



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

“DINÁMICA Y TRANSPORTE EN MAPEOS
SIMPLÉCTICOS NONTWIST ACOPLADOS CON
MUCHOS GRADOS DE LIBERTAD”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

LEOPOLDO CARBAJAL GÓMEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. JULIO J. MARTINELL BENITO
ASESOR PROFESIONAL: DR. DIEGO DEL-CASTILLO-
NEGRETE

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. JOSÉ JULIO E.
HERRERA VELÁZQUEZ

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. OCTAVIO
MIRAMONTES VIDAL





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que estuvieron envueltas directa e indirectamente en la realización de esta tesis de maestría.

En primer lugar quiero expresar mi gratitud, mi gran respeto y admiración hacia el Dr. Julio Javier Martinell Benito y el Dr. Diego del-Castillo-Negrete, mis principales guías intelectuales a lo largo de todo el programa de maestría. Ha sido una gran fortuna haber trabajado con tutores con esa excelente calidad en investigación científica y calidez humana que los caracteriza. Les agradezco por todas sus valiosas ideas y opiniones, así como también por el apoyo económico que me brindaron para poder asistir a congresos y talleres, así como para llevar a cabo las estancias de investigación en la división de energía de fusión del Oak Ridge National Laboratory, la cual fue, sin duda alguna, una experiencia inolvidable.

Quiero agradecer también a los miembros de mi comité tutorial, por su valiosa participación en mi formación académica. Al Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez, al Dr. Octavio Miramontes Vidal y al Dr. Javier Vitela Escamilla, el cual nos ha adelantado camino en el inevitable ciclo de la vida. A todos ellos, gracias.

De igual forma, les agradezco a los miembros del jurado; al Dr. David P. Sanders, al Dr. Alberto Robledo Nieto y al Dr. Arturo Olvera Chávez, por realizar la revisión de esta tesis. Las valiosas pláticas con ellos fueron de gran ayuda para enriquecer el contenido de este trabajo.

Agradezco también al Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM, por haberme apoyado todo el tiempo que formé parte de él hasta la culminación de mis estudios de maestría.

En forma especial quiero agradecer a mis amados padres, Fadul y Elsy, a mis hermanos, Eleonor y Fadul, a mi querido sobrino Santiago y a mi ángel de la guardia, mi Mami. Gracias por todo su apoyo y amor, por haberme dado luz y

fortaleza en los momentos oscuros y de vacilación que encontré a lo largo de la maestría. Siempre han y seguirán formando la parte más importante de mi vida.

Por último, pero no por eso menos, quiero agradecer a mi amada novia Rocío por todo su amor, apoyo y comprensión que me brindó en todo este tiempo. A mis amigos, Juan, Julio, Miguel, Jose Luis; a mis colegas en mis estancias en Oak Ridge, Luis, Guangye, Raúl, Damian, Brisa, y a todos los que sin ser mi intención he omitido aquí.

A todos, nuevamente. Gracias.

Leopoldo Carbajal Gómez.

Abstract

Area-preserving nontwist maps, i.e. maps that violate the twist condition, arise in the study of degenerate Hamiltonian systems for which the standard version of the KAM theorem fails to apply. These maps have found applications in several areas including plasma physics, fluid mechanics, and condensed matter physics. Previous studies have limited attention to one-degree-of-freedom systems (i.e., 2-D phase space). Going beyond these studies, in this thesis we study nontwist maps with many-degrees-of-freedom. We propose a model in which the different degrees of freedom are coupled through a mean field that evolves self-consistently. Based on the linear stability of period-one and period-two orbits of the coupled maps, we construct coherent states in which the degrees of freedom are synchronized and the mean field stays nearly fixed. Nontwist systems exhibit global bifurcations in phase space known as separatrix reconnection. Here we show that the mean-field coupling leads to dynamic, self-consistent reconnection in which transport across invariant curves can take place in the absence of chaos due to changes in the topology of the separatrices. In the context of self-consistent chaotic transport we study two novel problems: suppression of diffusion and self-consistent breakup of the shearless curve. For both problems we construct a macroscopic effective diffusion model with time-dependent diffusivity. Self-consistent transport near criticality is also studied, and it is shown that the threshold for global transport as function of time is a fat-fractal Cantor set.

Resumen

Los mapeos simplécticos (que preservan áreas) *nontwist*, es decir; los mapeos que violan la condición de *twist*, surgen en el estudio de sistemas Hamiltonianos degenerados para los cuales la versión estándar del teorema KAM no puede aplicarse. Estos mapeos han encontrado aplicaciones en diversas áreas incluyendo física de plasmas, mecánica de fluidos y física de la materia condensada. Estudios previos se han limitado a los sistemas con un grado de libertad (i. e., un espacio fase de dos dimensiones). Yendo más allá de esos estudios, en esta tesis estudiaremos mapeos *nontwist* con muchos grados de libertad. Proponemos un modelo en el cual los diferentes grados de libertad están acoplados mediante un campo medio que evoluciona autoconsistentemente. Basados en la estabilidad lineal de las órbitas de período uno y dos del mapeo acoplado, construimos estados coherentes en los cuales los grados de libertad están sincronizados y el campo medio permanece cerca de los valores de estabilidad. Los sistemas *nontwist* exhiben bifurcaciones globales en el espacio fase conocidas como reconexión de separatrices. Aquí mostramos que el acoplamiento del campo medio da lugar a la reconexión de separatrices dinámica autoconsistente, que a su vez produce transporte a través de las curvas invariantes en la ausencia de caos debido a los cambios en la topología de las separatrices. En el contexto del transporte caótico autoconsistente estudiamos dos problemas nuevos: la supresión de difusión y el rompimiento autoconsistente de la curva *shearless*. Para ambos problemas construimos un modelo macroscópico de difusión efectivo con una difusividad dependiente del tiempo. También, el transporte cerca de la criticalidad es estudiado y se muestra que el umbral para el transporte global como función del tiempo posee una estructura de un conjunto de Cantor grueso.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	17
1.1. El single wave model y su mapeo discreto	22
1.2. Los mapeos nontwist	28
2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO Y ÓRBITAS PERIÓDICAS	35
2.1. Órbitas de período uno	38
2.2. Órbitas de período dos	43
2.3. Estados coherentes	45
3. RECONEXIÓN DE SEPARATRICES AUTOCONSISTENTE	51
4. TRANSPORTE CAÓTICO AUTOCONSISTENTE	61
4.1. Supresión de difusión	62
4.2. Transición al caos global	68
4.3. Transporte intermitente cerca de la criticalidad	72
5. CONCLUSIONES	79
Appendices	81

Índice general

A. Simetrías y puntos indicadores del mapeo estándar nontwist 83

Bibliografía 89

Índice de figuras

- 1.1. Imagen tomada de la ref. [3]. Trayectorias de un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad. En el panel (a) se muestra un corte transversal de los toros (superficies KAM) que folian la subvariedad del espacio fase definida por la conservación de la energía, $H'(I_1, I_2) = E = \text{cte}$. Las variables de acción, I_1 e I_2 , las cuales son constantes para un valor dado de la energía $H'(I_1, I_2) = E$, representan el radio menor y el radio mayor de cada toro, respectivamente. En el panel (b) se muestran las intersecciones de la trayectoria del sistema con un plano perpendicular a la dirección toroidal, el cual define a la sección de Poincaré del sistema. Las flechas indican la dirección del flujo de las trayectorias al “enrollarse” en las superficies KAM. 19
- 1.2. El mapeo estándar para dos valores del parámetro κ y $\theta = 0$. En el panel (a) $\kappa = 0.4$, se puede observar la existencia de un gran número de superficies KAM. En el panel (b) $\kappa = 1.3$, y la mayoría de las superficies KAM se han roto dando lugar al transporte en la dirección perpendicular al flujo. Las flechas en ambos paneles indican el sentido del flujo para el mapeo estándar. 22
- 1.3. Función de distribución de probabilidad marginalmente estable, $F_0(u)$, el punto de inflexión se encuentra en u^* . Las líneas verticales discontinuas separan las regiones cercana y lejana en la que se hace la expansión asintótica de las ecuaciones de Vlasov-Poisson. En color rojo se muestra la perturbación a la configuración de equilibrio, $F(u, x, T)$, que tiene la misma velocidad de las partículas en el punto de inflexión u^* 24

- 1.4. Figuras tomadas de la referencia [5]. Comparación entre el *single wave model* y su mapeo discreto en el tiempo. En los paneles (a) y (b) se muestran las soluciones de la amplitud y fase del campo medio para un problema de transporte de vorticidad usando el *single wave model*. En los paneles (d) y (e) se muestran la soluciones obtenidas con el mapeo discreto para el caso equivalente de vortices puntuales. Los paneles (c) y (f) muestran imágenes instantaneas del espacio fase para los casos continuo y discreto respectivamente. 29
- 1.5. Caso *twist* y *nontwist*. Para los mapeos que cumplen con la condición de *twist* (izquierda), el flujo de las trayectorias del sistema siempre tiene el mismo sentido aumentando el número de rotación al ir de una superficie KAM a otra. En el caso de los mapeos *nontwist* (derecha) existe alguna curva KAM en la cual se revierte el sentido del flujo de las trayectorias del sistema, la curva en la cual sucede esto es llamada la curva sin cizalla (shearless). 30
- 1.6. En los paneles se muestran cuatro de las posibles imágenes del espacio fase para el mapeo estándar *nontwists*. En el panel (a) $a = 0.5$ y $\kappa = 0.1$, para estos valores de los parámetros el sistema es muy cercano al sistema integrable y por lo tanto existen un gran número de superficies KAM, en este caso se pueden observar las resonancias correspondientes a los puntos fijos del mapeo. En el panel (b) $a = 3.2416$ y $\kappa = 0.1$, para este caso se empieza a ver la destrucción de las curvas KAM que dan lugar a zonas estocásticas alrededor de los puntos fijos, en la zona central se pueden ver las resonancias que corresponden a las trayectorias periódicas de orden dos. En el panel (c) $a = 0.1$ y $\kappa = 1$; para estos valores de los parámetros la topología del espacio fase corresponde a la topología homoclínica, además, se pueden observar grandes zonas estocásticas y la existencia de órbitas periódicas de orden superior. En el panel (d) los valores de los parámetros $a = 4.31062700354$ y $\kappa = 0.742493131039$, corresponden al caso de la transición hacia el caos global, para valores mayores de κ ya no existirán curvas KAM. En este panel se muestra la curva sin cizalla con una línea gruesa, esta curva corresponde a la curva KAM que se muestra más resistente a romperse. Para todos los casos $\theta = 0$ 31

<p>2.1. Estructura coherente alrededor de las órbitas periódicas de orden uno. El panel (c) muestra el estado final en el plano (x_j, y_j), de un ensamble de $N = 1.2 \times 10^4$ en el MNCM con la amplitud autoconsistente, κ^n, y fase, θ^n del campo medio que se muestran en los paneles (b) y (c) respectivamente. La coherencia del estado es mantenida por el confinamiento de las partículas en las resonancias de período uno del mapeo localizadas en $(\theta^n, -1)$ y $(\pi + \theta^n, 1)$.</p>	43
<p>2.2. Estructura coherente alrededor de las órbitas periódicas de orden dos. El panel (c) muestra el estado final en el plano (x_j, y_j), de un ensamble de $N = 1.2 \times 10^4$ en el MNCM con la amplitud autoconsistente, κ^n, y fase, θ^n del campo medio que se muestran en los paneles (b) y (c) respectivamente. La coherencia del estado es mantenida por el confinamiento de las partículas en las resonancias de período dos del mapeo localizadas en $(\theta^n, \pm\sqrt{1 - \pi/a})$ y $(\theta^n + \pi, \pm\sqrt{1 - \pi/a})$.</p>	46
<p>2.3. Construcción numérica de las curvas invariantes para los puntos fijos elípticos $(0, -1)$ y $(\pi, 1)$ usando el mapeo <i>nontwist</i>. Se han escogido los valores de los parámetros, $\kappa^* = 0.7557$ y $a = 0.8$, para mostrar el método cuando el espacio fase tiene una región regular bien definida rodeada por una región totalmente caótica. Los puntos grises más grandes trazan las curvas invariantes que funciona como una barrera de transporte local.</p>	48
<p>2.4. Resultados numéricos de las tres partes del método para construir estados coherentes del MNCM. En la figura se puede apreciar el grado de refinación del método al ir de $y_{max}(\kappa^*)$ a $R_L(\kappa^*)$.</p>	49
<p>2.5. El cociente de partículas, $\Xi(n)$, dentro de la región regular alrededor de los puntos fijos elípticos de las órbitas de período uno entre el número total de partículas. Como se puede ver, la estructura permanece coherente a lo largo de la evolución del MNCM en completa concordancia con la Fig. 2.1-(c).</p>	50

- 3.1. Reconexión de separatrices en el mapeo *nontwist*. En el panel (a) se muestra un ejemplo de topología heteroclínica con $(a, \kappa) = (0.055, 0.00779)$; en el panel (c) se muestra un ejemplo de topología homoclínica con $(a, \kappa) = (0.055, 0.05805)$. El umbral de reconexión, correspondiente a $(a, \kappa) = (a, \kappa_{\text{rec}} = 2a/3) = (0.055, 0.0367)$, se muestra en el panel (b). Como se muestra en la Fig. 3.3, en el MNCM, la reconexión de separatrices autoconsistente da lugar a una transición dinámica entre estas dos topologías en función del tiempo. 52
- 3.2. Método para determinar la reconexión de separatrices usando la estabilidad lineal. En el panel (a) se muestran las separatrices del mapeo estándar para los valores $a = 0.055$, $\kappa = 0.025$ y $\theta = 0$, lo mismo para los paneles (b) y (c) para los valores de $\kappa = \kappa_{\text{rec}} = 0.0367$ y $\kappa = 0.065$ respectivamente. En rojo se muestra el eigenvector correspondiente a la variedad inestable de los puntos fijos hiperbólicos. Cuando la pendiente del eigenvector, m_R , iguala a la pendiente de la recta que une a los dos puntos fijos hiperbólicos, $m = 2/\pi$, la reconexión ocurre (panel (b)). 54
- 3.3. Reconexión dinámica de separatrices en el MNCM. El panel (a) muestra los valores instantáneos de la amplitud del campo medio, κ^n . La línea horizontal discontinua corresponde al umbral de reconexión $\kappa_{\text{rec}} = 2a/3 = 0.0367$. Los valores arriba (abajo) de esta línea corresponden a la topología homoclínica (heteroclínica). El panel (b) muestra el valor instantáneo del valor absoluto de la pendiente del eigenvector del punto fijo hiperbólico como función de n . Como en el caso mostrado en (a), los estados de reconexión están dados por las intersecciones con la línea horizontal discontinua, $m_R = 2/\pi = 0.636$. Los círculos denotan valores específicos de n usados en el estudio del transporte en las Figs. 3.5 y 3.6. 55
- 3.4. Posibles imágenes del espacio fase (x, y) para valores de κ^n que toma el sistema cerca del umbral de reconexión. En el panel (a) $\kappa = \kappa_{\text{rec}}$, la mayoría de las superficies KAM de la zona central existen, siendo imperceptibles las regiones estocásticas. En el panel (b) $\kappa = 0.4$, se puede observar una pequeña zona estocástica bien localizada alrededor de las separatrices de los puntos fijos del mapeo. En ambos casos el transporte difusivo es nulo para el caso del mapeo no autoconsistente, esto debido a la existencia de las superficies KAM que sirven de barreras para el transporte. 57

3.5. Transporte global no caótico debido a la reconexión dinámica de separatrices. Los paneles sucesivos siguen la evolución de un ensamble de partículas pasivas inicialmente localizado para $n - n_0 = 1, 50, 110, 194, 450, 498, 658, 760, 880, 940, 1480$ y 1664 . La reconexión de separatrices autoconsistente mostrada en la Fig. 3.3, en conjunto con el mezclado no caótico cerca de los puntos fijos hiperbólicos, homogeneiza a las partículas pasivas a través de BTC (curva negra). Para tener una referencia de la topología del espacio fase en cada instante, se muestran las separatrices instantáneas que se obtienen del Hamiltoniano efectivo de la Ec. (3.1).	58
3.6. El cociente de partículas, Λ , que son transportadas a través de la BTC debido a la reconexión dinámica de separatrices. Consistente con la Fig. 3.5, la condición inicial de partículas pasivas localizada arriba de la curva cizalla es eventualmente homogeneizada a través de la BTC. El retardo n_0 es usado para eliminar el transitorio en el MNCM.	59
4.1. Segundo momento estadístico del desplazamiento de las partículas durante la supresión de difusión autoconsistente en el MNCM. La línea continua representa el segundo momento estadístico del desplazamiento de las partículas de la Ec. (4.1). Los cuadros representan el segundo momento de la PDF, ρ , de las partículas con $\gamma > 0$ en el modelo de transporte cuasi-lineal efectivo de acuerdo a la Ec. (4.13).	63
4.2. Evolución del campo medio durante la supresión de difusión autoconsistente del MNCM. El panel (a) muestra el decaimiento de κ^n en escala log-normal. La línea discontinua corresponde al ajuste exponencial de la Ec. (4.4) con $\kappa_0 = 0.5162$ y $\nu = -5.7274 \times 10^{-5}$. En el panel (b) se muestra la evolución de la fase θ^n la cual muestra fluctuaciones aleatorias a tiempos intermedios y largos, debido a esto la aproximación cuasi-lineal sigue dando buenos resultados cuando el sistema tiende al límite integrable.	66
4.3. Evolución espacio-temporal de la función de densidad de probabilidad de las partículas con $\gamma > 0$ durante la supresión de difusión autoconsistente. Los círculos denotan las PDFs obtenidas de los histogramas del ensamble de partículas del MNCM. La línea continua muestra la solución analítica del modelo efectivo de las Ecs. (4.6) and (4.7). Los paneles (a), (b), (c) y (d) corresponden a $n = 1, 100, 200$ y 49900 respectivamente.	67

4.4.	La difusividad promediada en el tiempo, \overline{D} , como función de la amplitud del campo medio promediada en el tiempo, $\overline{\kappa}$, de la Ec. (4.14). Los círculos representan los resultados numéricos obtenidos de condiciones iniciales del MNCM para diferentes valores de κ^1 . La línea continua corresponde a la relación cuasi-lineal $D_{QL} = \overline{\kappa}^2/4$	69
4.5.	Evolución del campo medio durante la transición autoconsistente hacia el caos global en el MNCM. La línea continua en el panel (a) muestra el crecimiento y saturación de κ^n . Los cuadrados corresponden al ajuste de la Ec. (4.15), con $K = 0.757$, $\alpha = 0.063$, $\mu = 3.2 \times 10^4$ y $\beta = 1.8 \times 10^4$. La línea vertical a trazos denota la transición hacia el caos global en el espacio fase debido a la destrucción de la BTC. El panel (b) muestra la evolución de la fase, θ^n , la cual no varía considerablemente, permaneciendo alrededor del valor inicial $\theta^n = 0$	70
4.6.	Evolución espacio-temporal de la función de densidad de probabilidad antes de la transición al caos global marcada por la línea vertical discontinua en la Fig. 4.5. Los círculos denotan las PDFs obtenidas de los histogramas del ensamble de partículas del MNCM. La línea continua muestra la solución analítica del modelo efectivo de las Ecs. (4.6) y (4.16), con condiciones a la frontera dadas por la ecuación Ec. (4.8). Los paneles (a), (b), (c) y (d) corresponden a $n = 1, 4380, 15780$ y 28800 respectivamente. Los tiempos posteriores, después de la transición al caos global, se muestran en la Fig. 4.7.	72
4.7.	Como en la Fig. 4.6, pero para tiempos posteriores a la transición hacia el caos global donde la Ec. (4.6) se resuelve en el dominio $(-\infty, \infty)$. Los paneles (a), (b), (c) y (d) corresponden a $n = 31380, 42200, 55300$ y 99780 respectivamente.	73
4.8.	Segundo momento estadístico del desplazamiento de las partículas durante la transición autoconsistente hacia el caos global en el MNCM. La línea continua representa el segundo momento estadístico del ensamble de partículas de la Ec. (4.1). Los cuadros representan el segundo momento de la PDF, ρ , del modelo de transporte cuasi-lineal. El rectángulo marcado con la línea discontinua indica la zona de la transición hacia el caos global, producto de la destrucción de la barrera de transporte central.	74

4.9. Gráfica binaria autosimilar mostrando la transición dinámica hacia el caos global en el MNCM cerca de la criticalidad. Las regiones oscuras (blancas) representan los intervalos de tiempo para los cuales la BTC existe (no existe). Los acercamientos sucesivos en los paneles (b), (c) y (d) revelan una estructura parecida a un conjunto de Cantor que corresponde a un <i>fractal grueso</i> con exponente de escalamiento $\beta = 0.6597$ (ver Fig. 4.11).	75
4.10. Cálculo de la dimensión fractal de la Fig. 4.9 usando el método de conteo de cajas (en escala logarítmica). La dimensión fractal, D , es definida como $N_\epsilon = \epsilon^{-D}$, donde N_ϵ es el número de cajas de dimensión ϵ necesarias para cubrir al objeto en cuestión. El conteo de cajas arroja una dimensión de $D = 0.955$, la cual es prácticamente entera e igual a 1, por lo tanto no es posible afirmar que se está ante un objeto fractal ordinario.	76
4.11. Escalamiento algebraico del tamaño de las brechas en función de la escala de la resolución durante el transporte intermitente en el régimen de criticalidad en el MNCM. Los círculos representan los datos de la gráfica binaria de la Fig. (4.9). La línea continua es el ajuste al decaimiento algebraico de la Ec. (4.18) con $A \sim 1$, $\mu(0) = 0.2872$ y $\beta = 0.6597$	78
A.1. Curva sin cizalla trazada usando los puntos indicadores (A.15) y (A.19) para los valores de los parámetros $a = a_\gamma = 4.31062700354$, $\kappa = \kappa_\gamma = 0.742493131039$ y $\theta = 0$. Como se puede ver, los dos puntos indicadores trazan la misma curva KAM.	87

Índice de figuras

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Desde el punto de vista de la mecánica clásica, el estudio de la dinámica de un sistema puede abordarse usando dos formalismos totalmente equivalentes, esto es, usando las ecuaciones de Lagrange o bien las ecuaciones de Hamilton. En el primer caso, un sistema con m grados de libertad, (q_1, \dots, q_m) , queda descrito por un conjunto de m ecuaciones diferenciales de segundo orden, una ecuación diferencial para cada grado de libertad,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.1)$$

donde $L(\{q_k, \dot{q}_k\}, t) = K(\{\dot{q}_m\}) - U(\{q_k, \dot{q}_k\}, t)$, es el Lagrangiano del sistema, con K la energía cinética y U la energía potencial. El conjunto de ecuaciones (1.1) describen la dinámica del sistema como una trayectoria en el espacio de configuraciones $2m$ -dimensional, $(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$.

Por otro lado, en el formalismo Hamiltoniano el sistema queda descrito por un sistema de $2m$ ecuaciones diferenciales de primer orden, una para cada uno de los grados de libertad, (q_1, \dots, q_m) , y una para cada uno de los momentos asociados a cada grado de libertad, (p_1, \dots, p_m)

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

donde, $p_k \equiv \partial L / \partial \dot{q}_k$, es el momento asociado a cada grado de libertad y $H(\{q_k, p_k\}, t) = \sum \{p_i \dot{q}_i\} - L$, es el Hamiltoniano del sistema. En este caso, la dinámica del sis-

tema queda representada por una trayectoria en el espacio fase $2m$ -dimensional, $(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m)$.

