



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE QUÍMICA

“ANÁLISIS DE UN MODELO DE FITORREMEDIACIÓN”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERA QUÍMICA

PRESENTA

ALEJANDRA SÁNCHEZ SOLÍS



MÉXICO, D.F.

AÑO 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

PRESIDENTE: Profesor: Lucila Cecilia Méndez Chávez

VOCAL: Profesor: Rafael Herrera Nájera

SECRETARIO: Profesor: Ángel Enrique Chávez Castellanos

1er. SUPLENTE: Profesor: María Rafaela Gutiérrez Lara

2° SUPLENTE: Profesor: Elisa Fabila Montoya

SITIO DONDE SE DESARROLLÓ EL TEMA:

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA, CONJUNTO "E", EDIFICIO DE INGENIERÍA QUÍMICA, FACULTAD DE QUÍMICA, CIUDAD UNIVERSITARIA, COYOACÁN 04510, D.F.

ASESOR DEL TEMA:

DR. ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS

SUSTENTANTE:

ALEJANDRA SÁNCHEZ SOLÍS

Un ingeniero no es una copia, es original y se atreve a cambiar una realidad, no importa el tiempo o el espacio, todo es posible mientras crea que es así.

DEDICATORIA

Expreso mi gratitud a Dios, por concederme la vida y ayudarme siempre a tomar las mejores decisiones, y sobre todo, por permitirme llegar hasta este día tan importante.

A mis padres, Antonio y Mary por todo su amor y apoyo incondicional en las buenas y en las malas, por estar siempre pendiente de mí y también por enseñarme lo importante que es prepararse en todos los aspectos de la vida, los amo.

A Michel, porque sabes que nuestra hermandad va más allá de cualquier circunstancia, te quiero mucho.

A mi asesor, el Dr. Enrique Chávez Castellanos por su guía, apoyo y revisiones tan meticulosas a este trabajo, por sus charlas tan interesantes y amenas y también por su amistad, es un gran ser humano.

A la Maestra Lucila Méndez y al Dr. Rafael Herrera por sus valiosas observaciones a esta tesis y por compartirme sus conocimientos en la carrera.

A mis familiares y amigos, por su cariño y apoyo, les agradezco cada momento que hemos compartido, en especial a mis amigos de la facultad, del dojo y del bosque, gracias por acompañarme en esta gran travesía y formar parte de mi vida.

A la Facultad de Química de la UNAM, por albergarme en su seno y prepararme profesionalmente para afrontar los retos del futuro, es grandioso ser parte de esta maravillosa Universidad.

A todos y cada uno de ustedes, ¡GRACIAS!

	Pág.
Índice	1
Nomenclatura	3
1. Introducción	5
1.1 ¿Qué es la fitorremediación?	5
1.2 Ventajas y desventajas	7
1.3 Normatividad y Fitorremediación en México	8
1.4 Hipótesis	10
1.5 Objetivos	10
2. Marco Teórico	11
2.1 Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes	11
2.2 Estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias	12
2.3 Sistemas variables con el tiempo	18
2.4 La exponencial de una matriz	20
2.5 Matriz del estado de transición	21
3. Planteamiento	22
3.1 Planteamiento del problema con la matriz de coeficientes variables	25
3.2 Planteamiento del problema con la matriz de coeficientes constantes	26

4. Resultados y Análisis	29
4.1 Resultados	29
4.2 Análisis de Resultados	32
5. Conclusiones	43
6. Apéndice	45
6.1 Anexo 1	46
7. Referencias	63

Nomenclatura

\underline{x}' = vector de derivadas de las variables dependientes,

$$[\text{mg. Cr} * \text{g}^{-1} \text{ seco de planta} * \text{mes}^{-1}]$$

\underline{A} = matriz de coeficientes asociada al sistema de ecuaciones diferenciales,

$$[(\text{mg Cr} * \text{g}^{-1} \text{ seco de planta} * \text{mes}^{-1})]$$

Q = ecuación característica [mg. Cr * g⁻¹ seco de planta* mes⁻¹]

λ_i = valores propios de la ecuación característica, $i = 1, 2, 3$

$$[\text{mg Cr} * \text{g}^{-1} \text{ seco de planta} * \text{mes}^{-1}]$$

\underline{v}_i = vectores propios de la ecuación característica, $i = 1, 2, 3$

$$[\text{mg. Cr} * \text{g}^{-1} \text{ seco de planta} * \text{mes}^{-1}]$$

$\underline{\Phi}$ = matriz del estado de transición [mg Cr*g⁻¹ seco de planta * mes⁻¹]

P(0) = número de plantas al inicio de la cosecha

H = cantidad de plantas al final de la cosecha

l = número de ciclo de cosecha

m = número de meses que tiene el ciclo de cosecha

P(t) = número de plantas a cualquier tiempo

M_E = cantidad de metal en el ambiente, [mg Cr * g⁻¹ seco de planta]

M_R = cantidad de metal en las raíces, [mg Cr * g⁻¹ seco de planta]

M_s = cantidad de metal en los brotes, [mg Cr * g⁻¹ seco de planta]

r(s) = rapidez de captación de metal por las plantas,

$$[\text{mg Cr} * \text{g}^{-1} \text{ seco de planta} * \text{mes}^{-1}]$$

$r_1(s)$ = rapidez de captación de metal por las raíces,

$$[\text{mg Cr} \cdot \text{g}^{-1} \text{ seco de planta} \cdot \text{mes}^{-1}]$$

$r_2(s)$ = rapidez de captación de metal por los brotes,

$$[\text{mg Cr} \cdot \text{g}^{-1} \text{ seco de planta} \cdot \text{mes}^{-1}]$$

f = rapidez con que el metal retorna al ambiente,

$$[\text{mg Cr} \cdot \text{g}^{-1} \text{ seco de planta} \cdot \text{mes}^{-1}]$$

$\underline{\underline{B}}$ = exponencial de la matriz $\underline{\underline{A}}$, $[\text{mg Cr} \cdot \text{g}^{-1} \text{ seco de planta}]$

$\underline{\underline{C}}$ = vector de constantes [ppm]

1. Introducción

1.1 ¿Qué es la fitorremediación?

El término fitorremediación hace referencia a una serie de tecnologías que se basa en el uso de plantas para limpiar o restaurar ambientes contaminados, como agua, suelo e incluso aire. El término es relativamente nuevo, se comenzó a utilizar en 1991. Se compone de dos palabras, *fito*, *ta*, que en griego significa planta o vegetal, y *remediar* del latín *remediare*, que significa poner remedio al daño, corregir o enmendar algo, entonces fitorremediación es remediar un daño por medio de plantas y vegetales [1].

De manera más completa, la fitorremediación puede definirse como una tecnología sustentable que se basa en el uso de plantas para reducir la concentración o peligrosidad de contaminantes orgánicos e inorgánicos de suelos, sedimentos, agua, y aire a partir de procesos bioquímicos realizados por las plantas y microorganismos asociados a su sistema de raíz que conducen a la reducción, mineralización, degradación, volatilización y estabilización de los diversos tipos de contaminantes [1,2].

En los últimos años se ha generado una terminología nueva basada en el papel que tienen las plantas en el proceso de remediación, así como de los principales mecanismos involucrados, de forma que se han definido las siguientes estrategias de fitorremediación:

Fitodegradación o fitotransformación: se basa en el uso de plantas para degradar o transformar en sustancias menos tóxicas diversos tipos de contaminantes orgánicos como hidrocarburos aromáticos, plaguicidas, compuestos clorados, explosivos y tensoactivos (detergentes). A través de reacciones enzimáticas que llevan a cabo plantas y microorganismos en la rizósfera, es decir, la zona del suelo estrechamente asociada con las raíces de las plantas, dichos contaminantes son parcial o completamente degradados o transformados. De esta manera son

asimilados por las plantas y secuestrados en sus vacuolas o fijados a estructuras celulares insolubles, como la lignina.

Fitoestimulación: los exudados de las raíces de las plantas estimulan el crecimiento de microorganismos capaces de degradar contaminantes orgánicos. Como parte de sus actividades metabólicas y fisiológicas las plantas liberan azúcares simples, aminoácidos, compuestos alifáticos y aromáticos, nutrientes, enzimas y oxígeno y los transportan desde sus partes superiores hasta sus raíces, favoreciendo el desarrollo de comunidades microbianas en el suelo circundante, ésto provoca la mineralización de los contaminantes [1].

Fitovolatilización: algunas plantas son capaces de volatilizar ciertos contaminantes, como compuestos de mercurio y selenio, contenidos en suelos, sedimentos o agua. Tales contaminantes son absorbidos, metabolizados, transportados desde su raíz a sus partes superiores y liberados a la atmósfera en formas volátiles, menos tóxicas en comparación a sus formas oxidadas. La transformación de dichos elementos se efectúa en la raíz, y su liberación se lleva a cabo durante la transpiración [1].

Fitoestabilización: este proceso lo llevan a cabo plantas que desarrollan un denso sistema de raíz, para reducir la biodisponibilidad de metales y otros contaminantes en el ambiente por medio de mecanismos de secuestro, lignificación o humidificación. Las plantas actúan como una bomba hidráulica que succiona humedad de los suelos debido a sus altas tasas de evaporación y transpiración. Puesto que en este proceso se mantiene también una humedad constante en la zona de la rizósfera, se presentan las condiciones adecuadas para la inmovilización de los metales. Esto ocurre a través de reacciones químicas como la precipitación o formación de complejos insolubles o por mecanismos físicos como la adsorción; de esta manera se evita la migración de los contaminantes hacia los mantos acuíferos [1].

Fitoextracción o fitoacumulación: en esta estrategia se explota la capacidad de algunas plantas para acumular contaminantes en sus raíces, tallo y follaje, las

cuales pueden ser fácilmente cosechadas. Los contaminantes extraídos son principalmente metales pesados, aunque también pueden extraerse cierto tipo de contaminantes orgánicos e isótopos radiactivos [1].

Generalmente los sistemas de fitoextracción se implementan para extraer metales de suelos contaminados, por medio de plantas conocidas como metalofitas, es decir acumuladoras de metales; sin embargo, también pueden implementarse para tratar aguas residuales [1].

Rizofiltración: se basa en hacer crecer, en cultivos hidropónicos, raíces de plantas terrestres de alta tasa de crecimiento y área superficial para absorber, concentrar y precipitar metales pesados de aguas residuales contaminadas.

Las estrategias de fitorremediación hacen referencia a los mecanismos realizados por las propias plantas, pero también en algunos casos, indican el papel que tienen las poblaciones microbianas durante el proceso de remediación.

De manera general las medidas correctivas para contaminantes orgánicos incluyen la fitodegradación y la fitoestimulación, mientras que para los metales pesados se aplica la fitovolatilización, fitoestabilización, fitoextracción y rizofiltración [1,2,3,4,5,6,7,8].

1.2 Ventajas y desventajas

La fitorremediación es una tecnología sustentable y actúa in situ en la remoción de contaminante, se aplica a lugares contaminados de concentraciones bajas a moderadas, es de bajo costo y no requiere de personal especializado para su manejo, es poco perjudicial para el ambiente, no produce contaminantes secundarios y por lo tanto no necesita lugares para desecho, además tiene una versatilidad para tratar una amplia gama de materiales peligrosos y se pueden reciclar recursos como agua, biomasa y metales [1,2,4].

Las desventajas que presenta es que es un proceso lento y dependiente de las estaciones. El crecimiento de la vegetación puede estar limitado por extremos de la toxicidad ambiental y en el caso de las especies perennes pueden liberar los contaminantes al ambiente durante el otoño. La solubilidad de algunos contaminantes puede incrementarse generando un mayor daño ambiental o el desplazamiento de éstos [1,2].

1.3 Normatividad y Fitorremediación en México

En nuestro país el proceso de fito y biorremediación se regula por la Norma Oficial Mexicana NOM-147 de la SEMARNAT, la cual establece los criterios para determinar las concentraciones de remediación de suelos contaminados por arsénico, bario, berilio, cadmio, cromo hexavalente, mercurio, níquel, plata, plomo, selenio, talio y vanadio [4].

En Estados Unidos, el límite permisible de cromo es de 0.1 ppm y para el caso de México es de 0.2 ppm; este criterio se aplica según lo establece la EPA (Environmental Protection Agency) [2].

Comparado con otros países donde se han realizado investigaciones exhaustivas desde principios de los sesenta, que han conducido a la implementación y optimización de sistemas de fitorremediación tanto acuático como terrestre, en nuestro país prácticamente se está comenzando [1].

El Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología ha financiado varios proyectos e investigaciones mediante programas regionales e institucionales internos; en el caso de la fitorremediación acuática se ha enfocado en la contaminación por metales pesados mientras que para la fitorremediación de suelos se han centrado en los hidrocarburos del petróleo [1].

El primer proyecto financiado en México data del año 1994, el cual era un proyecto para remediar aguas residuales de granjas porcinas y de procesamiento del café, el lugar donde se llevó a cabo fue en Veracruz a través de una institución de

nombre Inecol; así a lo largo ya de muchos años, se fue implementando en varios estados de la república, uno de los proyectos más conocidos hasta este momento es el Parque Bicentenario en Azcapotzalco el cual cubre un área de aproximadamente 55 hectáreas y que perteneció a la Refinería 18 de marzo de Pemex, misma que fue clausurada en 1991 debido a los fuertes problemas de contaminación que generaba en sus inmediaciones como para el conjunto de la zona metropolitana [3].

Este ha representado uno de los retos de fitorremediación más difíciles que se han llevado a cabo en el mundo; este terreno fue cedido por Pemex al gobierno federal en el 2007 y es un parque que, en la actualidad, ya puede ser visitado por todos los mexicanos y turistas extranjeros [3].

1.4 Objetivos

1. Analizar el proceso de fitorremediación desde un punto de vista matemático
2. Comprobar que el modelo planteado explica el fenómeno de manera eficiente
3. Aportar conocimiento acerca de los sistemas de ecuaciones diferenciales donde la matriz asociada tiene coeficientes que varían con el tiempo.

1.4 Hipótesis

El modelo de coeficientes constantes es capaz de describir de manera adecuada el proceso de fitorremediación, al igual que el de coeficientes variables.

2.- Marco Teórico

En este trabajo se plantea un modelo de ecuaciones diferenciales que describen el proceso de fitorremediación, para esto se formula una matriz de coeficientes variables, la cual es resuelta a través de la exponencial de ésta, también llamada matriz del estado de transición. Los sistemas lineales homogéneos con coeficientes variables tienen una amplia gama de aplicaciones dentro de los procesos físico-químicos, sin embargo para poder entender mejor su naturaleza, es necesario ir de lo más simple a lo más difícil, para esto se comienza abordando los sistemas de coeficientes constantes.

2.1 Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

En esta sección se empieza por demostrar cómo construir la solución general de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes; es decir, un sistema de la forma

$$\underline{x}' = \underline{A} \cdot \underline{x} \quad (1)$$

En donde \underline{A} es una matriz constante de $n \times n$. Por analogía con el tratamiento de las ecuaciones lineales de segundo orden, se buscan las soluciones de la forma

$$\underline{x} = \underline{v}e^{\lambda t} \quad (2)$$

en donde debe determinarse λ y el vector constante \underline{v} . Si se sustituye \underline{x} de la ecuación (2) en el sistema (1) da

$$\lambda \underline{v}e^{\lambda t} = \underline{A} \cdot \underline{v}e^{\lambda t} \quad (3)$$

Una vez que se cancela el factor escalar diferente de cero $e^{\lambda t}$ se obtiene

$$\underline{A} \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$$

o bien,

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I}) \cdot \underline{v} = \underline{0} \quad (4)$$

En donde \underline{I} es la matriz identidad de $n \times n$. Por tanto, para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (1), es necesario resolver el sistema de ecuaciones algebraicas (3). Este último problema es precisamente aquél en el que se determinan los valores y vectores propios de la matriz \underline{A} . Por lo tanto, el vector \underline{v} dado por la ecuación (2) es una solución de la (1) en el supuesto de que λ sea un valor propio y \underline{v} un vector propio asociados a la matriz de coeficientes \underline{A} .

Los valores propios encontrados (que no son necesariamente diferentes) son raíces de la ecuación polinomial.

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0 \quad (5)$$

Los valores y vectores propios correspondientes determinan la naturaleza de la solución general del sistema (1) [14].

