretaciones.[7]

Modelos matemáticos: representaciones matemáticas de un campo, sistema o fenómeno de investigación;

> By using numbers to represent the lengths of physical objects, we can represent facts about the objects numerically, perform calculations of various shorts, then translate the results back into a conclusion about the original objects (Swoyer, 1991, p.449).
>
> Mediante el uso de números para representar longitudes de los objetos físicos, podemos representar hechos numéricamente, al realizar cálculos de varios casos, podremos entonces traducir los resultados de estos casos como conclusiones acerca de los objetos originales.[8]

> When we measure the lengths of physical objects in meters, we pair the objects whit numbers in such a way that the two exhibit a common pattern (Swoyer, 1991, p. 451).

[7] La traducción es responsabilidad mía.
[8] La traducción es responsabilidad mía.

> Cuando medimos la longitud de los objetos físicos en metros, apareamos los objetos con números de tal manera que los dos muestran un modelo común.[9]

Modelos analógicos: son representaciones de un determinado sistema poco conocido desde las representaciones de sistemas más conocidos. Ejemplos clásicos de modelos analógicos incluyen el modelo hidráulico de un sistema económico, el modelo de la bola de billar de un gas, el modelo computacional de la mente (*Cfr*, Hesse, 1963);

> This is what happens in neurology: we replace the central nervous system by digital or analogue computer showing certain of the neurological peculiarities, and study this new object (Apostel, 1960, p. 2).
>
> Esto es lo que sucede en la neurología: reemplazamos el sistema nervioso central por una computadora digital o analógica mostrando algunas de las peculiaridades neurológicas, y estudiamos este nuevo objeto.[10]

Modelos teóricos: son reconceptualizaciones de sistemas específicos:

> ...examinaremos un uso importante que tiene éste término [modelo] en física, uso que ejemplifican el modelo del átomo de Bohr, el modelo de la bola de billar para los gases, el modelo corpuscular libre para los metales. Me referiré a ellos como modelos teóricos...un modelo teórico consiste en un conjunto de *supuestos* acerca de algún tipo o sistema...(Achinstein, 1967, pp. 5-6).

Si bien es un problema abierto señalar con exactitud cuáles son las relaciones exactas entre los diferentes estilos representacionales en la práctica científica, es importante dar cuenta de las representaciones matemáticas como el soporte teórico para la gran mayoría de las representaciones. Esta propiedad de las representaciones matemáticas le da su particularidad frente a los otros estilos representacionales.

[9] La traducción es responsabilidad mía.

[10] La traducción es responsabilidad mía.

Ibarra (2003) con el propósito de criticar la versión pictórica de la representación y apoyar su versión diagramática, señala curiosamente la importancia de las matemáticas para las representaciones científicas:

> Un instrumento importante para las representaciones científicas, es decir, *un soporte general para ellas*, es la matemática. Muchas de las representaciones en la ciencia son representaciones matemáticas. Pero además de estas existen diferentes tipos de representaciones (*Cfr*. Ibarra, 2003, p. 16).[11]

El interés de Ibarra no es privilegiar la representación matemática frente a los otros tipos de representaciones, sin embargo, y tal vez en contra de sus propósitos reales, su comentario considera el punto importante para distinguir las representaciones matemáticas del resto de las representaciones.

La idea de soporte general de las matemáticas es importante entenderla en tres sentidos distintos pero relacionados. En primer lugar, las matemáticas han constituido una herramienta muy importante para el ejercicio del modelaje científico en general. En la gran mayoría de los modelos de los sistemas físicos y matemáticos de ciencias como la matemática, la química, la biología, la física, la astronomía, la economía, la educación, la lingüística etc., se han utilizado a las matemáticas. Pero no solo para construir pequeños modelos de sistemas empíricos particulares, sino para el diseño general de teorías científicas. Por ejemplo, en gran parte de las teorías de la mecánica, la termodinámica, la estadística, teorías en torno a modelos computacionales de la mente (ciencias cognitivas), así como en teorías sobre la evolución y la genética encontramos aplicaciones de teorías matemáticas en torno a la medición y a la forma de establecer relaciones entre números y objetos empíricos con la finalidad de modelar matemáticamente distintos sistemas.[12] Consideramos a la observación de Ibarra (2003) por esta línea al afirmar la importancia de

[11] Las itálicas son responsabilidad mía.
[12] En la sección III.1 de esta investigación ofrecemos un estudio de caso específico. En este estudio podremos constatar desde ciertos aspectos de la termodinámica la importancia de las matemáticas para el desarrollo de la ciencia de la energía.

las representaciones matemáticas para las representaciones científicas. Y en este sentido, las matemáticas han sido un soporte general para ellas.

En segundo lugar, las representaciones matemáticas también han constituido un soporte teórico pasivo o implícito de muchos estilos representacionales. Muchos de los modelos de tipo analógico, teórico, idealizados, incluso de representación visual, utilizan a las matemáticas como base misma de su modelo. Aun cuando podamos pensar en primera instancia basados en la observación en un modelaje visual, por ejemplo, una maqueta, una estructura computacional, grafos relacionados en un tablero, como algo lejano a la matemática, es la representación matemática de este modelo lo que le da un orden. En la mayoría de los casos, el modelo primario matemático permite ordenar la estructura de una representación visual y cumplir con la intencionalidad de dicha representación. De hecho, en muchos casos, cuando se requiere explicar el valor epistémico de estas representaciones, se recurre a una explicación matemática del modelo visual evitando cualquier interpretación no adecuada de tal modelo. Esta explicación matemática por compleja, básica o general que pueda ser, permitirá justificar por ejemplo, las relaciones de los trazos de un plano, de los componentes de una maqueta, de estructuras computacionales, delimitando el impacto del modelo para una explicación científica específica.[13]

En tercer lugar, podemos conectar la idea de soporte general de las matemáticas para las representaciones científicas con el hecho de la naturaleza científica de las matemáticas. Las matemáticas constituyen una ciencia con una estructura teórica propia, con compromisos ontológicos, con objetivos disciplinarios, con metodología y, con explicaciones de una

[13] Es importante señalar la existencia de algunas representaciones científicas no matemáticas con valor epistémico por sí mismas. Por ejemplo, los modelos icónicos útiles para representar estados o "formas de ser" de un objeto o un fenómeno sin pretender con ello explicar su naturaleza profunda. La función epistémica en estos casos consiste en mostrar estados de sistemas considerando circunstancias particulares. Así, un modelo icónico puede mostrar de un fenómeno u objeto su organización, su belleza, su similaridad con otros fenómenos y objetos, etc. Sin embargo, nuestro punto es notar la importancia de las matemáticas cuando se quiere explicar la organización de una representación no matemática. En muchos casos, tal explicación recurre al lenguaje matemático. Una representación visual puede analizarse matemáticamente considerando la relación entre puntos y líneas. Y la manipulación matemática de estos casos influye provechosamente en la presentación final de la representación visual.

realidad abstracta o conceptual.[14] Como veremos en nuestro estudio de caso, la aplicación matemática ha permitido a las ciencias físicas como la termodinámica desarrollarse y consolidar explicaciones sobre los sistemas físicos de su interés. Si lo anterior tiene sentido, una de las características de la representación matemática es su posibilidad de auxiliar a otras disciplinas científicas mediante la aplicación de sus teorías. Lo interesante es ver en las representaciones matemáticas, aplicaciones científicas. Esto es, las representaciones matemáticas son por sí mismas representaciones de una ciencia a diferencia de gran parte de las representaciones materiales y visuales.

Las representaciones materiales y visuales han tenido un gran valor para la ciencia moderna. Gracias a este tipo de representaciones se han podido manipular y experimentar sistemas complejos del universo mediante la manipulación de modelos a escala[15] que de otra manera sería difícil manipular, pensemos en los modelos del sistema solar o en los modelos de la estructura atómica de los objetos o sustancias. Sin embargo, por lo general estas representaciones materiales y visuales no tienen por sí mismas una naturaleza científica. El carácter científico de estas representaciones será contextualmente dependiente a las teorías de las diferentes ciencias que las usan.

No habría diferencia entre caricaturas, juguetes, ilustraciones, esculturas, exposiciones artísticas, con las representaciones materiales y visuales al margen de un sistema teórico. Las representaciones materiales y visuales no incluyen *per se* una estructura teórica, un conjunto de compromisos ontológicos, objetivos disciplinares y métodos propios. Prueba de ello, es su capacidad de decir cosas distintas de acuerdo con el campo de interpretación de una teoría científica u otra y, no decir algo independientemente de ellas.

[14] Nuestra intención es distinguir las representaciones matemáticas del resto de las representaciones científicas, no incorporarnos a una discusión en torno a la naturaleza de la realidad matemática.

[15] Desde el momento de establecer un modelo a escala científicamente provechoso para la explicación de un sector de la realidad se requiere de ciertos cálculos matemáticos para ajustar las relaciones entre el modelo y el sistema representado. Pero estas relaciones matemáticas deben hacerse explícitas al interior de una teoría. Esto es, se requiere de una teoría para determinar explícitamente su valor teórico. Solo así se puede afirmar un modelo representacional como modelo de un sistema científicamente relevante.

Si lo anterior tiene sentido, al menos tres aspectos sobre las representaciones matemáticas pueden considerarse. En primer lugar, las representaciones matemáticas son un instrumento teórico importante para la representación científica. En segundo lugar, las representaciones matemáticas están relacionadas explícita o implícitamente con diferentes modelos científicos, por ejemplo, modelos teóricos, modelos analógicos e incluso modelos visuales —las matemáticas han sido útiles para ejemplificar el modelo de los átomos, el modelo de la bola de billar para los gases, el modelo computacional de la mente, así como modelos a escala de la distancia entre las diferentes orbitas planetarias del sistema solar. En tercer lugar, las representaciones matemáticas son casos genuinos de representaciones científicas. Gran parte de las representaciones matemáticas, en el campo de las ciencias empírica, serán aplicaciones matemáticas a la ciencia.

Este último aspecto no solo marca una diferencia importante de las representaciones matemáticas respecto a los otros estilos representacionales, adicionalmente, permite dirigir el análisis de la representación hacia el problema de la aplicación matemática como el contacto, en principio, de dos ciencias estructuralmente similares.

Pero, ¿cuál es la naturaleza de la aplicación como representación matemática?, ¿En qué sentido las matemáticas representan estados, procesos, fenómenos físicos?, ¿En qué sentido las representaciones matemáticas contribuyen a la solución de problemas físicos? El primer paso para resolver estas preguntas será explicar la representación matemática como una representación estructural. Y a partir de este caso, ver en la representación estructural una manera muy cercana de explicar las particularidades de la aplicación matemática. Nuestra postura se inspira inicialmente en algunos elementos de las propuestas estructurales de Chris Swoyer (1991) y Stewart Shapiro (1997, 2000), sin comprometernos con sus preferencias realistas sobre la ontología matemática.

Representación estructural: Chris Swoyer (1991) y Shapiro (2000)

Chris Swoyer (1991) y Stewart Shapiro (1997, 2000) están de acuerdo con la utilidad de las matemáticas para la explicación de los fenómenos físicos. El acuerdo sobre este punto puede verse en distintos pasajes de sus trabajos. Por ejemplo, para Stewart Shapiro en *Philosophy of mathematics. Structure and Ontology* (1997)[16] es suficiente considerar la relación entre las matemáticas con las teorías científicas a lo largo de la historia de la ciencia, para asumir el problema de resolver la tensión epistemológica entre: cuál es el significado de los enunciados matemáticos y cómo interpretamos la realidad de los objetos matemáticos a la luz de la estrecha relación entre matemáticas y ciencia.

Para Shapiro, entonces no es problemático aceptar la utilidad de las matemáticas en las explicaciones científicas, todo lo contrario, será un aspecto evidente en la historia del conocimiento científico. Lo controversial para su programa es asumir el reto de explicar cómo desde el realismo matemático es posible relacionar el mundo abstracto de las matemáticas, con el mundo espacio-temporal de la ciencia natural:

> The realist needs an account of the relationship between the eternal, acausal, detached mathematical universe and the subject matter of science and everyday language--the material world. How it is that an abstract, eternal, acausal realm manages to get entangled with the ordinary, physical world around us, so much so that mathematical knowledge is essential for scientific knowledge? (Shapiro, 1997, pp4-5).
>
> El realista necesita una consideración de la relación entre un universo eterno, no-causal e independiente como lo es el universo matemático con el tema de la ciencia y el lenguaje cotidiano —el mundo material. ¿Cómo es que un reino no-causal se las arregla para relacionarse con el mundo ordinario, físico que nos rodea, como de hecho ocurre, dado que el conocimiento matemático es esencial para el conocimiento científico?[17]

[16] Shapiro, Stewart, (1997), *Philosophy of mathematics. Structure and Ontology*, Oxford University Press, New York
[17] La traducción es responsabilidad mía.

Chris Swoyer en "*Structural Representation and Surrogative Reasoning*" (1991)[18], al igual que Shapiro, no se ocupa por demostrar la utilidad de las matemáticas para las explicaciones científicas. Considera esta utilidad como una condición obvia entre matemáticas y física presente en la historia de la ciencia, e incluye ésta condición como un presupuesto básico para el desarrollo de su artículo. Una particularidad del trabajo de Swoyer es su interés primario por desarrollar una postura sobre la representación en general, siendo un caso particular el de la representación matemática:

> My aim here is to explaine what structural representation is and to show why it is philosophically interesting (Swoyer, 1991, p. 449).
>
> Mi objetivo aquí es explicar qué es la representación estructural y mostrar por qué ésta es filosóficamente interesante.[19]

> By using numbers to represent the lengths of physical objects, we can represent facts about the objects numerically, perform calculations of various shorts, then translate the results back into a conclusion about the original objects (Swoyer, *Op. Cit*., p.449).
>
> Mediante el uso de números para representar longitudes de los objetos físicos, podemos representar hechos numéricamente, al realizar cálculos de varios casos, podremos entonces traducir los resultados de estos casos como conclusiones acerca de los objetos originales.[20]

El problema epistemológico sobre la relación entre objetos matemáticos y objetos físicos, no es entonces, el de probar la utilidad de las matemática para la ciencia, sino el de explicar la relación entre tales entidades. ¿Cómo explicamos el fenómeno de la aplicación matemática a la ciencia, si suponemos esta relación como una relación asimétrica entre objetos de diferente naturaleza? Como hemos visto en el Apartado II de esta investigación, Shapiro (1997, 2000) está comprometido a ofrecer una respuesta completa sobre los fundamentos de la matemática. Considera importante incluir una explicación de la aplicación matemática para dar cuenta integralmente de éstos fundamentos:

[18] Swoyer, Chris, (1991), "*Structural Representation and Surrogative Reasoning*", en Synthese, 87, pp. 449-508.
[19] La traducción es responsabilidad mía.
[20] La traducción es responsabilidad mía.

> Any philosophy of mathematics or philosophy of science that does not provide an account of this relationship [between mathematics and the rest of scientific] is incomplete at best (Shapiro, 2000, p. 34).
>
> Cualquier filosofía de las matemáticas o filosofía de la ciencia que no ofrezca una consideración de esta relación [entre las matemáticas y el resto de la ciencia] está, en el mejor de los casos, incompleta.[21]

Swoyer (1991) y Shapiro (1997, 2000) explican la aplicación matemática como una relación entre estructuras. Utilizan al lenguaje conjuntista o modélico respectivamente, como el medio para explicar la correspondencia entre la estructura matemática y la estructura física.

De acuerdo con Shapiro (1997 y 2000) explicamos la aplicación a partir de una teoría matemática, teoría de modelos, cuyo propósito es estructurar los sistemas físicos y matemáticos (modelar) proporcionando una axiomatización coherente a sus sistemas. La semántica de la teoría de modelos, de acuerdo con Shapiro, no sólo explicará la aplicación, sino permitirá establecer consideraciones realistas de las matemáticas. Ambas consecuencias particularizan su propuesta:

> I propose that model-theoretic semantics is the central frame of philosophical realism. In model theory, one specifies a range of the variables of a mathematical discourse--an ontology--and then one specifies extensions for the predicates and relations. This determines satisfaction conditions for the complex formulas of the language and truth conditions for the sentences, via the familiar program. The point here is that if realism is correct, then model theory provides the right picture, or "model," of how mathematical languages describe mathematical reality. According to realism, the relationship between language and reality is analogous to the relationship between a formal language and a model- theoretic interpretation of it. Of course, how we manage to "specify" the domains and the various extensions, without vicious circularity, is a major problem with realism (Shapiro, 1997, p. 8).
>
> Yo propongo que la semántica de la teoría de modelos sea el marco central del realismo filosófico. En la teoría de modelos, uno especifica un rango de las variables de un discurso matemático —una ontología—

[21] La traducción es responsabilidad mía.

> y luego uno especifica las extensiones de los predicados y las relaciones. Esto determina las condiciones de satisfacción para las fórmulas complejas del lenguaje y las condiciones de verdad para los enunciados. El punto aquí es que si el realismo es correcto, entonces la teoría de modelos ofrece la imagen correcta, o "modelo" de cómo los lenguajes matemáticos describen la realidad matemática. De acuerdo con el realismo, la relación entre lenguaje y realidad es análoga a la relación entre el lenguaje formal y una interpretación modelo-teórica de ésta. Por supuesto, ¿cómo nos las arreglamos para "especificar" los dominios y las diferentes extensiones, sin un círculo vicioso, es un gran problema para el realismo.[22]

> ...the model-theoretic scheme be applied to mathematical and ordinary (or scientific) language alike, or else the scheme be rejected for both discourses (Shapiro, *Op. Cit.*, 1997, p. 3).
>
> "…el esquema modelo-teórico [debe] ser aplicado tanto al lenguaje matemático como al lenguaje ordinario (o científico), o bien el esquema debe ser rechazado por los dos discursos.[23]

> Under structuralism, the relevant semantics for mathematics is model theory. The uniformity condition is satisfied if the nonmathematical discourses enjoy a model-theoretic semantics, provided that we have some grasp of how mathematical structures relate to physical systems (Shapiro, 2000, pp. 257ss).
>
> En el estructuralismo, la semántica relevante para las matemáticas es la teoría de modelos. La condición de uniformidad se cumple cuando los discursos no matemáticos disfrutan de una semántica modelo-teórica, previendo que tenemos alguna comprensión de cómo las estructuras matemáticas se relacionan con los sistemas físicos.[24]

A partir de estas opiniones, nos interesa enfatizar dos aspectos. En primer lugar, Shapiro traza una explicación de la aplicación en términos de la correspondencia entre dos estructuras de diferente naturaleza. Por una parte, la estructura matemática es un sistema axiomatizado coherentemente en términos de la teoría de modelos. En segundo lugar, el

[22] La traducción es responsabilidad mía.
[23] La traducción es responsabilidad mía.
[24] La traducción es responsabilidad mía.

fenómeno físico es un sistema modelable, esto es, es un sistema que puede axiomatizarse coherentemente vía la teoría de modelos. Los sistemas físicos modelados serán estructuras físicas. Si lo anterior tiene sentido, al modelarse los sistemas físicos se relacionan predicados y relaciones matemáticas con predicados y relaciones físicas constituyentes de cada sistema (Shapiro, 2000). A partir de la correspondencia entre predicados y relaciones clausurada modélicamente se obtienen resultados físicos a partir de cálculos matemáticos. Pero, ¿por qué esta correspondencia es posible? La respuesta a esta pregunta nos conduce inmediatamente a nuestro segundo punto de interés. Desde el realismo matemático propuesto por Shapiro, la condición para corresponder estructuras de distinta naturaleza es la existencia de un lenguaje matemático cuya capacidad permite axiomatizar de la misma manera las matemáticas y la física: la teoría de modelos. En consecuencia, no existe una nítida frontera ni temática ni metodológica entre estas ciencias.

Si la teoría de modelos estructura el mundo matemático y físico, entonces, la teoría de modelos puede explicarnos tanto la relación entre matemáticas y una interpretación modelo-teórica de sus sistemas, como la relación entre lenguaje matemático y mundo. Al poderse axiomatizar las propiedades estructurales de ambos casos en los mismos términos matemáticos, se prueba, de acuerdo con Shapiro, la semejanza ontológica entre sus estructuras*…[i]n model theory, one specifies a range of the variables of a mathematical discourse--an ontology--and then one specifies extensions for the predicates and relations* (Shapiro, *Ibidem*, p . 8).[25]

La teoría de modelos entonces hace explícita la semejanza ontológica-estructural entre sistemas matemáticos y físicos. Con lo cual, la homomorfía entre estructuras matemáticas y físicas, parece ser anterior a la aplicación. El modelaje proporciona un retrato matemático de dicha condición ontológica. Esta condición en general permite la aplicación.

Evidentemente, estas consideraciones sobre la aplicación, tienen para Shapiro el propósito central de defender en términos realistas la existencia de estructuras matemáticas. Para

[25] ".. .[e]n la teoría de modelos, uno especifica un rango de las variables de un discurso matemático —una ontología— y luego uno especifica las extensiones para los predicados y las relaciones". La traducción es responsabilidad mía.

Shapiro, una estructura existe, si existe una axiomatización modélica de ella (Shapiro, 1997, p. 134). Este último aspecto no nos interesa discutir por ahora. Restringimos nuestro interés tan solo al problema de la aplicación. Como veremos más adelante podemos dar cuenta de la aplicación matemática en términos estructurales sin presuponer ni culminar en consideraciones realistas sobre la naturaleza de las matemáticas.

Por su parte, Swoyer (1991) considera una idea de representación en términos estructurales. De acuerdo con Swoyer una representación queda definida si se mantiene una relación isomórfica entre dos sistemas relacionales intensionales (Swoyer, 1991, pp. 456-459). Este tipo de representación estructural supone considerar, al menos, dos condiciones: i. existe una estructura compartida (común) entre la representación y lo que esta representa (Swoyer, 1991, p. 451); ii. es necesario aplicar un razonamiento sustituto (s*urrogative reasoning*) desde el cual sea posible traducir los resultados de un segundo caso para el caso original consistentemente (Swoyer, 1991, p. 457). Contessa (2007) señala:

> Surrogative reasoning' is the expression introduced by Chris Swoyer (1991) to designate those cases in which someone uses one object, the *vehicle* of representation, to learn about some other object, the *target* of representation.[26]
>
> Razonamiento sustituto es la expresión introducida por Chris Swoyer (1991) para designar aquellos casos en que alguien utiliza un objeto, el *vehículo* de representación, para aprender acerca de algún otro objeto, el *objetivo* de la representación.[27]

Si bien esta explicación de la representación intenta decirnos cómo cualquier sistema representacional puede ser exitosamente aplicado al mundo, para nosotros es suficiente considerar su plausibilidad para el caso de la aplicación matemática.[28]

[26] Contessa Gabriele, (2007), "*Scientific Representation, Interpretation, and Surrogative Reasoning" en* Philosophy of Science, 74, 1, pp. 48-68.
[27] La traducción es responsabilidad mía.
[28] Explicaciones similares han sido propuestas, por ejemplo, Barwise (1977), Barceló y Casanueva (2007).

La noción de razonamiento sustituto es muy importante para la propuesta representacional de Swoyer pues explica su noción extraña de "apareamiento" entre objetos de estructuras distintas. La noción de razonamiento sustituto designa casos en los que el matemático o científico utiliza objetos de una estructura como vehículos de representación, para aprehender el comportamiento de otros objetos pertenecientes a una estructura distinta, objetos representados. Esto es todo. Las propiedades lógicas del "apareamiento" quedan especificadas con el lenguaje conjuntista.

