UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

NUEVAS APORTACIONES AL PROBLEMA DEL ÁNGEL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

CARLOS VLADIMIRO GONZÁLEZ ZELAYA

DIRECTORA DE LA TESIS: DRA. RITA ESTHER ZUAZUA VEGA

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE, 2011

Para mi mamá.

Dios mueve al jugador, y éste, la pieza.
¿Qué Dios detrás de Dios la trama empieza
de polvo y tiempo y sueño y agonías?

Ajedrez
J. L. Borges

Índice general

Agradecimientos

Sirvan las siguientes líneas para expresar mi reconocimiento y admiración por las siguientes personas, quienes fueron de gran apoyo para la realización de este trabajo. A todos ellos les extiendo mi gratitud.

- A mi asesora, la Dra. Rita Zuazua Vega, quien me ayudó no sólo en este trabajo, sino a lo largo de mis estudios de maestría. Gracias a ella pude acomodar de manera mucho más ordenada y comprensible mis ideas. Al mismo tiempo, sus ideas me ayudaron a llegar a pruebas más elegantes y sencillas de las que yo tenía. También le agradezco enormemente el haberme ayudado a reencontrar mi gusto por las matemáticas.

- A mis sinodales y maestros: el M. en C. Alejandro Bravo Mojica, el Dr. Ricardo Gómez Aíza, el Dr. Bernardo Llano Pérez y el Dr. Juan José Montellano Ballesteros, les agradezco todos sus comentarios, sugerencias y observaciones sobre la tesis, que ayudaron a que hiciera un mejor trabajo. Les agradezco además por todas sus lecciones, en todos los aspectos de la vida de un matemático.

- A mi mamá, por apoyarme siempre en todo.

- A mis queridas tías: Elena, Flor, Ileana y Tania, quienes siempre están presentes en mí.

- A Violeta, por su apoyo incondicional.

- A mi papá, con quien siempre tengo pláticas interesantes y en cada encuentro me enseña algo nuevo.

- A mis herman@s, prim@s, tí@s y sobrin@s.

- A mis profesores, por haberme contagiado de su pasión por las Matemáticas, y por ayudarme a conocer y comprender un poco más de este mundo maravilloso: Luis Montejano, Javier Bracho, Óscar Falcón, Carlos Torres, Gilberto Calvillo, Betty Puga, Paco Struck, Carlos Cabrera, Rafa Rojas, Lucero de Teresa y Antonio Lazcano.

- A mis senseis del Go: José Chacón y Michael Yao.

- A mis maestros de la vida: Martín Manrique y Francisco Rivera.

- A Elwyn Berlekamp, John Conway y Richard K. Guy, padres de la Teoría de Juegos Combinatorios, por haberme introducido a este tema tan fascinante.

- A mis compañeros de clases, con quienes tuvimos largas tardes de trabajo, y quienes también me ayudaron muchas veces a terminar de entender varias cosas.

- A todos mis amigos, con quienes pasé hermosos momentos en la Facultad y fuera de ella, y que siempre estuvieron de buen humor tanto para divertirnos como para ayudarme: Henrik, Luis, Julián (×3), Adriana, Natalia (×2), Emil, Nico, Nir, Emilio, Rodrigo, Tarek, Otto, Patricio, Edi, Ale (×2), Cris, Alfredo, Dago, Mike, Vian, Pandita, Actuario, Dani, Andrew, Artur, Paco, Cup, Miguel, Ester, Yorch, Turcio, Temi, Mario, Marco, José, Chofa, Sil, Elf, Adax, Pia, Dero, Memo, Chupis, Elena, Chanti, Mema, Chac, Andrés, Juan Manuel, Amador, Mau, Xumo, Alex, Ángel, Jaime, Chavi, Tzolkin, Karel, Abraham, Jacob, Mucuy, Ilán, David, Salomón, Jorge, Angelito, Rosa, Camilo, Bere y todos los que por mi mala memoria olvidé poner, pero saben que los quiero.

- A todos los jugadores de Go en México y en el mundo, pues lo vuelven mucho más interesante y divertido.

- Al Go, que me ayudó a convencerme de que los juegos y las Matemáticas caminan de la mano, y que me sirve de Dojo mental y espiritual día a día.

Introducción

> “Sólo una partida”, dijeron, y empezaron a jugar – eso fue ayer.
>
> *Proverbio chino*

Este trabajo trata acerca del juego del Ángel y el Diablo, estudiado por la rama de las Matemáticas llamada Teoría de Juegos Combinatorios (TJC).

Un juego combinatorio se lleva a cabo entre dos jugadores, es carente de azar y provee a los jugadores con información perfecta. Esto quiere decir que las jugadas disponibles para ambos jugadores en todo momento serán conocidas por ambos, y que no existirán elementos de azar como podría ser el lanzamientos de dados.

Es precisamente la carencia de azar y la posibilidad de tener toda la información a la mano lo que hace posible analizar estos juegos desde una perspectiva determinista, permitiéndonos obtener previsiones claras y absolutas acerca del resultado final de estos juegos.

El aspecto combinatorio de estos juegos permite también hacer asociaciones con otras ramas de las Matemáticas como lo son la Teoría de Gráficas y el Análisis Combinatorio.

Ejemplos de juegos combinatorios lo son juegos muy sencillos, como puede ser el Gato (ó Tic-Tac-Toe en inglés), pasando por juegos algo más complicados, pero que cuentan con un algoritmo ganador sencillo y entendible, como el Nim, hasta juegos mucho más profundos y complejos como lo son el Ajedrez y el Go.

El juego del Ángel y el Diablo fue planteado por John H. Conway [4] en 1996. Se trata de un juego entre dos jugadores, uno de los cuales controla una pieza sobre el tablero -a la que llamaremos el Ángel- intentando moverse por siempre, mientras que el otro jugador intentará atrapar a la pieza del rival borrando casillas del tablero. Este juego se deriva del *Cuadráfago*, juego inventado por Richard Epstein en 1973 (ver [5]), en el que se trata con Diablos de mayor potencia.

Además de plantear el juego, Conway se hizo una pregunta que a primera vista parecería inocente y no particularmente difícil de responder, acerca del resultado del juego para un Ángel de potencia 2.

Sin embargo una vez que uno se interna en el problema, rápidamente se da cuenta de que no es en absoluto fácil dar con la respuesta, y prueba de ello es que tuvieron que pasar más de 10 años para que su pregunta fuera respondida, lo que ocurrió en 2007.

El juego del Ángel y el Diablo es de especial interés porque combina el aspecto combinatorio de la TJC con aspectos más propios de la Geometría, y también porque se trata de un juego que puede ser comprendido en un par de minutos, pero para el que probar los resultados puede ser muy difícil, siendo a menudo necesario recurrir tanto al ingenio como a ideas sofisticadas para lograr dichas pruebas.

Existe abundante literatura acerca del juego del Ángel y el Diablo, que va desde el planteamiento original del problema hecho por Conway en [4] y soluciones a los casos más sencillos, hechas por Berlekamp en [1] y Martin en [8], hasta la solución al problema en tres dimensiones por Bollobás [2], y las distintas soluciones al problema de Conway, escritas por Bowditch en [3], Gács en [6], Kloster en [7] y Máthé en [9]. Sin embargo, para las variantes planteadas en el Capítulo 3 no hay literatura disponible, por lo que este trabajo puede ser una pequeña aportación al tema.

Esta tesis consta de cuatro capítulos, a lo largo de los cuales se abordan las distintas variantes y facetas del juego.

En el **Capítulo 1** se plantea el juego del Ángel y el Diablo de la manera en que lo hizo Conway. Para abordar el problema, comenzamos con casos relativamente sencillos, como lo son el Dukego, en el que definimos al Duque, una pieza que se puede mover una casilla por turno, ya sea horizontal ó verticalmente, y el Kinggo, que es el juego del Ángel y el Diablo con un Ángel de potencia 1, una pieza que se moverá como el Rey del ajedrez. Damos también una nueva generalización para el Duque, definiendo una pieza a la que llamamos n-Torre. El capítulo concluye desarrollando un par de casos particulares que resolvió Conway en su artículo original, en los que se muestra cómo limitando al Ángel de ciertas maneras, es posible atraparlo sin importar su potencia.

El **Capítulo 2** trata acerca de la respuesta que se obtuvo en 2007 a la pregunta planteada por Conway de si el Ángel de potencia 2, una pieza que puede llegar a cualquier casilla a dos movimientos de Rey de su casilla original, puede moverse por siempre. La respuesta es afirmativa, lo que ya se sospechaba, pero requiere de una prueba muy interesante para quedar demostrada. En este capítulo se desarrolla la prueba de Kloster [7], aunque la modificamos en algunos aspectos un tanto crípticos en el artículo original para hacerla más clara y concisa.

El **Capítulo 3** está compuesto por nuevos resultados, que obtuvimos luego de modificar el juego original de modo tal que en vez de desarrollarse sobre un tablero cuadrado, ahora lo ubicamos sobre tableros triangulares. Al modificar el juego de ésta manera, se obtienen resultados distintos a los que uno obtiene sobre los tableros cuadriculados, aunque un par de pruebas hacen uso de los resultados obtenidos para el juego sobre tableros cuadriculados, adaptándolos a los tableros triangulares. Posteriormente, nos propusimos analizar el juego sobre una retícula hexagonal, y mostramos que el Ángel de potencia 1 puede ser atrapado en un tablero suficientemente grande.

Finalmente, en el **Capítulo 4** se dan las conclusiones a las que llegamos al realizar este trabajo, y se plantean preguntas que nos fueron surgiendo a lo largo de la investigación y que finalmente quedaron abiertas. Así mismo, nos aventuramos a conjeturar posibles respuestas a dichas preguntas, y hacemos algunos comentarios acerca de lo que nos motiva a creer en dichas conjeturas.

Capítulo 1

Preliminares

For Fools rush in where Angels fear to tread.

An Essay on Criticism
ALEXANDER POPE

En este primer capítulo se explica de qué trata el juego del Ángel y el Diablo, y presentaremos algunas variantes clásicas, como lo son el Dukego y el Kinggo, así como los casos planteados por Conway en su artículo original de los ángeles tontos, ángeles laxos y ángeles relajados. En todos estos casos se presentan los resultados conocidos más importantes.

Presentamos también una generalización del Dukego en la forma de un juego llamado Rookgo, en la que aparece una pieza, a la que llamamos n-Torre, que se comporta de manera similar al Duque, pero con mayor potencia. Mostramos que en este caso, sin importar la potencia de la Torre, esta podrá ser atrapada por el Diablo.

1.1. El juego

El juego del Ángel y el Diablo se lleva a cabo sobre una retícula bidimensional, que puede ser finita (de tamaño $m \times n$) o infinita ($\mathbb{Z}^2$). Dicha retícula puede ser visualizada más fácilmente como un tablero de ajedrez, ya sea finito o infinito. A cada casilla le corresponderá un par (x, y) de coordenadas enteras.

En su turno, el Diablo puede borrar una casilla cualquiera del tablero. Dicha casilla ya no podrá ser ocupada por el Ángel.

Definición 1.1.1. *Un* Ángel *de potencia n es una pieza sobre el tablero de ajedrez, que en su turno se puede mover a cualquier casilla no borrada* (x_1, y_1) *tal que* $|x - x_1| \leq n$ *y* $|y - y_1| \leq n$*, donde* (x, y) *es su posición al inicio del turno.*

El Diablo gana si puede encerrar al Ángel, esto es, rodearlo por una zanja borrada de ancho n.

En el caso de un tablero finito, el Ángel gana si puede alcanzar la orilla del tablero. En el caso de un tablero infinito, el Ángel gana si se puede seguir moviendo por siempre.

El problema del Ángel consiste en determinar si para alguna n suficientemente grande, el Ángel de potencia n puede ganar en un tablero infinito.

Berlekamp [1] mostró que el Diablo puede ganarle al Ángel de potencia 1 (un Rey), bastándole para lograrlo un tablero de 35×35 casillas.

Recientemente Kloster [7] probó que si $n \geq 2$, el Ángel tiene una estrategia ganadora. Antes de revisar dicha prueba, veremos que limitando al Ángel de ciertas maneras, sin importar su potencia, el Diablo puede ganar.

A lo largo de este trabajo estaremos empleando la métrica discreta infinita; esto es que la distancia entre dos puntos $a = (x_a, y_a)$ y $b = (x_b, y_b)$ estará dada por:

$$d(a, b) = max\{|x_a - x_b|, |y_a - y_b|\}.$$

1.2. Dukego

Antes de empezar a tratar con Ángeles, analizaremos el juego cuando la pieza sobre el tablero es un *Duque*. esta pieza, bastante más limitada que un Ángel, nos permite un análisis más sencillo del juego y dar estrategias muy claras tanto para el Duque como para el Diablo. A esta variante del juego se le conoce como *Dukego*, debido a que al Diablo se le pensó inicialmente como un jugador que va colocando piedras de *Go* en las casillas donde el Duque ya no podrá jugar.

Definición 1.2.1. *Un* Duque *es una pieza sobre el tablero de ajedrez, que en su turno se mueve una casilla, ya sea horizontal o verticalmente.*

El objetivo del Duque será llegar a la fila en la orilla del tablero, y el objetivo del Diablo será impedirlo.

Como convención, supondremos que el Duque comienza en la casilla central del tablero de ajedrez en caso de tener este tamaño impar, y en la casilla sudoeste de las cuatro casillas centrales en caso de tener el tablero tamaño par.

Si el jugador A puede ganar independientemente de a quien le toque jugar, diremos simplemente que el jugador A *puede ganar*.

En un juego de este tipo, claramente jugar en segundo lugar no representa nunca una ventaja, y de hecho en [8], Greg Martin caracteriza todos los tableros de ajedrez rectangulares de acuerdo a quien gana en el Dukego siguiendo una estrategia óptima, ya sea el Duque, el Diablo o el primero en jugar. A los tableros en los que gana el primero en jugar se les llama tableros *justos*. En su artículo, Martin muestra que los únicos tableros justos para el Dukego son los de 8×8, 7×8 y $6 \times n$, con $n \geq 9$.

Yo me enfocaré en los tableros cuadrados, para los que se dan los siguientes resultados:

Lema 1.2.2. *Si el Duque se encuentra en la casilla* $(m, 2)$*, y el Diablo ha borrado a lo más una casilla de las filas* $(A, 1)$ *y* $(A, 2)$*, con* $A = \{1, 2, \cdots, n\}$*, entonces el Duque puede ganar.*

Demostración. Para evitar que el Duque llegue a la orilla el Diablo debe jugar en $(m, 1)$, y suponiendo sin perdida de generalidad que la otra casilla se encuentra hacia la derecha del duque, este procederá a moverse hacia la izquierda, teniendo el Diablo que jugar siempre en la casilla al sur de la ocupada por el Duque, hasta llegar el Duque a la casilla $(2, 2)$, de donde podrá escapar jugando en $(2, 1)$ o en $(1, 2)$. □

Corolario 1.2.3. *El Duque puede ganar en un tablero de* 5×5 *o menor.*

Demostración. El Duque se puede mover en su primer turno al lado contrario del que jugó el Diablo, y ubicarse así a distancia 1 de una orilla que satisfaga las condiciones del Lema 1.2.2. □

Lema 1.2.4. *Si el Duque se encuentra en la casilla* $(4, 3)$*, y no hay casillas borradas en las filas* $(A, 1), (A, 2), (1, A)$ *y* $(2, A)$*, con* $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ *ni está borrada la casilla* $(3, 3)$ *(ver Figura 1.1), entonces el Duque puede ganar.*

Demostración. Como se ve en la Figura 1.2, el Diablo debe borrar **A** , para impedir que el Duque se mueva ahí y gane con la estrategia del Lema 1.2.2.

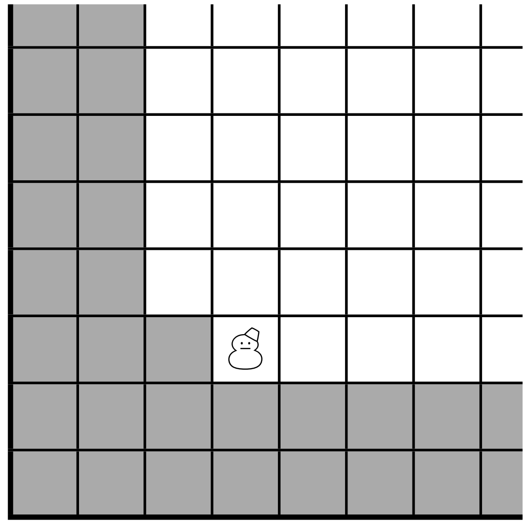

Figura 1.1: Condiciones para el Lema 1.2.4

Entonces el Duque se mueve a **1**, y el Diablo debe borrar **B** por la misma razón que **A**, con lo que el Duque se mueve a **2**, el Diablo borra **C**, y el Duque se mueve a **3**, de donde puede escapar por dos lados. □

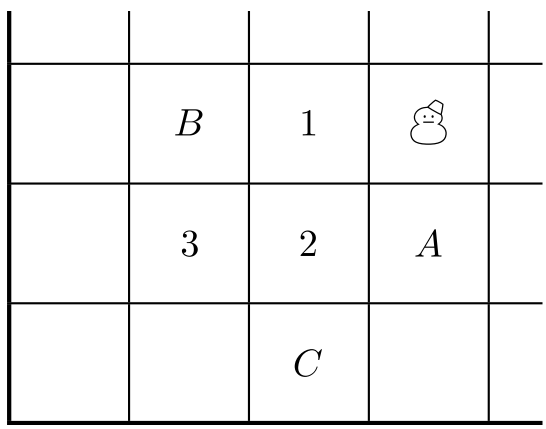

Figura 1.2: Triunfo en la Esquina para el Duque

Si el Duque se encuentra en la posición del Lema 1.2.4, diremos que tiene un *Triunfo en la Esquina* sudoeste del tablero, y lo mismo para las demás esquinas.

Corolario 1.2.5. *El Duque puede ganar en un tablero de* 7×7 *o menor.*

Demostración. Podemos suponer sin perdida de generalidad, debido a la simetría del tablero, que el Diablo juega en el cuadrante noroeste del tablero, o directamente al norte del Duque. Entonces el Duque se mueve hacia el sur y tiene un Triunfo en la Esquina sudoeste del tablero. □

Corolario 1.2.6. *Si el Duque empieza, puede ganar en un tablero de* 8×8.

Demostración. El Duque se mueve hacia el sur en su primer movimiento y obtiene un Triunfo en la Esquina sudoeste. □

Ya vimos los casos de tableros cuadrados en los que puede ganar el Duque. Ahora veremos los casos en los que el Diablo puede ganar.

Una observación importante es que si el Diablo logra borrar las cuatro casillas simétricas a la casilla $(2,2)$ (casillas *tipo* $(2,2)$) antes de que el Duque llegue a la segunda fila, el Duque no podrá escapar, pues el Diablo simplemente borrará la casilla de la orilla que quede más cercana al Duque en todo momento. Como solo las casillas tipo $(2,2)$ ofrecen un doble escape al Duque, esto no será un problema para el Diablo.

Lema 1.2.7. *Si el Diablo empieza, puede ganar en un tablero de* 8×8.

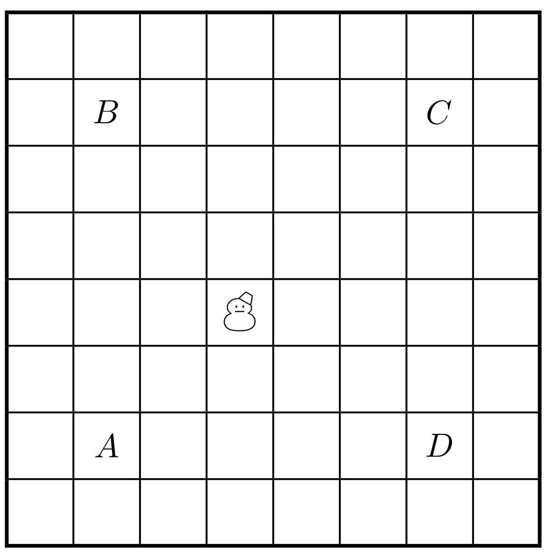

Figura 1.3: Estrategia para el Diablo en el tablero de 8×8.

Demostración. En su primer movimiento, el Diablo debe borrar **A** en la Figura 1.3. Posteriormente, el Diablo borrará la casilla tipo $(2,2)$ que le quede más cercana al Duque después de su movimiento. Mientras no haya riesgo inmediato de escape por el Duque, el Diablo podrá seguir borrando las casillas tipo $(2,2)$, borrando siempre la que le quede más cerca al Duque después de su movimiento, y una vez que haya borrado las cuatro, el Duque no podrá escapar. □

Corolario 1.2.8. *El Diablo puede ganar en un tablero de* $n \times n$, *con* $n \geq 9$.

Demostración. Después del primer movimiento del Duque, el Diablo puede olvidarse de la fila que le quede más lejos al Duque entre las filas sur y la norte, y olvidarse también de la fila que le quede más lejos al Duque entre las filas este y oeste. El Duque se ubicará entonces en el centro de un tablero de 8×8, y será el turno del Diablo, por lo que podrá seguir la estrategia del Lema 1.2.7 y confinar al Duque dentro de ese tablero, que quedará a su vez contenido en el tablero original. □

Los Corolarios 1.2.5 y 1.2.6, así como el Lema 1.2.7 y el Corolario 1.2.8 quedan englobados en el siguiente

Teorema 1.2.9. *Dado un tablero de ajedrez de* $n \times n$ *y jugando de manera óptima, en el juego de Dukego se obtienen los siguientes resultados:*

$$\begin{aligned} \textit{El Duque gana} \quad & \textit{si} \quad n < 8 \\ \textit{El primer jugador gana} \quad & \textit{si} \quad n = 8 \\ \textit{El Diablo gana} \quad & \textit{si} \quad n > 8. \end{aligned}$$

1.3. Rookgo

Una posible generalización del Duque sería una pieza que se pudiera mover n casillas en cada turno, pero todas ellas en línea recta. Llamaremos a dicha pieza una n-*Torre*.

Definición 1.3.1. *Llamaremos una* Torre *de potencia* n *a una pieza sobre el tablero tal que en su turno puede moverse horizontal o verticalmente a cualquier casilla que se encuentre a distancia menor o igual que* n *de su casilla inicial. Sin embargo, si existe una casilla borrada sobre la trayectoria en la que quiere moverse la Torre, a distancia menor o igual que* n, *la Torre no podrá moverse más allá de la casilla anterior a la casilla borrada.*

Al igual que el Duque, al inicio del juego la n-Torre estará tan cerca del centro del tablero como sea posible.

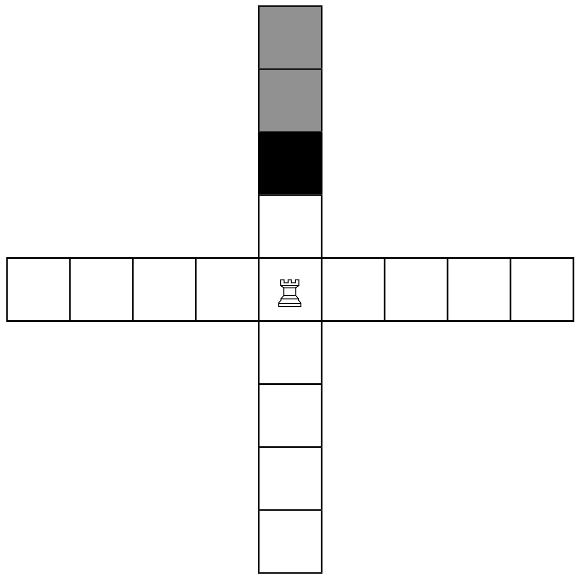

Figura 1.4: Posibles movimientos de una n-Torre, en este caso con $n = 4$. No puede alcanzar las casillas grises, pues hay una casilla borrada entre ellas y la Torre.