2.2 Estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

En ocasiones algunos sistemas de ecuaciones diferenciales no pueden resolverse analíticamente, entonces se debe recurrir a una información cualitativa, que permita saber acerca de sus soluciones sin necesidad de resolverlos. Esto está asociado con la idea de estabilidad de una solución y los métodos que se emplean son básicamente geométricos. Para el sistema (1) los puntos en los que el segundo miembro de la ecuación es cero tienen una importancia especial. Estos puntos se denominan puntos críticos tales que, $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$.

Dado que también estos puntos $\frac{dx}{dt}$, corresponden a soluciones constantes o soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial, se concluye que $\underline{x} = \underline{0}$ es el único punto crítico del sistema. Una solución de la ecuación (1) es una función vectorial $\underline{x} = \underline{\phi}(t)$ que satisface la ecuación diferencial, esta función puede

concebirse como una representación paramétrica de una curva en el plano x_1x_2 , a éste se le conoce como **plano fase** y el conjunto de trayectorias se menciona como **retrato fase**.

Al analizar el sistema (1) es necesario considerar diferentes casos, dependiendo de la naturaleza de los valores propios de \underline{A} . La meta principal es caracterizar la ecuación diferencial según el patrón geométrico formado por sus trayectorias. En cada caso se analiza el comportamiento de las trayectorias en general [14].

CASO 1. Valores propios reales y desiguales del mismo signo.

La solución general de la ecuación (1) es:

$$\underline{x} = c_1\underline{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\underline{v}_2e^{\lambda_2 t} \quad (6)$$

Las lambdas λ_1 y λ_2 pueden ser positivas o negativas o ambas. Supóngase en primer lugar que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ y que los vectores \underline{v}_1 y \underline{v}_2 son como se indica en la **figura 1**. Por la ecuación (6) se sigue que $x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, sin importar los valores de c_1 y c_2 ; en otras palabras, todas las soluciones tienden al punto crítico en el origen cuando $t \rightarrow \infty$. Si la solución parte de un punto inicial de la recta que pasa por \underline{v}_1 , entonces $c_2 = 0$. Como consecuencia, la solución permanece sobre la recta que pasa por \underline{v}_1 , para toda t , y se aproxima al origen cuando $t \rightarrow \infty$. De manera semejante, si el punto inicial está sobre la recta que pasa por \underline{v}_2 , entonces la solución se aproxima al origen a lo largo de esa recta. En la situación general es útil volver a escribir la ecuación (6) en la forma

$$\underline{x} = e^{\lambda_2 t} [c_1\underline{v}_1e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2\underline{v}_2] \quad (7)$$

En tanto que $c_2 \neq 0$, el término $c_1\underline{v}_1e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ es despreciable en comparación con $c_2\underline{v}_2$, para t suficientemente grande. Por tanto, cuando $t \rightarrow \infty$, la trayectoria no sólo se aproxima al origen, también hacia la recta que pasa por \underline{v}_2 , de donde todas las soluciones se aproximan al punto crítico tangente a \underline{v}_2 , excepto

aquellas que se inician exactamente sobre la recta que pasa por v_1 . Este tipo de punto crítico se llama nodo, o algunas veces nodo impropio.

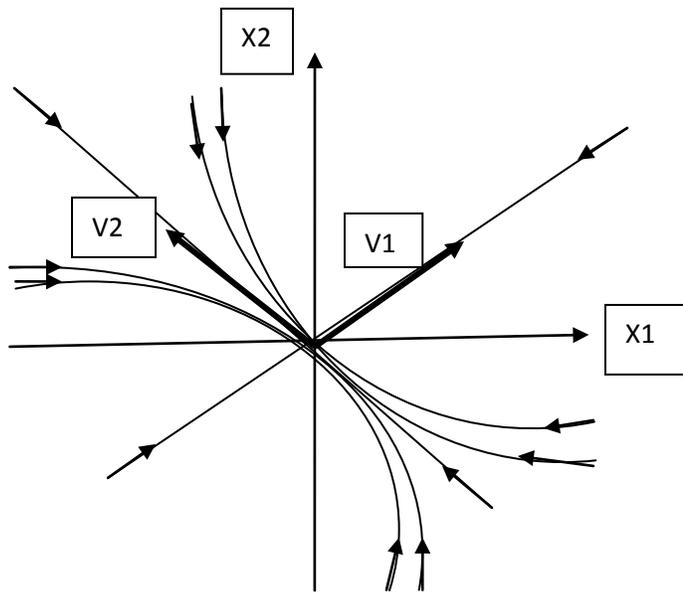


Fig.1 Nodo impropio; $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Plano de fase [14].

Si tanto λ_1 como λ_2 son positivos y $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, entonces las trayectorias tienen el mismo patrón que el de la figura anterior, sólo que la dirección del movimiento se aleja del punto crítico [14].

CASO 2. Valores propios reales de signos opuestos.

La solución general del sistema dada por (6), tiene $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, supóngase que los vectores propios son como se muestra en la **figura 2**. Si la solución parte de un punto inicial de la recta que pasa por v_1 , se concluye que $c_2 = 0$. Como consecuencia, la solución permanece sobre la recta que pasa por v_1 para toda t y, como $\lambda_1 > 0$, $\|x\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Si la solución parte de un punto inicial sobre la recta que pasa por v_2 , entonces la situación es semejante, excepto que $\|x\| \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$ porque $\lambda_2 < 0$. Las soluciones que parten de otros puntos

iniciales siguen trayectorias como las que se muestran en la **figura 2**. El exponencial positivo es el término dominante en la ecuación (6), para t grande, de modo que al final todas estas soluciones tienden al infinito asintóticamente a la recta determinada por el vector propio v_1 correspondiente al valor propio positivo λ_1 . Las únicas soluciones que se aproximan al punto crítico en el origen son las que se inician precisamente sobre la recta determinada por v_2 . Para ciertas condiciones iniciales, la solución no cuenta con el término exponencial positivo, de modo que $x_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para todas las demás condiciones iniciales, el término exponencial positivo termina por dominar y hace que x_1 se vuelva no acotada. El comportamiento de x_2 es semejante. El origen se conoce como **punto silla** [11].

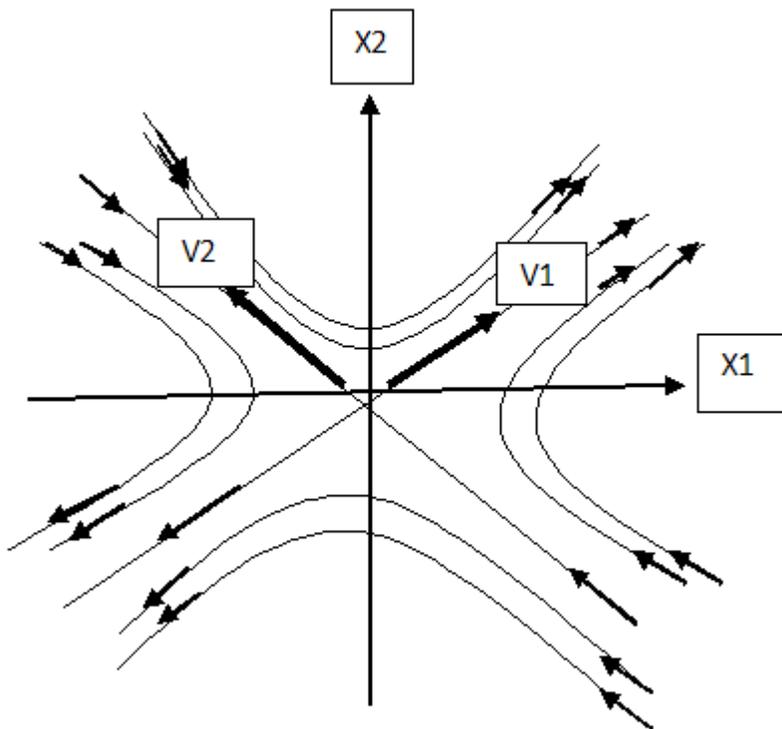


Fig. 2 Punto silla; $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Plano de fase [14].

CASO 3. Valores propios iguales

Supóngase ahora que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Se considerará el caso en que los valores propios son negativos; si son positivos, las trayectorias son semejantes, pero se invierte la dirección del movimiento. Existen dos subcasos, dependiendo de si el valor propio repetido tiene dos vectores independientes o solamente uno.

- a) Dos vectores propios independientes. La solución general de la ecuación(1) es:

$$x = c_1 \underline{v}_1 e^{\lambda t} + c_2 \underline{v}_2 e^{\lambda t} \quad (8)$$

en donde \underline{v}_1 y \underline{v}_2 son los vectores propios independientes. La razón x_2/x_1 es independiente de t , pero depende de las componentes de \underline{v}_1 y \underline{v}_2 , así como de las constantes arbitrarias c_1 y c_2 . Por tanto, todas las trayectorias se encuentran sobre una recta que pasa por el origen como se muestra en la **figura 3**. El punto crítico se llama **nodo propio** [11].

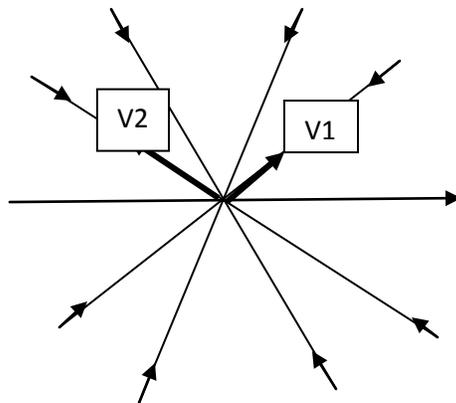


Fig. 3. Nodo propio, dos vectores propios independientes; $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.

Plano de fase [14].

b) Un vector propio independiente. La solución a la ecuación general (1) es

$$\underline{x} = c_1 \underline{v} e^{\lambda t} + c_2 (\underline{v} t e^{\lambda t} + \underline{\eta} e^{\lambda t}) \quad (9)$$

En donde v es el vector propio y η es el vector propio generalizado asociado con el valor propio repetido. Para t grande, el término dominante en la ecuación (9) es $c_2 \underline{v} t e^{\lambda t}$. Por tanto, cuando $t \rightarrow \infty$, todas las trayectorias se aproximan al origen tangentes a la recta que pasa por el vector propio. Esto es cierto incluso si $c_2 = 0$, porque entonces la solución $\underline{x} = c_1 \underline{v} e^{\lambda t}$ se encuentra sobre esa recta. De manera semejante, para t negativa grande, el término $c_2 \underline{v} t e^{\lambda t}$ es de nuevo el dominante, de modo que, cuando $t \rightarrow -\infty$, cada trayectoria es asíntota a una recta paralela a \underline{v} .

La orientación de las trayectorias depende de las posiciones relativas de \underline{v} y $\underline{\eta}$. En la **figura 4** se muestra una situación posible.

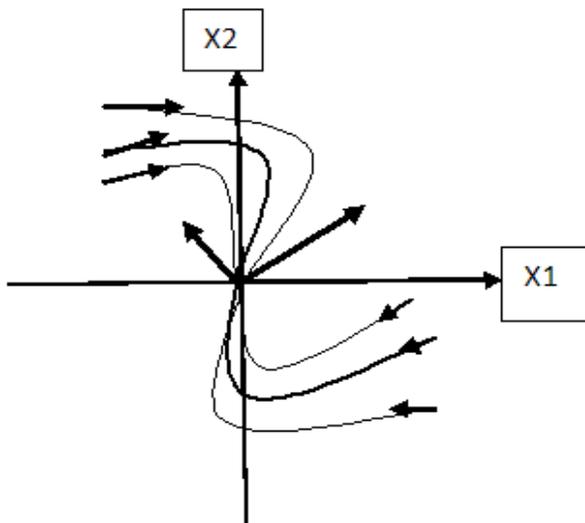


Figura 4. Nodo impropio, un vector propio independiente: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Plano de fase [14].

CASO 4. Valores propios complejos.

Supóngase que los valores propios son $\lambda \pm i\mu$ en donde λ y μ son reales,

$\lambda \neq 0$ y $\mu > 0$. En particular en estos casos las trayectorias son espirales que se aproximan o se alejan del origen, dependiendo del signo de λ . Las dos posibilidades se muestran en la **figura 5** el punto crítico se conoce como **punto espiral** [11].

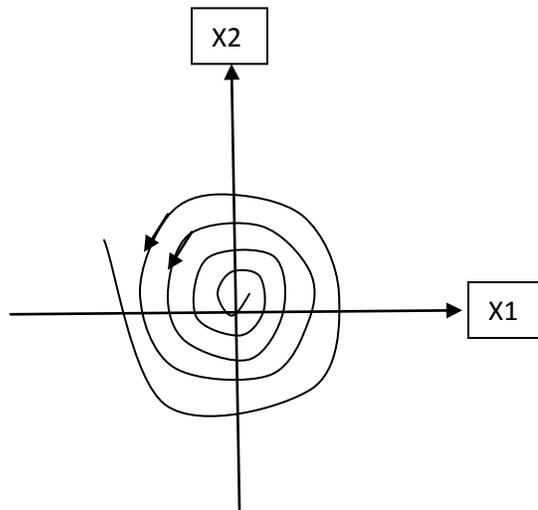


Fig.5 Punto espiral; $\lambda = \alpha \pm i\mu$ con $\alpha < 0$. Plano de fase [14].

2.3 Sistemas variables en el tiempo

El análisis y las técnicas de síntesis para sistemas de ecuaciones diferenciales variables en el tiempo no son fáciles cuando se comienza de una teoría clásica de sistemas invariantes, esta es una consecuencia del hecho de que la solución para este tipo de sistemas no es de forma cerrada, es decir, no pueden expresarse en términos de funciones elementales [11].

Durante mucho tiempo se han venido haciendo esfuerzos para resolver este problema, pero ninguno de esos ha sido generalmente aceptado [9,11].

Una aproximación al problema es utilizando ciertas técnicas de transformaciones de estado para estudiar la estabilidad del sistema, la transformación de Lyapunov es una herramienta útil al respecto porque mantiene las características durante el proceso matemático. Cualquier sistema variable con el tiempo es una representación lineal del espacio-estado continuos y puede cambiarse a una matriz constante, pero necesariamente la transformación de estado depende de una matriz del estado de transición, la cual es generalmente imposible de resolver analíticamente [9]. La matriz del estado de transición $\underline{\Phi}$ para un sistema $\underline{x}' = \underline{A} \cdot \underline{x}$ evaluada a cualquiera t_0 y x_0 , da una solución \underline{x} de la siguiente forma:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t - t_0) \cdot \underline{x}_0 \quad (9)$$

Se muestra que para una $\underline{\Phi}$ que satisfaga una ecuación matricial diferencial y una condición inicial se debe cumplir que:

$$\underline{\Phi}' = \underline{A} \cdot \underline{\Phi} \quad (10)$$

$$\underline{\Phi}(0) = \underline{I} \quad (11)$$

Donde \underline{I} es la matriz identidad. Ahora si se considera un estado inicial \underline{x}_0 y se obtiene una solución $\underline{x}(t)$ con $t_0 = 0$, entonces de forma análoga si se tiene un sistema $\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{x}_0$ cuando $t=0$, entonces la solución es:

$$\underline{x}_0 = \underline{x}(0) = \underline{\Phi}(0) \cdot \underline{x}_0 \quad (12)$$

Cuando se tienen sistemas variables con el tiempo y por lo tanto una matriz de coeficientes variables, una solución sumamente aproximada es la matriz exponencial, la cual corresponde a la matriz del estado de transición para este tipo de sistemas [10].

