UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

DINAMICA DE LAS FUNCIONES INDUCIDAS A LOS PRODUCTOS SIMETRICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

JOSE LUIS GOMEZ RUEDA

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE, 2011

Índice general

Introducción

En 1686, Isaac Newton, da a conocer su trabajo *Los Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, en el cual, presenta sus resultados sobre el movimiento de los planetas. Con esto, podemos decir que inicia el estudio matemático de los sistemas dinámicos. En su trabajo, Newton concibe a los planetas como masas puntuales, que son atraidas unas a otras por una fuerza que es inversamente proporcional a sus distancias y se mueven de acuerdo con la ecuación $F = ma$.

De acuerdo con la mecánica de Newton, las posiciones y los momentos de todas las partículas en un instante dado, determinan sus posiciones y momentos en cualquier otro instante. Debido a que se necesitan seis números para especificar la posición y el momento, el conjunto formado por todas las posibles posiciones y todos los posibles momentos de n partículas (al que llamamos espacio fase o espacio de estados) es un subconjunto de $\mathbb{R}^{6n}$.

Los cambios que ocurren con el tiempo en la posición y en el momento de las partículas, se representan en el espacio fase, por medio de una curva que llamamos trayectoria. De aquí que, existe una función F, tal que, al estado x en el tiempo 0, le asigna el estado $F(x, t)$ en el tiempo t. A la estructura integrada por el espacio fase y la función F, le llamamos sistema dinámico.

En nuestro trabajo, el espacio fase será un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto, es decir, un continuo no degenerado, además, la variable t sólo tomará valores enteros. Así que, un sistema dinámico será una pareja (X, f) donde X es un continuo y $f : X \to X$ es una función continua. Se puede decir que al estado $x \in X$, la función f le asigna el estado $f(x)$ en el tiempo 1. En el tiempo 2, le asigna el estado $f(f(x)) = f^2(x)$, etc.

Dado un continuo X, le llamamos hiperespacio de X a una familia de subconjuntos de X que tienen alguna propiedad topológica en común. Los hiperespacios más conocidos son $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$, $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$ y $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$. Este último es conocido también como el n-ésimo producto simétrico de X.

Los hiperespacios $2^X, C_n(X)$ y $F_n(X)$ resultan ser continuos con la topología inducida por la métrica de Hausdorff. En 2^X, tenemos la función continua $2^f : 2^X \to 2^X$ definida por $2^f(A) = f(A)$. Como $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son subcontinuos de 2^X, tenemos las funciones $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(X)$ y $f_n : F_n(X) \to F_n(X)$, definidas tomando la restricción de la función 2^f, es decir, $C_n(f) = 2^f|_{C_n(X)}$ y $f_n = 2^f|_{F_n(X)}$. Estas funciones las conocemos como las funciones inducidas.

Considerando que $(2^X, 2^f)$, $(C_n(X), C_n(f))$ y $(F_n(X), f_n)$ son sistemas dinámicos, en este trabajo nos interesa estudiar la manera en que las propiedades dinámicas de (X, f) se reflejan en el sistema $(F_n(X), f_n)$ y viceversa.

Supondremos que el lector cuenta con conocimientos sobre topología general, así como sobre espacios métricos. No obstante, en el Capítulo 1, presentamos algunos conceptos importantes de la topología general, de la teoría de continuos e hiperespacios y de los sistemas dinámicos. En este capítulo presentamos también algunos resultados que nos serán de utilidad más adelante, al estudiar las relaciones entre las propiedades dinámicas de (X, f) y las de $(F_n(X), f_n)$.

En el Capítulo 2, presentamos algunos sistemas dinámicos en los que se presentan propiedades dinámicas muy interesantes; estos sistemas son, la máquina de sumar, las rotaciones irracionales y el sistema (S^1, z^2), donde S^1 es la circunferencia de radio 1, considerada como subespacio del plano complejo.

Los elementos de un sistema dinámico, pueden presentar diversas propiedades dinámicas, como por ejemplo, periodicidad, recurrencia, recurrencia regular y casi-periodicidad, así que, en el Capítulo 3 estudiamos y presentamos resultados acerca de lo que ocurre en el hiperespacio $F_n(X)$, cuando en el espacio X tenemos puntos con alguna de estas propiedades. De igual forma, también presentamos resultados, sobre lo que ocurre en X, cuando en $F_n(X)$ encontramos elementos que exhiben alguna de las propiedades mencionadas. En el mismo capítulo, y con la misma intención, abordamos los conceptos de punto errante y punto no errante.

Así como existen propiedades dinámicas relacionadas con los elementos del sistema, considerados individualmente, existen también algunas propiedades dinámicas que tienen que ver con el comportamiento de los elementos considerados en su totalidad. En el Capítulo 4, estudiamos y presentamos resultados acerca de lo que ocurre en $(F_n(X), f_n)$, cuando en (X, f) se presenta una propiedad $\mathcal{P}$ y viceversa. Las propiedades estudiadas en este capítulo son minimalidad y propiedad de persecución. A las propiedades como éstas, las llamamos propiedades de sistema.

En el Capítulo 5, estudiamos la relación entre el comportamiento de la función f en el sistema (X, f) y el comportamiento de la función f_n en el sistema $(F_n(X), f_n)$. Se presentan resultados relacionados con la pregunta ¿Si f tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces f_n tiene la misma propiedad? De igual forma se presentan resultados para esta pregunta formulada en la dirección contraria. La propiedad de exactitud y la propiedad de turbulencia son las que abordamos en esta parte de nuestro trabajo.

Algunos de los resultados que se presentan en este trabajo, han sido incluidos en un artículo de investigación, el cual ha sido enviado a una revista internacional, para su publicación. Dichos resultados, son los siguientes: Teorema 3.1, Proposición 3.6, Teorema 3.7, Teorema 3.16, Proposición 3.17, Proposición 3.20, Proposición 3.21, Proposición 3.26, Proposición 3.27, Teorema 4.17, Teorema 4.18 y Ejemplo 4.19.

Capítulo 1

Espacios e hiperespacios

En este trabajo, denotaremos por X a un espacio métrico. Como es usual utilizaremos d para denotar su métrica y de ser necesario, utilizaremos la notación d_X para distinguir su métrica.

Dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, al conjunto denotado por

$$B_\epsilon^X(x) = \{y \in X : d_X(x, y) < \epsilon\},$$

le llamaremos la ***bola abierta en*** X ***de radio*** ϵ ***y centro en*** x. Cuando no haya lugar a confusión, escribiremos simplemente $B_\epsilon(x)$.

Seguramente el lector se encuentra familiarizado con diversos conceptos de la Topología General, sin embargo, consideramos importante mencionar aquí, algunos resultados que involucran a los espacios producto y a la topología usual en este tipo de espacios, llamada la topología producto.

Dada una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$, siendo J un conjunto de índices, sabemos que el producto cartesiano $\prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$, es un espacio topológico cuyos elementos pueden ser descritos de la forma $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$, con $x_\alpha \in X_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. A x_α le llamamos la α-ésima coordenada de dicho elemento.

En caso de que la familia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ esté integrada por un único espacio X, podemos escribir $\prod\limits_{\alpha \in J} X$. De esta manera, si el conjunto de índices es el de los números naturales, escribiremos $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X$ o también $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X$ y un elemento x de este espacio lo denotaremos como $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. En este caso diremos que x_n es la n-ésima coordenada de x.

Si $f : \prod_{n=1}^{\infty} X \to \prod_{n=1}^{\infty} X$ es una función, dado cualquier $x \in \prod_{n=1}^{\infty} X$, denotaremos por $f(x)_n$ a la n-ésima coordenada de $f(x)$.

Para definir la topología producto en el espacio $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$; dada $\beta \in J$, consideremos la función $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$ que a un elemento del espacio producto le asigna su β-ésima coordenada, es decir,

$$\pi_\beta\left((x_\alpha)_{\alpha \in J}\right) = x_\beta.$$

A π_β le llamamos ***la proyección*** sobre X_β.

Definición 1.1 *Sea $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$. Si para cada $\beta \in J$ tenemos que*

$$\mathcal{S}_\beta = \left\{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ es un abierto en } X_\beta\right\},$$

*diremos que **la topología producto** en X, es la generada por la subbase*

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta.$$

Se puede probar [20, prop. III.2.4] que una base para la topología producto en el espacio $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, es la colección de conjuntos de la forma $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$, donde U_α es un abierto en X_α para cada $\alpha \in J$ y además $U_\alpha = X_\alpha$ excepto para un número finito de valores de α.

Un espacio topológico muy importante en nuestro trabajo, a la hora de construir ejemplos y contraejemplos, es el formado por únicamente dos elementos, dicho espacio es $X = \{0, 1\}$, dotado con la topología discreta. En este caso, los elementos del espacio producto son todas las posibles sucesiones formadas por ceros y unos. Sabemos que aún cuando la topología de cada factor es la discreta, la topología producto en el espacio $\prod_{n=1}^{\infty} X$ no es la discreta [20, prop. III.2.12].

Dado que las propiedades que estudiaremos en este trabajo, involucran el uso de una métrica, será útil darle al espacio producto una métrica tal que la topología que induce sobre él, sea la misma que la topología producto.

Enseguida veremos dos posibles métricas para este espacio.

Proposición 1.2 *Consideremos el espacio topológico (Y, τ_Y) donde $Y = \{0,1\}$ y τ_Y es la topología discreta. Sean $X = \prod_{n=1}^{\infty} Y$ y τ_X la topología producto.*

1. *Si $d : X \times X \to \mathbb{R}$ está definida como $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$, entonces d es una métrica en X, que induce la topología producto τ_X.*

2. *Si $d : X \times X \to \mathbb{R}$ está definida como*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & si\ x = y, \\ \frac{1}{2^{n-1}} & si\ x \neq y\ con\ n = min\ \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i\}, \end{cases}$$

   entonces d es una métrica en X y la topología inducida es la topología producto τ_X.

Demostración. Para probar *1*, sean $x = (x_1, x_2, \ldots,)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots)$ dos puntos en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $|x_n - y_n| \geq 0$, entonces

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \geq 0.$$

Si $x = y$, entonces $x_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = 0.$$

Si $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = 0$, entonces para cada número natural n, el sumando $\frac{|x_n - y_n|}{2^n}$ es cero, así que $|x_n - y_n| = 0$ y entonces $x = y$. De lo anterior tenemos que $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Sean $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ y $z = (z_1, z_2, \dots)$, elementos de X. Dado $n \in \mathbb{N}$, observamos que $|x_n - y_n| \leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n|$ y por lo tanto

$$\frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leq \frac{|x_n - z_n|}{2^n} + \frac{|z_n - y_n|}{2^n}.$$

De lo anterior tenemos que

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - z_n|}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n - y_n|}{2^n} = d(x, y) + d(z, y)$$

Por lo tanto, la función d cumple la desigualdad del triángulo y entonces es una métrica en X. Enseguida demostraremos que la topología inducida por esta métrica, es la topología producto.

Sabemos que una base para τ_X es el conjunto

$$\mathcal{U} = \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} U_n : \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } U_n \in \tau_Y \text{ y } U_n = Y \text{ para todo } n \geq n_0 \right\}, \tag{1.1}$$

y que si τ_d es la topología inducida en X por la métrica d, entonces el conjunto

$$\mathcal{V} = \{ B_\epsilon(x) : x \in X \text{ y } \epsilon > 0 \}$$

es una base para τ_d.

Sean $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in X$ y $\epsilon > 0$. Consideremos el abierto $B_\epsilon(x)$ y veamos que existe un elemento de $\mathcal{U}$ que contiene a x y, a su vez, se encuentra contenido en $B_\epsilon(x)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \epsilon$. Como $n < 2^n$, tenemos que $\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n}$. Utilizando las primeras n coordenadas de x, definimos

$$U = \{x_1\} \times \{x_2\} \times \{x_3\} \times \cdots \times \{x_n\} \times \prod_{j=n+1}^{\infty} Y.$$

Como τ_Y es discreta, entonces $\{x_i\} \in \tau_Y$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y por lo tanto U es un elemento de $\mathcal{U}$, tal que $x \in U$.

Ahora demostraremos que $U \subset B_\epsilon(x)$. Sea $y = (y_1, y_2, \dots) \in U \setminus \{x\}$. Por la construcción de U, tenemos que $y_i = x_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, así que

$$y = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$$

De lo anterior tenemos que $d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $|x_k - y_k| \leq 1$, así que

$$d(x,y) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Con esto concluimos que $y \in B_\epsilon(x)$ y de esta forma $U \subset B_\epsilon(x)$. Por lo tanto $\tau_d \subset \tau_X$.

Sean $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$ y $U \in \mathcal{U}$ tales que $x \in U$. Veamos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset U$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $U = U_1 \times U_2 \times U_3 \times \cdots \times U_n \times \prod_{j=n+1}^{\infty} Y$, con $U_i \in \tau_Y$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y, además, $U_n \neq Y$. Hagamos $\epsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$ y demostremos que $B_\epsilon(x) \subset U$. Tomando $y = (y_1, y_2, \dots) \in B_\epsilon(x) \setminus \{x\}$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k} = d(x,y) < \epsilon.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k - y_k|}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}$, es claro que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k - y_k|}{2^k} < \epsilon.$$

Como $Y = \{0, 1\}$, entonces $|x_k - y_k| = \begin{cases} 0, & \text{si } x_k = y_k, \\ 1, & \text{si } x_k \neq y_k. \end{cases}$ Supongamos que para algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ocurre que $x_i \neq y_i$, en este caso tenemos que

$$|x_i - y_i| = 1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k - y_k|}{2^k} \geq \frac{1}{2^i}.$$

Por otra parte, como $1 \leq i \leq n$, se tiene que $2^i \leq 2^n$, de aquí que $\frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}}$, por tanto tendríamos que $\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k - y_k|}{2^k} > \frac{1}{2^{n+1}} = \epsilon$, lo cual es una contradicción.

De lo anterior, tenemos que $y_i = x_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por lo cual $y \in U$ y entonces $B_\epsilon(x) \subset U$. De esto se sigue que $\tau_X \subset \tau_d$ y así, concluimos que la topología inducida por la métrica, es la topología producto.

Para probar *2*, sean x y y dos puntos de X. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\frac{1}{2^{n-1}} > 0$, y por definición, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, así que $d(x, y) \geq 0$ y la igualdad se cumple sólo en el caso de que $x = y$.

Si $x = y$, es claro que $d(x, y) = 0 \leq d(x, z) + d(z, y)$ para cualquier $z \in X$. En caso de que $x \neq y$, tenemos que $d(x, y) = \frac{1}{2^{n-1}}$, donde $n = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq y_j\}$. Dado $z \in X$, si $z = x$ o $z = y$, ocurre que $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$, así que podemos suponer que $z \neq x$ y $z \neq y$. En este caso, si $m = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq z_j\}$ y $k = \min\{j \in \mathbb{N} : z_j \neq y_j\}$, entonces

$$d(x, z) = \frac{1}{2^{m-1}} \qquad \text{y} \qquad d(z, y) = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Si $n \geq \max\{m, k\}$, entonces $2^{n-1} \geq \max\{2^{m-1}, 2^{k-1}\}$ y esto significa que

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Por lo tanto $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Supongamos que $n < m$. Veamos que no puede suceder que $n < k$. Como $d(x, z) = \frac{1}{2^{m-1}}$ y $d(z, y) = \frac{1}{2^{k-1}}$, tenemos que $x_i = z_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ y $z_i = y_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots, k-1\}$, en particular, observamos que $x_n = z_n$. Si ocurriera que $n < k$, tendríamos que $z_n = y_n$, de esto se seguiría que $x_n = y_n$ lo cual contradice el hecho de que $n = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq y_j\}$. De lo anterior se sigue que $n \geq k$. Así que

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{k-1}}$$

y por lo tanto $d(x,y) < d(x,z) + d(z,y)$.

Si $n < k$, de manera análoga concluimos que $d(x,y) < d(x,z) + d(z,y)$. Como hemos visto, la función d también cumple la desigualdad del triángulo y por lo tanto es una métrica en X.

Igual que en el inciso *1*, sea $\mathcal{V} = \{B_\epsilon(x) : x \in X \text{ y } \epsilon > 0\}$ la base para τ_d, es decir, para la topología inducida por la métrica d y sea $\mathcal{U}$ la base para la topología producto utilizada en la igualdad (1.1). Demostraremos que $\tau_d = \tau_X$.

Sean $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$ y $\epsilon > 0$. Consideremos el abierto $B_\epsilon(x)$ y demostremos que existe un elemento de $\mathcal{U}$ que contiene al punto x y al mismo tiempo es subconjunto de $B_\epsilon(x)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, tal que $\dfrac{1}{n} < \epsilon$. Hacemos

$$U = \{x_1\} \times \{x_2\} \times \{x_3\} \times \cdots \times \{x_n\} \times \prod_{j=n+1}^{\infty} Y.$$

Por construcción, tenemos que U es un elemento de $\mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Veamos que $U \subset B_\epsilon(x)$; dado $y \in U \setminus \{x\}$, se tiene que

$$y = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$$

Si $m = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq y_j\}$, entonces $m \geq n+1$, de aquí que

$$d(x,y) = \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Con esto, tenemos que $y \in B_\epsilon(x)$, así que $U \subset B_\epsilon(x)$ y por lo tanto $\tau_d \subset \tau_X$.

Sean $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$ y $U \in \mathcal{U}$ tales que $x \in U$. Demostraremos que existe un número real $\epsilon > 0$, tal que $B_\epsilon(x) \subset U$.

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $U = U_1 \times U_2 \times U_3 \times \cdots \times U_n \times \prod\limits_{j=n+1}^{\infty} Y$, donde $U_i \in \tau_Y$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y además $U_n \neq Y$. Hagamos $\epsilon = \dfrac{1}{2^n}$ y veamos que $B_\epsilon(x) \subset U$.

Sea $y = (y_1, y_2, \dots)$ tal que $y \neq x$ y $y \in B_\epsilon(x)$. Por lo anterior, se cumple que $d(x,y) < \dfrac{1}{2^n}$.

Sea $m = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq y_j\}$ y supongamos que $m \leq n$, en este caso, tenemos que $2^{m-1} \leq 2^{n-1}$ y entonces $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leq \dfrac{1}{2^{m-1}} = d(x,y)$, por lo cual $\dfrac{1}{2^{n-1}} < \dfrac{1}{2^n}$, pero esto es absurdo y por lo tanto $m > n$.

De lo anterior se tiene que $y_i = x_i \in U_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, esto último nos indica que $y \in U$, así que $B_\epsilon(x) \subset U$, por lo cual $\tau_X \subset \tau_d$.

Con esto concluimos que $\tau_d = \tau_X$, es decir, la topología inducida por la métrica, es la topología producto. ■

El espacio producto discutido en la Proposición 1.2, es muy importante debido a que permite encontrar ejemplos y contraejemplos cuando tratamos con diversas propiedades dinámicas. Por lo anterior es muy útil contar con un modelo geométrico de este espacio. Como veremos enseguida, este modelo es el conjunto de Cantor, el cual, en adelante denotaremos por $\mathcal{C}$. En [20, pág. 227] se prueba que

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} : \text{ para cada } n \in \mathbb{N},\ x_n = 0 \text{ ó } x_n = 2 \right\}.$$

Proposición 1.3 *Sean $Y = \{0,1\}$ y τ_Y la topología discreta. Si $X = \prod_{n=1}^{\infty} Y$ y τ_X es la topología producto, entonces el espacio (X, τ_X) es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. Definamos $g : X \to \mathcal{C}$ como

$$g((x_1, x_2, x_3, \dots)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2x_j}{3^j}.$$

Como X es un compacto y $\mathcal{C}$ es de Hausdorff, basta demostrar que la función g es biyectiva y continua.

Primero, vamos a demostrar que g es inyectiva, así que, tomemos dos puntos $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ en X, tales que $x \neq y$. Sea $k = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$. Con esto tenemos que

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2x_j}{3^j} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2x_j}{3^j} + \frac{2x_k}{3^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2x_j}{3^j} \quad \text{y}$$
$$g(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2y_j}{3^j} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2y_j}{3^j} + \frac{2y_k}{3^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2y_j}{3^j}.$$

Como $x_k \neq y_k$, podemos suponer que $x_k = 1$ y que $y_k = 0$. Así que

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2x_j}{3^j} + \frac{2}{3^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2x_j}{3^j} \quad \text{y}$$
$$g(y) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2y_j}{3^j} + 0 + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2y_j}{3^j}.$$

Observemos que $\sum_{j=1}^{k-1} \frac{2x_j}{3^j} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2y_j}{3^j}$. Además, se tiene que

$$\frac{2}{3^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2x_j}{3^j} \geq \frac{2}{3^k} \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2y_j}{3^j} \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} = \frac{1}{3^k},$$

de aquí que

$$g(x) \geq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2x_j}{3^j} + \frac{2}{3^k} \qquad \text{y} \qquad g(y) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2y_j}{3^j} + \frac{1}{3^k}.$$

Por lo anterior, se tiene que $g(y) < g(x)$. Con esto concluimos que si $x \neq y$, entonces $g(x) \neq g(y)$ y por lo tanto g es inyectiva.

Si $c \in \mathcal{C}$, entonces $c = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2x_j}{3^j}$ con $x_j \in \{0, 1\}$ y por lo tanto

$$g((x_1, x_2, x_3, \dots)) = c,$$

así que g es suprayectiva y por lo anterior, tenemos que g es biyectiva.

Veamos que g es continua. Sean $c \in \mathcal{C}$ y $\epsilon > 0$. Escribimos $c = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2x_j}{3^j}$. Observemos que dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=n}^{\infty} \frac{2x_j}{3^j} \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{2}{3^j} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^{n-1}} < \frac{\epsilon}{2}$. Hagamos $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Sea $\delta = \frac{1}{2^n}$ y tomemos $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$ (aquí d es la función definida en el inciso 2 de la Proposición 1.2). Entonces $x_i = y_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, de aquí que

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &= \left| \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{2x_j - 2y_j}{3^j} \right| \leq \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{|2x_j - 2y_j|}{3^j} \\
&\leq \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{|2x_j|}{3^j} + \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{|2y_j|}{3^j} \\
&= \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{2x_j}{3^j} + \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{2y_j}{3^j} \\
&< \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Lo anterior significa que $g(y) \in B_\epsilon(c)$ y por lo tanto g es continua. ■

En los espacios producto, tenemos una métrica natural conocida como la ***métrica producto***, la cual, se define de la siguiente manera.

Proposición 1.4 *Sean (X_1, d_1), (X_2, d_2), $\ldots$, (X_n, d_n), espacios métricos. Consideremos la función $\rho : \left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) \to [0, \infty)$, definida por*

$$\rho(x, y) = \ max\{d_j(x_j, y_j) : j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Entonces ρ es una métrica en $\prod_{j=1}^{n} X_j$.

Demostración. Sean $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dos elementos de $\prod_{j=1}^{n} X_j$ y hacemos $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Como $d_j(x_j, y_j) \geq 0$ para cada $j \in I$, entonces $\rho(x, y) \geq 0$. Además $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $d_j(x_j, y_j) = 0$ para cada $j \in I$ y esto sucede si y sólo si $x_j = y_j$ para cada $j \in I$. Por lo tanto $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Ahora bien, como $d_j(x_j, y_j) = d_j(y_j, x_j)$, tenemos que $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. Tomemos $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \prod_{j=1}^{n} X_j$. Entonces

$$\begin{aligned}
\rho(x, y) = & \max\{d_j(x_j, y_j) : j \in I\} \\
\leq & \max\{d_j(x_j, z_j) + d_j(z_j, y_j) : j \in I\} \\
\leq & \max\{d_j(x_j, z_j) : j \in I\} + \max\{d_j(z_j, y_j) : j \in I\} \\
= & \rho(x, z) + \rho(z, y).
\end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que ρ es una métrica para $\prod_{j=1}^{n} X_j$. ■

1.1. ϵ-nubes

Dados un subconjunto A de X y $\epsilon > 0$, frecuentemente utilizaremos el conjunto abierto que se obtiene al unir los abiertos $B_\epsilon(a)$ haciendo variar el punto a, sobre el conjunto A. Al abierto construido de esta forma le llamamos la ***nube de radio*** ϵ ***de*** A.

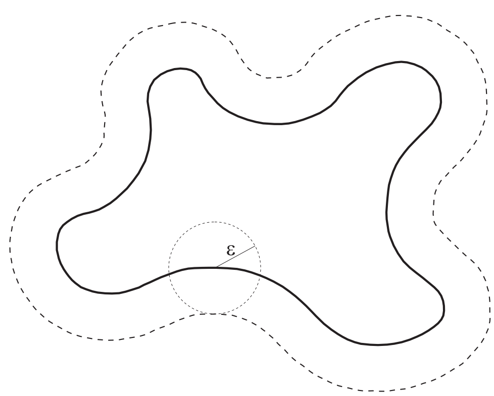


Figura 1.1: La nube de radio ϵ.

Es claro que este concepto de nube, es equivalente a la siguiente definición.

Definición 1.5 *Sean A un subconjunto de X y $\epsilon > 0$. Decimos que la* ***nube de radio*** ϵ ***de*** A*, es el conjunto*

$$N(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \epsilon\}.$$

Cuando un espacio está formado por un único punto, decimos que es ***degenerado***. En cualquier otro caso, decimos que el espacio es ***no degenerado***.

Definición 1.6 *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado.*

En adelante, supondremos que X representa un continuo a menos que explícitamente digamos otra cosa. Dado un continuo X, le llamamos subcontinuo de X a cualquier subconjunto cerrado, no vacío y conexo de X.

Definición 1.7 *Un* ***subcontinuo*** *de un continuo X, es un subconjunto no vacío, cerrado y conexo de X.*

La colección de subcontinuos de un continuo, se denota por $C(X)$ y sus propiedades han sido estudiadas ampliamente por diversos investigadores a partir de 1922 a la fecha. Ésta y otras familias, reciben un nombre especial, como veremos enseguida.

1.2. Hiperespacios

Le llamamos ***hiperespacio*** de un continuo X, a cualquier familia de subconjuntos de X cuyos elementos posean una o varias propiedades topológicas. Por ejemplo, la familia de los subconjuntos conexos y la familia de los subconjuntos cerrados, son ejemplos de hiperespacios de un continuo dado.

Los hiperespacios de X más conocidos y estudiados, son los siguientes:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}, \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\} \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\} \end{aligned}$$

Como podemos observar, los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son subconjuntos de 2^X. Así que, si 2^X tiene una topología, entonces $C_n(X)$ y $F_n(X)$ tendrán la topología que heredan como subespacios.

1.2.1. La topología de Hausdorff

En el hiperespacio 2^X, la topología será la que induce una métrica. Consideremos la función $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$, definida como

$$H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}.$$

Es conocido [32, Teorema 0.2] que la función H es una métrica para 2^X y se le conoce como la ***métrica de Hausdorff***.

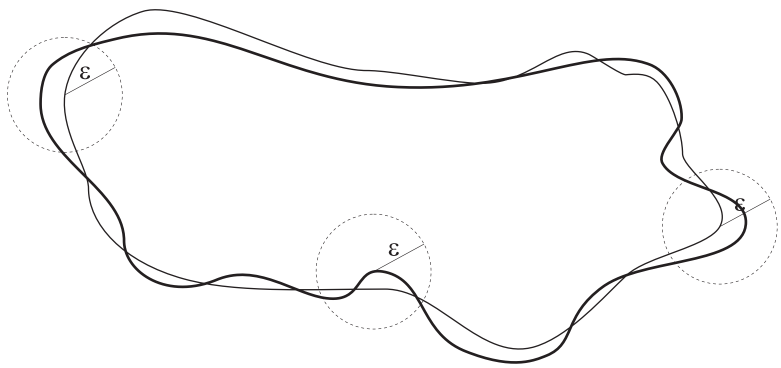


Figura 1.2: Puntos de 2^X, muy cercanos uno del otro.

De manera intuitiva, podemos decir que un punto de 2^X se encuentra muy cerca de otro, si las "diferencias" entre sus nubes de un radio dado, son muy pequeñas. Formalmente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.8 *Dados A, $B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, se cumple que $H(A, B) < \epsilon$ si y sólo si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.*

Demostración. Sea $E = \{\delta > 0 : A \subset N(\delta, B) \text{ y } B \subset N(\delta, A)\}$. Observemos que $H(A, B) = \inf(E)$.

Supongamos que $H(A, B) < \epsilon$. Como ϵ no puede ser una cota inferior de E, existe $\epsilon_0 \in E$ tal que $\epsilon_0 < \epsilon$. De manera que $A \subset N(\epsilon_0, B) \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon_0, A) \subset N(\epsilon, A)$.

Ahora supongamos que $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Hacemos $\mathcal{B} = \{N(\delta, A) : \delta \in (0, \epsilon)\}$. Si $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Sea $\delta_0 > 0$ tal que $d(a, b) < \delta_0 < \epsilon$. Entonces $b \in B_{\delta_0}(a) \subset N(\delta_0, A) \in \mathcal{B}$. De manera que $\mathcal{B}$ es una cubierta abierta para B, y como éste es compacto, existen δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_m$, elementos del intervalo $(0,\epsilon)$, tales que $B \subset N(\delta_1, A) \cup N(\delta_2, A) \cup \cdots \cup N(\delta_m, A)$. Sea $\delta_B = \max\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$. Por lo anterior, $\delta_B \in (0,\epsilon)$ y $B \subset N(\delta_B, A)$.