En algunos casos resulta más conveniente usar el formalismo Hamiltoniano para los sistemas que son integrables¹, ya que haciendo el cambio de variables adecuado $(q_k, p_k) \mapsto (\Theta_k(q_j, p_j), I_k(q_j, p_j))$, se transforma al conjunto de ecuaciones de movimiento (1.2) a un sistema de ecuaciones diferenciales donde la mitad de ellas se resuelve trivialmente

$$\dot{\Theta}_k = \frac{\partial H'}{\partial I_k}, \quad \dot{I}_k = -\frac{\partial H'}{\partial \Theta_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.3)$$

con $H'(\{I_k\})$, el nuevo Hamiltoniano que depende únicamente de los nuevos momentos I_k . Esta descripción del sistema en donde los momentos asociados son constantes, $I_k = \text{cte}$, es comúnmente llamada la descripción Hamiltoniana en las variables de acción-ángulo, en donde I_k y Θ_k son las variables de acción y ángulo respectivamente. Es necesario mencionar que el cambio de variables para pasar de las variables iniciales (q_k, p_k) , a las variables de acción-ángulo (Θ_k, I_k) , preservan la forma Hamiltoniana de las ecuaciones. A dichas transformaciones que cumplen con esto se le llama transformaciones canónicas [1]. Las transformaciones canónicas son de gran importancia en la mecánica Hamiltoniana, ya que la evolución temporal del sistema se puede ver como un conjunto de transformaciones canónicas consecutivas, además, las transformaciones canónicas tienen una estrecha relación con el teorema de Liouville, el cual nos dice que el volumen del espacio fase permanece invariante ante transformaciones canónicas que describen la evolución del sistema en función del tiempo². Esto significa que un elemento de volumen en el espacio fase, conformado por un conjunto de condiciones iniciales diferentes, evolucionará de tal manera que se irá deformando en función del tiempo, pero siendo el volumen a cada instante igual al volumen inicial.

La descripción de la dinámica del sistema en función de las variables acción-ángulo, cuando es factible, permite analizar la trayectoria del sistema en el espacio fase $(\Theta_1, \dots, \Theta_m, I_1, \dots, I_m)$, en una forma sencilla. Por ejemplo, para un sistema Hamiltoniano de dos grados de libertad, $m = 2$, las trayectorias en el espacio fase $(\Theta_1, \Theta_2, I_1, I_2)$, se pueden representar como las trayectorias que se “enrollan” en las superficies (llamadas superficies KAM [4]) que folian a la subvariedad 3-dimensional del espacio fase definida por la conservación de la energía, $H'(I_1, I_2) = E = \text{cte}$, esto como se muestra en la Fig. (1.1)-(a). Las flechas en

¹Ver comentario al pie de la página 20.

²En realidad se habla de hipervolumenes en el espacio fase $2m$ -dimensional para sistemas con m grados de libertad.

los paneles (a) y (b) indican el sentido del flujo de las trayectorias al “enrollarse” sobre las superficies KAM. En esta figura cada toro representa una foliación de la subvariedad definida por la energía constante E y las variables de acción, I_1 e I_2 , representan los radios menor y mayor del toro, respectivamente.

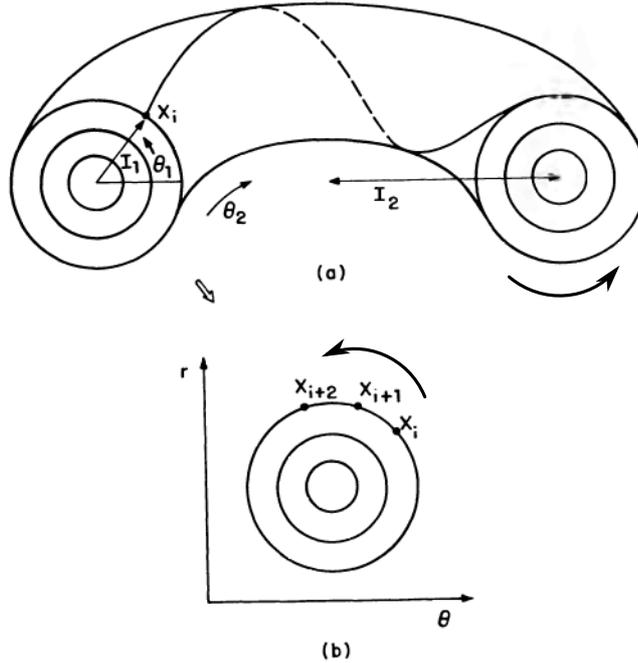


Figura 1.1: Imagen tomada de la ref. [3]. Trayectorias de un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad. En el panel (a) se muestra un corte transversal de los toros (superficies KAM) que folian la subvariedad del espacio fase definida por la conservación de la energía, $H'(I_1, I_2) = E = \text{cte}$. Las variables de acción, I_1 e I_2 , las cuales son constantes para un valor dado de la energía $H'(I_1, I_2) = E$, representan el radio menor y el radio mayor de cada toro, respectivamente. En el panel (b) se muestran las intersecciones de la trayectoria del sistema con un plano perpendicular a la dirección toroidal, el cual define a la sección de Poincaré del sistema. Las flechas indican la dirección del flujo de las trayectorias al “enrollarse” en las superficies KAM.

Alternativamente, podemos representar la trayectoria del sistema como un conjunto de puntos en un plano que corta perpendicularmente a las superficies toroidales, así, la dinámica quedará representada por un conjunto de puntos en plano $\{x_1, \dots, x_i, \dots\}$, como se muestra en la Fig. (1.1)-(b). Dicha representación es llamada la sección de Poincaré del sistema. En sistemas Hamiltonianos integra-

bles³ existen dos clases de trayectorias del sistema sobre las superficies KAM. La primera clase son las llamadas trayectorias periódicas, para las cuales la secuencia de puntos en la sección de Poincaré para una trayectoria dada tiene un número finito de elementos, $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j\}$, donde después de j intersecciones de la trayectoria con la superficie de Poincaré se obtiene, $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_1$, a estas trayectorias se les llama trayectorias periódicas de orden j . La segunda clase son las llamadas trayectorias cuasi-periódicas, para las cuales el número de puntos generados por la intersección de la trayectoria del sistema con la sección de Poincaré no es finito y se tiene, $\mathbf{x}_s \neq \mathbf{x}_1$, para todo $s \in \{1, 2, \dots\}$. Por lo tanto, las trayectorias periódicas estarán representadas por un conjunto de puntos finitos en los círculos definidos por las superficies KAM, mientras que las trayectorias cuasi-periódicas llenarán los círculos ergódicamente en las secciones de Poincaré. Así, cada superficie KAM puede estar cubierta por trayectorias periódicas o cuasi-periódicas.

De lo anterior se sigue que la dinámica Hamiltoniana queda determinada por un mapeo de la forma

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n + \Omega(x^n, y^{n+1}), \\ y^{n+1} &= y^n + g(x^n, y^{n+1}), \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde, (x^n, y^n) denota la n -ésima iteración del mapeo⁴. En estos mapeos las variables (x^n, y^n) juegan el papel de las variables de acción y ángulo, respectivamente. La forma de las funciones $\Omega(x^n, y^{n+1})$ y $g(x^n, y^{n+1})$, dependerá de cada sistema en particular. Para estos mapeos, una consecuencia inmediata de la dinámica Hamiltoniana, la cual preserva el volumen en el espacio fase, es la preservación del área en las secciones de Poincaré. Debido a esto último, los mapeos que describen dinámicas Hamiltonianas son llamados mapeos que preservan áreas (*area-preserving maps*) ó mapeos simplécticos. Esta condición es expresada matemáticamente como que el Jacobiano de las nuevas variables $\mathbf{x}^{n+1}(\mathbf{x}^n)$, sea igual a uno

$$\frac{\partial(x^{n+1}, y^{n+1})}{\partial(x^n, y^n)} = 1. \tag{1.5}$$

³Un sistema Hamiltoniano integrable es aquel que posee tantas constantes de movimiento como grados de libertad tiene el sistema. Esto hace posible el representar la dinámica del sistema en función de sus variables de ángulo y acción, las cuales permiten integrar las ecuaciones de movimiento de manera sencilla.

⁴La n -ésima intersección de la trayectoria con el plano que define a la sección de Poincaré

Los mapeos simplécticos han mostrado ser de gran utilidad en estudios numéricos y analíticos de sistemas Hamiltonianos integrables, así como para el estudio de sistemas Hamiltonianos perturbados⁵ con pocos grados de libertad, ya que resulta más fácil estudiar el sistema en dos dimensiones que en un espacio fase de dimensión superior.

Cuando se estudia a los sistemas Hamiltonianos perturbados se observa la destrucción de las superficies KAM que corresponden a aquellas cubiertas por trayectorias periódicas, mientras que las asociadas a las trayectorias cuasi-periódicas se muestran más resistentes a romperse. Es ésta destrucción de las superficies KAM lo que da lugar al llamado caos Hamiltoniano [3, 4],

En particular, el mapeo estándar, para el cual $\Omega = y^{n+1}$ y $g = -\kappa \sin(x^n - \theta)$, es un modelo paradigmático que junto con teoremas poderosos como son el teorema KAM y el teorema de Poincaré-Birkhoff, permiten estudiar la manera en que las curvas KAM de sistemas Hamiltonianos con un grado y medio de libertad son destruidas cuando se le aplica una perturbación periódica al sistema [3]. Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos es importante conocer cuales son las curvas KAM más resistentes a romperse, ya que éstas son las que proveen al sistema de barreras para el transporte en la dirección perpendicular al sentido del flujo de las trayectorias (ver Figs. 1.1 y 1.5). En la Fig. 1.2 se muestra el mapeo estándar para dos valores diferentes del parámetro κ , el cual mide la intensidad de la perturbación aplicada al sistema integrable.

A lo largo del tiempo, se han hecho un gran número de estudios para sistemas con pocos grados de libertad en comparación con la poca cantidad referente a sistemas con muchos grados de libertad, esto debido a la complejidad de estos últimos. La dificultad de tratar sistemas con muchos grados de libertad se observa al considerar un sistema de N partículas en un espacio tridimensional, teniendo por lo tanto, un espacio fase de $6N$ dimensiones. En general, si se toma en cuenta la interacción de cada partícula con las demás partículas que conforman el sistema, donde la interacción es de alguna forma arbitraria, entonces las ecuaciones que describen la dinámica del sistema serán $6N$ ecuaciones no lineales acopladas. Una manera de aproximar este tipo de problemas tan desafiantes es a través del uso de modelos de campo medio, en los cuales la interacción mutua de las partículas es mediada por un campo global cuya evolución se determina autoconsistentemente a partir de la dinámica de las partículas. Desde la perspectiva de los sistemas

⁵Un sistema Hamiltoniano perturbado o no integrable es aquel que no posee un número de constantes de movimiento igual al número de grados de libertad. El Hamiltoniano de estos sistemas se puede escribir como $H'' = H'(\{I_k\}) + H(\{\Theta_k, I_k\})$, donde H' es el Hamiltoniano integrable y H la perturbación del sistema.

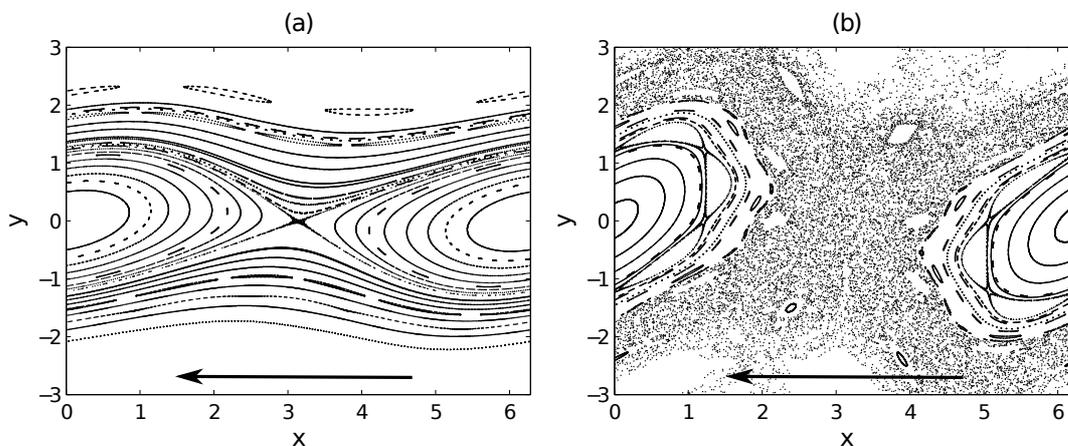


Figura 1.2: El mapeo estándar para dos valores del parámetro κ y $\theta = 0$. En el panel (a) $\kappa = 0.4$, se puede observar la existencia de un gran número de superficies KAM. En el panel (b) $\kappa = 1.3$, y la mayoría de las superficies KAM se han roto dando lugar al transporte en la dirección perpendicular al flujo. Las flechas en ambos paneles indican el sentido del flujo para el mapeo estándar.

dinámicos, la aproximación de este tipo de teorías de campo medio da lugar al estudio de mapeos globalmente acoplados. En la siguiente sección se presenta un modelo de campo medio, el *single wave model*, y se estudia su relación con los mapeos que tienen la forma de las Ecs. (1.4).

1.1. El single wave model y su mapeo discreto

El modelo de una onda o por su nombre en inglés, el *single wave model*, es un modelo que surge de forma natural al estudiar la interacción no lineal onda-partícula para plasmas unidimensionales de Vlasov-Poisson cercanos a la estabilidad marginal en el límite no lineal débil. En fluidos, el modelo describe la dinámica de la vorticidad en dos dimensiones en presencia de un flujo de fondo con cizalla de gran intensidad [5]. A continuación se da una breve descripción de la derivación del modelo desde el contexto de física de plasmas como es derivado en la ref. [6].

En el contexto de física de plasmas, un plasma neutro unidimensional donde los iones se consideran como un fondo fijo y solamente se considera la dinámica de los electrones, queda totalmente descrito por su ecuación de Vlasov-Poisson, la cual describe la evolución de la función de distribución de probabilidad en

el espacio fase de un conjunto de partículas cargadas (electrones) en presencia de campos eléctricos, junto con la ecuación de Poisson, la cual da el potencial eléctrico producido por las partículas. Así, el conjunto de ecuaciones cinéticas que describen al plasma son:

$$\partial_T F + u \partial_x F + \partial_u (F_0 + F) \partial_x \Phi = \beta \partial_u (uF + u_0^2 \partial_u F), \quad (1.6)$$

$$k^2 \tilde{\Phi}(k, T) = - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(k, u, T) du, \quad (1.7)$$

donde la Ec. (1.6), es la ecuación de Vlasov, siendo x y u la posición y la velocidad de los electrones, T el tiempo y $F(x, u, T)$ una posible perturbación a F_0 , la función de distribución de probabilidad de los electrones en equilibrio. El lado derecho de la Ec. (1.6) es el operador de colisiones de Fokker-Planck, con β la frecuencia efectiva de colisiones. La Ec. (1.7) es la transformada de Fourier de la ecuación de Poisson que relaciona al potencial eléctrico, $\Phi(x, T)$, con la densidad de carga del plasma y por lo tanto también con $F(x, u, T)$. Cuando β se toma igual a cero, el conjunto de Ecs. (1.6)–(1.7) se convierte en las ecuaciones de Vlasov-Poisson.

Si para la configuración inicial de equilibrio, F_0 , existe un valor de u tal que, $F_0(u^*)$, es un punto de inflexión, $\partial_u F_0(u^*) = \partial_u^2 F_0(u^*) = 0$, se dice que el equilibrio es marginalmente estable (ver Fig. (1.3)). Para el caso en el que la velocidad de propagación de la perturbación, $F(x, u, T)$, iguala a la velocidad de las partículas en u^* , es posible crear soluciones regulares que describan la evolución de dicha perturbación localizada alrededor de u^* . Esto se logra haciendo una expansión asintótica de las Ecs. (1.6) y (1.7) en la región cercana a u^* y en la región lejana a u^* , para después hacer coincidir ambas soluciones en la interfaz de las dos regiones de manera que la solución global sea continua en todo el rango de velocidades. De llevar a cabo este procedimiento se encuentran las siguientes ecuaciones que describen la dinámica del plasma:

$$\partial_t f + v \partial_x f + \partial_x \phi \partial_v f = \nu \partial_v^2 f, \quad (1.8)$$

$$\phi(x, t) = a(t) e^{ix} + a^*(t) e^{-ix}, \quad (1.9)$$

$$\frac{da(t)}{dt} = iUa + i \langle e^{-ix} f \rangle, \quad (1.10)$$

donde $f(x, v, t)$ es la perturbación de la función de distribución de probabilidad de los electrones, la cual ha sido reescalada adecuadamente al igual que la posición,

1.1. El single wave model y su mapeo discreto

velocidad y tiempo, ν se refiere a la frecuencia de colisiones, $\phi(x, t)$ es el potencial electrostático de campo medio el cual posee una dependencia espacial fija, con x periódica en 2π , y una amplitud compleja, $a(t)$, dependiente del tiempo y cuya evolución depende de la dinámica de las partículas como lo muestra la Ec. (1.10), donde U es un parámetro constante del sistema. En esta ecuación, $\langle \rangle$, se refiere al promedio sobre el espacio fase, $(1/2\pi) \int \int dx dv$. El conjunto de ecuaciones (1.8)–(1.10) definen al *single wave model*.

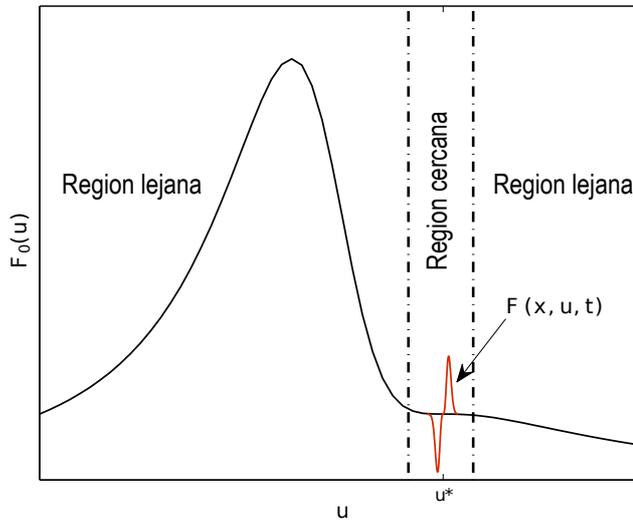


Figura 1.3: Función de distribución de probabilidad marginalmente estable, $F_0(u)$, el punto de inflexión se encuentra en u^* . Las líneas verticales discontinuas separan las regiones cercana y lejana en la que se hace la expansión asintótica de las ecuaciones de Vlasov-Poisson. En color rojo se muestra la perturbación a la configuración de equilibrio, $F(u, x, T)$, que tiene la misma velocidad de las partículas en el punto de inflexión u^* .

Siguiendo la analogía propuesta en la ref. [5] entre el problema de transporte en fluidos y plasmas, la Ec. (1.8) se puede pensar como una ecuación de advección-difusión para la función de distribución de probabilidad de los electrones en el espacio fase (x, v) , donde el “campo de velocidades” que realiza el transporte en el espacio fase está generado por la función de flujo

$$\psi(x, v, t) = -\frac{1}{2}v^2 + \phi(x, t), \quad (1.11)$$

con las ecuaciones de movimiento para los “elementos de fluido” del espacio fase dadas por

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial\psi}{\partial v}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Por otro lado, si representamos al potencial autoconsistente, $\phi(x, t)$, por una amplitud y una fase, $\sqrt{J(t)}e^{-i\theta(t)}$, las Ecs. (1.9) y (1.10) se transforman en

$$\phi(x, t) = 2\sqrt{J(t)}\cos(x - \theta(t)),\tag{1.13}$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -U - \frac{1}{\sqrt{J(t)}}\langle f \cos(x - \theta(t)) \rangle,\tag{1.14}$$

$$\frac{dJ(t)}{dt} = 2\sqrt{J(t)}\langle f \sin(x - \theta(t)) \rangle.\tag{1.15}$$

El conjunto de Ecs. (1.12)–(1.15), determinan así la evolución autoconsistente de plasmas y fluidos marginalmente estables.

Cabe mencionar que el *single wave model* guarda una estrecha relación con otras teorías de campo medio usadas para estudiar sistemas con interacciones de largo alcance [7]. Para este tipo de sistemas se ha observado la violación de la equivalencia entre la descripción microcanónica y canónica de la física estadística así como la no validez de la hipótesis ergódica para las trayectorias en el espacio fase, además de fenómenos como la relajación extremadamente lenta hacia el equilibrio termodinámico y la relajación del sistema hacia estados cuasi-estacionarios [8].

Para el caso especial del *single wave model* en que $da/dt = 0$, la Ec. (1.10) se transforma en

$$Ua = -\langle e^{-ix} f \rangle,\tag{1.16}$$

para la cual, si $U = -2/\epsilon$ y se sustituye en la Ec. (1.9), las Ecs. (1.11) y (1.12) arrojan el siguiente modelo Hamiltoniano:

1.1. El single wave model y su mapeo discreto

$$H = \frac{u^2}{2} + V(x, t), \quad \partial_x^2 V = \frac{\epsilon}{2\pi} \int dx' \int du \cos(x - x') f(x', u, t), \quad (1.17)$$

donde $H = -\psi$. Este modelo Hamiltoniano es el modelo cinético del *Hamiltonian Mean Field* (HMF), el cual fue usado originalmente como un sistema para describir las interacciones de largo alcance entre espines fijos en el espacio donde sus grados de libertad internos pueden tomar valores continuos. Este modelo también se ha relacionado con otros sistemas donde existen interacciones de largo alcance tales como problemas de hidrodinámica de fluidos incompresibles en dos dimensiones, sistemas gravitacionales en una dimensión y plasmas no neutros. Para más detalles al respecto, se refiere al lector interesado a los trabajos de las referencias [6, 8] y al libro que contiene a [7].

Consideremos ahora el caso para el cual se tienen N partículas (electrones o vórtices puntuales) que conforman al sistema, para este caso la función de distribución de probabilidad se convierte en

$$f(x, v, t) = 2\pi \sum_{k=1}^N \Gamma_k \delta(x - x_k(t)) \delta(v - v_k(t)), \quad (1.18)$$

donde, x_k , v_k y Γ_k son la posición, velocidad y la constante de acoplamiento de cada partícula, dependiendo esta última de cuál es la naturaleza del sistema. Haciendo el cambio de variable, $p_k = \Gamma_k v_k$, podemos reescribir a las Ecs. (1.12)–(1.15) en la forma Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{p_k}{\Gamma_k}, \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial x_k} = -2\sqrt{J}\Gamma_k \sin(x_k - \theta), \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial J} = -U - \frac{1}{\sqrt{J}} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \cos(x_k - \theta), \\ \dot{J} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 2\sqrt{J} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \sin(x_k - \theta), \end{aligned} \quad (1.19)$$

con el Hamiltoniano dado por

$$H(x_k, p_k, J, \theta) = \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{p_k^2}{2} - 2\sqrt{J}\Gamma_k \cos(x_k - \theta) \right\} - UJ. \quad (1.20)$$

El sistema de Ecs. (1.19), queda en la forma de un sistema Hamiltoniano con variables generalizadas, $(x_1, \dots, x_N, \theta)$, que tienen como momentos conjugados asociados a (p_1, \dots, p_N, J) .