2.4 La matriz exponencial: $e^{\underline{A}t}$

La función exponencial para cualquier variable x está definida por una expansión en serie de la siguiente forma: [11,12,13,14]

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty \quad (13)$$

Entonces la exponencial para cualquier matriz cuadrada \underline{A} está definida por:

$$e^{\underline{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{A}^k = I + \frac{\underline{A}}{1!} + \frac{\underline{A}^2}{2!} + \frac{\underline{A}^3}{3!} + \dots, \quad (14)$$

Esta ecuación representa las series de potencias que convergen para cualquier matriz cuadrada \underline{A} . Algunas de sus propiedades son:

a) Para cualquier matriz $\underline{0}$,

$$e^{\underline{0}} = \underline{I} \quad (15)$$

b) Suponiendo que t es una variable escalar

$$\frac{de^{\underline{A}t}}{dt} = \underline{A} \cdot e^{\underline{A}t} = e^{\underline{A}t} \cdot \underline{A} \quad (16)$$

Por lo tanto la exponencial de una matriz tiene las siguientes propiedades,

- 1) $e^{\underline{A}(t_1+t_2)} = e^{\underline{A}t_1} e^{\underline{A}t_2}$, $e^{-\underline{A}} = (e^{\underline{A}})^{-1}$
- 2) Si λ es un valor propio de \underline{A} con un vector propio \underline{v} , entonces e^{λ} es un valor propio de $e^{\underline{A}}$ con un vector propio \underline{v} . Entonces $e^{\underline{A}}$ no tiene un valor propio 0 de aquí que:
- 3) $e^{\underline{A}}$ es no singular
- 4) Lo siguiente demuestra que

$$e^{\underline{A}+\underline{B}} = e^{\underline{A}}e^{\underline{B}} \text{ si } \underline{A} \text{ y } \underline{B} \text{ conmutan}$$

2.5 La matriz del estado de transición : $e^{\underline{A}t}$

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t \underline{A})^k = I + t \underline{A} + \frac{1}{2!} (t \underline{A})^2 + \frac{1}{3!} (t \underline{A})^3 + \dots \quad (17)$$

Por lo tanto:

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t} \quad (18)$$

Se tiene:

$$\underline{\Phi}(0) = \underline{I} \quad (19)$$

$$\underline{\Phi}' = \underline{A} \cdot \underline{\Phi} \quad (20)$$

De aquí que la solución esté dada por:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \cdot \underline{x}_0 \quad (21)$$

En este trabajo el modelo de fitorremediación es desarrollado en dos partes: la primera, corresponde a una porción dinámica utilizando una mezcla de ecuaciones diferenciales y diferencias; la segunda, es el criterio EPA (Environmental Protection Agency) que es definido como una propiedad matemática [2,9,10].

3.- Planteamiento del problema

Se considera que se va a limpiar un suelo contaminado por cromo, el cual tiene una concentración de veinte veces el límite permisible [ver pág. 8].

Las plantas típicamente usadas para llevar a cabo este trabajo son algas o mostaza de la India, que tienen una rapidez de captación que oscila entre 0.1 y 0.2 mg. de cromo por gramo seco de planta. La transferencia de las raíces a los brotes es significativamente menor a 0.02 mg. de cromo por gramo seco de planta.

De acuerdo al clima, se considera que el período de cosecha sólo incluye la estación calurosa la cual es de aproximadamente cuatro meses. El número de raíces que tiene cada planta son cinco, el ciclo de cosecha comienza con cien plantas y termina con treinta.

Las suposiciones que se encuentran detrás de este modelo son:

1. La cantidad de metal en el medio ambiente interactúa con las raíces de la planta por la ley de la acción de las masas.
2. Un porcentaje de la cantidad de metal captado por las raíces es inmediatamente transferido a los brotes, esta suposición está simplificando la realidad ya que en este caso hay un retraso en la transferencia.
3. Cada planta tiene el mismo número de raíces
4. La rapidez de captación efectiva de los contaminantes es una función que se incrementa por los fertilizantes.
5. La rapidez de captación de los contaminantes por las raíces llega a ser deficiente cuando se saturan de fertilizante las raíces.
6. El ciclo de cosecha está expresado en meses.
7. La cantidad de plantas cosechadas al final de cada ciclo permanece constante (no depende del número de ciclos de cosecha).
8. La cantidad de plantas al comienzo de cada ciclo permanece constante (no depende del número de ciclos de cosecha).
9. La tasa de mortalidad de las plantas durante un ciclo de cosecha es constante

10. La porción de contaminantes captados por las raíces y que no es transferida a los brotes es retornada al ambiente.
11. La cantidad de tierra en el ambiente permanece constante (el medio no cambia).
12. Después de cada ciclo de cosecha, la cantidad remanente de contaminante en las raíces regresa al ambiente.

Usando estas premisas, las variables de estado del modelo son:

$M_E(t)$ = Cantidad de metal pesado en el ambiente en **mg** en un tiempo dado.

$M_R(t)$ = Cantidad de metal pesado en las raíces en **mg** en un tiempo dado.

$M_S(t)$ = Cantidad de metal pesado en los brotes en **mg** en un tiempo dado.

Las variables involucradas en la formulación del modelo son: $r(s)$, f , $r_1(s)$, $r_2(s)$, las cuales son todas positivas. La captación de metal de la tierra por las raíces es representada por $r(s)$, donde s es la cantidad de fertilizante en la tierra. El fertilizante es una sustancia química que mejora la capacidad de la planta para extraer metal de la tierra; como por ejemplo un jabón. El valor de $r(s)$ puede ser escrito como $r(s) = r_1(s) + r_2(s)$, donde $r_1(s)$ es la rapidez de captación del metal de la tierra por las raíces y $r_2(s)$ es la rapidez de captación de metal a los brotes, el parámetro f es la rapidez de retorno con que el contaminante regresa a la tierra.

Antes de continuar con la formulación del modelo, se debe obtener una función que calcule el número total de plantas en cada ciclo, entonces la cantidad inicial es $P(0)$, la cual es una cantidad constante, H es el número de plantas que quedan al final de cada ciclo, el cual no depende del ciclo de cosecha y las plantas mueren a una razón constante; l , representa el ciclo l ésimo que consiste de m meses, el número de plantas a cualquier tiempo $t \in (lm, (l+1)m)$ puede ser encontrado calculando los puntos $(lm, P(0))$ y $((l+1)m, H)$ de la siguiente ecuación (1),

$$P(t) = \{P(0) - l(H - P(0)) + \frac{(H - P(0))}{m}t \quad \text{si } t \in (lm, (l+1)m)\} \quad (22)$$

$$P = 0 \quad \text{si } t = lm, (l + 1)m$$

La ecuación (22), como se puede observar, representa una línea recta, cuya pendiente siempre será negativa, ya que la diferencia entre un número menor y uno mayor da negativa, así pues se calcula para los ciclos desde cero hasta cuatro, manteniendo los valores de las variables constantes.

La gráfica del número de plantas en función del tiempo se encuentra en la siguiente figura

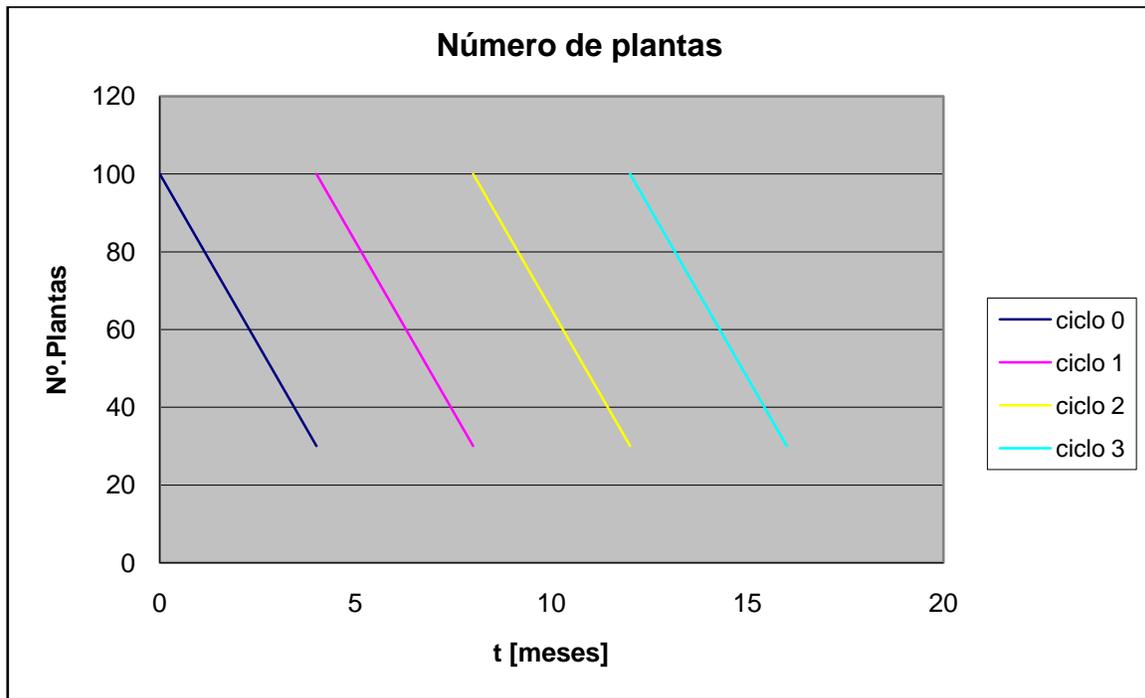


Fig. 6 Gráfica del cálculo del número de plantas al final de cada cosecha a lo largo de cuatro ciclos. El número de plantas al inicio y final de cada ciclo es siempre el mismo.

La cantidad inicial de metal en el ciclo de cosecha $l + 1^{\text{ero}}$ depende de la cantidad remanente en la tierra al final del ciclo $l^{\text{ésimo}}$. Entonces la concentración inicial M_E en el ciclo $l + 1^{\text{ero}}$ está dado por los valores finales de M_E y M_R en el ciclo $l^{\text{ésimo}}$.

3.1 Planteamiento del sistema de coeficientes variables

El comportamiento dinámico de la concentración de cromo está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden,

$$\frac{dM_E}{dt} = -r(s)RM_E(t)P(t) + fM_R(t)RP(t) \quad (23)$$

$$\frac{dM_R}{dt} = r_1(s)RM_E(t)P(t) - fM_R(t)RP(t) \quad (24)$$

$$\frac{dM_S}{dt} = r_2(s)RM_E(t)P(t) \quad (25)$$

Este sistema puede representarse, en notación matricial, para ayudar a resolverlo de una forma más sencilla.

$$\underline{x}' = \underline{A}(t) \cdot \underline{x} \quad (26)$$

En la próxima sección se detallará la forma de la matriz $\underline{A}(t)$. (ver pág. 28)

Con las condiciones iniciales,

$$M_E(lm) > 0, M_R = 0, M_S(lm) = 0, \quad (27)$$

Donde

$$M_E(lm) = \lim_{t \rightarrow lm^-} M_E(t) + \lim_{t \rightarrow lm^-} M_R(t) \quad (28)$$

La ecuación (27) indica que al inicio del proceso (en el ciclo (lm)) la cantidad de metal en el ambiente es mayor que cero, y la concentración en las raíces y en los brotes es igual a cero.

La condición inicial se establece de esta manera porque la hipótesis (13) dice que al final del ciclo, la cantidad remanente de contaminante en las raíces se regresa al ambiente.

El primer término de la ecuación (23), $-r(s)RM_E(t)P(t)$, representa la rapidez efectiva de captación de metal desde el ambiente a través de la interacción de las raíces, esta interacción está modelada por la ley de la acción de las masas.

El segundo término en la ecuación (23), $fM_R(t)RP(t)$, representa la rapidez de retorno de metal de las raíces, es decir, el metal que se acumuló en las raíces y no se transfirió a los brotes y por lo tanto es regresado al ambiente, este término aparece como una pérdida en el segundo término de la ecuación (24).

La rapidez de captación de metal del ambiente es separada en dos partes. La primera entra en las raíces y es modelada por el primer término en la ecuación (23), $r_1(s)RM_E(t)P(t)$, la segunda parte es enviada a los brotes y está dada por la ecuación (25), $r_2(s)RM_E(t)P(t)$, por lo tanto, tenemos la siguiente relación

$$r(s) = r_1(s) + r_2(s) \quad (29)$$

Las normas antes mencionadas regulan el nivel de concentración del contaminante; matemáticamente, este criterio sería representado por la concentración deseada de M_E que puede alcanzarse, se denotará que la cantidad permisible de metal en la tierra prescrito por la EPA es T , y el problema está definido para encontrar el valor t^* , que sería la cantidad de meses que se necesitan para alcanzar ese límite permisible, el cual está dado por,

$$M_E(t) \leq T, \forall t \geq t^* \quad (30)$$

3.2 Planteamiento del sistema de coeficientes constantes

También para poder comprobar la hipótesis, se procede a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no con la matriz de coeficientes variables, sino con una de coeficientes constantes, para esto se utiliza el teorema del valor medio, que consiste en integrar una función dependiente del tiempo con respecto al tiempo y dividiéndola entre el intervalo de tiempo correspondiente, se expresa como sigue:

$$\langle f_i \rangle = \frac{\int f_i(t) dt}{\int dt} \quad (31)$$

Para este sistema en particular, se integra $P(t)$ con respecto al tiempo y entonces se obtiene lo siguiente:

$$\langle P(t) \rangle = \frac{P(0)t - l(H - P_0)t + \frac{(H - P_0)t^2}{m}}{t} \quad (32)$$

Para el primer periodo de cosecha del mes cero al mes cuatro se obtuvo:

$$\int_0^4 \langle P(t) \rangle = P_0 - l(H - P_0) + \frac{1}{2}(H - P_0) \quad (33)$$

Luego, para el siguiente ciclo,

$$\int_4^8 \langle P(t) \rangle = P_0 - l(H - P_0) + \frac{3}{2}(H - P_0) \quad (34)$$

Y finalmente,

$$\int_8^{12} \langle P(t) \rangle = P_0 + l(H - P_0) + \frac{5}{2}(H - P_0) \quad (35)$$

Una vez integrada $P(t)$ para los tres periodos, se ingresa la función en la matriz de coeficientes y ésta ya no dependerá del tiempo y por lo tanto se puede resolver el sistema con los métodos matriciales de una forma más sencilla. En el siguiente capítulo se verán los resultados para los valores y vectores propios correspondientes.

El modelo puede resolverse aplicando la matriz exponencial, la matriz en cuestión corresponde a los coeficientes que representan las tres ecuaciones diferenciales que se mostraron en la sección previa:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(t) = \begin{bmatrix} -r(s)RP(t) & fRP(t) & 0 \\ r_1(s)RP(t) & -fRP(t) & 0 \\ r_2(s)RP(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz exponencial estaría dada por $\underline{\underline{B}} = e^{\underline{\underline{A}}t}$, que corresponde a la matriz del estado de transición del sistema $\underline{\underline{\Phi}}$; esta solución es típica para sistemas variables en el tiempo (matriz de coeficientes variables).

Ahora bien, la solución general para M_E , M_R y M_S en un intervalo arbitrario

$(lm, (l + 1)m)$ es

$$\underline{\underline{X}}(t) = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}$$

Donde $\underline{\underline{C}}$ es el vector de constantes arbitrario, el cual está sujeto a las condiciones iniciales, la matriz $\underline{\underline{B}}$ es la exponencial de la matriz $\underline{\underline{A}}$.

Los valores de las variables que se utilizaron se encuentran resumidos en la siguiente tabla [1]:

Tabla 1. Valores de las variables de entrada

Variables	Significado	Valor	Unidades
r_1	Rapidez de captación de metal por las raíces	0.2	mg Cr / g seco planta*mes
r_2	Rapidez de captación de metal por los brotes	0.02	mg Cr / g seco planta*mes

R	Raíces por planta	5	raíces
f	Fracción de contaminante que regresa al ambiente	0.1	mg Cr / g seco planta*mes
P(0)	Cantidad inicial de plantas al inicio del ciclo	100	Plantas
H	Cantidad final de plantas al final del ciclo	30	Plantas
m	Número de meses por ciclo de cosecha	4	meses

4. Resultados y Análisis

4.1 Resultados

A continuación se presenta el resultado obtenido para el sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, realizando la simulación en Matlab (Solución exacta).

