



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

Dispersión no lineal en el sistema de Lamb con masa cero.

T E S I S

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas
Presenta:

MARCO ANTONIO TANECO HERNÁNDEZ

Director: Dr. Anatoli E. Merzon

MORELIA, MICHOACÁN - 5 DE SEPTIEMBRE DE 2011.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Comité sinodal

TESIS PROFESIONAL SUSTENTADA POR MARCO ANTONIO TANECO HERNÁNDEZ COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, ACEPTADA POR EL POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS.

DR. ANATOLI E. MERZON

DR. A. I. KOMECH

DR. PAVEL I. NAUMKIM VENIDECTOVA

DR. CARLOS OSVALDO OSUNA CASTRO

DR. HORST BEYER

RESUMEN. Se estudian las asintóticas para tiempos grandes cuando $t \rightarrow \pm\infty$ de las soluciones de energía finita de un sistema hamiltoniano acoplado compuesto por una ecuación de onda y la ecuación de un oscilador con masa $m = 0$, se demuestra la existencia de un atractor no trivial al cual tienden todas las soluciones y se establece por primera vez la existencia de las asintóticas respecto de la norma energética global, es decir, bajo ciertas condiciones sobre la fuerza del oscilador, cada solución que vive en algún espacio funcional decae a una suma compuesta por un estado estacionario, una onda “saliente”(“entrante”) y un resto que no el cual tiende a cero cuando $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) respecto de la norma energética global.

Índice general

Resumen	I
Índice general	II
Agradecimientos	VII
Introducción	IX
Capítulo 1. Planteamiento y formulación del problema	1
1. El sistema de Lamb: una cuerda acoplada a un oscilador no lineal	2
2. El problema de Cauchy	5
3. Espacio de fases y estructura hamiltoniana del sistema de Lamb	5
Capítulo 2. La descomposición de D' Alembert en la clase de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$	9
1. Teoría de distribuciones	9
2. La descomposición de D Alembert en $C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$	15
3. La descomposición de D Alembert en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$	18
Capítulo 3. Existencia de la dinámica del sistema de Lamb	37
1. Construcción de la dinámica del sistema de Lamb	37
2. Existencia y unicidad de la solución	38
3. Continuidad del flujo $U(t)$ del sistema de Lamb	58
4. Conservación de la energía del sistema de Lamb	62
Capítulo 4. Dispersión no lineal en el sistema de Lamb	73
1. Soluciones estacionarias del sistema de Lamb	73
2. Resultados Principales	74
3. Demostración del Teorema 4.4: Convergencia a el atractor global	77
4. Demostración del Teorema 4.6: Asintótica de dispersión	80
5. Estados asintóticos	83
Capítulo 5. Conclusiones	91
1. Problemas abiertos	92

Apéndice A. La ecuación de onda no lineal asociada al sistema de Lamb	93
Apéndice B. Cálculo diferencial en espacios normados	97
Apéndice C. Ejemplos de distribuciones	103
Apéndice D. Los espacios \mathcal{E}_F , $L_1^2(I; \mathbb{R}^d)$ y el subespacio \mathcal{M}_ϵ	107
1. El espacio \mathcal{E}_F	107
2. El espacio $L_1^2(I; \mathbb{R}^d)$	108
3. Sobre la cerradura de \mathcal{M}_ϵ en $L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$	110
Apéndice E. Sistemas dinámicos hamiltonianos	111
Apéndice F. Un vistazo al fenómeno de dispersión	113
Índice de símbolos	117
Referencias	119

Agradecimientos

Este trabajo es producto del esfuerzo y apoyo de mi familia.
GRACIAS!! por todo.

Agradezco inmensamente la guía y enseñanzas de
todos mis profesores, las instituciones que me albergaron
y los apoyos del CONACyT.

Introducción

La mecánica cuántica es una rama de la Física que da una excelente descripción a varios hechos experimentales tales como: espectros atómicos y moleculares, dispersión de luz y partículas, la tabla periódica de los elementos, reacciones químicas, etc. Sin embargo, no se conoce una fundamentación rigurosa hasta el momento, es decir, un modelo matemático que explique dichos fenómenos. La piedra angular de la teoría es la ecuación dinámica de Schrödinger

$$(0.1) \quad \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu} \left(-i\hbar \Delta - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right)^2 \psi(\mathbf{x}, t),$$

en donde, $i = \sqrt{-1}$, \hbar es la constante de Planck dividida sobre 2π , e es la unidad de carga eléctrica del electrón, μ la masa del electrón, c la velocidad de la luz, $\phi(\mathbf{x})$ es una función de valores reales sobre \mathbb{R}^d que representa la energía potencial del electrón y $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ es una función de valores vectoriales sobre \mathbb{R}^d que representa el potencial magnético. Y como es costumbre Δ es el operador Laplaciano en \mathbb{R}^d definido como $\Delta f(\mathbf{x}) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Las soluciones $\psi(\mathbf{x}, t)$ de esta ecuación diferencial se denominan funciones de onda y se han interpretado hasta ahora de la siguiente manera: si $A \subset \mathbb{R}^d$ es un abierto, entonces la *probabilidad* de encontrar la partícula en el instante t está dada por

$$\int_A |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}.$$

La ecuación (0.1) ha sido resuelta de manera exacta para muchos casos particulares importantes. Desafortunadamente, existen evidencias de que muchos fenómenos cuánticos fundamentales no pueden ser descritos por esta ecuación lineal. Vamos a mencionar algunos de ellos:

I. Las transiciones de Bohr entre estados estacionarios cuánticos, o “saltos cuánticos” predichos por N. Bohr en 1913 (véase [9, 10, 11])

$$(0.2) \quad |E_-\rangle \mapsto |E_+\rangle,$$

en donde, $|E_\pm\rangle$ establece que estamos en un estado estacionario cuántico con nivel de energía E_\pm .

II. La dualidad onda partícula (véase [15]) predicha por L. de Broglie: difracción de electrones descubierta experimentalmente por C. Davisson y L. Germer en 1927.

III. La interpretación probabilística de Born de la función de onda.

Las transiciones (0.2) son las responsables del espectro de las radiaciones atómicas observadas en los experimentos y coincide con los eigenvalores del operador diferencial asociado a la ecuación estacionaria correspondiente a (0.1). Sin embargo, dichas transiciones no son una propiedad inherente de las soluciones de la ecuación lineal (0.1).

Born identificó $|\psi(x, t)|$ con la densidad de probabilidad justo como lo explica la tasa de conteo en el experimento de Davisson-Germer. La identificación juega un rol clave en problemas de dispersión que aparecen en mecánica cuántica. Sin embargo no se ha podido justificar tal interpretación usando las ideas de la teoría de probabilidad.

La estrategia común en las aplicaciones de la mecánica cuántica para describir diversos fenómenos cuánticos es una hábil combinación de los postulados **I-III** junto con la ecuación dinámica (0.1). Dicha estrategia no es matemáticamente autoconsistente dado que los postulados formalmente no son compatibles con la ecuación lineal autónoma (0.1). Lo cual conduce a pensar que dicha ecuación requiere una modificación adecuada (no lineal) que conduciría a considerar los postulados como propiedades inherentes de las ecuaciones dinámicas modificadas. Afortunadamente, existe una elección obvia para la versión no lineal, la cual está bien establecida y se nombra el sistema acoplado de ecuaciones de Maxwell-Schrödinger. Las ecuaciones acopladas se conocen desde los trabajos de Schrödinger [49] en donde las densidades de carga y de corriente fueron expresadas en términos de la función de onda. Las ecuaciones acopladas constituyen un *sistema no lineal* para la función de onda del electrón y el campo de Maxwell, aunque la ecuación de Schrödinger sea lineal con respecto a la función de onda. El acoplamiento es inevitable para la descripción del espectro del átomo ya que las líneas espectrales corresponden a las longitudes de onda de la radiación electromagnética del átomo que es una solución de las ecuaciones de Maxwell. De esta forma se puede pensar que las ecuaciones acopladas proporcionan un esquema auténtico dentro del cual la mecánica cuántica o al menos algunos de sus aspectos, pueden ser formulados matemáticamente en una manera autoconsistente. Para más detalles consultar [36] en donde se sugiere tratar los fenómenos cuánticos básicos en base a ecuaciones dinámicas no lineales acopladas. En este tratado se propone, por ejemplo, que las transiciones (0.2) se pueden tratar matemáticamente como asintóticas de las soluciones de las ecuaciones acopladas que describen la dinámica del sistema y que las funciones límite corresponden a los estados estacionarios $|E_{\pm}\rangle$. La posible interpretación que se le daría a las asintóticas de las soluciones sería que el conjunto de estados estacionarios cuánticos es el **atractor global puntual** de las ecuaciones dinámicas acopladas [7, 21, 22, 56].

Mencionamos que estas asintóticas corresponden a un *sistema acotado*, con un potencial confinado, como por ejemplo el potencial nuclear de Coulomb. Existen otros tipos de transiciones que corresponden a sistemas acoplados que son invariantes respecto a las traslaciones espaciales sin

un potencial externo [36]. Asintóticas más detalladas podrían incluir también una “onda saliente” (o “entrante”) que representaría una solución del *sistema lineal libre* [35]. Esta onda saliente (o entrante) podría describir la radiación electromagnética (la “emisión” (“absorción”) de fotones) como lo explica la física cuántica. Notemos que la radiación de la función de onda es imposible por la conservación de la carga eléctrica y la neutralidad del átomo. En cierto sentido es natural pensar que las asintóticas descritas anteriormente sean características comunes de una amplia clase de ecuaciones en derivadas parciales no lineales hamiltonianas, ya que por otro lado las ecuaciones dinámicas de la mecánica cuántica serían demasiado excepcionales para no corresponder a el carácter universal de la teoría física.

Inspirados por este tipo de situaciones, nosotros establecemos asintóticas para soluciones de un sistema no lineal acoplado compuesto por una ecuación de onda con valores en \mathbb{R}^d , $d \geq 1$ y la ecuación de movimiento de una partícula clásica bajo la influencia de una fuerza conservativa.

Es muy sorprendente el rol tan peculiar de los estados estacionarios en diversos fenómenos que son descritos por ecuaciones de onda no lineales con estructura hamiltoniana. La permanente recurrencia de los estados estacionarios sugiere que cada solución $Y(t)$ de estas ecuaciones tiende a algún límite estacionario cuando $t \rightarrow \pm\infty$:

$$(0.3) \quad Y(t) \longrightarrow S_{\pm}, \quad \text{cuando } t \rightarrow \pm\infty.$$

Por brevedad nos referiremos a este comportamiento del sistema como *estabilización*. Esto significa que el conjunto de todos los estados estacionarios \mathcal{S} es un atractor puntual de la ecuación de onda correspondiente,

$$(0.4) \quad Y(t) \longrightarrow \mathcal{S}, \quad \text{cuando } t \rightarrow \pm\infty.$$

Como mencionamos al inicio la física cuántica postula las transiciones de tipo (0.3) sobre una base de evidencias experimentales, pero, nunca se ha probado que estas se siguen a partir de ecuaciones dinámicas. Si existiesen tales demostraciones, entonces los estados estacionarios cuánticos podrían ser definidos intrínsecamente como puntos que pertenecen a el atractor de las ecuaciones dinámicas. El problema principal es que la convergencia (0.3) es aparentemente paradójica e inconsistente con el hecho de que las ecuaciones con estructura hamiltoniana son reversibles y conservativas. Además una convergencia de este tipo es imposible para ecuaciones lineales autónomas. Los problemas que conducen a este tipo de comportamientos se conocen desde hace mucho, por ejemplo, la *radiación amortiguada* en electrodinámica clásica [26, pág. 745], las ya mencionadas *transiciones de Bohr*, y la *dualidad onda-partícula* en mecánica cuántica, la *estabilidad de ondas de choque* en dinámica de gases y líquidos, etc. (véase [29] para más detalles).

La topología más adecuada en la cual la convergencia (0.3), (0.4) es posible es una topología que es inducida por una métrica que está generada por una familia de semi-normas de energía local. Por ejemplo, debido a la conservación de la energía, la convergencia (0.3) es imposible en la métrica energética definida por la norma de energía global. Esta topología es aparentemente la más apropiada para describir la atracción a un atractor en el caso de ecuaciones hamiltonianas.

La meta principal de esta tesis es estudiar las asintóticas para tiempos grandes de todas las soluciones de energía finita de un sistema, con estructura hamiltoniana, conformado por una ecuación de onda y un oscilador no lineal, los cuales se encuentran acoplados en el origen del sistema de referencia. Tal sistema suele nombrarse como sistema de Lamb. Consideraremos ecuaciones de onda no lineales 1-dimensionales con valores vectoriales con estructura hamiltoniana de la forma

$$(0.5) \quad \ddot{u}(x, t) = u''(x, t) + f(x, u(x, t)), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

en donde, el término no lineal se escribe como $f(x, u) = \delta(x)F(u)$; es decir, dicha no linealidad esta concentrada en un solo punto ($x = 0$) de una cuerda de longitud infinita. Luego en este punto precisamente colocamos una partícula cuya masa m es cero, en el Capítulo 1 definiremos de manera precisa estas ideas.

A groso modo uno de los resultados principales de esta tesis fue construir una asintótica para tiempos grandes y la cual la satisfacen todas las soluciones $u(x, t)$ del sistema de Lamb con energía finita. Es decir, cuando $t \rightarrow \pm\infty$ cada solución decae a una suma de tres componentes: un **estado estacionario**, una **onda libre “saliente”** (o **“entrante”**), la cual es una solución de la ecuación de onda libre y **un resto** pequeño que tiende a cero con respecto a la norma energética global (véase Teorema 4.4 Capítulo 4).

Las ondas libres (“salientes” o “entrantes”) corresponden a estados asintóticos de dispersión los cuales se expresan en términos de los datos iniciales y una solución de una ecuación diferencial ordinaria no lineal. A continuación definimos los operadores de onda y obtenemos condiciones necesarias para la existencia de los estados asintóticos (véase Lema 4.15 Capítulo 4). Estos resultados están presentados en [43]. Esto significa que no solamente probamos estabilización para el sistema de Lamb con masa cero, sino que encontramos el carácter de la convergencia (0.3) para dicho sistema (véase Teorema 4.6 Capítulo 4).

La organización de la tesis es la siguiente. En el Capítulo 1 establecemos matemáticamente el sistema acoplado que se estudiará en esta tesis, definimos el problema de Cauchy e introducimos el espacio de fases respectivo para estudiar el sistema dinámico correspondiente y se demuestra que este sistema acoplado tiene estructura hamiltoniana, es decir, que existe un funcional hamiltoniano que satisface, formalmente, las ecuaciones de Hamilton. El Capítulo 2 se refiere a la Descomposición de D’Alembert en la clase de distribuciones vectoriales $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$, para ello introducimos

una serie de definiciones hechos y resultados necesarios para la construcción. En el Capítulo 3 se establece y se demuestra la existencia de la dinámica para el sistema acoplado estudiado en esta tesis (véase Teorema 3.1). El Capítulo 4 se refiere a los resultados principales de la investigación y finalmente en el Capítulo 5 se recopilan las conclusiones de la misma. Se han incluido una serie de Apéndices necesarios para la exposición de la investigación.

Capítulo 1

Planteamiento y formulación del problema

En muchas ecuaciones en derivadas parciales lineales y no lineales es muy útil observar la dinámica en términos de sus componentes considerándolas como partículas. La descomposición de este tipo de ecuaciones nos permite obtener una descripción equivalente en términos de dos subsistemas: el primero es de dimensión finita y es responsable del comportamiento, como partícula (o estado ligado) de una parte de la solución; el segundo es de dimensión infinita y dispersivo. Los términos de acoplamiento son los responsables de cómo la dinámica de la solución, vista como partícula, influye en el campo (o medio) y cómo el campo de ondas dispersivo influye en la dinámica de la solución, vista como partícula (véase [50] para detalles más precisos).

En este capítulo definiremos de manera precisa lo que matemáticamente representa el sistema de Lamb que estudiaremos en esta tesis. Es un *sistema hamiltoniano y representa el ejemplo no trivial más simple de un sistema no lineal conservativo y reversible con respecto al tiempo*. Dicho modelo permite analizar varias cuestiones; fue el primer modelo físico, introducido por H. Lamb (1900), que describe la radiación amortiguada (fenómeno que proviene de la electrodinámica clásica). En el sistema de Lamb un oscilador está acoplado a una cuerda de longitud semi-infinita y se usa para describe oscilaciones (vibraciones) de un núcleo en un medio extendido. El oscilador transfiere energía a la cuerda generando ondas que se propagan a lo largo de esta. El modelo de Lamb representa también un ejemplo de un sistema en el que existen transiciones entre sus estados estacionarios [31].

El sistema de Lamb considerado en esta investigación está compuesto por el acoplamiento (en el origen del sistema de referencia) de una ecuación de onda 1-dimensional con valores en \mathbb{R}^d , $d \geq 1$ y la ecuación de movimiento de una partícula de masa $m = 0$ sujeta a una fuerza no lineal que proviene de una función potencial. Tal sistema es formalmente equivalente a una ecuación de onda no lineal con término no lineal, de la forma $\delta(x)F(u)$ el cual se concentra en el punto $x = 0$ (véase Apéndice A para su demostración).

Introduciremos el espacio de fases del problema de Cauchy que define el sistema de Lamb y probaremos que es un sistema hamiltoniano.

1. El sistema de Lamb: una cuerda acoplada a un oscilador no lineal

En la presente sección definiremos de manera precisa un sistema de ecuaciones que describe la interacción de una cuerda infinita y un oscilador no lineal.

Consideremos el sistema acoplado

$$(1.1) \quad \begin{cases} \ddot{u}(x, t) = u''(x, t), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 = F(y(t)) + u'(0+, t) - u'(0-, t); \\ y(t) := u(0, t), \end{cases} \quad \left| \quad t \in \mathbb{R}.$$

en donde, $\dot{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$, $u' \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$ y así sucesivamente para las derivadas de orden 2. Las soluciones $u(x, t)$ toman valores en \mathbb{R}^d con $d \geq 1$. Físicamente (si $d = 1$) el sistema (1.1) describe pequeñas oscilaciones transversales de una cuerda de longitud infinita que se encuentra estirada paralelamente al eje \mathbb{R}_x ; una partícula de masa $m = 0$ es atada a la cuerda en el punto $x = 0$; la fuerza externa $F(y)$ es un campo vectorial no lineal, perpendicular a \mathbb{R}_x que actúa sobre la partícula (véase Figura 1).

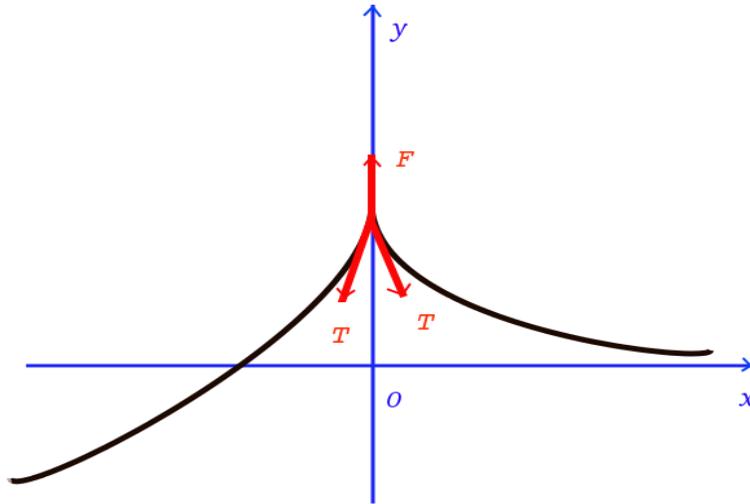


FIGURA 1. Cuerda infinita acoplada a un oscilador.

Observación 1.1. La segunda ecuación exhibe que la derivada de la solución del problema (1.1) en los puntos $(0, t)$, en general, es discontinua (si $F(y) \neq 0$) (véase Fig. 1.1). Esto significa, en particular, que si $u(x, 0) \in C^\infty(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$ y $F(u(0, t)) \neq 0$, entonces la segunda ecuación no se cumple en el punto $t = 0$. Por lo tanto, no debemos entender esta ecuación en el sentido “puntual”. En la sección 2.2 del Capítulo 3 precisaremos el sentido de la segunda ecuación de (1.1) (véase Nota 3.11).

Si la fuerza externa es lineal: $F(y) = -\omega^2 y$, $\omega > 0$, H. Lamb [39], considerando una cuerda semi-infinita fue el primero en demostrar que el sistema (1.1) tiene una sola solución estacionaria de energía finita, $u(x, t) = s(x) \equiv 0$. El sistema de Lamb con una fuerza $F(y)$ no lineal y la masa del oscilador $m \geq 0$ fue considerado por J. Keller y L. Bonilla [27] (1986), en donde se analizaron interrogantes sobre la irreversibilidad y no-recurrencia de sistemas de este tipo. A.I. Komech [31] (1995) fue el primero en demostrar la existencia de un atractor global para el sistema de Lamb para $m \geq 0$ con datos iniciales con soporte compacto. En [34] se presentan generalizaciones de los artículos [30, 31].

En la presente tesis realizamos lo mismo pero para el caso $m = 0$ y datos iniciales arbitrarios, además precisamos el carácter de la convergencia a el atractor global, es decir, describimos el comportamiento asintótico de las soluciones de energía finita $u(x, t)$ del sistema (1.1) cuando $t \rightarrow \pm\infty$. La convergencia se cumple con respecto a la norma energética global.

Cabe mencionar algunos trabajos relacionados con este tópico de investigación para sistemas tipo Lamb. Los métodos y resultados de [31, 34] se aplicaron y extendieron para tratar el problema del análisis de estabilidad e inestabilidad en algunos sistemas lineales tipo Lamb [3]. El artículo [41] usa la teoría espectral de operadores y de dispersión de Lax-Phillips en modelos lineales de Lamb y establece la existencia de una dinámica para cierta clase de sistemas no lineales.

En [32] se estudia un sistema de ecuaciones del tipo (1.1) que modela el caso de una cuerda infinita acoplada a un número finito N de osciladores no lineales los cuales afectan a N partículas de masas $m_i = 0$, $i = 1, \dots, N$ atadas a la cuerda y se demuestra la existencia de un atractor global únicamente.

Observación 1.2. 1. El sistema (1.1) es **formalmente** equivalente a una ecuación de onda no lineal con valores en \mathbb{R}^d , $d \geq 1$ cuyo término no lineal, concentrado en el punto $x = 0$, tiene la forma $\delta(x)F(u)$, a saber:

$$(1.2) \quad \ddot{u}(x, t) = u''(x, t) + \delta(x)F(u(x, t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Es importante hacer notar que tal equivalencia es sólo formal, en el Apéndice A se explica y se demuestra que de hecho se tiene tal equivalencia para el caso cuando $u(x, t)$ es suficientemente regular.

2. El sistema (1.1) es **reversible formalmente**, es decir, no cambia su forma después de hacer el cambio de variable $t \mapsto -t$. En efecto, consideremos $u_1(x, t) := u(x, -t)$. Obviamente $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, -t)$ y $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, -t)$. Entonces, la primera ecuación para u_1 en (1.1) se cumple formalmente. Además, $u'_1(0+, t) = u'(0+, -t)$ y $u'_1(0-, t) = u'(0-, -t)$. Ya que $y(t) = u(0, t)$,

entonces $y(-t) = u(0, -t) = u_1(0, t)$. De esta forma por la segunda ecuación de (1.1)

$$\begin{aligned} F(u_1(0, t)) + u_1'(0+, t) - u_1'(0-, t) &= F(y(-t)) + u'(0+, -t) - u'(0-, -t) \\ &\stackrel{-t \rightarrow \zeta}{=} F(y(\zeta)) + u'(0+, \zeta) - u'(0-, \zeta) = 0 \end{aligned}$$

Esto significa que también la segunda ecuación para u_1 en (1.1) se cumple formalmente. Notemos que todavía no precisamos el sentido de esta ecuación. Entonces el sistema de Lamb (1.1) es reversible.

Carácter conservativo de la fuerza no lineal

A continuación describiremos las suposiciones que el oscilador o fuerza externa $F(u) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ asumirá en esta investigación. Denotaremos por $V(u) = -\int F(u)dy$ a la energía potencial del campo vectorial externo. Supongamos que el campo de fuerza no lineal proviene de una función potencial real $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $V \in C^2$:

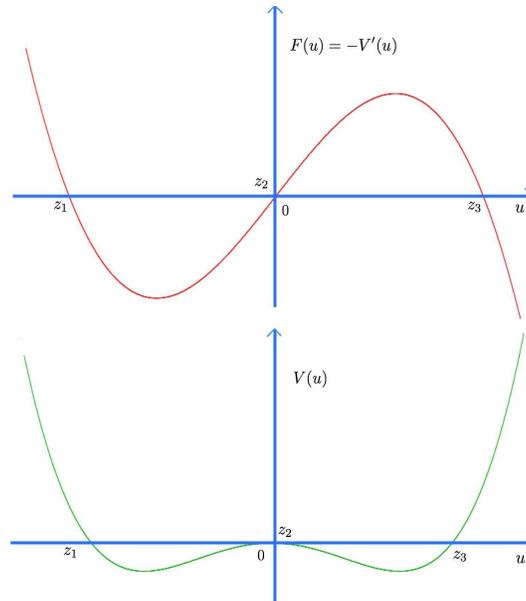


FIGURA 2. Ejemplo de una fuerza externa.

$$(1.3) \quad F(u) \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d), \quad F(u) = -\nabla V(u), \quad u \in \mathbb{R}^d,$$

$$(1.4) \quad V(u) \xrightarrow{|u| \rightarrow \infty} +\infty.$$

La condición (1.4) implica que existe una constante $V_0 \in \mathbb{R}$ de tal manera que

$$(1.5) \quad V(u) \geq V_0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

En la Fig.2 mostramos un ejemplo para la fuerza externa F con energía potencial V en el caso $d = 1$:

$$F(u) = u - u^3, \quad V(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2, \quad u \in \mathbb{R}.$$

2. El problema de Cauchy

Consideremos el sistema (1.1) junto con las condiciones iniciales

$$(2.1) \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = v_0(x).$$

Definimos

$$(2.2) \quad \begin{aligned} Y(t) &= (u(x, t), v(x, t)), \\ Y_0 &= (u_0(x), v_0(x)), \\ \mathcal{V}(Y(t)) &= (v(x, t), u''(x, t) + \delta(x)F(u(x, t))). \end{aligned}$$

Entonces, el problema de Cauchy (1.1), (2.1) como un sistema dinámico se escribe como

$$(2.3) \quad \dot{Y}(t) = \mathcal{V}(Y(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad Y(0) = Y_0,$$

en donde, $Y_0 := (u_0, v_0)$. En efecto, el sistema acoplado (1.2) (el cual es formalmente equivalente a (1.1)) puede escribirse como el sistema de ecuaciones

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{u}(x, t) &= v(x, t), \\ \dot{v}(x, t) &= u''(x, t) + \delta(x)F(u(x, t)). \end{aligned}$$

3. Espacio de fases y estructura hamiltoniana del sistema de Lamb

En esta sección vamos a introducir el espacio de fases \mathcal{E} de los estados con energía finita para el sistema (1.1). Denotaremos por $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_R$ la norma en los espacios de Hilbert $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ y $L^2(I_R; \mathbb{R}^d)$, respectivamente, en donde $I_R := (-R, R) \subset \mathbb{R}$, generados por los productos escalares: $\langle f(x), g(x) \rangle_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(x) dx$, en donde, $a \cdot b := \sum_{i=1}^d a_i b_i$, para $a, b \in \mathbb{R}^d$. Similarmente se define $\langle f(x), g(x) \rangle_{L^2(I_R; \mathbb{R}^d)}$. Y $|a| := \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_d^2}$, $a \in \mathbb{R}^d$.

Definición 1.3 (Los espacios de fases \mathcal{E} y \mathcal{E}_R).

1. El símbolo \mathcal{E} denotará a el espacio de Hilbert de las parejas $(u(x), v(x)) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d) \oplus L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ con $u'(x) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ y la norma de energía global

$$(3.1) \quad \|(u, v)\|_{\mathcal{E}} := \|u'\| + |u(0)| + \|v\|.$$

2. El símbolo \mathcal{E}_F denotará a el espacio lineal \mathcal{E} dotado con la topología inducida por la métrica generada por la familia de seminormas de energía local

$$(3.2) \quad \|(u, v)\|_{\mathcal{E}_R} := \|u'\|_R + |u(0)| + \|v\|_R, \quad R > 0.$$

3. $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{E}_F} Y$ si y sólo si $\|Y_n - Y\|_{\mathcal{E}_R} \rightarrow 0$, para todo $R > 0$.

Notemos que la derivada u' en la definición anterior se entiende en el sentido generalizado $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ (véase las primeras secciones del Capítulo 2, Definición 2.18). Ya que $u'(x) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, entonces $u'(x)$ existe, salvo un conjunto de medida cero, y como distribución coincide con la derivada generalizada, véase Teorema 2.11 en su versión \mathbb{R}^d -dimensional, (Observación 2.19).

Observación 1.4. El espacio \mathcal{E}_F es un espacio metrizable, ya que la topología en \mathcal{E}_F se determina por la familia numerable de seminormas $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_n}$, $n \in \mathbb{N}$, pero no completo (véase Apéndice D, Proposición D.1) y por lo tanto no es un espacio de Fréchet.

Notemos que $u''(x, t)$ en (2.4) tiene sentido como la derivada en el sentido de Sobolev [12]. En efecto, podemos definir para $u_1 \in \mathcal{E}_0 := C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d) \cap \{u_1 \mid u_1 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)\}$

$$\langle u''(x, \cdot), u_1(x) \rangle = -\langle u'(x, \cdot), u_1'(x) \rangle = -\int_{\mathbb{R}} u'(x, \cdot) u_1'(x) dx$$

y lo último tiene sentido ya que u' y u_1' pertenecen a $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Si convenimos en tratar a la segunda derivada en este sentido entonces podemos demostrar que el sistema (2.4) es formalmente hamiltoniano.

Proposición 1.5. *Bajo las suposiciones (1.3), (1.4), el sistema (1.2) es **formalmente** un sistema Hamiltoniano en el espacio de fases \mathcal{E} con funcional Hamiltoniano (energía total)*

$$(3.3) \quad \mathcal{H}(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [|v(x)|^2 + |u'(x)|^2] dx + V(u(0)),$$

para $(u, v) \in \mathcal{E}$.

La idea para mostrar la proposición anterior es verificar que \mathcal{H} satisface las ecuaciones de Hamilton para las funciones (los campos) $u(x)$ y $v(x)$.

Demostración de Proposición 1.5. Mostremos que $\mathcal{H} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ es Gâteaux diferenciable en $Y(x) := (u(x), v(x))$ en la dirección $Y_1 = (u_1, 0)$ con $u_1 \in \mathcal{E}_1 := C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d) \cap \{u_1 \mid u_1' \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)\}$ (Notemos que u también pertenece a \mathcal{E}_1 en virtud de la Definición 1.3). La definición de derivada de

Gâteaux (en términos de la primera variación véase Apéndice B), la Regla de Leibniz para derivar integrales con respecto a un parámetro y la condición (1.3) implican

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{H}(Y)}{\delta u}(u_1(x), 0) &:= \frac{d}{ds}\mathcal{H}(Y + sY_1)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\mathcal{H}((u(x), v(x)) + s[(u_1(x), 0)])\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\mathcal{H}(u(x) + su_1(x), v(x))\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}([v(x)]^2 + [u'(x) + su_1'(x)]^2)dx + V((u + su_1)(0))\right]\Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial s}([v(x)]^2 + [u'(x) + su_1'(x)]^2)\Big|_{s=0}dx + \frac{\partial}{\partial s}V((u + su_1)(0))\Big|_{s=0} \\
&= \int_{\mathbb{R}}([u'(x) + su_1'(x)] \cdot u_1'(x))\Big|_{s=0}dx + \nabla V(u(0)) \cdot u_1(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}}(u'(x) \cdot u_1'(x))dx - F(u(0)) \cdot u_1(0) \\
&= \langle -u''(x) - F(u(x))\delta(x), u_1(x) \rangle,
\end{aligned}$$

en donde, en la última igualdad usamos que la segunda derivada $u''(x)$ se entiende en el sentido generalizado de Sobolev como funcional sobre \mathcal{E}_1 :

$$\langle -u''(x), u_1(x) \rangle = \langle u'(x), u_1'(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} u'(x) \cdot u_1'(x) dx.$$

Tal identidad tiene sentido dado que $u, u_1 \in \mathcal{E}_1$. De esta forma obtenemos

$$(3.4) \quad \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u} = -u'' - \delta(x)F(u(x)),$$

para $u(x) \in \mathcal{E}_1$. Claro que este funcional es lineal y acotado en la topología de \mathcal{E} por (1.3). Por lo tanto, $\mathcal{H}(u, v)$ es Gâteaux diferenciable en u .

En forma similar, mostremos que \mathcal{H} es Gâteaux diferenciable en $Y(x)$ en la dirección $Y_1 = (0, v_1)$ con $v_1 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{H}(Y)}{\delta v}(0, v_1(x)) &:= \left. \frac{d}{ds} \mathcal{H}(Y + sY_1) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \mathcal{H}((u(x), v(x)) + s[(0, v_1(x))]) \right|_{s=0} \\
&= \left. \frac{d}{ds} \mathcal{H}(u(x), v(x) + sv_1(x)) \right|_{s=0} \\
&= \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} ([v(x) + sv_1(x)]^2 + [u'(x)]^2) dx + V((u)(0)) \right] \right|_{s=0} \\
&= \left. \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial s} ([v(x) + sv_1(x)]^2 + [u'(x)]^2) \right|_{s=0} dx + \left. \frac{\partial}{\partial s} V((u)(0)) \right|_{s=0} \\
&= \int_{\mathbb{R}} ([v(x) + sv_1(x)] \cdot v_1(x)) \Big|_{s=0} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (v(x) \cdot v_1(x)) dx = \langle v(x), v_1(x) \rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(3.5) \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v} = v(x).$$

Obviamente este funcional es lineal y acotado para $v \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Luego \mathcal{H} es Gâteaux diferenciable con respecto a u y v . De esta forma las relaciones (2.4) y las ecuaciones (3.5), (3.4) implican

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad \dot{u}(x, t) &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v(x)} = v(x), \\
\dot{v}(x, t) &= -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u(x)} = -u''(x, t) - \delta(x)F(u(x, t)),
\end{aligned}$$

en donde, ahora $\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}$ y $\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v}$ se entienden en el sentido de derivada de Gâteaux.

Finalmente, el Teorema B.9 (véase Apéndice B), el cual expresa la relación entre diferenciabilidad de Gâteaux y Fréchet, implica que el funcional Hamiltoniano \mathcal{H} es Fréchet diferenciable en $(u, v) \in \mathcal{E}$ y las derivadas parciales de Gâteaux y Fréchet coinciden. Por lo tanto el sistema (1.2) tiene estructura hamiltoniana en el sentido de Fréchet con funcional hamiltoniano dado por la energía total \mathcal{H} . La Proposición 1.5 está probada. ■

Capítulo 2

La descomposición de D' Alembert en la clase de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$

Con el objeto de demostrar la existencia y unicidad de soluciones para el sistema acoplado (1.1), desarrollaremos la descomposición de D' Alembert para la ecuación de onda $\square u(x, t) = 0$ en la clase de distribuciones $\mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$, en donde Π_{\pm} son los semiplanos derecho e izquierdo en el plano (x, y) . Esta es la meta principal de este capítulo. Mencionamos que dicha descomposición es análoga a la bien conocida descomposición de D' Alembert en $C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ (véase [58, pág. 201]). Vamos a usar las mismas ideas para obtener en principio la descomposición de D' Alembert en $C^2(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$ y luego expondremos detalladamente la misma descomposición en $\mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$. A pesar de que en [23, pág. 139, Teorema 5.6.3] se escribe un resultado muy elegante y del cual podríamos hacer solo referencia nosotros realizamos todos los detalles y damos las demostraciones completas, lo cual es único en su clase. En [59] se establece la existencia y unicidad del problema de Cauchy para la ecuación de onda 3-dimensional con datos que son distribuciones, usando la fórmula de Poisson-Parseval.

1. Teoría de distribuciones

La teoría de distribuciones fue creada por S. L. Sobolev y Laurent Schwartz a mediados del siglo XX. La finalidad es generalizar el concepto clásico de función; tal generalización ha sido necesaria en muchas áreas de las matemáticas desde el siglo XIX. La función de Heaviside θ y la función delta de Dirac δ son los ejemplos más conocidos de tales funciones generalizadas o distribuciones. En esta sección escribiremos algunas fórmulas, definiciones y hechos básicos de la teoría de distribuciones, los cuales serán utilizados a lo largo de la presente tesis. Una exposición detallada se puede encontrar, por ejemplo, en los libros [18], [44] y [58].

1.1. Denotaciones, definiciones y hechos. Primeramente describiremos el espacio de funciones de prueba $\mathcal{D}(\Omega) \equiv C_0^\infty(\Omega)$ y su dual (topológico), el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$. También definiremos los espacios $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$, para $d \in \mathbb{N}$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Notaciones

Un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se puede escribir como $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, con $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Denotaremos a

$$|\alpha| = \sum_{j=0}^n \alpha_j; \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

Si α y β son multi-índices en \mathbb{N}^n escribimos $\alpha < \beta$ si $\alpha_i < \beta_i$, para $i = 1, \dots, n$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Además escribiremos

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \quad \text{en donde, } \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Los espacios $C^k(\Omega)$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $k \in \mathbb{N}$ (o $k = \infty$). Supongamos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida sobre Ω con valores en \mathbb{R} . Denotaremos por $C^k(\Omega) = C^k(\Omega; \mathbb{R})$ a el espacio de funciones definidas en Ω con valores en \mathbb{R} que tienen derivadas hasta orden k y por $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$ a el conjunto de funciones de Ω en \mathbb{R} que son infinitamente diferenciables. Estos espacios están equipados con las seminormas

$$p_K(f) = \sum_{|\alpha| < k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|, \quad K \subset \Omega, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

$$p_{K,j}(f) = \sum_{|\alpha| < k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|, \quad K \subset \Omega, \quad \text{y } j \in \mathbb{N}, \quad \text{si } k = +\infty,$$

en donde, K es un subconjunto compacto de Ω . Estas familias de seminormas proporcionan la topología de convergencia uniforme de las derivadas de orden k (si $k \in \mathbb{N}$) y de todas la derivadas (si $k = +\infty$) sobre cada compacto de Ω . Estas topologías son metrizables por lo tanto, los espacios $C^k(\Omega)$ son completos para $0 \leq k \leq +\infty$.

Definición 2.1. Sea $f \in C(\Omega)$ ($= C^0(\Omega)$), entonces el soporte de f , denotado por $\text{supp } f$ es la cerradura en Ω del conjunto $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$.

En seguida escribiremos la clase de funciones que usaremos para trabajar.

El espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ o $C_0^\infty(\Omega)$

Definición 2.2. Denotaremos con $C_0^k(\Omega) = C_0^k(\Omega; \mathbb{R})$, $k = 0, 1, \dots, \infty$ a el espacio de todas las funciones $f \in C^k(\Omega)$ con valores en \mathbb{R} con soporte compacto. Los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ se conocen como funciones de prueba.

Si el dominio de una función $f \in C_0^\infty(\Omega)$ se extiende a \mathbb{R}^n definiendo $f = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ obtenemos por supuesto una función en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Por consiguiente se puede considerar a $C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ como un subespacio de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

A continuación definiremos la noción de convergencia en $C_0^\infty(\Omega)$, es decir, lo dotaremos de una topología.

Definición 2.3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que una sucesión de funciones $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge a 0 en $C_0^\infty(\Omega)$ cuando $m \rightarrow \infty$ y escribimos $\varphi_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{C_0^\infty(\Omega)} 0$ si

1) existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ independiente de m tal que $\text{supp } \varphi_m \subseteq K \forall m \in \mathbb{N}$;

2) para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la sucesión de derivadas parciales $\{\partial^\alpha \varphi_m(x)\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a cero en K , es decir,

$$\sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi_m(x)| \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0.$$

El conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ adquiere de forma natural una estructura de espacio vectorial. Además existe una topología en $C_0^\infty(\Omega)$ que es compatible con la estructura lineal y tal que la convergencia de las seminormas definidas en la Definición 2.3 es la convergencia de las sucesiones en dicha topología, esto convierte a $C_0^\infty(\Omega)$ en un espacio vectorial topológico (véase [16, pág. 338]).

Diremos que $\varphi_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} \varphi$ si $(\varphi - \varphi_m) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$ y escribiremos $\varphi_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{C_0^\infty(\Omega)} \varphi$. El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ equipado con esta topología de convergencia se denomina el espacio de funciones de prueba y es denotado tradicionalmente por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Observación 2.4. En la definición de convergencia en $\mathcal{D}(\Omega)$ la sucesión $\{\partial^\alpha \varphi_m(x)\}_{m \in \mathbb{N}}$ no converge uniformemente con respecto a α sino con respecto a $x = (x_1, \dots, x_n)$, para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Distribuciones sobre un conjunto abierto en \mathbb{R}^n

Definición 2.5. Una forma lineal u sobre $C_0^\infty(\Omega)$ es una **distribución**

si $\langle u, \varphi_m \rangle \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$ para cada sucesión $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty(\Omega)$ que converge a 0 en el sentido de la Definición 2.3 o

si para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$ existen constantes C y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(1.1) \quad |u(\varphi)| = |\langle u, \varphi \rangle| \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(véase [60, pág. 33] para la prueba de la equivalencia anterior). El conjunto de todas las distribuciones sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si para cada conjunto K se usa el mismo entero k

en (1.1) diremos que u es de orden $\leq k$. Denotaremos a el conjunto de todas las distribuciones de orden $\leq k$ por $\mathcal{D}'^k(\Omega)$. La unión $\mathcal{D}'_F(\Omega) = \cup \mathcal{D}'^k(\Omega)$ constituye el espacio de distribuciones de orden finito. Se puede demostrar (véase [4, pág. 129]) que

$$(1.2) \quad \mathcal{D}'(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))',$$

en donde, $(\mathcal{D}(\Omega))'$ es el dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Observación 2.6. Las desigualdades del tipo (1.1) se conocen como **estimaciones por seminormas**.

Ahora definiremos la convergencia en $\mathcal{D}'(\Omega)$ como la convergencia débil de una sucesión de funcionales:

Definición 2.7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. La sucesión $\{u_m(x)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge a $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ cuando $m \rightarrow \infty$ si

$$(1.3) \quad \langle u_m, \varphi \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle u, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Y escribimos $u_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'(\Omega)} u$.

Definición 2.8. Para cualquier $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la derivada de orden α de f es la distribución $\partial^\alpha f$ (en el sentido de L. Schwartz) definida por la identidad

$$(1.4) \quad \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La razón de la notación tradicional $\mathcal{D}'(\Omega)$ es por el hecho que L. Schwartz usó la notación $\mathcal{D}(\Omega)$ en lugar de $C_0^\infty(\Omega)$.

Es conocido (véase [44, pág. 75]) que $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$, y que el operador $\partial^\alpha : u \mapsto \partial^\alpha u$ es continuo por sucesiones en $\mathcal{D}'(\Omega)$ con respecto a la convergencia débil (1.3).

Algunos ejemplos y resultados básicos se pueden consultar en el Apéndice C.

La fórmula de Newton-Leibniz generalizada

Sea $I = (a, b)$ un intervalo acotado o no. La noción de derivada débil fue introducida por S.L. Sobolev en 1936 y está basada en la fórmula general de integración por partes. Sea $f \in L_{loc}^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que no existe información acerca de la existencia de las derivadas de f y supongamos que para algún multi-índice α existe una función $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que la siguiente

igualdad se cumple:

$$\int_{\Omega} g(x)\varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)\partial^{\alpha}\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(I).$$

En este caso se dice que g es la derivada débil de orden $|\alpha|$ de f en Ω y es denotada por $\partial^{\alpha}f$, es decir, $g(x) := \partial^{\alpha}f$, $x \in \Omega$. En otras palabras, g es la derivada débil de f de orden $|\alpha|$ si la distribución $\partial^{\alpha}f$ es regular (i.e., pertenece a $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$).

Definimos a continuación un subespacio vectorial de $L^2(I)$:

$$(1.5) \quad H^1(I) = \left\{ f \in L^2(I) \mid \exists g \in L^2(I) \text{ tal que } \int_I f\varphi' = - \int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I) \right\},$$

es decir, H^1 es el espacio vectorial de todas las distribuciones regulares $f \in \mathcal{D}'(I)$ cuya derivada distribucional f' coincide con $g \in L^2(I)$ en $\mathcal{D}'(I)$. Además, g es única (véase [12, pie de pág. 120]).

Las funciones de H^1 son “a grosso modo” primitivas de funciones de L^2 . Más concretamente

Teorema 2.9 (fórmula de Newton-Leibniz generalizada). [12, pág. 122-123] *Sea $u \in H^1(I)$, en donde I es un intervalo (acotado) en \mathbb{R} . Entonces existe una función $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tal que*

$$(1.6) \quad u = \tilde{u} \text{ c.t.p. en } I$$

$$(1.7) \quad y \quad \tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(\tau) d\tau, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Observación 2.10. Notemos primero que si una función u pertenece a H^1 , entonces toda función v tal que $u = v$ c.t.p. en I también pertenece a H^1 . El Teorema 2.9 afirma que toda función u de H^1 admite un **representante continuo** (y solo uno), es decir, existe una función continua que pertenece a la clase de equivalencia de u para la relación $u \sim v$ si $u = v$ c.t.p. Cuando sea el caso, se sustituirá sistemáticamente u por su representante continuo; y con el fin de no recargar la notación se designará también por u a dicho representante.

La existencia de derivadas débiles está relacionada con la propiedad de continuidad absoluta. Recordemos que una función $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua en $[a, b]$ si y sólo si existe una función $v \in L^1(a, b)$ tal que

$$(1.8) \quad u(x) = \int_a^x v(\xi) d\xi + u(a), \quad \forall x \in [a, b],$$

$$(1.9) \quad \frac{d}{dx}u(x) = v(x), \quad \text{para casi todo } x \in [a, b].$$

Teorema 2.11. [55] *Una función medible $u(x)$ es absolutamente continua en I si y sólo si la derivada $u' \in L^1(a, b)$.*

En este caso existe la derivada clásica de u casi en todas partes en (a, b) la cual coincide con u' casi en todas partes.

Generalización a \mathbb{R}^d

A continuación generalizaremos los conceptos de funciones de prueba y de distribuciones a \mathbb{R}^d , $d \geq 1$.

Definición 2.12. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f := (f_1, \dots, f_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función. Diremos que $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^d)$ si y solo si $f_j \in C^k(\Omega)$, para $j = 1, \dots, d$.

De esta manera podemos escribir $C^k(\Omega; \mathbb{R}^d) := \underbrace{C^k(\Omega) \times \dots \times C^k(\Omega)}_{d\text{-veces}}$.

Definición 2.13. Para $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^d)$ y cualquier multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ se define el operador $\partial^\alpha : C^k(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow C^{k-|\alpha|}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ por

$$\partial^\alpha f = (\partial^\alpha f_1, \dots, \partial^\alpha f_d), \quad |\alpha| \leq k,$$

el cual es continuo con respecto a la topología de convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de Ω . Similarmente se define cualquier operador diferencial de orden $|\alpha| \leq k$. En particular, el operador de D' Alembert \square se define a través de la siguiente identidad

$$\square f(x) = (\square f_1, \dots, \square f_d),$$

en donde, $\square f_i = \partial_{tt} f_i(x, t) - \partial_{xx}^2 f_i(x, t)$, $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

Ahora vamos a generalizar la definición de $\mathcal{D}'(\Omega)$ a distribuciones con valores vectoriales.

Definición 2.14. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Definimos

$$(1.10) \quad \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d) := \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega); \mathbb{R}^d).$$

(Recordemos, $\mathcal{L}(X; Y)$ es el espacio de transformaciones lineales continuas y la topología de $\mathcal{D}(\Omega)$ es la dada por la Definición 2.3).

Observación 2.15. Notemos que (1.10) generaliza a (1.2) para $d > 1$.

El siguiente lema nos da una representación del espacio $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

Lema 2.16. *El espacio de distribuciones con valores vectoriales se representa como $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d) = \underbrace{\mathcal{D}'(\Omega) \times \cdots \times \mathcal{D}'(\Omega)}_{d\text{-veces}}$. El isomorfismo entre estos dos espacios está dado de la siguiente manera:*

$f \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$ si y sólo si existe $f = (f_1, \dots, f_d)$ con $f_l \in \mathcal{D}'(\Omega); l = 1, \dots, d$, tal que para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$(1.11) \quad f \bullet \varphi := (\langle f_1, \varphi \rangle, \dots, \langle f_d, \varphi \rangle).$$

Demostración (\Rightarrow) Sea $f \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$, entonces $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, en donde $f_i = \pi_i \circ f$, con $\pi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la función proyección natural, para $i = 1, \dots, d$. Por lo tanto, a cada $f \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$ le corresponde un vector $(f_1, \dots, f_d) \in \underbrace{\mathcal{D}'(\Omega) \times \cdots \times \mathcal{D}'(\Omega)}_{d\text{-veces}}$ y $f \bullet \varphi = (\langle f_1, \varphi \rangle, \dots, \langle f_d, \varphi \rangle) \in \mathbb{R}^d$, con $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(\Leftarrow) Sea $(f_1, \dots, f_d) \in \underbrace{\mathcal{D}'(\Omega) \times \cdots \times \mathcal{D}'(\Omega)}_{d\text{-veces}}$. Entonces, definiendo $f \bullet \varphi$ por la fórmula (1.11) obtenemos $f \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$. ■

La topología en $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$ es la generalización de la topología de $\mathcal{D}'(\Omega)$ (véase Definición 2.7).

Definición 2.17. Decimos que una sucesión de funcionales, $\{f^m(x)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$ con valores vectoriales, converge a $f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$, cuando $m \rightarrow \infty$ y escribimos $f^m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)} f = (f_1, \dots, f_d)$ si cada componente f_i^m de $f^m = (f_1^m, \dots, f_d^m)$ converge a f_i en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definición 2.18. Para $f \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$ y cualquier multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ se define el operador $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$ por

$$\partial^\alpha f = (\partial^\alpha f_1, \dots, \partial^\alpha f_d), \quad |\alpha| \leq k,$$

en donde, $\partial^\alpha f_i$ se define como en (1.4). Análogamente se define cualquier operador diferencial con coeficientes constantes de orden $|\alpha| \leq k$. En particular, el operador de D' Alembert \square se define a través de la identidad

$$\square f(x) = (\square f_1, \dots, \square f_d),$$

en donde, $\langle \square f_i(x, t), \varphi(x, t) \rangle := \langle f_i(x, t), \square \varphi(x, t) \rangle, \quad \forall \varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\Omega), i = 1, \dots, d.$

Observación 2.19. La definición del espacio dado por (1.5), el Teorema 2.9 y Teorema 2.11 admiten generalizaciones triviales a las funciones con valores en $\mathbb{R}^d, d \geq 2$.

2. La descomposición de D Alembert en $C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$

A continuación estableceremos la descomposición de D' Alembert para funciones C^2 definidas en \mathbb{R}^2 con valores vectoriales. Antes de enunciar el resultado principal de esta sección, Proposición 2.22, necesitaremos un par de definiciones.

Definición 2.20. Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, una transformación lineal definida por

$$(2.1) \quad \psi(x, t) = (x - t, x + t);$$

con función inversa $\psi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$(2.2) \quad \psi^{-1}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi + \eta, -\xi + \eta).$$

Claramente tenemos

$$(2.3) \quad |J_\psi| = 2 \quad \text{y} \quad |J_{\psi^{-1}}| = \frac{1}{2},$$

en donde $|J|$ denota el jacobiano de una transformación lineal.

Los símbolos Π_+ y Π_- denotarán a los semiplanos derecho e izquierdo respectivamente. Es decir,

$$(2.4) \quad \Pi_\pm := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm x > 0\}.$$

Definición 2.21. Usaremos la siguiente notación:

1. La imagen de Π_+ bajo ψ será denotada por Σ_+ ,

$$\Sigma_+ = \psi[\Pi_+] = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta > -\xi\}.$$

2. $\pi_i[\Omega]$ denotará la proyección de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ sobre la coordenada i con $i = 1, 2$.

Proposición 2.22. Para $u \in C^2(\Pi_+; \mathbb{R}^d)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\square u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Pi_+.$
2. Existen funciones $f_+, g_+ \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tales que

$$u(x, t) = f_+(x - t) + g_+(x + t), \quad (x, t) \in \Pi_+.$$

Demostración (1 \Rightarrow 2) Sea ψ la transformación definida por la ecuación (2.1). La regla de la cadena para funciones en \mathbb{R}^2 implica

$$(2.5) \quad -4\partial_{\xi\eta}^2(u \circ \psi^{-1})(\xi, \eta) = \square u(\psi^{-1}(\xi, \eta)), \quad (\xi, \eta) \in \Sigma_+.$$

Luego por la hipótesis 1 y la ecuación (2.5) tenemos

$$(2.6) \quad \partial_\xi \partial_\eta (u \circ \psi^{-1})(\xi, \eta) = 0, \quad (\xi, \eta) \in \Sigma_+.$$

en donde, $u \circ \psi^{-1} \in C^2(\Sigma_+; \mathbb{R}^d)$. Para todo $\eta_0 \in \mathbb{R}$ fijo, la ecuación (2.6) implica

$$(2.7) \quad \partial_\eta(u \circ \psi^{-1})(\xi, \eta_0) = h(\eta_0), \quad \xi > -\eta_0,$$

en donde, $h(\eta_0)$ es una constante que depende de η_0 . Ahora, demostraremos que $h(\eta) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. En efecto, la definición de Σ_+ implica que, para $\eta_0 \in \mathbb{R}$ fijo, existe $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tal que $K_0 \subset \Sigma_+$, en donde,

$$K_0 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : |\xi - \xi_0| < 1, |\eta - \eta_0| < 1\}.$$

Entonces la ecuación (2.7) implica que

$$h(\eta) \in C^1(\pi_\eta[K_0]; \mathbb{R}^d) = C^1((\eta_0 - 1, \eta_0 + 1); \mathbb{R}^d)$$

ya que $u \circ \psi^{-1} \in C^2(K_0; \mathbb{R}^d)$. Como $\eta_0 \in \mathbb{R}$ fue arbitrario, entonces $h(\eta) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Así

$$(2.8) \quad \partial_\eta(u \circ \psi^{-1})(\xi, \eta) = h(\eta), \quad (\xi, \eta) \in \Sigma_+,$$

en donde $h(\eta) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Sea $g_+(\eta)$ una primitiva de $h(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}$. Entonces, $g_+(\eta) \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ ya que $h(\eta) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Ahora, fijamos $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Entonces la ecuación (2.8) implica que

$$u \circ \psi^{-1}(\xi_0, \eta) = g_+(\eta) + f_+(\xi_0), \quad \eta > -\xi_0,$$

en donde, $f_+(\xi_0)$ es una constante que depende de ξ_0 . Demostraremos que $f_+(\xi) \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. En efecto, para $\xi_0 \in \mathbb{R}$ fijo existe $\eta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $K_0 \subset \Sigma_+$, entonces

$$f_+(\xi) \in C^2(\pi_\xi[K_0]; \mathbb{R}^d) = C^2((\xi_0 - 1, \xi_0 + 1); \mathbb{R}^d),$$

ya que $u \circ \psi^{-1} \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Nuevamente, como $\xi_0 \in \mathbb{R}$ fue arbitrario, entonces $f_+(\xi) \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

Por lo tanto,

$$(2.9) \quad u \circ \psi^{-1}(\xi, \eta) = f_+(\xi) + g_+(\eta), \quad (\xi, \eta) \in \Sigma_+,$$

en donde, $f_+, g_+ \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Finalmente, transformando las coordenadas en la ecuación (2.9) y utilizando ψ , obtenemos

$$(2.10) \quad u(x, t) = f_+(x - t) + g_+(x + t), \quad (x, t) \in \Pi_+,$$

en donde, $f_+, g_+ \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

(2 \Rightarrow 1). Esta implicación se sigue directamente de la aplicación de la regla de la cadena para funciones en \mathbb{R}^2 . ■

Análogamente, es posible demostrar la siguiente proposición:

Proposición 2.23. *Para $u \in C^2(\Pi_-; \mathbb{R}^d)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\square u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Pi_-.$

2. Existen funciones $f_-, g_- \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tales que

$$(2.11) \quad u(x, t) = f_-(x - t) + g_-(x + t), \quad (x, t) \in \Pi_-.$$

3. La descomposición de D'Alembert en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$

Ahora, nuestro objetivo en esta sección es obtener la descomposición de D'Alembert en el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\Pi_\pm; \mathbb{R}^d)$, definidas sobre los semiplanos Π_\pm con valores vectoriales. Es decir, se encontrarán fórmulas del tipo (2.10) y (2.11), pero en este caso $f_\pm(x - t), g_\pm(x + t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ (véase Teorema 2.47). Para tal fin extenderemos el cambio de variables (2.2) a distribuciones y describiremos una serie de resultados necesarios para lograr el objetivo del presente capítulo.

3.1. Cambio de coordenadas en \mathcal{D}' . El siguiente teorema sobre el cambio de variables, el cual constituye una herramienta fundamental en la teoría de distribuciones, es la generalización sencilla del resultado de [18, pág. 81-82].

Teorema 2.24 (Cambio de Coordenadas). Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos y $\psi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ un difeomorfismo. Entonces, para cada $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2; \mathbb{R}^d)$, existe $u \circ \psi \in \mathcal{D}'(\Omega_1; \mathbb{R}^d)$ y se define a través de la ecuación

$$(3.1) \quad (u \circ \psi)(x) \bullet \varphi(x) = u(y) \bullet (\varphi \circ \psi^{-1}(y) |J_{\psi^{-1}}|), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1),$$

en donde, $|J_{\psi^{-1}}|$ es el jacobiano de ψ^{-1} . Además, la función $\psi^* : \mathcal{D}'(\Omega_2; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1; \mathbb{R}^d)$ dada por $\psi^*(u) := u \circ \psi$ es continua por sucesiones; es decir,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \psi^*(u^m) = 0$$

para cada sucesión $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega_2; \mathbb{R}^d)$ que converge a 0 (véase Definición 2.17).

Observación 2.25. Sean $u \in \mathcal{D}'(\Pi_+; \mathbb{R}^d)$ y ψ el difeomorfismo definido por (2.1). Entonces, por el Teorema 2.24

$$u \circ \psi^{-1}, (\square u) \circ \psi^{-1} \in \mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d).$$

Ahora transformemos la ecuación de D'Alembert

$$\square u = \mathbf{0}, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Pi_+; \mathbb{R}^d).$$

usando (2.2). Notemos que para $\varphi \in \mathcal{D}(\Sigma_+)$ el cambio de variable (2.1) aplicado a la ecuación $\square \varphi = \mathbf{0}$ es una consecuencia directa de la regla de la cadena para funciones en \mathbb{R}^2 ,

$$(3.2) \quad \square(\varphi \circ \psi)(x, t) = -4\partial_{\xi\eta}^2 \varphi(\psi(x, t)), \quad (x, t) \in \Pi_+.$$

Lema 2.26. Sean $u \in \mathcal{D}'(\Pi_+; \mathbb{R}^d)$ y ψ el difeomorfismo definido por la ecuación (2.1). Entonces,

$$(3.3) \quad (\square u) \circ \psi^{-1}(\xi, \eta) = -2\partial_{\xi\eta}^2(u \circ \psi^{-1})(\xi, \eta)|J_\psi|, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d).$$

Demostración Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Sigma_+)$. El Teorema 2.24 (cambiando ψ por ψ_{-1}), (2.3) y la definición de $\square u \in \mathcal{D}'(\Pi_+; \mathbb{R}^d)$ implican

$$(3.4) \quad \begin{aligned} ((\square u) \circ \psi^{-1}(\xi, \eta)) \bullet \varphi(\xi, \eta) &= \square u(x, t) \bullet (\varphi \circ \psi(x, t) |J_\psi|) \\ &= 2u(x, t) \bullet (\square(\varphi \circ \psi)(x, t)). \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula (3.2), el Teorema 2.24 (reemplazando ψ por ψ^{-1}) y (2.3), obtenemos

$$(3.5) \quad \begin{aligned} u(x, t) \bullet (\square(\varphi \circ \psi)(x, t)) &= u(x, t) \bullet (-4\partial_{\xi\eta}^2\varphi(\psi(x, t))) \\ &= u(x, t) \bullet (-2\partial_{\xi\eta}^2\varphi \circ \psi(x, t) |J_\psi|) \\ &= (u \circ \psi^{-1}(\xi, \eta)) \bullet (-2\partial_{\xi\eta}^2\varphi(\xi, \eta)). \end{aligned}$$

La definición de derivada en $\mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d)$ implica

$$(3.6) \quad (u \circ \psi^{-1}(\xi, \eta)) \bullet (\partial_{\xi\eta}^2\varphi(\xi, \eta)) = (\partial_{\xi\eta}^2(u \circ \psi^{-1})(\xi, \eta)) \bullet \varphi(\xi, \eta).$$

Finalmente, de las ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.6) se sigue que

$$((\square u) \circ \psi^{-1}(\xi, \eta)) \bullet \varphi(\xi, \eta) = (-2\partial_{\xi\eta}^2(u \circ \psi^{-1})(\xi, \eta) |J_\psi|) \bullet \varphi(\xi, \eta).$$

■

El Lema anterior nos permite usar (2.1) en $\mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d)$ vía la fórmula (3.3).

Corolario 2.27. Directamente del Lema 2.26 se obtiene que son equivalentes:

1. $\square u(x, t) = \mathbf{0}$, en $\mathcal{D}'(\Pi_+; \mathbb{R}^d)$.
2. $\partial_{\xi\eta}^2(u \circ \psi^{-1})(\xi, \eta) = \mathbf{0}$, en $\mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d)$.

3.2. Producto tensorial en $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$. A continuación escribiremos algunas definiciones y hechos del producto tensorial de distribuciones tanto en $\mathcal{D}'(\Omega)$ como en $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$, los cuales requerimos para continuar con nuestro objetivo. Iniciemos con la teoría **1-dimensional**, es decir, con distribuciones con valores reales.

Sean $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos cuyos puntos genéricos son $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_m)$. Sea $\Omega_1 \times \Omega_2$ el conjunto de puntos de la forma $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$. Si $f \in C(\Omega_1)$ y $g \in C(\Omega_2)$ decimos que su producto tensorial, denotado por $f \times g \in C(\Omega_1 \times \Omega_2)$ se define a través de la ecuación

$$(3.7) \quad (f \times g)(x, y) = f(x)g(y), \quad (x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Para generalizar la Definición 3.7 a distribuciones notemos lo siguiente. Sean $\mathcal{D}(\Omega_1) := \mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}(\Omega_2) := \mathcal{D}_y$ y $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) := \mathcal{D}_{xy}$; y $\mathcal{D}'(\Omega_1) := \mathcal{D}'_x$, $\mathcal{D}'(\Omega_2) := \mathcal{D}'_y$ y $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2) := \mathcal{D}'_{xy}$ sus respectivos espacios de distribuciones.

Sea $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}_{xy}$ una función de la forma $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$, en donde $\varphi_1(x) \in \mathcal{D}_x$ y $\varphi_2 \in \mathcal{D}_y$. Entonces, para $f \in C(\Omega_1)$ y $g \in C(\Omega_2)$ tenemos por (3.7)

$$\begin{aligned} \langle f(x) \times g(y), \varphi(x, y) \rangle &= \langle f(x) \times g(y), \varphi_1(x)\varphi_2(y) \rangle \\ &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x)g(y)\varphi_1(x)\varphi_2(y)dx dy \\ &= \int_{\Omega_1} f(x)\varphi_1(x)dx \int_{\Omega_2} g(y)\varphi_2(y)dy \\ &= \langle f, \varphi_1 \rangle \langle g, \varphi_2 \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi_1(x)\varphi_2(y) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Ahora si φ no es de la forma anterior, entonces por teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \langle f(x) \times g(y), \varphi(x, y) \rangle &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x)g(y)\varphi(x, y)dx dy \\ &= \int_{\Omega_1} f(x)dx \int_{\Omega_2} g(y)\varphi(x, y)dy = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle \end{aligned}$$

y similarmente

$$\langle f(x) \times g(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{xy}.$$

El siguiente teorema generaliza el producto tensorial de funciones continuas (3.7), a distribuciones con valores reales.

Teorema 2.28. ([18]) *Sean $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos. Los siguientes enunciados se cumplen:*

1. *El subespacio $\text{gen}\{\varphi_1(x)\varphi_2(y) \mid \varphi_1(x) \in \mathcal{D}_x, \varphi_2(y) \in \mathcal{D}_y\} \subset \mathcal{D}_{xy}$ es denso en \mathcal{D}_{xy} . En donde para cada subconjunto A de un espacio lineal, $\text{gen}\{A\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de A .*
2. *Si $u \in \mathcal{D}'_x$ y $v \in \mathcal{D}'_y$ entonces, existe una única distribución $u \otimes v \in \mathcal{D}'_{xy}$, llamada el producto tensorial de u con v y escribimos $u \otimes v$, de tal manera que para todo $\varphi \in \mathcal{D}_{xy}$ de la forma $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ tenemos*

$$(3.8) \quad \langle u \otimes v, \varphi(x, y) \rangle = \langle u, \varphi_1 \rangle \langle v, \varphi_2 \rangle, \quad \varphi_1 \in \mathcal{D}_x, \quad \varphi_2 \in \mathcal{D}_y.$$

3. *El producto tensorial $u \otimes v$ tiene las siguientes propiedades:*

(a): Para $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}_{xy}$ se puede calcular, por teorema de Fubini, $\langle u \otimes v, \varphi \rangle$ como sigue. Sea x -fija: entonces $\varphi(x, y)$ considerada como función de y únicamente pertenece a \mathcal{D}_y , luego podemos formar

$$\phi(x) = \langle v(y), \varphi(x, y) \rangle.$$

Esta expresión depende sólo de x , de esta forma $\phi \in \mathcal{D}_x$ y podemos formar $\langle u, \phi \rangle$. Por lo tanto,

$$(3.9) \quad \langle u \otimes v, \varphi \rangle = \langle u, \phi \rangle = \langle u(x), \langle v(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle,$$

y similarmente

$$(3.10) \quad \langle u \otimes v, \varphi \rangle = \langle v(y), \langle u(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle.$$

(b): $u \otimes v = v \otimes u$, para todo $u \in \mathcal{D}_x$ y $v \in \mathcal{D}_y$.

(c): El soporte de $u \otimes v$ es el producto cartesiano de $\text{supp } u$ y $\text{supp } v$.

(d): Si α es un n -multi-índice y β es un m -multi-índice, entonces

$$(3.11) \quad \partial_x^\alpha \partial_y^\beta (u \otimes v) = \partial_x^\alpha u \otimes \partial_y^\beta v.$$

(e): $u \otimes v$ es una forma bilineal, continua en cada variable, sobre $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$.

Demostración Véase [18], páginas 44-47, Teoremas 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3 ■

Una función continua de dos variables x e y se dice que es independiente de y si esta es de la forma $g(x) \times 1(y)$, en donde $1(y) = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$. En efecto, por (3.7) se tiene $(g \times 1)(x, y) = g(x)1(y) = g(x)$. Por analogía decimos que una distribución u de \mathcal{D}'_{xy} es independiente de y si esta es de la forma $u(x) \otimes 1(y)$. La cual actúa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle u(x) \otimes 1(y), \varphi(x, y) \rangle &= \langle u(x), \langle 1(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \left\langle u(x), \int_{\Omega_2} \varphi(x, y) dy \right\rangle \\ &= \langle 1(y) \otimes u(x), \varphi(x, y) \rangle \\ &= \int_{\Omega_2} \langle u(x), \varphi(x, y) \rangle dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$(3.12) \quad \left\langle u(x), \int_{\Omega_2} \varphi(x, y) dy \right\rangle = \int_{\Omega_2} \langle u(x), \varphi(x, y) \rangle dy,$$

la cual es válida para toda $u \in \mathcal{D}'_x$ y $\varphi \in \mathcal{D}_{xy}$.

En seguida enunciamos una aplicación del Teorema 2.28 punto 2 y que será de utilidad más adelante.

Proposición 2.29. Si $v(\xi, \eta) \in \mathcal{D}'(J)$, en donde $J \subset \mathbb{R}^2$ es un rectángulo abierto con sus lados paralelos a los ejes ξ, η , entonces

$\partial_\eta v = 0$ si y sólo si

$$v(\xi, \eta) = h(\xi) \otimes 1(\eta), \quad \text{en } \mathcal{D}'(J),$$

en donde, $h \in \mathcal{D}'(\pi_\xi[J])$ y $1(\eta) = 1$ para todo $\eta \in \pi_\eta[J]$.

Demostración (\Rightarrow) Sea $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\pi_\eta[J])$ tal que

$$(3.13) \quad \langle 1, \varphi_0(\eta) \rangle = 1.$$

Definimos h mediante la ecuación

$$(3.14) \quad \langle h(\xi), \varphi_1(\xi) \rangle = \langle v(\xi, \eta), \varphi_1(\xi) \times \varphi_0(\eta) \rangle, \quad \varphi_1 \in \mathcal{D}(\pi_\xi(J)).$$

Es fácil ver [18, pág. 40-41] que $h(\xi) \in \mathcal{D}'(\pi_\xi[J])$. Ahora, para $\chi \in \mathcal{D}(J)$ tenemos por (3.10)

$$(3.15) \quad \langle h(\xi) \otimes 1(\eta), \chi(\xi, \eta) \rangle = \langle h(\xi), \langle 1(\eta), \chi(\xi, \eta) \rangle \rangle,$$

en donde, $\langle 1(\eta), \chi(\xi, \eta) \rangle \in \mathcal{D}(\pi_\xi[J])$. Usando (3.14) y (3.15), obtenemos

$$(3.16) \quad \langle h(\xi) \otimes 1(\eta), \chi(\xi, \eta) \rangle = \langle v(\xi, \eta), \langle 1(\eta), \chi(\xi, \eta) \rangle \times \varphi_0(\eta) \rangle, \quad \chi \in \mathcal{D}(J).$$

Definimos

$$\tilde{\chi}(\xi, \eta) = \chi(\xi, \eta) - \langle 1(\eta), \chi(\xi, \eta) \rangle \times \varphi_0(\eta).$$

Es claro que $\tilde{\chi}(\xi, \eta) \in \mathcal{D}(J)$. Entonces, de la ecuación (3.16) se sigue que

$$(3.17) \quad \langle v(\xi, \eta), \chi(\xi, \eta) \rangle - \langle h(\xi) \otimes 1(\eta), \chi(\xi, \eta) \rangle = \langle v(\xi, \eta), \tilde{\chi}(\xi, \eta) \rangle, \quad \chi \in \mathcal{D}(J).$$

Ahora, en virtud de (3.13) tenemos

$$\begin{aligned} \langle 1(\eta), \tilde{\chi}(\xi, \eta) \rangle &= \langle 1(\eta), \chi(\xi, \eta) - \langle 1(\eta), \chi(\xi, \eta) \rangle \times \varphi_0(\eta) \rangle \\ &= \langle 1(\eta), \chi(\xi, \eta) \rangle - \langle 1(\eta), \chi(\xi, \eta) \rangle \langle 1(\eta), \varphi_0(\eta) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Esto implica que,

$$\int_{\pi_\eta[J]} \tilde{\chi}(\xi, \eta) d\eta = 0.$$

De aquí,

$$\int_{\eta}^{\infty} \tilde{\chi}(\xi, t) dt \in \mathcal{D}(J).$$

Lo anterior implica, usando la hipótesis

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \langle v(\xi, \eta), \tilde{\chi}(\xi, \eta) \rangle &= - \left\langle v(\xi, \eta), \partial_\eta \int_\eta^\infty \tilde{\chi}(\xi, t) dt \right\rangle \\ &= \left\langle \partial_\eta v(\xi, \eta), \int_\eta^\infty \tilde{\chi}(\xi, t) dt \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.17) y (3.18) se sigue que

$$\langle v(\xi, \eta), \chi(\xi, \eta) \rangle = \langle h(\xi) \otimes 1(\eta), \chi(\xi, \eta) \rangle, \quad \chi \in \mathcal{D}(J).$$

(\Leftarrow) Es una consecuencia directa de la ecuación (3.11). ■

Lo que sigue a continuación es enunciar y demostrar un resultado análogo a la Proposición 2.29 para $v(\xi, \eta) \in \mathcal{D}'(\Sigma_+)$

Lema 2.30. *Sean $I, J \subset \Sigma_+$ rectángulos abiertos con lados paralelos a los ejes ξ, η , tales que su intersección $K := I \cap J \neq \emptyset$, y sean $v_1(\xi, \eta) \in \mathcal{D}'(I)$ y $v_2(\xi, \eta) \in \mathcal{D}'(J)$ tales que*

$$(3.19) \quad v_1(\xi, \eta) = h_1(\xi) \otimes 1(\eta), \quad \text{en } \mathcal{D}'(I) \text{ y}$$

$$(3.20) \quad v_2(\xi, \eta) = h_2(\xi) \otimes 1(\eta), \quad \text{en } \mathcal{D}'(J),$$

en donde, $h_1 \in \mathcal{D}'(\pi_\xi[I])$, $h_2 \in \mathcal{D}'(\pi_\xi[J])$ y $v_1 = v_2$ en K . Entonces,

$$(3.21) \quad h_1 = h_2, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\pi_\xi[K]).$$

Demostración Restando (3.20) de (3.19), obtenemos

$$(3.22) \quad (h_1 - h_2)(\xi) \otimes 1(\eta) = 0, \quad \text{en } \mathcal{D}'(K).$$

Sea K_0 un rectángulo abierto contenido en K . Notemos que $\mathcal{D}(K_0) \subset \mathcal{D}(K)$ implica $\mathcal{D}'(K) \subset \mathcal{D}'(K_0)$. Así, de la ecuación (3.22) se sigue que

$$(3.23) \quad (h_1 - h_2) \otimes 1 = 0, \quad \text{en } \mathcal{D}'(K_0).$$

Si $\varphi(\xi) \in \mathcal{D}(\pi_\xi[K])$ y $\varphi_0(\eta) \in \mathcal{D}(\pi_\eta[K_0])$ es tal que $\langle 1(\eta), \varphi_0(\eta) \rangle = 1$, entonces

$$(3.24) \quad \varphi(\xi) = \langle 1(\eta), \varphi(\xi) \times \varphi_0(\eta) \rangle.$$

Es claro que $\varphi(\xi) \times \varphi_0(\eta) \in \mathcal{D}(K_0)$. Luego la ecuación (3.24) y la definición de producto tensorial implican que, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\pi_\xi[K])$,

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \langle (h_1 - h_2)(\xi), \varphi(\xi) \rangle &= \langle (h_1 - h_2)(\xi), \langle 1(\eta), \varphi(\xi) \times \varphi_0(\eta) \rangle \rangle \\ &= \langle (h_1 - h_2)(\xi) \otimes 1(\eta), \varphi(\xi) \times \varphi_0(\eta) \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado, (3.23) implica que

$$(3.26) \quad \langle (h_1 - h_2)(\xi) \otimes 1(\eta), \chi(\xi, \eta) \rangle = 0, \quad \text{para todo } \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{K}_0).$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.25) y (3.26) se sigue que $\langle (h_1 - h_2)(\xi), \varphi(\xi) \rangle = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\pi_\xi[\mathbb{K}])$. Por lo tanto (3.21) se cumple. ■

Ahora introducimos el concepto de antiderivada de una distribución el cual usaremos más adelante.

