Universidad Nacional Autónoma de México.
Facultad de Ciencias
Posgrado en Ciencias Matemáticas

"Teoría de inclinación en categorías de funtores."

Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias presenta:

Martín Ortíz Morales.

Director de Tesis: Dr. Roberto Martínez Villa.

30 de agosto de 2011

Introducción

La teoría de inclinación tiene sus orígenes en el artículo de I. N. Bernstein, I. M. Gelfand y V. A. Ponomarev, el cual apareció en 1973 [BGP], donde definieron los funtores de Coxeter parciales. Estos funtores fueron generalizados por M. Auslander, M. I. Platzeck e I. Reiten en 1979 [APR], donde se introduce el concepto de módulo de inclinación. La noción de módulo de inclinación fue generalizada por Y. Miyashita en 1986 [Miya] y por D. Happel en 1987 [Ha]. Happel demostró que los módulos de inclinación generalizados inducen equivalencias de categorías derivadas de ciertas categorías de módulos. Estos resultados inspiraron a J. Rickard a desarrollar su teoría de Morita para categorías derivadas [Ric].

Por otro lado, las categorías de funtores fueron introducidas en teoría de representaciones por M. Auslander en [Au1], [Au2] y usadas en su demostración de la primera conjetura de Brauer-Trall [Au], y después usadas sistemáticamente, de manera conjunta con I. Reiten, en el estudio de la equivalencia estable [AR1], [AR2].

Recientemente, las categorías de funtores han sido utilizadas en [MV], [MVS1], [MVS2], [MVS3], [MVS4]; para estudiar las componentes de Auslander-Reiten de álgebras de dimensión finita.

En este trabajo generalizamos la teoría de inclinación de los módulos a la categoría de funtores, teniendo en mente aplicaciones a la categoría de funtores de subcategorías de la categoría de módulos, sobre un álgebra de dimensión finita, a la categoría de grupos abelianos.

El material aquí expuesto está dividido en dos partes, la primera de ellas está dedicada al desarrollo de la teoría clásica de inclinación en la categoría de funtores, mientras que la segunda parte esta dedicada al desarrollo de la teoría de inclinación generalizada en la categoría de funtores.

En la primera parte, comezamos con el capítulo 1 dedicado a recordar conceptos básicos de la categoría de funtores. En el capítulo 2 probamos el Teorema Brenner-Butler, primero para la categoría de funtores que van de una variedad de annuli y veremos que se siguen teniendo los resultados clásicos que se refieren los grupos de Grothendieck y a la dimensión global. Después, teniendo en mente buscar aplicaciones a la categoría de módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin, probamos el Teorema Brenner-Butler para categorías de funtores finitamente presentados, concluyendo con el desarrollo de la teoría inclinación para variedades dualizantes. En el capítulo 3, mostramos como extender un módulo de inclinación a una categoría de inclinación. Posteriormente veremos las aplicaciones de la teoría desarrollada al caso hereditario, más precisamente, al estudio de las representaciones de álgebras de carcaj de un carcaj infinito localmente finito.

En la segunda parte, comenzamos con el capítulo 4, dedicado a recordar los conceptos básicos sobre categorías derivadas. En el capítulo 5 veremos el Teorema de Happel para variedades de annuli y variedades dualizantes. En el capítulo 6, siguiendo los resultados de M. Auslander e I. Reiten, damos una relación entre categorías de inclinación y categorías covariantemente finitas de las categorías de funtores finitamente presentados de una variedad Krull-Schmidt dualizante. Finalizamos con el capítulo 7, en el cual encontramos relaciones entre la categorías de inclinación relativas en el álgebra de matrices triangulares y categorías de inclinación en la categoría de funtores finitamente presentados de la categoría de módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin.

Índice general

Parte I

Categorías de Inclinación Clásica

Capítulo 1

La Categoría $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$

1.1. Categorías preaditivas

En esta sección hablaremos de la categoría de funtores. Los resultados aquí expuestos fueron extraídos directamente de [Au2].

Una categoría $\mathbf{C}$ es **preaditiva**, si tiene objeto cero, cada conjunto de morfismos $\mathbf{C}(C_1, C_2)$ es un grupo abeliano y todas las composiciones de morfismos

$$\mathbf{C}(C_1, C_2) \times \mathbf{C}(C_2, C_3) \to \mathbf{C}(C_1, C_3)$$

son bilineales. Un funtor contravariante entre dos categorías preaditivas $F : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_2$ es **aditivo**, si para cada par de objetos C_1 y C_2 en $\mathbf{C}$, el morfismo $F : \mathbf{C}_1(C_1, C_2) \to \mathbf{C}_2(F(C_2), F(C_1))$ es un homomorfismo de grupos abelianos. Todas las categorías que se mencionen en este trabajo serán por lo menos preaditivas. Del mismo modo, todos los funtores que se mencionen serán contravariantes y aditivos.

Dada una familia $\{C_i\}_{i\in I}$ de objetos en $\mathbf{C}$, denotamos su suma (directa) por $\coprod_{i\in I} C_i$ y su producto por $\prod_{i\in I} C_i$, cuando estos existan en $\mathbf{C}$. Una categoría preaditiva $\mathbf{C}$ se dice que es **aditiva**, si toda familia finita de objetos en $\mathbf{C}$ tiene una suma en $\mathbf{C}$.

Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ dos categorías y $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un par de funtores. Entonces, un morfismo $\alpha : F \to G$ es una colección de morfismos $\alpha_C : F(C) \to G(C)$ en $\mathbf{D}$, uno para cada C en $\mathbf{C}$, tal que para cada morfismo $f : C_1 \to C_2$ en $\mathbf{C}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
F(C_2) \arrow[r, "\alpha_{C_2}"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C_2) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(C_1) \arrow[r, "\alpha_{C_1}"] & G(C_1).
\end{tikzcd}$$

En general, la colección de morfismos que van de F a G no es un conjunto, sin embargo, lo es cuando $\mathbf{C}$ es una categoría pequeña, i.e., la colección objetos en $\mathbf{C}$ es un conjunto.

Supongamos que $\mathbf{C}'$ es una subcategoría densa de $\mathbf{C}$. Entonces, hay una correspondencia uno a uno entre los morfismos de F a G y todos aquellos que van de $F|_{\mathbf{C}'}$ a $G|_{\mathbf{C}'}$, las restricciones de F y G a $\mathbf{C}'$. La correspondencia está dada por el morfismo que envía $\alpha : F \to G$ a $\beta : F|_{\mathbf{C}'} \to G|_{\mathbf{C}'}$, definida por $\beta_C = \alpha_C$, para toda C en $\mathbf{C}'$. Si $\mathbf{C}'$ es una categoría pequeña, entonces la colección de morfismos que van de F a G es un conjunto. La categoría $\mathbf{C}$ es llamada **esqueléticamente pequeña** si contiene a una subcategoría densa pequeña. De aquí, si la categoría $\mathbf{C}$ es esqueléticamente pequeña, entonces la colección de morfismos entre funtores $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es siempre un conjunto. Luego, sí suponemos que $\mathbf{C}$ es esqueléticamente pequeña y $\mathbf{D}$ es una categoría arbitraria, entonces se obtiene la categoría de funtores contravariantes de $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$, denotada por $(\mathbf{C}, \mathbf{D})$, la cual se describe como:

(a) Los objetos son los funtores contravariantes de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$.

(b) $(\mathbf{C}, \mathbf{D})(F, G)$ es el conjunto de morfismos que van del funtor F al funtor G, para cada par de objetos F y G en $(\mathbf{C}, \mathbf{D})$.

(c) Denotando a $(\mathbf{C}, \mathbf{D})(F, G)$ simplemente como (F, G), la composición de morfismos $(F, G) \times (G, H) \to (F, H)$ en $(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ está dada por $(\alpha, \beta) \to \beta\alpha$, donde $F(C) \xrightarrow{(\beta\alpha)_C} H(C)$ es la composición $F(C) \xrightarrow{\alpha_C} G(C) \xrightarrow{\beta_C} H(C)$ en $\mathbf{D}$, para cada C en $\mathbf{C}$.

(d) La estructura de grupo abeliano sobre (F, G) está dado por la adición $(\beta + \alpha)_C : F(C) \to G(C)$, definida por la suma $\alpha_C + \beta_C$ de α_C y β_C en $\mathbf{D}(F(C), G(C))$, para cada C en $\mathbf{C}$.

Además, si D es una categoría aditiva, entonces $(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ es una categoría aditiva. En efecto, si $\{F_i\}_{i \in I}$ es una familia finita de objetos de $(\mathbf{C}, \mathbf{D})$, entonces el funtor $\coprod_{i \in I} F_i$, definido por $(\coprod_{i \in I} F_i)(C) = \coprod_{i \in I} F_i(C)$, la suma en $\mathbf{D}$ de la familia finita $\{F_i(C)\}_{i \in I}$, para cada C en $\mathbf{C}$, es una suma para $\{F_i\}$ en $(\mathbf{C}, \mathbf{D})$.

Supongamos que $\mathbf{C}'$ y $\mathbf{C}$ son categorías esqueléticamente pequeñas y $\mathbf{D}$ es una categoría arbitraria, asociamos a cada funtor $f : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$, el funtor $f_*(\mathbf{C}, \mathbf{D}) \to (\mathbf{C}', \mathbf{D})$, definido como $f_*(F)(C) = F(f(C))$, para cada C en $\mathbf{C}$. Si $\mathbf{C}'$ es una subcategoría de $\mathbf{C}$ y $f : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ es el funtor inclusión, entonces $f_*(F) = F|_{\mathbf{C}'}$, la restricción de F a la subcategoría $\mathbf{C}'$. Así, dada cualquier subcategoría $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$, tenemos el **funtor restricción** $\mathrm{res} : (\mathbf{C}', \mathbf{D}) \to (\mathbf{C}, \mathbf{D})$, definido como $\mathrm{res}(F) = F|_{C'}$.

