



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**4-VARIEDADES CON CURVATURA POSITIVA
Y SIMETRÍA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

ANA KARLA GARCÍA PÉREZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO**

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del Jurado

1. Datos del alumno
García Pérez Ana Karla
53733814
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
303823489
2. Datos del tutor
Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco
3. Datos del sinodal 1
Dr. Gabriel Ruiz Hernández
4. Datos del sinodal 2
Dra. Laura Ortiz Bobadilla
5. Datos del sinodal 3
Dr. Federico Sánchez Bringas
6. Datos del sinodal 4
Mat. Jesús Ángel Núñez Zimbrón
7. Datos del trabajo escrito
4-Varietades con curvatura positiva y simetría
51 p
2011

Índice general

1. Conceptos preliminares	3
1.1. Campos vectoriales	3
1.2. Distribuciones	7
1.3. Acciones	9
1.4. Espacio orbital y órbitas principales	13
1.5. Espacios de curvatura positiva	17
2. S^1-Variedades riemannianas	31
2.1. El conjunto de los puntos fijos	31
2.2. Geometría del espacio orbital	39
2.3. Teorema de Hsiang-Kleiner	43

Prefacio

Este trabajo tiene por objeto desarrollar el artículo *On the Topology of Positively Curved 4-Manifolds with Symmetry* [11], donde el resultado principal es que si se tiene una 4-variedad orientable, compacta, con curvatura positiva que acepte una acción isométrica no trivial de S^1 , entonces es homeomorfa a la 4-esfera o al espacio complejo proyectivo de dimensión 2.

Hsiang y Kleiner observaron que se sabía muy poco acerca de la topología de las 4-variedades compactas con curvatura positiva. Primero consideraron sólo a las variedades compactas con curvatura positiva pues el trabajo de Gromoll y Meyer da una comprensión cuidadosa de las variedades no compactas con curvatura positiva. Luego, tomando en cuenta la dimensión, se tiene que las 2-variedades orientables compactas con curvatura positiva son homeomorfas a la 2-esfera (gracias al teorema de Synge y a la clasificación de las superficies compactas). Las 3-variedades compactas con curvatura positiva fueron determinadas por Hamilton. En cambio, las 4-variedades compactas con curvatura positiva no habían sido lo suficientemente estudiadas, por lo que Hsiang y Kleiner se interesaron en estos espacios.

En el resultado principal se piden bastantes hipótesis que juegan un papel importante, por ejemplo, observemos que si no pedimos que la variedad tenga curvatura positiva entonces el resultado no se cumple pues se tiene el toro de dimensión 4. En este trabajo es muy importante pedir que la variedad tenga simetría (una acción isométrica de S^1), dado que la prueba se basa en estudiar el conjunto de los puntos fijos de la acción de S^1 y así poder calcular la característica de Euler de la variedad. Cabe la pregunta de si la hipótesis sobre la simetría en la variedad es o no necesaria, pero por el momento no se tiene una respuesta al respecto, aunque lo más seguro es que se necesitarían distintas ideas y herramientas para la prueba al debilitar la hipótesis.

En el primer capítulo se desarrolla la herramienta necesaria para poder demostrar el resultado principal, en sí, se desarrollan resultados sobre: variedades con simetría, el espacio orbital, órbitas principales, variedades con curvatura positiva, con el propósito de utilizar lo mejor que se pueda todas nuestras hipótesis. En el segundo capítulo todo se une para poder probar varias proposiciones y finalmente el resultado principal.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

Este capítulo contiene conceptos, notaciones y herramienta que utilizaremos en la demostración del teorema principal. Dado que la herramienta es diversa y la demostración de algunos resultados nos aleja un poco de nuestra meta, nos enfocaremos en demostrar sólo algunos resultados que consideramos importantes para introducir la herramienta y para poder entender mejor la demostración del teorema principal.

1.1. Campos vectoriales

Sea M una variedad diferenciable, donde el espacio tangente en un punto de M , digamos p , lo denotaremos como T_pM y su haz tangente será TM . Un campo vectorial diferenciable X en una variedad diferenciable M , es una transformación diferenciable $X : M \rightarrow TM$ tal que $X(p) \in T_pM$. Para mayor simplicidad denotaremos a los campos vectoriales diferenciables sólo como campos vectoriales.

Ya que las variedades son localmente euclidianas, el teorema de existencia y unicidad local para ecuaciones diferenciales de primer orden se extiende a variedades, por lo que tenemos el siguiente resultado: Sea M una variedad diferenciable y X un campo vectorial en M para cada $p \in M$, existe un intervalo I que contiene al 0 y una única curva suave $c_p : I \rightarrow M$ tal que $c_p(0) = p$ y para cada $t \in I$ se tiene $c_p'(t) = X(c_p(t))$. De hecho también se tiene un resultado de ecuaciones diferenciales un poco más fuerte, el cual nos dice que dado un punto de M existe un dominio que lo contiene y un intervalo $(-\delta, \delta)$ en el que están definidas las soluciones para cada

condición inicial en el dominio, es decir, se tiene lo siguiente:

Proposición 1.1.1. *Sea M una variedad diferenciable con X un campo vectorial, entonces para $p \in M$, existe un abierto U de p y un intervalo I que contiene al 0 con los que se tiene una función diferenciable $F : I \times U \rightarrow M$ tal que para cada $q \in U$ la curva $c_q(t) = F(t, q)$, con $t \in I$, es la única curva que satisface $c'_q(t) = X(c_q(t))$ y $c_q(0) = q$.*

Demostración. Sea $p \in M$ y (V, φ) un sistema coordenado en p , existe un abierto conexo $U \subset V$ de p y nos fijamos en $(U, \varphi|_U)$ que también es un sistema coordenado de p . En U se tiene el resultado de ecuaciones diferenciales por lo que existe un intervalo I que contiene al cero donde cada curva solución suave c_q , con $c_q(0) = q$, está definida para cada $q \in U$.

Ahora podemos definir $F : I \times U \rightarrow M$ como $F(t, p) := c_p(t)$, es una función diferenciable porque X es un campo vectorial y por la regularidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales con respecto a condiciones iniciales. \square

Definición 1.1.2. *El flujo local de un campo vectorial X en una variedad diferenciable M es $F_t : U \rightarrow M$ con $F_t(p) = F(t, p)$ el mapeo suave del resultado anterior.*

Proposición 1.1.3. *El flujo local F_t es un difeomorfismo local, y si t, \hat{t} y $t + \hat{t} \in I$, entonces $F_t \circ F_{\hat{t}} = F_{t+\hat{t}}$.*

Demostración. Sea $p \in M$, fijémonos en $c_p(t + \hat{t}) = F(t + \hat{t}, p)$; ésta es una curva que satisface $c'_p(t + \hat{t}) = X(c_p(t + \hat{t}))$, le podemos dar dos interpretaciones, por un lado es la solución de la ecuación diferencial con condición inicial $c_p(0) = p$ y por otro lado si fijamos \hat{t} es la solución de la misma ecuación diferencial pero con condición inicial $c_p(0 + \hat{t}) = c_p(\hat{t}) = F(\hat{t}, p)$. Ahora fijémonos en la curva $c_{F(\hat{t}, p)}$ que satisface $c_{F(\hat{t}, p)}(0) = F(\hat{t}, p)$ y $c'_{F(\hat{t}, p)}(t) = X(c_{F(\hat{t}, p)}(t))$. Por la unicidad de las curvas soluciones de X dada una condición inicial, se tiene $c_p(t + \hat{t}) = c_{F(\hat{t}, p)}(t)$, y como

$$F_t \circ F_{\hat{t}}(p) = F(t, F(\hat{t}, p)) = c_{F(\hat{t}, p)}(t)$$

$$F_{t+\hat{t}}(p) = F(t + \hat{t}, p) = c_p(t + \hat{t})$$

por lo tanto $F_t \circ F_{\hat{t}} = F_{t+\hat{t}}$.

Ahora veremos que F_t es un difeomorfismo local. Para ello consideramos $F_t : U \rightarrow F_t(U)$ y sin pérdida de generalidad a $I = (-\delta, \delta)$. F_t es inyectiva pues si $F_t(p) = F_t(q)$ por lo anterior $F_{-t}(F_t(p)) = F_0(p) = F_0(q) = F_{-t}(F_t(q))$ por

lo tanto $p = q$, de hecho F_{-t} es la inversa de F_t y como F es suave, entonces F_t y F_{-t} son suaves. Por lo que F_t es un difeomorfismo local. \square

Necesitamos pedirles a las curvas solución un poco más para poder trabajar con ellas con facilidad, pues tenemos la siguiente situación: A la curva solución en p , $c_p : I \rightarrow M$, puede que todavía podamos extenderla más, es decir, que exista $\hat{c}_p : J \rightarrow M$ que sea curva solución en p con $I \subseteq J$ y $\hat{c}_p|_I = c_p$. Por lo que vamos a extender la curva lo más que se pueda obteniendo un intervalo máximo en el que la curva solución se pueda definir.

Ahora tenemos c_p con I máximo, vamos a ver qué pasa con I si M es compacta. Como para cada $p \in M$ existe un intervalo $I_\delta = (-\delta, \delta)$ y una vecindad abierta de p en el que el flujo está definido (proposición 1.1.1), y M es compacta, entonces existe un número finito de estas vecindades que cubre a M . Sea δ_0 el mínimo de los deltas de los intervalos correspondientes. Si $I = (a, b)$ con $b \neq \infty$, sea t_n una sucesión creciente que tiende a b , sea $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $b - t_N < \delta_0/2$, entonces la curva solución en $c_p(t_N)$ tiene como intervalo máximo a $(a - t_N, b - t_N)$ (pues I es máximo), pero esto es una contradicción ya que teníamos que para cada punto de M su curva solución está definida tan siquiera para el intervalo $(-\delta_0, \delta_0)$ y nosotros tenemos que $b - t_N < \delta_0$. Por lo que forzosamente $b = \infty$. Con esto probamos el siguiente lema:

Lema 1.1.4. *Sea M una variedad compacta y X un campo vectorial sobre M , entonces las curvas solución del campo se pueden extender a todo \mathbb{R} .*

Proposición 1.1.5. *Sea M una variedad compacta y X un campo vectorial sobre M , entonces el flujo local F_t de X se extiende a un difeomorfismo de M , y con cada curva c_p definida para todo valor de \mathbb{R} .*

Demostración. Dado que M es compacta hay una cubierta abierta finita $\{U_1, \dots, U_n\}$ de M , con U_i las vecindades del flujo local de X . Para cada $p \in M$, por el lema anterior, podemos definir a c_p en todo \mathbb{R} y así nos va a quedar la curva extendida en la mayor cantidad de los U_i 's posibles. Con esto podemos definir $F : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ como $F(t, p) = c_p(t)$ y por 1.1.1 se tiene que está bien definido y es suave. Finalmente por 1.1.3 se tiene que $F_t : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo. \square

Para analizar un campo, por lo general es conveniente estudiar el conjunto de sus puntos fijos, es decir, a $Y = \{p \in M \mid X(p) = 0\}$. Para esto

observemos algunas propiedades de Y :

Observación 1.1.6. Y es cerrado, pues si $y_i \rightarrow y$, con $y_i \in Y$, entonces $F_t(y_i) = y_i$ converge a $F_t(y)$ y como M es Hausdorff $F_t(y) = y$, por lo tanto Y es cerrado.

Observación 1.1.7. Las componentes conexas Y_i de Y son cerradas pues sabemos que $\overline{Y_i}$ son conexas y Y es cerrado; también se tiene que son ajenas dos a dos. Dado que M es T_4 y, en nuestro caso, es compacto, hay un número finito de componentes conexas de Y .

De ahora en adelante le vamos a pedir a los campos otra propiedad:

Definición 1.1.8. Un campo vectorial X en una variedad diferenciable M se llama **campo de Killing** si los flujos locales de X son isometrías.

Nos interesan estos campos porque vamos a estar trabajando con variedades diferenciables que admiten una acción isométrica de S^1 y entonces, como veremos después, se tiene un campo de Killing no trivial definido mediante la acción.

Antes de continuar con la siguiente proposición, que es un poco técnica, necesitaremos de las vecindades tubulares que son fáciles de manejar, y utilizaremos cierta propiedad de estas vecindades más adelante. Si el lector quiere profundizar más sobre este tema puede ver [13].

Definición 1.1.9. Sea M una variedad diferenciable, con d la métrica riemanniana y $S \subset M$. Una vecindad tubular abierta de S es $U = \{p \in M \mid d(S, p) < \varepsilon\}$.

El caso que nos interesa es cuando S es una subvariedad, porque entonces S es un retracto de la vecindad tubular, esto se puede ver con lo siguiente.

Definición 1.1.10. Sea M una variedad suave y S una subvariedad de M , el haz normal de S en M es $N(S) = \{(q, v) \in S \times T_q M \mid v \perp T_q S\}$.

Tenemos una proyección natural $\pi : N(S) \rightarrow S$ definida como $\pi(q, v) = q$, la cual es una retracción y con el siguiente lema (cuya demostración puede verse en [13]) vamos a poder concluir que S es un retracto de su vecindad tubular.

Lema 1.1.11. Sea S una subvariedad diferenciable compacta de M , entonces $\theta : N(S, \varepsilon) \rightarrow U$, donde $N(S, \varepsilon) = \{(q, v) \in N(S) \mid \|v\| < \varepsilon\}$ y $U = \{p \in M \mid d(S, p) < \varepsilon\}$, con $\theta(q, v) = \exp_q(v)$ es un difeomorfismo (\exp denota la exponencial).

Entonces tenemos un difeomorfismo $\theta : N(S, \varepsilon) \rightarrow U$, con θ^{-1} la inversa, y consideramos la siguiente composición $\pi \circ \theta^{-1} : U \rightarrow S$ esto nos da una retracción de U en S , es decir, S es un retracto de su vecindad tubular.

Retomando todo lo anterior tiene sentido la siguiente proposición que nos ayudará más adelante:

Proposición 1.1.12. *Sea M una variedad diferenciable compacta con la métrica riemanniana d , X un campo de Killing en M y $F : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ con F_t , $t \in \mathbb{R}$, los flujos de X . Nos fijamos en el conjunto $Y = \{p \in M \mid X(p) = 0\}$ con Y_i , $i \in \Lambda$, las componentes conexas de Y ; para cada i , sea U_i la vecindad tubular de Y_i tal que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$ y $U = \cup_{i \in \Lambda} U_i$. Entonces $F_t|_{\partial U} \simeq Id_{\partial U}$ con ∂U la frontera de U y $F_t|_K \simeq Id_K$ con $K = \overline{M \setminus U}$.*

Demostración. Primero veremos que $F_t \simeq Id_M$, sea $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$ definida como $H(p, s) = F_{ts}(p)$ la cual es claro que es la homotopía que se quería.

Ahora vamos a ver que la restricción de esta homotopía a la frontera de U está bien definida. Para esto notemos que $\partial U = \cup_{i \in \Lambda} \partial U_i$ con cada $U_i = \{p \in M \mid d(p, Y_i) < \varepsilon_i\}$ y $\partial U_i = \{p \in M \mid d(p, Y_i) = \varepsilon_i\}$, por lo que si $p \in \partial U_i$ entonces existe algún $y \in Y_i$ tal que $d(p, y) = \varepsilon_i$, y como F_t es una isometría para cada $t \in \mathbb{R}$, $d(F_t(p), F_t(y)) = \varepsilon_i$ y $F_t(y) = y$ por lo que $F_t(p) \in \partial U_i$. Con esto tenemos que $H|_{\partial U_i} : \partial U_i \times [0, 1] \rightarrow \partial U_i$ está bien definida para cada $i \in \Lambda$, entonces $H|_{\partial U} : \partial U \times [0, 1] \rightarrow \partial U$ está bien definida, por lo tanto $F_t|_{\partial U} \simeq Id_{\partial U}$.