Teorema 1.3.2. *En un tablero cuadrado de lado* $8n^2 + 2n + 3$*, el Diablo puede atrapar a una* n*-Torre para toda* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. Dada una Torre de potencia n, sabemos que tardará al menos $\lfloor \frac{r}{n} \rfloor$ turnos para alcanzar la orilla, donde r es la distancia de la posición inicial de la n-Torre a la orilla más cercana. Por lo tanto, dado $s \in \mathbb{N}$ es posible elegir una r arbitrariamente grande tal que la n-Torre tarde al menos s turnos en alcanzar la orilla. Si elegimos r tal que la n-Torre tarde $4n + 2$ turnos en alcanzar la orilla, será posible atraparla en dicho tablero. Para ello, el Diablo borrará n casillas de cada una de las cuatro esquinas del tablero durante sus primeros $4n$ turnos, como se muestra en la Figura 1.5.

Una vez llevados a cabo estos preparativos, la n-Torre hará su jugada número $4n + 1$, y si queda a distancia menor o igual que n de alguna orilla, el Diablo simplemente borrará la casilla sobre la orilla a la que podría llegar la Torre en su siguiente movimiento.

Gracias a las casillas borradas en los primeros $4n$ turnos por el Diablo, la n-Torre no podrá buscar un doble escape por las esquinas, y en cada turno podrá amenazar con escapar por a lo más una casilla sobre la orilla del tablero. En cada caso, el Diablo simplemente procederá a borrar dicha casilla.

Por lo tanto, el Diablo puede atrapar a una n-Torre, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Respecto al tamaño mínimo del tablero para garantizar que se puede atrapar a la Torre, nos basta con hacer r mayor o igual que $(4n+1)n+1 = 4n^2+n+1$. Como queremos que la n-Torre empiece lo más cerca posible al centro del tablero, el tamaño mínimo del tablero para garantizar que atraparemos a la Torre será de $8n^2+2n+3$.

Todos estos cálculos son asumiendo que empieza la n-Torre. En caso de que empiece el Diablo, podremos reducir el tamaño del tablero a $8n^2+3$ y garantizar que el Diablo puede atrapar a la Torre.

□

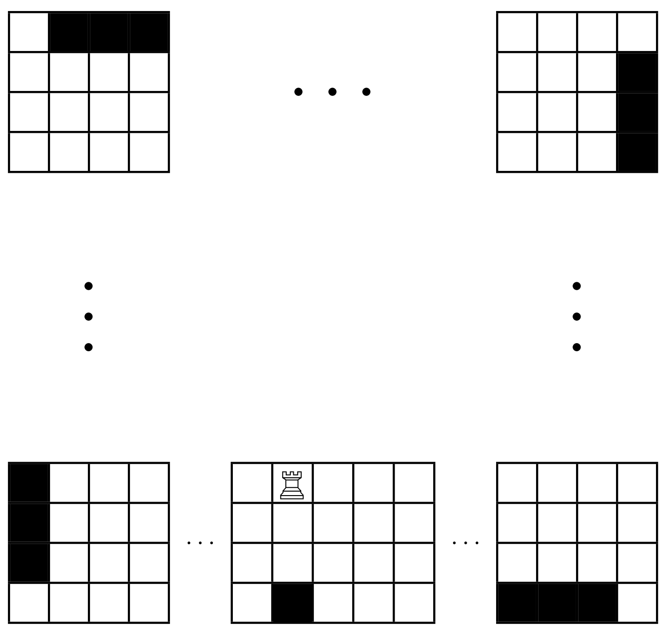

Figura 1.5: Sin importar su potencia, en un tablero suficientemente grande una Torre no podrá escapar. En este caso, el Diablo atrapa una Torre de potencia 3, borrando la casilla de la orilla por la que podría escaparse.

1.4. Atrapando al Rey

En esta sección mostraremos la prueba de Berlekamp [1] de que el Diablo puede atrapar a un Ángel de potencia 1 en un tablero de 35×35 casillas. Esta prueba está dada por una estrategia explícita del Diablo. A esta variante del juego se le conoce como *Kinggo*. De nueva cuenta, supondremos que el Rey comienza ubicado en una casilla tan céntrica como sea posible.

Definición 1.4.1. *Un* Rey *es un Ángel de potencia 1.*

Veremos primero como con una posición relativamente libre, si el Rey se encuentra en la quinta fila o más cerca de la orilla, este puede ganar. Esto lo ilustra la Figura 1.6. En esta figura, la línea gruesa indica la orilla del tablero. Las casillas en negro pueden estar borradas, ya que no son importantes para la estrategia del Rey.

Definición 1.4.2. *El* cono inferior del Rey relativo a E *(*cono inferior del Rey*) consiste de la casilla en la que se encuentre el Rey, así como de todas las casillas a las que podría llegar si en cada movimiento estuviera obligado a acercarse a la orilla E. Al conjunto de las casillas del cono inferior que se encuentren en la primera fila les llamaremos* el piso *del cono inferior.*

Lema 1.4.3. *Si el Rey se encuentra en la quinta fila o más cerca de la orilla, y su cono inferior se encuentra libre, pudiendo inclusive haber casillas borradas donde lo muestra la Figura 1.6, entonces el Rey puede ganar.*

Demostración. En las configuraciones (a) y (b) de la Figura 1.6 claramente el Rey puede ganar, pues si el Diablo borra una de las opciones disponibles para el Rey, este simplemente se mueve a la otra opción y gana. Para ver que en las configuraciones $(c)(d)\cdots(i)$ el Rey puede ganar, usaremos una prueba recursiva: si el Diablo borra una casilla marcada con la letra x, entonces el Rey puede moverse a una casilla tal que quede en la configuración x. Si el Diablo borra una casilla marcada con la letra x', entonces el Rey puede moverse a una casilla que quede en la configuración x', que es la configuración x reflejada.

Veamos caso por caso.

- Si el Rey se encuentra en la configuración (c):
    - Si el Diablo borra la casilla $(1,1)$ o la $(1,2)$, que están marcadas con la letra a, el Rey se mueve a la casilla $(2,2)$ y queda en la configuración (a).

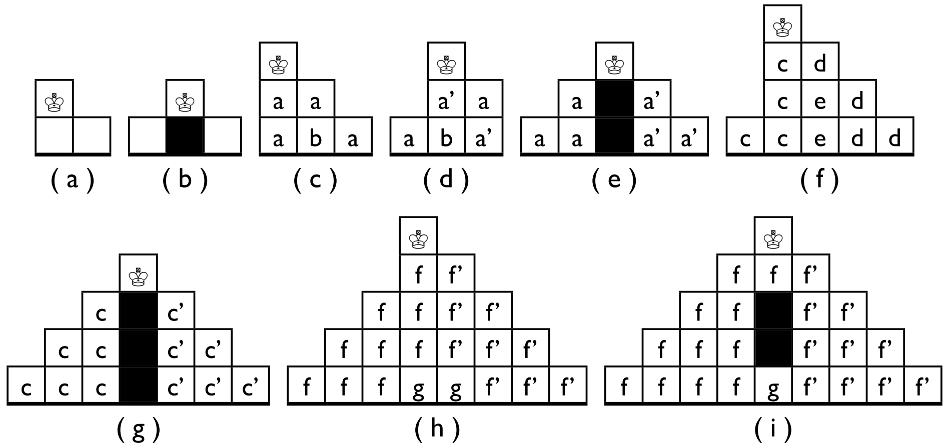

Figura 1.6: Estrategia del Rey para alcanzar la orilla.

- Si el Diablo borra la casilla $(2,2)$ ó $(3,1)$, el Rey se mueve a la casilla $(1,2)$ y de nueva cuenta queda en la configuración (a).
- Si el Diablo borra la casilla $(2,1)$, que está marcada con la letra b, el Rey se puede mover en diagonal hacia la casilla $(2,2)$ y quedará efectivamente en la configuración (b).

▪ Si el Rey se encuentra en la configuración (d):

- Si el Diablo borra la casilla $(1,1)$ o la $(3,2)$, el Rey se mueve a $(2,2)$ y queda en (a).
- Si el Diablo borra la casilla $(2,2)$, el Rey se mueve a $(3,2)$ y queda en $(a)'$.
- Si el Diablo borra la casilla $(3,1)$, el Rey se mueve a $(2,2)$ y queda en $(a)'$.
- Si el Diablo borra la casilla $(2,1)$, el Rey se mueve a $(2,2)$ y queda en (b).

▪ Si el Rey se encuentra en la configuración (e):

- Si el Diablo borra cualquiera de las casillas marcadas a, el Rey se mueve a $(4,2)$ y queda en (a).
- Si el Diablo borra cualquiera de las casillas marcadas a', el Rey se mueve a $(2,2)$ y queda en $(a)'$.

- Si el Rey se encuentra en la configuración (f):
    - Si el Diablo borra cualquiera de las casillas marcadas c, el Rey se mueve a $(3,3)$ y queda en (c).
    - Si el Diablo borra cualquiera de las casillas marcadas d, el Rey se mueve a $(2,3)$ y queda en (d).
    - Si el Diablo borra cualquiera de las casillas marcadas e, el Rey se mueve a $(3,3)$ y queda en (e).
- Si el Rey se encuentra en la configuración (g):
    - Si el Diablo borra cualquiera de las casillas marcadas c, el Rey se mueve a $(5,3)$ y queda en (c).
    - Si el Diablo borra cualquiera de las casillas marcadas c', el Rey se mueve a $(3,3)$ y queda en $(c)'$.
- Si el Rey se encuentra en la configuración (h):
    - Si el Diablo borra cualquiera de las casillas marcadas f, el Rey se mueve a $(5,4)$ y queda en (f).
    - Si el Diablo borra cualquiera de las casillas marcadas f', el Rey se mueve a $(4,4)$ y queda en $(f)'$.
    - Si el Diablo borra cualquiera de las casillas marcadas g, el Rey se mueve a la casilla que quede sobre la borrada y queda en (g).
- Si el Rey se encuentra en la configuración (i):
    - Si el Diablo borra cualquiera de las casillas marcadas f, el Rey se mueve a $(6,4)$ y queda en (f).
    - Si el Diablo borra cualquiera de las casillas marcadas f', el Rey se mueve a $(4,4)$ y queda en $(f)'$.
    - Si el Diablo borra la casilla marcada g, el Rey se mueve a $(5,4)$ y queda en (g).

La Figura 1.7 muestra como puede pasar el Rey de la configuración (i) a las configuraciones (f), (f') o (g) dependiendo de la casilla que borre el Diablo. Si el Diablo borra una casilla del tipo de la coloreada de gris oscuro,

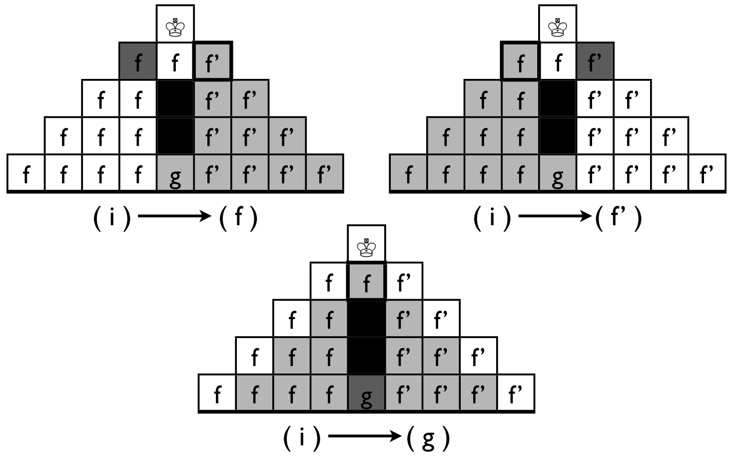

Figura 1.7: Cómo pasa el rey de la configuración (i) a configuraciones más sencillas.

el Rey se mueve a la casilla remarcada y queda dentro de la configuración coloreada de gris suave.

Como una configuración dada siempre nos refiere a una configuración con letra anterior, eventualmente el Rey llegará a la configuración a, a' o b, donde ya vimos que puede ganar.

$\square$

Corolario 1.4.4. *El Rey puede ganar en un tablero de $m \times n$ si $m \leq 11$.*

Demostración. Como se puede ver en la Figura 1.8, el tablero contiene dos copias de la configuración (h) de la Figura 1.6, por lo que si el Diablo borra una casilla en una de las copias, el Rey simplemente se mueve para quedar sobre la otra copia de (h). Si el tablero no alcanza a contener a h por ser $n < 8$, entonces el Rey se encuentra más cerca de la orilla que la quinta fila, por lo que por el Lema 1.4.3 puede ganar.

$\square$

Corolario 1.4.5. *El Rey puede ganar en un tablero de $12 \times n$ si comienza él.*

Ahora veremos cómo puede hacer el Diablo para evitar que el Rey alcance la orilla, siempre y cuando este se encuentre relativamente lejos de la misma.

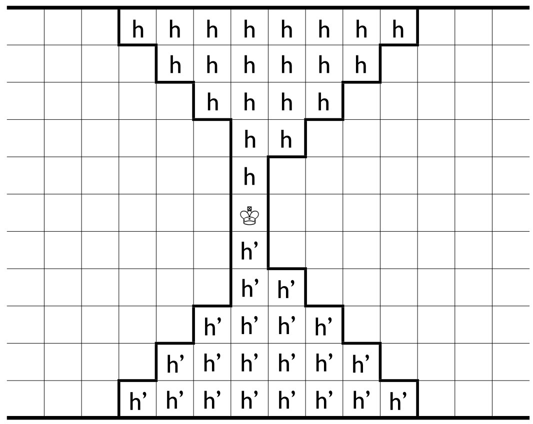

Figura 1.8: El Rey gana en un tablero de $11 \times n$.

Teorema 1.4.6. *El Diablo puede impedir que el Rey escape* por la orilla *si le toca jugar y el Rey se encuentra en la sexta fila.*

Demostración. Nos fijaremos en el cono inferior del Rey cuando este se encuentra en la sexta fila. Si asignamos letras a las casillas del piso del cono inferior, como se ve en la Figura 1.9, la estrategia del Diablo será la siguiente. Para empezar el Diablo borrará la casilla F; posteriormente borrará la casilla de la primera fila indicada con minúscula en la casilla en la que caiga el Rey. En las casillas con dos letras, el Diablo borrará la casilla indicada que no haya borrado anteriormente.

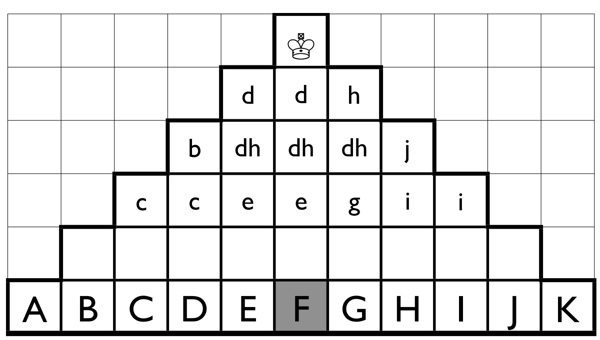

Figura 1.9: Instrucciones para impedir que el Rey alcance la orilla.

Mientras el Rey se mantenga en la sexta fila, no hará ningún progreso: el Diablo simplemente se fijará en el cono inferior determinado por la nueva posición del Rey.

Igualmente, moverse sobre la cuarta o quinta fila no representa ninguna ganancia para el Rey, pues moverse a la derecha o a la izquierda lleva al Rey a una versión reflejada (con una nueva etiquetación) del cono inferior en el que se encontraba, si se encuentra en la quinta fila, o a un nuevo cono con aún más casillas borradas (ver Figura 1.10). Claramente, ascender hacia una fila superior sería aún peor para el Rey. Por estas razones, podemos pensar que el problema se desarrolla sobre el cono inicial.

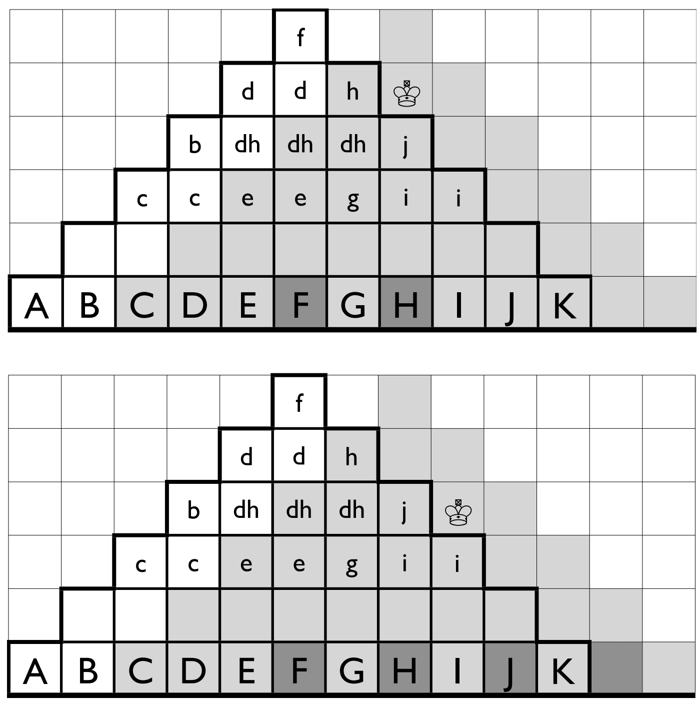

Figura 1.10: Moverse hacia los lados sobre la quinta fila lleva al Rey a un reflejo de su situación anterior (arriba) y moverse hacia los lados lleva al Rey a una situación con más casillas borradas (abajo). El Rey se movió de $(7,5)$ a $(8,5)$ en el diagrama de arriba, y de $(8,4)$ a $(9,4)$ en el diagrama de abajo.

El paso del Rey por la quinta y cuarta línea lo utilizará el Diablo para borrar las casillas del piso de manera salteada (borrará únicamente casillas *pares*: B, D, H y J), y veremos que, sin importar a qué casilla del cono llegue sobre la tercera fila, el Diablo podrá impedir que el Rey alcance la primera fila.

Como hemos visto que moverse sobre la misma fila o subir es desventajoso para el Rey, veremos las maneras que tiene este de llegar a la tercera fila siempre descendiendo, y las configuraciones en las que se encontrará al llegar.

Para llegar a la casilla $(3,3)$ de la Figura 1.9, como el Rey siempre desciende, debe hacerlo por la diagonal izquierda del cono, por lo que el Diablo borrará las casillas B, C y D.

Para llegar a la casilla $(3,4)$, el Rey debe pasar forzosamente por alguna casilla marcada con la letra d, ya sea en la quinta o en la cuarta línea, por lo que el Diablo borrará las casillas C, D y F.

Para llegar a la casilla $(3,5)$, de nueva cuenta el Rey debe pasar forzosamente por alguna casilla marcada con la letra d, por lo que el Diablo borrará las casillas D, E y F.

Para llegar a la casilla $(3,6)$, el Rey pasará forzosamente por casillas marcadas con d y h, por lo que el Diablo borrará las casillas D, E, F y H.

Las tres últimas casillas de la tercera fila son simétricas a las primeras tres.

De cualquier manera, al llegar el Rey a la tercera fila, quedarán a lo más dos casillas alcanzables dentro de su cono, y además estas dos no serán alcanzables desde la misma casilla en la segunda fila (ver Figura 1.11).

De nueva cuenta, moverse hacia los lados sobre la tercera fila no presenta ningún beneficio para el Rey, pues a lo más tendrá una nueva casilla alcanzable haciendo esto, misma que podrá borrar el Diablo.

De lo anterior se desprende que, sin importar cómo llegue el Rey a la segunda fila, este se encontrará frente a tres casillas borradas de la primera.

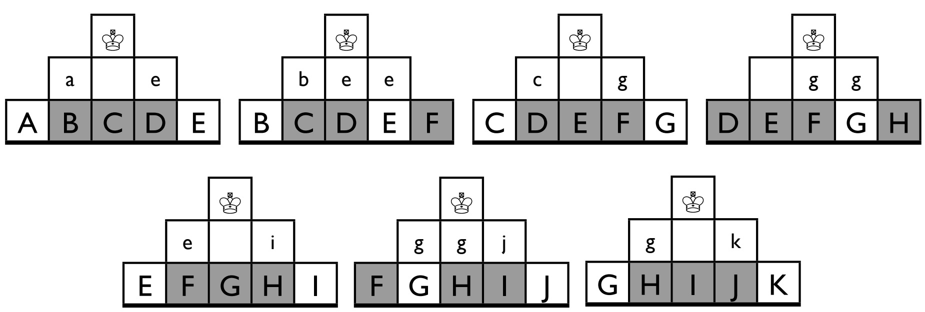

Figura 1.11: Posiciones en las que el Rey puede llegar a la tercera fila.

Para finalizar la prueba, hacemos la observación de que si el Rey se encuentra en la segunda fila frente a tres casillas borradas de la primera, jamás podrá escapar por dicha fila, pues si se mueve a la izquierda el Diablo simplemente borrará la siguiente casilla libre a la izquierda, y lo mismo para la derecha.

□

Corolario 1.4.7. *En una franja infinita de ancho* 13*, el Diablo puede evitar que el Rey escape por la orilla.*

Demostración. En cuanto el Rey se acerque a una orilla, el Diablo utilizará la estrategia del Lema 1.4.6 para evitar que escape por dicha orilla.

□

Corolario 1.4.8. *En una franja infinita de ancho* 12*, el Diablo puede evitar que el Rey escape por la orilla si comienza él.*

Demostración. El Diablo utilizará la estrategia del Teorema 1.4.6 para evitar que el Rey escape por la orilla que le quede más cerca al comenzar.

□

Hemos visto cómo el Diablo puede evitar que el Rey llegue a la orilla, pero esto le sirve a lo mucho para evitar que el Rey escape por la orilla, y eso ocurre sólo si el tablero es una franja infinita. En caso contrario, esta estrategia no basta para asegurar que el Rey no escape, pues simplemente podría ir amenazando con huir por la orilla hasta llegar a la esquina. Veremos sin embargo que si el tablero es lo suficientemente grande, esto tampoco ocurrirá.

Teorema 1.4.9. *El Diablo puede atrapar a un Rey.*

Supondremos que comienza el Diablo y que al principio del juego el Rey se encuentra ubicado en la casilla central, es decir, la casilla $(30, 30)$.

Demostración. El objetivo del Diablo será evitar que el Rey llegue a pisar la fila 1. Para empezar, queremos quitar 6 casillas de cada esquina, como se muestra en la Figura 1.12, antes de que el Ángel llegue a la fila 6. Como la distancia del centro del tablero a la fila 6 es 24, el tamaño del tablero nos garantiza que esto ocurra.

Como hemos visto, el Diablo puede evitar que el Rey escape por una orilla, por lo que para completar la prueba nos basta ver que al acercarse a una esquina, el Rey tampoco podrá escapar.