Haciendo $\mathcal{A} = \{N(\delta, B) : \delta \in (0,\epsilon)\}$ y procediendo de manera análoga, obtenemos $\delta_A \in (0,\epsilon)$ tal que $A \subset N(\delta_A, B)$. Sea $\delta = \max\{\delta_A, \delta_B\}$. Entonces $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$, así que $\delta \in E$. Por tanto $H(A,B) \leq \delta < \epsilon$. ■

Notemos que la métrica de Hausdorff está dada en términos de la métrica d en el espacio X, así que deberíamos escribir H_d. Sin embargo, cuando no haya lugar a confusión, escribiremos simplemente H. Sabemos también que si d y e son métricas que inducen la misma topología en X, entonces H_d y H_e inducen la misma topología en 2^X [33, Corolario 4.6].

A la topología inducida por la métrica de Hausdorff en el espacio 2^X, se le conoce como ***la topología de Hausdorff***. En adelante, cuando se mencione al hiperespacio 2^X, supondremos que su topología es la de Hausdorff. De acuerdo con [32, Teorema 0.8 y Teorema 1.9], tenemos que dicho hiperespacio es un compacto conexo por trayectorias. En consecuencia, 2^X es un continuo.

En 1931, K. Borsuk y S. Ulam iniciaron el estudio del hiperespacio $F_n(X)$. En su artículo [4], definieron a este espacio como ***el n-ésimo producto simétrico de*** X.

El hiperespacio $F_n(X)$ es un subespacio métrico de 2^X. Ahora demostraremos que $F_n(X)$ es un continuo.

Proposición 1.9 *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $f : \prod_1^n X \to F_n(X)$ *está definida como* $f((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, *entonces* f *es continua y suprayectiva.*

Demostración. Si $A \in F_n(X)$, entonces $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ con $k \leq n$. En caso de que $k = n$ tenemos que $f(a_1, a_2, \ldots a_n) = A$. Si $k < n$ hacemos $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_n = a_1$ y obtenemos que $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = A$. Por lo tanto f es suprayectiva.

Ahora veamos que f es continua. Consideremos la métrica producto que se define en la Proposición 1.4. Tomemos $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \prod_1^n X$ y $\epsilon > 0$. Con $\delta = \epsilon$, tenemos que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_1^n X$ es tal que $\rho(z, x) < \delta$ resulta que $d(z_j, x_j) < \delta$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como $x_j \in f(x)$ y $z_j \in f(z)$, tenemos que $f(x) \subset N(\delta, f(z))$ y además $f(z) \subset N(\delta, f(x))$. Luego, por la Proposición 1.8, $H(f(z), f(x)) < \delta = \epsilon$ y con esto concluimos que f es continua. ■

Corolario 1.10 *El hiperespacio $F_n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Como X es un continuo, entonces $\prod_1^n X$ también lo es. De acuerdo con la proposición anterior, $F_n(X)$ es la imagen continua de un continuo, luego, $F_n(X)$ es un continuo. ■

1.2.2. Topología de Vietoris

En la topología de Hausdorff, los abiertos básicos de 2^X, son del tipo $B_\epsilon^{2^X}(A)$. Ahora mostraremos una topología equivalente, en la cual, los abiertos básicos se definen utilizando abiertos de X.

Definición 1.11 *Si U_1, U_2, U_3, $\ldots$, U_n son subconjuntos de X y $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, definimos $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ como*

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{j=1}^n U_j \ \textit{y}\ A \cap U_j \neq \emptyset \ \textit{para cada}\ j \in I_n \right\}.$$

Se sabe que la colección

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ U_i \text{ es abierto en } X \text{ para cada } i \in I_n\}$$

es base para una topología equivalente a la que induce la métrica de Hausdorff [33, Teorema 4.5]. A dicha topología se le conoce como ***la topología de Vietoris***.

Como $F_n(X)$ es un subcontinuo de 2^X, de aquí en adelante, los conjuntos de la forma $F_n(X) \cap \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$, los denotaremos por

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle_{F_n(X)}.$$

Cuando U_1, U_2, $\ldots$, U_m, son abiertos de X, el conjunto $\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle_{F_n(X)}$ es un abierto básico para la topología de Vietoris.

Los resultados siguientes, serán de utilidad más adelante, cuando trabajemos con diversas propiedades de los sistemas dinámicos.

Proposición 1.12 *Si U es un subconjunto cerrado de X, entonces $\langle U\rangle$ es un cerrado de 2^X y $\langle U\rangle_{F_n(X)}$ es un cerrado de $F_n(X)$.*

Demostración. Como $F_n(X)$ es un subespacio de 2^X, será suficiente demostrar que $\langle U\rangle$ es un cerrado de 2^X.

Sea $A \in 2^X \setminus \langle U\rangle$. Como $A \notin \langle U\rangle$, existe $x_0 \in A$ tal que $x_0 \notin U$ y, como U es cerrado, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subset X \setminus U$.

Sea $B \in 2^X$ tal que $H(A, B) < \epsilon$. Como $x_0 \in A \subset N(\epsilon, B)$, existe $y_0 \in B$ tal que $d(y_0, x_0) < \epsilon$, de manera que $y_0 \in B_\epsilon(x_0) \subset X \setminus U$, así que $y_0 \notin U$ y por tanto $B \not\subset U$. Con esto tenemos que $B \notin \langle U\rangle$, entonces $B \in 2^X \setminus \langle U\rangle$.

Por lo anterior, $B_\epsilon^{2^X}(A) \subset 2^X \setminus \langle U\rangle$, de manera que $2^X \setminus \langle U\rangle$ es un abierto de 2^X y en consecuencia $\langle U\rangle$ es cerrado. ■

Proposición 1.13 *Sea U un subconjunto de X. Si $f : X \to X$ es una función continua, entonces*

$$\left\{f(A) : A \in \langle U\rangle_{F_n(X)}\right\} = \langle f(U)\rangle_{F_n(X)}.$$

Demostración. Si $B \in \left\{f(A) : A \in \langle U\rangle_{F_n(X)}\right\}$, entonces existe $A \in \langle U\rangle_{F_n(X)}$, tal que $f(A) = B$. Como $A \in \langle U\rangle_{F_n(X)}$, se tiene que tanto A como $f(A)$ son cerrados en X. Además $A \subset U$, así que $f(A) \subset f(U)$. De lo anterior, tenemos que $B \subset f(U)$ y por lo tanto $B \in \langle f(U)\rangle_{F_n(X)}$. Con esto concluimos que $\left\{f(A) : A \in \langle U\rangle_{F_n(X)}\right\} \subset \langle f(U)\rangle_{F_n(X)}$.

Ahora tomemos $B \in \langle f(U)\rangle_{F_n(X)}$ y supongamos que $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ con $k \leq n$. Como $B \subset f(U)$, existen k elementos de U, a los que denotaremos por x_1, x_2, $\ldots$, x_k, tales que $f(x_j) = y_j$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Hagamos $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Entonces $A \in \langle U\rangle_{F_n(X)}$ y $f(A) = B$, Así que $B \in \left\{f(A) : A \in \langle U\rangle_{F_n(X)}\right\}$.

De lo anterior resulta que $\langle f(U)\rangle_{F_n(X)} \subset \{f(A) : A \in \langle U\rangle_{F_n(X)}\}$ y por lo tanto se cumple la igualdad requerida. ■

Proposición 1.14 *Sean U y V dos subconjuntos de X. Si $f : X \to X$ es una función continua y $n \geq 2$, entonces*

$$\{f(A) : A \in \langle U, V\rangle_{F_n(X)}\} = \langle f(U), f(V)\rangle_{F_n(X)}.$$

Demostración. Dado $B \in \{f(A) : A \in \langle U, V\rangle_{F_n(X)}\}$, tenemos que existe $A \in \langle U, V\rangle_{F_n(X)}$, tal que $f(A) = B$. Observemos que el conjunto B es cerrado por ser imagen continua de un cerrado. Como $A \subset U \cup V$, entonces $B = f(A) \subset f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$. Tomemos $x_1 \in A \cap U$ y $x_2 \in A \cap V$. Lo anterior es posible, ya que A intersecta tanto a U como a V. Entonces $f(x_1) \in f(A) \cap f(U)$ y además $f(x_2) \in f(A) \cap f(V)$, así que $B \cap f(U) \neq \emptyset$ y $B \cap f(V) \neq \emptyset$ y por lo tanto, $B \in \langle f(U), f(V)\rangle_{F_n(X)}$. De esta forma hemos demostrado que

$$\{f(A) : A \in \langle U, V\rangle_{F_n(X)}\} \subset \langle f(U), f(V)\rangle_{F_n(X)}.$$

Ahora tomemos $B \in \langle f(U), f(V)\rangle_{F_n(X)}$. En caso de que B contenga un único elemento, es decir, $B = \{y\}$, tenemos que $y \in f(U) \cap f(V)$, así que existen $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = y$. De manera que $A = \{x_1, x_2\} \in \langle U, V\rangle_{F_n(X)}$ y $f(A) = B$. Por tanto $B \in \{f(A) : A \in \langle U, V\rangle_{F_n(X)}\}$.

Supongamos que B contiene k elementos. Podemos suponer que $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ con $k \leq n$. Como $B \cap f(U) \neq \emptyset$, $B \cap f(V) \neq \emptyset$ y $B \subset f(U) \cup f(V)$, podemos suponer que existe $r < k$ tal que $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\} \cup \{y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_k\}$ con $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\} \subset f(U)$ y $\{y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_k\} \subset f(V)$.

Por lo anterior, existen r puntos de U, a quienes denotaremos por x_1, x_2, $\ldots$, x_r, tales que $f(x_j) = y_j$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ y también existen $k-r$ puntos de V, denotados por x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_k, tales que $f(x_j) = y_j$ para cada $j \in \{r+1, r+2, \ldots, k\}$. Sea $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Entonces $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$, así que $A \in \langle U, V\rangle_{F_n(X)}$ y $f(A) = B$. Por lo tanto $B \in \{f(A) : A \in \langle U, V\rangle_{F_n(X)}\}$. Con esto, concluimos que

$$\langle f(U), f(V)\rangle_{F_n(X)} \subset \{f(A) : A \in \langle U, V\rangle_{F_n(X)}\}$$

y con ello se cumple la igualdad requerida por la proposición. ■

1.2.3. Las funciones inducidas

Dada una función continua f, entre los continuos X y Y, si A es un subconjunto cerrado de X, entonces $f(A)$ es un subconjunto cerrado de Y. Si además A es finito o el número de sus componentes conexas es finito, entonces el número de puntos o de componentes de $f(A)$ resultará también ser finito.

Definimos $2^f : 2^X \to 2^Y$ por $2^f(A) = f(A)$ y por lo anterior, dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos bien definidas las funciones $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ y $f_n : F_n(X) \to F_n(Y)$ de tal forma que $C_n(f)(A) = f(A)$ y $f_n(A) = f(A)$, respectivamente. A estas tres funciones les llamamos ***las funciones inducidas***.

A la fecha, existe una gran cantidad de investigación respecto a las relaciones entre una función f y sus funciones inducidas. Entre los artículos escritos sobre el tema podemos destacar los escritos por H. Hosokawa [23], [24], [25], [26], [27], así como las investigaciones de J. J. Charatonik, W. J. Charatonik y A. Illanes, [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [28].

1.3. Sistemas Dinámicos

Dados un continuo X y una función continua $f : X \to X$, al espacio X le llamamos el espacio fase, o espacio de estados. A los elementos de X los llamamos estados del sistema.

El estudio de la dinámica de un espacio, nos permite entender de qué manera cambian las cosas con el tiempo, es decir, si suponemos que el estado x_n del sistema en cuestión, determina de forma única al estado x_{n+1}, se puede decir que, conociendo el estado del sistema en el presente, podemos conocer el estado del sistema en el futuro y en caso de que la función f sea biyectiva, podemos conocer también el estado del sistema en el pasado.

Definición 1.15 *Un* ***sistema dinámico*** *es una pareja (X, f) en la que X es un continuo y $f : X \to X$ es una función continua.*

En un sistema dinámico (X, f), diremos que la órbita de un punto x, es el conjunto obtenido al aplicarle la función f. En adelante $f^n(x)$ significará $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n\ veces}(x)$ y $f^0(x) = x$.

La órbita de un punto x se denotará por

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Es posible que la órbita de un punto sea un conjunto infinito, pero también puede suceder que sea finito, en este caso, podría suceder que para algún $p \in \mathbb{N}$, tengamos que $f^p(x) = x$, o bien que dentro de la órbita de x, exista un punto z con esa característica.

Definición 1.16 *En un sistema dinámico (X, f), un punto x es **periódico**, si existe $p > 0$ tal que $f^p(x) = x$, además, al menor entero p con esta característica le llamaremos el **periodo** de x.*

La órbita de un punto periódico cuyo periodo es p es el conjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{f(x), f^2(x), \ldots, f^p(x)\}.$$

Cuando tenemos que $f(x) = x$, decimos que x es un ***punto fijo***. En este caso, podemos decir que x es un punto peródico de periodo 1.

Observemos que si (X, f) es un sistema dinámico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos fijos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ y como $f(x_n) = x_n$, entonces podemos afirmar que $f(x) = x$. Lo anterior significa que el conjunto de puntos fijos de un sistema dinámico es cerrado. Además es claro que si denotamos por E al conjunto de puntos fijos, tenemos que $f(E) = E$. A los conjuntos como el anterior, les llamamos invariantes del sistema.

Definición 1.17 *Si (X, f) es un sistema dinámico y $Y \subset X$, decimos que Y es **invariante** si $f(Y) \subset Y$.*

Recordemos que si $f : X \to X$ es una función continua y $A \subset X$, entonces $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$. El resultado siguiente, muestra que la cerradura de la órbita de un punto, es un conjunto invariante.

Proposición 1.18 *Sea (X, f), un sistema dinámico. Si $x \in X$, entonces $\overline{\mathcal{O}(x)}$, es un conjunto invariante.*

Demostración. Como $\mathcal{O}(x) \subset X$, entonces $f\left(\overline{\mathcal{O}(x)}\right) \subset \overline{f\left(\mathcal{O}(x)\right)}$. Observemos que si $z \in \mathcal{O}(x)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $z = f^k(x)$, así que $f(z) = f^{k+1}(x) \in \mathcal{O}(x)$. De manera que $f\left(\mathcal{O}(x)\right) \subset \mathcal{O}(x)$.

Por lo tanto, $f\left(\overline{\mathcal{O}(x)}\right) \subset \overline{f\left(\mathcal{O}(x)\right)} \subset \overline{\mathcal{O}(x)}$. De manera que $\overline{\mathcal{O}(x)}$ es invariante. ■

Cuando un sistema dinámico contiene subconjuntos cerrados e invariantes, dichos subconjuntos forman un sistema dinámico también, pudiendo heredar algunas propiedades del sistema que lo contiene.

Definición 1.19 *Un sistema dinámico (Y, g) es un **subsistema de** (X, f), si $Y \subset X$ y $g(y) = f(y)$ para todo $y \in Y$.*

En este trabajo nos interesa estudiar la relación que existe entre las propiedades dinámicas de un sistema (X, f) y las propiedades dinámicas del sistema $(F_n(X), f_n)$, así que, más adelante veremos por ejemplo qué se puede decir sobre la periodicidad de los puntos de $(F_n(X), f_n)$ si tenemos información sobre la periodicidad de los puntos de (X, f) y viceversa.

También abordaremos este tema respecto a otras propiedades dinámicas importantes, como la casi-periodicidad, recurrencia, recurrencia regular, puntos errantes, puntos no errantes, minimalidad, exactitud, turbulencia, y propiedad de persecución.

Respecto a propiedades dinámicas, el estudio de la relación entre una función y las funciones inducidas, ha sido abordado recientemente por A. Illanes, H. Méndez y G. Acosta en [1], donde se investiga acerca de la transitividad de las funciones inducidas sobre 2^X y sobre $C(X)$. En [21]; J. L. G. Guirao, D. Kwietniak, M. Lampart, P. Oprocha y A. Peris investigan la relación entre f y 2^f respecto a las definiciones de caos más usuales en sistemas dinámicos. En [30]; H. Méndez muestra que la densidad del conjunto de puntos periódicos en $(2^X, 2^f)$, no implica la densidad de los puntos periódicos en (X, f) y además, presenta una condición necesaria y suficiente para que el conjunto de puntos periódicos en $(2^X, 2^f)$, sea denso.

En [22], G. Higuera, presenta resultados acerca de la relación entre una función f y la función inducida en el hiperespacio $F_n(X)$, respecto a la transitividad, caoticidad, especificidad, la propiedad P y sobre homeomorfismos expansivos.

Capítulo 2

Ejemplos

Existen algunas funciones que utilizaremos en momentos clave a lo largo de nuestro trabajo. Dedicaremos este capítulo para presentarlas.

Ejemplo 2.1 *Sea b cualquier número del intervalo $[0,1)$ y sea $X = [0,b]$. El sistema (X,f) donde $f(x) = x^2$, tiene las siguientes características.*

1. Si $x \in X$, entonces su órbita converge a 0.

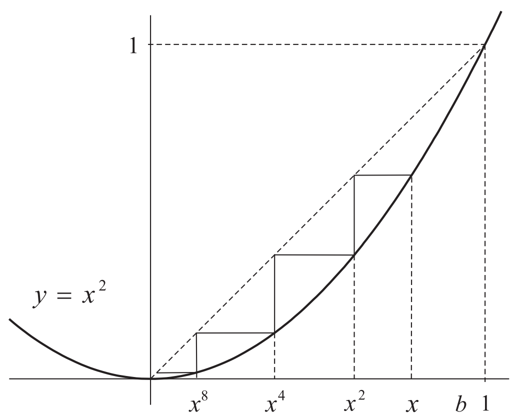


Figura 2.1: $\mathcal{O}(x)$ converge a cero.

Ejemplo 2.2 *Sean $S^1 = \{e^{\theta i} \in \mathbb{C} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ y $f : S^1 \to S^1$ definida como $f(z) = z^2$. En este espacio la distancia entre dos puntos está dada por $d(x,y) = \|x - y\|$.*

Si z_1 y z_2 son puntos no antípodas de S^1, al menor de los arcos entre ellos le llamaremos **el arco** *entre z_1 y z_2. En adelante, este arco será denotado por $S(z_1, z_2)$ y cuando no haya lugar a confusión, simplemente por S. Su longitud, será denotada por $l(S)$ y, si es necesario, utilizaremos la notación $l\left(S(z_1, z_2)\right)$.*

1. *Si $z = e^{\theta i}$, entonces la longitud del arco entre z y 1 es*

$$l(S) = \begin{cases} \theta, & si\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 2\pi - \theta, & si\ \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

2.1. Rotaciones irracionales

En el siguiente ejemplo consideraremos una circunferencia de perímetro 1 y definiremos una rotación cuyo parámetro será un número real entre cero y uno. El sistema dinámico así construido posee algunas propiedades muy interesantes que nos serán de utilidad más adelante.

Ejemplo 2.3 *Sea $a \in [0, 1)$ y*

$$T = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{2\pi} e^{\theta i} \text{ con } \theta \in [-\pi, \pi] \right\}.$$

Definimos una función $R_a : T \to T$ de la forma siguiente:

$$R_a \left(\frac{1}{2\pi} e^{\theta i} \right) = \frac{1}{2\pi} e^{(\theta + 2\pi a)i}.$$

De acuerdo con la definición, las iteraciones de esta rotación tienen una fórmula sencilla. Si k es un entero positivo, entonces es fácil ver que

$$R_a^k(z) = \frac{1}{2\pi} e^{(\theta + k2\pi a)i},$$

para cada $z = \dfrac{1}{2\pi} e^{\theta i}$. Observemos que el parámetro a de esta función, indica el tamaño de la rotación.

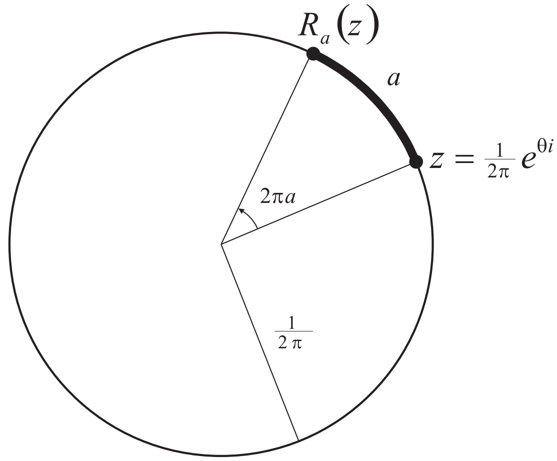


Figura 2.2: Rotación de la circunferencia, con parámetro a.

La métrica en este espacio es la que hereda de los números complejos como espacio métrico, así que la distancia entre dos puntos es la longitud de la cuerda que subtienden ambos puntos. De esta forma, si $z = \frac{1}{2\pi}e^{\alpha i}$ *y* $w = \frac{1}{2\pi}e^{\beta i}$ *entonces*

$$d(z, w) = \frac{1}{2\pi}\|e^{\alpha i} - e^{\beta i}\|.$$

En el sistema (T, R_a) *se cumple lo siguiente:*

1. *Si* a *es un número racional, entonces cualquier punto* $z \in T$ *es periódico y su órbita no es densa en* T.

2. *Si* a *es un número irracional, entonces cualquier punto* $z \in T$ *tiene órbita densa en* T *y no es periódico.*

3. *Si* a *es un número irracional y* $k \in \mathbb{N}$, *la función* $f = R_a^k$ *es la rotación irracional cuyo parámetro es* ka, *es decir,* $R_a^k = R_{ka}$.

Demostración. Para probar *1*, Supongamos que $a = \frac{q}{p}$ con $(q, p) = 1$ y sea $\frac{1}{2\pi}e^{\theta i} = z \in T$. Aplicando p veces la función R_a, resulta que

$$R_a^p(z) = \frac{1}{2\pi}e^{\left(\theta + p2\pi\frac{q}{p}\right)i} = \frac{1}{2\pi}e^{(\theta+2\pi q)i} = \frac{1}{2\pi}e^{\theta i} = z.$$

Afirmamos que $p = \min\left\{k \in \mathbb{N} : k\dfrac{q}{p} \in \mathbb{Z}\right\}$. Para demostrar esto, supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k < p$ y $k\dfrac{q}{p} = t \in \mathbb{Z}$. Como $(q, p) = 1$, existen dos enteros u y w tales que $uq + wp = 1$. Entonces tenemos que $uqk + wpk = k$ y por lo tanto $k = upt + wpk = p(ut + wk)$, de aquí que p divide a k y entonces $p \leq k$, como esto contradice que $k < p$ concluimos que $k\dfrac{q}{p} \notin \mathbb{Z}$ para todo $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$. Por lo tanto, z es periódico y su periodo es p.

Como z es periódico, entonces los puntos de su órbita son los elementos del conjunto finito

$$\left\{R_a^0(z), R_a^1(z), R_a^2(z), \ldots, R_a^{p-1}(z)\right\}$$

y por lo tanto no puede ser densa en T.

Para probar *2*, sea a un número irracional y demostremos primero que los puntos de T no son periódicos. Sea $z = \dfrac{1}{2\pi}e^{\theta i} \in T$. Si existiera $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_a^k(z) = z$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}e^{(\theta + k2\pi a)i} = \frac{1}{2\pi}e^{\theta i}.$$

De esto se sigue que

$$e^{\theta i}\left(e^{(k2\pi a)i} - 1\right) = e^{(\theta + k2\pi a)i} - e^{\theta i} = 0.$$

Considerando el primer miembro de esta cadena de igualdades, se tiene que $e^{(k2\pi a)i} = 1$ y esto sólo es posible si $k2\pi a = m2\pi$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$, es decir, sólo si $a = \frac{m}{k}$. Como a es irracional, lo anterior no es posible y por lo tanto z no puede ser periódico.

Ahora demostraremos que la órbita de z es densa. Observemos que la órbita de z es un conjunto infinito de puntos distintos, pues si sucediera que $R_a^k(z) = R_a^m(z) = w$, siendo k y m enteros con $k < m$ entonces tendríamos que $R_a^{m-k}(w) = R_a^{m-k}(R_a^k(z)) = R_a^m(z) = w$. Esto significa que w es un punto periódico y su periodo es menor o igual que $m-k$, lo cual, como demostramos anteriormente, es falso.

Sean $u \in T$ y $\epsilon > 0$. Como T es compacto, la órbita de z tiene un punto de acumulación en T y, por lo tanto, existen dos números enteros k y m tales que $k < m$ y $d\left(R_a^m(z), R_a^k(z)\right) < \epsilon$. Haciendo $p = m - k$ tenemos que $R_a^p(z) = \frac{1}{2\pi} e^{(\theta + p2\pi a)i}$, y si consideramos que

$$d\left(R_a^m(z), R_a^k(z)\right) = \frac{1}{2\pi}\left\|e^{(\theta+m2\pi a)i} - e^{(\theta+k2\pi a)i}\right\| = \frac{1}{2\pi}\left\|e^{m2\pi ai} - e^{k2\pi ai}\right\|,$$

resulta que la distancia entre los puntos $R_a^p(z)$ y z, es menor que ϵ, observemos que

$$\begin{aligned} d\left(R_a^p(z), z\right) &= \frac{1}{2\pi}\left\|e^{(\theta+p2\pi a)i} - e^{\theta i}\right\| = \frac{1}{2\pi}\left\|e^{\theta i}\right\| \cdot \left\|e^{(p2\pi a)i} - 1\right\| \qquad (2.1)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left\|e^{m2\pi ai - k2\pi ai} - 1\right\| = \frac{1}{2\pi}\left\|\frac{e^{m2\pi ai}}{e^{k2\pi ai}} - 1\right\| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\|\frac{e^{m2\pi ai} - e^{k2\pi ai}}{e^{k2\pi ai}}\right\| = \frac{1}{2\pi}\left\|e^{m2\pi ai} - e^{k2\pi ai}\right\| \\ &= d\left(R_a^m(z), R_a^k(z)\right) < \epsilon. \end{aligned}$$

Notemos que si r es un entero mayor que 1, entonces

$$\begin{aligned} d\left(R_a^{rp}(z), R_a^{(r-1)p}(z)\right) &= \frac{1}{2\pi}\left\|e^{(\theta+rp2\pi a)i} - e^{(\theta+(r-1)p2\pi a)i}\right\| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\|e^{rp2\pi ai} - e^{rp2\pi ai - p2\pi ai}\right\| = \frac{1}{2\pi}\left\|1 - \frac{1}{e^{p2\pi ai}}\right\| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\|e^{p2\pi ai} - 1\right\| = d\left(R_a^p(z), z\right). \end{aligned}$$

De lo anterior, tenemos que los puntos $R_a^p(z)$, $R_a^{2p}(z)$, $R_a^{3p}(z)$, $\ldots$ forman una sucesión de puntos distintos en T con la característica de que la distancia entre dos elementos consecutivos es una constante menor que ϵ. Por lo tanto, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $R_a^{rp}(z) \in B_\epsilon(u)$ y así concluimos que la órbita de z es densa en T.

Para demostrar el inciso *3*, tomemos $k \in \mathbb{N}$. Como ka es un número irracional y

$$R_a^k(z) = \frac{1}{2\pi} e^{(\theta+k2\pi a)i} = \frac{1}{2\pi} e^{(\theta+2\pi(ka))i} = R_{ka}(z),$$

entonces R_a^k es una rotación irracional y su parámetro es ka. ■

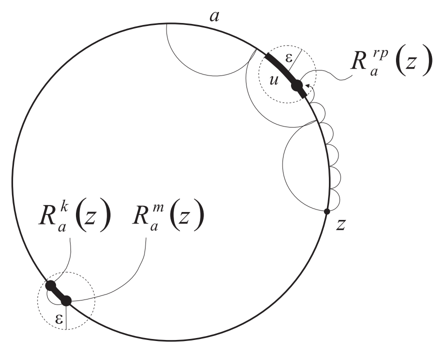


Figura 2.3: La órbita de z es densa.

En adelante, al utilizar el sistema dinámico (T, R_a), diremos simplemente ***la rotación racional o irracional*** del círculo, según a sea un número racional o irracional, respectivamente.

2.2. La máquina de sumar

Consideremos el espacio (Y, τ_Y) donde $Y = \{0, 1\}$ y τ_Y es la topología discreta. Sean $X = \prod_{n=1}^{\infty} Y$ y τ_X la topología producto. En el espacio (X, τ_X) definiremos una función $f : X \to X$, muy particular. A cada elemento de X, f le suma en base dos, el punto $(1, 0, 0, 0, \dots)$. Con esto queremos decir que nuestra función va sumando, coordenada a coordenada, de acuerdo con el algoritmo de la suma en base dos a la que denotaremos por $\oplus_2$. Por ejemplo, si $x = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$, entonces $f(x) = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

Una manera más simple y familiar de describir esta suma, es escribiendo

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & & & & & & & & 1 \\ \hline \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Es decir, sumamos $1 + 1 = 10_2$, entonces ponemos 0 y llevamos 1, el cual lo sumamos al siguiente 1, etc., tal como lo hacemos con nuestras sumas normales. Notemos que cuando aparece el primer 0 de x, y lo sumamos al 1 que llevamos, el resultado es 1, por lo que a partir de ese momento, ya sólo copiamos las cifras de x.

De acuerdo con lo anterior, $f : X \to X$ está definida como sigue: si $x = (1, 1, 1, \dots)$, entonces $f(x) = (0, 0, 0, \dots)$. Si $x \neq (1, 1, 1, \dots)$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n = 0\}$. Así, la coordenada n de $f(x)$ estará dada por

$$f(x)_n = \begin{cases} x_n \oplus_2 1, & \text{si } n \leq k, \\ x_n, & \text{si } n > k. \end{cases}$$

Para ver que la función f es continua, utilizaremos la métrica d definida en el punto 2 de la Proposición 1.2.