Por último, considérese la discretización en el tiempo del conjunto de ecuaciones (1.19). En donde, sin pérdida de generalidad se fija a $U = 0$, ya que este parámetro puede eliminarse aplicando una transformación Galileana al sistema. Así, el mapeo resultante es el siguiente:

$$x_k^{n+1} = x_k^n + \frac{\Delta t}{\Gamma_k} p_k^{n+1}, \quad (1.21)$$

$$p_k^{n+1} = p_k^n - 2\Delta t \Gamma_k \sqrt{J^{n+1}} \sin(x_k^n - \theta^n), \quad (1.22)$$

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \frac{\Delta t}{\sqrt{J^{n+1}}} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \cos(x_k^n - \theta^n), \quad (1.23)$$

$$J^{n+1} = J^n + 2\Delta t \sqrt{J^{n+1}} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \sin(x_k^n - \theta^n), \quad (1.24)$$

donde n representa la n -ésima iteración del mapeo y Δt se refiere al intervalo de tiempo considerado en la discretización de las derivadas temporales. En el mapeo anterior, la ecuación para J^{n+1} está en forma explícita, sin embargo, haciendo el cambio de variables

$$y_k^n = \frac{\Delta t}{\Gamma_k} p_k^n, \quad \kappa^n = 2(\Delta t)^2 \sqrt{J^n}, \quad \gamma_j = 2(\Delta t)^3 \Gamma_j, \quad (1.25)$$

el mapeo se reescribe como

$$x_k^{n+1} = x_k^n + y_k^{n+1}, \quad (1.26)$$

$$y_k^{n+1} = y_k^n - \kappa^{n+1} \sin(x_k^n - \theta^n), \quad (1.27)$$

1.2. Los mapeos nontwist

donde κ^n y θ^n denotan la amplitud y fase del campo medio, las cuales evolucionan en función de n de acuerdo a las siguientes relaciones:

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \frac{1}{\kappa^{n+1}} \frac{\partial \eta^n}{\partial \theta^n}, \quad (1.28)$$

$$\kappa^{n+1} = \sqrt{(\kappa^n)^2 + (\eta^n)^2} + \eta^n, \quad (1.29)$$

donde

$$\eta^n = \sum_{k=1}^N \gamma_k \sin(x_k^n - \theta^n) \quad (1.30)$$

es el acoplamiento de campo medio con γ_k las constantes de acoplamiento, las cuales dependen de la carga relativa de las partículas (electrones) respecto al fondo fijo de iones [5, 6]. Para el caso en el que no existe acoplamiento, $\gamma_k = 0$, y cada partícula evoluciona independientemente siguiendo las trayectorias de los mapeos estándar en el espacio fase con κ y θ fijas (ver Fig. 1.2).

El modelo de campo medio de las ecuaciones (2.11)–(1.30) es un laboratorio muy útil para estudiar la dinámica de sistemas Hamiltonianos con un gran número de grados de libertad en el contexto de mapeos que preservan áreas.

Es interesante comparar los resultados que dan el *single wave model* y su equivalente discreto de las Ecs. (2.11)–(1.30). En la Ref. [5] se hace una comparación entre ambos sistemas mostrando similitudes cualitativas y cuantitativas para ciertos valores de los parámetros del mapeo discreto, esta comparación se muestra en la Fig. (1.4).

1.2. Los mapeos nontwist

Es importante hacer notar que el mapeo de las ecuaciones (1.26) y (1.27) para valores de κ^n y θ^n fijos tiene la propiedad de *twist*. Esto significa que el sentido del flujo de las trayectorias siempre es la misma y el número de rotación⁶ aumenta al ir de una superficie KAM a otra. Esta propiedad se puede expresar como

⁶El número de rotación mide el cizallamiento de las trayectorias del sistema al “enrollarse” en las superficies KAM.

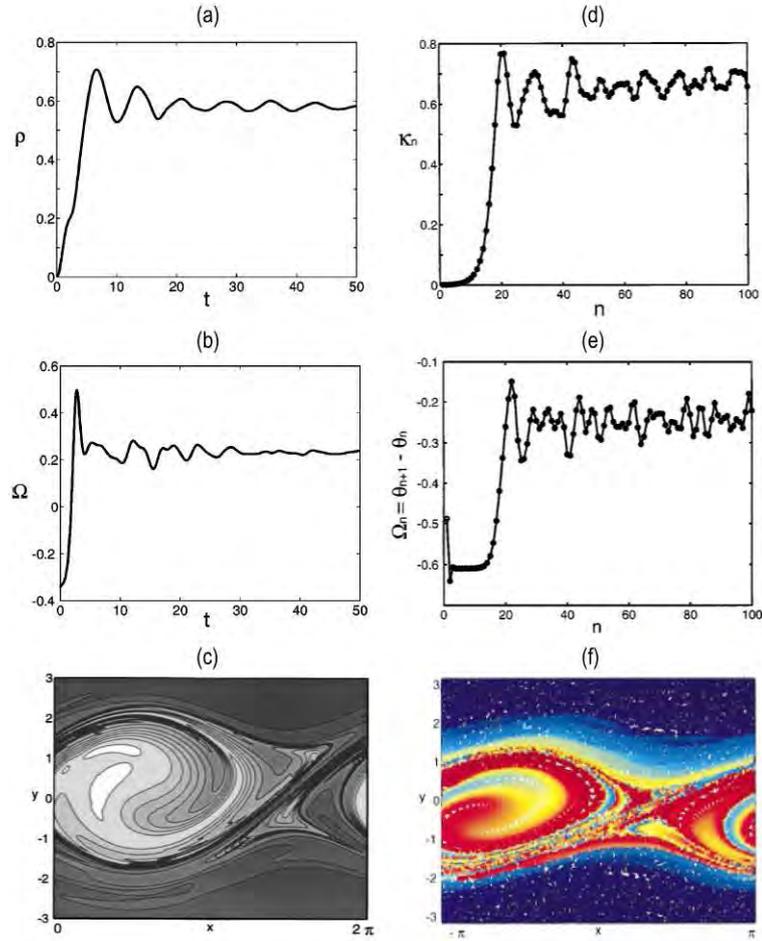


Figura 1.4: Figuras tomadas de la referencia [5]. Comparación entre el *single wave model* y su mapeo discreto en el tiempo. En los paneles (a) y (b) se muestran las soluciones de la amplitud y fase del campo medio para un problema de transporte de vorticidad usando el *single wave model*. En los paneles (d) y (e) se muestran las soluciones obtenidas con el mapeo discreto para el caso equivalente de vortices puntuales. Los paneles (c) y (f) muestran imágenes instantáneas del espacio fase para los casos continuo y discreto respectivamente.

$$\frac{\partial x^{n+1}}{\partial y^n} \neq 0, \tag{1.31}$$

para toda y^n . Esta condición es equivalente a la propiedad de no degeneración para sistemas Hamiltonianos continuos con muchos grados de libertad.

El principal objetivo de este trabajo de tesis es formular y estudiar el análogo del modelo de campo medio en las Ecs. (1.26)–(1.30) para el caso de mapeos *nontwist*. Estos mapeos están caracterizados por la violación de la condición de *twist* dada por la Ec. (1.31). Esto quiere decir que existe una curva KAM en la que se revierte el sentido del flujo de las trayectorias del sistema. En la Fig. 1.5 se muestra esquemáticamente el caso de los mapeos *twist* y *nontwist* en dos dimensiones.

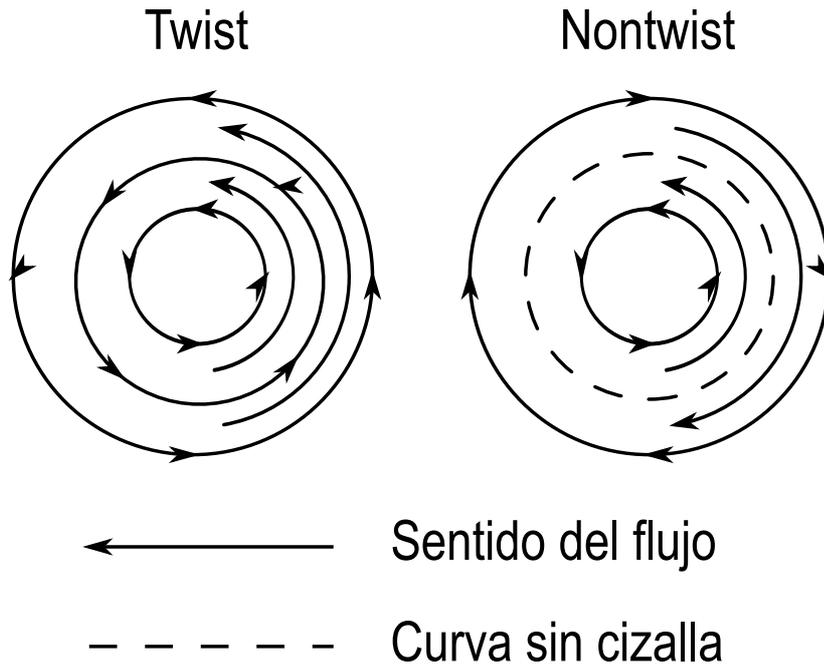


Figura 1.5: Caso *twist* y *nontwist*. Para los mapeos que cumplen con la condición de *twist* (izquierda), el flujo de las trayectorias del sistema siempre tiene el mismo sentido aumentando el número de rotación al ir de una superficie KAM a otra. En el caso de los mapeos *nontwist* (derecha) existe alguna curva KAM en la cual se revierte el sentido del flujo de las trayectorias del sistema, la curva en la cual sucede esto es llamada la curva sin cizalla (shearless).

Los mapeos *nontwist*, surgen en el estudio de la transición al caos para sistemas Hamiltonianos perturbados que son degenerados. Un ejemplo de este tipo de mapeos es el llamado mapeo estándar *nontwist*

$$\begin{aligned}
 x^{n+1} &= x^n + a [1 - (y^{n+1})^2], \\
 y^{n+1} &= y^n - \kappa \sin(x^n - \theta),
 \end{aligned}
 \tag{1.32}$$

el cual ha sido propuesto en la ref. [10] como un modelo para el transporte caótico en flujos geostróficos.

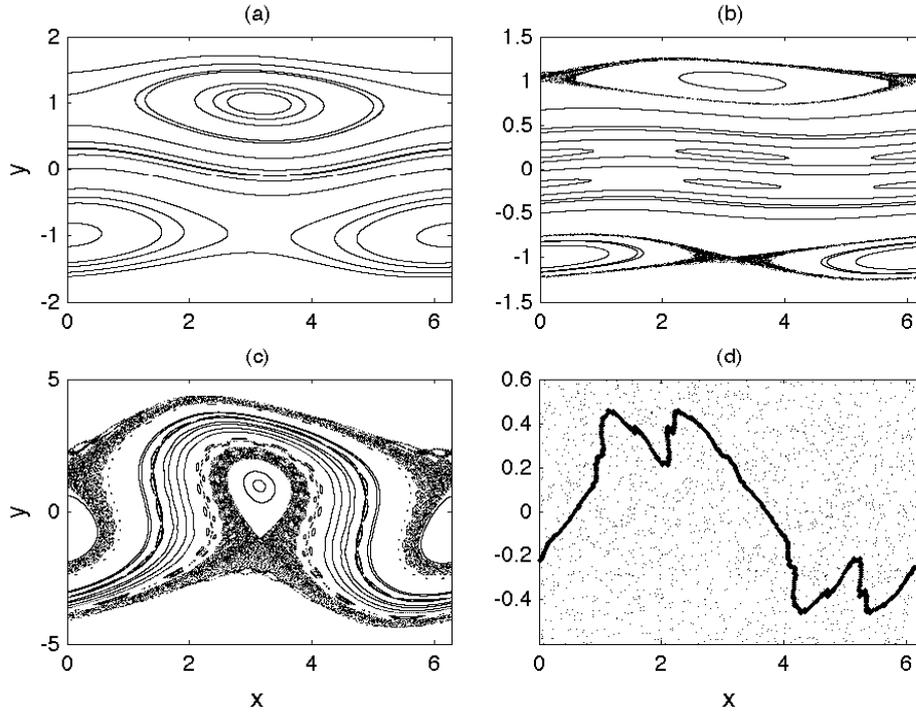


Figura 1.6: En los paneles se muestran cuatro de las posibles imágenes del espacio fase para el mapeo estándar *nontwists*. En el panel (a) $a = 0.5$ y $\kappa = 0.1$, para estos valores de los parámetros el sistema es muy cercano al sistema integrable y por lo tanto existen un gran número de superficies KAM, en este caso se pueden observar las resonancias correspondientes a los puntos fijos del mapeo. En el panel (b) $a = 3.2416$ y $\kappa = 0.1$, para este caso se empieza a ver la destrucción de las curvas KAM que dan lugar a zonas estocásticas alrededor de los puntos fijos, en la zona central se pueden ver las resonancias que corresponden a las trayectorias periódicas de orden dos. En el panel (c) $a = 0.1$ y $\kappa = 1$; para estos valores de los parámetros la topología del espacio fase corresponde a la topología homoclínica, además, se pueden observar grandes zonas estocásticas y la existencia de órbitas periódicas de orden superior. En el panel (d) los valores de los parámetros $a = 4.31062700354$ y $\kappa = 0.742493131039$, corresponden al caso de la transición hacia el caos global, para valores mayores de κ ya no existirán curvas KAM. En este panel se muestra la curva sin cillaza con una línea gruesa, esta curva corresponde a la curva KAM que se muestra más resistente a romperse. Para todos los casos $\theta = 0$.

En este mapeo se viola la condición de *twist* a lo largo de la línea $y = 0$ (en el límite $\kappa \rightarrow 0$), conocida como la curva KAM sin cizalla (*shearless*) la cual crea

una barrera de transporte central (BTC). El mapeo *nontwist* ha sido propuesto en la ref. [10, 16] como un modelo simplificado para estudiar el transporte caótico en flujos geofísicos y también ha sido usado para estudiar el transporte en plasmas confinados magnéticamente [11, 12, 13].

Por otro lado, los mapeos *nontwist* son interesantes desde el punto de vista de los sistemas dinámicos debido a la violación de la condición de *twist*, la cual no hace posible la aplicación de teoremas poderosos incluyendo el teorema KAM estándar, el teorema de Poincaré-Birkhoff y la teoría de Aubry–Mather, ya que todas estas teorías usan como hipótesis que los mapeos bajo estudio cumplen la condición de *twist*. Esto ha motivado nuevos avances matemáticos, incluyendo, entre otros, la extensión del teorema KAM que no se basa en la validez de la condición de *twist* [14] y la extensión del criterio de los residuos de Greene.

Dos aspectos clave de los sistemas *nontwist* de particular interés para este trabajo son la robustez de las curvas invariantes y la reconexión de separatrices. Se ha mostrado en trabajos previos que para mapeos que preservan áreas que tienen la forma de la Ec. (1.32), las curvas invariantes sin cizalla son remarcablemente resistentes a romperse [15, 16].

La violación de la condición de *twist* también da lugar a cambios no triviales en la topología del espacio fase que se conocen como reconexión de separatrices, los cuales han sido estudiados con detalle en las refs. [16, 17] y demás referencias ahí citadas. Debido a lo anterior es de bastante interés desde el punto de vista de los sistemas dinámicos el estudiar el papel del acoplamiento de campo medio en este fenómeno.

El método que usamos para abordar este problema se basa en el estudio de la generalización del modelo de los mapeos acoplados en las Ecs. (2.11)–(2.15) para el caso *nontwist*. Esto se logra reemplazando las Ecs. (1.26) y (1.27) por

$$x_k^{n+1} = x_k^n + a \left[1 - (y_k^{n+1})^2 \right], \quad (1.33)$$

$$y_k^{n+1} = y_k^n - \kappa^{n+1} \sin(x_k^n - \theta^n). \quad (1.34)$$

A lo largo de la tesis, nos referiremos al conjunto de ecuaciones (1.28)–(1.30) y (1.33)–(1.34) como el modelo *nontwist* de campo medio (MNCM).

La organización de la tesis es como sigue: en el Capítulo 2 se define el modelo usando el formalismo de las funciones generatrices para modelos con acoplamientos genéricos. El propósito de esta derivación formal es el complementar la

descripción intuitiva que se dió en la Sección 1.2. En las Secciones 2.1 y 2.2 se incluye el estudio de las órbitas periódicas de orden uno y dos, así como sus propiedades de estabilidad. Estos resultados son usados en la Sección 2.3 en donde se construyen condiciones iniciales que muestran permanecer sin cambios significativos a lo largo de intervalos de tiempos grandes. Dichas condiciones iniciales son llamadas estados coherentes del sistema. En el Capítulo 3 se estudia el papel del acoplamiento de campo medio en la reconexión de separatrices. Contrario al caso del mapeo estándar *nontwist*, para el cual la topología del espacio fase es determinada una vez fijados los parámetros a y κ , en el MNCM la reconexión de separatrices se lleva a cabo dinámicamente debido a la interacción autoconsistente entre los grados de libertad del mapeo a través del campo medio. De gran interés es el estudio de la reconexión de separatrices dinámica, la cuál da lugar a transporte a través de la BTC. En el Capítulo 4 se estudia la difusión autoconsistente del MNCM. En este capítulo se estudia el papel del acoplamiento en la supresión de difusión y en la destrucción de la BTC. Para ambos casos se construye un modelo difusivo efectivo usando la teoría cuasi-lineal [18]. Para finalizar el capítulo se estudia el transporte intermitente que ocurre cuando la evolución autoconsistente hace oscilar a la amplitud del campo medio, κ^n , alrededor del valor crítico para la destrucción de la BTC. En el Capítulo 5 se presenta el resumen y conclusiones de la tesis.

1.2. Los mapeos nontwist

Capítulo 2

DESCRIPCIÓN DEL MODELO Y ÓRBITAS PERIÓDICAS

El MNM describe la dinámica de N grados de libertad, a los cuales nos referiremos como “partículas”, con coordenadas (x_1, \dots, x_N) en un dominio periódico unidimensional, $x_k \in (0, 2\pi)$, y momentos (p_1, \dots, p_N) , acoplados a un campo medio oscilatorio con amplitud J y fase θ . Debido a que el sistema es Hamiltoniano, su evolución temporal (en función de la iteración n) puede ser descrita como una transformación canónica de la forma $(\mathbf{q}, \mathbf{p})^n \rightarrow (\mathbf{q}, \mathbf{p})^{n+1}$ definida por:

$$\mathbf{q}^{n+1} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}^{n+1}}, \quad \mathbf{p}^n = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}^n}, \quad (2.1)$$

donde las $N + 1$ coordenadas canónicas conjugadas son $\mathbf{q} = (x_1, \dots, x_N, \theta)$ y $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N, J)$ sus momentos asociados, y $S = S(\mathbf{q}^n, \mathbf{p}^{n+1})$ es la función generatriz de la transformación canónica.

Siguiendo el procedimiento de la ref. [18], construimos la función generatriz como

$$S = S_p + S_f + S_i, \quad (2.2)$$

donde S_p determina la evolución de las N partículas en la ausencia del campo medio, S_f determina la evolución desacoplada del campo, y S_i determina la interacción del campo medio con las partículas.

Para S_p usamos la función generatriz del mapeo estándar *nontwist*:

$$S_p = \sum_{k=1}^N \left\{ x_k^n p_k^{n+1} + a \left[p_k^{n+1} - \frac{1}{3} \frac{\Delta t^2}{\Gamma_k^2} (p_k^{n+1})^3 \right] \right\}. \quad (2.3)$$

En ausencia de interacción, la evolución del campo medio esta determinada por:

$$S_f = \theta^n J^{n+1}, \quad (2.4)$$

mientras que el acoplamiento entre el campo medio y las partículas está dado por:

$$S_i = -2\Delta t \sum_{k=1}^N \sqrt{J^{n+1}} \Gamma_k \cos(x_k^n - \theta^n), \quad (2.5)$$

donde Δt y $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ son constantes. De esta manera obtenemos un acoplamiento a través de la amplitud J y fase θ del campo medio.

Sustituyendo las Ecs. (2.3)–(2.5) en (2.1), obtenemos el siguiente mapeo simpléctico que describe la interacción autoconsistente de las N partículas con el campo medio:

$$x_k^{n+1} = x_k^n + a \left[1 - \left(\frac{\Delta t}{\Gamma_k} p_k^{n+1} \right)^2 \right], \quad (2.6)$$

$$p_k^{n+1} = p_k^n - 2\Delta t \Gamma_k \sqrt{J^{n+1}} \sin(x_k^n - \theta^n), \quad (2.7)$$

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \frac{\Delta t}{\sqrt{J^{n+1}}} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \cos(x_k^n - \theta^n), \quad (2.8)$$

$$J^{n+1} = J^n + 2\Delta t \sqrt{J^{n+1}} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \sin(x_k^n - \theta^n). \quad (2.9)$$

Cabe mencionar que, debido a que se ha utilizado el formalismo de la función generatriz, usamos el término simpléctico para remarcar que la evolución del sistema se está considerando como una transformación canónica entre las antiguas variables, $(\mathbf{q}, \mathbf{p})^n$, y las nuevas variables, $(\mathbf{q}, \mathbf{p})^{n+1}$. Esto, por el teorema

de Liouville, es equivalente a decir que un elemento de volumen (hipervolumen) en el espacio fase $2N + 2$ dimensional únicamente se deforma, conservando el volumen, a lo largo de toda la evolución del elemento de volumen inicial. Por dar un ejemplo de lo anterior, considérese el caso del mapeo estándar *nontwist* cuya evolución se describe como una transformación canónica que tiene como función generatriz a la Ec. (2.3).

Por otro lado, se puede comprobar por sustitución directa que el mapeo definido por las Ecs. (2.6)–(2.9) es invariante ante una traslación de las coordenadas, esto es, $(x_1, \dots, x_N, \theta) \mapsto (x_1 + \alpha, \dots, x_N + \alpha, \theta + \alpha)$, con α una constante arbitraria. La invarianza del mapeo ante traslaciones junto con su naturaleza Hamiltoniana dan lugar a la conservación del momento total, el cual se define como

$$\mathcal{P}^n = \sum_{j=1}^N y_j^n + J^n. \quad (2.10)$$

Por sustitución directa de las Ecs. (2.6)–(2.9) en la Ec. (2.10), se puede comprobar fácilmente que $\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^{n+1} = \text{cte.}$, donde el valor del momento total del sistema se fija al momento en que se fijan las condiciones iniciales. Dentro del contexto de las cantidades conservadas del mapeo, cabe mencionar que la naturaleza discreta en el tiempo del sistema hace difícil el definir la conservación de la energía. Por lo tanto, no es posible hablar de la conservación de la energía para el mapeo que se estudia en este trabajo de tesis.

Analizando las ecuaciones del mapeo anterior podemos ver que la última ecuación, Ec. (2.9), la cual determina la evolución de la amplitud del campo medio, está en forma implícita. Sin embargo, haciendo el cambio de variables de la Ec. (1.25) se obtiene el mapeo

$$x_k^{n+1} = x_k^n + a [1 - (y_k^{n+1})^2], \quad (2.11)$$

$$y_k^{n+1} = y_k^n - \kappa^{n+1} \sin(x_k^n - \theta^n), \quad (2.12)$$

donde κ^n y θ^n denotan la amplitud y fase del campo medio, las cuales evolucionan en función de n de acuerdo a las siguientes relaciones:

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \frac{1}{\kappa^{n+1}} \frac{\partial \eta^n}{\partial \theta^n}, \quad (2.13)$$

$$\kappa^{n+1} = \sqrt{(\kappa^n)^2 + (\eta^n)^2} + \eta^n, \quad (2.14)$$

2.1. Órbitas de período uno

donde

$$\eta^n = \sum_{k=1}^N \gamma_k \sin(x_k^n - \theta^n) \quad (2.15)$$

vuelve a ser el acoplamiento del campo medio entre los N grados de libertad.

El mapeo definido por el conjunto de ecuaciones (2.11)–(2.15) es al que nos referiremos como el mapeo *nontwist* de campo medio (MNCM) a lo largo de esta tesis. Es importante notar que, debido a que el cambio de coordenadas de la Ec. (1.25) no es canónico, el nuevo mapeo no es simpléctico en los grados de libertad del campo medio.

2.1. Órbitas de período uno

En esta sección se realizará el análisis de estabilidad del MNCM, comenzando por definir las órbitas periódicas del mapeo. Para ello, introducimos el vector $2(N + 1)$ dimensional $\mathbf{x}^n = (x_1^n, \dots, x_N^n, y_1^n, \dots, y_N^n, \theta^n, \kappa^n)^\dagger$, donde \dagger denota la transpuesta del vector. De esta manera escribimos al MNCM como

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^n), \quad (2.16)$$

y definimos una órbita periódica de orden s como una secuencia, $\{\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_s^*\}$, tal que $\mathcal{M}^s(\mathbf{x}_p^*) = \mathbf{x}_p^*$, para $p = 1, \dots, s$, con la restricción, $\mathcal{M}^r(\mathbf{x}_p^*) \neq \mathbf{x}_p^*$ para $0 \leq r \leq s - 1$.