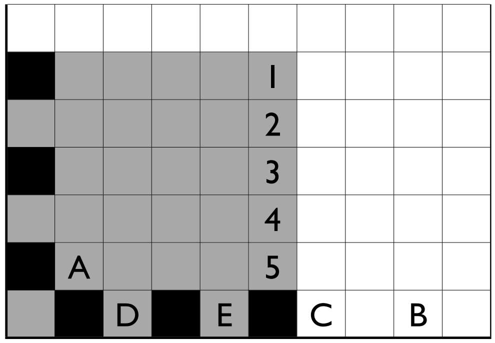

Figura 1.12: Los preparativos del Diablo para atrapar al Rey en un tablero de 59×59 casillas.

Más precisamente, nos interesa ver qué ocurre cuando el Rey entra en el cuadrado formado por las casillas

$$\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),\cdots,(6,6)\},$$

sombreado en la Figura 1.12.

Veremos que, independientemente de por dónde entre al cuadrado, el Diablo podrá evitar que el Rey escape por la esquina o por la orilla. Dada la simetría de la posición, existen 5 sitios por los que el Rey podría entrar al cuadrado, como se ve en la Figura 1.12.

Analicemos ahora caso por caso:

- Si el Rey entra al cuadrado por 1, el Diablo simplemente borra la casilla A. En este caso el Rey no puede escapar por la orilla de abajo, debido al Teorema 1.4.6, pues se encontrará en un cono de altura 6 con la casilla central borrada, ni podrá escapar por la orilla izquierda por el mismo motivo.

  Notemos que A podría también ser la casilla $(1,1)$, pero A es superior debido a que defiende un posible ataque doble del Rey, precisamente en A.

- Si el Rey entra al cuadrado por 2, el Diablo borra B, negándole al Rey la salida por la orilla inferior. Si en su siguiente movimiento el Rey se mantiene dentro del cuadrado, el Diablo juega A y el Rey ya no podrá escapar, bastándole al Diablo en todo momento borrar la casilla de la primera fila que le quede más cerca al Rey. Si después de 2 el Rey sale del cuadrado, el Diablo borra C impidiendo que el Rey salga por la orilla inferior.

- Si el Rey entra por 3, el Diablo empieza borrando C, para prevenir un escape por la orilla inferior.

    - Si en su siguiente movimiento el Rey se acerca a la orilla inferior, el Diablo jugará en D si el Rey se mantiene adentro del cuadrado, o B si sale del mismo. En ambos casos, el Rey ya no podrá alcanzar la orilla inferior ni la esquina.
    - Si en su siguiente movimiento el Rey no se acerca a la orilla inferior, el Diablo borrará A si el Rey se mantiene en el cuadrado, o B si sale del mismo. En ambos casos, el Rey ya no podrá alcanzar la orilla inferior ni la esquina.

- Si el Rey entra por 4, por la prueba del Teorema 1.4.6 podemos suponer que la casilla en medio de C y B ya está borrada, por lo que el Diablo simplemente borrará E. Esto impedirá que el Rey escape por la orilla inferior, y en cuanto pueda el Diablo borrando A garantizará que el Rey no escape por la esquina.

- Finalmente, si el Rey entra al cuadrado por 5, por la prueba del Teorema 1.4.6, C ya estará borrada, por lo que de nuevo el Diablo simplemente borrará E y en cuanto pueda borrará A, garantizando que el Rey no pueda escapar.

Por la simetría del cuadrado, estos cinco casos nos bastan para probar que el Rey no puede escapar, siempre y cuando el tablero sea suficientemente grande.

□

De hecho, se puede probar que en un tablero de 33×33 el Rey tampoco puede escapar, pero la prueba es mucho más complicada, y nuestro propósito es simplemente mostrar que el Rey no escapa en algún tablero.

1.5. Atrapando a un Ángel Tonto

Definición 1.5.1. *Un* Ángel Tonto *(AT) es un Ángel que en cada movimiento incrementa su coordenada y; esto es, se puede mover de un punto (x, y) a (x_1, y_1) si y sólo si $y_1 > y$.*

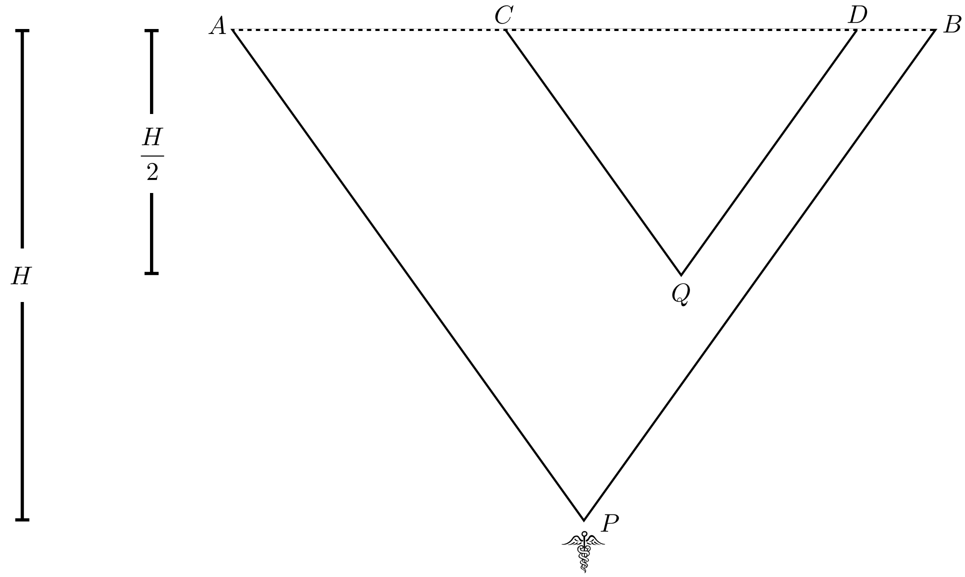

Figura 1.13: La estrategia del Diablo para atrapar al Ángel Tonto.

Definición 1.5.2. *El* cono superior *de p consiste en los puntos de la retícula $\mathbb{Z}^2$ que se encuentran en la intersección de los semiplanos superiores definidos por las rectas con pendientes $1/n$ y $-1/n$ que pasan por p.*

Una observación que será fundamental para la prueba del siguiente teorema es que una vez que el AT se encuentra en un punto p, en adelante siempre se encontrará en el cono superior de p. Daremos una estrategia para el Diablo que nos permita asegurar que en un momento dado el AT se encontrará directamente frente a un cono en el que los primeros n renglones habrán sido borrados, y por lo tanto no podrá moverse.

Supondremos sin pérdida de generalidad que en un principio el AT se encuentra sobre el punto $(0, 0)$, y que es el turno del Diablo.

Teorema 1.5.3. *El Diablo puede atrapar a un AT de cualquier potencia n en su cono superior truncado a la altura $H = n2^{4n^3+1}$.*

Demostración. El Diablo truncará el cono superior de $(0, 0)$ con una horizontal a altura $H = n2^{nM+1}$. Al renglón superior del cono le llamaremos AB. El renglón AB tendrá entonces $2nH + 1$ vértices, los que el Diablo dividirá en

$\frac{H}{2n}$ conjuntos de vértices consecutivos de tamaño $M = 4n^2$ (salvo el último, que tendrá un vértice extra), y en cada turno irá borrando el primer vértice de cada parte.

Debido a que lo más rápido que el AT puede llegar a la altura $H/2$ es en $H/2n$ pasos, y la longitud de AB es de $2nH+1$, la elección de M que hicimos garantiza que el Diablo habrá terminado su trabajo para cuando el AT se encuentre a distancia $H/2$ de AB. Notemos que M es independiente de H, por lo que la misma M nos servirá para dar este argumento independientemente de la altura a la que se encuentre el AT.

Cuando el AT se encuentre a distancia $H/2$ de AB, se encontrará sobre un punto Q que definirá un nuevo cono truncado QCD, con C, D en AB. En ése momento, el Diablo procederá a borrar el segundo punto de cada una de las partes aún alcanzables por el AT, siempre que el punto a borrar sea aún alcanzable. De nuevo el Diablo habrá terminado para cuando el AT se encuentre a distancia $H/4$ de AB, por un razonamiento análogo al anterior. Siguiendo este procedimiento repetidamente, podemos ver que para cuando el AT alcance un punto a distancia $H/2^M$ de AB, el Diablo habrá borrado ya todos los puntos sobre AB aún alcanzables por el AT.

Cuando el AT llegue a dicha altura, el Diablo comenzará el mismo procedimiento con el renglón que se encuentra inmediatamente abajo de AB. Si llamamos al conjunto de puntos sobre dicho renglón aún alcanzables por el AT $A^{(2)}B^{(2)}$, dividirá el renglón $A^{(2)}B^{(2)}$ en partes de tamaño M, salvo la última que tendrá tamaño $M-2$. De nuevo, para cuando el AT llegue a la mitad de la distancia a $A^{(2)}B^{(2)}$, el Diablo habrá terminado su trabajo. Repitiendo lo que hizo con AB, el Diablo puede borrar todos los puntos alcanzables por el AT sobre $A^{(2)}B^{(2)}$ para cuando el AT se encuentre a altura $H/2^{2M}$ bajo $A^{(2)}B^{(2)}$.

Siguiendo este razonamiento, el Diablo habrá borrado todos los puntos alcanzables por el AT de n renglones consecutivos para cuando el AT llegue a la altura $H/2^{nM+1}$ bajo $A^{(n)}B^{(n)}$. Como queremos que este número sea al menos 1, esto es lo mismo a decir que para cuando el AT llegue a dicha altura, estará a distancia mayor o igual que n de AB. Esto es:

$$\frac{H}{2^{nM+1}} \geq n \text{ o lo que es lo mismo, } H \geq n2^{nM+1}.$$

Dado que para cada n existe dicha H, podemos afirmar entonces que un Ángel Tonto de cualquier potencia puede ser atrapado por el Diablo. $\square$

1.6. Tontos Laxos y Tontos Relajados

Es posible hacer algunas generalizaciones al concepto de Ángel Tonto que nos permitan seguir el mismo argumento para mostrar que puede ser atrapado. Llamaremos a estas variantes de Ángel un *Ángel Tonto Laxo* y un *Ángel Tonto Relajado.*

Definición 1.6.1. *Un* Ángel Tonto Laxo (ATL) *de potencia n es una pieza que puede moverse de (x_0, y_0) a las casillas (x, y) a las que podría moverse un Ángel, con la condición adicional de que $y \geq y_0$.*

Teorema 1.6.2. *El Diablo puede atrapar a un ATL.*

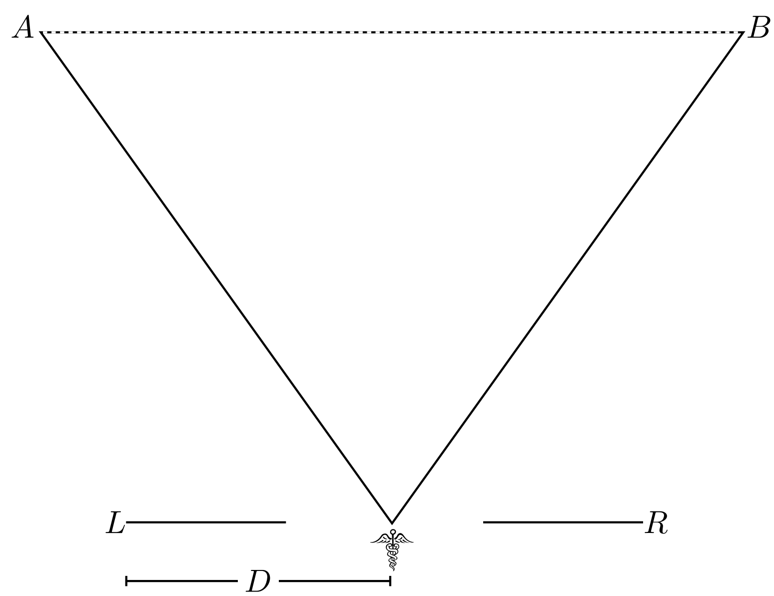

Figura 1.14: El Diablo obligando al ATL a ascender.

Demostración. El Diablo puede atrapar al ATL utilizando sus movimientos impares para convertir al ATL en un AT, aunque de potencia mucho mayor. Elegirá dos casillas, una a la izquierda y otra a la derecha del ATL a una distancia suficientemente grande D (digamos $D = 4n^2$), y borrará una y la otra alternadamente, empezando por el lado al que se haya movido en un principio el TL. La elección de D se debe a que entre 2 movimientos del Diablo en el mismo lado del ATL, este podrá haberse movido 4 veces, y quiere borrar n casillas consecutivas. Conforme vaya avanzando el ATL hacia la izquierda o derecha, el Diablo irá borrando casillas consecutivas en dirección al ATL. De esta manera, eventualmente no le quedará de otra al ATL más que incrementar su coordenada y. Cuando haga esto, el Diablo puede iniciar nuevamente este proceso en la nueva línea en que se encuentre el ATL. Como el ATL tendrá que moverse hacia arriba en a lo más $8n^2$ movimientos (asumiendo que se mueva a la izquierda y a la derecha todo lo que pueda antes de subir), podemos pensar en el ATL como un tonto de potencia $8n^2$. Los movimientos pares los utilizará para llevar a cabo la estrategia que le permitiría atrapar a un AT, pero de potencia $8n^2$. Por lo tanto, siguiendo la estrategia para atrapar ángeles tontos, el Diablo puede atrapar a un ATL. □

Definición 1.6.3. *Un* Ángel Tonto Relajado (ATR) de laxitud l*, es un Ángel tal que si en algún momento se encuentra en un punto* (x_0, y_0)*, posteriormente nunca estará en una posición* (x, y) *con* $y \leq y_0 - l$*.*

Teorema 1.6.4. *El Diablo puede atrapar a un ATR de cualquier laxitud.*

Demostración. Ahora el Diablo borrará rectángulos de ancho n que crezcan hacia abajo con profundidad l a ambos lados del ATR en sus movimientos impares, de afuera hacia adentro y de arriba hacia abajo, ahora con $D = 4n^2l$. Así, podemos interpretar al ATR de laxitud l como un tonto de potencia $8n^2l$, y el Diablo lo podrá atrapar aplicando en sus movimientos pares la estrategia para atrapar un tonto de dicha potencia.

□

Capítulo 2

El Ángel de potencia 2

> The difficulty lies, not in the new ideas, but in escaping from the old ones, which ramify into every corner of our minds.
>
> *The General Theory of Employment, Interest and Money*
> J. M. Keynes

En este capítulo se presenta la prueba que dio Kloster [7] de que el Ángel de potencia 2 no puede ser atrapado. Para ello introducimos el concepto de curva frontera, así como operaciones sobre las curvas frontera. Posteriormente, presentamos resultados relevantes respecto a las curvas frontera en general, y finalmente mostramos una estrategia que le permite al 2-Ángel moverse por siempre sobre un tablero infinito.

2.1. Definiciones y herramientas

Definición 2.1.1. *Definiremos un* segmento *como la frontera entre dos casillas adyacentes del tablero.*

Definición 2.1.2. *Diremos que un conjunto de casillas V es* conexo *si podemos llegar de una casilla de V a cualquier otra de V a través de una sucesión de casillas adyacentes pertenecientes a V.*

Definición 2.1.3. *Dado un conjunto de segmentos S, diremos que un conjunto de casillas V es* conexo módulo *S si y sólo si podemos dar una sucesión* *de casillas de V que lleve de una casilla de V a cualquier otra casilla de V mediante casillas adyacentes sin atravesar ningún segmento $s \in S$.*

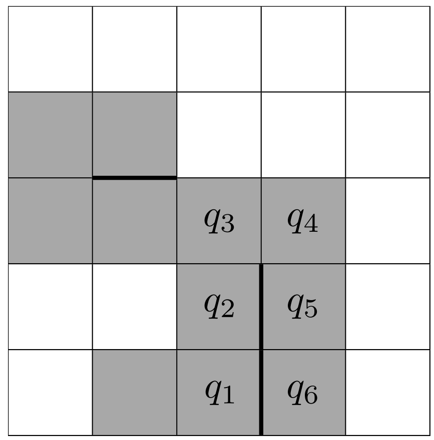

Figura 2.1: El conjunto sombreado es conexo módulo S, siendo S los tres segmentos gruesos. Por ejemplo, podemos llegar de q_1 a q_6 siguiendo la sucesión mostrada.

Dado un segmento s, se le pueden asignar dos orientaciones. Si un segmento dirigido s va de un vértice z a un vértice z', diremos que z es su *vértice inicial* y z' su *vértice final*, lo cual denotaremos como $s^i = z$ y $s^f = z'$.

Definición 2.1.4. *Una* curva continua *es una sucesión infinita en ambos sentidos de segmentos dirigidos $\{\cdots, s_j, s_{j+1}, \cdots\}$ tales que $s_j^f = s_{j+1}^i$.*

Que sea infinita en ambas direcciones quiere decir que dado un segmento s_j, podremos encontrar tanto un antecesor como un sucesor de s_j que se encuentre tan lejos (con la métrica l_∞) de s_j como queramos.

Como parte de una curva, un segmento estará dirigido; como parte del tablero, no lo consideraremos dirigido.

Definición 2.1.5. *Sea s un segmento de una curva. La* casilla derecha *de s es la casilla adyacente a s que se encuentra a su derecha respecto a la orientación. La otra casilla adyacente será la* casilla izquierda *de s.*

Definición 2.1.6. *Sea κ una curva continua dirigida. Diremos que κ es una* curva frontera *si existe un conjunto de casillas V_κ tal que:*

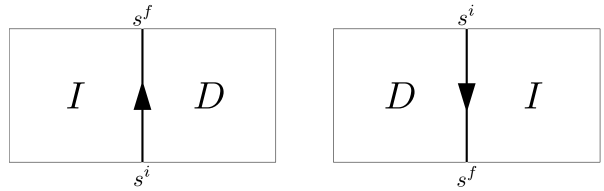

Figura 2.2: Las orientaciones de un segmento, y sus casillas izquierda (I) y derecha (D).

i. *Ningún segmento del tablero ocurra más de dos veces en κ.*

ii. *Si un segmento ocurre exactamente una vez en κ, entonces su casilla izquierda está en V_κ y su casilla derecha no lo está.*

iii. *Si un segmento ocurre dos veces en κ, entonces las ocurrencias tienen direcciones opuestas, y ambas casillas adyacentes están en V_κ.*

iv. *Si un segmento no ocurre en κ, entonces o ambas casillas adyacentes están en V_κ, o ambas no están en V_κ.*

v. *Tanto V_κ como su complemento (en el conjunto de todas las casillas del tablero) son infinitos.*

vi. *El conjunto V_κ es conexo módulo κ.*

Llamaremos a V_κ el conjunto izquierdo *de κ. Su complemento será el* conjunto derecho *de κ.*

Lema 2.1.7. *Los conjuntos izquierdo y derecho de una curva frontera κ son únicos.*

Demostración. Supongamos que U_1 y U_2 son conjuntos izquierdos de κ y q es una casilla que está en U_1 pero no está en U_2.

Sea $t \in V_\kappa$ una casilla adyacente a algún segmento de κ.

Por *vi.* de la Definición 2.1.6 podemos construir una sucesión de casillas adyacentes $\gamma = \{q = s_1, s_2, \cdots, s_n = t\}$ que empiece en q y termine en t, tal que $\gamma \subset U_1$. Sea s_j la primera casilla en γ que es adyacente a un segmento de κ.

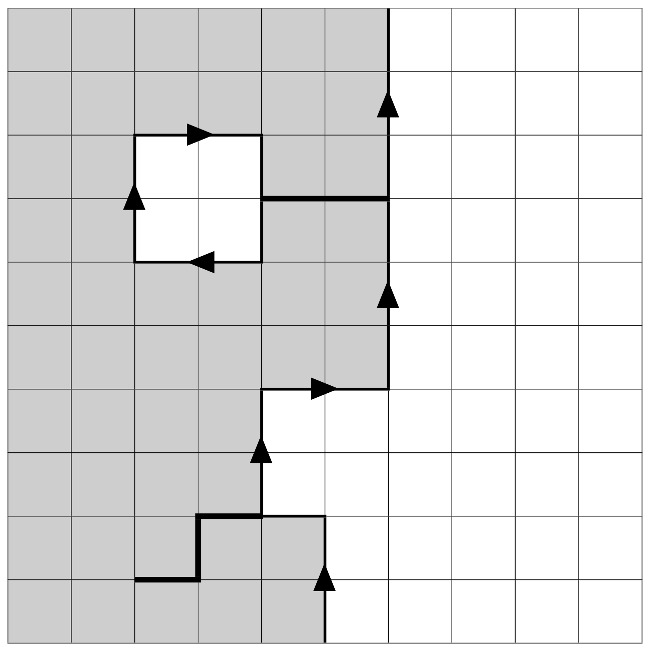

Figura 2.3: Una curva frontera, los conjuntos izquierdo (sombreado) y derecho (sin sombrear) de la curva, y cómo puede entrar la curva al conjunto izquierdo (los segmentos gruesos van en ambos sentidos).

Como ningún par consecutivo de casillas en γ de q a s_j está separado por un segmento de κ, el inciso *iv.* implica que todas las casillas en γ de q a s_j están en U_1, y ninguna en U_2.

Por los incisos *ii.* y *iii.*, s_j debe estar en U_1 y en U_2.

Entonces $s_{j-1} \in U_2$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $U_1 = U_2$.

La unicidad de los conjuntos derechos es inmediata, pues el complemento de un conjunto es único. □

Definición 2.1.8. *Un* puente *será un conjunto conexo de segmentos de κ tal que cada segmento s aparece exactamente dos veces en κ. A la primera vez que aparece le llamaremos s_+ y a la segunda le llamaremos s_-.*

Notemos que $s_+^i = s_-^f$ y $s_+^f = s_-^i$.

Aunque el conjunto izquierdo de una curva κ debe ser conexo, el conjunto derecho puede tener componentes aisladas, a las que llamaremos *islas*, rodeadas por el conjunto izquierdo.

Definición 2.1.9. *Una* isla *de κ será un conjunto conexo acotado máximo de casillas derechas de κ.*

En este caso, la curva entra al conjunto izquierdo a través de un puente, encierra la isla y regresa por el mismo puente.

También pueden existir puentes que entren en el conjunto izquierdo y que no rodeen nada; simplemente la curva regresa por la misma ruta que entró.

Ambas posibilidades quedan ilustradas en la Figura 2.3.

Observación 2.1.10. *Tanto las islas como los puentes deben ser finitos, puesto que V_κ es conexo módulo κ, y si una isla o un puente fueran infinitos, no podríamos dar una sucesión finita de casillas adyacentes módulo κ entre dos casillas adyacentes a un segmento del puente.*

Definiremos ahora dos operaciones que nos servirán para transformar una curva frontera en otra. Estas son:

- *Extensión.* Tomando un segmento de κ cuya casilla derecha sea $q \notin V_\kappa$, remplazamos dicho segmento por las otras tres orillas de q, orientadas de tal manera que q sea su casilla izquierda.

- *Contracción.* Dados dos segmentos consecutivos de κ que atraviesan el mismo segmento del tablero en sentidos opuestos, los eliminamos de κ.