Los sistemas intensionales están definidos como un cuádruple ordenado:

$$A = < \mathrm{I}^{A},\ {}^{F}R^{A},\ {}^{S}R^{A},\ {}^{v}>$$

Donde I^{A} = Dominio de individuos; ${}^{F}R^{A}$ = Dominio de relaciones de primer orden (incluyendo relaciones uno-lugar o propiedades); ${}^{S}R^{A}$ = Dominio de relaciones de segundo orden; R = Dominio completo de relaciones; I^{A} U R = Dominio total del sistema (Unión del dominio de individuos y el dominio completo de relaciones); ^{v} = Extensión asignada (función unaria sobre R que asigna extensiones para todas de las relaciones de este conjunto).

En este caso, dos sistemas relacionales A y B tienen la misma estructura, esto es, isomórficos solo en el caso en el que ellos sean del mimo tipo de similaridad y sean uno a uno, sobre la función c, desde el dominio total de A al dominio total de B el cual preserva tanto el tipo y la estructura de todas las relaciones de A. Esto significa que A y B son isomórficos solo en el caso en que sean uno a uno sobre la función tipo-preservación c, tal que:

$$\text{(PR)} < i_1,...,i_1> \epsilon^{v}R \text{ si y solo si } <\mathrm{c}(i_1),...,\mathrm{c}(i_1)> \epsilon^{v}R$$

(PR) es el caso de una relación isomórfica (*isomorphic embedding*) entre dos Sistemas Relacionales Intensionales. Por último, un sistema relacional intensional es un sistema-modelo (SRI-modelo) de una situación de la vida real (*real-life situation*) cuando este satisface dos condiciones: i. el sistema relacional intensional contiene al menos algunos de los mismos individuos y relaciones de la situación real; ii. un n-túplos de objetos que se encuentren en la extensión de una relación del sistema relacional deben estar en el orden en que esa relación se da en la situación de la vida real.

Swoyer no considera todos los casos de aplicación matemática a las ciencias como un estricto isomorfismo. En la sección VI de (1991) señala diferentes tipos de representaciones estructurales aun cuando éstas no mantienen, un isomorfismo general (Swoyer, pp. 470 ss.). En todo caso, lo interesante de este tipo de propuestas es considerar cómo la aplicación matemática en términos de representación estructural se basa en la idea de *semejanza estructural*.

¿Cuál es el presupuesto, de este estructuralismo, para desarrollar una teoría de la representación bajo las condiciones arriba señaladas? Swoyer (1991) señala una respuesta directa a esta pregunta: la mejor explicación de por qué una teoría matemática se aplica a un fenómeno físico concreto exitosamente es porque la teoría matemática y el fenómeno a explicar tienen los mismos rasgos estructurales o, en otras palabras, tienen una estructura compartida. En palabras de Swoyer:

> I believe that the *best explanation* why a mathematical theory applies to the concrete phenomena it does is that it has many of the same *structural features* as those phenomena...that *shared structure* of precisely this sort explains the applicability of a wide range of representational systems…to the things they represent. (Swoyer, 1991, p. 451).[29]
>
> Creo que la mejor explicación de por qué un teoría matemática se aplica a los fenómenos concretos es que ésta tiene gran parte de las (mismas) *características estructurales* que los fenómenos ... una estructura compartida de esta clase, explica la aplicabilidad de

[29] Como el propio Swoyer señala en Krantz, et. Al. (1971) y Swoyer (1987) se pueden encontrar detalles muy específicos de su propuesta. Krantz, et. al, (1971), Foundations of Measurment, Vol. I, Academic Press, New York; Swoyer , Ch., (1987), "*The Methaphisics of Measurement*", en John Forge (ed.), Measurement, Realism and Objectivity, D. Reidel, Dordrecht, pp. 235-290. Consideramos también importantes otras fuentes de estructuralismo en matemáticas compatibles con el estructuralismo swoyeriano *ex. gr.*, Resnik, M., (1981) "*Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference*", Nous 15, pp. 529-550; Shapiro, S., (1983), "*Mathemattics and Reality*", Philosophy of Science 50, 523-48.

> una amplia gama de sistemas representacionales ... para las cosas que representan.[30]

Para Swoyer la teoría de conjuntos es la vía más apropiada para describir extensional y comprensivamente sistemas intensionales distintos y, con ello, determinar su grado de semejanza por medio de un razonamiento sustituto.

Si bien, los programas estructuralistas de Shapiro (1997, 2000) y Swoyer (1991) son distintos, particularmente porque el primero es claramente un platonista en busca de una fundamentación de las matemáticas, mientras el segundo es un filósofo de la ciencia interesado en cohesionar explicaciones sobre la representación científica, sus explicaciones estructurales de la aplicación matemática coinciden en muchos sentidos. Sin embargo sus respuestas sobre la aplicación se limitan a la disposición de una teoría matemática representacional de una estructura física, presuponiendo una semejanza del mundo físico con la organización sintáctica de una teoría matemática, como si esto explicara todo sobre el fenómeno de la aplicación. Además de presuponer, incorrectamente, la semejanza entre estructuras de diferente naturaleza como algo anterior a la aplicación.

Lo interesante, en todo caso, es ver en las propuestas estructurales bases para mantener una perspectiva de la aplicación matemática en términos de una representación descriptiva de los sistemas físicos basada en la idea de semejanza estructural. Como veremos a continuación, la dimensión epistemológica de este resultado será consistente con nuestra forma estructural de explicar la aplicación matemática —al margen de cualquier implicación realista de los hechos matemáticos. Adicionalmente, nuestra propuesta explicará propiedades básicas de la representación no consideradas en el estructuralismo de Shapiro y Swoyer. En consecuencia con estas propiedades la semejanza estructural entre matemáticas y física será el resultado de representar descriptivamente estados, procesos y fenómenos físicos, esto es, será una consecuencia de la aplicación y no una condición para ella.

[30] La traducción es responsabilidad mía.

"Síntesis Estructural", una nueva propuesta sobre la aplicación matemática

A continuación presentaremos teóricamente nuestra propuesta de la aplicación matemática aplicando algunos de los aspectos estructuralistas considerados en la sección anterior. Incorporamos en esta exposición las particularidades de nuestra propuesta. En la sección III.I ilustraremos nuestra explicación de la aplicación con un estudio de caso: análisis de algunos aspectos básicos para la constitución de la Termodinámica.

Si bien una teoría de la aplicación matemática debe incluir la comparación entre estructuras matemáticas y físicas presuponiendo un grado de semejanza entre ellas, la similaridad por sí sola no explica lo que teóricamente obtenemos cuando aplicamos estructuras matemáticas a las teorías físicas.

En términos abstractos, una explicación integral del fenómeno de la aplicación matemática debe considerar, tanto las condiciones estructurales para aplicar un sistema matemático a un sistema físico, como los productos generados por la aplicación para el desarrollo de la teoría física y, ver en la semejanza estructural la consecuencia de tales productos. Especifiquemos.

Serán tres aspectos las referencias novedosas de nuestra propuesta. En primer lugar, la semejanza estructural entre matemáticas y física no es previa sino por la aplicación. En segundo lugar, la aplicación matemática como una representación estructural descriptiva genera nuevos conceptos. En tercer lugar, gracias a estos nuevos conceptos es posible obtener consecuencias físicas de estructuras matemáticas.

Lo anterior es consecuencia de la siguiente observación. Conceptos como, 'temperatura', 'calor específico', 'transferencia de calor', 'equivalente mecánico del calor' presentes en distintas teorías físicas, y particularmente, en la termodinámica, no son ni originariamente conceptos matemáticos ni originariamente conceptos físicos. ¿Cómo surgen estos conceptos?

Iniciemos nuestra propuesta considerando la semejanza entre estructuras. ¿Cómo se establece la semejanza entre estructuras de diferente naturaleza (matemáticas/físicas)? Nuestra respuesta a esta pregunta es independiente a cualquier presupuesto realista de la matemática y de la física. Consideramos innecesario presuponer una estructura ontológica de los fenómenos físicos en grados parecida, por ejemplo, a la ontología de los números naturales para relacionarlas. Demostrar ontologías es una tarea filosófica muy difícil de realizar. Por esta razón los presupuestos ontológicos, de los cuales no tenemos la carga de la prueba, están a la orden del día en los programas realistas-fundacionistas sobre los hechos matemáticos y su referencia.

Por el contrario, la forma más natural de relacionar estructuras diferentes, en este caso, estructuras matemáticas con estructuras físicas, es aplicando, por ejemplo, la estructura de los números naturales a un fenómeno físico en los siguientes términos. No es el fenómeno físico el que tiene una estructura parecida a los números naturales, y por esta razón, aplicamos los naturales al fenómeno físico tan bien, sino porque aplicamos los naturales a los fenómenos físicos es que tenemos la estructura matemática de dichos fenómenos. La semejanza entre estructuras no se da antes de la aplicación, surge con la aplicación misma.

Ahora bien, el resultado anterior cobra sentido por el segundo aspecto de nuestra propuesta: conceptos de aplicación. Con 'conceptos de aplicación' designamos a una delimitación de espacios matemáticamente, los cuales, a su vez se interpretarán físicamente. Sin la aplicación de estos nuevos conceptos, el fenómeno físico no tendría una estructura similar a la teoría matemática que le aplicamos. El concepto, por ejemplo, de "fuerza" en una teoría física refiere a una estructura matemática interpretada físicamente. La expresión teórica de "fuerza" $\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$ expresa un espacio delimitado matemáticamente, una representación matemática-descriptiva de tal espacio. Este punto determina el grado de semejanza entre una estructura matemática y un fenómeno físico por explicar. Cuando decimos que el cálculo de $\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$ nos indica, por ejemplo, la intensidad del intercambio de momento lineal entre dos partículas o sistemas de partículas capaz de modificar la forma de los cuerpos materiales; señalamos la interpretación física de la estructura matemática. El concepto de "fuerza", como un concepto de aplicación, nos permite entonces comparar estructuras de diferente naturaleza, nos permite establecer su similaridad. Lo mismo sucede con los conceptos de 'temperatura', 'calor', 'entropía', 'trabajo', etc. Solo bajo estas condiciones semánticas de la aplicación cobra sentido afirmar explicaciones científicas a partir de cálculos matemáticos. Lo anterior le da sentido a la tercera particularidad de nuestra propuesta.

Nada de lo dicho hasta el momento es un argumento, a favor o en contra de un realismo matemático tipo Shapiro (1997, 2000) o, a favor o en contra de sostener una ontología estructural altamente similar entre la matemática y los fenómenos físicos tipo Swoyer, (1991). Como podemos notar, una teoría de la aplicación matemática no se centra en la naturaleza y referencia de los objetos de cada estructura, esto es, en los objetos de aplicación de las teorías, sino en las teorías matematizadas mismas, en la manera en que surgen y emplean conceptos de aplicación.

Adicionalmente, nuestra defensa por una síntesis estructural tiene otras consecuencias filosóficamente importantes. Uno de los grandes retos por cumplir es encontrar una manera de conciliar la tensión entre respuestas monistas y dualistas de la aplicación.

La aplicación como una representación estructural tiene varias ventajas. Mediante esta perspectiva es posible relacionar consistentemente la similaridad estructural (monismo epistemológico) con el carácter auxiliar de las matemáticas (dualismo epistemológico) en una sola explicación de la aplicación. Las representaciones matemáticas pueden auxiliar en el diseño de teorías científicas y en la descripción de sus consecuencias al compartir una estructura similar.

La similaridad entre estructuras desde la "síntesis estructural" incorpora dos ideas. En primer lugar, existe un monismo epistemológico entre matemáticas y física pues ambas ciencias comparten los siguientes aspectos en sus estructuras teóricas. Las matemáticas y la física coinciden en la búsqueda del conocimiento de sus objetos, en ambos casos se cuenta con experimentación y evidencia (en el caso de las matemáticas las pruebas son análogas a la experimentación física y a la evidencia observable), la matemática se organiza deductivamente y la física incorpora esta organización deductiva en el diseño de sus teorías y en sus consecuencias. En este punto la única diferencia entre matemáticas y física es la incorporación, por parte de esta última ciencia, del método de contrastación empírica. Adicionalmente, en ambos casos, la opinión de los especialistas es crucial para considerar los problemas clásicos y de vanguardia. Reparar en cada uno de estos aspectos nos permite definir la matemática análogamente a la ciencia física. Lo cual nos permite considerar una perspectiva monista epistemológica de la aplicación.

En segundo lugar, de acuerdo con la síntesis estructural no hay similaridad sin aplicación. La semejanza entre estructuras matemáticas y físicas depende de la aplicación. Anteriormente hemos visto cómo al relacionarse dos estructuras (matemática y física) se producen o redefinen nuevas condiciones teóricas: conceptos de aplicación. De acuerdo con nuestra propuesta la semejanza entre estructuras de diferente naturaleza se construye gracias a la postulación de éstos nuevos conceptos. Si no identificamos estos nuevos conceptos en las teorías físicas, el estado, proceso, o fenómeno físico no tendría alguna estructura similar a la estructura matemática que los modela. De acuerdo con la síntesis estructural entonces existe una segunda consecuencia monista epistemológica en la explicación de la aplicación matemática. Pero, en esta ocasión, el carácter monista de la síntesis estructural dependerá, curiosamente, de la condición dualista epistemológica de la aplicación. Esto es, depende del resultado de aplicar una estructura matemática como una descripción exitosa de una regularidad física.

Si lo anterior tiene sentido, el aspecto monista de la similaridad y el aspecto dualista sobre el carácter auxiliar lejos de estar en tensión en la síntesis estructural, representan dos propiedades consistentes del fenómeno de la aplicación, desde las cuales puede explicarse el éxito de las matemáticas con sus aplicaciones.

Como hemos podido ver la síntesis estructural ofrece una explicación más completa de la aplicación matemática en comparación con las propuestas monistas y dualistas clásicas.

Esta nueva explicación integra en una sola propuesta aspectos definitorios de la naturaleza de la aplicación: similaridad estructural, papel auxiliar de la representación matemática, conceptos de aplicación y semejanza estructural por la aplicación. En consecuencia, la síntesis estructural logra dirimir la tensión entre compromisos dualistas y monistas de la aplicación, en términos de un monismo y dualismo de corte epistemológico.

Ahora bien, ¿las tendencias dualistas y monistas clásicas podrían dar cuenta, particularmente, de la generación de nuevos conceptos por la aplicación?

En términos generales, si los dualistas consideran a las matemáticas tan solo como un lenguaje auxiliar para la física en el momento de su aplicación, su reto será señalar cómo éste papel auxiliar de las matemáticas explica el surgimiento de nuevos conceptos. Generalmente cuando aplicamos un lenguaje no surgen nuevos conceptos o entidades. Hasta dónde un dualista podría ser consistente con la diferencia entre matemáticas y ciencias y, al tiempo, considerar el hecho de un nuevo vocabulario y el enriquecimiento conceptual de las ciencias como consecuencia de la aplicación matemática.

El reto para los monistas es: ¿cómo un monismo estándar puede mantener la similaridad entre matemáticas y ciencias considerando los conceptos emergentes en el momento de la aplicación?. ¿Podríamos explicar por medio de una consideración monista el caso de conceptos de aplicación, *ex. gr*. "cantidad de calor"?, ¿esto mismo podría ocurrir en el caso de aplicar la física a las matemáticas o a las otras disciplinas? Si la respuesta es afirmativa, esto es, por medio de la aplicación matemática a la ciencia o por medio de la aplicación física a la matemática es posible explicar conceptos de aplicación, entonces permanece su tesis fuerte sobre la similaridad. Pero si la respuesta es negativa entonces las matemáticas y las ciencias son diferentes. En consecuencia, la pregunta por resolver en este caso sería, ¿si nosotros hacemos matemática experimental y aplicamos la física para desarrollar alguna teoría matemática surge con ello una nueva explicación del fenómeno matemático a partir de conceptos emergentes dada la aplicación? La respuesta afirmativa es poco probable. Sin duda esto representa un reto fuerte para el monista estándar.

Si bien consideramos a nuestra tesis válida para toda la aplicación matemática a la física, en el siguiente sub-apartado desarrollaremos un específico estudio de caso: **"Estudio de Caso: Termometría, Calorimetría y Equivalente Mecánico del Calor"**. La finalidad de este estudio será ilustrar cada uno de los aspectos teóricos de la síntesis estructural. Con esto pondremos a prueba nuestra propuesta y, al tiempo cumpliremos con la exigencia de su contrastación a la luz de una teoría física particular.

III. 1 Estudio de Caso: Termometría, Calorimetría y Equivalente Mecánico del Calor

Objetivo General del Sub-Apartado III.I

Objetivo (i): Explicar nuestra tesis de la aplicación matemática: Síntesis Estructural, a partir de algunos aspectos constitutivos de la Termodinámica.

Objetivos Particulares del Sub-Apartado III. I 1

Objetivo (i): explicar nuestra tesis sobre la aplicación matemática, a partir de la conformación de los conceptos de temperatura, transferencia de calor y calor específico, en el campo de la Termometría y la Calorimetría.

Objetivo (ii): explicar a la temperatura como una propiedad termométrica cuyo concepto surge con la aplicación matemática.

Objetivo (iii): mostrar cómo la transferencia de calor, en el campo de la calorimetría, sólo cobra sentido si existe una descripción matemática que capture la regularidad de tal proceso.

Objetivo (iv): explicar cómo la forma de entender los estados y procesos térmicos depende de la forma en que algebraicamente los describimos.

Objetivo (v): explicar cómo de la temperatura (°C y °F), de la transferencia de calor ($m_h \Delta t_h = -m_c \Delta t_c$) y del calor (Q) específico se sostiene, la aplicación matemática como un dispositivo generador de conceptos y, la semejanza estructural entre sistemas matemáticos y sistemas físicos como una relación posterior a la aplicación.

Objetivo (vi): presentar conclusiones parciales del estudio de caso.

Objetivos Particulares del Sub-apartado III. I 2

Objetivo (i): dar continuidad a nuestra propuesta de la aplicación matemática mostrando cómo una función matemática $\Delta U = W_{ad}$ (Equivalente Mecánico del Calor) constituye un principio general en física.

Objetivo (ii): indicar en qué condiciones surge la teoría del fluido calórico.

Objetivo (iii): distinguir explicaciones cualitativas y experimentación cuantitativa en los trabajos de Antoine-Laurent Lavoisier y Benjamin Thompson sobre el principio calórico y la hipótesis del calor como movimiento, respectivamente.

Objetivo (iv): ver cómo a partir de las descripciones algebraicas no solo evoluciona el concepto de calor como fluido imponderable hacia un concepto de calor como forma de energía, sino cómo estas descripciones matemáticas constituyen al $\Delta U = W_{ad}$ (Equivalente Mecánico del Calor) como un principio general termodinámico.

Objetivo (v): presentar una sistematización de conclusiones de nuestro estudio de caso.

El presente sub-apartado lo dedicaremos a un Estudio de Caso. Este Estudio de Caso lo hemos dividido en dos secciones. La primera sección corresponde al análisis de la Termometría, Calorimetría y La Transferencia del Calor. En la segunda parte analizaremos La Teoría Calórica y el Equivalente Mecánico del Calor. La motivación general de este estudio no es aportar directamente resultados sobre aspectos particulares de la filosofía de la física, sino delinear nuestra teoría de la aplicación matemática a partir de algunos aspectos que fueron constituyendo a la ciencia de la energía.

El objetivo entonces de ambas secciones será mostrar al lector cómo funciona nuestra teoría de la aplicación matemática con ciertos aspectos de la Termodinámica. Los resultados de nuestro análisis serán tan solo una ilustración del funcionamiento de la aplicación. Posteriormente, a partir de otras investigaciones, pensamos en una genuina posibilidad de extender nuestros resultados a casos científicos de diferentes áreas, en los que la aplicación matemática ha sido fundamental para su desarrollo.

La estrategia que seguiremos para lograr nuestro objetivo será fijar nuestra atención en la evolución de algunos de los conceptos de la física, conceptos, que han marcado los fundamentos más básicos de la termodinámica: temperatura, calor, trabajo, energía. Para ello, las dos secciones de nuestro estudio son indispensables.

En la primera sección, veremos que con la evolución y redefinición de los conceptos de temperatura y calor, los físicos distinguen en sus trabajos experimentales entre percepciones intuitivas, experimentación cualitativa, experimentación cuantitativa y descripción algebraica de resultados experimentales-leyes o principios generales. Veremos que la matematización de una teoría física cobra sentido, por una parte, en la noción misma de observación cuantitativa y, por otra, en la descripción algebraica de resultados. A manera de ejemplo veremos que estos aspectos se relacionarán con la investigación experimental de Joseph Black al explicar la transferencia de calor como una ley general que antecede al Principio Cero de la Termodinámica.

En la segunda sección aplicaremos todo el análisis hecho en la primera parte del estudio. Pero en este caso, enfatizaremos la forma en que las descripciones algebraicas de resultados experimentales constituyen leyes o principios físicos generales. Como ilustración retomaremos los resultados experimentales de Black sobre la transferencia del calor y, veremos cómo James Prescott Joule llega de manera similar al Equivalente Mecánico del Calor como un principio general termodinámico.

Mediante el desarrollo de la primera y segunda sección de nuestro estudio de caso, constataremos que la evolución y el refinamiento de los conceptos de temperatura, calor, trabajo y, la aparición del concepto de energía, fueron el resultado de la aplicación matemática a la investigación experimental.

Como veremos, a principio del siglo XVII no había forma, por ejemplo, de indicar la temperatura de un cuerpo al no disponerse de una escala matemática y un dispositivo que establecieran una medida y lectura estándar de dicho estado. Tampoco, antes de 1759, estaban las condiciones de hablar propiamente de transferencia de calor, al no contar con una descripción matemática que pudiera establecer sistemáticamente la forma en que los cuerpos adquieren o pierden "algo" dadas ciertas condiciones de sistemas físicos. Mostraremos entonces que solo gracias a la aplicación matemática, ya sea, por las observaciones cuantitativas o por las descripciones algebraicas de resultados, cobran sentido, por ejemplo, los conceptos de 'temperatura' y 'transferencia de calor'. Esta condición nos permitirá llamar a estos conceptos, conceptos de aplicación matemática.

Como resultado de nuestro análisis confirmaremos que la homomorfía entre el sistema matemático que utilizamos para modelar el sistema físico y el sistema físico es posterior a la aplicación. Esto es, la homormofía entre estructuras de diferente naturaleza (matemática y física) se explica por la aplicación. Basados en las descripciones algebraicas de resultados experimentales, nos daremos cuenta que conocemos la estructura matemática de algún estado o proceso físico *a posteriori*. Con ello, negamos que la semejanza entre estructuras matemáticas y estructuras físicas se establezca antes de la aplicación bajo el presupuesto de que los sistemas físicos intrínsecamente tengan una estructura matemática.

La homomorfía entre estructuras matemáticas y físicas se establece cuando un científico aplica una función para describir matemáticamente la regularidad de un proceso físico de acuerdo con un resultado experimental. Por ejemplo, sobre la transferencia del calor, la función matemática $m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c$ describe una regularidad física presente en un proceso de transferencia para llegar al equilibrio entre dos masas de agua. Esta descripción concuerda además con diferentes experimentos. En este caso, basado en distintos resultados experimentales, el científico postula que la ecuación es verdadera para cualquier sistema termodinámico congruente con tales condiciones. En esta medida, es posible conocer que la transferencia de calor entre dos masas diferentes de agua para alcanzar el equilibrio tenga la estructura matemática $m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c$, y no antes.