Sea $x \in X$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$ y $\dfrac{1}{n-1} < \epsilon$. Sea $\delta < \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Tomemos un punto $z \in X$ tal que $z \in B_\delta(x)$. De acuerdo con la definición de la métrica, tenemos que z y x coinciden en al menos las primeras n coordenadas, es decir, si $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, entonces $z = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, z_{n+1}, z_{n+2}, \dots)$, de aquí que $f(z)$ y $f(x)$ coinciden en al menos las primeras n coordenadas también y, por lo tanto,

$$d\left(f(z), f(x)\right) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{n-1} < \epsilon.$$

Con esto, tenemos que $f(z) \in B_\epsilon(f(x))$ y por lo tanto f es continua.

El sistema dinámico (X, f) es conocido como ***la máquina de sumar***.

Utilizaremos este sistema dinámico para construir otro sistema $(\mathcal{D}, G)$ donde el espacio fase sea un continuo. Más adelante estudiaremos algunas de las propiedades dinámicas de la máquina de sumar y, demostraremos, que algunas de estas propiedades se conservan en el sistema $(\mathcal{D}, G)$.

Sea $g : X \to \mathcal{C}$ el homeomorfismo definido en la prueba de la Proposición 1.3 entre X y el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$, entonces la función $\psi : Cono(X) \to Cono(\mathcal{C})$, definida como $\psi\left((x_1, x_2, x_3, \dots), t\right) = (g((x_1 x_2, x_3, \dots)), t)$, es un homeomorfismo.

Ahora bien, en $\mathbb{R}^2$, hagamos $v = (\frac{1}{2}, 2)$. El conjunto $\mathcal{D} = \{tv + (1-t)c : t \in [0, 1], c \in \mathcal{C}\} \subset \mathbb{R}^2$ es el cono geométrico de $\mathcal{C}$ y la función $\varphi : Cono(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$, definida como $\varphi((c, t)) = tv + (1-t)c$ es un homeomorfismo.

Definimos $G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ como

$$G(tv + (1-t)c) = tv + (1-t)g\left(f(g^{-1}(c))\right).$$

Esta función es continua y así, tenemos el sistema dinámico $(\mathcal{D}, G)$, el cual contiene un subconjunto invariante, homeomorfo a X.

Para concluir esta sección, probaremos una propiedad importante de la máquina de sumar. Dadas $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in X$ y $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$[x]_m = x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{m-1}x_m$$

y denotamos por $\oplus_{2^m}$ la suma módulo 2^m, es decir, si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $a \oplus_{2^m} b$ es el único elemento en $\{0, 1, 2, \dots, 2^m - 1\}$ tal que $a + b \equiv a \oplus_{2^m} b (\text{mod } 2^m)$.

Dado que $\oplus_{2^m}$ es asociativa y conmutativa, es fácil ver que para cualesquiera a, b, $c \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$a \oplus_{2^m} b \oplus_{2^m} c = a \oplus_{2^m} (b + c) = (a + b) \oplus_{2^m} c.$$

Vamos a probar que para cualesquiera $x \in X$ y $m, n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$[x]_m \oplus_{2^m} n = [f^n(x)]_m. \tag{2.2}$$

Haremos esta prueba por inducción en n. Primero veamos qué ocurre con $n = 1$.

Si $x = (1, 1, 1, \dots)$, entonces $f(x) = (0, 0, 0, \dots)$. Por otra parte, $[x]_m = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m - 1$ y $[x]_m + 1 = 2^m$, de manera que

$$[x]_m \oplus_{2^m} 1 = 0 = 0 + 2 \cdot 0 + \cdots + 2^{m-1} \cdot 0 = [f(x)]_m.$$

Si $x \neq (1, 1, 1, \dots)$, sea $k = \min\{r \in \mathbb{N} : x_r = 0\}$. Si $k > m$, entonces $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 1$. Así que $[x]_m = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1}$ y para toda $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, la i-ésima coordenada de $f(x)$ es $x_i \oplus_2 1 = 1 \oplus_2 1 = 0$, así que $[f(x)]_m = 0 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 0 + \cdots + 2^{m-1} \cdot 0 = 0$. Como

$$[x]_m + 1 = (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1}) + 1 = 2^m,$$

tenemos que $[x]_m \oplus_{2^m} 1 = 0$. Por tanto $[x]_m \oplus_{2^m} 1 = [f(x)]_m$.

Finalmente, si $k \leq m$, entonces

$$\begin{aligned}[x]_m &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-2} + 2^{k-1} \cdot 0 + 2^k x_{k+1} + \cdots + 2^{m-1} x_m \\ &= 2^{k-1} - 1 + 2^k x_{k+1} + \cdots + 2^{m-1} x_m.\end{aligned}$$

Así que $[x]_m + 1 = 2^{k-1} + 2^k x_{k+1} + \cdots + 2^{m-1} x_m < 2^m$, por lo que

$$[x]_m \oplus_{2^m} 1 = 2^{k-1} + 2^k x_{k+1} + \cdots + 2^{m-1} x_m.$$

Por otro lado, para $f(x)$ se cumple que para toda $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, la i-ésima coordenada es $1 \oplus_2 1 = 0$, la k-ésima coordenada es $0 \oplus_2 1 = 1$ y, para toda $i \in \{k+1, k+2, \ldots, m\}$ la i-ésima coordenada es x_i. Por tanto

$$[f(x)]_m = 2^{k-1} + 2^k x_{k+1} + \cdots + 2^{m-1} x_m = [x]_m \oplus_{2^m} 1.$$

Supongamos ahora que la igualdad es válida para n. Usando la hipótesis de inducción y la igualdad para $n = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}[x]_m \oplus_{2^m} (n+1) &= ([x]_m \oplus_{2^m} n) \oplus_{2^m} 1 \\ &= [f^n(x)]_m \oplus_{2^m} 1 \\ &= [f(f^n(x))]_m \\ &= \left[f^{n+1}(x)\right]_m.\end{aligned}$$

Lo cual termina la inducción.

Una consecuencia útil de la fórmula que hemos probado, es que si se la aplicamos a $n = 2^m$, obtenemos lo siguiente.

Para empezar, notemos que

$$\begin{aligned}[x]_m &= x_1 + 2x_2 + 2^2 x_3 + \cdots + 2^{m-1} x_m \\ &\leq 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m - 1.\end{aligned}$$

Así que $[x]_m < 2^m$. Además, $2^m \equiv 0 \pmod{2^m}$. Por lo anterior, tenemos que $[x]_m \oplus_{2^m} 2^m = [x]_m$. De manera que $\left[f^{2^m}(x)\right]_m = [x]_m$. Así que si ponemos $f^{2^m}(x) = (y_1, y_2, \ldots)$, entonces

$$x_1 + 2x_2 + 2^2 x_3 + \cdots + 2^{m-1} x_m = y_1 + 2y_2 + 2^2 y_3 + \cdots + 2^{m-1} y_m.$$

Por la unicidad de la escritura en base 2, tenemos que

$$x_1 = y_1 \ , \ x_2 = y_2 \ , \ \ldots \ , \ x_m = y_m.$$

Por tanto, x y $f^{2^m}(x)$ coinciden en las primeras m coordenadas.

Por último, demostraremos, que en la máquina de sumar, las órbitas de cualquiera de sus puntos se dispersan por todo el espacio.

Proposición 2.4 *En la máquina de sumar, la órbita de cualquiera de sus puntos es densa.*

Demostración. Recordemos que en este sistema el espacio es $X = \prod_{n=1}^{\infty} \{0,1\}$. La topología es la inducida por la métrica definida en el inciso 2 de la Proposición 1.2. Además, la función f está definida por $f(x) = (0,0,0,\ldots)$ si $x = (1,1,1,\ldots)$ y si $x \neq (1,1,1,\ldots)$ entonces

$$f(x)_n = \begin{cases} x_n \oplus_2 1, & \text{si } n \leq k, \\ x_n, & \text{si } n > k. \end{cases} \qquad \text{donde } k = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n = 0\}.$$

Sea $x \in X$ tal que $x \neq (0,0,0,\ldots)$ y $x \neq (1,1,1,\ldots)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Observemos que con las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ podemos definir un entero a, cuyos dígitos en notación binaria sean precisamente dichas coordenadas. Así que hagamos $a = x_1 + 2x_2 + 2^2 x_3 + \cdots + 2^{n-1} x_n$. Notemos que $a = [x]_n$, tal como lo definimos en esta sección. Por la fórmula 2.2 que probamos antes, $[x]_n \oplus_{2^n} (2^n - a) = \left[f^{2^n - a}(x)\right]_n$.

Como $[x]_n \oplus_{2^n} (2^n - a)$ es el resultado de reducir módulo 2^n al número $a + 2^n - a = 2^n$ y $2^n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2^n)$, tenemos que $\left[f^{2^n-a}(x)\right]_n = 0$. De manera que si $f^{2^n-a}(x) = (y_1, y_2, \ldots)$, tenemos que $y_1 + 2y_2 + \cdots + 2^{n-1} y_n = 0$. Así que $f^{2^n-a}(x)$ es de la forma

$$f^{2^n-a}(x) = (0,0,0,\ldots,0,y_{n+1},y_{n+2},y_{n+3},\ldots)$$

y por lo tanto, $d\left(f^{2^n-a}(x),(0,0,0,\ldots)\right) \leq \dfrac{1}{2^n}$.

En caso de que $x = (0, 0, 0, \dots)$ o $x = (1, 1, 1, \dots)$, tenemos que $f^2(x) \notin \{(0, 0, 0, \dots), (1, 1, 1, \dots)\}$. Por lo que hemos visto, queda demostrado que la órbita de cualquier punto intersecta a todas las vecindades de $(0, 0, 0, \dots)$.

Ahora veamos que la órbita de un punto cualquiera es densa en X. Sean $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in X$ y sea $\epsilon > 0$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$ y $\dfrac{1}{n-1} < \epsilon$. De acuerdo con lo que hemos demostrado anteriormente, existe un entero k_1 tal que $d\left(f^{k_1}(x), (0, 0, 0, \dots)\right) < \dfrac{1}{2^n}$. Esto implica que las primeras n coordenadas de $f^{k_1}(x)$, son ceros. Sea $k_2 = y_1 + 2y_2 + 2^2 y_3 + \cdots + 2^{n-1} y_n$.

Como $\left[f^{k_1}(x)\right]_n = 0 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 0 + \cdots + 2^{n-1} \cdot 0 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \left[f^{k_1}(x)\right]_n + k_2 &= 0 + \left(y_1 + 2y_2 + 2^2 y_3 + \cdots + 2^{n-1} y_n\right) \\ &= y_1 + 2y_2 + 2^2 y_3 + \cdots + 2^{n-1} y_n < 2^n, \end{aligned}$$

De manera que $\left[f^{k_2}\left(f^{k_1}(x)\right)\right]_n = \left[f^{k_1}(x)\right]_n \oplus_{2^n} k_2 = y_1 + 2y_2 + 2^2 y_3 + \cdots + 2^{n-1} y_n$. Así que $f^{k_2}\left(f^{k_1}(x)\right)$ y y coinciden en al menos las primeras n coordenadas y por lo tanto $d\left(f^{k_1+k_2}(x), y\right) \leq \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n-1} < \epsilon$.

Con esto concluimos que la órbita de x intersecta a cualquier vecindad de un punto cualquiera y, así que dicha órbita es densa. ■

Capítulo 3

Propiedades puntuales

3.1. Periodicidad

Recordemos que en un sistema dinámico (X, f), un punto x es periódico, si existe $p > 0$ tal que $f^p(x) = x$. Es claro que en este caso, se tiene que $f^{mp}(x) = x$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$. En esta sección veremos que un punto del producto simétrico es periódico si y sólo si sus elementos son periódicos en el espacio base.

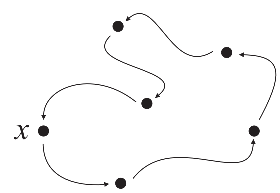


Figura 3.1: Un punto con periodo 6.

Teorema 3.1 *$A \in F_n(X)$ es periódico en $(F_n(X), f_n)$ si y sólo si para cada $x \in A$ se tiene que x es periódico en (X, f).*

Demostración. Supongamos que $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, con $k \leq n$, es un punto periódico en $(F_n(X), f_n)$. Entonces existe un entero $p > 0$ tal que $f_n^{mp}(A) = A$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Es decir, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\{f^{mp}(x_1), f^{mp}(x_2), \ldots, f^{mp}(x_k)\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}.$$

Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\{f^{mp}(x_1), f^{mp}(x_2), \ldots, f^{mp}(x_k)\}$ es una permutación del conjunto A. Como A es finito, tiene sólo un número finito de permutaciones, por lo que dos de éstas son iguales, es decir, existen $r, m \in \mathbb{N}$ tales que $r < m$ y $f^{mp}(x_i) = f^{rp}(x_i)$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. De manera que $f^{(m-r)p}(x_i) = x_i$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Por lo tanto, cada x_i es periódico en (X, f).

Ahora supongamos que para cualquier $x \in A$, se tiene que x es periódico en (X, f). Sea $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ con $k \leq n$. Entonces existen k enteros positivos p_1, p_2, $\ldots$, p_k tales que $f^{p_i}(x_i) = x_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Tomemos el mínimo común múltiplo de p_1, p_2, $\ldots$, p_k, es decir,

$$p = m.c.m.(p_1, p_2, \ldots, p_k).$$

Es claro que $f^p(x_i) = x_i$ para cualquier $i \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Así que $f_n^p(A) = A$ y, por lo tanto, A es periódico en $(F_n(X), f_n)$. ■

3.2. Recurrencia

Imaginemos que en el sistema dinámico (X, f) encontramos un punto x que tiene la característica de que al aplicarle muchas veces la función f, resulta que después de viajar por el espacio X, regresa tan cerca como queramos de sí mismo. En este caso, decimos que ese punto es recurrente. Por ejemplo, como veremos en la Proposición 3.4, en una rotación irracional del círculo, cualquier punto es recurrente.

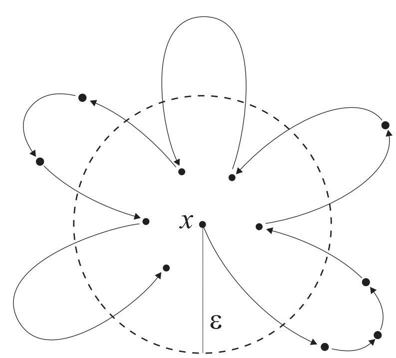


Figura 3.2: El punto x regresa a $B_\epsilon(x)$.

Definición 3.2 *Un punto $x \in X$ es* ***recurrente****, si para cada $\epsilon > 0$ existe una sucesión $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ y $d\left(f^{m_k}(x), x\right) < \epsilon$ para toda $k \in \mathbb{N}$.*

Según la definición, un punto es recurrente, si cualquiera de sus vecindades es intersectada una cantidad infinita de veces por la órbita de dicho punto.

Si x es un punto periódico de X y su periodo es p, entonces $f^{kp}(x) = x$ para cualquier $k \geq 0$ y por lo tanto, la órbita de x intersecta infinitas veces a cualquiera de sus vecindades.

Si x no es un punto periódico y cada vecindad suya es intersectada por la órbita de x en un punto diferente de x, entonces, así como en el caso anterior; cualquiera de sus vecindades contiene una cantidad infinita de puntos de dicha órbita. Por lo anterior, el siguiente teorema es cierto.

Teorema 3.3 *Un punto $x \in X$ es recurrente si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^k(x), x) < \epsilon$.*

Veremos que todo sistema dinámico contiene puntos recurrentes. Más adelante, cuando veamos el concepto de minimalidad, presentaremos una demostración de esta afirmación.

Considerando el Ejemplo 2.1, tenemos que el sistema (X, f) donde $X = [0, b]$ con $b < 1$ y $f(x) = x^2$, tiene la característica de que con excepción de 0, ningún punto regresa a todas sus vecindades y por lo tanto ninguno de ellos es recurrente.

Para demostrar esto, basta observar que si $x \in (0, b]$ entonces $x(1-x) > 0$, así que podemos elegir un número ϵ mayor que cero y tal que $\epsilon < x - x^2$. Entonces $x^2 < x - \epsilon$ y como $\cdots < x^4 < x^3 < x^2$, tenemos que la órbita de x nunca regresa a la vecindad $(x - \epsilon, b]$.

En contraste con el ejemplo anterior, enseguida veremos que existen sistemas dinámicos en los que todos sus puntos son recurrentes.

Proposición 3.4 *En una rotación irracional del círculo, todos los puntos son recurrentes.*

Demostración. Sea z un punto del círculo y sea $\epsilon > 0$. Por el Ejemplo 2.3; la órbita de z intersecta al abierto $U = B_\epsilon(z)$. Por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d\left(f^k(z), z\right) < \epsilon$. De esta forma concluimos que z es recurrente. ■

3.2.1. Puntos recurrentes en $F_n(X)$

Uno de los objetivos principales de este trabajo, es analizar la relación entre las propiedades dinámicas de un continuo X y las de su hiperespacio $F_n(X)$. Así que enseguida veremos cómo es la relación entre los puntos recurrentes de un espacio X y los puntos recurrentes del hiperespacio $F_n(X)$.

Teorema 3.5 *Si x es recurrente en (X, f), entonces $\{x\}$ es recurrente en $(F_n(X), f_n)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como x es recurrente en X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d\left(f^k(x), x\right) < \epsilon$, esto significa que $\{x\} \subset N\left(\epsilon, \left\{f^k(x)\right\}\right)$ y que $\left\{f^k(x)\right\} \subset N(\epsilon, \{x\})$. Entonces $H\left(\left\{f^k(x)\right\}, \{x\}\right) < \epsilon$, pero $\left\{f^k(x)\right\} = f_n^k(\{x\})$ así que $H\left(f_n^k(\{x\}), \{x\}\right) < \epsilon$ y, por lo tanto, $\{x\}$ es recurrente en $F_n(X)$. ■

Cuando tenemos dos o más puntos recurrentes en un sistema dinámico, cabe preguntarse si es posible mostrar que en algún momento regresan cerca de sí mismos al mismo tiempo.

Enseguida mostraremos que es posible encontrar puntos recurrentes cuyo movimiento no se sincroniza y, por lo tanto, no forman un punto recurrente en el producto simétrico.

Proposición 3.6 *Existe un sistema dinámico (X, f) y dos puntos recurrentes a y b en X, tales que $A = \{a, b\}$ no es recurrente en $(F_2(X), f_2)$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $Y_n = \{0, 1\}$ con la topología discreta. Sea $Y = \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ con la topología producto. Definimos el sistema (X, g), donde $X =$ Cono(Y) y $g|_Y = f$ es la función desplazamiento, es decir, $f((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ para cualquier $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in Y$. De esta forma, para cualquier $((x_1, x_2, x_3, \dots), t) \in X$, se tiene que

$$g((x_1,x_2,x_3,\dots),t) = ((x_2,x_3,x_4,\dots),t).$$

Para construir dos puntos recurrentes en X que nunca regresan a sus respectivas vecindades al mismo tiempo, vamos a considerar una sucesión de conjuntos, que nos servirán para definir los puntos. Sean

$$\begin{aligned}
I_0 &= \{1\}\\
I_1 &= \{5, 5+1\}\\
I_2 &= \left\{5^2, 5^2+1, 5^2+5, 5^2+5+1\right\}\\
I_3 &= \left\{5^3, 5^3+1, 5^3+5, 5^3+5+1,\right.\\
&\qquad\qquad \left. 5^3+5^2, 5^3+5^2+1, 5^3+5^2+5, 5^3+5^2+5+1\right\}.
\end{aligned}$$

Inductivamente, definimos I_n como

$$I_n = \{5^n\} \cup \left\{5^n + k : k \in \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j\right\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $m_n = \max(I_n)$. Sea $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ y definimos $a = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ por

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in I,\\ 0, & \text{si } k \notin I.\end{cases}$$

Observemos que el máximo de I_1 es $m_1 = 5+1$ y que el máximo de I_2 es $m_2 = 5^2+5+1$. De acuerdo con la definición de I_n tenemos que el máximo de I_n es $m_n = 5^n +$ max (I_{n-1}), por lo tanto resulta que

$$m_n = 5^n + 5^{n-1} + 5^{n-2} + \cdots + 5 + 1$$

y además max $(I_{n-1}) = m_n - 5^n$. Como

$$5^n + 5^{n-1} + 5^{n-2} + \cdots + 5 + 1 = \frac{5^{n+1}-1}{4},$$

entonces $5^n < m_n < 5^{n+1}$, de lo anterior tenemos que

$$5^1 < m_1 < 5^2 < m_2 < 5^3 < \cdots < 5^n < m_n < 5^{n+1}$$

y $5^{n+1} - m_n = \frac{3\cdot 5^{n+1}+1}{4}$ define una sucesión creciente y no acotada. Por lo tanto entre la coordenada m_n y la coordenada 5^{n+1} del punto a, hay una cantidad cada vez mayor de coordenadas iguales a cero. Además,

$$\max\,(I_1) < \max\,(I_2) < \cdots < \max\,(I_n).$$

Por lo que $\max\,(I_n) > \max\,\left(\bigcup_{j=0}^{n-1} I_j\right)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Dada $k \in \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j$, $5^n + k \leq m_n < 5^{n+1}$. De manera que $I_n \subset \{5^n, 5^n+1, 5^n+2, \ldots, 5^{n+1}-1\}$. Esto implica que $I \cap \{5^n, 5^n+1, 5^n+2, \ldots, 5^{n+1}-1\} = I_n$.

Sea $k \in \{1, 2, \ldots, \max\,(I_{n-1})\}$. Si $k \in \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j \subset I$, entonces $5^n + k \in I_n \subset I$, de manera que $x_{5^n+k} = 1 = x_k$. Si $k \notin \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j$, entonces, como $I \cap \{1, 2, \ldots, \max\,(I_{n-1})\} = \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j$, tenemos que $k \notin I$. Aseguramos que $5^n + k \notin I$, pues de lo contrario,

$$5^n + k \in I \cap \{5^n, 5^n+1, 5^n+2, \ldots, 5^{n+1}-1\} = I_n,$$

así que $5^n+k = 5^n+l$ para alguna $l \in \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j$, lo que implica que $k \in \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j$. Por tanto $5^n + k \notin I$. De manera que $x_k = 0 = x_{5^n+k}$. Con esto, hemos probado que, para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $k \in \{1, 2, \ldots, \max\,(I_{n-1})\}$, $x_{5^n+k} = x_k$.

Coordenadas del punto a

$$a = (1, 0, 0, 0, \underset{\substack{\uparrow\\ 5}}{1}, 1, 0, 0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow\\ 5^2}}{1}, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow\\ 5^3}}{1}, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots)$$

Construiremos otro punto $b \in X$ mediante un procedimiento similar al anterior. Para cada $n \in \mathbb{N}$ recordemos que

$$m_n = 5^n + 5^{n-1} + 5^{n-2} + \cdots + 5 + 1.$$

Además $5^{n+1} - m_n$ tiende a infinito. Hacemos $J_0 = \{1\}$.

Elegimos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $5^{n_1+1} - m_{n_1} > 2$. Hacemos $t_1 = m_{n_1} + 1$, entonces $m_{n_1} < t_1 < t_1 + 1 < 5^{n_1+1}$. Hacemos $J_1 = \{t_1, t_1 + 1\}$.

Elegimos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $5^{n_2+1} - m_{n_2} > \max (J_1) + 1$. Hacemos $t_2 = m_{n_2} + 1$. Entonces

$$m_{n_2} < t_2 < t_2 + 1 < t_2 + t_1 < t_2 + t_1 + 1 < 5^{n_2+1}.$$

Definimos $J_2 = \{t_2, t_2 + 1, t_2 + t_1, t_2 + t_1 + 1\}$.

Inductivamente, supongamos que hemos construido $J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}$.

Elegimos $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $5^{n_k+1} - m_{n_k} > \max \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} J_j\right) + 1$. Definimos $t_k = m_{n_k} + 1$ y

$$J_k = \{t_k\} \cup \left\{ t_k + w : w \in \bigcup_{j=0}^{k-1} J_j \right\} \subset \left\{ m_{n_k} + 1, m_{n_k} + 2, \ldots, 5^{n_k+1} - 1 \right\}.$$

Sea $J = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k$, definimos $b = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ por

$$y_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in J, \\ 0, & \text{si } k \notin J. \end{cases}$$

Por construcción, tenemos que para cada $k \geq 2$, el mínimo y el máximo de J_k son $\min(J_k) = t_k$ y $\max(J_k) = t_k + t_{k-1} + t_{k-2} + \cdots + t_1 + 1$. Además,

$$5^{n_k} < m_{n_k} < \min(J_k) < \max(J_k) < 5^{n_k+1}.$$

Por lo anterior, para cada $k \geq 2$, sucede que si $y_k = 1$, entonces $x_k = 0$ y si $x_k = 1$, entonces $y_k = 0$.

Sea $k \in \mathbb{N}$. Dado $w \in \bigcup_{j=0}^{k-1} J_j$, $t_k + w \leq \max (J_k) < 5^{n_k+1}$. De manera que $J_k \subset \{t_k, t_k + 1, t_k + 2, \ldots, 5^{n_k+1} - 1\}$. Esto implica que

$$J \cap \{t_k, t_k + 1, t_k + 2, \ldots, 5^{n_k+1} - 1\} = J_k.$$

Sea $w \in \{1, 2, \ldots, \max (J_{k-1})\}$. Si $w \in \bigcup_{j=0}^{k-1} J_j \subset J$, entonces $t_k + w \in J_k \subset J$, de manera que $y_{t_k+w} = y_w$. Si $w \notin \bigcup_{j=0}^{k-1} J_j$, entonces, como $J \cap \{1, 2, \ldots, \max (J_{k-1})\} = \bigcup_{j=0}^{k-1} J_j$, tenemos que $w \notin J$. Afirmamos que $t_k + w \notin J$, pues si ocurriera que $t_k + w \in J$, entonces $t_k + w \in J \cap \{t_k, t_k + 1, t_k + 2, \ldots, 5^{n_k+1} - 1\} = J_k$, así que $t_k + w = t_k + l$ para alguna $l \in \bigcup_{j=0}^{k-1} J_j$, lo que implica que $w \in \bigcup_{j=0}^{k-1} J_j$, lo cual es una contradicción. Por tanto $t_k + w \notin J$.

De manera que $y_w = 0 = y_{t_k+w}$. De esta forma, hemos probado que, para toda $k \in \mathbb{N}$ y toda $w \in \{1, 2, \ldots, \max\,(J_{k-1})\}$, $y_{t_k+w} = y_w$.

Coordenadas del punto b
$b = (1, 0, 0, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ 5}}{0}, \underset{\substack{\uparrow \\ m_1}}{0}, \underset{\substack{\uparrow \\ t_1}}{1}, 1, 0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ 5^2}}{0}, 0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ m_2}}{0}, \underset{\substack{\uparrow \\ t_2}}{1}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ t_2+t_1}}{1}, 1, 0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ 5^3}}{0}, 0, \ldots)$

De acuerdo con la Proposición 1.2, para trabajar con los abiertos de este espacio, podemos utilizar la métrica d definida como

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ \frac{1}{2^{j-1}}, & \text{si } x \neq y \text{ con } j = \min\,\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i\}. \end{cases}$$

Ahora veamos que el punto a es recurrente. Sea $\epsilon > 0$. Elijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 2$ y $\dfrac{1}{n} < \epsilon$. Como $f^k(a) = (x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \ldots)$, tenemos que $f^{5^n}(a) = (x_{5^n+1}, x_{5^n+2}, x_{5^n+3}, \ldots)$. Como $n > 2$, entonces

$$n < 5^{n-1} < \max\,(I_{n-1})$$

y por lo tanto $x_{5^n+k} = x_k$ para todo k tal que $1 \leq k \leq n$, de aquí que $f^{5^n}(a)$ y a coinciden en las primeras n coordenadas, de manera que

$$d\left(f^{5^n}(a), a\right) \leq \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \epsilon,$$

y así concluimos que el punto a es recurrente.

Demostremos ahora, que el punto b también es recurrente. Sea $\epsilon > 0$. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{k} < \epsilon$. Consideremos el conjunto J_k, el cual por definición, está contenido en $\{m_{n_k} + 1, m_{n_k} + 2, \ldots 5^{n_k+1} - 1\}$ para algún $n_k \in \mathbb{N}$. Observemos que $f^{t_k}(b) = (y_{t_k+1}, y_{t_k+2}, y_{t_k+3}, \ldots, y_{t_k+t_{k-1}}, \ldots)$.

Como $t_{k-1} < \max\,(J_{k-1})$, entonces para cada $w \in \{1, 2, 3, \ldots t_{k-1}\}$ se tiene que $y_{t_k+w} = y_w$. Es claro que $t_{k-1} > k - 1$, así que $t_{k-1} \geq k$ y por lo tanto $y_{t_k+w} = y_w$ para cada $w \in \{1, 2, \ldots k\}$, es decir, el mínimo de los subíndices de las coordenadas diferentes entre b y $f^{t_k}(b)$, es mayor o igual que $k + 1$.

Por lo anterior, tenemos que $d\left(f^{t_k}(b), b\right) \leq \dfrac{1}{2^k} < \dfrac{1}{k} < \epsilon$ y así concluimos que el punto b es recurrente.

Hagamos $A = \{a, b\}$ y veamos que no es un punto recurrente en $F_2(X)$. Sea ϵ, tal que $0 < \epsilon < 1$. Dado $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$f_2^k(A) = \left\{f^k(a), f^k(b)\right\}.$$

Como $f^k(a) = (x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots)$ y $f^k(b) = (y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+3}, \dots)$, tenemos dos casos:

Caso I. Si $x_{k+1} = 0$, como $x_1 = 1 = y_1$, tenemos que $d\big(f^k(a), a\big) = d\big(f^k(a), b\big) = 1$, por lo tanto $H\left(f_2^k(A), A\right) \geq \epsilon$.