B =

[-5/118*(-3*exp(-1/8*(-8+59^(1/2)))*(-56*I-80+7*t)*t)+59^(1/2)*exp(-1/8*(-8+59^(1/2)))*(-56*I-80+7*t)*t)+3*exp(1/8*(8+59^(1/2)))*(-56*I-80+7*t)*t)+59^(1/2)*exp(1/8*(8+59^(1/2)))*(-56*I-80+7*t)*t)*59^(1/2)/(-8+59^(1/2))/(8+59^(1/2)), -5/118*(-exp(-1/8*(-8+59^(1/2)))*(-56*I-80+7*t)*t)+exp(1/8*(8+59^(1/2)))*(-56*I-80+7*t)*t)*59^(1/2),
0]

[-5/59*(-exp(-1/8*(-8+59^(1/2)))*(-56*I-80+7*t)*t)+exp(1/8*(8+59^(1/2)))*(-56*I-80+7*t)*t)*59^(1/2), -5/118*(3*exp(-1/8*(-8+59^(1/2)))*(-56*I-80+7*t)*t)+59^(1/2)*exp(-1/8*(-8+59^(1/2)))*(-56*I-80+7*t)*t)-3*exp(1/8*(8+59^(1/2)))*(-56*I-80+7*t)*t)+59^(1/2)*exp(1/8*(8+59^(1/2)))*(-56*I-80+7*t)*t)*59^(1/2)/(-8+59^(1/2))/(8+59^(1/2)),
0]

$$\begin{aligned}
& [5/118*(7*\exp(-1/8*(-8+59^{1/2}))*(-56*l-80+7*t)*t)+59^{1/2}*\exp(-1/8*(- \\
& 8+59^{1/2}))*(-56*l-80+7*t)*t)-2*59^{1/2}+59^{1/2}*\exp(1/8*(8+59^{1/2}))*(-56*l- \\
& 80+7*t)*t)-7*\exp(1/8*(8+59^{1/2}))*(-56*l-80+7*t)*t)*59^{1/2}/(- \\
& 8+59^{1/2})/(8+59^{1/2}), 5/118*(59^{1/2}*\exp(1/8*(8+59^{1/2}))*(-56*l- \\
& 80+7*t)*t)+8*\exp(-1/8*(-8+59^{1/2}))*(-56*l-80+7*t)*t)+59^{1/2}*\exp(-1/8*(- \\
& 8+59^{1/2}))*(-56*l-80+7*t)*t)-2*59^{1/2}-8*\exp(1/8*(8+59^{1/2}))*(-56*l- \\
& 80+7*t)*t)*59^{1/2}/(-8+59^{1/2})/(8+59^{1/2}), \\
& 1]
\end{aligned}$$

Es también una matriz de 3 X 3, que depende del tiempo t y además del ciclo de cosecha l , el cual es básicamente un contador que empieza desde cero.

También se calcula el polinomio característico, los valores y vectores propios del sistema los cuales permiten conocer la estabilidad del sistema incluso aún sin resolverlo en su totalidad, en este caso se obtuvieron resultados que dependen del tiempo; a continuación se muestra la ecuación característica denotada por Q, la matriz \underline{D} , presenta los valores propios en la diagonal y \underline{V}_1 , \underline{V}_2 y \underline{V}_3 presentan los vectores propios asociados.

$$\begin{aligned}
Q = \lambda^3 + 160 * \lambda^2 + 112 * \lambda^2 * l - 28 * \lambda^2 * t + 500 * \lambda + 700 * \lambda * l - 175 * \lambda * t \\
+ 245 * \lambda * l^2 - 245/2 * \lambda * l * t + 245/16 * \lambda * t^2
\end{aligned}$$

$$\underline{D} =$$

$$\begin{bmatrix}
1/4 * (8 + \sqrt{59}) * (-40 - 28 * l + 7 * t) & 0 & 0 \\
0 & 1/4 * (8 - \sqrt{59}) * (-40 - 28 * l + 7 * t) & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\underline{V}_1 = \begin{bmatrix} -8 - \sqrt{59} \\ -8 + \sqrt{59} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}_2 = \begin{bmatrix} -(7 * t - 28 * l - 40 - (8 + \sqrt{59}) * (-40 - 28 * l + 7 * t)) / (-40 - 28 * l + 7 * t) \\ -(7 * t - 28 * l - 40 - (8 - \sqrt{59}) * (-40 - 28 * l + 7 * t)) / (-40 - 28 * l + 7 * t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las dimensiones de los valores propios son:

$$\lambda [=] \frac{mg \text{ Cr}}{g \text{ seco de planta} * \text{mes}}$$

Es importante destacar que los valores propios están multiplicados por un factor de 1/1000, esto con la finalidad de convertir todas las unidades a gramos y obtener una escala mejor en la gráfica.

El mismo procedimiento se hizo para la solución de la matriz de coeficientes constantes, en este caso los valores y vectores propios fueron los mismos para los tres períodos, el resultado fue el siguiente:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 + \sqrt{59} \\ -8 - \sqrt{59} \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} * (28 * l + 2 * (-8 + \sqrt{59}) * (13 + 14 * l) + 26) / (13 + 14 * l) \\ -\frac{1}{2} * (28 * l + 2 * (-8 - \sqrt{59}) * (13 + 14 * l) + 26) / (13 + 14 * l) \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los valores propios que se obtienen,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 * (-8 + \sqrt{59}) * (13 + 14 * l) & 0 \\ 0 & 0 & 2 * (-8 - \sqrt{59}) * (13 + 14 * l) \end{pmatrix}$$

4.2. Análisis de resultados

En esta sección, se presentará la gráfica de la solución al modelo con la exponencial de la matriz de coeficientes variables (solución exacta).

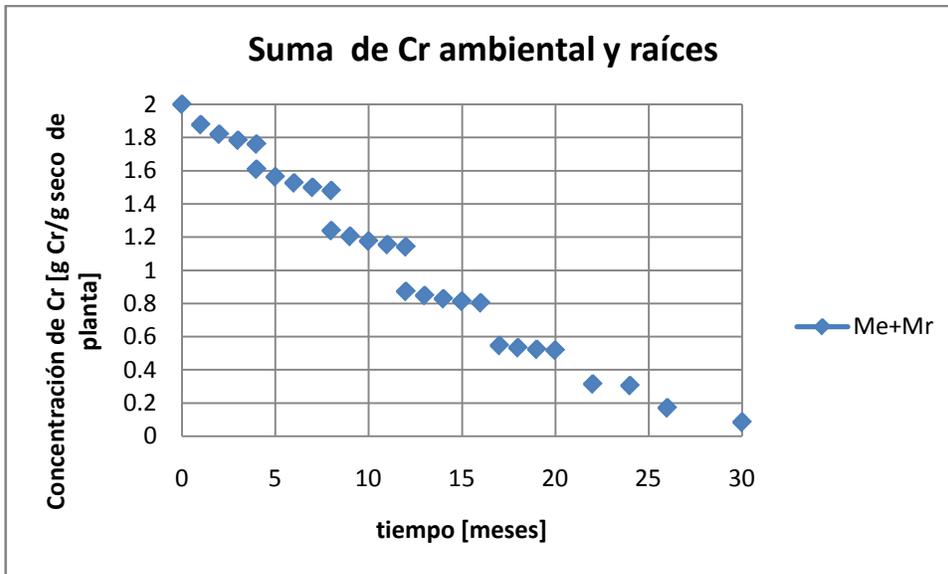


Fig. 7. Concentración de Me y Mr en función del tiempo

Como se puede observar en la gráfica, hay un amortiguamiento en la función exponencial debido a los valores propios; ésta representa la suma de las concentraciones de metal en el ambiente y en las raíces, cada conjunto de cinco puntos es un ciclo de cosecha diferente.

Para entender mejor el proceso y dar un significado físico al procedimiento matemático que se hizo anteriormente es necesario hacer un análisis de sensibilidad paramétrica y graficar la evolución de las tres concentraciones de cromo en el tiempo.

En las figuras 8 a la 13, se muestra dicho procedimiento.

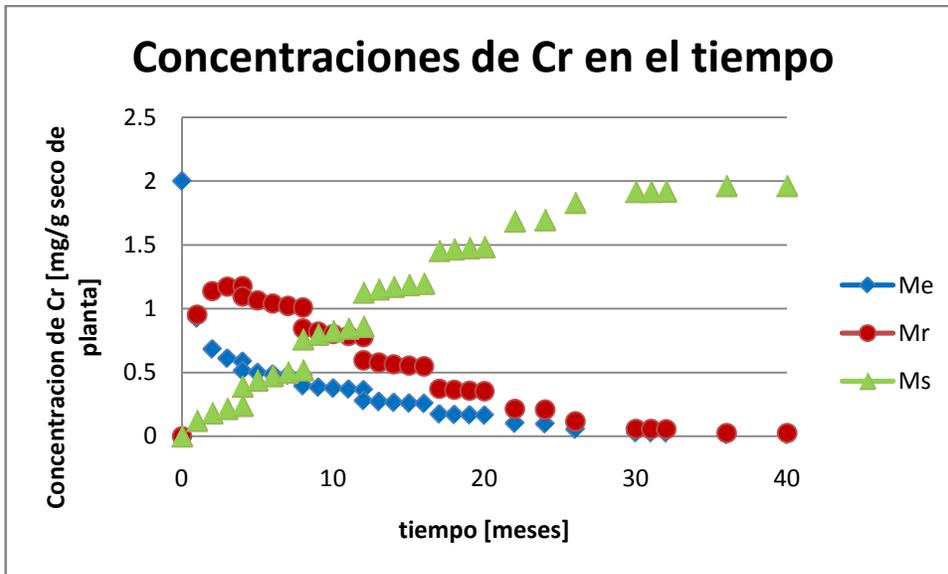


Fig. 8 Evolución de la concentración del contaminante en el tiempo

En la Fig. 8, se muestra claramente que al tiempo igual a cero la concentración de M_E tiene un valor de dos, mientras que para M_R y M_S vale cero, es decir, aún no se comienza con el proceso, esto se cumple gracias a las condiciones iniciales que se plantean para resolver el modelo. Para cuando el tiempo es mayor a cero, la concentración ambiental de cromo va disminuyendo, tal como se muestra en la curva azul. Las curvas roja y verde, representan la concentración de cromo en las raíces y en los brotes respectivamente, se observa que ambas comienzan a tener un crecimiento, sin embargo, cuando el metal en las raíces comienza a crecer obtiene un valor máximo y luego comienza a decrecer, este punto de inflexión se atribuye a que las raíces alcanzan una saturación de contaminante y entonces comienza una transferencia mayor hacia los brotes, éstos seguirán captando el contaminante hasta alcanzar un estado estacionario donde la concentración de metal se mantendría constante hasta alcanzar el equilibrio.

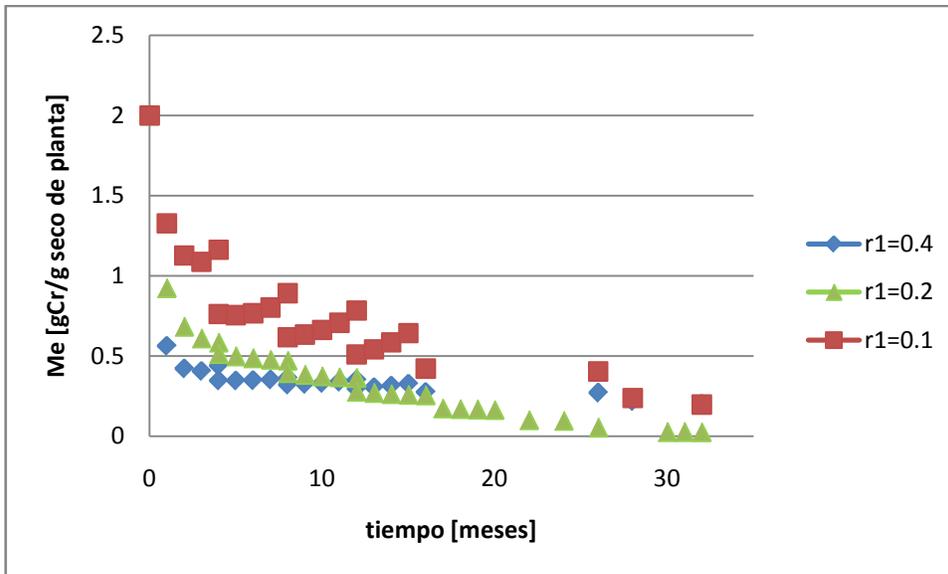


Fig. 9 Variación en la rapidez de captación de las raíces

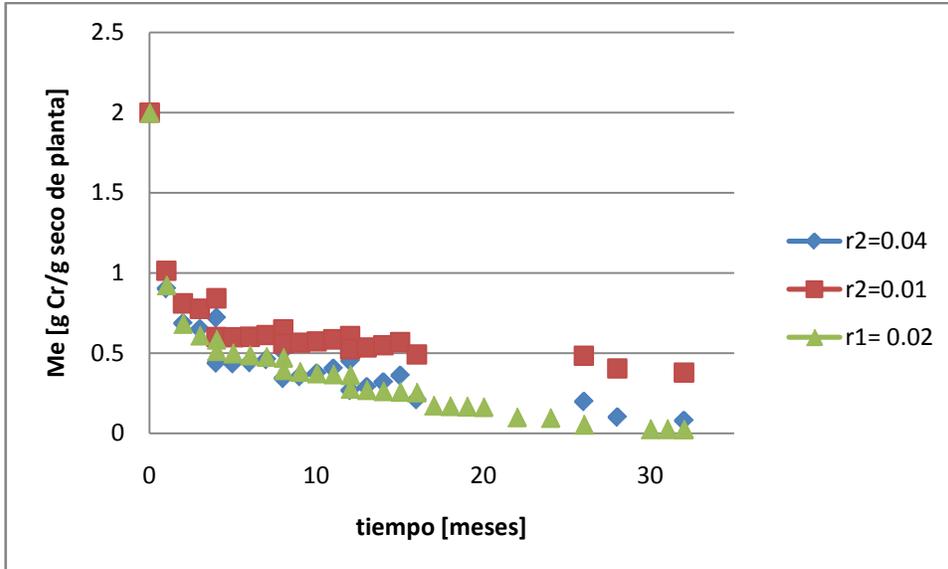


Fig.10 Variaciones de la rapidez de captación de metal por los brotes

En las figuras 9 y 10 se observa que el comportamiento es muy similar, a medida que se incrementan o disminuyen las rapidezces de captación de las raíces y de los brotes, la curva se desplaza hacia arriba o hacia abajo según los valores sean más grandes o más pequeños en comparación a los originales.

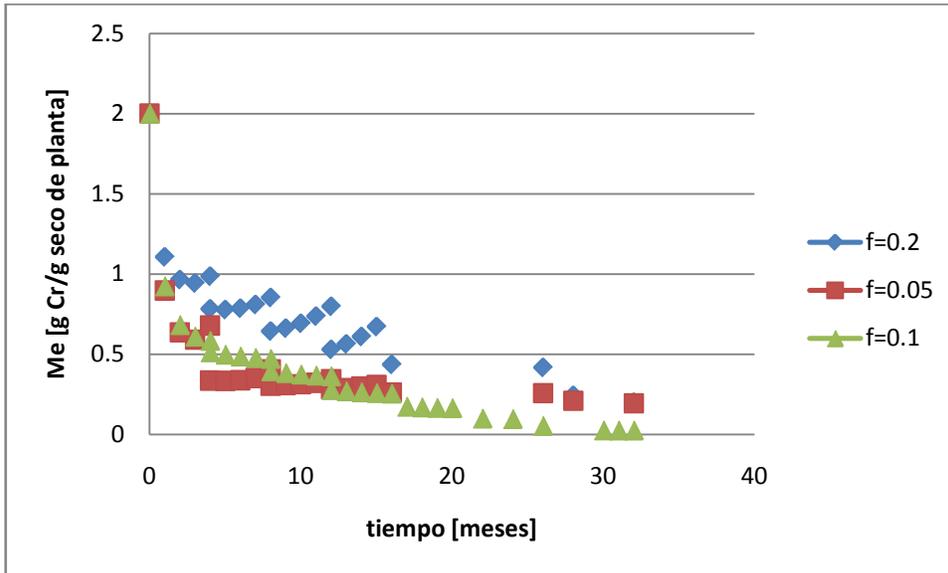


Fig.11 Variaciones de la rapidez de retorno de cromo al ambiente.