Por el momento limitaremos nuestra atención a las órbitas periódicas de orden $s = 1$, para las cuales el campo medio permanece fijo; es decir, suponemos que

$$\kappa^n = \kappa^*, \quad \theta^n = \theta^* = 0 \quad (2.17)$$

para toda n , donde sin pérdida de generalidad podemos escoger $\theta^* = 0$, ya que se trata de una fase inicial constante. De las Ecs.(2.13) y (2.14), podemos darnos cuenta de que la Ec. (2.17) impone las siguientes constricciones al parámetro de orden y su derivada

$$\eta^n = \frac{\partial \eta^n}{\partial \theta^n} = 0, \quad (2.18)$$

para toda n , evaluada en la órbita periódica. La suposición en la Ec. (2.17) simplifica considerablemente la búsqueda de órbitas periódicas. De hecho, esta suposición desacopla el campo medio de las partículas y permite construir las órbitas periódicas del MNCM a partir de las órbitas periódicas del mapeo estándar *nontwist*. En particular, del análisis de las órbitas periódicas de orden uno del mapeo estándar *nontwist* [16], se sigue que, si se cumple la Ec. (2.18), cualquier arreglo de las N partículas tales que

$$(x_k^*, y_k^*) = \left(m_k \pi, \pm \sqrt{1 + \frac{2\pi l_k}{a}} \right), \quad (2.19)$$

para $k = 1, \dots, N$, define una órbita periódica en el espacio fase $2(N + 1)$ dimensional del mapeo *nontwist* de campo medio, donde, para cada k , $m_k \in \{0, 1\}$ y $l_k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

En este caso, la restricción en el parámetro de orden η en la Ec. (2.18) impone la siguiente restricción en los valores de m_k y las constantes de acoplamiento γ_k :

$$\sum_{k=1}^N (-1)^{m_k} \gamma_k = 0. \quad (2.20)$$

Por ejemplo, una órbita periódica de orden uno del MNCM puede ser construida colocando la mitad de partículas en $(x, y) = (0, 1)$ y la otra mitad de las partículas en $(x, y) = (\pi, -1)$ con los valores de $\gamma_k = 1$ para toda k .

Para analizar la estabilidad de las órbitas de período uno, linealizamos el MNCM alrededor de los puntos fijos \mathbf{x}^* , escribiendo, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}$, siendo $\Delta \mathbf{x}$ una pequeña desviación del punto fijo de las Ecs. (2.19) y (2.20). De este modo el mapeo lineal a primer orden en $|\Delta \mathbf{x}|$ es:

$$\Delta \mathbf{x}^{n+1} = \nabla \mathcal{M}^* \Delta \mathbf{x}^n, \quad (2.21)$$

donde $\nabla \mathcal{M}^*$ es la matriz de derivadas parciales de \mathcal{M} evaluada en \mathbf{x}^* . Esta matriz tiene una forma de bloques como se muestra a continuación,

2.1. Órbitas de período uno

$$\nabla \mathcal{M}^* = \left(\begin{array}{c|c} M & E \\ \hline F & G \end{array} \right)$$

donde M es la matriz Jacobiana de $2N \times 2N$ para las variables x y y , con entradas

$$\left. \frac{\partial x_k^{n+1}}{\partial x_i^n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \delta_{ki} \left[1 \pm 2a\kappa^* (-1)^{m_k} \sqrt{1 + 2\pi l_k/a} \right],$$

$$\left. \frac{\partial x_k^{n+1}}{\partial y_i^n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \mp 2a\delta_{ki} \sqrt{1 + 2\pi l_k/a},$$

$$\left. \frac{\partial y_k^{n+1}}{\partial x_i^n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = -\delta_{ki} \kappa^* (-1)^{m_k}, \quad \left. \frac{\partial y_k^{n+1}}{\partial y_i^n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \delta_{ki},$$

donde el signo + (signo -) de la primera ecuación corresponde a $y_k^* > 0$ ($y_k^* < 0$) y en la segunda ecuación el signo + (signo -) corresponde a $y_k^* < 0$ ($y_k^* > 0$).

La matriz E , de dimensión $2N \times 2$, tiene como elementos de matriz no nulos

$$\frac{\partial x_k^{n+1}}{\partial \theta^n} = -2ay^* \kappa^* (-1)^{m_k}, \quad \frac{\partial y_k^{n+1}}{\partial \theta^n} = \kappa^* (-1)^{m_k}.$$

La matriz F , de dimensión $2 \times 2N$, tiene como elementos de matriz no nulos

$$\left. \frac{\partial \kappa^{n+1}}{\partial x_i^n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \gamma_i (-1)^{m_i},$$

y la matriz G es la matriz Jacobiana para las variables κ y θ que resulta ser la matriz identidad de 2×2 .

La estabilidad de \mathbf{x}^* está determinada por los eigenvalores de $\nabla \mathcal{M}^*$, $\lambda \in \{\lambda_k\}$, con $j = 1, \dots, 2(N+1)$, los cuales son soluciones del polinomio característico

$$\|\nabla \mathcal{M}^* - \lambda \mathcal{I}\| = 0, \quad (2.22)$$

donde \mathcal{I} representa la matriz identidad de dimensión $2(N+1) \times 2(N+1)$ y $\|\|$ denota el determinante. Debido a la forma en bloques de $\nabla \mathcal{M}^*$, después de hacer

algo de álgebra es posible factorizar el polinomio característico de la Ec. (2.22) como sigue:

$$(1 - \lambda)^2 \prod_{k=1}^N \mathcal{P}_k = 0, \quad (2.23)$$

con \mathcal{P}_k dado por

$$\mathcal{P}_k = \lambda^2 - 2\lambda \left[1 \pm a\kappa^*(-1)^{m_k} \sqrt{1 + 2\pi l_k/a} \right] + 1, \quad (2.24)$$

donde el orden de los signos (\pm) es igual que en la Ec. (2.19).

La m -ésima iteración de un eigenvector \mathbf{v} de $\nabla\mathcal{M}^*$ bajo la dinámica linealizada es $[\nabla\mathcal{M}^*]^m \mathbf{v} = \lambda^m \mathbf{v}$. De esto se sigue que si $|\lambda| > 1$ para al menos uno de los eigenvalores del punto fijo del MNCM, el punto fijo es linealmente inestable.

De acuerdo a la Ec. (2.23), hay dos valores degenerados con $\lambda = 1$. Estos eigenvalores corresponden al caso neutral parabólico de los grados de libertad del campo medio, es decir; a perturbaciones de la amplitud, κ^* , y la fase θ^* , del campo medio. Los restantes $2N$ eigenvalores son obtenidos de la solución de las N ecuaciones cuadráticas $\mathcal{P}_k = 0$. Como es de esperarse, los resultados anteriores para el caso límite, $\gamma_k = 0$, tienden a los resultados de estabilidad del mapeo estándar *nontwist* [16].

Como un ejemplo para ilustrar los conceptos y resultados anteriores, consideremos una configuración con $l_k = 0$ para toda k . En este caso, de acuerdo a la Ec. (2.19), hay cuatro posibilidades para los puntos fijos: $(x_k^*, y_k^*) = (0, 1)$, $(0, -1)$, $(\pi, 1)$, y $(\pi, -1)$. Estos casos corresponden a las cuatro órbitas periódicas del mapeo estándar *nontwist* para las cuales es conocido que $(0, 1)$ y $(\pi, -1)$ siempre son inestables mientras que $(0, -1)$ and $(\pi, 1)$ son estables para $\kappa^* < 2/a$. De esto concluimos que una configuración del MNCM con todas las partículas localizadas en $(0, -1)$ y $(\pi, 1)$ que cumplen con la restricción de la Ec. (2.18) será estable para el mapeo autoconsistente siempre que $\kappa^* < 2/a$.

Las propiedades de estabilidad de las órbitas de período uno del MNCM pueden ser usadas como guía para la construcción de ciertas condiciones iniciales del MNCM que hemos llamado estados coherentes autoconsistentes, los cuales se definirán formalmente en la Sec. 2.3. Para ilustrar esto, consideremos al MNCM para una condición inicial con $a = 0.8$ y con valores iniciales del campo medio $\kappa^* = 0.3064$ y $\theta^* = 0$. Para las partículas consideraremos un ensamble de

2.1. Órbitas de período uno

$N = 1.2 \times 10^4$ partículas con $\gamma_k = 10^{-5}$ para toda k , la mitad de ellas distribuidas en una vecindad del punto fijo $(0, -1)$ y la otra mitad distribuida en una vecindad del punto fijo $(\pi, 1)$. Para los parámetros del mapeo que se han escogido, $\kappa^* = 0.3064 < 2/a = 2.5$, lo que implica estabilidad lineal. Consistente con este resultado, en la Fig. 2.1 se muestra que el ensamble de partículas se mantiene coherente y la amplitud del campo medio oscila alrededor de su valor inicial κ^* . Más adelante, en la Sec. 2.3, se estudiará detalladamente la manera de cómo construir estos estados coherentes una vez que se conocen los criterios de estabilidad.

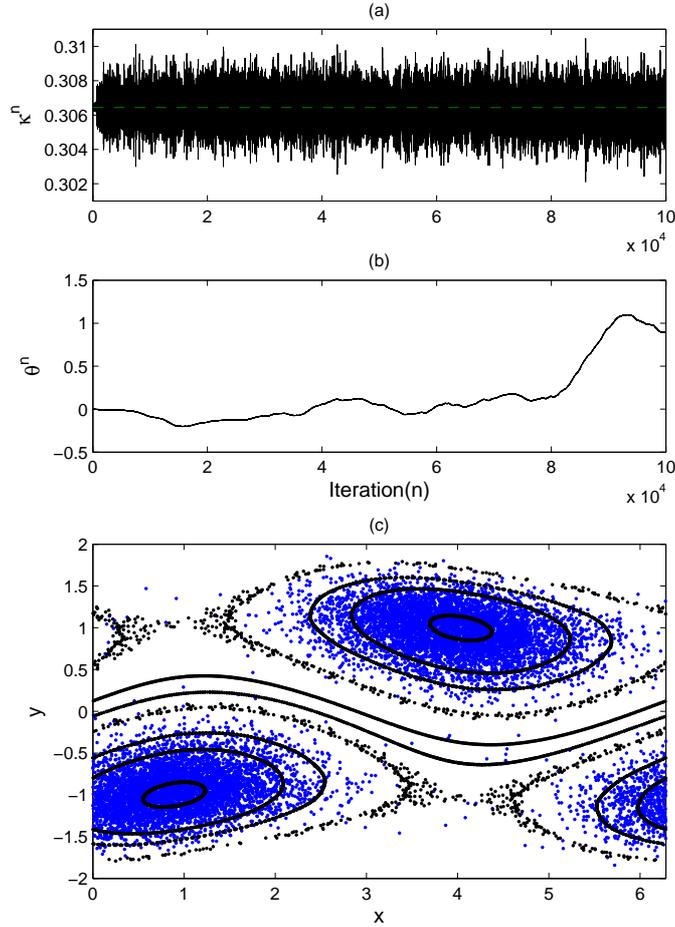


Figura 2.1: Estructura coherente alrededor de las órbitas periódicas de orden uno. El panel (c) muestra el estado final en el plano (x_j, y_j) , de un ensamble de $N = 1.2 \times 10^4$ en el MNCM con la amplitud autoconsistente, κ^n , y fase, θ^n del campo medio que se muestran en los paneles (b) y (c) respectivamente. La coherencia del estado es mantenida por el confinamiento de las partículas en las resonancias de período uno del mapeo localizadas en $(\theta^n, -1)$ y $(\pi + \theta^n, 1)$.

2.2. Órbitas de período dos

En esta sección se estudiarán las órbitas periódicas de orden dos. Siguiendo con la metodología de la sección anterior, restringiremos nuestra atención a las órbitas periódicas de orden dos para las cuales se mantiene fijo el campo medio, es decir, $\kappa^n = \kappa^*$, $\theta^n = \theta^* = 0$, y por lo tanto satisfacen la restricción de la

2.2. Órbitas de período dos

Ec. (2.18). Con esto, desacoplamos el campo medio de las partículas, lo que nos hace posible usar las órbitas periódicas de orden dos del mapeo estándar *nontwist* para construir las órbitas de período dos del MNCM. En particular,

$$(x_k^*, y_k^*) = \left(m_k \pi, \pm \sqrt{1 - \frac{\pi}{a}} \right), \quad (2.25)$$

para $k = 1, \dots, N$, define una órbita de período dos del MNCM en el espacio fase $2(N + 1)$ dimensional, donde, para cada k , $m_k \in \{0, 1\}$ [16]. Es importante notar que sólo para los valores de $a > \pi$ existen estas órbitas de período dos.

Procediendo con el análisis de estabilidad de las órbitas periódicas de la Ec. (2.25), nos damos cuenta que la constricción para el parámetro de orden, η , es la misma que para el caso de las órbitas de período uno en la Ec. (2.20). Además, la forma del mapeo linealizado para estas órbitas periódicas resulta tener la misma forma en bloques que para las órbitas de período uno. Esto hace posible escribir el polinomio característico en la forma factorizada siguiente:

$$(1 - \lambda)^2 \prod_{k=1}^N \mathcal{Z}_k = 0, \quad (2.26)$$

donde,

$$\mathcal{Z}_k = \lambda^2 - 2\lambda [1 - 2a^2 \kappa^{*2} (1 - \pi/a)] + 1. \quad (2.27)$$

Como antes, $\lambda = 1$ es el valor del eigenvalor degenerado correspondiente al caso neutral parabólico de la amplitud y fase del campo medio. Consistente con la estabilidad lineal del mapeo estándar *nontwist*, los eigenvalores obtenidos de las soluciones de $\mathcal{Z}_k = 0$ son estables, siempre que se tenga $0 < a^2 \kappa^{*2} (1 - \pi/a) < 1$. Esto es, si esta condición se satisface y al mismo tiempo se satisface la constricción de la Ec. (2.20), entonces una configuración de N partículas con coordenadas dadas por la Ec. (2.25) es una órbita periódica autoconsistente estable para el MNCM para los valores de los parámetros del campo medio, κ^* y θ^* .

Otra familia de órbitas de período dos corresponde a partículas con coordenadas (x_k^*, y_k^*) dadas por las soluciones de las ecuaciones

$$2 - y_k^{*2} - (y_k^* - \kappa^* \sin x_k^*)^2 = 2\pi/a \quad \text{y} \quad x_k^* = a (1 - y_k^{*2}) / 2. \quad (2.28)$$

Para este caso, el polinomio no es fácilmente factorizable. Sin embargo, hay indicaciones de resultados numéricos y estudios previos del mapeo estándar *nontwist* de que estas órbitas de período dos son siempre inestables.

Basados en este análisis de estabilidad lineal, es posible construir estados coherentes consistentes de cuatro distribuciones de partículas. Un ejemplo de esto es mostrado en la Fig. 2.2. De acuerdo con la Eq. (2.25), la condición inicial para este cálculo consiste de $N = 1.2 \times 10^4$ partículas igualmente distribuidas en la vecindad de los puntos $(0, \pm\sqrt{1 - \frac{\pi}{a}})$ y $(\pi, \pm\sqrt{1 - \frac{\pi}{a}})$, donde $a = 3.4216$. Para satisfacer la constricción de la Ec. (2.20), se escoge $\gamma_k = 10^{-5}$ para toda k , y para garantizar la estabilidad de la configuración inicial, se fija la condición inicial de la amplitud del campo medio como $\kappa^1 = 0.15 < 1/(a\sqrt{1 - \frac{\pi}{a}}) = 1.7564$ y su fase como $\theta^* = 0$. Como se esperaba del análisis de estabilidad lineal, la amplitud y fase del campo medio se mantienen cerca de sus valores de equilibrio, $\kappa^* = \kappa^1$ y $\theta^* = 0$, mientras que el ensamble de partículas se mantiene coherente.

2.3. Estados coherentes

En esta sección se estudiará la manera de construir condiciones iniciales para el MNCM tales que las partículas se mantienen agrupadas alrededor de los puntos fijos estables que se encontraron en el análisis de estabilidad lineal.

Comenzamos por definir a los estados coherentes del MNCM como aquellas condiciones iniciales que evolucionan de tal manera que la configuración inicial se mantiene confinada en una región del espacio fase para toda n . Esto significa que la evolución de los grados de libertad del mapeo consiste solamente en una variación alrededor de sus valores de estabilidad. La dificultad para construir los estados coherentes para el MNCM se puede ver analizando la siguiente situación: Consideremos una condición inicial del mapeo para la cual el valor de la amplitud del campo medio es κ^* , la cual cumple con las condiciones de estabilidad lineal una vez que el valor del parametro a ha sido fijado, $\kappa^* < 2/a$, para las órbitas estables de período uno, por ejemplo. Por otro lado, las partículas son distribuidas en una vecindad alrededor de las órbitas periódicas estables del mapeo. Debido al acoplamiento en la Ec. (2.15), la dinámica de las partículas inducida por los valores de los parámetros, κ^* y a , modificará al campo medio que a su vez determinará la nueva dinámica de las partículas. Claramente hay una dependencia en la condición inicial de las partículas para la existencia de los estados coherentes, ya que si las partículas causan un cambio considerable en κ , esto puede afectar la estabilidad de los puntos fijos, destruyendo en unas pocas

2.3. Estados coherentes

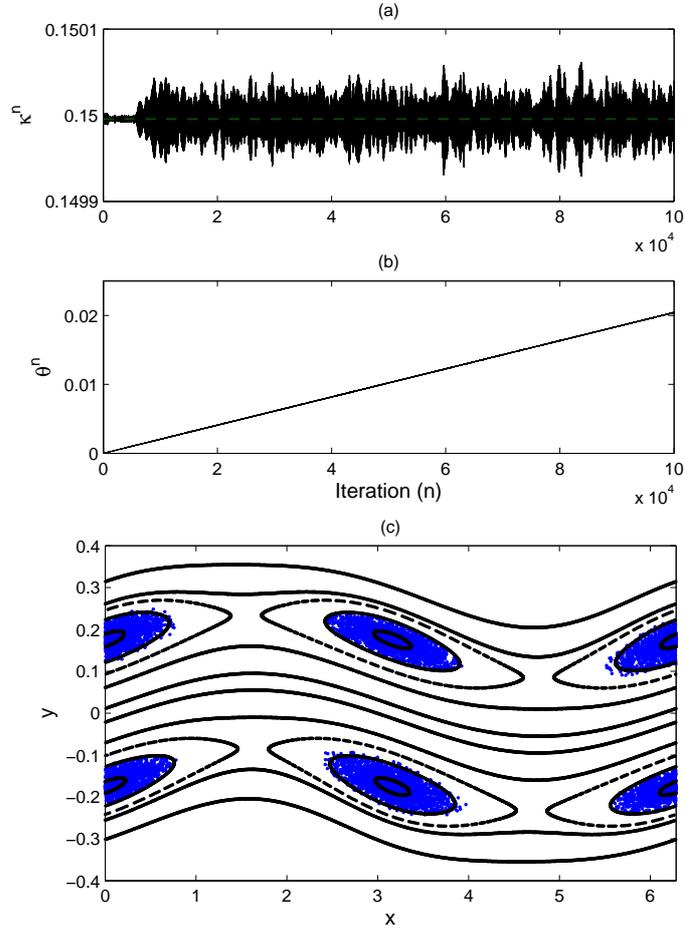


Figura 2.2: Estructura coherente alrededor de las órbitas periódicas de orden dos. El panel (c) muestra el estado final en el plano (x_j, y_j) , de un ensamble de $N = 1.2 \times 10^4$ en el MNM con la amplitud autoconsistente, κ^n , y fase, θ^n del campo medio que se muestran en los paneles (b) y (c) respectivamente. La coherencia del estado es mantenida por el confinamiento de las partículas en las resonancias de período dos del mapeo localizadas en $(\theta^n, \pm\sqrt{1 - \pi/a})$ y $(\theta^n + \pi, \pm\sqrt{1 - \pi/a})$.

iteraciones del mapeo la condición inicial. Por lo tanto el problema fundamental reside en encontrar la condición inicial de las partículas alrededor de los puntos fijos estables que sólo cause pequeñas variaciones de κ^n alrededor del valor de equilibrio κ^* .

Fijaremos nuestra atención al caso concreto de las órbitas de período uno, siempre teniendo en mente que los resultados que se presentan aquí son igualmente apli-

cables a órbitas periódicas de orden superior a uno. Como se dijo anteriormente, si podemos encontrar la condición inicial para las partículas en el espacio fase tal que el campo medio no varíe considerablemente, podremos construir estados coherentes. La manera de asegurar esto es colocarlas inicialmente dentro de la región regular en el espacio fase correspondiente a las resonancias de los puntos fijos elípticos. En otras palabras, para cada conjunto de valores de los parámetros del mapeo, hay que determinar la ubicación de las curvas invariantes del mapeo que aún existen y que sirven de barreras de transporte locales en el espacio fase. Esto se ha estudiado en el pasado para mapeos *twist* [19], pero no puede ser aplicado para el caso autoconsistente *nontwist*. Por lo tanto, se ha propuesto un método numérico para encontrar las fronteras de las regiones estables en el espacio fase. De gran importancia es el hecho que la topología de cada subespacio fase (x_k, y_k) asociado a cada grado de libertad del mapeo autoconsistente es la misma, dado que el campo medio, el cual determina la topología, es el mismo para todas las partículas. Por lo tanto basta con estudiar al sistema completo proyectado en el plano (x_k, y_k) . El método numérico consiste de tres partes: La primera parte consiste en usar el mapeo estándar *nontwist* para hacer una búsqueda unidimensional en la dirección del eje y para hallar la posición más alejada, $y_{max}(\kappa)$, del punto fijo elíptico en $(\pi, 1)$, para la cual el mapeo de $y_{max}(\kappa)$ está confinado en la zona regular. Los valores de los parámetros del mapeo *nontwist* deberán corresponder a los valores de la condición inicial de equilibrio del MNM que se quiera estudiar, esto es, $\kappa = \kappa^*$. La segunda parte del método consiste en hacer una búsqueda en las dos dimensiones del plano (x, y) , usando como referencia el valor obtenido de $y_{max}(\kappa^*)$. Para esto se usa el mapeo *nontwist* y se fija como condición inicial una distribución de partículas en forma de círculo de radio $y_{max}(\kappa^*) - 1$ centrado en el punto fijo estable $(\pi, 1)$, las cuales serán mapeadas usando el *standar nontwist map*, mientras que los parámetros κ y a , permanecen igual que en la primera parte. El radio del círculo de la condición inicial se varía hasta encontrar el radio máximo, $R_{max}(\kappa^*)$, para el cual la configuración inicial se mantiene confinada en la región regular. El objetivo de este segundo cálculo es eliminar errores que se obtienen en la primera parte del método al no considerar la complicada estructura estocástica de la región de la frontera de la resonancia. A partir de estos resultados, es posible construir en forma aproximada la curva invariante de las resonancias de los puntos fijos elípticos como se muestra en la Fig. 2.3.