En suma, a partir de este estudio de caso, el lector podrá constatar que la aplicación matemática se explica en términos de un dispositivo que permite generar nuevos conceptos en las ciencias. Estos conceptos de aplicación se integrarán a las teorías permitiendo su desarrollo. Constataremos, adicionalmente, que la aplicación matemática a sistemas físicos ha sido fundamental para avanzar en el conocimiento de la naturaleza del calor. Por medio de esta aplicación, los científicos han podido incluir en la investigación experimental observaciones cuantitativas (patrones de medición de estados físicos) en el diseño de sus experimentos, así como, formular descripciones algebraicas para generalizar los distintos resultados experimentales. Tales descripciones matemáticas constituirán de hecho las diferentes leyes o principios generales de las ciencias. Por último, confirmaremos que la semejanza entre estructuras matemáticas y estructuras físicas será posterior a la aplicación y no anterior. Conocemos que los estados y procesos físicos tienen una estructura matemática, no porque percibamos su estructura matemática en el mundo, sino porque describimos algebraicamente su comportamiento, su regularidad a partir de experimentaciones hechas para ello. Es aquí cuando nos damos cuenta de su orden matemático y no antes.

1

Termometría, Calorimetría y Transferencia de Calor

La finalidad de esta sección es explicar nuestra tesis sobre la aplicación matemática, a partir de la conformación de los conceptos de temperatura, transferencia de calor y calor específico, en el campo de la Termometría y la Calorimetría.

En primer lugar, veremos que la temperatura, en la termometría, no es la percepción directa de caliente y frío de los cuerpos o sustancias, sino el nombre de un concepto cuya extensión será una magnitud. Desde esta distinción mostraremos que la temperatura es una propiedad termométrica (medida) cuyo concepto surge con la aplicación matemática.

En segundo lugar, mostraremos que el proceso de transferencia de calor, en la calorimetría, solo cobra sentido si existe una descripción matemática que capture la regularidad del proceso. Lo cual nos permitirá sostener que la forma de explicar los procesos térmicos también depende de la forma en que algebraicamente los describamos.

En tercer lugar, propondremos que tanto de la noción de temperatura como magnitud que mide una propiedad termométrica, como de las descripciones algebraicas de la transferencia de calor y del calor específico en el nivel de los resultados experimentales, se sostienen dos características centrales de nuestra tesis sobre la aplicación. Por una parte, la aplicación matemática es un dispositivo que genera nuevos conceptos en la investigación científica cuantitativa (conceptos de aplicación). Por otra, la semejanza estructural entre el sistema matemático que utilizamos para modelar sistemas físicos y el sistema físico será posterior a la aplicación. Esto es, la homomorfía entre estructuras físicas y estructuras matemáticas se explica por la aplicación. Con esto, dejamos a un lado cualquier presupuesto que explique la semejanza estructural entre matemáticas y física como rasgo ontológico prevaleciente en tales estructuras.

Por último, presentaremos conclusiones de esta primera sección.

El desarrollo de la termodinámica ha tenido distintas etapas a lo largo de su historia. Antes de llegar a la formulación del número de Joule, distintos científicos estaban muy interesados por la naturaleza del calor. Particularmente, son tres los desarrollos más importantes que anteceden al descubrimiento y formulación matemática del equivalente mecánico del calor: la termometría, la calorimetría y las teorías del calor.

Podemos pensar que si un metal, una piedra, un corcho, una madera, agua como ejemplares de clases materiales se encuentran en la misma temperatura, nuestros sentidos son capaces de percibir este equilibrio. Sin embargo, un metal, una piedra, un corcho, una madera y el agua se sienten enteramente diferentes al tacto cuando están a la misma temperatura. Por tanto, la afirmación de que todos los cuerpos se comunican libremente entre sí y que al no estar dispuestos a desigualdad alguna debido a una acción externa, adquieren la misma temperatura como se indica en un termómetro (Ley de Black 1759-1762) no será un asunto obvio. Esta ley general del calor de Joseph Black será el resultado de experimentos cuantitativos[31] en donde claramente se distinguen las percepciones intuitivas o directas de caliente y frío de los objetos materiales, de las propiedades termométricas que tienen dichos objetos.

Si bien el desarrollo de la ciencia del calor se basó en principio en las percepciones intuitivas o directas de caliente y frío, fue hasta la invención del termómetro que esta ciencia progresa con paso firme.[32] El termómetro es un dispositivo que sirve para medir temperaturas. Es un instrumento sensible al medio que permite la aplicación de una escala de medición a los cambios de temperatura que sufren los cuerpos asignándoles una magnitud.

En términos muy generales lo que se necesita para construir un termómetro, en tanto dispositivo que aplica una escala de medida, son puntos fijos, es decir, puntos que refieran a estados en los cuales la temperatura permanezca constante. Por ejemplo, hay puntos fijos en los termómetros que indican sucesos de la naturaleza fácilmente reproducibles en un

[31] Tomo las expresiones 'percepciones intuitivas', 'experimentación cualitativa', 'experimentación cuantitativa' y 'descripciones algebraicas' del físico Arnold, B. Arons, (1970), Evolución de los conceptos de la física, Trad. Lorenzo Ranzo, México.
De acuerdo con Arnold, la percepción intuitiva es aquella información sensorial que provienen de nuestra percepción directa de estados y procesos físicos. Por ejemplo, cuando tocamos una piedra o un metal sentimos su calor pero, de ninguna manera, nos dice Arnold, con ello constatamos una propiedad térmica de tales objetos, pues nuestra percepción no mide lo que percibe. De hecho, Arnold basado en las observaciones calorimétricas de Black, nos dice que nuestros sentidos no justifican el estado de equilibrio de diferentes materiales. Los sentidos no verifican los estados de equilibrio térmico. Para dar cuenta de un estado de equilibrio entre diferentes materiales se requieren observaciones cuantitativas *i.e*. patrones de medición que puedan aplicarse sistemáticamente a estados físicos (Arnold, 1970, Termómetros y Estado de equilibrio, pp. 431-434). Cuando el físico incluye, en primer lugar, observaciones cuantitativas para el diseño de sus experimentos, se dice, que su investigación se conduce bajo una línea de experimentación cuantitativa. Cuando el científico además incluye descripciones algebraicas de sus resultados experimentales y, constata sistemáticamente la utilidad de la ecuación con diferentes experimentos, no solo se completa el carácter cuantitativo de su investigación, sino que, el científico tendrá como finalidad postular una ley o principio general de la física.

[32] Este tipo de consideraciones son consistentes con las observaciones que aparecen en Conant, James Bryant (*et. al*) (1957) como parte de sus comentarios sobre el origen y el declive de la Teoría Calórica: *"As the present Case History will show, quantitative studies of phenomena connected with heat became possible only after the invention of the thermometer…"*. Conant, James Bryant (*et. al*) (1957), Harvard Case Histories in Experimental Science, Volumen I, Caso 3, Harvard University Press, Cambridge Mass. "Como el presente caso histórico lo mostrará, los estudios cuantitativos de los fenómenos relacionados con el calor fueron posibles solo después de la invención del termómetro...". La traducción es responsabilidad mía.

laboratorio y que ocurren siempre a la misma temperatura *ex. gr*. el punto de congelación y el punto de ebullición del agua.

Toda termometría se basa en la observación de cambios, de lo que llamaron posteriormente alguna "propiedad termométrica" de una sustancia material conforme se vuelve más caliente y fría. Un ejemplo cercano a la vida diaria de esta observación es verificar el nivel de agitación de una sustancia a partir de la dilatación del mercurio al interior de un termómetro. Esto es, para diseñar un instrumento que mida la temperatura se elige una cualidad de la materia o sustancia que sea fácilmente observable, que varíe de manera importante con la agitación de sus partículas, que sea fácil de medir y que nos permita relacionar su variación con la agitación que tiene el cuerpo. La cualidad elegida en los termómetros de mercurio es la dilatación. El mercurio se utiliza porque es un metal líquido entre – 20°C y 100°C y porque se dilata mucho. Se encierra el metal en un tubo fino para que al dilatarse un poco avance mucho por el tubo (cuanto más fino sea el tubo más centímetros avanzará el mercurio). Midiendo longitudes de la columna podemos establecer una relación entre la dilatación y el nivel de la agitación de la sustancia o cuerpo a medir. Otro ejemplo serían los gases, líquidos y sólidos, los cuales, se expanden y se contraen a medida que su temperatura aumenta o disminuye, si la presión se mantiene constante. Pero, ¿en qué consiste realmente un termómetro?, ¿qué es exactamente una propiedad termométrica?, ¿es lo mismo hablar de la temperatura que del calor?

Nuestro interés por los termómetros no es el material con el que está construido cada uno de sus tipos. Ni tampoco hacer una reseña histórica sobre la evolución de este instrumento. Aunque a continuación mencionaremos de manera muy general algunos de los diferentes tipos de termómetros que han existido, nuestro interés se fija en la escala de medición que representan.

Alrededor de 1600 Galileo con la finalidad de comparar diferencias de temperatura[33] y cambios de presión, inventó un termoscopio que consistía en un bulbo de vidrio que

[33] En esta época aun no se marcaban las diferencias entre temperatura y calor. Como veremos más adelante, previo a los experimentos cuantitativos de Joseph Black, ambos conceptos se utilizaban indistintamente.

contenía aire con un largo tubo que se extendía hacia abajo y se introducía en un recipiente de agua. A medida que el tubo se calentaba o se enfriaba, el aire en el interior se extendía o se contraía y el nivel de agua subía o bajaba dentro del tubo. Este dispositivo, era naturalmente sensible a las variaciones de la presión atmosférica así como al calentamiento o enfriamiento.

Sin embargo, el termoscopio sólo servía para comparar diferencias de temperatura y no para medir diferencias de temperatura de los cuerpos o sustancias. La desventaja de este dispositivo era que sólo podían obtenerse datos cualitativos y no observaciones cuantitativas[34], ya que carecía de una escala que permitiese cuantificar las variaciones de temperatura y estandarizar la lectura de un dispositivo que aplicase dicha escala.[35]

Posteriormente los termoscopios fueron mejorados por otros investigadores. La sensibilidad a las variaciones de presión fue eliminada por medio del uso de líquidos completamente sellados en complicados bulbos y tubos de vidrio. Hacia al final del siglo XVII, se introdujo la práctica de calibrar las escalas termométricas marcando puntos fijos (tales como los puntos de fusión de la nieve y la mantequilla) y dividiendo la escala en cierto número arbitrariamente escogido de intervalos uniformes. Newton llevó a cabo experimentos con un dispositivo de esta forma.

Entre los años de 1714 y 1717, D. G. Fahrenheit construyó termómetros de alcohol y mercurio, usando también bulbos y tubos cilíndricos de vidrio y propone lo que ahora conocemos como escala Fahrenheit. Durante el periodo 1710-1743 se desarrolló la escala Celsius (centígrada) de temperatura.[36]

[34] Una observación cuantitativa es la determinación de una medida, la determinación de una magnitud. Por eso, por observaciones cuantitativas se entiende la determinación de una escala de medición, el uso de un aparato o dispositivo que aplique tal escala y un proceso específico para utilizar dicho instrumento.
[35] La idea de proveer al termoscopio con una escala y convertirlo así en un termómetro, se atribuye a Sanctorius Sanctorius, colega de Galileo, en 1611. Como veremos más adelante, la escala es necesaria para la realización de observaciones cuantitativas y con ello para la matematización de estados o procesos físicos.
[36] La escala Celsius se llama así por el astrónomo sueco Anders Celsius. Durante los años de 1740, Celsius fue de los primeros en proponer y utilizar una escala centesimal.

La escala Fahrenheit y la escala Celsius indican un estado de temperatura de un cuerpo o sustancia material. La escala Celsius, por ejemplo, en su *origen* asignaba el número 0 (cero) para indicar un punto de vapor y el número 100 (cien) para indicar un punto de hielo —actualmente estas magnitudes de la escala Celsius se invierten.[37] Lo que hace la escala de medición es indicar por medio de números, magnitudes que a su vez corresponden a propiedades termométricas de objetos o sustancias materiales.

En general, la relación entre los números y la temperatura como una propiedad termométrica se explica de la siguiente manera. La escala de medición grabada en un dispositivo como el termómetro de mercurio está constituida por una serie ascendente de números naturales que van, en el caso de la escala Celsius, del número 0 (cero) al número 100 (cien). Cada número representará una magnitud que va de 0° C a 100°C respectivamente cuando de la aplicación del dispositivo a un cuerpo o sustancia, el mercurio que contiene se dilate o se contraiga deteniéndose en algún número. El número indicará una magnitud en °Cs que corresponderá a la medida de una propiedad o estado termométrico. De tal suerte que al medir una longitud se medirá la temperatura.

Claramente el número 0 es distinto al punto de vapor. El 0 (cero) es un número, un objeto matemático abstracto, mientras el punto de vapor es un estado físico. Sin embargo, de acuerdo con los indicadores numéricos de la escala Celsius, todo cuerpo o sustancia material que se encuentre en el punto 0 (cero) se encontrará en el punto de vapor y viceversa. Ahora bien, ¿qué significa que un cuerpo "se encuentre en el punto cero" cuando el 0 (cero) es un objeto matemático abstracto? Significa que al cuerpo se le ha asignado una magnitud por medio de una escala que permite cuantificar su condición térmica. De ninguna manera, significa que el objeto matemático se ha sintetizado ontológicamente con algunas propiedades térmicas del objeto o sustancia física.

Para la termometría, en suma, el número 0 (cero) indica una magnitud en términos de 0°C la cual corresponde a una medida de un estado físico o propiedad física de una sustancia (en este caso, punto de vapor). Será en este sentido que el número 0 (cero) de la escala de

[37] Carl Linneo invirtió este orden resultando la escala que conocemos actualmente como *escala Celsius*.

medición equivaldrá a un estado específico de un cuerpo. En este caso, Anders Celsius ya no habla de una percepción intuitiva de calor y frio de un cuerpo o sustancia material, sino de una propiedad medible que tiene dicho material: su temperatura. Esta propiedad es determinable experimentalmente mediante la aplicación de la escala.

Las "propiedades termométricas" no son entonces el resultado de una percepción directa de calor o frío de un cuerpo, sino son el resultado de una observación cuantitativa que describe una propiedad física mediante una magnitud. Toda observación cuantitativa presupone el uso de una escala de medición, un instrumento o dispositivo que aplique tal escala y un proceso específico para utilizar el dispositivo y estandarizar su lectura. La temperatura como una propiedad termométrica es una conjunción entre el cambio de un estado que sufre un cuerpo o sustancia material al volverse más caliente y fría y una indicación matemática de la variación o permanencia de este estado termométrico.[38] ¿Qué hace entonces una escala de medición? Indicar magnitudes y con ello propiedades termométricas correspondientes de cuerpos o sustancias materiales.

En el marco de un experimento sobre el calor entonces, las escalas de medición cobran una importancia fundamental en diferentes sentidos. En primer lugar, de la aplicación de la escala mediante un dispositivo depende un patrón de medida estándar de la temperatura de los cuerpos o sustancias. Lo cual es una matematización inicial en un modelo experimental sobre el calor. Al medir longitudes se miden temperaturas, se miden propiedades físicas de cuerpos o sustancias. En segundo lugar, con 'temperatura' no hacemos referencia a eso que percibimos cuando tocamos un cuerpo o una sustancia, lejos de esto, nombramos un nuevo concepto.[39] Este concepto refiere a magnitudes, medidas que les corresponden estados

[38] Si bien es correcto afirmar que aun cuando no haya percepción directa o intuitiva de las propiedades termométricas, hay otro tipo de percepción indirecta a través de la manifestación directa o intuitiva de una de sus consecuencias *i. e*. la de producir una cierta expansión en el líquido del termómetro; sin embargo este no es nuestro punto principal. Nuestro interés no es marcar distinciones entre percepciones directas (intuitivas) y percepciones indirectas (por medio de dispositivos) a partir de una teoría de la percepción específica. Nuestro punto es establecer que las propiedades termométricas dependen de la matemática, son propiedades producidas mediante descripciones matemáticas.

[39] Al respecto, en Conant, James Bryant (*et. al*) (1957) se señala: "*…excerpts from the published lectures of Joseph Black, shows how the thermometer made possible new concepts of fundamental importance, and how it led in turn to the invention of a new type of thermal instrument…*" Conant, James Bryant (*et. al*) (1957)

físicos. En tercer lugar, las magnitudes registradas en los experimentos específicos servirán como medios iniciales para la formulación de una descripción matemática más elaborada de resultados experimentales. Estas magnitudes aparecerán como patrones constantes en funciones matemáticas que describan ahora procesos físicos entre diferentes cantidades o tipos de sustancias.

Lo anterior puede constatarse, por ejemplo, con el descubrimiento y la formulación matemática de la ley general del calor de Black:

> This equilibrium is somewhat curious. We find that, when all mutual action is ended, a thermometer applied to any one of the bodies undergoes the same degree of expansion. Therefore the temperature of them all is the same. No previous acquaintance with the peculiar relation of each body to heat could have assured us of this, and we owe the discovery entirely to the thermometer. **We must therefore adopt, as one of the most general laws of heat, the principle that all bodies communicating freely with one another, and exposed to no inequality of external action, acquire the same temperature, as indicated by a thermometer**.[40] All acquire the temperature of the surrounding medium.
>
> By the use of thermometers we have learned that, if we take a thousand, or more, different kinds of matter such as metals, stones, salts, woods, cork, feathers, wool, water and a variety of other fluids although they be all at first of different temperatures, and if we put them together in a room without a fire, and into which the sun does not shine, the heat will be communicated from the hotter of these bodies to the colder, during some hours perhaps, or the course of a day, at the end of which time, if we apply a thermometer to them all in succession, it will give precisely the same reading. The heat, therefore, distributes itself upon this occasion until none of these bodies has a greater demand or attraction for heat than every other of them has; in consequence, when we apply a thermometer to them all in succession, after the first to which it is applied has reduced the instrument to its own temperature, none of the rest is disposed to increase or diminish the quantity of heat which that first one left in it. This is what has been commonly called an "equal heat," or "the equality of heat among different bodies"; I call it the equilibrium of heat (Black, 1803, en Conant, James Bryant (*et*. *al*) (1957) Volumen I, Caso 3, Secc. 2).
>
> Este equilibrio es algo curioso. Nos encontramos con que, cuando toda la acción mutua se termina, un termómetro aplicado a cualquiera de los cuerpos se somete

<u>*Harvard Case Histories in Experimental Science*</u> (1957), Volumen I, Caso 3, Harvard University Press, Cambridge Mass. "... extractos de las conferencias publicadas de Joseph Black, muestran cómo el termómetro hizo posible nuevos conceptos de importancia fundamental, y cómo a su vez éste dirigió, a la invención de un nuevo tipo de instrumentos térmicos ...". La traducción es responsabilidad mía.

[40] Las negritas son responsabilidad mía.

al mismo grado de expansión. Por lo tanto la temperatura de todos ellos es la misma. No hay conocimiento previo de la relación peculiar de cada cuerpo con el calor que pudiese habernos asegurado de esto, éstos resultados se los debemos enteramente al descubrimiento del termómetro. **Por lo tanto debemos adoptar, como una de las leyes más generales del calor, el principio de que todos los cuerpos comunicados libremente entre sí, y no expuestos a la desigualdad de la acción externa, adquieren la misma temperatura, como lo indica el termómetro**. Todos adquieren la temperatura del medio circundante.

Por el uso de termómetros, hemos aprendido que, si tenemos mil, o más, diferentes tipos de materia, tales como metales, piedras, sales, madera, corcho, plumas, lana, agua y una variedad de otros líquidos, a pesar de estar todos ellos, en un primer momento, a diferentes temperaturas, y si los ponemos juntos en una habitación sin un fuego, y en el que los rayos del sol no afecten, el calor será comunicado por el más caliente de estos cuerpos al más frío, durante unas horas tal vez, o lo largo de un día, al final de este tiempo, si aplicamos un termómetro sucesivamente a todos los materiales, éste dará exactamente la misma lectura. El calor, por lo tanto, se distribuye en este caso hasta que ninguno de estos cuerpos tenga mayor demanda o atracción de calor que cualquier otro de ellos, en consecuencia, cuando aplicamos un termómetro a todos los materiales en sucesión, después del primero al que se aplica se ha reducido el instrumento a su propia temperatura, ninguno de los demás está dispuesto a aumentar o disminuir la cantidad de calor en comparación con el primero anterior [y así en sucesión]. Esto es lo que comúnmente se ha llamado un "calor igual", o "la igualdad de calor entre diferentes cuerpos", yo lo llamo el equilibrio de calor.[41]

Por el uso de termómetros hemos aprendido que, si tomamos…diferentes clases de sustancias o materiales, tales como metales, piedras, sales, maderas, corchos, plumas, lanas, agua y otras variedades de fluidos, aunque inicialmente todos ellos tengan diferentes calores, y si ellos son colocados, en el mismo cuarto, juntos, sin fuego, y si el sol no puede penetrar en ese cuarto, el calor será comunicado de los cuerpos más calientes a los más fríos, proceso que puede durar algunas horas y hasta un día o más. Si, al final de ese tiempo, aplicamos el termómetro a todos ellos en sucesión, todos marcarán el mismo grado.

El calor entonces, se distribuye en este caso hasta que ninguno de éstos cuerpos tenga mayor demanda o atracción que cualquier otro de ellos …El calor es llevado así a un estado de equilibrio…**Debemos adoptar, por tanto, como una de las leyes más generales del calor, el principio de que todos los cuerpos que se comunican libremente entre sí y que no están dispuestos a desigualdad alguna debido a acción externa, adquieren la misma**

[41] La traducción es responsabilidad mía.

> **temperatura, como es indicada por un termómetro**[42] (Black, J. 1803, *Lectures on the Elements Chemestry*. Ver Aron, 1970).

Si bien Black no publica el diseño de sus experimentos sobre el calor[43], ni tampoco aparecen en *Lectures on the Elements of Chemestry* (1803) [44] descripciones detalladas del diseño experimental particular que dio lugar a su ley general, podemos identificar en los pasajes anteriores, el lugar que tienen las observaciones cuantitativas como pasos previos a la generalización sobre el calor. Al respecto y adicionalmente, E. W. Neave en "*Joseph Black's Lectures on the Elements of Chemestry*" señala:

> Black devotes nearly 40 pages to the thermometer, dealing whit the suitability of various liquids, methods of fixing points, scales of degrees, uses, etc. He relates how he verified the (almost) regular expansion of mercury with rise of temperature: he took the temperature of equal quantities of hot and cold water, mixed them, and took the temperature again. For the purpose of measuring temperatures outside the range of mercury thermometers, NEWTON's "cooling curve" method is described (Neave, 1936, pp. 375)[45]

> Black dedica casi 40 páginas para el termómetro, tratando con la idoneidad de diversos líquidos, métodos de fijación de puntos, escalas de grados, usos, etc. Relata cómo ha verificado la expansión (casi) regular del mercurio con el aumento de la temperatura: tomó la temperatura de cantidades iguales de agua fría y caliente, las mezcló, y nuevamente tomó la temperatura. Para efectos de la medición de temperaturas fuera del rango de los termómetros de mercurio, se describe el método "curva de enfriamiento" de Newton.[46]

[42] Las negritas son responsabilidad mía.
[43] Para el caso del "calor latente" sí encontramos mayores detalles de su trabajo experimental. Ver, *Lectures on the Elements of Chemestry* (1803); *Harvard Case Histories in Experimental Science* (1957); Neave, "*Joseph Black's Lectures on the Elements of Chemestry*" (1936).
[44] De acuerdo con *Harvard Case*: "Black never published his great discoveries on heat, although he taught them in his academic lectures. These lectures, which also incorporated his chemical researches, were published in 1803, after his death, being written out by John Robison from Black's notes and those taken by some of his students" en ..." *Harvard Case Histories in Experimental Science* (1957), Volumen I, Caso 3, Harvard University Press, Cambridge Mass.
[45] Neave, E.W.J. (1936), "*Joseph Black's Lectures on the Elements of Chemestry*" en ISIS, Vol. 25, No. 2 (Sep., 1936), Chicago Journals, History of Science Society, The University of Chicago Press, pp. 372-390 (http://www.jstore.org/stable/225375.
[46] La traducción es responsabilidad mía.