Para K , también podemos interpretarlo como $K = \cap_{i \in \Lambda} \{p \in M \mid d(p, Y_i) \geq \varepsilon_i\}$ y con un razonamiento análogo tenemos que $F_t|_K \simeq Id_K$. \square

1.2. Distribuciones

Dado que vamos a utilizar el teorema de Frobenius, necesitaremos de las siguientes definiciones:

Definición 1.2.1. *Se dice que \mathcal{D} es una distribución c -dimensional de una variedad diferenciable M , si $\mathcal{D}(p) < T_p M$ es un subespacio de dimensión c del espacio tangente para cada $p \in M$.*

Definición 1.2.2. *Una distribución \mathcal{D} es diferenciable si para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p en la que se tenga c campos vectoriales X_1, \dots, X_c de clase C^∞ tal que $X_1(q), \dots, X_c(q)$ genera a $\mathcal{D}(q)$ para cada $q \in U$.*

Definición 1.2.3. Una distribución \mathcal{D} es involutiva si cada vez que tenga X y Y campos vectoriales que pertenecen a \mathcal{D} , es decir, $X(p), Y(p) \in \mathcal{D}(p)$, entonces $[X, Y] \in \mathcal{D}$.

Definición 1.2.4. Una distribución \mathcal{D} es integrable en M , si para cada $p \in M$ existe una subvariedad $N \subseteq M$ tal que $T_p N = \mathcal{D}(p)$.

Sólo vamos a enunciar el Teorema de Frobenius, pero la prueba se encuentra en [18].

Teorema 1.2.5. (Frobenius) Sea \mathcal{D} una distribución c -dimensional, diferenciable, e involutiva de M^m . Entonces \mathcal{D} es integrable. De hecho, existe un sistema coordenado (U, φ) centrado en p , y con funciones locales x_1, \dots, x_m tal que cada corte definido por $x_i = \text{constante}$, $i \in \{c+1, \dots, m\}$ es una subvariedad de M que me sirven para \mathcal{D} . Entonces si $N \subseteq U$ es una subvariedad conexa, y coincide su espacio tangente en cada punto con la distribución \mathcal{D} , se tiene que N está contenida en uno de estos cortes.

Para poder probar que se cumplen las hipótesis del teorema eventualmente, vamos a utilizar el transporte paralelo:

Definición 1.2.6. Sea M una variedad suave con una conexión riemanniana. Sea V un campo vectorial sobre la curva $\alpha : I \rightarrow M$, se llama paralelo si $\frac{DV}{dt} = 0$, $\forall t \in I$.

La siguiente proposición nos dice que efectivamente podemos definir un transporte paralelo sobre una curva diferenciable dada. La prueba de esta proposición se encuentra en [3].

Proposición 1.2.7. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva diferenciable en una variedad suave M , y $v_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$. Entonces existe un único campo vectorial paralelo V sobre α , tal que $V(\alpha(t_0)) = v_0$. Ya que V depende de t , escribimos el transporte paralelo sobre α como $V(t)$.

Notemos que si U y V son transportes paralelos sobre una trayectoria diferenciable α con condición inicial $U(p) = u, V(p) = v \in T_p M$ con u y v perpendiculares entonces son perpendiculares en todo punto de la curva, ya que la conexión de M es compatible con la métrica entonces $\langle U, V \rangle = \text{cte}$ y como $\langle u, v \rangle = 0$, por lo que $\langle U, V \rangle = 0$. De hecho $\langle V, V \rangle = \langle v, v \rangle$ y $\langle U, U \rangle = \langle u, u \rangle$.

1.3. Acciones

Definición 1.3.1. Se dice que G , un grupo multiplicativo con elemento identidad e , **actúa** (por la izquierda) en un conjunto K cuando existe una función $\theta : G \times K \rightarrow K$, llamada **acción** de G en K que satisface:

- a) $\theta(e, k) = ek = k$ para cada $k \in K$.
- b) $\theta(h, \theta(g, k)) = h(gk) = \theta(hg, k) = (hg)k$ para todo $g, h \in G$ y $k \in K$.

Se le pide más propiedades a la acción dependiendo de K , por ejemplo si K es un espacio topológico pedimos que $\theta_g : K \rightarrow K$ con $\theta_g(k) = gk = \theta(g, k)$ sea continua para cada $g \in G$, o si K es una variedad diferenciable pedimos que $\theta_g : K \rightarrow K$ sea diferenciable. En nuestro caso nos interesa que G actúe isométricamente en una variedad riemanniana, es decir que cada $\theta_g : K \rightarrow K$ con $g \in G$ sea una isometría.

Vamos a ver algunos ejemplos de acciones isométricas de \mathbb{S}^1 en los espacios que nos interesan, los cuales son \mathbb{S}^4 y $\mathbb{C}P^2$:

1. Sea $\rho : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$, definida como

$$(e^{i\theta}, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Esta acción es isométrica y deja invariante a \mathbb{S}^4 , por lo que tenemos una acción isométrica de \mathbb{S}^1 en \mathbb{S}^4 restringiendo a ρ .

De hecho, se tiene que cualquier isometría de \mathbb{S}^n es una restricción de una isometría en \mathbb{R}^{n+1} (la prueba se puede ver en [15]). Por lo que cada acción isométrica de \mathbb{S}^1 en \mathbb{S}^4 viene de la restricción de algún subconjunto adecuado de $SO(n + 1)$.

2. Sean $k, l \in \mathbb{Z}$ tal que $(k, l) = 1$, y sea $\rho : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$, definida como:

$$(e^{i\theta}, [(z_1, z_2, z_3)]) \mapsto [(e^{ik\theta} z_1, e^{il\theta} z_2, z_3)].$$

Esta acción se puede ver que está bien definida y es isométrica pues sólo son rotaciones.

Ahora, en general, si tenemos una acción θ de G en K observemos que tenemos un homomorfismo de G al grupo de permutaciones de K con la composición que denotaremos como $Biy(K)$, o si pedimos que la acción sea isométrica con K espacio métrico, tenemos un homomorfismo de G al grupo de isometrías de K con la composición que denotaremos como $Iso(K)$ de la siguiente manera:

$$\Theta : G \rightarrow Iso(K) \quad \text{con} \quad \Theta(g) = \theta_g.$$

Proposición 1.3.2. *Sea G un grupo que actúa en K , entonces $G/\ker \Theta$ también actúa en K .*

Demostración. Sea $\rho : G/\ker \Theta \times K \rightarrow K$ definida como $\rho(g \ker \Theta, k) := gk$. Veremos que está bien definida, sea g y $\hat{g} \in G$ tal que $g \ker \Theta = \hat{g} \ker \Theta$ entonces $g^{-1}\hat{g} \in \ker \Theta$, es decir, $(g^{-1}\hat{g})k = k$ para cada $k \in K$, entonces usamos la propiedad b) de la acción θ y después sólo multiplicamos por g de los dos lados para que nos quede que $\hat{g}k = gk$ para cada $k \in K$, por lo que ρ está bien definida.

Ahora veremos que es una acción:

- i) $\rho(\ker \Theta, k) = fk = k$, pues $f \in \ker \Theta$, para cada $k \in K$
- ii) $\rho(h \ker \Theta, \rho(g \ker \Theta, k)) = h(gk) = (hg)k$ por la propiedad b) de θ .

por lo tanto ρ es una acción de $G/\ker \Theta$ en K . □

Notemos que si G actúa isométricamente en K , entonces $G/\ker \Theta$ también actúa isométricamente en K . Esto pasa pues $\rho_{g \ker \Theta} : K \rightarrow K$ está definida como $\rho_{g \ker \Theta}(k) = \rho(g \ker \Theta, k) = gk = \theta_g(k)$ entonces $\rho_{g \ker \Theta} = \theta_g$, y se tiene que θ_g es una isometría, por lo tanto $\rho_{g \ker \Theta}$ es una isometría para cada $g \ker \Theta \in G/\ker \Theta$.

Daremos algunas definiciones prácticas para una acción continua de G en el espacio topológico X :

Definición 1.3.3. *El grupo de isotropía de x es $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$.*

Hay propiedades útiles sobre el grupo de isotropía que son fáciles de ver como:

- Para cada $x \in X$, G_x es un subgrupo de G .

- $\ker \Theta = \bigcap_{x \in X} G_x$, por lo que también es un subgrupo de G .

Definición 1.3.4. Una acción es **libre** si $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$.

Definición 1.3.5. Un abierto U de X se dice que es **G -equivariante** si $g(U) \subset U$ para cualquier $g \in G$.

El siguiente lema es de gran utilidad pues según nos convenga vamos a poder trabajar con campos vectoriales en lugar de acciones:

Lema 1.3.6. Sea M una variedad diferenciable compacta, si M admite una acción isométrica no trivial de \mathbb{S}^1 entonces admite un campo de Killing no trivial.

Demostración. Sea $\phi : \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$ una acción isométrica no trivial, fijamos un punto $p \in M$ nos queda una curva cerrada suave $c_p(t) := \phi(t, p)$ en M . Entonces para cada $p \in M$, definimos el vector $X(p) := c'_p(e)$ con e la identidad en \mathbb{S}^1 . Esto define un campo vectorial suave pues es la derivada de curvas suaves, cuyos flujos podemos definir para todo t real usando la transformación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. De hecho los flujos $F_t : M \rightarrow M$ satisfacen $F_t(p) = \phi(f(t), p)$, por lo que F_t es una isometría para cada $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto X es un campo de Killing no trivial. \square

El regreso de este lema no siempre es cierto, ya que por ejemplo en \mathbb{R}^2 se puede definir un campo de Killing que tiene como curvas solución a las rectas con pendiente irracional. Al pasar al 2-toro tenemos un campo de Killing con trayectorias no cerradas, por lo que no se puede definir una acción de \mathbb{S}^1 correspondiente a este campo. Pero si pedimos que las curvas solución de nuestro campo de Killing sean cerradas entonces sí se da el regreso:

Lema 1.3.7. Sea M una variedad diferenciable compacta, Si M admite un campo de Killing no trivial con curvas solución cerradas, entonces M admite una acción isométrica no trivial de \mathbb{S}^1 .

Demostración. Sea X un campo de Killing no trivial en M . Como M es compacta podemos extender sus flujos $F_t : M \rightarrow M$ con cada curva solución definida en todo \mathbb{R} .

\mathbb{R} es un grupo con la suma y podemos definir la siguiente acción en M : $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ como $\phi(t, p) := F_t(p)$, es claro que está bien definida. Ahora veremos que cumple las propiedades:

- i) $\phi(0, p) = F_0(p) = p$ para cada $p \in M$.
- ii) $\phi(t, \phi(\hat{t}, p)) = F_t(F_{\hat{t}}(p)) = F_{t+\hat{t}}(p) = \phi(t + \hat{t}, p)$ para cada t y $\hat{t} \in \mathbb{R}$ y $p \in M$ (proposición 1.1.3).
- iii) $\phi_t = F_t : M \rightarrow M$ las cuales son isometrías.

por lo que tenemos una acción isométrica de \mathbb{R} en M y una transformación Θ de \mathbb{R} en el conjunto de isometrías de M dada por $\Theta(t) = \phi_t$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Ahora veremos que $\ker \Theta$ es un conjunto discreto. Para esto primero notemos que $\ker \Theta \neq \{0\}$ pues las curvas solución son cerradas. Sea τ el ínfimo de $\ker \Theta \cap \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Si $\tau = 0$ entonces existe una sucesión de $t_i \in \ker \Theta$ con $t_i \rightarrow 0$ lo que implica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $t_i \leq \varepsilon$ donde $\forall p \in M$ se tiene que $c_p(t_i) = p$, me queda una curva cerrada en p para cada $\varepsilon > 0$, pero como el campo vectorial está bien definido esto implica que $c_p(t) = p \forall t \in \mathbb{R}$ y $\forall p \in M$ lo cual es una contradicción pues X es un campo vectorial distinto del trivial.

Tenemos $\tau \neq 0$, afirmamos que $\ker \Theta = \{n\tau \mid n \in \mathbb{Z}\}$:

Para ver que $\ker \Theta \subseteq \{n\tau \mid n \in \mathbb{Z}\}$ lo haremos por contradicción. Supongamos que existe $s \in \ker \Theta$ tal que $s \neq n\tau$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, podemos pedir que $s = |s|\tau$ ya que $\ker \Theta$ es un subgrupo, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n\tau < s < (n+1)\tau$ eso implica que $0 < s - n\tau < (n+1)\tau - n\tau = \tau$ y $s - n\tau \in \ker \Theta$ lo que contradice que τ es ínfimo, por lo tanto $\ker \Theta \subseteq \{n\tau \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Sólo falta ver que $\ker \Theta \supseteq \{n\tau \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Tenemos $n\tau$ con $n \in \mathbb{Z}$, si $n > 0$ entonces $F_{n\tau}(p) = F_{(n-1)\tau} \circ F_\tau(p) = F_{(n-1)\tau}(p) = \dots = F_{(n-(n-1))\tau} \circ F_\tau(p) = p$ y de una manera similar se tiene para cuando $n < 0$, por lo que $n\tau \in \ker \Theta$.

Por la proposición 1.3.2 y la nota que sigue de la proposición, $\mathbb{R}/\ker \Theta$ también actúa isométricamente en M , pero tenemos que $\ker \Theta$ es discreto entonces $\mathbb{R}/\ker \Theta \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx \mathbb{S}^1$, por lo que tenemos una acción isométrica no trivial de \mathbb{S}^1 en M . □

Una de las grandes cualidades de las variedades diferenciables es que el estudio de su haz tangente nos arroja mucha información sobre lo que pasa en la variedad. Pero para esto primero hay que ver que información tenemos en el haz tangente dadas ciertas hipótesis en la variedad, lo cual es la finalidad de la siguiente proposición en el caso en que la variedad admita una acción de \mathbb{S}^1 .

Proposición 1.3.8. *Sea M una variedad diferenciable que admite una acción diferenciable de \mathbb{S}^1 , entonces el haz tangente TM también admite una acción diferenciable de \mathbb{S}^1 .*

Demostración. Definimos una acción $\phi : \mathbb{S}^1 \times TM \rightarrow TM$ de \mathbb{S}^1 en el haz tangente por $\phi(s, (p, v)) = (sp, (s \circ \alpha)'(0))$ donde α es la curva suave tal que $\alpha'(0) = v$ y $\alpha(0) = p$.

Primero veremos que está bien definida, pero es fácil ya que cada $s \in \mathbb{S}^1$ define un difeomorfismo en M , y de hecho, de esta manera nos induce un difeomorfismo en TM . Dado que tenemos una acción de \mathbb{S}^1 en M , esto nos induce que ϕ cumpla las propiedades de ser una acción, pues:

- $\phi(1, (p, v)) = (1p, (1 \circ \alpha)'(0)) = (p, v)$
- $\phi(\tau, \phi(s, (p, v))) = \phi(\tau, (sp, (s \circ \alpha)'(0))) = (\tau sp, (\tau \circ s \circ \alpha)'(0)) = \phi(\tau s, (p, v))$
- $\phi_s : TM \rightarrow TM$ es suave. □

1.4. Espacio orbital y órbitas principales

El espacio orbital de un espacio X en donde actúa G es el conjunto de órbitas X/G provisto de la topología cociente respecto a la proyección orbital $\pi : X \rightarrow X/G$.

Para poder asegurar que X/G sea un espacio de Hausdorff, necesitamos la siguiente propiedad de la acción:

Definición 1.4.1. *Una acción continua de un grupo topológico G en un espacio topológico X se dice que es una **acción propia** si:*

$(g, x) \mapsto (gx, x)$ es una función continua propia : $G \times X \rightarrow X \times X$.

Lema 1.4.2. *Para una acción continua y propia en un espacio de Hausdorff, el espacio orbital es de Hausdorff.*

Demostración. Sea G el grupo topológico que actúa continua y propiamente en X , $\delta : G \times X \rightarrow X \times X$ dada como en la definición. Primero observemos que $R := \delta(G \times X)$ es cerrado en $X \times X$, esto pasa pues para cada $\hat{x} \in \bar{R}$ el cual es el punto de acumulación de alguna sucesión \hat{x}_n en R entonces $\{\hat{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\hat{x}\}$ es un conjunto compacto de $X \times X$ y como δ es propia se tiene que $\delta^{-1}(\{\hat{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\hat{x}\})$ es compacto y por la continuidad de δ entonces $\hat{x} \in R$.