De los resultados anteriores ya es posible construir de manera práctica estados confinados a partir de configuraciones iniciales en forma de discos centrados en los puntos fijos elípticos con radios máximos dados por R_{max} , sin embargo, hay que tomar en cuenta el efecto de las pequeñas variaciones de κ^n del mapeo autoconsistente alrededor del valor de equilibrio κ^* . La manera más sencilla de hacer

2.3. Estados coherentes

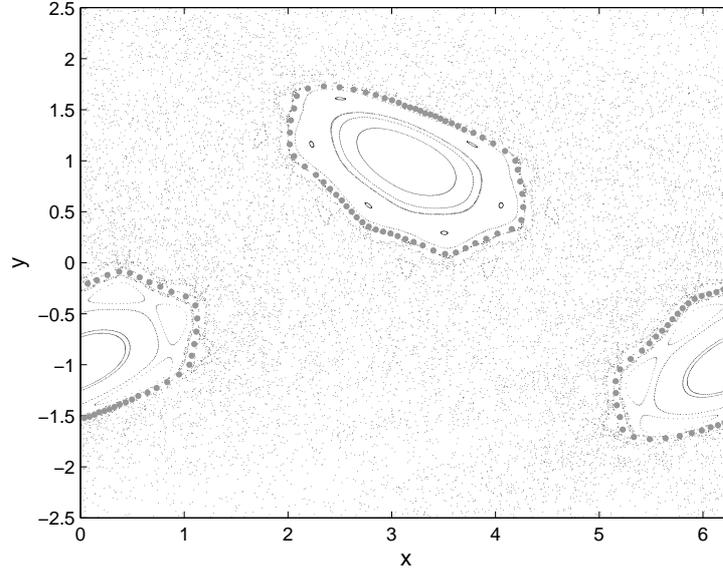


Figura 2.3: Construcción numérica de las curvas invariantes para los puntos fijos elípticos $(0, -1)$ y $(\pi, 1)$ usando el mapeo *nontwist*. Se han escogido los valores de los parámetros, $\kappa^* = 0.7557$ y $a = 0.8$, para mostrar el método cuando el espacio fase tiene una región regular bien definida rodeada por una región totalmente caótica. Los puntos grises más grandes trazan las curvas invariantes que funciona como una barrera de transporte local.

esto es proponer una cota inferior, $R_L(\kappa^*)$, para el radio de las distribuciones iniciales de las partículas que garantice la coherencia de los estados. Esto se hace en la tercera parte del método, haciendo un ajuste de los datos obtenidos para $R_{max}(\kappa^*)$ para diferentes valores de κ^* . La expresión para el ajuste R_L , está dada por la ecuación,

$$\begin{aligned}
 R_L(\kappa^*) &= a_1(\kappa^*)^6 + a_2(\kappa^*)^5 + a_3(\kappa^*)^4 + a_4(\kappa^*)^3 + a_5(\kappa^*)^2 + a_6(\kappa^*) + a_7, \\
 a_1 &= -1.1311, \\
 a_2 &= 6.7984, \\
 a_3 &= -16.3818, \\
 a_4 &= 20.5420, \\
 a_5 &= -14.2427, \\
 a_6 &= 4.5847, \\
 a_7 &= 0.1177.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

En la Fig. 2.4 se muestran los resultados numéricos de las tres partes del método descrito anteriormente para diferentes valores de κ^* . Para este análisis se ha fijado el valor de $a = 0.8$.

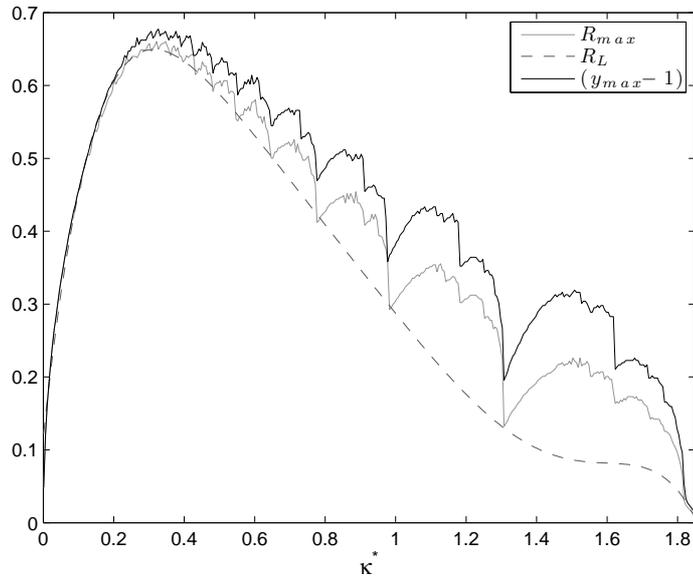


Figura 2.4: Resultados numéricos de las tres partes del método para construir estados coherentes del MNCM. En la figura se puede apreciar el grado de refinación del método al ir de $y_{max}(\kappa^*)$ a $R_L(\kappa^*)$.

Para ilustrar la existencia y evolución de los estados coherentes construidos en base al método numérico propuesto, se considera la misma condición inicial que la considerada en la Fig. 2.1 con el valor para el radio inicial de la distribución de partículas, $R_L = 0.6494$.

Para cuantificar el grado de coherencia de la condición inicial en función de n se consideró el cociente, Ξ , de las partículas dentro de la región regular entre el número total de partículas. El resultado de calcular Ξ para diferentes valores de n se muestra en la Fig. 2.5. Los resultados de esta figura están en perfecta concordancia con el resultado de la Fig. 2.1-(c), ya que se observa que la condición inicial construida con el criterio, R_L , permanece coherente en función del tiempo perdiendo una cantidad mínima de partículas debido a las pequeñas variaciones de la amplitud del campo medio, κ^n , alrededor del valor de equilibrio κ^* .

2.3. Estados coherentes

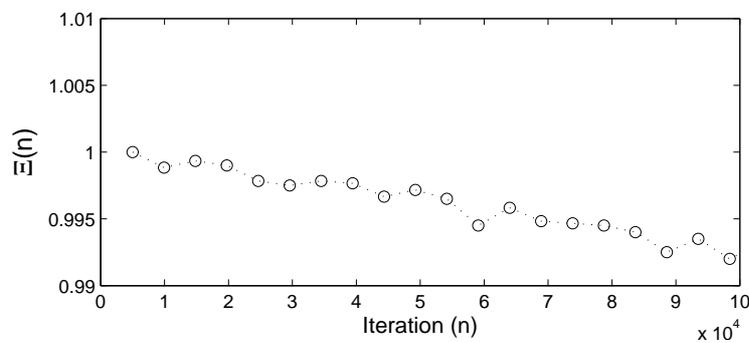


Figura 2.5: El cociente de partículas, $\Xi(n)$, dentro de la región regular alrededor de los puntos fijos elípticos de las órbitas de período uno entre el número total de partículas. Como se puede ver, la estructura permanece coherente a lo largo de la evolución del MNCM en completa concordancia con la Fig. 2.1-(c).

Capítulo 3

RECONEXIÓN DE SEPARATRICES AUTOCONSISTENTE

La reconexión de separatrices es una de las características principales de los sistemas dinámicos Hamiltonianos *nontwist*. Debido a la violación de la condición de twist, las resonancias en sistemas *nontwist* aparecen en pares, y pueden surgir bifurcaciones en el espacio fase no triviales debido a las distintas maneras topológicas en las cuales se conectan las variedades estables e inestables. Como se muestra en la Fig. 3.1, en el caso de mapeos *nontwist* simétricos, hay dos tipos diferentes de imágenes topológicas del espacio fase. En el caso heteroclínico, o topología del “tipo péndulo”, la variedad inestable se une a la variedad estable del punto fijo hiperbólico adyacente, mientras que en el caso homoclínico, una de las variedades inestables se enrolla alrededor del punto fijo elíptico y se une con la variedad estable del mismo punto hiperbólico. Estas bifurcaciones han sido estudiadas con detalle en la literatura y los umbrales para las transiciones entre los dos tipos de topologías han sido calculados analítica y numéricamente [16, 20]. En particular, para el mapeo estándar *nontwist* de la Ec. (1.32), es conocido que la topología de las resonancias de período uno es heteroclínica (homoclínica) cuando $\kappa < 2a/3$ ($\kappa > 2a/3$), con $\kappa = \kappa_{\text{rec}} = 2a/3$, denotando el umbral de reconexión el cual se muestra en la Fig. 3.1-(c).

El acoplamiento global en el MNCM abre una nueva e inexplorada fenomenología de la reconexión de separatrices. Contrario a como sucede en el mapeo estándar *nontwist*, en el cual la topología está únicamente determinada una vez que se fijan los valores de los parámetros a y κ , en el MNCM la evolución de la amplitud

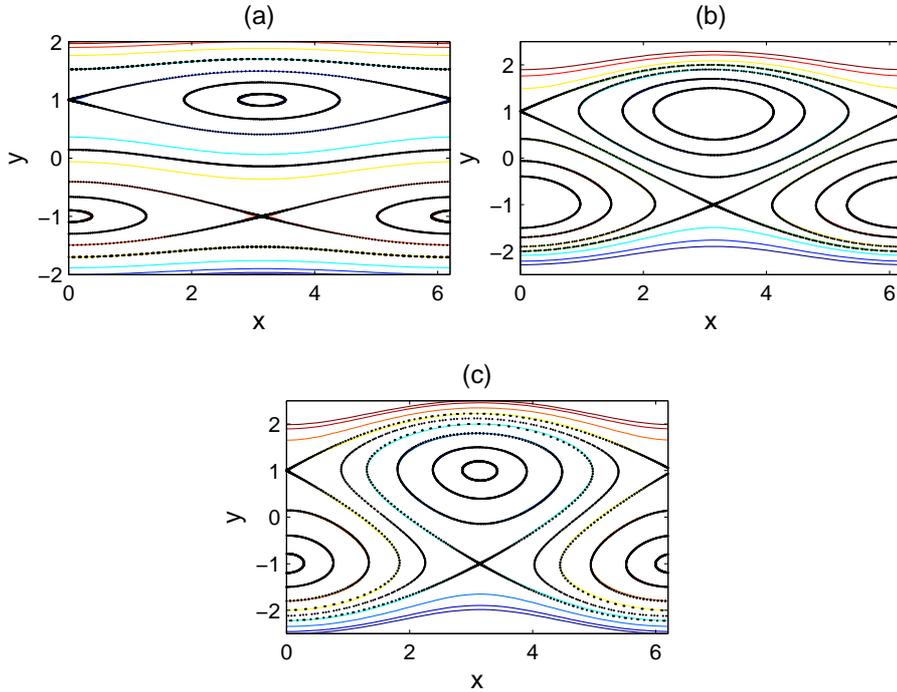


Figura 3.1: Reconexión de separatrices en el mapeo *nontwist*. En el panel (a) se muestra un ejemplo de topología heteroclínica con $(a, \kappa) = (0.055, 0.00779)$; en el panel (c) se muestra un ejemplo de topología homoclínica con $(a, \kappa) = (0.055, 0.05805)$. El umbral de reconexión, correspondiente a $(a, \kappa) = (a, \kappa_{\text{rec}} = 2a/3) = (0.055, 0.0367)$, se muestra en el panel (b). Como se muestra en la Fig. 3.3, en el MNCM, la reconexión de separatrices autoconsistente da lugar a una transición dinámica entre estas dos topologías en función del tiempo.

del campo medio da lugar a la reconexión dinámica de separatrices, esto es, a bifurcaciones en la topología del espacio fase como función del tiempo.

Debido a que la amplitud del campo medio depende del estado del sistema (ver Ec. (2.14)), nos referiremos a esta bifurcación como la reconexión de separatrices autoconsistente, y en este capítulo estudiaremos su papel en el transporte en el espacio fase. A pesar del gran número de grados de libertad, N , el estudio de la reconexión de separatrices para el MNCM es relativamente simple, esto debido a que para cualquier tiempo dado la topología del sub-espacio fase (x_j, y_j) , del j -ésimo grado de libertad es la misma para toda j y está únicamente determinada por a y el valor instantáneo de la amplitud del campo medio, κ^n . Esta simplificación tan importante surge del hecho de que todos los grados de libertad

están sujetos al mismo campo medio. Basado en esto, diremos que la topología del MNCM para la iteración n es heteroclínica (homoclínica) si para todos los grados de libertad, $j = 1, \dots, N$, la topología del espacio fase en el plano (x_j, y_j) es heteroclínica (homoclínica), esto es, si $\kappa^n < 2a/3$ ($\kappa^n > 2a/3$).

El umbral de reconexión que hemos venido usando a lo largo de este capítulo, $\kappa_{\text{rec}} = 2a/3$, surge del análisis del Hamiltoniano

$$H(x, y) = -ay + \frac{a}{3}y^3 + \kappa \cos(x - \theta^n), \quad (3.1)$$

que corresponde al límite integrable del mapeo *nontwist* [16].

Para ir más allá de esta estimación, y tener otra verificación de su validez, también se ha calculado el umbral de reconexión usando un método basado en la estabilidad lineal de las órbitas de período uno del mapeo. De acuerdo a este segundo método, el umbral de reconexión en la n -ésima iteración, está definido como los valores de a y κ^n para los cuales la pendiente del eigenvector de la variedad inestable del punto fijo hiperbólico (línea roja en la Fig. (3.2)), $(\pi + \theta^n, -1)$, iguala la pendiente de la línea que une este punto fijo hiperbólico con el otro localizado en $(2\pi + \theta^n, 1)$. En la Fig. (3.2) se muestran los eigenvectores de los puntos hiperbólicos para las diferentes topologías.

Se debe notar que, para ser precisos, se ha incluido la dependencia en la fase θ^n del campo medio en la localización en x de los puntos fijos hiperbólicos, aunque, como se mencionó anteriormente, el que se omita o no este desplazamiento no tiene consecuencias importantes en el análisis de estabilidad lineal. Así, si m_R denota la pendiente del eigenvector de la variedad inestable, el cual, de acuerdo al análisis de estabilidad lineal depende de a y κ^n , definimos el umbral de reconexión como la amplitud del campo medio κ_{rec} para la cual $m_R(a, \kappa^n = \kappa_{\text{rec}}) = 2/\pi$.

Para comparar los dos métodos discutidos anteriormente para el cálculo del umbral de reconexión, y para estudiar el papel de la reconexión de separatrices autoconsistente en el transporte, se considera una condición inicial lejos del equilibrio que consiste de un ensamble de $N = 1.2 \times 10^4$ partículas con $\gamma_j = 1 \times 10^{-5}$. Al instante $n = 1$, las partículas se distribuyen uniformemente en dos círculos con radio $r_0 = 1.5$ centrados en los puntos elípticos $(0, -1)$ y $(\pi, 1)$. Además, a menos que se indique lo contrario se debe tomar como condición inicial de los parámetros $a = 0.055$, una fase del campo medio inicial $\theta^1 = 0$, y una amplitud del campo medio que corresponde con el umbral de reconexión $\kappa^1 = \kappa_{\text{rec}} = 2a/3 = 0.0367$. La Fig. 3.3 sigue la evolución de los valores umbrales para la reconexión de separatrices como función de la iteración n . Para eliminar los efectos del tran-

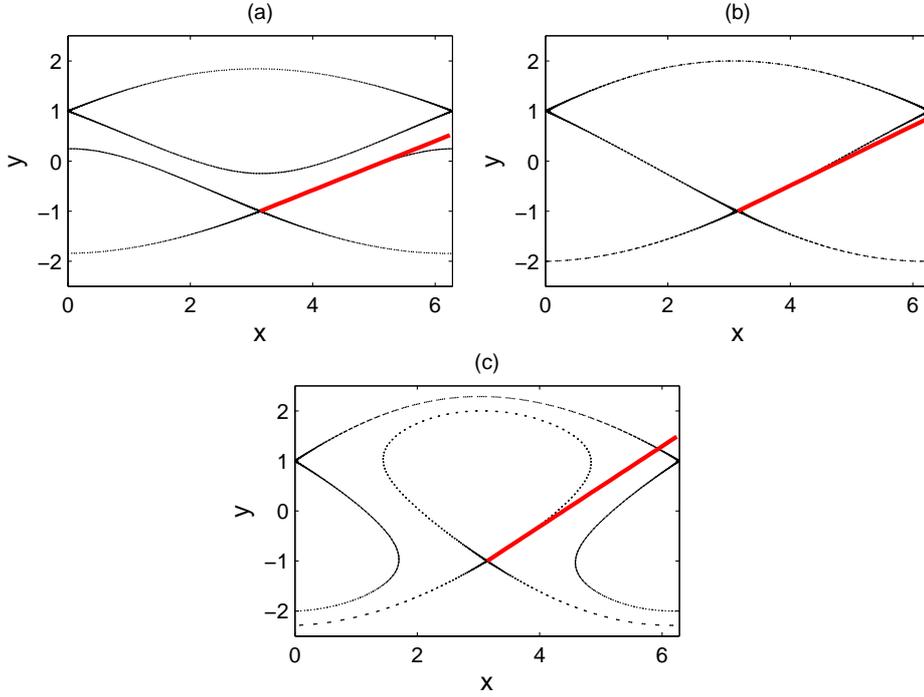


Figura 3.2: Método para determinar la reconexión de separatrices usando la estabilidad lineal. En el panel (a) se muestran las separatrices del mapeo estándar para los valores $a = 0.055$, $\kappa = 0.025$ y $\theta = 0$, lo mismo para los paneles (b) y (c) para los valores de $\kappa = \kappa_{\text{rec}} = 0.0367$ y $\kappa = 0.065$ respectivamente. En rojo se muestra el eigenvector correspondiente a la variedad inestable de los puntos fijos hiperbólicos. Cuando la pendiente del eigenvector, m_R , iguala a la pendiente de la recta que une a los dos puntos fijos hiperbólicos, $m = 2/\pi$, la reconexión ocurre (panel (b)).

sitorio, solo se muestran los datos para $n \geq n_0 = 2720$. El panel (a) muestra el valor instantáneo de κ^n con la línea horizontal discontinua denotando el umbral de reconexión κ_{rec} . Los puntos arriba (abajo) de esta línea corresponden a amplitudes del campo medio para los cuales la topología es homoclínica (heteroclínica), mientras que los cruces con esta línea corresponden a los estados de reconexión. La curva en el panel (b) de la Fig. 3.3 muestra el valor absoluto del valor de la pendiente del eigenvector de la variedad inestable del punto fijo hiperbólico como función de n . La línea horizontal discontinua denota la pendiente, $m_R = 2/\pi = 0.636$, de la línea que une los dos puntos hiperbólicos. De acuerdo al criterio del eigenvector, las intersecciones de la curva con la línea horizontal corresponden a los estados de reconexión. La comparación de los paneles (a) y (b) de esta figura indica que hay un acuerdo muy bueno entre los dos métodos. Este

resultado es particularmente importante, dado que provee un soporte adicional para la estimación simple del umbral de reconexión, $\kappa_{\text{rec}} = 2a/3$.

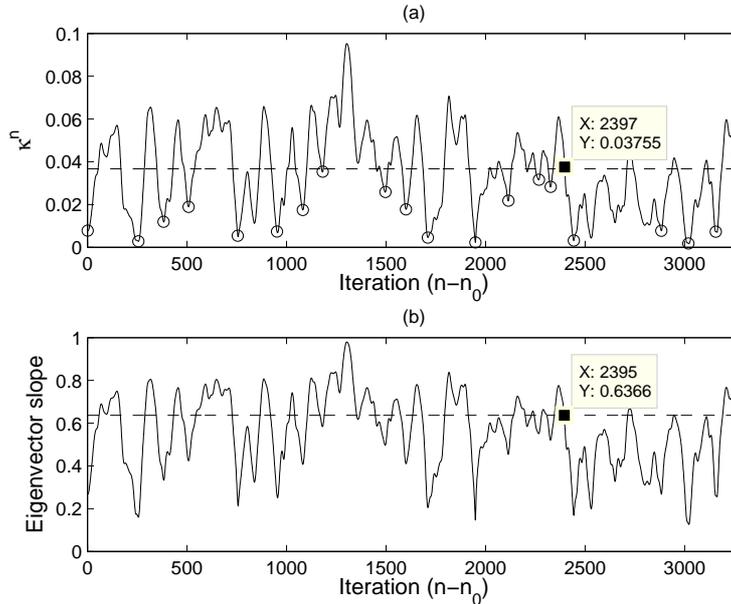


Figura 3.3: Reconexión dinámica de separatrices en el MNCM. El panel (a) muestra los valores instantáneos de la amplitud del campo medio, κ^n . La línea horizontal discontinua corresponde al umbral de reconexión $\kappa_{\text{rec}} = 2a/3 = 0.0367$. Los valores arriba (abajo) de esta línea corresponden a la topología homoclínica (heteroclínica). El panel (b) muestra el valor instantáneo del valor absoluto de la pendiente del eigenvector del punto fijo hiperbólico como función de n . Como en el caso mostrado en (a), los estados de reconexión están dados por las intersecciones con la línea horizontal discontinua, $m_R = 2/\pi = 0.636$. Los círculos denotan valores específicos de n usados en el estudio del transporte en las Figs. 3.5 y 3.6.

Para concluir este capítulo, discutiremos el papel de la reconexión de separatrices autoconsistente en el transporte. Como es bien conocido, en el mapeo estándar *nontwist*, el transporte a través de la curva sin cizalla únicamente puede ocurrir para valores de los parámetros para los cuales la curva sin cizalla se ha destruido debido al caos [16]. Sin embargo, en el MNCM, la reconexión dinámica autoconsistente puede producir transporte a través de la curva sin cizalla, aún cuando los valores de κ^n nunca alcanzan el umbral de destrucción de la curva sin cizalla. En la Fig. 3.5 se muestra la evidencia de este nuevo mecanismo de transporte debido a la reconexión dinámica autoconsistente. Los diferentes paneles en esta figura siguen la evolución de un conjunto de 5,000 partículas pasivas en el plano

(x, y) que están evolucionando bajo el MNCM que se usó en el estudio de la reconexión dinámica en la Fig. 3.3. En este cálculo es importante distinguir entre las partículas activas y pasivas. Las partículas activas son las que se usan para crear el campo medio. En este caso, estas últimas corresponden al ensamble de partículas uniformemente distribuidas en dos círculos de radio $r_0 = 1.5$ centrados en los puntos elípticos $(0, -1)$ y $(\pi, 1)$. Como se mostró anteriormente, la interacción autoconsistente de estas partículas da lugar a la variación de la amplitud del campo medio que se muestra en la Fig. 3.3-(a). En contraste, las partículas pasivas que se muestran en la Fig. 3.5 simplemente siguen la evolución en el plano (x, y) de un mapeo estándar *nontwist* de la forma de la Ec. (1.32) para el cual, a cada iteración n , los valores de κ y θ están dados por los valores instantáneos de κ^n y θ^n del MNCM mostrado en la Fig. 3.3-(a). Adicionalmente a la distribución de partículas pasivas, la Fig. 3.5 también muestra la localización instantánea de la curva sin cizalla y las separatrices de las resonancias de período uno.

El seguir la evolución de la curva sin cizalla es un problema sumamente complicado, el cual puede abordarse usando dos técnicas: aproximación con órbitas periódicas de orden superior [16] ó usando los llamados puntos indicadores del mapeo [21]. Debido a la relativa facilidad para localizar la curva sin cizalla usando los puntos indicadores del mapeo *nontwist* para los valores instantáneos de (a, κ^n, θ^n) , ésta es la técnica por la que se optó en este trabajo. Un punto indicador del mapeo *nontwist* es un punto en el espacio fase que pertenece a la curva sin cizalla cuando ésta existe. Dichos puntos indicadores se obtienen usando las simetrías del mapeo estándar *nontwist*, como se explica detalladamente en el Apéndice C.

Para el mapeo estándar *nontwist*, uno de los puntos indicadores está dado por (c.f. Ec. (A.19))

$$\mathbf{x}_{ind} = (\pi/2 + \theta^n, \kappa^n/2). \quad (3.2)$$

Esto significa que si para un instante dado n la curva sin cizalla existe, esta puede ser trazada para los valores de (a, κ^n, θ^n) iterando el mapeo estándar *nontwist* para la condición inicial de la Ec. (3.2).

Es de suma importancia hacer notar que para los valores que toma κ^n a lo largo de la evolución del MNCM, las regiones estocásticas debidas a la ruptura de curvas KAM se encuentran bien localizadas alrededor de las separatrices, ocupando un espacio muy pequeño en el espacio fase (x, y) (ver Fig. 3.4). Esto último en el caso no autoconsistente implicaría la existencia de curvas KAM que actuarían

como barreras para el transporte. En particular, κ^n , se mantiene muy por debajo del umbral de destrucción de la curva sin cizalla (ver Cap. 4.1). Sin embargo, para el caso autoconsistente existe transporte a través de la barrera central como se puede observar en la Fig. 3.5.

Debido a la existencia mínima de zonas estocásticas en el espacio fase (x, y) (ver Fig. 3.4), llamaremos a este tipo de transporte, generado únicamente al cambio de la topología y al *mixing* cerca de los puntos fijos, el transporte no caótico. Donde volvemos a remarcar que nos referimos al transporte que en esencia es diferente al transporte caótico producido por grandes zonas estocásticas en el espacio fase.