Así puede constatarse no solo la importancia conferida por Black a la aplicación de una escala de medición vía un dispositivo para medir la temperatura de los materiales, sino la asignación de magnitudes a los estados de temperatura de los diferentes cuerpos como precedentes experimentales para la formulación de su ley. En esta medida cobran sentido las afirmaciones de Black:

(a) *…acquire the same temperature, as indicated by a thermometer. All acquire the temperature of the surrounding medium;*

(b) We must therefore adopt, as one of the most general laws of heat, the principle that all bodies communicating freely with one another, and exposed to no inequality of external action, acquire the same temperature, as indicated by a thermometer.[47]

Considerando las observaciones de Black, en primer lugar, es claro que por los medios perceptuales directos no se verifica algún punto de equilibrio térmico de los diferentes materiales: *No previous acquaintance with the peculiar relation of each body to heat could have assured us of this, and we owe the discovery entirely to the thermometer.*[48] En segundo lugar, la escala de medición explicita el punto de equilibrio térmico, indicando de manera exacta vía un dispositivo, la temperatura de los cuerpos y sustancias. En tercer lugar, desde esta etapa, la aplicación matemática se convierte en un dispositivo generador de conceptos nuevos para la teoría, entre ellos, la temperatura como una propiedad termométrica determinada por un procedimiento de medición. Este último punto particularmente forma parte de los importantes resultados adicionales de carácter conceptual que obtuvo Black con sus experimentos.

[47] (a) "…adquieren la misma temperatura, como lo indica el termómetro. Todos adquieren la temperatura del medio circundante.
(b) "…Por lo tanto debemos adoptar, como una de las leyes más generales del calor, el principio de que todos los cuerpos comunicados libremente entre sí, y no expuestos a la desigualdad de la acción externa, adquieren la misma temperatura, como lo indica el termómetro". La traducción es responsabilidad mía.

[48] De hecho, perceptualmente verificaríamos un resultado contrario al sentirse todas ellas de diferente manera. "No hay conocimiento previo de la relación peculiar de cada cuerpo con el calor que pudiese habernos asegurado de esto, éstos resultados se los debemos enteramente al descubrimiento del termómetro." La traducción es responsabilidad mía.

Joseph Black redefine los conceptos de calor y temperatura. Antes de este científico, las expresiones 'calor' y 'temperatura' se usaban indiscriminadamente. Por ejemplo, Fahrenheit hablaba de "grados de calor" cuando se refería a mediciones de temperatura (*Cfr*. Arnold, 1947, p. 433). Black distingue los conceptos de calor y temperatura pues pensaba que al usarse indiscriminadamente se confundían dos niveles en la experimentación cuantitativa sobre el calor. De acuerdo con Black, 'calor' es el nombre de "algo" que es intercambiado entre los cuerpos mientras alcanzan el equilibrio, por su parte, 'temperatura' es un número observado sobre la escala de medición (termómetro) ligado a un estado físico. Este número es una medida de la cantidad de ese "algo" presente en un cuerpo. Al respecto, en Arnold y *Harvard Case* se señala:

> Antes de la época de Black, las palabras calor y temperatura eran usadas más o menos en una forma indiscriminada…Black hizo el significativo refinamiento conceptual de distinguir entre éstos términos. "Temperatura" se refiere, por tanto, al número observado sobre la escala de un termómetro; "calor" se vuelve una idea, un nombre para algo que es intercambiado entre los cuerpos mientras cambian temperatura y alcanzan el equilibrio…(Arnold, 1947, p.433).[49]

> But it was Black who, in the middle of the eighteenth century, made the distinction sharp and who, moreover, was the first to conceive clearly of heat as a measurable physical quantity, distinct from, although related to, the quantity indicated by a thermometer and called temperature (*Harvard Case*, 1957, Volumen 3, secc. 2).

> Sino fue Black quien, en la mitad del siglo XVIII, hizo la clara distinción [entre calor y temperatura] y quien, además, fue el primero en concebir claramente el calor como una cantidad física medible, pero distinto a, aunque relacionado con, la cantidad indicada por el termómetro, la cual es llamada temperatura.[50]

[49] De acuerdo con Arnold, la generalización de Black respecto al equilibrio térmico incorpora una idea que es establecida con mayor análisis en tratados modernos bajo el nombre de Ley Cero: si un cuerpo *A* está en equilibrio térmico con *B* y *B* está en equilibrio térmico con *C*, entonces *A* y *C* están también en equilibrio térmico. *Cfr*., Arnold, 1970, p. 433.

[50] La traducción es responsabilidad mía.

Como podemos ver con Arnold (1947) y en *Harvard Case* (1957) la distinción conceptual de Black entre calor y temperatura es un antecedente directo de la formulación contemporánea de esta distinción: la temperatura es una magnitud que refleja el nivel térmico de un cuerpo (su capacidad para ceder energía) y el calor es la energía que pierde o gana en ciertos procesos tal cuerpo (es un flujo de energía entre dos cuerpos que están a diferente temperatura).[51]

Si bien, es posible decir que la temperatura es una propiedad que tienen los cuerpos o sustancias de manera independiente a su medición, el concepto de temperatura, como una propiedad termométrica, surge hasta que se desarrolla una escala y un instrumento para medirla. No tiene sentido hablar en términos generales de la temperatura de los cuerpos o sustancias, o de la temperatura particular de un cuerpo o sustancia, sino se cuenta con una forma de ordenarla, medirla. Por tanto es irrelevante considerar a la temperatura como una propiedad sensible de los cuerpos sin un orden que la estructure, en todo caso, la temperatura será un concepto de aplicación que refiere a una propiedad medible del nivel térmico de un cuerpo.

Como consecuencia, la temperatura para la física no es esa *sensación* de calor de un objeto. Esto es, tan solo una forma de hablar en la vida diaria. La temperatura en términos científicos es un concepto que refiere a una propiedad, la cual ha resultado de observaciones cuantitativas sobre las condiciones térmicas de los objetos. Es una magnitud que indica el nivel térmico de un cuerpo. Esto es lo que Black señala con su observación cuantitativa *…mientras los cuerpos cambian de temperatura*.

Como podemos notar, las propiedades termométricas no son el resultado de investigaciones sobre condiciones microscópicas de la naturaleza de la materia (energía cinética promedio que tienen las partículas que constituyen un sistema *ex. gr.* átomos, moléculas, estructura

[51] En este último caso, se utilizan ya los conceptos de energía y cantidad de energía, que en la época de Black aun no aparecían. Tales conceptos serán el resultado de la evolución y refinamiento del concepto calor. Así, la definición inicial de un concepto frecuentemente señala la forma para una mayor investigación y experimentación. Los conocimientos ganados mediante experimentos cuantitativos conducirán, o bien al refinamiento y redefinición del concepto original, o bien al surgimiento de nuevos conceptos.

electrónica), o bien, de investigaciones sobre la naturaleza ontológica de la materia (la esencia de la materia). Las propiedades termométricas son el producto de indicar matemáticamente procesos macroscópicos de intercambio de "algo"[52] para alcanzar un estado de equilibrio (actualmente esto se establece en términos de la energía interna que depende casi exclusivamente de la temperatura de un sistema). Este es un ejemplo muy sencillo de cómo a partir de las matemáticas se producen determinaciones conceptuales para la teoría física, y cómo han estado presentes desde la posibilidad misma de llevar a cabo experimentación cuantitativa en física. Como veremos más adelante, las matemáticas también estarán presentes en las generalizaciones sobre el calor en términos de descripciones algebraicas, como una fase distinta, correspondiente a los resultados experimentales.

La ciencia del calor sigue desarrollándose. La Ley general del calor como antecedente al Principio Cero de la Termodinámica consideraba (aunque aun no explícitamente) otro nuevo concepto: "transferencia de calor". Sabemos que en términos modernos se dice que hay transferencia de calor entre dos sistemas cuando ellos llegan al equilibrio térmico que Black demostró, sin hacer "trabajo" uno sobre otro. Esta terminología no aparece explícitamente en Black ni en los anteriores investigadores, aunque la idea general estaba implicada. La definición operacional de esta nueva expresión (transferencia de calor) solo se da con la constitución moderna de la termodinámica.

Para conceptualizar correctamente "transferencia de calor" antes era importante hablar de un concepto intermedio 'cantidad de calor (Q)'. Arnold (1970) señala que los resultados de Black proporcionaron las bases lógicas para hablar de "cantidad de calor" a partir de sus experimentos sobre volúmenes iguales o distintos de agua:

> El trabajo de cierto número de predecesores de Black, junto con los cuidadosos experimentos y la lúcida interpretación del mismo Black, proporcionó la base lógica para hablar sobre "cantidad de calor": los experimentos sobre la cantidad de calor de volúmenes o masas iguales de agua, inicialmente a diferentes temperaturas, cuando eran mezcladas,

[52] Recordemos que en este momento aun no aparecía el concepto de 'tranferencia o intercambio de calor' en los términos modernos de la Termodinámica.

> se observaba que la temperatura final de equilibrio de la mezcla estaba siempre exactamente a la mitad entre dos temperaturas iniciales (siempre y cuando se tomaran precauciones para aislar térmicamente el sistema, es decir, reducir las tendencias a llegar al equilibrio con el aire ambiente u otros objetos) (Arnold, 1970, p. 434).[53]

Lo interesante es que para obtener y generalizar los resultados de estos experimentos sobre la cantidad de calor entre volúmenes o masas iguales de agua, en los términos antes señalados, Black utilizó descripciones algebraicas congruentes con los resultados, que además producirían la formulación física de leyes o principios generales (*Cfr*. Arnold, 1970, p. 434).

Para llegar al equilibrio, los cambios de temperatura (Δt) de las masas calientes y frías son iguales opuestos:

$$\Delta t_{\mathrm{h}} = -\Delta t_{\mathrm{c}} \qquad (1)$$

Cuando eran mezcladas diferentes masas de agua, los cambios eran inversamente proporcionales a las masas respectivas:

$$\Delta t_{\mathrm{h}} / \Delta t_{\mathrm{c}} = -\, \mathrm{m_c} / \mathrm{m_h}\ , \quad (2)$$

i.e, la masa menor sufre un cambio de temperatura proporcionalmente mayor, de manera que los productos $m\Delta t$ permanecen iguales en magnitud:

$$m_{\mathrm{h}}\, \Delta t_{\mathrm{h}} = -\, m_{\mathrm{c}}\, \Delta t_{\mathrm{c}} \qquad (3)$$

como las cantidades ($m_{\mathrm{h}}\, \Delta t_{\mathrm{h}} = -\, m_{\mathrm{c}}\, \Delta t_{\mathrm{c}}$) son fijas y reproducibles en cualquier situación dada, estas se vuelven como **la medida** de "algo" que es intercambiado entre las dos masas de agua, algo que es perdido por una y ganado en igual manera por la otra. Con esta descripción surge propiamente el concepto de transferencia de calor:

[53] En *Lectures on the Elements Chemestry* (1803) podemos leer particularidades de los distintos experimentos de Black sobre el calor latente, como secciones específicas de su experimentación sobre la transferencia de calor entre agua líquida y hielo.

> De tales observaciones se derivan nuestras locuciones sobre "intercambio de cantidades de calor" y el producto $m\,\Delta t$ es tomado como una medida de tal cantidad cuando diferentes muestras de la misma sustancia son mezcladas o puestas en contacto una con otra a diferentes temperaturas (Arnold, *Ibidem*, p. 434).

Posteriormente, Black demostró que $m_h\,\Delta t_h = -\,m_c\,\Delta t_c$ era válida únicamente cuando las mismas sustancias eran mezcladas, pero fallaba para predecir los cambios de temperatura para mezclas de mercurio y agua. Estos resultados experimentales le hacían pensar que las sustancias tenían un calor específico.

Lo importante en todo caso, además de ver en la explicación matemática el origen del concepto transferencia de calor, es observar que la descripción algebraica $m_h\,\Delta t_h = -\,m_c\,\Delta t_c$ es posterior al experimento, esto es, está en el nivel de los resultados experimentales.[54] Con 'posterior' nos referimos a dos circunstancias. Una circunstancia temporal y otra circunstancia explicativa. Para el primer caso, si bien, la descripción matemática $m_h\,\Delta t_h = -\,m_c\,\Delta t_c$ es temporalmente posterior al diseño y desarrollo del experimento, este aspecto no es suficiente para sostener que la semejanza entre estructuras matemáticas y físicas es posterior a la aplicación. Sin embargo, percatarse que la descripción algebraica $m_h\,\Delta t_h = -\,m_c\,\Delta t_c$ es posterior al experimento en *términos explicativos* si contribuye a mantener dicha tesis. Esto es, el científico no percibe en el mundo la estructura matemática $\Delta t_h = -\,m_c\,\Delta t_c$ como la estructura de la transferencia del calor, lo demuestra.

Antes de conocer que el intercambio de calor entre dos masas de agua tiene cierta estructura matemática, el científico (en este caso Black) sólo contaba con lo que sabemos de su diseño experimental. Este diseño estaba constituido por: la mezcla de dos masas iguales y de dos masas de agua distintas, estados termométricos de las sustancias

[54] En la segunda sección de este estudio de caso apoyaremos también esta idea. Veremos que las descripciones matemáticas de James Prescott Joule respecto al Equivalente Mecánico del Calor son la presentación de sus resultados cuantitativos de 1843, 1845 y 1850. Esto ilustrará adicionalmente que las descripciones matemáticas que capturan una ley general son posteriores al experimento.

(temperatura), así como relaciones de estas condiciones con otros factores físicos *ex. gr*. condiciones espacio-temporales entre cuerpos y sustancias, el entorno del sistema y el medio ambiente externo al sistema. Por medio de observaciones cuantitativas, el científico se percata que existen ciertas regularidades térmicas cuando dos masas distintas de agua, a diferente temperatura, alcanzan un punto de equilibrio. El científico presupone que tales regularidades pueden ordenarse matemáticamente. Por lo que, parte de su trabajo experimental lo dedica a desarrollar una ecuación que capture la regularidad y, que además, sea esta ecuación, una función que explique sistemática y exitosamente diferentes resultados experimentales.

En esta línea, la semejanza estructural entre la descripción algebraica que captura la regularidad física y, el sistema físico como tal, es posterior a la aplicación. El científico solo ahora conoce que la regularidad física de la transferencia de calor tiene una estructura matemática. Por medio de sus experimento se ha dado cuenta que una matematización funciona adecuadamente para ordenar la regularidad física. Justamente estas circunstancias contribuyen a sostener que la homomorfía entre la estructura matemática y la estructura física es posterior a la aplicación y no anterior. El científico por tanto no percibe directamente la estructura matemática de los fenómenos físicos sino que diseña su orden matemático en el entorno de una investigación cuantitativa hecha para eso.

Esta descripción algebraica sobre el equilibrio de masas de agua funciona de manera similar a los casos donde se aplicaba una escala de medición por medio de un dispositivo (termómetro) para determinar la temperatura de un cuerpo o sustancia, como una de sus propiedades termométricas. Ahora, de manera similar, las descripciones matemáticas (1), (2) y (3) funcionan, como una escala de medición general ($m\Delta t$) sobre "algo" que es intercambiado entre dos masas de agua. En este caso, de la misma manera que para el termómetro, la magnitud no es un estado físico sino que solo lo indica, las descripciones algebraicas no son ese "algo" que es perdido o ganado por una masa de agua, pero si indican la existencia de una regularidad en el intercambio de calor entre volúmenes de una sustancia y otra, cuyo proceso es perceptualmente inaprehensible al margen de una observación cuantitativa que lo mida.

Así como el número 0 (cero) y 100 (cien) en la escala de Celsius original indicaban un punto de vapor o un punto de hielo respectivamente sin ser tales estados físicos, las ecuaciones serán funciones de regularidades entre procesos térmicos, constatadas por diferentes experimentos, sin ser dichos procesos. Las ecuaciones *ex. gr*. $\Delta t_h / \Delta t_c = - m_c / m_h$ en principio serán solo operadores y operaciones que sólo indicarán "cantidades de calor" si y solo si contamos con una interpretación física de la ecuación *i. e.* si conocemos el valor de sus parámetros.

¿Cómo entonces una ecuación matemática describe una regularidad física? Para definir una descripción matemática como una regularidad física se requiere distinguir al menos cuatro etapas de un proceso interpretativo.

En la primera etapa, tenemos una fórmula matemática. Esta fórmula está constituida por operadores y operaciones. Hasta aquí, la fórmula no nos dice nada en términos físicos, tan solo es nomenclatura matemática con una interpretación técnica de sus constituyentes.

En la segunda etapa, los científicos determinan cuáles variables de una fórmula indicarán ciertos parámetros físicos.

En la tercera etapa, los científicos hacen corresponder valores particulares de los parámetros con estados y procesos físicos específicos. En este estadio se indican magnitudes y cantidades para medir estados y procesos físicos como la temperatura de materiales y el intercambio de "algo" entre los cuerpos y sustancias. Particularmente será en esta etapa donde se identifican los conceptos de 'temperatura' y 'transferencia de calor' como conceptos de aplicación que refieren a una propiedad termométrica y a un proceso físico respectivamente.

En la cuarta etapa, los científicos resuelven la ecuación, despejando una incógnita. Para hacerlo, consideran tanto los parámetros físicos y sus valores particulares, como las relaciones y operaciones matemáticas que estructuran la fórmula. El resultado matemático que obtienen adquiere ahora una interpretación física. Así, el despeje de la incógnita ofrece un avance en el conocimiento del fenómeno físico. A partir de este resultado, se conoce la estructura matemática de un estado o proceso físico. En este sentido, la semejanza estructural entre el sistema matemático que modela el fenómeno físico y el fenómeno físico es posterior a la aplicación *i.e*. se conoce la semejanza solo por la aplicación.

Ejemplifiquemos cada etapa:

Primera etapa:

$$\textbf{(a)}\ \mathbf{m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c},$$

(a) es una fórmula matemática. Esto es, productos: $m_h \Delta t_h$; $m_c \Delta t_c$, relaciones: $m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c$, operaciones: $- m_c \Delta t_c$. En esta etapa, no sabemos que miden m_h, t_h, m_c, t_c, etc.

Segunda etapa:

Asignación de variables con parámetros físicos

Δt = cambios (incremento) de temperatura

$\Delta t_h = - \Delta t_c$ = los cambios de temperatura (Δt) de las masas caliente y frías son iguales opuestos.

$\Delta t_h / \Delta t_c = - m_c / m_h$ = para mezclas de diferentes masas de agua los cambios son inversamente proporcionales a las masas respectivas.

$m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c$ = la masa menor sufre un cambio de temperatura proporcionalmente mayor, de manera que los productos $m\Delta t$ permanecen iguales en magnitud.

Tercera etapa:

Asignación de valores particulares a los parámetros (magnitudes y cantidades relacionadas con estados y proceso físicos: conceptos de aplicación)

$m_h = 30g$; $t_h = 20$ °C; $mc = 50g$, $tc = 40°$ C

Cuarta etapa:

Despeje de la ecuación e interpretación física del resultado:

$(m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c) = 30g \, \Delta \, 20°C = - 50g \, \Delta \, 40° C$

$30 (\Delta t_h) = - 50 (\Delta t_c)$

$(\Delta t_h) = (\Delta t_c)$

$(40 + x) = (20 - x)$

$x = 20$

Como las cantidades numéricas de $(m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c)$ son fijas y reproducibles en cualquier situación dada, podemos pensar que cada una de ellas son la medida de algo que es intercambiado entre las dos masas de agua, algo que es perdido por una y ganado en igual cantidad por otra ($x = 20$). De estas observaciones se deriva el concepto de "intercambio o transferencia de calor" y el producto $m \Delta t$ es tomado como la medida general de tal cantidad.

En este caso, la matematización de la absorción del calor de una sustancia es importante por dos aspectos. En primer lugar, en términos generales gracias a las descripciones matemáticas es posible la generalización de resultados proporcionando leyes físicas[55] sobre la transferencia de calor entre dos masas de agua. En segundo lugar, en términos específicos, las descripciones algebraicas son la única manera de calcular la "cantidad de calor" tomada o cedida por una sustancia o cuerpo. De aquí que sea posible establecer en qué consiste el principio sobre la "transferencia o intercambio de calor": la "cantidad de calor" tomada o cedida por una sustancia o cuerpo es directamente proporcional a su masa y al aumento (o disminución) de temperatura que experimenta.

El concepto de "cantidad de calor" solo cobra sentido con la descripción algebraica de los resultados experimentales sobre masas de agua a diferentes temperaturas. 'Cantidad de calor' será el producto de un cálculo matemático. No refiere a una propiedad obvia de

[55] Haremos énfasis en este aspecto en la segunda parte de nuestro estudio de caso.

masas de agua o alguna propiedad microscópica de la materia. 'Cantidad de calor' es en este sentido un concepto de aplicación matemática. Por su parte 'transferencia o intercambio de calor' también queda definida matemáticamente al explicarse a partir del despeje de una ecuación. Como hemos podido ver, desde Black, en primer lugar, la cantidad de calor y la transferencia de calor no son algo que podamos verificar mediante percepción directa, sino que dicho estado y proceso están matemáticamente definidos. En segundo lugar, la estructura matemática del estado: cantidad de calor; y la estructura matemática del proceso: transferencia de calor; se conoce y se explican por la aplicación.

En observaciones experimentales posteriores Joseph Black demostró que la ecuación $\mathbf{m_h\, \Delta t_h = -\, m_c\, \Delta t_c}$ era una descripción correcta sobre el proceso de transferencia de calor y del estado de equilibrio entre sustancias, sólo si las mismas sustancias eran mezcladas. Pero que esta ecuación fallaba para predecir los cambios de temperatura para mezclas diferentes, por ejemplo, de mercurio y agua. Dadas estas circunstancias Black sostuvo que cada sustancia podía ser reproducible y sistemáticamente comparada con algún patrón conocido (por ejemplo el agua) en su capacidad para absorber calor y cambiar de temperatura. Por ejemplo, encuentra por el método de las mezclas, que 100 g de mercurio se comportan como 3.3 g de agua. Lo cual significó que el agua tiene una capacidad mucho mayor para el calor. Una cantidad específica de calor produce en 3.3 g de agua el mismo cambio de temperatura que produce en una masa mucho mayor (100 g) de mercurio.

Nuevamente, encontrando Black que esta propiedad era *medible y reproducible*, se condujo a describirla matemáticamente por medio de una constante de proporcionalidad aplicada al producto $m\Delta t$. De esta manera, la ecuación $m_h\, \Delta t_h = -\, m_c\, \Delta t$ quedaría modificada:

$$\boldsymbol{c_A\, m_A\, \Delta t_A = -\, m_w\, \Delta t_w}$$

donde ahora:

$\boldsymbol{m_w\, \Delta t_w}$ = la cantidad de calor ganada o perdida por una cantidad de agua en un experimento de mezcla,
$\boldsymbol{c_A\, m_A\, \Delta t_A}$ = el calor perdido o ganado por otra sustancia *A*.