1.2. C-módulos

En lo que sigue, asumiremos que $\mathbf{C}$ es una categoría preaditiva esqueleticamente pequeña. Se define la categoría de **C-módulos**, la cual denotaremos por $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, como la categoría $(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$, donde $\mathbf{Ab}$ es la categoría de grupos abelianos. Un $\mathbf{C}$-módulo M es entonces un funtor contravariante $M : \mathbf{C} \to \mathbf{Ab}$, y un morfismo $M_1 \to M_2$ de $\mathbf{C}$-módulos es un morfismo que va del funtor M_1 al funtor M_2. A continuación se ve como, en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, ocurren situaciones análogas a las que ocurren en las categorías de módulos sobre un anillo.

Sea $M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2$ un morfismo de $\mathbf{C}$-módulos, y $f : C_1 \to C_2$ un morfismo en $\mathbf{C}$. Entonces existe un único morfismo, que denotaremos como $\mathrm{Ker}(\alpha)(f)$, el cual hace conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\alpha_{C_2}) & \overset{\ker(\alpha)_{C_2}}{\longrightarrow} & M_1(C_2) & \overset{\alpha_{C_2}}{\longrightarrow} & M_2(C_2) \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{Ker}(\alpha)(f)}\big\downarrow & & {\scriptstyle M_1(f)}\big\downarrow & & {\scriptstyle M_2(f)}\big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\alpha_{C_1}) & \overset{\ker(\alpha)_{C_1}}{\longrightarrow} & M_1(C_1) & \overset{\alpha_{C_1}}{\longrightarrow} & M_2(C_1).
\end{array}
$$

Resulta natural definir el $\mathbf{C}$-módulo Kerα en objetos como $(\mathrm{Ker}\alpha)(C) = \mathrm{Ker}(\alpha_C)$, y en morfismos como $(\mathrm{Ker}\alpha)(f) = \mathrm{Ker}(\alpha)(f)$. Además, tenemos un morfismo de $\mathbf{C}$-módulos $\mathrm{Ker}(\alpha) : \mathrm{Ker}\alpha \to M_1$. Del mismo modo pueden definirse los funtores cokernel $\mathrm{Coker}(\alpha)$, imagen $\mathrm{Im}(\alpha)$ y coimagen, $\mathrm{Coim}(\alpha)$. Los cuales son construidos de manera *puntual.*

No es difícil verficar la siguiente

Proposición 1.1. *La categoría* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C}')$ *es una categoría abeliana con las siguientes propiedades*

(a) *Una sucesión de* $\mathbf{C}$*-módulos* $M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3$ *es exacta si, y sólo si,* $M_1(C) \xrightarrow{\alpha_C} M_2(C) \xrightarrow{\beta_C} M_3(C)$ *es una sucesion exacta de grupos abelianos.*

(b) *Sea* $\{M_i\}_{i\in I}$ *una familia de* $\mathbf{C}$*-módulos, con* I *un conjunto de índices. El* $\mathbf{C}$*-módulo* $\coprod_{i\in I} M_i$*, definido por* $(\coprod_{i\in I} M_i)(C) = \coprod_{i\in I}(M_i(C))$*, para toda* C *en* $\mathbf{C}$*, es una suma para la familia* $\{M_i\}_{i\in I}$ *en* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$*, donde* $\coprod_{i\in I}(M_i(C))$ *es la suma en* $\mathbf{Ab}$ *de la colección de grupos abelianos* $\{M_i(C)\}_{i\in I}$*. Análogamente, se define el producto de* $\mathbf{C}$*-móludos* $\prod_{i\in I} M_i$*.*

(c) *(Lema de Yoneda) Para cada* C *en* $\mathbf{C}$*, el* $\mathbf{C}$*-módulo* $(\ ,C)$ *definido como* $(\ ,C)(X) = \mathbf{C}(X,C)$*, para cada* X *en* $\mathbf{C}$ *tiene la propiedad de que: para cada* $\mathbf{C}$*-módulo* M *tenemos un isomorfismo de grupos abelianos*

$$((\ ,C),M) \to M(C); \qquad f \mapsto f_C(1_C).$$

De aquí,

(i) *El funtor* $P : \mathbf{C} \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$*, dado por* $P(C) = (\ ,C)$ *es fielmente pleno.*

(ii) *Para cada familia* $\{C_i\}_{i\in I}$ *de objetos en* $\mathbf{C}$*, el* $\mathbf{C}$*-módulo* $\coprod_{i\in I} P(C_i)$ *es un* $\mathbf{C}$*-módulo proyectivo.*

(iii) *Dado un* $\mathbf{C}$*-módulo* M*, hay una familia* $\{C_i\}_{i\in I}$ *de objetos en* $\mathbf{C}$ *tal que existe un epimorfismo* $\coprod_{i\in I} P(C_i) \to M \to 0$*.*

(iv) *Sea* $\{M_i\}_{i\in I}$ *una familia de* $\mathbf{C}$*-módulos y* C *un objeto de* $\mathbf{C}$*. Del isomorfismo* $((\ ,C),\coprod_{i\in I} M_i) \cong \coprod_{i\in I}(M_i(C)) \cong \coprod_{i\in I}((\ ,C),M_i)$ *se sigue lo siguiente: si* $f : (\ ,C) \to \coprod_{i\in I} M_i$ *es un morfismo de* $\mathbf{C}$*-módulos, entonces hay un subconjunto finito* J *de* I *tal que* $\mathrm{Im}(f)$ *está contenido en el* $\mathbf{C}$*-submódulo* $\coprod_{j\in J} M_j$ *de* $\coprod_{i\in I} M_i$*.*

(v) *La colección de* $\mathbf{C}$*-submódulos de un* $\mathbf{C}$*-módulo* M *es un conjunto.*

Decimos que un $\mathbf{C}$-módulo M es **finitamente generado** si, dada una familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de $\mathbf{C}$-módulos y un epimorfismo $f : \coprod_{i\in I} M_i \to M$, hay un subconjunto finito J de I, tal que la restricción $f|_{\coprod_{j\in J} M_j} : \coprod_{j\in J} M_j \to M$ es un epimorfismo.

Proposición 1.2. (a) *Para cada familia finita $\{C_i\}_{i\in I}$ de objetos en $\mathbf{C}$, el $\mathbf{C}$-módulo $\coprod_{i\in I}(\ \ , C_i)$ es finitamente generado.*

(b) *Un $\mathbf{C}$-módulo M es finitamente generado si, y sólo si, hay un epimorfismo*

$$\coprod_{i\in I}(\ \ , C_i) \to M$$

para alguna familia finita $\{C_i\}_{i\in I}$ de objetos en $\mathbf{C}$.

(c) *Supongamos que M es un $\mathbf{C}$-módulo finitamente generado. Sea $f : M \to \coprod_{i\in I} M_i$ un morfismo de $\mathbf{C}$-módulos. Entonces, hay un subconjunto finito J de I, tal que $\mathrm{Im} f$ está contenido en el $\mathbf{C}$-submódulo $\coprod_{j\in J} M_j$ de $\coprod_{i\in I} M_i$. Más aún, hay un isomorfismo natural $(M, \coprod_{i\in I} M_i) \to \coprod_{i\in I}(M, M_i)$, el cual consideraremos como una identificación, para cada $\mathbf{C}$-módulo finitamente generado M.*

(d) *Supongamos que $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ es una sucesión exacta de $\mathbf{C}$-módulos, entonces ocurre lo siguiente:*

(i) *Si M_2 es finitamente generado, entonces M_3 es finitamente generado.*

(ii) *Si M_1 y M_3 son finitamente generados, entonces M_2 es finitamente generado.*

(e) *Una suma finita de $\mathbf{C}$-módulos finitamente generados es finitamente generado.*

Demostración. (a) Sea $\{M_j\}_{j\in J}$ una familia de $\mathbf{C}$-módulos y supongamos que existe un epimorfismo $p : \coprod_{j\in J} M_j \to \coprod_{i\in I}(\ \ , C_i)$. Como $\coprod_{i\in I}(\ \ , C_i)$ es proyectivo, p se escinde, i.e, existe un morfismo $\coprod_{i\in I}(\ \ , C_i) \xrightarrow{q} \coprod_{j\in J} M_j$, tal que $pq = 1_{\coprod_{i\in I}(\ \ , C_i)}$. Por la parte (c) de la Proposición 1.1, existe una familia finita de índices $J' \subset J$ tal que $\mathrm{Im}(q) \subset \coprod_{i\in J'} M_j$. Entonces

$$(p|_{\coprod_{j\in J'} M_j})q = pq = 1_{\coprod_{i\in I}(\ \ , C_i)},$$

se sigue que $p|_{\coprod_{j\in J'} M_j} : \coprod_{j\in J'} M_j \to \coprod_{i\in I}(\ \ , C_i)$ es epimorfismo.

(b) Sea M un $\mathbf{C}$-módulo cualquiera. Por la parte (c) de la Proposición 1.1, hay una familia de objetos $\{C_i\}_{i\in I}$ y un epimorfismo $\coprod_{i\in I}(\ \ , C_i) \to M$. Si M es finitamente generado, entonces hay un subconjunto finito J de I tal que $f|_{\coprod_{i\in J}(\ \ , C_i)} : \coprod_{i\in J}(\ \ , C_i) \to M$ es un epimorfismo.