Ahora sean $[x] \neq [y] \in X/G$ entonces $(x, y) \notin R$ (pues para que $(x, y) \in R$ necesitamos que exista $g \in G$ tal que $gy = x$, es decir, $[x] = [y]$) entonces existe una vecindad \tilde{U} de (x, y) tal que $\tilde{U} \subset X \times X \setminus R$ pues es abierto, y podemos escoger una vecindad de la forma $U \times V \subset \tilde{U}$ en $X \times X$ de (x, y) .

Sea $U^R = \pi^{-1}(\pi(U))$ y $V^R = \pi^{-1}(\pi(V))$ con π la proyección orbital; veremos que son ajenos, si existe $z \in U^R \cap V^R$ entonces existen $x' \in U$ y $y' \in V$ con $[x'] = [z]$ y $[z] = [y']$ por lo que $[x'] = [y']$ pero eso quiere decir que $(x', y') \in U \times V$ y $(x', y') \in R$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $U^R \cap V^R = \emptyset$. Esto nos dice que $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ los cuales son los abiertos que separan a $[x]$ y $[y]$. \square

Nos interesa el caso particular en que el grupo que actúa es \mathbb{S}^1 y el espacio X es compacto, por lo que debemos asegurarnos que se tenga una acción propia:

Lema 1.4.3. *Sea X un espacio topológico Hausdorff y compacto en el que actúa continuamente \mathbb{S}^1 , entonces la acción es propia.*

Demostración. Tenemos que ver que la función continua $\delta : \mathbb{S}^1 \times X \rightarrow X \times X$, dada por $\delta(s, x) = (sx, x)$, es propia. Sea $K \subset X \times X$ un compacto, como X es Hausdorff entonces $X \times X$ es Hausdorff por lo que K es cerrado. Dado que δ es continua entonces $\delta^{-1}(K)$ es cerrado en $\mathbb{S}^1 \times X$ el cual es compacto pues tanto \mathbb{S}^1 como X son compactos por lo tanto $\delta^{-1}(K)$ es compacto. \square

Ahora si tomamos variedades y acciones diferenciables, queremos ver si hay condiciones para poder darle una estructura diferenciable al espacio orbital. El siguiente teorema nos dice cuáles son esas condiciones:

Teorema 1.4.4. *Sea G un grupo de Lie, M una variedad diferenciable y θ una acción diferenciable de G en M tal que es propia y libre. Entonces M/G tiene una única estructura de variedad diferenciable, de dimensión $\dim M - \dim G$, haciendo que $\pi : M \rightarrow M/G$ sea una sumersión.*

Supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema, es decir, tenemos una acción propia, libre y suave $\theta : G \times M \rightarrow M$. Nos fijamos en $\theta_p : G \rightarrow M$, con $p \in M$ fijo. Afirmamos que $d\theta_{p_e} : T_e G \rightarrow T_p M$ es inyectiva, pues sea $u \in T_e G$ tal que $d\theta_{p_e}(u) = 0$, y $\alpha : I \rightarrow G$ con $\alpha'(0) = u$, entonces $d\theta_{p_e}(u) = \theta_p(\alpha(0))' = 0$ por lo que $\theta_p \circ \alpha(t)$ es constante, pero como θ es libre entonces $\alpha(t)$ tiene que ser constante, es decir, $u = 0$ por lo tanto $d\theta_{p_e}$ es inyectiva.

La prueba de este teorema 1.4.4 se basa en la observación anterior ya que tenemos \hat{S} una subvariedad suave de M por p tal que $d\theta_{p_e}(T_e G) \oplus T_p \hat{S} = T_p M$ (se puede hacer utilizando la exponencial) y por la continuidad de θ , existe una subvariedad suave S tal que para todo $x \in S$ se tiene $d\theta_{p_e}(T_e G) \oplus T_x S = T_x M$. Esta S nos va a inducir la estructura suave en el espacio orbital. Se puede consultar [5] para una prueba más detallada.

En nuestro caso, donde M es compacta y $G = \mathbb{S}^1$, nos gustaría poder usar este teorema para darle estructura de variedad diferenciable al espacio orbital, pero sólo tenemos que esta acción es propia mas no libre. De hecho, por lo general esta acción no va a ser libre, sin embargo no es problema ya que nos basta que la acción restringida a un subconjunto de la variedad sea libre, quedándonos un subespacio del espacio orbital con estructura de variedad diferenciable. Para definir el subconjunto adecuado de la variedad necesitaremos de las órbitas principales.

Sea G un grupo de Lie que actúa diferenciable y propiamente en una variedad diferenciable M .

Definición 1.4.5. Una órbita $G(p)$ se llama **principal** si existe un abierto $U \subseteq M$ de p tal que para todo $y \in U$, G_p es conjugado a algún subgrupo de G_y , es decir, existe $a \in G$ tal que $aG_p a^{-1}$ es un subgrupo de G_y .

Denotaremos al conjunto de todos los puntos en M cuyas órbitas son principales como M_0 . Vamos a probar una propiedad de estas órbitas que nos será de gran utilidad, pero antes necesitamos definir las secciones:

Definición 1.4.6. Una subvariedad S de M se llama **sección** en $p \in M$ si existe una vecindad abierta G -invariante U de $G(p)$ y una retracción r diferenciable G -equivariante ($r(gy) = gr(y)$) $r : U \rightarrow G(p)$ tal que $S = r^{-1}(p)$.

Se puede probar que para cada $p \in M$ existe una sección, no lo vamos a hacer aquí pero se puede ver en [1]. Vamos a utilizar este hecho en la siguiente propiedad:

Propiedad 1.4.7. Existen órbitas principales en M .

Demostración. Sabemos que los subgrupos de isotropía son compactos, lo cual implica que el número de sus componentes conexas es finito. Entonces, consideremos entre el conjunto de subgrupos de isotropía aquellos con mínima dimensión y entre estos escojamos H con el mínimo número de componentes conexas. Sea $p \in M$ tal que $G_p = H$, afirmamos que $G(p)$ es

una órbita principal. Sea S_p una sección, y $U = G(S_p)$ el cual es abierto, para toda $y \in U$ se tiene que existe $s \in S_p$ con $G_y = G_s$ y que $G_s \subseteq G_p$ por la definición de sección. Pero por como escogimos a H se tiene que $G_s = H$. Por lo tanto $G(p)$ es una órbita principal. \square

Observemos que M_0 es un abierto, pues $G(S_p)$ es un abierto, con S_p una sección de $p \in M_0$, por lo que $M_0 = \cup_{p \in M_0} G(S_p)$.

Para poder usar el teorema 1.4.4, hay que ver que restringiendo la acción al conjunto de órbitas principales me queda una acción libre. Tenemos $\theta : \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$ una acción diferenciable e isométrica no trivial en una variedad diferenciable y compacta M , sea

$$M_0 = \{ p \in M \mid \mathbb{S}^1(p) \text{ es una órbita principal} \}.$$

Notemos que M_0 es una subvariedad de M pues es abierto de M .

Lema 1.4.8. *Sea θ como en el párrafo anterior, entonces $\theta|_{M_0} : \mathbb{S}^1 \times M_0 \rightarrow M_0$ es una acción diferenciable y libre.*

Demostración. Primero está bien definida pues para cualquier $(s, p) \in \mathbb{S}^1 \times M_0$ se tiene que la órbita de sp es principal pues la de p lo es, entonces $sp \in M_0$.

Cada $\theta_s|_{M_0} : M_0 \rightarrow M_0$ es diferenciable e isométrica pues es la restricción de una isometría en una subvariedad.

Sólo nos falta ver que esta acción es libre. Sea $p \in M_0$ y $s \in \mathbb{S}^1$. Como $\mathbb{S}^1(p)$ es principal tenemos un abierto U de p en M tal que para todo $y \in U$, se tiene que existe $a \in \mathbb{S}^1$ tal que $a\mathbb{S}_p^1 a^{-1}$ es subgrupo de \mathbb{S}_y^1 , pero como \mathbb{S}^1 es abeliano entonces se reduce a que \mathbb{S}_p^1 es subgrupo de \mathbb{S}_y^1 , es decir, s fija a todo U . Pero la acción de \mathbb{S}^1 es isométrica por lo que forzosamente s fija a todo M y sabemos que sólo e fija a todo M , por lo tanto $\mathbb{S}_p^1 = \{e\}$. \square

Como vamos a estar usando acciones isométricas, esto nos debe de dar más información de la estructura que le podemos dar al espacio orbital. Para empezar si tenemos una distancia en M y una acción propia entonces una forma muy fácil de definir una distancia en el espacio orbital es de la siguiente manera:

Definición 1.4.9. *La **distancia orbital** esta definida en el espacio orbital M/G como sigue: dados dos elementos en M/G , la distancia entre ellos es la distancia entre las órbitas correspondientes en M .*

Ahora si M es una variedad riemanniana con una acción isométrica de G , para darle una métrica riemanniana al espacio orbital de tal manera que la proyección orbital sea una sumersión riemanniana hay que recordar las observaciones del teorema 1.4.4, pues tenemos una subvariedad S que pasa por $p \in M$ donde sólo se tiene un representante de las órbitas alrededor de p . Podemos escoger a S de tal manera que sea ortogonal a $G(p)$ y que sea una subvariedad totalmente geodésica, entonces vamos a tener que S es ortogonal a cada órbita de $s \in S$ ya que la acción es isométrica. Así tenemos que M le hereda a S una métrica riemanniana con la cual se le puede dar una métrica riemanniana a la vecindad abierta de $\pi(p)$, $\pi(S)$. Esto pasa para cada punto en el espacio orbital por lo que se tiene una métrica riemanniana en el espacio orbital tal que la proyección orbital π es una sumersión riemanniana (por como definimos la métrica riemanniana). Notemos que las geodésicas de S van a ser las geodésicas de M/G .

1.5. Espacios de curvatura positiva

Vamos a estar trabajando con variedades diferenciables con curvatura positiva, por lo que en esta sección vamos a presentar algunos resultados que se dan en este contexto. Uno de los resultados es el teorema de Frankel, el cual es muy importante en este trabajo ya que aparte de utilizarlo, vamos a usar el método con el que se prueba. Por esta razón vamos a desarrollar con detalle la prueba. También veremos un poco sobre las sumersiones riemannianas para poder argumentar eventualmente que cierta variedad tiene curvatura positiva. Los otros dos resultados que utilizaremos son los teoremas de Synge y de Toponogov.

Primero veremos que las sumersiones riemannianas no decrecen la curvatura, es decir, la curvatura seccional en cualquier punto del dominio es menor o igual que la curvatura seccional del punto correspondiente en la imagen. Para esto recordemos lo que es una sumersión y cómo se puede descomponer al espacio tangente. Sea $f : \tilde{M}^{n+k} \rightarrow M^n$ una sumersión, es decir, f es suprayectiva y para todo $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $df_{\tilde{p}} : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_pM$ es suprayectiva (tiene rango n). Entonces tenemos que la fibra $f^{-1}(p) = F_p$ es una subvariedad de \tilde{M} para toda $p \in M$, y un vector tangente de \tilde{M} que es tangente a algún F_p con $p \in M$, es llamado vector *vertical* de la sumersión, por lo que denotamos al espacio tangente de F_p en un punto \tilde{p} ($f(\tilde{p}) = p$) como $V_{\tilde{p}}$ y

visto como subespacio de $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ se tiene que $\ker df_{\tilde{p}} = T_{\tilde{p}}F_p = V_{\tilde{p}}$.

Definición 1.5.1. Sean \tilde{M} y M variedades riemannianas. Una **sumersión riemanniana** $f : \tilde{M}^{n+k} \rightarrow M^n$ es una sumersión tal que para todo $\tilde{p} \in \tilde{M}$, se tiene que $df_{\tilde{p}} : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_pM$ preserva longitudes de vectores ortogonales a F_p , es decir, si $u, v \in V_{\tilde{p}}^\perp = T_{\tilde{p}}F_p^\perp$ entonces $\langle u, v \rangle = \langle df_{\tilde{p}}(u), df_{\tilde{p}}(v) \rangle$.

Siguiendo con nuestra notación, un vector tangente a \tilde{M} en \tilde{p} es llamado horizontal si es ortogonal a $V_{\tilde{p}}$, y $H_{\tilde{p}} = V_{\tilde{p}}^\perp$. Ahora podemos descomponer al espacio tangente $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ como:

$$T_{\tilde{p}}\tilde{M} = H_{\tilde{p}} \oplus V_{\tilde{p}}.$$

Si tenemos un campo vectorial W sobre \tilde{M} entonces podemos ver que se expresa de forma única como $W = W^h + W^v$, con W^h un campo horizontal ($W^h(\tilde{p}) \in H_{\tilde{p}}$) y W^v un campo vertical ($W^v(\tilde{p}) \in V_{\tilde{p}}$).

Lema 1.5.2. Sea X un campo vectorial sobre M y $f : \tilde{M} \rightarrow M$ una sumersión riemanniana. El levantamiento horizontal \tilde{X} de X es el único campo horizontal definido por

$$df_{\tilde{p}}(\tilde{X}(\tilde{p})) = X(f(\tilde{p})) = X(p).$$

Entonces:

- i) \tilde{X} es diferenciable.
- ii) Sean ∇ y $\tilde{\nabla}$ conexiones riemannianas de M y \tilde{M} respectivamente. Se tiene que

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \widetilde{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v,$$

con X y Y campos vectoriales sobre M .