En este caso, si la sustancia *A*, es agua $c_A^i = 1$. Si *A* es alguna otra sustancia, $c_A\, m_A$ puede ser interpretada como la cantidad equivalente de agua. Por ejemplo, en el caso del mercurio, para el cual anteriormente se citaron valores numéricos $C_A = 0.033$ y con 100 g de mercurio $\boldsymbol{c_A\, m_A} = 3.3$ g de equivalente de agua.

Por su parte, en $c_A\, m_A\, \Delta t_A = -\ m_w\ \Delta t_w$ las unidades en las que el calor es medido ($m_w\ \Delta t_w$) será igual a 1 si m_w y Δt_w son unitarias. A partir de esto, surgen diferentes nombres a diferentes cantidades de calor que cambian la temperatura de una masa unitaria de agua en un grado en alguna escala de temperatura:

- Caloría: cantidad de calor que eleva la temperatura de 1g de agua en un grado centígrado.
- Kilocaloría: cantidad de calor que eleva la temperatura de 1 kg de agua en un grado centígrado.
- Btu:[56] cantidad de calor que eleva la temperatura de 1 libra de agua en un grado Fahrenheit.

Como resultado, si $\boldsymbol{c_A\, m_A\, \Delta t_A}$ denota una cantidad de calor, c_A debe tener las dimensiones de cantidad de calor por unidad de masa por cambio unitario de la temperatura. Por ejemplo $\boldsymbol{c_A} = 0.33$ cal/g C° para el mercurio. Este número se modificará para diferentes materiales y, cada caso será una propiedad reproducible y única. Siguiendo a Black esta propiedad es llamada "calor específico" o "capacidad calorífica". En otras palabras, la estructura matemática del calor específico para cada sustancia estará dada por la función: $\boldsymbol{c_A\, m_A\, \Delta t_A = -\ m_w\ \Delta t_w}$.

Dada la importancia de las matemáticas para describir el calor específico como una magnitud térmica, 'calor específico' o 'capacidad calorífica' será entonces un concepto de

[56] El símbolo 'Btu' refiere a British Termal Unit (Unidad térmica británica).

aplicación en los mismos términos que 'temperatura', 'propiedad termométrica' y 'transferencia de calor'.

Todo lo que hemos dicho hasta aquí nos permite concluir diferentes aspectos de nuestra tesis sobre la aplicación matemática. Hemos propuesto que la aplicación matemática es, por una parte, un dispositivo generador de nuevos conceptos para las ciencias matematizadas, y por otra, que en virtud de la aplicación es posible explicar la homomorfía entre estructuras matemáticas y físicas.

Las dos condiciones anteriores quedan ilustradas si consideramos el origen conceptual de la temperatura como una propiedad termométrica, la transferencia de calor como un proceso térmico y, el calor específico como una magnitud física.

En primer lugar, la explicación de cada uno de estos conceptos ha dependido de un patrón de medida proporcionado o bien, por una escala de medición mediante un dispositivo (termómetro: °C), o por funciones matemáticas *ex. gr.* $m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c$ o $c_A m_A \Delta t_A = - m_w \Delta t_w$, que capturan la regularidad $m \Delta t$ como el patrón de medida de la cantidad de intercambio de calor.

Los conceptos de temperatura, transferencia de calor y calor específico, hemos visto, no refieren a la percepción directa de estados o procesos físicos. Cada uno de estos conceptos ha sido una cantidad. En el caso de la temperatura, ésta será una magnitud a la cual le corresponderá en los términos señalados, un estado físico. Cuando medimos la temperatura de un cuerpo o sustancia hablamos de una propiedad termométrica. En el caso de la transferencia de calor, cuando medimos un intercambio de calor indicamos un proceso térmico. En el caso del calor específico, cuando medimos la manera en que diferentes materiales alcanzan un estado de equilibrio indicamos una magnitud para una propiedad física. El modelaje matemático ha permitido entonces explicar conceptos que surgen en las ciencias físicas cuando medimos estados o capturamos regularidades de procesos. En este sentido, con la aplicación emergen o se redefinen conceptos. La temperatura, la transferencia de calor y el calor específico ilustran ejemplares de estos conceptos de aplicación matemática.

Por otra parte, decíamos no solo que una ecuación puede describir una regularidad física, sino que esta descripción es posterior al experimento. Nuestro interés sobre este punto fue mostrar que la semejanza entre estructuras matemáticas y estructuras físicas está dada por la aplicación y no es anterior a ella.

Si bien no es lo mismo, por ejemplo, que la transferencia de calor se haya descubierto después de la experimentación cuantitativa de Joseph Black, a que no sea expresable sino hasta después de su matematización, es un hecho que no percibimos en el mundo estructuras matemáticas, ni mucho menos, mediante procesos de percepción directa la estructura matemática de procesos físicos específicos.

Podríamos aceptar que una persona entrenada matemáticamente podría hipotetizar que las relaciones que percibe directamente entre algunos objetos físicos pueden ordenarse mediante una estructura matemática determinada. De hecho, esta es la forma en que los físicos proceden cuando intuyen alguna explicación física sobre aspectos del mundo. Pero esta condición del científico no implica que la persona conozca la estructura matemática del fenómeno, como si dicha estructura le fuese una propiedad intrínseca perceptualmente distinguible y capturada. En todo caso, la hipótesis del científico deberá confirmarse mediante una investigación experimental, que conduzca la intuición científica sobre un orden del fenómeno hacia el conocimiento de su estructura matemática.

En esta línea, parecería bastante extraño afirmar que percibimos directamente la ecuación $m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c$ que estructura el intercambio de calor entre dos masas distintas de agua. O con mayor fuerza, que un agente epistémico conoce que $m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c$ es la estructura matemática de la transferencia por percepción directa.

Contrario a lo anterior, justificamos *a posteriori* que el intercambio de "algo" entre dos masas de agua tiene la estructura $m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c$ si encontramos que existe una función tal para diferentes resultados experimentales. Bajo estas circunstancias el científico sabe que la homomorfía entre la estructura física del intercambio de calor y la estructura matemática $m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c$ puede mantenerse. Por la aplicación conocemos que el proceso físico tiene una estructura matemática que describe su regularidad. Esto es, a partir de un trabajo experimental sabemos que la aplicación matemática a estructuras físicas puede funcionar y, por tanto, si funciona y hay una función matemática constante para diferentes resultados experimentales, hay semejanza entre la función y el fenómeno físico. La homomorfía entre estructuras matemáticas y físicas es por tanto posterior y no anterior a la aplicación matemática.[57]

De esta forma se han ilustrado dos compromisos de nuestra tesis sobre la aplicación matemática: la aplicación es un dispositivo que genera conceptos y la aplicación es un dispositivo que explica la semejanza entre estructuras de diferente naturaleza.

A continuación aplicaremos los resultados que hemos obtenido. Pero en este segundo caso, enfatizaremos en un aspecto adicional de nuestra tesis sobre la aplicación: las descripciones algebraicas de resultados experimentales constituyen leyes o principios físicas (os) generales. Como ilustración retomaremos los resultados experimentales de Black sobre la transferencia del calor y, veremos cómo James Prescott Joule llega de manera similar al Equivalente Mecánico del Calor.

2

Teoría Calórica y Equivalente Mecánico del Calor

La finalidad de esta sección es darle continuidad a nuestra propuesta de la aplicación matemática a partir de algunos aspectos constitutivos de la Termodinámica. Como

[57] Como hemos podido constatar el desarrollo de la termodinámica no necesitó de una teoría de la naturaleza de la materia. No era necesario definir lo que se calentaba o se movía. Lo fundamental de esta ciencia se encontraba en las relaciones matemáticas entre las propiedades macroscópicas observables cuantitativamente de la materia sin dependencia alguna de las condiciones microscópicas.

señalamos en la última parte de la sección anterior, nos falta explicar con detalle de qué manera una función matemática constituye un principio o ley física.

El propósito central de esta sección será mostrarle al lector cómo a partir de descripciones matemáticas se pueden capturar regularidades físicas generales, en tanto sea posible describir mediante una misma función matemática distintos resultados experimentales.

Para ilustrar este aspecto de la aplicación retomaremos los resultados de Joseph Black sobre la transferencia de calor y, veremos cómo James Prescott Joule llega de manera similar al Equivalente Mecánico del Calor como un principio general termodinámico.

Considerando algunos aspectos representativos de la historia de la termodinámica en el periodo del siglo XVII al siglo XIX y, usando nuestro análisis de la aplicación matemática en los términos de la sección anterior, veremos cómo el concepto de calor fue evolucionando históricamente hasta alcanzar una descripción estándar y general de su comportamiento en términos de energía. Nuestra exposición seguirá el siguiente orden.

En primer lugar, veremos rápidamente en qué condiciones surge la teoría del fluido calórico o teoría calórica.

En segundo lugar, distinguiremos entre aplicaciones cualitativas y experimentación cuantitativa del modelo calórico. Señalaremos en este caso, la limitación de las fases cualitativas para desarrollar el conocimiento sobre el calor. Para ilustrar este aspecto consideramos tan solo algunas observaciones de Lavoisier sobre el principio calórico. Así, como algunas observaciones de Benjamin Thompson respecto a la hipótesis del calor como movimiento.[58]

En tercer lugar, constataremos la importancia de la experimentación cuantitativa para el desarrollo de la termodinámica. Veremos cómo a partir de las descripciones algebraicas de

[58] En este caso no profundizaremos en las condiciones específicas de los experimentos de ambos investigadores. Nuestro interés en ellos es doble. En primer lugar, ejemplifican paradigmáticamente momentos teóricos de la historia del calor en la termodinámica. En segundo lugar, sus aportaciones sobre la naturaleza del calor nos permitirán distinguir claramente las observaciones cualitativas de las observaciones cuantitativas en los experimentos.

los resultados experimentales de Joule, no solo evoluciona el concepto de calor como fluido imponderable hacia un concepto de calor como forma de energía[59], sino cómo estas descripciones matemáticas constituirán al Equivalente Mecánico del Calor como un nuevo principio general termodinámico.

Por último, presentaremos conclusiones generales de nuestro estudio de caso, considerando los resultados obtenidos en la primera y segunda sección de este sub-apartado.

Antes de establecer James Prescott Joule relaciones de orden cuantitativo entre el trabajo y el calor, a lo largo del siglo XVII hasta poco menos de la mitad del siglo XIX, se desarrollaron diferentes teorías en torno a la naturaleza del calor. En este periodo el debate se centró en la elección de una de dos hipótesis rivales: la hipótesis del calor como movimiento *versus* la hipótesis del calor como fluido calórico. Posteriormente, a partir de la cuarta década del siglo XIX a partir de la experimentación cuantitativa de Joule, el debate sobre la naturaleza del calor se alejó de las líneas de la teoría calórica, dando paso al principio de la conservación de la energía. Pero, ¿cómo se llegó a estos resultados?

En el siglo XVII la hipótesis del calor como movimiento surge débilmente. Puede verse en algunos investigadores tan solo la idea de relacionar el calor con el movimiento. Siguiendo a Arnold (1970) personas como Francis Bacon, Robert Boyle, Robert Hooke Isaac Newton presuponían una relación entre estos dos procesos en los siguientes términos:

> *Calor est motus expansivus, cohibitus, et nitens pert partes minores*. (Bacon, F., [1620], *Nouvum Organum*, libro II, Aph.20, en *The Edinburg Review*, Vol. 32, p. 334).[60]
>
> El calor es un movimiento amplio, sobrio y es una lucha descubierta de las partículas más pequeñas.[61]

[59] Los conceptos 'equivalente mecánico del calor' y 'energía' serán nuevos conceptos de aplicación incorporados a la Termodinámica como consecuencia del trabajo experimental cuantitativo de Joule.

[60]Smyth, Sydney, *The Edinburgh Review*, Vol. XXXII, Julio-octubre 1819, Archibald Constable and Company, London, 1919.

[61] La traducción es responsabilidad mía.

> [la] Naturaleza del calor (consiste en) una conmoción variada, vehemente, e interna de las partes entre sí (Boyle, R. en Arnold, 1970, p.440).
>
> El calor es una propiedad de un cuerpo resultante del movimiento o agitación de sus partes (Hook, R. en Arnold, *Op. Cit*., p. 440).
>
> ¿Acaso no los cuerpos y la luz actúan libremente entre sí; es decir, los cuerpos sobre la luz al emitirla, reflejarla, refractarla y desviarla y la luz sobre los cuerpos al calentarlos y poniendo sus partes en un movimiento vibratorio que es en lo que consiste el calor? (Newton, Isaac, *Optiks*, en Arnold, *Ibidem*, p. 440).

Sin embargo, estas ideas no eran el resultado de vincular exitosamente, el calor y el movimiento en función de predicciones provechosas o diseños experimentales convincentes (*Cfr*., *Ibidem*, 1970, p. 441). La hipótesis del calor como movimiento será defendida solo cuando aparecen las investigaciones de Benjamin Thompson y solo fuertemente con el trabajo experimental cuantitativo de Joule.

Mientras tanto, en el siglo XVIII surge en contraposición a la hipótesis del calor como movimiento, la teoría del fluido calórico o teoría calórica.

El antecedente inmediato de la teoría calórica fue la teoría del flogisto. Lo cual explica en algún sentido, su inclinación por comprender, en principio, los estados térmicos en condicones de fluidos imponderables.
Rápidamente, 'flogisto' era el nombre de un principio de inflamabilidad de los cuerpos. De acuerdo con este principio, el flogisto era un fluido ganado y perdido por los cuerpos durante la combustión y otras reacciones químicas. Esta teoría fue postulada a finales del siglo XVII y desarrollada a principios del siglo XVIII por los químicos alemanes Johann Becher y Georg Stahl (*Cfr*., Holmyard, E. J. 1990).[62]
En la interacción de los diferentes puntos de vista sobre el calor, intuiciones del vínculo entre calor y movimiento y la explicación del calor como un fluido, el clima general del

[62] Holmyard, E. J. (1990), *Alchemy*, Dover Pub-lications Inc., New York.

pensamiento de la época y el vocabulario utilizado por los investigadores favorecieron la tendencia a explicar al calor como otro fluido imponderable.[63] Esta hipótesis fue reforzada por la demostración de la conservación del calor de acuerdo con los experimentos previos en el campo de la calorimetría, considérense por ejemplo, los experimentos calorimétricos de Black sobre la temperatura, la transferencia de calor y calor específico —incluidos en la sección anterior.

Antoine-Laurent Lavoisier, considerado actualmente el padre la química moderna, por medio de sus experimentos demuele la teoría del flogisto y consolida la teoría calórica: la teoría del fluido calórico. Este investigador en 1772 calentó sustancias al aire libre para verificar si se quemaban. Utilizando dos lentes de gran aumento, colocó un diamante en un recipiente cerrado y lo expuso a los rayos del sol a través de los lentes. Lavoisier observó la desaparición gradual del diamante y simultáneamente la acumulación de anhídrido carbónico. Con este tipo de experimentos, demostró no solo la composición de carbono de los diamantes sino llego a considerar el factor aire como la condición necesaria para la combustión.

Sobre la naturaleza de la combustión Lavoisier no tenía una respuesta. No contaba con una experimentación cuantitativa de este proceso. Tan solo tenía observaciones cualitativas de esta reacción química. Intrigado por el proceso de combustión, nuevamente, en condiciones muy similares al experimento del diamante, quemó otras sustancias como el fósforo y el azufre. El resultado fue similar. Comprobó que los productos obtenidos pesaban más que el original. A partir de estos resultados y otros similares, Lavoisier supone la adición de alguna sustancia a los elementos proveniente del aire cuando estos estaban en combustión. Llamó "calórico" al principio fluídico presente en sus experimentos.[64]

---

[63] En relación con la naturaleza del calor aunque, Boyle, Hooke y Newton en el siglo XVII consideraban al calor como una propiedad del cuerpo calentado resultado del movimiento (vibratorio) o agitación de sus partes, durante el siglo XVIII habían proliferado muchas teorías, tanto en electricidad como en química basadas en fluidos. Así, por ejemplo, los efectos eléctricos eran descritos mediante el comportamiento de los fluidos y efluvios intercambiados por los cuerpos electrizados y lo mismo ocurría en la explicación de los efectos magnéticos (*Cfr*., Furió y Guisola, 1998). La tesis sobre un fluido calórico como la propiedad presente en un cuerpo caliente era, entonces, la predominante en el siglo XVIII.

[64] Según sus observaciones, el óxido era una combinación del metal con el aire y por tanto la combustión no acarreaban una pérdida de flogisto sino una ganancia de al menos una porción de aire.

Curiosamente el principio fluídico no fue inferido por experimentaciones cuantitativas. Aun cuando la teoría calórica estaba reforzada por los experimentos en calorimetría, estos experimentos no fueron diseñados específicamente para la demostración de este fluido, ni tampoco fueron diseñados nuevos experimentos cuantitativos para su verificación. Black, quien desarrollo sistemáticamente el campo de la termometría y calorimetría, hasta llegar a la formulación de su ley general del calor, no consideró la posibilidad de una propiedad del tipo calórico postulada por Lavoisier.

La teoría calórica consideraba tan solo presupuestos sobre las diferentes propiedades del fluido calórico sobre la base de observaciones cuantitativas y sobre la plausibilidad de estas propiedades según *ex*. *gr*. la ley general del calor de Black. Se postuló que el fluido calórico tenía distintas propiedades. En primer lugar, era una sustancia que no puede ser creada ni destruida. En segundo lugar, era elástico, y las partículas se repelían entre sí, pero eran atraídas por las partículas de otras sustancias, siendo la magnitud de la atracción diferente para distintos materiales. En tercer lugar, el fluido calórico podía ser sensible o latente. En el primer caso, se difundía rápidamente entre las partículas atractivas y rodeaba a cada una con una "atmósfera" del fluido. En el segundo caso, el fluido calórico se combinaba con las partículas atractivas de una manera muy semejante a la de las combinaciones químicas. Con estas propiedades, Lavoisier construyó un modelo del fluido calórico general que proporcionó explicaciones plausibles de un número de fenómenos familiares sobre el calor.

Sin embargo, estas propiedades del fluido calórico tan solo proporcionaron aplicaciones del modelo esencialmente cualitativas:

> De acuerdo con las propiedades del fluido calórico, la entrada del fluido entre las partículas de una sustancia, causaría que esta última tendiera a extenderse más, aumentando la presión sobre las paredes cuando un gas es calentado dentro de un recipiente rígido o causando la expansión de líquidos y sólidos. Se suponía que las partículas de una sustancia ordinaria se atraían entre sí gravitacionalmente. Como las partículas deben estar muy próximas y se atraen entre sí con fuerzas poderosas, en los líquidos y sólidos, el fluido calórico tendría menor efecto para provocar la expansión de líquidos y sólidos que el que tendría en los gases. La marcada elevación de temperatura que ocurre cuando un gas es rápidamente comprimido o un material es

> frotado o golpeado se explicaba diciendo que el fluido calórico era exprimido de los espacios que ocupaba entre las partículas ordinarias.
>
> Estas son, naturalmente, aplicaciones esencialmente cualitativas del modelo calórico. En las manos de Laplece y otros físicos matemáticamente orientados, [posteriormente] la teoría dio interesantes predicciones y relaciones cuantitativas….(Arnold, *Ibidem*, p. 441).

En este caso, ¿qué es una aplicación cualitativa del modelo calórico? Las aplicaciones cualitativas del modelo no solo serán procesos de comparación de propiedades calóricas de cuerpos y sustancias directamente observables, sino la obtención de consecuencias sobre el estado térmico de cuerpos y sustancias mediante propiedades postuladas del modelo calórico. La aplicación cuantitativa entonces se distingue por no utilizar sistemáticamente patrones de medición para la obtención de consecuencias, ni el uso de representaciones matemáticas para describir resultados experimentales.

Al disponer Lavoisier una base predominantemente cualitativa del calor como un fluido, le fue imposible sistematizar y generalizar los resultados de su modelo. En consecuencia, del trabajo de Lavoisier no surgieron conceptos de aplicación matemática ni nuevos principios generales sobre el calor.

Deliberadamente nos saltaremos la matematización del modelo calórico, desarrollada por Laplace, para centrarnos exclusivamente en la evolución del concepto de calor como un fluido material hacia el calor como una forma de energía. Esto nos permitirá, mostrar no solo la importancia de la fase cuantitativa para la evolución del concepto de calor, sino adicionalmente nos permitirá explicar en qué sentido la estructura $\Delta U = W_{ad}$ (equivalente mecánico del calor) constituye un principio físico general, propósito central de esta sección.

Por ahora hemos señalado la distinción entre aplicaciones cualitativas y experimentación cuantitativa. Continuemos con el análisis de la evolución del concepto 'calor' e identifiquemos las condiciones del surgimiento de los conceptos de aplicación: equivalente mecánico y energía.

La hipótesis del calor como movimiento surge nuevamente con Benjamín Thompson (1753-1814). Thompson más conocido como el conde Rumford por sus funciones en lo que entonces se hacía llamar el Sagrado Imperio Romano[65] estaba interesado en el estudio de sistemas de calentamiento a vapor. Como supervisor de la perforación de cañones de bronce en los talleres del arsenal militar de Munich (Bavaria) puso en cuestión el carácter sustancial del calórico.

A lo largo del siglo XVIII, gran parte de la discusión sobre el calor se centro sobre la relación entre el fluido calórico y el peso, tal y como Lavoisier lo suponía —considerando el factor aire. Dos aspectos generales se pretendían demostrar sobre esta relación. Por una parte, el aumento de peso de los cuerpos cuando eran calentados. Por otra, la ganancia en peso del agua cuando era congelada —en este caso, el fluido calórico tendría un peso negativo. En 1787 Rumford se dedicó a diseñar experimentos para confirmar o desechar alguna o ambas hipótesis.

A diferencia de Lavoisier, Rumford utilizó una balanza, evitó efectos indeseables provocados por corrientes de aire y por cambios de temperatura en los brazos de la balanza. Al describir los resultados de sus investigaciones años más tarde, concluyó que el calentamiento y el enfriamiento de una sustancia no tenían efecto detectable sobre su peso. Este resultado apoyó sus dudas sobre la naturaleza material del calor en términos de fluido calórico.

Curiosamente los resultados de Rumford se obtuvieron nuevamente a partir de aplicaciones cualitativas de la hipótesis del calor como movimiento. Rumford estaba desprovisto de una teoría para relacionar la generación del calor con otros factores en sus experimentos. Observaba los brazos de la balanza cuando calentaba o enfriaba una sustancia y colocaba posteriormente tales sustancias materiales en cada extremo comparando los resultados para ambos casos. No había descripciones matemáticas ni de la regularidad del proceso de

[65] Benjamin Thompson nació en Woburn, Massachusetts. Hizo carrera en Inglaterra como administrador y filósofo natural. Durante un tiempo desempeñó los puestos de ministro de guerra, ministro de policía, Mayor General, chambelán de la Corte y consejero de Estado bajo el elector de Bavaria. Cuando el elector hizo a Thompson Conde del Sagrado Imperio romano, tomó el nombre de conde Rumford.

calentamiento, ni de la no relación entre calor y peso: *[e]stoy muy lejos de pretender conocer cómo o por qué medios mecánicos esa clase particular de movimiento en los cuerpos, que se ha puesto que constituye el calor* (Rumford, en Arnold, Ibidem, p443).

Posteriormente, Rumdolf se dedicó a estudiar el calor producido por fricción para conseguir contra-ejemplos firmes a la teoría calórica:

> Estando dedicado últimamente a supervisar la perforación de cañones en los talleres del arsenal militar en Munich, quedé asombrado por el considerable grado de calor que un cañón de bronce adquiere en un corto tiempo cuando está siendo perforado y con la temperatura aún más alta (más alta que la del agua en ebullición) de los pedazos metálicos separados de él por el taladro (Rumford, en Arnold, *Ibidem*, p. 442).