Caso II. Si $x_{k+1} = 1$, entonces $y_{k+1} = 0$. En este caso tenemos que $d\left(f^k(b), b\right) = d\left(f^k(b), a\right) = 1$ y también $H\left(f_2^k(A), A\right) \geq \epsilon$.

Por lo anterior; para cualquier $k \geq 1$ se tiene que $H\left(f_2^k(A), A\right) \geq \epsilon$. Con esto, hemos demostrado que A no es recurrente en $F_2(X)$. ■

El siguiente teorema, demuestra que si tenemos un punto A recurrente en el hiperespacio $F_n(X)$, entonces cada uno de sus elementos regresa cerca de sí mismo en algún momento y, por lo tanto, es recurrente en el espacio X.

Teorema 3.7 *Si A es recurrente en $(F_n(X), f_n)$, entonces para cada $x \in A$, se tiene que x es recurrente en (X, f).*

Demostración. Supongamos que $A = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_m\}$, con $m \leq n$, es recurrente en $F_n(X)$. Por simetría, es suficiente demostrar que x_1 es recurrente en X. Para ello tomamos $\epsilon > 0$.

Sea $I = \{1, 2, 3, \dots, m\}$. Definimos el conjunto J de índices que nos muestra cuáles elementos de A caen cerca de x_1 cuando A regresa cerca de sí mismo, es decir,

$$J = \left\{i \in I : f^j(x_i) \in B_\epsilon(x_1) \text{ para algún } j \in \mathbb{N}\right\}.$$

Este conjunto es no vacío, pues como A es recurrente, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $H\left(f_n^j(A), A\right) < \epsilon$, así que $x_1 \in N\left(\epsilon, f_n^j(A)\right) = N\left(\epsilon, f^j(A)\right)$, entonces existe $x_i \in A$ tal que $d\left(x_1, f^j(x_i)\right) < \epsilon$.

Lo que queremos mostrar es que x_1 regresa cerca de sí mismo en algún momento y por eso, supongamos que $1 \notin J$.

Podemos ordenar los elementos del conjunto A de modo que $J = \{2,3,4,\ldots, r\}$ siendo $r \leq m$. Sea P el conjunto definido por

$$P = \{r+1, r+2, r+3, \ldots, m\}.$$

Por lo anterior, se tiene que si $i \in P$, entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^k(x_i) \notin B_\epsilon(x_1)$.

Ahora bien, podemos decir que en $B_\epsilon(x_1)$ queda una huella de algún x_i con $i \in J$ cada vez que A cae cerca de sí mismo. Sean k_2, k_3, k_4, $\ldots$, k_r, tales que $f^{k_j}(x_j) \in B_\epsilon(x_1)$ para cada $j \in \{2,3,4,...r\}$.

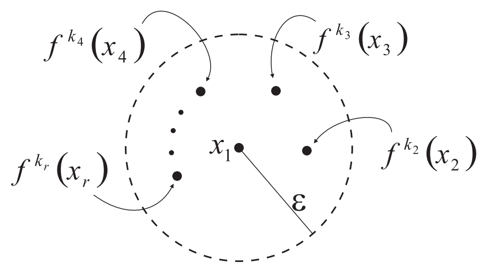


Figura 3.3: x_2, x_3, $\ldots$, x_r, pasando por $B_\epsilon(x_1)$.

Sea $\epsilon_0 > 0$ tal que $B_{\epsilon_0}(x_i) \cap B_{\epsilon_0}(x_j) = \emptyset$ para cualquier pareja de números diferentes $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, y además, para cualquier $j \in \{2, 3, 4, \ldots, r\}$; $B_{\epsilon_0}\left(f^{k_j}(x_j)\right) \subset B_\epsilon(x_1)$.

Como X es un compacto, entonces f y f^k son funciones uniformemente continuas, así que para cada $j \in \{2, 3, 4, \ldots, r\}$ existe $\delta_j > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta_j$, entonces $d\left(f^{k_j}(x), f^{k_j}(y)\right) < \epsilon_0$.

Sea $0 < \delta < \min\{\epsilon, \epsilon_0, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_r\}$. Como A es recurrente, existe $M_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $H\left(f_n^{M_\delta}(A), A\right) < \delta$.

Como los puntos x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3}, $\ldots$, x_m nunca caen cerca de x_1, aseguramos que tampoco pueden caer cerca en menos que δ de ningún elemento del conjunto $\{x_2, x_3, x_4, \ldots, x_r\}$ pues, si suponemos que para algún

$i \in \{r+1\ ,\ r+2\ ,\ r+3\ ,\ \ldots,\ m\}$ se tiene que $f^{M_\delta}(x_i) \in B_\delta(x_j)$ con $j \in J$, entonces $d\left(x_j, f^{M_\delta}(x_i)\right) < \delta$ y por la elección de δ_j, resulta que $d\left(f^{k_j}(x_j), f^{k_j+M_\delta}(x_i)\right) < \epsilon_0$. Lo anterior significa que

$$f^{k_j+M_\delta}(x_i) \in B_{\epsilon_0}\left(f^{k_j}(x_j)\right) \subset B_\epsilon(x_1),$$

lo cual es una contradicción, pues $i \notin J$.

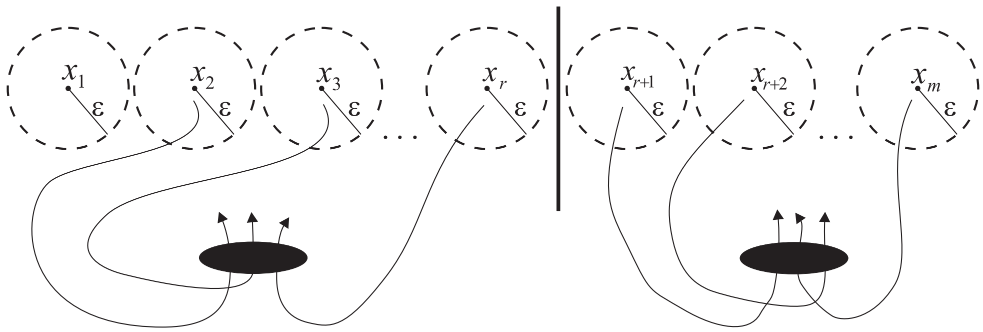


Figura 3.4: x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_m, no pasan cerca de x_1, x_2, $\ldots$, x_r.

Hemos probado que, para toda $i \in \{r+1, r+2, \ldots, m\}$ y toda $j \in \{2, 3, \ldots, r\}$, $f^{M_\delta}(x_i) \notin B_\delta(x_j)$. Como $B_\delta(x_1) \subset B_\epsilon(x_1)$, también tenemos que $f^{M_\delta}(x_i) \notin B_\delta(x_1)$ para toda $i \in \{r+1, r+2, \ldots, m\}$.

Ya que $H\left(f_n^{M_\delta}(A), A\right) < \delta$, para cada $i \in P$ existe $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $d\left(f^{M_\delta}(x_i), x_j\right) < \delta$. Por lo que hemos visto, $j \in \{r+1, r+2, \ldots, m\} = P$. De manera que

$$\left\{f^{M_\delta}(x_{r+1}), f^{M_\delta}(x_{r+2}), \ldots, f^{M_\delta}(x_m)\right\} \subset B_\delta(x_{r+1}) \cup B_\delta(x_{r+2}) \cup \cdots \cup B_\delta(x_m).$$

Como $H\left(f_n^{M_\delta}(A), A\right) < \delta$, cada conjunto $B_\delta(x_j)$ debe tener al menos un elemento de $f^{M_\delta}(A)$ y como estas bolas son ajenas dos a dos, ninguna de ellas puede tener dos elementos de $f^{M_\delta}(A)$ pues, de tenerlos, los elementos de $f^{M_\delta}(A) = \left\{f^{M_\delta}(x_1), f^{M_\delta}(x_2), \ldots, f^{M_\delta}(x_m)\right\}$ no alcanzarían para que a todas las bolas les tocara al menos uno.

Como $\left\{f^{M_\delta}(x_{r+1}), f^{M_\delta}(x_{r+2}), \ldots, f^{M_\delta}(x_m)\right\} \subset B_\delta(x_{r+1}) \cup B_\delta(x_{r+2}) \cup \cdots \cup B_\delta(x_m)$ y a estas bolas no les tocan dos elementos de $f^{M_\delta}(A)$, tenemos que $f^{M_\delta}(x_1) \notin B_\delta(x_{r+1}) \cup B_\delta(x_{r+2}) \cup \cdots \cup B_\delta(x_m)$. Como $f^{M_\delta}(x_1) \in N(\delta, A)$, tenemos que $f^{M_\delta}(x_1) \in B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2) \cup \cdots \cup B_\delta(x_r)$.

Como $f^{M_\delta}(x_1) \notin B_\epsilon(x_1)$ pues supusimos que $1 \notin J$, existe $i \in \{2, 3, \ldots, r\}$, tal que $f^{M_\delta}(x_1) \in B_\delta(x_i)$. Por la elección de δ_i, tenemos que $f^{k_i+M_\delta}(x_1) \in B_{\epsilon_0}\left(f^{k_i}(x_i)\right) \subset B_\epsilon(x_1)$, de nuevo esto es un absurdo pues $1 \notin J$.

Con esta contradicción, concluimos que x_1 es un punto recurrente en X y por lo tanto, los demás elementos de A también lo son. ■

3.3. Puntos casi-periódicos

Si un punto x es recurrente, sabemos que al aplicar la función del sistema, este punto eventualmente regresará cerca de sí mismo, pero no tenemos información sobre cuántas iteraciones debemos esperar para que suceda esto. Sin embargo, si adicionalmente sabemos que dada una vecindad U de x, dicho punto regresa a U antes de p iteraciones de la función, entonces decimos que x regresa casi-periódicamente a U.

Definición 3.8 *Un punto $x \in X$ es* ***casi-periódico****, si para cada $\epsilon > 0$ existe $p > 0$ tal que para cada $n \geq 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ con $k < p$ tal que $d\left(f^{n+k}(x), x\right) < \epsilon$.*

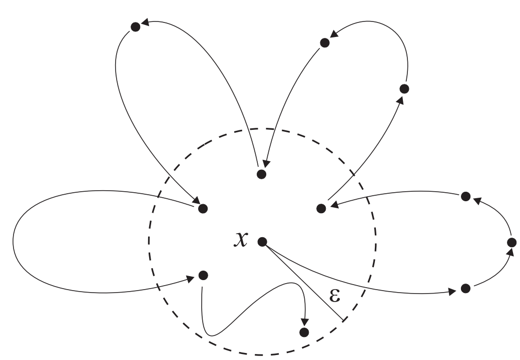


Figura 3.5: Punto casi-periódico con $p = 5$.

Esencialmente, cuando un punto es casi-periódico, sucede que dado un abierto que lo contenga, dicho punto eventualmente regresa al abierto y, además, el número de saltos que da antes del regreso, forma una sucesión acotada.

En la Proposición 3.6, hemos construido un par de puntos recurrentes en su espacio X. Dichos puntos tienen la característica de que entre más pequeña sea la vecindad, mayor es la cantidad de iteraciones que pasan antes que el punto regrese a esa vecindad, y por lo tanto no son casi-periódicos. Ejemplos de puntos casi-periódicos los tenemos en el caso de las rotaciones irracionales.

Proposición 3.9 *En una rotación irracional del círculo, cualquier punto es casi-periódico.*

Demostración. Tomemos una rotación irracional R_a y $z \in T$ (recordemos que en el Ejemplo 2.3 definimos T como el círculo de perímetro 1) un punto cualquiera. Sea ϵ tal que $0 < \epsilon < 1$. Dado que la órbita de z es densa en T, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que el arco entre z y $R_a^m(z)$ tiene longitud $b < \epsilon$. Como $b < 1$, entonces $\dfrac{1}{b} > 1$ y existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $j - 1 < \dfrac{1}{b} \leq j$ y de aquí que $\dfrac{1}{j} \leq b < \dfrac{1}{j-1}$. Sea $p = jm + 1$. Veamos que z regresa a $B_\epsilon(z)$ antes de p saltos.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, j\}$, sea t_k el arco que une a $R_a^{n+(k-1)m}(z)$ y $R_a^{n+km}(z)$. Dado que R_a^m es una rotación irracional con parámetro b, entonces t_1, t_2, $\ldots$, t_j, son j arcos, uno despues de otro, cada uno de longitud b. Como $jb > 1$ y el perímetro de T es 1, $z \in t_k$ para alguna $k \in \{1, 2, \ldots, j\}$. De manera que $d\left(R_a^{n+km}(z), z\right) \leq b < \epsilon$. Sea $s = km$, entonces $s < p$ y $d\left(R_a^{n+s}(z), z\right) < \epsilon$. Por tanto, z es casi-periódico. ■

3.3.1. Puntos casi-periódicos en $F_n(X)$

Como veremos enseguida, es fácil demostrar que si un punto x es casi-periódico, entonces el conjunto cuyo único elemento es x, resulta ser casi-periódico en el producto simétrico.

Teorema 3.10 *Si x es casi-periódico en (X, f), entonces $\{x\}$ es casi-periódico en $(F_n(X), f_n)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como x es casi-periódico, existe $p > 0$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $k < p$ tal que $d\left(f^{m+k}(x), x\right) < \epsilon$.

Sean $A = \{x\}$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces existe $k < p$ tal que $d\left(f^{m+k}(x), x\right) < \epsilon$. Como $f_n^{m+k}(A) = \left\{f^{m+k}(x)\right\}$, se tiene que $f_n^{m+k}(A) \subset N(\epsilon, A)$ y también $A \subset N\left(\epsilon, f_n^{m+k}(A)\right)$, así que $H\left(f_n^{m+k}(A), A\right) < \epsilon$, por lo tanto $A = \{x\}$ es un punto casi-periódico en $F_n(X)$. ■

3.4. Recurrencia regular

Cuando en un sistema dinámico tenemos que la órbita de un punto x pasa tan cerca como queramos de x en los momentos m_1, m_2, m_3, $\ldots$ en el sentido de que la distancia entre x y $f^{m_j}(x)$ es pequeña, decimos que x es recurrente. Si además sabemos que el salto entre dos términos consecutivos de la sucesión $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una constante entera p, diremos que el punto x es regularmente recurrente.

Definición 3.11 *Sea (X, f) un sistema dinámico. Un punto $x \in X$ es **regularmente recurrente**, si dado $\epsilon > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ al que le llamaremos **el periodo regular de x**, tal que para todo $k \geq 0$ se tiene que $d\left(f^{kp}(x), x\right) < \epsilon$.*

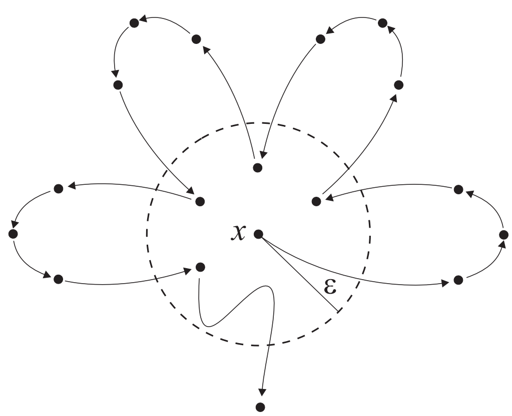


Figura 3.6: Punto con periodo regular $p = 4$.

Es claro que si un punto x es regularmente recurrente, entonces es recurrente. La implicación contraria no ocurre, pues en la Proposición 3.6 hemos construido un par de puntos que son recurrentes pero la órbita no intersecta con regularidad a una vecindad dada. De hecho existen sistemas dinámicos que no tienen puntos regularmente recurrentes, aún cuando todos sus puntos sean recurrentes.

Proposición 3.12 *En una rotación irracional no existen puntos regularmente recurrentes.*

Demostración. Sea (T, R_a) una rotación irracional. Supongamos que z es un punto regularmente recurrente en T. Si $\epsilon = \frac{1}{2}$, entonces existe un entero $p > 0$ tal que para cualquier $k \geq 0$ se tiene que $d\left(R_a^{kp}(z), z\right) < \epsilon$. Como R_a^p es también una rotación irracional, entonces la órbita de z bajo R_a^p es densa en T y por lo tanto existe un entero $m > 0$ tal que $R_a^{mp}(z) = (R_a^p)^m(z) \in B_\epsilon(-z)$. Lo anterior es una contradicción, ya que $B_{\frac{1}{2}}(z) \cap B_{\frac{1}{2}}(-z) = \emptyset$. Así concluimos que z no es regularmente recurrente. ■

Contrario al ejemplo anterior, tenemos que existen sistemas dinámicos no triviales, en los cuales, todos sus puntos son regularmente recurrentes.

Proposición 3.13 *Los puntos de la máquina de sumar son regularmente recurrentes.*

Demostración. Recordemos que en la sección 2.2, definimos la máquina de sumar como el sistema (X, f), donde $X = \prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}$ y f es la función que hace sumas en base dos en las coordenadas de los puntos. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Sea $p = 2^n$. Veamos que para cualquier entero $k > 0$ se cumple que $d\left(f^{kp}(x), x\right) < \epsilon$.

Al final del capítulo 2, vimos que $f^p(x)$ y x coinciden en las primeras n coordenadas, así que

$$d\left(f^p(x), x\right) \leq \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Por lo mismo, $f^p\left(f^p(x)\right)$ y $f^p(x)$ (y también x) coinciden en las primeras n coordenadas, así que $d\left(f^{2p}(x), x\right) < \epsilon$.

Procediendo de esta manera, podemos concluir que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $d\left(f^{kp}(x), x\right) < \epsilon$ y, por lo tanto, x es regularmente recurrente. ■

Aunque la máquina de sumar no está definida en un continuo, recordemos que en la Sección 2.2 hemos definido el sistema dinámico $(\mathcal{D}, G)$ donde $\mathcal{D}$ es el cono geométrico sobre el conjunto de Cantor, con vértice $v = (\frac{1}{2}, 2)$ y este sistema contiene un subsistema homeomorfo a la máquina de sumar.

Proposición 3.14 *Sea $\mathcal{D}$ el cono geométrico sobre el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$, con vértice en el punto $v = (\frac{1}{2}, 2)$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ definida por*

$$G(tv + (1-t)c) = tv + (1-t)\left(g \circ f \circ g^{-1}\right)(c)$$

donde $g : X \to \mathcal{C}$ está definida por

$$g((x_1, x_2, x_3, \dots)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2x_j}{3^j},$$

$X = \prod_{n=1}^{\infty} \{0,1\}$ y f es la función definida en la Sección 2.2. Si $x \in \mathcal{D}$, entonces x es regularmente recurrente.

Demostración. Dado que la base del cono es un subconjunto de $\mathcal{D}$, homeomorfo al conjunto de Cantor y que la restricción de G a este subconjunto es la máquina de sumar, tenemos que cualquier punto de la base del cono, es regularmente recurrente.

Sea $x \in \mathcal{D}$. Escribimos $x = tv + (1-t)c$, con $c \in \mathcal{C}$ y $0 < t \leq 1$. Sea $\epsilon > 0$.

Sea $U = (c-\epsilon, c+\epsilon)$. Entonces U es un abierto en $\mathcal{C}$ y por lo tanto $g^{-1}(U)$ es un abierto en X, tal que $g^{-1}(c) \in g^{-1}(U)$.

Por la Proposición 3.13, $g^{-1}(c)$ es regularmente recurrente en X, así que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^{pk}\left(g^{-1}(c)\right) \in g^{-1}(U)$ para todo $k \geq 0$. De aquí que $g\left(f^{pk}\left(g^{-1}(c)\right)\right) \in U$ para cualquier $k \geq 0$.

Como g es un homeomorfismo, tenemos que si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(g \circ f \circ g^{-1}\right)^n &= \underbrace{\left(g \circ f \circ g^{-1}\right) \circ \left(g \circ f \circ g^{-1}\right) \circ \cdots \circ \left(g \circ f \circ g^{-1}\right)}_{n \text{ veces}} \\
&= g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ \cdots \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} \\
&= g \circ \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}} \circ g^{-1} \\
&= g \circ f^n \circ g^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo anterior, resulta que

$$G^{pk}(x) = tv + (1-t)\left(g \circ f \circ g^{-1}\right)^{pk}(c) = tv + (1-t)\left(g \circ f^{pk} \circ g^{-1}\right)(c)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\left\|G^{pk}(x)-x\right\| &= \left\|tv+(1-t)\left(g\circ f^{pk}\circ g^{-1}\right)(c)-tv-(1-t)c\right\| \\ &= \left\|(1-t)\left[\left(g\circ f^{pk}\circ g^{-1}\right)(c)-c\right]\right\| \\ &= (1-t)\left\|\left(g\circ f^{pk}\circ g^{-1}\right)(c)-c\right\| \\ &< (1-t)\epsilon \leq \epsilon.\end{aligned}$$

De lo anterior, resulta que $G^{pk}(x) \in B_\epsilon(x)$ y así concluimos que x es regularmente recurrente en $\mathcal{D}$. ■

3.4.1. Puntos regularmente recurrentes en $F_n(X)$

Ahora veremos cómo es la relación entre los puntos regularmente recurrentes de un espacio X y los puntos regularmente recurrentes de sus productos simétricos.

Teorema 3.15 *Si x es regularmente recurrente en (X, f), entonces $\{x\}$ es regularmente recurrente en $(F_n(X), f_n)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como x es regularmente recurrente en X, existe un entero $p > 0$, tal que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, ocurre que $d\left(f^{kp}(x), x\right) < \epsilon$, es decir, $f^{kp}(x) \in B_\epsilon(x)$. Por lo tanto $\left\{f^{kp}(x)\right\} \subset N(\epsilon, \{x\})$ y $\{x\} \subset N\left(\epsilon, \left\{f^{kp}(x)\right\}\right)$. Así concluimos que $H\left(f_n^{kp}(\{x\}), \{x\}\right) < \epsilon$ y, en consecuencia, $\{x\}$ es regularmente recurrente en $F_n(X)$. ■

A diferencia de los puntos casi-periódicos, en el caso de recurrencia regular, tenemos que si varios puntos tienen una órbita que pasa cerca de ellos con regularidad, entonces es posible mostrar que el conjunto también tiene el mismo comportamiento.

Teorema 3.16 *Sean (X, f) un sistema dinámico y $m \leq n$. Si los puntos x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_m son regularmente recurrentes en X, entonces $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\}$ es regularmente recurrente en $(F_n(X), f_n)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como cada elemento de A es regularmente recurrente en X, existen m enteros positivos p_1, p_2, p_3, $\ldots$, p_m, tales que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $d\left(f^{kp_j}(x_j), x_j\right) < \epsilon$ para todo $j \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$.

Sea $p = m.c.m.(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m)$. Entonces $d\left(f^{kp}(x_j), x_j\right) < \epsilon$ para todo $j \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, así que $A \subset N\left(\epsilon, \left\{f^{kp}(x_1), f^{kp}(x_2), \ldots, f^{kp}(x_m)\right\}\right)$ y además $\left\{f^{kp}(x_1), f^{kp}(x_2), \ldots, f^{kp}(x_m)\right\} \subset N(\epsilon, A)$ y por lo tanto, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $H\left(f_n^{kp}(A), A\right) < \epsilon$. De esta forma concluimos que A es regularmente recurrente en $F_n(X)$. ■

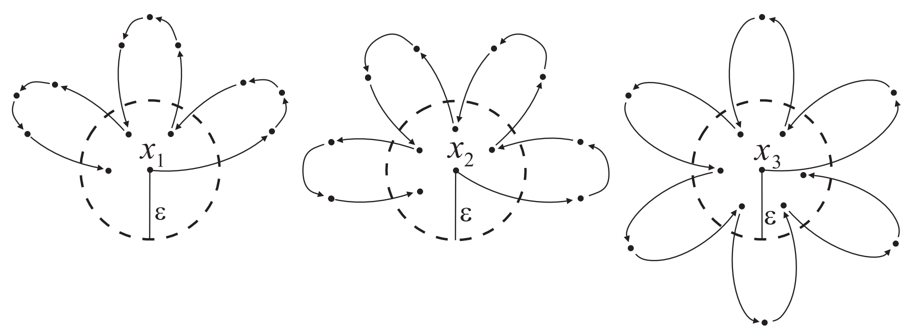


Figura 3.7: Elementos regularmente recurrentes forman un conjunto regularmente recurrente.

Al igual que en el caso de puntos recurrentes, uno podría pensar que si un punto del producto simétrico es regularmente recurrente, entonces sus elementos son regularmente recurrentes en el espacio base. Desafortunadamente lo anterior no es cierto, como veremos en el siguiente ejemplo.

Proposición 3.17 *Existen un sistema dinámico (X, f) y un punto $A = \{a, b\}$ regularmente recurrente en $F_2(X)$, tal que a y b no son regularmente recurrentes en X.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $Y_n = \{0, 1\}$ con la topología discreta. Sea $Y = \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ con la topología producto. Definimos el sistema (X, g), donde $X =$ Cono(Y) y $g(x, t) = (f(x), t)$, donde $f : Y \to Y$ es la función desplazamiento, es decir, $f((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$ para cualquier $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in Y$.

Para construir los puntos a y b en X, diremos que una palabra es una sucesión finita cuyos elementos pertenecen a $\{0, 1\}$ y su longitud será el número de símbolos que tiene dicha palabra. Por ejemplo $w = 100011$ es una palabra de longitud 6. Además diremos que el negativo de una palabra es la palabra que se obtiene al intercambiar los unos por ceros y los ceros por unos, así, el negativo de $w = 100011$ es $neg(w) = 011100$. Notemos que si u es una palabra, entonces se cumple que $neg(neg(u)) = u$.

Construiremos el punto a en X de forma que sus primeras dos coordenadas son los símbolos de la palabra $w = 10$ y las siguientes coordenadas se obtendrán de forma recursiva. Dada una palabra P de longitud 2^n, construimos la siguiente palabra como sigue.

Dado $n \in \mathbb{N}$, si n es par, las coordenadas cuyo subíndice pertenece al conjunto $\{2^n + 1, 2^n + 2, 2^n + 3, \ldots, 2^n + 2^n\}$ serán iguales a los símbolos de la palabra P. Si n es impar, entonces dichas coordenadas serán iguales a los símbolos del negativo de la palabra P. De esta forma, si n es par, para cada $r \in \{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ se tiene que $x_{2^n+r} = x_r$ y, si n es impar, entonces

$$x_{2^n+r} = \begin{cases} 0, & \text{si } x_r = 1, \\ 1, & \text{si } x_r = 0. \end{cases}$$

Con este método de construcción, si $a = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, entonces $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$. Las coordenadas x_{2^1+1} y x_{2^2} son $x_3 = 0$ y $x_4 = 1$ pues estamos en el caso de n impar. Las coordenadas x_{2^2+1}, x_{2^2+2}, x_{2^2+3} y x_{2^3} son $x_5 = 1$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$ y $x_8 = 1$. Continuando el procedimiento, tenemos que las coordenadas del punto a se ven como sigue

$$a = (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots).$$

Hacemos $b \in X$, el negativo de a. Es decir,

$$b = (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ \ldots).$$

Dada $m \in \mathbb{N}$, hacemos D_m la palabra formada por las primeras 2^m coordenadas de a. Es decir, $D_m = x_1 x_2 \ldots x_{2^m}$. Por la construcción de a, $D_{m+1} = D_m D_m$ o $D_{m+1} = D_m(neg(D_m))$, donde $D_m D_m$ es la palabra que se forma de poner dos palabras D_m seguidas y $D_m(neg(D_m))$ se construye similarmente. Para poner una notación sugestiva, podemos escribir $D_{m+1} = D_m(^+_- D_m)$. Entonces $D_{m+2} = D_{m+1}(^+_- D_{m+1}) = D_m(^+_- D_m)(^+_- D_m)(^+_- D_m)$, donde los símbolos en cada uno de los paréntesis son independientes. Entonces

$$D_{m+3} = D_m(^+_- D_m)(^+_- D_m)(^+_- D_m)(^+_- D_m)(^+_- D_m)(^+_- D_m)(^+_- D_m).$$

Entonces a se puede escribir asi: $a = D_m(\substack{+\\-}D_m)(\substack{+\\-}D_m)\cdots$ Por lo que $f^{k2^m}(a)$ es de la forma $(\substack{+\\-}D_m)(\substack{+\\-}D_m)(\substack{+\\-}D_m)\cdots$ (recordemos que $f^{k2^m}(a)$ es recorrer las coordenadas de a, $k2^m$ lugares). Por tanto, las primeras 2^m coordenadas de $f^{k2^m}(a)$ son las de a o las del negativo de a que es b. De manera que, para toda $k \in \mathbb{N}$,

$$d\left(f^{k2^m}(a), a\right) \leq \frac{1}{2^m} \quad \text{o} \quad d\left(f^{k2^m}(a), b\right) \leq \frac{1}{2^m}.$$

Ahora demostraremos que el punto $A = \{a, b\}$ es regularmente recurrente en $F_2(X)$. Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^m} < \epsilon$. Hagamos $p = 2^m$ y veamos que $H\left(f_2^{kp}(A), A\right) < \epsilon$, para toda $k \in \mathbb{N}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$. Ya vimos que las primeras 2^m coordenadas de $f^{k2^m}(a)$, son iguales a las de a (y en este caso, lo mismo ocurre con b, pues b es el negativo de a) o son iguales a las de b (y en este caso, las primeras 2^m coordenadas de $f^{k2^m}(b)$ son iguales a las de a).