Demostración. i) Tenemos que $\tilde{X} = \tilde{X}^h$ por lo que escogeremos una carta coordenada conveniente. Sea $\tilde{p} \in \tilde{M}$, existe una subvariedad V' de \tilde{M} tal que su espacio tangente en \tilde{p} es $H_{\tilde{p}}$. Dado que $df_{\tilde{p}} : H_{\tilde{p}} \rightarrow T_{f(\tilde{p})}M$ es un isomorfismo entonces existe un abierto V en V' tal que $f|_V$ es un difeomorfismo. Tenemos una carta coordenada (V, φ) de V' en \tilde{p} (restringiendo a V si es necesario), y otra carta coordenada $(U', \tilde{\varphi}')$ de \tilde{M} en \tilde{p} tal que

$(U' \cap V', \tilde{\varphi}'|_{U' \cap V'}) = (V, \varphi)$, pero para que no haya complicaciones vamos a tomar a la carta coordenada $(U, \tilde{\varphi})$ de \tilde{M} en \tilde{p} con $U = U' \cap f^{-1}(f(V))$ y $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}'|_U$. Por como escogimos a las cartas podemos escribir localmente a los campos de la siguiente manera: $X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) df_{\tilde{p}}(\frac{\partial}{\partial x_i})$, con a_i diferenciable para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, y a $\tilde{X}(\tilde{p}) = \sum_{j=1}^{n+k} b_j(\tilde{p}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}$. Dado que \tilde{X} es levantamiento horizontal de X , forzosamente las b_j 's son diferenciables.

ii) Vamos a ver cuál es la parte horizontal y cuál es la parte vertical del campo $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$. Sea W un campo vertical en \tilde{M} , entonces:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, W \rangle &= \frac{1}{2} (\tilde{X} \langle \tilde{Y}, W \rangle + \tilde{Y} \langle W, \tilde{X} \rangle - W \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle \\ &\quad - \langle \tilde{Y}, [\tilde{X}, W] \rangle - \langle W, [\tilde{Y}, \tilde{X}] \rangle + \langle \tilde{X}, [W, \tilde{Y}] \rangle). \end{aligned}$$

Se tiene que $\langle \tilde{Y}, W \rangle = \langle W, \tilde{X} \rangle = 0$ pues son ortogonales, $W \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = W \langle \langle X, Y \rangle \circ f \rangle = 0$ y dado que la proyección del corchete de dos campos vectoriales al espacio horizontal es el corchete de las proyecciones de los campos vectoriales al espacio horizontal, se puede ver que $[\tilde{X}, W]$ es un campo vertical pues W lo es, de igual manera se tiene que $[\tilde{Y}, W]$ es un campo vertical. Entonces la ecuación nos queda:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, W \rangle &= \frac{1}{2} (-\langle W, [\tilde{Y}, \tilde{X}] \rangle + \langle \tilde{X}, [W, \tilde{Y}] \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle W, [\tilde{X}, \tilde{Y}] \rangle + \langle \tilde{X}, -[\tilde{Y}, W] \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle W, [\tilde{X}, \tilde{Y}] \rangle). \end{aligned}$$

Ahora sea \tilde{Z} un campo horizontal en \tilde{M} , entonces

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle &= \frac{1}{2} (\tilde{X} \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle + \tilde{Y} \langle \tilde{Z}, \tilde{X} \rangle - \tilde{Z} \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle \\ &\quad - \langle \tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Z}] \rangle - \langle \tilde{Z}, [\tilde{Y}, \tilde{X}] \rangle + \langle \tilde{X}, [\tilde{Z}, \tilde{Y}] \rangle). \end{aligned}$$

Primero observemos que $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^h = \widetilde{[X, Y]}$, por lo que $\langle \widetilde{Y}, [\widetilde{X}, \widetilde{Z}] \rangle = \langle \widetilde{Y}, [\widetilde{X}, \widetilde{Z}]^h \rangle = \langle \widetilde{Y}, \widetilde{[X, Z]} \rangle$, y análogamente con los otros términos nos queda:

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, \widetilde{Z} \rangle &= \frac{1}{2} (\widetilde{X}(\langle Y, Z \rangle \circ f) + \widetilde{Y}(\langle Z, X \rangle \circ f) - \widetilde{Z}(\langle X, Y \rangle \circ f) \\
&\quad - \langle \widetilde{Y}, [\widetilde{X}, \widetilde{Z}] \rangle - \langle \widetilde{Z}, [\widetilde{Y}, \widetilde{X}] \rangle + \langle \widetilde{X}, [\widetilde{Z}, \widetilde{Y}] \rangle) \\
&= \frac{1}{2} (X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\
&\quad - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle) \\
&= \langle \nabla_X Y, Z \rangle \\
&= \langle \widetilde{\nabla}_X Y, \widetilde{Z} \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos el resultado

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} = \widetilde{\nabla}_X Y + \frac{1}{2} [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v.$$

□

La siguiente proposición nos dice cómo se relacionan las curvaturas en una sumersión riemanniana. Seguiremos con la misma notación, $f : \widetilde{M} \rightarrow M$ una sumersión riemanniana, X, Y, Z, W campos vectoriales sobre M y $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}, \widetilde{W}$ sus levantamientos horizontales.

Proposición 1.5.3. Sean R y \widetilde{R} los tensores de curvatura de M y \widetilde{M} respectivamente. Entonces:

- i) $\langle \widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z}, \widetilde{W} \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \frac{1}{4} \langle [\widetilde{X}, \widetilde{Z}]^v, [\widetilde{Y}, \widetilde{W}]^v \rangle + \frac{1}{4} \langle [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]^v, [\widetilde{X}, \widetilde{W}]^v \rangle - \frac{1}{2} \langle [\widetilde{Z}, \widetilde{W}]^v, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v \rangle.$
- ii) $K(\sigma) = \widetilde{K}(\tilde{\sigma}) + \frac{3}{4} \|[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v\|^2 \geq \widetilde{K}(\tilde{\sigma})$, con σ subespacio dos dimensional del espacio tangente en $p \in M$ y $\tilde{\sigma}$ el subespacio dos dimensionales en \widetilde{M} generado por el levantamiento horizontal de los vectores de σ .

Demostración. i) Sabemos que

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}} \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Z} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}} \widetilde{Z} + \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]} \widetilde{Z},$$

vamos a desarrollar el producto interior con \widetilde{W} de cada término para llegar a donde queremos.

Por el lema 1.5.2 tenemos $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \widetilde{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v$ ① por lo que se tiene que $\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{W} \rangle = \langle \nabla_X Y, W \rangle$ para cualquier levantamiento horizontal \widetilde{W} .

Como $\widetilde{\nabla}$ es compatible con la métrica, entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{X}\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}, \widetilde{W} \rangle &= \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}, \widetilde{W} \rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{W} \rangle \\ \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}, \widetilde{W} \rangle &= \widetilde{X}\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}, \widetilde{W} \rangle - \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{W} \rangle.\end{aligned}$$

Ahora por ① tenemos:

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{W} \rangle &= \langle \widetilde{\nabla}_Y Z + \frac{1}{2}[\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]^v, \widetilde{\nabla}_X W + \frac{1}{2}[\widetilde{X}, \widetilde{W}]^v \rangle \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_Y Z, \widetilde{\nabla}_X W \rangle + \langle \widetilde{\nabla}_Y Z, \frac{1}{2}[\widetilde{X}, \widetilde{W}]^v \rangle \\ &\quad + \langle \frac{1}{2}[\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]^v, \widetilde{\nabla}_X W \rangle + \frac{1}{4}\langle [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]^v, [\widetilde{X}, \widetilde{W}]^v \rangle \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_Y Z, \widetilde{\nabla}_X W \rangle + \frac{1}{4}\langle [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]^v, [\widetilde{X}, \widetilde{W}]^v \rangle.\end{aligned}$$

Uniendo las dos ecuaciones y teniendo en cuenta que ∇ es compatible con la métrica, se tiene

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}, \widetilde{W} \rangle &= \widetilde{X}\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}, \widetilde{W} \rangle - \langle \widetilde{\nabla}_Y Z, \widetilde{\nabla}_X W \rangle - \frac{1}{4}\langle [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]^v, [\widetilde{X}, \widetilde{W}]^v \rangle \\ &= X\langle \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle - \frac{1}{4}\langle [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]^v, [\widetilde{X}, \widetilde{W}]^v \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle - \frac{1}{4}\langle [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]^v, [\widetilde{X}, \widetilde{W}]^v \rangle\end{aligned}\quad \textcircled{2}$$

Por otro lado, sea T un campo vertical en \widetilde{M} , por simetría de la conexión tenemos:

$$\widetilde{\nabla}_T \widetilde{X} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} T = [T, \widetilde{X}]$$

entonces

$$\langle \widetilde{\nabla}_T \widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle = \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} T, \widetilde{Y} \rangle + \langle [T, \widetilde{X}], \widetilde{Y} \rangle$$

pero como $\langle [T, \tilde{X}], \tilde{Y} \rangle = 0$, pues T es un campo vertical entonces $[T, \tilde{X}]$ también lo es. Por lo que

$$\langle \tilde{\nabla}_T \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} T, \tilde{Y} \rangle.$$

Ahora por la compatibilidad de la métrica y observando que $\langle T, \tilde{Y} \rangle = 0$, se tiene

$$0 = \tilde{X} \langle T, \tilde{Y} \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} T, \tilde{Y} \rangle + \langle T, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \rangle$$

por lo tanto

$$-\langle T, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} T, \tilde{Y} \rangle = \langle \tilde{\nabla}_T \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle. \quad \textcircled{3}$$

Sabemos que podemos descomponer un campo vectorial en \tilde{M} como la suma de un campo horizontal y uno vertical, entonces $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]^h + [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v$. Con esto tenemos

$$\langle \tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \tilde{Z}, \tilde{W} \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]^h} \tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + \langle \tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v} \tilde{Z}, \tilde{W} \rangle$$

utilizando ①, ③ y que f es sumersión riemanniana se tiene

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \tilde{Z}, \tilde{W} \rangle &= \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle - \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, \tilde{\nabla}_{\tilde{Z}} \tilde{W} \rangle \\ &= \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle - \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, \tilde{\nabla}_{\tilde{Z}} \tilde{W} \rangle - \frac{1}{2} \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, [\tilde{Z}, \tilde{W}]^v \rangle \\ &= \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle - \frac{1}{2} \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, [\tilde{Z}, \tilde{W}]^v \rangle \end{aligned}$$

Ahora sí, teniendo en cuenta la ecuación anterior y ② podemos desarrollar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \tilde{Z}, \tilde{W} \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Z}, \tilde{W} \rangle - \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + \langle \tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \tilde{Z}, \tilde{W} \rangle \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle - \frac{1}{4} \langle [\tilde{X}, \tilde{Z}]^v, [\tilde{Y}, \tilde{W}]^v \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle + \frac{1}{4} \langle [\tilde{Y}, \tilde{Z}]^v, [\tilde{X}, \tilde{W}]^v \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle - \frac{1}{2} \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, [\tilde{Z}, \tilde{W}]^v \rangle \\ &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \frac{1}{4} \langle [\tilde{X}, \tilde{Z}]^v, [\tilde{Y}, \tilde{W}]^v \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \langle [\tilde{Y}, \tilde{Z}]^v, [\tilde{X}, \tilde{W}]^v \rangle - \frac{1}{2} \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, [\tilde{Z}, \tilde{W}]^v \rangle. \end{aligned}$$

ii) La curvatura seccional en M de $\sigma \subseteq T_p M$ se calcula como

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X \wedge Y|^2},$$

con X y Y dos vectores linealmente independientes que generan a σ en p , por lo que podemos suponer que $|X \wedge Y|^2 = 1$. Entonces usando i) se tiene:

$$\begin{aligned} K(\sigma) &= \langle R(X, Y)X, Y \rangle \\ &= \langle \widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle + \frac{1}{4}\langle [\widetilde{X}, \widetilde{X}]^v, [\widetilde{Y}, \widetilde{Y}]^v \rangle \\ &\quad - \frac{1}{4}\langle [\widetilde{Y}, \widetilde{X}]^v, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v \rangle + \frac{1}{2}\langle [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v \rangle \\ &= \langle \widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle + \frac{1}{4}\langle [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}\langle [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v \rangle \\ &= \widetilde{K}(\widetilde{\sigma}) + \frac{3}{4}\|[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v\|^2 \geq \widetilde{K}(\widetilde{\sigma}). \end{aligned}$$

□

Observación 1.5.4. Como consecuencia de la proposición 1.5.3 se observa que si la variedad riemanniana \widetilde{M} tiene curvatura positiva, entonces M va a tener curvatura positiva también.

Para el teorema de Frankel y el de Synge: Primero observemos que una variedad diferenciable conexa es conectable por trayectorias, pues se puede ver que para cada punto en la variedad se tiene que su componente conectable por trayectorias es un conjunto abierto y cerrado. De hecho se tiene que se puede unir cualquiera dos puntos con una curva suave a pedazos ya que podemos cubrir a la curva con un número finito de cartas coordenadas. Esto nos sirve para definir una distancia en cualquier variedad riemanniana conexa. Recordando el teorema de Hopf y Rinow tenemos que cualesquiera dos puntos se pueden unir con una geodésica tal que su longitud sea igual a la distancia entre los dos puntos, si la variedad riemanniana es completa. En el caso que la variedad riemanniana sea compacta es fácil ver que entonces es completa.

Otra cosa que hay que recordar son las variaciones diferenciables de una curva: Dada una curva diferenciable $c : [t_1, t_2] \rightarrow M$ en una variedad diferenciable M , decimos que una variación diferenciable de c es una función diferenciable $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_1, t_2] \rightarrow M$ tal que $f(0, t) = c(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Se tienen algunos resultados de las variaciones de una curva que se conocen como: las fórmulas para la variación de la energía de una curva, que se pueden consultar en [3].

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos a probar el teorema de Frankel:

Teorema 1.5.5 (Frankel). *Sea M^n una variedad riemanniana completa de curvatura positiva y A, B dos subvariedades totalmente geodésicas. Entonces A y B deben intersectarse, si $\dim A + \dim B \geq n$.*

Demostración. Procedemos por contradicción: Supongamos que A y B son ajenas, entonces existe una geodésica γ entre A y B tal que minimiza la distancia, es decir, $l(\gamma) = d(A, B)$ con $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M$ $\gamma(t_1) \in A$ y $\gamma(t_2) \in B$.

Queremos ver que hay algún vector en $T_{\gamma(t_1)}A$, tal que su transporte paralelo caiga en $T_{\gamma(t_2)}B$. Sea $\{v_1, \dots, v_s\}$ una base ortonormal para $T_{\gamma(t_1)}A$ y bajo el transporte paralelo los mandamos a $T_{\gamma(t_2)}M$, los cuales me generan un subespacio \hat{A} . Notemos que $\gamma'(t_2)$ es un vector ortogonal a $T_{\gamma(t_2)}B$ y que el transporte paralelo de $\gamma'(t_1)$ cae en $\gamma'(t_2)$, entonces $\hat{A} \subseteq \gamma'(t_2)^\perp$. Tenemos que $\dim \hat{A} + \dim T_{\gamma(t_2)}B \geq n$ y $\dim \gamma'(t_2)^\perp = n - 1$ con $T_{\gamma(t_2)}B$, $\hat{A} \subseteq \gamma'(t_2)^\perp$, por lo tanto $\hat{A} \cap T_{\gamma(t_2)}B \neq \{0\}$. Por lo que existe $V(t_2) \in \hat{A} \cap T_{\gamma(t_2)}B$ tal que viene del transporte paralelo V de algún vector $v \in T_{\gamma(t_1)}A$.

Se puede consultar [3] para ver que existe una variación diferenciable

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_1, t_2] \rightarrow M$$

de γ , con $f(0, t) = \gamma(t)$, y tal que $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = \frac{\partial f_t}{\partial s}(0)$.

Ahora vamos a usar la fórmula para la segunda variación. Sea

$$E(s) = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right\|^2 dt,$$

la energía de la curva $f(s, t) = f_s(t)$ fijando cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, y R la curvatura de M . Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E''(0) = & - \int_{t_1}^{t_2} \left\langle V(t), \frac{D^2V}{dt} + R\left(\frac{d\gamma}{dt}, V\right) \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle dt - \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s'}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle(0, t_1) \\ & + \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s'}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle(0, t_2) - \left\langle V(t_1), \frac{DV}{dt}(t_1) \right\rangle + \left\langle V(t_2), \frac{DV}{dt}(t_2) \right\rangle. \end{aligned}$$

Usando que $\frac{DV}{dt} = 0$, $\frac{D^2V}{dt^2} = 0$ y que

$$\frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s'}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial s'}, \frac{d^2\gamma}{ds dt} \right\rangle + \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s'}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle$$

con $\langle V(t), \frac{d\gamma}{dt}(t) \rangle = 0$ y $\frac{d^2\gamma}{ds dt} = 0$, entonces sólo nos queda:

$$\frac{1}{2}E''(0) = - \int_{t_1}^{t_2} \left\langle V(t), R\left(\frac{d\gamma}{dt}, V\right) \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle dt.$$

Ahora nos fijamos que la curvatura seccional del subespacio generado por $\frac{d\gamma}{dt}$ y V evaluados en alguna $t \in [t_1, t_2]$ es:

$$K\left(\frac{d\gamma}{dt}, V(t)\right) = \frac{\left\langle R\left(\frac{d\gamma}{dt}, V(t)\right) \frac{d\gamma}{dt}, V(t) \right\rangle}{\left| \frac{d\gamma}{dt} \wedge V(t) \right|^2}$$

como $\left| \frac{d\gamma}{dt} \wedge V(t) \right|^2 = \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^2 \|V(t)\|^2 - \left\langle V(t), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^2$ va a ser igual a 1 para todo $t \in [t_1, t_2]$ ya que γ es una geodésica. Juntamos esto con la ecuación anterior y nos queda que

$$\frac{1}{2}E''(0) = - \int_{t_1}^{t_2} K\left(\frac{d\gamma}{dt}, V(t)\right) dt,$$

y tenemos que la curvatura es positiva, entonces $\frac{1}{2}E''(0) < 0$, por lo que $\frac{dE}{ds}$ es estrictamente decreciente en una vecindad de cero. Esto muestra que existe una curva c en la variación tal que $E(c) < E(\gamma)$.