Antiderivadas de distribuciones

Supongamos que $n = 1$. Consideremos $\Omega = \mathbb{R}$ y la ecuación diferencial más simple

$$(3.27) \quad u' = v,$$

en donde, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ está dada. Una solución de esta ecuación se dice que es la antiderivada de v . La expresión (3.27) significa que buscamos una distribución $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que

$$(3.28) \quad \langle u, \varphi' \rangle = -\langle v, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Esto determina u sobre el siguiente subespacio de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$(3.29) \quad \mathcal{D}_1(\mathbb{R}) := \left\{ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ tal que } \psi = \varphi' \right\}.$$

De esta manera para resolver (3.27) debemos extender la forma lineal $\psi \mapsto -\langle v, \varphi \rangle$ de $\mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Lema 2.31. [18, pág. 22]

$$(3.30) \quad \mathcal{D}_1(\mathbb{R}) = \left\{ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \langle 1, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi dx = 0 \right\}.$$

Demostración La implicación (3.29) \implies (3.30) es directa. Demostraremos la implicación opuesta. Sea $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ y $\langle 1, \psi \rangle = 0$, entonces

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt = - \int_x^{\infty} \psi(t) dt$$

es un elemento de $C^\infty(\mathbb{R})$ y tiene soporte compacto por (3.30) y $\varphi' = \psi$. ■

Tomemos alguna $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\langle 1, \varphi_0 \rangle = 1$, y descomponemos cualquier $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ como sigue:

$$(3.31) \quad \varphi(x) = \left[\varphi(x) - \langle 1, \varphi \rangle \varphi_0(x) \right] + \langle 1, \varphi \rangle \varphi_0(x).$$

Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}} [\varphi(t) - \langle 1, \varphi \rangle \varphi_0(t)] dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Esto nos permite representar a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ como la suma directa de $\mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ y un subespacio de dimensión 1 generado por φ_0 . De esta forma definimos una transformación $\mu : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dada por

$$(3.32) \quad \mu\varphi(x) = \int_x^{\infty} [\varphi(t) - \langle 1, \varphi \rangle \varphi_0(t)] dt,$$

cuyo kernel es precisamente $\mathcal{D}_1(\mathbb{R})$. Se sigue a partir de (3.31) y (3.32) que si u es una solución de (3.27), (es decir, se cumple (3.28)) entonces

$$(3.33) \quad \langle u, \varphi \rangle = \langle v, \mu\varphi \rangle + \langle C, \varphi \rangle, \quad C = \langle u, \varphi_0 \rangle.$$

Ahora podemos formular el teorema de la existencia de primitivas en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Teorema 2.32. [18, pág. 23] *Si $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, entonces u , definida por (3.33) con C una constante arbitraria, es una **primitiva** de v ; además, cada primitiva de v tiene esta forma.*

Generalización a \mathbb{R}^d

Definición 2.33. Sean $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos. Si $f \in C(\Omega_1; \mathbb{R}^d)$ y $g \in C(\Omega_2; \mathbb{R}^d)$, entonces la función $f \times g \in C(\Omega_1 \times \Omega_2; \mathbb{R}^d)$ se define a través de la ecuación

$$(f \times g)(x, y) = f(x) \bullet g(y) := (f_1(x)g_1(y), \dots, f_d(x)g_d(y)), \quad (x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Definición 2.34. Definimos

$$(3.34) \quad \mathbf{1}(\eta) := \underbrace{(1(\eta), \dots, 1(\eta))}_{d\text{-veces}}.$$

$$(3.35) \quad \mathbf{1}(\eta) \bullet \varphi(\eta) := \left(\int_{\Omega_2} \varphi(\eta) d\eta, \dots, \int_{\Omega_2} \varphi(\eta) d\eta \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_2).$$

Definición 2.35. Sea $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^d)$, entonces el soporte de f , denotado por $\text{supp } f$ es la cerradura en Ω del conjunto $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq \mathbf{0}\} := (0, \dots, 0)$, es decir, $\text{supp } f$ es el subconjunto cerrado más pequeño de Ω tal que $f = \mathbf{0}$ en $\Omega \setminus \text{supp } f$.

El siguiente teorema es la generalización a distribuciones con valores vectoriales del Teorema 2.28.

Teorema 2.36. ([5, pág. 46-50]) *Sean $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos. Los siguientes enunciados se cumplen:*

1. El subespacio de $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ generado por funciones de la forma $\varphi_1 \varphi_2$, donde $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ y $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, es denso por sucesiones en $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.
2. Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1; \mathbb{R}^d)$ y $v \in \mathcal{D}'(\Omega_2; \mathbb{R}^d)$, entonces, existe un único elemento $u \otimes v \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2; \mathbb{R}^d)$, llamado el producto tensorial de u con v y lo escribimos como $u \otimes v$, tal que

$$(3.36) \quad (u \otimes v) \bullet (\varphi_1 \varphi_2) = (\langle u_1, \varphi_1 \rangle \langle v_1, \varphi_2 \rangle, \dots, \langle u_d, \varphi_1 \rangle \langle v_d, \varphi_2 \rangle)$$

con $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$.

3. El producto tensorial $u \otimes v$ tiene las siguientes propiedades:

(a): Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ el producto tensorial $u \otimes v$ se puede calcular mediante

$$(3.37) \quad (u \otimes v) \bullet \varphi = (\langle v_1(x), \langle u_1(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle, \dots, \langle v_d(x), \langle u_d(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle)$$

$$(3.38) \quad = (\langle u_1(x), \langle v_1(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle, \dots, \langle u_d(x), \langle v_d(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle).$$

(b): Sean $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1; \mathbb{R}^d)$ y $v \in \mathcal{D}'(\Omega_2; \mathbb{R}^d)$, entonces $u \otimes v = v \otimes u$.

(c): El soporte de $u \otimes v$. Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1; \mathbb{R}^d)$ y $v \in \mathcal{D}'(\Omega_2; \mathbb{R}^d)$, entonces $\text{supp}(u \otimes v) \subset \text{supp}(u) \times \text{supp}(v)$.

(d): Para cualquier $f(\xi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\xi; \mathbb{R}^d)$ y $g(\eta) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\eta; \mathbb{R}^d)$, se cumple

$$(3.39) \quad \partial_\eta(f(\xi) \otimes g(\eta)) = f(\xi) \otimes \partial_\eta g(\eta), \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d).$$

(e): Si α es un n -multi-índice y β es un m -multi-índice, entonces

$$(3.40) \quad \partial_x^\alpha \partial_y^\beta (u \otimes v) = \partial_x^\alpha u \otimes \partial_y^\beta v.$$

(f): $u \otimes v$ es una forma bilineal, continua en cada variable, sobre $\mathcal{D}(\Omega_1; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{D}(\Omega_2; \mathbb{R}^d)$.

Demostración Probemos (d). Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Entonces de las definiciones de derivada y producto tensorial (expresión (3.38)), obtenemos

$$(3.41) \quad \begin{aligned} (\partial_\eta(f(\xi) \otimes g(\eta))) \bullet \varphi(\xi, \eta) &= (f(\xi) \otimes g(\eta)) \bullet (-\partial_\eta \varphi(\xi, \eta)) \\ &= f(\xi) \bullet (g(\eta) \bullet (-\partial_\eta \varphi(\xi, \eta))). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando nuevamente la definición de derivada, y (3.38) obtenemos

$$\begin{aligned} f(\xi) \bullet (g(\eta) \bullet (-\partial_\eta \varphi(\xi, \eta))) &= f(\xi) \bullet ((\partial_\eta g(\eta)) \bullet \varphi(\xi, \eta)) \\ &= (f(\xi) \otimes \partial_\eta g(\eta)) \bullet \varphi(\xi, \eta). \end{aligned}$$

La identidad (3.39) se sigue de aquí y de (3.41). ■

Ahora efectuemos la generalización de la Proposición 2.29 a distribuciones con valores vectoriales.

Proposición 2.37. *Si $v \in \mathcal{D}'(J; \mathbb{R}^d)$, donde $J \subset \mathbb{R}^2$ es un rectángulo abierto con sus lados paralelos a los ejes ξ, η , entonces*

$\partial_\eta v = \mathbf{0}$ si y sólo si

$$v(\xi, \eta) = h(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta), \quad \text{en } \mathcal{D}'(J; \mathbb{R}^d),$$

en donde, $h := (h_1, \dots, h_d) \in \mathcal{D}'(\pi_\xi[J]; \mathbb{R}^d)$ y $\mathbf{1}(\eta) = \mathbf{1}$ para todo $\eta \in \pi_\eta[J]$.

Demostración (\Rightarrow) Sea $v = (v_1, \dots, v_d)$. La hipótesis $\partial_\eta v = \mathbf{0}$ implica

$$\partial_\eta v_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, d$$

luego la Proposición 2.29 implica que $v_i(\xi, \eta) = h_i(\xi) \otimes 1(\eta)$ para cada $i = 1, \dots, d$. Por lo tanto,

$$v(\xi, \eta) = (h_1(\xi) \otimes 1(\eta), \dots, h_d(\xi) \otimes 1(\eta)).$$

Ahora la expresión (1.11), (3.38) y (3.34) implica

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) \bullet \varphi(\xi, \eta) &= (\langle h_1(\xi) \otimes 1(\eta), \varphi(x, y) \rangle, \dots, \langle h_d(\xi) \otimes 1(\eta), \varphi(x, y) \rangle) \\ &= (h(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta)) \bullet \varphi(\xi, \eta), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(J). \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Supongamos que $v(\xi, \eta) = h(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta)$, entonces la aseveración se sigue directamente de la relación (3.40). ■

Motivados por el resultado anterior, el objetivo ahora será demostrar que la Proposición 2.37 sigue siendo válida en la clase de distribuciones con valores vectoriales definidas sobre Σ_+ , es decir, para $v \in \mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d)$.

3.3. Descomposición de D'Alembert. En esta subsección aplicaremos los resultados de las subsecciones anteriores a las soluciones generalizadas de la ecuación de onda 1-dimensional con valores en \mathbb{R}^d . Iniciamos enunciando un resultado conocido como Teorema de localización, el cual es la generalización trivial del resultado, 1-dimensional, que se encuentra en [18] pág. 12-13.

Teorema 2.38 (de localización). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sea $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una cubierta abierta de Ω , en donde Λ es un conjunto de índices. Supongamos que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe una distribución $u^\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega_\lambda; \mathbb{R}^d)$, y que*

$$(3.42) \quad u^\mu = u^\nu, \quad \text{sobre } \Omega_\mu \cap \Omega_\nu, \quad \text{si } \Omega_\mu \cap \Omega_\nu \neq \emptyset.$$

Entonces existe una única $u \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$ tal que $u = u^\lambda$ en Ω_λ , para cada $\lambda \in \Lambda$.

Ahora apliquemos el teorema de localización a las funciones generalizadas definidas en Σ_+ que dependen de una variable.

Lema 2.39. Sean $I, J \subset \Sigma_+$ rectángulos abiertos con lados paralelos a los ejes ξ, η , tales que su intersección $K := I \cap J \neq \emptyset$, y sean $v^1(\xi, \eta) \in \mathcal{D}'(I; \mathbb{R}^d)$ y $v^2(\xi, \eta) \in \mathcal{D}'(J; \mathbb{R}^d)$ tales que

$$(3.43) \quad v^1(\xi, \eta) = h^1(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta), \quad \text{en } \mathcal{D}'(I; \mathbb{R}^d) \text{ y}$$

$$(3.44) \quad v^2(\xi, \eta) = h^2(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta), \quad \text{en } \mathcal{D}'(J; \mathbb{R}^d),$$

en donde, $h^1 \in \mathcal{D}'(\pi_\xi[I]; \mathbb{R}^d)$, $h^2 \in \mathcal{D}'(\pi_\xi[J]; \mathbb{R}^d)$ y $v^1 = v^2$ en K . Entonces,

$$(3.45) \quad h^1 = h^2, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\pi_\xi[K]; \mathbb{R}^d).$$

Demostración Restando (3.44) de (3.43), obtenemos

$$(3.46) \quad (h^1 - h^2)(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta) = \mathbf{0}, \quad \text{en } \mathcal{D}'(K; \mathbb{R}^d).$$

Esta expresión implica

$$(3.47) \quad (h_i^1 - h_i^2)(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, d, \quad \text{en } \mathcal{D}'(K).$$

Luego la aseveración se sigue fácilmente si aplicamos los argumentos de la prueba del Lema 2.30, a (3.47) para cada $i = 1, \dots, d$. ■

Ahora generalizamos la Proposición 2.37 para distribuciones definidas en Σ_+ .

Proposición 2.40. Si $v \in \mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d)$, entonces

$$(3.48) \quad \partial_\eta v = \mathbf{0}, \quad \text{sobre } \Sigma_+$$

si y sólo si existe $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\xi; \mathbb{R}^d)$ tal que

$$(3.49) \quad v(\xi, \eta) = h(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta), \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d).$$

Observación 2.41. La expresión (3.49) implica que $v(\xi, \eta)$ admite una extensión a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$.

Demostración de la Proposición 2.40 (\Rightarrow) Sea $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, en donde, Λ es un conjunto de índices, una familia de rectángulos abiertos tales que

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda = \Sigma_+.$$

Si restringimos v sobre Ω_λ , para cada $\lambda \in \Lambda$, entonces obtenemos una familia de distribuciones

$$v^\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega_\lambda; \mathbb{R}^d), \quad \lambda \in \Lambda,$$

tales que $\partial_\eta v^\lambda = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega_\lambda; \mathbb{R}^d)$. Entonces, de la Proposición 2.37 se sigue que para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$v^\lambda(\xi, \eta) = h^\lambda(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta), \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_\lambda; \mathbb{R}^d),$$

en donde, $h^\lambda \in \mathcal{D}'(\pi_\xi[\Omega_\lambda]; \mathbb{R}^d)$ y π_ξ es la proyección sobre la coordenada ξ . Utilizando el Lema 2.39 obtenemos que las distribuciones h^λ satisfacen la propiedad

$$h^\mu = h^\nu, \quad \text{sobre } \Omega_\mu \cap \Omega_\nu, \quad \text{si } \Omega_\mu \cap \Omega_\nu \neq \emptyset.$$

Entonces, el Teorema 2.38 implica que existe una única

$$h \in \mathcal{D}'(\pi_\xi[\Sigma_+]; \mathbb{R}^d) := \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\xi; \mathbb{R}^d)$$

tal que $h = h^\lambda$ en Ω_λ , para cada $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto, si definimos

$$v(\xi, \eta) = h(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta), \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d),$$

entonces v es tal que $v = v^\lambda$ en Ω_λ , para cada $\lambda \in \Lambda$ y es única.

(\Leftarrow) Es una consecuencia directa de la ecuación (3.40). ■

La Proposición 2.40 implica directamente el siguiente hecho.

Corolario 2.42. *En $\mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d)$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\partial_{\xi\eta}^2(u \circ \psi^{-1}(\xi, \eta)) = \mathbf{0}$.
2. $\partial_\eta(u \circ \psi^{-1}(\xi, \eta)) = \mathbf{1}(\xi) \otimes h(\eta)$, en donde, $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\eta; \mathbb{R}^d)$ y $\mathbf{1}(\xi) = \mathbf{1}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}_\xi$.

El siguiente resultado es la generalización sencilla del Teorema 2.32 para distribuciones con valores vectoriales

Teorema 2.43. *Sea $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, entonces u , definida por*

$$(3.50) \quad u \bullet \varphi = v \bullet (\mu\varphi) + C \bullet \varphi, \quad C = u \bullet \varphi_0,$$

en donde, $\mu : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})$ es como en (3.32) y C una constante arbitraria; es una **primitiva** de v ; además, cada primitiva de v tiene esta forma.

Ahora encontremos las antiderivadas de las distribuciones en Σ_+ que dependen de una variable y cuya existencia está garantizada por el Teorema 2.43.

Lema 2.44. *Sea $w(\xi, \eta) \in \mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d)$ y*

$$\partial_\eta(w(\xi, \eta)) = \mathbf{1}(\xi) \otimes r(\eta),$$

en donde, $r(\eta) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\eta; \mathbb{R}^d)$. Entonces,

1) existen $f_+(\xi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\xi; \mathbb{R}^d)$ y $g_+(\eta) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\eta; \mathbb{R}^d)$ tales que

$$(3.51) \quad w(x, t) := w(\xi, \eta) \circ \psi(x, t)$$

con $\psi(x, t)$ dada por (2.1), se representa en la forma:

$$(3.52) \quad w(x, t) = f_+(x - t) + g_+(x + t),$$

en donde,

$$(3.53) \quad \begin{aligned} f_+(x - t) &:= (f_+(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta)) \circ \psi(x, t), \\ g_+(x + t) &:= (\mathbf{1}(\xi) \otimes g_+(\eta)) \circ \psi(x, t). \end{aligned}$$

2) Si $\overline{f_+} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\xi; \mathbb{R}^d)$, $\overline{g_+} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\eta; \mathbb{R}^d)$ es otra pareja de distribuciones que satisface (3.52), entonces existe una constante $C_+ \in \mathbb{R}$ tal que

$$(3.54) \quad \overline{f_+} = f_+ - C_+, \quad \overline{g_+} = g_+ + C_+.$$

Observación 2.45. Notemos que la identidad (3.52) se extiende de Σ_+ a todo \mathbb{R}^2 .

Demostración del Lema 2.44. 1) Utilizando la hipótesis y el Teorema 2.36 3-(d) (véase (3.39)), obtenemos

$$(3.55) \quad \partial_\eta(w(\xi, \eta) - \mathbf{1}(\xi) \otimes g_+(\eta)) = 0, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d).$$

en donde, $g_+(\eta)$ es una primitiva de $r(\eta)$.

Entonces la Proposición 2.40 implica que existe $f_+(\xi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\xi; \mathbb{R}^d)$ tal que se cumple

$$w(\xi, \eta) = f_+(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta) + \mathbf{1}(\xi) \otimes g_+(\eta)$$

Esto implica (3.52) tomando en cuenta (3.51) y (3.53). La afirmación 1) está demostrada.

2) Sea $\chi(\eta) \in \mathcal{D}(\Sigma_+)$ tal que $\langle \mathbf{1}(\eta), \chi(\eta) \rangle = \mathbf{1}$. Entonces, para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi)$ usando (3.36) tenemos

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) \bullet (\varphi(\xi)\chi(\eta)) &= (f_+(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta) + \mathbf{1}(\xi) \otimes g_+(\eta)) \bullet \varphi(\xi)\chi(\eta) \\ &= (f_+(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta)) \bullet \varphi(\xi)\chi(\eta) + (\mathbf{1}(\xi) \otimes g_+(\eta)) \bullet \varphi(\xi)\chi(\eta) \\ &= f_+(\xi) \bullet \varphi(\xi) + \int_{\mathbb{R}_\xi} (g_+(\eta) \bullet \chi(\eta)) \varphi(\xi) d\xi \\ &= f_+(\xi) \bullet \varphi(\xi) + (g_+(\eta) \bullet \chi(\eta)) \int_{\mathbb{R}_\xi} \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

De manera análoga dado que $\overline{f_+}$ y $\overline{g_+}$ es una pareja que satisface (3.52), entonces

$$(3.56) \quad \begin{aligned} w(\xi, \eta) \bullet (\varphi(\xi)\chi(\eta)) &= (\overline{f_+}(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta) + \mathbf{1}(\xi) \otimes \overline{g_+}(\eta)) \bullet \varphi(\xi)\chi(\eta) \\ &= \overline{f_+}(\xi) \bullet \varphi(\xi) + (\overline{g_+}(\eta) \bullet \chi(\eta)) \int_{\mathbb{R}_\xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi). \end{aligned}$$

Luego

$$(3.57) \quad f_+(\xi) \bullet \varphi(\xi) + (g_+(\eta) \bullet \chi(\eta)) \int_{\mathbb{R}_\xi} \varphi(\xi) d\xi \\ = \overline{f_+}(\xi) \bullet \varphi(\xi) + (\overline{g_+}(\eta) \bullet \chi(\eta)) \int_{\mathbb{R}_\xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi),$$

lo cual implica

$$(3.58) \quad (f_+(\xi) - \overline{f_+}(\xi)) \bullet \varphi(\xi) = C_+ \int_{\mathbb{R}_\xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi),$$

en donde, $C_+ := (\overline{g_+}(\eta) - g_+(\eta)) \bullet \chi(\eta)$. Por lo tanto, $f_+ - \overline{f_+} = C_+$, de donde se obtiene la primera identidad de (3.54).

Sustituyendo $\overline{f_+} = f_+ - C_+$ en la ecuación (3.57) tenemos, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi)$

$$(3.59) \quad f_+(\xi) \bullet \varphi(\xi) + (g_+(\eta) \bullet \chi(\eta)) \int_{\mathbb{R}_\xi} \varphi(\xi) d\xi \\ = \overline{f_+}(\xi) \bullet \varphi(\xi) + (\overline{g_+}(\eta) \bullet \chi(\eta)) \int_{\mathbb{R}_\xi} \varphi(\xi) d\xi \\ = f_+(\xi) \bullet \varphi(\xi) + (-C_+) \bullet \varphi(\xi) + (\overline{g_+}(\eta) \bullet \chi(\eta)) \int_{\mathbb{R}_\xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

La última igualdad implica que

$$((g_+ - \overline{g_+})(\eta)) \bullet \chi(\eta) \int_{\mathbb{R}_\xi} \varphi(\xi) d\xi = -C_+ \bullet \varphi(\xi) = -C_+ \int_{\mathbb{R}_\xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi).$$

De donde se tiene que $\overline{g_+} = g_+ + C_+$. De esta forma 2) se ha demostrado. ■

Observación 2.46 (Justificación de las fórmulas (3.53)). Vamos a hacer comentarios acerca de la definición de $f_+(x-t)$ y por ende de $g_+(x+t)$. Supongamos que $f_+(\cdot) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Entonces, usando el cambio de variable (2.1), (2.3), el Teorema de Fubini, (3.1) y la definición del producto

tensorial de dos funciones continuas, tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}
 (3.60) \quad (f_+ \circ \psi(x, t)) \bullet \varphi(x, t) &= f_+(\xi) \bullet (\varphi \circ \psi^{-1}(\xi, \eta) |J_{\psi^{-1}}|) \\
 &= \int_{\mathbb{R}_x} \int_{\mathbb{R}_t} f_+(x-t) \varphi(x, t) dx dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{\mathbb{R}_\eta} f_+(\xi) \varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{-\xi+\eta}{2}\right) |J_{\psi^{-1}}| d\xi d\eta \\
 (3.61) \quad &= (f_+(\xi) \times \mathbf{1}(\eta)) \bullet (\varphi \circ \psi^{-1}(\xi, \eta) |J_{\psi^{-1}}|) \\
 &= ((f_+(\xi) \times \mathbf{1}(\eta)) \circ \psi(x, t)) \bullet \varphi(x, t).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_+(x-t) := (f_+(\xi) \times \mathbf{1}(\eta)) \circ \psi(x, t)$ en el sentido de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$. De esta manera justificamos las fórmulas (3.53).

Ahora podemos demostrar el teorema principal de este capítulo: la descomposición de D' Alembert en $\mathcal{D}'(\Pi_\pm; \mathbb{R}^d)$.

Teorema 2.47. *Si $u \in \mathcal{D}'(\Pi_\pm; \mathbb{R}^d)$, entonces las afirmaciones 1 y 2 son equivalentes:*

1.

$$(3.62) \quad \square u(x, t) = \mathbf{0}, \quad \text{sobre } \Pi_\pm.$$

2. *Existen $f_\pm, g_\pm \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tal que (3.52) se cumple.*

3. *Sea $u(x, t)$ que admite el desarrollo (3.52). Si $\bar{f}_\pm, \bar{g}_\pm \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ son tales que*

$$(3.63) \quad u(x, t) = \bar{f}_\pm(x-t) + \bar{g}_\pm(x+t), \quad \text{en } \Pi_\pm,$$

entonces existen $C_\pm \in \mathbb{R}$ tal que

$$(3.64) \quad \bar{f}_\pm = f_\pm - C_\pm, \quad \bar{g}_\pm = g_\pm + C_\pm.$$

Demostración Es suficiente demostrar la afirmación para Π_+ . El caso Π_- se analiza de manera análoga. (1 \Rightarrow 2) Probaremos que existen $f_+, g_+ \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tal que se cumple (3.52). Supongamos que $\square u(x, t) = \mathbf{0}$ sobre Π_+ , entonces por Corolario 2.27 $\partial_{\xi\eta}^2(u \circ \psi^{-1}(\xi, \eta)) = 0$ en $\mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d)$. Ahora por Proposición 2.40 con ξ en lugar de η , se tiene

$$(3.65) \quad \partial_\eta(u \circ \psi^{-1}(\xi, \eta)) = \mathbf{1}(\xi) \otimes r(\eta) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d).$$

Luego por 1 del Lema 2.44 obtenemos (3.52).

(2 \Rightarrow 1) Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Pi_+)$. La definición de $\square u$ en $\mathcal{D}'(\Pi_+; \mathbb{R}^d)$ y las fórmulas (3.53) implican

$$(3.66) \quad \begin{aligned} (\square u(x, t)) \bullet \varphi(x, t) &= (f_+(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta)) \circ \psi(x, t) \bullet \square \varphi(x, t) \\ &+ ((\mathbf{1}(\xi) \otimes g_+(\eta)) \circ \psi(x, t)) \bullet \square \varphi(x, t). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la expresión (3.1) y la ecuación (3.3) (aplicada a una función regular), obtenemos

$$\begin{aligned} ((f_+(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta)) \circ \psi(x, t)) \bullet \square \varphi(x, t) &= (f_+(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta)) \bullet ((\square \varphi) \circ \psi^{-1}(\xi, \eta) |J_{\psi^{-1}}|) \\ &= (f_+(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta)) \bullet (-2\partial_{\xi\eta}^2(\varphi \circ \psi^{-1})(\xi, \eta)). \end{aligned}$$

Luego, la definición de derivada en $\mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d)$ y la ecuación (3.11) implican

$$\begin{aligned} (f_+(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta)) \bullet (-2\partial_{\xi\eta}^2(\varphi \circ \psi^{-1})(\xi, \eta)) &= (-2\partial_{\xi\eta}^2(f_+(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta))) \bullet (\varphi \circ \psi^{-1}(\xi, \eta)) \\ &= \mathbf{0} \bullet (\varphi \circ \psi^{-1}(\xi, \eta)) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$((f_+(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta)) \circ \psi(x, t)) \bullet \square \varphi(x, t) = \mathbf{0}.$$

Análogamente,

$$((\mathbf{1}(\xi) \otimes g_+(\eta)) \circ \psi(x, t)) \bullet \square \varphi(x, t) = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto,

$$\square u(x, t) = \mathbf{0}, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Pi_+; \mathbb{R}^d).$$

Demostremos la afirmación 3. Supongamos que $u(x, t)$ admite los desarrollos (3.52) y (3.63). Entonces, por las fórmulas (3.53)

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) := u(x, t) \circ \psi^{-1}(\xi, \eta) &= f_+(x-t) \circ \psi^{-1}(\xi, \eta) + g_+(x+t) \circ \psi^{-1}(\xi, \eta) \\ &= f_+(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta) + \mathbf{1}(\xi) \otimes g_+(\eta). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$u(\xi, \eta) = \overline{f_+}(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta) + \mathbf{1}(\xi) \otimes \overline{g_+}(\eta).$$

Notemos que $\frac{\partial}{\partial \eta} u(\xi, \eta) = \mathbf{1}(\xi) \otimes h(\eta)$ para algún $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\eta; \mathbb{R}^d)$. Por lo tanto, podemos usar el Lema 2.44, apartado 2) y obtenemos las identidades (3.54). ■

Ahora es necesario explorar algunas propiedades especiales de las funciones f_\pm, g_\pm que aparecen en (3.52) bajo ciertas hipótesis sobre $u(x, t)$, las cuales requeriremos posteriormente.

Lema 2.48. Sea $v(\xi, \eta) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$ y supongamos que existen $p_{\pm}, q_{\pm} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tales que

$$(3.67) \quad v(\xi, \eta) = p_{\pm}(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta) + \mathbf{1}(\xi) \otimes q_{\pm}(\eta), \quad (\xi, \eta) \in \Sigma_{\pm}.$$

Entonces, se cumplen las siguientes implicaciones

$$i) v(\xi, \eta) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d) \implies p, q \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d),$$

$$ii) \text{ Si } v(\xi, \eta) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d) \implies p, q \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d).$$

Demostración Probemos las afirmaciones para Σ_+ . El caso para Σ_- se maneja similarmente. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_a := \{\eta \in \mathbb{R} \mid \eta > -a\}$. Fijemos $\alpha_1(\xi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{-a})$ tal que

$$(3.68) \quad \int_{\mathbb{R}_{-a}} \alpha_1(\xi) d\xi = 1.$$

Sea $\beta_0(\eta) \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}_a)$ arbitrario (véase (3.35) y (3.30)). No es difícil ver que $\alpha_1(\xi) \times \beta_0(\eta) \in \mathcal{D}(\Sigma_+)$, (véase Figura 1).

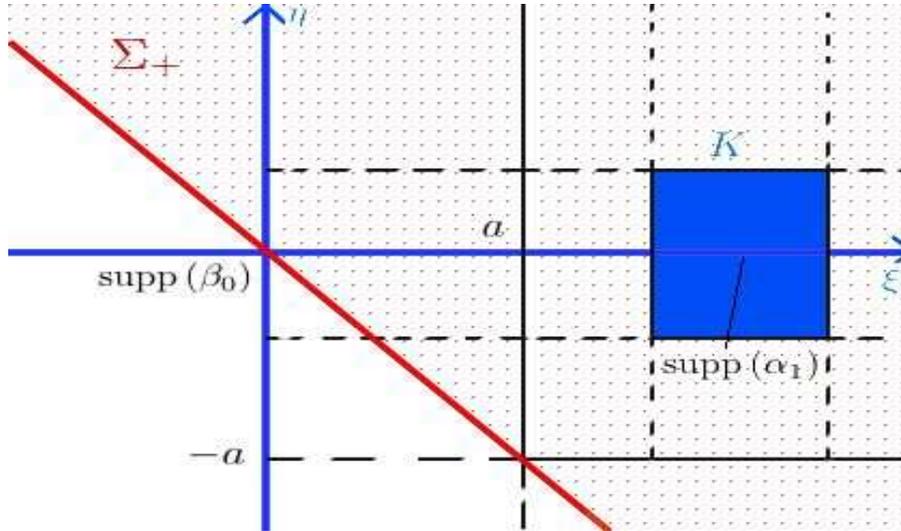


FIGURA 1. $K = \text{supp}(\alpha_0) \times \text{supp}(\beta_1)$

Ahora apliquemos $v(\xi, \eta)$ a la función de prueba $\alpha_1(\xi) \times \beta_0(\eta)$. La expresión (3.67) implica

$$(3.69) \quad \begin{aligned} v(\xi, \eta) \bullet (\alpha_1(\xi)\beta_0(\eta)) &= (p(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta)) \bullet (\alpha_1(\xi)\beta_0(\eta)) + (\mathbf{1}(\eta) \otimes q(\eta)) \bullet (\alpha_1(\xi)\beta_0(\eta)) \\ &= (\mathbf{1}(\eta) \otimes q(\eta)) \bullet (\alpha_1(\xi)\beta_0(\eta)), \end{aligned}$$

ya que $\beta_0 \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}_a)$ y por tanto $\mathbf{1}(\eta) \bullet \beta_0(\eta) = \mathbf{0}$. Entonces, de (3.69) y (3.36) se tiene

$$(3.70) \quad (\mathbf{1}(\eta) \otimes q(\eta)) \bullet (\alpha_1(\xi)\beta_0(\eta)) = q(\eta) \bullet \beta_0(\eta),$$

dato que $\alpha_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_a)$ es tal que se cumple (3.68). Por otro lado tenemos que

$$(3.71) \quad v(\xi, \eta) \bullet (\alpha_1(\xi)\beta_0(\eta)) = \int_{\mathbb{R}_a} \left(\int_{\mathbb{R}_a} v(\xi, \eta)\alpha_1(\xi) d\xi \right) \beta_0(\eta) d\eta.$$

Sea $T(\eta) := \int_{\mathbb{R}_a} v(\xi, \eta)\alpha_1(\xi) d\xi$. Entonces (3.69) y (3.71) implican

$$v(\xi, \eta) \bullet \alpha_1(\xi)\beta_0(\eta) = \int_{\mathbb{R}_a} T(\eta)\beta_0(\eta) d\eta.$$

Luego por (3.70)

$$(3.72) \quad \int_{\mathbb{R}_a} T(\eta)\beta_0(\eta) d\eta = q(\eta) \bullet \beta_0(\eta).$$

Así, obtenemos que

$$(3.73) \quad q(\eta) = T(\eta), \quad \text{sobre } \mathcal{D}_1(\mathbb{R}_a).$$

Sea $\{\alpha_1\}$ el espacio generado por α_1 , es decir, $\{\alpha_1\} = \{C\alpha_1 \mid C \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}_a)$. Existe la partición¹ $\mathcal{D}(\mathbb{R}_a) = \mathcal{D}_1(\mathbb{R}_a) \oplus \{\alpha_1\}$. Luego por (3.73) se sigue que existe $C_a \in \mathbb{R}$ tal que

$$(3.74) \quad q(\eta) = T(\eta) + C_a, \quad \eta \in \mathbb{R}_a.$$

Es evidente que: para el caso *i*) $T(\eta) \in C(\mathbb{R}_a)$ por la hipótesis y la definición de $T(\eta)$. Por lo tanto, (3.74) implica $q \in C(\mathbb{R}_a)$. Y para el caso *ii*) $T(\eta) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_a)$ por desigualdad de Cauchy-Schwarz y Teorema de Fubini. Luego, por (3.74) $q \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_a)$. Ya que a fue arbitrario el Lema está probado. ■

Corolario 2.50. *Sea $u(x, t) \in \mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$ y supongamos que existen $f_{\pm}, g_{\pm} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que se cumple (3.52) en $(x, t) \in \Pi_{\pm}$. Entonces, se tienen las siguientes implicaciones*

$$i) u \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d) \implies f_{\pm}, g_{\pm} \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d),$$

1

Lema 2.49. $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_1 \oplus \mathbb{K}\varphi_0$

Demostración Unicidad. Sean $\zeta, \zeta_2 \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$, $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$, $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\langle 1, \varphi_0 \rangle = 1$. La igualdad $\zeta_1 + c_1\varphi_0 = \zeta_2 + c_2\varphi_0$ implica que

$$\int_{\mathbb{R}} \zeta_1 dx + c_1 \int_{\mathbb{R}} \varphi_0 dx = \int_{\mathbb{R}} \zeta_2 dx + c_2 \int_{\mathbb{R}} \varphi_0 dx,$$

de donde obtenemos que $c_1 = c_2$. Por lo tanto, $\zeta_1 = \zeta_2$.

Existencia. Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ elegimos $c = \langle 1, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi dx$. Definimos $\zeta = \varphi - c\varphi_0$, entonces $\int_{\mathbb{R}} \zeta dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi dx - c \int_{\mathbb{R}} \varphi_0 dx = 0$. Por lo tanto $\zeta \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$.

ii) si $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d) \implies f_{\pm}, g_{\pm} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

Demostración Consideremos $u(\xi, \eta)$ tal que

$$u(x, t) = u(\xi, \eta) \circ \psi(x, t),$$

en donde, ψ se define en (2.1). Por (3.52) y (3.53) tenemos

$$u(\xi, \eta) = f_{\pm}(\xi) \otimes \mathbf{1}(\eta) + \mathbf{1}(\xi) \otimes g_{\pm}(\eta), \quad (\xi, \eta) \in \Sigma_{\pm}.$$

De esta forma las aseveraciones se siguen directamente del Lema 2.48. ■

Capítulo 3

Existencia de la dinámica del sistema de Lamb

En este capítulo construiremos la dinámica del sistema de Lamb (1.1) y demostraremos varias propiedades de la misma.

Primero demostraremos la existencia y unicidad de una solución $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ para cada estado inicial $Y_0 \in \mathcal{E}$. El plan consiste en establecer la unicidad de la solución $Y(t) = (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t)) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$, suponiendo que tal solución existe. Al mismo tiempo, obtenemos un método para construir una solución. De esta forma estaremos igualmente demostrando la existencia.

El primer paso consiste en usar el hecho que la ecuación de onda $\square u = \mathbf{0}$ es equivalente a la descomposición de D' Alembert en la clase $\mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$, (véase Capítulo 2); de esta forma podremos demostrar la bien conocida *fórmula de D' Alembert*, lo cual implicaría la unicidad de la solución $u(x, t)$ y por consiguiente de $Y(t)$ en la región del plano definida por la desigualdad $|x| \geq |t|$.

Luego, demostraremos la unicidad para la región del plano definida por $|x| < t$. Para la región definida por $|x| > t$ el procedimiento es análogo. La estrategia consiste en obtener una ecuación diferencial ordinaria no-lineal para $y(t) := u(0, t)$, a la cual denominaremos **ecuación reducida** para la trayectoria $y(t)$. Esta se obtiene analizando cuidadosamente la fórmula de D' Alembert. Por el principio de contracción se demuestra la existencia local de la solución al problema de Cauchy de la ecuación reducida. Finalmente, una **estimación a priori** implica la existencia global de la solución a dicho problema de Cauchy, así como también la continuidad de la misma.

Mostraremos también la continuidad del flujo definido por el grupo de evolución del sistema de Lamb en el espacio de fases \mathcal{E} y \mathcal{E}_F y también que dicho sistema es conservativo, es decir, su energía es una cantidad invariante respecto al tiempo.

1. Construcción de la dinámica del sistema de Lamb

El siguiente Teorema describe la dinámica del sistema acoplado. El caso $m \geq 0$ y $d = 1$ está considerado en [31] para condiciones iniciales de la forma:

$$(1.1) \quad u'_0(x) = v_0(x) = 0, \quad |x| > \text{constante.}$$

Teorema 3.1 (Proposición 2.3 de [43]). *Supongamos que $m = 0$, $d \geq 1$ y que se satisfacen las condiciones (1.3), (1.4). Entonces*

1. *(Existencia, unicidad y continuidad de $Y(t)$) Para cada $Y_0 \in \mathcal{E}$ el problema de Cauchy (2.3) admite una solución única $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$.*
2. *La transformación $U(t) : Y_0 \mapsto Y(t)$ es continua en \mathcal{E} y en \mathcal{E}_F .*
3. *La energía del sistema de Lamb se conserva*

$$(1.2) \quad \mathcal{H}(Y(t)) = \mathcal{H}(u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = \text{const}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (u, v) \in \mathcal{E}.$$

en donde, \mathcal{H} se define como en (3.3).

4. *Se cumple la siguiente cota a priori*

$$(1.3) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|Y(t)\|_{\mathcal{E}} < \infty.$$

En lo que resta del capítulo nos dedicaremos a demostrar el Teorema anterior.

2. Existencia y unicidad de la solución

En esta parte probaremos el primer punto del Teorema 3.1. Es decir, demostraremos la existencia y unicidad de una solución $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ para cada estado inicial $Y_0 \in \mathcal{E}$ del sistema (1.1); en la subsección 2.7 probaremos la continuidad de la misma. Como mencionamos en la introducción estableceremos la unicidad de la solución $Y(t) = (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t)) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ suponiendo que tal solución existe. Al mismo tiempo, obtendremos un método para construir una solución. De esta forma estaremos probando también la existencia. En virtud del Teorema 2.47 tenemos

Teorema 3.2. *Para $u \in \mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$ las aseveraciones 1 y 2 son equivalentes*

$$1. \quad \ddot{u}(x, t) - u''(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Pi_- \cup \Pi_+.$$

2. *Existen $f_{\pm}, g_{\pm} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tales que la distribución u satisface la descomposición de D' Alembert*

$$(2.1) \quad u(x, t) = \begin{cases} f_+(x-t) + g_+(x+t), & x > 0, \\ f_-(x-t) + g_-(x+t), & x < 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. *Si $u(x, t)$ admite otra representación del tipo (2.1) con $\overline{f_{\pm}}, \overline{g_{\pm}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, entonces existen C_{\pm} tales que (3.64) se cumple.*

2.1. Análisis de las propiedades de las soluciones del problema de Lamb a partir de la existencia de su dinámica. Iniciamos mostrando que la continuidad de la solución $u(x, t)$ se sigue a partir de la continuidad de la dinámica de $Y(t)$ (suponiendo que tal dinámica existe).