Por lo anterior, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ sucede que $\left\{f^{kp}(a), f^{kp}(b)\right\} \subset N(\epsilon, \{a, b\})$ y además $\{a, b\} \subset N\left(\epsilon, \left\{f^{kp}(a), f^{kp}(b)\right\}\right)$. Con lo anterior, demostramos que $H\left(f_2^{kp}(A), A\right) < \epsilon$ y por lo tanto el punto A es regularmente recurrente en $F_2(X)$.

Ahora demostraremos que los puntos a y b no son regularmente recurrentes en X. Para esto necesitaremos algunas observaciones acerca de las coordenadas de los puntos a y b. Así que, en Observación *1*, Observación *2* y en Observación *3*, x_n representará la n-ésima coordenada de a.

Sabemos que dado cualquier entero positivo, existe una única forma de escribirlo en base 2.

Dado un entero positivo impar n, escribimos $n = 1+2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_r}$ con $k_1 < k_2 < \cdots$ Sea $p(n) =$ número de elementos impares de $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$.

Observación 1. *Si $p(n)$ es par, entonces $x_n = 1$ y si $p(n)$ es impar, entonces $x_n = 0$.*

Demostración. Haremos esta prueba por inducción en n. Si $n = 1$, entonces escrito en base 2, tenemos que $n = 1$, así que $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\} = \emptyset$ tiene un número par (cero) de elementos impares, así que $p(n) = 0$. Por definición $x_1 = 1$ por lo que sí se vale la afirmación.

Supongamos que la afirmación es válida para todo número menor que n y que $n > 1$. Consideremos el entero impar n, escrito en la forma $n = 1 + 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_r}$ y hagamos $m = 1 + 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_{r-1}}$. Entonces $m < n$.

Si k_r es par, entonces el número de términos impares de $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ es el mismo que el de $\{k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}\}$. Es decir, $p(n) = p(m)$. Por definición, $x_n = x_{2^{k_r}+m} = x_m$. Si $p(n)$ es par, entonces $p(m)$ lo es, así que $x_m = 1$ (hipótesis de inducción) de modo que $x_n = 1$. Si $p(n)$ es impar, entonces $p(m)$ lo es, $x_m = 0$ y $x_n = 0$.

En el caso de que k_r es impar, $p(n) = p(m)+1$. Por definición, $x_n = x_{2^{k_r}+m}$ es el negativo de x_m. Si $p(n)$ es par, entonces $p(m)$ es impar, $x_m = 0$ y $x_n = 1$. Si $p(n)$ es impar, entonces $p(m)$ es par, $x_m = 1$ y $x_n = 0$. Esto termina la inducción y la prueba de la Observación *1*.

Notemos que si x es un punto regularmente recurrente en un sistema dinámico y para una $\epsilon > 0$, su periodo regular es p, entonces dado cualquier $m \in \mathbb{N}$, el entero mp también es un periodo regular para x y ϵ.

Observación 2. *Si el entero $p = 2k$ es un periodo regular para el punto a y $\epsilon < \frac{1}{2}$, entonces dado cualquier $m \in \mathbb{N}$, la expresión de mp en base 2, tiene un número par de potencias donde el exponente es impar.*

Demostración. Sea $U = \{1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots$ un abierto básico de la topología producto en Y. Si el entero $p = 2k$ es un periodo regular para a y ϵ, entonces $f^{mp}(a) \in U$ para cada $m \in \mathbb{N}$ y por lo tanto la primera coordenada de $f^{mp}(a)$ es 1, es decir, $x_{1+mp} = 1$.

Como $1 + mp$ es un entero impar, por la Observación 1, tenemos que su expresión en base 2, tiene un número par de potencias donde el exponente es impar. Así que, $1+mp = 1+2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_r}$, y el conjunto $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ tiene un número par de elementos impares. De lo anterior se tiene que $mp =$

$2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_r}$ y por lo tanto la expresión de mp en base 2, tiene un número par de potencias donde el exponente es impar. Con esto hemos demostrado la Observación 2.

Observación 3. *Si el entero $p = 2k$ es un periodo regular para el punto a y $\epsilon < \dfrac{1}{2}$, entonces dado cualquier $m \in \mathbb{N}$, la representación binaria de mp tiene un número par de dígitos 1.*

Demostración. Sea $p = 2k$, un periodo para la recurrencia regular de a y $\epsilon < \dfrac{1}{2}$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Por la Observación 2, el entero mp tiene en su expresión en base 2, un número par de potencias donde el exponente es impar. Por lo tanto, existe un entero par q tal que $q \leq r$ y, reordenando la expresión en caso de ser necesario, podemos escribir

$$mp = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_q} + 2^{k_{q+1}} + \cdots + 2^{k_r},$$

donde $k_1, k_2, \ldots, k_q$ son los exponentes impares y $k_{q+1}, k_{q+2}, \ldots, k_r$ son los exponentes pares.

Observemos que

$$2mp = 2^{k_1+1} + 2^{k_2+1} + \cdots + 2^{k_q+1} + 2^{k_{q+1}+1} + \cdots + 2^{k_r+1},$$

donde k_1+1, k_2+1, $\ldots$, k_q+1 son los exponentes pares y $k_{q+1}+1$, $k_{q+2}+1$, $\ldots$, k_r+1 son los exponentes impares.

Como mp es un periodo para la recurrencia regular de a y ϵ, entonces el entero $2mp$ también es un periodo regular, así que, por la Observación 2, la expresion de $2mp$ en base 2, tiene un número par de potencias donde el exponente es impar, es decir $r - q = 2t$ con $t \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $r = 2t + q$, y como q es par, entonces r también es un número par.

Por lo anterior, tenemos que para cualquier $m \in \mathbb{N}$, el entero mp escrito en base 2, tiene un número par de dígitos 1 y así queda demostrada la Observación 3.

Ahora vamos a demostrar que el punto a no es regularmente recurrente. Para esto, supongamos que sí lo es y que su periodo regular para $\epsilon = \dfrac{1}{4}$, es el entero par $p = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_r}$, (por lo que hemos visto antes, podemos suponer que el periodo regular es par) donde $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$. Por la Observación 3, tenemos que r es par.

Como $k_1 < k_2$, sólo puede suceder que $k_1 + 1 < k_2$ o que $k_1 + 1 = k_2$.

En caso de que $k_1 + 1 < k_2$ tenemos que

$$2^{k_r - k_1} p = 2^{k_r} + 2^{k_r + k_2 - k_1} + 2^{k_r + k_3 - k_1} + \cdots + 2^{2k_r - k_1}.$$

Notemos que los exponentes de la expresión anterior son diferentes dos a dos.

Observemos que $p + 2^{k_r - k_1} p = \left(1 + 2^{k_r - k_1}\right) p$ es un múltiplo de p y por lo tanto, según la Observación 3, su expresión en base 2, debe tener un número par de dígitos 1. Pero

$$\begin{aligned} p + 2^{k_r - k_1} p &= \left(2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_r}\right) + \left(2^{k_r} + 2^{k_r + k_2 - k_1} + \cdots + 2^{2k_r - k_1}\right) \\ &= 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_{r-1}} + 2^{k_r + 1} + 2^{k_r + k_2 - k_1} + \cdots + 2^{2k_r - k_1}. \end{aligned}$$

Como $k_2 - k_1 > 1$, entonces $k_r + k_2 - k_1 > k_r + 1$, así que los exponentes en esta expresión son diferentes dos a dos. Además, los conjuntos $\{k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}\}$ y $\{k_r + k_2 - k_1, k_r + k_3 - k_1, \ldots, k_r + k_r - k_1\}$ contienen cada uno, un número impar de elementos. Por lo tanto el conjunto

$$\{k_1, k_2, \ldots k_{r-1}, k_r + 1, k_r + k_2 - k_1, k_r + k_3 - k_1, \ldots, k_r + k_r - k_1\}$$

contiene un número impar de elementos, de aquí que el entero $\left(1 + 2^{k_r - k_1}\right) p$ escrito en base 2, tiene un número impar de dígitos 1. Con esta contradicción, concluimos que no puede suceder que $k_1 + 1 < k_2$.

En caso de que $k_1 + 1 = k_2$, observemos que

$$2p = 2^{k_1 + 1} + 2^{k_2 + 1} + \cdots + 2^{k_r + 1} = 2^{k_2} + 2^{k_2 + 1} + 2^{k_3 + 1} + \cdots + 2^{k_r + 1}.$$

Así que

$$\begin{aligned} p + 2p &= \left(2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_r}\right) + \left(2^{k_2} + 2^{k_2 + 1} + 2^{k_3 + 1} + \cdots + 2^{k_r + 1}\right) \\ &= 2^{k_1} + 2^{k_2 + 2} + 2^{k_3} + 2^{k_3 + 1} + \cdots + 2^{k_r} + 2^{k_r + 1}. \end{aligned}$$

Como $k_1 < k_1 + 1 = k_2 < k_2 + 2$, entonces la potencia 2^{k_1} forma parte de la expresión de $3p$ en base 2. Observemos que es posible que las potencias mayores o iguales que 2^{k_2+2} pudieran simplificarse, así que podemos suponer que, después de simplificar, la expresión de $3p$ queda como $3p = 2^{q_1} + 2^{q_2} + \cdots + 2^{q_s}$, donde $q_1 < q_2 < \cdots < q_s$. Además s es un entero positivo par, $q_1 = k_1$ y, como $q_2 \geq \min\{k_2 + 2, k_3\} \geq k_1 + 2 > q_1 + 1$, tenemos que $q_2 > q_1 + 1$.

De lo anterior, la expresión de $2^{q_s - q_1}(3p)$ en base 2, es

$$2^{q_s-q_1}(3p) = 2^{q_s} + 2^{q_s+q_2-q_1} + 2^{q_s+q_3-q_1} + \cdots + 2^{2q_s-q_1}.$$

Además, $3p + 2^{q_s-q_1}3p = (1 + 2^{q_s-q_1})\,3p$ es un múltiplo de p y por lo tanto, según la Observación 3, su expresión en base 2, debe tener un número par de dígitos 1. Pero

$$\begin{aligned} 3p + 2^{q_s-q_1}3p &= (2^{q_1} + 2^{q_2} + \cdots + 2^{q_s}) + \left(2^{q_s} + 2^{q_s+q_2-q_1} + \cdots + 2^{2q_s-q_1}\right) \\ &= 2^{q_1} + 2^{q_2} + \cdots + 2^{q_{s-1}} + 2^{q_s+1} + 2^{q_s+q_2-q_1} + \cdots + 2^{2q_s-q_1} \end{aligned}$$

es la expresión de $3p + 2^{q_s-q_1}3p$ en base 2, debido a que $q_2 - q_1 > 1$ y para cualquier $j \in \{2, 3, 4, \ldots s\}$ se tiene que $q_j > q_{j-1}$, así que $q_s + q_j - q_1 > q_s + q_{j-1} - q_1$ y esto significa que los exponentes de esta expresión para $(1 + 2^{q_s-q_1})\,3p$, son diferentes dos a dos.

Observemos que cada uno de los conjuntos $\{q_1, q_2, \ldots, q_{s-1}\}$ y $\{q_s + q_2 - q_1, q_s + q_3 - q_1, \ldots, q_s + q_s - q_1\}$ contiene una cantidad impar de elementos y por lo tanto también el conjunto

$$\{q_1, q_2, \ldots, q_{s-1}, q_s + 1, q_s + q_2 - q_1, q_s + q_3 - q_1, \ldots, q_s + q_s - q_1\}$$

contiene un número impar de elementos. Esto último significa que el entero $(1 + 2^{q_s-q_1})\,3p$ escrito en base 2, tiene una cantidad impar de dígitos 1, contradiciendo nuevamente a la Observación 3. De esta forma concluimos que el punto a no es regularmente recurrente.

Como el punto b es el negativo de a, entonces dichos puntos tienen un comportamiento análogo, así que el punto b no es regularmente recurrente. Con esto, hemos terminado la demostración de la proposición. ■

3.5. Puntos errantes

Como hemos visto, los puntos recurrentes, casi-periódicos y regularmente recurrentes, tienen la característica de que eventualmente regresan a cualquier vecindad que los contenga. En sistemas dinámicos como $([0,1],x^2)$ tenemos puntos que en lugar de regresar, se alejan cada vez más. A los puntos que tienen este comportamiento, les llamamos errantes.

Definición 3.18 *Sea (X,f) un sistema dinámico. Un punto $x \in X$ es* ***errante bajo*** *f, si existe un abierto U en X tal que $x \in U$ y los elementos de la familia*

$$\{f^m(U) : m \geq 0\}$$

son ajenos dos a dos.

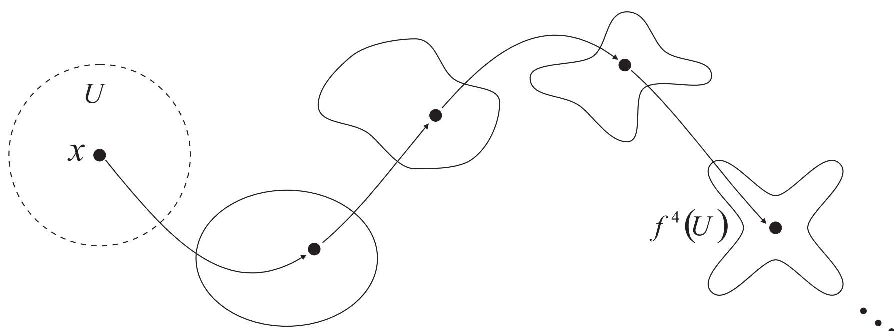


Figura 3.8: La órbita de la vecindad de un punto errante.

3.5.1. Puntos errantes en $F_n(X)$

Teorema 3.19 *Sea (X,f) un sistema dinámico. Si $x \in X$ es errante bajo f, entonces en el hiperespacio $F_n(X)$ se tiene que $\{x\}$ es errante bajo f_n.*

Demostración. Sea x un punto errante bajo f en X. Entonces existe un abierto U tal que $x \in U$ y los elementos de $\{f^m(U) : m \geq 0\}$ son ajenos entre sí. Sea $A = \{x\}$ y hagamos $\mathcal{U} = \langle U \rangle_{F_n(X)}$. De esta forma, $\mathcal{U}$ es un abierto en $F_n(X)$ que contiene al punto A. Dada $m \in \mathbb{N}$, si aplicamos la Proposición 1.13 a la función f^m, resulta que

$$\left\{f^m(A) : A \in \langle U \rangle_{F_n(X)}\right\} = \langle f^m(U) \rangle_{F_n(X)}.$$

Así que $f_n^m(\mathcal{U}) = \langle f^m(U)\rangle_{F_n(X)}$. Tomemos dos enteros no negativos distintos i y j. Como $f^i(U)\cap f^j(U) = \emptyset$, entonces $\langle f^i(U)\rangle_{F_n(X)} \cap \langle f^j(U)\rangle_{F_n(X)} = \emptyset$ y por lo tanto $f_n^i(\mathcal{U})\cap f_n^j(\mathcal{U}) = \emptyset$. Así que, los elementos de $\{f_n^m(\mathcal{U}) : m \geq 0\}$ son ajenos dos a dos y así concluimos que $A = \{x\}$ es errante bajo f_n. ■

Ahora demostraremos que existen sistemas dinámicos que contienen puntos errantes que no forman un elemento errante en el producto simétrico, así como también existen sistemas, para los cuales su hiperespacio $F_n(X)$ contiene elementos errantes, cuyos puntos no lo son en el espacio base.

Proposición 3.20 *Existen un sistema dinámico (Y, f) y dos puntos $a, b \in Y$, errantes bajo f, tales que $A = \{a, b\} \in F_2(Y)$ no es errante bajo f_2.*

Demostración. Tomemos en el intervalo $[0, 1]$, una sucesión $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ y $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = 0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $\{b(m, z) : z \in \mathbb{Z}\} \subset (a_{m+1}, a_m)$ un conjunto de puntos tales que $\lim\limits_{z\to-\infty} b(m, z) = a_{m+1}$, $\lim\limits_{z\to\infty} b(m, z) = a_m$ y si $z < w$, entonces $b(m, z) < b(m, w)$.

Definimos $Y = \{0\} \cup \{a_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{-a_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{b(m, z) : m \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}\} \cup \{-b(m, z) : m \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}\}$.

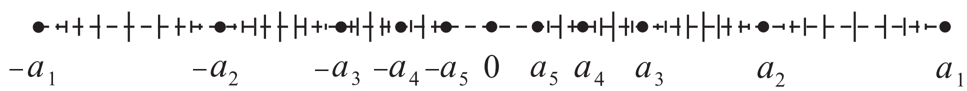


Figura 3.9: El espacio Y, contenido en $[-1, 1]$.

Sea $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, la función definida por

$$g(z) = \begin{cases} z + 1, & \text{si } z < 0, \\ 0, & \text{si } z = 0, \\ z - 1, & \text{si } z > 0. \end{cases}$$

Definimos $f : Y \to Y$ por

$$f(p) = \begin{cases} 0, & \text{si } p = 0, \\ -a_{m+1}, & \text{si } p = a_m, \\ a_{m+1}, & \text{si } p = -a_m, \\ -b(m+1, g(z)), & \text{si } p = b(m,z), \\ b(m+1, g(z)), & \text{si } p = -b(m,z). \end{cases}$$

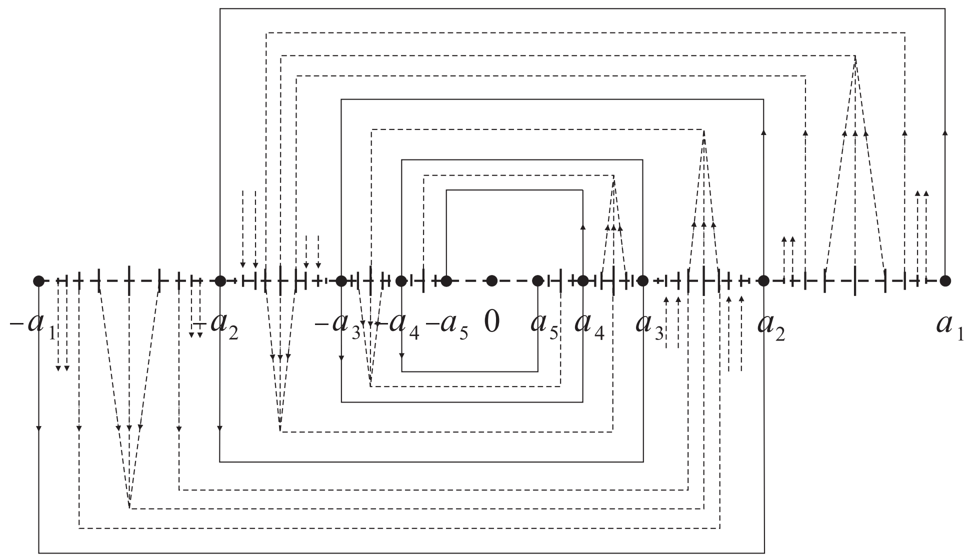


Figura 3.10: Órbitas en el espacio (Y, f).

Observemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, la función f envía de forma continua el conjunto $[a_{m+1}, a_m] \cap Y$, al conjunto $[-a_{m+1}, -a_{m+2}] \cap Y$ y el conjunto $[-a_m, -a_{m+1}] \cap Y$ se envía de forma continua al conjunto $[a_{m+2}, a_{m+1}] \cap Y$. Así que la función f es continua.

Sean $a = a_2$ y $U = (a_3, a_1) \cap Y$. De esta forma, U es un abierto de Y tal que $a \in U$. Observemos que $f(U) = (-a_2, -a_4) \cap Y$, $f^2(U) = (a_5, a_3) \cap Y$, $f^3(U) = (-a_4, -a_6) \cap Y$, ... Así que, los elementos de la familia $\{f^m(U) : m \geq 0\}$ son ajenos entre sí y, por tanto, a es errante bajo f. Haciendo $b = -a_2$ y $V = (-a_1, -a_3) \cap Y$ tenemos que $b \in V$ y los elementos de $\{f^m(V) : m \geq 0\}$ son ajenos dos a dos, de forma que b es errante también.

Ahora, supongamos que $A = \{a, b\} \in F_2(Y)$ es errante bajo f_2. En este caso, existe un abierto $\mathcal{U}$ de $F_2(Y)$ tal que $A \in \mathcal{U}$ y $\{f_2^m(\mathcal{U}) : m \geq 0\}$ es una familia de conjuntos ajenos entre sí.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < a_2$ y $B_\epsilon(A) \subset \mathcal{U}$. Entonces $V = (a - \epsilon, a + \epsilon) \cap Y$ y $W = (b - \epsilon, b + \epsilon) \cap Y$ son abiertos ajenos de Y tales que $a \in V$, $b \in W$ y $A \in \langle V, W \rangle_{F_2(Y)} \subset B_\epsilon(A) \subset \mathcal{U}$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que m es par, $b(1, -m)$ y $b(2, m)$ son elementos de V y además $-b(1, -m)$ y $-b(2, m)$ son elementos de W. Como $g(m) = m - 1$, $g^2(m) = m - 2$, $\ldots$ resulta que $g^m(m) = 0$ y $g^{m+1}(m) = 0$. De manera similar, $g^m(-m) = 0 = g^{m+1}(-m)$.

De lo anterior, tenemos que, $f^m(b(1, -m)) = f^{m-1}(-b(2, g(-m))) = f^{m-2}(b(3, g^2(-m))) = \cdots = (-1)^m b(m + 1, g^m(-m)) = b(m + 1, 0)$. Así que $f^m(b(1, -m)) = b(m + 1, 0)$ y además $f^{m+1}(b(1, -m)) = -b(m + 2, 0)$.

Para el punto $b(2, m)$, tenemos que, $f^m(b(2, m)) = f^{m-1}(-b(3, g(m))) = f^{m-2}(b(4, g^2(m))) = \cdots = (-1)^m b(m + 2, g^m(m)) = b(m + 2, 0)$. Así que $f^m(b(2, m)) = b(m + 2, 0)$ y $f^{m+1}(b(2, m)) = -b(m + 3, 0)$.

De manera similar, para el punto $-b(1, -m)$ tenemos que

$$f^m(-b(1, -m)) = -b(m + 1, 0) \quad \text{y} \quad f^{m+1}(-b(1, -m)) = b(m + 2, 0).$$

Finalmente, para el punto $-b(2, m)$ resulta que

$$f^m(-b(2, m)) = -b(m + 2, 0) \quad \text{y} \quad f^{m+1}(-b(2, m)) = b(m + 3, 0).$$

Por lo anterior, tenemos que

$$f^{m+1}(b(1, -m)) = f^m(-b(2, m)) \quad \text{y} \quad f^m(b(2, m)) = f^{m+1}(-b(1, -m))$$

Sean $p = f^m(-b(2, m))$ y $q = f^m(b(2, m))$. Como $-b(2, m) \in W$ y $b(1, -m) \in V$, entonces $p \in f^m(W) \cap f^{m+1}(V)$. Como $b(2, m) \in V$ y $-b(1, -m) \in W$, entonces $q \in f^m(V) \cap f^{m+1}(W)$. Por tanto, $\{p, q\} \in \langle f^m(V), f^m(W) \rangle_{F_2(Y)} \cap \langle f^{m+1}(V), f^{m+1}(W) \rangle_{F_2(Y)}$.

Por la Proposición 1.14,

$$\langle f^m(V), f^m(W)\rangle_{F_2(Y)} \cap \langle f^{m+1}(V), f^{m+1}(W)\rangle_{F_2(Y)} =$$
$$= \{f^m(B) : B \in \langle V, W\rangle_{F_2(Y)}\} \cap \{f^{m+1}(B) : B \in \langle V, W\rangle_{F_2(Y)}\}$$
$$= f_2^m(\langle V, W\rangle_{F_2(Y)}) \cap f_2^{m+1}(\langle V, W\rangle_{F_2(Y)}) \subset f_2^m(\mathcal{U}) \cap f_2^{m+1}(\mathcal{U}),$$

lo cual es una contradicción y por tanto $A = \{a, b\}$ no es errante bajo f_2. ■

Proposición 3.21 *Existen un sistema dinámico (Z, f) y dos puntos $a, b \in Z$, tales que $\{a, b\} \in F_2(Z)$ es errante bajo f_2, pero a y b no son errantes bajo f.*

Demostración. Sean $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ y $\{b(m, z) : m \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}\}$ tal y como fueron definidos en la demostración de la Proposición 3.20.

Sea $Z = (\{0\} \cup \{a_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{b(m, z) : m \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}\}) \times \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Hacemos $\oplus_3$, la suma módulo 3, definida en el conjunto de residuos $\{2, 3, 4\}$, es decir, dados dos enteros i y j, $i \oplus_3 j$ es el único elemento de $\{2, 3, 4\}$ congruente módulo 3 con el número $i + j$. De igual forma, definimos $\oplus_2$ como la suma módulo 2, en el conjunto $\{0, 1\}$.

Definimos la función $f : Z \to Z$, por

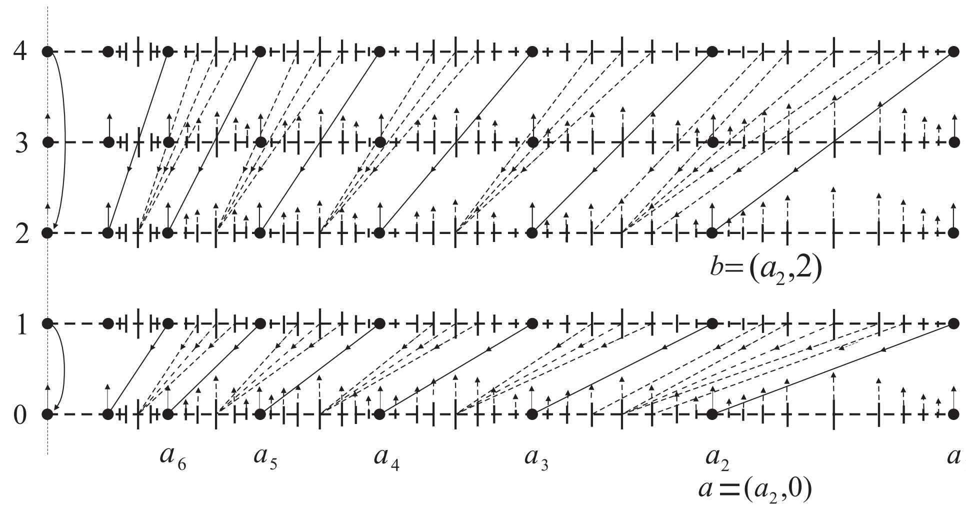
$$f(p, i) = \begin{cases} (p, 1), & \text{si } i = 0, \\ (0, 0), & \text{si } p = 0 \text{ e } i = 1, \\ (a_{m+1}, 0), & \text{si } p = a_m \text{ e } i = 1, \\ (b(m+1, g(z)), 0), & \text{si } p = b(m, z) \text{ e } i = 1, \\ (p, i+1), & \text{si } i \in \{2, 3\}, \\ (0, 2), & \text{si } p = 0 \text{ e } i = 4, \\ (a_{m+1}, 2), & \text{si } p = a_m \text{ e } i = 4, \\ (b(m+1, g(z)), 2), & \text{si } p = b(m, z) \text{ e } i = 4. \end{cases}$$

Sea $a = (a_2, 0)$ y $b = (a_2, 2)$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, sea

$$U(m, i) = ((a_{m+2}, a_m) \times \{i\}) \cap Z.$$

De esta forma, $U(m, i)$ es un abierto de Z.



Como $f(a_{m+2},0)=(a_{m+2},1)$, $f(a_m,0)=(a_m,1)$, $f(b(m,z),0)=(b(m,z),1)$ y $f(b(m+1,z),0)=(b(m+1,z),1)$, resulta que $f(U(m,0))=U(m,1)$. Para $U(m,1)$ tenemos que $f(U(m,1))=U(m+1,0)$.

Lo anterior, sugiere que para cada $k\in\mathbb{N}$, se tiene que

$$f^k(U(1,0))=U\left(1+\left[\frac{k}{2}\right],k\oplus_2 0\right).$$

Veamos por inducción en k que esto es cierto. Para $k=1$ tenemos que $f(U(1,0))=U(1,1)=U\left(1+\left[\frac{1}{2}\right],1\oplus_2 0\right)$. Supongamos que el resultado es válido para cualquier entero menor que $k+1$. Entonces $f^{k+1}(U(1,0))=f\left(f^k(U(1,0))\right)=f\left(U\left(1+\left[\frac{k}{2}\right],k\oplus_2 0\right)\right)$.

Si k es par, entonces $k\oplus_2 0=0$, $(k+1)\oplus_2 0=1$ y $\left[\frac{k}{2}\right]=\left[\frac{k+1}{2}\right]$. Por tanto

$$\begin{aligned}f^{k+1}(U(1,0))&=f\left(U\left(1+\left[\frac{k}{2}\right],0\right)\right)\\&=U\left(1+\left[\frac{k}{2}\right],1\right)\\&=U\left(1+\left[\frac{k+1}{2}\right],(k+1)\oplus_2 0\right).\end{aligned}$$

Si k es impar, entonces $k \oplus_2 0 = 1$, $(k+1) \oplus_2 0 = 0$ y $1 + \left[\frac{k}{2}\right] = \left[\frac{k+1}{2}\right]$, por tanto

$$
\begin{aligned}
f^{k+1}(U(1,0)) &= f\left(U\left(1 + \left[\frac{k}{2}\right], 1\right)\right) \\
&= U\left(1 + 1 + \left[\frac{k}{2}\right], 0\right) \\
&= U\left(1 + \left[\frac{k+1}{2}\right], (k+1) \oplus_2 0\right).
\end{aligned}
$$

En los dos casos, se tiene que el resultado es válido para $k+1$ y esto termina la inducción.