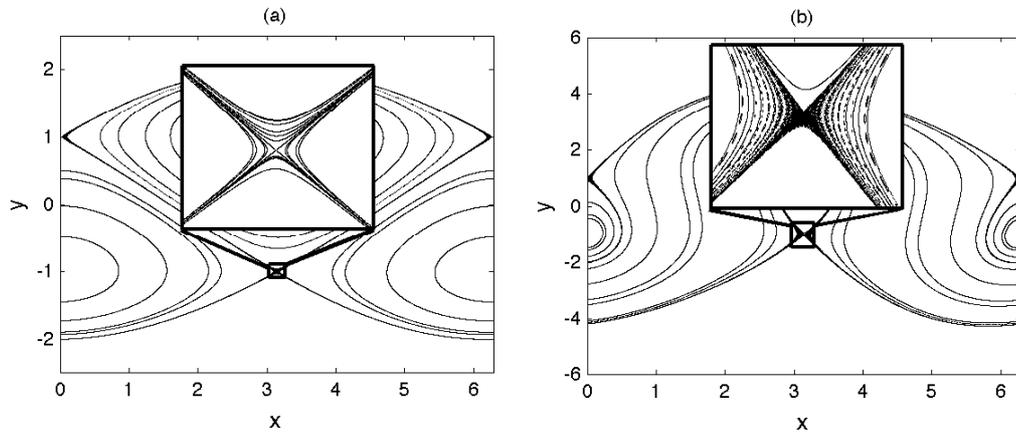


Figura 3.4: Posibles imágenes del espacio fase (x, y) para valores de κ^n que toma el sistema cerca del umbral de reconexión. En el panel (a) $\kappa = \kappa_{\text{rec}}$, la mayoría de las superficies KAM de la zona central existen, siendo imperceptibles las regiones estocásticas. En el panel (b) $\kappa = 0.4$, se puede observar una pequeña zona estocástica bien localizada alrededor de las separatrices de los puntos fijos del mapeo. En ambos casos el transporte difusivo es nulo para el caso del mapeo no autoconsistente, esto debido a la existencia de las superficies KAM que sirven de barreras para el transporte.

Como se puede ver en la Fig. 3.5, conforme las partículas pasivas son transportadas por la reconexión dinámica de separatrices a las cercanías de las separatrices, y por lo tanto a la vecindad de los puntos hiperbólicos, comienza un proceso que transporta a las partículas pasivas a través de la curva sin cizalla, homogeneizando a la distribución inicial de partículas pasivas a lo largo y ancho de la zona central.

Para cuantificar el transporte a través de la BTC se consideró el cociente, Λ , de

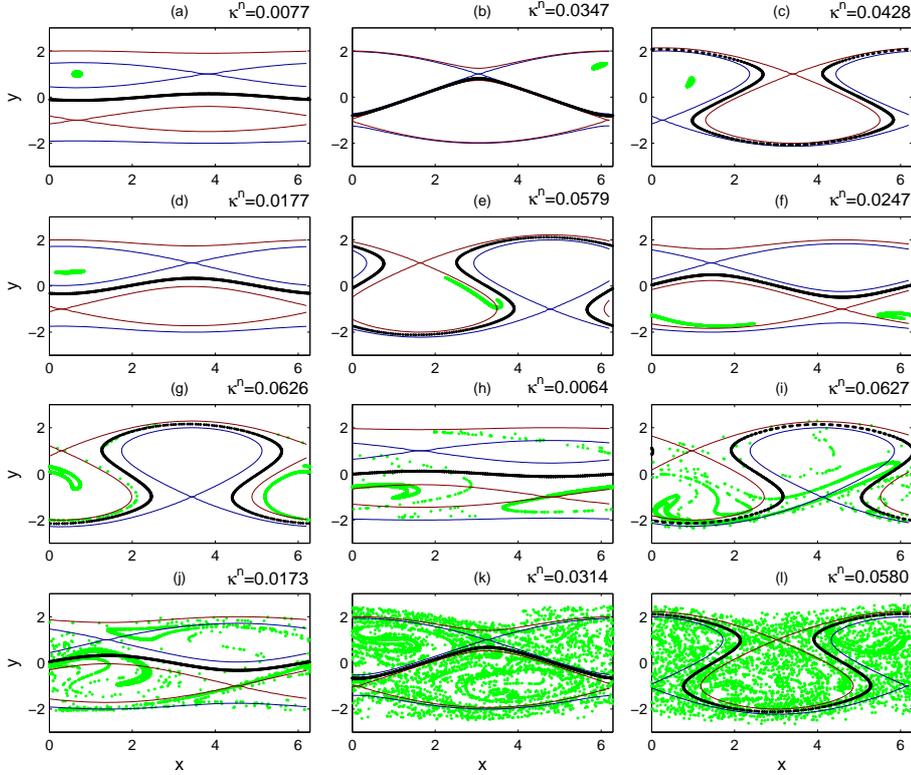


Figura 3.5: Transporte global no caótico debido a la reconexión dinámica de separatrices. Los paneles sucesivos siguen la evolución de un ensemble de partículas pasivas inicialmente localizado para $n - n_0 = 1, 50, 110, 194, 450, 498, 658, 760, 880, 940, 1480$ y 1664 . La reconexión de separatrices autoconsistente mostrada en la Fig. 3.3, en conjunto con el mezclado no caótico cerca de los puntos fijos hiperbólicos, homogeneiza a las partículas pasivas a través de BTC (curva negra). Para tener una referencia de la topología del espacio fase en cada instante, se muestran las separatrices instantáneas que se obtienen del Hamiltoniano efectivo de la Ec. (3.1).

el número de partículas arriba de la curva sin cizalla entre el número total de partículas. Para hacer este cálculo se usó el punto indicador de la Ec. (3.2) para seguir la evolución de la posición de la curva sin cizalla para cada iteración n .

La Fig. 3.6 muestra a Λ como función de n , donde, como en el caso del estudio de reconexión, se ha eliminado el efecto del transitorio. En perfecta concordancia con lo observado en la Fig. 3.5, se observa que en los primeros paneles de esta figura, la reconexión dinámica de separatrices transporta la distribución entera de partículas a través de la BCT, y el valor de Λ baja a cero. A tiempos más

largos, los efectos combinados de la reconexión de separatrices autoconsistente y el mezclado no caótico en los puntos fijos hiperbólicos que se mueven a lo largo del eje x homogeneizan la distribución de partículas a través de la BTC, y Λ alcanza el valor asintótico $\Lambda = 1/2$.

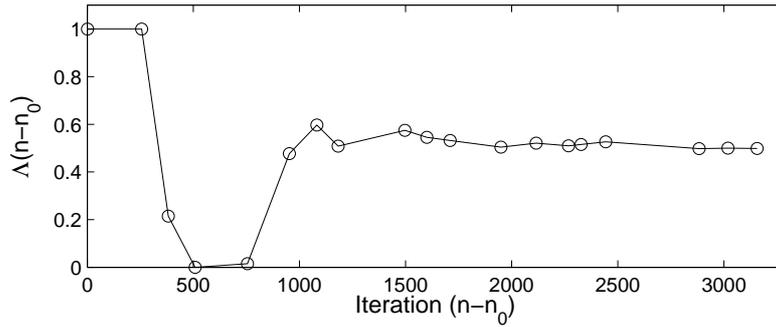


Figura 3.6: El cociente de partículas, Λ , que son transportadas a través de la BTC debido a la reconexión dinámica de separatrices. Consistente con la Fig. 3.5, la condición inicial de partículas pasivas localizada arriba de la curva cizalla es eventualmente homogeneizada a través de la BTC. El retardo n_0 es usado para eliminar el transitorio en el MNCM.

Capítulo 4

TRANSPORTE CAÓTICO AUTOCONSISTENTE

Además del régimen trivial totalmente integrable, en donde todas las curvas invariantes existen, uno puede distinguir dos regímenes no integrables en sistemas *nontwist*: caos en bandas y caos global [10]. El régimen de caos en bandas se caracteriza por la existencia de barreras de transporte central rodeadas por bandas de regiones caóticas en ambos lados. Por el otro lado, el caos global está caracterizado por la destrucción de todas las BTC y la existencia de transporte caótico en todo el espacio fase.

Para el caso del mapeo estándar *nontwist*, estos regímenes, los cuales están únicamente determinados por los valores de a y κ , han sido estudiados en la literatura con gran detalle [16, 21]. Sin embargo, como en el caso de la reconexión de separatrices, el acoplamiento autoconsistente en el MNCM produce nuevos fenómenos dinámicos.

Una vez más, la naturaleza del acoplamiento de las partículas con el campo medio simplifica el estudio analítico y numérico para un número arbitrariamente grande de grados de libertad. En particular, se ha visto que para todos los grados de libertad se tiene la misma topología en los planos (x_j, y_j) ; por lo tanto, diremos que el MNCM en el instante n exhibe caos en bandas (global), si el mapeo estándar *nontwist* en el plano (x, y) con $\kappa = \kappa^n$ exhibe caos en bandas (global). Sin embargo, debido al acoplamiento con el campo medio que se tiene en el MNCM, la amplitud del campo medio evoluciona en función de n y por lo tanto pueden ocurrir transiciones entre los diferentes regímenes de transporte.

En este capítulo nos enfocaremos en el estudio de los siguientes tres escenarios de transporte, los cuales exhiben transiciones entre los diferentes regímenes mencionados anteriormente debido a la evolución autoconsistente de la amplitud del campo medio: (i) Supresión autoconsistente de difusión; (ii) Destrucción autoconsistente de la BTC; y (iii) Transporte intermitente cerca de la criticalidad.

4.1. Supresión de difusión

Como un caso de estudio de la transición autoconsistente entre un estado de caos global y uno de caos acotado y una eventual integrabilidad total en el espacio fase, se considerará un problema en el cual $\kappa^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, con κ^1 correspondiendo al valor de κ para la transición hacia el caos global del mapeo *nontwist*, el cual es derivado en la ref. ([16]). En este caso, el transporte que se esperaba en el régimen caótico es suprimido al mismo tiempo que las superficies KAM se forman nuevamente mientras el sistema se aproxima a la integrabilidad total.

Para estudiar el transporte difusivo del sistema para este caso, se considerará una condición inicial que consiste de $N = 6 \times 10^3$ partículas con $\gamma_k = 10^{-6}$, y $N = 6 \times 10^3$ partículas con $\gamma_k = -10^{-6}$. Las partículas con $\gamma_k > 0$ ($\gamma_k < 0$) se distribuyen uniformemente a lo largo de la dirección del eje x y tienen una distribución Gaussiana a lo largo de la dirección del eje y con desviación estándar igual a 0.25 y media $\overline{y_k} = 10$ ($\overline{y_k} = -10$). Como los estados iniciales de interés son aquellos que se encuentran en el umbral hacia el caos global, se toma $a = a_\gamma$, $\kappa^1 = \kappa_\gamma$, y $\theta^1 = 0$, donde $(a_\gamma, \kappa_\gamma) = (4.31062700354, 0.742493131039)$ son los valores del umbral para la transición hacia el caos global en el mapeo estándar *nontwist* cuando el número de rotación de la curva sin cizalla corresponde al inverso de la media áurea, $1/\gamma$ [16].

La supresión de difusión¹ autoconsistente en el MNCM para condiciones iniciales y valores de los parámetros anteriores es evidente en la evolución temporal del segundo momento estadístico del desplazamiento de las partículas con $\gamma_k > 0$,

$$\langle (\Delta y)^2 \rangle (n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k^n - y_k^1)^2, \quad (4.1)$$

¹La supresión de difusión se refiere a la formación de curvas KAM que actúan como barreras de transporte, lo cual da como resultado la no existencia del transporte difusivo a través de ellas.

donde el promedio en $\langle(\Delta y)^2\rangle$, se refiere al promedio sobre el ensamble de partículas.

En particular, como se muestra en la Fig. 4.1, $\langle(\Delta y)^2\rangle$, muestra un crecimiento inicial seguido por una saturación exponencial para valores de n grandes, esto como resultado de la supresión de difusión.

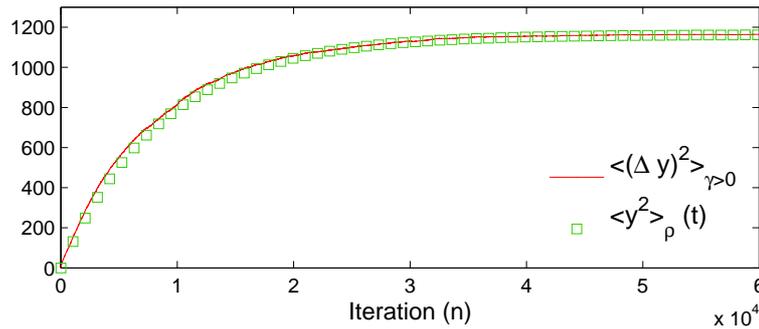


Figura 4.1: Segundo momento estadístico del desplazamiento de las partículas durante la supresión de difusión autoconsistente en el MNCM. La línea continua representa el segundo momento estadístico del desplazamiento de las partículas de la Ec. (4.1). Los cuadros representan el segundo momento de la PDF, ρ , de las partículas con $\gamma > 0$ en el modelo de transporte cuasi-lineal efectivo de acuerdo a la Ec. (4.13).

El decaimiento autoconsistente de la amplitud del campo medio correspondiente, κ^n , se muestra en escala logarítmica en el panel (a) de la Fig. 4.2, junto con la evolución de la fase del campo medio, θ^n , en el panel (b). La evolución espacio-temporal de la función de densidad de probabilidad de las partículas (PDF) a lo largo de y , promediada sobre x , se muestra en la Fig. 4.3. Sólo se muestra la PDF para las partículas con $\gamma_k > 0$, esto es, $\rho_{\gamma>0}$. Por la simetría del sistema, la función de densidad para las partículas con $\gamma_k < 0$ es $\rho_{\gamma<0}(y, t) = \rho_{\gamma>0}(-y, t)$.

En acuerdo con el hecho de que el valor de κ^n decrece por debajo el valor crítico para la transición al caos global, la PDF exhibe una barrera de transporte alrededor de $y = 0$, esto es la BTC. También, consistente con la saturación asintótica del segundo momento estadístico de los desplazamientos para n grande, la distribución de partículas, $\rho_{\gamma>0}$, exhibe una relajación hacia un estado estacionario el cual se muestra en la Fig. 4.3-(d).

La teoría cuasi-lineal o también llamada la teoría de fases aleatorias, cuando funciona, brinda una descripción simple y atractiva para describir el transporte

4.1. Supresión de difusión

en sistemas caóticos [4]. En particular, en el caso de los mapeos simplécticos de la forma de la Ec. (1.4), la difusividad cuasi-lineal,

$$D_{QL} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} g^2(x) dx, \quad (4.2)$$

da lugar a un modelo aproximado de bajo orden para describir el transporte difusivo a lo largo de la dirección y . La aproximación cuasi-lineal asume que en el régimen caótico existe una distribución uniforme de las partículas a lo largo de la dirección x para todo instante de tiempo². Cabe mencionar que si las variables (x_j, y_j) del mapeo son interpretadas como las variables de ángulo y acción de algún sistema Hamiltoniano, la aproximación cuasi-lineal es conocida como la aproximación de fases aleatorias, dada la distribución aleatoria de las fases que genera la distribución uniforme de las variables angulares (x_j) para cada instante de tiempo [4].

Para el caso de los modelos de campo medio, una aplicación directa de la teoría cuasi-lineal para la Ec. (1.34) da como resultado la difusividad cuasi-lineal auto-consistente

$$D_{QL}^n = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\kappa^n \sin(x^n - \theta^n))^2 dx = \frac{(\kappa^n)^2}{4}, \quad (4.3)$$

donde, por la hipótesis cuasi-lineal de la distribución uniforme de partículas a lo largo del eje x , $\eta^n \approx 0$ y por lo tanto $\kappa^{n+1} \approx \kappa^n$.

Aunque no hay una razón *a priori* para justificarlo, como se verá mas adelante, esta difusividad cuasi-lineal dependiente del tiempo proporciona un buen modelo para describir la supresión de difusión en el MNCM. Como primer paso para mostrar esto, se debe notar que, de acuerdo a la Fig. 4.2-(a), la dinámica de κ^n se ajusta bien como un decaimiento exponencial de la forma

$$\kappa^n = \kappa_0 e^{-n\nu}, \quad (4.4)$$

el cual de acuerdo a la Ec. (4.3) implica que

²Esta hipótesis implica que los tiempos de correlación de cada partícula son muy pequeños, esto por considerar que el sistema está en el régimen caótico.

$$D_{QL}^n = \frac{\kappa_0^2}{4} e^{-2n\nu}. \quad (4.5)$$

Motivados por esto, se propone la ecuación de difusión con coeficiente de difusión dependiente del tiempo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D_{QL}(t) \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}, \quad (4.6)$$

como un modelo efectivo para describir la evolución espacio-temporal de la PDF de las partículas, ρ , donde, por simplicidad se ha omitido el subíndice “ $\gamma > 0$ ”; para este modelo el coeficiente difusivo dependiente del tiempo

$$D_{QL}(t) = \frac{\kappa_0^2}{4} e^{-2t\nu}, \quad (4.7)$$

corresponde al límite continuo en el tiempo de la difusividad cuasi-lineal, D_{QL}^n , de la Ec. (4.5).

Para comprobar la validez del modelo cuasi-lineal para describir la supresión de difusión que se observa en el MNM, se resuelven las Ecs. (4.6) y (4.7) en el intervalo semi-infinito, $y \in (0, \infty)$. Debido a que la BTC se forma relativamente rápido y se mantiene formada para todo $t > 0$, el flujo de partículas a través de ella es prácticamente cero. Por lo tanto, aunque la BTC no está exactamente localizada en $y = 0$, imponemos condiciones de frontera de Neumann de que el flujo es igual a cero en este punto:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (4.8)$$

Para resolver la Ec. (4.6), primero realizamos el cambio de variable,

$$\tau(t) = \int_0^t D_{QL}(t') dt' = \frac{\kappa_0^2}{8\nu} [1 - e^{-2\nu t}], \quad (4.9)$$

con lo cual transformamos la Ec. (4.6) en la ecuación de difusión simple

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}. \quad (4.10)$$

4.1. Supresión de difusión

En la Fig. 4.3 se muestra la buena correspondencia que hay entre el resultado del MNCM y la solución de la ecuación de difusión de la Ec. (4.10) con $\tau = \tau(t)$ dada por la Ec. (4.9). Esto da soporte a la validez del modelo cuasi-lineal que se ha propuesto.

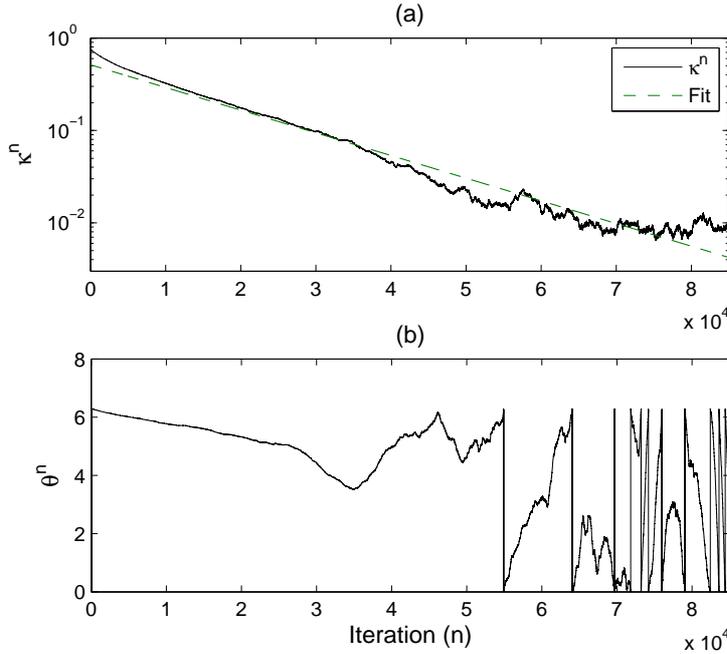


Figura 4.2: Evolución del campo medio durante la supresión de difusión autoconsistente del MNCM. El panel (a) muestra el decaimiento de κ^n en escala log-normal. La línea discontinua corresponde al ajuste exponencial de la Ec. (4.4) con $\kappa_0 = 0.5162$ y $\nu = -5.7274 \times 10^{-5}$. En el panel (b) se muestra la evolución de la fase θ^n la cual muestra fluctuaciones aleatorias a tiempos intermedios y largos, debido a esto la aproximación cuasi-lineal sigue dando buenos resultados cuando el sistema tiende al límite integrable.

Usando las Ecs. (4.10) y (4.9) se puede calcular la evolución temporal del segundo momento estadístico de la PDF del modelo cuasi-lineal, $\langle y^2 \rangle_\rho$, como sigue:

$$\frac{d\langle y^2 \rangle_\rho}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty y^2 \rho dy = \int_0^\infty y^2 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dy = 2, \quad (4.11)$$

donde se ha usado integración por partes en el la última igualdad. De este resultado se obtiene la evolución temporal de $\langle y^2 \rangle_\rho$,

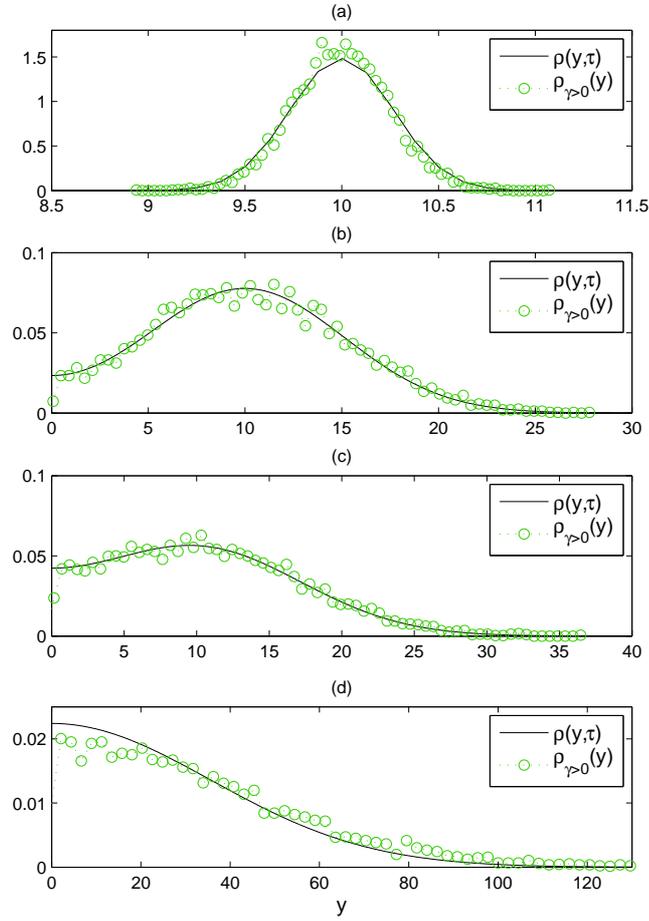


Figura 4.3: Evolución espacio-temporal de la función de densidad de probabilidad de las partículas con $\gamma > 0$ durante la supresión de difusión autoconsistente. Los círculos denotan las PDFs obtenidas de los histogramas del ensamble de partículas del MNCM. La línea continua muestra la solución analítica del modelo efectivo de las Ecs. (4.6) and (4.7). Los paneles (a), (b), (c) y (d) corresponden a $n = 1, 100, 200$ y 49900 respectivamente.

$$\langle y^2 \rangle_\rho(t) = 2\tau(t), \quad (4.12)$$

que para el caso particular de la Ec. (4.9) se expresa como

$$\langle y^2 \rangle_\rho(t) = 2 \frac{\kappa_0^2}{8\nu} [1 - e^{-2\nu t}]. \quad (4.13)$$

4.2. Transición al caos global

Como una prueba adicional al modelo cuasi-lineal, en la Fig. 4.1 se compara la Ec. (4.13) con la evolución temporal del segundo momento estadístico en la Ec. (4.1) que se obtiene del promedio sobre el ensamble de partículas que forman al MNCM, viéndose que el acuerdo entre la teoría y los resultados numéricos es muy bueno.