Proposición 3.3. Si $Y(t) = (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t)) \in C(\mathbb{R}_t; \mathcal{E})$ entonces,

$$u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d).$$

Demostración Sea $(x, t) \in K_a := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a, |t| \leq a, a \in \mathbb{R}\}$. De la condición $Y(t) \in C(\mathbb{R}_t; \mathcal{E})$ y la Definición 1.3 se sigue que $u(0, t) \in C(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)$. Además $u'(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$ y la función $t \mapsto u'(\cdot, t)$ es continua como función que va de \mathbb{R}_t a $L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$. Sea $\epsilon > 0$, y x -fijo con $|x| \leq a$. Ya que $u'(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$ entonces $u \in H^1(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$. Por lo tanto podemos usar el Teorema 2.9 en la versión \mathbb{R}^d -dimensional (véase Observación 2.19). Este teorema y la desigualdad de Cauchy implican

$$\begin{aligned} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| &= \left| \int_0^x u'(\xi, t_1) d\xi - u(0, t_1) - \int_0^x u'(\xi, t_2) d\xi + u(0, t_2) \right| \\ &\leq |u(0, t_1) - u(0, t_2)| + \int_0^x |u'(\xi, t_1) - u'(\xi, t_2)| d\xi \\ (2.2) \quad &\leq |u(0, t_1) - u(0, t_2)| + \sqrt{x} \left[\int_0^x |u'(\xi, t_1) - u'(\xi, t_2)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ahora la continuidad de $u(0, t) : \mathbb{R}_t \rightarrow \mathcal{E}$ implica que existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $|t_1 - t_2| < \delta$ entonces

$$(2.3) \quad |u(0, t_1) - u(0, t_2)| \leq \frac{\epsilon}{4}$$

y

$$(2.4) \quad \left[\int_0^x |u'(\xi, t_1) - u'(\xi, t_2)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} = \|u'(\cdot, t_1) - u'(\cdot, t_2)\|_{L^2(0, x)} < \frac{\epsilon}{4\sqrt{a}}$$

Por lo tanto,

$$(2.5) \quad |u(x, t_1) - u(x, t_2)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |t_1 - t_2| < \delta, \quad |x| \leq a, \quad |t_{1,2}| \leq a.$$

Ahora, dado que $u'(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$ y la función $t \mapsto u'(\cdot, t)$ es continua por Definición 1.3, entonces existe una constante $C = C_a$ tal que

$$(2.6) \quad \|u'(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)} \leq C_a, \quad t \in [-a, a].$$

Luego, dado que $u'(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$ tenemos nuevamente por la fórmula de Newton-Leibniz generalizada (Teorema 2.9) y la desigualdad de Cauchy

$$(2.7) \quad \begin{aligned} |u(x, t_2) - u(y, t_2)| &= \left| \int_x^y u'(\xi, t_2) d\xi \right| \leq \sqrt{x-y} \|u'(\xi, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)} \\ &\leq C_a \sqrt{x-y} < \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

si $|x - y| < \frac{\epsilon^2}{(2C_a)^2}$, $|t_2| \leq a$.

Ahora sea $(x, t_1), (y, t_2) \in K_a$, con $|x - y| < \frac{\epsilon^2}{(2C_a)^2}$ y $|t_1 - t_2| < \delta(\epsilon)$. Entonces, por (2.5) y (2.7)

$$\begin{aligned} |u(x, t_1) - u(y, t_2)| &= |u(x, t_1) - u(x, t_2) + u(x, t_2) - u(y, t_2)| \\ &\leq |u(x, t_1) - u(x, t_2)| + |u(x, t_2) - u(y, t_2)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

El teorema está probado. ■

Observación 3.4. 1. En la demostración anterior, no usamos realmente que la función $\dot{u}(x, t)$ es continua en t con valores en $L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$, lo cual se sigue del hecho que $Y(t) \in C(\mathbb{R}_t; \mathcal{E})$. Sin embargo, la incluimos en la formulación de la Proposición 3.3 por comodidad.

Corolario 3.5. *Bajo las suposiciones de la Proposición 3.3 la siguiente función es continua*

$$(2.8) \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto u(\cdot, t) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$$

Ahora podemos decir que si $u(x, t)$ satisface el sistema de Lamb y la dinámica es continua, entonces las funciones f_{\pm}, g_{\pm} que aparecen en el desarrollo de D' Alembert (2.1) son continuas:

Corolario 3.6. *Si $u(x, t) \in \mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$ es la solución del problema de Lamb (1.1) y la dinámica $Y(t) \in C(\mathbb{R}_t; \mathcal{E})$, entonces las funciones f_{\pm}, g_{\pm} que están presentes en (2.1) son continuas.*

Demostración Se sigue directamente del Corolario 2.50, i). ■

El siguiente lema tiene un carácter técnico y se usará en la próxima subsección para el estudio de las funciones $\dot{u}(x, t)$ y $u'(x, t)$.

Lema 3.7. *Sea $v(\cdot, t) : \mathbb{R}_t \rightarrow L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$ continua. Entonces, $v(x, t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$.*

Demostración Sean $x_1 < x_2, t_1 < t_2$. La función $v(x, t) : \mathbb{R}_t \rightarrow L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$ es continua en $t \in \mathbb{R}$, por lo tanto la función $t \rightarrow \|v(x, t)\|_{L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}^d)}^2$ es continua en $t \in \mathbb{R}_t$. Luego $\|v(x, t)\|_{L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}^d)}^2$ es

integrable con respecto de $t \in [t_1, t_2]$, es decir,

$$\int_{t_1}^{t_2} \|v(x, t)\|_{L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}^d)}^2 dt < \infty,$$

lo cual implica que

$$(2.9) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} |v(x, t)|^2 dx \right) dt < \infty$$

Luego por teorema de Fubini [1, Teo. 1.49, pag. 18], $v(x, t) \in L^2([x_1, x_2] \times [t_1, t_2]; \mathbb{R}^d)$ ya que $\int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{t_1}^{t_2} |v(x, t)|^2 dt \right) dx < \infty$ por (2.9). Por lo tanto, $v \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$. ■

2.2. Disertación del problema de Cauchy. Estamos interesado en soluciones $u(x, t)$ del problema de Cauchy (1.1), (2.1) tales que

$$(2.10) \quad Y(t) = (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t)) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E}).$$

Vamos a precisar la **definición de los datos de Cauchy** (2.1) para soluciones $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$. La función $u(x, t)$ satisface la ecuación de D' Alembert (primera ecuación de 1.1). Por lo tanto, el Teorema 3.2 implica el desarrollo (2.1) para algunas funciones f_{\pm}, g_{\pm} . Fijemos estas funciones a partir de ahora. Luego como $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$, entonces $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$ por Proposición 3.3 y $f_{\pm}, g_{\pm} \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ por el Corolario 3.6. Por lo tanto podemos ahora sustituir $t = 0$ en el desarrollo (2.1) y obtener,

$$(2.11) \quad u_0(x) = u(x, 0) = \begin{cases} f_+(x) + g_+(x), & x > 0, \\ f_-(x) + g_-(x), & x < 0. \end{cases}$$

Derivando (2.1) con respecto a t y a x en el sentido de $\mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$ obtenemos

$$(2.12) \quad \dot{u}(x, t) = \begin{cases} -f'_+(x-t) + g'_+(x+t), & x > 0 \\ -f'_-(x-t) + g'_-(x+t), & x < 0 \end{cases} \Big|_{t \in \mathbb{R}},$$

$$(2.13) \quad u'(x, t) = \begin{cases} f'_+(x-t) + g'_+(x+t), & x > 0 \\ f'_-(x-t) + g'_-(x+t), & x < 0 \end{cases} \Big|_{t \in \mathbb{R}}.$$

Por definición del espacio \mathcal{E} (véase Definición 1.3) tenemos que las funciones $\dot{u}(\cdot, t), u'(\cdot, t) : \mathbb{R}_t \rightarrow L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$ son continuas, luego podemos aplicar el Lema 3.7 con $v = \dot{u}$ y $v = u'$ para obtener

$$(2.14) \quad \dot{u}(x, t), u'(x, t) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d).$$

Esto implica, por el Corolario 2.50, *ii*)

$$(2.15) \quad f'_{\pm}(\xi), g'_{\pm}(\eta) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d).$$

Notemos que las partes derechas en (2.12) y (2.13) admiten restricciones sobre las rectas $t = b$ y $x = a$ respectivamente en el siguiente sentido:

Definición 3.8. Sea $h(\xi) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_{\xi}; \mathbb{R}^d)$. Consideremos la función de dos variables $h(x - t)$. Definimos la restricción de $h(x - t)$ a la línea $t = b$ como la función $h(x - b)$.

Afirmamos que $h(x - b)$ realmente es una restricción en el sentido que $h(x - t) \xrightarrow{t \rightarrow b} h(x - b)$, en $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Esto se sigue de un teorema conocido (véase por ejemplo [16] pág. 255-257). Ahora dado que se cumple (2.15), podemos tomar las restricciones de $\dot{u}(x, t)$ a la línea $t = 0$ usando (2.12). Esto nos permite enunciar las siguientes definiciones.

Definición 3.9. Para $u(x, t) \in \mathcal{E}$ que satisface la primera ecuación de (1.1), colocamos

$$(2.16) \quad v_0(x) := \dot{u}(x, 0) = \begin{cases} -f'_+(x) + g'_+(x), & x > 0 \\ -f'_-(x) + g'_-(x), & x < 0, \end{cases}$$

con $\dot{u}(x, 0) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

Notemos que por Teorema 3.2 inciso 3, $v_0(x)$ no depende de la elección de f_{\pm}, g_{\pm} en (2.1). Análogamente la siguiente definición da sentido a la segunda ecuación del sistema de Lamb (1.1).

Definición 3.10. En la segunda ecuación de (1.1), definimos

$$(2.17) \quad u'(0_{\pm}, t) := f'_{\pm}(-t) + g'_{\pm}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nota 3.11. 1. Ahora podemos precisar el sentido de la segunda ecuación de (1.1). Precisamente la Definición 3.10 y (2.15) implican que

$$u'(0+, t), u'(0-, t) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d).$$

Esto nos permite entender a la segunda ecuación de (1.1) en el sentido de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)$ (y no puntualmente ver Observación 1.1).

2. En esta forma precisamos el sentido de los datos de Cauchy (2.1).

Cabe mencionar que no hay otra forma de definir (2.16) y (2.17) ya que las funciones $\dot{u}(x, t)$ y $u'(x, t)$ pertenecen a $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$ y en general, las restricciones a líneas en \mathbb{R}^2 no están bien definidas. Esto se debe a que una recta en \mathbb{R}^2 tiene medida cero y por definición $\dot{u}(x, t)$ y $u'(x, t)$ representan a clases de funciones que son iguales para casi todos los puntos $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, es decir, salvo un conjunto de

medida cero en \mathbb{R}^2 . Las definiciones 3.9 y 3.10 son posibles solo para los desarrollos de D' Alembert y del hecho que las partes derechas de (2.12) y (2.13) admiten restricciones a $t = b$ y $x = a$ como límites.

2.3. Unicidad y expresión de la solución del problema de Lamb abajo de las características. A continuación expresamos las funciones de la descomposición de D' Alembert en términos de los datos iniciales.

Lema 3.12. *Sea $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$. Si u es una solución del sistema acoplado (1.1) y satisface las condiciones iniciales (2.1), entonces existen $C_{\pm} \in \mathbb{R}$ tal que*

$$(2.18) \quad \begin{aligned} f_{\pm}(z) &= \frac{1}{2}u_0(z) - \frac{1}{2} \int_0^z v_0(\chi) d\chi + C_{\pm}, \quad \pm z > 0 \\ g_{\pm}(z) &= \frac{1}{2}u_0(z) + \frac{1}{2} \int_0^z v_0(\chi) d\chi - C_{\pm}, \quad \pm z > 0. \end{aligned}$$

Demostración (2.16) implica que existen constantes C_{\pm} tales que

$$(2.19) \quad \int_0^x v_0(\chi) d\chi = \begin{cases} -f_+(x) + g_+(x) + C_+, & x > 0 \\ -f_-(x) + g_-(x) + C_-, & x < 0. \end{cases}$$

Sumando (2.11) y (2.19) encontramos la segunda identidad de (2.18)

$$(2.20) \quad g_{\pm}(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^x v_0(\chi) d\chi - C_{\pm}, \quad \pm x > 0.$$

De manera semejante, restando (2.19) de (2.11) obtenemos la primera identidad de (2.18)

$$(2.21) \quad f_{\pm}(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x v_0(\chi) d\chi + C_{\pm}, \quad \pm x > 0.$$

■

Nota 3.13. A pesar de que $f_+(z) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, la primera fórmula de (2.18) se cumple únicamente para $z > 0$. Para $z < 0$ aún no hemos definido la forma de $f_+(z)$ (esto se definirá en la siguiente subsección). Comentarios similares se pueden hacer para g_+ , g_- y f_- .

Observación 3.14. 1. Vamos a cambiar las funciones f_{\pm}, g_{\pm} fijadas al inicio de la subsección por

$$(2.22) \quad \overline{f_{\pm}} = f_{\pm} - C_{\pm}, \quad \overline{g_{\pm}} = g_{\pm} + C_{\pm}.$$

Claro que el desarrollo (2.1) con estas funciones se sigue cumpliendo así como también las fórmulas (2.18). Por lo tanto, podemos asumir en lo sucesivo que

$$(2.23) \quad C_{\pm} = 0.$$

2. Notemos que a partir de la expresión (2.18), el hecho que $(u_0, v_0) \in \mathcal{E}$ y la definición de \mathcal{E} , tenemos que

$$(2.24) \quad f'_{\pm}(z), g'_{\pm}(z) \in L^2(\mathbb{R}_{\pm}; \mathbb{R}^d),$$

$$(2.25) \quad f_{\pm}(z), g_{\pm}(z) \in C(\overline{\mathbb{R}_{\pm}}; \mathbb{R}^d)$$

en donde, $\mathbb{R}_{\pm} \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid \pm x > 0\}$.

La solución del problema de Lamb es única bajo las características y se expresa por las fórmulas de D' Alembert que involucran a los datos iniciales:

Proposición 3.15. *La fórmula usual de D' Alembert es válida en la región $|x| \geq |t|$:*

$$(2.26) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x-t) + u_0(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(\chi) d\chi, \quad |x| \geq |t|.$$

Demostración De (2.18) (recordando que ahora $C_{\pm} = 0$) se siguen las ecuaciones:

$$(2.27) \quad \frac{1}{2}u_0(x-t) - \frac{1}{2} \int_0^{x-t} v_0(\chi) d\chi = \begin{cases} f_+(x-t), & x-t \geq 0; \\ f_-(x-t), & x-t \leq 0. \end{cases}$$

$$(2.28) \quad \frac{1}{2}u_0(x+t) + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} v_0(\chi) d\chi = \begin{cases} g_+(x+t), & x+t \geq 0; \\ g_-(x+t), & x+t \leq 0. \end{cases}$$

Luego, sumando se tiene

$$\frac{1}{2}[u_0(x-t) + u_0(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(\chi) d\chi = \begin{cases} f_+(x-t) + g_+(x+t), & x \geq |t|; \\ f_-(x-t) + g_-(x+t), & -x \geq |t|. \end{cases}$$

La fórmula de D' Alembert (2.26) se sigue de las ecuaciones anteriores y la descomposición (2.1). ■

Corolario 3.16. *La solución del problema de Lamb $u(x, t)$ por abajo de las caractrísticas es única y se expresa por las fórmulas de D' Alembert (2.26).* ■

En la siguiente subsección damos una expresión para la solución $u(x, t)$ en la región $|x| < |t|$.

2.4. Expresión de la solución del sistema de Lamb en la región $|x| < |t|$. La ecuación reducida. Mostraremos la unicidad de la solución $u(x, t)$ en la región $|x| < |t|$. Consideraremos el caso $t > 0$, para $t < 0$ se procede de manera similar. Para tal fin construimos una ecuación diferencial ordinaria no-lineal que nos permitirá efectuar la demostración de la unicidad en dicha región. Para construir la solución $u(x, t)$ en la región $|x| < t$ (para $t > 0$) usaremos la descomposición de D' Alembert (3.2). Notemos que para $x > 0$ la función $g_+(x+t)$ es conocida para $t > 0$ por (2.28), en cambio la función $f_+(x-t)$ es desconocida para $0 < x < t$. De manera similar la función $f_-(x-t)$ es conocida para $x < 0$ y $t > 0$ por (2.27), pero $g_-(x+t)$ es una función desconocida para $-t < x < 0$. Por lo tanto, tendremos que encontrar las funciones $f_+(z)$ para $z < 0$ y $g_-(z)$ para $z > 0$. Para hallar esas funciones desconocidas, deduciremos una ecuación diferencial ordinaria no-lineal para

$$(2.29) \quad y(t) := u(0, t).$$

Primero, las condiciones iniciales (2.1) implican que

$$(2.30) \quad y(0) = u_0(0),$$

ya que $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$ por Proposición 3.3. Luego introduciendo la función $y(t) = u(0, t)$, obtenemos que $y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ por continuidad de $u(x, t)$.

Lema 3.17. *Para cada solución $Y(t) = (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t)) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ del sistema (2.3) la función $y(t) := u(0, t)$ es una solución de las **ecuaciones reducidas** en $\mathcal{D}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$*

$$(2.31) \quad 0 = F(y(t)) - 2\dot{y}(t) + 2\dot{w}_{in}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(2.32) \quad 0 = F(y(t)) + 2\dot{y}(t) - 2\dot{w}_{out}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

en donde, la función $w_{in}(t)$ es la suma de las ondas incidentes (para t positivos) en el punto $x = 0$:

$$(2.33) \quad w_{in}(t) := g_+(t) + f_-(-t), \quad t \in \mathbb{R}$$

y $w_{out}(t)$ es la suma de las ondas reflejadas (para t negativos) en el punto $x = 0$:

$$(2.34) \quad w_{out}(t) := g_-(-t) + f_+(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Además, se cumple

$$(2.35) \quad \dot{w}_{in}(t) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d), \quad \dot{w}_{out}(t) \in L^2(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d).$$

Demostración Mostremos que la trayectoria $y(t)$ satisface la primera ecuación. La descomposición (2.1) y el hecho que $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$ implica

$$(2.36) \quad y(\tau) := u(0+, \tau) = u(0-, \tau) = f_+(-\tau) + g_+(\tau) = f_-(-\tau) + g_-(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Diferenciando en el sentido de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ obtenemos

$$(2.37) \quad y'(\tau) = -f'_+(\tau) + g'_+(\tau) = -f'_-(\tau) + g'_-(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Luego por (2.15) obtenemos que $y'(\tau) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Expresamos ahora las ondas reflejadas en términos de las ondas incidentes y de la trayectoria $y(t)$. Las igualdades (2.36) implican

$$(2.38) \quad f_+(-\tau) = y(\tau) - g_+(\tau), \quad g_-(\tau) = y(\tau) - f_-(-\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Esto implica

$$(2.39) \quad \left. \begin{aligned} f_+(x-t) &= y(t-x) - g_+(t-x), \\ g_-(x+t) &= y(t+x) - f_-(-t-x). \end{aligned} \right| x, t \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo f_+ y g_- de las ecuaciones anteriores en (2.1) obtenemos

$$(2.40) \quad u(x, t) = \begin{cases} y(t-x) - g_+(t-x) + g_+(x+t), & x > 0, \\ y(t+x) - f_-(-t-x) + f_-(x-t), & x < 0, \end{cases} \quad \left| t \in \mathbb{R}.$$

Derivando (2.38) en el sentido $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tenemos

$$f'_+(-t) = -y'(t) + g'_+(t), \quad g'_-(t) = y'(t) + f'_-(-t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Luego en virtud de la Definición 3.10 obtenemos

$$u'(0+, t) = -\dot{y}(t) + 2g'_+(t), \quad u'(0-, t) = \dot{y}(t) + 2f'_-(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Luego, sustituyendo las ecuaciones anteriores en la segunda ecuación del sistema (1.1), obtenemos

$$0 = F(y(t)) - 2\dot{y}(t) + 2(g'_+(t) - f'_-(-t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, la ecuación reducida (2.31) se sigue de la definición de w_{in} (2.33). Finalmente, (2.35) se obtiene de (2.33) y (2.24). Por último mostremos que $y(t)$ satisface la ecuación (2.32). Expresamos las ondas incidentes g_+ y f_- en términos de las ondas reflejadas y la trayectoria $y(t)$. De (2.36) tenemos

$$(2.41) \quad g_+(\tau) = y(\tau) - f_+(-\tau), \quad f_-(-\tau) = y(\tau) - g_-(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Esto implica

$$(2.42) \quad \left. \begin{aligned} g_+(x+t) &= y(x+t) - f_+(-x-t), \\ f_-(x-t) &= y(-x+t) - g_-(-x+t). \end{aligned} \right| x, t \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo g_+ y f_- de las ecuaciones anteriores en (2.1) obtenemos

$$(2.43) \quad u(x, t) = \begin{cases} y(x+t) + f_+(x-t) - f_+(-x-t), & x > 0, \\ y(-x+t) - g_-(-x+t) + g_-(x+t), & x < 0, \end{cases} \quad \left| t \in \mathbb{R}.$$

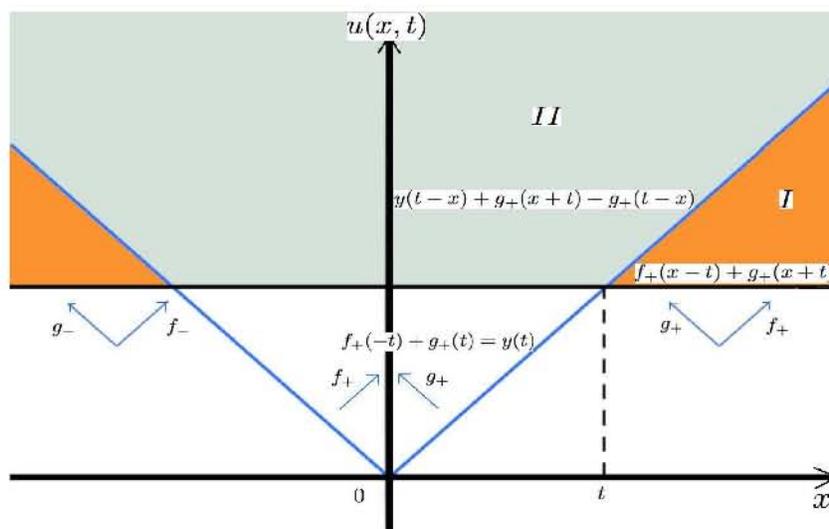


FIGURA 1. Solución del sistema de Lamb en: $x \geq t$ región I y $x < t$ región II, con $x \geq 0$ y $t > 0$.

Derivando (2.41) en el sentido de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tenemos

$$(2.44) \quad g'_+(\tau) = y'(\tau) + f'_+(-\tau), \quad -f'_-(-\tau) = y'(\tau) - g'_-(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Luego en virtud de la Definición 3.10 obtenemos

$$(2.45) \quad u'(0+, t) = y'(t) + 2f'_+(-t), \quad u'(0-, t) = -y'(t) + 2g'_-(t), \quad |t \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la segunda ecuación del sistema (1.1) obtenemos

$$(2.46) \quad 0 = F(y(t)) + 2\dot{y}(t) - 2(g'_-(t) - f'_+(-t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, la ecuación reducida (2.32) se sigue de la definición de w_{out} , (2.34). Finalmente, la segunda expresión de (2.35) se obtiene de la definición y de (2.24). ■

Corolario 3.18. *Si existe una solución $u(x, t)$ a el sistema de Lamb (1.1) en la región $0 \leq |x| < t$, $t > 0$, entonces $u(x, t)$ se expresa mediante (2.40) y es única.*

Demostración La representación (2.40) ya está probada. Mostremos la unicidad de la solución $u(x, t)$ en la región $0 < |x| < t$. La función $y(t)$ es única dado que es la solución al problema de Cauchy (2.31), (2.30). Las funciones $g_+(z)$ para $z > 0$ y $f_-(z)$ para $z > 0$ son únicas por las fórmulas (2.18). Por lo tanto, $u(x, t)$ para $0 < |x| < t$ es única por la representación (2.40). La unicidad de $u(x, t)$ en $0 \leq |x| < t$ se sigue de la continuidad de $u(x, t)$ (véase Proposición 3.3). La aseveración está probada. ■

De manera análoga se tiene un resultado cuando $t < 0$ y cuya demostración es similar.

Corolario 3.19. *Si existe la solución $u(x, t)$ a el sistema de Lamb (1.1) en la región $t < |x| \leq 0$, $t < 0$, entonces $u(x, t)$ se expresa mediante (2.43) y es única. ■*

2.5. Existencia y unicidad local de las soluciones de la ecuación reducida. Demostramos que existe una única solución local para el problema de Cauchy (2.31), (2.30), en una clase de las funciones continuas, usando el Principio de Contracción¹

Definición 3.22. Sea $I_\epsilon := [0, \epsilon)$. Definimos el espacio de funciones $L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$ por

$$(2.47) \quad L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d) := \left\{ y \in C(I_\epsilon; \mathbb{R}^d) \mid \dot{y} \in L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d) \right\},$$

con la norma

$$(2.48) \quad \|y\|_{L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} := \|\dot{y}\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} + |y(0)|$$

en donde, la derivada de y se entiende en el sentido de distribuciones.

Observación 3.23. $(L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)})$ es un espacio de Banach. (ver Apéndice D, Proposición D.3).

Lema 3.24. *Si $y \in L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$ con $y(0) = 0$, entonces*

$$(2.49) \quad \|y\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} \leq \epsilon \|y\|_{L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}.$$

Demostración Por la fórmula de Newton-Leibniz generalizada, la subaditividad de la integral de Lebesgue y la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$|y(t)| = \left| \int_0^t \dot{y}(s) ds \right| \leq \int_0^t |\dot{y}(s)| ds \leq \sqrt{t} \|\dot{y}\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}.$$

De aquí se tiene que

$$\|y\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}^2 \leq \int_0^\epsilon |y(t)|^2 dt \leq \epsilon^2 \|\dot{y}\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}^2$$

y por la definición de norma en $L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$ obtenemos (2.49). ■

1

Definición 3.20. Sea (X, ρ) espacio métrico. Si existe $L < 1$ tal que la función $f : X \rightarrow X$ satisface la desigualdad $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq L\rho(x_1, x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in X$, entonces decimos que f es una contracción en X .

Teorema 3.21. *Sea (X, d) es un espacio métrico completo. Si $f : X \rightarrow X$ es una contracción en X , entonces existe un único $a \in X$ tal que $f(a) = a$.*

Sea $\mathcal{M}_\epsilon := \{y \in L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d) \mid y(0) = u_0\}$. Es claro que \mathcal{M}_ϵ es cerrado en $L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$ (ver Apéndice D, Lema D.5 para su prueba), luego \mathcal{M}_ϵ es un espacio métrico completo con la métrica generada por la norma (2.48). Consideremos el operador integral $A : \mathcal{M}_\epsilon \rightarrow \mathcal{M}_\epsilon$ definido por

$$(2.50) \quad (Ay)(t) = \frac{1}{2} \int_0^t F(y(\tau)) d\tau + \int_0^t \dot{w}_{in}(\tau) d\tau + u_0, \quad t \in I_\epsilon,$$

en donde, F es como en (1.3) y $w_{in}(t)$ está definida por (2.33). Es fácil verificar que A realmente manda \mathcal{M}_ϵ en si mismo, ya que $(Ay)(0) = u_0$ y $\frac{d}{dt}[(Ay)(t)] \in L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$ por (2.35) y dado que $F \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. El objetivo consiste en demostrar que el operador integral A es una contracción, para una elección apropiada de algún $\epsilon_0 > 0$, en el espacio métrico \mathcal{M}_{ϵ_0} . De esta manera, estaremos demostrando que hay una sola $y(t) \in \mathcal{M}_\epsilon$ tal que

$$Ay(t) = y(t), \quad t \in I_\epsilon.$$

Ya que $y \in \mathcal{M}_{\epsilon_0}$, se tiene que $y(0) = u_0$, entonces encontrar un punto fijo del operador integral A , definido por (2.50), es equivalente a encontrar una solución única $y(t) \in \mathcal{M}_{\epsilon_0}$ del problema de Cauchy (2.31), (2.30).

Proposición 3.25 (Contracción de A). *Para todo $\epsilon > 0$, el operador integral $A : \mathcal{M}_\epsilon \rightarrow \mathcal{M}_\epsilon$, definido por (2.50), es Lipschitz-continuo con constante de Lipschitz $K(\epsilon) = \frac{K_1}{2}\epsilon$; es decir, existe una constante $K_1 \geq 0$ que no depende de $\epsilon \in [0, 1]$, tal que $\forall y^1, y^2 \in \mathcal{M}_\epsilon$, tenemos que*

$$(2.51) \quad \|Ay^1 - Ay^2\|_{L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} \leq K(\epsilon) \|y^1 - y^2\|_{L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}.$$

Demostración La ecuación (2.50), implica que

$$(2.52) \quad Ay^1(t) - Ay^2(t) = \frac{1}{2} \int_0^t [F(y^1(\tau)) - F(y^2(\tau))] d\tau.$$

Derivando con respecto a t (usando el Teorema de Newton-Leibniz, dado que $F \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ e $y \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathbb{R}^d)$) obtenemos

$$(2.53) \quad \frac{d}{dt} [Ay^1(t) - Ay^2(t)] = \frac{1}{2} [F(y^1(t)) - F(y^2(t))].$$

Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $F(y) = 0$ para $|y| \geq R > 2|u_0|$. En el caso cuando esto no se cumpla podemos multiplicar a $F(y)$ por la función

$$(2.54) \quad \chi(y) := \begin{cases} 1, & |y| \leq \frac{3}{2}R, \\ 0, & |y| \geq R \end{cases}$$

y entonces caemos en la situación anterior. Primero notemos que existe K_1 que no depende de $\epsilon \in [0, 1]$ tal que para cada $y^1(t), y^2(t) \in L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$,

$$(2.55) \quad |F(y^1(t)) - F(y^2(t))| \leq K_1 |y^1(t) - y^2(t)|, \quad t \in I_\epsilon.$$

En efecto, lo anterior se sigue del hecho que $F \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ y $\text{supp}(F)$ es compacto:

$$|F(y^1(t)) - F(y^2(t))| \leq \sup_{z \in \text{supp}(F)} |F'(z)| \cdot |y^1(t) - y^2(t)|$$

en donde, $F'(z)$ es la jacobiana de F y la norma de $F'(z)$ esta acotada en $\text{supp}(F)$. De aqui (2.55) se sigue para $K_1 = \sup_{z \in \text{supp}(F)} |F'(z)|$. Luego, de (2.53) y (2.55) obtenemos

$$(2.56) \quad \left| \frac{d}{dt} [Ay^1(t) - Ay^2(t)] \right| \leq \frac{K_1}{2} |y^1(t) - y^2(t)|, \quad t \in I_\epsilon, \quad \epsilon \in [0, 1].$$

Lo cual implica que

$$(2.57) \quad \left\| \frac{d}{dt} [Ay^1(t) - Ay^2(t)] \right\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{K_1^2}{4} \int_{I_\epsilon} [|y^1(t) - y^2(t)|]^2 dt.$$

o equivalentemente

$$(2.58) \quad \left\| \frac{d}{dt} [Ay^1(t) - Ay^2(t)] \right\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{K_1}{2} \|y^1(t) - y^2(t)\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}, \quad \epsilon \in [0, 1].$$

Definimos $\sigma(t) := y^1(t) - y^2(t)$, entonces $\sigma \in L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$; en particular $\dot{\sigma} \in L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d) \subset L^1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$. Luego, por el Teorema fundamental del Cálculo en el sentido de Lebesgue y tomando en cuenta que $\sigma(0) = 0$, ya que $y^1, y^2 \in \mathcal{M}_\epsilon$ tenemos

$$(2.59) \quad \sigma(t) = \int_0^t \dot{\sigma}(s) ds.$$

Es claro que $\sigma \in C(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$. Además, dado que $\sigma(0) = 0$, entonces por (2.49) se satisface la desigualdad

$$(2.60) \quad \|\sigma\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} \leq \epsilon \|\dot{\sigma}\|_{L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}.$$

Ahora a partir de la definición de σ (2.60) es equivalente a

$$(2.61) \quad \|y^1(t) - y^2(t)\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} \leq \epsilon \|y^1(t) - y^2(t)\|_{L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}, \quad \epsilon \in [0, 1].$$

Luego de (2.58), (2.61), (2.50) y (2.48) obtenemos (2.51). ■

Corolario 3.26 (Existencia y unicidad local). *Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que el problema de Cauchy (2.31), (2.30) admite una solución única $y(t) \in L_1^2(I_{\epsilon_0}; \mathbb{R}^d)$, para $t \in [0, \epsilon_0)$.*

Demostración Sea $K(\epsilon) = \frac{K_1}{2}\epsilon$. Si $\epsilon \rightarrow 0$, entonces $K(\epsilon) \rightarrow 0$. Luego, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $0 \leq K(\epsilon_0) < 1$. Entonces, para tal ϵ_0 el operador integral A definido por (2.50) es una contracción en \mathcal{M}_{ϵ_0} por Proposición 3.25. Luego, el Principio de Contracción implica que existe $y(t) \in \mathcal{M}_{\epsilon}$ tal que $Ay(t) = y(t)$, $t \in [0, \epsilon_0)$. Por lo tanto de (2.50) se sigue

$$(2.62) \quad y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t F(\varphi(\tau)) d\tau + \int_0^t \dot{w}_{in}(\tau) d\tau + u_0(0), \quad t \in [0, \epsilon_0),$$

Finalmente diferenciando a (2.62) con respecto a t obtenemos que $y(t) \in \mathcal{M}_{\epsilon_0}$ es solución del problema de Cauchy (2.31)-(2.30). ■

2.6. Existencia y continuidad de la solución global de la ecuación reducida. La meta principal de esta subsección consiste en demostrar la existencia global de la solución local del problema de Cauchy (2.31), (2.30) para $t > 0$ y mostrar que esta es única. Demostraremos también que esta solución es continua en $\overline{\mathbb{R}_+}$. La existencia de la extensión y continuidad de $y(t)$ para $t > 0$ se sigue de la **estimación a priori** que a continuación desarrollaremos y la cual es esencial en nuestro trabajo.

Estimación a priori

Proposición 3.27. *Las soluciones de la ecuación (2.31), con F que satisfaces (1.4) admite la estimación a priori*

$$(2.63) \quad \sup_{t>0} |y(t)| + \int_0^\infty |\dot{y}(t)|^2 dt \leq B < \infty,$$

en donde, B es acotado para $\|(u_0, v_0)\|_{\mathcal{E}}$ acotado.

Demostración Tomando el producto interior de $\dot{y}(t)$ con cada miembro de la ecuación (2.31) y usando la identidad $F(y) = -\nabla V(y)$ obtenemos

$$\left(\nabla V(y(t)) \right) \cdot \dot{y}(t) = -2\dot{y}(t) \cdot \dot{y}(t) + 2\dot{w}_{in}(t) \cdot \dot{y}(t), \quad t \geq 0.$$

Luego por Lema B.10 (Apéndice B) tenemos

$$\frac{d}{dt} V(y(t)) = -2|\dot{y}(t)|^2 + 2\dot{w}_{in}(t) \cdot \dot{y}(t), \quad \text{para casi todo } t \geq 0.$$

Ahora utilizando la desigualdad $-2a^2 + 2ab \leq -a^2 + b^2$, obtenemos

$$-2|\dot{y}(t)|^2 + 2\dot{w}_{in}(t) \cdot \dot{y}(t) \leq -|\dot{y}(t)|^2 + |\dot{w}_{in}(t)|^2.$$

Luego, para casi todo $t \geq 0$,

$$(2.64) \quad \frac{d}{dt} V(y(t)) \leq -|\dot{y}(t)|^2 + |\dot{w}_{in}(t)|^2.$$

Entonces, la fórmula de Newton-Leibniz clásica implica (dado que $V \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$)

$$(2.65) \quad V(y(t)) + \int_0^t |\dot{y}(s)|^2 ds \leq V(y(0)) + \int_0^t |\dot{w}_{in}(s)|^2 ds,$$

para todo $t \geq 0$.

Ahora dado que $\dot{w}_{in}(t) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ por el Lema 3.17, entonces existe $B_1 \geq 0$ tal que

$$\int_0^\infty |\dot{w}_{in}(s)|^2 ds \leq B_1.$$

Notemos que B_1 es acotada si $\|(u_0, v_0)\|_{\mathcal{E}}$ es acotada ya que \dot{w}_{in} se expresa por medio de u_0 y v_0 mediante las fórmulas (2.20) y (2.21).

Luego, para todo $t \geq 0$,

$$(2.66) \quad V(y(t)) + \int_0^\infty |\dot{y}(s)|^2 ds \leq B_2,$$

en donde, $B_2 = V(y(0)) + B_1$, la cual es acotada ya que B_1 lo es siempre que $\|(u_0, v_0)\|_{\mathcal{E}}$ es acotado. La desigualdad (2.66) implica que $V(y(t)) \leq B_2$ para todo $t \geq 0$. Por otro lado, $V(y) \rightarrow +\infty$ cuando $|y| \rightarrow \infty$, por (1.3). Entonces, existe $B_3 \geq 0$ tal que

$$(2.67) \quad \sup_{t>0} |y(t)| \leq B_3.$$

Finalmente, (2.66) y (2.67) implican la estimación a priori (2.63). Además B_3 es acotado si $\|(u_0, v_0)\|_{\mathcal{E}}$ es acotado ya que B_2 tiene esta propiedad. ■

El Corolario 3.26 implica la existencia local de solución a el problema de Cauchy (2.31), (2.30). En el siguiente corolario demostraremos, usando la estimación a priori (2.63) la existencia global de tal solución.