Recíprocamente, supongamos que existe un epimorfismo $\coprod_{i\in I}(\ \ , C_i) \xrightarrow{g} M$, para alguna familia finita $\{C_i\}_{i\in I}$ de objetos en $\mathbf{C}$, y sea $\{M_j\}_{j\in J}$ una familia de $\mathbf{C}$-módulos y un epimorfismo $\coprod_{j\in J} M_j \xrightarrow{f} M$. Como $\coprod_{i\in I}(\ \ , C_i)$ es un $\mathbf{C}$-módulo proyectivo, existe un morfismo $h : \coprod_{i\in I}(\ \ , C_i) \to \coprod_{j\in J} M_j$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod_{i\in I}(\ \ ,C_i) \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\
\coprod_{j\in J} M_j \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

Por la parte (c) de la Proposición 1.1, existe un subconjunto finito J' de J tal que $\mathrm{Im}(h)$ está contenido en $\coprod_{j\in J'} M_j$, de modo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod_{i\in I}(\ \ ,C_i) \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\
\coprod_{j\in J'} M_j \arrow[r, "f|_{\coprod_{j\in J'} M_j}"] & M
\end{tikzcd}$$

Como g es un epimorfismo, se sigue que $f|_{\coprod_{j\in J'} M_j}$ es un epimorfismo y se tiene la afirmación.

(c) Como M es finitamente generado, hay un epimorfismo $\coprod(\ \ ,C_j)_{j\in J} \xrightarrow{p} M$, para una familia finita $\{C_j\}_{j\in j}$ de objetos en $\mathbf{C}$. Entonces, para cualquier morfismo en $\mathbf{C}$, $f : M \to \coprod_{i\in I} M_i$, existe un subconjunto finito I' de I, tal que la imagen del morfismo $fp : \coprod_{i\in J}(\ \ ,C_j) \to \coprod_{i\in I} M_i$ está contenida en $\coprod_{i\in I'} M_i$, esto por la parte (c) de la Proposición 1.1. Pero $\mathrm{Im}(f)$ está contenido en $\mathrm{Im}(fp)$, se sigue que $\mathrm{Im}(f)$ está contenido en $\coprod_{i\in I'} M_i$. Consideremos $\pi_i : \coprod_{i\in I} M_i \to M_i$, la i-ésima proyección canónica. Como la imagen de f está contenida en $\coprod_{i\in I'} M_i$, para un conjunto finito I', entonces $\pi_i f : M \to M_i$ es el morfimo cero, excepto quizas para cuando i este en I', por lo que el vector $(\pi_i f)_{i\in I}$ está contenido en $\coprod_{i\in I}(M, M_i)$. Definimos el morfismo de grupos abelianos $\varphi : (M, \coprod_{i\in I} M_i) \to \coprod_{i\in I}(M, M_i)$, como $\varphi(f) = (\pi_i f)_{i\in I}$, claramente este es un isomorfismo natural en M. Las otras afirmaciones son más o menos evidentes. $\square$

Denotemos con $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, cuyos objetos son los $\mathbf{C}$-módulos proyectivos finitamente generados.

Proposición 1.3. (a) *Un $\mathbf{C}$-módulo M está en $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$ si, y sólo si, M es sumando de una suma finita $\coprod_{i\in I}(\ \ ,C_i)$ de $\mathbf{C}$-módulos $\{(\ \ ,C_i)\}_{i\in I}$.*

(b) *La categoría $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$ es esqueléticamente pequeña.*

(c) *Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia finita de $\mathbf{C}$-módulos en $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$, entonces $\coprod_{i\in I} M_i$ está en $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$.*

(d) *Si M está en $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$ y $e : M \to M$ es un idempotente en el anillo de endomorfismos de M, entonces $\mathrm{Ker}(e)$ y $\mathrm{Im}(e)$ están en $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$ y $M \cong \mathrm{Ker}(e) \coprod \mathrm{Im}(e)$.*

(e) *El funtor fielmente pleno $P : \mathbf{C} \to \mathfrak{p}(\mathbf{C})$, dado por $P(C) = (\ \ ,C)$, para cada C en $\mathbf{C}$, es una equivalencia de categorías si, y sólo si, $\mathbf{C}$ satisface:*

(i) $\mathbf{C}$ *es una categoría aditiva;*

(ii) *Si* C *está en* $\mathbf{C}$ *y* $e : C \to C$ *es un idempotente en el anillo de endomorfismos de* C*, entonces* e *tiene un kernel en* $\mathbf{C}$.

Demostración. Sólo se probará (a), (d) y (e), las otras afirmaciones son más o menos evidentes. (a) Supongamos que M está en $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$, entonces, por ser finitamente generado, existe un epimorfismo $\coprod_{i\in I}(\ ,C_i) \to M$, con $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia finita de objetos en $\mathbf{C}$. Dicho epimorfismo se escinde porque M es proyectivo, luego, M es sumando de $\coprod_{i\in I}(\ ,C_i)$. Si M es un sumando de una suma finita $\coprod_{i\in I}(\ ,C_i)$, entonces existe un $\mathbf{C}$-módulo M' tal que $M\coprod M' = \coprod_{i\in I}(\ ,C_i)$, claramente M es finitamente generado, sólo falta ver que es proyectivo. Sea $N \to N'$ un epimorfismo en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, y $f : M \to N'$ un morfismo, entonces f puede escribirse como $f : M \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} M\coprod M' \xrightarrow{[f\ \ 0]} N'$. Como $M\coprod M' = \coprod_{i\in I}(\ ,C_i)$ es proyectivo, existe un morfismo $h : \coprod_{i\in I}(\ ,C_i) \to N$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"] \\
 & M\coprod M' \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "{[f\ \ 0]}"] \\
N \arrow[r] & N'
\end{tikzcd}$$

es decir, M es proyectivo.

(d) Como $e : M \to M$ es idempotente, entonces $(1-e)$ es idempotente, y $e(1-e) = (1-e)e = 0$. Por lo que existen morfismos, q_i, p_i con $i = 1, 2$, tales que hacen que los triángulos del siguiente diagrama conmuten:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(e) \arrow[d, "q_1"'] & \mathrm{Ker}(1-e) \arrow[d, "q_2"'] & \\
M \arrow[ur, "p_1"] \arrow[r, "1-e"] & M \arrow[ur, "p_2"] \arrow[r, "e"] & M \arrow[r, "1-e"] & M
\end{tikzcd}$$

y tenemos que

(1) $q_1p_1 + q_2p_2 = 1_M$;

(2) $p_1q_2 = p_2q_1 = 0$, y $p_1q_1 = p_2q_2 = 1_M$;

i.e, $M = \mathrm{Ker}(e)\coprod \mathrm{Ker}(1-e) = \mathrm{Ker}(e)\coprod \mathrm{Im}(e)$. Además, si M es sumando de una suma finita de $\mathbf{C}$-módulos $\{(\ ,C_i)\}_{i\in I}$, también lo son $\mathrm{Ker}(e)$ y $\mathrm{Im}(e)$, i.e, $\mathrm{Ker}(e)$ y $\mathrm{Im}(e)$ están en $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$.

(e) Si $P : \mathbf{C} \to \mathfrak{p}(\mathbf{C})$ es una equivalencia de categorías, entonces, por (c) y (d), $\mathbf{C}$ satisface las condiciones (i) y (ii). Recíprocamente, supóngase que se cumplen (i) y (ii). Como P es fielmente pleno, sólo falta ver que es denso. Si M está en $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$, entonces hay un $\mathbf{C}$-módulo M' tal que $M\coprod M' = \coprod_{i\in I}(\ ,C_i)$, donde I es una familia finita de índices. Ahora bien, para cada $i \in I$, tenemos que $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C_i) \cong \mathrm{End}_{\mathfrak{p}(\mathbf{C})}(\ ,C_i)$, y $e : C_i \to C_i$ es un endomorfismo idempotente si, y sólo si, $(\ ,e) : (\ ,C_i) \to (\ ,C_i)$ es un endomorfismo idempotente. Si $(\ ,e) : (\ ,C_i) \to (\ ,C_i)$ es un endomorfismo idempotente, entonces $e : C_i \to C_i$ lo es, luego $C_i \cong \mathrm{Ker}(e) \coprod \mathrm{Im}(e)$ y $(\ ,C_i) = (\ ,\mathrm{Ker}(e)) \coprod (\ ,\mathrm{Im}(e))$. Repitiendo el mismo argumento, un número finito de veces, puede escribirse $\coprod_{i\in I}(\ ,C_i) = \coprod_{i\in I'}(\ ,C'_i)$, donde I' es una familia finita de índices, tal que los únicos endomorfismo idempotentes en $\mathrm{End}(\ ,C'_i)$ son 0 y 1, es decir, $(\ ,C'_i)$ no tiene sumandos propios. Por lo que hay un conjunto finito J de I', tal que $M \cong \coprod_{i\in J}(\ ,C'_i)$, y asi $P(\coprod_{i\in J} C'_i) = M$, de modo que P es denso. $\square$

Una categoría $\mathbf{V}$, es llamada una **variedad de annuli**, o simplemente una variedad, si es una categoría aditiva esqueléticamente pequeña en la cual los **idempotentes se dividen** (si $e : V \to V$ es un endomorfismo idempotente de un objeto V en $\mathbf{V}$, entonces e tiene kernel en $\mathbf{V}$). Si $e : V \to V$ es un idempotente en $\mathbf{V}$, entonces los idempotentes e y $1-e$ tienen kernel en $\mathbf{V}$, y $V = \mathrm{Ker}(e) \coprod \mathrm{Ker}(1-e)$.

Un **generador aditivo** de una variedad $\mathbf{V}$ es una categoría $\mathbf{U}$ junto con un funtor fielmente pleno $G : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ tal que cada objeto de $\mathbf{V}$ es isomorfo a un sumando directo de una suma finita $\coprod_{i\in I} G(U_i)$, con U_i en $\mathbf{U}$. Claramente $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$ es una variedad y el funtor $P : \mathbf{C} \to \mathfrak{p}(\mathbf{C})$ es un generador aditivo para $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$.