Sólo falta observar cómo se relaciona la longitud de arco con la energía de una curva. Si tomamos $h \equiv 1$ y $g = \left\| \frac{dc}{dt} \right\|$, entonces por la desigualdad de Schwarz se tiene que

$$\left(\int_{t_1}^{t_2} hg \, dt \right)^2 \leq \int_{t_1}^{t_2} h^2 dt \cdot \int_{t_1}^{t_2} g^2 dt,$$

con lo que obtenemos

$$(l(c))^2 \leq |t_2 - t_1|E(c),$$

y se da la igualdad cuando g es constante.

Entonces nos queda que $(l(c))^2 \leq |t_2 - t_1|E(c) < |t_2 - t_1|E(\gamma) = l(\gamma)^2$. Dado que γ es una geodésica que minimiza la distancia entre las dos subvariedades, obtenemos una contradicción por suponer que éstas eran ajenas. \square

Hay varias maneras de probar el teorema de Synge, pero nosotros seguiremos la prueba que se da en [16]. Para esto necesitamos la siguiente proposición que se puede probar de una manera muy parecida al teorema de Frankel.

Proposición 1.5.6. *Si M es una variedad riemanniana con dimensión par, orientable y con curvatura positiva, y γ una geodésica cerrada en M (inmersión del círculo), entonces γ es homotópica a una curva cerrada con longitud estrictamente menor que γ .*

La base de la demostración es la siguiente: usando que M es orientable y de dimensión par, se construye un campo sobre la curva γ que sea ortogonal a la derivada de γ en cada punto y esté bien definido, luego usamos que existe una variación propia en γ con el campo que construimos entonces usamos la fórmula para la segunda variación y como M tiene curvatura positiva se puede concluir lo que se quería. Esto lo usaremos para demostrar el teorema de Synge:

Teorema 1.5.7 (Synge). *Sea M una variedad riemanniana compacta de dimensión par, orientable, conexa y con curvatura seccional positiva, entonces M es simplemente conexo.*

Demostración. Por las observaciones que se hicieron antes, se tiene que M es conectable por trayectorias. Sólo falta ver que $\Pi_1(M) = \{e\}$, con cualquiera que sea el punto base. La idea es ver que cualquier lazo es homotópico a un lazo geodésico para usar la proposición anterior.

Vamos a denotar a d como la métrica riemanniana en M . Sea $[\gamma] \in \Pi_1(M)$ y $K \geq l(\gamma)$, observemos a la siguiente familia de funciones (lazos):

$$\mathcal{F} = \{ \alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow M \mid [\alpha] = [\gamma], \text{ están parametrizadas por longitud de arco y con } l(\alpha) \leq K \}.$$

Queremos usar Arzela-Ascoli, para esto hay que checar que \mathcal{F} cumple con las hipótesis:

- Sea $\varepsilon > 0$. Esta familia es equicontinua pues se tiene que para todo $\alpha \in \mathcal{F}$, si $d(s, s_0) \leq \varepsilon$, entonces

$$d(\alpha(s), \alpha(s_0)) \leq \int_{s_0}^s \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| dt = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| d(s, s_0) \leq \varepsilon$$

pues las curvas están parametrizadas por longitud de arco.

- Sea $\mathcal{F}_s = \{\alpha(s) \mid \alpha \in \mathcal{F}\}$, entonces se tiene que $\overline{\mathcal{F}_s}$ es compacto pues cualquier cerrado en un compacto lo es.

Ahora sea l el ínfimo de las longitudes de \mathcal{F} , existe pues está acotada por cero, y si $[\gamma] \neq [e]$ entonces $l > 0$. Vamos a usar Arzela-Ascoli para la sucesión $\alpha_i \in \mathcal{F}$ tal que $l(\alpha_i) = l_i$, con $l_i \rightarrow l$, entonces esta sucesión converge uniformemente a cierta curva α .

Primero veremos que $[\alpha] = [\gamma]$. Vamos a construir una sucesión de homotopías:

Como α_i converge uniformemente a α , sea $\varepsilon > 0$, entonces existe N tal que $d(\alpha_i(s), \alpha(s)) < \varepsilon$ para toda $i \geq N$. Podemos construir la siguiente sucesión: sea $\varepsilon_1 = \varepsilon$ y $\varepsilon_k = \max\{d(\alpha_{N+k-1}(s), \alpha_{N+k}(s)) \mid s \in \mathbb{S}^1\}$, y se tiene que ε_k tiende a cero.

Tenemos una homotopía $\overline{H} : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\overline{H}(s, 1) = \alpha_N(s)$ y $\overline{H}(s, 0) = \alpha_{N+1}(s)$. Vamos a hacerle dos modificaciones a la homotopía, la primera es $\widehat{H} : \mathbb{S}^1 \times \left[\frac{1}{N+1}, 1\right] \rightarrow M$ dada por $\widehat{H}(s, t) = \overline{H}(s, \frac{(N+1)t}{N} - \frac{1}{N})$. Luego tomamos una vecindad tubular cerrada U_1 de α_{N+1} con radio ε_1 , queremos una homotopía de α_N y α_{N+1} que se quede contenida en U_1 . Si la imagen de \widehat{H} no está contenida en U_1 entonces $\widehat{H}(\mathbb{S}^1 \times \left[\frac{1}{N+1}, 1\right]) \cap \partial U_1 \neq \emptyset$ por lo que hay lazos que se salen de la vecindad, supongamos que uno de ellos es en $t_0 \in \left[\frac{1}{N+1}, 1\right]$ entonces existen $s_1, s_2 \in \mathbb{S}^1$ tal que $\widehat{H}(s_1, t_0), \widehat{H}(s_2, t_0) \in \partial U_1$ y $\widehat{H}((s_1, s_2), t_0) \cap \partial U_1 = \emptyset$. Como ∂U_1 es un cerrado conectable por trayectorias, tenemos que existe una trayectoria que minimiza la longitud de arco en ∂U_1 que une a $\widehat{H}(s_1, t_0)$ con $\widehat{H}(s_2, t_0)$, digamos σ_{t_0} , y definimos el nuevo lazo: sea

$$\widehat{H}'(s, t_0) = \begin{cases} \widehat{H}(s, t_0) & \text{si } s \in \mathbb{S}^1 \setminus (s_1, s_2) \\ \sigma_{t_0}(s) & \text{si } s \in [s_1, s_2]. \end{cases}$$

Así para cada lazo que se salga de la vecindad U_1 . De esta manera construimos una nueva homotopía continua contenida en U_1 .

Ahora sí, tenemos la siguiente sucesión de homotopías: Sea

$$H_1 : \mathbb{S}^1 \times \left[\frac{1}{N+1}, 1 \right] \rightarrow M$$

la homotopía entre α_N y α_{N+1} con $H_1 \left(\mathbb{S}^1 \times \left[\frac{1}{N+1}, 1 \right] \right) \subseteq U_1$. Sea

$\widehat{H}_2 : \mathbb{S}^1 \times \left[\frac{1}{N+2}, \frac{1}{N+1} \right] \rightarrow M$ con $\widehat{H}_2(s, \frac{1}{N+1}) = \alpha_{N+1}(s)$, $\widehat{H}_2(s, \frac{1}{N+2}) = \alpha_{N+2}(s)$ y con $\widehat{H}_2 \left(\mathbb{S}^1 \times \left[\frac{1}{N+2}, \frac{1}{N+1} \right] \right) \subseteq U_2$, donde U_2 es la vecindad tubular cerrada de α_{N+2} con radio ε_2 ; y definimos la siguiente homotopía $H_2 : \mathbb{S}^1 \times \left[\frac{1}{N+2}, 1 \right] \rightarrow M$ como sigue

$$H_2(s, t) = \begin{cases} H_1(s, t) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{N+1}, 1 \right] \\ \widehat{H}_2(s, t) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{N+2}, \frac{1}{N+1} \right]. \end{cases}$$

Entonces sea $H_k : \mathbb{S}^1 \times \left[\frac{1}{N+k}, 1 \right] \rightarrow M$ con

$$H_k(s, t) = \begin{cases} H_{k-1}(s, t) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{N+k-1}, 1 \right] \\ \widehat{H}_k(s, t) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{N+k}, \frac{1}{N+k-1} \right] \end{cases}$$

donde $\widehat{H}_k : \mathbb{S}^1 \times \left[\frac{1}{N+k}, \frac{1}{N+k-1} \right] \rightarrow M$ una homotopía tal que $\widehat{H}_k(s, \frac{1}{N+k-1}) = \alpha_{N+k-1}(s)$, $\widehat{H}_k(s, \frac{1}{N+k}) = \alpha_{N+k}(s)$ y su imagen está contenida en la vecindad tubular U_k de α_{N+k} con radio ε_k .

Esta sucesión de homotopías H_k va a converger a H , donde $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ con $H(s, 0) = \alpha(s)$ pues el radio de las vecindades tubulares tiende a cero por lo que no me genera más puntos. Se puede ver que H es continua ya que tenemos que la familia de lazos \mathcal{F} es equicontinua y por como estuvimos acotando a las homotopías. Por lo tanto α_N es homotópica a α , es decir $[\alpha] = [\gamma]$.

Ahora vamos a ver que α es diferenciable y geodésica. Se puede hacer por contradicción ya que si no es diferenciable ó geodésica, entonces en una vecindad fuertemente convexa (para cualesquiera dos puntos en la cerradura de la vecindad se tiene una geodésica que une a los dos puntos, cuyo interior se queda contenido en la vecindad) de los puntos en donde α no es diferenciable o geodésica podemos construir una nueva curva

homotópica a α pero con longitud de arco menor estricto al de α , lo que contradice el hecho de que $l(\alpha_i) \rightarrow l$. Por lo que α es una geodésica.

Por lo anterior tiene sentido pensar que $l(\alpha) = l$, y esto es cierto pues hacemos una partición de \mathbb{S}^1 con intervalos $[s_i, t_i]$ tal que sólo se traslapen en los puntos finales y tenemos que:

$$l(\alpha_k) \geq \sum l(\alpha_k|_{[s_i, t_i]}) \geq \sum d(\alpha_k(s_i), \alpha_k(t_i))$$

y al hacer tender k a infinito nos queda:

$$l \geq \sum d(\alpha(s_i), \alpha(t_i)) = l(\alpha)$$

pues $l(\alpha_k) \rightarrow l$ y α es geodésica. Como l es el ínfimo de las longitudes de \mathcal{F} , se tiene $l(\alpha) \geq l$. Por lo tanto $l(\alpha) = l$.

Tenemos que α es una geodésica cerrada con $l(\alpha) = l$, entonces α necesariamente tiene que ser la curva constante, ya que si no podemos usar la proposición 1.5.6 antes mencionada por lo que α es homotópica a una curva cerrada (lazo) con longitud de arco estrictamente menor que α y llegaríamos a una contradicción. Entonces $[\gamma] = [e]$, por lo tanto $\Pi_1(M) = \{e\}$. \square

Ahora sólo nos falta ver el teorema de Toponogov, el cual nos da una manera de comparar a las variedades completas con los espacios de curvatura constante. Pero primero necesitamos introducir un poco de notación: Denotaremos a un triángulo geodésico en una variedad riemanniana como $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ donde γ_i son los segmentos geodésicos parametrizados por longitud de arco con longitudes l_1, l_2, l_3 , y a sus ángulos interiores $\alpha_i = \angle(-\gamma'_{i+1}(l_{i+1}), \gamma'_{i+2}(0))$ (con el índice modulo 3).

Teorema 1.5.8 (Toponogov). *Sea M una variedad completa con curvatura seccional $K \geq c$. Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ un triángulo geodésico en M . Supongamos que γ_1, γ_3 son mínimas y si $c > 0$, supongamos que $l(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}$. Entonces en $M(c)$, el espacio 2-dimensional simplemente conexo y con curvatura constante c , existe un triángulo geodésico $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3)$ tal que $l(\gamma_i) = l(\hat{\gamma}_i)$ y $\hat{\alpha}_1 \leq \alpha_1, \hat{\alpha}_3 \leq \alpha_3$. Sólo en el caso en que $c > 0$ y $l(\gamma_i) = \frac{\pi}{\sqrt{c}}$ para alguna i , el triángulo está únicamente determinado.*

El lector puede ver la demostración en [4].

Capítulo 2

\mathbb{S}^1 -Variedades riemannianas

Una \mathbb{S}^1 -variedad riemanniana M es una variedad riemanniana con una acción isométrica no trivial de \mathbb{S}^1 , la cual vamos a seguir denotando como $\theta : \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$. En este capítulo vamos a estudiar el conjunto de los puntos fijos de θ y algunas propiedades de la geometría del espacio orbital de la \mathbb{S}^1 -variedad riemanniana, sobre todo cuando ésta tenga dimensión cuatro.

2.1. El conjunto de los puntos fijos

Recordemos que el propósito de este trabajo es demostrar el teorema de Hsiang y Kleiner, el cual nos dice que si M es una \mathbb{S}^1 -variedad riemanniana de dimensión 4 compacta, orientable, y con curvatura positiva, entonces M es homeomorfa a \mathbb{S}^4 o $\mathbb{C}P^2$. Gracias a un resultado de Freedman, basta con calcular la característica de Euler de M para la prueba de este teorema. Pero, como veremos a continuación, la característica de Euler de M es igual a la característica de Euler del conjunto de los puntos fijos de la acción θ , por lo que vamos a estudiar este conjunto.

Proposición 2.1.1. *Sea M una \mathbb{S}^1 -variedad riemanniana compacta, y sea F el conjunto de los puntos fijos, es decir,*

$$F = \{p \in M \mid gp = p \ \forall g \in \mathbb{S}^1\}.$$

Entonces:

1. *La característica de Euler de F es igual a la característica de Euler de M .*

2. Cada componente conexa de F es una subvariedad totalmente geodésica con codimensión par.

Antes de probar la proposición veremos un lema que nos ayudará en la prueba.