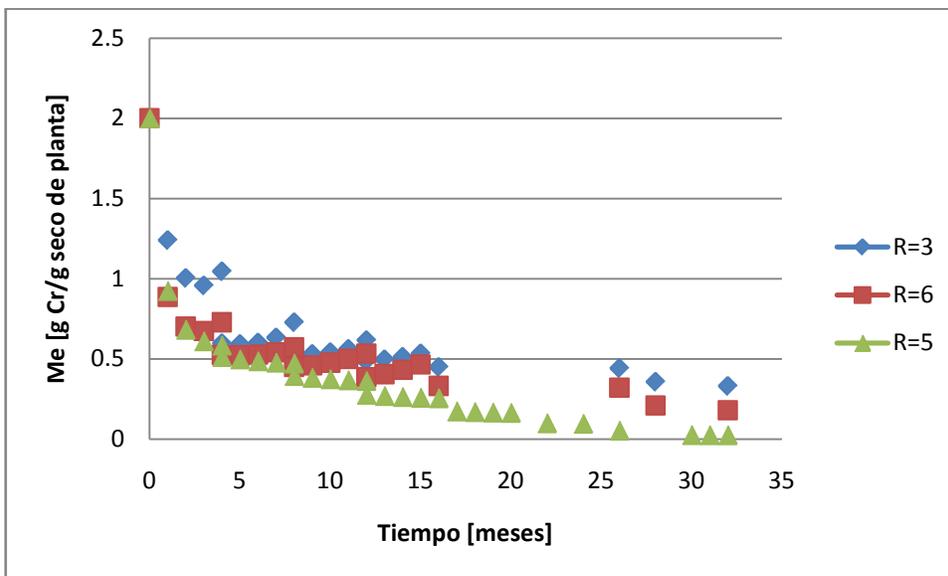


Fig.12 Variación del número de raíces por planta

El número de raíces ayuda a promover una mayor capacidad de captación de metal por la planta y por lo tanto el proceso tendría una mayor eficacia, sin embargo, el mejor número de raíces está en cinco, como se puede observar en la curva verde.

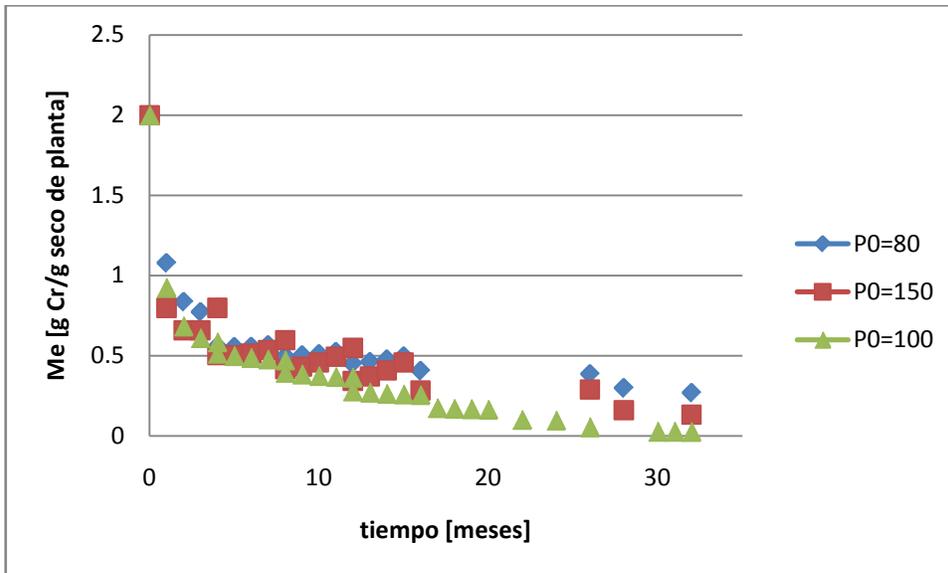


Fig.13 Variación del número de plantas al inicio de cada ciclo

La figura 13 muestra qué sucede si se cambia el número de plantas al inicio de cada ciclo, las tres curvas comienzan en el mismo punto, ya que la concentración inicial no cambiaría, pero sí la rapidez con que se lleva a cabo la extracción del contaminante, nuevamente la curva verde nos muestra el mejor comportamiento.

Estas últimas gráficas representan un análisis de sensibilidad paramétrica, todas están comparadas con respecto a los valores originales del modelo; para este caso en particular se ve que el sistema muestra una mayor sensibilidad a ciertos parámetros que para otros; los que tienen una influencia más importante son: r_1 , r_2 y f ; son precisamente las dos rapidezces de captación de metal y la de retorno del contaminante al ambiente.

Otras gráficas de suma importancia son las de plano fase, que son aquellas que nos pueden indicar qué valores toma una variable independiente con respecto a la otra, en este caso se graficaron las variables M_E , M_R y M_S , formando pares cada una.

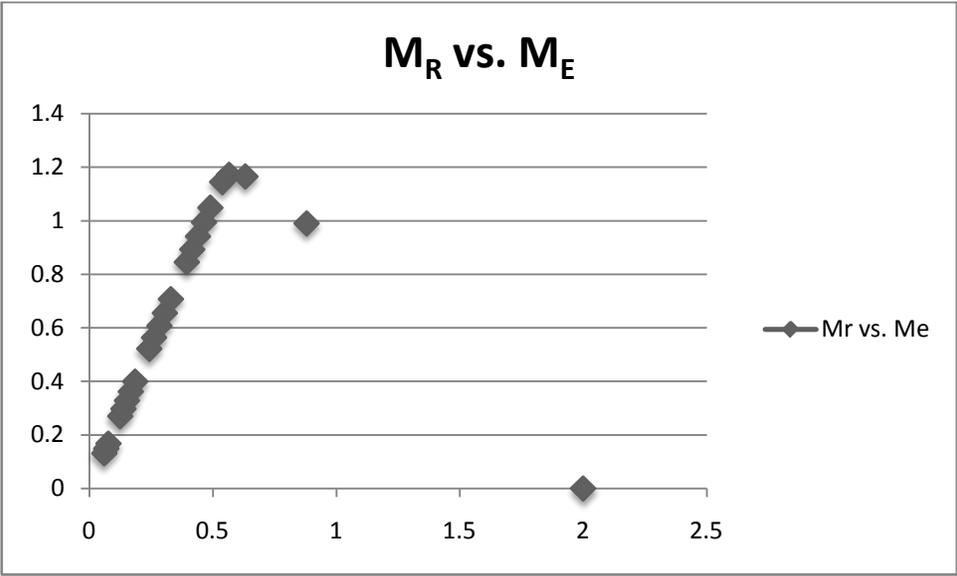


Fig.14 Plano de fase de concentración de metal en las raíces contra el de los brotes.

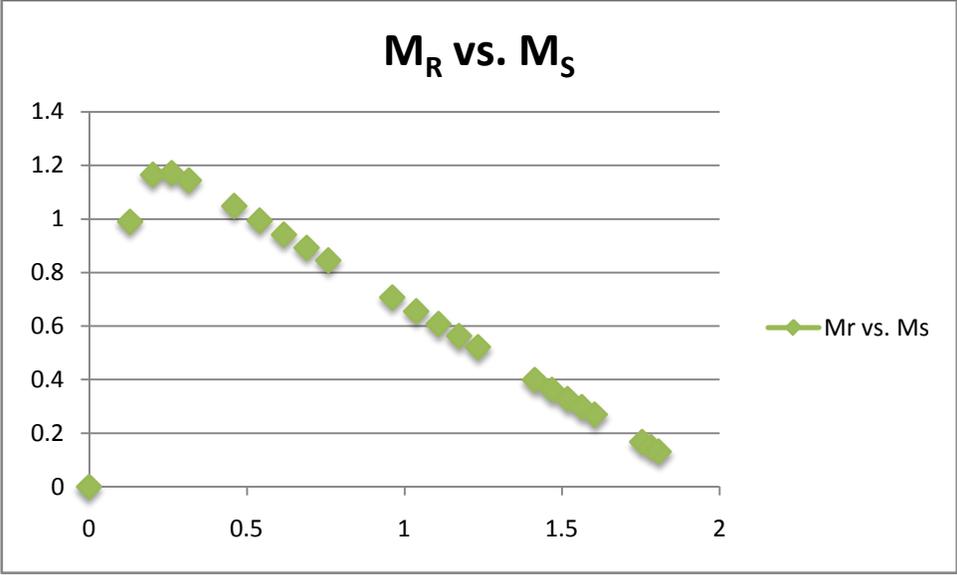


Fig.15 Plano de fase de concentración de metal en las raíces contra metal en los brotes.

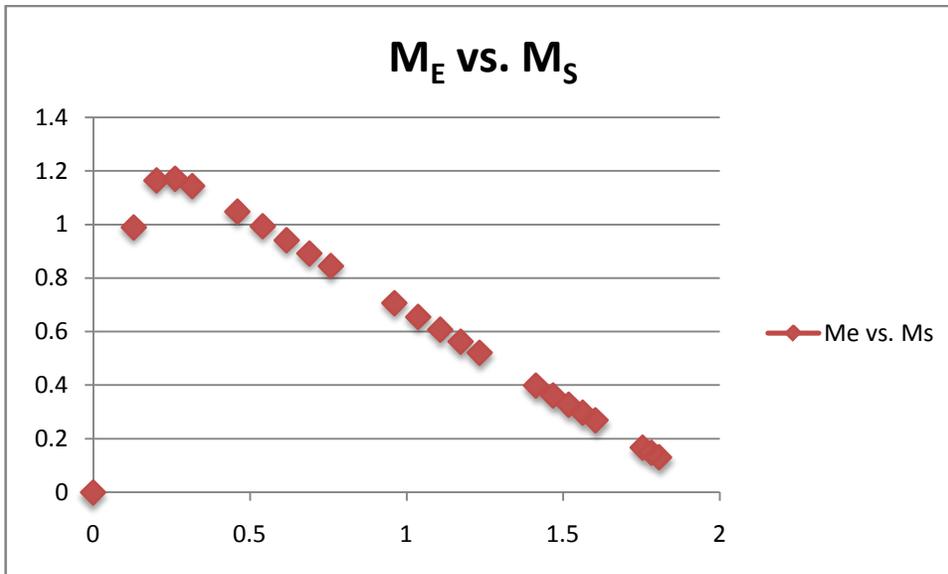


Fig.16 Plano de fase de concentración de metal en el ambiente contra la de los brotes

En las gráficas 10 a 12, se puede observar cómo es el comportamiento de las concentraciones del contaminante con respecto a otra concentración. Lo interesante de estas tres gráficas es que son muy parecidas entre sí, primero se observa un crecimiento hasta alcanzar un punto máximo y luego se observa un decaimiento un tanto lineal, esto es debido a que primero ambas concentraciones crecen de manera proporcional muy rápidamente (primeros tiempos del proceso) y luego mientras una sigue creciendo la otra va disminuyendo, región de la gráfica con pendiente negativa.

También por otro lado, se desea conocer las concentraciones al equilibrio, se parte del hecho de que la solución general para estos sistemas es de la forma de la ecuación (1), y aplicando las condiciones iniciales obtenemos como solución, un plano de fase que compara M_E y M_R , entonces la gráfica queda de la siguiente forma:

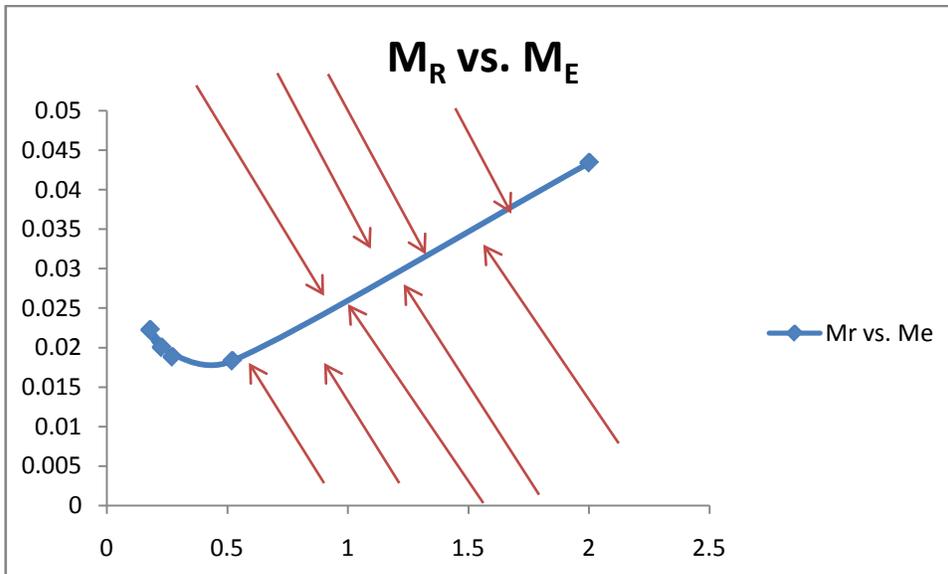


Fig. 17 Plano de fase de concentración sobre la línea de operación.

Donde la línea azul, es la línea de equilibrio, que se dibuja a partir de la ecuación (1) una vez que se conocen los valores y vectores propios, éstos últimos nos darán la dirección de las trayectorias del plano de fase, mientras que los valores propios nos dirán el sentido de dichas trayectorias.

En la región donde se encuentra una curva que no sigue un comportamiento como el de la línea de equilibrio es debido a que algunos valores ya se volvieron negativos, esto es porque sólo se comprende para un ciclo de cosecha, es decir, debe de hacerse un plano de fase diferente para cada ciclo, se considera que el ciclo dura cuatro meses.

Recapitulando la hipótesis, se va a comparar los resultados de los valores y vectores propios que arroja cada solución del modelo, la exacta y la aproximada.

Tabla 2. Comparación de las dos soluciones

	Solución exacta	Solución aproximada
Valores propios	$\lambda_1 = 1/4 * (8 + \sqrt{59}) * (-40 - 28 * l + 7 * t)$ $\lambda_2 = 1/4 * (8 - \sqrt{59}) * (-40 - 28 * l + 7 * t)$ $\lambda_3 = 0$	$\lambda_1 = 2 * (-8 + \sqrt{59}) * (13 + 14 * l)$ $\lambda_2 = 2 * (-8 - \sqrt{59}) * (13 + 14 * l)$ $\lambda_3 = 0$
Vectores propios	$\underline{V}_1 = \begin{bmatrix} -8 - \sqrt{59} \\ -8 + \sqrt{59} \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{V}_2 = \begin{bmatrix} -(7 * t - 28 * l - 40 - (8 + \sqrt{59}) * (-40 - 28 * l + 7 * t)) / (-40 - 28 * l + 7 * t) \\ -(7 * t - 28 * l - 40 - (8 - \sqrt{59}) * (-40 - 28 * l + 7 * t)) / (-40 - 28 * l + 7 * t) \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 + \sqrt{59} \\ -8 - \sqrt{59} \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} * (28 * l + 2 * (-8 + \sqrt{59}) * (13 + 14 * l) + 26) / (13 + 14 * l) \\ -\frac{1}{2} * (28 * l + 2 * (-8 - \sqrt{59}) * (13 + 14 * l) + 26) / (13 + 14 * l) \end{pmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

En la tabla anterior, se ve claramente que los valores y vectores propios obtenidos son muy similares en ambos casos, se puede decir las diferencias que se presentan son básicamente la dependencia del tiempo que tiene la solución exacta sobre la aproximada. En la siguiente gráfica pueden observarse de manera más evidente estas similitudes, es M_E en función del tiempo para cada solución.

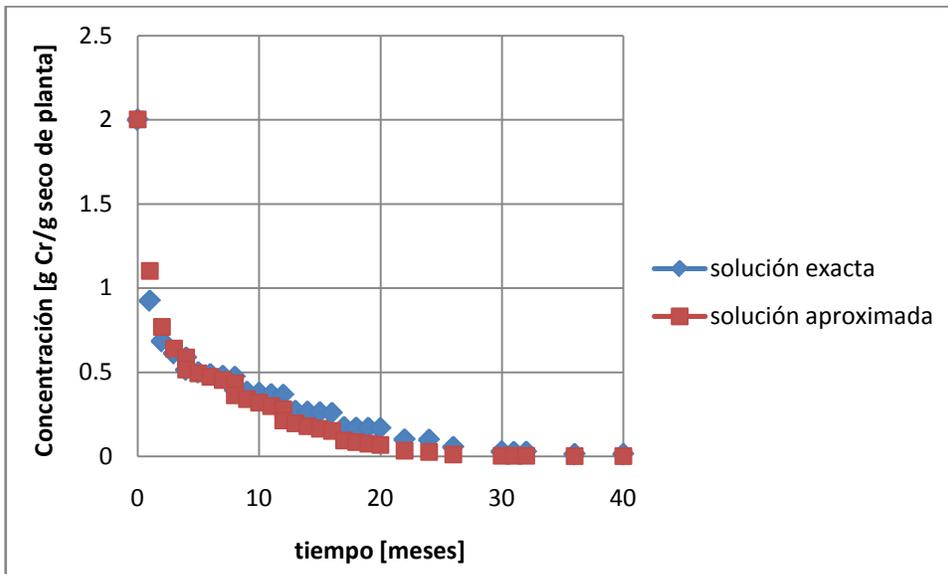


Fig. 18 Comparación de M_E bajo las dos soluciones: exacta y aproximada

La gráfica muestra un comportamiento semejante en ambos casos, la curva roja que es la solución aproximada cae un poco más rápido que la azul (exacta), esto se debe a los valores propios que amortiguan o aceleran un poco más el decaimiento, en el caso de la solución exacta el valor propio es un poco mayor, y por lo tanto la curva es más amortiguada.