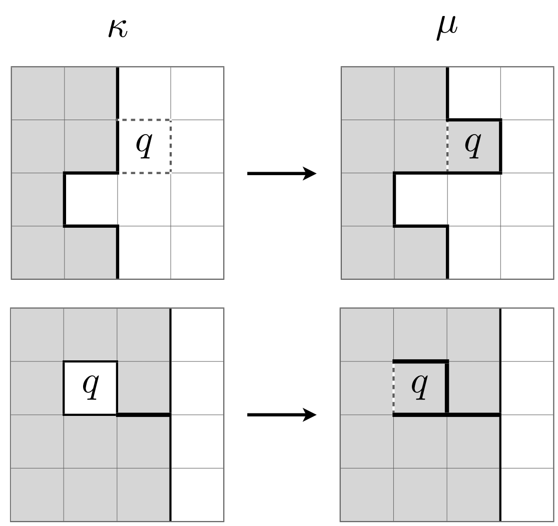

Figura 2.4: Ejemplos de extensiones.

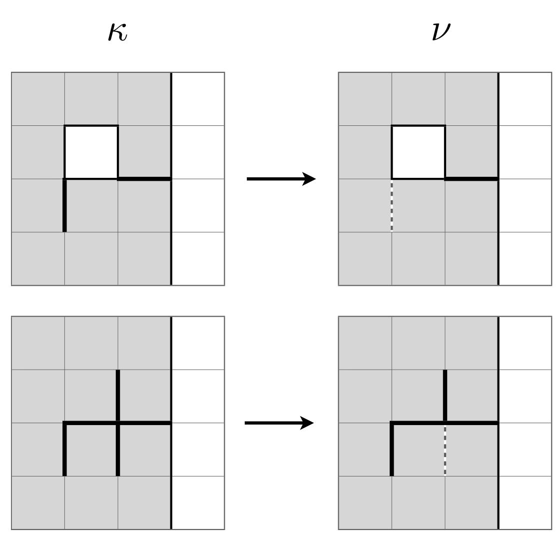

Figura 2.5: Ejemplos de contracciones.

Las Figuras 2.4 y 2.5 muestran como funcionan dichas operaciones.

Lema 2.1.11. *Sea κ una curva frontera, μ una extensión de κ alrededor de la casilla q, y ν una contracción de κ. Entonces μ y ν son curvas frontera, con $V_\mu = V_\kappa \cup \{q\}$ y $V_\nu = V_\kappa$.*

Demostración. Debemos verificar las partes $i.$ a $vi.$ de la Definición 2.1.6 para μ y ν, asumiendo que se cumplen para κ.

Comenzaremos analizando una extensión μ. Sea s el segmento de κ que es remplazado, y sean r_1, r_2 y r_3 los segmentos que lo remplazan. Para verificar las partes $i.$ a $iv.$, sólo necesitamos ver que pasa con los segmentos s, r_1, r_2 y r_3, pues todos los demás segmentos no cambian respecto a su ocurrencia en κ y μ, así como no cambia tampoco la pertenencia de sus casillas adyacentes a los conjuntos izquierdo y derecho de κ y μ. Recordemos que q es la casilla derecha de s y la casilla izquierda de r_1, r_2 y r_3, $q \notin V_\kappa$ y $q \in V_\mu$. Veamos ahora que μ cumple con la Definición 2.1.6:

i. Los nuevos segmentos de la curva (r_1, r_2 y r_3) ocurrían a lo más una vez en κ, pues de lo contrario $q \in V_\kappa$ (por $iii.$). Por lo tanto ocurren a lo más dos veces en μ.

ii. La casilla izquierda de r_1, r_2 y r_3 en μ es q, y $q \in V_\mu$. Si r_1 ocurre una sola vez en μ, quiere decir que no ocurría en κ. Como además $q \notin V_\kappa$, por $iv.$ la otra casilla adyacente a r_1 (digamos p), tampoco está en V_κ, y por tanto, $p \notin V_\mu$. Por la misma razón, r_2 y r_3 cumplen $ii.$.

iii. Si r_1 ocurre dos veces en μ, entonces ocurría sólo una vez en κ, y con sentido contrario al añadido en μ (pues q era su casilla derecha y en la nueva ocurrencia de r_1 es su casilla izquierda), y como $q \notin V_\kappa$, entonces $p \in V_\kappa$. Por lo tanto, $p \in V_\mu$.

iv. El segmento s no ocurre en μ, pero ocurría una vez en κ. Por lo tanto, por $ii.$ la casilla izquierda de s estaba en V_κ, y por lo tanto en V_μ. Como además $q \in V_\mu$, s cumple $iv.$ Por otro lado, r_1, r_2 y r_3 ocurren al menos una vez en μ.

v. Como V_κ y su complemento son infinitos, y V_κ y V_μ difieren sólo en una casilla, entonces V_μ y su complemento son infinitos.

vi. El conjunto V_κ es conexo módulo κ. Ni r_1, r_2 ni r_3 desconectan a V_κ, pues cada uno es adyacente a $q \notin V_\kappa$. Por lo tanto V_κ es conexo módulo μ. Como $V_\mu = V_\kappa \cup \{q\}$, entonces V_μ será módulo μ si q es adyacente a alguna casilla $o \in V_\kappa$, y el segmento entre ellas no ocurre en μ. Pero precisamente la casilla izquierda de s (en κ) cumple eso. Por lo tanto, V_μ es conexo módulo μ.

Para el caso de una contracción ν el análisis será similar. Sea s el segmento que aparece dos veces en κ pero no aparece en ν. Para verificar los incisos *i.* a *iv.* sólo hay que ver que pasa con s, pues a los demás segmentos no les afecta que s desaparezca.

Veamos que ν cumple con la Definición 2.1.6:

Los incisos *i.* a *iii.* no hace falta verificarlos, pues $s \notin \mu$.

iv. Como s ocurre dos veces en κ, sabemos que sus casillas adyacentes están en $V_\kappa = V_\nu$.

v. Se cumple pues $V_\kappa = V_\nu$.

vi. Todo segmento en ν está también en κ. Como $V_\nu = V_\kappa$ es conexo módulo κ, también es conexo módulo ν.

□

Definición 2.1.12. *Sean κ y ν curvas frontera. Si κ se puede convertir en ν mediante una sucesión finita (posiblemente vacía) de extensiones y contracciones, llamaremos a ν una* descendiente *de κ.*

Observación 2.1.13. *Sea κ una curva frontera y ν un descendiente de κ. Entonces $V_\kappa \subseteq V_\nu$.*

Demostración. Ninguna extensión o contracción ν remueve casillas del conjunto izquierdo de una curva κ. Por lo tanto, cualquier casilla en V_κ estará también en V_ν. □

A continuación veremos que dada una curva κ es posible obtener una descendiente suya ν que elimine los puentes e islas de κ, siempre que haya una cantidad finita de estos.

Lema 2.1.14. *Sea κ una curva frontera con una cantidad finita de islas y puentes. Entonces con un número finito de extensiones y contracciones es posible obtener una nueva curva frontera ν tal que ν no tenga islas ni puentes.*

Demostración. Dada una isla I, tomamos una casilla q de la isla que sea adyacente a κ en el segmento s. Le aplicamos una extensión a q, y por el Lema 2.1.11 obtendremos una nueva curva frontera κ' tal que $V_{\kappa'} = V_\kappa \cup \{q\}$. Por ser I finita, supongamos que tiene k casillas, y entonces con k extensiones habremos convertido todas sus casillas en casillas izquierdas de una nueva curva frontera.

Este proceso se encuentra ilustrado en la Figura 2.6.

Si repetimos esto para cada isla de κ, tras un número finito de extensiones tendremos una curva frontera μ libre de islas.

Ahora tomemos en μ un puente $P = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$, y un segmento s_i en P tal que sus dos ocurrencias en μ sean consecutivas. Aplicamos una contracción sobre s_i, obteniendo una nueva curva frontera μ' tal que el puente P tiene un segmento menos.

Podemos repetir este algoritmo para borrar cada segmento de P. Por ser P finito, después de un número finito de contracciones lo habremos borrado por completo.

La destrucción de un puente se puede ver en la Figura 2.7.

Por haber un número finito de puentes, podremos deshacernos de todos en un número finito de pasos.

Al finalizar, habremos obtenido una curva frontera ν sin islas ni puentes.

□

2.2. La estrategia del Ángel

Ahora vamos a dar la estrategia para el Ángel. Este fijará una curva frontera al principio de cada turno, y se moverá sobre sus casillas derechas.

Definición 2.2.1. *Llamaremos una* partida P *a una sucesión de jugadas hechas por el Ángel y el Diablo.*

Llamaremos el *pivote* del Ángel a un segmento sobre la curva que indicará la posición actual del Ángel y su estrategia a seguir. La posición actual del Ángel será la casilla derecha del pivote.

Al principio del juego, la curva frontera será una línea recta vertical, que pase por el segmento izquierdo de la casilla inicial del Ángel. Dicho segmento será el pivote inicial del Ángel.

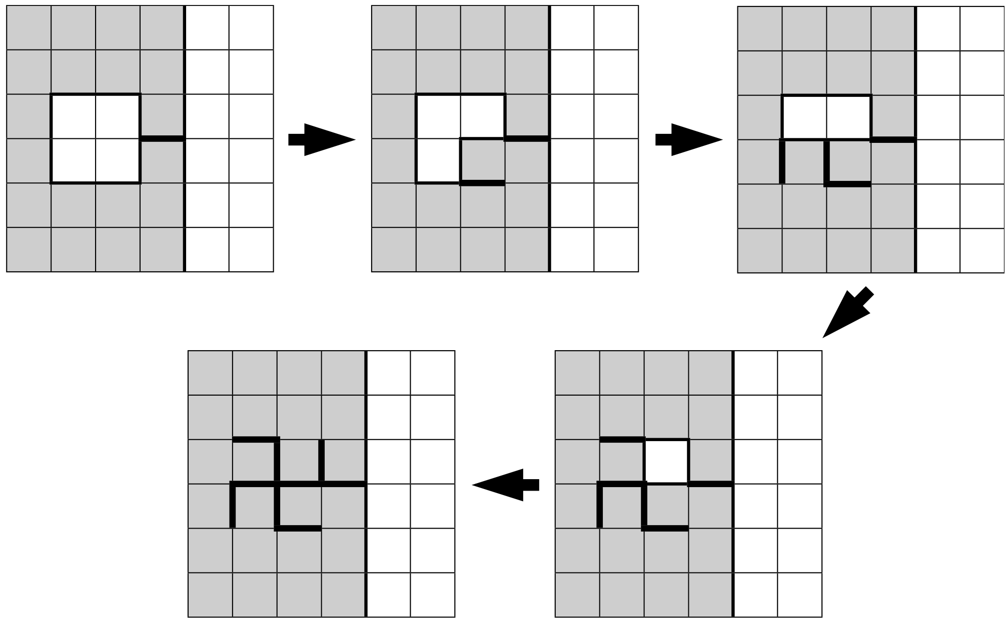

Figura 2.6: Destruyendo islas con extensiones.

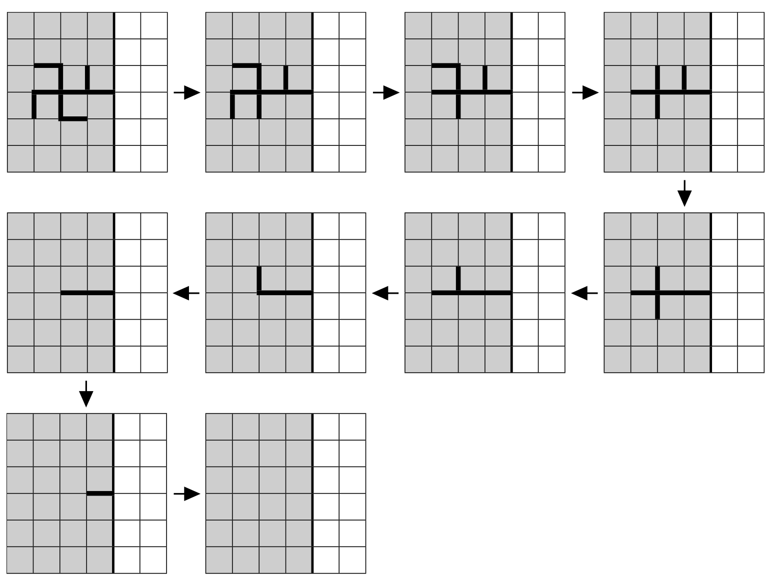

Figura 2.7: Destruyendo puentes con contracciones.

Una vez fijada la curva frontera, el Ángel se moverá a la casilla derecha del segundo segmento posterior a su pivote actual.

Dicha casilla será siempre alcanzable por el Ángel, pues por cada avance de un segmento sobre la curva el Ángel se tiene que mover a lo más una casilla, y posiblemente no tenga que moverse.

En la Figura 2.8 se muestran distintos movimientos del Ángel.

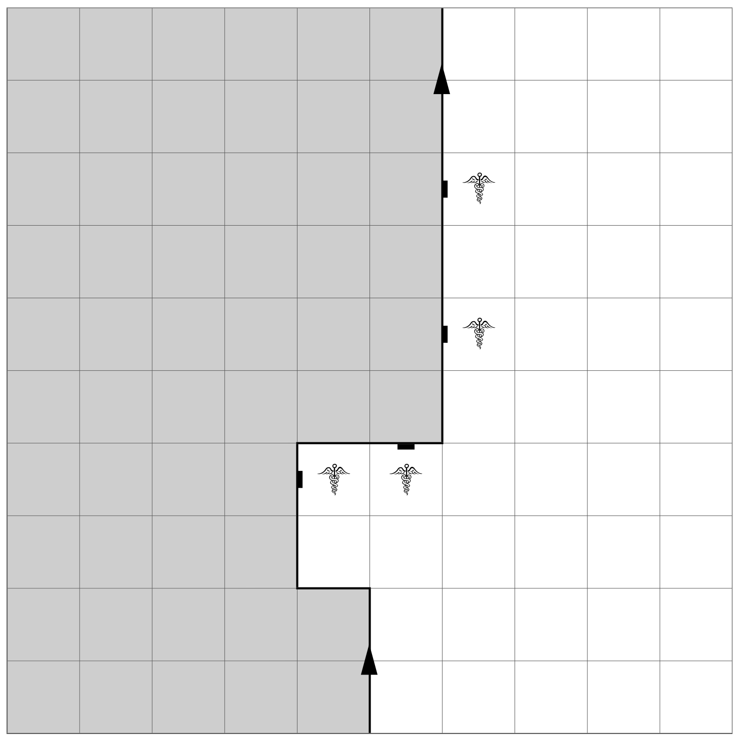

Figura 2.8: El Ángel caminando a la derecha de su curva frontera actual.

Definición 2.2.2. *Dada una curva frontera κ, llamaremos la* parte pasada *de κ respecto a p_i al conjunto de los segmentos anteriores a p_i en κ, con p_i incluido. Al complemento en κ de la parte pasada de κ respecto a p_i le llamaremos la* parte futura *de κ respecto de p_i.*

Cada vez que el Diablo borre una casilla, la curva frontera del Ángel será revisada en su parte futura. La nueva curva frontera debe ser descendiente de la anterior, y sólo diferirán en sus partes futuras.

Veremos que después de cada actualización, prácticamente todas las casillas derechas de la curva estarán libres, lo que garantizará que el Ángel se puede mover por siempre actualizando y siguiendo la nueva curva.

Definición 2.2.3. *En cada turno, dividiremos las casillas derechas de la curva frontera actual en dos tipos:* Libres y Borradas*. Las casillas Borradas serán las casillas borradas por el Diablo que se encuentren en el conjunto derecho de la curva frontera actual. Las casillas Libres serán las casillas no borradas en el conjunto derecho de la curva frontera actual.*

Observación 2.2.4. *Las casillas Borradas son sólo las que se encuentran en el conjunto derecho de la curva frontera actual. Si el Diablo borra una casilla izquierda, seguirá siendo una casilla izquierda y habrá desperdiciado su turno. Por lo tanto, podemos suponer que el Diablo borra siempre casillas derechas de la curva frontera actual del Ángel.*

Al principio del juego, todas las casillas derechas de la curva inicial estarán libres.

Cada actualización del Ángel, casillas Borradas y Libres pueden convertirse en casillas izquierdas, pero las casillas izquierdas nunca cambiarán de estado, pues cada curva frontera será descendiente de una anterior, y el conjunto de casillas izquierdas de una curva descendiente de otra no pierde casillas, de acuerdo al Lema 2.1.11.

Definición 2.2.5. *Enumeraremos los turnos del Ángel, cada uno consistente en actualizar la curva frontera y luego moverse a la casilla derecha del segundo segmento después de su pivote. Definimos λ_i como la curva frontera después de ser actualizada en el turno i, siendo λ_0 la curva frontera inicial.*

Dada una curva κ descendiente de λ_0, como κ surge a partir de λ_0 aplicando un número finito de extensiones y contracciones, y cada una de estas operaciones afecta sólo a un número finito de segmentos, λ_0 y κ serán iguales excepto en un intervalo finito.

Definición 2.2.6. *Definimos la* longitud de κ respecto a λ_0 *(su* longitud*), L_κ como el número de segmentos en κ menos el número de segmentos en λ_0 luego de remover la intersección de ambas curvas. Esto es,*

$$L_\kappa = |\kappa - \{\kappa \cap \lambda_0\}| - |\lambda_0 - \{\kappa \cap \lambda_0\}|$$

Definición 2.2.7. *Dado un turno j y una curva frontera κ, definimos $n_\kappa(j)$ como el número de casillas en V_κ que el Diablo ha borrado antes del turno j.*

Como abreviación, diremos que $L_{\lambda_i} = L_i$ y $n_{\lambda_i}(j) = n_i(j)$. Llamaremos p_i al pivote del Ángel después del turno i. Su pivote inicial será p_0.

Definición 2.2.8. *Definimos P_i^1 como el conjunto de curvas frontera μ descendientes de λ_{i-1} que cumplen la siguiente condición:*

1. *La curva μ es igual a λ_{i-1} en la parte pasada de p_{i-1}, incluyendo a p_{i-1}.*

Ahora llamaremos P_i^2 al conjunto de curvas $\mu \in P_i^1$ tales que:

2. *Para toda $\kappa \in P_i^1$, $L_\mu - 2n_\mu(i) \leq L_\kappa - 2n_\kappa(i)$.*

Finalmente, P_i^3 será el conjunto de las $\mu \in P_i^2$ que satisfagan:

3. *Para toda $\kappa \in P_i^2$, $n_\mu(i) \geq n_\kappa(i)$.*

Estrategia 2.2.9. *La regla que usará el Ángel para actualizar su curva frontera en el turno i será la siguiente: Al comenzar su turno i, el Ángel se encuentra en la casilla derecha del pivote p_{i-1} y su curva frontera actual es la λ_{i-1}. La nueva curva frontera λ_i la puede seleccionar el Ángel tomando cualquier elemento de P_i^3.*

La definición de P_i^2 indica que el Ángel puede elegir exclusivamente entre curvas μ que minimicen la diferencia entre la longitud de μ respecto a λ_0 y dos veces el número de casillas convertidas de Borradas a izquierdas con dichas curvas respecto a λ_0. Esto es, que no puede añadir más de dos segmentos a la nueva curva para convertir una casilla Borrada en izquierda.

La definición de P_i^3 indica que entre las curvas de P_i^2, el Ángel buscará maximizar las casillas convertidas de Borradas en izquierdas.

Observación 2.2.10. *Aunque los conjuntos P_i^1, P_i^2 y P_i^3 pueden ser infinitos, el Ángel solo necesita revisar un conjunto finito de curvas frontera para encontrar un representante de P_i^3.*

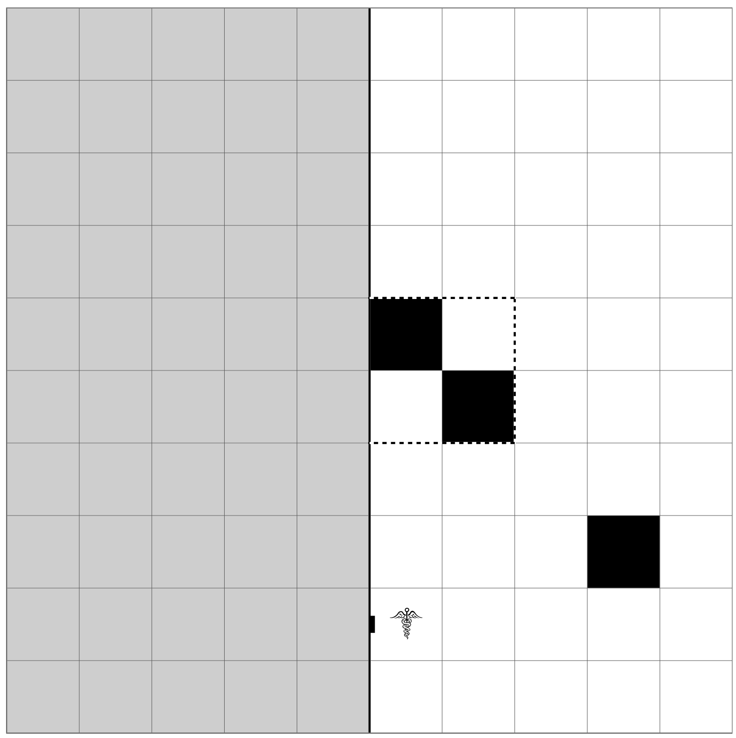

Figura 2.9: El Ángel actualizando su curva frontera. Si las casillas Borradas están lejos, el Ángel no las tomará en cuenta.

Demostración. Como $\lambda_{i-1} \in P_i^1$ y $n_\mu(i) \leq i$ para toda $\mu \in P_i^1$, una curva frontera ν que esté en P_i^2 debe cumplir:

$$L_\nu - 2n_\nu(i) \leq L_{i-1} - 2n_{i-1}(i)$$

Dado que $n_\nu \leq i$, tenemos que:

$$L_\nu \leq L_{i-1} - 2n_{i-1}(i) + 2i$$

Esto es, la longitud de cualquier curva en P_i^2 está acotada.

Además, podemos suponer que la curva λ_i y la curva λ_{i-1} son iguales al norte de la casilla Borrada que tenga la mayor coordenada y. Llamemos al segmento en el que λ_{i-1} y λ_i vuelven a coincidir N. El Ángel sólo necesitará examinar curvas con longitud acotada, y que solo difieren de λ_{i-1} entre dos segmentos fijos, que son p_{i-1} y N. Sólo hay una cantidad finita de dichas curvas.

$\square$

Observación 2.2.11. *Como $\lambda_{i-1} \in P_i^1$, P_i^2 y P_i^3 no son vacíos. Por lo tanto la regla de actualización siempre se puede realizar.*

Observación 2.2.12. *Dado un turno i, $n_{i-1}(i) = n_{i-1}(i-1)$.*

Demostración. Tenemos que $n_{i-1}(i)$ es el número de casillas Borradas por el Diablo antes del turno i que se encuentran en $V_{\lambda_{i-1}}$, pero el Diablo solo borrará casillas derechas de la curva frontera actual del Ángel, por lo que no borrará una casilla izquierda de λ_{i-1} en el turno $i-1$. Por lo tanto $n_{i-1}(i) = n_{i-1}(i-1)$. $\square$

Lema 2.2.13. *Si i y j son turnos con $i < j$, entonces $L_j - 2n_j(j) \leq L_i - 2n_i(i)$.*

Demostración. Como $\lambda_{i-1} \in P_i^1$ y $\lambda_i \in P_i^2$, por la definición de P_i^2,

$$L_i - 2n_i(i) \leq L_{i-i} - 2n_{i-1}(i) \tag{2.1}$$

Además, por la Observación 2.2.12,

$$n_{i-1}(i) = n_{i-1}(i-1) \tag{2.2}$$

Sustituyendo $n_{i-1}(i)$ de la ecuación (2.2) en la ecuación (2.1) obtenemos que

$$L_i - 2n_i(i) \leq L_{i-1} - 2n_{i-1}(i-1).$$

Por lo tanto, aplicando este proceso $j-i$ veces para $L_i, L_{i+1}, \cdots, L_j$, obtenemos lo que queríamos. $\square$

Procederemos ahora a mostrar que, aplicando la estrategia dada, el Ángel siempre podrá aterrizar sobre una casilla Libre. Para hacer esto, veremos primero que las casillas derechas de cualquier segmento de la curva frontera actual del Ángel nunca estarán Borradas, y posteriormente veremos que la curva frontera actual del Ángel no puede tener islas ni puentes, salvo un caso particular que en realidad no será problema.