Proposición 1.4. *Sea $G : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ un generador aditivo de la variedad de annuli $\mathbf{V}$. Entonces, para cada categoría aditiva $\mathbf{W}$ en la cual los idempotentes se dividen, tenemos que*

(a) *Dado cualquier funtor $F : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$, existe un funtor (único hasta isomorfismo) $F' : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tal que $F'G = F$.*

(b) *El funtor restricción $(\mathbf{V},\mathbf{W}) \to (\mathbf{U},\mathbf{W})$ es una equivalencia de categorías.*

Demostración. (a) Sea V un objeto en $\mathbf{V}$. Puede suponerse, sin perdida de generalidad, que $V = G(U)$ o que V es sumando propio de $G(U)$, con U en $\mathbf{U}$.

En el primer caso se define F' en objetos como $F'(V) = F'(G(U)) = F(U)$. Si $f' : G(U_1) \to G(U_2)$ es un morfismo en $\mathbf{V}$, entonces del isomorfismo de grupos abelianos $\mathrm{Hom}_{\mathbf{U}}(U_2, U_1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{V}}(G(U_1), G(U_2))$, se sigue que existe un único morfismo $f : U_2 \to U_1$, tal que $G(f) = f'$, y se define $F'(f') = F'(G(f)) = F(f)$.

Si V es un sumado propio de $G(U)$, entonces hay un objeto V' en $\mathbf{V}$, un endomorfismo idempotente $e' : G(U) \to G(U)$ y morfismos p_i, q_i, $i = 1,2$ con la siguiente sucesión exacta

$$0 \to V \xrightarrow{q_1} G(U) \xrightarrow{p_2} V' \to 0$$

con $V \cong \mathrm{Ker}(e')$, $V' \cong \mathrm{Im}(e')$ y $p_1q_1 = 1_V$, $p_2q_2 = 1_{V'}$. Ahora bien, por ser G fielmente pleno, existe un único endomorfismo $e : U \to U$, tal que $G(e) = e'$. Se sigue que $F'(G(e)) = F(e)$ es un endomorfismo idempotente en $\mathbf{W}$. Como en $\mathbf{W}$ los idempotentes se dividen, entonces tenemos una sucesión exacta que se escinde

$$0 \to W \xrightarrow{q_1} F(U) \xrightarrow{p_2} W' \to 0$$

con $W \cong \mathrm{Ker}(F(e))$ y $W' \cong \mathrm{Im}(F(e))$. Así, definimos $F'(V) = W$. Supongamos que $f : V_1 \to V_2$ es un morfismo en $\mathbf{V}$, entonces existen endomorfismos idempotentes $e'_i \in$

$\mathrm{End}(G(U_i))$, como antes, y f induce el siguiente diagrama conmutativo con renglones que se escinden

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V_1 & \overset{q_1^1}{\to} & G(U_1) & \overset{p_2^1}{\to} & V_1' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle \overline{f}}\big\downarrow & & {\scriptstyle f'}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & V_2 & \overset{q_1^2}{\to} & G(U_2) & \overset{p_2^2}{\to} & V_2' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y $V_i^1 \cong \mathrm{Ker}(e_i')$, $V_i^2 \cong \mathrm{Im}(e_i')$, con $i = 1, 2$. El morfismo $\overline{f} : G(U_1) \to G(U_2)$ induce el siguiente diagrama conmutativo con renglones que se escinden

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & W_1 & \overset{q_1^1}{\to} & F(U_1) & \overset{p_2^1}{\to} & W_1' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle g}\big\downarrow & & {\scriptstyle F(\overline{f})}\big\downarrow & & {\scriptstyle g'}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & W_2 & \overset{q_1^2}{\to} & F(U_2) & \overset{p_2^2}{\to} & W_2' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y $W_i^1 \cong \mathrm{Ker}F'(e_i')$, $V_i^2 \cong \mathrm{Im}F(e_i')$, con $i = 1, 2$. Resulta natural ahora definir a F' en morfismos como $F'(f) = g$. No es difícil verificar la únicidad, por lo cual se omite la prueba.

(b) Se sigue de (a). □

Como consecuencia de la Proposición 1.4, no resulta difícil verificar el siguiente

Corolario 1.5. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría preaditiva esqueléticamente pequeña. Entonces,*

(a) $\mathbf{C}$ *es un generador aditivo para alguna variedad de anuli, por ejemplo* $P : \mathbf{C} \to \mathfrak{p}(\mathbf{C})$.

(b) *Si* $G_1 : \mathbf{C} \to \mathbf{V_1}$ *y* $G_2 : \mathbf{C} \to \mathbf{V_2}$ *son generadores aditivos para las variedades* $\mathbf{V_1}$ *y* $\mathbf{V_2}$*, entonces hay un único funtor* $F : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V_2}$*, hasta isomorfismo, tal que* $FG_1 = G_2$ *y las categorías* $\mathbf{V_1}$ *y* $\mathbf{V_2}$ *son equivalentes.*

(c) *Sea* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{V}$ *un funtor fielmente pleno, donde* $\mathbf{V}$ *es una categoría aditiva en la cual los idempotentes se dividen. Sea* $\mathbf{V}'$ *la subcategoría plena de* $\mathbf{V}$ *consistente de todos aquellos objetos de* $\mathbf{V}$ *que son isomorfos a sumandos de sumas finitas* $\coprod_{i \in I} F(C_i)$*, con* C_i *en* $\mathbf{C}$*. Entonces* $\mathbf{V}'$ *es una variedad y el funtor* $F' : \mathbf{C} \to \mathbf{V}'$ *definido por* $F'(C) = F(C)$*, para todo* C *en* $\mathbf{C}$ *es un generador aditivo para* $\mathbf{V}'$*.*

(d) *Sean* $G : \mathbf{C} \to \mathbf{V}$ *un generador aditivo para la variedad* $\mathbf{V}$*, y* $\mathbf{W}$ *una categoría aditiva donde los idempotentes se dividen. Un funtor* $F : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *es fielmente pleno si, y sólo si,* $FG : \mathbf{C} \to \mathbf{W}$ *es fielmente pleno.*

Tenemos las siguientes definiciones: sea $G : \mathbf{C} \to \mathbf{V}$ es un funtor fielmente pleno y $\mathbf{V}$ una variedad. La variedad, la cual es la subcategoría plena de $\mathbf{V}$ que consiste de todos los objetos en $\mathbf{V}$ que son isomorfos a sumandos de sumas finitas $\coprod_{i \in I} G(C_i)$, es llamada la subvariedad de $\mathbf{V}$ **generada** por $\mathbf{C}$ y se denotará con $\mathbf{V}(\mathbf{C})$. La variedad $\mathbf{V}$ es llamada generada por $\mathbf{C}$, si $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{C})$.

Proposición 1.6. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría preaditiva esqueléticamente pequeña. Entonces, el funtor restricción* $\mathrm{res} : \mathrm{Mod}(\mathbf{V}(\mathbf{C})) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$*, dado por* $\mathrm{res} : (\mathbf{V}(\mathbf{C}), \mathbf{Ab}) \to (\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$*, es una equivalencia de categorías.*

Demostración. Se sigue del hecho de que **Ab** es una categoría aditiva donde los idempotentes se dividen y de la parte (b) de la Proposición 1.4. □

Decimos que dos categorías esqueléticamente pequeñas $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ son **Morita equivalentes**, si las variedades $\mathbf{V}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{V}(\mathbf{C}')$ generadas por $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ son equivalentes.

Proposición 1.7. *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *categorías preaditivas esqueléticamente pequeñas. Entonces, las sigui-entes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *son Morita equivalentes.*

(b) $\mathbf{C}^{op}$ *y* $\mathbf{D}^{op}$ *son Morita equivalentes.*

(c) *Las categorías* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ *y* $\mathrm{Mod}(\mathbf{D})$ *son equivalentes.*

(d) *Las categorías* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C}^{op})$ *y* $\mathrm{Mod}(\mathbf{D}^{op})$ *son equivalentes.*

Demostración. La demostración puede verse en [Au2 Prop. 2.6]. □

A cada objeto C en una categoría $\mathbf{C}$, se le asocia el anillo $\mathrm{End}(C)$, el anillo de endomorfismos de C, cuyo grupo aditivo es $\mathbf{C}(C,C)$ y cuya multiplicación está dada por la composición de morfismos en $\mathbf{C}(C,C)$.

Se define el **anillo de** C, como el anillo $R_C = \mathrm{End}(C)^{op}$. Además, a cada C en $\mathbf{C}$ se le asocia el funtor **evaluación en** C, $e_C : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(R_C)$, donde $\mathrm{Mod}(R_C)$ es la categoría de los R_C-módulos izquierdos, dado por $e_C(M) = M(C)$, para cada $\mathbf{C}$-módulo M, donde el grupo abeliano $M(C)$ es considerado como un R_C-módulo mediante la operación $f * x = M(f)(x)$, para cada x en $M(C)$ y f en R_C.

Claramente, el funtor $e_C : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathrm{R}_C)$ es exacto y preserva sumas y productos. Si C es el único objeto de $\mathbf{C}$, entonces claramente el funtor $e_C : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(R_C)$ es fielmente pleno y denso, en efecto, primero desea verse que el morfismo inducido de grupos abelianos

$$e_C : (M_1, M_2) \to (M_1(C), M_2(C))$$

es isomorfismo. Sea $\eta = \{\eta_C : M_1(C) \to M_2(C)\}$ un morfismo de $\{C\}$-módulos, entonces si $0 = e_C(\eta) = \eta_C$, trivialmente se ve que $\eta = 0$. Por lo tanto e_C es fiel.