Una prueba alternativa que permite recobrar los resultados del modelo cuasi-lineal consiste en considerar la misma condición inicial usada en el estudio de supresión de difusión anterior, pero para diferentes valores iniciales de la amplitud del campo medio, κ^1 . Para cada κ^1 , se iteró \mathcal{T} veces el MNCM y se calculó el promedio temporal de la amplitud del campo medio, $\bar{\kappa}$, y de la difusividad, \bar{D} ,

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{n=1}^{\mathcal{T}} \kappa^n, \quad \bar{D} = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{n=1}^{\mathcal{T}} D^n. \quad (4.14)$$

Para cada iteración n , la difusividad instantánea, D^n , fue calculada de la estadística de los desplazamientos de un ensamble de 1×10^4 partículas iteradas 1.5×10^4 veces con el mapeo estándar *nontwist* con los valores de $\kappa = \kappa^n$ y $\theta = \theta^n$. Para cada κ^1 , el valor de \mathcal{T} fue escogido adecuadamente para garantizar la convergencia del MNCM hacia un estado estacionario. Estos valores van de $\mathcal{T} = 2 \times 10^4$ para $\kappa^1 = 0.2$, a $\mathcal{T} = 1.1 \times 10^5$ para $\kappa^1 = 0.87$. Los grandes valores de \mathcal{T} requirieron el cálculo de un gran número de coeficientes difusivos instantáneos, D^n , cada uno requiriendo a su vez un número muy grande de iteraciones del mapeo *nontwist* para diferentes condiciones iniciales. Para llevar a cabo este cálculo en un tiempo razonable, se usaron Unidades de Procesamiento Gráfico (también llamadas GPUs, por sus siglas en inglés), los cuales son un recurso computacional poderoso para el computo científico. Para el uso de las GPUs se programó un código en lenguaje C usando la extensión CUDA. Los resultados del cálculo de \bar{D} se muestran con círculos en la Fig. 4.4, donde los valores crecientes de $\bar{\kappa}$, corresponden a $\kappa^1 = \{0.2, 0.5, 0.8, 0.87, 0.95, 1, 1.1, 1.3, 1.5\}$, y la línea continua representa la predicción cuasi-lineal de la difusividad, $D_{QL} = \bar{\kappa}^2/4$.

4.2. Transición al caos global

En esta sección se estudia el transporte para el caso en el que el acoplamiento autoconsistente lleva al sistema de un estado de caos en bandas, en el cual existe

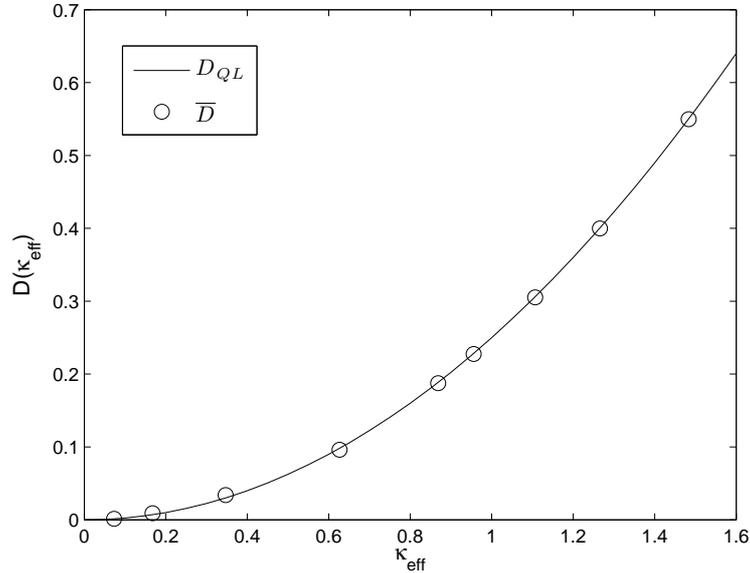


Figura 4.4: La difusividad promediada en el tiempo, \overline{D} , como función de la amplitud del campo medio promediada en el tiempo, $\overline{\kappa}$, de la Ec. (4.14). Los círculos representan los resultados numéricos obtenidos de condiciones iniciales del MNCM para diferentes valores de κ^1 . La línea continua corresponde a la relación cuasi-lineal $D_{QL} = \overline{\kappa}^2/4$.

una BTC robusta, hacia un estado de caos global en el cual la BTC ha sido destruida.

La condición inicial consiste de un ensamble de $N = 1.2 \times 10^4$ partículas con $\gamma_k = 10^{-6}$, distribuidas uniformemente a lo largo del eje x , y con una distribución Gaussiana a lo largo del eje y con media, $\overline{y} = -150$, y desviación estándar igual a 0.5. Para el valor del parámetro a se tomó el valor crítico, $a = a_\gamma = 4.31062700354$, para la destrucción de la curva sin cizalla con número de rotación igual al inverso de la media áurea, $1/\gamma$. Para la fase y amplitud inicial del campo medio se tomaron los valores, $\theta^1 = 0$ y $\kappa^1 = 0.7$, con el valor de κ^1 ligeramente por debajo del valor crítico $\kappa_\gamma = 0.742493131039$.

La transición autoconsistente hacia el caos global se observa en la Fig. 4.5, en donde se muestra la evolución de la amplitud del campo medio, κ^n , y la fase θ^n . En particular, como se indica con la línea vertical discontinua, alrededor de $n = 28800$, κ^n cruza el valor umbral para la destrucción de la curva sin cizalla que forma la BTC. Como se puede ver de la Fig. 4.8, esta transición se manifiesta como un cambio en la tasa de crecimiento lineal del segundo momento estadístico

4.2. Transición al caos global

de los desplazamientos de las partículas de la Ec. (4.1).

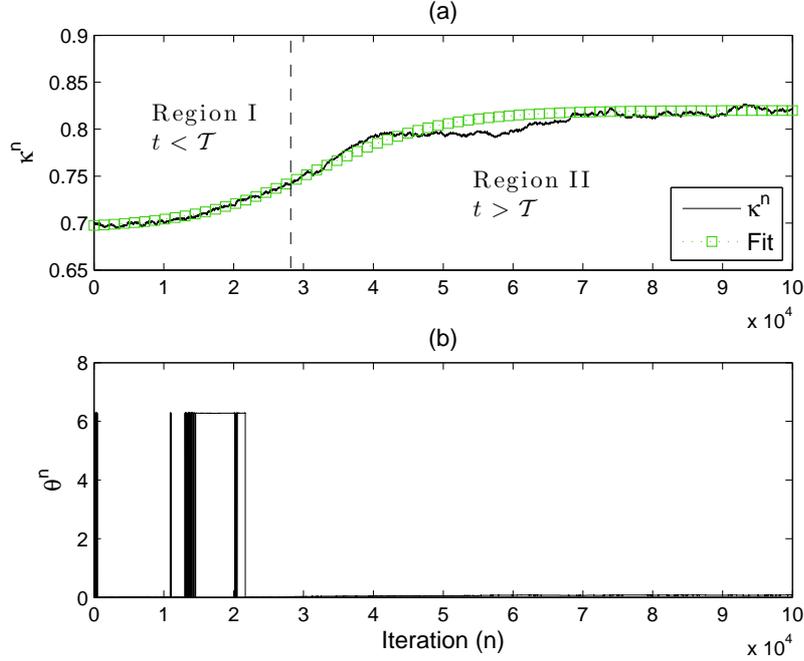


Figura 4.5: Evolución del campo medio durante la transición autoconsistente hacia el caos global en el MNCM. La línea continua en el panel (a) muestra el crecimiento y saturación de κ^n . Los cuadrados corresponden al ajuste de la Ec. (4.15), con $K = 0.757$, $\alpha = 0.063$, $\mu = 3.2 \times 10^4$ y $\beta = 1.8 \times 10^4$. La línea vertical a trazos denota la transición hacia el caos global en el espacio fase debido a la destrucción de la BTC. El panel (b) muestra la evolución de la fase, θ^n , la cual no varía considerablemente, permaneciendo alrededor del valor inicial $\theta^n = 0$.

Siguiendo el mismo procedimiento que en la sección anterior, se usa una descripción cuasi-lineal para modelar el transporte en el espacio fase. Para este caso, como se muestra en la Fig. 4.5, la evolución de la amplitud del campo medio se ajusta bien por la función

$$\kappa^n = K + \alpha \tanh\left(\frac{n - \mu}{\beta}\right), \quad (4.15)$$

con $K = 0.757$, $\alpha = 0.063$, $\mu = 3.2 \times 10^4$ y $\beta = 1.8 \times 10^4$, lo que se muestra con los símbolos cuadrados.

Para esta κ^n , la prescripción cuasi-lineal de la Ec. (4.3) da como resultado la

difusividad

$$D_{QL}(t) = \frac{1}{4} \left[K + \alpha \tanh \left(\frac{t - \mu}{\beta} \right) \right]^2. \quad (4.16)$$

Como antes, el cambio de variable $\tau(t) = \int_{t_0}^t D_{QL}(t') dt'$ reduce el problema inicial a encontrar la solución de la ecuación de difusión en la Ec. (4.10).

Para tomar en cuenta la destrucción dinámica de la BTC, hemos dividido la solución de la ecuación de difusión (4.10) en dos partes. Como se mencionó antes, cuando $0 \leq t \leq \mathcal{T}$, donde $\mathcal{T} \approx 2.88 \times 10^4$, existe una BTC robusta. Por lo tanto, en este intervalo de tiempo la ecuación de difusión se resuelve en el dominio semi-infinito, $y \in (-\infty, 0)$, con condiciones de Neumann para el flujo nulo en la frontera dadas por la Ec. (4.8). Fuera de este intervalo, *i. e.*, para $t > \mathcal{T}$, existe caos global en el espacio fase y la ecuación de difusión se resuelve en el dominio $y \in (-\infty, \infty)$. El acoplamiento de las dos soluciones se logra usando la solución del primer problema para $t = \mathcal{T}$ como condición inicial del segundo problema. Las Fig. 4.6 y 4.7, muestran un excelente acuerdo entre los resultados numéricos obtenidos con el MNCM y las soluciones del primer y segundo problema respectivamente. Una prueba adicional para el modelo cuasi-lineal de difusión la da la comparación de la evolución del segundo momento estadístico del desplazamiento de las partículas, con la que resulta del MNCN, mostrada en la Fig. 4.8. El modelo efectivo de difusión reproduce bien la transición de la tasa de cambio del crecimiento del segundo momento estadístico al ir entre el régimen de caos en bandas al régimen de caos global. Como se puede observar, existe una pequeña diferencia entre el modelo teórico y los resultados numéricos; sin embargo, como se discutirá en la siguiente sección, cerca del punto de transición las fluctuaciones de κ^n alrededor del valor crítico, κ_γ , dan lugar a la destrucción y formación intermitente de la BTC. Esta intermitencia crea una barrera central “semi-permeable” alrededor de $y = 0$ que no es capturada por el modelo de difusión cuasi-lineal.

4.3. Transporte intermitente cerca de la criticalidad

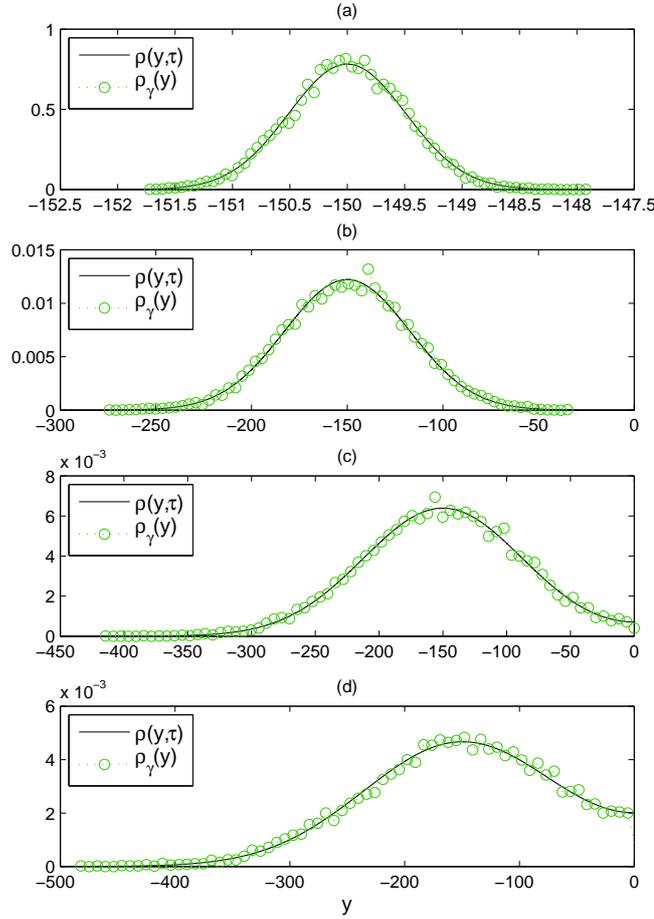


Figura 4.6: Evolución espacio-temporal de la función de densidad de probabilidad antes de la transición al caos global marcada por la línea vertical discontinua en la Fig. 4.5. Los círculos denotan las PDFs obtenidas de los histogramas del ensamble de partículas del MNCM. La línea continua muestra la solución analítica del modelo efectivo de las Ecs. (4.6) y (4.16), con condiciones a la frontera dadas por la ecuación Ec. (4.8). Los paneles (a), (b), (c) y (d) corresponden a $n = 1, 4380, 15780$ y 28800 respectivamente. Los tiempos posteriores, después de la transición al caos global, se muestran en la Fig. 4.7.

4.3. Transporte intermitente cerca de la criticalidad

En el estudio de la transición autoconsistente hacia el caos global presentado en la sección anterior, se observó que cerca del punto crítico, i.e. para valores de n

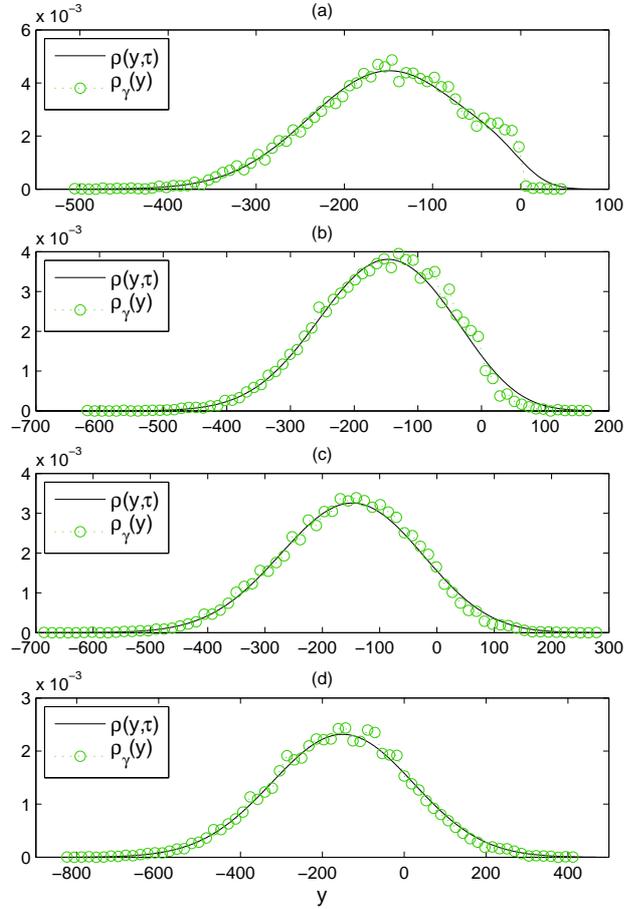


Figura 4.7: Como en la Fig. 4.6, pero para tiempos posteriores a la transición hacia el caos global donde la Ec. (4.6) se resuelve en el dominio $(-\infty, \infty)$. Los paneles (a), (b), (c) y (d) corresponden a $n = 31380$, 42200 , 55300 y 99780 respectivamente.

para los cuales $\kappa^n \approx \kappa_\gamma$, el transporte a través de la BTC se desvía ligeramente de las predicciones del modelo cuasi-lineal. En particular, como una consecuencia de la destrucción y reaparición intermitente de la curva sin cizalla $1/\gamma$, la región alrededor de $y = 0$ actúa como una barrera semi-permeable no difusiva, la cual se manifiesta en la transición de la razón de cambio del segundo momento estadístico, como una pequeña desviación entre los resultados del MNCM y del modelo cuasi-lineal en la Fig. 4.8.

Para estudiar con mayor detalle el transporte cerca del régimen de criticalidad, se considera el MNCM para las mismas condiciones iniciales usadas en el estudio de

4.3. Transporte intermitente cerca de la criticalidad

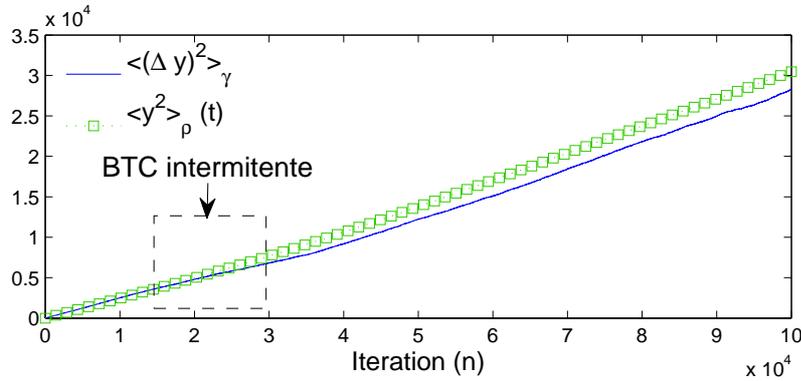


Figura 4.8: Segundo momento estadístico del desplazamiento de las partículas durante la transición autoconsistente hacia el caos global en el MNCM. La línea continua representa el segundo momento estadístico del ensamble de partículas de la Ec. (4.1). Los cuadros representan el segundo momento de la PDF, ρ , del modelo de transporte cuasi-lineal. El rectángulo marcado con la línea discontinua indica la zona de la transición hacia el caos global, producto de la destrucción de la barrera de transporte central.

la sección anterior de la transición hacia el caos global. Para cada valor de κ^n en el intervalo $n \in (1, 30000)$ se determinó la existencia de la curva sin cizalla usando el método de los puntos indicadores, explicado al presentar la Ec. (3.2). El resultado de este cálculo se muestra en la gráfica binaria de la Fig. 4.9, donde las barras (espacios en blanco) representan los valores de los parámetros para los cuales la curva sin cizalla existe (es destruida). De examinar cualitativamente la gráfica podemos intuir que estamos ante un comportamiento autosimilar del sistema. Esto se ve más claro cuando se hacen acercamientos sucesivos de cualquier parte de la gráfica, como se muestra en los paneles (b), (c) y (d). Lo que aparentemente se ve como una barra sólida a una escala exhibe un patrón intrincado de barras que están entrelazadas con espacios en blanco a escalas más finas, lo que nos trae a la mente de forma inmediata a los conjuntos de Cantor.

Sin embargo, aunque el gráfico binario de la Fig. 4.9 exhibe una posible estructura autosimilar, su dimensión fractal, calculada con el método de conteo de cajas, es igual a uno (ver Fig. 4.10). Dado este resultado, el conjunto autosimilar más bien se parece a un conjunto de Cantor grueso que a un conjunto de Cantor normal. Un conjunto de Cantor normal es obtenido borrando sucesivamente el tercio central de cada segmento, y tiene dimensión fractal igual a $\log 2 / \log 3$. Por otro lado, el conjunto que se obtiene de borrar el tercio central en la primera iteración, luego borrando el noveno central en la segunda iteración, y luego borrando la $1/27$

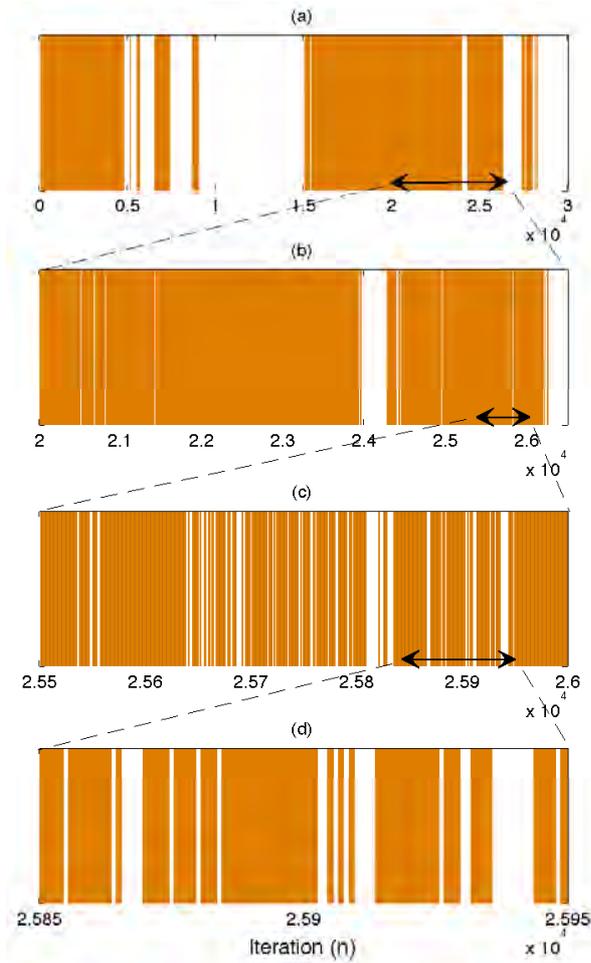


Figura 4.9: Gráfica binaria autosimilar mostrando la transición dinámica hacia el caos global en el MNCM cerca de la criticalidad. Las regiones oscuras (blancas) representan los intervalos de tiempo para los cuales la BTC existe (no existe). Los acercamientos sucesivos en los paneles (b), (c) y (d) revelan una estructura parecida a un conjunto de Cantor que corresponde a un *fractal grueso* con exponente de escalamiento $\beta = 0.6597$ (ver Fig. 4.11).

fracción central del segmento a la tercera iteración, y así consecutivamente, es un conjunto de Cantor grueso con dimensión fractal igual a uno [22].

Como en el caso de los conjuntos de Cantor gruesos, la dimensión fractal, siendo un entero, no caracteriza a las propiedades de escalamiento autosimilar de la Fig. 4.9. Como una alternativa, se considera la caracterización de los fractales grueso propuesta en la ref. [23]. Para una escala de resolución dada, ϵ , conside-

4.3. Transporte intermitente cerca de la criticalidad

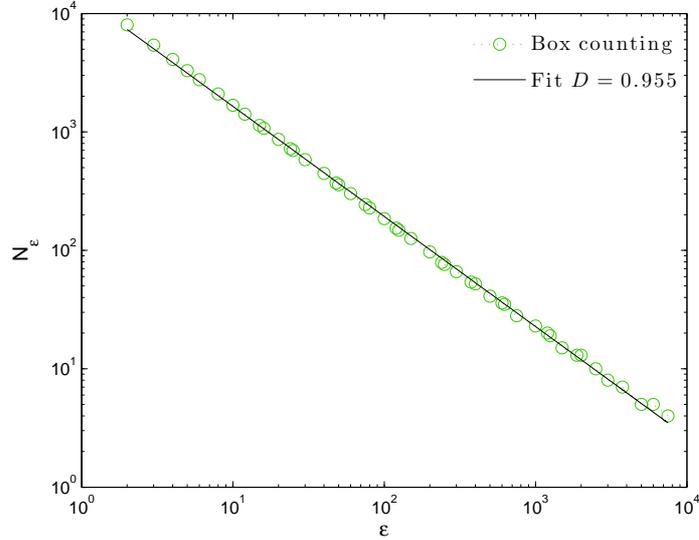


Figura 4.10: Cálculo de la dimensión fractal de la Fig. 4.9 usando el método de conteo de cajas (en escala logarítmica). La dimensión fractal, D , es definida como $N_\epsilon = \epsilon^{-D}$, donde N_ϵ es el número de cajas de dimensión ϵ necesarias para cubrir al objeto en cuestión. El conteo de cajas arroja una dimensión de $D = 0.955$, la cual es prácticamente entera e igual a 1, por lo tanto no es posible afirmar que se está ante un objeto fractal ordinario.

ramos la medida con grano de resolución ϵ ,

$$\mu(\epsilon) = 1 - h(\epsilon), \quad (4.17)$$

donde $h(\epsilon)$ es el tamaño total de los espacios en blanco en la Fig. 4.9 cuyo ancho es mayor o igual a ϵ . En la Fig. 4.11 se muestra una gráfica de $\Delta\mu = \mu(\epsilon) - \mu(0)$ como función de ϵ . Para ser consistentes con el método de la ref. [23], el tiempo fue reescalado al intervalo $[0, 1]$. En concordancia con la conjetura que se hace en esta misma referencia, para nuestro caso existe un escalamiento algebraico de la forma

$$\mu(\epsilon) = \mu(0) + A\epsilon^\beta, \quad (4.18)$$

con los parámetros del ajuste $A \sim 1$, $\mu(0) = 0.2872$, y $\beta = 0.6597$.