Lema 2.1.2. Consideremos una sucesión exacta de espacios vectoriales:

$$0 \rightarrow A_k \rightarrow B_k \rightarrow C_k \rightarrow A_{k-1} \rightarrow B_{k-1} \rightarrow C_{k-1} \rightarrow \dots$$

entonces

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \dim A_i - \sum_{i=1}^k (-1)^i \dim B_i + \sum_{i=1}^k (-1)^i \dim C_i = 0$$

Demostración. La demostración será por inducción sobre k . Para $k = 1$, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{g_1} C_1 \rightarrow 0$$

como C_1 es un espacio vectorial se tiene que es libre, por lo que la sucesión se escinde, es decir, $\exists \hat{g}_1 : C_1 \rightarrow B_1$ tal que $g_1 \circ \hat{g}_1 = Id_{C_1}$, entonces

$$B_1 = \text{im } \hat{g}_1 \oplus \ker g_1.$$

Como $\text{im } f_1 = \ker g_1$, y tanto f_1 como \hat{g}_1 son inyectivas, tenemos que $\dim \ker g_1 = \dim A_1$ y $\dim \text{im } \hat{g}_1 = \dim C_1$, por lo tanto

$$\dim B_1 = \dim C_1 + \dim A_1.$$

Ahora suponemos cierto el resultado para $k - 1$ y lo demostraremos para k . Tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow A_k \xrightarrow{f_k} B_k \xrightarrow{g_k} C_k \xrightarrow{h_k} A_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} B_{k-1} \xrightarrow{g_{k-1}} \dots$$

Esta sucesión la vamos a descomponer en cuatro sucesiones exactas, de la siguiente manera:

$$0 \rightarrow A_k \xrightarrow{f_k} B_k \xrightarrow{g_k} \text{im } g_k \rightarrow 0 \quad \textcircled{1}$$

$$0 \rightarrow \text{im } g_k \xrightarrow{h_k} C_k \xrightarrow{h_k} \text{im } h_k \rightarrow 0 \quad \textcircled{2}$$

$$0 \rightarrow \text{im } h_k \xrightarrow{f_{k-1}} A_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} \text{im } f_{k-1} \rightarrow 0 \quad \textcircled{3}$$

$$0 \rightarrow \text{im } f_{k-1} \xrightarrow{g_{k-1}} B_{k-1} \xrightarrow{g_{k-1}} C_{k-1} \rightarrow \dots \quad \textcircled{4}$$

Como ya tenemos que el lema es cierto para sucesiones exactas cortas entonces se lo podemos aplicar a ①, ② y a ③, y por hipótesis de inducción también se lo podemos aplicar a ④ y nos queda:

$$\begin{aligned} (-1)^k \dim A_k - (-1)^k \dim B_k + (-1)^k \dim \operatorname{im} g_k &= 0 \\ -(-1)^k \dim \operatorname{im} g_k + (-1)^k \dim C_k - (-1)^k \dim \operatorname{im} h_k &= 0 \\ -(-1)^{k-1} \dim \operatorname{im} h_k + (-1)^{k-1} \dim A_{k-1} - (-1)^{k-1} \dim \operatorname{im} f_{k-1} &= 0 \\ (-1)^{k-1} \dim \operatorname{im} f_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-2} (-1)^i \dim A_i - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (\dim B_i - \dim C_i) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando las cuatro ecuaciones se cancelan los términos adicionales, por lo que:

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \dim A_i - \sum_{i=1}^k (-1)^i \dim B_i + \sum_{i=1}^k (-1)^i \dim C_i = 0,$$

lo cual concluye la demostración. \square

Ahora podemos demostrar la primera parte de la proposición 2.1.1:

Demostración. Tenemos $F = \cup_{i \in \Lambda} Y_i$ con cada Y_i componente conexa de F . Observamos que F es un conjunto cerrado al igual que cada Y_i (por la observación 1.1.6), con $i \in \Lambda$. Además las componentes son ajenas dos a dos y Λ es finito por la observación 1.1.7. Ahora vamos a tomarnos vecindades tubulares cerradas N'_i de cada Y_i , con $\varepsilon_i > 0$, en M , de tal manera que $N'_i \cap N'_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y sea $N_i \subset N'_i$ otra vecindad tubular cerrada pero tomándonos $\frac{\varepsilon_i}{2} > 0$ con $i \in \Lambda$, para que $\overline{N_i} \subset N'_i$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$N' = \cup_{i \in \Lambda} N'_i, \quad N = \cup_{i \in \Lambda} N_i, \quad K' = \overline{M \setminus N'}, \quad K = \overline{M \setminus N},$$

donde $N' \cap K' = \partial N'$ es la frontera de N' y $N \cap K = \partial N$ es la frontera de N .

Primero vamos a demostrar que

$$\chi(M) = \chi(N) + \chi(K) - \chi(\partial N).$$

Consideremos la sucesión exacta de homología de la pareja M y K , con $K \subseteq M$, que denotaremos como (M, K) para tomar la homología relativa. Ésta sucesión está inducida por:

$$K \rightarrow M \rightarrow (M, K)$$

donde las dos son inclusiones, entonces tenemos

$$H_q(K) \rightarrow H_q(M) \rightarrow H_q(M, K) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(K) \rightarrow \dots$$

y

$$\sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim H_q(K) - \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim H_q(M) + \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim H_q(M, K) = 0.$$

Por el lema 2.1.2, es decir $\chi(K) - \chi(M) + \chi(M, K) = 0$. Análogamente lo hacemos para la pareja $(N, \partial N)$ y nos queda: $\chi(\partial N) - \chi(N) + \chi(N, \partial N) = 0$.

Ahora para demostrar que $\chi(M, K) = \chi(N, \partial N)$ observemos que N es retracto por deformación de N' , por lo cual tomando a $V = K' \setminus \partial N'$ y $U = K \setminus \partial N$ tenemos que $(M \setminus U, K \setminus U) = (N, \partial N)$ es un retracto por deformación de $(M \setminus V, K \setminus V) = (N', K \setminus V)$. Como \bar{V} está contenido en el interior de K utilizamos el teorema de escisión, por lo que V se puede escindir con respecto a la pareja (M, K) . También tenemos que U se puede escindir, es decir, la inclusión $(M \setminus U, K \setminus U) = (N, \partial N) \hookrightarrow (M, K)$ induce isomorfismo en homología. Por lo tanto $\chi(N, \partial N) = \chi(M, K)$ y nos queda la igualdad que se quería.

Dado que la acción de \mathbb{S}^1 es isométrica y no hay puntos fijos en K y ∂N , tenemos algún $s \in \mathbb{S}^1$ distinto de la identidad con la propiedad de que $\theta_s : M \rightarrow M$ no tiene puntos fijos en K y ∂N . Por ésta razón usaremos el teorema de Lefschetz, que nos dice que para cualquier variedad compacta X con una función diferenciable $f : X \rightarrow X$ sin puntos fijos entonces $L(f) = 0$, donde $L(f)$ es el número de Lefschetz de f . Por lo que tenemos que $L(\theta_s|_K) = 0 = L(\theta_s|_{\partial N})$ y como $\theta_s|_K \simeq Id_K$ (proposición 1.1.12) entonces $L(\theta_s|_K) = L(Id_K) = \chi(K)$, igual para ∂N , por lo tanto $\chi(K) = 0 = \chi(\partial N)$.

Así de la igualdad anterior nos queda $\chi(M) = \chi(N)$. Pero como F es un retracto por deformación de N entonces $\chi(F) = \chi(N)$, y finalmente obtenemos $\chi(M) = \chi(F)$. \square

Para la segunda parte de la proposición 2.1.1 usaremos las distribuciones y la función exponencial.

Demostración. Sea Y una componente conexa de F , vamos a ver que es una subvariedad de M :

Primero observemos que Y es cerrado. Como F es cerrado (ya que es el conjunto de los puntos fijos) entonces $\bar{Y} \subset F$ y como Y es una componente conexa de F entonces $\bar{Y} = Y$.

Sea $y \in Y$, nos fijamos en $d\theta_{s_y} : T_y M \rightarrow T_y M$ para cada $s \in \mathbb{S}^1$ la cual es una transformación lineal que preserva la distancia. Sea

$$S_y = \{v \in T_y M \mid d\theta_{s_y}(v) = v \ \forall s \in \mathbb{S}^1\},$$

se tiene que $S_y < T_y M$ pues cada $d\theta_{s_y}$ es una transformación lineal. Veremos que esto define una distribución que satisface las hipótesis del teorema de Frobenius.

- Primero veremos que la $\dim S_y$ es la misma para cada $y \in Y$:

Sea $r = \max\{\dim S_y \mid y \in Y\} \leq n$, con $n = \dim M$. Entonces vamos a fijarnos en los siguientes conjuntos:

$$A = \{y \in Y \mid \dim S_y = r\} \neq \emptyset, \quad B = \{y \in Y \mid \dim S_y < r\}.$$

Claramente $Y = A \cup B$. Vamos a ver que $B = \emptyset$, para esto afirmamos que A es cerrado:

Sea y un punto de acumulación de A , dado que Y es cerrado entonces $y \in Y$. Sea $U = \exp_y(B_\varepsilon(0))$ una vecindad normal de y , con $\exp_y : B_\varepsilon(0) \subset T_y M \rightarrow M$ la función exponencial definida en una bola abierta de radio ε y centro en el cero. Como y es un punto de acumulación de A , existe $a \in U$, con $a \in A$, y $\alpha : I \rightarrow M$ una geodésica que une a y con a . Sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base ortonormal de S_y . Vamos a tomarnos el transporte paralelo V_i sobre α tal que $V_i(y) = v_i$ con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ pero para la subvariedad $N := \exp_y(S_y \cap B_\varepsilon(0))$.

Afirmamos que $N \subseteq Y$, pues sea $x \in N$ entonces existe una geodésica $\beta : I \rightarrow N$ que une a x con y y $\beta'(0) \in S_y$ con $\beta(0) = y$, y como $s \circ \beta$ también es geodésica tal que $s \circ \beta'(0) = \beta'(0)$, para cualquier $s \in \mathbb{S}^1$, entonces $s \circ \beta(t) = \beta(t)$ por lo que $s(x) = x \ \forall s \in \mathbb{S}^1$, es decir, $x \in Y$.

Entonces $T_a N \subseteq S_a$ por lo tanto $V_i(a) \in S_a$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Dado que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es un base ortonormal, tenemos que $\{V_1(a), \dots, V_k(a)\}$ es una base ortonormal de $T_a N$.

Si $k < r$, entonces existe $u \in S_a$ tal que $u \notin T_a N$ y normal a $v_1(a), \dots, v_k(a)$. Sea $\gamma : I \rightarrow U$ con $\gamma(0) = a$ y $\gamma'(0) = u$, como $u \notin T_a N$ existe \hat{t} tal que

$\gamma(\hat{t}) \in Y \cap U \setminus N$ por lo que hay una geodésica ι que une a $\gamma(\hat{t})$ con y tal que $\iota'(0) \notin S_y$ ($\iota(0) = y$), pero sabemos que una geodésica contenida en U y que pasa por dos puntos es única, por lo que $s \circ \iota(t) = \iota(t)$ pues $s \circ \iota(0) = y$ y $s \circ \iota(t_1) = s \circ \gamma(\hat{t}) = \gamma(\hat{t})$ para toda $s \in \mathbb{S}^1$. Por lo que $\iota'(0) \in S_y$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $k = r$, es decir A es cerrado.

Ahora como Y es conexo entonces existe $x \in A \cap \bar{B}$ con $\dim S_x = r$, dado que puedo encontrar un $b \in B$ muy cercano a x con $\dim S_b < r$ utilizamos la vecindad normal en b y un marco parecido al anterior sobre la geodésica que une a b con x . Análogamente, vamos a poder encontrar un punto $\hat{x} \in A$ tal que la geodésica que une a \hat{x} con b cumple con que su derivada no está en S_b , pero como $\hat{x}, b \in Y$ y la geodésica que los une está contenida en la vecindad normal de b entonces la derivada debe estar en S_b , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $B = \emptyset$, lo que quiere decir que la $\dim S_y = r$ para todo $y \in Y$.

- La distribución es suave.

Consideramos de nuevo $U = \exp_y(B_\varepsilon(0))$ vecindad de $y \in Y$. Vamos a definir los campos vectoriales necesarios para mostrar la suavidad de la distribución. Sea $x \in Y \cap U$, entonces tenemos una geodésica que une a y con x y como vimos antes escogemos una base ortonormal de S_y , tomamos el transporte paralelo sobre la geodésica en la subvariedad $\exp_y(B_\varepsilon(0) \cap S_y)$ de la base de S_y , y esto nos va a dar una base ortonormal en S_x ; y así definimos los campos vectoriales para cada $x \in Y \cap U$ con la propiedad que se quería.

- La distribución es involutiva.

Sean X_1 y X_2 dos campos vectoriales en M tal que $X_1(y), X_2(y) \in S_y$ para todo $y \in Y$ vamos a ver que $[X_1, X_2](y) \in S_y$.

Para una representación local (x_1, \dots, x_n) , en algún $y \in Y$, tenemos que:

$$X_1 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad X_2 = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j};$$

y entonces

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1 = \sum_{i,j} (a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Evaluando en cualquier $x \in Y$ en la vecindad de y y al aplicar $d\theta_{s_x}$ con $s \in \mathbb{S}^1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
& d\theta_{s_x} \left(\sum_{i,j} a_i(x) \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} - b_i(x) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= d\theta_{s_x} \left(\sum_{i,j} a_i(x) \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(x) \frac{a_j(x)}{a_j(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - d\theta_{s_x} \left(\sum_{i,j} b_i(x) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) \frac{b_j(x)}{b_j(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i,j} \frac{a_i(x)}{a_j(x)} \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(x) d\theta_{s_x} \left(a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_{i,j} \frac{b_i(x)}{b_j(x)} \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) d\theta_{s_x} \left(b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i,j} \frac{a_i(x)}{a_j(x)} \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(x) a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i,j} \frac{b_i(x)}{b_j(x)} \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j} a_i(x) \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} - b_i(x) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Como $d\theta_{s_x}$ es lineal y $X_1(x), X_2(x) \in S_x$, tenemos que $[X_1, X_2](x) \in S_x$.

Por lo que tenemos una distribución suave e involutiva en Y y por el teorema de Frobenius (teorema 1.2.5) existe una subvariedad de M con el espacio tangente igual a S_y , pero por la definición de la distribución se tiene que Y es la subvariedad.

Ahora veremos que es totalmente geodésica, pero esto se tiene ya que: sea $v \in T_y Y$ y sea $\alpha : I \rightarrow M$ una geodésica, es decir $\frac{d}{dt} \langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \rangle = 0$, con $\alpha(0) = y$ y $\alpha'(0) = v$. Sea $s \in \mathbb{S}^1$ tenemos que $\theta_s \circ \alpha(0) = y$ y $\frac{d}{dt} \langle \frac{d\theta_s \circ \alpha}{dt}, \frac{d\theta_s \circ \alpha}{dt} \rangle = 0$, pues $\langle \frac{d\theta_s \circ \alpha}{dt}, \frac{d\theta_s \circ \alpha}{dt} \rangle = \langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \rangle$ por ser θ_s isometría, entonces $\theta_s \circ \alpha$ es una geodésica y como $d\theta_{s_y}(v) = v$ pues $v \in T_y Y$, por lo que tenemos dos geodésicas con la misma velocidad por lo tanto $\theta_s \circ \alpha(t) = \alpha(t)$, es decir, $\alpha(I) \subseteq Y$.

Sólo falta ver que Y tiene codimensión par. Sea $y \in Y$, observemos que la acción de \mathbb{S}^1 en M induce una isometría en el espacio tangente $T_y M$. Esta isometría se puede representar mediante una matriz ortogonal $n \times n$ ($n = \dim M$), que a su vez tiene una forma con r submatrices de rotación y una matriz identidad $n - 2r$ al final.

Al aplicar la isometría a los vectores tangentes, tenemos que ésta fija cada uno de los vectores en un subespacio de dimensión $n - 2r$. Ahora al

pasar a la variedad tomando una vecindad normal U de y que no interseca a otras componentes conexas de F y es difeomorfa a $B_\varepsilon(0) \subseteq T_y M$ con la función exponencial, se tiene que el conjunto de vectores fijos contenidos en $B_\varepsilon(0)$ se transforma precisamente en el conjunto de puntos fijos de la acción en U . Esto significa que el conjunto $Y \cap U$ forma una variedad de dimensión $n - 2r$, de modo que su codimensión es $n - (n - 2r) = 2r$, par. \square

Desde ahora vamos a considerar, sin más especificaciones, que (\mathbb{S}^1, M, g) es una 4-variedad orientable, compacta, con curvatura positiva, con una acción efectiva de \mathbb{S}^1 y g tensor métrico. Con esto podemos decir cómo se ve el conjunto de puntos fijos:

Proposición 2.1.3. *Sea (\mathbb{S}^1, M, g) como arriba y sea F el conjunto de los puntos fijos. Entonces F no es vacío y,*

$$F = \begin{cases} \chi(M) \text{ puntos aislados} \\ \text{ó} \\ \mathbb{S}^2 \cup \{(\chi(M) - 2) \text{ puntos aislados}\}. \end{cases}$$

Demostración. Por el teorema de Synge (teorema 1.5.7) tenemos que M es simplemente conexa, entonces $\Pi_1(M, p) = \{e\}$ pero como M es conexo por trayectorias se tiene que $\Pi_1(M, p) \cong H_1(M)$ (Hurewicz).

Por el teorema de dualidad se tiene que $H_1(M) \cong H_3(M)$, es decir, $\dim H_1(M) = 0 = \dim H_3(M)$.

También tenemos que $H_0(M) \cong H_4(M)$, y $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$ pues M es conexo por trayectorias, es decir $\dim H_0(M) = 1 = \dim H_4(M)$.

Por lo que tenemos que $\chi(M) = 2 + \dim H_2(M) \geq 2$, y por la parte uno de la proposición 2.1.1, $\chi(M) = \chi(F) \geq 2$ entonces $F \neq \emptyset$.