A partir de estas observaciones intuyó un camino para avanzar más en el conocimiento de la naturaleza del calor como movimiento. Consideró la fuente de calor generado por la frotación del aparato que cortaba las virutas en el bronce de cañones, inagotable. La principal hipótesis consistente con esta intuición era la de considerar al calor como movimiento y no como fluido. Rumford fue el primero en apreciar la importancia de la transferencia de calor y llevó a cabo importantes experimentos para confirmar o desechar la teoría del fluido calórico:

> For a long time it had been a favourite hypothesis that heat consists of "a force or power belonging to bodies," but it was reserved for Count RUMFORD to make the first experiments decidedly in favour of that view (Joule, J.P., [1849] (1850), p. 62).[66]

> Durante mucho tiempo había sido una hipótesis favorita que el calor consistiese en "una fuerza o poder que pertenece a los cuerpos", pero la verificación de esta hipótesis, se reservó para el Conde de Rumford quien hizo los primeros experimentos decididamente en favor de ese punto de vista.[67]

[66] Joule, J.P., [1849], (1850), "*On the Mechanical Equivalent of Heat*", en Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 140, The Royal Society, pp. 61-82. (http://www.jstor.org/stable/108427).
[67] La traducción es responsabilidad mía.

> That justly celebrated natural philosopher demonstrated by his ingenious experiments that the very great quantity of heat excited by the boring of cannon could not be ascribed to a change taking place in the calorific capacity of the metal; and he therefore concluded that the motion of the borer was communicated to the particles of metal, thus producing the phenomena of heat:-" It appears to me," he remarks, "extremely difficult, if not quite impossible, to form any distinct idea of anything, capable of being excited and communicated, in the manner the heat was excited and communicated in these experiments, except it be motion (Joule, P.J. *Op. Cit*., p. 61).
>
> Aquel célebre filósofo natural[Rumford] demostró con sus ingeniosos experimentos que la grandísima cantidad de calor excitada por la perforación de los cañones no podían atribuirse a un cambio, que tenga lugar, en la capacidad calorífica del metal, y por lo tanto, concluyó que el movimiento de la broca fue comunicado a las partículas de metal, lo que produce el fenómeno de calor: - "me parece", señala, "extremadamente difícil, si no imposible, formarse una idea clara de algo, capaz de ser excitado y comunicado, en la forma que el calor fue excitado y comunicado en estos experimentos, a no ser el movimiento.[68]

> …la notable circunstancia de que la fuente de calor generada por la fricción en estos experimentos evidentemente parecía inagotable. Difícilmente era necesario añadir que cualquier cosa que un cuerpo aislado o sistema de cuerpos puede continuar suministrando *sin limitación* no puede posiblemente ser una *sustancia material*; me parece que es extremadamente difícil, sino imposible, formar una idea clara de algo capaz de ser excitado y comunicado de la manera en la cual el calor fue excitado y comunicado en estos experimentos, que no sea movimiento (Rumford, en Arnold, 1970, pp. 442-443)

Rumford consideró que los pequeños pedazos de metal tenían el mismo calor específico que el bloque metálico. Bajo estas circunstancias no podía argumentar a favor de un fluido calórico liberado durante la perforación pues los pedazos tenían una capacidad calorífica menor. Pero, por otro lado permaneció intrigado por el origen del movimiento:

> Estoy muy lejos de pretender conocer cómo o por qué medios mecánicos esa clase particular de movimiento en los cuerpos, que se ha puesto que constituye el calor, continuado y propagado…Pero, aunque el mecanismo, del calor, fuera, de hecho, uno de esos misterios de la

[68] La traducción es responsabilidad mía.

> naturaleza que están más allá del alcance de la inteligencia humana, de ningún modo esto debiera desanimar y menos disminuir nuestro ardor…de investigar las leyes de su operación (Rumford, en Arnold, *Ibidem*, p. 443).

Como Rumford no disponía de los medios teóricos para señalar la regularidad del movimiento de los cuerpos, no pudo precisar relaciones cuantitativas entre calor y trabajo. En consecuencia no pudo derribar contundentemente la teoría del fluido calórico. Sin embargo, sus fuertes intuiciones sobre la relación entre calor y movimiento estuvieron presentes en cada uno de sus experimentos. Los cuales tenían la finalidad de atacar sistemáticamente la hipótesis del calórico. Entre estos estudios se encuentran, la transferencia de calor a través de un vacío, el comportamiento del agua al expandirse a temperaturas por debajo de los 4° C y el comportamiento de mezclas de diferentes líquidos.[69] Estas características del trabajo de Rumford pueden constatarse en (Joule, [1949] (1950), pp. 61-63.

[69] El trabajo científico más importante de Rumford se desarrolló en Munich, centrándose en la naturaleza de la energía calorífica. Su estudio térmico aparece en la obra de 1798, "*An Inquiry concerning the Source of the Heat which is excited by Friction*." en *Phil. Trans*. Abridged, vol. xviii. Joule, señala:

> One of the most important parts of Count RUMFORD'S paper, though one to which little attention has hitherto been paid, is that in which he makes an estimate of the quantity of mechanical force required to produce a certain amount of heat. Referring to his third experiment, he remarks that the "total quantity of ice-cold water which, with the heat actually generated by friction, and accumulated in $2^h\ 3^m$ might have been heated 180°, or made to boil,=26.58 lbs." * In the next page he states that the machinery used in the experiment could easily be carried round by the force of one horse (though, to render the work lighter, two horses were actually employed in doing it)." Now the power of a horse is estimated by Watt at 33,000 foot-pounds per minute, and therefore if continued for two hours and a half will amount to 4,950,000 foot-pounds, which, according to Count RUMFORD'S experiment, will be equivalent to 26*58 lbs. of water raised 180°. Hence the heat required to raise a lb. of water 1° will be equivalent to the force represented by 1034 foot-pounds. This result is not very widely different from that which I have deduced from my own experiments related in this paper, viz. 772 foot-pounds; and it must be observed that the excess of Count RUMFORD'S equivalent is just such as might have been anticipated from the circumstance, which he himself mentions, that "no estimate was made of the heat accumulated in the wooden box, nor of that dispersed during the experiment." (*Cfr*., Joule, [1849] (1850), pp. 61-62).

Laplace y Lavoisier en su *Memoria sobre el calor* de 1786 consideraron la tensión entre la hipótesis entre el calor como movimiento y la hipótesis del calor como fluido material en los siguientes términos:

> Nosotros no decidiremos en absoluto entre las hipótesis anteriores. Varios fenómenos parecen favorables a una, tal como el calor producido por la fricción de dos cuerpos sólidos, por ejemplo; pero existen otros que son explicados en forma más simple por la otra, quizás ambas sean válidas al mismo tiempo…En general, uno puede cambiar la primera hipótesis a la segunda cambiando las palabras "calórico libre", "calórico combinado" y "calórico liberado" por "*vis viva*", "pérdida de *vis viva*" e "incremento de *vis viva*" (Laplace y Lavoisier, 1786, en Arnold, *Ibidem*, p. 443).

La indecisión de Laplace y Lavoissier de elegir una u otra hipótesis sobre el calor era consecuencia de no contar con un principio o ley general para explicar contundentemente el calor producido por la fricción de dos cuerpos sólidos. Sin esta ley general era imposible tomar una posición definitiva a favor de la hipótesis del calor como movimiento. En esta misma dirección, las expresiones señaladas en el pasaje "calórico libre", "calórico combinado", "calórico liberado", "*vis viva*", "pérdida de *vis viva*" e "incremento de *vis*

> Una de las partes más importantes del escrito del conde de Rumford, pero al que poca atención hasta ahora se ha puesto, es aquel en el que hace una estimación de la cantidad de fuerza mecánica necesaria para producir una cierta cantidad de calor. Al referirse a su tercer experimento, señala que la "cantidad total de agua helada, la cual, con el calor generado actualmente por la fricción, y acumulada en $2^h\ 3^m$ podría haber sido calentada a 180 °, o de hecho a hervir, = 26,58 libras." * En la página siguiente se establece que la maquinaria utilizada en el experimento pudo haberse generado por la fuerza de un caballo (aunque, para hacer el trabajo más ligero, dos caballos se utilizaron realmente en hacerlo). "Ahora el poder de una caballo se estima por Watt a 33.000 pies-libras por minuto, y por lo tanto, si se mantienen durante dos horas y media será de 4.950.000 libras-pie, que, según el número de experimentos de Rumford, será equivalente al 26 * 58 lbs. de agua elevada a 180 °. Por lo tanto el calor necesario para elevar una libra de agua 1 ° será equivalente a la fuerza representada por 1.034 libras-pie. Este resultado no es muy diferente de lo que he deducido desde mis propios experimentos relacionados en este trabajo, es decir 772 libras-pie; y hay que señalar que el exceso de equivalentes del Conde de Rumford, es sólo, como podría haber sido anticipado de la circunstancia que él mismo menciona, que "no se estimó el calor acumulado en el caja de madera, ni de que se dispersaron durante el experimento.". La traducción es responsabilidad mía.

viva" al margen de pertenecer al sistema conceptual de alguna de estas dos hipótesis, ninguna de ellas surgió de una experimentación cuantitativa. En consecuencia no son conceptos de aplicación matemática. Justamente este es el inconveniente. Las leyes físicas y los conceptos en los cuales se apoyan solo pueden seguirse de la aplicación matemática a la ciencia, esto es, del ordenamiento brindado por las estructuras matemáticas a los estados, procesos y fenómenos físicos.

Antes de avanzar hacia la evolución del calor como una forma de energía, notemos el siguiente aspecto. La medición de cantidades de calor de los cuerpos o sustancias no depende, en el final del análisis, de un modelo considerado como correcto o único sino de la aplicación o no de herramientas matemáticas.

Desde nuestra perspectiva, el modelo calórico funcionó provechosamente como un dispositivo heurístico al permitir posteriormente refinar conceptos físicos y sugerir nuevas rutas de investigación sobre el calor.[70] Años después, con el declive de la teoría calórica, a partir de Joule se demostrará que algunos de los resultados correctos que parecían derivarse de la teoría calórica no dependían de ningún modo del modelo específico que se estaba usando, ni mucho menos de las supuestas propiedades del calor como fluido. La corrección de estos resultados dependería de aspectos tales como *la definición matemática* de Black de la cantidad de calor (Q) en términos de los calores específicos c_p y c_y.

Si lo anterior tiene sentido, no habría diferencia en el modelo heurístico usado para interpretar el significado físico de Q o para establecer cuantitativamente la naturaleza del calor. El significado de Q (cantidad de calor) está determinado como una propiedad térmica al ser descrito algebraicamente por Black. Así, la "cantidad de calor" no es una propiedad postulada a partir o a favor de aplicaciones cualitativas de un modelo específico. Es un concepto que denota regularidades térmicas, valores fijos y reproducibles, respecto al calor de distintos cuerpos o sustancias en condiciones de experimentación específicas. Si lo

[70] Aunque naturalmente algunos investigadores de la época creían literalmente en el fluido calórico.

anterior es correcto, cualquier modelo al incorporar las mismas definiciones producirá las mismas consecuencias matemáticas.

Como veremos la teoría calórica fue eventualmente suplantada por un esquema enteramente diferente. Este nuevo esquema explicará y organizará un rango mucho más amplio de fenómenos. En este caso el calor se conoce como una forma de energía y no como un fluido material. Esta teoría conserva exactamente la misma definición de Q y predice las mismas relaciones supuestamente derivadas del modelo calórico, pero a diferencia de este caso, el modelo de Joule sí describirá matemáticamente un principio térmico general como el resultado de su investigación experimental: el equivalente mecánico del calor.

Relación cuantitativa entre trabajo y calor

El ataque iniciado por Rumford fue llevado a cabo en los años de 1830 y 1840. Los esfuerzos se dirigían a buscar una síntesis entre fenómenos interesantes tanto para la mecánica, el calor, la electricidad y la química. El principio unificador resultó ser el de la energía.

A mediados del siglo XIX, previo a los experimentos de Joule, el físico alemán Herman Ludwig von Helmholtz y el matemático y físico británico lord Kelvin utilizaron cálculos matemáticos para demostrar que la realización de trabajo sobre un sistema puede producir el mismo efecto de transmisión de energía, que la adición de calor a dicho sistema (*Cfr*., Callen, H.B., 1985). Esta relación cuantitativa entre calor y trabajo en función de la transmisión energética fue determinada experimentalmente por Joule.

James Prescott Joule (1818-1889) fue un cervecero en Manchester, dedicado a la ciencia desde adolescente. Joule tenía una visión de una ley de conservación más interesante a la del fluido calórico.

La industria europea en los años de 1830 dependía de la máquina de vapor para obtener la potencia mecánica generada por el calor suministrado por los combustibles. Faraday había descubierto la inducción electromagnética y generadores eléctricos primitivos se estaban usando en experimentos de todas clases.[71] En este contexto, Joule concibió la idea de una posible relación cuantitativa entre el trabajo y el calor. Tal relación no era obvia, no podía establecerse vía percepción directa y, como hemos señalado, personas como Rumford fallaron en determinarla matemáticamente.

En caso de lograr establecer la relación cuantitativa entre el calor y el trabajo podía concebirse la idea de un principio térmico explicativo para cualquier número de relaciones funcionales posibles entre el calor y la acción mecánica. Joule desarrolló esta relación cuantitativa y ofreció la representación matemática correcta de la relación.

En 1840, Joule reportó algunos experimentos sobre la producción de calor por la corriente eléctrica y en 1843 presentó resultados cuantitativos. Usando pesas que caían para hacer funcionar una máquina magnetoeléctrica (generador), introdujo en agua el conductor a través del cual fluía la corriente eléctrica y midió el calor así generado. Comparando el calor desarrollado por el trabajo (en exceso de fricción) necesario para hacer funcionar el

[71] En Joule [1849] (1856) se indica la importancia del programa de investigación de Faraday no solo como un antecedente directo a la formulación del equivalente mecánico del calor, sino como un paso firme para dejar atrás la idea de líquidos imponderables:

> In 1834 Dr. FARADAY demonstrated the "Identity of the Chemical and Electrical Forces." This law, along with others subsequently discovered by that great man, showing the relations which subsist between magnetism, electricity and light, have enabled him to advance the idea that the so-called imponderable bodies are merely the exponents of different forms of Force (Joule, [1849] (1850), pp. 62-63).
>
> En 1834 el Dr. Faraday demostró la "Identidad de las fuerzas químicas y eléctricas." Esta ley, junto con otros descubrimientos posteriores por este gran hombre, mostraron las relaciones que subsisten entre el magnetismo, la electricidad y la luz, las cuales, le han permitido avanzar en la idea de que los llamados cuerpos imponderables llamados no son más que los exponentes de las diferentes formas de la Fuerza. La traducción es responsabilidad mía.

La inducción electromagnética es la Ley de Faraday. Por medio de esta ley se demostraba que el voltaje inducido es directamente proporcional a la velocidad del cambio del flujo magnético que atraviesa una superficie con un circuito como borde.

generador, reportó trece mediciones con el resultado promedio de que 838 pies . lb de trabajo eran acompañados por el calentamiento de 1 lb de agua 1° F, esto es, que 1 Btu ≡ 838 pies . lb:

> My own experiments in reference to the subject were commenced in 1840, in which year I communicated to the Royal Society my discovery of the law of the heat evolved by voltaic electricity, a law from which the immediate deductions were drawn, -lst, that the heat evolved by any voltaic pair is proportional, ceteris paribus, to its intensity or electromotive force; and 2nd, that the heat evolved by the combustion of a body is proportional to the intensity of its affinity for oxygen. I thus succeeded in establishing relations between heat and chemical affinity. In 1843 I showed that the heat evolved by magneto-electricity is proportional to the force absorbed; and that the force of the electro-magnetic engine is derived from the force of chemical affinity in the battery, a force which otherwise would be evolved in the form of heat: *from these facts I considered myself justified in announcing "that the quantity of heat capable* of increasing the temperature of a lb. of water by one degree of FAHRENHEIT'S scale, is equal to, and may be converted into, a mechanical force capable of raising 838 Ibs. to the perpendicular height of one foot." (Joule, [1849] (1850), p. 63).[72]
>
> Mis propios experimentos en relación con el tema se iniciaron en 1840, año en que comunique a la Real Sociedad mi descubrimiento de la ley del calor a partir de la electricidad voltaica, una ley que las deducciones inmediatas generaron, -lst, el calor desprendido por un par voltaico es proporcional, *ceteris paribus*, a su intensidad o fuerza electromotriz, y 2n, el calor desprendido por la combustión de un cuerpo es proporcional a la intensidad de su afinidad con el oxígeno. Por tanto pude establecer exitosamente las relaciones entre el calor y la afinidad química. En 1843 demostré que el calor desprendido por el motor electromagnético es proporcional a la fuerza absorbida, y que la fuerza del motor electromagnético se deriva de la fuerza de la afinidad química de la batería, una fuerza que de otro modo se generaría en el forma de calor: *a partir de estos hechos me consideré justificado en anunciar "que la cantidad de calor capaz* de aumentar la temperatura de una libra de agua un grado de la escala FAHRENHEIT, es igual a, y puede convertirse en

[72] Las cursivas en este pasaje son responsabilidad mía. La intención de este hecho es indicarle al lector cómo en las propias palabras de los científicos, en este caso Joule, la descripción matemática de una regularidad física es explicativamente posterior al experimento (*from these facts I considered myself justified in announcing "that the quantity of heat capable* …), esto es, se da en el nivel de los resultados experimentales. Y sólo esta descripción formará parte como presupuesto de una nueva experimentación cualitativa cuando esta última tenga el propósito de obtener nuevas descripciones matemáticas ordenando nuevas regularidades físicas. Por tanto, las descripciones matemáticas descriptivas de un principio físico general son posteriores al experimento.

> una fuerza mecánica capaz de levantar 838 libras. a la altura perpendicular de un pie. "[73]

Posteriormente, también en 1843, reportó experimentos adicionales:

> Mi aparato consistió de un pistón perforado por un número de pequeños agujeros, trabajando en un recipiente cilíndrico de vidrio conteniendo alrededor de 7 lb de agua. Así obtuve un grado de calor por lb de agua a partir de una fuerza mecánica capaz de levantar alrededor de 770 lb a la altura de un pie, un resultado que se permitirá ser muy fuertemente confirmativo de nuestras deducciones previas. No perderé tiempo en repetir y extender estos experimentos, estando satisfecho de que los grandes agentes de la naturaleza son, por voluntad del Creador, *indestructibles*; y que dondequiera que la fuerza mecánica sea gastada (el trabajo sea disipado), un equivalente exacto del calor *siempre* es obtenido (Joule, en Arnold, 1970, p. 445).
>
> In 1843 I announced the fact that "heat is evolved by the passage of water through narrow tubes" and that each degree of heat per lb. of water required for its evolution in this way a mechanical force represented by 770 foot-pounds (Joule, [1849] (1850), pp. 63-64).
>
> En 1843 anuncié el hecho de que "el calor es generado por el paso del agua a través de tubos muy estrechos" y que cada grado de calor por lb. de agua requiere para su evolución, en este sentido, una fuerza mecánica representada por 770 libras-pie.[74]

En 1845 Joule reportó experimentos sobre el descenso de temperatura observando el aire que se expandía rápidamente y demostró que 1 Btu de calor era equivalente a 795 pies . lb de trabajo. De manera similar en 1845 y 1847:

> Subsequently, in 1845 and 1847, I employed a paddle-wheel to produce the fluid friction, and obtained the equivalents 781. 5, 782 . 1 and 787. 6, respectively, from the agitation of water, sperm-oil and mercury. *Results so closely coinciding with one another, and with those previously derived from experiments with elastic fluids and the electro-magnetic machine, left no doubt on my mind as to the existence of an equivalent relation between force and heat…(*Joule, *Op.Cit*., p. 64).[75]

[73] La traducción es responsabilidad mía.
[74] La traducción es responsabilidad mía.
[75] Las cursivas en este pasaje son responsabilidad mía. Una vez mas, a partir de las propias afirmaciones de Joule claramente las descripciones matemáticas en términos explicativos posteriores a los experimentos. En este caso, no tiene sentido afirmar la existencia de una relación de equivalencia entre fuerza y calor —a partir

> Subsecuentemente, en 1845 y 1847, utilicé una rueda de paletas para producir la fricción del fluido, y obtuve los equivalentes 781.5, 782. 1 y 787. 6, de la agitación del agua, el aceite de esperma y el mercurio, respectivamente. Los resultados coinciden muy cercanamente con otros, y con los previamente derivados a partir de experimentos con fluidos elásticos y la máquina electromagnética, esto no deja alguna duda en mi mente en cuanto a la existencia de una relación equivalente entre la fuerza y el calor ...[76]

Fue entonces cuando Joule inicia una larga serie de experimentos cada vez más exactos sobre la producción de calor en el agua por efectos de fricción:

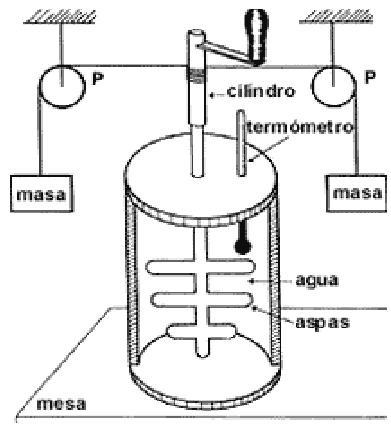
> El aparato…consistía de una rueda de paletas de latón trabajando horizontalmente en un bote de agua. El movimiento podía ser comunicado a esta rueda por medio de pesas (que caían)… La rueda de paletas se movía con gran resistencia en el bote de agua, de manera que las pesas (cada una de cuatro libras) descendían con la lenta velocidad de aproximadamente un pie por segundo. La altura de las poleas al piso era de doce yardas y, consecuentemente, cuando las pesas habían descendido,…, tenían que ser subidas nuevamente para renovar el movimiento de las paletas. Después de que esta operación había sido repetida dieciséis veces, el aumento de la temperatura del agua era ostensible…

---

de la experimentación de fluidos elásticos con la máquina electro-magnética, así como, desde las relaciones equivalentes entre la agitación del aire, el aceite de esperma y el mercurio al interior de una rueda de paletas para producir fricción de un fluido— sino se cuenta con una forma de medir dichas relaciones.

Por otra parte, la existencia de una equivalencia entre trabajo y calor es consecuencia de distintos experimentos. Al parecer, Joule está buscando una función para describir regularidades generales de los estados y procesos térmicos constatada por diferentes experimentos. En caso de encontrarla, la función constituirá descriptivamente la regularidad física general.

[76] La traducción es responsabilidad mía.



> Los equivalentes que ya he obtenido son: primero, 823 lb derivadas de experimentos magneticoeléctricos; segundo, 795 libras deducidas del frío producido por el enrarecimiento del aire y tercero, 774 lb de experimentos sobre el movimiento del agua a través de tubos angostos. Siendo semejante esta última clase de experimentos al de la rueda de paletas, podemos tomar 832 lb como el equivalente derivado de la fricción de agua (Joule, en Arnold, *Ibidem*, p. 445).[77]

Joule continuó sus experimentos mejorando nuevamente en exactitud y trabajando ahora con diferentes materiales, tanto sólidos como líquidos.[78] En 1850 publicó un extenso resumen de resultados con la siguiente aseveración final:

> I will therefore conclude by considering it as demonstrated by the experiments contained in this paper,-
>
> *1st. That the quantity of heat produced by the friction of bodies, whether solid or liquid, is always proportional to the quantity of force expended. And,*
>
> *2nd. That the quantity of heat capable of increasing the temperature of a pound of water (weighed in vacuo, and taken at between 550 and 600) by 1° FAH., requires for its evolution the expenditure of a mechanical force represented by the fall of 772 Ibs. through the space of one foot.*

[77] Joule [1849] (1850) describe detalladamente no solo los aparatos utilizados para llegar al equilibrio mecánico del calor sino adicionalmente sus métodos de experimentación. Si el lector gusta leer con detalle en qué consistía cada uno de estos aspectos diríjase a Joule [1849] (1850), pp. 64-66.