Dado que $f(a_{m+2}, 2) = (a_{m+2}, 3)$, $f(a_m, 2) = (a_m, 3)$, $f(b(m,z), 2) = (b(m,z), 3)$ y $f(b(m+1,z), 2) = (b(m+1,z), 3)$, entonces $f(U(m,2)) = U(m,3)$. Para $U(m,3)$ tenemos que $f(U(m,3)) = U(m,4)$ y finalmente para $U(m,4)$ tenemos que $f(U(m,4)) = U(m+1,2)$.

Igual que para $U(1,0)$, probaremos por inducción, que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$
f^k(U(1,2)) = U\left(1 + \left[\frac{k}{3}\right], k \oplus_3 2\right).
$$

Si $k = 1$, $f(U(1,2)) = U(1,3) = U\left(1 + \left[\frac{1}{3}\right], 1 \oplus_3 2\right)$. Supongamos que el resultado es válido para cualquier entero menor que $k+1$. En tal caso, $f^{k+1}(U(1,2)) = f\left(f^k(U(1,2))\right) = f\left(U\left(1 + \left[\frac{k}{3}\right], k \oplus_3 2\right)\right)$.

Si $k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$, entonces $k \oplus_3 2 = 2$, $(k+1) \oplus_3 2 = 3$ y $\left[\frac{k}{3}\right] = \left[\frac{k+1}{3}\right]$. Así que

$$
\begin{aligned}
f^{k+1}(U(1,2)) &= f\left(U\left(1 + \left[\frac{k}{3}\right], 2\right)\right) \\
&= U\left(1 + \left[\frac{k}{3}\right], 3\right) \\
&= U\left(1 + \left[\frac{k+1}{3}\right], (k+1) \oplus_3 2\right).
\end{aligned}
$$

Si $k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$, tenemos que $k \oplus_3 2 = 3$, $(k+1) \oplus_3 2 = 4$ y $\left[\frac{k}{3}\right] = \left[\frac{k+1}{3}\right]$. De manera que

$$\begin{aligned} f^{k+1}(U(1,2)) &= f\left(U\left(1+\left[\frac{k}{3}\right],3\right)\right) \\ &= U\left(1+\left[\frac{k}{3}\right],4\right) \\ &= U\left(1+\left[\frac{k+1}{3}\right],(k+1)\oplus_3 2\right). \end{aligned}$$

Por último, en caso de que $k \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$, resulta que $k \oplus_3 2 = 4$, $(k+1) \oplus_3 2 = 2$ y $1 + \left[\frac{k}{3}\right] = \left[\frac{k+1}{3}\right]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f^{k+1}(U(1,2)) &= f\left(U\left(1+\left[\frac{k}{3}\right],4\right)\right) \\ &= U\left(1+1+\left[\frac{k}{3}\right],2\right) \\ &= U\left(1+\left[\frac{k+1}{3}\right],(k+1)\oplus_3 2\right). \end{aligned}$$

Así que, en los tres casos se tiene que el resultado es válido para $k+1$. Esto termina la inducción.

Observemos que dos abiertos de la forma $U(m,i)$, se intersectan si y sólo si ambos están en la misma "pata" (a la misma altura) de Z y, además, son iguales o "consecutivos", es decir, $U(m,i) \cap U(r,j) \neq \emptyset$ si y sólo si $i = j$ y $|m-r| \leq 1$.

Sea $\mathcal{U} = \langle U(1,0), U(1,2)\rangle_{F_2(Z)}$. Como $U(1,0) = ((a_3,a_1)\times\{0\})\cap Z$ y $U(1,2) = ((a_3,a_1)\times\{2\})\cap Z$, $\mathcal{U}$ es un abierto de $F_2(Z)$ tal que $A = \{a,b\} \in \mathcal{U}$. Por lo que demostramos anteriormente, y por la Proposición 1.14, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} f_2^k(\mathcal{U}) &= \langle f^k(U(1,0)), f^k(U(1,2))\rangle_{F_2(Z)} \\ &= \left\langle U\left(1+\left[\frac{k}{2}\right],k\oplus_2 0\right), U\left(1+\left[\frac{k}{3}\right],k\oplus_3 2\right)\right\rangle_{F_2(Z)}. \end{aligned}$$

Como $k \oplus_2 0 \neq k \oplus_3 2$, $U\left(1+\left[\frac{k}{2}\right],k\oplus_2 0\right) \cap U\left(1+\left[\frac{k}{3}\right],k\oplus_3 2\right) = \emptyset$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Así que cualquier elemento de $f_2^k(\mathcal{U})$ contiene necesariamente dos puntos de Z.

Ahora veamos que los elementos de la familia $\{f_2^k(\mathcal{U}) : k \geq 0\}$ son ajenos entre sí. Supongamos que existen dos enteros k y l tales que $k < l$ y $f_2^k(\mathcal{U}) \cap f_2^l(\mathcal{U}) \neq \emptyset$. Sea $\{p, q\}$ un elemento de esta intersección. Podemos suponer que $p \in U\left(1 + \left[\frac{k}{2}\right], k \oplus_2 0\right)$ y $q \in U\left(1 + \left[\frac{k}{3}\right], k \oplus_3 2\right)$. Como $\{p, q\} \in f_2^l(\mathcal{U})$ y además $l \oplus_3 2 \neq k \oplus_2 0$, resulta que $p \notin U\left(1 + \left[\frac{l}{3}\right], l \oplus_3 2\right)$. Lo anterior implica que $p \in U\left(1 + \left[\frac{l}{2}\right], l \oplus_2 0\right)$ y $q \in U\left(1 + \left[\frac{l}{3}\right], l \oplus_3 2\right)$.

Lo anterior significa que $k \oplus_2 0 = l \oplus_2 0$, $k \oplus_3 2 = l \oplus_3 2$, $\left[\frac{l}{2}\right] - \left[\frac{k}{2}\right] \leq 1$ y $\left[\frac{l}{3}\right] - \left[\frac{k}{3}\right] \leq 1$. Por tanto $l \equiv k (\text{mod } 2)$ y $l \equiv k (\text{mod } 3)$, así que $l \equiv k (\text{mod } 6)$, luego, $l - k = 6s$ para algún $s \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\frac{l}{2} = \frac{k}{2} + 3s$, por lo que $\left[\frac{l}{2}\right] = \left[\frac{k}{2} + 3s\right] = \left[\frac{k}{2}\right] + 3s$ y esto significa que $\left[\frac{l}{2}\right] - \left[\frac{k}{2}\right] = 3s \geq 3$, lo cual es una contradicción. Por tanto los elementos de la familia $\{f_2^k(\mathcal{U}) : k \geq 0\}$ son ajenos entre sí y esto demuestra que $A = \{a, b\}$ es errante bajo f_2.

Ahora, demostraremos que a no es errante bajo f. Sea U un abierto de Z tal que $a \in U$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $(b(2, m), 0)$, $(b(1, -m), 0) \in U$. Observemos que

$$f^{2m}(b(2, m), 0) = f^{2m-1}(b(2, m), 1) = f^{2m-2}(b(3, g(m)), 0) =$$
$$f^{2m-3}(b(3, g(m)), 1) = f^{2m-4}(b(4, g^2(m)), 0) = \cdots = (b(2 + m, g^m(m)), 0) =$$
$$(b(2 + m, 0), 0).$$

Por otra parte tenemos que

$$f^{2(m+1)}(b(1, -m), 0) = f^{2(m+1)-1}(b(1, -m), 1) = f^{2(m+1)-2}(b(2, g(-m)), 0) =$$
$$f^{2(m+1)-3}(b(2, g(-m)), 1) = f^{2(m+1)-4}(b(3, g^2(-m)), 0) = \cdots =$$
$$(b(1 + m + 1, g^{m+1}(-m)), 0) = (b(2 + m, 0), 0).$$

De manera que $(b(2 + m, 0), 0) \in f^{2m}(U) \cap f^{2(m+1)}(U)$. Esto demuestra que a no es errante bajo f.

Sea V un abierto de Z tal que $b \in V$, y $m \in \mathbb{N}$ tal que $(b(2, m), 2)$, $(b(1, -m), 2) \in V$. Observemos que

$$f^{3m}(b(2, m), 2) = f^{3m-1}(b(2, m), 3) = f^{3m-2}(b(2, m), 4) = f^{3m-3}(b(3, g(m)), 2) =$$
$$f^{3m-4}(b(3, g(m)), 3) = f^{3m-5}(b(3, g(m)), 4) = f^{3m-6}(b(4, g^2(m)), 2) = \cdots =$$
$$(b(2 + m, g^m(m)), 2) = (b(2 + m, 0), 2).$$

Además, tenemos que

$$f^{3(m+1)}(b(1,-m),2) = f^{3(m+1)-1}(b(1,-m),3) = f^{3(m+1)-2}(b(1,-m),4) =$$

$$f^{3(m+1)-3}(b(2,g(-m)),2) = f^{3(m+1)-4}(b(2,g(-m)),3) =$$

$$f^{3(m+1)-5}(b(2,g(-m)),4) = f^{3(m+1)-6}(b(3,g^2(-m)),2) = \cdots =$$

$$(b(1+m+1,g^{m+1}(-m)),2) = (b(2+m,0),2).$$

Así que $(b(2+m,0),2) \in f^{3m}(V) \cap f^{3(m+1)}(V)$. Por tanto, los elementos de la familia $\{f^k(V) : k \geq 0\}$, no son ajenos entre sí. Esto prueba que b no es errante bajo f. $\blacksquare$

Es posible que todos los puntos de un espacio sean errantes excepto los puntos fijos.

Ejemplo 3.22 *Consideremos el sistema dinámico* (X, f) *con* $X = [0,1]$ *y* $f : X \to X$ *definida como* $f(x) = x^2$. *Sea* $x \in X$ *tal que* $0 < x < 1$. *Entonces* x *es errante en* X *bajo* f.

Demostración. Como f es continua y $f(x) = x^2 < x$, podemos tomar $w \in (x, 1)$ (cercano a x) de manera que $f(w) < x$. Así que $w^2 < x$. Elegimos u tal que $w^2 < u < x$. Entonces $w^2 < u < x < w < 1$. Elevando al cuadrado tenemos que $w^4 < u^2 < x^2 < w^2 < u < x < w$. Elevando otra vez obtenemos que $w^8 < u^4 < x^4 < w^4 < u^2 < x^2 < w^2 < u < x < w$. Procediendo de esta manera, tenemos que

$$u^{2^{k+1}} < x^{2^{k+1}} < w^{2^{k+1}} < u^{2^k} < x^{2^k} < w^{2^k}$$

para todo entero $k \geq 0$.

Sea $U = (u, w)$. Entonces U es un abierto tal que $x \in U$. Como f es una función estrictamente creciente, $f(U) = (f(u), f(w)) = (u^2, w^2)$, $f^2(U) = (u^4, w^4)$, etc. Por tanto, los elementos de la colección $\left\{f^k(U) : k \geq 0\right\}$ son ajenos entre sí. De esta forma concluimos que x es errante bajo f. $\blacksquare$

Cuando un elemento del producto simétrico es errante bajo la función inducida, es posible que todos sus puntos sean errantes en el espacio base, así como también es posible que alguno de sus puntos no lo sea.

Ejemplo 3.23 *Sean* $X = [0,1]$ *y* $f : X \to X$ *definida por* $f(x) = x^2$*. Sea* $A = \{x, y\}$*, tal que* $0 < x < 1$ *y* $0 < y < 1$*. Entonces* A *es errante en* $F_2(X)$ *bajo* f_2 *y además tanto* x *como* y *son errantes en* X *bajo* f*.*

Demostración. Por el Ejemplo 3.22, tenemos que x y y son errantes bajo f, así que existen U y V abiertos de la forma $U = (a_x, b_x)$ y $V = (a_y, b_y)$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\left\{f^k(U) : k \geq 0\right\}$ y $\left\{f^k(V) : k \geq 0\right\}$ son familias cuyos elementos son ajenos entre sí. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x < y$ y que $U \cap V = \emptyset$, así que $0 < a_x < b_x < a_y < b_y < 1$. Observemos que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 < a_x^{2^k} < b_x^{2^k} < a_y^{2^k} < b_y^{2^k} < 1$ y por lo tanto $f^k(U) \cap f^k(V) = \left(a_x^{2^k}, b_x^{2^k}\right) \cap \left(a_y^{2^k}, b_y^{2^k}\right) = \emptyset$. De esto se sigue que si $m < k$ entonces $f^k(U) \cap f^m(V) = \emptyset$.

Hagamos $\mathcal{U} = \langle U, V\rangle_{F_2(X)}$. Entonces $\mathcal{U}$ es un abierto en $F_2(X)$ y es claro que $A = \{x, y\} \in \mathcal{U}$. Como $f^k(U)$ y $f^k(V)$ son abiertos para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Si aplicamos la Proposición 1.14 a la función f^k, resulta que

$$\left\{f^k(A) : A \in \langle U, V\rangle_{F_2(X)}\right\} = \langle f^k(U), f^k(V)\rangle_{F_2(X)}.$$

Así que $f_2^k(\mathcal{U}) = \langle f^k(U), f^k(V)\rangle_{F_2(X)}$.

Supongamos que existen dos enteros positivos m y k tales que $m < k$ y $\langle f^m(U), f^m(V)\rangle_{F_2(X)} \cap \langle f^k(U), f^k(V)\rangle_{F_2(X)} \neq \emptyset$. Sea B un elemento de esta intersección, entonces $B = \{y_1, y_2\}$, con $y_1 \in f^m(U)$ y $y_2 \in f^m(V)$. Como $f^m(V) \cap f^k(V) = \emptyset$, resulta que $y_2 \notin f^k(V)$, y como $B \in \langle f^k(U), f^k(V)\rangle_{F_2(X)}$, entonces $y_2 \in f^k(U)$ y esto significa que $f^m(V) \cap f^k(U) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, los elementos de la familia $\left\{f_2^k(\mathcal{U}) : k \geq 0\right\}$ son ajenos dos a dos y así concluimos que $A = \{x, y\}$ es errante en $F_2(X)$, bajo f_2. ■

El siguiente ejemplo muestra que en el producto simétrico pueden existir elementos errantes, que contienen puntos no errantes en el espacio base.

Ejemplo 3.24 *Sean* $X = [0,1]$ *y* $f : X \to X$ *definida por* $f(x) = x^2$*. Si* $0 < x < 1$*, entonces* $A = \{x, 1\}$ *y* $B = \{0, x\}$ *son errantes en* $F_2(X)$*, bajo* f_2*.*

Demostración. Veamos que A es errante en $F_2(X)$. Por el Ejemplo 3.22, se tiene que x es errante en X, así que existe un abierto $U = (a_x, b_x)$ tal que $x \in U$ y $\left\{f^k(U) : k \geq 0\right\}$ es una familia de conjuntos ajenos dos a dos. Tomemos $a \in X$ tal que $b_x < a < 1$. Entonces $V = (a, 1]$ es un abierto tal que $1 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Observemos que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $0 < a_x^{2^k} < b_x^{2^k} < a^{2^k} < 1$ y por lo tanto $f^k(U) \cap f^k(V) = \left(a_x^{2^k}, b_x^{2^k}\right) \cap \left(a^{2^k}, 1\right] = \emptyset$. De esto se sigue que si $m < k$ entonces $f^k(U) \cap f^m(V) = \emptyset$.

Observemos que el conjunto $\mathcal{U} = \langle U, V\rangle_{F_2(X)}$ es un abierto en $F_2(X)$ que contiene al punto A. De la misma forma que en el Ejemplo 3.23; se demuestra que $\left\{f_2^k(\mathcal{U}) : k \geq 0\right\}$ es una familia de conjuntos ajenos dos a dos y por lo tanto el punto $A = \{x, 1\}$ es errante en $F_2(X)$ bajo f_2 y sin embargo, el punto $w = 1$ no es errante en X por ser un punto fijo de f.

La prueba de que B es errante en $F_2(X)$, es análoga a la que se hizo para el punto A, eligiendo $b \in X$ tal que $0 < b < a_x < b_x < 1$, donde $U = [0, 1)$ es un abierto que contiene a 0 y $V = (a_x, b_x)$ es el abierto que contiene a x y que cumple con la definición de punto errante. ■

Para terminar con la discusión sobre este sistema dinámico, sólo nos falta mencionar que el punto $A = \{0, 1\}$, no es errante en $F_2(X)$ y esto se debe a que es un punto fijo de f_2. Así que, en el sistema $(F_2([0, 1]), f_2)$, todos los puntos excepto {0,1}, {0} y {1}, son errantes.

3.6. Puntos no errantes

Los puntos periódicos, recurrentes, casi-periódicos y regularmente recurrentes, pertenecen a una clase de puntos mas general, ésta, es la clase de los puntos no errantes.

Definición 3.25 *En un sistema dinámico (X, f), un punto p es **no errante**, si para cada abierto U de X, tal que $p \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $f^m(U) \cap U \neq \emptyset$.*

Para los puntos de este tipo, sucede que cualquiera de sus vecindades es intersectada por algún elemento de su propia órbita. En adelante denotaremos por $NE(X, f)$ al conjunto de puntos no errantes del sistema (X, f).

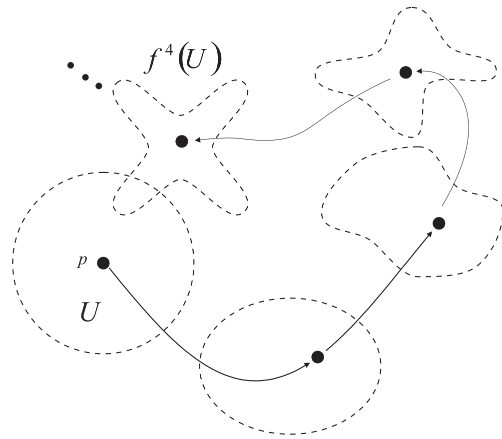


Figura 3.11: La órbita de una vecindad de un punto no errante.

Demostraremos que para puntos no errantes se cumplen dos resultados similares a las Proposiciones 3.20 y 3.21.

Proposición 3.26 *Existen un sistema dinámico* (Y, f) *y dos puntos* $a, b \in NE(Y, f)$, *tales que* $A = \{a, b\} \notin NE(F_2(Y), f_2)$.

Demostración. En el plano Euclidiano, definimos

$$Z = \{(0,0)\} \cup \left\{\left(\frac{1}{i}, 0\right) : i \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\left(0, \frac{1}{j}\right) : j \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{i}, \frac{1}{j}\right) : i, j \in \mathbb{N}\right\}.$$

Dado un entero $m \geq 3$, hacemos $q_m = (0, 1)$ y definimos la función $g(m) : Z \to Z$ por

$$g(m)(p) = \begin{cases} (\frac{1}{i-1}, 0), & \text{si } p = (\frac{1}{i}, 0) \text{ e } i \geq 2, \\ (0, 0), & \text{si } p = (0, 0), \\ (0, \frac{1}{j+1}), & \text{si } p = (0, \frac{1}{j}), \\ (y, 1), & \text{si } p = (1, y) \text{ donde } y = 0 \text{ o } y = \frac{1}{j}, \\ (\frac{1}{i}, \frac{1}{j+1}), & \text{si } p = (\frac{1}{i}, \frac{1}{j}), j \leq m^i - i \text{ e } i \geq 2, \\ (\frac{1}{i-1}, \frac{1}{j+1}), & \text{si } p = (\frac{1}{i}, \frac{1}{j}), j > m^i - i \text{ e } i \geq 2. \end{cases}$$

Observemos que la función $g = g(m)$ es continua y además $g^k(q_m) = (0, \frac{1}{k+1})$, por lo que $\|q_m - g^k(q_m)\| = 1 - \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{2}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

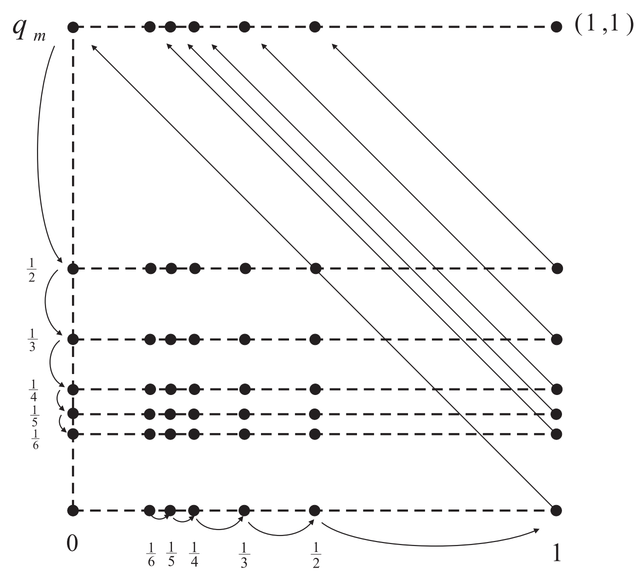


Figura 3.12: El espacio Z y la función $g(m)$.

Observación 4. *Para cada* $i \in \mathbb{N} - \{1\}$, *hacemos* $z = (\frac{1}{i}, 1)$. *Entonces* $g^{m^i}(z) = (\frac{1}{m^i}, 1)$ *y* $g^k(z) \in [0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$ *para cada* $k \in \{1, 2, \ldots, m^i - 1\}$.

Demostración. Para demostrar esto, será suficiente observar que $g(z) = (\frac{1}{i}, \frac{1}{2})$, $g^2(z) = (\frac{1}{i}, \frac{1}{3})$, $\ldots$, $g^{m^i-i-1}(z) = (\frac{1}{i}, \frac{1}{m^i-i})$, $g^{m^i-i}(z) = (\frac{1}{i}, \frac{1}{m^i-i+1})$, $g^{m^i-i+1}(z) = (\frac{1}{i-1}, \frac{1}{m^i-i+2})$, $g^{m^i-i+2}(z) = (\frac{1}{i-2}, \frac{1}{m^i-i+3})$, $\ldots$, $g^{m^i-i+i-1}(z) = (\frac{1}{i-i+1}, \frac{1}{m^i-i+i}) = (1, \frac{1}{m^i})$, $g^{m^i}(z) = (\frac{1}{m^i}, 1)$.

Observación 5. $q_m \in NE(Z, g(m))$ *y si* $w \in Z$ *con* $w \neq q_m$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *satisfacen que* $\|q_m - w\| < \frac{1}{2}$ *y* $\|q_m - g(m)^k(w)\| < \frac{1}{2}$, *entonces* k *es un entero de la forma* $k = m^i + m^{m^i} + m^{m^{m^i}} + \ldots$, *donde* $i \geq 2$ *y el número de sumandos es finito.*

Demostración. Sea U un abierto de Z, tal que $q_m \in U$. Sea $\epsilon > 0$, tal que $\epsilon < \frac{1}{2}$ y $B_\epsilon^{\mathbb{R}^2}(q_m) \cap Z \subset U$.

Sea $i \in \mathbb{N} - \{1\}$, tal que $\frac{1}{i} < \epsilon$. Entonces $\|q_m - (\frac{1}{i}, 1)\| = \frac{1}{i} < \epsilon$. De manera que, $(\frac{1}{i}, 1) \in U$. Por la Observación 4, $g(m)^{m^i}(\frac{1}{i}, 1) = (\frac{1}{m^i}, 1)$, así que $\|q_m - g(m)^{m^i}(\frac{1}{i}, 1)\| = \frac{1}{m^i} < \frac{1}{i} < \epsilon$. Esto significa que $g(m)^{m^i}(\frac{1}{i}, 1) \in U$, y por tanto $g(m)^{m^i}(U) \cap U \neq \emptyset$. De esta forma concluimos que $q_m \in NE(Z, g(m))$.

Observemos que si $w \in Z$, satisface que $\|q_m - w\| < \frac{1}{2}$, entonces w es de la forma $(\frac{1}{i}, 1)$ para alguna $i \geq 2$. Por la Observación 4, para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, m^i - 1\}$, se tiene que $g(m)^k(w) \notin B_{\frac{1}{2}}(q_m)$ y $g(m)^{m^i}(w) \in B_{\frac{1}{2}}(q_m)$.

Como $g(m)^{m^i}(w) = (\frac{1}{m^i}, 1)$, otra vez, por la Observación 4, para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, m^{m^i} - 1\}$, resulta que $g(m)^k(g^{m^i}(w)) = g(m)^{m^i+k}(w) \notin B_{\frac{1}{2}}(q_m)$ y $g(m)^{m^{m^i}}(g(m)^{m^i}(w)) = g(m)^{m^i+m^{m^i}}(w) \in B_{\frac{1}{2}}(q_m)$.

Procediendo de esta manera, resulta que si $\|q_m - w\| < \frac{1}{2}$ y $\|q_m - g(m)^k(w)\| < \frac{1}{2}$, entonces k es una suma de potencias de m de la forma $k = m^i + m^{m^i} + m^{m^{m^i}} + \ldots$, en la cual, hay un número finito de sumandos y además $i \geq 2$. Esto, termina la prueba de la Observación 5.

Ahora, definimos $Y = Z_1 \cup Z_2$, donde Z_1 y Z_2 son dos copias de Z, ajenas entre sí. Consideremos las funciones $g(3) : Z_1 \to Z_1$ y $g(6) : Z_2 \to Z_2$. Sean $a = q_3 \in Z_1$ y $b = q_6 \in Z_2$. Sea $f : Y \to Y$ la extensión común de $g(3)$ y $g(6)$.

Si U es un abierto de Y tal que $q_3 \in U$, existe U_3, abierto de Z_1 tal que $q_3 \in U_3 \subset U$. Por la Observación 5, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $g(3)^m(U_3) \cap U_3 \neq \emptyset$. Esto significa que $f^m(U_3) \subset f^m(U)$ y $f^m(U_3) \cap U_3 \neq \emptyset$. Así que $f^m(U_3) \cap U_3 \subset f^m(U) \cap U$, de manera que esta última intersección es no vacía. Por tanto, $q_3 \in NE(Y, f)$. De forma similar, se prueba que $q_6 \in NE(Y, f)$.

Supongamos que $A = \{a, b\} \in NE(F_2(Y), f_2)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \frac{1}{2}$. Entonces $\mathcal{U} = B_\epsilon(A)$ es un abierto de $F_2(Y)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_2^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

Como $\|a - f^k(a)\| = \|q_3 - g(3)^k(q_3)\| \geq \frac{1}{2}$ y $\|b - f^k(b)\| = \|q_6 - g(6)^k(q_6)\| \geq \frac{1}{2}$, existe $\{x, y\} \in \mathcal{U} - \{A\}$, tal que $f_2^k(\{x, y\}) \in \mathcal{U}$. Como $\{x, y\} \subset N(\epsilon, A)$, podemos suponer que $x \in Z_1$ y $y \in Z_2$. De manera que, $\|a - x\| < \frac{1}{2}$, $\|b - y\| < \frac{1}{2}$, $\|a - f^k(x)\| < \frac{1}{2}$ y $\|b - f^k(y)\| < \frac{1}{2}$.