Sea g un morfismo de R_C-módulos y $f : C \to C$ un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces el siguiente cuadro es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_1(C) & \stackrel{g}{\to} & M_2(C) \\ {\scriptstyle M_1(f)}\downarrow & & {\scriptstyle M_2(f)}\downarrow \\ M_1(C) & \stackrel{g}{\to} & M_2(C) \end{array}$$

Para verificar que el cuadro de arriba conmuta, sea $x \in M_1(C)$, entonces tenemos que $M_2(f)(g(x)) = f * g(x)$, pero por otro lado, $g(M_1(f)(x)) = g(f * x) = f * g(x)$. De modo que $g = \{g : M_1(C) \to M_2(C)\}$ es una transformación natural, de este modo e_C es pleno.

Solo resta ver e_C es denso, en efecto, sea N un R_C-módulo, se define el $\mathbf{C}$-módulo M en objetos como $M(C) = N$. Como N es un R_C-módulo, hay un homomorfismo de anillos $\varphi : R_C \to \mathrm{End}(N)$, entonces, para cada f en $\mathbf{C}(C,C)$, definimos $M(f) = \varphi(f)$, con lo cual se ve que e_C es denso.

Hemos visto que cuando $\mathbf{C} = \{C\}$ es una categoría con un solo objeto, e_C es fielmente pleno y denso, i.e, define una equivalencia de categorías.

Decimos que un objeto C en una variedad $\mathbf{V}$ es un **generador** para $\mathbf{V}$, si $\mathbf{V}$ está generado por la subcategoría plena $\{C\}$ de $\mathbf{V}$ cuyo único objeto es C. Una variedad es llamada un **annulus**, si está generada por un solo objeto en $\mathbf{V}$. Obviamente, para cada objeto C en una variedad $\mathbf{V}$, la subvariedad de $\mathbf{V}$ generada por C, es un annulus el cual denotamos por $\mathbf{V}(C)$ y lo llamamos el annulus generado por C en $\mathbf{V}$.

Ahora bien, si C es un generador para el annulus $\mathbf{V}$, se sigue, de la Proposición 1.6, que el funtor $\mathrm{res} : \mathrm{Mod}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Mod}(\{C\})$ es una equivalencia de categorías y, por lo discutido anteriormente, $e_C : \mathrm{Mod}(\{C\}) \to \mathrm{Mod}(R_C)$ es una equivalencia de categorías. Así, tenemos una equivalencia de categorías $e_C : \mathrm{Mod}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Mod}(R_C)$, la cual induce una equivalencia $\mathfrak{p}(\mathbf{V}) \to \mathfrak{p}(R_C)$, donde $\mathfrak{p}(R_C)$ es la categoría de R_C-módulos proyectivos finitamente generados.

Como $\mathbf{V}$ es una variedad, por la Proposición 1.3, tenemos que $P : \mathbf{V} \to \mathfrak{p}(\mathbf{V})$ es una equivalencia de categorías. Luego, la composición $\mathbf{V} \xrightarrow{P} \mathfrak{p}(\mathbf{V}) \xrightarrow{e_C} \mathfrak{p}(R_C)$ nos da la equivalencia de categorías $\mathbf{V} \to \mathfrak{p}(R_C)$. De este modo, tenemos la siguiente:

Proposición 1.8. *Sea C un generador para el annulus* $\mathbf{V}$

(a) *El funtor evaluación $e_C : \mathrm{Mod}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Mod}(R_C)$ es una equivalencia de categorías, la cual induce una equivalencia $\mathfrak{p}(\mathbf{V}) \to \mathfrak{p}(R_C)$.*

(b) *Como $\mathbf{V}$ es una variedad, $P : \mathbf{V} \to \mathfrak{p}(\mathbf{V})$ es una equivalencia de categorías, y la composición $\mathbf{V} \xrightarrow{P} \mathfrak{p}(\mathbf{V}) \xrightarrow{e_C} \mathfrak{p}(R_C)$, es una equivalencia de categorías.*

1.3. Cambio de categorías

Sea $\mathbf{C}'$ una subcategoría de una categoría esqueléticamente pequeña $\mathbf{C}$. En esta sección se hablará brevemente de un adjunto izquierdo del funtor exacto restricción $\mathrm{res} : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C}')$. Si el lector desea mayores detalles, puede consultar [Au2].

Sea $\mathbf{C}$ una categoría esqueléticamente pequeña. Se puede probar la existencia de un único funtor (hasta isomorfismo) $\otimes_{\mathbf{C}} : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}^{op}) \times \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Ab}$ llamado **producto tensorial**, donde denotamos con $F \otimes_{\mathbf{C}} G$ a $\otimes_{\mathbf{C}}(F, G)$ para todo $\mathbf{C}^{op}$-módulo F y todo $\mathbf{C}$-módulo G, con las siguientes propiedades:

(a) (i) Para cada $\mathbf{C}$-módulo G, el funtor $\otimes_{\mathbf{C}} G : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}^{op}) \to \mathbf{Ab}$, definido como $(\otimes_{\mathbf{C}} G)(F) = F \otimes_{\mathbf{C}} G$ para todo $\mathbf{C}^{op}$-módulo F, es exacto derecho.

(ii) Para cada $\mathbf{C}^{op}$-módulo F, el funtor $F \otimes_{\mathbf{C}} : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Ab}$, definido como $(F \otimes_{\mathbf{C}})(G) = F \otimes_{\mathbf{C}} G$ para todo $\mathbf{C}$-módulo G, es exacto derecho.

(b) Para cada $\mathbf{C}^{op}$-módulo F y cada $\mathbf{C}$-módulo G, los funtores $F \otimes_{\mathbf{C}} -$ y $- \otimes_{\mathbf{C}} G$ preservan sumas arbitrarias.

(c) Para cada objeto C en $\mathbf{C}$, tenemos que $F \otimes_{\mathbf{C}} (\ \ , C) = F(C)$ y $(C, \ \ ) \otimes_{\mathbf{C}} G = G(C)$, para todo $\mathbf{C}^{op}$-módulo F y todo $\mathbf{C}$-módulo G.

Se define el funtor $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'} : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}') \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ como $(\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'} M)(C) = (C, \ )|_{\mathbf{C}'} \otimes_{\mathbf{C}'} M$, para todo M en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C}')$ y C en $\mathbf{C}$.

En [Au2 Prop. 3.1] puede verse la demostración de la siguiente:

Proposición 1.9. *Sea $\mathbf{C}'$ una subcategoría de una categoría esqueléticamente pequeña $\mathbf{C}$. Entonces, el funtor $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'} : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}') \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ satisface lo siguiente:*

(a) *$\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'}$ es exacto derecho y preserva sumas.*

(b) *La composición $\mathrm{Mod}(\mathbf{C}') \xrightarrow{\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'}} \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{Mod}(\mathbf{C}')$ es la identidad en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C}')$.*

(c) *Para cada objeto C' en $\mathbf{C}'$, tenemos $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} \mathbf{C}'(\ , C') = \mathbf{C}(\ , C')$.*

(d) *Para cada $\mathbf{C}'$-módulo M y cada $\mathbf{C}$-módulo N, el morfismo $\mathbf{C}(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} M, N) \to \mathbf{C}'(M, N|_{\mathbf{C}'})$ es un isomorfismo (recuérdese que $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} M|_{\mathbf{C}'} = M$).*

(e) *$\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'}$ es un funtor fielmente pleno.*

(f) *$\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'}$ preserva objetos proyectivos.*

Por la parte (d) de la Proposición 1.9 se tiene que $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'} : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}') \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ es el adjunto izquierdo del funtor restricción $\mathrm{res} : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C}')$, de aquí se sigue que, para cada $\mathbf{C}$-módulo M, hay un único morfismo de $\mathbf{C}$-módulos $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} (M|_{\mathbf{C}'}) \to M$, cuya restricción $(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} (M|_{\mathbf{C}'}))|_{\mathbf{C}'} \to M|_{C'}$ es la identidad en $M|_{\mathbf{C}}$. A este morfismo de $\mathbf{C}$-módulos, determinado de manera única: $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} (M|_{\mathbf{C}'}) \to M$, se le llama el **morfismo canónico**. El morfismo canónico define un morfismo de funtores $(\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'})\mathrm{res} \to I_{\mathrm{Mod}(\mathbf{C})}$. Es de interes saber para que C-módulos M el morfismo canónico es un isomorfismo.

Proposición 1.10. *Sea $\mathbf{C}'$ una subcategoría de una categoría esqueléticamente pequeña $\mathbf{C}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes, para un $\mathbf{C}$-módulo M.*

(a) *El morfismo canónico $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} (M|_{\mathbf{C}'}) \to M$ es un isomorfismo.*

(b) *Hay un $\mathbf{C}'$-módulo M' tal que los $\mathbf{C}$-módulos $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} M'$ y M son isomorfos.*

(c) *Hay una sucesión exacta $\coprod_{i\in I} \mathbf{C}(\ , C'_i) \to \coprod_{j\in J} \mathbf{C}(\ , C'_j) \to M \to 0$ de $\mathbf{C}$-módulos con C'_i y C'_j en la subcategoría $\mathbf{C}'$.*

(d) *Para cada $\mathbf{C}$-módulo N, el morfismo restricción $\mathbf{C}(M, N) \to \mathbf{C}'(M|_{\mathbf{C}'}, N|_{\mathbf{C}'})$ es un isomorfismo*

Demostración. La demostración puede verse en [Au2 Prop.3.2] $\square$

Como lo sugiere la parte (c) de la Proposición 1.10, decimos que un $\mathbf{C}$-módulo M es **proyectivamente presentado** sobre una subcategoría $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$, si el $\mathbf{C}$-morfismo canónico $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} M|_{\mathbf{C}'} \to M$ es un isomorfismo.