[78] En Joule [1849] (1850) aparecen detalladamente las cinco series de experimentos sobre el equilibrio mecánico del calor respecto a diferentes cuerpos y sustancias. Primera serie de experimentos: Fricción de agua; segunda serie: Fricción de mercurio; tercera serie: Fricción de mercurio; cuarta serie: Fricción de hierro fundido (Cast Iron) y, por último, quinta serie: Fricción de hierro fundido(Cast Iron). *Cfr*. Joule [1849] (1850), pp. 66-82.

> *Oak Field, near Manchester,*
>
> *June 4th, 1849.*[79]
>
> Concluiré, por lo tanto, en consideración con lo demostrado por los experimentos contenidos en este trabajo,-
>
> 1°. Que la cantidad de calor producida por la fricción de los cuerpos, ya sean sólidos o líquidos, es siempre proporcional a la cantidad de fuerza gastada. Y,
>
> 2°. Que la cantidad de calor capaz de aumentar la temperatura de una libra de agua (pesada en vacío, y conducida entre 550 y 600) en 1 ° FAH., requiere para su evolución el gasto de una fuerza mecánica representada por la caída de 772 libras . a través del espacio de un pie.
>
> *Oak Field,* cerca de *Manchester*,
>
> 04 de junio, 1849[80]
>
> La cantidad de calor producida por la fricción de cuerpos, ya sean sólidos o líquidos, es siempre proporcional a la cantidad de (trabajo) gastado. La cantidad de calor capaz de aumentar la temperatura de una libra de agua… en 1° F requiere para su evolución el gasto del (trabajo) mecánico representado por la caída de 772 lb a través del espacio de un pie (Joule, en Arnold, *Ibidem*, p. 446).

Consideremos ahora la plausibilidad de nuestra propuesta sobre la aplicación. (a) ¿Surgen nuevos conceptos de la aplicación matemática a la física?; (b) ¿la semejanza entre estructuras matemáticas y estructuras físicas es anterior o posterior a la aplicación?

Respecto a (a), la fase cualitativa en ciencia ilustrada por Lavoisier y Rumford, respecto a las propiedades del calor como fluido imponderable y sobre la hipótesis del calor como movimiento respectivamente, no generaron algún concepto de aplicación matemática. En ningún caso se aplicaron mediciones ni descripciones algebraicas de regularidades físicas. En consecuencia, no proporcionaron alguna ley general sobre el calor desde la cual se confirmara o rechazara alguna de las dos hipótesis: *no decidiremos en absoluto entre*

[79] Las cursivas son originales.
[80] La traducción es responsabilidad mía.

hipótesis anteriores. Varios fenómenos parecen favorables a una…pero existen otros …explicados …por la otra (Laplace y Lavoisier, 1786, en Arnold, Ibidem, p 443).

En la fase cualitativa de la investigación sobre el calor no hay conceptos de aplicación matemática. Los conceptos existentes en este caso: calórico libre, calórico combinado, calórico liberado, *vis* viva, pérdida de *vis* viva e incremento de *vis* viva fueron el resultado de propiedades postuladas ya por la hipótesis del calórico, ya por la hipótesis del calor como movimiento. En ningún caso estos conceptos ofrecieron definiciones generalizables sobre la naturaleza del calor.

En cuanto a (b), desde los programas de investigación de Lavoisier y Rumford no es posible establecer el origen de la semejanza entre estructuras matemáticas y físicas. No hay algo en sus consideraciones que nos invite a pensar sobre algún presupuesto ontológico sobre dicha semejanza. Y, tampoco la vertiente epistemológica de la aplicación es considerada para dar cuenta de esta relación.

Estos resultados no son negativos para nuestra propuesta. Las fases cualitativas en la investigación científica no proporcionan por definición un conocimiento sobre el fenómeno de la aplicación matemática. En todo caso, nos permiten señalar la importancia de la aplicación para avanzar en la comprensión de la naturaleza de estados, procesos y fenómenos físicos.

Con el programa de investigación de Joule, no solo el tema de la aplicación matemática entra en consideración, sino refuerza nuestra propuesta sobre ella. De acuerdo con este programa, se confirma la generación de conceptos y la semejanza estructural entre matemáticas y física por la aplicación. En adelante nos centraremos en un tema comprehensivo de ambos aspectos: la relación entre descripción matemática y principios físicos.

A partir de la investigación de Joule, de la manera en que construye sus experimentos y aparatos, de la forma en que recurre a propiedades termométricas previamente definidas de los cuerpos y sustancias para realizar sus cálculos, de la forma en que concluye el equilibrio entre calor y trabajo a partir de sus evidencias, de la manera en que sintetiza diferentes resultados de distintos experimentos para establecer con toda legalidad epistémica ***[**[r]esults so closely coinciding with one another, and with those previously derived from experiments with elastic fluids and the electro-magnetic machine**]**, left no doubt on my mind as to the existence of an equivalent relation between force and heat*[81]*;* parece contundente concluir un aspecto importante de nuestra tesis de la aplicación matemática. La semejanza entre estructuras matemáticas y físicas es posterior en términos explicativos a la aplicación.

Tiene sentido hablar de *that each degree of heat per lb. of water required for its evolution in this way a mechanical force represented by 770 foot-pounds*[82] por los patrones de medición. De la misma manera, tiene sentido hablar de *that the quantity of heat produced by the friction of bodies, whether solid or liquid, is always proportional to the quantity of force expended*[83] porque conocemos la estructura que ordena la regularidad ($\Delta U = W\mathit{ad}$). Sin las estructuras matemáticas ninguna de las dos afirmaciones cobraría sentido. La fuente de conocimiento del equilibrio entre calor y trabajo se basó en la aplicación matemática.

Veremos ahora, aunque en los resultados obtenidos hasta el momento ya está implicado, que la descripción algebraica del equivalente mecánico del calor constituye, no solo un nuevo concepto de aplicación, sino la propia formulación de un principio general en física.

La función matemática que describe la regularidad en los distintos resultados experimentales de Joule sobre la energía interna es:

$$\Delta U = W\mathit{ad}$$[84]

---

[81] " Los resultados coinciden muy cercanamente con otros, y con los previamente derivados a partir de experimentos con fluidos elásticos y la máquina electromagnética, esto no deja alguna duda en mi mente en cuanto a la existencia de una relación equivalente entre la fuerza y el calor…". La traducción es responsabilidad mía.

[82] "…que cada grado de calor por lb de agua requiere para su evolución, en este sentido, una fuerza mecánica representada por 770 libras-pie." La traducción es responsabilidad mía.

[83] "…que la cantidad de calor producida por la fricción de los cuerpos, ya sean sólidos o líquidos, es siempre proporcional a la cantidad de fuerza gastada." La traducción es responsabilidad mía.

[84] Una ecuación equivalente que expresa el Equivalente Mecánico del Calor es:

La aseveración de Joule sobre la equivalencia entre 1 cal y 4.186 *J* resulta de una aplicación particular del principio general ΔU = W*ad*. Los resultados de esta aplicación particular se obtienen del principio de conservación de la energía implicado en ΔU = W*ad*: ΔU – W = Q.

¿Cómo la función (ΔU – W = Q) describe la regularidad física general sobre la conservación de la energía?

Apliquemos rápidamente el proceso interpretativo, utilizado en la sección anterior, para definir una descripción matemática como una regularidad física.

Primera etapa: función matemática

ΔU – W = Q (operadores y operaciones matemáticas)

Segunda etapa: asignación de variables con parámetros físicos

ΔU = representa el cambio de energía en la energía interna entre el estado (U_i) y la energía interna en el estado final (U_f).

W = trabajo mecánico

Q = cantidad de calor

Tercera etapa: asignación de los valores particulares a los parámetros

Q ≡ W = 4.186 *J*

Una caloría se define como Q requerida para elevar 1g. de agua de 15.5° a 16.5° C.

La cantidad Q es equivalente a W de 4.186 julios en unidades MKS.

Entonces, una 1 cal es igual a 4.186 julios.

¿Esto es correcto? Aplicando el factor de conversión: J = 4.186 julios/calorías, obtenemos:

$J = \frac{W}{Q}\left[\frac{j}{cal}\right]$ (1) y cuyo valor es de $4{,}18\left[\frac{j}{cal}\right]$

Cuarta etapa: despeje de la ecuación e interpretación física del resultado

4.186 J de energía mecánica ΔT de un 1g de agua en 1° C.

Caloría = 4.186 J sin referencia a la sustancia que se está calentando: 1 cal = 4.186 *J*

Obtención de la equivalencia (congruencia):

780 ft-1b para 1 lb (= 453.6g de H_2O) por 1°F =1.8°.

Si J = 0.7376 ft-lb en MKS, obtenemos el despeje:

780.1.8 / 0.7376.456.6 ≡ 4.186 Julios

Tal que: 1 cal ≡ 778.26

Como las cantidades numéricas de $\Delta U - W = Q$ son fijas y reproducibles en cualquier situación dada, cada una de ellas es la medida de algo que es convertido de trabajo a energía. De estas condiciones se deriva la condición física del concepto de aplicación matemática *equivalente mecánico del calor* como un factor de conversión, pero adicionalmente $\Delta U - W = Q$ constituye el principio general de la conservación de la energía como un principio congruente al principio general sobre el equivalente mecánico del calor: $\Delta U = W_{ad}$.

El hecho de que las cantidades numéricas de $\Delta U - W = Q$ y $\Delta U = W_{ad}$ sean fijas y reproducibles se sigue de la condición física del sistema en los experimentos de Joule. El sistema no se mueve, su energía cinética es cero, no se desplaza con respecto al nivel del suelo, su energía potencial permanece constante y sin embargo, el sistema ha absorbido una cierta cantidad de energía. A esta energía, es a la que se le llama energía interna del sistema. Estas condiciones, le sirvieron a Joule y a los científicos posteriores para extender estas observaciones *a todo sistema termodinámico* y postular el principio de que si a cualquier sistema aislado, le suministramos una cierta cantidad de energía mecánica W, ésta sólo provoca un incremento en la energía interna del sistema U, por la cantidad ΔU de manera que ΔU = W*ad* es una función descriptiva de la regularidad-incremento presente sobre el estado de energía interna para todo sistema termodinámico.

De acuerdo con el reporte experimental de Jolue [1949] (1950) la función (ΔU = W*ad*) es la descripción matemática de su aseveración final: a. la cantidad de calor producida por la fricción de los cuerpos, sean líquidos o sólidos siempre es proporcional a la cantidad de trabajo mecánico suministrado y; b. la cantidad de calor capaz de aumentar la temperatura de 1 libra de agua (pesada en el vacío y tomada a una temperatura entre 55º y 60º F) por 1.8º C (1º F) requiere para su evolución la acción de una fuerza mecánica representada por la caída de 772 lb (350.18kg) por la distancia de l pie (30.48 cm).

El resultado (a) señala la generalidad capturada por (ΔU = W*ad*). (ΔU = W*ad*) es un orden que captura y hace cognoscible (Livio, M., 2011, p. 62)[85] un principio físico sobre la transmisión energética.

Por su parte, el resultado (b) es una aplicación particular del principio (ΔU = W*ad*), determinando el comportamiento térmico de una sustancia específica, el agua, en función de la cantidad de calor y la fuerza mecánica que le es suministrada.

En consecuencia Joule explicó la fuente de calentamiento en los experimentos de Rumford. El reconocimiento del calor como una forma de energía solo cobró sentido por un principio general sobre el equivalente mecánico del calor descrito por ΔU = W*ad*.

De esta manera hemos ilustrado cómo una descripción algebraica puede constituir un principio o ley física. Presentamos a continuación conclusiones generales de las dos secciones de nuestro estudio de caso.

[85] Livio, Mario. "*Why Math Works*." Scientific American, August 2011. Volume 305, number 2. 60-63.

Conclusiones generales del Estudio de Caso

Sistematicemos los resultados:

A partir de este estudio nuestra teoría de la aplicación matemática tiene una respuesta a: i. ¿surgen nuevos conceptos de la aplicación matemática a la física? y b. ¿la semejanza estructural entre sistemas matemáticos y físicos es anterior o posterior a la aplicación matemática?

1. En las fases cualitativas de la experimentación los científicos presuponen la existencia de ciertas regularidades en los estados y procesos físicos de los cuerpos y sustancias. Sin embargo, no pueden decir que conocen las regularidades. Estas regularidades en principio no están ordenadas. No tienen una estructura. No tiene sentido hablar de ellas sin su estructura. Un estado, proceso o fenómeno físico no tiene una estructura previa a la aplicación matemática.

2. Por medio de las observaciones cuantitativas (patrones de medición que pueden aplicarse a sistemas físicos) y la descripción matemática de resultados experimentales (funciones descriptivas de regularidades físicas), el comportamiento de los estados, procesos y fenómenos físicos pueden capturarse matemáticamente.

3. Las relaciones de semejanza entre las estructuras matemáticas y sistemas físicos quedan establecidas experimentalmente en tanto sea posible describir matemáticamente las regularidades de los estados, procesos y fenómenos físicos. En este caso, los científicos asumen que una regularidad física tiene una estructura matemática específica.

4. Cuando un científico observa cuantitativamente un proceso físico, lo mide. Cuando lo mide señala una magnitud. Cuando señala una magnitud, la nombra para denotar la relación entre una cantidad y un estado físico. La estandarización de la lectura de una escala implica estandarizar las relaciones entre cantidades indicadas por un dispositivo y estados físicos. Establecer propiedades termométricas como temperatura o estados calorimétricos como la cantidad de calor (Q), depende de la forma en que

matemáticamente los describamos por medio de nuestros patrones de medición. Desde este estadio, han surgido nuevos conceptos, conceptos de medición, de aplicación. Casos ejemplares de estos conceptos son: 'temperatura', 'cantidad de calor', transferencia de calor', 'equivalente mecánico del calor'.

5. Al encontrar los científicos una misma función en la descripción de diferentes resultados experimentales, el científico puede postular la existencia de un principio o ley general en física. Casos ejemplares de funciones que constituyen leyes o principios generales son: ($m_h \Delta t_h = - m_c \Delta t_c$): ley de transferencia de calor de Black para la mezcla de dos mismas sustancias; y ($\Delta U = W_{ad}$): equilibrio mecánico del calor de Joule. El científico no percibe en el mundo estas estructuras, tampoco las postula, las demuestra experimentalmente.

6. Si la aplicación matemática es un dispositivo generador de nuevos conceptos y estos nuevos conceptos determinan las interpretaciones de los estados, procesos y fenómenos físicos, la semejanza entre estructuras matemáticas y físicas es explicativamente posterior a la aplicación.

7. La explicación de la aplicación matemática que proponemos puede conciliar la tensión entre las tesis monistas y dualistas sobre la aplicación. La condición es preservar el carácter epistemológico de ambas tendencias. Con nuestro estudio de caso podemos constatar que la aplicación puede explicarse como una representación matemática-estructural de estados, procesos y fenómenos físicos. Mediante esta perspectiva damos cuenta del hecho de que no hay semejanza estructural sin aplicación. En consecuencia, puede relacionarse consistentemente la similaridad estructural (monismo epistemológico) con el carácter auxiliar de las matemáticas (dualismo epistemológico) en una sola explicación de la aplicación.

APARTADO IV

Conclusiones

Conclusiones

Nuestra investigación obtuvo los siguientes resultados finales.

El platonismo monista de G. Frege (1879, 1884) y S. Shapiro (1997, 2000), el empirismo monista-no platonista de P. Kitcher (1984, 1988, 2000) y el empirismo lógico dualista de R. Carnap (1931, 1935, 1963) ilustran programas de investigación en filosofía de las matemáticas. El interés principal de estos programas ha sido ofrecer una explicación integral de los hechos matemáticos. Pero, como bien ha señalado S. Shapiro (2000, p. 34) no existe una filosofía completa del conocimiento y referencia de los objetos matemáticos, sin explicar la relación entre matemáticas y ciencia física.

El interés en el fenómeno de la aplicación matemática no estaba fundado entonces en una preocupación por la aplicación primariamente, sino en la posibilidad de argumentar a partir de ella a favor de una versión específica sobre la realidad matemática. Esta condición acotó el tipo de pregunta sobre la aplicación. Todos los programas analizados centran su respuesta a ¿qué ganan los científicos al usar matemáticas?

De acuerdo con Frege (1879, 1884) los matemáticos ganan conocimiento de la naturaleza de los objetos abstractos, particularmente de los números por medio de su aplicación en proposiciones empíricas (Dummett, 1981, p.30).

De acuerdo con Shapiro (1997) los científicos ganan un retrato estructural de los sistemas físicos mediante una axiomatización coherente de la realidad física a partir de la teoría de modelos (Shapiro, 1997, p. 8).

De acuerdo con P. Kitcher (1984, 1988), los científicos ganan conocer el mundo físico en términos de la comprensión de una realidad idealizada, por un sujeto idealizado (Kitcher, 1984, p. 12 y p. 110 y 1988 pp. 313ss.).

De acuerdo con Carnap (1935), los científicos ganan una metodología consistente para el trabajo científico en general y, particularmente, una estructura lógica correcta para el diseño de sus teorías científicas reduciendo su margen de refutación lógica (Carnap, 1935, p. 25 y Morado, 1987, pp. 45-56).

Si bien son interesantes estas respuestas al contestar una pregunta específica sobre la aplicación, ninguna de ellas dice algo sobre la naturaleza de la relación entre matemáticas y sistemas físicos. En general las propuestas hasta ahora disponibles no distinguen las propiedades epistemológicas y semánticas implicadas en la aplicación.[1] En consecuencia las respuestas sobre la aplicación están incompletas.

Una desventaja adicional del platonismo, el empirismo radical y el empirismo lógico es ilustrar como consecuencia de sus posiciones sobre la realidad matemática, una fuerte tensión entre tesis monistas y dualistas sobre la aplicación.

Las variedades del monismo y dualismo son las siguientes.

Las tesis monistas ontológicas consideran dos alternativas. (1) los objetos matemáticos existen análogamente a la existencia de los objetos físicos; (2) los objetos matemáticos y físicos constituyen una misma realidad multifacética.

La tesis dualista ontológica es una concepción descriptivista de la matemática. La verdad descrita por los enunciados matemáticos no es la realidad empírica percibida por nuestros órganos sensoriales, sino una realidad ideal y abstracta. La realidad física y la realidad matemática están escindidas. Se asume el problema de la aplicación.

Las tesis monista epistemológica define a la ciencia matemática en el mismo sentido de la física. Ambas disciplinas incluyen los mismos rasgos estructurales, esto es, estructura teórica, método de investigación y objetos de aplicación.

La tesis dualista epistemológica considera a las matemáticas como una ciencia por alguna de las siguientes dos condiciones. Por un lado las matemáticas son científicas por el papel que juegan con las otras ciencias por antonomasia (carácter auxiliar). Por el otro, si las matemáticas son ciencias, estas requieren un análisis epistemológico diferente al análisis

[1] En palabras de Dummett, "…[*no nos dicen] qué es una aplicación*…"(Dummett, 1981, p.39).

epistemológico de la física. Una versión distinta de este dualismo epistemológico surge al negar la cientificidad de las matemáticas al restarle todo valor a su ontología.[2]

El platonismo, el empirismo radical y el empirismo lógico ilustran la tensión monismo dualismo en dos sentidos. En primer lugar, al considerar a estos programas desde su concepción general de los hechos matemáticos. En segundo lugar, al identificar los compromisos monistas y dualistas al interior de sus programas.

De acuerdo con la primera posibilidad, el platonismo, el empirismo radical y el empirismo lógico ejemplifican una versión monista platonista, una monista no- platonista y una dualista respectivamente.

Para el platonismo de Frege y Shapiro los hechos matemáticos existen análogamente a la existencia de los hechos físicos, aunque su naturaleza es completamente distinta, asumiendo el problema de la aplicación. De acuerdo con el empirismo radical de Kitcher, los hechos matemáticos y los hechos físicos se explican, ambos, en última instancia por la percepción, no hay una escisión entre realidad matemática y física. Por su parte, el empirismo lógico de Carnap liga los hechos matemáticos con la estructura *a priori* y analítica de la ciencia y relaciona las ciencias naturales con el contenido *a posteriori* y sintético de sus enunciados. En esta medida, las matemáticas requieren un análisis epistemológico independiente a la física.

Lo anterior muestra una diferencia entre puntos de vista sobre algunos aspectos de los hechos matemáticos. Sin embargo, aun cuando la diferencia de opinión está fundada en la tensión entre tesis monistas y dualistas en matemáticas, falta identificar en qué medida y en qué términos cada opinión favorece a una u otra tendencia.

[2] Aun considerando las distinciones entre dualismo ontológico/dualismo epistemológico y monismo ontológico/monismo epistemológico, los desacuerdos entre un monismo general y un dualismo general en matemáticas se originan al intentar explicar un mismo punto de partida sobre la constitución de las matemáticas: los hechos matemáticos básicos. Las matemáticas están constituidas por ciertos objetos, datos y relaciones, *ex. gr.* teoremas, axiomas, pruebas, el carácter deductivo de las matemáticas, el margen aplicativo de las matemáticas a las otras ciencias, al tiempo, de considerar la posibilidad de ordenarse deductivamente las ciencias no matemáticas. Incluirse en las filas monistas o dualista dependerá, entonces, de cómo se explican los datos antes señalados, considerando también sus distintas relaciones. Es falso entonces implicar un monismo por el simple hecho de reconocer la existencia de verdades matemáticas, e implicar un dualismo por el simple hecho de reconocer la importancia de las matemáticas para estructurar la ciencia en general.

El platonismo de Frege y Shapiro se comprometen con una tesis monista ontológica de tipo (1), con un monismo epistemológico y con un dualismo ontológico. El empirismo radical de Kitcher considera el monismo ontológico de tipo (2) y comparte la tesis monista epistemológica. Por su parte Carnap, es consecuente con la tesis dualista de corte epistemológico.

Desde esta perspectiva la tensión monismo/dualismo puede ilustrarse internamente si identificamos en un mismo programa tesis monistas y dualistas de corte ontológico. El único caso que cumple esta condición es el platonismo de Frege y Shapiro. Cómo mantener, por una parte, la existencia de los objetos matemáticos análogamente a la existencia de los objetos físicos (monismo ontológico 1), por otra parte, mantener la escisión entre realidad matemática y física (dualismo ontológico) y, adicionalmente, considerar la necesidad de explicar la relación entre matemáticas y ciencia física. En particular, cómo Frege puede mantener su dualismo ontológico y, al tiempo, sostener que el conocimiento integral de los números naturales y reales se debe a su aplicación en proposiciones empíricas. Esta motivación epistemológica sobre la aplicación es algo que Frege no logra explicar.