Corolario 3.28 (Existencia global). *La solución local $y : [0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$, obtenida por el Principio de Contracción, para problema de Cauchy (2.31), (2.30) puede ser extendida al semieje $\overline{\mathbb{R}}_+$ y tal extensión $y(t)$ es continua en $\overline{\mathbb{R}}_+$:*

$$(2.68) \quad y(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R}^d).$$

Demostración La estimación a priori (2.63) implica $|y(t)| \leq B < \infty$ para casi todo $t > 0$, lo cual muestra la existencia de la solución global para casi todo $t > 0$ por argumentos estándares (con ciertas modificaciones) de la teoría de ecuaciones diferenciales (ver por ejemplo [6, pág. 102]). La inclusión (2.68) se sigue también de la estimación a priori (2.63). ■

Corolario 3.29. *i) La estimación a priori (2.63), las identidades (2.38) y (2.41) implican por (2.24)*

$$(2.69) \quad f'_+(\tau) \in L^2(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d), \quad g'_-(\tau) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d), \quad \tau > 0,$$

$$(2.70) \quad g'_+(\tau) \in L^2(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d), \quad f'_-(\tau) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d), \quad \tau < 0.$$

De (2.69), (2.70) y (2.24) se sigue que

$$(2.71) \quad f'_-(\tau), f'_+(\tau), g'_-(\tau), g'_+(\tau) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d).$$

ii) (2.69) y (2.70) implican

$$(2.72) \quad f_+(\tau) \in C(\overline{\mathbb{R}_-}; \mathbb{R}^d), \quad g_-(\tau) \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathbb{R}^d),$$

$$(2.73) \quad f_-(\tau) \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathbb{R}^d), \quad g_+(\tau) \in C(\overline{\mathbb{R}_-}; \mathbb{R}^d).$$

iii)

$$(2.74) \quad f_-(\tau), f_+(\tau), g_-(\tau), g_+(\tau) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$$

Demostración (de iii) Probemos que $f_+(\tau), g_-(\tau) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. La continuidad de f_+, g_- (2.25), (2.18) y (2.23) implican que

$$(2.75) \quad f_-(0-) = f_+(0+) = g_-(0-) = g_+(0+) = \frac{u_0(0)}{2}.$$

Por lo tanto, (2.68), (2.38), (2.30) y (2.25) nos dan que

$$(2.76) \quad \begin{cases} f_+(0-) = y(0) - g_+(0+) = \frac{u_0(0)}{2}, \\ g_-(0+) = y(0) - f_-(0-) = \frac{u_0(0)}{2}. \end{cases}$$

De aquí tenemos

$$(2.77) \quad f_+(0-) = f_+(0+), \quad \text{y} \quad g_-(0-) = g_-(0+).$$

Ahora (2.73) y (2.25) implican $f_+(\tau), g_-(\tau) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

Similarmente (2.68), (2.41), (2.30) y (2.25) implican

$$(2.78) \quad \begin{cases} f_-(0+) = y(0) - g_-(0-) = \frac{u_0(0)}{2}, \\ g_+(0-) = y(0) - f_+(0+) = \frac{u_0(0)}{2}. \end{cases}$$

luego tenemos que

$$(2.79) \quad f_-(0+) = f_-(0-), \quad \text{y} \quad g_+(0-) = g_+(0+).$$

Finalmente (2.73) y (2.25) implican $f_-(\tau), g_+(\tau) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. ■

2.7. Continuidad de la dinámica $Y(t)$ del sistema de Lamb. A continuación demostraremos la continuidad de la solución $Y(t) = (u(x, t), \dot{u}(x, t)) \in \mathcal{E}$ que es lo que resta para terminar la prueba del punto 1 del Teorema 3.1. Para tal fin usaremos los resultados de la secciones previas. Probaremos que la dinámica del sistema de Lamb $Y(t) \in C(\mathbb{R}_t; \mathcal{E})$. Sea

$$(2.80) \quad R_t := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq t \geq 0\}.$$

Demostración del Teorema 3.1, 1 (Continuidad de $Y(t)$). Probaremos la existencia de una solución $Y(t) = (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \in \mathcal{E}$ del problema de Cauchy (2.3) para $t \geq 0$. El caso $t \leq 0$ se muestra de forma similar. En otras palabras demostraremos que existe una solución $(u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \in \mathcal{E}, \forall t \in \mathbb{R}$ que satisface el sistema de Lamb (1.1) y las condiciones iniciales (2.1). El desarrollo de la prueba será en varios pasos:

Paso 1. Definimos $u(x, t)$ en la región $|x| \geq t$ mediante la fórmula de D'Alembert (2.26). Demostremos que $u(x, t) \in C(R_t; \mathbb{R}^d)$, $u'(x, t), \dot{u}(x, t) \in L^2(R_t; \mathbb{R}^d)$. En efecto, $u(x, t) \in C(R_t; \mathbb{R}^d)$ para $t \geq 0$, dado que $u_0(z) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ y $v_0(z) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ (ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{E}$). Además, (2.26) implica

$$(2.81) \quad \begin{aligned} u'(x, t) &= \frac{1}{2}[u'_0(x-t) + u'_0(x+t)] + \frac{1}{2}[v_0(x+t) - v_0(x-t)], \\ \dot{u}(x, t) &= \frac{1}{2}[u'_0(x+t) - u'_0(x-t)] + \frac{1}{2}[v_0(x+t) + v_0(x-t)] \end{aligned} \quad \left| \quad |x| \geq t. \right.$$

de donde se ve que

$$(2.82) \quad u'(x, t), v(x, t) \in L^2(R_t; \mathbb{R}^d), \quad t \geq 0$$

ya que $u'_0(z), v_0(z) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, pues (u_0, v_0) son elementos de \mathcal{E} .

Paso 2. Definimos $u(x, t)$ en la región $|x| < t$, para $t > 0$. Primero, resolviendo la ecuación reducida (2.31) con la condición inicial (2.30) obtenemos, por el Corolario 3.28 la única solución $y(t)$ que cumple (2.68). Ahora definimos $u(x, t)$ por (2.40) en el sentido de distribuciones para $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, en donde las funciones g_+ y f_- se expresan mediante las fórmulas (2.18) para $\pm z > 0$ y $y(t)$ es la solución del problema de Cauchy (2.31), (2.30). Demostremos que $u(x, t) \in C(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)$ y $u'(x, t), \dot{u}(x, t) \in L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)$ para $t > 0$.

1) $u(x, t) \in C(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)$, $t > 0$. Esto se sigue de (2.40), la continuidad de $y(t)$ (véase Corolario 3.28) y la continuidad de f_{\pm}, g_{\pm} , (véase (2.25)).

2) La ecuación (2.40) implica para $t > 0$

$$(2.83) \quad u'(x, t) = \begin{cases} -y'(t-x) + g'_+(t-x) + g'_+(x+t), & x > 0, \\ y'(t+x) + f'_-(-t-x) + f'_-(x-t), & x < 0, \end{cases}$$

y

$$(2.84) \quad \dot{u}(x, t) = \begin{cases} \dot{y}(t-x) - g'_+(t-x) + g'_+(x+t), & x > 0, \\ \dot{y}(t+x) + f'_-(-t-x) - f'_-(x-t), & x < 0, \end{cases}$$

de donde observamos que $u'(x, t), \dot{u}(x, t) \in L^2(\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < t\}; \mathbb{R}^d)$ $t > 0$, ya que $\dot{y} \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ y $g'_+, f'_- \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ por la estimación a priori (2.63) y (2.71).

Paso 3. Sea $t > 0$ y mostremos la continuidad de $u(x, t)$ en: 1) $x = t$ para $x \geq 0$, y 2) $x = -t$ si $x \leq 0$.

1) Por la representación (2.40) y la descomposición de D' Alembert (2.26), tenemos

$$(2.85) \quad u(t-, t) = u(t+, t) = y(0) - g_+(0) + g_+(2t), \quad x \geq 0, \quad t > 0,$$

de aquí vemos que $u(t-, t)$ es continua por (2.68) y (2.74).

2) La descomposición de D' Alembert (2.26) y la representación (2.40) implica

$$(2.86) \quad u(-t-, t) = u(-t+, t) = \frac{u_0(0)}{2} + \frac{u_0(-2t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{-2t}^0 v_0(\chi) d\chi, \quad x \leq 0, \quad t > 0,$$

la cual también es continua.

Por lo tanto, tomando en cuenta que $u(x, t) \in C(\{|x| \leq t\}; \mathbb{R}^d)$ (por *Paso 2* y *Paso 3*) y $u(x, t) \in C(\{|x| \geq t\}; \mathbb{R}^d)$ (por *Paso 1*) obtenemos

$$(2.87) \quad u(x, t) \in C(\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq t, \quad t \geq 0\}; \mathbb{R}^d).$$

De esta forma los *Pasos 2, 3* implican que $(u(x, t), \dot{u}(x, t)) \in \mathcal{E}$ para todo $t > 0$.

Paso 4. A continuación probemos que la función $u(x, t)$ satisface el sistema de Lamb (1.1) y las condiciones iniciales (2.1). Las aseveraciones 1. y 2. del Teorema 3.2 muestran que $u(x, t)$ satisface la ecuación 1 de (1.1) para $x \neq 0, t \in \mathbb{R}$. Probemos que $u(x, t)$ satisface la segunda ecuación del sistema de Lamb. La expresión (2.40) implica para $t > 0$

$$(2.88) \quad u'(0+, t) = -\dot{y}(t) + 2g'_+(t), \quad u'(0-, t) = \dot{y}(t) + 2f'_-(-t).$$

Luego, sustituyendo las ecuaciones anteriores en la segunda ecuación del sistema (1.1), obtenemos

$$F(y(t)) - 2\dot{y}(t) + 2(g'_+(t) - f'_-(-t)), \quad t > 0.$$

Ahora en virtud de la ecuación reducida (2.31), la definición de w_{in} (2.33) y (2.68) obtenemos la igualdad en la segunda ecuación del sistema de Lamb.

Finalmente la descomposición de D' Alembert (2.26) fija las condiciones (2.1).

Paso 5. Demostremos que $Y(t) \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathcal{E})$. Por la Definición 1.3 de norma en \mathcal{E}

$$(2.89) \quad \begin{aligned} \|Y(t_1) - Y(t_2)\|_{\mathcal{E}} &= |u(0, t_1) - u(0, t_2)| + \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &= |y(t_1) - y(t_2)| + \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Por (2.68) existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$(2.90) \quad |y(t_1) - y(t_2)| < \frac{\epsilon}{6}, \quad \text{si } |t_1 - t_2| < \delta_1$$

Ahora examinemos los últimos términos.

Caso 1: por abajo de las características. Por monotonía de la integral de Lebesgue y usando (2.81) tenemos

$$\begin{aligned} \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} &\leq \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &\leq \left\| \frac{1}{2} [u'_0(x - t_1) - u'_0(x - t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [u'_0(x + t_1) - u'_0(x + t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \left\| \frac{1}{2} [v_0(x + t_1) - v_0(x + t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [v_0(x - t_1) - v_0(x - t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

en donde R_t es como en (2.80). Sea $\Delta t := t_2 - t_1$. Haciendo un cambio de variable (en el sentido de Lebesgue): $y = x - t_1$ y usando la continuidad de las traslaciones en L^2 (véase por ejemplo [16] pág. 255-257) tenemos para la última desigualdad que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2} [u'_0(y) - u'_0(y - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} &+ \left\| \frac{1}{2} [u'_0(y) - u'_0(y + \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &+ \left\| \frac{1}{2} [v_0(y) - v_0(y + \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [v_0(y) - v_0(y - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} < \frac{\epsilon}{6}, \end{aligned}$$

si $|\Delta t| < \delta_2$, ya que $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Esto implica que

$$(2.91) \quad \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{6}, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta_2.$$

Finalmente para el último sumando de (2.89) tenemos, de (2.81)

$$\begin{aligned} \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} &\leq \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &\leq \left\| \frac{1}{2} [u'_0(x - t_1) - u'_0(x - t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [u'_0(x + t_1) - u'_0(x + t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \left\| \frac{1}{2} [v_0(x + t_1) - v_0(x + t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [v_0(x - t_1) - v_0(x - t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Ahora usando los mismos argumentos que en el sumando anterior tenemos que existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$(2.92) \quad \left\| \frac{1}{2}[u'_0(y) - u'_0(y - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[u'_0(y) - u'_0(y + \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ + \left\| \frac{1}{2}[v_0(y) - v_0(y + \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[v_0(y) - v_0(y - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} < \frac{\epsilon}{6},$$

si $|\Delta t| < \delta_3$, ya que $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Esto implica que

$$(2.93) \quad \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{6}, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta_3.$$

Ahora de (2.90), (2.91) y (2.93) tenemos

$$(2.94) \quad |u(0, t_1) - u(0, t_2)| + \|(u(x, t_1) - u(x, t_2))'\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ + \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{si } |\Delta t| < \bar{\delta}_1,$$

en donde, $\bar{\delta}_1 := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

Caso 2: en la región $|x| < |t|$. La ecuación (2.83) para $x > 0, t > 0$, las fórmulas (2.18) y la monotonía de la integral implican

$$\|(u(x, t_1) - u(x, t_2))'\|_{L^2((0,t); \mathbb{R}^d)} \leq \|(u(x, t_1) - u(x, t_2))'\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ \leq \|\dot{y}(t_1 - x) - \dot{y}(t_2 - x)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[u'_0(t_1 - x) - u'_0(t_2 - x)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ + \left\| \frac{1}{2}[u'_0(x + t_1) - u'_0(x + t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[v_0(t_1 - x) - v_0(t_2 - x)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ + \left\| \frac{1}{2}[v_0(x + t_1) - v_0(x + t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)}$$

Sea $\Delta t := t_1 - t_2$. Haciendo los cambios de variable (en el sentido de Lebesgue): $\zeta_1 = t_1 - x$, $\zeta_2 = x + t_1$ y usando la continuidad de las traslaciones en L^2 (véase por ejemplo [16] pág. 255-257) tenemos, para la última desigualdad, que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|\dot{y}(\zeta_1) - \dot{y}(\zeta_1 - \Delta t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[u'_0(\zeta_1) - u'_0(\zeta_1 - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ + \left\| \frac{1}{2}[u'_0(\zeta_2) - u'_0(\zeta_2 - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[v_0(\zeta_1) - v_0(\zeta_1 - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ + \left\| \frac{1}{2}[v_0(\zeta_2) - v_0(\zeta_2 - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{8}$$

si $|\Delta t| < \delta_1$, ya que $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ y $\dot{y} \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ por (2.63). Por lo tanto

$$(2.95) \quad \|(u(x, t_1) - u(x, t_2))'\|_{L^2((0,t); \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{8}, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta_1$$

De manera análoga, usando (2.83) para $x < 0$, $t > 0$ y los argumentos anteriores tenemos que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$(2.96) \quad \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2((-t, 0); \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{8}, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta_2$$

Por lo tanto (2.95) y (2.96) implican

$$(2.97) \quad \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{4}, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2).$$

Usando (2.84), obtenemos de manera análoga que existe $\delta_4 > 0$ tal que

$$(2.98) \quad \left\| \dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2) \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{4}, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta_4.$$

Ahora (2.97) y (2.98) implican

$$(2.99) \quad |u(0, t_1) - u(0, t_2)| + \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2)) \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \\ + \left\| \dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2) \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } |\Delta t| < \overline{\delta}_2,$$

en donde, $\overline{\delta}_2 = \min(\delta_1, \delta_3, \delta_4)$ Por lo tanto, de la definición de norma en \mathcal{E} y de (2.94) y (2.99) tenemos

$$\|Y(t_1) - Y(t_2)\|_{\mathcal{E}} \leq \epsilon, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta = \min(\overline{\delta}_1, \overline{\delta}_2).$$

El primer punto del Teorema 3.1 está probado. ■

3. Continuidad del flujo $U(t)$ del sistema de Lamb

En esta parte demostraremos el punto 2 del Teorema 3.1. La prueba usa las construcciones de las secciones previas. Probaremos un resultado que establece que las soluciones de la ecuación (2.31) dependen continuamente de los datos iniciales (2.1).

Lema 3.30. *Consideremos el problema de Cauchy (2.3) con los datos iniciales $Y_0^i = (u_0^i, v_0^i) \in \mathcal{E}$, $i = 1, 2$. Sean $y^1(t), y^2(t)$ dos soluciones correspondientes de la ecuación reducida (2.31) con las condiciones iniciales*

$$(3.1) \quad y^1(0) = u_0^1(0), \quad y^2(0) = u_0^2(0)$$

Entonces, para cualquier $T > 0$ existen $C_T > 0$, $C_T^0 > 0$ tal que

$$(3.2) \quad \max_{t \in [0, T]} |y^1(t) - y^2(t)| \leq C_T \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}},$$

$$(3.3) \quad \left\| \dot{y}^1(t) - \dot{y}^2(t) \right\|_{L^2([0, T]; \mathbb{R}^d)} \leq C_T^0 \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}}.$$

Además C_T y C_T^0 son acotadas si $\|Y_0^i\|_{\mathcal{E}}$, $i = 1, 2$ es acotado.

Demostración Sean $y^1(t), y^2(t)$ soluciones de (2.31) que satisfacen (3.1) respectivamente. Supongamos que $(u_0^i, v_0^i) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$, $i = 1, 2$, en donde \mathcal{B} es un conjunto acotado. Esto implica que $u_0^1(0), u_0^2(0) \in \mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^d$ en donde \mathcal{B}_0 es acotado por la Definición 1.3 de \mathcal{E} . Luego $y^1(t), y^2(t) \in \mathcal{B}_1 \subset \mathbb{R}^d$ para $t > 0$ con \mathcal{B}_1 acotado por la cota a priori (2.63), Proposición 3.27. Entonces como $F \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ por (1.3), tenemos

$$(3.4) \quad \left| \frac{d}{dt} (y^1(t) - y^2(t)) \right| = \frac{1}{2} |F(y^1(t)) - F(y^2(t))| \leq C_1 |y^1(t) - y^2(t)|, \quad t \in [0, T],$$

en donde, $C_1 > 0$ es acotada ya que $y^1(t), y^2(t)$ están contenidas en el conjunto acotado \mathcal{B}_1 para $t \in [0, T]$. Esta desigualdad implica la estimación

$$|y^1(t) - y^2(t)| \leq C_1 \int_0^t |y^1(\tau) - y^2(\tau)| d\tau + |y^1(0) - y^2(0)|, \quad t \in [0, T].$$

Ahora usando la desigualdad de Gronwall [25, pág. 3] (con $g(\tau) = |y^1(\tau) - y^2(\tau)|$, $K = |y^1(0) - y^2(0)|$ y $L = C_1$) obtenemos

$$|y^1(t) - y^2(t)| \leq |y^1(0) - y^2(0)| e^{C_1 t}, \quad t \in [0, T].$$

Tomando el máximo sobre el intervalo $[0, T]$ (ya que $y^1, y^2 \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathbb{R}^d)$ por (2.29) y Proposición 3.3) obtenemos

$$(3.5) \quad \max_{t \in [0, T]} |y^1(t) - y^2(t)| \leq C_T |y^1(0) - y^2(0)|,$$

en donde, $C_T = e^{C_1 T}$ es acotada ya que C_1 es acotada. Además, por (3.1) $|y^1(0) - y^2(0)| = |u_0^1(0) - u_0^2(0)| \leq \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}}$. Entonces, (3.5) implica (3.2).

Ahora mostremos la segunda estimación. Usando (3.4) y (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \|\dot{y}^1(t) - \dot{y}^2(t)\|_{L^2([0, T]; \mathbb{R}^d)}^2 &= \int_0^T |\dot{y}^1(t) - \dot{y}^2(t)|^2 dt \leq C_1^2 \int_0^T |y^1(t) - y^2(t)|^2 dt \\ &\leq C_1^2 \int_0^T C_T^2 \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}}^2 dt \\ &= C_1^2 C_T^2 T \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}}^2. \end{aligned}$$

Así hemos demostrado (3.3), en donde $C_T^0 = C_1^2 C_T^2 T$ es acotada ya que C_1 y C_T son acotadas. ■

Sea t fijo, $Y_0^1 = (u_0^1, v_0^1)$ e $Y_0^2 = (u_0^2, v_0^2)$. El siguiente resultado prueba el punto 2 del Teorema 3.1.

Teorema 3.31. *Para todo $t > 0$ existe $C_t > 0$ tal que*

$$|Y^1(t) - Y^2(t)| \leq C_t \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}},$$

es decir, $U(t)$ es continua en \mathcal{E} .

Demostración Por la Definición 1.3 de norma en \mathcal{E}

$$\begin{aligned} (3.6) \quad & \|Y^1(t) - Y^2(t)\|_{\mathcal{E}} \\ &= |u^1(0, t) - u^2(0, t)| + \|(u^1(x, t) - u^2(x, t))'\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \|\dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &= |y^1(t) - y^2(t)| + \|(u^1(x, t) - u^2(x, t))'\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \|\dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Ahora

$$(3.7) \quad |u^1(0, t) - u^2(0, t)| \leq C_t \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}}$$

por el Lema 3.30 y dado que $u^i(0, t) = y^i(t)$, $i = 1, 2$ (véase (2.29)). Resta examinar los últimos términos.

Caso 1: por abajo de las características. Por monotonía de la integral de Lebesgue, en donde R_t se define en (2.80) y usando (2.81) obtenemos

$$\begin{aligned} & \|(u^1(x, t) - u^2(x, t))'\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq \|(u^1(x, t) - u^2(x, t))'\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & \leq \left\| \frac{1}{2} [(u_0^1)'(x-t) - (u_0^2)'(x-t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [(u_0^1)'(x+t) - (u_0^2)'(x+t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & + \left\| \frac{1}{2} [v_0^1(x+t) - v_0^2(x+t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [v_0^1(x-t) - v_0^2(x-t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & = \|(u_0^1)' - (u_0^2)'\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \|v_0^1 - v_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \leq \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

ya que $\int |f(x \pm t)|^2 dx = \int |f(x)|^2 dx$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Esto implica que

$$(3.8) \quad \|(u^1(x, t) - u^2(x, t))'\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}}.$$

Finalmente para el último sumando de (3.6) tenemos, de (2.81)

$$\begin{aligned} & \|\dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t)\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq \|\dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & \leq \left\| \frac{1}{2} [(u_0^2)'(x-t) - (u_0^1)'(x-t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [(u_0^1)'(x+t) - (u_0^2)'(x+t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & + \left\| \frac{1}{2} [v_0^1(x+t) - v_0^2(x+t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [v_0^1(x-t) - v_0^2(x-t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & = \|(u_0^1)' - (u_0^2)'\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \|v_0^1 - v_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \leq \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

en donde hemos usado el cambio de variable para la integral de Lebesgue como en el anterior sumando. Luego obtenemos

$$(3.9) \quad \left\| \dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)} \leq \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.$$

Ahora (3.7), (3.8) y (3.9) implican

$$(3.10) \quad \left| u^1(0, t) - u^2(0, t) \right| + \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t)) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)} + \left\| \dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)} \\ \leq C_t \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.$$

Caso 2: en la región $|x| < |t|$. De (2.83) y usando las fórmulas (2.18) tenemos, cuando $x > 0$, por la monotonía de la integral, el cambio de variable en la integral de Lebesgue y por el Lema 3.30 (estimación (3.3)):

$$\begin{aligned} \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2((0, t); \mathbb{R}^d)} &\leq \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &\leq \left\| \dot{y}^2(t-x) - \dot{y}^1(t-x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [(u_0^1)'(t-x) - (u_0^2)'(t-x)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \left\| \frac{1}{2} [(u_0^1)'(x+t) - (u_0^2)'(x+t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [v_0^1(t-x) - v_0^2(t-x)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \left\| \frac{1}{2} [v_0^1(x+t) - v_0^2(x+t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &= \left\| \dot{y}^2 - \dot{y}^1 \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| (u_0^1)' - (u_0^2)' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| v_0^1 - v_0^2 \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &\leq C_t \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Similarmente, usando (2.83) para $x < 0$ obtenemos

$$\left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2((-t, 0); \mathbb{R}^d)} \leq C_t \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.$$

Luego

$$(3.11) \quad \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \leq C_t \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.$$

Usando (2.84), obtenemos de manera análoga

$$(3.12) \quad \left\| \dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t) \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \leq C_t \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.$$

Ahora (3.7), (3.11) y (3.12) implican

$$(3.13) \quad \left| u^1(0, t) - u^2(0, t) \right| + \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t)) \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t) \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \\ \leq C_t \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.$$

Por lo tanto, de la definición de norma en \mathcal{E} y de (3.10) y (3.13) tenemos

$$\left\| Y^1(t) - Y^2(t) \right\|_{\mathcal{E}} \leq C_t^0 \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.$$

El segundo punto del Teorema 3.1 está probado. La continuidad de $U(t) : Y_0 \mapsto Y(t)$ en \mathcal{E}_F se demuestra de manera similar. ■

4. Conservación de la energía del sistema de Lamb

El plan para demostrar la conservación de la energía en el sistema de Lamb es el siguiente: probaremos la ley de conservación de energía, punto 3 del Teorema 3.1 para datos iniciales suficientemente suaves y después usaremos argumentos de densidad en subespacios adecuados de \mathcal{E} junto con la continuidad de $\mathcal{H}(Y(t))$ (ver (3.3)) como función de $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ y la continuidad del flujo $U(t)$. Antes damos algunos resultados técnicos.

Definición 3.32. Sea \mathcal{F} el conjunto de las parejas $(u(x), v(x))$ tales que:

1. $u \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$, $v \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$ y
2. los límites $u(0\pm)$, $u'(0\pm)$ y $v(0\pm)$ existen.

Corolario 3.33. La Definición 3.32 implica que $u'(x \pm t), v(x \pm t) \in C^2(\{|x| \neq |t|\}; \mathbb{R}^d)$.

A continuación demostraremos una propiedad importante de las soluciones de las ecuaciones reducidas (2.31) y (2.32), para $t > 0$ y $t < 0$ respectivamente, suponiendo que los datos iniciales del problema de Cauchy para el sistema de Lamb pertenecen a el conjunto \mathcal{F} .

Lema 3.34. Sea $y(t)$ una solución de las ecuaciones reducidas (2.31) (2.32), para $t > 0$ y $t < 0$ respectivamente y supongamos que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$. Entonces, $y(t) \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$.

Demostración Sea $t > 0$. Las fórmulas (2.18) y la definición de $w_{in}(t)$ (2.33) implican

$$(4.1) \quad \dot{w}_{in}(t) = R(t), \quad t > 0,$$

en donde $R(t) := \frac{u'_0(t) - u'_0(-t)}{2} + \frac{v_0(t) + v_0(-t)}{2}$. Esto implica que $\dot{w}_{in}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, dado que $u'_0, v_0 \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$ (ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$). Además, por Proposición 3.3 y (2.29) tenemos que $y(t) \in C(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)$; luego como $F \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ (ver (1.3)), entonces $F(y(t)) \in C(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)$. Ahora usando la ecuación reducida (2.31) junto con la continuidad de $F(y(t))$ y $\dot{w}_{in}(t)$ en \mathbb{R}_+ obtenemos que $\dot{y}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$.

Sea $t < 0$. Las fórmulas (2.18) y la definición de $w_{out}(t)$ (2.34) implican

$$(4.2) \quad \dot{w}_{out}(t) = R(t), \quad t < 0.$$

Luego usando la ecuación reducida (2.32) y argumentando de manera análoga al caso $t > 0$ obtenemos que $\dot{y}(t) \in C(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d)$. Por lo tanto, $\dot{y}(t) \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$.

Mostremos que $\dot{y}(t) \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$. Usando (4.1) tenemos que $\dot{w}_{in}(t) = \dot{R}(t)$, $t > 0$, en donde $\dot{R}(t) = \frac{u_0''(t)+u_0''(-t)}{2} + \frac{v_0'(t)-v_0'(-t)}{2}$. De aquí vemos que $\dot{w}_{in}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, dado que $u_0'', v_0' \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$ (ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$). Además,

$$\frac{d}{dt}F(y(t)) = \nabla_y F(y(t)) \cdot \dot{y}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d),$$

ya que $y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ por Proposición 3.3 y (2.29) y $F(y) \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. Ahora derivando la ecuación reducida (2.31) con respecto a t junto con la continuidad de $\frac{d}{dt}F(y(t))$ y $\dot{w}_{in}(t)$ en \mathbb{R}_+ obtenemos que $\ddot{y}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$.

Finalmente, $\dot{w}_{out}(t) = \dot{R}(t)$, $t < 0$ en virtud (4.2), luego $\dot{w}_{out}(t) \in C(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$, dado que $u_0'', v_0' \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}^d)$ (ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$). Luego derivando la ecuación reducida (2.32) con respecto a t y usando la continuidad de $\frac{d}{dt}F(y(t))$ y $\dot{w}_{in}(t)$ en \mathbb{R}_- obtenemos que $\dot{y}(t) \in C(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$. Y por consiguiente $\dot{y}(t) \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}^d)$. El Lema está probado. ■

Corolario 3.35. $y(t \pm x) \in C^2(\{|x| \neq |t|\}; \mathbb{R}^d)$. ■

Notemos que en particular el Corolario anterior implica que $y(t \pm x) \in C^2(\{|x| < |t|\}; \mathbb{R}^d)$.

Lema 3.36. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del Lema 3.34. Entonces, existen los límites $\lim_{t \rightarrow \pm 0} \dot{y}(t)$.*

Demostración Consideremos el caso $t \rightarrow 0+$. La ecuación reducida (2.31) implica que $\lim_{t \rightarrow 0+} \dot{y}(t)$ existe si existen los límites de $F(y(t))$ y $\dot{w}_{in}(t)$ cuando $t \rightarrow 0+$. Como $\dot{w}_{in}(t) = R(t)$, entonces por la Definición 3.32 tenemos que $\lim_{t \rightarrow 0+} \dot{w}_{in}(t)$ existe. Además como $F \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ (ver condición (1.3)) e $y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ por (2.29) y por la Proposición 3.3, entonces $F(y(t)) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ luego $\lim_{t \rightarrow 0+} F(y(t))$ también existe. Por lo tanto se tiene la existencia de $\lim_{t \rightarrow 0+} \dot{y}(t)$. El caso cuando $t \rightarrow 0-$ se demuestra de manera análoga, usando la ecuación reducida (2.32). ■

Denotemos por \mathbb{R}_c^2 a el conjunto $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, x \neq \pm t\}$.

Teorema 3.37. *Sean $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$ y $(u(x, t), v(x, t)) = Y(t)$ con $Y(0) = Y_0$. Entonces*

i) $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$,

ii) $u'(x, t)$, $\dot{u}(x, t)$, $u''(x, t)$ y $\ddot{u}(x, t)$ existen, coinciden con las derivadas clásicas y son localmente acotadas en $x \in \mathbb{R}_c^2$.

iii) Para todo $t \in \mathbb{R}$ los límites laterales

$$(4.3) \quad a) \lim_{x \rightarrow 0\pm} v(x, t), \quad b) \lim_{x \rightarrow 0\pm} u'(x, t), \quad c) \lim_{x \rightarrow \pm t\pm 0} u'(x, t), \quad d) \lim_{x \rightarrow \pm t\pm 0} v(x, t)$$

existen.

Demostración i) se sigue por Proposición 3.3 ya que $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ por la Definición 1.3.

Probemos la afirmación *ii)*. De la representación de D' Alembert (2.26) se sigue que las primeras y segundas derivadas parciales de $u(x, t)$ con respecto a x y t existen en el sentido clásico y son localmente acotadas en $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |t|\}$ (ya que $u_0, v_0 \in \mathcal{F}$). De esta forma hemos demostrado *ii)* en $|x| > |t|$.

Demostremos la aseveración *ii)* en la región $|x| < |t|$. Usando la representación (2.40), para $t > 0$, y las expresiones (2.18) obtenemos

$$(4.4) \quad u'(x, t) = \begin{cases} -y'(t-x) + \frac{u'_0(t+x)+u'_0(t-x)}{2} + \frac{v_0(t+x)+v_0(t-x)}{2}, & 0 < x < t, \\ y'(t+x) + \frac{u'_0(-t+x)+u'_0(-t-x)}{2} - \frac{v_0(-t+x)+v_0(-t-x)}{2}, & -t < x < 0. \end{cases}$$

Luego por el Corolario 3.35 y dado que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$ obtenemos que $u'(x, t)$ existe y es localmente acotada en la región $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < t, x \neq 0\}$. Similarmente, usando la representación (2.43), para $t < 0$ y las expresiones (2.18) obtenemos

$$(4.5) \quad u'(x, t) = \begin{cases} y'(t+x) + \frac{u'_0(-t+x)+u'_0(-t-x)}{2} - \frac{v_0(-t+x)+v_0(-t-x)}{2}, & 0 < x < -t, \\ -y'(t-x) + \frac{u'_0(t-x)+u'_0(t+x)}{2} + \frac{v_0(t-x)+v_0(t+x)}{2}, & t < x < 0. \end{cases}$$

Luego por el Corolario 3.35 y dado que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$ obtenemos que $u'(x, t)$ existe y es localmente acotada en la región $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid -|x| > t, x \neq 0\}$. De esta manera hemos mostramos que $u'(x, t)$ existe y es localmente acotada en $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |t|, x \neq 0\}$. Análogamente se demuestra que $\dot{u}(x, t)$ existe y es localmente acotada en la misma región. Finalmente la existencia de las derivadas parciales de orden 2, con respecto a x , de $u(x, t)$ en $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |t|, x \neq 0\}$, se obtiene del Corolario 3.35, (4.4) y (4.5), dado que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$. Se razona similarmente para justificar que $\ddot{u}(x, t)$ existe y es localmente acotada en $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |t|, x \neq 0\}$.

Probemos la afirmación *a)* de *iii)*. Consideremos el primer límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x, t)$. La representación (2.40) para $u(x, t)$ y la fórmula para g_+ (ver 2da. expresión de (2.18)) implican para $0 < x < t$

$$(4.6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} v(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \dot{u}(x, t) \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\dot{y}(t-x) + \frac{1}{2} \left(-u'_0(t-x) - v_0(t-x) + u'_0(t+x) + v_0(t+x) \right) \right].$$

Ahora dado que $u'_0, v_0 \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$ ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$ tenemos para $0 < t$, que

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-u'_0(t-x) - v_0(t-x) + u'_0(t+x) + v_0(t+x) \right)$$

existe y por el Lema 3.34 obtenemos, de (4.6), la existencia del límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x, t)$ para $0 < t$.

Analicemos el caso: $t < 0$. A partir de la representación (2.43) y la fórmula para f_+ (ver 1ra. expresión de (2.18)) tenemos para $0 < x < -t$

$$(4.7) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} v(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \dot{u}(x, t) \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\dot{y}(t+x) + \frac{1}{2} \left(-u'_0(-t+x) + v_0(-t+x) + u'_0(-t-x) - v_0(-t-x) \right) \right].$$

Luego como $u'_0, v_0 \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$ ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$ obtenemos para $t < 0$ que

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-u'_0(-t+x) + v_0(-t+x) + u'_0(-t-x) - v_0(-t-x) \right)$$

existe y por el Lema 3.34 tenemos de (4.7) la existencia del límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x, t)$ para $t < 0$. De esta forma concluimos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x, t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

El límite lateral de $v(x, t)$ cuando $x \rightarrow 0^-$ se demuestra de manera similar, usando la expresión (2.40) de $u(x, t)$ para $x < 0$ y $0 < t$, y la fórmula (2.18) para f_- . Para $t < 0$ se usa la expresión (2.43) para $u(x, t)$ junto con la fórmula para g_- (ver fórmulas (2.18)), cuando $x < 0$ y $t < 0$. Finalmente analicemos el caso $t = 0$, es decir, $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} v(x, 0)$. La expresión (2.26) para $t = 0$ implica

$$v(x, 0) = \frac{1}{2} [-u'_0(x) + u'_0(x) + v_0(x) + v_0(x)], \quad x \in \mathbb{R}.$$

De aquí, por la condición 2 de la Definición 3.32 concluimos que existe $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} v(x, 0)$. El inciso a) de la afirmación *iii*) está probado.

Probemos el inciso *b*). Para ello analicemos el límite de $u'(x, t)$ cuando $x \rightarrow 0^\pm$. La expresión (4.4) para $t > 0$, el Lema 3.34 y la Definición 3.32 implican

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} u'(x, t) = \mp y'(t) \pm u'_0(\pm t) + v_0(\pm t).$$

Similarmente, la expresión (4.5) para $t < 0$ implica

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} u'(x, t) = \pm y'(t) + u'_0(\mp t) - v_0(\mp t).$$

De esta forma concluimos que existe $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} u'(x, t)$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Finalmente analicemos el $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} u'(x, 0)$. La expresión (2.26) para $t = 0$ implica

$$u'(x, 0) = \frac{1}{2} [u'_0(x) + u'_0(x) + v_0(x) - v_0(x)], \quad x \in \mathbb{R}.$$

De aquí, por la condición 2 de la Definición 3.32 concluimos que existe $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} u'(x, 0)$. El inciso *b*) de la afirmación *iii*) está probado.

Probemos el inciso *c*). Consideremos el caso $x \rightarrow t \pm 0$, el caso $x \rightarrow -t \pm 0$ se maneja similarmente. Mostremos la existencia de los límites $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} u'(x, t)$. Primero analizaremos dicho límite

cuando $x \rightarrow t + 0$. La descomposición de D' Alembert (2.26) implica para $|x| > |t|$, $\pm t > 0$

$$\lim_{x \rightarrow t \pm 0} u'(x, t) = \lim_{x \rightarrow t \pm 0} \frac{1}{2} [u'_0(x+t) + u'_0(x-t) + v_0(x+t) - v_0(x-t)],$$

ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$, entonces por la Definición 3.32 el último límite existe para $\pm t > 0$.

Ahora tratemos el $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} u'(x, t)$ si $\pm t < 0$. La representación (4.5) de $u'(x, t)$ para $|x| < |t|$ implica

$$\lim_{x \rightarrow t \pm 0} u'(x, t) = \lim_{x \rightarrow t \pm 0} \left[-\dot{y}(t-x) + \frac{1}{2} (u'_0(t-x) + v_0(t-x) + u'_0(t+x) + v_0(t+x)) \right], \quad \pm t < 0.$$

Luego por el Lema 3.36 y la Definición 3.32 el último límite existe para $\pm t < 0$.

Para $t = 0$ el límite $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} u'(x, t)$ también existe, en virtud del inciso *b*). Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} u'(x, t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$. El inciso *c*) de la afirmación *iii*) está probado.