Sea Y una componente conexa de F , por la afirmación sobre la codimensión en la segunda parte de la proposición 2.1.1 tenemos que $\dim Y = 0$ ó $\dim Y = 2$:

- Si cada componente conexa Y_i de F tiene dimensión cero entonces tenemos un total de $\chi(M) = \chi(F)$ puntos aislados pues

$$H_k(F) = H_k\left(\coprod_i Y_i\right) \cong \oplus_i H_k(Y_i)$$

y

$$H_i(\{pt\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases} .$$

- Si existe alguna componente conexa Y tal que $\dim Y = 2$. Supongamos que existe Y' otra componente conexa de F de dimensión dos, entonces tenemos dos subvariedades totalmente geodésicas de M con $\dim Y + \dim Y' = 4$ y por el teorema de Frankel (teorema 1.5.5) tenemos que $Y \cap Y' \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo que sólo puede existir una componente conexa de dimensión dos.

Ahora si F tiene una componente conexa Y de dimensión dos, veremos que $Y \cong \mathbb{S}^2$. Como Y es una subvariedad totalmente geodésica entonces tiene curvatura positiva también y por el teorema de Gauss-Bonnet se tiene

$$\iint_Y k dA = 2\pi\chi(Y),$$

entonces $\chi(Y) > 0$.

Vamos a utilizar la clasificación de superficies compactas orientables y conexas, sólo falta notar que la acción de \mathbb{S}^1 me induce una orientación en Y en TY^\perp por lo que Y es orientable. Sabemos que la esfera es la única superficie conexa, orientable, compacta y con $\chi(\mathbb{S}^2) > 0$ salvo homeomorfismos, entonces $Y \cong \mathbb{S}^2$.

Como $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ entonces $\chi(Y) = 2$, por lo que F tiene que ser homeomorfa a $\mathbb{S}^2 \cup (\chi(M) - 2 \text{ puntos aislados})$. \square

2.2. Geometría del espacio orbital

Tenemos nuestra \mathbb{S}^1 -variedad riemanniana M . Ahora consideremos la geometría del espacio orbital $\bar{M} = M/\mathbb{S}^1$, al cual lo vamos a equipar con la distancia orbital. Nos vamos a fijar en el conjunto de \mathbb{S}^1 -órbitas principales en M y le llamaremos M_0 , también definimos a $\pi(M_0) = \bar{M}_0$, donde $\pi : M \rightarrow M/\mathbb{S}^1$ es la proyección orbital. Ya sabemos por la sección 1.4 que le podemos dar una estructura suave a \bar{M}_0 tal que $\pi : M_0 \rightarrow \bar{M}_0$ es una sumersión, de hecho también le podemos dar una métrica riemanniana \bar{g} a \bar{M}_0 haciendo que $\pi : (M_0, g) \rightarrow (\bar{M}_0, \bar{g})$ sea una sumersión riemanniana.

Observación. Si el conjunto de puntos fijos tiene una componente conexa Y de dimensión dos, entonces existe una vecindad U de $y \in Y$ tal que el grupo de isotropía de cada punto en $U \setminus Y$ es trivial. Esto se puede mostrar como sigue: Sea $U = \exp_y(B_\varepsilon(0))$ una vecindad que no contenga puntos fijos aislados, sea $x \in U \setminus Y$ y $r \in \mathbb{S}_x^1$, nos fijamos en la acción isométrica inducida de \mathbb{S}^1 en $T_y M$ y como tenemos una geodésica que une a x y y entonces su velocidad $v \in T_y M$ lo fija r también. Ahora sea $w \in T_y M \setminus T_y Y$, como $T_y Y$ son los puntos fijos de dimensión dos entonces w sólo le queda una dirección para poder moverse de tal manera que la acción sea isométrica pero al tomar en cuenta que r fija a v nos queda que r debe fijar a w , es decir, r fija a todo U el cual es abierto y como la acción es isométrica entonces r fija a todo M , pero sabemos que el único que hace esto es el idéntico, por lo tanto $\mathbb{S}_x^1 = \{e\}$ para todo $x \in U \setminus Y$.

Proposición 2.2.1. *Supongamos que el conjunto de puntos fijos F es de la forma $\mathbb{S}^2 \cup \{\text{puntos aislados}\}$. Sea $\overline{\mathbb{S}^2} = \pi(\mathbb{S}^2) \subset \overline{M}$, entonces la estructura riemanniana $(\overline{M}_0, \overline{g})$ se extiende a una estructura riemanniana en $N = \overline{M}_0 \cup \overline{\mathbb{S}^2}$ con una frontera totalmente geodésica $\overline{\mathbb{S}^2}$. La distancia en N inducida por esta estructura riemanniana coincide con la restricción de la distancia orbital en \overline{M} a $N \subseteq \overline{M}$.*

Demostración. La geometría local de \overline{M} cerca de $\pi(y) \in \overline{\mathbb{S}^2}$ está determinada por la geometría de la representación local en $y \in \mathbb{S}^2$. Como cerca de y los grupos de isotropía son triviales, esta representación es equivalente a

$$\phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2; e^{i\theta}(z_1, z_2) = (z_1, e^{i\theta}z_2),$$

donde $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Entonces la estructura local de \overline{M} en $\pi(y)$ es de la forma

$$\mathbb{C}^2/\mathbb{S}^1 \approx \mathbb{C} \times (\mathbb{C}/\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+.$$

Esto quiere decir que $N = \overline{M}_0 \cup \overline{\mathbb{S}^2}$ tiene estructura diferenciable pero con frontera en $\overline{\mathbb{S}^2}$. También se extiende la estructura riemanniana en la frontera.

Las geodésicas en N son las proyecciones de las geodésicas en M que son perpendiculares a las órbitas y como \mathbb{S}^2 es totalmente geodésica tenemos que $\overline{\mathbb{S}^2}$ es totalmente geodésica en \overline{M} .

La distancia inducida en N por la estructura riemanniana coincide con la distancia orbital en el subconjunto denso \overline{M}_0 , por la observación anterior, entonces coincide con la distancia orbital en todo N . \square

Sea $y \in M$ un punto fijo aislado. La representación de la acción en y es equivalente a

$$\phi_{k,l} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2; e^{i\theta}(z_1, z_2) = (e^{ik\theta}z_1, e^{il\theta}z_2),$$

donde $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $k, l \in \mathbb{Z}$ con $(k, l) = 1$.

Sea $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ la esfera unitaria y sea $d : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función distancia que a cada pareja $v, w \in \mathbb{S}^3$ le asocia $\angle(v, w)$, el ángulo entre v y w . Sea $(X_{k,l}, d_{k,l})$ el espacio orbital de $(\phi_{k,l}, \mathbb{S}^3, d)$ con la distancia orbital $d_{k,l}$.

Proposición 2.2.2. *Si $[z_1], [z_2], [z_3]$ son puntos arbitrarios en $X_{k,l}$, entonces*

$$d_{k,l}([z_1], [z_2]) + d_{k,l}([z_2], [z_3]) + d_{k,l}([z_1], [z_3]) \leq \pi.$$

Demostración. Primero veremos qué ocurre en el caso $k = l = 1$. Sean

$$z = (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4), \hat{z} = (\hat{x}_1 + i\hat{x}_2, \hat{x}_3 + i\hat{x}_4) \in \mathbb{S}^3.$$

Afirmamos que $d_{1,1}([z], [\hat{z}]) \leq \pi/2$. Sabemos que $d(z, \hat{z})$ es el ángulo entre ellos, dado por $\cos \theta = \langle z, \hat{z} \rangle / (\|z\| \cdot \|\hat{z}\|)$. Si $\langle z, \hat{z} \rangle \geq 0$, nuestra afirmación es cierta. Si $\langle z, \hat{z} \rangle < 0$, entonces $e^{i\pi}z = (-x_1 - ix_2, -x_3 - ix_4)$ por lo que $\langle e^{i\pi}z, \hat{z} \rangle > 0$. Por lo tanto $d_{1,1}([z], [\hat{z}]) \leq \pi/2$.

Ahora tenemos que $\phi_{1,1}(e^{i\theta}, (z_1, z_2)) = (e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$ y recordando la definición de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, es fácil ver que $X_{1,1}$ es isométrico a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ con diámetro $\pi/2$. Sabemos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es isométrico a la esfera, por lo que vamos a tener que $X_{1,1}$ es isométrico a la esfera de radio $1/2$; y en el caso de la esfera de radio $1/2$ se tiene que para cualesquiera tres puntos que forman un triángulo, su perímetro va a ser menor o igual al perímetro del "triángulo" formado por alguna circunferencia máxima de la esfera, cuya longitud es π (pues el radio es $1/2$). Por lo que para el caso $k = l = 1$ se tiene el resultado.

Para el caso en que $k \neq 1$ y $(k, l) = 1$, vamos a comparar el espacio $X_{1,1}$ con $X_{k,l}$. Primero notemos que el conjunto de órbitas principales de $X_{k,l}$ es $\tilde{X}_{k,l} = X_{k,l} \setminus \{(z, 0), (0, z)\}$ ya que el grupo de isotropía de $(z, 0)$ y $(0, z)$ es distinto del trivial. Entonces vamos a estudiar los puntos de \mathbb{S}^3 quitando los círculos máximos dados por $z_1 = 0$ y $z_2 = 0$, que se ven de la forma $((\cos c)e^{i\theta}, (\sin c)e^{i\theta'})$, con $\cos c \neq 0 \neq \sin c$. Fijando c tenemos un toro $T^2(c)$.

En cada toro tenemos que las órbitas de $\phi_{1,1}$ son rectas de pendiente uno (ver figura 2.1) y las órbitas de $\phi_{k,l}$ son rectas con pendiente l/k (ver figura 2.1), por lo que intuitivamente las órbitas de $\phi_{k,l}$ están más "juntas" que las órbitas de $\phi_{1,1}$.

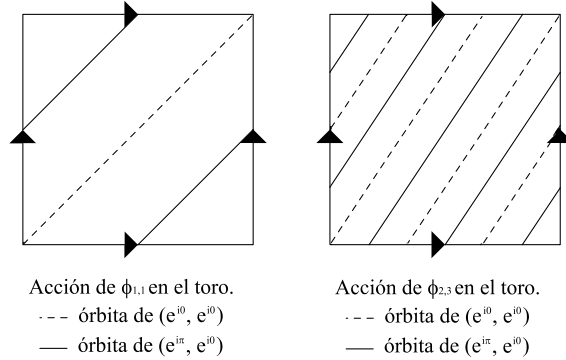


Figura 2.1: Órbitas.

Vamos a definir una función del espacio orbital $\widetilde{T}_{1,1}$ de la acción $\phi_{1,1}$ en el toro, al espacio orbital $\widetilde{T}_{k,l}$ de la acción $\phi_{k,l}$ en el toro como sigue:

$$\mu : \widetilde{T}_{1,1} \rightarrow \widetilde{T}_{k,l}, \quad \mu[(e^{i\theta}, e^{i\theta'})] = [(e^{i\theta}, e^{i(\frac{\theta' - \theta}{k})})],$$

que es multiplicar $e^{-i\theta}(e^{i\theta}, e^{i\theta'})$ dado que me queda la misma órbita y con $e^{i\theta}$ en la primera entrada y después dividir entre k . μ esta bien definida, es continua y es suprayectiva.

También es claro que

$$d(\mu[(e^{i\theta}, e^{i\theta'})], \mu[(e^{i\rho}, e^{i\rho'})]) \leq d([(e^{i\theta}, e^{i\theta'})], [(e^{i\rho}, e^{i\rho'})]),$$

por lo que en cada toro tenemos que la desigualdad se satisface. Luego tenemos que $\widetilde{X}_{k,l}$ es denso, entonces tenemos que la desigualdad se satisface en todo $\widetilde{X}_{k,l}$. \square

Proposición 2.2.3. *Si $\dim F = 2$, entonces la representación local de \mathbb{S}^1 en cualquier punto aislado tiene que ser equivalente a $\phi_{1,1}$.*

Demostración. Primero observemos lo siguiente: Sea Y una componente conexa 2-dimensional de F . En la proposición 2.2.1, vimos cómo es la representación local de la acción de \mathbb{S}^1 en $T_y M$ con $y \in Y$; de esto se sigue que existe una vecindad tubular de Y , digamos U , tal que el grupo de isotropía es trivial para todo $x \in U \setminus Y$.

Supongamos que existe un punto fijo aislado $p \in F$ tal que la representación local de \mathbb{S}^1 en $T_p M$ es equivalente a $\phi_{k,l}$ con $(k, l) = 1$ y $k > 1$. Dado

que $Z_k \subset \mathbb{S}^1$ me fija a los puntos de la forma $(z_1, 0) \in \mathbb{C}^2$, entonces si nos fijamos en la acción isométrica de Z_k en M vamos a tener que el conjunto de puntos fijos contiene al menos dos componentes conexas de dimensión dos. Esto contradice el teorema de Frankel que asegura que dos superficies totalmente geodésicas en M no pueden ser disjuntas. \square

2.3. Teorema de Hsiang-Kleiner

En esta sección vamos a probar la siguiente versión del teorema de Hsiang y Kleiner, publicado en [11]:

Teorema 2.3.1. *Sea M una 4-variedad compacta orientable, con curvatura positiva. Si M admite una acción isométrica no trivial de \mathbb{S}^1 , entonces M es homeomorfa a \mathbb{S}^4 o $\mathbb{C}P^2$.*

Demostración. Vamos a utilizar el resultado de Freedman [7], el cual es vital en esta demostración, que nos dice que M es homeomorfa a \mathbb{S}^4 o a $\mathbb{C}P^2$, si la característica de Euler es a lo más tres. Por lo que nos vamos a enfocar en calcular la característica de Euler de M , para esto recordemos que por los lemas 2.1.1 y 2.1.3 tenemos que $\chi(M) = \chi(F)$ y

$$F = \begin{cases} \chi(M) \text{ puntos aislados} \\ \text{ó} \\ \mathbb{S}^2 \cup \{(\chi(M) - 2) \text{ puntos aislados}\}. \end{cases}$$

Por esto la prueba del teorema se reduce en probar que F consiste en a lo más tres puntos aislados o en \mathbb{S}^2 con a lo más un punto aislado. Vamos a dividir la prueba en dos casos dependiendo de la dimensión de F y lo vamos a hacer por contradicción.

- *Caso 1, $\dim F = 2$.*

Supongamos que $F = \mathbb{S}^2 \cup \{p, q\}$, con p y q dos puntos fijos aislados. Sea γ una geodésica que minimiza la distancia entre p y q en M . Consideremos a las \mathbb{S}^1 órbitas de γ , $\mathbb{S}^1(\gamma)$, y sea η la geodésica que minimiza la distancia entre \mathbb{S}^2 y $\mathbb{S}^1(\gamma)$; entonces $l(\eta) = \text{dist}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1(\gamma))$, y sean los extremos de η $A \in \mathbb{S}^2$ y $B \in \mathbb{S}^1(\gamma)$. Notemos que los grupos de isotropía de los puntos a lo largo del interior tanto de γ como de η son iguales, es decir, si x y y

están en el interior de γ (ó de η) entonces $\mathbb{S}_x^1 = \mathbb{S}_y^1$. Si suponemos que pasa lo contrario se tendría tan siquiera un punto x en el interior de γ tal que $sx = x$, para algún $s \in \mathbb{S}^1$, y para cualquier vecindad abierta de x exista un punto y en el interior de γ tal que $s \notin \mathbb{S}_y^1$. Entonces tenemos dos geodésicas, γ y $s\gamma$, con distintos vectores tangentes en x y que minimizan la distancia entre p y q . Digamos que γ está definida en el intervalo $[t_0, t_1]$, con $\gamma(t_0) = p$, $\gamma(t_1) = q$, y $\gamma(\hat{t}) = x$ para algún $\hat{t} \in (t_0, t_1)$. Podemos construir la siguiente curva: Sea $c : [t_0, t_1] \rightarrow M$, con $c|_{[t_0, \hat{t}]} = \gamma|_{[t_0, \hat{t}]}$ y $c|_{[\hat{t}, t_1]} = s\gamma|_{[\hat{t}, t_1]}$, esta curva es suave a pedazos y con la misma longitud que la geodésica minimizante, lo cual es una contradicción. También por esta misma observación se tiene que $\text{dist}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1(\gamma)) \neq 0$.