El problema de Kitcher y Carnap no se debe a la incorporación simultánea de tesis monistas y dualistas en sus programas, sino, como hemos señalado al tipo de pregunta y respuestas que ofrecen de acuerdo con sus compromisos monistas y dualistas respectivamente. En todo caso los programas de cada uno de estos filósofos ilustran la tensión monismo/dualismo si comparamos entre ellos sus respuestas sobre la naturaleza de los hechos matemáticos y la aplicación.

En suma, las contribuciones del platonismo, el empirismo radical y el empirismo lógico sobre la aplicación no sólo son incompletas sino además constituyen una fuerte tensión entre tesis monistas y dualistas al momento de explicar la aplicación matemática. En consecuencia es necesario una nueva propuesta de la aplicación, en la cual, no solo se expliquen las propiedades más básicas de éste fenómeno sino se dirima la tensión monismo/dualismo.

La oportunidad de hacer preguntas más provechosas sobre la aplicación surge cuando independizamos su análisis del problema sobre el conocimiento y referencia de los objetos matemáticos.

¿Qué aspectos debe incluir una explicación satisfactoria sobre la aplicación matemática?

En primer lugar, debe aclarar en qué sentido las matemáticas se relacionan con las otras ciencias. En segundo lugar, debe explicar cómo la aplicación es una forma de representar matemáticamente estados, procesos, fenómenos físicos. En tercer lugar, debe considerar cómo a partir de una estructura matemática se obtienen resultados de orden físicos. En cuarto lugar, debe señalar si en función de la aplicación matemática surgen elementos que solo se dan y cobran sentido por la aplicación. En quinto lugar, en caso de obtener una respuesta afirmativa al punto anterior, debe explicar la naturaleza de tales elementos. Por último, una explicación integral sobre el fenómeno de la aplicación matemática debe señalar si la semejanza de las estructuras matemáticas con las estructuras físicas se debe a la aplicación o bien esta similaridad es anterior a ella.

Dos preguntas sobre la aplicación nos han permitido considerar los diferentes aspectos arriba señalados: a. ¿surgen nuevos conceptos de la aplicación matemática a la física? y b. ¿la semejanza estructural entre sistemas matemáticos y físicos es anterior o posterior a la aplicación matemática? Estas preguntas guían nuestra propuesta sobre la aplicación: "Síntesis Estructural".

Inicialmente nos inspiramos en los trabajos de S. Shapiro (1997, 2000) y Ch. Swoyer (1991).

Las propuestas de Shapiro (1997, 2000) y Swoyer (1991), si bien son distintas, particularmente, porque Shapiro busca desde su platonismo una fundamentación última de las matemáticas, mientras Swoyer está interesado en desarrollar una teoría general de la representación científica, coinciden en dos puntos importantes. En primer lugar, suponen que el mundo físico intrínsecamente está ordenado en términos matemáticos (Shapiro, 1997, p.9) (Swoyer, 1991, p. 451). En segundo lugar, consideran a la semántica de la teoría de modelos y de la teoría de conjuntos, respectivamente, los medios para describir la realidad física especificando un rango de correspondencia entre los distintos predicados y relaciones matemáticas con aquellos predicados y relaciones físicas (Shapiro, 1997, p. 8) y (Swoyer, 1991, p. 457-58).

Sobre el primer punto, consideramos, está la carga de la prueba para ellos. Esto es, en qué sentido, por el hecho de axiomatizar un sistema físico mediante una teoría matemática, se sigue, o bien la existencia (ontológica) de tal estructura (Shapiro, 1997, p. 134) o bien que el mundo físico ontológicamente esté organizado en términos matemáticos (Swoyer, 1991, p. 451). En todo caso, el presupuesto ontológico es insuficiente para mantener la semejanza estructural entre matemáticas y física como una condición previa a la aplicación, esto debe demostrarse o bien no considerarse. En cuando al segundo punto, las respuestas sobre la aplicación se limitan a la disposición de una teoría matemática representacional de un sistema físico, como si esto explicara todo sobre el fenómeno de la aplicación.

Lo interesante, en todo caso, es ver en las propuestas estructurales bases para mantener una perspectiva de la aplicación matemática en términos de una representación matemática-descriptiva de los sistemas físicos, basada en la idea de semejanza estructural. Este es el punto de partida de nuestra propuesta y el punto de convergencia con las propuestas estructuralistas de Shapiro y Swoyer.

Desde nuestra perspectiva la aplicación matemática es una representación científica-estructural de estados, procesos y fenómenos físicos. ¿Qué quiere decir esto? y ¿cómo esta afirmación es consecuencia de las dos preguntas guía de nuestra propuesta?

A partir de nuestra exposición teórica de la "Síntesis Estructural" y de nuestro estudio de caso hemos obtenido los siguientes resultados.

En una teoría científica, por ejemplo, una teoría acerca de la transferencia del calor en el campo de la termometría y calorimetría, la relación entre los aspectos matemáticos y no matemáticos integrados en su diseño, se define como: la descripción de los sistemas físicos aludidos por la teoría (*ex. gr.*, estados de temperatura, procesos de transferencia, fenómenos de conversión) mediante estructuras matemáticas (números, magnitudes y funciones matemáticas) que capturan su regularidad.

La función descriptiva de la aplicación satisface distintas propiedades mutuamente explicativas.

Presupone una relación de correspondencia entre estructuras matemáticas y sistemas físicos. En el campo de la termometría, calorimetría y termodinámica el científico presupone una relación entre el estado, proceso o fenómeno a explicar y sus patrones de medición disponibles. En otras palabras, presupone que sus patrones de medida podrán capturar la regularidad del sistema físico. Por ejemplo, en calorimetría el científico presupone una relación de correspondencia entre "algo" que es intercambiado por los cuerpos cuando alcanzan el equilibrio y el número observado en una escala de medición, vía un instrumento, y ligado a tal estado físico. Cuando los científicos, por medio de la experimentación cuantitativa, estandarizan la lectura de la escala de medición y asignan magnitudes específicas para estados o procesos físicos específicos, entonces: i. la correspondencia entre el estado o proceso físico y su medida ya no es un presupuesto; ii. el científico ha comprendido la regularidad del estado o proceso físico.

En consecuencia la aplicación tiene un perfil semántico.

Cuando el científico mide un estado y lo describe mediante una estructura matemática surge con ello una forma particular de hablar de las propiedades de los sistemas físicos. Las propiedades, ahora, no refieren a estados o procesos observables directamente, sino a propiedades medidas por los científicos y para la ciencia. Solo en el contexto de su descripción matemática tiene sentido hablar de propiedades termométricas, calorimétricas y térmicas. Por ejemplo, el concepto de "temperatura (°C/°F)" surgió cuando el científico le asignó una magnitud a ese "algo" que es intercambiado por los cuerpos en materia de calor. El concepto de cantidad de calor (Q) como la energía cedida o absorbida por un cuerpo surgió cuando el científico observó la variación de temperatura en un número determinado de grados de acuerdo con una escala e instrumento de medición. Al margen de estas mediciones no tiene sentido hablar ni de temperatura ni de cantidad de calor. Lo mismo ocurrirá en el caso de "transferencia de calor" y "equilibrio mecánico del calor". Todos estos conceptos son originados por la aplicación, son conceptos de aplicación. La interpretación de cada uno de ellos depende de la forma matemática en que los describimos y no de la percepción directa de propiedades en el mundo físico. Por esta razón, en virtud de la propiedad semántica de la aplicación se obtienen nuevos conceptos para la ciencia física.

En consecuencia la aplicación tiene una propiedad epistemológica.

Si el científico encuentra una misma función para describir diferentes resultados experimentales, en otras palabras, una misma función captura la regularidad física presente en distintos experimentos, el científico postulará un principio o ley general para la física. Por ejemplo, las funciones ($m_h\ \Delta t_h = -\ m_c\ \Delta t_c$) y ($\Delta$U = W*ad*) ilustran esta circunstancia. En ambos casos, a la luz de distintos experimentos de Black y Joule, las cantidades numéricas consideradas por cada función resultan ser fijas y reproducibles en cualquier situación dada, se convierten en *la medida general* de una regularidad física. En el primer caso, '($m_h\ \Delta t_h = -\ m_c\ \Delta t_c$)' describe la ley general de la transferencia de calor de Black. En el segundo caso, '(ΔU = W*ad*)' describe el principio general de conversión, equivalente mecánico de calor de Joule. Haber encontrado una descripción matemática constante para estados y procesos físicos, le permite a los científicos extender sus observaciones experimentales a todo sistema termodinámico.

En consecuencia la función descriptiva de la aplicación resuelve el problema de la semejanza entre estructuras matemáticas y estructuras físicas.

Los científicos no perciben en el mundo físico estructuras matemáticas. Los científicos conocen *a posteriori* la semejanza entre estructuras matemáticas y sistemas físicos en otro sentido. Esto es, Joseph Black y James Prescott Joule no percibieron en el mundo las estructuras ($m_h\ \Delta t_h = -\ m_c\ \Delta t_c$) y ($\Delta$U = W*ad*) como el orden de la transferencia y equivalente mecánico del calor, respectivamente. Estos dos científicos demuestran la semejanza entre las ecuaciones y los sistemas físicos experimentalmente. En esta medida, la semejanza entre estructuras matemáticas y sistemas físicos depende de la aplicación, esto es, de la investigación experimental cuantitativa y, en ésta se funda.

En consecuencia la Síntesis Estructural dirime la tensión monismo/dualismo.

La síntesis estructural es una forma de conciliar los compromisos monistas y dualistas respecto a la aplicación, siempre y cuando privilegiemos el aspecto epistemológico de estas tendencias. La aplicación como una representación científica-estructural, considera, por un lado, la semejanza entre matemáticas y física en dos sentidos: i. dado que toda representación matemática es una representación científica genuina, las matemáticas y la física en tanto ciencias, estructuralmente son similares; ii. la semejanza entre estructuras matemáticas y sistemas físicos se mantienen en virtud de la aplicación matemática. Estos dos puntos ilustran la vena monista epistemológica de nuestra explicación. Pero, adicionalmente el punto (ii) indica una relación consistente entre los compromisos monistas y dualistas de la Síntesis Estructural.

Uno de los aspectos interesantes de nuestra propuesta es identificar la interdependencia entre el punto monista (ii) con el aspecto dualista epistemológico de la aplicación: el carácter auxiliar de las matemáticas. Resulta incognoscible la semejanza entre matemáticas y física sin mantener el carácter auxiliar de las matemáticas cuando éstas capturan las regularidades de un estado, proceso o fenómeno físico. La semejanza estructural y el carácter auxiliar son dos aspectos de una misma interpretación de la aplicación. No podemos conocer las regularidades del mundo físico si no hay un orden en su descripción. Las matemáticas ayudan a capturar la regularidad, ayudan a ordenarla y la hacen cognoscible. Al satisfacerse estas condiciones, se establece la semejanza entre estructuras matemáticas y sistemas físicos. Por tanto, no hay semejanza sin aplicación.

Nuestra propuesta disipa, bajo una alternativa epistemológica, la tensión monismo/dualismo.

Bajo estas condiciones la Síntesis Estructural como una explicación alternativa de la aplicación, al poner en el centro del análisis la propiedad aplicativa de las matemáticas, tiene importantes ventajas frente a las explicaciones del platonismo, del empirismo radical y del empirismo lógico. Gran parte de estas ventajas se deben a su independencia con el problema general del conocimiento de los objetos matemáticos y su referencia. Esto posibilitó preguntarnos libremente por la aplicación, por sus propiedades más básicas y, no cercar la pregunta en función de una perspectiva particular de la realidad matemática.

Si bien consideramos nuestra explicación válida para toda la aplicación matemática a la física, por ahora sólo la hemos corroborado con algunos aspectos de la teoría termodinámica. En esta medida nos sentimos motivados a perfeccionar su contenido e incluir, en un futuro, otros casos particulares para su verificación.

Por otra parte, también queda pendiente considerar estudios recientes sobre la representación matemática, por ejemplo, Barceló (2011), Brown (2008), Mancosu (2008), Corfield (2003) quienes desde diferentes perspectivas se preguntan por la naturaleza de la representación matemática. Estos estudios seguramente abonarán en la mejora de una noción de representación matemática como una representación genuinamente científica. Pero, aún más, por un lado, abrirán cancha al análisis de diferentes versiones y propiedades de la representación como formas de justificar nuestro conocimiento en matemáticas, y por otro, propiciarán nuevamente la discusión desde programas en filosofía de las matemáticas más actuales, sobre las representaciones matemáticas como formas novedosas de justificar nuestros enunciados físicos.

Bibliografía

Fuentes hemerográficas:

Barceló, A., (2005), "El reto epistemológico del naturalismo", en http://www.filosoficas.unam.mx/~abarcelo/El_Reto_Epistemológico.pdf; pp. 1-13

----------, (2003), "¿Qué tan Matemática es la Lógica Matemática?" en *Dianoia*. Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM. Volumen XLVIII, no. 15, pp. 3-28.

Carnap, R. (1931) "*Überwindung der Metaphysik durch Logische Analyse der Sprache*" en *Erkenntnis*, 2, pp. 219-241.

Contessa Gabriele, (2007), "*Scientific Representation, Interpretation, and Surrogative Reasoning" en* *Philosophy of Science*, Vol. 74, No. 1, pp. 48-68.

Ferreirós, José, (1999), "Matemáticas y Platonismo(s)", en *La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas*, No. 2, España, pp. 446-473.

Joule, J.P., [1849], (1850), "*On the Mechanical Equivalent of Heat*", en *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 140, The Royal Society, pp. 61-82. (http://www.jstor.org/stable/108427).

Kitcher, P., (1988), "*Mathematical Progress*", *Revue Internationale de Philosophie*, Vol. 42, No. 67, p. 529.

----------, (1978), "*Theories, theorists and theoretical change*" en *Philosophical Review*, Vol. 87.

Livio, M., (2011), "*Why Math Works*." *Scientific American*, Vol. 305, Num. 2, Agosto, 2011, pp. 60-63.

Maddy, P., (1980), "*Perception and Mathematical Intuition*", en *The Philosophical Review*, No. 89, pp. 163-196.

Michael, F., (1990), "*Kant on Concepts and Intuitions in the Mathematical Sciences*", en *Synthese*, Vol. 84, No. 2, pp.213 - 257.

Morado, R. (1987), "*Frege, Hempel and Dedekin: Definition of Number and Correferentiality*" en *Ergo*, Vol. I. No. 2, pp. 45-56

Neave, E.W.J. (1936), "*Joseph Black's Lectures on the Elements of Chemestry*" en ISIS, Vol. 25, No. 2 (Sep., 1936), Chicago Journals, History of Science Society, The University of Chicago Press, pp. 372-390 (http://www.jstore.org/stable/225375.

Resnik, M., (1981) "*Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference*", *Nous* 15, pp. 529-550

Shapiro, S., (1983), "*Mathemattics and Reality*", *Philosophy of Science* 50, pp. 523-48.

Swoyer, Ch., (1991), "*Structural Representation and Surrogative Reasoning"*, en *Synthese* Vol. 87, No. 3, pp. 449 - 508.

Libros y Capítulos de Libros:

Alemán, A., (2001), Lógica, Matemáticas y Realidad, TECNOS, Madrid.

Achinstein, Peter (1968), *Concepts of Science. A Philosophical Analysis*, Johns Hopkins Press., Baltimore:

Arnold, B. Arons, (1970), Evolución de los conceptos de la física, Trad. Lorenzo Ranzo, México.

Ayer, A.J. (ed.) (1959), *Logical Positivism*, Free Press / Allen &Unwin, Glencoe-Londres. Versión en castellano Ayer A.J. (ed.) (1965), El positivismo lógico, Fondo de Cultura Económica, México.

Apostel Leo, (1961), "*Toward the Formal Study of Models in the Non-formal Science*", en Kazemier y Vuysje, (Eds.) (1961), pp. 1-37.

Balaguer, M., (1998), *Platonism and anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, New York.

Baruch A. Brody y Grandy E. Richard (Eds.), (1989), *Readings in the Philosophy of Science*, Segunda Edición, Prentice Hall, Inc., New Jersey.

Benacerraf, P. y Putnam, H., (Eds.), (1983), *Philosophy of Mathematics. Selected readings*, Cambridge University Press, Cambridge.

Brown, J.R., (1999), *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledges, New York.

Boghossian y Peacock (eds.), (2000), *New Essays on the A priori*, Oxford University Press, New York.

Boltzmann, Ludwig, (1986), Escritos de Mecánica y Termodinámica, Alianza Editorial, Madrid.

Callen, Herbert B., (1985). *Thermodynamics and an Introduction to Themostatistics*, 2nd Ed., New York: John Wiley & Sons.

Carnap, R., [1963] (1991), Rudolf Carnap. Autobiografía Intelectual, Paidos Ibérica-Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Barcelona, Barcelona.

----------, (1956), "*The methodological character of theoretical Concepts*", en H. Feigl y M. Scriven (eds.) (1956), *Minnesota Studies in the Philosophy of science*, vol. 1, Minneapolis.

----------, (1947), *Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic*, University of Chicago Press, Chicago.

----------, [1937] (1967), *Logical Syntax of Language*, Routledge & Kegan Paul LTD, London.

----------, [1935] (1996), "*Logical Syntax of language*" en Carnap, *Philosophy and Logical Syntax*, Thoemmes, Bristol. Copyright Kegan Paul, Trench, Trubner & Co., Londres

----------, (1931), "*The logicist foundations of mathematics*" en Benacerraf, P. y Putnam, H., (1983) (Eds), pp. 41-52.

----------, (1931) "*Überwindung der Metaphysik durch Logische Analyse der Sprache*" en Ayer, A.J., (eds.) (1965), El positivismo lógico, Fondo de Cultura Económica, México. pp. 66.

Casanueva, M. y Benítez J.A., (2003), Representación y Ciencia, UAM-Iztapalapa/ Miguel Ángel Porrúa, México, DF.

Clarke, Bruce, (2001), *Energy Forms. Allegory and Science in the Era of Classical Thermodynamics*, The University of Michigan Press, Michigan.

Conant, James Bryant (*et. al*) (1957), *Harvard Case Histories in Experimental Science*, Volumen I, Caso 3, Harvard University Press, Cambridge Mass.

de Van Wylen, Gordon Y Sonntag, R., (1999), Fundamentos de la Termodinámica, Traducción por María Cristina Sangines Franchini, Limusa, México, DF.

Díez , A. y Moulines, (2008), Fundamentos de la Filosofía de la Ciencia, Ariel, Barcelona.

Echeverría, J. (1989), Introducción a la Metodología de la Ciencia. La Filosofía de la Ciencia en el siglo XX, Barcanova, Barcelona.

Díez, A. Jose y Lorenzano Pablo (Eds.), (2002), Desarrollos actuales de la metateoría estructuralista: problemas y discusiones, Universidad Nacional de Quilmes Ediciones, Buenos Aires.

Dummett, M., (1981) "*Frege and Wittgenstein*" en Block, (ed.), *Perspeclives on the Philosophy of Wittgenstein*, B. Blackwell, Oxford.

Echeverría. J., Ibarra, A., Díez, A., (Eds.), (1990), *Structures in Mathematical Theories. Reports of the San Sebastián International Symposium*, Universidad del País Vasco, País Vasco.

Echeverría, J. (1989), Introducción a la Metodología de la Ciencia. La Filosofía de la Ciencia en el siglo XX, Barcanova, Barcelona.

Field, H., (1989), *Realism, Mathematics and Modality*, Basil Blackwell. Oxford

----------, (1980), *Science Without Numbers: A Defence of Nominalism*, Blackwell, Oxford.

Frege, G., [1892] (1973), "*Uber Sinn und Bedeutung*", en Versión española, T.H. Simpson, Semántica Filosófica. Problemas y discusiones, Siglo XXI, Buenos Aires, pp. 3-59.

----------, [1879] (1972), *Conceptografía*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

----------, [1884] (1968), *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, Veerlag von Wilhelm Koebner, en edición bilingüe Alemán-Inglés, Frege, G., *The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number*, Trad. J.L. Austin, M.A., Basil Blackwell, Oxford.

----------, [1884] (1972), Los Fundamentos de la Aritmética, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

García-Colín, S. L. y Godoy Salas, S, (1976), Conceptos básicos en termodinámica clásica, Sociedad Mexicana de Física, Edicol, México.

Hart, W.D (Ed.), (1996), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, New York.

Hilbert, D., "*On the infinite*", en Benacerraf, P. y Putnam, H., (Eds.), (1983), pp. 183- 201.

Holmyard, E. J. (1990), *Alchemy*, Dover Pub-lications Inc., New York.

Ibarra, Andoni (2003), en Casanueva, M. y Benítez, J., (Coords), (2003), Rep*resentación y ciencia*, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa/Miguel Ángel Porrúa, México.

Kazemier, B.H. y Vuysje, D., (Eds.), (1961), *The Concept and the Role of the Model in Mathematics and Natural and Social Science*., *Proceedings of the Colloquium sponsored by the Division of Philosophy of Sciences of the International Union of History and Philosophy of Science organized at Utrecht*, January, 1960., Dordredt, Holland.

Kitcher, P., [1993] (2001), El avance de la ciencia. Ciencia sin leyenda, Objetividad sin ilusiones. Universidad Autónoma de México, México.

Kitcher, P. y Aspray, W., (1988), History *and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press.

Kitcher, P. (1984), *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford

Kraft, V. (1966), El Círculo de Viena, Taurus, Madrid.

Krantz, et. al, (1971), *Foundations of Measurement*, Vol. I, Academic Press, New York

Maddy, P. (1990), *Realism in Mathematics*, Oxford University Press, New York

----------, (1997), *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

Manzano, María (1999), *Model Theory*, Oxford University Press, New York

Nagel, E., (1961), *The Structure of Science*, Brace & World, Harcourt. Traducción: (1962), La Estructura de la Ciencia, Buenos Aires, Piados.

Putnam, H., (1972), Filosofía de la Lógica, Georges Allen and Unwin, London.

Quine W.O., (1981), *Theories and Things*, Harvard University Press, Massachusetts.

----------, (1963) "*Carnap and logical truth*", en P. Benacerraf and H. Putnam (eds.) (1983) *Philosophy of mathematics. Selected readings*, Cambridge University Press, pp. 355-376.

----------, [1951] (1962), "*Two Dogmas of Empiricism*" en Hart, W. D. eds., *The Philosophy of Mathematics*, pp. 31- 51.

----------, [1951] (1985), Desde un punto de vista lógico, Orbis, Barcelona, pp.49-81

Russell B., y Whitehead, A. [1910] (1950), *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge.

Russell, B., (1919), "*Mathematics and Logic*", en Russell, B., *Introduction to mathematical philosophy*, Allen & Unwin, London.

----------, [1919] (1973), *Introducción a la Filosofía Matemática*, en Bertrand Russell. *Obras Completas*, Vol. II (Ciencia y Filosofía 1897-1919), Aguilar, Madrid, pp. 1263-1390.

----------, (1919), *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen and Unwin, London, p. 169.

----------, "S*elections from Introduction to Mathematical Philosophy*, en Benacerraf, P. y Putnam, H., (Eds.), (1983), pp. 160-182.

Shapiro, S., (2000), *Thinking about mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford

----------, (1997), *Philosophy of mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, New York

Suppes P., (1967), "¿Qué es una teoría científica", pp. 167-178, en José Luis Rolleri, (1986) (introducción y selección de textos), Estructura y desarrollo de las teorías científicas, Instituto de Investigaciones Filosóficas-Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.

----------, P., (1970), *Set-Theoretical Structures in Science*, Stanford University, Stanford.
Swoyer , Ch., (1987), "*The Methaphysics of Measurement*", en John Forge (ed.), *Measurement, Realism and Objectivity*, D. Reidel, Dordrecht, pp. 235-290