Lema 2.2.14. *Sea s un segmento de λ_i posterior a p_{i-1}, y sea q la casilla derecha de s. Entonces después del turno i, q no está Borrada.*

Demostración. Por contradicción. Supongamos que q está Borrada. Si aplicamos una extensión a λ_i sobre q, obtenemos una curva κ que está en P_i^1. Además se cumple que

$$L_\kappa = L_i + 2 \tag{2.3}$$

$$n_\kappa(i) = n_i(i) + 1 \tag{2.4}$$

Si multiplicamos por 2 la ecuación (2.4) y restamos el resultado a la ecuación(2.3), obtenemos

$$\begin{aligned} L_\kappa - 2n_\kappa(i) &= L_i + 2 - 2n_i(i) - 2 \\ &= L_i - 2n_i(i) \end{aligned}$$

Como $\lambda_i \in P_i^2$, por (3) κ también estará en P_i^2. Pero como $\lambda_i \in P_i^3$, por la definición 2.2.8,

$$n_i(i) \geq n_\kappa(i)$$

lo que contradice a la ecuación (2.4). Por lo tanto, la casilla q no está Borrada. $\square$

La siguiente observación es importante para un detalle técnico de la prueba del siguiente lema.

Observación 2.2.15. *Dada una partida P, podemos* trasladar *la casilla inicial del Ángel hacia el sur $2m$ casillas y pensar en una partida trasladada P', suponiendo que los primeros m turnos el Diablo borró casillas izquierdas, y el Ángel se desplazó 2 casillas hacia el norte en cada turno. A partir del turno $m+1$, P' se desarrolla del mismo modo que P. Esto es, en el turno $m+i$ sucede en P' lo que sucede en el turno i en P.*

Lema 2.2.16. *Sea s un segmento de λ_i posterior a p_{i-1}, y sea q la casilla derecha de s. Si $q \in V_{\lambda_i}$, entonces s es el segmento en λ_i inmediatamente posterior a p_{i-1}.*

Demostración. Como ambas casillas adyacentes a s se encuentran en V_{λ_i}, por la Definición 2.1.6 s debe aparecer dos veces en λ_i. Recordemos que a dichas apariciones les llamamos s_+ y s_-. Por el Lema 2.1.14, podemos borrar la sección de λ_i comprendida entre s_+ y s_- con s_+ y s_- incluidos, a la que llamaremos γ, y obtener una curva frontera κ que sea descendiente de λ_i. Su longitud será

$$L_\kappa = L_i - |\gamma| \tag{2.5}$$

donde $|\gamma| \geq 2$. Por la Observación 2.1.13, $V_{\lambda_i} \subseteq V_\kappa$, por lo que

$$n_i(i) \leq n_\kappa(i) \tag{2.6}$$

Si s_+ fuera posterior a p_{i-i}, tendríamos que $\kappa \in P_i^1$, pero por la definición de P_i^2, tendríamos también que

$$L_i - 2n_i(i) \leq L_\kappa - 2n_\kappa(i)$$

Lo que contradice (2.5) y (2.6).

Entonces s_+ debe ser anterior a p_{i-1} o coincidir con p_{i-1}, y la aparición de s posterior a p_{i-1} debe ser s_-.

Sea j el turno en el que el Ángel mueve el pivote a s_+ o adelante de s_+, y como ya dijimos p_{i-1} está antes de s_- sobre λ_i.

Por la Observación 2.2.15 podemos garantizar la existencia de j en algún juego trasladado, aún si s_+ se encuentra arbitrariamente al sur de p_0. Por lo tanto podemos asumir sin pérdida de generalidad que el turno i se lleva a cabo arbitrariamente adelante en la partida, y por tanto el turno j existe.

De p_j a p_{i-1}, el Ángel mueve el pivote a lo más $|\gamma| - 2$ segmentos, pues comienza en s_+ o adelante de s_+, y termina antes de s_-. Esto es, de p_j a p_{i-1} el Ángel nunca pasa por s. Además, el Ángel mueve su pivote dos segmentos por turno. Por lo tanto, $|\gamma| - 2 \geq 2(i - j - 1)$ o lo que es lo mismo,

$$2(i - j) \leq |\gamma| \tag{2.7}$$

Notemos que la igualdad en (2.7) se da solamente si $p_j = s_+$ y p_{i-1} es el antecesor inmediato en λ_i de s_-, pues dicho recorrido es el más largo que se puede realizar empezando en s_+ o adelante de s_+ y terminando antes de s_-, y constará de precisamente $|\gamma| - 2$ segmentos.

Notemos también que si se da la igualdad, el resultado del lema es cierto.

Por el Lema 2.2.13, tenemos que

$$L_i - 2n_i(i) \leq L_j - 2n_j(j) \tag{2.8}$$

Por otro lado, entre los turnos j e i el Diablo ha borrado $i - j$ casillas, por lo que

$$n_\kappa(i) - n_\kappa(j) \leq i - j \tag{2.9}$$

Si multiplicamos por 2 las ecuaciones (2.6) y (2.9) y sumamos los resultados a la suma de las ecuaciones (2.5), (2.7) y (2.8), obtenemos

$$\begin{aligned} L_\kappa + 2n_i(i) + 2(i-j) + L_i - 2n_i(i) + 2n_\kappa(i) - 2n_\kappa(j) \\ \leq \quad L_i - |\gamma| + 2n_\kappa(i) + |\gamma| + L_j - 2n_j(j) + 2(i-j) \end{aligned}$$

y simplificando la ecuación, resulta:

$$L_\kappa - 2n_\kappa(j) \leq L_j - 2n_j(j) \tag{2.10}$$

Además, en el turno j tenemos que $\kappa \in P_i^1$, y por la definición de P_i^2

$$L_j - 2n_j(j) \leq L_\kappa - 2n_\kappa(j)$$

Por lo tanto, en la ecuación (2.10) se debe tener la igualdad. Pero para que se de la igualdad en (2.10), se debe tener la igualdad en (2.6), (2.7), (2.8) y (2.9). Como se observó antes, la igualdad en (2.7) implica el lema.

□

Con los dos últimos lemas, contamos ya con lo necesario para la prueba del teorema principal.

Teorema 2.2.17. *La Estrategia 2.2.8 le permite al Ángel jugar indefinidamente sin aterrizar nunca en una casilla borrada.*

Demostración. Sea i un turno y q la casilla derecha de p_i. Como p_i está dos segmentos adelante de p_{i-1} sobre λ_i, por el Lema 2.2.14 q no puede estar Borrada, y por el Lema 2.2.16 $q \notin V_{\lambda_i}$. Por lo tanto q está Libre y el Ángel aterriza ahí en el turno i.

□

Capítulo 3

Variantes

For the Snark's a peculiar creature, that won't
Be caught in a commonplace way.
Do all that you know, and try all that you don't:
Not a chance must be wasted to-day!

The Hunting of the Snark
Lewis Carroll

Hemos visto los resultados más importantes en torno al juego del Ángel como fue planteado originalmente. Ahora plantearemos algunas variantes interesantes, así como generalizaciones a resultados planteados en los capítulos anteriores. El juego se llevará a cabo de la misma manera que el juego sobre el tablero cuadrado, con los jugadores moviendo de manera alternada. El Diablo borrará una casilla en su turno y la pieza sobre el tablero se moverá de acuerdo a sus capacidades. Los objetivos del juego también serán los mismos. Llamaremos a esta clase de juegos, *juegos tipo Ángel-Diablo*.

3.1. La observación de Conway

Una observación muy importante que hizo Conway [4] y que es aplicable a cualquier juego tipo Ángel-Diablo es el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1. *Si el Ángel tiene una estrategia ganadora $\gamma = \{q_0, q_1, \cdots\}$ en la que pasa por una casilla q_i, y podría haber pasado antes por ella (esto es, q_i es alcanzable desde alguna $q_j \in \gamma$ con $j \leq i - 2$), entonces el Ángel tiene una estrategia ganadora γ' pasando directamente de q_j a q_i.*

Demostración. Al pasar directamente el Ángel de q_j a q_i en γ', el Diablo no habrá borrado ninguna casilla no borrada en γ en el turno i (de hecho habrá borrado menos casillas), por lo que el Ángel podrá proceder con la misma estrategia que utilizaría en γ a partir de q_i, pero en el turno $j+1$. □

Este teorema tiene varias implicaciones importantes, entre ellas la siguiente observación.

Observación 3.1.2. *El Ángel no gana nada regresando a una casilla en la que estuvo antes.*

Demostración. De acuerdo al Teorema 3.1.1, si el Ángel tiene una estrategia ganadora repitiendo una casilla q, puede acortarla quitando todos los pasos entre sus dos estancias en q. □

3.2. Tableros triangulares

La primera variante que exploraremos será la del juego llevándose a cabo sobre un tablero triangular.

Definición 3.2.1. *Un tablero triangular consistirá de una rejilla de $2m \times 2n$ triángulos equiláteros. Horizontalmente, los triángulos irán uno al lado del otro, y verticalmente los renglones irán alternando entre triángulos apuntando hacia arriba y triángulos apuntando hacia abajo, como se muestra en la Figura 3.1. El tablero puede ser finito o infinito.*

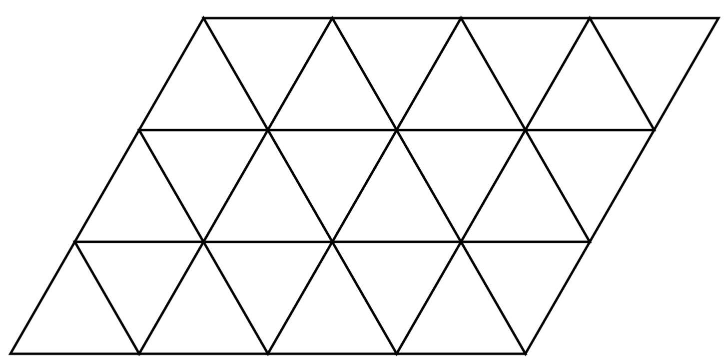

Figura 3.1: Un tablero triangular de 4×6.

Definición 3.2.2. *Diremos que dos casillas son* adyacentes por una arista *si tienen una arista de la rejilla en común.*

Definición 3.2.3. *Diremos que dos casillas son* adyacentes por un vértice *si tienen un vértice de la rejilla en común.*

Por conveniencia diremos que dos casillas son *adyacentes* si son adyacentes por una arista. Diremos que dos casillas son *v-adyacentes* si son adyacentes por un vértice.

Observación 3.2.4. *Cada casilla de un tablero triangular que no se encuentre en la orilla tendrá tres casillas adyacentes, y doce casillas adyacentes por vértices (incluyendo las que son adyacentes por aristas).*

Definición 3.2.5. *Dada una casilla q en un tablero triangular, y una de sus casillas adyacentes q', si trazamos la linea L que une el centro de q' con el centro de q orientada de q' a q, llamaremos la* casilla izquierda *de q respecto a q' a la casilla adyacente a q que queda a la izquierda de L, y llamaremos la* casilla derecha *de q respecto a q' a la casilla adyacente a q que queda a la derecha de L.*

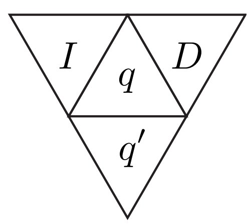

Figura 3.2: Las casillas izquierda (I) y derecha (D) de q respecto a q'.

Definición 3.2.6. *La distancia entre dos casillas q_1, q_2 sobre un tablero triangular será el mínimo numero de saltos entre casillas adyacentes por aristas para llegar de q_1 a q_2.*

Definición 3.2.7. *Dada una casilla q y un número $r \in \mathbb{N}$, llamaremos la* r-vecindad por aristas *de q al conjunto de casillas que se encuentran a distancia r o menos de q. Llamaremos la* r-vecindad por vértices *de q al conjunto de casillas que se encuentran a r o menos saltos entre casillas adyacentes por vértices, partiendo de q.*

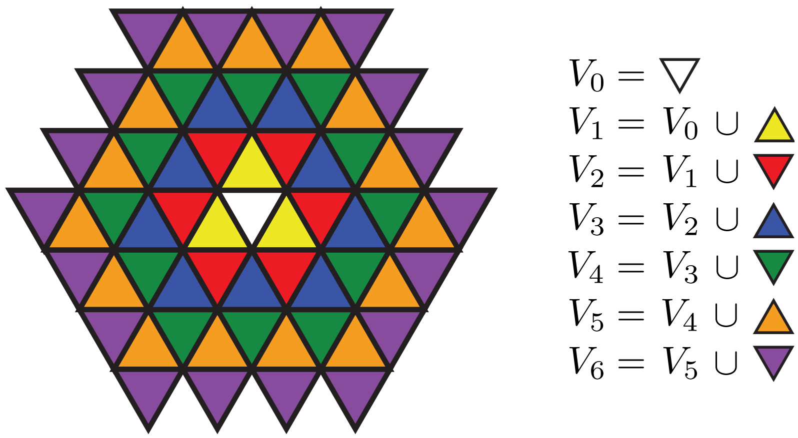

Figura 3.3: Las primeras siete *r-vecindades por aristas* de la casilla blanca.

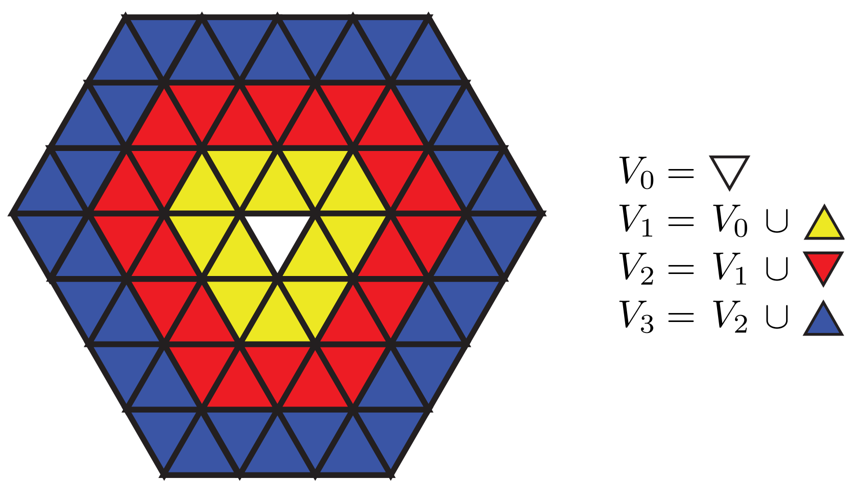

Figura 3.4: Las primeras cuatro *r-vecindades por vértices* de la casilla blanca.

Ahora definiremos las piezas que serán análogas a las del tablero cuadrado.

Definición 3.2.8. *Llamaremos un Δ-Duque de potencia n a una pieza que en su turno se puede mover a cualquier casilla no borrada en la n-vecindad por aristas de su casilla inicial.*

Notemos que la definición no impide que el Δ-Duque pueda *saltar* sobre casillas borradas.

Definiremos ahora una pieza similar al Duque, pero que no puede saltar.

Definición 3.2.9. *Un Δ-Marqués de potencia n será una pieza que se puede mover a cualquier casilla que se encuentre a n o menos saltos entre casillas adyacentes no borradas, partiendo de su casilla inicial.*

Notemos que un Δ-Duque de potencia 1 y un Δ-Marqués de potencia 1 se comportan de la misma manera.

De aquí en adelante nos referiremos al Δ-Duque simplemente como *Duque* y al Δ-Marqués simplemente como *Marqués*, a menos que sea necesario clarificarlo.

Al igual que en los tableros cuadrados, el Ángel (Rey, Duque, Marqués) empezará tan cerca del centro del tablero como sea posible.

Teorema 3.2.10. *El Diablo puede atrapar a un Duque (ó Marqués) de potencia 1 en una 3-vecindad por aristas de su casilla inicial, sin importar quien empiece.*

Demostración. Supongamos que empieza el Duque. Llamemos q_0 a su casilla inicial, y q_1 a la casilla en la que aterriza luego de moverse. El Diablo borrará la casilla izquierda de q_1 respecto a q_0, a la que llamaremos x_1. El Duque podrá moverse entonces a la casilla derecha de q_1 respecto a q_0 o regresar a q_0. Por el Corolario 3.1.2 regresar a una casilla visitada previamente no sirve de nada, por lo que podemos suponer que el Duque se mueve a la casilla derecha de q_1 respecto a q_0, llamada q_2. De nueva cuenta el Diablo borrará ahora la casilla izquierda de q_2 respecto a q_1, a la que llamamos x_2. En cada paso le queda al Duque solamente una opción para moverse, que es la casilla derecha de su casilla actual respecto a su casilla anterior. Si el Diablo continua con el procedimiento de borrar las casillas izquierdas, al aterrizar el Duque en q_5 el Diablo borrará x_5, y el Duque deberá regresar a q_0. El Diablo borrará entonces x_0, y el Duque habrá quedado atrapado. Lo más lejos que llega a estar el Duque de q_0 es a 3 casillas, cuando pasa por q_3. Si empieza el Diablo, puede borrar cualquier casilla, y después de moverse el Duque aplicar la misma estrategia que usaría si el Duque comenzara. □

El Diablo elige borrar las casillas izquierdas de la casilla en la que va aterrizando el Duque, pero análogamente podría llevar a cabo el encierro con casillas derechas. El proceso de captura del Duque de potencia 1 se puede observar en la Figura 3.5.

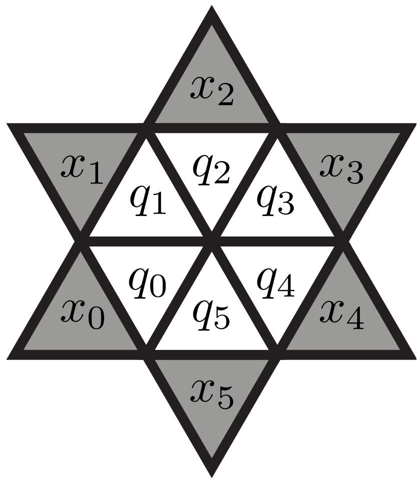

Figura 3.5: El Δ-Duque de potencia 1 atrapado.

Definición 3.2.11. *Es posible asignar a cada casilla en un tablero triangular un par de coordenadas enteras de la siguiente manera:*

- *Asignamos arbitrariamente a una casilla q_0 las coordenadas $(0,0)$.*
- *Cada casilla q con coordenadas (x,y) tendrá a lo más tres casillas adyacentes, una a su izquierda, una a su derecha, y una arriba o abajo de q.*
- *A la casilla derecha de q le asignamos las coordenadas $(x+1,y)$.*
- *A la casilla a su izquierda le asignamos las coordenadas $(x-1,y)$.*
- *A la otra casilla adyacente le asignamos las coordenadas $(x,y+1)$ si se encuentra arriba de q, y le asignamos las coordenadas $(x,y-1)$ si se encuentra abajo de q.*

Una vez asignadas las coordenadas $(0,0)$ a alguna casilla, estas coordenadas quedan bien definidas, pues cada casilla queda en un renglón y una columna dados, que señalarán precisamente las coordenadas correspondientes a dicha casilla, y para llegar a la casilla desde el $(0,0)$, el número de columna irá variando en ± 1 según nos movamos a la derecha o a la izquierda, lo mismo que el número de columna según nos movamos hacia arriba o hacia abajo, por lo que no importa como lleguemos a una casilla, siempre tendrá las mismas coordenadas.

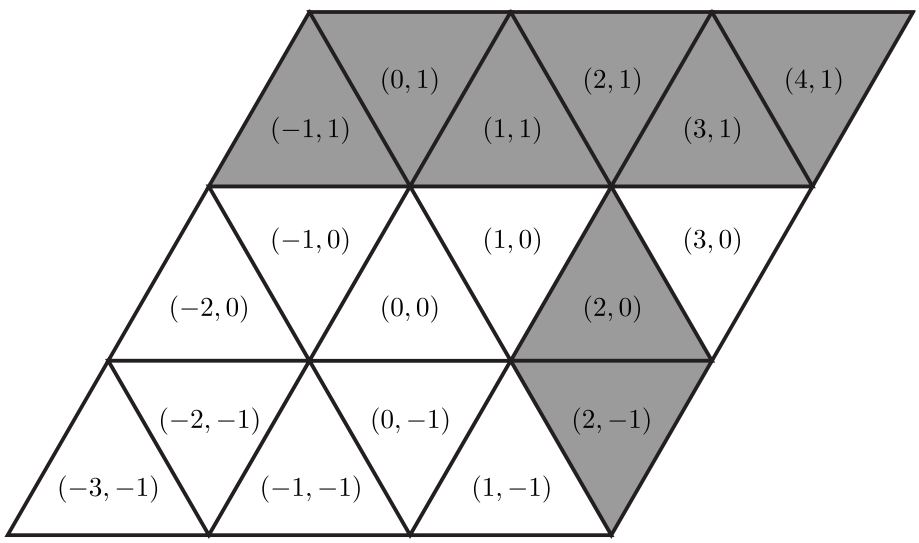

Figura 3.6: Posible asignación de coordenadas a las casillas de un tablero triangular. La casilla $(2,1)$ se encuentra en la segunda columna a la derecha y en el primer renglón de arriba respecto al $(0,0)$.

A continuación haremos una relación entre el juego sobre un tablero cuadrado y el juego sobre un tablero triangular. Esto nos permitirá utilizar los resultados obtenidos en los capítulos anteriores para obtener nuevos resultados sobre los tableros triangulares.

Observación 3.2.12. *Es posible acoplar dos casillas triangulares adyacentes en un cuadrilátero, y repitiendo ese proceso* cuadrificar *un tablero triangular. Para hacerlo, le asignamos coordenadas a las casillas en el tablero como se indica en la Definición 3.2.11, y acoplamos parejas de casillas de alguna de las siguientes tres formas:*

1. *Acoplar las parejas de la forma* $\{(2x,y),(2x+1,y)\}$

2. *Acoplar las parejas de la forma* $\{(2x-1,y),(2x,y)\}$
3. *Acoplar las parejas de la forma* $\{(x,y),(x,y\pm 1)\}$ *dependiendo si es* $y+1$ *o* $y-1$ *de si la casilla adyacente verticalmente a* (x,y) *está arriba o abajo de* (x,y).