Mostremos el inciso *d*) considerando el caso $t > 0$ la situación $t < 0$ se maneja de forma similar. Demostremos la existencia del límite $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} v(x, t)$. Razonando análogamente al inciso *c*) (el caso $x \rightarrow \pm t$, $\pm t > 0$), usando la descomposición de D' Alembert (2.26) y la Definición 3.32 obtenemos la existencia de

$$\lim_{x \rightarrow t \pm 0} v(x, t) = \lim_{x \rightarrow t \pm 0} \dot{u}(x, t) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow t \pm 0} [u'_0(x+t) - u'_0(x-t) + v_0(x+t) + v_0(x-t)], \quad \pm t > 0.$$

Ahora trataremos el límite $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} v(x, t)$ cuando $\pm t < 0$. Usando argumentos análogos al inciso *c*) (el caso $x \rightarrow \pm t$, $\pm t < 0$) obtenemos de la representación (2.43) para $t < x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow t \pm 0} v(x, t) = \lim_{x \rightarrow t \pm 0} \dot{u}(x, t) = \lim_{x \rightarrow t \pm 0} \left[\dot{y}(t-x) + \frac{1}{2} (-u'_0(t-x) - v_0(t-x) + u'_0(t+x) + v_0(t+x)) \right].$$

Luego el Lema 3.36 y la Definición 3.32 implican la existencia del límite anterior cuando $\pm t < 0$. Para $t = 0$ este mismo límite también existe, en virtud del inciso *a*). Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} v(x, t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$. El inciso *d*) de la afirmación *iii*) está probado. ■

Corolario 3.38. *Y(t) es invariante sobre \mathcal{F} ; es decir $Y(t) \in \mathcal{F}$ si $Y_0 \in \mathcal{F}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.* ■

Lema 3.39. *Sea $(u(x, t), v(x, t)) \in \mathcal{F}$, entonces*

$$(\dot{u} + u')|_{x=t+0} = (\dot{u} + u')|_{x=t-0}, \quad (\dot{u} - u')|_{x=-t-0} = (\dot{u} - u')|_{x=-t+0} \quad \forall t \neq 0.$$

Demostración Probemos la primera igualdad. De la representación de D' Alembert (2.26) para $u(x, t)$, las fórmulas (2.18) y la Definición 3.32 obtenemos

$$(\dot{u} + u')|_{x=t+0} = \left[u'_0(x+t) + v_0(x+t) \right]_{x=t+0} = u'(2t) + v(2t), \quad \forall t \neq 0.$$

Ahora usando la representación (2.40), las fórmulas (2.18) y la Definición 3.32 obtenemos

$$(\dot{u} + u')|_{x=t-0} = \left[u'_0(x+t) + v_0(x+t) \right]_{x=t-0} = u'(2t) + v(2t), \quad \forall t \neq 0.$$

La primera identidad está probada en virtud de las expresiones anteriores. La otra identidad se muestra de manera similar. ■

Lema 3.40. *Sea $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) := \{\varphi \in C^\infty \mid \varphi'(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$. El conjunto $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}$ es denso en $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$.*

Demostración Sea $(u, v) \in \mathcal{E}$ y $\epsilon > 0$. Es conocido que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ (véase [58, pág. 80]). Luego existen $\psi, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tales que

$$(4.8) \quad \|v - \psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \|u' - \phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Definimos $\varphi(x) := \int_0^x \phi(\xi) d\xi + u(0)$, claramente $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\begin{aligned} \|(u - \varphi, v - \psi)\|_{\mathcal{E}} &= \|u' - \varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})} + |u(0) - \varphi(0)| + \|v - \psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|u' - \phi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|v - \psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \epsilon \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Definimos el conjunto

$$(4.9) \quad \mathcal{K} := \{(u, v) \in \mathcal{E} \mid \exists C_{\pm}, R \in \mathbb{R} \text{ tal que } u(x) = C_{\pm}, v(x) = 0, \text{ para } \pm x > R\}.$$

Lema 3.41. *El conjunto $\mathcal{F} \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ es denso en $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$.*

Demostración Obviamente $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{K}$. Es fácil ver que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$, ya que $u(x), v(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Entonces, $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$. Luego el Lema 3.40 implica que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R})$ es denso en $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$, por lo tanto, $\mathcal{F} \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ es denso en $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$. ■

Lema 3.42. *La trayectoria $U(t) : Y_0 \mapsto Y(t)$ es invariante en $\mathcal{F} \cap \mathcal{K}$, es decir, $Y(t) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ si $Y_0 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$.*

Demostración Sea $(u_0, v_0) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$, entonces la fórmula de D'Alembert (2.26) implica que $(u(x, t), v(x, t)) \in \mathcal{K}$. Además, $(u(x, t), v(x, t)) \in \mathcal{F}$ por Corolario 3.38. ■

En seguida mostraremos el punto 3 del Teorema 3.1.

Demostración del Teorema 3.1, 3 (Conservación de la energía del sistema de Lamb). Para $t \geq 0$, escribimos

$$(4.10) \quad (\mathcal{H}(Y_0))(t)(u_0, v_0) = \mathcal{H}(Y(t))(u_0, v_0) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [|\dot{u}(x, t)|^2 + |u'(x, t)|^2] dx + V(u(0, t)),$$

en donde, $(u(x, t), v(x, t)) = Y(t)$ y $Y(0) = Y_0$. Notemos que $(\mathcal{H}(Y_0))(t) : (u_0, v_0) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua de \mathcal{E} en \mathbb{R} , ya que $u'_0(x, 0), v_0(x, 0) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ y la transformación $U(t)$ del Teorema 3.1 punto 2, es continua de $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. Además,

$$(4.11) \quad (\mathcal{H}(Y_0))(t) \in C(\mathbb{R}),$$

ya que $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ por Teorema 3.1, punto 1.

Demostremos que $(\mathcal{H}(Y_0))(t) = \text{const}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ con $Y_0 = (u_0, v_0) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$. Consideremos la integral “energética” de la cuerda del sistema de Lamb

$$(4.12) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [|\dot{u}(x, t)|^2 + |u'(x, t)|^2] dx.$$

Notemos que de (4.10) se sigue que $(\mathcal{H}(Y_0))(t) = E(t) + V(u(0, t))$.

Dividimos la integral energética en

$$(4.13) \quad E(t) = \int_{-\infty}^{-t} \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] dx + \int_{-t}^0 \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] dx \\ + \int_0^t \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] dx + \int_t^{+\infty} \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] dx.$$

Demostremos que existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $(\mathcal{H}(Y_0))(t) := E(t) + V(u(0, t)) = H$ para todo $t \geq 0$ y para todo $(u_0, v_0) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$.

Diferenciando con respecto de $t > 0$ los primeros dos sumandos de (4.13) y usando la fórmula de Leibniz para derivar integrales que dependen de un parámetro obtenemos

$$(4.14) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{-t} \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] dx + \int_{-t}^0 \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] dx \right] \\ = \int_{-\infty}^{-t} [\dot{u}(x, t)u''(x, t) + u'(x, t)\dot{u}'(x, t)] dx + \int_{-t}^0 [\dot{u}(x, t)u''(x, t) + u'(x, t)\dot{u}'(x, t)] dx \\ - \frac{1}{2} [(\dot{u}(-t-0, t))^2 + (u'(-t-0, t))^2] + \frac{1}{2} [(\dot{u}(-t+0, t))^2 + (u'(-t+0, t))^2].$$

Usando la primera ecuación de (1.1) (la cual es cierta para $u(x, t)$ en el sentido clásico para $x \neq 0$ y $x \neq \pm t$, por Teorema 3.37 ii)) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{-t} [\dot{u}(x, t)u''(x, t) + u'(x, t)\dot{u}'(x, t)] dx + \int_{-t}^0 [\dot{u}(x, t)u''(x, t) + u'(x, t)\dot{u}'(x, t)] dx \\ = \int_{-\infty}^{-t} [\dot{u}(x, t)\ddot{u}(x, t) + u'(x, t)\dot{u}'(x, t)] dx + \int_{-t}^0 [\dot{u}(x, t)\ddot{u}(x, t) + u'(x, t)\dot{u}'(x, t)] dx.$$

Ahora una integración por partes en esta última igualdad nos da que el lado izquierdo de (4.14) es igual a

$$(4.15) \quad \left[u'(x, t) \dot{u}(x, t) \right]_{-\infty}^{-t-0} + \left[u'(x, t) \dot{u}(x, t) \right]_{-t+0}^{0-} - \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(-t-0, t))^2 + (u'(-t-0, t))^2 \right] \\ + \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(-t+0, t))^2 + (u'(-t+0, t))^2 \right].$$

En forma análoga, para los últimos dos sumandos de (4.13) obtenemos

$$(4.16) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \left[\frac{[-\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[-u'(x, t)]^2}{2} \right] dx + \int_t^{+\infty} \left[\frac{[-\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[-u'(x, t)]^2}{2} \right] dx \right] \\ = \left[u'(x, t) \dot{u}(x, t) \right]_{0+}^{t-0} + \left[u'(x, t) \dot{u}(x, t) \right]_{t+0}^{+\infty} - \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(t+0, t))^2 + (u'(t+0, t))^2 \right] \\ + \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(t-0, t))^2 + (u'(t-0, t))^2 \right].$$

De esta manera

$$(4.17) \quad \dot{E}(t) = \left[u'(x, t) \dot{u}(x, t) \right]_{-\infty}^{-t-0} + \left[u'(x, t) \dot{u}(x, t) \right]_{-t+0}^{0-} + \left[u'(x, t) \dot{u}(x, t) \right]_{0+}^{t-0} \\ + \left[u'(x, t) \dot{u}(x, t) \right]_{t+0}^{+\infty} - \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(-t-0, t))^2 + (u'(-t-0, t))^2 \right] \\ + \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(-t+0, t))^2 + (u'(-t+0, t))^2 \right] - \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(t+0, t))^2 + (u'(t+0, t))^2 \right] \\ + \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(t-0, t))^2 + (u'(t-0, t))^2 \right]$$

Definiendo

$$(4.18) \quad \Gamma_{\pm}(x, t) := \pm \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] + u'(x, t) \dot{u}(x, t) = \pm \frac{1}{2} |\dot{u}(x, t) \pm u'(x, t)|^2, \quad t > 0,$$

obtenemos por (4.17)

$$(4.19) \quad \dot{E}(t) = \Gamma_{-}(x, t) \Big|_{x=-t+0}^{x=-t-0} + \dot{u}(x, t) u'(x, t) \Big|_{x=0+}^{x=0-} + \Gamma_{+}(x, t) \Big|_{x=t+0}^{x=t-0},$$

ya que $u(x, t), v(x, t) \in \mathcal{K}$. Luego se sigue del Lema 3.39

$$(4.20) \quad \Gamma_{\pm}(x, t) \Big|_{x=\pm t+0}^{x=\pm t-0} = 0, \quad t > 0,$$

dado que $(u(x, t), v(x, t)) \in \mathcal{F}$.

Ahora la continuidad de $u(x, t)$ (véase Teorema 3.37 *i*) y la expresión (2.29) implican que $\dot{u}(0+, t) = \dot{u}(0-, t) = \dot{u}(0, t) = \dot{y}(t)$. De esta forma la segunda ecuación de (1.1) (la cual se satisface para $u(x, t)$ en el sentido clásico, para $x \neq 0$ y $x \neq \pm t$ (véase Teorema 3.37 *ii*)) y el carácter conservativo de

F (véase (1.3)) implican

$$\begin{aligned}
 \dot{u}(x, t)u'(x, t) \Big|_{x=0+}^{x=0-} &= \dot{u}(0-, t)u'(0-, t) - \dot{u}(0+, t)u'(0+, t) \\
 &= -\dot{u}(0, t)[u'(0+, t) - u'(0-, t)] \\
 (4.21) \qquad \qquad \qquad &= -\dot{y}\nabla V(y) = -\frac{d}{dt}V(y(t)), \quad t > 0.
 \end{aligned}$$

Luego se sigue de (4.19)-(4.21) que

$$(\dot{\mathcal{H}}(Y_0))(t) = \dot{E}(t) + \frac{d}{dt}V(y(t)) = 0, \quad t > 0.$$

Esto implica que existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $(\mathcal{H}(Y_0))(t) = H$, $t > 0$, $Y_0 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$. Ahora usando la continuidad de $(\mathcal{H}(Y_0))(t)$ con respecto de $t \in \mathbb{R}$ obtenemos que $(\mathcal{H}(Y_0))(0+) = H$. Por lo tanto,

$$(\mathcal{H}(Y_0))(t) = H, \quad t \geq 0.$$

El caso $t \leq 0$ se maneja de forma análoga. De esta manera demostramos que $(\mathcal{H}(Y_0))(t) = \text{const}$, $t \in \mathbb{R}$, $Y_0 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$. Nos falta mostrar que esto mismo se cumple para $Y_0 \in \mathcal{E}$.

Recordemos que $\mathcal{H} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua por (3.3) y la definición de la topología de \mathcal{E} . Por lo tanto, para $(u_0, v_0) \in \mathcal{E}$, $\mathcal{H}(Y(t))(u_0, v_0) = \text{const}$ por el Lema 3.41, la continuidad de $U(t)$ (véase Teorema 3.37 ii) y la invarianza de $U(t)$ en $\mathcal{F} \cap \mathcal{K}$ (véase Lema 3.42).

El siguiente diagrama esquematiza el paso final de la prueba:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F} \cap \mathcal{K} & \xrightarrow{U(t)} & \mathcal{F} \cap \mathcal{K} & \xrightarrow{\mathcal{H}(t)} & \mathbb{R} \\
 & & \downarrow \cap\text{-denso} & \nearrow (\mathcal{H} \circ U)(t) & \\
 & & \mathcal{E} & &
 \end{array}$$

■

A continuación demostraremos la afirmación 4 del Teorema 3.1.

Demostración del Teorema 3.1, 4 (Estimación a priori del sistema de Lamb). Mostraremos la estimación a priori (1.3) para $t \geq 0$. Sea $Y(t) \in \mathcal{E}$, por la definición de norma en \mathcal{E}

$$(4.22) \qquad \|Y(t)\|_{\mathcal{E}} = \|u'(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + |u(0, t)| + \|v(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)}.$$

Tenemos dos casos: 1) $|x| \geq |t|$. Las fórmulas (2.81), la definición del espacio \mathcal{E} y un cambio de variable (en el sentido de Lebesgue) implican que existe $C_1 > 0$ tal que

$$(4.23) \qquad \|u'(x, t)\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} + \|v(x, t)\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq C_1, \quad t \geq 0,$$

en donde R_t está definido en (2.80).

2) $|x| < |t|$. Las fórmulas (2.83), (2.84) y (2.18), la definición del espacio \mathcal{E} , un cambio de variable (en el sentido de Lebesgue) y la cota a priori (2.63) implican que existe $C_2 > 0$ tal que

$$(4.24) \quad \|u'(x, t)\|_{L^2((-t, t); \mathbb{R}^d)} + \|v(x, t)\|_{L^2((-t, t); \mathbb{R}^d)} \leq C_2, \quad t \geq 0.$$

Ahora (4.23) y (4.24) implican que existe $C > 0$ tal que

$$(4.25) \quad \|u'(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \|v(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \leq C, \quad t \geq 0.$$

Nuevamente por (2.29) y la estimación a priori (2.63) obtenemos a partir de (4.22) la estimación (1.3) para $t \geq 0$. El caso $t \leq 0$ se demuestra de manera análoga, usando las representaciones adecuadas de $u(x, t)$ en $|x| \geq |t|$ y $|x| < |t|$, cuando $t < 0$. ■

Dispersión no lineal en el sistema de Lamb

En los artículos [27, 31, 29, 19, 43, 38, 37] el sistema de Lamb (1.1) es referido como el ejemplo más simple *no trivial y no lineal* de un sistema conservativo reversible en el tiempo (véase Observación 1.2 punto 2) que permite analizar diversas interrogantes. En esta tesis se construye la teoría de dispersión de dicho sistema cuando la masa m del oscilador es cero.

En el presente capítulo demostraremos que en el sistema de Lamb existen transiciones entre estados estacionarios de la forma (0.3), es decir, existe un atractor global para el sistema de Lamb. Establecemos el carácter de la convergencia de las soluciones del sistema; es decir, cuando $t \rightarrow \pm\infty$ cada solución decae a una suma de tres componentes: un **estado estacionario**, una **onda libre “saliente”**(o **“entrante”**), la cual es una solución de la ecuación de onda libre y **un resto** pequeño que tiende a cero con respecto a la norma energética global. De esta manera estamos probando que la conjetura sobre la estructura de los atractores de ecuaciones G -invariantes que tienen asociado un grupo de Lie de simetría G es cierta para el sistema de Lamb con masa cero y cuyo grupo es el grupo trivial $G = \{e\}$ (véase [35] para un panorama general de la conjetura).

Las ondas libres (“salientes” o “entrantes”) corresponden a estados asintóticos de dispersión los cuales se expresan en términos de los datos iniciales y una solución de la ecuación reducida (véase (2.31) si $t \geq 0$ o (2.32) si $t \leq 0$). Finalmente se escriben los operadores de onda y se obtienen condiciones necesarias sobre los estados asintóticos para la reconstrucción de la dinámica del sistema de Lamb tal que se siga cumpliendo el carácter de la convergencia de las soluciones. Estos resultados están publicados en [43].

1. Soluciones estacionarias del sistema de Lamb

A continuación determinaremos todas las soluciones estacionarias de energía finita del sistema de Lamb (1.1).

Definición 4.1. El conjunto \mathcal{S} de las soluciones estacionarias del sistema de Lamb (1.1) es el conjunto de trayectorias $Y(t) := (u(x, t), v(x, t)) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ que satisfacen (1.1) y no dependen de $t \in \mathbb{R}$.

Definimos para cada $c \in \mathbb{R}^d$ la función constante

$$(1.1) \quad s_c(x) = c, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Denotamos por Z a el conjunto de todos los ceros del campo F , es decir, $Z := \{z \in \mathbb{R}^d \mid F(z) = 0\}$. El siguiente teorema nos da la descripción de \mathcal{S} .

Teorema 1. El conjunto \mathcal{S} de todas las soluciones estacionarias (o estados) tiene la siguiente forma

$$(1.2) \quad \mathcal{S} = \{S_z = (s_z, 0) \mid z \in Z\}.$$

Demostración Es fácil ver que $S_z = (s_z(x), 0)$ es solución de (1.1) para $z \in Z$ y que $S_z \in \mathcal{E}$. Resta demostrar que el conjunto de todas las soluciones estacionarias del sistema de Lamb (1.1) tienen la forma de (1.2).

Sea $(u(x, t), v(x, t)) \in \mathcal{E}$ una solución que no depende del tiempo, entonces $u(x, t) \equiv u(x)$, y $(u(x), 0) \in \mathcal{E}$. Ahora la primera ecuación del sistema de Lamb (véase (1.1)) implica que $u''(x) = 0$, $x \neq 0$. Por lo tanto,

$$(1.3) \quad u(x) = a_{\pm}x + b_{\pm}, \quad u'(x) = a_{\pm}, \quad \pm x > 0.$$

Dado que $(u(x), 0) \in \mathcal{E}$ entonces $u'(x) \in L^2(\mathbb{R}_{\pm}; \mathbb{R}^d)$ (véase Definición 1.3). Por lo tanto, $a_{\pm} = 0$. Por otra parte usando la continuidad de $u(x)$ en cero (véase Definición 1.3) obtenemos que $b_+ = b_- = b$. Por consiguiente todas las soluciones estacionarias son las funciones constantes: $u(x) = b$.

Luego la segunda ecuación del sistema de Lamb (1.1) implica

$$F(b) = \mathbf{0}$$

entonces, $b \in Z$. Ahora como $v(x, t) = \dot{u}(x, t) = 0$, entonces $(u(x, t), v(x, t)) \in \mathcal{S}$. ■

Corolario 4.2. *Existe una biyección entre \mathcal{S} y Z .* ■

2. Resultados Principales

Definición 4.3. Diremos que el sistema (1.1) y el potencial $V(u)$ son “no degenerados” si el conjunto Z es un subconjunto discreto de \mathbb{R}^d .

La meta es establecer que \mathcal{S} es un atractor puntual del sistema (1.1) en la topología de \mathcal{E}_F y dar una expresión para la asintótica de las soluciones de energía finita cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Denotamos por $W(t)$ a el grupo que genera la dinámica de la ecuación de onda libre, es decir, cuando $F(u) \equiv 0$.

Atracción a el atractor global

Teorema 4.4. [43, Teorema 3.1] *Supongamos que se satisfacen cada una de las suposiciones del Teorema 3.1 (Capítulo 3) y sea $Y_0 \in \mathcal{E}$ un estado inicial. Entonces*

i) La solución $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ a el problema de Cauchy (2.3) converge a el conjunto \mathcal{S} con respecto a la familia de seminormas de energía local:

$$(2.1) \quad Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{\mathcal{E}_F} \mathcal{S}.$$

ii) Supongamos además, que Z es un subconjunto discreto en \mathbb{R}^d . Entonces, existen estados estacionarios límite $S_{\pm} \in \mathcal{S}$, los cuales dependen de la solución $Y(t)$, tales que

$$(2.2) \quad Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{\mathcal{E}_F} S_{\pm} = (s_{\pm}, 0).$$

A continuación hacemos algunos comentarios sobre el desarrollo del estudio de la atracción a estados estacionarios.

La atracción a estados estacionarios fue establecida inicialmente por Babin, Vishik, Fojas, Hale, Henry, Temam [7, 13, 21, 22, 56] y otros más, en la teoría de atractores de ecuaciones disipativas tales como Navier-Stokes, ecuaciones de reacción-difusión, ecuación de onda amortiguada, etc. En todos estos casos la atracción se cumple con respecto a la norma energética global, pero únicamente cuando $t \rightarrow +\infty$.

Para las ecuaciones con estructura hamiltoniana los primeros resultados sobre la atracción del tipo (2.1) y la asintótica de dispersión de la forma (2.4) con $S_{\pm} = 0$ se obtuvieron en teorías de dispersión lineal por Morawetz, Lax y Phillips, Vainberg [40, 45, 42, 57] y otros. Generalizaciones a teorías de dispersión no lineal fueron hechas por Segal, Strauss, Morawetz, Glassey, Klainerman, Hörmander [14, 20, 24, 28, 46, 47, 42, 51, 52] entre otros. Todos estos resultados se refieren a la convergencia de las soluciones a un atractor global, el cual consiste de un solo punto, que es precisamente la solución idénticamente cero; es decir, $\mathcal{S} = \{0\}$. La atracción a un atractor global no trivial $\mathcal{S} \neq \{0\}$ del tipo (2.1) fue establecida por: i) Komech [32, 31, 33] para ecuaciones 1-dimensionales del tipo Klein-Gordon para diferentes clases de términos no lineales espacialmente localizados; es decir, cuando $f(x, u) = 0$, $|x| > a$; y por ii) Komech, Spohn y Kunze [2] para un sistema no lineal compuesto de una ecuación de onda 3-dimensional acoplada a un partícula clásica.

Nosotros demostramos atracción a un atractor global no trivial para el sistema de Lamb con masa $m = 0$ y descubrimos el carácter de dicha atracción, lo cual es único en su clase.

Asintótica de dispersión

Para escribir y demostrar la siguiente parte del teorema principal introducimos nuevas condiciones que restringen a el conjunto de datos de Cauchy para el problema de Lamb. Tales condiciones nos permiten precisar el carácter de la convergencia (2.2).

Supongamos que la siguiente integral y los límites existen

$$(2.3) \quad \bar{v}_0 := \int_{\mathbb{R}} v_0(\chi) d\chi \quad u_0^- := \lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(x), \quad u_0^+ := \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x).$$

Definición 4.5. El símbolo \mathcal{E}_∞ denotará a el espacio de las parejas $(u, v) \in \mathcal{E}$ tales que existen la integral y los límites (2.3).

Teorema 4.6. [43, Teorema 3.1] *Supongamos que se satisfacen las suposiciones del Teorema 3.1, Z es subconjunto discreto de \mathbb{R}^d e $Y_0 \in \mathcal{E}_\infty$. Entonces se cumple la **asintótica de dispersión**:*

$$(2.4) \quad Y(t) = S_\pm + W(t)\Psi_\pm + r_\pm(t), \quad t \rightarrow \pm\infty,$$

para alguna **solución estacionaria** $S_\pm \in \mathcal{S}$, algún **estado asintótico de dispersión** $\Psi_\pm \in \mathcal{E}$ y en donde el término de error $r_\pm(t)$ es pequeño con respecto a la norma energética global:

$$(2.5) \quad \|r_\pm(t)\|_{\mathcal{E}} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Además se tiene que la **onda “libre” (“saliente” o “entrante”)** $W(t)\Psi_\pm$ converge a cero en la norma energética local:

$$(2.6) \quad \|W(t)\Psi_\pm\|_{\mathcal{E}_R} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0, \quad \forall R > 0.$$

Observación 4.7. 1) Es suficiente probar los Teoremas 4.4 y 4.6 para $t \rightarrow +\infty$ ya que el sistema de Lamb (1.1) es reversible con respecto a t (véase Observación 1.2, 2).

2) La convergencia “débil” (2.2) y (1.4), (3.3) implican por el Lema de Fatou

$$(2.7) \quad \mathcal{H}(S_\pm) \leq \mathcal{H}(Y(t)) \equiv \mathcal{H}(Y_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

3) El Teorema 4.4 i) y ii) se encuentra probado en [31] para $m \geq 0$ y $d = 1$ con las condiciones iniciales de la forma (1.1). Nosotros consideramos el caso $m = 0$, $d \geq 1$ y condiciones iniciales arbitrarias. Precisamos el comportamiento de la soluciones de energía finita del sistema de Lamb dando la expresión (2.4) para la asintótica (Teorema 4.6). Esto significa que no solamente demostramos que $Y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} (s_\pm, 0)$, sino que representamos la diferencia entre $Y(t)$ y $(s_\pm, 0)$ como

$$W(t)\Psi_\pm + r_\pm(t),$$

en donde, $r_{\pm}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{\|\cdot\|_{\mathcal{E}}} 0$ en la norma energética global $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ y la parte principal de $Y(t) - S_{\pm}$ es la **dinámica libre** del sistema de Lamb. En otras palabras demostramos que cada solución $Y(t)$ de energía finita de (2.3) es la suma de un **estado estacionario** y una **onda “saliente”**, cuando $t \rightarrow +\infty$. Los datos iniciales de dicha onda “saliente” se denominan **estados asintóticos de dispersión**.

- 4) La condición (1.4) describe a un “conjunto abierto” en la clase de funciones potenciales $V(u)$. En este sentido la atracción (2.1) se cumple para “casi todas” las ecuaciones de la forma (1.1).

El Teorema 4.6 abre un camino para construir una teoría de dispersión no lineal para el sistema de Lamb.

3. Demostración del Teorema 4.4: Convergencia a el atractor global

Relajación de la ecuación reducida

El Teorema 3.1, 1 nos provee de la existencia y unicidad de la solución $Y(t)$ a el problema de Cauchy (2.3). A continuación escribiremos un resultado sobre la ecuación reducida (2.31), que nos ayudará a demostrar el inciso *i*) del Teorema 4.4.

Lema 4.8. Supongamos que se satisfacen todas las condiciones del Teorema 4.4. Entonces,

i) Para cada solución $y(t)$, $t \in \overline{\mathbb{R}_+}$, de la ecuación reducida (2.31)

$$(3.1) \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} Z.$$

ii) Si Z es un subconjunto discreto de \mathbb{R}^d , entonces existe $z_{\pm} \in Z$ tal que

$$(3.2) \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} z_{+}.$$

Demostración Es suficiente probar *i*), ya que *ii*) se sigue directamente. Procederemos por contradicción. En virtud de la cota a priori (2.63), $y(t)$ es acotada, para $t \geq 0$, esto implica que existe una sucesión $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, y existe $\bar{y} \in \mathbb{R}^d$ tal que $y(t_k) \xrightarrow[t_k \rightarrow \infty]{} \bar{y}$ y $\bar{F} := F(\bar{y}) \neq 0$, digamos $F(\bar{y}) > 0$. Ya que $t_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \infty$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $|t_{k+1} - t_k| > 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por Proposición 3.3 y (2.29) tenemos que $y(t) \in C(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)$; además como $F \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ (véase (1.3)), entonces $F(y(t)) \in C(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)$ y existe $\delta > 0$ tal que

$$(3.3) \quad |y(t) - \bar{y}| < \delta, \quad \text{implica que} \quad F(y(t)) \geq \frac{\bar{F}}{2}.$$

Por otra parte, también existe $K > 0$ tal que

$$(3.4) \quad |y(t_k) - \bar{y}| < \frac{\delta}{2}, \quad \forall k \geq K.$$

La cota a priori (2.63) y la desigualdad de Cauchy-Schwartz implican

$$(3.5) \quad |y(t_k) - y(t)| \leq \int_t^{t_k} |\dot{y}(s)| ds \leq B \sqrt{t_k - t} < \frac{\delta}{2},$$

si $|t_k - t| \leq \epsilon := \min\left(\frac{\delta^2}{4B^2}, 1\right)$.

Ahora (3.4) y (3.5) implican

$$(3.6) \quad \begin{aligned} |y(t) - \bar{y}| &\leq |y(t) - y(t_k)| + |y(t_k) - \bar{y}| \\ &< \delta, \quad \text{si } |t_k - t| \leq \epsilon, \quad k \geq K. \end{aligned}$$

Luego usando (3.3), obtenemos que

$$|F(y(t))| \geq \frac{\bar{F}}{2}, \quad |t_k - t| \leq \epsilon, \quad k \geq K.$$

Esto implica que $F(y(t)) \notin L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$. Por otro lado, la ecuación reducida (2.31) implica que $\frac{d}{dt}(y(t) - w_{in}(t)) = \frac{1}{2}F(y(t)) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, ya que $\frac{d}{dt}(y(t) - w_{in}(t)) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ en virtud de (2.35). Por lo tanto,

$$\lim_{t_k \rightarrow \infty} F(y(t_k)) = F(\bar{y}) = 0, \quad k > K.$$

Mostremos ahora que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(y(t), Z) = 0,$$

en donde, $\text{dist}(y(t), Z) := \inf_{z \in Z} |y(t) - z|$. Procedamos nuevamente por contradicción: supongamos que $\text{dist}(y(t_k), Z) \geq \epsilon$ para alguna sucesión $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Como $y(t)$ es acotada (por la cota a priori) entonces existe una subsucesión $\{t_{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ tal que

$$y(t_{k_l}) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} z \in Z,$$

esto significa que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|y(t_{k_l}) - z| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $l \geq N$, luego tomando el ínfimo sobre todos los $z \in Z$ obtenemos que $\text{dist}(y(t_{k_l}), Z) < \frac{\epsilon}{2}$ si $l \geq N$. La contradicción obtenida prueba la afirmación *i*). ■

Observación 4.9. En el caso $t \leq 0$, se puede establecer un lema similar al Lema 4.8. La demostración es análoga.

Convergencia a el atractor global

Definición 4.10 (cf. [7, 21, 56]). Un subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}_F$ es un **atractor puntual global minimal** del grupo dinámico $W(t)$ si

i) Para cualquier $Y \in \mathcal{E}_F$ se cumple la convergencia

$$(3.7) \quad W(t)Y \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{\mathcal{E}_F} \mathcal{A}.$$

ii) El subconjunto es invariante, es decir, $W(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $t \in \mathbb{R}$.

iii) \mathcal{A} es el conjunto minimal con las propiedades i) y ii).

Ahora probaremos el Teorema 4.4 i). Demostraremos esto cuando $t \rightarrow +\infty$. El caso $t \rightarrow -\infty$ se analiza de manera similar.

Lema 4.11. *Supongamos que se satisfacen todas las condiciones del Teorema 4.4. Entonces,*

$$Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{E}_F} \mathcal{S}.$$

Demostración Es suficiente construir $z(t) \in Z$ para $t \geq 0$ tal que

$$(3.8) \quad \|Y(t) - S_{z(t)}\|_{\mathcal{E}_R} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0, \quad R > 0.$$

La convergencia (3.2) del Lema 4.8 significa que existe $z(t) \in Z$, $t \geq 0$, tal que

$$(3.9) \quad |y(t) - z(t)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Ahora por la definición de norma en \mathcal{E}_F (véase Definición 1.3, 2.) y (1.2) obtenemos

$$(3.10) \quad \|Y(t) - S_{z(t)}\|_{\mathcal{E}_R} = \|u'(x, t)\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)} + |y(t) - z(t)| + \|v(x, t)\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)}, \quad R > 0.$$

Las fórmulas (2.83) y (2.84) para $x > 0$ implican que el primer y tercer sumando del lado derecho de (3.10) son mayorizados de la siguiente forma:

$$(3.11) \quad \|u'(x, t)\|_{L^2((0, R); \mathbb{R}^d)} + \|v(x, t)\|_{L^2((0, R); \mathbb{R}^d)} \\ \leq C(\|y'(t-x)\|_{L^2((0, R); \mathbb{R}^d)} + \|g'_+(t-x)\|_{L^2((0, R); \mathbb{R}^d)} + \|g'_+(t+x)\|_{L^2((0, R); \mathbb{R}^d)}) \\ \leq C(\|y'(t-x)\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)} + \|g'_+(t-x)\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)} + \|g'_+(t+x)\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)}), \quad R > 0,$$

De manera similar por las fórmulas (2.83) y (2.84) para $x < 0$ tenemos que el primer y tercer sumando del lado derecho de (3.10) son mayorizados por

$$(3.12) \quad \|u'(x, t)\|_{L^2((-R, 0); \mathbb{R}^d)} + \|v(x, t)\|_{L^2((-R, 0); \mathbb{R}^d)} \\ \leq C(\|y'(t+x)\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)} + \|f'_-(-t-x)\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)} + \|f'_-(-t+x)\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)}), \quad R > 0.$$

Ahora usando un cambio de variable en el sentido de Lebesgue, y dado que $y'(\tau) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ por (2.63) y $f'_-(\tau), g'_+(\tau) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ por (2.71) tenemos

$$(3.13) \quad \left. \begin{aligned} \|y'(t \pm x)\|_{L^2((-R,R); \mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{-R}^R |y'(t \pm x)|^2 dx = \int_{t \mp R}^{t \pm R} |y'(\tau)|^2 d\tau \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \\ \|g'_+(t \pm x)\|_{L^2((-R,R); \mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{-R}^R |g'_+(t \pm x)|^2 dx = \int_{t \mp R}^{t \pm R} |g'_+(\tau)|^2 d\tau \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \\ \|f'_-(-t \pm x)\|_{L^2((-R,R); \mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{-R}^R |f'_-(-t \pm x)|^2 dx = \int_{-t \mp R}^{-t \pm R} |f'_-(\tau)|^2 d\tau \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned} \right\}$$

Por lo tanto, (3.9) y (3.11), (3.12), usando (3.13) completan la demostración. \blacksquare

Ahora el Teorema 4.4 *i*) está probado. La parte *ii*) del mismo teorema se sigue fácilmente ya que \mathcal{S} es isomorfo a Z , por Corolario 4.2, Z es un subconjunto discreto de \mathbb{R}^d y la trayectoria $y(t)$ es acotada en virtud de la cota (2.63). \blacksquare

4. Demostración del Teorema 4.6: Asintótica de dispersión

En esta parte demostraremos la asintótica de dispersión. Notemos que la atracción (2.1) o equivalentemente (3.2) implica la convergencia (2.2) dado que el conjunto \mathcal{S} , homeomorfo a Z , es discreto.

Resta probar la asintótica de dispersión (2.4). Construimos la onda “saliente”:

$$(4.1) \quad W(t)\Psi_+ = (w_{\text{out}}(x, t), \dot{w}_{\text{out}}(x, t)), \quad t > 0,$$

en donde,

$$(4.2) \quad w_{\text{out}}(x, t) := C_0 + f_+(x - t) + g_-(x + t),$$

para alguna constante C_0 que será elegida más adelante y f_+, g_- se definen como en (2.18). Claramente $w_{\text{out}}(x, t)$ es una solución de energía finita (ya que $f'_+, g'_- \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, por (2.71)) de la ecuación de D' Alembert libre: $\square w_{\text{out}}(x, t) = 0$.

Demostración del Teorema 4.6. Sea $t > 0$, $Y_0 \in \mathcal{E}_\infty$. Ya que Z es discreto $\mathcal{S} = \{(z_+, 0) \mid z_+ \in Z\}$, usando (4.1) reescribimos la asintótica (2.4) como

$$(4.3) \quad (u(x, t), \dot{u}(x, t)) = (z_+, 0) + (w_{\text{out}}(x, t), \dot{w}_{\text{out}}(x, t)) + r_+(t), \quad t > 0,$$

en donde,

$$(4.4) \quad z_+ := \lim_{t \rightarrow \infty} y(t).$$

Mostremos que $\|r_+\|_{\mathcal{E}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Por la definición de norma en \mathcal{E} , usando (4.3) tenemos que demostrar

$$(4.5) \quad \|r_+\|_{\mathcal{E}} = |y(t) - z_+ - w_{\text{out}}(0, t)| + \left\| u'(\cdot, t) - w'_{\text{out}}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ + \left\| \dot{u}(\cdot, t) - \dot{w}_{\text{out}}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Paso 1. Iniciemos con el primer término del lado derecho de (4.5). Dado que $u(0, t) = y(t)$ por (2.29) e $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} z_+$, es suficiente demostrar que

$$(4.6) \quad w_{\text{out}}(0, t) = C_0 + f_+(-t) + g_-(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Primero (2.3) y (2.18) implican que

$$(4.7) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f_+(-t) = \frac{u_0^-}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{-\infty} v_0(\chi) d\chi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g_+(t) = \frac{u_0^+}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} v_0(\chi) d\chi.$$

Segundo por (2.38) y (4.4) tenemos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_+(-t) = z_+ - \lim_{t \rightarrow +\infty} g_+(t); \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g_-(t) = z_+ - \lim_{t \rightarrow +\infty} f_+(-t).$$

Sustituyendo en (4.7), obtenemos

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} f_+(-t) = z_+ - \frac{u_0^+}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} v_0(\chi) d\chi, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} g_-(t) = z_+ - \frac{u_0^-}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{-\infty} v_0(\chi) d\chi. \end{cases}$$

Luego, se cumple (4.6) si elegimos

$$(4.8) \quad C_0 := \frac{u_0^+}{2} + \frac{u_0^-}{2} + \frac{\bar{v}_0}{2} - 2z_+,$$

en donde, \bar{v}_0 es como en (2.3).

Paso 2. Ahora consideremos el segundo término del lado derecho de (4.5). Demostremos que

$$(4.9) \quad \left\| u'(\cdot, t) - w'_{\text{out}}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Usando (4.2) y la representación de D' Alembert (2.1) para $x > 0$, obtenemos

$$u'(x, t) - w'_{\text{out}}(x, t) = g'_+(x+t) - g'_-(x+t), \quad x > 0.$$

Finalmente, (2.71) implica

$$\begin{aligned} \|g'_+(x+t) - g'_-(x+t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)}^2 &\leq C \int_0^\infty [|g'_+(x+t)|^2 + |g'_-(x+t)|^2] dx \\ &= C \int_t^\infty [|g'_+(z)|^2 + |g'_-(z)|^2] dz \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|u'(\cdot, t) - w'_{\text{out}}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

En el caso $x < 0$ obtenemos por (4.2) y (2.1)

$$u'(x, t) - w'_{\text{out}}(x, t) = f'_-(x-t) - f'_+(x-t), \quad x < 0.$$

Y por (2.71) tenemos

$$\begin{aligned} \|f'_-(x-t) - f'_+(x-t)\|_{L^2(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d)}^2 &\leq C \int_{-\infty}^0 [|f'_-(x-t)|^2 + |f'_+(x-t)|^2] dx \\ &= C \int_{-\infty}^{-t} [|f'_-(z)|^2 + |f'_+(z)|^2] dz \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|u'(\cdot, t) - w'_{\text{out}}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. De esta manera obtenemos (4.9).

Paso 3. El tercer término del lado derecho de (4.5) se demuestra de manera análoga, usando (4.2) y (2.1) y (2.71).

Finalmente demostremos (2.6). Por definición de norma en \mathcal{E}_F tenemos

$$(4.10) \quad \|W(t)\Psi_+\|_{\mathcal{E}_R} = \|w'_{\text{out}}(x, t)\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)} + |w_{\text{out}}(0, t)| + \|w_{\text{out}}(x, t)\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)}, \quad R > 0.$$

De (4.2) y (2.71) obtenemos

$$\begin{aligned} (4.11) \quad \|w'_{\text{out}}(x, t)\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)} &\leq \int_{-R}^R |f'_+(x-t)|^2 dx + \int_{-R}^R |g'_-(x+t)|^2 dx \\ &= \int_{-R-t}^{R-t} |f'_+(\tau_1)| d\tau_1 + \int_{-R+t}^{R+t} |g'_-(\tau_2)| d\tau_2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Análogamente por Definición de norma en \mathcal{E}_F , un cambio de variable (en el sentido de Lebesgue) y (2.71)

$$(4.12) \quad \left\| \dot{w}'_{\text{out}}(x, t) \right\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)} \leq \int_{-R-t}^{R-t} |f'_+(\tau_1)| d\tau_1 + \int_{-R+t}^{R+t} |g'_-(\tau_2)| d\tau_2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Ahora (4.6), (4.11) y (4.12) implican (2.6). El Teorema 4.6 está probado. \blacksquare

5. Estados asintóticos

En esta sección expresaremos los estados de dispersión en términos de los datos iniciales y la función $y(t)$, describiremos algunas propiedades de los estados asintóticos Ψ_+ (el caso cuando $t \rightarrow +\infty$), definiremos el operador de onda W_+ para el sistema de Lamb y especificaremos el rango de dicho operador.