1.4. La categoría $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$

Sea $\mathbf{C}$ una variedad. Análogo al caso de módulos sobre un anillo, tiene sentido hablar de $\mathbf{C}$-módulos finitamente presentados. Decimos que un $\mathbf{C}$-módulo M es un $\mathbf{C}$-módulo finitamente presentado, si tiene una presentación proyectiva $P_1 \to P_0 \to M \to 0$, con P_i un $\mathbf{C}$-módulo proyectivo finitamente generado.

Los $\mathbf{C}$-módulos finitamente presentados tienen propiedades bien conocidas análogas a las que tienen los módulos finitamente presentados sobre un anillo.

Proposición 1.11. *Sea M un $\mathbf{C}$-módulo donde $\mathbf{C}$ es una variedad de annuli. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *M es un $\mathbf{C}$-módulo finitamente presentado.*

(b) *M es un $\mathbf{C}$-módulo finitamente generado con la siguiente propiedad: si $0 \to M_1 \to M_2 \to M \to 0$ es una sucesión exacta de $\mathbf{C}$-módulos y M_2 es un $\mathbf{C}$-módulo finitamente generado, entonces M_1 es un $\mathbf{C}$-módulo finitamente generado.*

Denotamos con $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ cuyos objetos son todos los $\mathbf{C}$-módulos finitamente presentados. Las siguientes propiedades básicas de los $\mathbf{C}$-módulos finitamente presentados no se demuestran aquí por ser análogas al caso de módulos sobre un anillo.

Proposición 1.12. *Sea $\mathbf{C}$-una variedad de annuli*

(a) *Cada $\mathbf{C}$-módulo proyectivo finitamente generado es un $\mathbf{C}$-módulo finitamente presentado.*

(b) *Sea $M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ una sucesión exacta de $\mathbf{C}$-módulos. Si M_1 y M_2 están en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, entonces lo está M_3.*

(c) *Sea $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ una sucesión exacta de $\mathbf{C}$-módulos.*

  (i) *Si M_1 es finitamente generado y M_2 es finitamente presentado, entonces M_3 es finitamente presentado,*

  (ii) *Si M_1 y M_3 son finitamente presentados, lo es M_2.*

(d) *Una suma finita $\coprod_{i \in I} M_i$ de $\mathbf{C}$-módulos es finitamente presentado si, y sólo, si cada M_i es finitamente presentado.*

Sea $\mathbf{C}$ una variedad. Se dice que un morfismo $C_2 \xrightarrow{f} C_1$ es un **pseudokernel**, para el morfismo $C_1 \xrightarrow{g} C_0$, si la sucesión de funtores

$$\mathbf{C}(\ ,C_2) \xrightarrow{\mathbf{C}(\ ,f)} \mathbf{C}(\ ,C_1) \xrightarrow{\mathbf{C}(\ ,g)} \mathbf{C}(\ ,C_0)$$

es exacta (ver [Au1]).

Tenemos la siguiente Proposición.

Proposición 1.13. *Las siguientes condiciones son equivalentes para una variedad $\mathbf{C}$*

(a) **C** *tiene pseudokerneles, i.e, todo morfismo en* **C** *tiene un pseudokernel.*

(b) *Todo morfismo en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *tiene un kernel en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*.*

(c) $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *es abeliana.*

Demostración. (a) implica (b). Afirmamos que todo $\mathbf{C}$-submódulo finitamente generado de un $\mathbf{C}$-módulo finitamemte presentado es finitamente presentado. En efecto, sea G un $\mathbf{C}$-módulo finitamente presentado y F un $\mathbf{C}$-submódulo de G, el cual es finitamente generado. Entonces, tenemos un epimorfismo $(\ \ ,C) \to F$ y una sucesion exacta $(\ \ ,C'') \xrightarrow{(\ ,f)} (\ \ ,C') \to G \to 0$. De este modo tenemos el siguiente diagrama conmutativo con columnas exactas.

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[r] \arrow[d] & (\ \ ,C'') \arrow[d, "(\ ,f)"] \\
 & (\ \ ,C) \arrow[r, "(\ ,g)"] \arrow[d] & (\ \ ,C') \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "j"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\
 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

donde W es el producto fibrado de $(\ \ ,C) \xrightarrow{(\ ,g)} (\ \ ,C') \xleftarrow{(\ ,f)} (\ \ ,C'')$. Del hecho de que $j : F \to G$ es un monomorfismo y de las propiedades del producto fibrado, se sigue que la sucesión $W \to (\ \ ,C) \to F \to 0$ es exacta. Ahora bién, W es el kernel del morfismo $(\ \ ,C \coprod C'') = (\ \ ,C) \coprod (\ \ ,C'') \xrightarrow{[(\ ,g)\ (\ ,f)]} (\ \ ,C)$, el cual es finitamente generado, por haber pseudokerneles en $\mathbf{C}$. Se sigue que la imagen $\mathrm{Im}(W \to (\ \ ,C))$ es finitamente generado, por lo cual F es finitamente presentado.

Sea $\alpha : F \to G$ un morfismo en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, entonces $\mathrm{Im}(F \xrightarrow{\alpha} G)$ es un $\mathbf{C}$-submódulo finitamente generado de un $\mathbf{C}$-módulo finitamente presentado, el cual es finitamente presentado. Asi tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \Omega F \arrow[r] \arrow[d] & \Omega \mathrm{Im}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r] & 0 \\
 & & (\ \ ,C) \arrow[r, equal] \arrow[d] & (\ \ ,C) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

De modo que $\mathrm{Ker}(\alpha)$ es finitamente generado, y es un $\mathbf{C}$-submódulo de F, el cual es finitamente presentado, se sigue que $\mathrm{Ker}(\alpha)$ es finitamente presentado.

(b) implica (c). Es suficiente ver que si $\alpha : F \to G$ es un morfismo entre $\mathbf{C}$-módulos finitamente presentados, entonces $\mathrm{Coker}(\alpha)$ es finitamente presentado, pero esto se sigue de la parte (b) de la proposición 1.12.

(c) implica (a). Sea mod($\mathbf{C}$) abeliana. Entonces, para cualquier morfismo $f : C \to C'$ en $\mathbf{C}$, el morfismo de $\mathbf{C}$-módulos $(\ \ , f) : (\ \ , C) \to (\ \ , C')$ tiene kernel en mod($\mathbf{C}$); el cual es finitamente presentado, en particular finitamente generado. Esto es, hay un epimorfismo $(\ \ , C'') \to \mathrm{Ker}(\ \ , f)$. Luego, tenemos un morfismo $g : C'' \to C$ en $\mathbf{C}$ tal que $(\ \ , g)$ es la composición $(\ \ , C'') \to \mathrm{Ker}(\ \ , f) \to (\ \ , C)$, de modo que la sucesión

$$(\ \ , C'') \xrightarrow{(\ \ ,g)} (\ \ , C) \xrightarrow{(\ \ ,f)} (\ \ , C')$$

es exacta. Por lo tanto $C'' \xrightarrow{g} C$ es un pseudokernel de $C \xrightarrow{f} C'$. $\square$

Argumentos estándar, que se usan para módulos sobre un anillo, sirven para probar que una composición $\alpha\beta$ de epimorfismos es esencial si, y sólo si, α y β son morfismos esenciales. Un epimorfismo esencial $P \to M \to 0$ es llamado **cubierta proyectiva** de M si P es un $\mathbf{C}$-módulo proyectivo.

Decimos que una presentación proyectiva $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \xrightarrow{\beta} M \to 0$ es una **presentación proyectiva mínima** de M si, y sólo si, los epimorfismos $P_0 \to M$ y $P_1 \to \mathrm{Im}\alpha$ son cubiertas proyectivas.

Como $\mathbf{C}$ es una variedad de annuli, por la Proposión 1.3, el funtor $P : \mathbf{C} \to \mathfrak{p}(\mathbf{C})$ induce una equivalencia de categorías. Así, los $\mathbf{C}$-módulos proyectivos finitamente generados son de la forma $\mathbf{C}(\ \ , C)$, con C en $\mathbf{C}$. Es de interés saber cuando un $\mathbf{C}$-módulo finitamente presentado tiene una presentación proyectiva mínima

Teorema 1.14. *Para una variedad de anuli* $\mathbf{C}$*, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Todo* $\mathbf{C}$*-módulo en* mod($\mathbf{C}$) *tiene una presentación proyectiva mínima.*

(b) *Para cada* C *en* $\mathbf{C}$*, todo* $\mathrm{End}(C)^{op}$*-módulo finitamente presentado tiene una presentación proyectiva mínima.*

Demostración. La demostración puede verse en [Au2 Teor. 4.12] $\square$

Recuerdese que un anillo R es llamado **semiperfecto**, si todo R-módulo finitamente generado tiene una cubierta proyectiva. De este modo, todo módulo finitamente presentado sobre un anillo semi-perfecto tiene una presentación proyectiva mínima.

Corolario 1.15. *Si* $\mathbf{C}$ *es una variedad de annuli, tal que* $\mathrm{End}(C)^{op}$ *es semiperfecto para cada* C *en* $\mathbf{C}$*, entonces todo* $\mathbf{C}$*-módulo en* mod($\mathbf{C}$) *tiene una presentación proyectiva mínima.*

1.5. Variedades Krull-Schmidt

En esta sección hablaremos de variedades Krull-Schmidt y de sus propiedades. Como resultado principal de esta sección probamos que, si $\mathbf{C}$ es una variedad Krull-Schmidt dualizante, entonces mod($\mathbf{C}$) es una variedad Krull-Schmidt dualizante. Para mayores detalles sobre los conceptos aquí expuestos, el lector pueden consultar [AR2] y [AR3].