Por convención utilizaremos la primera manera para cuadrificar nuestros tableros. A la cuadrificación de un tablero T *le llamaremos* $C(T)$. *Dada una casilla* $q\in C(T)$, *llamaremos* q_1, q_2 *a las dos casillas que la componen en* T, *con* $q_1=(2x,y)$ *y* $q_2=(2x+1,y)$. *Un ejemplo de cuadrificación se muestra en la Figura 3.7.*

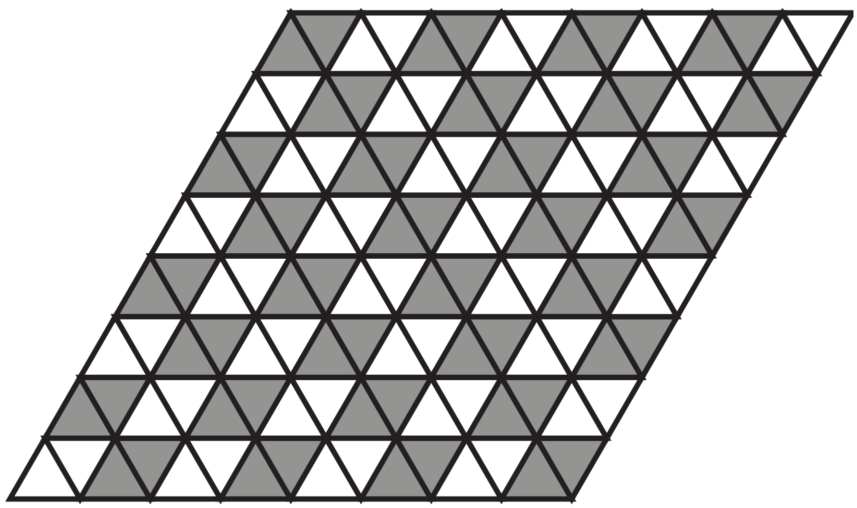

Figura 3.7: Cuadrificación de un tablero triangular.

Dado un tablero triangular T, si nos fijamos en su cuadrificación $C(T)$, obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 3.2.13. *Dado un tablero triangular* T, *si el Diablo puede atrapar al Rey en* $C(T)$, *entonces puede atrapar al 2-Marqués en* T.

Demostración. Cualquier casilla a la que el 2-Marqués puede llegar en T se encuentra dentro de la vecindad del Rey en $C(T)$, como se ve en la Figura 3.8

Por lo tanto, si el Diablo pudiera borrar una casilla de $C(T)$ por turno, podría seguir la estrategia con la que atrapa al Rey en $C(T)$ para atrapar al 2-Marqués.

Recordemos que en su estrategia para atrapar al Rey, el Diablo solamente borraba casillas de la orilla del tablero, por lo que son dichas casillas en las que nos podemos enfocar.

En realidad, el Diablo sólo puede borrar una casilla de T (media casilla de $C(T)$) por turno. Sin embargo, como el 2-Marqués no puede saltar, el Diablo puede negarle el acceso a ambas casillas $q_1, q_2 \in T$ de una casilla en $q \in C(T)$ que se encuentre en la orilla del tablero borrando la q_i que no tiene aristas en la frontera de T, como lo muestra la Figura 3.9. Existen dos casillas de las esquinas en las que ambas casillas en T tienen aristas en la frontera del tablero, pero de hecho el 2-Marqués nunca puede llegar a las casillas de la esquina sin pasar por alguna casilla de la orilla que no se encuentre en la esquina, como se puede ver en la misma Figura 3.9, por lo que de hecho esas casillas no nos van a preocupar.

Por lo tanto, el Diablo puede seguir la estrategia que usaría para atrapar al Rey, borrando en T la casilla correspondiente a la que borraría en $C(T)$ que no tenga aristas en la frontera de T. □

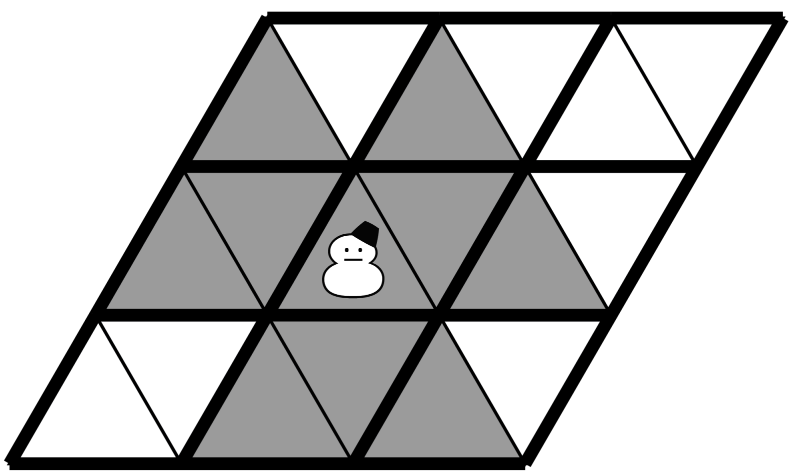

Figura 3.8: La vecindad del 2-Marqués en T queda contenida dentro de la vecindad del Rey en $C(T)$.

El siguiente teorema nos da una cota para la potencia del Duque necesaria para que este pueda moverse por siempre sobre un tablero infinito. Recordando que el 2-Ángel nunca necesitaba saltar más lejos que un salto de caballo para llevar a cabo su estrategia ganadora (esto es, no necesitaba utilizar las

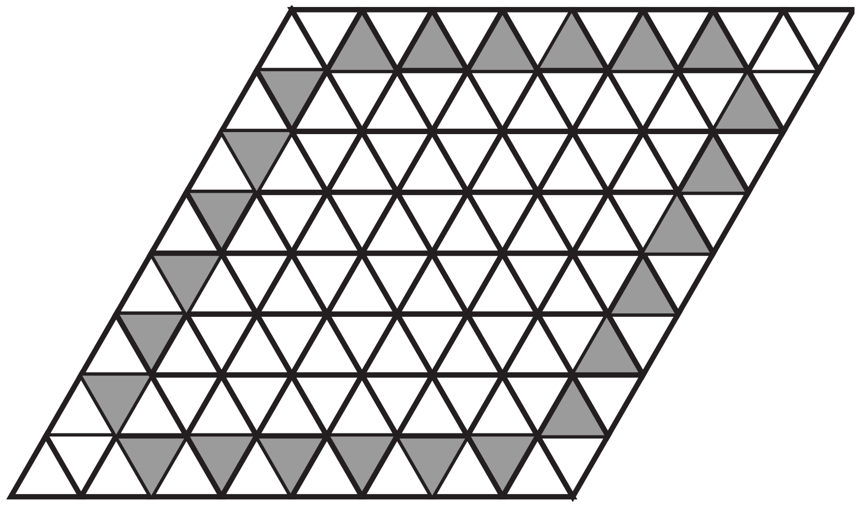

Figura 3.9: El Diablo puede negarle al 2-Marqués el acceso a cualquier casilla de la orilla.

esquinas de su vecindad), haremos uso nuevamente de las cuadrificaciones para obtener nuestro resultado.

Teorema 3.2.14. *El 6-Duque puede moverse por siempre sobre un tablero triangular infinito.*

Demostración. Sea T un tablero triangular infinito. Dada una casilla inicial $q_1^0 \in T$, el 6-Duque puede alcanzar cualquier casilla en $C(T)$ de las que necesitaría utilizar el 2-Ángel sobre $C(T)$ comenzando en q^0 para llevar a cabo su estrategia ganadora, como se ve en la Figura 3.10. Por lo tanto, el 6-Duque puede actuar como el 2-Ángel en $C(T)$, tratando una casilla q en $C(T)$ como borrada si su parte q_1 ha sido borrada por el Diablo, y moviéndose a la casilla q_1^i cuando el 2-Ángel se movería a la casilla q^i en $C(T)$. Por lo tanto, el 6-Duque puede moverse por siempre. $\square$

Esencialmente lo que estamos haciendo es representar a los cuadrados como triángulos, y dándole suficiente potencia al Duque para que llegue a las casillas a las que podría llegar el 2-Ángel en un tablero cuadrado.

Definiremos ahora al Ángel sobre tableros triangulares.

Definición 3.2.15. *Llamaremos un Δ-Ángel de potencia n a una pieza sobre un tablero triangular que se puede mover a cualquier casilla no borrada en su n-vecindad por vértices de su casilla inicial.*

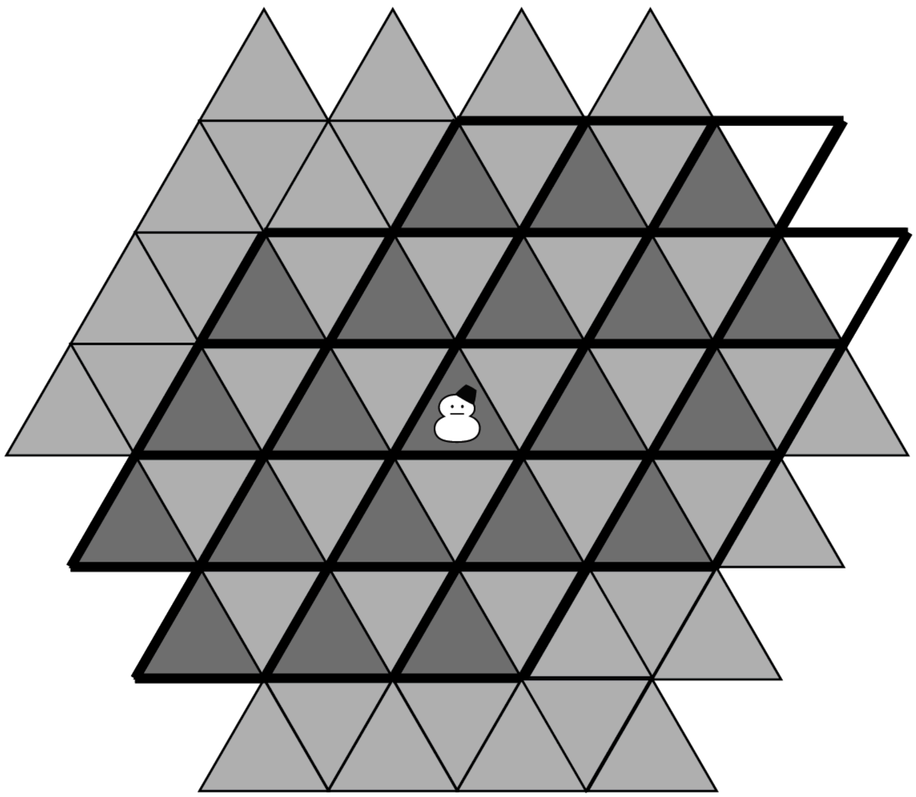

Figura 3.10: El 6-Duque puede llegar a cualquier casilla en $C(T)$ a la que podría llegar el 2-Ángel. El Duque se mueve sobre las casillas sombreadas.

Teorema 3.2.16. *El Δ-Ángel de potencia 3 puede moverse por siempre sobre un tablero triangular infinito.*

Demostración. La 6-vecindad por aristas de una casilla q está contenida en la 3-vecindad por aristas de q, como se puede ver en la Figura 3.11. Por lo tanto, el 3-Δ-Ángel puede aterrizar en cualquier casilla en la que podría aterrizar el 6-Duque, y entonces puede seguir la estrategia del Teorema 3.2.14 para moverse por siempre. $\square$

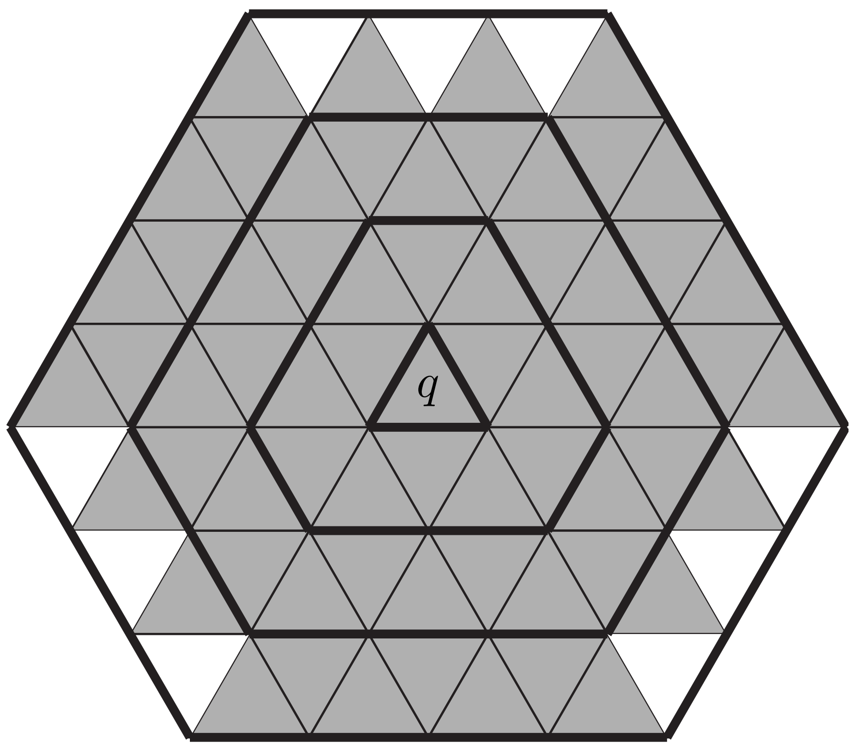

Figura 3.11: La 6-vecindad por aristas de q queda contenida dentro de su 3-vecindad por vértices.

3.3. Atrapando al 3-Marqués

A continuación probaremos que el Diablo puede atrapar al 3-Marqués, siendo esto interesante por ser la primera pieza de potencia mayor que 2 que no puede escapar. La prueba usa un método similar al que usamos para probar que se puede atrapar al Rey en un tablero cuadrado, aunque ahora aparecerán muchos más casos. Para empezar, veremos que si el 3-Marqués se encuentra cerca de la orilla y algunas casillas ya han sido borradas, este no podrá cruzar más allá de la orilla. Para la prueba, asumiremos que comienza el Diablo. En caso de que empezara el Marqués, el Diablo podría utilizar la misma estrategia, solo que ahora alrededor de la nueva casilla ocupada por el Marqués.

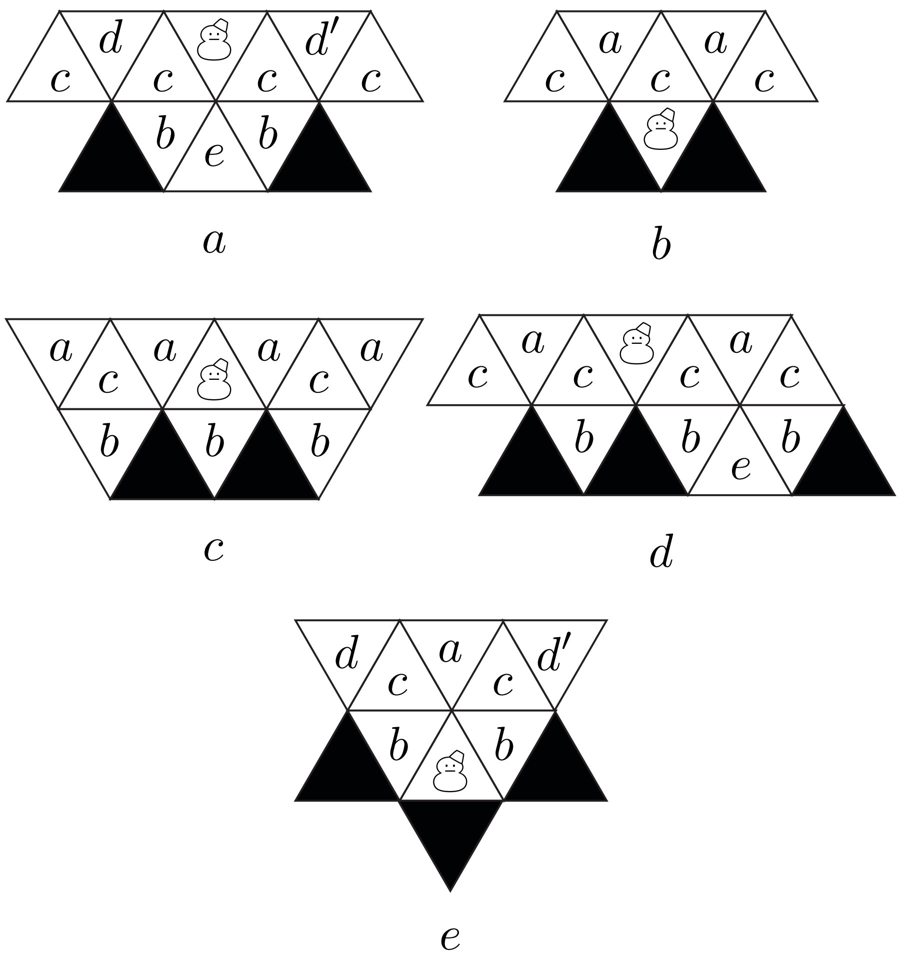

Figura 3.12: El 3-Marqués no puede huir por la orilla.

Definición 3.3.1. *Dada una casilla inicial q_0, llamaremos una* orilla *a la recta que pasa por la base de alguna otra casilla. Definiremos la distancia de una casilla a una orilla γ como el mínimo número de movimientos que tendría que realizar el 1-Marqués para quedar sobre una casilla que tenga una de sus bases sobre γ. Dado un tablero T, llamaremos las* orillas de T *a las intersecciones de T con las orillas que pasen por la base de alguna casilla de T y que dejen a T completamente contenido de un lado de la orilla.*

Lema 3.3.2. *Si el 3-Marqués se encuentra en una de las seis configuraciones mostradas en la Figura 3.12, nunca podrá atravesar la orilla que pasa por la base los triángulos borrados en cada configuración. La orilla de la configuración e que el 3-Marqués no puede atravesar es la que pasa por los dos triángulos borrados que apuntan hacia arriba.*

Demostración. En cada configuración, el 3-Marqués no puede atravesar la orilla en un movimiento, y dado cada movimiento que haga, el Diablo puede borrar una casilla tal que el 3-Marqués quede en alguna otra (o la misma) configuración. En cada configuración, se muestran las casillas a las que puede llegar el 3-Marqués que lo dejan a distancia menor o igual que 4 de la orilla, y en cada casilla hay una letra que indica a que configuración lo puede mandar el Diablo jugando en la casilla adecuada. Lo verificaremos caso por caso. Dada cualquiera de las 6 configuraciones, luego del turno del 3-Marqués:

- Si se mueve a una casilla marcada con la letra a, el Diablo borrará la casilla sobre la orilla que se encuentre a distancia 3 de a, que no esté directamente abajo de a y que no esté previamente borrada (si ambas están borradas, puede borrar cualquier casilla), y el 3-Marqués quedará en la posición a. En ninguna de las configuraciones las dos casillas sobre la orilla a distancia 3 de una casilla marcada a están ambas libres.

- Si se mueve a una casilla marcada con la letra b, el Diablo borrará la casilla sobre la orilla que se encuentre a distancia 1 que no esté borrada, y el 3-Marqués quedará en la configuración b (si ambas están borradas, puede borrar cualquier casilla). En ninguna de las configuraciones las dos casillas sobre la orilla a distancia 1 de una casilla marcada b se encuentran ambas libres.

- Si se mueve a una casilla marcada con la letra c, el Diablo borrará la casilla sobre la orilla que se encuentre a distancia 2 de c que no esté borrada (si ambas están borradas, puede borrar cualquier casilla), y el

3-Marqués quedará en la configuración c. En ninguna de las configuraciones las dos casillas sobre la orilla a distancia 2 de una casilla marcada c están ambas libres.

- Si se mueve a una casilla marcada con la letra d, el Diablo borrará la casilla sobre la orilla que se encuentra a distancia 3 de d, y se encuentra inmediatamente a la izquierda de la casilla borrada que está abajo de d, y el 3-Marqués quedará en la configuración d.
- Si se mueve a una casilla marcada d', el Diablo borrará la casilla sobre la orilla que se encuentra a distancia 3 de d, y se encuentra inmediatamente a la derecha de la casilla borrada que está abajo de d', y el 3-Marqués quedará en una versión reflejada verticalmente de la configuración d.
- Si se mueve a una casilla marcada con la letra e, el Diablo borrará la casilla que está inmediatamente abajo de e, y el 3-Marqués quedará en la configuración e.

En todos los casos, si la casilla que debería borrar el Diablo ha sido previamente borrada, el Diablo puede borrar cualquier casilla, y el 3-Marqués se encontrará de todas maneras en alguna de las configuraciones.

Por lo anterior, desde ninguna de las configuraciones de la Figura 3.12 es posible para el 3-Marqués atravesar la orilla. □

A continuación veremos que el Diablo puede jugar de manera tal que al quedar cerca de una orilla, el 3-Marqués se encuentre forzosamente en alguna de las configuraciones de la Figura 3.12, siempre que el 3-Marqués se encuentre suficientemente lejos de la orilla.

Lema 3.3.3. *Si el 3-Marqués se encuentra a distancia mayor igual que 9 de una orilla γ, el Diablo puede jugar de manera tal que al acercarse a distancia menor o igual que 4 de γ, el 3-Marqués quede en alguna de las configuraciones de la Figura 3.12.*

Demostración. Dado que el 3-Marqués puede acercarse a lo más 3 casillas por turno a γ, basta con ver que el Diablo puede forzar al 3-Marqués a quedar en alguna de las configuraciones de la Figura 3.12 partiendo de casillas que se encuentren a distancias 9, 10 y 11 de γ.

Si inicialmente el Marqués se encuentra más lejos de γ, al irse acercando forzosamente deberá caer en alguna casilla que quede a una de esas tres distancias de γ.

Las Figuras 3.13, 3.14 y 3.15 muestran la casilla que deberá borrar el Diablo si el 3-Marqués cae en una casilla que se encuentre a distancia 9, 10 ó 11 respectivamente de la orilla. Adicionalmente, muestran a través de una letra minúscula y un símbolo la casilla que deberá borrar el Diablo luego del siguiente turno del Marqués. En cada caso, la letra minúscula indica que se debe borrar la casilla con la misma letra, pero mayúscula. El símbolo indica a que Figura se debe referir el Diablo para saber como actuar conforme el 3-Marqués se acerque más a la orilla. Por ejemplo, si en la Figura 3.15 el Marqués se mueve a la casilla marcada $a^{\bullet}$, el Diablo deberá borrar la casilla A y consultar la Figura asociada al símbolo $\bullet$ (en este caso la Figura 3.16). El Cuadro 3.1 muestra las figuras asociadas a cada símbolo.

Símbolo	Figura
$\bullet$	3.16
$\bullet\bullet$	3.17
$\diamond$	3.18
$*$	3.19
$**$	3.20

Cuadro 3.1: Figuras asociadas a cada símbolo.

Las Figuras 3.16 y 3.17 se refieren a como debe jugar el Diablo cuando el Marqués se encuentre a distancia 8 de la orilla. Al igual que con las figuras 3.13, 3.14 y 3.15, el Diablo borrará la casilla marcada de negro que aún no se encuentre borrada, y al caer el Marqués en una casilla marcada con cierta letra minúscula, borrará la casilla que tenga la misma letra en mayúscula. Forzosamente una de las dos casillas marcadas de negro estará borrada, pues el Marqués llegó a distancia 8 de la orilla por primera vez partiendo de alguna casilla a distancia 9, 10 ó 11 de la orilla, en cuyo caso el Diablo siguió la estrategia marcada en las figuras 3.13, 3.14 ó 3.15, respectivamente. Si la casilla en la que cae el Marqués contiene además de una letra algún símbolo, dicho símbolo nos referirá a su vez a otra figura, en la que el Marqués comenzará a una altura menor que la de la figura actual.