Por la Observación 5, resulta que k es de la forma

$$k = 3^i + 3^{3^i} + 3^{3^{3^i}} + \cdots = 6^j + 6^{6^j} + 6^{6^{6^j}} + \ldots$$

donde $i, j \geq 2$. Lo anterior, significa que

$$k = 3^i \left(1 + 3^{3^i - i} + 3^{3^{3^i}-i} + \ldots\right) = 3^j \left(2^j + 2^{6^j} 3^{6^j - j} + 2^{6^{6^j}} 3^{6^{6^j}-j} + \ldots\right)$$

Por tanto, la mayor potencia de 3 que divide a k, es 3^i y 3^j. Así que, $i = j$. En consecuencia,

$$1 + 3^{3^i - i} + 3^{3^{3^i}-i} + \cdots = 2^i + 2^{6^i} 3^{6^i - i} + 2^{6^{6^i}} 3^{6^{6^i}-i} + \ldots$$

Como $3^i \geq 2i$, observemos que

$$1 + 3^{3^i - i} + 3^{3^{3^i}-i} + \ldots \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3^i) \quad \text{y}$$
$$2^i + 2^{6^i} 3^{6^i - i} + 2^{6^{6^i}} 3^{6^{6^i}-i} + \ldots \equiv 2^i (\mathrm{mod}\ 3^i)$$

De manera que $2^i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3^i)$, lo cual es imposible ya que $0 < 1 < 2^i < 3^i$. Esta contradicción demuestra que $\{a, b\} \notin NE(F_2(Y), f_2)$. ■

Proposición 3.27 *Existen un sistema dinámico* (Y, f) *y dos puntos* $a, b \in Y$*, tales que* $a, b \notin NE(Y, f)$*, pero* $A = \{a, b\} \in NE(F_2(Y), f_2)$*.*

Demostración. Sea Z el conjunto que definimos en la Proposición 3.26. Sea $Y = (Z \cup \{(0, 1 + \frac{1}{j}) : j \in \mathbb{N}\}) \times \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Hacemos $\oplus_2$ la suma módulo 2, definida en el conjunto $\{0, 1\}$. Definimos la función $f : Y \to Y$ por

$$f(p) = \begin{cases} (\frac{1}{i-1}, 0, k), & \text{si } p = (\frac{1}{i}, 0, k) \text{ e } i \geq 2, \\ (0, 0, k), & \text{si } p = (0, 0, k), \\ (0, \frac{1}{j+1}, k), & \text{si } p = (0, \frac{1}{j}, k), \\ (0, 1 + y, k \oplus_2 1), & \text{si } p = (1, y, k) \text{ y } y = 0 \text{ o } y = \frac{1}{j}, \\ (\frac{1}{i-1}, \frac{1}{j+1}, k), & \text{si } p = (\frac{1}{i}, \frac{1}{j}, k) \text{ e } i \geq 2, \\ (0, \frac{1}{2}, k), & \text{si } p = (0, 1 + \frac{1}{j}, k) \text{ y } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Sean $a = (0, 1, 0)$ y $b = (0, 1, 1)$. Dados $i \geq 2$ y $k \in \{0, 1\}$, tenemos que

$$f\Big(\frac{1}{i}, 1, k\Big) = \Big(\frac{1}{i-1}, \frac{1}{2}, k\Big), f^2\Big(\frac{1}{i}, 1, k\Big) = \Big(\frac{1}{i-2}, \frac{1}{3}, k\Big), \ldots, f^{i-1}\Big(\frac{1}{i}, 1, k\Big) =$$

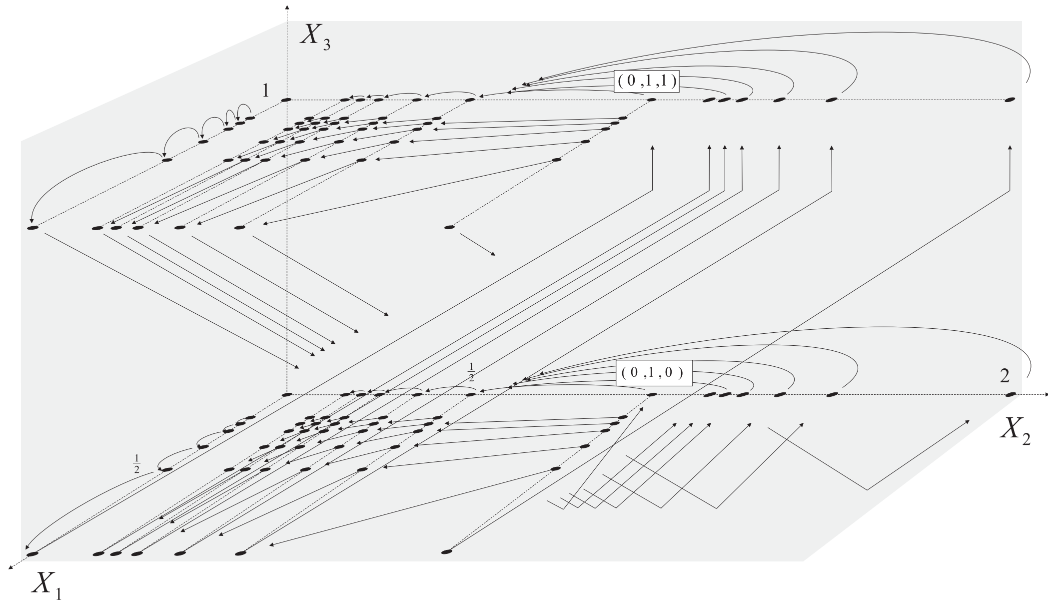


Figura 3.13: El espacio Y y la función f.

$$\Big(\frac{1}{i-i+1},\frac{1}{i},k\Big)=\Big(1,\frac{1}{i},k\Big),f^i\Big(\frac{1}{i},1,k\Big)=\Big(0,1+\frac{1}{i},k\oplus_2 1\Big),$$
$$f^{i+1}\Big(\frac{1}{i},1,k\Big)=\Big(0,\frac{1}{2},k\oplus_2 1\Big),f^{i+2}\Big(\frac{1}{i},1,k\Big)=\Big(0,\frac{1}{3},k\oplus_2 1\Big),\ldots,$$
$$f^{i+r}\Big(\frac{1}{i},1,k\Big)=\Big(0,\frac{1}{1+r},k\oplus_2 1\Big).$$

De lo anterior, resulta que $\|(0,1,k)-f^s(\frac{1}{i},1,k)\|\geq\frac{1}{2}$ para cualquier $s\in\mathbb{N}$. Además $\|(0,1,k\oplus_2 1)-f^i(\frac{1}{i},1,k)\|=\|(0,1,k\oplus_2 1)-(0,1+\frac{1}{i},k\oplus_2 1)\|=\frac{1}{i}$.

Veamos que $A=\{a,b\}\in NE(F_2(Y),f_2)$. Sean $\mathcal{U}$ un abierto de $F_2(Y)$ tal que $A\in\mathcal{U}$ y $\epsilon>0$ tal que $\epsilon<\frac{1}{2}$ y $B_\epsilon(A)\subset\mathcal{U}$. Hacemos $V=B_\epsilon^{\mathbb{R}^3}(a)\cap Y$ y $W=B_\epsilon^{\mathbb{R}^3}(b)\cap Y$. Entonces V y W son abiertos de Y tales que $V\cap W=\emptyset$ y $A\in\langle V,W\rangle_{F_2(Y)}\subset B_\epsilon(A)\subset\mathcal{U}$.

Sea $i\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{i}<\epsilon$, de aquí que $(\frac{1}{i},1,0)\in V$ y $(\frac{1}{i},1,1)\in W$. Por lo que hemos visto, $\|(0,1,1)-f^i(\frac{1}{i},1,0)\|=\frac{1}{i}<\epsilon$ y $\|(0,1,0)-f^i(\frac{1}{i},1,1)\|=\frac{1}{i}<\epsilon$. Esto significa que $f^i(\frac{1}{i},1,0)\in W$ y $f^i(\frac{1}{i},1,1)\in V$. Por tanto,

$$\Big\{f^i\Big(\frac{1}{i},1,0\Big),f^i\Big(\frac{1}{i},1,1\Big)\Big\}\in\langle V,W\rangle_{F_2(Y)}\subset\mathcal{U}.$$

Además $f^i(\frac{1}{i},1,0) \in f^i(V)$ y $f^i(\frac{1}{i},1,1) \in f^i(W)$, así que, por la Proposición 1.14, $\{f^i(\frac{1}{i},1,0), f^i(\frac{1}{i},1,1)\} \in \langle f^i(V), f^i(W)\rangle_{F_2(Y)} = f_2^i(\langle V, W\rangle_{F_2(Y)}) \subset f_2^i(\mathcal{U})$.

De manera que $f_2^i(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ y por tanto $A \in NE(F_2(Y), f_2)$.

Ahora demostraremos que $a \notin NE(Y, f)$. Sea $\epsilon < \frac{1}{2}$ y hagamos $U = B_\epsilon^{\mathbb{R}^3}(a) \cap Y$. Entonces U es un abierto de Y, tal que $a \in U$. Observemos que si $w \in U - \{a\}$, entonces $w = (\frac{1}{i},1,0)$ o $w = (0, 1+\frac{1}{i}, 0)$ para alguna $i > 2$.

Notemos que para cada $s \in \mathbb{N}$, $f^s(a) = f^s(0,1,0) = (0, \frac{1}{1+s}, 0) = f^s(0, 1+\frac{1}{i}, 0)$. Además, sabíamos que $\|(0,1,0) - f^s(\frac{1}{i},1,0)\| \geq \frac{1}{2}$. Por tanto, para cualquier $w \in U$, se tiene que $f^s(w) \notin B_\epsilon^{\mathbb{R}^3}(a) \cap Y = U$, es decir, $f^s(U) \cap U = \emptyset$ para cualquier $s \in \mathbb{N}$. Así que $a \notin NE(Y, f)$.

La prueba de que $b \notin NE(Y, f)$, es similar, considerando el abierto $V = B_\epsilon^{\mathbb{R}^3}(b) \cap Y$ con $\epsilon < \frac{1}{2}$. ■

Capítulo 4

Propiedades de sistema

4.1. Minimalidad

Decimos que un sistema dinámico X es ***caótico*** si contiene un punto cuya órbita es densa en X y, además, el conjunto de puntos periódicos también es denso en X.

Por ejemplo, si $X = [0, 1]$ y $f : X \to X$ está definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \text{si } \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

entonces el sistema (X, f) es caótico [22, pág. 86].

En los sistemas caóticos, tenemos que algunos de sus puntos tienen órbita densa. Cuando todas las órbitas posibles del sistema son densas decimos que el sistema es minimal.

Definición 4.1 *Un sistema dinámico (X, f) es **minimal**, si la órbita de cualquier punto $x \in X$, es densa en X.*

En el Ejemplo 2.3, hemos demostrado que la órbita de cualquier punto de una rotación irracional es densa. De lo anterior tenemos que la siguiente proposición es cierta.

Proposición 4.2 *Si T es la circunferencia de perímetro 1 y $R_a : T \to T$ es una rotación irracional, entonces el sistema dinámico (T, R_a) es minimal.*

La máquina de sumar, que hemos definido en la Sección 2.2, es un sistema dinámico con muchas propiedades. Como hemos visto, presenta propiedades relacionadas con la recurrencia, ahora veremos que en relación con la forma en que las órbitas se dispersan por el espacio, la máquina de sumar es un sistema minimal.

Proposición 4.3 *La máquina de sumar es un sistema minimal.*

Demostración. De acuerdo con la Proposición 2.4, en la máquina de sumar, la órbita de cualquier punto es densa, así que, dicho espacio es minimal. ■

4.1.1. Minimalidad y productos simétricos

El hecho de que un sistema dinámico X sea minimal no significa que su producto simétrico resulte serlo también. Más aún, los productos simétricos nunca resultan ser minimales como lo demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4.4 *Si (X, f) es un sistema dinámico, entonces el sistema dinámico $(F_n(X), f_n)$ no es minimal para ninguna $n \geq 2$.*

Demostración. Consideremos el conjunto $A = \{x\}$, con x cualquier elemento de X. Entonces $A \in F_n(X)$ y para cualquier $m \geq 0$ se tiene que $f_n^m(A) = \{f^m(x)\}$, de aquí que la órbita de A es un conjunto de singulares y entonces está contenida en el conjunto cerrado $F_1(X)$ de $F_n(X)$. Por tanto $\overline{\mathcal{O}(A)} \subset F_1(X) \neq F_n(X)$ y $\mathcal{O}(A)$ no es densa. Por tanto $(F_n(X), f_n)$ no es minimal. ■

4.1.2. Minimalidad y subconjuntos invariantes

El concepto de minimalidad está relacionado con el tamaño de los subconjuntos invariantes del sistema dinámico en cuestión. En este sentido, un sistema es minimal, cuando no contiene propiamente subconjuntos cerrados no vacíos, que sean invariantes. (ver definición 1.17)

Teorema 4.5 *Un sistema dinámico (X, f) es minimal, si y sólo si no contiene subsistemas dinámicos propios, es decir, si $Y \subset X$ es un conjunto cerrado e invariante, entonces $Y = \emptyset$ o bién $Y = X$.*

Demostración. Supongamos que X es minimal y que contiene un subconjunto cerrado e invariante Y, tal que $Y \neq \emptyset$ y $Y \neq X$. Sea $x \in Y$. Como Y es invariante, entonces $\mathcal{O}(x) \subset Y$ y, como Y es cerrado, se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x)} \subset Y \neq X$. Esto significa que la órbita de x bajo f no es densa en X, lo cual contradice que X es minimal. Por lo tanto X no contiene subsistemas propios.

Ahora supongamos que X no contiene subsistemas propios. Tomemos $x \in X$. Por la Proposición 1.18, $\overline{\mathcal{O}(x)}$ es invariante bajo f, entonces $\overline{\mathcal{O}(x)}$ es un subsistema no vacío de X y, por lo tanto, $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$. Con esto concluimos que la órbita de x es densa en X, así que (X, f) es minimal. ■

Es posible que un sistema dinámico no sea minimal, pero con ayuda del resultado anterior demostraremos que cualquier sistema contiene un subsistema minimal.

Teorema 4.6 *Si (X, f) es un sistema dinámico, entonces contiene un subsistema minimal.*

Demostración. Para demostrar esto, utilizaremos el Lema de Zorn. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos no vacíos de X que son cerrados e invariantes bajo f. Esta familia no es vacía, pues $X \in \mathcal{F}$. Además la contención es un orden parcial en dicha familia. Supongamos que $\mathcal{F}_0$ es una subfamilia de $\mathcal{F}$ y que es linealmente ordenada. Como X es un continuo, tenemos que $Y_0 = \bigcap \mathcal{F}_0$ es un conjunto cerrado no vacío. Dado $y \in Y_0$, tenemos que y es elemento de cualquier integrante de $\mathcal{F}_0$, y como los elementos de $\mathcal{F}_0$ son invariantes, resulta que $f(y)$ también es elemento de cualquier integrante de $\mathcal{F}_0$. Por tanto $f(y) \in Y_0$. Así que Y_0 es invariante bajo f. Como $Y_0 \subset Y$ para cualquier $Y \in \mathcal{F}_0$, entonces Y_0 es una cota inferior para $\mathcal{F}_0$. Por el Lema de Zorn, tenemos que $\mathcal{F}$ tiene elementos minimales. Sea Y_m uno de estos elementos minimales. Entonces Y_m no contiene subsistemas propios. Por el Teorema 4.5, concluimos que Y_m es un subsistema minimal. ■

4.1.3. Puntos casi-periódicos y sistemas minimales

Ahora demostraremos que los puntos casi-periódicos no son tan raros en los sistemas dinámicos, en el sentido de que cualquier sistema dinámico contiene al menos un punto de este tipo. Para demostrar lo anterior, primero daremos una caracterización de los puntos casi-periódicos en términos de su órbita.

Teorema 4.7 *Sean (X, f) un sistema dinámico, y $z \in X$. Entonces z es casi-periódico si y sólo si $\overline{\mathcal{O}(z)}$ es un sistema minimal.*

Demostración. Sea $Z = \overline{\mathcal{O}(z)}$. Por la Proposición 1.18, Z es un conjunto invariante. Consideremos la restricción de f sobre Z, es decir, hagamos $F : Z \to Z$ definida como $F(x) = f(x)$, para cada $x \in Z$.

Supongamos que el sistema dinámico (Z, F) es minimal. Sea $U \subset Z$, un abierto tal que $z \in U$. Como Z es minimal, tenemos que para cada $x \in Z$, el subconjunto $\mathcal{O}(x)$ es denso en Z, así que, para cada $x \in Z$ existe un entero positivo j, tal que $F^j(x) \in U$, o dicho de otro modo, $x \in (F^j)^{-1}(U)$. Lo anterior significa que la familia $\mathcal{U} = \{(F^j)^{-1}(U) : j \geq 0\}$ es una cubierta abierta de Z.

Como X es compacto, entonces Z también lo es, así que existe un número entero $p > 0$ tal que el conjunto $\{U, F^{-1}(U), (F^2)^{-1}(U), \ldots, (F^{p-1})^{-1}(U)\}$ es una subcubierta finita para Z. Como $z \in Z$ y Z es invariante bajo f, dado $n \geq 0$, existe un entero $k < p$ tal que $F^n(z) \in (F^k)^{-1}(U)$, es decir, $F^k(F^n(z)) = F^{n+k}(z) \in U$ y así concluimos que z es casi-periódico.

Ahora supongamos que z es casi-periódico. De acuerdo con el Teorema 4.5 es suficiente demostrar que Z no contiene subsistemas propios. Así que supongamos que existe un subconjunto W cerrado e invariante, no vacío contenido propiamente en Z. Si $z \in W$ entonces $\overline{\mathcal{O}(z)} \subset W$, pero esto contradice que $Z = \overline{\mathcal{O}(z)}$. Ahora bien, si $z \notin W$, existe un abierto V en X tal que $z \in V$ y $\overline{V} \cap W = \emptyset$. Como z es casi-periódico, existe $p > 0$ tal que para cualquier $n \geq 0$ existe un entero positivo $k < p$ con la característica de que $F^{n+k}(z) \in V$.

Definimos el conjunto V_p por

$$V_p = \overline{V} \cup F^{-1}\left(\overline{V}\right) \cup (F^2)^{-1}\left(\overline{V}\right) \cup \cdots \cup (F^{p-1})^{-1}\left(\overline{V}\right).$$

Tenemos que si $x \in (F^m)^{-1}\left(\overline{V}\right)$ para algún $m \leq p-1$, entonces $F^m(x) \in \overline{V}$. Como W es invariante, en caso de que exista un punto $x \in W \cap V_p$, se sigue que $W \cap \overline{V} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. De lo anterior se sigue que $W \cap V_p = \emptyset$.

Como V_p es cerrado en X y, po tanto, también en Z, $Z \setminus V_p$ es un abierto no vacío de Z. Pero como $\overline{\mathcal{O}(z)} = Z$, entonces existe $n > 0$ tal que $F^n(z) \in Z \setminus V_p$. Dada $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, tenemos que $F^{n+k}(z) \notin \overline{V}$ y por lo tanto $F^{n+k}(z) \notin V$, contradiciendo que z es casi-periódico.

De esta forma concluimos que si z es casi-periódico entonces $Z = \overline{\mathcal{O}(z)}$ no tiene subconjuntos cerrados e invariantes propios, es decir, el sistema $(\overline{\mathcal{O}(z)}, F)$ es minimal. ■

El resultado anterior nos muestra que el concepto de minimalidad se encuentra estrechamente relacionado con el de casi-periodicidad de los puntos del sistema. Utilizando el hecho de que todo sistema dinámico contiene un subsistema minimal, se demuestra que todo sistema contiene puntos casi-periódicos.

Teorema 4.8 *Si (X, f) es un sistema dinámico, entonces existe un punto $x \in X$ tal que x es casi-periódico.*

Demostración. De acuerdo con el Teorema 4.6, existe $Y \subset X$ tal que es no vacío y además $(Y, f|_Y)$ es un sistema dinámico minimal. Sea $x \in Y$. Como su órbita es densa en Y entonces $\overline{\mathcal{O}(x)} = Y$, así que, según el Teorema 4.7, tenemos que x es casi-periódico. ■

Como los puntos casi-periódicos son a su vez puntos recurrentes, entonces se cumple el siguiente resultado.

Corolario 4.9 *Si (X, f) es un sistema dinámico, entonces contiene al menos un punto recurrente.*

4.2. δ-cadenas

En un sistema dinámico, decimos que el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ es una ***trayectoria***, si $f(x_i) = x_{i+1}$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$. Cuando nuestro espacio es el conjunto de números reales y calculamos los valores de los puntos x_i

utilizando una computadora, obtenemos un conjunto que por causa del redondeo, no es una trayectoria. Un conjunto obtenido de esta forma es lo que conocemos como una δ-cadena.

Definición 4.10 *Sean (X, f) un sistema dinámico y $\delta > 0$. Una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de puntos en X es una δ-**cadena**, si $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ para toda $i \in \mathbb{N}$.*

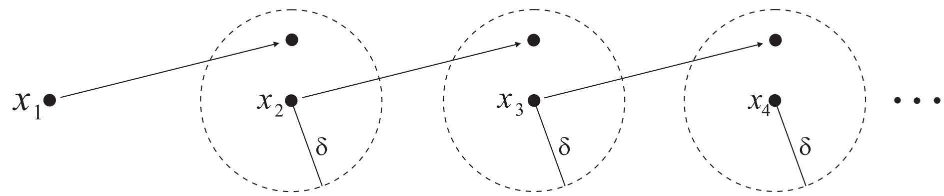


Figura 4.1: La δ-cadena x_1, x_2, x_3, $\ldots$.

Teorema 4.11 *Si la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en (X, f) es una δ-cadena, entonces la sucesión $(\{x_i\})_{i\in\mathbb{N}}$ es una δ-cadena en $(F_n(X), f_n)$.*

Demostración. Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una δ-cadena en X. Entonces para cualquier $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(x_i) \in B_\delta(x_{i+1})$. Como $f_n(\{x_i\}) = \{f(x_i)\}$, entonces $\{f(x_i)\} \subset N(\delta, \{x_{i+1}\})$ y además $\{x_{i+1}\} \subset N(\delta, \{f(x_i)\})$. Por lo tanto $H(f_n(\{x_i\}), \{x_{i+1}\}) = H(\{f(x_i)\}, \{x_{i+1}\}) < \delta$. Esto significa que la sucesión $(\{x_i\})_{i\in\mathbb{N}}$ es una δ-cadena en $F_n(X)$. ■

4.3. Propiedad de persecución

Parece natural pensar que una δ-cadena es una buena aproximación a una trayectoria que inicia en algún punto x, en el sentido de que las imágenes de x son puntos tan cercanos como queramos de los puntos de la δ-cadena. Así que es importante saber si existe o no tal punto x.

Definición 4.12 *Sean (X, f) un sistema dinámico, $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Diremos que x ϵ-**persigue** a una sucesión finita x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_m, si para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$, se tiene que $d(f^i(x), x_i) < \epsilon$.*

Proposición 4.13 *Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Si x ϵ-persigue a la sucesión finita x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_m, entonces $\{x\}$ ϵ-persigue a la sucesión finita $\{x_0\}$, $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\ldots$, $\{x_m\}$, en $F_n(X)$.*

Demostración. Sea $i \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq i \leq m$. Como $f_n^i(\{x\}) = \{f^i(x)\}$ y $f^i(x) \in B_\epsilon(x_i)$, entonces $x_i \in B_\epsilon(f^i(x))$, así que $\{f^i(x)\} \subset N(\epsilon, \{x_i\})$ y $\{x_i\} \subset N\left(\epsilon, \{f^i(x)\}\right)$, esto significa que

$$H\left(f_n^i(\{x\}), \{x_i\}\right) = H\left(\{f^i(x)\}, \{x_i\}\right) < \epsilon.$$

Por lo tanto $\{x\}$ ϵ-persigue a la sucesión finita $\{x_0\}$, $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\ldots$, $\{x_m\}$. ■

En un sistema dinámico, decimos que una sucesión finita $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es una ***δ-cadena finita***, si $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. En algunos sistemas dinámicos, como por ejemplo en (S^1, z^2), sucede que dado un número positivo ϵ, existe $\delta > 0$ tal que cualquier δ-cadena finita se puede aproximar por algún punto de S^1 (lo veremos en el Ejemplo 4.16). Cuando esto ocurre, decimos que el sistema tiene la propiedad de persecución.

Definición 4.14 *Un sistema dinámico (X, f) tiene la **propiedad de persecución**, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier δ-cadena finita, existe $x \in X$, tal que x ϵ-persigue a dicha δ-cadena.*

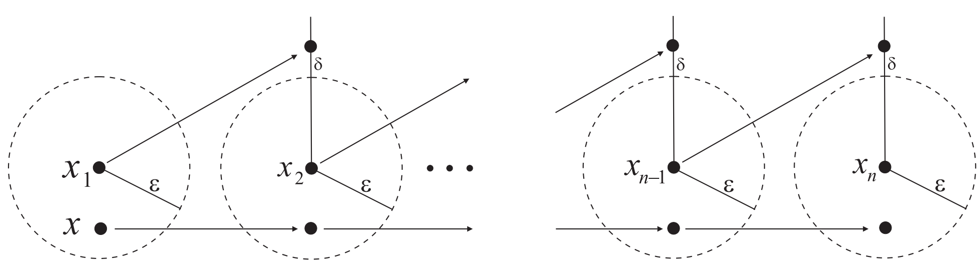


Figura 4.2: El punto x, ϵ-persigue a la δ-cadena x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Ejemplo 4.15 *Sean $X = [0, 1]$ y $f : X \to X$ la función definida por $f(x) = \frac{x}{k}$ con k un entero positivo fijo, tal que $k \geq 2$. Entonces el sistema dinámico (X, f) tiene la propiedad de persecución.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Hagamos $\delta = \left(\frac{k-1}{k}\right)\epsilon$ y sea $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ una δ-cadena. Entonces

$$\left|\frac{x_j}{k} - x_{j+1}\right| = |f(x_j) - x_{j+1}| < \delta \text{ para cada } j \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}.$$

Afirmamos que x_0 ϵ-persigue a esta δ-cadena. Como $f^0(x_0) = x_0$, entonces $0 = |f^0(x_0) - x_0| < \epsilon$. Demostraremos por inducción sobre i, que $|f^i(x_0) - x_i| < \epsilon$. Para $i = 1$ tenemos que $|f(x_0) - x_1| < \delta = \left(\frac{k-1}{k}\right)\epsilon < \epsilon$. Supongamos que para $j \in \mathbb{N}$, se cumple que $|f^j(x_0) - x_j| < \epsilon$. Entonces $\left|\frac{x_0}{k^j} - x_j\right| < \epsilon$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\left|f^{j+1}(x_0) - x_{j+1}\right| &= \left|\frac{x_0}{k^{j+1}} - x_{j+1}\right| \\
&= \left|\frac{1}{k}\left(\frac{x_0}{k^j}\right) - \frac{1}{k}x_j + \frac{1}{k}x_j - x_{j+1}\right| \\
&\leq \frac{1}{k}\left|\frac{x_0}{k^j} - x_j\right| + \left|\frac{1}{k}x_j - x_{j+1}\right| \\
&< \frac{1}{k}\epsilon + |f(x_j) - x_{j+1}| \\
&< \frac{1}{k}\epsilon + \delta = \epsilon
\end{aligned}$$

Esto significa que la propiedad se cumple para $j+1$. Así que para cualquier $i \in \mathbb{N}$ ocurre que $|f^i(x_0) - x_i| < \epsilon$. Por lo tanto x_0 ϵ-persigue a la δ-cadena y así concluimos que (X, f) tiene la propiedad de persecución. ■

Ejemplo 4.16 *Si $X = S^1$ y $f : X \to X$ está definida por $f(z) = z^2$, entonces el sistema (X, f) tiene la propiedad de persecución.*

Demostración. Sea ϵ tal que $0 < \epsilon < 1$ y tomemos $\delta = \epsilon$. Veamos por inducción sobre el número de puntos, que cualquier δ-cadena finita, es ϵ-perseguida por algún punto de X.

Para $n = 2$. Sea x_0, x_1 una δ-cadena finita formada por dos puntos, entonces $f(x_0) \in B_\delta(x_1)$. Como $B_\epsilon(x_1)$ es un abierto en S^1 y f es continua, existe un abierto U tal que $x_0 \in U \subset B_\epsilon(x_0)$ y $f(U) \subset B_\epsilon(x_1)$.

Sea $y_0 \in U$. Por lo anterior, $f(y_0) \in B_\epsilon(x_1)$ y, por lo tanto, y_0 es un punto que ϵ-persigue a la δ cadena finita x_0, x_1.

Supongamos que cada δ-cadena formada por n puntos es ϵ-perseguida por algún punto y.

Sea x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_n una δ-cadena finita formada por $n+1$ puntos. Observemos que x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n es una δ-cadena finita formada por n puntos. Por hipótesis de inducción, existe $y_1 \in B_\epsilon(x_1)$ tal que y_1 es un punto que ϵ-persigue a la δ-cadena x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n.

Observemos que $B_\epsilon(x_1)$ es un arco de S^1 centrado en x_1. Sea $2s$ la longitud de este arco. Entonces $f^{-1}(B_\epsilon(x_1))$ es un conjunto que tiene dos componentes A_1 y A_2 tales que $f(A_1) = f(A_2) = B_\epsilon(x_1)$, y además tanto A_1 como A_2 es un arco de longitud s. Como $f(x_0) \in B_\delta(x_1)$, podemos suponer que $x_0 \in A_1$.

Notemos que el arco A_1 subtiende una cuerda de longitud ϵ. Por lo tanto si $x \in A_1$, entonces $\|x - x_0\| < \epsilon$. Lo anterior significa que $A_1 \subset B_\epsilon(x_0)$. Como $y_1 \in B_\epsilon(x_1)$, existe $y_0 \in A_1$ tal que $f(y_0) = y_1$. De esta forma concluimos que y_0 es punto de S^1 que ϵ-persigue a la δ-cadena finita $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Por lo anterior, cualquier δ-cadena finita, es ϵ-perseguida por algún punto, es decir, (S^1, f) tiene la propiedad de persecución. ■

4.3.1. Persecución en $F_n(X)$

El siguiente resultado, muestra que es necesario que X tenga la propiedad de persecución para que sus productos simétricos la tengan también.

Teorema 4.17 *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si el sistema $(F_n(X), f_n)$ tiene la propiedad de persecución, entonces el sistema (X, f) también tiene esta propiedad.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como el producto simétrico tiene la propiedad de persecución, existe $\delta > 0$ tal que si A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_m, es una δ-cadena en $F_n(X)$, existe $A \in F_n(X)$ tal que A, ϵ-persigue a dicha cadena. Sea x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_m, una δ-cadena en X. Por el Teorema 4.11, la sucesión finita $\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_m\}$ es una δ-cadena en $F_n(X)$, así que existe $A \in$

$F_n(X)$ tal que A, ϵ-persigue a $\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_m\}$. Tomemos un punto $x \in A$. Para cualquier $0 \leq j \leq m$ se tiene que $H\left(f_n^j(A), \{x_j\}\right) < \epsilon$. Como $f_n^j(A) = f^j(A)$, entonces $f^j(A) \subset N\left(\epsilon, \{x_j\}\right)$. De lo anterior, tenemos que $f^j(x) \in B_\epsilon(x_j)$. Por lo tanto x, ϵ-persigue a la δ-cadena dada. Con esto concluimos que (X, f) tiene la propiedad de persecución. ■

Que la propiedad de persecución sea una característica de X, no es suficiente para que cualquiera de sus productos simétricos tenga dicha propiedad. Sin embargo, sí lo es para el hiperespacio $F_2(X)$.

Teorema 4.18 *Si el sistema dinámico (X, f) tiene la propiedad de persecución, entonces el sistema $(F_2(X), f_2)$ también tiene dicha propiedad.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como (X, f) tiene la propiedad de persecución, existe $\delta > 0$ tal que si x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_m, es una δ-cadena, existe $x \in X$ tal que x, ϵ-persigue a esta cadena. Sea A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_m, una δ-cadena en $F_2(X)$. Para cada $j \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$, se tiene que $H\left(f_2(A_j), A_{j+1}\right) < \delta$, es decir, $f(A_j) \subset N(\delta, A_{j+1})$ y $A_{j+1} \subset N(\delta, f(A_j))$.