Denotaremos el estado asintótico Ψ_+ por

$$(5.1) \quad \Psi_+(x) := (\Psi_0(x), \Pi_0(x)), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

En la sección previa obtuvimos la onda “saliente” $W(t)\Psi_+(x) = (w_{\text{out}}(x, t), \dot{w}_{\text{out}}(x, t))$, $t \geq 0$, en donde $w_{\text{out}}(x, t)$ está dada por (4.2). Por lo tanto, el estado asintótico $\Psi_+(x) = (\Psi_0(x), \Pi_0(x))$ está determinado unívocamente por

$$\Psi_0(x) := w_{\text{out}}(x, 0), \quad \Pi_0(x) := \dot{w}_{\text{out}}(x, 0).$$

De esta manera estamos asociando el estado asintótico $(\Psi_0(x), \Pi_0(x))$ a cada dinámica $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ con las condiciones (2.3) y $Z \subset \mathbb{R}^d$ discreto. Ahora como la dinámica final del sistema de Lamb está determinada por el dato inicial $Y_0 \in \mathcal{E}_\infty$ podemos definir el operador de onda como sigue:

Definición 4.12. Sea $Y(t) = (u(x, t), \dot{u}(x, t)) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E}_\infty)$ con $Y_0 = (u_0, v_0) \in \mathcal{E}_\infty$ tal que la asintótica de dispersión (2.4) se cumple, en donde, $S_+ = (z_+, 0)$, $z_+ \in Z$ y $\Psi_+ \in \mathcal{E}$. Definimos

$$(5.2) \quad W_+ Y_0 := (\Psi_+, z_+) \in \mathcal{E} \times Z.$$

Y diremos que la transformación

$$(5.3) \quad W_+ : \mathcal{E}_\infty \longrightarrow \mathcal{E} \times Z,$$

es el **operador de onda** asociado al sistema de Lamb y (Ψ_+, z_+) es el **dato de dispersión** que corresponde a Y_0 .

A continuación escribimos la expresión explícita de W_+Y_0 , en términos del dato inicial Y_0 :

Lema 4.13. *Sea $(u_0, v_0) \in \mathcal{E}_\infty$. Entonces, el estado asintótico $\Psi_+(x) = (\Psi_0(x), \Pi_0(x))$ tiene la siguiente representación*

$$(5.4) \quad \Psi_0(x) = C_0 + \begin{cases} y(x) + \frac{u_0(x) - u_0(-x)}{2} - \frac{1}{2} \int_{-x}^x v_0(\chi) d\chi, & x \geq 0, \\ y(-x) + \frac{u_0(x) - u_0(-x)}{2} + \frac{1}{2} \int_{-x}^x v_0(\chi) d\chi, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$(5.5) \quad \Pi_0(x) = \begin{cases} y'(x) - \frac{u'_0(x) - u'_0(-x)}{2} + \frac{v_0(x) - v_0(-x)}{2}, & x \geq 0, \\ y'(-x) + \frac{u'_0(x) - u'_0(-x)}{2} + \frac{v_0(x) - v_0(-x)}{2}, & x \leq 0, \end{cases}$$

en donde, C_0 esta dada por (4.8).

Demostración Primero, calculemos Ψ_0 . La representación (4.2) implica

$$(5.6) \quad \Psi_0(x) = C_0 + f_+(x) + g_-(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Las fórmulas (2.18) y (2.38) implican

$$(5.7) \quad \begin{cases} f_+(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^x v_0(\chi) d\chi, & x \geq 0, \\ f_+(x) = y(-x) - g_+(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Ahora sustituyendo $g_+(-x)$ para $x \leq 0$ a partir de (2.18) en (5.7), obtenemos

$$(5.8) \quad f_+(x) = \begin{cases} \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^x v_0(\chi) d\chi, & x \geq 0, \\ y(-x) - \frac{u_0(-x)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{-x} v_0(\chi) d\chi, & x < 0. \end{cases}$$

Calculemos ahora $g_-(x)$ en términos de u_0 and v_0 . (2.38) implica

$$(5.9) \quad g_-(x) = y(x) - f_-(-x), \quad x \geq 0.$$

Luego, por las fórmulas (2.18) obtenemos

$$(5.10) \quad g_-(x) = y(x) - \frac{u_0(-x)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{-x} v_0(\chi) d\chi, \quad x \geq 0.$$

Nuevamente en virtud de (2.18) con g_- para $x < 0$, obtenemos

$$(5.11) \quad g_-(x) = \begin{cases} y(x) - \frac{u_0(-x)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{-x} v_0(\chi) d\chi, & x \geq 0 \\ \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x v_0(\chi) d\chi, & x \leq 0. \end{cases}$$

Por consiguiente, en virtud de (5.6), (5.8) y (5.11) obtenemos (5.4).

Segundo, calculemos $\Pi_0(x) = \dot{w}_{\text{out}}(x, 0)$. La expresión (4.2) implica

$$(5.12) \quad \Pi_0(x) = -f'_+(x) + g'_-(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calculemos inicialmente $\Psi_1(x)$ para $x \geq 0$. Las fórmulas (2.18) implican

$$(5.13) \quad f'_+(x) = \frac{u'_0(x)}{2} - \frac{v_0(x)}{2}, \quad x \geq 0.$$

Las ecuaciones (2.38) nos dan

$$(5.14) \quad g'_-(x) = y'(x) + f'_-(-x), \quad x \geq 0.$$

La fórmula para f_- (véase fórmulas (2.18)) implica

$$(5.15) \quad f'_-(-x) = \frac{u'_0(-x)}{2} - \frac{v_0(-x)}{2}, \quad x \geq 0.$$

Luego

$$(5.16) \quad g'_-(x) = y'(x) + \frac{u'_0(-x)}{2} - \frac{v_0(-x)}{2}, \quad x \geq 0.$$

Finalmente,

$$(5.17) \quad \Pi_0(x) = y'(x) + \frac{u'_0(-x) - u'_0(x)}{2} + \frac{v_0(x) - v_0(-x)}{2}, \quad x \geq 0,$$

por (5.12), (5.13) y (5.16).

Ahora calculemos $\Pi_0(x)$ para $x \leq 0$. La expresión (2.38) implica

$$(5.18) \quad f'_+(x) = -y'(-x) + g'_+(-x), \quad x \leq 0.$$

La fórmula para g_+ (véase fórmulas (2.18)) implica

$$(5.19) \quad g'_+(-x) = \frac{u'_0(-x)}{2} + \frac{v_0(-x)}{2}, \quad x \leq 0.$$

Luego,

$$(5.20) \quad f'_+(x) = -y'(-x) + \frac{u'_0(-x)}{2} + \frac{v_0(-x)}{2}, \quad x \leq 0.$$

Por lo tanto,

$$(5.21) \quad \Pi_0(x) = y'(-x) + \frac{u'_0(x) - u'_0(-x)}{2} + \frac{v_0(x) - v_0(-x)}{2}, \quad x \leq 0,$$

por (5.12), (5.20) y la derivada de g_- (véase (2.18)). De esta forma obtenemos (5.5). El lema está probado. \blacksquare

Observación 4.14. La onda “saliente” $w_{\text{out}}(x, t)$ admite la representación de D’Alembert

$$w_{\text{out}}(x, t) = W(t)(\Psi_0, \Pi_0) = \frac{\Psi_0(x-t) + \Psi_0(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \Pi_0(\chi) d\chi, \quad x, t \in \mathbb{R},$$

ya que w_{out} es una solución de la ecuación de D’Alembert.

5.1. Condiciones necesarias para la existencia de estados asintóticos. La teoría de dispersión para el sistema de Lamb desarrollada en esta tesis nos coloca ahora en el punto donde se investiga el operador inverso W_+^{-1} . Iniciamos el estudio con la descripción de la imagen de W_+ , $\text{Im } W_+$.

A continuación presentamos un lema que describe algunas propiedades que caracterizan a los estados de dispersión Ψ_0 y Π_0 , construidos en la sección previa (véase (5.4) y (5.5)). Pero antes recordemos lo siguiente: Por Definición 1.3 tenemos que $(u_0(x), v_0(x)) \in \mathcal{E}$, en donde, $u_0(x) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ y $u'_0(x), v_0(x) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$; también tenemos que

$$(5.22) \quad Y(t) = (u(x, t), v(x, t)) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E}),$$

con $u(x, 0) = u_0(x)$ y $v(x, 0) = v_0(x)$ es una solución del problema de Cauchy (2.3), por Teorema 3.1, 1.

Lema 4.15. Sea $Y_0 \in \mathcal{E}_\infty$ y

$$(5.23) \quad W_+ Y_0 = (\Psi_+, s_+), \quad z_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t).$$

Entonces, i) $\Psi_+ \in \mathcal{E}_\infty$; es decir, existen y son finitos los límites y la integral:

$$(5.24) \quad \Psi_0^- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi_0(x), \quad \Psi_0^+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_0(x), \quad \overline{\Pi_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_0(\chi) d\chi.$$

ii) Se cumple la siguiente identidad

$$(5.25) \quad \Psi_0^- + \Psi_0^+ + \overline{\Pi_0} = 0.$$

Demostración Mostremos i). a) Primero mostremos que $\Psi_+ = (\Psi_0, \Pi_0) \in \mathcal{E}$ o equivalentemente probemos que $\Psi_0(x) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, $\Psi'_0(x), \Pi_0(x) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

Demostremos que $\Psi_0(x) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Dado que $u_0, v_0 \in \mathcal{E}$ tenemos que $u_0 \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ y $u'_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Además, $y(x) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ por Corolario 3.28. Luego de la expresión (5.4) obtenemos que $\Psi_0(x)|_{\mathbb{R}_-} \in C(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d)$ y $\Psi_0(x)|_{\mathbb{R}_+} \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$. Resta probar que $\Psi_0(x)$ es continua en 0.

La expresión (5.4) para $x > 0$ y la continuidad de $y(t)$ (véase Corolario 3.28) implican

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Psi_0(x) = C_0 + y(0).$$

De manera análoga, usando (5.4) para $x < 0$, obtenemos que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \Psi_0(x) = C_0 + y(0)$. Por lo tanto, $\Psi_0(x) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

Ahora (5.4) implica

$$(5.26) \quad \Psi'_0(x) = \begin{cases} y'(x) + \frac{u'_0(x) + u'_0(-x)}{2} - \frac{v_0(x) + v_0(-x)}{2}, & x \geq 0, \\ -y'(-x) + \frac{u'_0(x) + u'_0(-x)}{2} + \frac{v_0(x) + v_0(-x)}{2}, & x \leq 0, \end{cases}$$

de donde observamos que $\Psi'_0(x) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, ya que $u'_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ por Definición 1.3 de \mathcal{E} e $y' \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ por la cota a priori (2.63). De manera análoga usando la expresión (5.5) de $\Pi_0(x)$ obtenemos que $\Pi_0(x) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

b) Finalmente demostremos que existen los límites (5.24). Consideremos el caso $x \geq 0$. Recordemos que

$$(5.27) \quad y(x) = u(0, x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} z_+(0),$$

en virtud de (5.23). Ahora la expresión (5.4), el valor de C_0 , (4.8), (5.27) y (2.3) implican

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_0(x) &= C_0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(-x) - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x v_0(\chi) d\chi \\ &= \frac{u_0^+}{2} + \frac{u_0^-}{2} + \frac{I_0}{2} - 2z_+(0) + z_+(0) + \frac{u_0^+}{2} - \frac{u_0^-}{2} - \frac{I_0}{2} \\ &= u_0^+ - z_+(0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos probado (5.24) cuando $x \rightarrow +\infty$.

Para el caso $x \leq 0$ se procede análogamente: la expresión (5.4), (4.8), (5.27) y (2.3) implican

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi_0(x) &= C_0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} y(-x) + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(-x) + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-x}^x v_0(\chi) d\chi \\ &= \frac{u_0^+}{2} + \frac{u_0^-}{2} + \frac{I_0}{2} - 2z_+(0) + z_+(0) + \frac{u_0^-}{2} - \frac{u_0^+}{2} - \frac{I_0}{2} \\ &= u_0^- - z_+(0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos probado (5.24) cuando $x \rightarrow -\infty$. De esta manera *a)* y *b)* prueban que $\Psi_+ \in \mathcal{E}_\infty$.

Demostremos *ii)*. Sea $x \geq 0$. Las expresiones (5.5), (5.27), (2.3), y (2.30) implican

(5.28)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Pi_0(\chi) d\chi &= z_+(0) - y(0) - \frac{1}{2} \int_0^\infty u'_0(\chi) d\chi + \frac{1}{2} \int_0^\infty u'_0(-\chi) d\chi + \frac{1}{2} \int_0^\infty v_0(\chi) d\chi - \frac{1}{2} \int_0^\infty v_0(-\chi) d\chi \\ &= z_+(0) - u_0(0) - \frac{u_0^+}{2} + \frac{u_0(0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u'_0(\chi) d\chi + \frac{1}{2} \int_0^\infty v_0(\chi) d\chi - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 v_0(\chi) d\chi \\ &= z_+(0) - \frac{u_0^+}{2} - \frac{u_0^-}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\infty v_0(\chi) d\chi - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 v_0(\chi) d\chi. \end{aligned}$$

Sea $x \leq 0$. Entonces la representación (5.5), (5.27), (2.3), y (2.30) implican

(5.29)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \Pi_0(\chi) d\chi &= z_+(0) - y(0) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u'_0(\chi) d\chi - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u'_0(-\chi) d\chi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 v_0(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 v_0(-\chi) d\chi \\ &= z_+(0) - u_0(0) + \frac{u_0(0)}{2} - \frac{u_0^-}{2} - \frac{1}{2} \int_0^\infty u'_0(\chi) d\chi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 v_0(\chi) d\chi - \frac{1}{2} \int_0^\infty v_0(\chi) d\chi \\ &= z_+(0) - \frac{u_0^-}{2} - \frac{u_0^+}{2} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 v_0(\chi) d\chi - \frac{1}{2} \int_0^\infty v_0(\chi) d\chi. \end{aligned}$$

Luego (5.25) se sigue de (5.28) y (5.29). Por lo tanto el Lema está demostrado. ■

Denotemos por

$$(5.30) \quad \mathcal{E}_\infty^+ := \{\Psi_+ \in \mathcal{E}_\infty \mid \text{se cumplen (5.24), (5.25)}\}.$$

El Lema 4.15 implica

Corolario 4.16. $Im W_+[\mathcal{E}_\infty] \subset \mathcal{E}_\infty^+ \times Z$. ■

La investigación del operador W_\pm es el contenido de la teoría de dispersión no lineal para el sistema de Lamb. En particular es necesario descubrir si W_\pm es **suprayectivo**. Es decir, si para cada $\Psi_\pm \in \mathcal{E}_\infty$ y cada $S_\pm \in \mathcal{S}$, existe $Y_0 \in \mathcal{E}_\infty$ tal que se cumple (2.4) para S_\pm . El Corolario 4.16 da una respuesta parcial a el problema inverso de dispersión para el sistema de Lamb. Este problema es no trivial. Además cuando la masa del sistema de Lamb es distinta de cero el problema es **abierto**.

Capítulo 5

Conclusiones

En la presente tesis desarrollamos la teoría de dispersión para un sistema conservativo reversible en el tiempo, compuesto por el acoplamiento (en el origen del sistema de referencia) de una ecuación de onda y la ecuación de movimiento de una partícula de masa $m = 0$ sujeta a una fuerza no lineal que proviene de una función potencial. Tal sistema es un ejemplo no trivial de sus análogos en los contextos que provienen de la teoría de la Física cuántica, como por ejemplo, los sistemas acoplados de ecuaciones de Schrödinger-Maxwell y de Dirac-Maxwell. El sistema que acabamos de describir es conocido como sistema de Lamb.

En esta investigación reunimos los siguientes resultados:

1) Establecimos la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy que define el sistema de Lamb en el espacio de Hilbert \mathcal{E} (véase 1.3).

2) Probamos la convergencia de las soluciones $Y(t) = (u(x, t), v(x, t))$ a un atractor global; es decir, cada solución de energía finita del sistema de Lamb converge a un estado estacionario, cuando $t \rightarrow \pm\infty$. (véase Teorema 4.4), con respecto a la norma de energía local (véase expresión (3.2)).

3) Encontramos el carácter de la convergencia de las soluciones del problema de Lamb; es decir, hallamos la asintótica de las soluciones de energía finita cuando $t \rightarrow \pm\infty$ (véase Teorema 4.4). Cada solución decae a una suma compuesta por un estado estacionario y una onda dispersa que puede ser “saliente” o “entrante” dependiendo si $t \rightarrow +\infty$ o $t \rightarrow -\infty$. Dichas asintóticas son válidas respecto a la norma energética global (véase expresión (3.1)).

Comentamos que las asintóticas (2.4):

$$(0.31) \quad Y(t) \sim S_{\pm} + W(t)\Psi_{\pm}, \quad t \rightarrow \pm\infty$$

están motivadas por los postulados de Niels Bhor (1913) sobre la transición que ocurre entre estados estacionarios cuánticos:

I. El primer postulado establece una transición $S_- \mapsto S_+$ entre los estados estacionarios S_- y S_+ , esto nos sugiere la convergencia $Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} S_{\pm}$ con respecto a la norma energética local (Teorema 4.4) para el sistema de Lamb.

II. El segundo postulado establece que la transición es causada por una “radiación” de energía, esto motiva en nuestro caso, a incluir una onda “saliente”(o “entrante”) $W(t)\Psi_{\pm}$ en la asintótica (0.31), la cual ahora se cumple respecto de la norma energética global (Teorema 4.6).

Asintóticas del tipo (0.31) con $S_{\pm} = 0$ han sido estudiadas por muchos autores en teorías de dispersión para la ecuaciones de Schrödinger y de Klein-Gordon, en sus versiones lineales y no lineales (véase por ejemplo, [46] y [53, 54] y los comentarios de la página 75).

Nosotros establecimos por primera vez asintóticas de dispersión de este tipo con un conjunto de estados estacionarios no trivial (discreto).

4) Obtuvimos un resultado principal para estudiar la completitud asintótica del sistema de Lamb, el cual es uno de los principales problemas de la teoría de dispersión (véase Apéndice E). A saber, encontramos cuáles son datos de dispersión (Ψ_+, z_+) posibles para las soluciones $Y(t)$ con estados iniciales $Y_0 \in \mathcal{E}$.

El estado asintótico $\Psi_+ = (\Psi_0, \Pi_0)$ debe satisfacer necesariamente la identidad

$$(0.32) \quad \Psi_0^- + \Psi_0^+ + \overline{\Pi_0} = 0,$$

en donde, $\Psi_0^- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi_0(x)$, $\Psi_0^+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_0(x)$ y $\overline{\Pi_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_0(\chi) d\chi$.

Este resultado fue el punto clave para poder probar completitud asintótica del sistema de Lamb en algunos casos particulares (véase [37]).

En [37] se demostró que la pareja (Ψ_+, z_+) , para cualquier $z_+ \in Z$ es posible si el estado asintótico $\Psi_+(x) \in \mathcal{E}$ satisface (0.32) y tiene soporte compacto.

En el caso $d = 1$, la pareja (Ψ_+, z_+) , con $z_+ \in Z$ fijo es posible si $F'(z_+) \neq 0$ y el estado asintótico $\Psi_+(x) \in \mathcal{E}$ satisface (0.32).

Los mismos resultados se cumplen para el dato de dispersión (Ψ_-, z_-) en el caso cuando $t \rightarrow -\infty$.

1. Problemas abiertos

Algunas posibles direcciones en esta investigación son:

1. Establecer la completitud asintótica (suprayectividad del operador de onda W_{\pm}) en el sistema de Lamb para estados de dispersión arbitrarios que satisfagan (0.32).

2. Crear la teoría de dispersión no lineal (directa e inversa) para el sistema de Lamb con masa $m > 0$. (Algunos avances están publicados en [38] para el caso $m > 0$).

Apéndice A

La ecuación de onda no lineal asociada al sistema de Lamb

La meta principal de este Apéndice será demostrar la equivalencia entre el sistema acoplado (1.1) y la ecuación de onda no-lineal del tipo (0.5). Comenzamos con algunas definiciones necesarias.

Definición A.1. Sea \mathcal{F} el conjunto de funciones $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$ tales que

1. $\ddot{u}(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$, $u''(x, t) \in C(\Pi_- \cup \Pi_+; \mathbb{R}^d)$ y
2. los límites $u'(0\pm, t)$, $u''(0\pm, t)$ existen para todo $t \in \mathbb{R}$.

Aquí Π_- y Π_+ son los semiplanos izquierdo y derecho y están definidos en (2.4).

Observación A.2. Sea $u(x, t) \in \mathcal{F}$, entonces $u''(x, t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por consiguiente,

$$u''(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

en donde, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$ es el espacio de distribuciones (véase Definición 2.14 y el Lema 2.16).

Proposición A.3. Sean $u \in \mathcal{F}$, $F(u) \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. Son equivalentes:

1. El sistema acoplado

$$(0.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}(x, t) = u''(x, t), \quad (x, t) \in \Pi_- \cup \Pi_+, \\ 0 = F(y(t)) + u'(0+, t) - u'(0-, t); \\ y(t) := u(0, t), \end{array} \right. \quad \left| \quad t \in \mathbb{R}. \right.$$

2. La ecuación de onda,

$$(0.2) \quad \ddot{u}(x, t) = u''(x, t) + \delta(x)F(u(x, t)), \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observación A.4. Notemos que las hipótesis $u \in \mathcal{F}$ y $F(u) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ implican que la ecuación (0.2) tiene sentido.

Para demostrar la proposición anterior, escribiremos las siguientes definiciones y lemas.

Definición A.5. Sea $u \in \mathcal{F}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos las funciones $\{u'(x, t)\}$ y $\{u''(x, t)\}$ mediante

$$(0.3) \quad \{u'(x, t)\} = \begin{cases} u'(x, t), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \{u''(x, t)\} = \begin{cases} u''(x, t), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Observación A.6. A partir de la Definición A.1 se sigue fácilmente que

$$\{u'(x, t)\}, \{u''(x, t)\} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. El signo \subset denota la identificación definida por (0.18).

Lema A.7. Para cada $t \in \mathbb{R}$, la derivada u' de una función $u \in \mathcal{F}$ se expresa mediante la fórmula

$$u'(x, t) = \{u'(x, t)\} + \delta(x)[u(0+, t) - u(0-, t)], \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d).$$

Demostración Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x)$. Derivando u con respecto de x en el sentido $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$; obtenemos, utilizando la fórmula de integración por partes,

$$\begin{aligned} \langle u'(x, t), \phi(x) \rangle &= -\langle u(x, t), \phi'(x) \rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}} u(x, t) \phi'(x) dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}_-} u(x, t) \phi'(x) dx - \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t) \phi'(x) dx \\ &= -u(x, t) \phi(x) \Big|_{-\infty}^0 + \int_{\mathbb{R}_-} u'(x, t) \phi(x) dx \\ &\quad -u(x, t) \phi(x) \Big|_0^{\infty} + \int_{\mathbb{R}_+} u'(x, t) \phi(x) dx \\ &= \phi(0)[u(0+, t) - u(0-, t)] + \int_{\mathbb{R}} \{u'(x, t)\} \phi(x) dx \\ &= \langle \{u'(x, t)\} + \delta(x)[u(0+, t) - u(0-, t)], \phi(x) \rangle, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, ya que por hipótesis $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$. ■

Lema A.8. Para cada $t \in \mathbb{R}$, la segunda derivada u'' de una función $u \in \mathcal{F}$ se expresa por la fórmula

$$(0.4) \quad u''(x, t) = \delta(x)[u'(0+, t) - u'(0-, t)] + \{u''(x, t)\}, \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d).$$

Demostración Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x)$. Derivando u' con respecto de x en el sentido $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_x, \mathbb{R})$; obtenemos, utilizando el Lema A.7 y la fórmula de integración por partes,

$$\begin{aligned}
\langle u''(x, t), \phi(x) \rangle &= -\langle u'(x, t), \phi'(x) \rangle \\
&= -\langle \{u'(x, t)\}, \phi'(x) \rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}_-} u'(x, t) \phi'(x) dx - \int_{\mathbb{R}_+} u'(x, t) \phi'(x) dx \\
&= -u'(x, t) \phi(x) \Big|_{-\infty}^0 + \int_{\mathbb{R}_-} u''(x, t) \phi(x) dx \\
&\quad -u'(x, t) \phi(x) \Big|_0^{\infty} + \int_{\mathbb{R}_+} u''(x, t) \phi(x) dx \\
&= \phi(0)[u'(0+, t) - u'(0-, t)] + \langle \{u''(x, t)\}, \phi(x) \rangle \\
&= \langle \delta(x)[u'(0+, t) - u'(0-, t)] + \{u''(x, t)\}, \phi(x) \rangle,
\end{aligned}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. ■

Demostración de la Proposición A.3. (2 \Rightarrow 1). Por hipótesis $u \in \mathcal{F}$, entonces la segunda derivada de u con respecto de x satisface (0.4). Sustituyendo u'' de (0.4) en (0.2), obtenemos

$$\begin{aligned}
(0.5) \quad \ddot{u}(x, t) &= \delta(x)[u'(0+, t) - u'(0-, t)] \\
&\quad + \{u''(x, t)\} + \delta(x)F(u(x, t)),
\end{aligned}$$

en el sentido $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$, en donde $t \in \mathbb{R}$. Usando que $y(t) := u(0, t)$ y la acción de la distribución delta de Dirac sobre funciones continuas, obtenemos

$$(0.6) \quad \delta(x)F(u(x, t)) = \delta(x)F(u(0, t)) = \delta(x)F(y(t)).$$

Sustituyendo (0.6) en (0.5), obtenemos para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo

$$(0.7) \quad \ddot{u}(x, t) - \{u''(x, t)\} = \delta(x)[F(y(t)) + u'(0+, t) - u'(0-, t)],$$

en el sentido $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$. Observemos que para $u \in \mathcal{F}$, las ecuaciones (0.2) y (0.7) son equivalentes. Ahora, demostremos que la ecuación (0.7) implica las ecuaciones del sistema acoplado (0.1). En efecto, si $x \neq 0$, entonces $\{u''(x, t)\} = u''(x, t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y de (0.7) se sigue la primera ecuación en (0.1). La segunda ecuación en (0.1) se obtiene observando que, por un lado, $\ddot{u}(x, t) - \{u''(x, t)\} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$, por Definición A.1, 1. Por otro lado, la parte derecha de (0.7) es de la forma $K\delta(x)$, donde K no depende de x , y $K\delta(x) \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$. Por lo tanto, $K = 0$; es decir, se cumple la segunda ecuación en (0.1).

(1 \Rightarrow 2) suponiendo que se cumplen las ecuaciones del sistema acoplado (0.1) entonces, para $x \neq 0$ tenemos

$$\ddot{u}(x, t) - u''(x, t) = F(y(t)) + u'(0+, t) - u'(0-, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Luego para $x \in \mathbb{R}$ obtenemos (0.7) la cual es equivalente a (0.2). La Proposición está probada. ■

Apéndice B

Cálculo diferencial en espacios normados

Como es conocido muchos espacios de dimensión infinita varían sobre \mathbb{R}^N debido a la carencia de una base natural. En particular, esto conduce a que no existe una manera de generalizar las derivadas parciales. En seguida definimos la derivada direccional como su análoga.

Sean X e Y espacios normados sobre el campo de números reales, U un conjunto abierto en X y sea $f : X \rightarrow Y$ una transformación (un operador, un funcional o un funcional en el sentido usual si $Y = \mathbb{R}$). Denotaremos con $\mathcal{M}(X; Y)$ a el espacio de transformaciones que van de X en Y .

Definición B.1. Sea $f \in \mathcal{M}$. Si para $a, h \in X$ el límite (en la norma de Y)

$$(0.8) \quad \lim_{\mathbb{R} \ni t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

existe, entonces el valor se denomina la **derivada de f en el punto a en la dirección h** o (**derivada direccional** o **variación de Gâteaux**) y se denota por $\delta f(a; h)$ (o $\frac{\delta f(a)}{\delta a}(h)$).

Si $\frac{\delta f(a)}{\delta a}(h)$ existe para todo $h \in X$ y la transformación $Df(a) : h \mapsto \frac{\delta f(a)}{\delta a}(h)$ es lineal y continua, entonces $Df(a)$ se llama la derivada de Gâteaux de f en el punto a . Más precisamente:

Definición B.2. Sea $U \subset X$ una vecindad de a . Decimos que una transformación $f : U \rightarrow Y$ es *Gâteaux diferenciable* en a , si para cualquier dirección $h \in X$ existe un operador $Df(a) \in \mathcal{M}(X \times X; Y)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f(a + th) - f(a) - tDf(a)\| = 0,$$

para $a + th \in U$. Y la llamamos **la derivada de Gâteaux** de f en el punto a en la dirección h y escribimos

$$\left. \frac{d}{dt} f(a + th) \right|_{t=0} = Df(a).$$

Observación B.3. Existen ejemplos de funciones en dos variables que muestran que la derivada direccional no tiene por que ser lineal en $h \in X$, más aún, que la existencia de $Df(a)$ no garantiza la continuidad de f en el punto $a \in X$. Por ejemplo, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se define por

$$(0.9) \quad f(u) = \begin{cases} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}, & u = (u_1, u_2) \neq (0, 0) \\ 0, & u = (u_1, u_2) = (0, 0) \end{cases}$$

entonces $Df((0, 0)) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}$, para cualquier $v = (v_1, v_2)$.

Ejemplo 1. Consideremos las bases estándares $\{e_1^M, \dots, e_M^M\}$ y $\{e_1^N, \dots, e_N^N\}$ de \mathbb{R}^M y \mathbb{R}^N respectivamente. Entonces, escribimos a $f : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ en la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^N f^i(x) e_i^N$$

Es fácil ver que $\frac{\delta f(a)}{\delta a}(h)$ existe si y solo si $\frac{\delta f^i(a)}{\delta a}(h)$ existe para todo $i = 1, \dots, N$. En particular, para $h = e_j^M$, la derivada direccional $\frac{\delta f^i(a)}{\delta a}(h)$ no es más que $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(a)$. Esto significa que la derivada de Gâteaux $Df(a)$ tiene la representación matricial, con respecto a las bases canónicas en la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_M}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^N}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f^N}{\partial x_M}(a) \end{pmatrix}$$

Esta matriz se conoce como la *matriz jacobiana* de f en el punto a . Si $M = N$, entonces el determinante de esta es denotado por

$$\frac{\partial(f^1, \dots, f^M)}{\partial(x_1, \dots, x_M)} = J_f,$$

y se llama el *jacobiano* de f en a .

Ejemplo 2. Supongamos que H es un espacio de Hilbert y $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) tiene una derivada de Gâteaux $Df(a)$ en $a \in H$. Entonces, por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único punto $\nabla f(a) \in H$ tal que

$$Df(a)h = \langle h, \nabla f(a) \rangle_H.$$

El elemento $\nabla f(a)$ se llama el *gradiente* de f en a . Notemos que el gradiente ∇f es una transformación lineal de H en si mismo.

Algunas propiedades directas de la definición de la derivada de Gâteaux son:

• Un funcional lineal $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una derivada de Gâteaux en X para cualquier dirección, en efecto,

$$Df(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = f(h).$$

• El operador $Df(a) : X \times X \rightarrow Y$, $h \mapsto \frac{\delta f(a)}{\delta a}(h)$ es homogéneo: $\frac{\delta f(a)}{\delta a}(\beta h) = \beta \frac{\delta f(a)}{\delta a}(h)$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$ y todo $h \in X$.

• La derivada de Gâteaux conmuta con funcionales lineales acotados, es decir, si $y^* \in Y^*$ y $f \in \mathcal{M}(X; Y)$ es Gâteaux diferenciable en a en la dirección h , entonces

$$\frac{d}{dt} \langle y^*, f(a + th) \rangle|_{t=0} = \langle y^*, Df(a) \rangle$$

A continuación introducimos una noción más fuerte de diferenciabilidad en espacios normados. La siguiente definición es la generalización directa de la diferencial de una función de dos variables.

Definición B.4. Decimos que una transformación $f \in \mathcal{M}(X; Y)$ es **Fréchet diferenciable** en un punto $a \in U$ si existe un operador $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ tal que para todo $u \in U$ se cumple la siguiente igualdad

$$f(u) = f(a) + A(u - a) + o(u - a),$$

en donde, $\lim_{u \rightarrow a} o(u - a)/\|u - a\|_X = 0$ en el sentido de la convergencia de Y . El operador lineal A se llama la *derivada de Fréchet* de la transformación f en el punto $a \in U$ y se escribe $f'(a) = A$. La transformación f es diferenciable en U si esta es diferenciable en cada punto de U .

La igualdad que define la derivada de Fréchet es equivalente a

$$(10.10) \quad \lim_{u \rightarrow a} \frac{\|f(u) - f(a) - A(u - a)\|_Y}{\|u - a\|_X} = 0.$$

Frecuentemente dicha igualdad se escribe en la forma

$$f(a + h) = f(a) + A_a(h) + o(h),$$

en donde, $h \in X$, $a + h \in U$ y $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/\|h\|$.

Notemos que el operador A está determinado unívocamente, ya que para operadores lineales la igualdad $\|A(u - a) - A_1(u - a)\| = o(h)$ se cumple si y solo si $A = A_1$.

Algunas consecuencias inmediatas de la definición de la derivada de Fréchet son las siguientes:

- Si una transformación $f : U \rightarrow Y$ es diferenciable, entonces f es continua (es una consecuencia directa de la continuidad del operador A).
- Si una transformación $f : X \rightarrow Y$ es lineal y continua, entonces esta es diferenciable y $f'(a) = f$ para cada $a \in X$, es decir, la derivada es una constante igual a f (note que esta constante es un elemento del espacio $\mathcal{L}(X; Y)$).
- Si una transformación f es Fréchet diferenciable en un punto a , entonces esta es Gâteaux diferenciable en el punto a en cualquier dirección.
- Sea \mathcal{V}_a el conjunto de todas las transformaciones $f : U \rightarrow Y$ que son diferenciables en un punto $a \in U$. Entonces, \mathcal{V}_a es un espacio vectorial y la transformación $f \mapsto f'(a)$ es un operador lineal de \mathcal{V}_a a $\mathcal{L}(X; Y)$.

Cabe puntualizar que las transformaciones f y f' tiene el mismo dominio, pero toman valores en diferentes espacios, a saber

$$f : U \rightarrow Y, u \mapsto f(u); \quad f' : U \rightarrow \mathcal{L}(X; Y), u \mapsto f'(u).$$

Ejemplo 3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. La transformación f es Fréchet-diferenciable si esta es diferenciable en el sentido ordinario y

$$f'(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} \right) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}).$$

La verificación del grado de aproximación lineal que se muestra en (0.10) no siempre es una tarea fácil, la siguiente proposición es útil en estas situaciones.

Proposición B.5. *Supongamos que $Df(a)$ existe para toda x en una vecindad U de un punto $a \in X$. Si $x \mapsto Df(x)$ es continua en a (como una transformación $X \rightarrow \mathcal{L}(X; Y)$), entonces $f'(a)$ existe*

Demostración Véase [17, pág. 123]. ■

Una condición conveniente para la existencia de la diferencial (es decir, la derivada de Fréchet) de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la continuidad de las derivadas parciales. Estas se pueden interpretar como derivadas con respecto a subespacios 1-dimensionales. Una generalización conduce a la siguiente definición.

Sean X_1 y X_2 dos espacios lineales normados y formemos el nuevo espacio lineal normado $X = X_1 \times X_2$.¹

Definición B.6. Sean $f : X \rightarrow Y$, $a_2 \in X_2$ y $f_1 : x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$. Si f_1 es Gâteaux-diferenciable (o Fréchet-diferenciable) en $a_1 \in X_1$, entonces $Df_1(a_1)$ (o $f'_1(a_1)$) es la derivada parcial de Gâteaux (o de Fréchet) de f en (a_1, a_2) con respecto a la primera variable y es denotada por $D_1f(a_1, a_2)$ (o $f'_1(a_1, a_2)$).

De manera análoga se define la derivada parcial de f con respecto a la segunda variable, es decir, D_2f o f'_2 .

Si $Df(a_1, a_2)$ existe, entonces $D_1f(a_1, a_2)$ y $D_2f(a_1, a_2)$ también existen y

$$(0.11) \quad Df(a_1, a_2)(h_1, h_2) = D_1f(a_1, a_2)h_1 + D_2f(a_1, a_2)h_2.$$

La afirmación opuesta requiere más suposiciones:

Proposición B.7. *Supongamos que D_2f existe en una vecindad U de un punto $a = (a_1, a_2)$ y que la transformación*

$$D_2f : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathcal{L}(X_2, Y)$$

es continua en a . Supongamos, además, que D_1f existe en a . Entonces, $Df(a_1, a_2)$ existe y (0.11) se cumple.

¹ X también es un espacio normado. Una norma sobre X es, por ejemplo, $\|x\|_X := \|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2}$, $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

Demostración Véase [17, pág. 124]. ■

Observación B.8. Si a la Proposición B.7 agregamos que $f'_1(a_1, a_2)$ existe, entonces $f'(a_1, a_2)$ existe también. La prueba de esta afirmación es análoga a la demostración de la Proposición B.7.

El siguiente resultado establece la relación entre diferenciabilidad de Gâteaux y de Fréchet.

Teorema B.9. Si $f \in \mathcal{M}(X; Y)$ es Fréchet diferenciable en x_0 , entonces esta es Gâteaux diferenciable en x_0 . Inversamente, si la derivada de Gâteaux de f en x_0 , $Df(x_0)$, es lineal en h , i.e., $Df(x_0, \cdot) \in \mathcal{L}(X; Y)$ y es continua en x como una transformación de $X \rightarrow \mathcal{L}(X; Y)$, entonces f es Fréchet diferenciable en x_0 . Y en ambos casos tenemos la fórmula $f'(x_0) = Df(x_0)$.