De manera análoga, la Figura 3.18 le indica al Diablo cómo jugar cuando el Marqués se encuentra a distancia 7 de la orilla, y las figuras 3.19 y 3.20 le indican cómo jugar cuando el Marqués se encuentra a distancia 6 de la orilla.

En todas estas figuras, cualquier sucesión de jugadas para el Marqués en las que se vaya acercando a la orilla dejará a este en alguna de las configuraciones de la Figura 3.12 al momento en que se encuentre por primera vez a distancia 1, 2 ó 3 de la orilla.

Por lo tanto, el 3-Marqués no puede atravesar una orilla si se encuentra a distancia mayor o igual que 9 de dicha orilla.

□

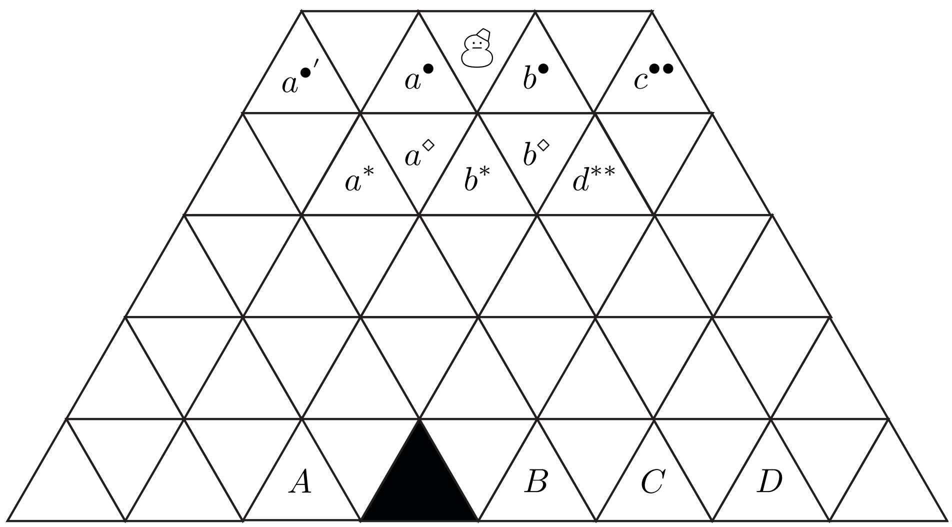

Figura 3.13: Instrucciones para el Diablo si el Marqués se encuentra a distancia 9 de la orilla.

Veamos un ejemplo para dejar más clara la estrategia del Diablo. El ejemplo está ilustrado en la Figura 3.21.

Ejemplo 3.3.4. *Supongamos que el 3-Marqués se encuentra a distancia 9 de la orilla. La Figura 3.13 le indica al Diablo que debe borrar la casilla marcada de negro. La jugada 1 del Marqués le indica al Diablo que debe borrar la casilla sobre la orilla que se encuentra precisamente abajo del Marqués, y posteriormente referirse a la Figura 3.18 para saber como continuar. Como respuesta a las jugadas 2 y 3 del Marqués, el Diablo borra las casillas 2 y 3 de la orilla de acuerdo a la Figura 3.18, y dejará al Marqués en la configuración b de la Figura 3.12.*

Siguiendo la idea que usamos para mostrar que el Rey no puede escapar, hemos visto que el Marqués no puede atravesar una orilla que se encuentre suficientemente lejos de él.

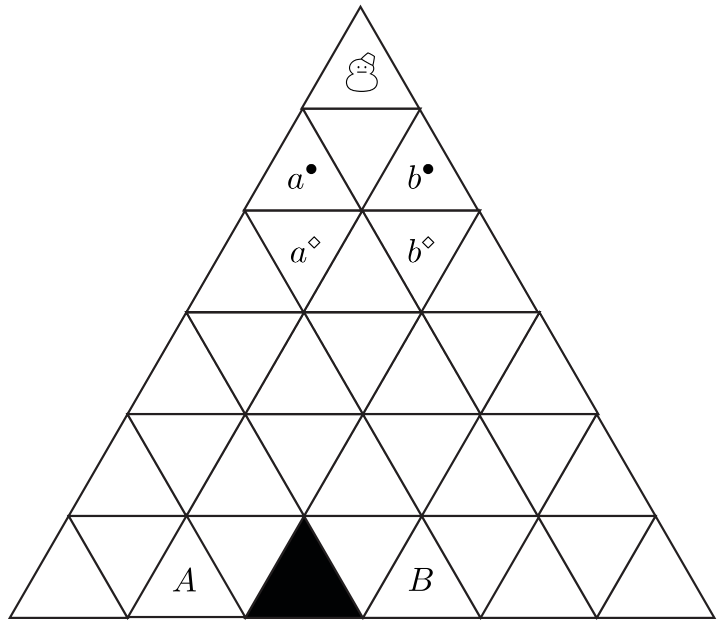

Figura 3.14: Instrucciones para el Diablo si el Marqués se encuentra a distancia 10 de la orilla.

Ahora deseamos ver que lo podemos encerrar en una vecindad de su casilla inicial. El siguiente paso para dicho objetivo será ver que, dada una vecindad por vértices suficientemente grande de la casilla inicial, el 3-Marqués tampoco podrá huir por una esquina de dicha vecindad, con una preparación previa por parte del Diablo, que consistirá en borrar un par de casillas de cada esquina.

Definición 3.3.5. *Dada una k-vecindad por vértices V_k de una casilla inicial q_0, llamaremos una* esquina *e de V_k a la intersección de dos orillas de V_k.*

Definición 3.3.6. *Dada T una k-vecindad por vértices de una casilla inicial q_0, llamaremos la r-vecindad de la esquina e a las casillas sobre T que se encuentren a distancia menor o igual que r de e. Las casillas sobre T adyacentes a e estarán a distancia 0 de e.*

Observación 3.3.7. *Dada una casilla q, la k-vecindad por vértices de q $U_k(q)$ contiene a la 2k-vecindad por aristas de q, $V_{2k}(q)$.*

Demostración. Sean q, p dos casillas a distancia $2k$. Entonces hay una sucesión $\{q, q_1, q_2, \cdots, q_{2k-1}, p\}$ de casillas adyacentes por aristas. Pero q_i será ad-

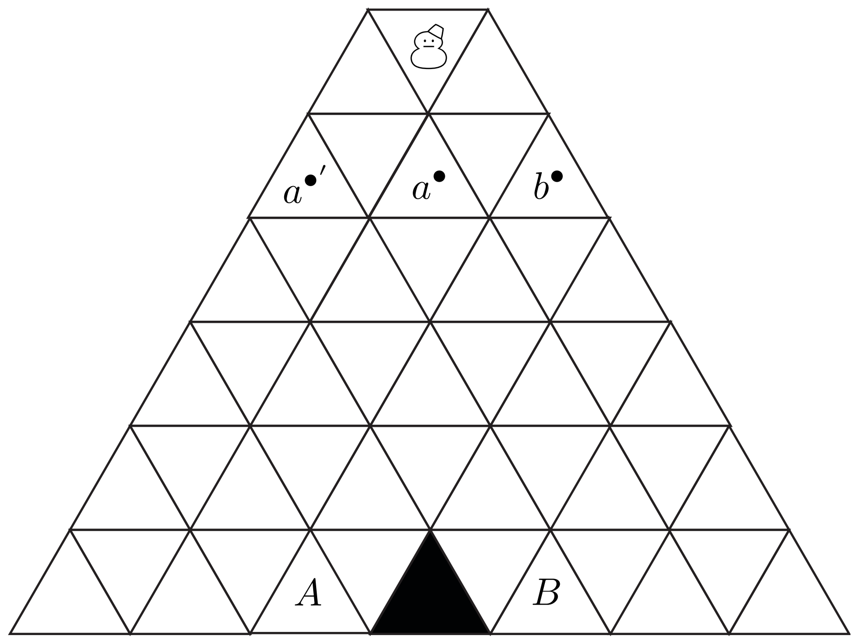

Figura 3.15: Instrucciones para el Diablo si el Marqués se encuentra a distancia 11 de la orilla.

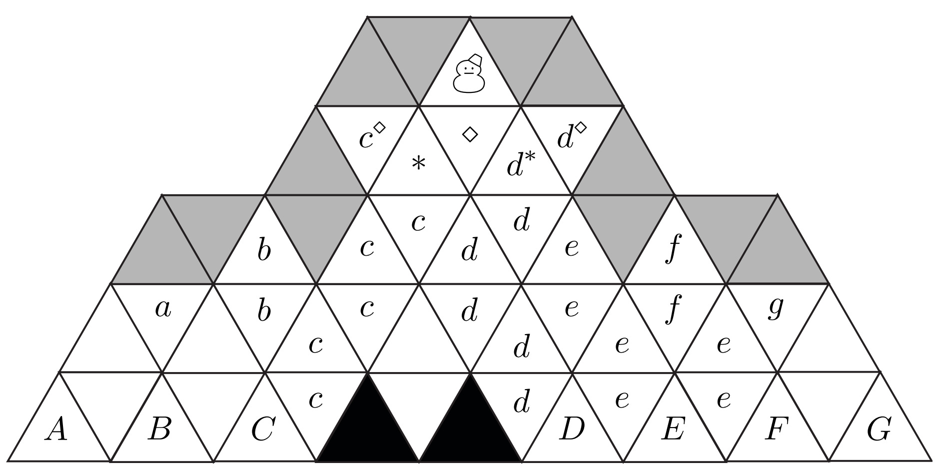

Figura 3.16: • (distancia 8 de la orilla).

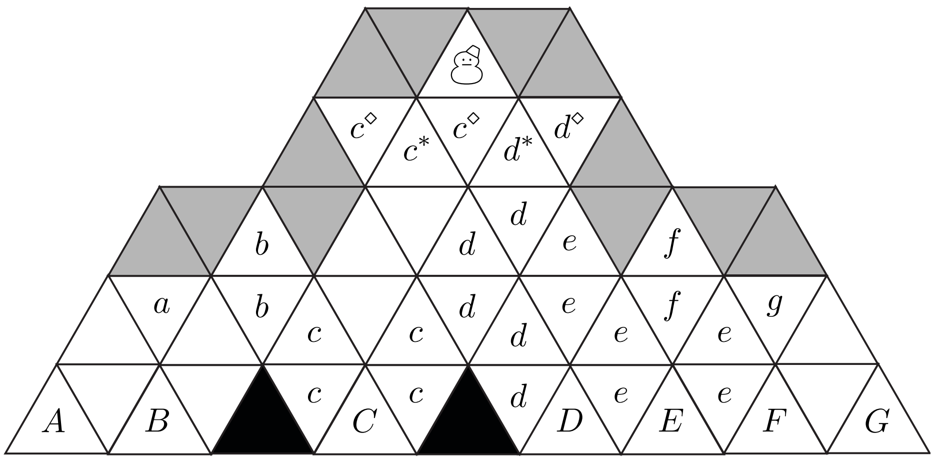

Figura 3.17: ●● (distancia 8 de la orilla).

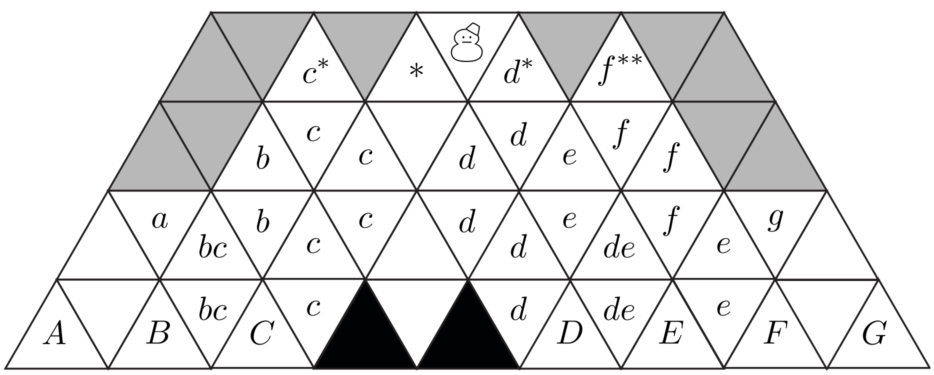

Figura 3.18: $\diamond$ (distancia 7 de la orilla).

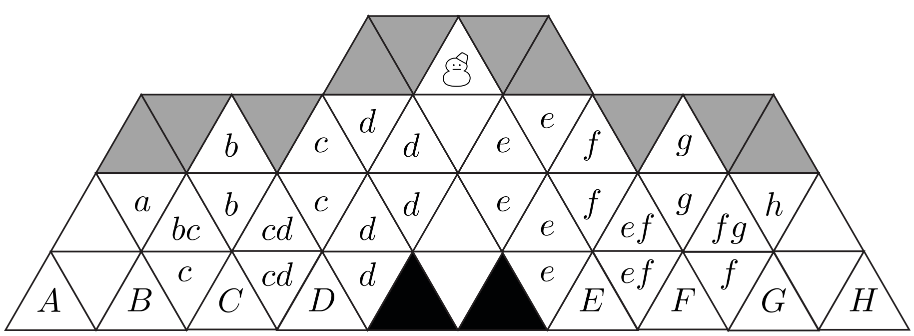

Figura 3.19: $*$ (distancia 6 de la orilla).

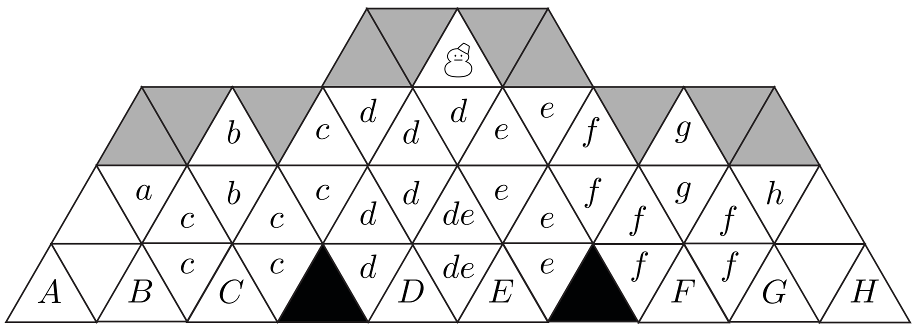

Figura 3.20: ∗∗ (distancia 6 de la orilla).

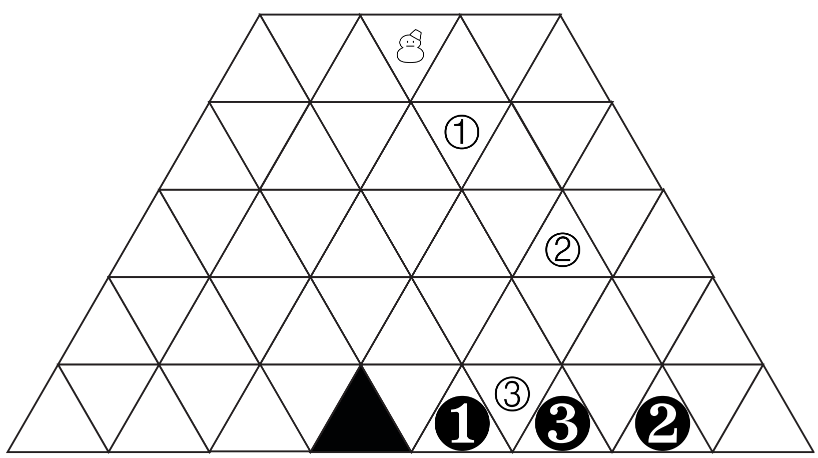

Figura 3.21: El Diablo lleva al 3-Marqués a la configuración b de la Figura 3.12.

yacente por vértices a cualquier casilla adyacente por aristas a q_{i+1}. Por lo tanto la sucesión $\{q, q_2, q_4, \cdots, q_{2k-2}, p\}$ llega de q a p en k saltos entre casillas adyacentes por vértices, lo que implica que la 2k-vecindad por aristas de q está contenida en la k-vecindad por vértices de q. □

Observación 3.3.8. *Si el 3-Marqués se encuentra en medio de una k-vecindad por vértices V_k, con $k \geq 23$, el Diablo puede borrar todas las casillas adyacentes a las esquinas de V_k antes de que el 3-Marqués se encuentre a distancia 9 o menor de alguna orilla de V_k.*

Demostración. En cualquier k-vecindad por vértices hay 12 casillas adyacentes a las esquinas. En 12 movimientos, el 3-Marqués puede avanzar a lo más 36 casillas, por lo que después de los 12 movimientos estará a distancia al menos 9 de la orilla, y el Diablo habrá utilizado los 12 turnos para borrar las casillas adyacentes a las esquinas. □

Lema 3.3.9. *Si el 3-Marqués se encuentra sobre una casilla inicial q_0 en un tablero que contenga una vecindad por vértices V_k con $k \geq 23$ y el Diablo sigue la estrategia de la Observación 3.3.8 y el Lema 3.3.3 para una orilla γ de V_k, al llegar el Marqués a una casilla que se encuentre en la 8-vecindad de una esquina e, estarán borradas por lo menos las casillas sobre la orilla marcadas con negro de alguna de las figuras 3.22, 3.23 ó 3.24, o de alguna reflexión o rotación de dichas figuras.*

Demostración. Por la Observación 3.3.8, el Diablo puede borrar todas las casillas adyacentes a alguna esquina antes de que el 3-Marqués quede a distancia 9 o menor de alguna orilla (y por lo tanto de una esquina). Veremos ahora las casillas en las que puede caer el 3-Marqués al entrar en la 8-vecindad de la esquina, y como efectivamente estará borrada una casilla adicional, en la posición que lo muestra alguna de las tres figuras, o en alguna reflexión o rotación de las mismas. Por conveniencia, supondremos que las casillas tienen coordenadas asignadas de acuerdo a la definición 3.2.11, teniendo las coordenadas $(0, 0)$ la casilla inferior izquierda. Supondremos también, sin pérdida de generalidad, que el Marqués entra por primera vez a la 8-vecindad de la esquina e por alguna casilla de la mitad inferior izquierda de la misma. En caso contrario, una simple reflexión de alguna de las tres figuras nos serviría.

Teniendo en cuenta que el Diablo está siguiendo las instrucciones del Lema 3.3.3, vemos que:

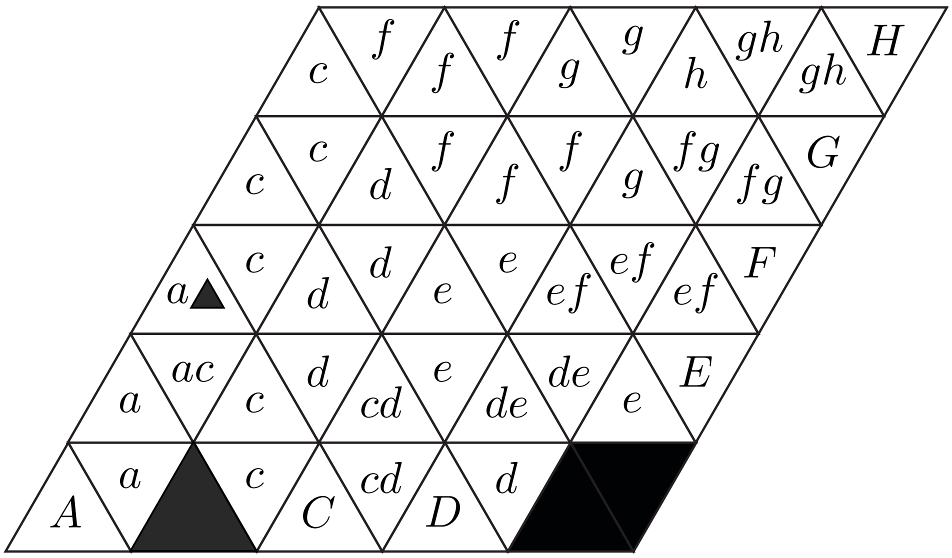

Figura 3.22: Instrucciones para atrapar al 3-Marqués en la esquina (caso I).

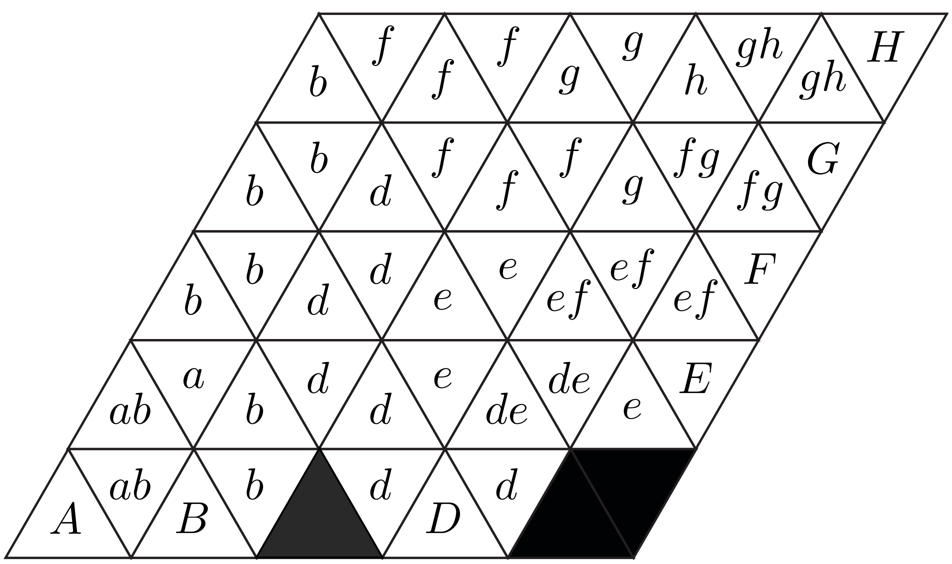

Figura 3.23: Instrucciones para atrapar al 3-Marqués en la esquina (caso II).

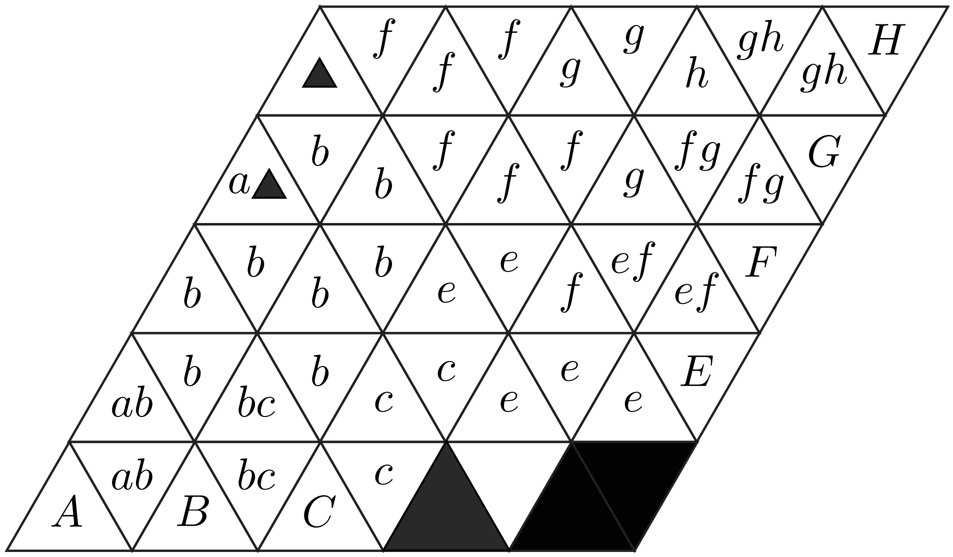

Figura 3.24: Instrucciones para atrapar al 3-Marqués en la esquina (caso III).