Para cuantificar estas diferencias se obtiene el error porcentual entre cada dato y se saca un promedio aritmético el cual es del 34.75%.

5. CONCLUSIONES

La fitorremediación como técnica de purificación de suelos es efectiva y sobre todo no agresiva al ambiente, ya que no daña las propiedades del medio en cuestión, de hecho las plantas forman parte del ecosistema así como los microorganismos que intervienen en el proceso.

El modelo planteado es sencillo de comprender ya que parte de un balance de materia, en donde uno de sus principios básicos es afirmar que lo que entra menos lo que sale es igual a lo que se acumula, por lo tanto la suma de las tres concentraciones de cromo a cualquier tiempo debe ser siempre la misma.

Físicamente lo que sucede con esta técnica de remediación de suelos es que la planta necesita de ciertos compuestos como fertilizantes, si bien, éstos aceleran el proceso también lo pueden retardar si se rebasa un límite, en vez de captar, pueden liberar contaminante debido a que se invertiría la dirección del gradiente de concentración.

Por otro lado, el hecho de poder resolver el sistema de ecuaciones diferenciales con métodos matriciales permite conocer el comportamiento del sistema a través del tiempo sin necesidad de resolverlo en su totalidad, con este pequeño bosquejo al calcular los valores y vectores propios del mismo se puede saber que si el sistema es estable o inestable, para este caso en particular es estable, los valores propios son negativos y uno es cero, esto quiere decir que alcanza el equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$, como la solución es de la forma $e^{\lambda t}$, cuando el tiempo tienda a infinito, la función tiende a cero, entonces la gráfica se aproxima cada vez más al eje de las abscisas y por este motivo se observa el comportamiento en la figura 7.

Con el análisis de sensibilidad se puede apreciar que los factores que más afectaron fueron las rapidezces de captación y retorno de metal al ambiente, donde se observó que los valores de las variables que se utilizaron para la simulación fueron las más adecuadas.

En cuanto a las dos formas en que se resolvieron las ecuaciones diferenciales, se puede decir que por el teorema del valor medio la solución aproximada explica bien el proceso, al menos puede dar un bosquejo bastante cercano a la realidad y con la ventaja que no se aplicó en este caso la exponencial matricial que es bastante compleja y difícil de manipular sin un programa matemático.

Este trabajo puede ser un apoyo para los cursos de fenómenos de transporte, particularmente el de transferencia de masa y el de matemáticas aplicadas, éste contempla en su plan de estudios, las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante métodos matriciales pero sólo para sistemas con coeficientes constantes, y en esta tesis se trabaja con un sistema de coeficientes variables, ésta puede ser utilizada como un apoyo didáctico para el maestro y los alumnos que cursen estas asignaturas, pero sobre todo para que se vean las aplicaciones en la vida real.

Apéndice

ANEXO 1

LA NORMA OFICIAL MEXICANA NOM-147-SEMARNAT/SSA1-2004, QUE ESTABLECE CRITERIOS PARA DETERMINAR LAS CONCENTRACIONES DE REMEDIACION DE SUELOS CONTAMINADOS POR ARSENICO, BARIO, BERILIO, CADMIO, CROMO HEXAVALENTE, MERCURIO, NIQUEL, PLATA, PLOMO, SELENIO, TALIO Y/O VANADIO

De conformidad a lo dispuesto en el artículo 47 fracción I de la Ley Federal sobre Metrología y Normalización, con fecha 11 de noviembre de 2005 se publicó el Proyecto de Norma Oficial Mexicana NOM-147-SEMARNAT/SSA1-2004, que establece Criterios para determinar las Concentraciones de Remediación de Suelos Contaminados por arsénico, bario, berilio, cadmio, cromo hexavalente, mercurio, níquel, plata, plomo, selenio, talio y vanadio, en el Diario Oficial de la Federación, mismo que fue elaborado de manera conjunta con la Secretaría de Salud con el fin de que los interesados en un plazo de 60 días naturales posteriores a la fecha de su publicación presentaran sus comentarios al Comité Consultivo Nacional de Medio Ambiente y Recursos Naturales sito en Boulevard Adolfo Ruiz Cortines 4209, cuarto piso, Fraccionamiento Jardines en la Montaña, Delegación Tlalpan, código postal 14210, de esta Ciudad.

Durante el mencionado plazo, la manifestación de impacto regulatorio del citado Proyecto de Norma, estuvo a disposición del público para su consulta en el domicilio antes señalado, de conformidad con el artículo 45 del citado ordenamiento.

De acuerdo con lo establecido en el artículo 47 fracciones II y III de la Ley Federal sobre Metrología y Normalización, los interesados presentaron sus comentarios al proyecto de Norma en cuestión, los cuales fueron analizados por el Comité Consultivo Nacional de Normalización de Medio Ambiente y Recursos Naturales y por el Comité Consultivo Nacional de Normalización, de Regulación y Fomento Sanitario, realizándose las modificaciones procedentes al proyecto; las respuestas a los comentarios y modificaciones antes citados fueron publicadas en el Diario Oficial de la Federación el

Una vez cumplido el procedimiento establecido en la Ley Federal sobre Metrología y Normalización para la elaboración de normas oficiales mexicanas el Comité Consultivo Nacional de Medio Ambiente y Recursos Naturales en sesión de fecha 26 de abril de 2006, aprobó la presente Norma Oficial Mexicana NOM-147-SEMARNAT/SSA1-2004.

CONSIDERANDO

Que la regulación de la contaminación de suelos con materiales y residuos peligrosos está considerada en la Ley General del Equilibrio Ecológico y la Protección al Ambiente, como asunto de alcance general de la Nación y de interés de la Federación.

Que la Ley General para la Prevención y Gestión Integral de Residuos establece las bases para prevenir la contaminación de sitios por el manejo de materiales y residuos, así como para definir los criterios a los que se sujetará su remediación.

Que la Ley General de Salud establece las bases para determinar los valores de concentración máxima de contaminantes para el ser humano, así como el ejercicio de acciones específicas ante situaciones riesgosas a la salud de las personas.

Que el desarrollo de actividades económicas de manera no sustentable, así como la escasez en el pasado de disposiciones jurídicas ambientales para el cuidado de los suelos, ha llevado consigo al deterioro de los recursos naturales no renovables del país.

Que las personas responsables de actividades relacionadas con la generación y manejo de materiales y residuos peligrosos que hayan contaminado suelos, están obligadas a llevar a cabo las acciones de remediación.

Que la dispersión atmosférica y la disposición inadecuada de residuos, entre otros, han generado la contaminación de suelos con diversas sustancias que contienen elementos potencialmente tóxicos entre los que se encuentran el arsénico, bario, berilio, cadmio, cromo hexavalente, mercurio, níquel, plata, plomo, selenio, talio y vanadio.

Que la biodisponibilidad de los elementos químicos señalados y su capacidad de bioacumulación pueden generar riesgos a la salud y al ambiente.

Que de conformidad con lo establecido en el artículo 78 de la Ley General para la Prevención y Gestión Integral de Residuos, la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales en coordinación con la Secretaría de Salud, debe emitir las normas oficiales mexicanas para la caracterización de los sitios contaminados y evaluar los riesgos al ambiente y la salud que de ellos deriven, para determinar, en función del riesgo, las acciones de remediación que procedan.

Que en virtud de lo establecido en el considerando anterior y con el fin de recuperar los suelos contaminados e integrarlos a las actividades previstas en los planes de desarrollo urbano o de ordenamiento ecológico de los estados y municipios, se elaboró la presente Norma Oficial Mexicana, la cual establece criterios para determinar las concentraciones a partir de las cuales se considera un suelo contaminado.

Que las concentraciones de los elementos químicos normados, para la remediación de los suelos, están sustentadas en la metodología de evaluación de riesgo, a través de la cual se determina la probabilidad o posibilidad de que se produzcan efectos adversos a la salud de la población o al ambiente, como consecuencia de su exposición a los suelos contaminados.

Que una vez identificado un suelo contaminado, las acciones de remediación se deberán llevar a cabo mediante programas conforme lo establece la Ley General para la Prevención y Gestión Integral de Residuos.

Por lo expuesto y fundado, se ha tenido a bien expedir la siguiente:

0. Introducción

El desarrollo de actividades económicas de manera no sustentable, ha contribuido a la emisión de compuestos potencialmente tóxicos que bajo ciertas condiciones y concentraciones, pueden tener efectos nocivos a la salud de la población y afectaciones al equilibrio ecológico y el ambiente.

Las formas de producción utilizadas en el pasado y la escasez de especificaciones ambientales en materia de suelos han generado la aparición de sitios contaminados, los que se han constituido en pasivos ambientales y causado la incertidumbre de los particulares en cuanto a las acciones que se deben llevar a cabo para remediar un sitio. En el año 1988, la Procuraduría Federal de Protección al Ambiente (PROFEPA) estableció unos criterios interinos para llenar este vacío de la normatividad ambiental, sin embargo estos criterios interinos no tienen la formalidad jurídica para hacerlos realmente aplicables.

De acuerdo a los datos presentados en el Informe 1995-2000 de PROFEPA, en México se tienen identificados 61 sitios contaminados por los elementos que se incluyen en la presente Norma, por lo que es necesario la emisión de la misma para dar claridad y certeza jurídica a los particulares que requieran remediar sitios contaminados.

La presente Norma Oficial Mexicana, establece diferentes alternativas para determinar la concentración objetivo a la cual se debe remediar un suelo. Estas opciones incluyen las concentraciones de referencia (totales y solubles) que esta Norma presenta, la determinación de concentraciones de fondo del suelo, el cálculo de concentraciones específicas conforme a las características propias del sitio y de concentraciones basadas en la biodisponibilidad de los contaminantes.

En virtud de que los elementos regulados pueden estar presentes en el suelo de manera natural y en ocasiones en concentraciones tales que pueden representar un riesgo para la salud de la población humana o de los ecosistemas, es importante establecer criterios para determinar la contaminación antropogénica en suelos y en su caso las concentraciones de remediación. En el ámbito internacional estos criterios toman como base los valores de fondo y las evaluaciones de riesgo a la salud o ambiental.

Cuando las concentraciones de estos elementos en un suelo específico son mayores que las denominadas concentraciones de referencia, se pueden realizar estudios particulares para determinar las concentraciones específicas en suelos, que no representen un riesgo mayor. Estos estudios particulares determinan la movilidad y biodisponibilidad de los elementos normados y los parámetros de exposición reales en el sitio evaluado, a partir de las características propias del suelo en estudio.

En virtud del tipo y dimensiones de las áreas afectadas, y con la finalidad de atender situaciones específicas, la Norma se estructuró considerando dos escenarios: **a)** Extensión afectada menor o igual a 1000 m², **b)** Extensión afectada mayor a 1000 m². El primer escenario aplica generalmente para accidentes, emergencias o eventos de contaminación que deben resolverse inmediatamente y que de acuerdo con la experiencia registrada por las empresas, en la mayoría de los casos el área contaminada es menor a los 1000 m². Con base en las dimensiones de la superficie y la inminencia de riesgo, se deben aplicar criterios generales de remediación, los cuales no requerirán de estudios o procesos de toma de decisiones que impliquen retraso en los tiempos de respuesta. En el segundo escenario, que aplica generalmente a eventos contaminantes que se presentan de manera deliberada o fortuita, continua o súbita, en extensiones mayores a los 1000 m², es necesario conocer cómo se presentó el derrame, descarga, filtración, depósito o transferencia del contaminante al suelo y de éste a algún receptor. Para ello se debe desarrollar un modelo conceptual que permita identificar la presencia de población humana potencialmente expuesta, la(s) fuente(s) de contaminación, los mecanismos de liberación y de transporte de los contaminantes, las rutas y vías de exposición, así como establecer el área de estudio. Cabe mencionar, que estos escenarios no son excluyentes por tipo de evento.

Con la información del modelo conceptual, el responsable puede seleccionar entre cuatro opciones para establecer, una vez determinada la existencia de contaminación, la concentración objetivo de remediación:

1) Remediar hasta las concentraciones de referencia totales establecidas en la Tabla 1. Estas concentraciones se obtuvieron de la literatura internacional, en estudios realizados con base en la metodología de evaluación de riesgo a la salud, para evaluar y remediar sitios contaminados. En el cálculo se emplearon valores de toxicidad con factores de exposición estándar. Estas concentraciones de referencia que se consideran protegen al ser humano, se basan en rutas de exposición directas para las cuales se han desarrollado métodos, modelos y supuestos específicos, bajo condiciones particulares de uso de suelo y no consideran impactos al acuífero o ecológicos.

2) Remediar hasta las concentraciones de fondo. Para ello se obtendrá el valor de las concentraciones de los elementos normados que se encuentran de manera natural en el sitio o su entorno.

3) Remediar hasta concentraciones específicas totales. Aplicable cuando existe población humana potencialmente expuesta a algún(os) contaminante(s). Para su obtención se debe determinar el riesgo a la salud y al ambiente.

4) Remediar hasta las concentraciones de referencia de la fracción soluble establecidas en la Tabla 2 más la fracción soluble de la muestra de fondo. Aplicable cuando no existe población humana potencialmente expuesta. Estas concentraciones tienen como fundamento científico el que la fracción geodisponible, que en este documento se le denomina soluble, corresponde a iones solubles y/o partículas de tamaño pequeño (<0,45 micrómetros), que pueden moverse a través de los poros del suelo y subsuelo, y representar un riesgo potencial para los cuerpos de agua y por lo tanto al medio ambiente. La Tabla 2, que presenta las concentraciones de referencia de contaminantes solubles, se refiere a la concentración soluble en el lixiviado equivalente al 10% de las concentraciones máximas permisibles para los metales de la Tabla 2 de la NOM-052-SEMARNAT-2005, y para aquéllos no incluidos en dicha Norma, se tomaron los valores de la Tabla de Universal Treatment Standards del Código Federal de Regulaciones de los Estados Unidos de América (40 CFR 268.48).¹ En este apartado, se deben también evaluar las concentraciones totales en suelos cuyas concentraciones solubles no requieran remediarse. Cuando el suelo se disperse por aire a zonas donde las condiciones ambientales del suelo o cuerpos de agua puedan causar la solubilización de los metales y metaloides que contiene, deberán llevarse a cabo acciones preventivas para evitar su dispersión eólica y/o hídrica.

Con base en lo anterior, la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales y la Secretaría de Salud procedieron a elaborar la presente Norma Oficial Mexicana que establece criterios para determinar concentraciones de remediación de suelos contaminados por arsénico, bario, berilio, cadmio, cromo hexavalente, mercurio, níquel, plata, plomo, selenio, talio y/o vanadio.

1. Objetivo

La presente Norma Oficial Mexicana establece criterios para la caracterización y determinación de concentraciones de remediación de suelos contaminados por arsénico, bario, berilio, cadmio, cromo hexavalente, mercurio, níquel, plata, plomo, selenio, talio, vanadio y sus compuestos inorgánicos; así como los criterios de remediación.

2. Campo de aplicación

Esta Norma Oficial Mexicana es de observancia obligatoria para todas aquellas personas físicas y morales que deban determinar la contaminación de un suelo con materiales o residuos que contengan arsénico, bario, berilio, cadmio, cromo hexavalente, mercurio, níquel, plata, plomo, selenio, talio, vanadio y sus compuestos inorgánicos.