Demostración Véase el libro de Berger [8, pág. 67-69]. ■

Sobre la regla de la cadena en el sentido $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$

Lema B.10. Sea $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función tal que $\dot{y}(t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$. Entonces, para $V(y) \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ se tiene la siguiente igualdad

$$(12) \quad \frac{d}{dt} V(y(t)) = \left(\nabla V(y(t)) \right) \cdot \dot{y}(t), \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}.$$

Demostración Recordemos que $\dot{y}(t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ se entiende en el sentido de distribuciones y existe para casi todo $t \in \mathbb{R}_+$, entonces Teorema 2.11 implica que $y(t)$ es absolutamente continua (las derivada clásica y generalizada coinciden). Luego existe un subconjunto $A \subset \mathbb{R}_+$ tal que la medida $m(\mathbb{R} \setminus A) = 0$ y

$$(13) \quad \dot{y}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \quad t \in A,$$

lo cual es equivalente

$$(14) \quad \Delta y := y(t + \Delta t) - y(t) = \dot{y}(t)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t, \quad \alpha(\Delta t) \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{\mathbb{R}^d} 0.$$

Dado que $V \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, entonces para $t \in A$

$$(15) \quad V(y(t + \Delta t)) = V(y(t)) + \nabla V(y(t)) \cdot \Delta y + \beta(\Delta y), \quad \frac{\beta(\Delta y)}{\Delta y} \xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0]{\mathbb{R}^d} 0.$$

Luego

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} V(y(t)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(y(t + \Delta t)) - V(y(t))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\nabla V(y(t)) \cdot (\dot{y}(t) + \alpha(\Delta t)) + \frac{\beta(\Delta y)}{\Delta t} \right]. \end{aligned}$$

Ya que $\alpha(\Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ resta mostrar que $\frac{\beta(\Delta y)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$.

Por (0.14),

$$\frac{\beta(\Delta y)}{\Delta t} = \frac{\beta(\Delta y)}{\Delta y} \cdot (\dot{y}(t) + \alpha(\Delta t))$$

Ahora

$$(0.17) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\beta(\Delta y)}{\Delta y} = 0,$$

por la segunda expresión de (0.15) y dado que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y = 0$. Además, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\dot{y}(t) + \alpha(\Delta t)| \leq C,$$

por (0.14) con respecto de Δt (recordemos $t \in A$ es fijo). ■

Apéndice C

Ejemplos de distribuciones

Proposición C.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces

$$(0.18) \quad \langle u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u\phi dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

es una distribución.

Demostración Sea $\phi \in \mathcal{D}(K)$, donde $K \subset \Omega$ es un conjunto compacto. La proposición se sigue de la desigualdad:

$$\left| \int_{\Omega} u\phi dx \right| \leq \sup |\phi| \int_K |u| dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(K).$$

■

Observación C.2. La ecuación (0.18) define una inyección natural,

$$L^1_{loc}(\Omega) \ni u \mapsto \langle u, \phi \rangle \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

En efecto,

$$\int_{\Omega} u\phi dx = 0, \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

implica que $u = 0$ para casi todo $x \in \Omega$.

Observación C.3. Si $u \in C^1(\Omega)$, entonces $\partial_i u \in C^0(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, define una distribución a través de la ecuación (0.18),

$$(0.19) \quad \langle \partial_i u, \phi \rangle = \int_{\Omega} \partial_i u \phi dx = - \int_{\Omega} u \partial_i \phi dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

en donde hemos usado integración por partes en la última igualdad. La ecuación (0.19) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$(0.20) \quad \langle \partial_i u, \phi \rangle = -\langle u, \partial_i \phi \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposición C.4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, entonces el funcional $\partial_i u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, definido por la ecuación (0.20) es una distribución.

Demostración Sean $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle \partial_i u, \phi + \lambda \psi \rangle &= -\langle u, \partial_i(\phi + \lambda \psi) \rangle \\ &= -\langle u, \partial_i \phi \rangle - \lambda \langle u, \partial_i \psi \rangle \\ &= \langle \partial_i u, \phi \rangle + \lambda \langle \partial_i u, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\partial_i u$ es lineal. Ahora, observemos que $\mathcal{D}(\Omega)$ es cerrado en relación a la diferenciación. En efecto, si $\phi \in C^\infty(\Omega)$, entonces $\partial_i \phi \in C^\infty(\Omega)$ y $\text{supp } \partial^\alpha \phi \subset \text{supp } \phi$ para todo α . Finalmente, si $K \subset \Omega$ es un conjunto compacto, entonces de la estimación (1.1) con $k = N$ se sigue que

$$|\langle u, \partial_i \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N+1} \sup |\partial^\alpha \phi|,$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\text{supp } \phi \subset K$ y $N \in \mathbb{N}$. ■

Observación C.5. Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, entonces es posible demostrar, análogamente, como en la proposición anterior, que $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$; es decir, el funcional $\partial^\alpha u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, definido por

$$(0.21) \quad \langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega);$$

es una distribución.

Corolario C.6. Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, entonces $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, para todo multi-índice α .

Observación C.7. La función $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ definida por $u \mapsto \partial^\alpha u$ es un homomorfismo de espacios vectoriales.

Proposición C.8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Sean $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $f \in C^\infty(\Omega)$. El funcional $fu : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle fu, \phi \rangle = \langle u, f\phi \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

es una distribución.

Demostración Si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces $f\phi \in C^\infty(\Omega)$; además, $\text{supp } f\phi \subset \text{supp } \phi$. Ahora, si $\phi \in C^\infty(K)$, en donde $K \subset \Omega$ es un conjunto compacto, entonces existen constantes C_0, C_1, \dots , que dependen de f y K pero no de ϕ , tal que para $N = 1, 2, \dots$

$$\sum_{|\alpha| \leq N} \sup |\partial^\alpha (f\phi)| \leq C_N \sum_{|\alpha| \leq N} \sup |\partial^\alpha \phi|, \quad \phi \in C^\infty(K).$$

Ahora, escribiremos algunos ejemplos clásicos. ■

Definición C.9. La función de Heaviside, para $x \in \mathbb{R}$, se define de la siguiente forma:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Observación C.10. Directamente de la Proposición C.1 se sigue que a la función de Heaviside $\theta(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ le podemos asociar una distribución, $\theta : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle \theta(x), \phi(x) \rangle = \int \theta(x)\phi(x)dx = \int_0^{\infty} \phi(x)dx.$$

Definición C.11. (función delta de Dirac) Directamente de la Definición 2.5 se sigue que el funcional $\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\langle \delta(x), \phi(x) \rangle = \phi(0)$$

es una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Observación C.12. La distribución δ no puede ser representada mediante la ecuación (0.18) por una función $u(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. ([18]).

Observación C.13. De la Definición C.11 y la ecuación (0.20), se sigue que

$$\langle \partial_x \theta(x), \varphi(x) \rangle = -\langle \theta(x), \partial_x \varphi(x) \rangle = -\int_0^{\infty} \partial_x \varphi(x)dx = \varphi(0),$$

en donde, $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, es decir,

$$\partial_x \theta(x) = \delta(x).$$

Apéndice D

Los espacios \mathcal{E}_F , $L^2_1(I; \mathbb{R}^d)$ y el subespacio \mathcal{M}_ϵ

1. El espacio \mathcal{E}_F

En esta sección demostraremos que el espacio \mathcal{E}_F definido en la Definición 1.3, 2. del Capítulo 1 no es completo. Recordemos \mathcal{E}_F es el espacio lineal \mathcal{E} dotado con la topología inducida por la métrica generada por la familia de seminormas de energía local

$$(1.1) \quad \|(u, v)\|_{\mathcal{E}_R} := \|u'\|_R + |u(0)| + \|v\|_R, \quad (u, v) \in \mathcal{E}, \quad R > 0.$$

Proposición D.1. *El espacio \mathcal{E}_F con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_R}$ no es completo.*

Demostración Sea $u_n(x) = x^2 \chi_n(x)$, en donde $\chi_n(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, está definida por

$$(1.2) \quad \chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq n, \\ 0, & |x| \geq 2n. \end{cases}$$

Demostremos que $\{u_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathcal{E}_F . Para tal fin es suficiente demostrar que para toda $R > 0$:

$$\text{a) } \left\| u'_n(x) - u'_m(x) \right\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)} \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\text{b) } |u_n(0) - u_m(0)| \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0.$$

Para a) tenemos por la forma de $u_n(x)$ y (1.2), para $n, m < R$

$$(1.3) \quad \left\| u'_n(x) - u'_m(x) \right\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)} = \int_{|x| \leq R} |u'_n(x) - u'_m(x)|^2 dx \\ \leq 2R \int_{|x| \leq R} |\chi_n(x) - \chi_m(x)|^2 dx = 0,$$

luego, obtenemos que $\left\| u'_n(x) - u'_m(x) \right\|_{L^2((-R, R); \mathbb{R}^d)} = 0$ para todo $n, m > R \in \mathbb{R}$.

b) Se sigue facilmente de la definición de $u_k(x)$.

Ahora afirmamos que $u_n \not\rightarrow u \in \mathcal{E}$ cuando $n \rightarrow +\infty$, en la topología de \mathcal{E}_F . En efecto, supongamos que $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \in \mathcal{E}$ en \mathcal{E}_F , esto implica que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(1.4) \quad \|u_n - u\|_{\mathcal{E}_R} < \epsilon, \quad \text{si, } n \geq N.$$

Por la definición de norma en \mathcal{E}_F (1.4) implica que

$$|u_n(0) - u(0)| < \epsilon, \quad \text{para todo } n \geq N,$$

ahora por la continuidad de u_n y u , ya que $u \in \mathcal{E}$ tenemos por la expresión anterior que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$ puntualmente. Pero $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2$ puntualmente, entonces $u = x^2$ lo cual es una contradicción, ya que $(x^2)' \notin L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. De esta manera tenemos una sucesión de Cauchy en \mathcal{E}_F cuyo límite no pertenece a dicho espacio. ■

2. El espacio $L_1^2(I; \mathbb{R}^d)$

En esta sección demostraremos que el espacio L_1^2 , definido en la subsección 2.5 del Capítulo 3, es un espacio de Banach.

Definición D.2. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Definimos el espacio normado

$$(2.1) \quad L_1^2(I; \mathbb{R}^d) := \{y \in C(I; \mathbb{R}^d) \mid \dot{y} \in L^2(I; \mathbb{R}^d)\},$$

en donde, $\dot{y} \in \mathcal{D}'(I; \mathbb{R}^d)$, con la norma

$$(2.2) \quad \|y\|_{L_1^2(I; \mathbb{R}^d)} := |y(0)| + \|\dot{y}\|_{L^2(I; \mathbb{R}^d)}.$$

Es fácil ver que (2.2) determina una norma.

Proposición D.3. Sea $I = [0, \alpha]$. Entonces el espacio de funciones $L_1^2(I; \mathbb{R}^d)$ con la norma $\|\cdot\|_{L_1^2(I; \mathbb{R}^d)}$ es un espacio de Banach.

Demostración Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L_1^2(I; \mathbb{R}^d)$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(2.3) \quad \|y_m - y_n\|_{L_1^2(I; \mathbb{R}^d)} < \epsilon \quad \text{para } m, n > N.$$

Entonces, usando (2.2) obtenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$(2.4) \quad |y_m(0) - y_n(0)| < \epsilon, \quad \|\dot{y}_m - \dot{y}_n\|_{L^2(I; \mathbb{R}^d)} < \epsilon,$$

para $m, n > N$. Las desigualdades (2.4) implican que existen $a \in \mathbb{R}$ y $f \in L^2(I; \mathbb{R}^d)$ tales que

$$(2.5) \quad y_n(0) \longrightarrow a, \quad \int_I |\dot{y}_n(t) - f(t)|^2 dt \longrightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Ahora dado que $f \in L^2(I; \mathbb{R}^d)$, entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que $f \in L^1(I; \mathbb{R}^d)$. Luego, definimos la función

$$(2.6) \quad y(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau + a, \quad t \in I.$$

Entonces, es absolutamente continua [48, pág. 106, Teorema 13], en particular, $y \in C(I; \mathbb{R}^d)$; además,

$$(2.7) \quad \dot{y}(t) = f(t) \quad \text{en } \mathcal{D}'(I; \mathbb{R}^d).$$

En efecto, usando (2.6) obtenemos para toda $\varphi \in \mathcal{D}(I)$

$$(2.8) \quad \int_I y(t)\dot{\varphi}(t)dt = \int_I \left[\int_0^t f(\tau)d\tau \right] \dot{\varphi}(t)dt = \int_I \left[\int_0^t f(\tau)\dot{\varphi}(t)d\tau \right] dt.$$

Luego, definimos

$$(2.9) \quad F(\tau, t) := \begin{cases} f(\tau)\dot{\varphi}(t), & 0 \leq \tau \leq t, \\ 0, & t < \tau \leq \alpha, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \alpha.$$

Es claro que $F(\tau, t) \in L^1(I \times I; \mathbb{R}^d)$ ya que $f \in L^1(I; \mathbb{R}^d)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, entonces el Teorema de Fubini implica

$$(2.10) \quad \int_I \left[\int_I F(\tau, t)d\tau \right] dt = \int_I \left[\int_I F(\tau, t)dt \right] d\tau$$

pero

$$(2.11) \quad \int_I \left[\int_I F(\tau, t)dt \right] d\tau = \int_I \left[\int_\tau^\alpha f(\tau)\dot{\varphi}(t)dt \right] d\tau = - \int_I f(\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Por lo tanto de la ecuaciones (2.8), (2.10) y (2.11) se sigue que

$$(2.12) \quad \int_I y(t)\dot{\varphi}(t)dt = - \int_I f(t)\varphi(t)dt \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Así, hemos demostrado (2.7).

La ecuación (2.7) implica que $\dot{y}(t) \in L^2(I; \mathbb{R}^d)$, ya que $f \in L^2(I; \mathbb{R}^d)$. En efecto, la implicación anterior se obtiene observando que la ecuación

$$(2.13) \quad \int_I [\dot{y}(t) - f(t)]\varphi(t)dt = 0, \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(I),$$

implica que $\dot{y}(t) = f(t)$ para casi todo $t \in I$. Esto, a su vez, es una consecuencia directa del siguiente lema:

Lema D.4. [12, pág. 122] *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^d)$ tal que*

$$(2.14) \quad \int_I f(t)\varphi(t)dt = 0, \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Entonces, $f(t) = 0$ para casi todo $t \in I$.

Ahora, tomando en cuenta que $y(0) = a$ por (2.6) obtenemos, de (2.5) que

$$y_n(0) \longrightarrow y(0), \quad \int_I |\dot{y}_n(t) - \dot{y}(t)|^2 dt \longrightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto,

$$\|y_n - y\|_{L^2_1(I; \mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

■

3. Sobre la cerradura de \mathcal{M}_ϵ en $L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$

En este apartado escribiremos la demostración sobre la cerradura del subconjunto \mathcal{M}_ϵ en $L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$.

Lema D.5. *Sea $\mathcal{M}_\epsilon := \{y \in L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d) \mid y(0) = u_0\}$. Entonces \mathcal{M}_ϵ es cerrado en $L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$.*

Demostración Sea $y \in \overline{\mathcal{M}_\epsilon}$, entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_\epsilon$ tal que

$$(3.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \quad \text{en } L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$$

Mostremos que en efecto, $y(0) = u_0$. Ya que $\|y - y_n\|_{L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, entonces $|y(0) - y_n(0)| \rightarrow 0$ por la definición de norma en $L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$. Luego, $|y(0) - u_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ya que $y_n(0) = u_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por hipótesis. Esto muestra la afirmación. ■

Sistemas dinámicos hamiltonianos

La meta de este apéndice es estudiar algunas ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) vistas como sistemas dinámicos en espacios funcionales apropiados. En particular, consideraremos algunas EDPs que se pueden ver como sistemas hamiltonianos de dimensión infinita. La forma general de tales ecuaciones es la siguiente. Sea X un espacio de Hilbert de funciones definidas sobre un dominio Ω , típicamente X es un espacio de Sobolev. Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a el producto escalar en $L^2(\Omega)$ y por J a un operador antisimétrico no degenerado. Entonces, la ecuación de evolución que consideramos es:

$$(0.2) \quad \partial_t w(t) = J\nabla\mathcal{H}(w(t)),$$

en donde, $w \in X$ y $\nabla\mathcal{H}$ denota el gradiente de la función hamiltoniana $\mathcal{H} : X \rightarrow \mathbb{R}$ con respecto a el $L^2(\Omega)$ -producto escalar (recordemos aquí que estamos derivando en espacios normados, por lo que el gradiente se define como se explica en el Apéndice B).

Este formalismo hamiltoniano se puede generalizar de la siguiente manera. En \mathcal{B} , la cual puede ser una variedad de Banach o de Hilbert, vamos a suponer que tenemos una 2-forma $\omega : T_w(\mathcal{B}) \times T_w(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$, en donde, $T_w(\mathcal{B})$ es el espacio tangente a \mathcal{B} en w , con las siguientes propiedades:

- (i) $d\omega = 0$,
- (ii) ω es no degenerada en cualquier punto de \mathcal{B} .

Notemos que si \mathcal{B} es de dimensión finita, entonces $\dim \mathcal{B}$ es par. Dada una función hamiltoniana $\mathcal{H} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ definimos el campo vectorial hamiltoniano asociado $F_{\mathcal{H}}(w)$ en $T_w(\mathcal{B})$ por $\omega[F_{\mathcal{H}}, G] := d\mathcal{H}[G]$, para cualquier $G \in T_w(\mathcal{B})$. Si \mathcal{B} es de dimensión infinita, ni el hamiltoniano \mathcal{H} , ni las formas ω y $d\mathcal{H}$, ni el campo vectorial $F_{\mathcal{H}}$ son necesariamente acotados, luego se tiene que considerar la restricción a sus dominios de definición. En este caso se tiene que debilitar la condición (ii) anterior. Las ecuaciones de Hamilton son

$$(0.3) \quad \partial_t w(t) = F_{\mathcal{H}}(w(t)).$$

Si \mathcal{B} es un espacio de Hilbert, por el teorema de Riesz, la forma simpléctica ω admite una representación en términos del producto escalar:

$$(0.4) \quad \omega[F, G] = \langle F, JG \rangle,$$

en donde, J es un operador sesquisimétrico y no degenerador adecuado. Por otro lado, dado un operador antisimétrico no degenerado J en un espacio de Hilbert \mathcal{B} , la 2-forma definida por (0.3) satisface las condiciones (i) y (ii) anteriores.

La “energía” \mathcal{H} es constante a lo largo del movimiento. En efecto, (0.3), (0.4) y la sesquisimetría de J implican

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(w(t)) = d\mathcal{H}[\partial_t w] = \omega[F_{\mathcal{H}}, \partial_t w] = \omega[F_{\mathcal{H}}, F_{\mathcal{H}}] = \langle F_{\mathcal{H}}, JF_{\mathcal{H}} \rangle = 0.$$

Consideremos el ejemplo dado por la ecuación de onda

$$(0.5) \quad u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0$$

con condiciones de frontera de tipo Dirichlet en $[0, \pi]$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Trabajaremos en el espacio de Hilbert

$$\mathcal{B} = L^2[0, \pi] \times L^2[0, \pi] \ni (v, u) = w,$$

dotado con el producto escalar $\langle w_1, w_2 \rangle := \int_0^\pi (v_1 v_2 + u_1 u_2) dx$. Identificamos $T_w(\mathcal{B})$ y \mathcal{B} . Aquí la forma simpléctica ω está definida por (0.4) en donde, $J(v, u) := (-u, v)$; es decir, $\omega[(h_1, k_1), (h_2, k_2)] := \int_0^\pi (h_2 k_1 - h_1 k_2) dx$. El hamiltoniano es

$$\mathcal{H}(w) = \mathcal{H}(v, u) = \int_0^\pi \left(\frac{v^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} \right) dx.$$

Aquí \mathcal{H} es un operador no acotado de \mathcal{B} en \mathbb{R} . El dominio de definición es el espacio de fases $X := L^2[0, \pi] \times H_0^1[0, \pi] \subset \mathcal{B}$. Sea $G = (h, k)$, entonces

$$\langle F_{\mathcal{H}}, JG \rangle = \omega[F_{\mathcal{H}}, G] = d\mathcal{H}[G] = \int_0^\pi (vh + u_x k_x) dx = \int_0^\pi (vh - u_{xx} k) dx,$$

de tal manera que el campo vectorial hamiltoniano $F_{\mathcal{H}}(w) = (u_{xx}, v)$ está definido para $u \in H^2 \cap H_0^1$.

Las ecuaciones de Hamilton son

$$(0.6) \quad \dot{v} = u_{xx}, \quad \dot{u} = v.$$

De esta forma una solución débil $w : t \mapsto X$ de las ecuaciones de Hamilton (0.6), es una solución débil de $u_{tt} = u_{xx}$.

Apéndice F

Un vistazo al fenómeno de dispersión

En este Apéndice hablaremos sobre el fenómeno de dispersión en diversas situaciones físicas. La meta es ilustrar las coincidencias fundamentales entre el comportamiento para tiempos grandes de diversas clases de sistemas dinámicos. Hablaremos un poco de la teoría de dispersión en mecánica cuántica no relativista.

La teoría de dispersión normalmente involucra una comparación entre dos tipos diferentes de dinámica para el mismo sistema en consideración: la dinámica dada y una dinámica “libre”. Es un tanto difícil dar una definición precisa de lo que significa “dinámica libre”. Las características comunes que tienen aquellos sistemas dinámicos libres son que estos son más simples que los sistemas dinámicos con los que iniciamos. Es importante tener en mente que la dispersión involucra solamente la dinámica de interacción ya que ciertas características de los resultados se verán afectados en otro caso. Debido a que tenemos dos dinámicas involucradas, la teoría de dispersión se puede ver como una rama de la teoría de perturbaciones. En el caso de la mecánica cuántica se sabe que la teoría de perturbaciones se involucra más con el estudio del espectro absolutamente continuo y no tanto con la teoría de perturbaciones del espectro discreto. La dispersión como fenómeno perturbativo se refiere a las asintóticas respecto del tiempo y esta es la aproximación de la que hablaremos más adelante.

La teoría de dispersión se refiere al estudio de ciertos estados de un sistema que interactúa, es decir, aquellos estados que parecen ser “asintóticamente libres” en el pasado o en un futuro distante. Para ser más explícitos, supongamos que podemos considerar a las dinámicas como transformaciones que actúan sobre los estados. Sean T_t y $T_t^{(0)}$ las transformaciones de la dinámica de interacción y la dinámica libre respectivamente, sobre el “conjunto de estados” Σ . Tal conjunto Σ puede estar constituido de puntos en un cierto espacio de fases (mecánica clásica), vectores en un espacio de Hilbert (mecánica cuántica) o datos de Cauchy para alguna ecuación en derivadas parciales (acústica, óptica). Se está interesado en el par $(\rho_+, \rho) \in \Sigma$ de tal manera que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (T_t \rho - T_t^{(0)} \rho_+) = 0$$

para algún sentido apropiado del límite, y análogamente para pares que se aproximan uno a otro cuando $t \rightarrow +\infty$. Un requisito que la mayoría adopta sobre la noción del límite es que para cada ρ debería haber a lo más un ρ_+ .

Las preguntas principales de la teoría de dispersión son las siguientes:

(1) *Existencia de estados de dispersión* Físicamente, se prepara a el sistema de interacción en una manera tal que algunas de sus componentes se encuentren tan lejos una de otra que la interacción entre ellas se puede ignorar. Luego, “accionamos la dinámica de interacción”; es decir, permitimos que actúe la dinámica de interacción durante un tiempo grande y entonces observamos lo que ocurrió. Uno describe usualmente a el estado inicial en términos de variables naturales que describen a los estados libres (por ejemplo, el momento, en mecánica cuántica). El resultado que se espera es que cualquier estado libre “pueda ser preparado”, esto es, para cualquier $\rho_+ \in \Sigma$, exista un $\rho \in \Sigma$ con $\lim_{t \rightarrow +\infty} (T_t \rho - T_t^{(0)} \rho_+) = 0$. Probando esta aseveración se tiene resuelta la pregunta básica sobre la existencia de dispersión.

(2) *Unicidad de estados de dispersión* Para describir a los estados preparados en términos de los estados libres, debemos conocer que cada estado libre está asociado con un único estado de interacción; es decir, dado ρ_+ existe a lo más un ρ tal que $T_t^{(0)} \rho_+ - T_t \rho \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Notemos que esto es distinto a pedir que deba haber a lo más un ρ_+ para cada ρ en el límite anterior.

(3) *Completitud asintótica débil* Supongamos que tenemos un estado de interacción ρ el cual se ve como un estado libre en el pasado distante en el sentido que $\lim_{t \rightarrow -\infty} (T_t^0 \rho_- - T_t \rho) = 0$ para algún estado ρ_- . Se espera que para tiempos positivos grandes, el estado de interacción se vea una vez más como un estado libre en el sentido que existe un estado ρ_+ tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (T_t^0 \rho_+ - T_t \rho) = 0$. Para probar lo anterior, se requiere mostrar que los siguientes subconjuntos de Σ

$$\Sigma_{in} = \left\{ \rho \in \Sigma \mid \exists \rho_- \in \Sigma \text{ con } \lim_{t \rightarrow -\infty} (T_t^0 \rho_- - T_t \rho) = 0 \right\}$$

y

$$\Sigma_{out} = \left\{ \rho \in \Sigma \mid \exists \rho_+ \in \Sigma \text{ con } \lim_{t \rightarrow +\infty} (T_t^0 \rho_+ - T_t \rho) = 0 \right\}$$

son iguales. Si $\Sigma_{in} = \Sigma_{out}$, entonces decimos que los sistemas poseen completitud asintótica débil.

(4) *Completitud asintótica* Consideremos un sistema en el que existen fuerzas de interacción entre sus componentes y las cuales decaen conforme dichas componentes se apartan una de la otra. Físicamente, se espera que un estado de tal sistema “decaiga”, moviéndose libremente hacia “algún lugar común” o permanezca “acotado” en cierta región. En muchas situaciones, existe un conjunto natural de estados acotados, $\Sigma_{bound} \subset \Sigma$. Y usualmente se puede demostrar que $\Sigma_{bound} \cap \Sigma_{in} = \emptyset$. La

intuición física de la situación descrita nos hace esperar que

$$(0.7) \quad \Sigma_{\text{bound}} \text{ “ + ” } \Sigma_{\text{in}} = \Sigma = \Sigma_{\text{bound}} \text{ “ + ” } \Sigma_{\text{out}}$$

en donde, “ + ” es distinta para sistemas en mecánica clásica y cuántica. En el caso clásico “ + ” significa la unión de conjuntos en el sentido usual; en el caso cuántico este indica una suma directa de espacios de Hilbert. Lograr establecer que (0.7) se cumple equivale a probar la completitud asintótica. Notemos que implícito en la idea de que cada estado libre posee un estado de interacción se encuentra la suposición de que la dinámica libre no tiene estados “acotados”. Se puede ver que completitud asintótica implica completitud asintótica débil.

Es importante hacer notar que la descripción anterior es solo esquemática. En cada teoría física existen complicaciones y se deben realizar diversas modificaciones. Entre estas se encuentran, por ejemplo:

(i) En mecánica clásica Σ está equipado con conjuntos de medida cero y la interpretación natural de afirmaciones del tipo $\Sigma_{\text{in}} = \Sigma_{\text{out}}$ significan que dichos conjuntos de estados difieren solo por conjuntos de medida cero.

(ii) En algunos sistemas, incluyendo problemas de interacción de muchos cuerpos, el espacio de estados de la dinámica libre y de la dinámica de interacción son diferentes.

(iii) En ciertos casos muy especiales la dinámica libre puede tener estados acotados.

(iv) En la teoría de Lax-Phillips la dinámica libre es remplazada por la noción geométrica de subespacio de “entrada” y subespacio de “salida” [40].

Una manera usual de obtener la dinámica de interacción es perturbar una dinámica simple, la cual juega el papel de la dinámica libre. Sin embargo, en algunas teorías físicas especiales no existe una dinámica natural no perturbada para ser comparada con la dinámica de interacción. En tales casos se procede a aislar ciertas soluciones específicamente simples del sistema interactuante. Luego se trata de describir el comportamiento asintótico del sistema interactuante completo en términos de las interacciones de aquellas soluciones simples.

Índice de símbolos

$C^k(\Omega)$, 10 $C_0^k(\Omega)$, 11 $\Psi_+(x)$, 83 $C^k(\Omega; \mathbb{R}^d)$, 14 C_0 , 81 H^1 , 13 K_0 , 17 K_a , 39 $L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$, 48 $R(t)$, 62 R_t , 54 $U(t)$, 38 $W(t)$, 74 W_+ , 83 $Y(t), Y_0$, 5 Z , 74 $\Pi_0(x)$, 83 Π_\pm , 16 $\Psi_0(x)$, 83 \mathbb{R}_a , 34 \mathbb{R}_c^2 , 63 Σ_+ , 16 $ J_\psi $, 16 \mathbb{R}_\pm , 44 $\mathcal{D}'(\Omega)$, 11 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_\xi; \mathbb{R}^d)$, 29 $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$, 14 $\mathcal{D}_1(\mathbb{R})$, 24 $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, 67 $\mathcal{E}, \mathcal{E}_F$, 6 \mathcal{E}_0 , 6 \mathcal{E}_1 , 6	\mathcal{E}_∞ , 76 \mathcal{E}_∞^+ , 88 \mathcal{F} , 62 \mathcal{H} , 6 \mathcal{K} , 67 $\mathcal{L}(X; Y)$, 14 $\mathcal{M}(X; Y)$, 97 \mathcal{M}_ϵ , 49 \mathcal{S} , 74 $v(\cdot, t)$, 40 gen, 20 w_{out} , 80 K , 23 $\text{dist}(y(t), Z)$, 78 $\pi_i[\Omega]$, 16 $\psi(x, t)$, 16 $\psi^{-1}(\xi, \eta)$, 16 \square , 14 $\text{supp } f$, 10 $u_0(x), v_0(x)$, 5 $w_{\text{in}}(t)$, 45 $w_{\text{out}}(t)$, 45
---	---

Referencias

- [1] R.A. Adams. *Sobolev Space*. Academic Press, INC. Harcourt Brace Jovanovich, Puplishers, 1978.
- [2] H. Spohn A.I. Komech and M. Kunze. Long-time asymptotics for a classical particle interacting with scalar wave field. *Comm. Partial Diff. Eqs.*, **125** no.3/4:558–585, 2000.
- [3] P. Hagerty A.M. Bloch and M.I. Weinstein. Radiation induced inestability. *SIAM J. Appl. Math.*, **64**(2):484–524, 2003.
- [4] H. Amann. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems; Volumen I Abstract Linear Theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1995. Monographs in Mathematics, Vol 89.
- [5] H. Amann. Vector-valued Distributions and Fourier multipliers. <http://user.math.uzh.ch/amann/files/distributions.pdf>, 2003.
- [6] V.I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlang, 1992. Translated from the Russian: *Obyknovennye differentsial' nye uravneniya*, 3rd edition, Publisher Nauka, Moscow 1984, by Roger Cooke, with 272 Figures.
- [7] A.V. Babin and M.I. Vishik. *Attractors of evolution equations*. Nauka, Moscow 1989; English transl. Stud. Math. Appl. 25, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [8] M.S. Berger. *Nonlinearity and Functional Analysis. Lectures on nonlinear problems in Mathematical Analysis*. Academic Press NewYork, San Francisco, London, 1977.
- [9] N. Bohr. On the constitution of atoms and molecules, part i. *Philos. Mag.*, **26**:1–25, 1913.
- [10] N. Bohr. On the constitution of atoms and molecules, part ii, systems containing only a single nucleus. *Philos. Mag.*, **26**:476, 1913.
- [11] N. Bohr. On the constitution of atoms and molecules, part iii, systems containing several nuclei. *Philos. Mag.*, **26**:857–875, 1913.
- [12] H. Brézis. *Análisis Funcional Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984. Traducción al catellano por Juan Ramón Esteban de la obra original *Analyse fonctionnelle* publicada por Masson Editeur, Paris 1983.
- [13] G.R. Sell C. Fojas and R. Temam. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations. *J. Differ. Equations*, **73**:309–353, 1988.
- [14] G.M Chadam. Asymptotics for $\square u = m^2 + g(x, t, u, u_x, u_t)$. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Fis. Mat.*, **26**:33–95, 1972.
- [15] L. de Broglie. *Recherches sur la théorie des quanta*. PhD thesis, Universite de Paris, 1924. También publicada en: *Ann. Phys. (Paris)* 3, 22 (1925). Reprinted in *Ann. Found. Louis de Broglie* 17 (1992) p. 22.
- [16] E. DiBenedetto. *Real Analysis*. Birkhäuser, Boston, 2002.
- [17] P. Drábek and J. Milota. *Methods of Nonlinear Analysis. Applications to Differential Equations*. Birkhäuser Verlag AG, Basel, Boston, Berlin, 2007. Birkhäuser Advanced Texts, Basler Lehrbücher.
- [18] G. Friedlander and M. Joshi. *Introduction to the Theory of Distributions*. Cambridge University Press, 1998.
- [19] M. Friedlin and A.I. Komech. On metastable regimes in stochastic Lamb system. *J. Math. Phys.*, **47** 4:043301–1–043301–12, 2006.

- [20] J. Ginibre and G. Velo. Time decay of finite energy solutions of the nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **43**:399–442, 1985.
- [21] J. Hale. *Asymptotic behavior of dissipative systems*. Amer. Math. Soc. Providence, 1988.
- [22] D. Henry. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Springer, Berlin, 1981. Lecture Notes in Mathematics, 840.
- [23] L. Hörmander. *Linear Partial Differential Operators*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Fourth Printing, 1976. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 116. A series of Comprehensive Studies in Mathematics.
- [24] L. Hörmander. On the fully nonlinear Cauchy problem with small data. In “*Microlocal analysis and nonlinear waves*” in *IMA Vol. Math. Appl., Vol 30, Springer, Berlin*, pages 51–81, 1991.
- [25] Po-Fang Hsieh and Yasutaka Sibuya. *Basic theory of ordinary differential equations*. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1991. Universitext, Editors (North America): S. Axler, F.W. Gehring, and K.A. Ribet.
- [26] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley and Sons, Inc., New York, 1998.
- [27] J.B. Keller and L.L. Bonilla. Irreversibility and nonrecurrence. *J. Stat. Phys.*, **42**:1115–1125, 1986.
- [28] S. Klainerman. Long-time behavior of solutions to nonlinear evolution equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **78**:73–98, 1982.
- [29] A. I. Komech. On transitions to stationary states in hamiltonian nonlinear wave equations. *Phys. Lett. A*, **241**:311–322, 1998.
- [30] A.I. Komech. On the stabilization of interaction of a string with a nonlinear oscillator. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh*, **6**:35–41, 1991.
- [31] A.I. Komech. On stabilization of string-nonlinear oscillator interaction. *J. Math. Anal. Appl.*, **196**:384–409, 1995.
- [32] A.I. Komech. On the stabilization of string-oscillator interaction. *Russian J. Math. Phys.*, **3**:227–247, 1995.
- [33] A.I. Komech. On transitions of stationary states in one-dimensional nonlinear wave equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **149**:213–228, 1999.
- [34] A.I. Komech. Attractors of non-linear hamiltonian one-dimensional wave. *Russian Math. Surveys*, **55**(1):43–92, 2000.
- [35] A.I. Komech. Lectures on global attractors of Hamilton nonlinear wave equations. <http://www.mat.univie.ac.at/~komech/articles/index.html>, 2005.
- [36] A.I. Komech. Lectures on quantum mechanics (nonlinear pde point of view). <http://www.mis.mpg.de/preprints/ln/lecturenote-2505-abstr.html>, 2005.
- [37] A.I. Komech and A.E. Merzon. On asymptotic completeness for scattering in the nonlinear Lamb system. *J. Math. Phys.*, **50**:023515, 2009.
- [38] A.I. Komech and A.E. Merzon. Scattering in the nonlinear Lamb system. *Phys. Lett. A*, **373**:1005–1010, 2009.
- [39] H. Lamb. On a peculiarity of the wave-system due to the free vibrations of a nucleus in an extended medium. *Proc. London Math. Soc.*, **32**:208–211, 1900.
- [40] P.D. Lax and R.S. Phillips. *Scattering Theory*. Academic Press NY-London, 1967.
- [41] Noja M. Bertini, D. and A. Posilicano. Dynamics and Lax-Phillips scattering for generalized Lamb models. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**(49):15173–15195, 2006.
- [42] B. Simon M. Reed. *Methods of Modern Mathematical Physics, III*. Academic Press, 1979.
- [43] A.E. Merzon and M.A. Taneco-Hernández. Scattering en the zero-mass Lamb system. *Phys. Lett. A*, **372**(27-28):4751–4767, 2008.

- [44] D. Mitrović and D. Žubrinić. *Fundamentals of Applied Functional Analysis*. Addison Wesley Longman Limited, 1998. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 91.
- [45] C.S. Morawetz. The decay of solution to exterior initial-boundary value problem for the wave equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, **14**:561–568, 1961.
- [46] C.S. Morawetz and W.A. Strauss. Decay and scattering of solutions of a non-linear relativistic wave equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, **25**:1–31, 1972.
- [47] M. Reed. *Abstract Non-Linear Wave Equations*. Springer, Berlin, 1976. Lecture Notes in Mathematics, 507.
- [48] H.L. Royden. *Real Analysis*. The Macmillan Company Collier-Macmillan Limited, London, 1968. Second edition.
- [49] E. Schrödinger. Quantisierung als eigenwertproblem iv. *Ann. d. Phys.*, **81**:109, 1926.
- [50] A. Soffer. Dissipation Through Dispersion. In *Nonlinear Dynamics and Renormalization Group in CRM Proceeding and Lectures Notes, Vol 27, American Mathematical Society*, pages 175–184, 2001.
- [51] W.A. Strauss. Decay and asymptotics for $\square u = f(u)$. *J. Funct. Anal.*, **2**:409–457, 1968.
- [52] W.A. Strauss. *Nonlinear Invariant Wave Equations*. Springer, Berlin, 1978. Lecture Notes in Phys. Vol. 73.
- [53] W.A. Strauss. Nonlinear scattering at low energy. *J. Funct. Anal.*, **41**:110–133, 1981.
- [54] W.A. Strauss. Nonlinear scattering at low energy: sequel. *J. Funct. Anal.*, **43**:281–293, 1981.
- [55] T. Suslina. Sobolev spaces and embedding theorems. <http://www.iadm.uni-stuttgart.de/LstAnaMPhy/Weidl/fa-ws04/Sobolev.html>, 2003.
- [56] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [57] B.R. Vainberg. *Asymptotics Methods in Equations of Mathematical Physics*. Gordon and Breach, NY-London-Paris, 1989.
- [58] V.S. Vladimirov. *Equations of Mathematical Physics*. Mir Publishers Moscow, 1984.
- [59] C.H. Wilcox. The Cauchy problem for the wave equation with distribution data: an elementary approach. *The Am. Math. Monthly*, **98**(5):401–410, 1991.
- [60] C. Zuily. *Problems in Distributions and Partial Differential Equations*. Hermann, Publishers in Arts and Science-Paris, NorthHolland-Amsterdam, 1988. North-Holland Mathematics 143.