- Si el Marqués cae en la casilla $(0,0)$, se encontrará en la configuración e de la Figura 3.12, por lo que estará borrada la casilla $(2,0)$, y por tanto se encontrará en la configuración de la Figura 3.22.
- Si el Marqués cae en la casilla $(1,0)$, se encontrará en la configuración b de la Figura 3.12, por lo que quedarán borradas las casillas $(0,0)$ y $(2,0)$, y por tanto se encontrará en la configuración de la Figura 3.22.
- Si el Marqués cae en la casilla $(2,0)$, se encontrará en la configuración e de la Figura 3.12, por lo que estará borrada la casilla $(4,0)$, y por tanto se encontrará en la configuración de la Figura 3.23.
- Si el Marqués cae en la casilla $(1,1)$, se encontrará en la configuración c de la Figura 3.12, por lo que quedarán borradas las casillas $(0,0)$ y $(2,0)$, y por tanto se encontrará en la configuración de la Figura 3.22.
- Si el Marqués cae en la casilla $(2,1)$, se encontrará en la configuración d o en la configuración a de la Figura 3.12, por lo que quedarán borradas las casillas $(0,0)$ y $(2,0)$, y por tanto se encontrará en la configuración de la Figura 3.22, o quedarán borradas las casillas $(0,0)$ y $(4,0)$, y por tanto se encontrará en la configuración de la Figura 3.23.

- Si el Marqués cae en la casilla $(3,1)$, se encontrará en la configuración c de la Figura 3.12, por lo que quedarán borradas las casillas $(2,0)$ y $(4,0)$, y por tanto se encontrará en la configuración de la Figura 3.22.

- Si el Marqués cae en la casilla $(2,2)$, de acuerdo a las figuras 3.16, 3.17, 3.18, 3.19 y 3.20, estará borrada la casilla $(0,0)$, la casilla $(2,0)$ o la casilla $(4,0)$. Si estuviera borrada la casilla $(0,0)$, el Diablo puede borrar la casilla $(2,0)$ en ese turno, y el Marqués se encontrará en la configuración de la Figura 3.22. En otro caso, el Marqués se encontrará en la configuración de la Figura 3.22 o en la configuración de la Figura 3.23.

- Si el Marqués cae en la casilla $(3,2)$, de acuerdo a las figuras 3.16, 3.17, 3.18, 3.19 y 3.20, estará borrada la casilla $(2,0)$, la casilla $(4,0)$ o la casilla $(6,0)$, y por lo tanto se encontrará en la configuración de la Figura 3.22, en la configuración de la Figura 3.23 o en la configuración de la Figura 3.24.

- Si el Marqués cae en la casilla $(4,2)$, de acuerdo a las figuras 3.16, 3.17, 3.18, 3.19 y 3.20, estará borrada la casilla $(2,0)$, la casilla $(4,0)$ o la casilla $(6,0)$, y por lo tanto se encontrará en la configuración de la Figura 3.22, en la configuración de la Figura 3.23 o en la configuración de la Figura 3.24.

- Si el Marqués cae en la casilla $(3,3)$, de acuerdo a las figuras 3.19 y 3.20, estará borrada la casilla $(0,0)$, la casilla $(2,0)$, la casilla $(4,0)$ o la casilla $(6,0)$. Si estuviera borrada la casilla $(0,0)$, el Diablo puede borrar la casilla $(6,0)$ y quedar en la configuración de la Figura 3.24. En otro caso, se encontrará en la configuración de la Figura 3.22, en la configuración de la Figura 3.23 o en la configuración de la Figura 3.24.

- Si el Marqués cae en la casilla $(4,3)$, de acuerdo a la Figura 3.18, estará borrada la casilla $(2,0)$ o la casilla $(4,0)$, y por lo tanto se encontrará en la configuración de la Figura 3.22 o en la configuración de la Figura 3.23.

- Si el Marqués cae en la casilla $(5,3)$, de acuerdo a las figuras 3.19 y 3.20, estará borrada la casilla $(2,0)$, la casilla $(4,0)$, o la casilla $(6,0)$. Podría estar borrada también la casilla $(8,0)$, pero como esa la borró el Diablo mientras borraba las esquinas, podemos pensar que en el turno que tendría que haber borrado $(8,0)$ borró cualquiera de las otras tres casillas. Por lo tanto se encontrará en la configuración de la Figura 3.22, en la configuración de la Figura 3.23 o en la configuración de la Figura 3.24.

- Si el Marqués cae en la casilla $(4,4)$, el Diablo borrará la casilla $(6,0)$ y el Marqués quedará en la configuración de la Figura 3.24.

Como en todas las casillas de la 8-vecindad de e en las que puede caer el Marqués se cumple el enunciado del Lema, este queda demostrado. □

Lema 3.3.10. *El 3-Marqués no puede escapar por la esquina ni por las orillas en ninguna de las configuraciones de las figuras 3.22, 3.23 y 3.24.*

Demostración. En cada una de las configuraciones, el Diablo borrará la casilla marcada con la letra en mayúscula que indica la letra minúscula de la casilla en la que cae el Marqués en cada turno. En caso de que el Marqués comenzara cayendo en una casilla marcada con una letra mayúscula, el Diablo borrará la casilla adyacente a la ocupada por el Marqués que también tiene como base la misma orilla. Si el Marqués cae en una casilla con dos letras (ó una letra y un triángulo), borrará la casilla que no esté borrada de entre las dos señaladas.

Una de esas casillas siempre estará borrada, salvo con la casilla $(8,2)$, que indica que debemos borrar la casilla E o la casilla F, y existe una ruta a través de la cual podemos llegar a ella sin haber pasado antes por una e o una f antes. Este camino está dado por la sucesión $\{(3,3),(5,2),(8,2)\}$. Sin embargo, al pasar por ese camino habremos borrado la casilla D, por lo que al llegar a la casilla $(8,2)$ podemos borrar la casilla F sin miedo a que el Marqués escape por la esquina.

En cualquiera de las tres figuras, dada una sucesión de casillas por las que pase el Marqués, al acercarse a una orilla o a la esquina se encontrará con que el Diablo habrá borrado la casillas necesarias para impedirle el escape.

Por lo tanto, el 3-Marqués no podrá escapar por la esquina. □

Los resultados de esta sección nos llevan finalmente al resultado principal, enunciado en el siguiente teorema. Hay que notar que aunque el Diablo atrape al 3-Marqués en una 23-vecindad por vértices de su casilla inicial, requerirá en ocasiones de jugar fuera de la 23-vecindad (cuando el 3-Marqués juegue en una casilla adyacente por la base a una orilla), por lo que el tablero mínimo para atraparlo será una 47-vecindad por aristas de su casilla inicial (ó una 24-vecindad por vértices, si queremos que el tablero sea convexo).

Teorema 3.3.11. *El Diablo puede atrapar a un 3-Marqués dentro de una 23-vecindad por vértices de su casilla inicial.*

Demostración. Por el Lema 3.3.3 el Marqués no puede escapar por una orilla si se encuentra a distancia mayor igual que 9 de la misma, y por la Observación 3.3.8 ylos lemas 3.3.9 y 3.3.10, una 23-vecindad por vértices le alcanza al Diablo para que el 3-Marqués no pueda escapar tampoco por la esquina. Por lo tanto, el Diablo puede atrapar al 3-Marqués. □

A modo de resumen presentamos el Cuadro 3.2, que muestra los resultados que obtuvimos acerca del juego en tableros triangulares con las distintas piezas.

Potencia	Marqués	Duque	Ángel
1	Atrapado	Atrapado	
2	Atrapado		
3	Atrapado		Escapa
⋮			Escapa
6		Escapa	Escapa

Cuadro 3.2: Resultados conocidos sobre tableros triangulares.

3.4. Tableros hexagonales

Al igual que con los tableros cuadrados y triangulares, es posible definir el juego sobre una rejilla compuesta por hexágonos regulares. En este caso, no existe una diferencia entre el Duque y el Ángel, puesto que cualquier par de casillas adyacentes por un vértice también serán adyacentes por una arista, y viceversa.

En este caso sólo presentaremos un resultado, y dejaremos abiertas algunas interrogantes.

Definición 3.4.1. *Un* tablero hexagonal *consistirá de una rejilla conexa finita o infinita compuesta por hexágonos regulares, cada uno de los cuales será una casilla del tablero.*

Definición 3.4.2. *Dada una casilla inicial* q_0 *sobre un tablero hexagonal* H*, definiremos su k-vecindad* $V_k(q_0)$ *como el conjunto de casillas que se encuentran a distancia menor o igual que* n *de* q_0*, siendo la distancia entre dos casillas el número mínimo de saltos entre casillas adyacentes que llevan de una casilla a la otra.*

Definición 3.4.3. *Un H-Ángel de potencia* n *será una pieza sobre un tablero hexagonal que en su turno puede llegar a cualquier casilla en la n-vecindad de su casilla actual.*

Teorema 3.4.4. *El Diablo puede atrapar a un H-Ángel de potencia 1 dentro una 9-vecindad de su casilla inicial si el H-Ángel empieza. Si empieza el Diablo, lo puede atrapar dentro de una 8-vecindad de su casilla inicial.*

Demostración. Supongamos que empieza el H-Ángel. Sin importar lo que haga en sus primeros 6 turnos el Diablo borrará las seis casillas sobre la orilla de la 9-vecindad que se encuentran a la izquierda de la casilla de las esquinas, como se muestra en la Figura 3.25. Durante todo ese tiempo el H-Ángel se mantendrá a distancia mayor que 2 de cualquier casilla de la orilla. Posteriormente a los seis primeros turnos, en cuanto el H-Ángel se encuentre a distancia 2 de alguna casilla de la orilla, el Diablo borrará la casilla sobre la orilla que se encuentre precisamente frente al H-Ángel. Esto es, borrará la casilla sobre la orilla que está conectada a la casilla actual del H-Ángel por una arista. Mientras el H-Ángel se mantenga a distancia 2 de la orilla, el Diablo se mantendrá borrando la casilla sobre la orilla que se encuentre frente a la casilla ocupada por el H-Ángel. Cuando finalmente el H-Ángel se acerque a distancia 1 de la orilla, sólo habrá una casilla sobre la orilla adyacente a la actual, por lo que el Diablo la podrá borrar, y en adelante cualquier casilla a la que se mueva el H-Ángel será adyacente a lo más a una casilla sobre la orilla. Finalmente, cuando el H-Ángel se encuentre en una casilla adyacente a una de las que borró el Diablo en sus primeros 6 turnos, el Diablo borrará la casilla de la esquina adyacente a dicha casilla previamente borrada. Siguiendo esta estrategia, el H-Ángel de potencia 1 jamás podrá alcanzar la orilla.

Si comienza el Diablo, borrará las 6 casillas necesarias antes del sexto turno del H-Ángel, por lo que en una 8-vecindad el H-Ángel estará en su sexto tiro al menos a distancia 2 de la orilla, y el Diablo podrá proceder con la misma estrategia, por lo que podrá atrapar al H-Ángel. □

Un posible intento de escape por parte del H-Ángel se muestra en la Figura 3.26, donde en sus jugadas 1 y 2, el H-Ángel se mantiene a distancia 2 de la orilla, por lo que el Diablo borra las casillas sobre la orilla enfrente del H-Ángel. Al descender a distancia 1 de la orilla con las jugadas $3, 4, 5$ y 6, el Diablo simplemente borra la casilla sobre la orilla adyacente a cada una de las posiciones del H-Ángel. Finalmente al caer el H-Ángel en 7, el Diablo borra la casilla de la esquina, y puede seguir adelantando al H-Ángel en cada jugada, como lo muestran los turnos $8, 9$ y 10.

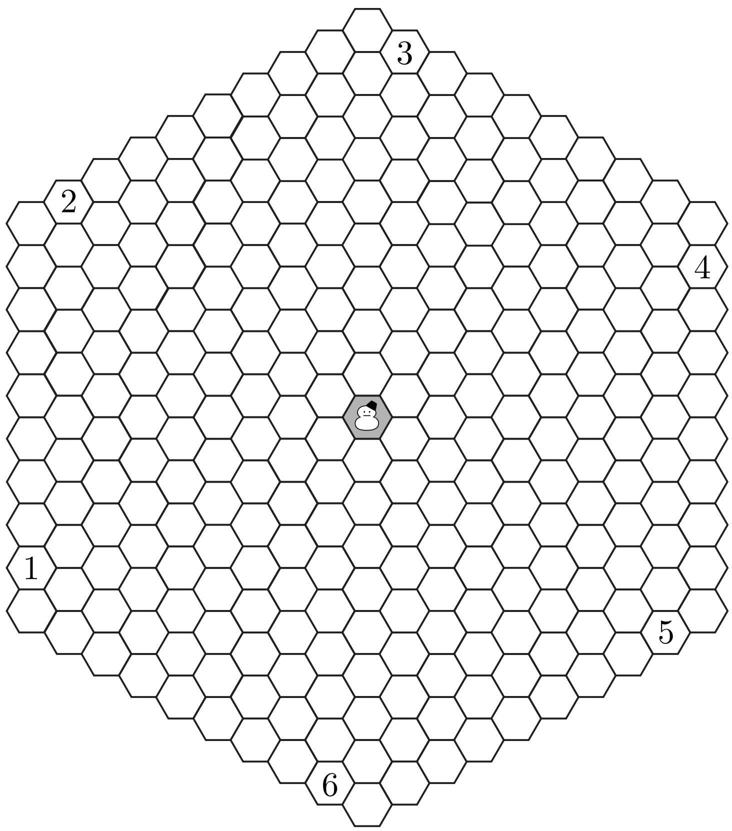

Figura 3.25: Estrategia para atrapar al H-Ángel de potencia 1 en un tablero hexagonal.

Es importante borrar las 6 casillas iniciales que borra el Diablo antes de que el H-Ángel llegue a distancia 2 de la orilla, pues en caso contrario, al llegar a una casilla adyacente a una esquina, el H-Ángel tendría tres opciones para escapar, y el Diablo sólo habría podido borrar previamente una de dichas

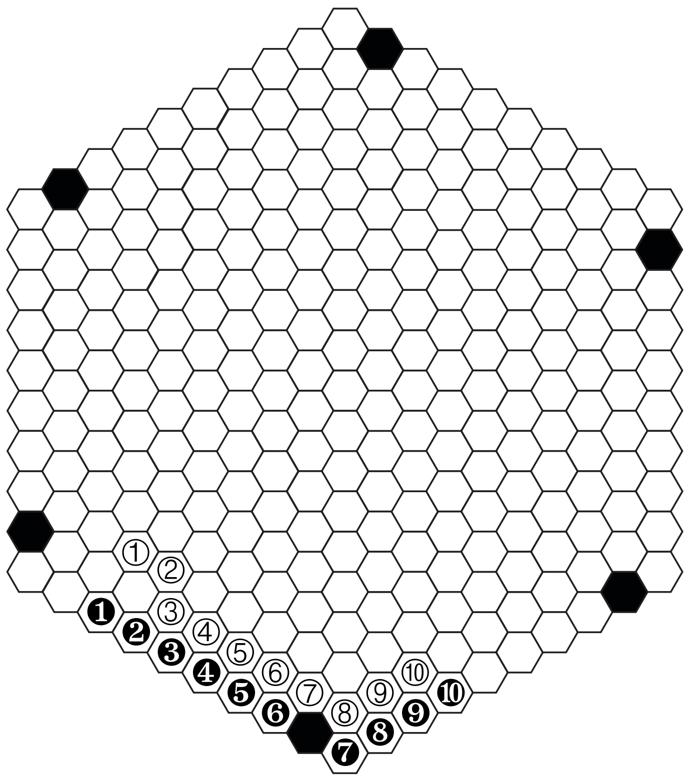

Figura 3.26: El Diablo atrapando al H-Ángel.

opciones, lo que le permitiría al H-Ángel escapar por alguna de las dos casillas restantes. Además, es importante también que después de borrar el Diablo las 6 casillas iniciales, el H-Ángel se encuentre a distancia al menos 2 de la orilla, pues de lo contrario se encontraría frente a dos opciones sin borrar, y el Diablo sólo podría borrar una de ellas.

Por lo tanto, la 9-vecindad (u 8-vecindad si empieza el Diablo) es la mínima vecindad en la que el Diablo puede garantizar atrapar al H-Ángel.

Capítulo 4

Conclusiones

> There are two modes of acquiring knowledge, namely, by reasoning and experience. Reasoning draws a conclusion and makes us grant the conclusion, but does not make the conclusion certain, nor does it remove doubt so that the mind may rest on the intuition of truth unless the mind discovers it by the path of experience.
>
> *Opus Majus*
> ROGER BACON

Hemos tratado con el juego del Ángel y distintas variantes, tanto en cuanto al tablero como en cuanto al movimiento de los distintos *Ángeles*.

Quedan abiertas preguntas en todos los tableros que tratamos, lo que muestra que cualquier variante o generalización no tiene por que tener una respuesta trivial en cuanto al resultado del juego jugando de manera óptima.

Además de las variantes propuestas en este trabajo, quedan muchas otras posibles generalizaciones por investigar, como lo podrían ser el juego llevándose a cabo en tableros de dimensión superior, darle alguna ventaja inicial al Diablo o permitir que el Diablo borre más de una casilla por turno.

Todas estas posibles variantes son interesantes y atacables, por lo que creemos que es posible continuar con la investigación en esta materia.

A lo largo de este trabajo presentamos ejemplos en los que una pieza de gran potencia no puede escapar nunca (las n-Torres), así como casos en los que una pieza de pequeña potencia sí lo logra (el 2-Ángel).

Hemos visto también casos en los que una pieza capaz de saltar puede ser atrapada, de nueva cuenta sin importar su potencia (los Ángels Tontos). En general, sin embargo, poder saltar sobre casillas borradas es una condición muy fuerte, y creemos que en muchos casos esta condición es clave para garantizar que el Ángel gane.

Aunque en los casos tratados ninguna pieza incapaz de saltar sobre casillas borradas puede escapar, la experimentación nos permite conjeturar que hay piezas que no pueden saltar sobre casillas borradas, pero que si tienen potencia suficiente, serán capaces de escapar.

Para concluir este trabajo, presentamos preguntas que fueron surgiendo a lo largo de esta investigación y que quedaron abiertas, así como nuestras conjeturas acerca de las posibles respuestas a dichas preguntas.

4.1. Preguntas abiertas

A continuación tenemos un listado de distintas preguntas por responder, dentro de los distintos tableros en que se puede llevar a cabo el juego.

- Para tableros triangulares:
    - Si existe alguna potencia n tal que el Marqués de potencia n pueda moverse por siempre sobre un tablero infinito. En particular, qué ocurre con el Marqués de potencia 4.
    - Sabemos que el 1-Duque puede ser atrapado, y también que el 6-Duque puede moverse por siempre sobre un tablero infinito. Queda entonces la cuestión de encontrar la mínima potencia n tal que el n-Duque puede moverse por siempre.
    - Sabemos que el 3-Ángel puede moverse por siempre sobre un tablero infinito. Falta saber que ocurre con el 1-Ángel y el 2-Ángel, y si tal vez debilitando al Ángel al impedirle saltar sobre casillas borradas eso facilita atraparlo.
- Para tableros cuadrados:
    - Sabemos que el 1-Duque puede ser atrapado. Queda por ver que pasa con el 2-Duque, definido como una pieza que puede llegar a

cualquier casilla a la que podría llegar el 1-Duque con dos movimientos consecutivos (y pudiendo saltar). Sabemos que el 3-Duque puede moverse por siempre, pues las casillas que utiliza el 2-Ángel para moverse por siempre quedan contenidas dentro de las casillas a las que puede llegar el 3-Duque.

- Poniendo al Duque la restricción de no poder saltar, definimos el n-Marqués. Queda por ver que sucede con el 2-Marqués, y si existe alguna potencia n tal que el n-Marqués pueda moverse por siempre.
- Sabemos que la n-Torre puede ser capturada para toda $n \in \mathbb{N}$ si no le permitimos saltar sobre casillas borradas. Queda por ver que ocurre con las n-Torres si les permitimos saltar sobre casillas borradas para $n > 1$, pues la 1-Torre es igual al 1-Duque.

- Para tableros hexagonales:
  - Queda por ver que ocurre con el 2-Ángel, y si existe alguna potencia n tal que el n-Ángel puede moverse por siempre.

Un posible camino para resolver estas preguntas es tratar de adaptar la técnica usada por Kloster en [7] a los tableros triangulares y hexagonales. Sin embargo, dicha adaptación resulta un tanto compleja.

4.2. Conjeturas

Basados principalmente en la experimentación y en similitudes con los casos tratados en la Tesis, tenemos las siguientes conjeturas en torno a las preguntas abiertas que planteamos.

- Para tableros triangulares:
  - El Marqués de potencia 4 puede moverse por siempre.
  - El 2-Duque (y por lo tanto el 1-Ángel) pueden moverse por siempre. Además, esto implica que aún debilitando al n-Ángel impidiéndole saltar sobre casillas borradas, este puede moverse por siempre.

- Para tableros cuadrados:

    - El 2-Duque puede moverse por siempre, pues el Diablo requeriría hacer una zanja de ancho 2 para atraparlo, y eso toma muchos movimientos.
    - Con el 2-Marqués nos queda la duda de que sucede. Hemos probado con diversas estrategias para intentar atraparlo, y todas han fracasado, pero nos queda la sensación de que tal vez sea posible atraparlo.
    - La 2-Torre puede moverse por siempre, si le permitimos saltar sobre casillas borradas. De ser cierto esto, automáticamente también lo sería que el 2-Duque puede moverse por siempre.

  Es importante notar que de probar que cualquiera de estas piezas puede moverse por siempre, el resultado de que el 2-Ángel puede moverse por siempre sería un corolario de dicha prueba.

- Para tableros hexagonales:

    - El 2-Ángel puede moverse por siempre.

Bibliografía

[1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway y R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Volume **3**, Second Edition. A K Peters, Ltd. (2003), p. 641-664.

[2] B. Bollobás e I. Leader, *The Angel and the Devil in three dimensions*. En *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **113** no. 1 (2006), p. 176-184.

[3] B. H. Bowditch, *The Angel Game in the Plane*. En *Combinatorics, Probability and Computing* **16**, Volume 3 (2007), p. 345-362.

[4] J. H. Conway, *The Angel Problem*. En *Games of No Chance*. Ed. R. J. Nowakowski. MSRI Publications, Volume **29** (1996), p. 3-12.

[5] R. A. Epstein, *The Theory of Gambling and Statistical Logic*, Second Edition. Academic Press (2009), p. 368-369.

[6] P. Gács, *The Angel Wins*, http://www.cs.bu.edu/~gacs/papers/angel.pdf

[7] O. Kloster, *A Solution to the Angel Problem*. En *Theoretical Computer Science* **389**, Numbers 1-2 (2007), p. 152-161.

[8] G. Martin, *Restoring Fairness to Dukego*. En *More Games of No Chance*. Ed. R. J. Nowakowski. MSRI Publications, Volume **42** (2002), p. 79-87.

[9] A. Máthé, *The Angel of power 2 wins*. En *Combinatorics, Probability and Computing* **16**, Volume 3 (2007), p. 363-374.