Sea R un anillo artiniano conmutativo. Una R-categoría $\mathbf{C}$, es una categoría tal que cada grupo abeliano $\mathbf{C}(C_1, C_2)$ es un R-módulo, y la composición de homomorfismos de R-módulos $\mathbf{C}(C_1, C_2) \times \mathbf{C}(C_2, C_3) \to \mathbf{C}(C_1, C_3)$ es R-bilineal.

Supongamos que $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ son R-categorías. Un funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es un R-**funtor**, si el funtor inducido $F : \mathbf{C}(C_1, C_2) \to \mathbf{D}(D_1, D_2)$ es un homomorfismo de R-módulos, para todo C_1, C_2 en $\mathbf{C}$. Claramente, si $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ son R-funtores, entonces $GF : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ es un R-funtor .

Sean $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ R-funtores. Dado un morfismo $\alpha : F \to G$ y un elemento r en R, es fácil ver que para todo morfismo $f : C_1 \to C_2$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(C_2) \arrow[r, "r\alpha_{C_2}"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C_2) \arrow[d, "G(f)"'] \\ F(C_1) \arrow[r, "r\alpha_{C_1}"] & G(C_1) \end{tikzcd}$$

pues la composición de morfismos en $\mathbf{D}$ es R-lineal, i.e, el morfismo $r\alpha : F \to G$ dado por $(r\alpha)_C = r(\alpha_C)$ es de nuevo un morfismo de funtores. Si $\mathbf{C}$ es esqueléticamente pequeña, entonces la operación apenas descrita hacen de (F, G) un R-módulo. De de modo que $R - (\mathbf{C}, \mathbf{D})$, la categoría de todos los R-funtores que van de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$, es una R-categoría.

Sea $\mathbf{C}$ una R-categoría. El hecho de que $\mathbf{C}(C, C)$ es un R-módulo, para cada C en $\mathbf{C}$, nos permite definir el morfismo $R \to \mathbf{C}(C, C)$ por medio de $r \to r1_C$, para cada r en R, donde 1_C es el morfismo identidad en C. Es fácil observar que este es un homomorfismo de anillos y tiene la propiedad de que $\mathrm{Im}(R \to \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C))$ está contenido en el centro de $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C)$. Esto significa que $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C)$ es un R-álgebra.

Sea $\mathbf{C}$ una R-categoría y $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Ab}$ un funtor contravariante. Entonces, como se vio anteriormente, $F(C)$ es un $\mathrm{End}(C)^{op}$-módulo para cada C en $\mathbf{C}$ y por lo tanto un R-módulo, por medio del homomorfismo de anillos estándar. Luego, a cada funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Ab}$ se le asocia el funtor $F' : \mathbf{C} \to \mathrm{Mod}(R)$, donde $F'(C)$ es el R-módulo $F(C)$. No es difícil ver que $F' : \mathbf{C} \to \mathrm{Mod}(R)$ es un R-funtor, donde $\mathrm{Mod}(R)$ es la categoría de R-módulos; la cual es considerada como una R-categoría del modo usual. Se tiene un funtor $(\mathbf{C}, \mathbf{Ab}) \to R - (\mathbf{C}, \mathrm{Mod}(R))$, dado por $F \to F'$ para los funtores aditivos F en $(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$. Claramente este es un isomorfismo de categorías. Usaremos este isomorfismo como una identificación entre $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ y $(\mathbf{C}, \mathrm{Mod}(R))$.

Una R-categoría $\mathbf{C}$ es Hom-**finita** si, $\mathbf{C}(C_1, C_2)$ es un R-módulo finitamente generado, para cada par de objetos C_1, C_2 en $\mathbf{C}$. Se denota con $(\mathbf{C}, \mathrm{mod}(R))$, la subcategoría plena de $(\mathbf{C}, \mathrm{Mod}(R))$ consistente de todos los $\mathbf{C}$-módulos tales que $M(C)$ es un R-módulo finitamente generado, para todo objeto C en $\mathbf{C}$. Es fácil ver que $(\mathbf{C}, \mathrm{mod}(R))$ es una categoría abeliana y que el funtor inclusión $(\mathbf{C}, \mathrm{mod}(R)) \to (\mathbf{C}, \mathrm{Mod}(R))$ es exacto.

Sea r el radical de Jacobson de R e I la envolvente injectiva de R/r. Los funtores $D : (\mathbf{C}, \mathrm{mod}(R)) \to (\mathbf{C}^{op}, \mathrm{mod}(R))$, y $D : (\mathbf{C}^{op}, \mathrm{mod}(R)) \to (\mathbf{C}, \mathrm{mod}(R))$ dados por $D(M)(C) = \mathrm{Hom}_R(M(C), I)$ para toda C en $\mathbf{C}$ y toda C en $\mathbf{C}^{op}$ define una dualidad entre $(\mathbf{C}, \mathrm{mod}(R))$ y $(\mathbf{C}^{op}, \mathrm{mod}(R))$. Si $\mathbf{C}$ es una R-categoría Hom-finita y F es un objeto en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, entonces $F(C)$ es un R-módulo finitamente generado y por lo tanto $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ es una subcategoría de $(\mathbf{C}, \mathrm{mod}(R))$. Una R-**variedad** $\mathbf{C}$ es una R-categoría aditiva donde los idempotentes se dividen. Una R-variedad Hom-finita $\mathbf{C}$ es **dualizante** si el funtor $D : (\mathbf{C}, \mathrm{mod}(R)) \to (\mathbf{C}^{op}, \mathrm{mod}(R))$ induce una dualidad entre las categorías $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y $\mathrm{mod}(\mathbf{C}^{op})$.

Un tipo de categoría que sera de importancia para este trabajo es el que a continuación se define

Definición 1.16. *Una variedad* $\mathbf{C}$ *es* ***Krull-Schmidt****, si todo objeto de* $\mathbf{C}$ *se descompone en una suma finita de objetos cuyo anillo de endomorfismos es local.*

El objetivo, que se obtiene al final de esta sección, es ver que: si $\mathbf{C}$ es una R-variedad Krull-Schmidt, Hom-finita con pseudokerneles, entonces la categoría mod$(\mathbf{C})$ es una R-variedad Krull-Schmidt. Recordemos unos hechos importantes que ocurren con los módulos sobre un anillo.

Los siguientes lemas son resultados conocidos, para mayores detalles el lector puede consultar [S] y [AF].

Lema 1.17. *Sea* R *un anillo y* $\phi : P \to S$ *un epimorfismo de* R*-módulos tal que* P *es proyectivo y* S *es simple. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) *El morfismo* ϕ *es una cubierta proyectiva de* S.

(b) P *tiene un submódulo maximal que contiene a todo submódulo propio de* P.

(c) *El anillo de endomorfismos de* P *es local.*

Demostración. (a) implica (b). Como $S \cong P/\mathrm{Ker}\phi$, $\mathrm{Ker}\phi$ es un submódulo maximal de P. Sea $U \subsetneq P$ un submódulo y supongase que $U \nsubseteq \mathrm{Ker}\phi$. Entonces $U + \mathrm{Ker}\phi = P$ y por lo tanto $U = P$, pues ϕ es esencial. Por lo que $\mathrm{Ker}\phi$ contiene a todo subobjeto propio de P.

(b) implica (c). Primero observemos que P es un módulo inescindible. Se sigue que todo endomorfismo de P es invertible, si y sólo si, es un epimorfismo. Dadas dos no unidades α, β en $\mathrm{End}_R(P)$, tenemos que $\mathrm{Im}(\alpha + \beta) \subseteq \mathrm{Im}\alpha + \mathrm{Im}\beta \subseteq \mathrm{rad}P$. Usamos el hecho de que $\mathrm{rad}P$ contiene a todo submódulo propio de P. Por lo que $\alpha + \beta$ no es una unidad y $\mathrm{End}_R(P)$ es local.

(c) implica (a). Consideremos el $\mathrm{End}_R(P)$-submódulo H de $\mathrm{Hom}_R(P, S)$ que es generado por ϕ. Supongamos que $\phi = \phi\alpha$, para alguna α en $\mathrm{End}_R(P)$. Si α está en el radical de Jacobson $J(\mathrm{End}_R(P))$, entonces $H = HJ(\mathrm{End}_R(P))$, lo cual no es posible por el Lema de Nakayama. Por lo que α es un isomorfismo, pues $\mathrm{End}_R(P)$ es local. Se sigue que ϕ es una cubierta proyectiva. □

Lema 1.18. *Para un anillo* R*, las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) *La categoría de* R*-módulos proyectivos finitamentes generados es Krull-Schmidt.*

(b) *Todo* R*-módulo simple admite una cubierta proyectiva.*

(c) *Todo* R*-módulo finitamente generado admite una cubierta proyectiva.*

Demostración. (a) implica (b). Sea S un R-módulo simple. Entonces tenemos un morfismo no cero $\phi : P \to S$, para algún R-módulo proyectivo inescindible finitamemte generado P. El morfismo ϕ es una cubierta proyectiva, pues $\mathrm{End}_R(P)$ es local, por el Lema 1.17.

(b) implica (a). Sea P un R-módulo proyectivo finitamente generado. Entonces P admite una descomposición en un número finito de módulos inescindibles. Veamos que $\mathrm{End}_R(P)$ es local si P es inescindible. Escoja un submódulo maximal $U \subset P$. Entonces $S = P/U$ es simple y admite una cubierta proyectiva $P' \to S$. Por el Lema 1.17 se sigue que $P \cong P'$ pues P es inescindible. En particular, $\mathrm{End}_R(P)$ es local.