Sea d una métrica para X.

Afirmación. Sean $B = \{b_1, b_2\} \in F_2(X)$ y $C \in F_2(X)$, donde puede ocurrir que $b_1 = b_2$. Si $H(B, C) < \delta$, entonces existen $c_1, c_2 \in C$ tales que $d(c_1, b_1) < \delta$, $d(c_2, b_2) < \delta$ y $C = \{c_1, c_2\}$.

Para probar esta afirmación, analizamos dos casos.

<u>Caso 1</u>. Existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $C \subset B_\delta(b_i)$. Para fijar ideas, supongamos que $C \subset B_\delta(b_1)$. Como $b_2 \in N(\delta, C)$, existe $c_2 \in C$ tal que $d(c_2, b_2) < \delta$. Entonces $C = \{c_1, c_2\}$ para alguna $c_1 \in C$. Claramente c_1 y c_2 sirven para lo que queremos.

<u>Caso 2</u>. $C \not\subseteq B_\delta(b_1)$ y $C \not\subseteq B_\delta(b_2)$. Como $b_1 \in N(\delta, C)$, existe $c_1 \in C$ tal que $d(c_1, b_1) < \delta$. Como $C \not\subseteq B_\delta(b_1)$ existe $c_2 \in C$ tal que $c_2 \notin B_\delta(b_1)$, pero $c_2 \in N(\delta, B)$, de manera que $d(c_2, b_2) < \delta$. Notemos que $c_1 \neq c_2$, así que $C = \{c_1, c_2\}$. Esto termina la prueba de la afirmación.

Escribimos $A_0 = \{x_0, y_0\}$. Como $H(f(A_0), A_1) < \delta$ y $f(A_0) = \{f(x_0), f(y_0)\}$, tenemos que $H(\{f(x_0), f(y_0)\}, A_1) < \delta$. Por la afirmación, existen $x_1, y_1 \in$

A_1 tales que $A_1 = \{x_1, y_1\}$, $d(f(x_0), x_1) < \delta$ y $d(f(y_0), y_1) < \delta$. Como $H(f(A_1), A_2) < \delta$, procediendo similarmente podemos escribir $A_2 = \{x_2, y_2\}$ de tal forma que $d(f(x_1), x_2) < \delta$ y $d(f(y_1), y_2) < \delta$.

Procediendo de esta manera, es posible escribir cada A_i en la forma $A_i = \{x_i, y_i\}$, con la propiedad de que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ y $d(f(y_i), y_{i+1}) < \delta$. Así que x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_m, y y_0, y_1, y_2, $\ldots$, y_m, son δ-cadenas en X.

Sean x y y puntos de X tales que x, ϵ-persigue a x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_m y y, ϵ-persigue a y_0, y_1, y_2, $\ldots$, y_m. Hagamos $A = \{x, y\} \in F_2(X)$ y veamos que A, es un punto que ϵ-persigue a A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_m. Tomemos $j \in \{0, 1, 2, \ldots m\}$. Como $f_2^j(A) = \{f^j(x), f^j(y)\}$, entonces $f^j(x) \in B_\epsilon(x_j)$ y $f^j(y) \in B_\epsilon(y_j)$, así que $\{f^j(x), f^j(y)\} \subset N(\epsilon, \{x_j, y_j\})$ y también se tiene que $\{x_j, y_j\} \subset N(\epsilon, \{f^j(x), f^j(y)\})$ y por lo tanto $H\left(f_2^j(A), A_j\right) < \epsilon$. De esta forma concluimos que A, ϵ-persigue a la cadena A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_m y por lo tanto, $(F_2(X), f_2)$ tiene la propiedad de persecución. ■

El siguiente ejemplo muestra que en general, los productos simétricos no heredan la propiedad de persecución.

Ejemplo 4.19 *En el plano Euclidiano, sean $X = S^1$ y $f : X \to X$ definida como $f(z) = z^2$. Si $n \geq 3$, entonces el sistema (X, f) tiene la propiedad de persecución, pero $(F_n(X), f_n)$ no tiene dicha propiedad.*

Demostración. De acuerdo con el Ejemplo 4.16, el sistema dinámico (X, f) tiene la propiedad de persecución.

Sea d la métrica de la longitud del arco en X. Consideremos los puntos $a = e^{\frac{\pi}{3}i}$, $b = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $c = e^{\frac{4\pi}{3}i}$ y $u = 1$. Sean $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ y $v = e^{\frac{\alpha}{2^{2n-1}}i}$. Hacemos $\epsilon = d(v, u) = \dfrac{1}{2^{2n-1}}\dfrac{\pi}{6} \leq \dfrac{\pi}{192}$.

Sea $\delta > 0$ y elegimos un entero positivo k, tal que $k + n$ es par y

$$\frac{1}{2^k} < \min\left\{\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{2^n 6\delta}{\pi}\right\}.$$

Sean $\alpha_1 = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{\pi}{6}$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{2^{n+1}}\dfrac{\pi}{6}$, $\ldots$, $\alpha_{n-1} = \dfrac{1}{2^{2n-2}}\dfrac{\pi}{6}$. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ definimos $x_j = e^{\frac{1}{2^k}\alpha_j i}$.

<u>Observación 6</u>. *Para cada* $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$*, se cumple que* $d(x_j, u) < min\{\epsilon, \delta\}$.

<u>Demostración</u>. Observemos que

$$0 < \frac{1}{2^k}\alpha_{n-1} < \frac{1}{2^k}\alpha_{n-2} < \ldots < \frac{1}{2^k}\alpha_2 < \frac{1}{2^k}\alpha_1 = \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^n}\frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{2^k}\frac{1}{8}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2^k}\frac{\pi}{48}.$$

Por tanto, será suficiente demostrar que $d(x_1, u) < \min\{\epsilon, \delta\}$.

Como $\frac{1}{2^k}\alpha_1 < \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2^n}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2^{2n-1}}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2^{2n-1}}\alpha$, resulta que $d(x_1, u) < d(x_1, v) = \epsilon$.

Por otra parte, $d(x_1, u) = \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^n}\frac{\pi}{6} < \delta$. Esto termina la prueba de la Observación 6.

Definimos $A_0 = \{a, c, u\}$ y $A_1 = \{b, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$, y para cada $j \in \{2, 3, \ldots, n+k+1\}$, definimos

$$A_j = \left\{f^{j-1}(b), f^{j-1}(x_1), f^{j-1}(x_2), \ldots, f^{j-1}(x_{n-1})\right\} = f_n^{j-1}(A_1).$$

Así que $f_n(A_1) = A_2$, $f_n(A_2) = f_n^2(A_1) = A_3$, $f_n(A_3) = f_n^3(A_1) = A_4$, $\ldots$, $f_n(A_{n+k}) = f_n^{n+k}(A_1) = A_{n+k+1}$. De esta forma, $H\left(f_n(A_j), A_{j+1}\right) = 0 < \delta$ para cada $j \in \{2, 3, 4, \ldots, n+k\}$.

Como $f_n(A_0) = f(A_0) = \{f(a), f(c), f(u)\} = \{b, u\}$. Por la observación 6, $u \in B_\delta(x_j)$ para todo $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. Así que $f(A_0) \subset N(\delta, A_1)$ y además $A_1 \subset N(\delta, f(A_0))$. Por lo tanto $H\left(f_n(A_0), A_1\right) < \delta$. De esta forma, concluimos que $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n+k+1}$ es una δ-cadena en $F_n(X)$.

Supongamos que existe $A \in F_n(X)$ tal que A, ϵ-persigue a la cadena $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n+k+1}$. Entonces $H(f_n^j(A), A_j) < \epsilon$ para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n+k+1\}$. En particular, $H(A, A_0) < \epsilon$, así que $A \subset N(\epsilon, A_0) = B_\epsilon(a) \cup B_\epsilon(c) \cup B_\epsilon(u)$.

Como $2\epsilon < \min\{d(a, c), d(c, u), d(a, u)\}$, resulta que los conjuntos $B_\epsilon(a)$, $B_\epsilon(c)$ y $B_\epsilon(u)$, son ajenos entre sí y A intersecta a cada uno de ellos. Por tanto, podemos escribir $A = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, donde $B_1 = A \cap B_\epsilon(a)$, $B_2 = A \cap B_\epsilon(c)$, $B_3 = A \cap B_\epsilon(u)$ y además B_1, B_2 y B_3 son no vacíos.

Por lo anterior, $f(A) = f(B_1) \cup f(B_2) \cup f(B_3)$. Observemos que $f(B_1) \cup f(B_2) \subset f(B_\epsilon(a)) \cup f(B_\epsilon(c)) = B_{2\epsilon}(b)$ y $f(B_3) \subset B_{2\epsilon}(u)$.

También tenemos que $H(f(A), A_1) < \epsilon$, y por tanto $f(A) \subset N(\epsilon, A_1) = B_\epsilon(b) \cup N(\epsilon, \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}) \subset B_\epsilon(b) \cup B_{2\epsilon}(u)$ (recordemos que por la Observación 6, $x_j \in B_\epsilon(u)$).

Como $B_{2\epsilon}(b) \cap B_{2\epsilon}(u) = \emptyset$, resulta que

$$f(B_1) \cup f(B_2) \subset B_\epsilon(b) \quad \text{y} \quad f(B_3) \subset B_{2\epsilon}(u).$$

Debido a que el conjunto $\{u, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ está contenido en el arco más corto $J \subset X$ que une a los puntos u y x_1, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n+k+1\}$ se cumple que

$$f^j(\{u, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}) \subset f^j(J).$$

Observemos que $f^j(J)$ es el arco más corto que une a los puntos u y $x_1^{2^j} = (e^{\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^n}\frac{\pi}{6}i})^{2^j}$.

Como $\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^n}\frac{\pi}{6}2^j \leq \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^n}\frac{\pi}{6}2^{n+k+1} = 2\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, tenemos que $f^j(J) \subset K$, donde K es el arco más corto que une al punto $e^{\frac{\pi}{3}i}$ con u. De aquí que, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n+k\}$, se tiene que $A_{j+1} = f^j(A_1) \subset \{f^j(b)\} \cup K$ y

$$f_n^{j+1}(A) \subset N(\epsilon, A_{j+1}) = N(\epsilon, f^j(A_1)) \subset N(\epsilon, \{f^j(b)\} \cup K) = B_\epsilon(f^j(b)) \cup N(\epsilon, K).$$

Lo anterior, significa que

$$f^{j+1}(B_1 \cup B_2) \cup f^{j+1}(B_3) \subset B_\epsilon(f^j(b)) \cup N(\epsilon, K).$$

Como $f(B_1) \cup f(B_2) \subset B_\epsilon(b)$, resulta que $f^2(B_1 \cup B_2) \subset f(B_\epsilon(b)) = B_{2\epsilon}(f(b))$, y además $f^2(B_1 \cup B_2) \subset B_\epsilon(f(b)) \cup N(\epsilon, K)$. Como $\epsilon \leq \frac{\pi}{192}$, se tiene que $B_{2\epsilon}(f(b)) \cap N(\epsilon, K) = \emptyset$. Por tanto, $f^2(B_1 \cup B_2) \subset B_\epsilon(f(b)) = B_\epsilon(c)$.

Ahora, $f^3(B_1 \cup B_2) \subset f(B_\epsilon(c)) = B_{2\epsilon}(f(c)) = B_{2\epsilon}(b)$, y también $f^3(B_1 \cup B_2) \subset B_\epsilon(f^2(b)) \cup N(\epsilon, K) = B_\epsilon(b) \cup N(\epsilon, K)$. Y como $B_{2\epsilon}(b) \cap N(\epsilon, K) = \emptyset$, entonces $f^3(B_1 \cup B_2) \subset B_\epsilon(b)$. Similarmente, $f^4(B_1 \cup B_2) \subset B_\epsilon(c)$, $f^5(B_1 \cup B_2) \subset B_\epsilon(b)$, etc.

En general, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n+k\}$, tenemos que

$$f_n^{j+1}(B_1 \cup B_2) \subset B_\epsilon(f^j(b)).$$

En particular, $f_n^{n+k+1}(B_1 \cup B_2) \subset B_\epsilon(f^{n+k}(b)) = B_\epsilon(b)$.

Observemos que si $w \in B_1 \cup B_2$, entonces $f^{n+k+1}(w) \in B_\epsilon(b)$ y como $B_\epsilon(b) \cap N(\epsilon, K) = \emptyset$, resulta que $(B_1 \cup B_2) \cap (f^{n+k+1})^{-1}(N(\epsilon, K)) = \emptyset$ (aquí, $(f^{n+k+1})^{-1}(N(\epsilon, K))$ denota la imagen inversa de $N(\epsilon, K)$).

Observemos que

$$A_{n+k+1} = f^{n+k}(A_1) = \{f^{n+k}(b), f^{n+k}(x_1), \ldots, f^{n+k}(x_{n-1})\} =$$

$$\left\{b, (e^{\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^n}\frac{\pi}{6}i})^{2^{n+k}}, (e^{\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{\pi}{6}i})^{2^{n+k}}, (e^{\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n+2}}\frac{\pi}{6}i})^{2^{n+k}}, \ldots, (e^{\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{2n-2}}\frac{\pi}{6}i})^{2^{n+k}}\right\} =$$

$$\left\{b, e^{\frac{\pi}{6}i}, e^{\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}i}, \ldots, e^{\frac{1}{2^{n-2}}\frac{\pi}{6}i}\right\}.$$

Observemos también que, para cada $j \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$,

$$d\left(e^{\frac{1}{2^{j-2}}\frac{\pi}{6}i}, e^{\frac{1}{2^{j-1}}\frac{\pi}{6}i}\right) = \left(\frac{1}{2^{j-2}} - \frac{1}{2^{j-1}}\right)\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2^{j-1}}(2-1)\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2^{j-1}}\frac{\pi}{6} \geq$$

$$\frac{1}{2^{n-2}}\frac{\pi}{6} \geq 2\frac{1}{2^{2n-1}}\frac{\pi}{6} = 2\epsilon.$$

Esto significa que los conjuntos $B_\epsilon(e^{\frac{\pi}{6}i})$, $B_\epsilon(e^{\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}i})$, $\ldots$, $B_\epsilon(e^{\frac{1}{2^{n-2}}\frac{\pi}{6}i})$, son ajenos entre sí. Como $H(f^{n+k+1}(A), A_{n+k+1}) < \epsilon$, entonces $A_{n+k+1} \subset N(\epsilon, f^{n+k+1}(A))$, de manera que cada uno de los conjuntos $B_\epsilon(e^{\frac{\pi}{6}i})$, $B_\epsilon(e^{\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}i})$, $\ldots$, $B_\epsilon(e^{\frac{1}{2^{n-2}}\frac{\pi}{6}i})$, intersecta a $f^{n+k+1}(A)$.

Por lo anterior, $f^{n+k+1}(A)$ tiene al menos $n-1$ puntos en el conjunto $B_\epsilon(e^{\frac{\pi}{6}i}) \cup B_\epsilon(e^{\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}i}) \cup \cdots \cup B_\epsilon(e^{\frac{1}{2^{n-2}}\frac{\pi}{6}i})$.

Pero, como se tiene que $f^{n+k}(\{u, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}) \subset K$, resulta que $B_\epsilon(e^{\frac{\pi}{6}i}) \cup B_\epsilon(e^{\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}i}) \cup \cdots \cup B_\epsilon(e^{\frac{1}{2^{n-2}}\frac{\pi}{6}i}) \subset N(\epsilon, K)$.

Así que $f^{n+k+1}(A)$ tiene al menos $n-1$ puntos en el conjunto $N(\epsilon, K)$, y por tanto, A tiene al menos $n-1$ puntos en el conjunto $(f^{n+k+1})^{-1}(N(\epsilon, K))$.

Como $(B_1 \cup B_2) \cap (f^{n+k+1})^{-1}(N(\epsilon, K)) = \emptyset$, concluimos que A contiene al menos $n+1$ puntos. Esto contradice el hecho de que $A \in F_n(X)$ y de esta forma, queda demostrado que $(F_n(X), f_n)$ no tiene la propiedad de persecución.
$\blacksquare$

Capítulo 5

Propiedades de la función

5.1. Funciones exactas

Consideremos el continuo $X = S^1$ y la función $f : X \to X$ definida por $f(z) = z^2$, como esta función duplica los ángulos, si tomamos cualquier subconjunto abierto y le aplicamos la función, sus imágenes sucesivas van creciendo en longitud y en algún momento cubrirán al espacio completamente. A las funciones como ésta, les llamamos exactas.

Definición 5.1 *Una función f es* ***exacta****, si para cada abierto no vacío U de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) = X$.*

Ejemplo 5.2 *La función $f : S^1 \to S^1$, definida como $f(z) = z^2$, es exacta.*

Demostración. Tomemos U, un abierto de S^1 y sea U_1 una componente conexa de U. Entonces U_1 es un arco entre dos puntos de S^1. Supongamos que U_1 es el arco entre a y b. De lo anterior tenemos que $a = e^{\alpha_a i}$ y $b = e^{\alpha_b i}$.

Observemos que la longitud de U_1 es $|\alpha_a - \alpha_b| > 0$ y por lo tanto la longitud de $f^n(U_1)$ es $2^n|\alpha_a - \alpha_b|$.

Tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n|\alpha_a - \alpha_b| > 1$, tenemos que $S^1 \subset f^n(U_1) \subset f^n(U)$. Por lo tanto $f^n(U) = S^1$ y así concluimos que f es exacta. ■

El siguiente resultado, muestra que la exactitud de una función se traslada a la función inducida en los productos simétricos y viceversa.

Teorema 5.3 *En cualquier sistema dinámico* (X, f) *se cumple que* f *es exacta si y sólo si* f_n *es exacta.*

Demostración. Supongamos que f es una función exacta. Sea $\mathcal{U}$ un abierto no vacío de $F_n(X)$. Tomemos $A \in \mathcal{U}$ y sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(A) \subset \mathcal{U}$. Podemos suponer que $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$ con $k \leq n$.

Sea $U_j = B_\epsilon(x_j)$. Como f es exacta, para cada $j \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ existe $m_j \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_j}(U_j) = X$. Sea $m = \max\{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k\}$. Veamos que $f_n^m(\mathcal{U}) = F_n(X)$. Como $f_n^m(\mathcal{U}) \subset F_n(X)$, sólo falta demostrar que $F_n(X) \subset f_n^m(\mathcal{U})$.

Sea $B \in F_n(X)$. Supongamos que $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_r\}$, con $r \leq n$. Como $f^{m_j}(U_j) = X$, entonces $f^m(U_j) = X$ para todo entero $j \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Tenemos tres casos. Si $k = r$, para cada $j \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ existe $y_j \in U_j$ tal que $f^m(y_j) = b_j$. Sea $B_0 = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k\}$. Como $k = r$, entonces $f^m(B_0) = B$ y por lo tanto $f_n^m(B_0) = B$. Además, $B_0 \subset N(\epsilon, A)$ y $A \subset N(\epsilon, B_0)$, así que $H(B_0, A) < \epsilon$, de aquí que $B_0 \in B_\epsilon(A) \subset \mathcal{U}$ y por lo tanto $B_0 \in f_n^m(\mathcal{U})$.

Si $k < r$, para cada $j \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ elegimos $y_j \in U_j$ tal que $f^m(y_j) = b_j$ y para cada $j \in \{k+1, k+2, k+3, \ldots, r\}$ elegimos $y_j \in U_k$ tal que $f^m(y_j) = b_j$. Si hacemos $B_0 = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_r\}$, tenemos que $f^m(B_0) = B$. Como y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+3}, $\ldots$, y_r, son elementos de $B_\epsilon(x_k)$, entonces $B_0 \subset N(\epsilon, A)$ y $A \subset N(\epsilon, B_0)$ y por lo tanto $H(B_0, A) < \epsilon$. Por lo anterior, tenemos nuevamente que $B_0 \in B_\epsilon(A) \subset \mathcal{U}$ y que $B_0 \in f_n^m(\mathcal{U})$.

Si $k > r$, tomamos $y_j \in U_j$ tal que $f^m(y_j) = b_j$ para cada $j \in \{1, 2, 3, \ldots, r\}$. Para cada $j \in \{r+1, r+2, r+3, \ldots, k\}$, elegimos $y_j \in U_j$ tal que $f^m(y_j) = b_r$. Haciendo $B_0 = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k\}$, tenemos que $f^m(B_0) = B$ y además $H(B_0, A) < \epsilon$. Por lo tanto $B_0 \in B_\epsilon(A) \subset \mathcal{U}$ y $B_0 \in f_n^m(\mathcal{U})$.

De esta forma concluimos que $f_n^m(\mathcal{U}) = F_n(X)$ y por lo tanto f_n es exacta.

Ahora supongamos que f_n es exacta. Sea U un abierto no vacío de X. Tomemos $x \in U$ y $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset U$. Como $\{x\} \in F_n(X)$, entonces $\mathcal{U} = B_\epsilon(\{x\})$ es un abierto de $F_n(X)$, así que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_n^m(\mathcal{U}) = F_n(X)$.

Veamos que $X \subset f^m(U)$. Sea $z \in X$. Como $\{z\} \in F_n(X)$, entonces $\{z\}$ debe ser imagen bajo f_n^m de algún punto de $\mathcal{U}$, es decir, existe $A \in \mathcal{U}$, tal que $f_n^m(A) = \{z\}$. Supongamos que $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r\}$ con $r \leq n$. Por lo anterior, tenemos que $f^m(x_i) = z$ para cualquier $i \in \{1, 2, 3, \ldots, r\}$.

Como $H(A, \{x\}) < \epsilon$, entonces $A \subset N(\epsilon, \{x\})$, así que para cualquier $i \in \{1, 2, 3, \ldots, r\}$, se tiene que $x_i \in B_\epsilon(x) \subset U$ y por lo tanto $z \in f^m(U)$. Con esto concluimos que $f^m(U) = X$ y en consecuencia, f es exacta. ■

5.2. Funciones turbulentas

Definición 5.4 *Una función f es* ***turbulenta****, si existen dos compactos no degenerados K y C de X, cuya intersección es a lo más un punto y $K \cup C \subset f(K) \cap f(C)$.*

Enseguida demostramos que la turbulencia es una propiedad que la función inducida en los productos simétricos, hereda de la función en el espacio base.

Teorema 5.5 *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es turbulenta entonces f_n es turbulenta.*

Demostración. Como f es turbulenta, existen dos compactos K y C de X, cuya intersección es a lo más un punto, y $K \cup C \subset f(K) \cap f(C)$.

Por la Proposición 1.12, $\langle K \rangle_{F_n(X)}$ y $\langle C \rangle_{F_n(X)}$ son subconjuntos compactos de $F_n(X)$.

Si $K \cap C = \emptyset$, entonces $\langle K \rangle_{F_n(X)}$ y $\langle C \rangle_{F_n(X)}$ son ajenos entre sí, pues si existiera $A \in \langle K \rangle_{F_n(X)} \cap \langle C \rangle_{F_n(X)}$, tendríamos que $A \subset K \cap C$.

Si $K \cap C = \{a\}$, y $A \in \langle K \rangle_{F_n(X)} \cap \langle C \rangle_{F_n(X)}$, tenemos que $A \subset K \cap C$, así que $A = \{a\}$. Por tanto $\langle K \rangle_{F_n(X)}$ y $\langle C \rangle_{F_n(X)}$ se intersectan únicamente en $\{a\}$.

Observemos que si $A \in \langle f(K) \cap f(C) \rangle_{F_n(X)}$, entonces $A \subset f(K)$ y $A \subset f(C)$, así que $A \in \langle f(K) \rangle_{F_n(X)} \cap \langle f(C) \rangle_{F_n(X)}$. Por tanto $\langle f(K) \cap f(C) \rangle_{F_n(X)} \subset \langle f(K) \rangle_{F_n(X)} \cap \langle f(C) \rangle_{F_n(X)}$.

Por la Proposición 1.13, tenemos que

$$\begin{aligned}&\langle f(K)\rangle_{F_n(X)} = \left\{f(A) : A \in \langle K\rangle_{F_n(X)}\right\} = f_n\left(\langle K\rangle_{F_n(X)}\right) \quad \text{y}\\ &\langle f(C)\rangle_{F_n(X)} = f_n\left(\langle C\rangle_{F_n(X)}\right).\end{aligned}$$

De manera que si $A \in \langle K\rangle_{F_n(X)} \cup \langle C\rangle_{F_n(X)}$, tenemos que $A \subset K \cup C \subset f(K) \cap f(C)$, así que $A \in \langle f(K) \cap f(C)\rangle_{F_n(X)} \subset \langle f(K)\rangle_{F_n(X)} \cap \langle f(C)\rangle_{F_n(X)} = f_n\left(\langle K\rangle_{F_n(X)}\right) \cap f_n\left(\langle C\rangle_{F_n(X)}\right)$.

Lo anterior significa que $\langle K\rangle_{F_n(X)} \cup \langle C\rangle_{F_n(X)} \subset f_n\left(\langle K\rangle_{F_n(X)}\right) \cap f_n\left(\langle C\rangle_{F_n(X)}\right)$ y por lo tanto f_n es turbulenta. ■

Preguntas

Pregunta 1 *Sea* $m \leq n$. *¿Si* x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_m, *son puntos casi-periódicos en* (X, f), *entonces* $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\}$ *es casi-periódico en* $(F_n(X), f_n)$*?.*

Pregunta 2 *¿Si* A *es casi-periódico en* $(F_n(X), f_n)$, *entonces para todo* $x \in A$ *se tiene que* x *es casi-periódico en* (X, f)*?*

Pregunta 3 *¿Si* A *es casi-periódico en* $(F_n(X), f_n)$, *existe* $x \in A$ *tal que* x *es casi-periódico en* (X, f)*?*

Pregunta 4 *Sean* $f : X \to X$ *una función continua entre continuos y* $n > 1$ *¿Si* f_n *es turbulenta, entonces* f *es turbulenta?*

Bibliografía

[1] G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez-Lango, *The transitivity of induced maps*, Topology Appl. 156 (2009), 1013-1033.

[2] J. Banks, *Chaos for induced hyperspace maps*, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 25 (2005), 681-685.

[3] L. S. Block y W. A. Coppel, *Dynamics in one Dimension*, Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1992.

[4] K. Borsuk y S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), 875-882.

[5] K. M. Brucks y H. Bruin, *Topics from One-Dimensional Dynamics*, Student texts 62, London Mathematical Society, 2004.

[6] J. J. Charatonik, *Recent results of induced mappings between hyperspaces of continua*, Topology. Proc. 22 (1997), 103-122.

[7] J. J. Charatonik, *Properties of elementary mappings*, Acta Math. Hungar. 85 (1999), 143-152.

[8] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Atomicity of mappings*, Internat. J. Math. & Math. Sci. 21 (1998), 729-734.

[9] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Hereditarily weakly confluent induced mappings are homeomorphisms*, Colloq. Math. 75 (1998), 195-203.

[10] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Inducible mappings between hyperspaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 46 (1998), 5-9.

[11] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Lightness of induced mappings*, Tsukuba J. Math. 22 (1998), 179-192.

[12] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Limit properties of induced mappings*, Top. Appl. 100 (2000), 103-118.

[13] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Inverse limits and openness of the induced mappings*, Top. Appl. 114 (2001), 235-260.

[14] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik y A. Illanes, *Openness of induced mappings*, Topology Appl. 98 (1999), 67-80.

[15] J. J. Charatonik, A. Illanes, y S. Macías, *Induced mappings on the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X*, Houston J. Math. 28 (2002), 781-805.

[16] J. J. Charatonik y J. R. Prajs, *The lifting property for classes of mappings*, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol. 23 No. 10 (2000), 717-722.

[17] W. J. Charatonik, *Arc approximation property and confluence of induced mappings*, Rocky Mountain J. Math (1)(28) (1998), 107-154.

[18] W. J. Charatonik, *Openess and monotoneity of induced mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (12)(1999), 3729-3731.

[19] W. J. Charatonik, *Induced near-homeomorphisms*, Comment. Math. Univ. Carolin. 41 (2000), 133-137.

[20] M. García, J. Margalef, C. Olano, E. Outerelo, J. L. Pinilla, *Topología**, Alhambra, 1975.

[21] J. L. G. Guirao, D. Kwietniak, M. Lampart, P. Oprocha y A. Peris, *Chaos on hyperspaces*, Nonlinear Analysis, 71 (2009), 1-8.

[22] G. Higuera, *Funciones Inducidas en Productos Simétricos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.

[23] H. Hosokawa, *Induced mappings between hyperspaces*, Bull. Tokio Gakugei Univ. 41 (1989), 1-6.

[24] H. Hosokawa, *Mappings of hyperspaces induced by refinable mappings*, Bull. Tokio Gakugei Univ. 42 (1990), 1-8.

[25] H. Hosokawa, *Induced mappings between hyperspaces II*, Bull. Tokyo Gakugei Univ. 44 (1992), 1-7.

[26] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces*, Tsukuba J. Math. 21 (1)(1997), 239-250.

[27] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces II*, Tsukuba J. Math. 21 (3)(1997), 773-783.

[28] A. Illanes, *The openness of induced maps on hyperspaces*, Colloq. Math. 74(1997), 773-783.

[29] P. Kurka, *Topological and Symbolic Dynamics*, cours spécialisés 11, Société Mathématique de France, 2003.

[30] H. Méndez-Lango, *On density of periodic points for induced hyperspace maps*, Topology App. 35 (2010), 281-290.

[31] J. R. Munkres, *Topología*, Pearson-Prentice Hall, 2^a edición, 2002.

[32] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Marcel Dekker, New York and Basel, 1978.

[33] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An introduction*, Marcel Dekker, New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[34] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading MA, 1970.