3. Referencias

Norma Oficial Mexicana NOM-141-SEMARNAT-2003, Que establece el procedimiento para caracterizar los jales, así como las especificaciones y criterios para la caracterización y preparación del sitio, proyecto, construcción, operación y postoperación de presas de jales, publicada en el Diario Oficial de la Federación el 13 de septiembre de 2004.

Norma Oficial Mexicana NOM-008-SCFI-2002, Sistema General de Unidades de Medida, publicada en el Diario Oficial de la Federación el 24 de octubre de 2002.

Para la correcta aplicación de esta norma se debe consultar la siguiente Norma Mexicana vigente o la que la sustituya:

Norma Mexicana NMX-AA-132-SCFI-2006, Muestreo de Suelos para la Identificación y la Cuantificación de Metales y Metaloides, y Manejo de la Muestra, publicada en el Diario Oficial de la Federación el -----.

4. Definiciones

Para los efectos de esta Norma Oficial Mexicana se consideran las definiciones contenidas en la Ley General del Equilibrio Ecológico y la Protección al Ambiente, Ley General para la Prevención y Gestión Integral de los Residuos, Ley de Aguas Nacionales, Ley General de Salud, y sus Reglamentos, así como las definiciones contenidas en la Norma Mexicana referida en el inciso 3, Referencias y las siguientes:

4.1 Bioaccesibilidad: fracción soluble de un elemento químico contenido en el suelo determinado a partir de un estudio *in vitro*.

4.2 Concentración específica total (CE_T): masa del elemento químico regulado, expresada en mg, por unidad de masa del suelo en estudio, expresada en kg, base seca, que se calcula de manera particular para un suelo, por encima de la cual se considera existe un riesgo a la salud de los seres humanos en las condiciones ambientales de transporte y exposición específicas del sitio.

4.3 Concentración de fondo total (CF_T): masa del elemento químico regulado, expresada en mg, por unidad de masa del suelo en estudio, expresada en kg, base seca, que se encuentra en un suelo de manera natural.

4.4 Concentración de fondo soluble (CF_S): masa del elemento químico regulado, expresada en mg, por unidad de volumen de la solución extractante, expresada en L, que se encuentra en un suelo de manera natural.

4.5 Concentración inicial total (CI_T): masa del elemento químico regulado expresada en mg, por unidad de masa del suelo en estudio, expresada en kg, base seca.

4.6 Concentración inicial soluble (CI_S): masa del elemento químico regulado, expresada en mg, por unidad de volumen de la solución extractante, expresada en L.

4.7 Concentración objetivo total: masa del elemento químico regulado, expresada en mg, por unidad de masa del suelo en estudio, expresada en kg, base seca, que se selecciona para remediar un suelo mediante alguno de los procedimientos establecidos en la presente Norma y que pueden ser: **CR_T, CF_T o CE_T**.

4.8 Concentración objetivo soluble: masa del elemento químico regulado, expresada en mg, por unidad de volumen de la solución extractante, expresada en L, que se selecciona para remediar un suelo cuando no hay población humana potencialmente expuesta y que corresponde a **CR_S + CF_S**.

4.9 Concentración de referencia soluble (CR_S): masa del elemento químico regulado, expresada en mg, por unidad de volumen de la solución extractante, expresada en L, que sumada a la concentración de fondo de la misma fracción, representa el valor máximo por encima de la cual existe riesgo para el medio ambiente.

4.10 Concentración de referencia total (CR_T): masa del elemento químico regulado, expresada en mg, por unidad de masa del suelo en estudio, expresada en kg, base seca, por encima de la cual se considera existe riesgo de que se generen efectos adversos para la salud.

4.11 Concentración total: masa del elemento químico regulado, expresada en mg, por unidad de masa del suelo en estudio, expresada en kg, base seca, extraído del suelo por digestión (ácida o alcalina) de acuerdo al método especificado en esta Norma.

4.12 Concentración soluble: masa del elemento químico regulado, expresada en mg, por unidad de volumen de la solución extractante, expresada en L, determinada de acuerdo al método de extracción especificado en esta Norma.

4.13 Controles institucionales: restricciones administrativas en el uso o acceso a un sitio o instalación, para reducir o eliminar la exposición potencial a los elementos normados presentes en el suelo.

4.14 Elementos normados (EN): los elementos químicos regulados en esta Norma Oficial Mexicana que son arsénico, bario, berilio, cadmio, cromo hexavalente, mercurio, níquel, plata, plomo, selenio, talio y vanadio.

4.15 Fuente de contaminación: toda actividad antropogénica que emite contaminantes que se depositan en el suelo, de manera deliberada o fortuita, continua o súbita.

4.16 Mecanismo de liberación: proceso físico, químico o biológico mediante el cual se hacen disponibles los contaminantes que se encuentran en la fase sólida del suelo.

4.17 Mecanismo de transporte: proceso físico mediante el cual los contaminantes migran hacia el suelo o del suelo hacia otro medio.

4.18 Modelo conceptual: herramienta que permite la representación escrita o esquemática de las condiciones prevalecientes en un sitio y que muestra la distribución, los mecanismos de transporte y liberación de los contaminantes y en la que se infieren las posibles rutas y vías de exposición, así

como los receptores potenciales. El modelo conceptual coadyuva también en establecer el área de estudio.

4.19 Población humana potencialmente expuesta: asentamiento humano que con base en el modelo conceptual puede entrar en contacto con sustancias o compuestos de origen antropogénico presentes en el medio ambiente, susceptibles de ocasionar efectos adversos en la salud.

4.20 Ruta de exposición: transporte eólico o hídrico que sigue el contaminante desde la fuente de contaminación hasta el organismo receptor.

4.21 Secretarías: Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales y Secretaría de Salud.

4.22 Suelo: material no consolidado, de origen natural, compuesto por partículas inorgánicas, materia orgánica, agua, aire y organismos, que incluye aquél alterado por actividades antropogénicas.

4.23 Vía de exposición: proceso por el cual el contaminante entra en contacto directo con el cuerpo, tejidos o barreras de intercambio del organismo receptor, por ejemplo, ingestión, inhalación y absorción dérmica.

5. Especificaciones

5.1 Especificaciones generales para extensiones menores o iguales a 1 000 m².

5.1.1. Cuando el suelo que se presume contaminado tiene una superficie menor o igual a 1 000 m², el responsable procederá a remediar a las concentraciones de referencia totales (**CR_T**) señaladas en la Tabla 1 o a seguir cualquiera de las metodologías descritas en la presente Norma.

TABLA 1		
Concentraciones de referencia totales (CR_T) por tipo de uso de suelo.		
Contaminante	Uso agrícola/residencial /comercial (mg/kg)	Uso industrial (mg/kg)
Arsénico	22	260
Bario	5 400	67 000
Berilio	150	1900
Cadmio	37	450
Cromo Hexavalente	280	510

Mercurio	23	310
Níquel	1 600	20 000
Plata	390	5 100
Plomo	400	800
Selenio	390	5 100
Talio	5,2	67
Vanadio	78	1000

NOTA:

a. En caso de que se presenten diversos usos del suelo en un sitio, debe considerarse el uso que predomine.

b. Cuando en los programas de ordenamiento ecológico y de desarrollo urbano no estén establecidos los usos del suelo, se usará el valor residencial.

5.2 Especificaciones generales para extensiones mayores a 1 000 m² con presencia de contaminantes.

5.2.1 Se debe desarrollar un modelo conceptual con base en las especificaciones establecidas en el numeral 5.3.

5.2.2 Con base en el modelo conceptual se debe determinar la existencia, origen, naturaleza y extensión de la contaminación por uno o más de los siguientes elementos: arsénico, bario, berilio, cadmio, cromo hexavalente, mercurio, níquel, plata, plomo, selenio, talio y vanadio, así como los receptores potenciales de la contaminación.

5.2.3 Cuando se determine que existe transporte vertical de contaminantes, se debe evaluar la vulnerabilidad del acuífero, con base en la metodología establecida en el Anexo Normativo 2 de la Norma Oficial Mexicana NOM-141-SEMARNAT-2003.

5.2.4 De conformidad con el modelo conceptual se debe determinar si hay población humana potencialmente expuesta.

5.2.4.1 Si hay población humana potencialmente expuesta y no hay un acuífero vulnerable se debe proceder de acuerdo a lo señalado en el numeral 5.4.

5.2.4.2 Si hay población humana potencialmente expuesta y hay un acuífero vulnerable se debe caracterizar el sitio conforme al numeral 5.4.1 y proceder a determinar concentraciones específicas totales de acuerdo a lo señalado en el numeral 5.4.7.

5.2.4.3. Si no hay población humana potencialmente expuesta se debe proceder de acuerdo a lo señalado en el numeral 5.5.

5.3. Desarrollo del Modelo Conceptual

5.3.1 Con base en la información documental y de campo sobre el sitio, se debe desarrollar una hipótesis que de manera gráfica, tabular o funcional, represente el fenómeno de contaminación.

5.3.2 El modelo conceptual, es la herramienta técnica fundamentada para seleccionar la metodología de muestreo más adecuada, la que deberá justificarse como representativa, considerando las condiciones particulares de cada sitio.

5.3.3 El desarrollo del modelo conceptual debe utilizar como guía la metodología establecida en el Apéndice Normativo A y considerar para el estudio del sitio, la información que de manera enunciativa y no limitativa se indica en la Tabla 1 del mismo Anexo.

5.3.4 El modelo conceptual debe determinar lo siguiente:

- a.** Fuente de contaminación del suelo.
- b.** Los mecanismos de liberación de los contaminantes.
- c.** Los mecanismos de transporte.
- d.** Las rutas de exposición.
- e.** Las vías de exposición.

5.3.5 El modelo conceptual debe actualizarse y complementarse con base en la información que se obtenga en los diferentes estudios y análisis que se realicen, así como con la caracterización del sitio. El proceso concluye en el momento en que se determine la concentración objetivo, o cuando de conformidad con lo que se establece en la presente norma, no sea necesario llevar a cabo la remediación.

5.4. Selección de la Concentración Objetivo para Sitios con Población Humana Potencialmente Expuesta y Procedimiento para su Determinación

5.4.1 El responsable debe efectuar un muestreo exploratorio conforme se establece en la Norma Mexicana NMX-AA-132-SCFI-2006 Muestreo de Suelos para la Identificación y la Cuantificación de Metales y Metaloides, y Manejo de la Muestra, y aplicar a las muestras de suelo los métodos analíticos descritos en el Apéndice Normativo B. Los resultados obtenidos corresponderán a las concentraciones iniciales totales (CI_T) de los elementos normados.

5.4.2 Un suelo puede representar un riesgo para la salud de las personas, cuando al menos una de las concentraciones de los elementos regulados en esta norma se encuentre por arriba de las concentraciones de referencia totales, ($CI_T > CR_T$), establecidas en la Tabla 1. Cuando las concentraciones iniciales sean menores o iguales a las concentraciones de referencia, ($CI_T \leq CR_T$), se considerará que el suelo no requiere de remediación.

5.4.3 Cuando las concentraciones iniciales totales son mayores a las concentraciones de referencia totales, ($CI_T > CR_T$), la persona física o moral responsable de la contaminación debe elegir la concentración objetivo de remediación, a través de alguna de las siguientes alternativas:

a. CR_T : la concentración total de los contaminantes en el suelo debe ser igual o inferior a las concentraciones de referencia (Tabla 1), conforme se establece en numeral 5.4.5.

b. CF_T : la concentración total de los contaminantes en el suelo debe ser igual o inferior a las concentraciones de fondo expresadas analíticamente como totales (CF_T), las cuales deberán ser determinadas como lo establece el numeral 5.4.6.

c. CE_T : la concentración total de los contaminantes en el suelo debe ser igual o inferior a las concentraciones específicas totales (CE_T), las cuales se deben determinar de acuerdo con lo establecido en el numeral 5.4.7.

5.4.4 Una vez definida la concentración objetivo, el primer paso es delimitar el área y estimar el espesor del suelo contaminado, para lo cual se realizará un muestreo de detalle de acuerdo a la NMX-AA-132-SCFI-2006 Muestreo de Suelos para la Identificación y la Cuantificación de Metales y Metaloides, y Manejo de la Muestra.

5.4.5 Determinación de Concentraciones Objetivo con base en Concentraciones de Referencia Totales (CR_T).

5.4.5.1 Un suelo requiere implementar acciones de remediación cuando las concentraciones iniciales totales sean superiores a las de referencia totales. ($CI_T > CR_T$).

5.4.6 Determinación de Concentraciones Objetivo con base en Concentraciones de Fondo Totales (CF_T).

5.4.6.1 Para determinar las concentraciones de fondo totales (CF_T) de la localidad, se debe proceder de acuerdo a la técnica de muestreo establecida en el numeral 8.4 de la Norma Mexicana NMX-AA-132-SCFI-2006 Muestreo de Suelos para la Identificación y la Cuantificación de Metales y Metaloides, y Manejo de la Muestra, y la determinación analítica del Apéndice Normativo B. Se tomará como concentración de fondo la media de la población cuando los valores obtenidos presenten una distribución normal y la mediana de la misma para una distribución diferente.

5.4.6.2 Cuando las concentraciones iniciales totales obtenidas en el muestreo exploratorio sean mayores a las concentraciones de fondo totales de al menos uno de los elementos en estudio, ($CI_T > CF_T$), y se elija como concentración objetivo la de fondo, el responsable debe implementar acciones de remediación.

5.4.6.3 Cuando las concentraciones iniciales totales en los suelos de los elementos regulados en esta norma, sean menores o iguales a las concentraciones de fondo, ($CI_T \leq CF_T$), el suelo no requiere de remediación.

5.4.7 Determinación de Concentraciones Objetivo con Base en Riesgo a la Salud (Concentraciones Específicas Totales: CE_T).

5.4.7.1 Para calcular las concentraciones específicas totales de los contaminantes en el sitio en estudio, el responsable de la contaminación debe llevar a cabo un estudio de evaluación del riesgo

ambiental, para determinar el riesgo a la salud y al medio ambiente de aquellos elementos que contaminan el suelo. El riesgo al medio ambiente se puede determinar también conforme al numeral 5.5.1.2.

5.4.7.2 En el caso de que uno de los contaminantes sea plomo, la determinación de su concentración específica se podrá realizar a través de una evaluación de la bioaccesibilidad en sustitución de la de riesgo a la salud señalada en el numeral 5.4.7.1, conforme se establece en los incisos a, b y c. Lo anterior aplica sólo en lo que respecta al plomo.

a. Calcular el valor de la concentración específica (CE_T) aplicando la siguiente ecuación:

$$CE_T = CR_T/BA \quad (\text{ec. 1})$$

En donde:

CE_T = concentración específica mg/kg

CR_T = concentración de referencia total mg/kg señalada en la Tabla 1

BA = factor de bioaccesibilidad (adimensional).

b. El factor de bioaccesibilidad (BA), se debe obtener conforme al método de prueba establecido en el Apéndice Normativo C.

c. Cuando exista la posibilidad de que el suelo potencialmente contaminado de lugar a la exposición de la población por otras vías de exposición diferentes de la ingestión de suelo, deben identificarse las rutas de exposición a través de las cuales se da este contacto, y llevarse a cabo acciones preventivas para interrumpir esas rutas de exposición en tanto se lleva a cabo la remediación.

5.4.7.3 Un suelo requiere de acciones de remediación cuando las concentraciones iniciales totales de los elementos normados sean mayores a las concentraciones específicas totales ($CI_T > CE_T$). En caso contrario, ($CI_T \leq CE_T$), no es necesario implementar acciones de remediación.

5.4.7.4 Una vez definida la concentración específica, se debe delimitar el área y estimar el espesor del suelo contaminado, para lo cual se realizará un muestreo de detalle de acuerdo a la NMX--AA-132-SCFI-2006 Muestreo de Suelos para la Identificación y la Cuantificación de Metales y Metaloides, y Manejo de la Muestra.

5.5 Determinación de Concentración Objetivo para Sitios sin Población Humana Potencialmente Expuesta.

5.5.1 En los casos que el modelo conceptual determine que no existe población humana potencialmente expuesta, el responsable puede optar por:

5.5.1.1 Caracterizar el sitio y determinar las concentraciones específicas, con base en un estudio de evaluación del riesgo ambiental para aquellos elementos que contaminan el suelo; o

5.5.1.2 Medir las fracciones solubles de los elementos cuyas concentraciones puedan afectar y contaminar el medio ambiente, mediante el siguiente procedimiento:

5.5.1.2.1 Efectuar un muestreo exploratorio y de fondo del área de estudio y de los alrededores conforme a lo establecido en la Norma Mexicana NMX-AA-132-SCFI-2006 Muestreo de Suelos para la Identificación y la Cuantificación de Metales y Metaloides, y Manejo de la Muestra.