Supongamos que $B = p$. Como \mathbb{S}^2 es una subvariedad totalmente geodésica y cerrada, entonces η , que minimiza la distancia, es perpendicular a \mathbb{S}^2 . Recordando que la representación local de la acción de \mathbb{S}^1 en p es equivalente a $\phi_{1,1}$, por la proposición 2.2.3, también vamos a tener que η es perpendicular a $\mathbb{S}^1(\gamma)$ (pues si no pasara podríamos encontrar una curva suave a pedazos perpendicular a $\mathbb{S}^1(\gamma)$ y con menor longitud que η), entonces $e^{i\theta}\gamma$ es perpendicular a η en p para todo $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$. Por lo que existen α y $\beta \in (0, 2\pi]$, tal que $e^{i\alpha}\gamma$, $e^{i\beta}\gamma$ y η son perpendiculares entre si en p . Esto fuerza a que tengamos un transporte paralelo que va de un vector tangente de $\mathbb{S}^1(\gamma)$ en p a otro vector tangente de \mathbb{S}^2 en A a lo largo de η . La idea es proceder como se hizo en el teorema de Frankel 1.5.5. Sea V el transporte paralelo sobre η , entonces tenemos una variación diferenciable

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_1, t_2] \rightarrow M$$

de η , con $f(0, t) = \eta(t)$, y tal que $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = \frac{\partial f_t}{\partial s}(0)$. Usaremos la fórmula para la segunda variación, la cual es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E''(0) = & - \int_{t_1}^{t_2} \left\langle V(t), \frac{D^2V}{dt} + R\left(\frac{d\eta}{dt}, V\right) \frac{d\eta}{dt} \right\rangle dt - \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{d\eta}{dt} \right\rangle(0, t_1) \\ & + \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{d\eta}{dt} \right\rangle(0, t_2) - \left\langle V(t_1), \frac{DV}{dt}(t_1) \right\rangle + \left\langle V(t_2), \frac{DV}{dt}(t_2) \right\rangle. \end{aligned}$$

donde

$$E(s) = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right\|^2 dt,$$

con $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, y R la curvatura de M .

Usando que $\frac{DV}{dt} = 0$, $\frac{D^2V}{dt^2} = 0$ y $\langle V(t), \frac{d\eta}{dt}(t) \rangle = 0$, sólo nos queda:

$$\frac{1}{2}E''(0) = - \int_{t_1}^{t_2} \left\langle V(t), R\left(\frac{d\eta}{dt}, V\right) \frac{d\eta}{dt} \right\rangle dt$$

y tenemos que la curvatura es positiva, entonces $\frac{1}{2}E''(0) < 0$, que quiere decir que $\frac{dE}{ds}$ es estrictamente decreciente en una vecindad de cero. Por lo que tendríamos una curva en la variación con menor longitud que η , es decir, $l(\eta) > \text{dist}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1(\gamma))$ lo cual es una contradicción. Lo mismo pasa para $B = q$.

Ahora supongamos que B cae en el interior de γ . Como habíamos dicho anteriormente, el grupo de isotropía no varía a lo largo del interior de γ y por la proposición 2.2.3 sabemos que alrededor de p la acción es equivalente a

$$\phi_{1,1} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2; e^{i\theta}(z_1, z_2) = (e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2),$$

entonces el grupo de isotropía en el interior de γ es el trivial, y recordando la observación para la proposición 2.2.1 que nos dice como es la acción localmente en cualquier punto de la esfera, se tiene de la misma manera que el grupo de isotropía es trivial en el interior de η . Entonces tenemos que $\eta \subseteq M_0 \cup \mathbb{S}^2$. Sea $\bar{\gamma} = \pi(\gamma \setminus \{p, q\}) \subseteq \bar{M}_0$, y $\bar{\eta} = \pi(\eta) \subseteq \bar{M}_0 \cup \bar{\mathbb{S}^2} = N$. Por la proposición 2.2.1 se tiene que N es una variedad riemanniana con frontera y $\pi : M_0 \cup \mathbb{S}^2 \rightarrow N$ es una sumersión riemanniana y sabemos que las sumersiones riemannianas son siempre de curvatura no decrecientes por la proposición 1.5.3, entonces en cualquier punto de N se tiene curvatura seccional mayor que cierto $\delta > 0$. Procedemos como se hizo anteriormente, sólo que en N y la variación sobre $\bar{\eta}$; de nuevo tendríamos que $l(\bar{\eta}) > \text{dist}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1(\gamma))$ y observando que $\text{dist}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1(\gamma)) = \text{dist}(\bar{\mathbb{S}^2}, \pi(\gamma)) = l(\bar{\eta})$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto F contiene a lo más un punto aislado junto con la esfera.

- *Caso 2*, $\dim F = 0$.

Supongamos que F contiene al menos cuatro puntos aislados, p_i , $1 \leq i \leq 4$. Sea $l_{ij} = \text{dist}(p_i, p_j)$ y sea $C_{ij} = \{\gamma : [0, l_{ij}] \rightarrow M \mid \gamma \text{ es una geodésica que minimiza la distancia desde } p_i \text{ hasta } p_j\}$, $1 \leq i, j \leq 4$. Para cada trío $1 \leq i, j, k \leq 4$ (con $i \neq j \neq k$) sea:

$$\alpha_{ijk} = \text{mín}\{\angle(\gamma'_j(0), \gamma'_k(0)) \mid \gamma_j \in C_{ij}, \gamma_k \in C_{ik}\}.$$

Notemos que el mínimo existe porque M es compacta.

Antes de seguir necesitamos el siguiente resultado.

Lema 2.3.2. *Para cada trío de distintos enteros $1 \leq i, j, k \leq 4$,*

$$\alpha_{ijk} + \alpha_{kij} + \alpha_{jki} > \pi.$$

Demostración. Por simplicidad vamos a tomar $(i, j, k) = (1, 2, 3)$. Dado que M tiene curvatura positiva entonces sabemos que existe $R_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\frac{1}{R_1^2}$ es un mínimo de la curvatura seccional de M , y tenemos el triángulo geodésico formado por $(\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})$ con cada $\gamma_{ij} \in C_{ij}$. Sea $R_2 \in \mathbb{R}$ tal que $l(\gamma_{12}) = l_{12}, l_{13}, l_{23} \leq R_2\pi$, y sea $R = \max\{R_1, R_2\}$. Entonces $\frac{1}{R^2}$ es un mínimo de la curvatura seccional en M y

$$l_{12}, l_{13}, l_{23} \leq R\pi = \frac{\pi}{\sqrt{1/R^2}}.$$

Aplicando el teorema de Toponogov 1.5.8, tenemos tres puntos x_1, x_2, x_3 en la esfera de radio R tal que el triángulo geodésico $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ tenga l_{12}, l_{13}, l_{23} como sus tres longitudes en la esfera y

$$\angle(\gamma'_{12}(0), \gamma'_{13}(0)) \geq \angle(\overline{x_1x_2}, \overline{x_1x_3})$$

como fue para cualesquiera geodésicas en C_{12} y C_{13} se tiene que $\alpha_{123} \geq \angle(\overline{x_1x_2}, \overline{x_1x_3})$. Análogamente para los otros ángulos, entonces $\alpha_{123} + \alpha_{321} + \alpha_{231} \geq$ la suma de los ángulos interiores de $\Delta(x_1, x_2, x_3) > \pi$, que era lo que se quería demostrar. \square

Vamos a tomar en cuenta a los cuatro tríos de distintos enteros, 123, 234, 314 y 412. Dado que $\alpha_{ijk} = \alpha_{ikj}$ sólo vamos a tomar el subíndice α_{ijk} tal que $j < k$. Entonces por el lema anterior se sigue que:

$$\sum_{1 \leq i \leq 4} \sum_{1 \leq j < k \leq 4, j, k \neq i} \alpha_{ijk} > 4\pi.$$

Ahora recordemos que en cada p_i se tiene que la acción localmente es equivalente a $\phi_{k,l}$ con $(k, l) = 1$ y que $d(\gamma'_j(0), \gamma'_k(0)) = \angle(\gamma'_j(0), \gamma'_k(0))$, y en el espacio de órbitas, $X_{k,l}$, se tiene la distancia orbital $d_{k,l}$. Tenemos $[\gamma'_j(0)], [\gamma'_k(0)] \in X_{k,l}$ entonces

$$\begin{aligned} d_{k,l}([\gamma'_j(0)], [\gamma'_k(0)]) &= d(\mathbf{S}^1(\gamma'_j(0)), \mathbf{S}^1(\gamma'_k(0))) \\ &= \min\{\angle(e^{i\theta}\gamma'_j(0), e^{i\hat{\theta}}\gamma'_k(0)) \mid \theta, \hat{\theta} \in (0, 2\pi]\} \\ &\geq \alpha_{ijk}. \end{aligned}$$

Esto pasa pues $e^{i\theta}\gamma_j$ son geodésicas que unen p_i con p_j , que son puntos fijos, con $(e^{i\theta}\gamma_j)'(0) = e^{i\theta}\gamma_j'(0)$.

Así, para p_1 obtenemos tres puntos $[\gamma'_2(0)]$, $[\gamma'_3(0)]$ y $[\gamma'_4(0)]$ en $X_{k,l}$ con

$$\alpha_{123} + \alpha_{124} + \alpha_{134} \leq d_{k,l}([\gamma'_2(0)], [\gamma'_3(0)]) + d_{k,l}([\gamma'_2(0)], [\gamma'_4(0)]) + d_{k,l}([\gamma'_3(0)], [\gamma'_4(0)]).$$

También tenemos por la proposición 2.2.2 que

$$d_{k,l}([\gamma'_2(0)], [\gamma'_3(0)]) + d_{k,l}([\gamma'_2(0)], [\gamma'_4(0)]) + d_{k,l}([\gamma'_3(0)], [\gamma'_4(0)]) \leq \pi,$$

puesto que $\alpha_{123} + \alpha_{124} + \alpha_{134} \leq \pi$. Esto pasa análogamente para cualquier punto aislado p_i , con $1 \leq i \leq 4$. Entonces tomando en cuenta los cuatro puntos vamos a tener que:

$$\sum_{1 \leq i \leq 4} \sum_{1 \leq j < k \leq 4, j, k \neq i} \alpha_{ijk} \leq 4\pi$$

lo que nos da una contradicción. Por lo tanto F sólo puede tener a lo más tres puntos aislados cuando $\dim F = 0$.

Con esto terminamos la prueba del teorema de Hsiang-Kleiner. \square

Hay un corolario de este teorema bastante directo, que nos ayuda con el problema de Hopf: ¿ $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ admite una métrica riemanniana con curvatura positiva?

Corolario 2.3.3. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ no admite una métrica riemanniana con curvatura positiva y con una acción isométrica de \mathbb{S}^1 .

Nos dice que si $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ admitiera una métrica riemanniana con curvatura positiva, ésta no podría tener tanta simetría como los ejemplos usuales que conocemos de 4-variedades compactas que admiten una métrica riemanniana con curvatura positiva.

Un resultado bastante impresionante en la línea del teorema de Hsiang-Kleiner, es el teorema de Grove-Searle(1994). Ellos estudiaron el rango de simetría de una variedad riemanniana M , en [9], el cual es una manera de medir la cantidad de simetría que tiene M . Este rango de simetría de M se puede definir como el número más grande r tal que un toro r -dimensional actúe efectiva e isométricamente en M . Lo que Grove y Searle mostraron fue que el rango de simetría de M con curvatura positiva es menor o igual

a $\frac{\dim M + 1}{2}$, y que se da la igualdad si y sólo si M es difeomorfa a la esfera unitaria, o al espacio complejo proyectivo, o al espacio lenticular.

La clasificación de n -variedades con curvatura positiva y simetría (con su grupo de isometrías suficientemente grande) salvo homeomorfismos ha progresado desde este resultado de Hsiang y Kleiner (1989), y también gracias al resultado de Grove-Searle. En 2002, Rong demostró en [17] que si M es una 5-variedad cerrada, simplemente conexa, con curvatura positiva y con rango de simetría igual a dos, entonces M es homeomorfa a la esfera. En 2005, Fang y Rong demostraron en [6] que para $n \geq 8$, una n -variedad cerrada, simplemente conexa, con curvatura positiva y con casi máximo rango de simetría $[\frac{n-1}{2}]$, entonces es homeomorfa a la esfera, al espacio complejo proyectivo o al espacio proyectivo plano cuaterniónico $\mathbb{H}P^2$.

Los dos resultados de Hsiang-Kleiner y Grove-Searle impulsaron a la demostración de la conjetura de Hsiang y Kleiner: Una 4-variedad cerrada orientable, con curvatura positiva y que admite una acción efectiva e isométrica de S^1 , entonces es difeomorfa a S^4 o CP^2 . La cual fue demostrada por Jin Hong, en el 2007 (ver [10]). Originalmente en las hipótesis de la conjetura se pedía que la variedad fuera compacta en lugar de cerrada, pero Hong lo pide así para poder usar un resultado.

Con lo que podemos concluir que el trabajo de Hsiang y Kleiner en su artículo [11] fue de gran importancia para el desarrollo del estudio de variedades con curvatura positiva y simetría.

Bibliografía

- [1] ALEXANDRINO, Marcos M., BILIOTTI, Leonardo y PEDROSA, Renato H. L., *Lectures on Isometric Actions*, IMPA, 2008.
- [2] BOOTHBY, William M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, 2ª ed., Orlando, Academic Press, 1986, 131-142.
- [3] CARMO, Manfredo do, *Riemannian Geometry*, 2ª ed., traducido del portugués al inglés por Francis Flaherty, Birkhäuser Boston, 1993.
- [4] CHEEGER, Jeff y EBIN, David G., *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland Mathematical Library, Volumen 9, Bélgica, 1975.
- [5] DUISTERMAAT, J. J. y KOLK, J. A. C., *Lie Groups*, Berlín, Springer, 2000.
- [6] FANG, Fuquan y RONG Xiaochun, *Homeomorphism classification of positively curved manifolds with almost maximal symmetry rank*, Math. Ann. 332, 2005, 81-101.
- [7] FREEDMAN, M. H., *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geometry 17, 1982, 357-453.
- [8] GREENBERG, Marvin Jay y HARPER, John R., *Algebraic Topology: a first course*, Mathematics lecture note series 58, Addison-Wesley, 1981.
- [9] GROVE, Karsten y SEARLE, Catherine, *Positively curved manifolds with maximal symmetry-rank*, J. Pure Appl. Algebra 91, 1994, 137-142.
- [10] HONG K., Jin, *Rigidity theorems for positively curved manifolds with symmetry*, Korea Advanced Institute of Science and Technology, 2007.

- [11] HSIANG, Wu-Yi y KLEINER, Bruce, *On the Topology of Positively Curved 4-Manifolds with Symmetry*, J. Differential Geometry 29, 1989, 615-621.
- [12] KOBAYASHI, Shoshichi, *Fixed Points of Isometries*, University of Chicago, 1957.
- [13] LANG, Serge, *Fundamentals of Differential Geometry*, Springer, Graduate Texts in Math. 191, 110-115.
- [14] DE NEYMET U., Sylvia, *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones*, México, Sociedad Matemática Mexicana, 2005, 1-17.
- [15] O'NEILL, Barrett, *Semi-riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.
- [16] PETERSEN, Peter, *Riemannian Geometry*, 2^a ed., Springer, Graduate Texts in Math. 171, 2006.
- [17] RONG, Xiaochun, *Positively Curved Manifolds with Almost Maximal Symmetry Rank*, Geometriae Dedicata 95, 2002, 157-182.
- [18] WARNER, Frank W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, Graduate Texts in Math. 94, 1983, 34-47.