El exponente β , conocido como el exponente de grosor, es el parámetro clave para

caracterizar las propiedades autosimilares del conjunto. Para conjuntos que no son fractales este número diverge, $\beta \rightarrow \infty$, mientras que para conjuntos fractales se relaciona con la dimensión fractal, d , de acuerdo a la relación, $\beta = D - d$, donde D es la dimensión Euclidea del espacio de anidado. Sin embargo, para el caso de los fractales gruesos β es independiente de d y describe el escalamiento del tamaño de las brechas con respecto a la resolución [23]. Esto último hace posible usar la cantidad $\Delta\mu = \mu(\epsilon) - \mu(0)$ como una medida de la probabilidad de no encontrar formada a la BTC a lo largo de la evolución del sistema cerca de la criticalidad. Por ejemplo, considérese al sistema en algún estado cerca de la criticalidad con los valores de los parámetros y distribución de las partículas como los considerados en las Figs. 4.8 y 4.9. La Ec. (4.18) nos dice que la probabilidad de que el sistema evolucione en una iteración, la cual equivale a $\epsilon = 7.58 \times 10^{-5}$ por construcción, de un estado donde la BTC está formada (representado por una barra de color) hacia un estado donde se ha roto la BTC (representado por una brecha) está dada por:

$$\Delta\mu = A\epsilon^\beta = (1)(7.58 \times 10^{-5})^{0.6597} \approx 0.002, \quad (4.19)$$

es decir, la probabilidad de que el sistema evolucione en una iteración hacia un estado donde la BTC no está formada es 0.002. Este resultado está en acuerdo con lo observado en las simulaciones numéricas en las cuales existe una barrera de transporte central efectiva, la cual sólo deja pasar una cantidad mínima de partículas a través de ella.

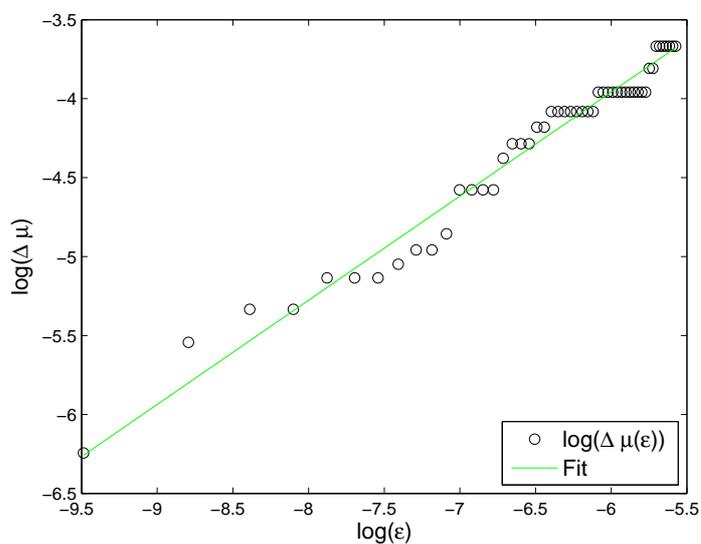


Figura 4.11: Escalamiento algebraico del tamaño de las brechas en función de la escala de la resolución durante el transporte intermitente en el régimen de criticalidad en el MNM. Los círculos representan los datos de la gráfica binaria de la Fig. (4.9). La línea continua es el ajuste al decaimiento algebraico de la Ec. (4.18) con $A \sim 1$, $\mu(0) = 0.2872$ y $\beta = 0.6597$.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Como un primer paso para ir más allá del mapeo simpléctico *nontwist* relativamente bien estudiado, se propuso y estudió el mapeo *nontwist* de campo medio N dimensional. En este modelo, los N grados de libertad del sistema interactúan a través de un campo medio autoconsistente. El tipo de acoplamiento de campo medio es motivado por el acoplamiento usado en el *modelo de una sola onda* el cual es un modelo Hamiltoniano de campo medio que describe la dinámica no lineal débil de plasmas y fluidos marginalmente estables.

Un problema de interés en sistemas con muchos grados de libertad es la formación de estructuras coherentes. Basados en las propiedades de estabilidad lineal de las órbitas periódicas de orden uno y dos, se desarrolló un método numérico para construir estados coherentes en el MNCM. La coherencia de estos estados se mantiene por el confinamiento autoconsistente de las partículas en las resonancias de los puntos fijos estables del mapeo.

Una de las características principales de los sistemas *nontwist* es la reconexión de separatrices, la cual es una bifurcación global que resulta de las diferentes formas topológicas en las cuales las variedades estable e inestable de los puntos fijos se conectan. En el MNCM el acoplamiento de campo medio da lugar a la reconexión de separatrices autoconsistente. Se mostró que la evolución dinámica del espacio fase causada por la reconexión de separatrices autoconsistente puede producir transporte a través de la barrera de transporte central aún en la ausencia de caos. Es importante mencionar que este nuevo mecanismo de transporte es fundamentalmente diferente al transporte caótico que ocurre cuando las curvas KAM se rompen. En los resultados numéricos que se mostraron aquí, la amplitud del campo medio permanece relativamente pequeña durante la reconexión de

separatrices autoconsistente. En particular, para toda iteración, n , el espacio fase del mapeo *nontwist* correspondiente con $\kappa = \kappa^n$ tiene una cantidad mínima de caos.

En el estudio del transporte caótico autoconsistente consideramos tres problemas: (i) Supresión de difusión; (ii) Destrucción autoconsistente de la barrera de transporte central (BTC); y (iii) Transporte intermitente en el régimen de criticalidad. En el primer problema, el acoplamiento autoconsistente dio lugar al decaimiento de la amplitud del campo medio. Este decaimiento resulta en la reducción del transporte debido a la formación de barreras de transporte. En particular, se observó que para n grandes, el crecimiento del segundo momento estadístico del desplazamiento de las partículas se saturaba y la función de densidad de probabilidad de las partículas alcanzaba un estado estacionario. En el estudio del segundo problema, consideramos un régimen de transporte en el cual el acoplamiento dio lugar al crecimiento autoconsistente de la amplitud del campo medio. Este crecimiento dio como resultado una transición de un estado de caos acotado, con una BTC robusta, hacia un estado de caos global, en el cual la BTC había sido destruida. Para ambos problemas, la supresión de difusión y la destrucción autoconsistente de la BTC, se construyó un modelo de difusión cuasi-lineal para describir la evolución espacio-temporal de la función de densidad de probabilidad de las partículas.

Es de gran importancia el hacer notar que, en el estudio de supresión de difusión, la teoría cuasi-lineal da muy buenos resultados aún para el caso en el que la amplitud del campo medio, κ^n , es pequeña. Debido a esto, los buenos resultados del modelo difusivo cuasi-lineal parecen no estar del todo claros ya que se espera que la aproximación de fases aleatorias sea válida en el régimen caótico únicamente. Sin embargo, para el caso del MNCM, el punto clave es que el decaimiento de κ^n viene acompañado de una gran variación aleatoria de la fase del campo medio, θ^n , la cual da validez a la hipótesis de fases aleatorias que se asume al aplicar la teoría cuasi-lineal. Una situación similar se observa en el estudio de mapeos *twist* acoplados en la Ref. [18].

Es bien sabido que la transición al caos debido al rompimiento de las curvas KAM en los mapeos simplécticos, exhibe un comportamiento de escalamiento autosimilar en la vecindad del punto crítico de transición. Para explorar el papel del acoplamiento de campo medio en este fenómeno se estudió la dinámica autoconsistente del MNCM cerca del punto crítico. Se pudo observar que las fluctuaciones autoconsistentes de la amplitud del campo medio alrededor del punto crítico dan lugar a la destrucción y formación intermitente de la BTC. La gráfica binaria de la Fig. 4.11, exhibe una estructura autosimilar parecida a un conjunto

de Cantor, sin embargo, como en caso de los conjuntos de Cantor gruesos, la dimensión fractal de esta gráfica, siendo igual a uno, no sirve para caracterizar las propiedades autosimilares de este conjunto. Como una alternativa a esto, se usó la caracterización de los fractales gruesos basada en las propiedades de escalamiento del tamaño de las brechas (representando la ausencia de la BTC) con la escala de resolución usada para medirlas. En este caso, se observó un escalamiento algebraico con un exponente de grosor, $\beta = 0.6597$.

Apéndice A

Simetrías y puntos indicadores del mapeo estándar nontwist

Comenzamos por definir una simetría temporal o involución, I , de un mapeo T como aquella transformación tal que,

$$T^{-1} = I^{-1}TI, \quad (\text{A.1})$$

se cumple, donde la involución I tiene la propiedad, $I^2 = \mathcal{I}$, donde \mathcal{I} es la identidad [24]. El significado de la Ec. (A.1) es que, un mapeo es invertible en el tiempo (o en las iteraciones en el caso discreto) si posee una simetría.

Se puede probar fácilmente que TI , llamada la simetría o involución complementaria, también es una involución del mapeo. Esto se prueba usando la definición de la Ec. (A.1) en su forma equivalente

$$(TI)^2 = \mathcal{I}, \quad (\text{A.2})$$

así, si TI es una involución también se debe de cumplir $(T(TI))^2 = \mathcal{I}$. Desarrollando el lado izquierdo de la expresión anterior tenemos

$$(T(TI))^2 = T(TI)T(TI) = TT(ITI)(ITI) = TTT^{-1}T^{-1} = \mathcal{I}, \quad (\text{A.3})$$

con lo que queda demostrado que también, TI , es una involución de T . Debe notarse que hemos usado la propiedad, $I^2 = \mathcal{I}$, para insertar la unidad de forma adecuada para después usar la definición de la Ec. (A.1). De forma similar, se puede demostrar que, $T^m I$, con $m \in \mathbb{Z}$, también es una involución del mapeo T .

Para el mapeo *nontwist* de la Ec. (1.32) se encuentra la siguiente involución:

$$I_0 = (-x + 2\theta, y - \kappa \sin(x - \theta)), \quad (\text{A.4})$$

junto con la involución complementaria dada por, $I_1 = TI_0$,

$$I_1 = (-x + 2\theta + a(1 - y^2), y). \quad (\text{A.5})$$

Dado que,

$$T = TI_0I_0 = I_1I_0, \quad (\text{A.6})$$

podremos decir que el mapeo T es invertible si puede ser factorizado como el producto de dos involuciones.

Adicionalmente a las involuciones del mapeo *nontwist*, se encuentra otra simetría del mapeo,

$$\mathcal{S} = (x + \pi, -y), \quad (\text{A.7})$$

la cual tiene la propiedad $T = \mathcal{S}T\mathcal{S}$, además de cumplir, $\mathcal{S}^2 = \mathcal{I}$, dada la periodicidad de la coordenada x modulo 2π .

Una vez definidas las involuciones y simetrías del mapeo *nontwist*, podemos pasar a la deducción de los puntos indicadores siguiendo el procedimiento de S. Shinohara y Y. Aizawa en la ref. [21]. Como primer paso, estudiaremos el efecto de las involuciones y simetrías del mapeo sobre las curvas integrables en el espacio fase, también llamadas curvas KAM.

Sin pérdida de generalidad, estudiaremos a las curvas KAM que pasan por el punto $(x, y) = (x_0 = \theta, y_0)$ y que están caracterizadas por el número de rotación,

$$R = R(T, (\theta, y_0)) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=1}^N (x^{n+1} - x^n), \quad (\text{A.8})$$

donde x^{n+1} se refiere a la componente x del mapeo *nontwist* aplicado al punto (x^n, y^n) , además de no haberse considerado la periodicidad de la variable x para este cálculo. Así, fijado el valor de x_0 , la curva KAM queda únicamente caracterizada por el valor de y_0 por lo que definimos a la curva KAM con número de rotación $R(T, (\theta, y_0))$ como el conjunto

$$\mathcal{K}_{y_0} = \{(x, y) \mid (x, y) = T^m(x_0 = \theta, y_0), -\infty \leq m \leq \infty\}. \quad (\text{A.9})$$

Aplicando las dos involuciones, I_0 y I_1 , al punto $(x_0 = \theta, y_0)$ perteneciente a una cierta curva KAM obtenemos,

$$I_0(x_0 = \theta, y_0) = (x_0 = \theta, y_0), \quad (\text{A.10})$$

$$I_1(x_0 = \theta, y_0) = (\theta + a(1 - y_0^2), y_0) = T(x_0 = \theta, y_0), \quad (\text{A.11})$$

que junto con la definición de la Ec. (A.9) se concluye que las curvas KAM permanecen invariantes ante las involuciones del mapeo, es decir; $I_0\mathcal{K}_{y_0} = \mathcal{K}_{y_0}$ y $I_1\mathcal{K}_{y_0} = \mathcal{K}_{y_0}$.

Por otro lado, cuando la curva KAM correspondiente a la curva sin cizalla es única, podemos identificarla por su número de rotación $R(T, (x_0^* = \theta, y_0^*))$. Al aplicar la simetría \mathcal{S} al punto $(x_0^* = \theta, y_0^*)$ podemos ver que el número de rotación definido por la Ec. (A.8) no cambia, permanece invariante ante \mathcal{S} debido a que el efecto neto de la simetría es cambiar el signo de la coordenada y y ya que la dependencia de x^n en y es cuadrática, no hay cambio alguno en $R(T, (x_0^* = \theta, y_0^*))$. Esto lo podemos expresar como, $\mathcal{S}\mathcal{K}_{y_0^*} = \mathcal{K}_{y_0^*}$.

Una vez conocidas las invariancias de la curva sin cizalla bajo la simetría y las involuciones del mapeo, podemos hallar los puntos indicadores de la siguiente manera: Debido a la forma cuadrática del mapeo, la curva sin cizalla debe cruzar únicamente dos veces el eje x , digamos en $(x_A, 0)$ y $(x_B, 0)$. Como la curva sin cizalla es invariante bajo I_1 , al aplicar esta involución al punto $(x_A, 0)$ se obtiene,

$$I_1(x_A, 0) = (-x_A + 2\theta + a, 0), \quad (\text{A.12})$$

sin embargo, como los únicos valores donde la curva sin cizalla cruza al eje x son $(x_A, 0)$ y $(x_B, 0)$, la Ec. (A.12) tiene que ser igual a $(x_B, 0)$. Por otro lado, al aplicar \mathcal{S} al punto $(x_A, 0)$ se obtiene,

$$\mathcal{S}(x_A, 0) = (x_A + \pi, 0), \quad (\text{A.13})$$

que por el mismo argumento usado con anterioridad, la Ec. (A.13) debe ser igual a $(x_B, 0)$.

Esto nos da un sistema de ecuaciones para x_A y x_B que tiene como soluciones:

$$(x_A, 0) = \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} + \theta, 0\right), \quad (\text{A.14})$$

$$(x_B, 0) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} + \theta, 0\right). \quad (\text{A.15})$$

De forma equivalente podemos hallar otro conjunto de puntos indicadores usando la involución I_0 y dos puntos, (x_A, y_A) y (x_B, y_B) , de la curva sin cizalla pidiendo que por construcción cumplan lo siguiente,

$$I_0(x_A, y_A) = (x_B, y_B), \quad (\text{A.16})$$

$$\mathcal{S}(x_A, y_A) = (x_B, y_B), \quad (\text{A.17})$$

esto nos da un sistema de ecuaciones para x_A , x_B , y_A y y_B con soluciones:

$$(x_A, y_A) = \left(-\frac{\pi}{2} + \theta, -\frac{\kappa}{2}\right), \quad (\text{A.18})$$

$$(x_B, y_B) = \left(\frac{\pi}{2} + \theta, \frac{\kappa}{2}\right), \quad (\text{A.19})$$

los cuales también son puntos indicadores del mapeo *nontwist*.

Es importante hacer notar que no importa cual punto indicador usemos de entre los dados por las Ecs. (A.14), (A.15), (A.18) y (A.19), ya que siempre trazaremos la misma curva KAM, la cual corresponde a la curva sin cizalla. Esto lo podemos comprobar usando, por ejemplo, los puntos indicadores (A.15) y (A.19) para

trazar la curva sin cizalla del mapeo *nontwist*, esto se muestra en la Fig. A.1 para los valores de los parámetros $a = a_\gamma = 4.31062700354$, $\kappa = \kappa_\gamma = 0.742493131039$ y $\theta = 0$ (ver Sec. 4.2).

Como se ha visto a lo largo de este apéndice, las simetrías e involuciones del mapeo han simplificado en gran medida la localización de la curva sin cizalla en el espacio fase, sin embargo, el alcance de la aplicación de estas simetrías va más allá de eso. Cabe mencionar que toda una teoría para localizar las órbitas periódicas del mapeo está basada en hallar los conjuntos de puntos fijos de las involuciones y las relaciones que existen entre ellos, esta tarea de búsqueda de órbitas periódicas sin usar el formalismo de las involuciones resulta, en la mayoría de los casos, desafiante incluso usando métodos numéricos.

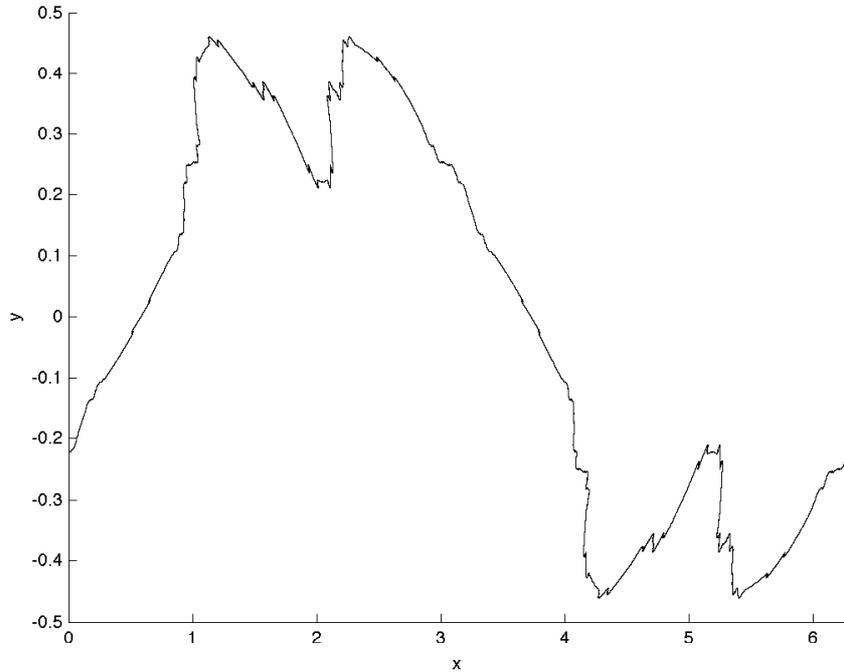


Figura A.1: Curva sin cizalla trazada usando los puntos indicadores (A.15) y (A.19) para los valores de los parámetros $a = a_\gamma = 4.31062700354$, $\kappa = \kappa_\gamma = 0.742493131039$ y $\theta = 0$. Como se puede ver, los dos puntos indicadores trazan la misma curva KAM.

Bibliografía

- [1] Herbert Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley Pub. Co., 1980.
- [2] E. M. Lifshitz Lev Davidovich Landau. *Volume 1 of Course of theoretical physics*. Butterworth-Heinemann, 1976.
- [3] Michael Tabor. *Chaos and integrability in nonlinear dynamics: an introduction*. Wiley-Interscience, 1989.
- [4] M. A. Lieberman A. J. Lichtenberg. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer, 2010.
- [5] Diego del Castillo-Negrete. Self-consistent chaotic transport in fluids and plasmas. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 10(1):75–88, 2000.
- [6] D. del Castillo-Negrete. Weakly nonlinear dynamics of electrostatic perturbations in marginally stable plasmas. *Physics of Plasmas*, 5(11):3886–3900, 1998.
- [7] Diego del-Castillo-Negrete. *Dynamics and Self-consistent Chaos in a Mean Field Hamiltonian Model* In *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions*, volume 602 of *Lecture Notes in Physics*, pages 407–436. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [8] Alessandro Campa, Thierry Dauxois, and Stefano Ruffo. Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions. *Physics Reports*, 480(3-6):57 – 159, 2009.
- [9] P. J. Morrison. Magnetic field lines, hamiltonian dynamics and nontwist systems. *Phys. Plasmas*, 7(6):2279–2289, 2000.
- [10] Diego del Castillo-Negrete and P. J. Morrison. Chaotic transport by rossby waves in shear flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5(4):948–965, 1993.

- [11] D. del Castillo-Negrete and P. J. Morrison. Magnetic field line stochasticity and reconnection in a non-monotonic q-profile. *Bull. Am. Phys. Soc.*, (II):37–1543, 1992.
- [12] R. Balescu. Hamiltonian nontwist map for magnetic field lines with locally reversed shear in toroidal geometry. *Phys. Rev. E*, 58:3781–3792, Sep 1998.
- [13] Gisele A. Oda and Iberé L. Caldas. Dimerized island chains in tokamaks. *Chaos, Solitons and amp; Fractals*, 5(1):15 – 23, 1995.
- [14] Amadeu Delshams and Rafael de la Llave. Kam theory and a partial justification of greene’s criterion for nontwist maps. *Math. Anal.*, 31(6):1235–1269, 2000.
- [15] I. I. Rypina, M. G. Brown, F. J. Beron-Vera, H. Koçak, M. J. Olascoaga, and I. A. Udovydchenkov. Robust transport barriers resulting from strong kolmogorov-arnold-moser stability. *Phys. Rev. Lett.*, 98:104102, Mar 2007.
- [16] D. del Castillo-Negrete, J.M. Greene, and P.J. Morrison. Area preserving nontwist maps: periodic orbits and transition to chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 91(1-2):1 – 23, 1996.
- [17] A. Wurm, A. Apte, K. Fuchss, and P. J. Morrison. Meanders and reconnection collision sequences in the standard nontwist map. 15(2):23108, 2005.
- [18] Guido Boffetta, Diego del Castillo-Negrete, Cristóbal López, Giuseppe Pucacco, and Angelo Vulpiani. Diffusive transport and self-consistent dynamics in coupled maps. *Phys. Rev. E*, 67:026224, Feb 2003.
- [19] R. S. MacKay and J. Stark. Locally most robust circles and boundary circles for area-preserving maps. *Nonlinearity*, 5:867–888, 1992.
- [20] Diego del Castillo-Negrete and P. J. Morrison. Chaotic transport by rossby waves in shear flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5(4):948–965, 1993.
- [21] Susumu Shinohara and Yoji Aizawa. The breakup condition of shearless kam curves in the quadratic map. *Progress of Theoretical Physics*, 97(3):379–385, 1997.
- [22] B. Mandelbrot. *The fractal Geometry of Nature*. Free-man, San Francisco, 1982.
- [23] J. Doyne Farmer. Sensitive dependence on parameters in nonlinear dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 55:351–354, Jul 1985.

- [24] R. S. MacKay. In *Renormalisation in area-preserving maps*, volume 6 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*, pages 1–24. World Scientific, 1993.