5.5.1.2.2 Obtener la determinación analítica de las concentraciones totales y solubles con base en los métodos descritos en el Apéndice Normativo B.

Los resultados analíticos deben aportar:

- a. Las concentraciones iniciales totales (CI_T);
- b. Las concentraciones iniciales solubles (CI_S); y
- c. Las concentraciones de fondo solubles (CF_S).

5.5.1.2.3 Sumar las concentraciones de fondo solubles (CF_S) a las concentraciones de referencia de contaminantes solubles (CR_S) establecidas en la Tabla 2.

5.5.1.2.4 Cuando las concentraciones iniciales de la fracción soluble (CI_S) sean mayores a los valores obtenidos con la suma del numeral 5.5.1.2.3, ($CI_S > CR_S + CF_S$), se debe proceder a efectuar un muestreo a detalle en el sitio para delimitar el área y estimar el espesor del suelo contaminado.

TABLA 2	
Concentraciones de referencia de contaminantes solubles (CR_S)	
Contaminante	Concentración
	(mg/L)
Arsénico	0,500
Bario	10,000
Berilio	0,122
Cadmio	0,100
Mercurio	0,020
Níquel	1,100
Plata	0,500
Plomo	0,500

Selenio	0,100
Talio	0,020
Vanadio	0,160

En el caso de cromo hexavalente, se aplicarán los siguientes criterios:

a. Cuando el acuífero no es vulnerable, el valor de CI (soluble, adsorbida y precipitada), se debe obtener de aplicar el método descrito en el Apéndice Normativo B, sección B.2.2, el que expresado en mg/kg, deberá ser menor o igual al valor de CR_T señalado en la Tabla 1 para suelos de uso agrícola/residencial.

b. Cuando el acuífero sea vulnerable, el valor de CI (soluble, adsorbida y precipitada), se debe obtener de aplicar el método descrito en el Apéndice Normativo B, sección B.2.2, el que expresado en mg/L deberá ser menor o igual a 2 mg/L.

5.5.1.2.5 Una vez delimitada el área se debe proceder a remediar las zonas contaminadas. Dicha remediación tendrá como concentración objetivo la suma de las concentraciones de referencia solubles y de fondo soluble ($CR_S + CF_S$).

5.5.1.2.6 Cuando las concentraciones iniciales totales puedan dispersarse por aire a zonas donde las condiciones ambientales permitan la solubilización de los metales y metaloides, se deben implementar medidas que eviten la dispersión eólica y/o hídrica de los suelos.

5.6 Criterios para la remediación de suelos.

5.6.1 La remediación tiene por objeto eliminar o reducir la concentración de los contaminantes, o el control de los mismos dentro de parámetros que no pongan en riesgo a la salud y al ambiente, lo cual se puede llevar a cabo a través de:

- a.** Disminuir las concentraciones de los contaminantes de manera permanente.
- b.** Disminuir la bioaccesibilidad y/o solubilidad de los contaminantes.
- c.** Evitar la dispersión de los contaminantes en el ambiente.
- d.** El establecimiento de controles institucionales.

5.6.2 Los residuos y lixiviados que puedan ser generados durante el tratamiento del suelo contaminado deben manejarse conforme a la legislación vigente.

5.6.3 La remediación se debe llevar a cabo conforme la legislación vigente.

6. Evaluación de la conformidad

6.1 La Evaluación de la Conformidad, se realizará, a petición de parte, por la PROFEPA, por los Organismos de Certificación, por las Unidades de Verificación u Organismos de Tercera Parte acreditados y aprobados en los términos establecidos por la Ley Federal sobre Metrología y Normalización y su Reglamento. En el caso de riesgo a la salud, será la Secretaría de Salud, quien deberá revisar la determinación de las concentraciones específicas para el ser humano de contaminantes en el ambiente.

6.2. La SEMARNAT y la Secretaría de Salud establecen que el procedimiento de evaluación de la conformidad a seguir por la autoridad o por terceros debidamente acreditados y aprobados, para determinar el grado de cumplimiento de esta norma, se apegará a lo establecido en el Acuerdo mediante el cual se establece el Procedimiento para la Evaluación de la Conformidad para Normas Oficiales Mexicanas expedidas por la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales, publicado en el Diario Oficial de la Federación el 2 de enero de 2006.

7. Grado de concordancia con normas y lineamientos internacionales y con las normas mexicanas tomadas como base para su elaboración

Esta Norma Oficial Mexicana no concuerda con norma internacional alguna, ni norma mexicana por no existir al momento de su elaboración.

8. Bibliografía

ASTM (American Society of Testing and Materials) (1995) Standard Guide for Corrective Action Applied at Petroleum Release Sites. E1739-95. Pennsylvania. (Sociedad Americana de Pruebas y Materiales (1995). Guía de acciones correctivas aplicable a sitios con derrame de hidrocarburos. E1739-95. Pennsylvania).

ASTM (American Society of Testing and Materials). Standard Guide for Developing Conceptual Site Models for Contaminated Sites. E1689-95. (Sociedad Americana de Pruebas y Materiales. Guía para el desarrollo del modelo conceptual para sitios contaminados. E1689-95).

ATSDR (Agency for Toxic Substances and Disease Registry) (1992). Evaluación de Riesgos en Salud por la Exposición de Residuos Peligrosos. Traducción del Centro Panamericano de Ecología Humana y Salud. México.

Canadian Council of Ministers of the Environment. (1999). Summary of a protocol for the derivation of environmental and human health soil quality guidelines. Canadian soil quality guidelines for the protection of environmental and human health. Canada. (Consejo Canadiense de Ministros del Medio Ambiente (1999). Resumen de un protocolo para la obtención de las guías ambientales y de salud humana sobre calidad del suelo. Lineamientos canadienses de calidad de suelo para la protección del medio ambiente y la salud humana. Canadá).

Canadian Council of Ministers of the Environment. (1999). Guidance manual for developing site specific soil quality remediation objectives for contaminated sites in Canada. Canadian soil quality guidelines for the protection of environmental and human health. Canada. (Consejo Canadiense de Ministros del Medio Ambiente (1999). Guía para el desarrollo de objetivos específicos de remediación de suelos en sitios contaminados en Canadá. Lineamientos canadienses de calidad de suelo para la protección del medio ambiente y la salud humana. Canadá).

Commonwealth of Australia. (1999). Contaminated Sites. Best Practice Environmental Management in Mining. Environment Australia. (Commonwealth de Australia. (1999). Sitios contaminados. Las mejores prácticas para el manejo ambiental en minería. Medio Ambiente Australia).

DOD Environmental Technology Transfer Committee (1994). Remediation Technologies. Screening Matrix and Reference Guide. Federal Remediation Technologies Round Table. U.S.A. (Comité de transferencia de tecnología ambiental. Tecnologías de remediación. Matriz de evaluación y guía de referencia. Mesa Redonda de Tecnologías Federales de Remediación. E.U.A.).

GSI (Groundwater Services Inc.) (1999). RBCA Tool Kit for Chemical Releases v. 1.2. Texas. (GSI (Servicios de Aguas Subterráneas, Inc.) (1999). RBCA Herramientas para liberación de sustancias químicas. v. 1.2. Texas).

GSI (Groundwater Services Inc.) (2000). RBCA Tool Kit for Chemical Releases v. 1.3a. Texas. (GSI (Servicios de Aguas Subterráneas, Inc.) (1999). RBCA Herramientas para liberación de sustancias químicas. v. 1.3a. Texas).

ICME (1999). Guide to data gathering systems for risk assessment of metals and metal compounds. (ICME (1999) Guía de sistemas para la recopilación de datos de valoración de riesgo de metales y sus compuestos).

Innovative Technology Summary Reports (1999). Smart SamplingTM. Subsurface contaminant focus area. Prepared for U.S. Department of Energy. (Reportes Sumarios de Tecnologías Novedosas (1999). Muestreo Inteligente^{MR}. Area enfocada a contaminantes en el subsuelo. Preparado para el Departamento de Energía de los Estados Unidos).

Ministere de Laménagement du territoire et de L'environnement (1998). Gestion des sites (potentiellement) pollués. Version 1. France. (Ministerio de la Administración del Territorio y del Medio Ambiente (1998). Gestión de sitios (potencialmente) contaminados. Versión 1. Francia).

National Environmental Policy Institute. (2000). Assessing the bioavailability of metals in soil for use in human health risk assessments. USA. (Instituto Nacional de Políticas Ambientales. (2000). Evaluación de la biodisponibilidad de metales en suelo para la valoración de riesgo a la salud. E.U.A.).

NRC (National Research Council) 1983. Risk Assessment in the Federal Government: Managing the Process. National Academy Press. Washington, D.C. (Consejo Nacional de Investigación 1983. Evaluación del Riesgo en el Gobierno Federal: Administrando el Proceso).

National Academy Press. Washington, D.C. (Parametrix, Inc. (1995). Persistence, bioaccumulation and toxicity of metals and metals compounds. 1st publ. ICME.). (Parametrix, Inc. (1995) Persistencia, bioacumulación y toxicidad de metales y sus compuestos. 1era. edición. ICME.).

U.S. Department of Energy, Environmental Restoration Project (1999). Screening level ecological risk assessment methods. Environmental Cleanup Program. Los Alamos National Laboratory. University of California. (Departamento de Energía de los Estados Unidos. Proyecto de restauración ambiental. Métodos para la evaluación del riesgo ecológico. Laboratorio Nacional Los Alamos, Universidad de California).

U.S. Department of Transport. RAIS (2000). Glossary of useful terms found in risk assessment, embamb, health physics and waste management reports. (Departamento del Transporte de los Estados Unidos. RAIS (2000). Glosario de términos frecuentemente empleados en evaluación de riesgo, embamb, salud física y reportes de manejo de residuos).

U.S. EPA (United States Environmental Protection Agency) (1989). Risk Assessment Guidance for Superfund (RAGS), Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos. Guía del superfondo para evaluación de riesgo. <http://www.epa.gov/superfund/programs/risk/ragsa/index.htm>

U.S. EPA (United States Environmental Protection Agency) (s/a). Ground Water Contamination and Methodology. U.S.EPA Office of Research and Development. Technomic Publishing Co. Pennsylvania. 84-86. (Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos. Contaminación de Aguas Subterráneas y Metodología. US EPA Oficina de Investigación y Desarrollo. Technomic Publishing Co. Pennsylvania. 84-86).

U.S. EPA (United States Environmental Protection Agency) (1996). Soil Screening Guidance: Users Guide. Appendix C. Pub 9355.4-23. Office of Solid Waste and Emergency Response. Washington D.C. (Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos (1996). Guía para el tamiz o cribado del suelo. Manual del usuario, Apéndice C. Pub. 9355.4-23. Oficina de residuos sólidos y respuesta a emergencias. Washington D.C.).

<http://www.epa.gov/superfund/resources/soil/attachc.pdf>

U.S. EPA (United States Environmental Protection Agency) (Nov. 2003). Guidance for developing ecological soil screening levels. OSWER Directive. 9285.7-55 (Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos (Nov. 2003). Guía para desarrollar niveles de limpieza ecológicos en suelos OSWER Directive. 9285.7-55).

U.S.EPA (United States Environmental Protection Agency) (2001). Supplemental guidance for developing soil screening levels for superfund sites. (Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos (2001). Guía suplementaria para desarrollar niveles de limpieza de suelos en sitios del Superfondo).

U.S. EPA (United States Environmental Protection Agency) (2000a). List of Substances on IRIS (Integreated Risk Information System). (Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos (2000a). Lista de sustancias en el sistema IRIS (Sistema Integral de Información de Riesgo).

<http://www.epa.gov/iris/subst/index.html>

U.S. EPA (United States Environmental Protection Agency) (2000b). EPA Región III RBC Table 04/13/2000. <http://www.epa.gov/reg3hwmd/risk/riskmenu.htm>. (Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos (2000b). Tabla 04/13/2000 EPA Región III RBC).

<http://www.epa.gov/reg3hwmd/risk/riskmenu.htm>

U.S. EPA (United States Environmental Protection Agency) (2004). EPA Región 9 PRGs Tables. (Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos (2004). Tablas de los PRGs EPA Región 9).

<http://www.epa.gov/Region9/waste/sfund/prg/files/04prgtable-old2.pdf>

U.S. EPA (United States Environmental Protection Agency) (2004) Users Guide and Background Technical Document for USEPA Region 9's Preliminary Remediation Goals (PRG) Table (Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos) (2004). Guía del Usuario y Documento Técnico de Antecedentes para la Región 9 de la USEPA Tabla de Metas de Remediación Preliminares (PRG).

<http://www.epa.gov/docs/region09/waste/sfund/prg/files/04usersguide.pdf>

U.S. EPA (1993). Wildlife exposure factor handbook. Office of Health and Environmental Assessment. (Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos. Manual de factores de exposición de la vida salvaje. Oficina de Evaluación de Salud y Medio Ambiente).

U.S. EPA (2002). Soil calculations. (Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos (2002). Cálculos en suelos.) www.epa.gov/region9/waste/sfund/prg/files/02soils.pdf

U.S. Navy and Marine Corps. Guide for Incorporating Bioavailability Adjustments into Human Health and Ecological Risk Assessments at U. S. Navy and Marine Corps Facilities. 2000. (Guía para incorporar ajustes de bioaccesibilidad en la salud humana y evaluación de riesgo ecológico en las instalaciones de la Marina de los Estados Unidos. 2000).

Waste Management Act. Contaminated Sites Regulation. (1997). Province of British Columbia. Canada. (Ley para el Manejo de Residuos. Regulación de Sitios Contaminados. (1997). Provincia de Columbia Británica, Canadá).

7. Referencias

1. Núñez L, Roberto A, Meas V, Yunny, Ortega B, Olguín, E. *Fitorremediación: fundamentos y aplicaciones*. Ciencia: México, 2004. 69-88 pp.
2. Thomas, D., Vandemeulebroeke L. y Yamaguchi, K. *A mathematical evolution model for phytoremediation of metals*. Discrete Dynamical Systems-Series B, Volume 5, Number 2, May 2005.
3. www.ciudadmexico.com.mx/attractivos/parque_bicentenario.htm . Fecha de consulta: noviembre, 2011.
4. www.semarnat.gob.mx. Fecha de consulta: agosto, 2011.
5. Verma, P. George, K. , Singh, H.V. et al. *Modeling rhizofiltration: heavy-metal uptake by plant roots*. Environmental Modeling and Assessment, 2006. Vol. 11, 387-394 pp.
6. Thoma, G.J, Lam T.B. y Wolf D.C. *A mathematical model of phytoremediation for petroleum-contaminated soil: model development*. International Journal of Phytoremediation: Vol. 5, No.1, pp.41-55 (2003)
7. Thoma, G.J, Lam T.B. y Wolf D.C. *A mathematical model of phytoremediation for petroleum-contaminated soil: sensitive analysis*. International Journal of Phytoremediation: Vol.5, No.2, pp.125-136 (2003)
8. Baltrinaite E. y Butkus, D. *Modelling of Cu, Ni, Zn, Mn and Pb transport from soil to seedlings of coniferous and leafy trees*. Journal of Environmental engineering and landscape management: Vol. XV, No.4 pp.200-207, 2007.
9. Van der Kloet, P. and Neerhoff, F.J. *Behavoir of dynamic eigenpairs in slowly-varying systems*. Delft University of Technology, Faculty of Information Technology and Systems.
10. Zenger, K. y Ylinen, R. *Characteristic modes of time-variable linear differential systems*. Helsinki University of Technology, Control Engineering Laboratory, P.O. Box 5400, Finland.
11. Carless, M. *Introduction to linear and nonlinear systems*. School of Aeronautics & Astronautics, Purdue University, West Lafayette, Indiana, July 2008.
12. Kreyzig, E. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Wiley: México, 2004, Vol.2
13. Golubitsky, M. y Dellnitz, M. *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, con uso de Matlab*. International Thomson Editores: México, 2001.
14. Boyce, W. y Di Prima, R. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa: México, 2005.