(a) y (b) implican (c). La hipótesis implica que toda suma finita de R-módulos simples admite una cubierta proyectiva. Sea X un R-módulo finitamente generado, y escoja un epimorfismo $\phi : P \to X$ con P proyectivo finitamente generado. Sea $P = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ una descomposición en módulos inescindibles. Entonces

$$P/\mathrm{rad}P = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i/\mathrm{rad}P_i$$

es una suma finita de R-módulos simples. Por el Lema 1.17, cada P_i tiene un anillo de endomorfismos local. El epimorfismo ϕ induce un epimorfismo $P/\mathrm{rad}P \to X/\mathrm{rad}X$ y por lo tanto $X/\mathrm{rad}X$ se descompone en un número finito de módulos simples. Existe una cubierta proyectiva $Q \to X/\mathrm{rad}X$ y se factoriza por el morfismo canónico $\pi : X \to X/\mathrm{rad}X$ via el morfismo $\psi : Q \to X$. El morfismo ψ es un epimorfismo esencial pues π es esencial, se sigue que ψ es esencial.

(c) implica (a). Es claro. □

De acuerdo con [AF Teorema 27.6], un anillo R que cumple cualquiera de las condiciones del Lema 1.18 es semiperfecto. La siguiente proposición nos garantiza, junto con el Lema 1.18 y el Teorema 1.14, que cuando $\mathbf{C}$ es una variedad Krull-Schmidt, los $\mathbf{C}$-módulos finitamente presentados tienen cubiertas proyectivas.

Proposición 1.19. *Sea $\mathbf{C}$-una variedad Krull-Schmidt. Entonces, el anillo de endomorfismos* $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C)$*, es semiperfecto para todo objeto C en $\mathbf{C}$.*

Demostración. Sea C un objeto en $\mathbf{C}$ y sea $\mathbf{C}(C)$ la subvariedad de $\mathbf{C}$ generada por C. Por la Proposición 1.8, tenemos una equivalencia de categorías

$$\mathbf{C}(C) \xrightarrow{P} \mathfrak{p}(\mathbf{C}(C)) \xrightarrow{e_C} \mathfrak{p}(\mathrm{End}^{op}(C))$$

Sea Q un objeto en $\mathfrak{p}(\mathrm{End}(C)^{op})$. Por la equivalencia de arriba, existe un objeto C' en $\mathbf{C}(C)$ tal que $e_C(P(C')) = e_C(\mathbf{C}(\ \ , C')) = \mathbf{C}(C, C') \cong Q$. Como C' es un objeto en $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}$ es una categoría Krull-Schmidt tenemos que C' se descompone como una suma finita de objetos $C' = \coprod_{i=1}^{n} C_j$, tal que $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C_j)$ es un anillo local. Entonces $Q \cong \coprod_{i=1}^{n}(C,\ C_j)$, y $\mathrm{End}((\ \ , C_j)) = \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C_j)$ es un anillo local, es decir la categoría $\mathfrak{p}(\mathrm{End}(C)^{op})$ es Krull-Schmidt. Por el Lema 1.18, el anillo $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}^{op}(C)$ es semiperfecto. □

Proposición 1.20. *Sea $\mathbf{C}$ una R-variedad Krull-Schmidt* Hom*-finita con pseudokerneles. Entonces* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *es una R-variedad Krull-Schmidt y todo objeto en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *admite cubierta proyectiva.*

Demostración. Por la Proposición 1.13, la categoría $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ es abeliana, por lo que es una variedad de annuli, sólo falta ver que todo objeto en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ se descompone en una suma finita de objetos, cuyo anillo de endomorfismos es local.

Como $\mathbf{C}$ es una variedad Krull-Schmidt, $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C)$ es un anillo semiperfecto para todo objeto C en $\mathbf{C}$. Luego, los objetos en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ tienen presentaciones proyectivas mínimas; en particular tienen cubiertas proyectivas. Sea F en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, y $(\ \ , C) \to F \to 0$ una cubierta proyectiva de F. Entonces F se descompone en un número finito de objetos inescindibles. De otro modo $(\ \ , C)$ (y por lo tanto C) se descompondría en un número inifinito de objetos, lo cual es imposible pues C se descompone en un número finito de objetos cuyo anillo de endomorfismos es local. Asi, F se descompone como $F = \coprod_{i=1}^{n} F_i$ tal que F_i es un objeto inescindible en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

Sea (F) la subvariedad de annuli de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ generada por F y $\Gamma = \mathrm{End}_{\mathbf{C}}^{op}(F)$. Por la Proposición 1.8 hay una equivalencia de categorías

$$(F) \xrightarrow{P} \mathfrak{p}((F)) \xrightarrow{e_F} \mathfrak{p}(\Gamma)$$

Entonces tenemos que $e_F(P(F)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(F, F) = \coprod_{i \in I}(F, F_i)$ es una descomposición de Γ en Γ-módulos proyectivos inescindibles (F, F_i).

Ahora bien, Γ es una R-álgebra de artin. En efecto, como F es finitamente presentado tenemos una sucesión exacta

$$(\ \ , C_1) \xrightarrow{(\ \ ,f)} (\ \ , C_0) \to F \to 0. \tag{1.1}$$

Aplicando $(\ \ , F)$ a la sucesión tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to (F, F) \to ((\ \ , C_0), F) \to ((\ \ , C_1), F)$$

Por el Lema de Yoneda, (F, F) es el kernel del morfismo $F(f) : F(C_0) \to F(C_1)$. Como $\mathbf{C}$ es Hom-fínita, tenemos que al evaluar la sucesión (1.1) en C_0, los conjuntos (C_0, C_0) y (C_0, C_1) son R-módulos finitamente generados, por lo que $F(C_0)$ es un R-módulo finitamente generado, esto es, el anillo de endomorfismos $\Gamma = (F, F)$ es un R-módulo finitamente generado. Concluimos que Γ es una álgebra de artin.

Por lo tanto (F, F_i) es un módulo inescindible sobre un R-álgebra de artin, por lo cual su anillo de edomorfismos $\mathrm{End}_{\Gamma}((F, F_i)) \cong \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(F_i)$ es local, es decir, se ha probado que F se descompone en un numero finito de objetos $F = \coprod_{i \in I} F_i$ tales que su anillo de endomorfismos es local. $\square$

1.6. El radical de una categoría aditiva peque na

En esta sección hablaremos del radical de una categoría. Los resultados expuestos aquí son extraidos directamente de [Mit] y [Ba].

Sea $\mathbf{C}$ una categoría aditiva. Un ideal izquierdo en $\mathbf{C}$ es un subfuntor del funtor $\mathbf{C}(\ \ , C)$ para algún objeto C en $\mathbf{C}$, y un ideal derecho es un subfuntor de $\mathbf{C}(C, \ \ )$. Un ideal bilateral es un subfuntor es dos variables del funtor $\mathbf{C}(\ \ ,\ \ )$. Si I es un ideal bilateral, puede formarse la categoría cociente $\mathbf{C}/I$ cuyos objetos son los mismos de $\mathbf{C}$ y

$$(\mathbf{C}/I)(C, C') = \mathbf{C}(C, C')/I(C, C'),$$

con la composición inducida por la composición en $\mathbf{C}$.

Dados dos ideales I_1 y I_2 de $\mathbf{C}$ se define el producto, $I_1 I_2$, por: $f \in I_1 I_2(C_1, C_3)$ si, y solo si, f es una suma finita de morfismos de la forma $C_1 \xrightarrow{h} C_2 \xrightarrow{g} C_3$, con $h \in I_1(C_1, C_2)$ y $g \in I_2(C_2, C_3)$. La intersección se define como:

$$I_1 \cap I_2(C_1, C_2) = I_1(C_1, C_2) \cap I_2(C_1, C_2).$$

Si I es un ideal bilateral de C y M es un $\mathbf{C}$-módulo se define un $\mathbf{C}$-submódulo IM de M por:

$$IM(C) = \Sigma_{f\in I(C,C')}\mathrm{Im}(M(f)),$$

con C en $\mathbf{C}$.

Sea $f : C \to C$ un morfismo en $\mathbf{C}$. Denotenemos el ideal izquierdo generado por f con (f), donde $(f)(C') \subset \mathbf{C}(C', C)$ consta de los morfismos de la forma fg, donde $g \in \mathbf{C}(C', C)$.

Pasemos a la definición del radical de Jacobson de una categoría. Si $\mathbf{C}$ es una categoría aditiva pequeña e $I \subset \mathbf{C}(\ \ , C)$ es un ideal izquierdo propio (esto es, $1_C \notin I(C)$), entonces el Lema de Zorn nos asegura que I está contenido en un ideal maximal izquierdo en $\mathbf{C}(\ \ , C)$. Definimos $\mathrm{rad}_{\mathbf{C}}(\ \ , C)$ como la la intersección de todos los ideales maximales izquierdos en $\mathbf{C}(\ \ , C)$.

Lema 1.21. $\mathrm{rad}_{\mathbf{C}}(C', C) = \{\alpha \in \mathbf{C}(C', C) | 1_C - \alpha\beta$ *tiene una inversa derecha para todo* $\beta \in \mathbf{C}(C, C')\} = \{\alpha \in \mathbf{C}(C', C) | 1_C - \alpha\beta$ *tiene inversa izquierda y derecha para todo* $\beta \in \mathbf{C}(C, C')\}$.

Demostración. Supongamos que $1_C - \alpha\beta$ no tiene inversa derecha. Entonces $(1_C - \alpha\beta)x \neq 1_C$ para todo $x \in \mathbf{C}(C, C)$; y por lo tanto genera un ideal propio izquierdo en $\mathbf{C}(\ \ , C)$, el cual esta contenido en un ideal máximo $M \subset \mathbf{C}(\ \ , C)$. Si $\alpha \in M(C') \subset \mathbf{C}(C', C)$, entonces $\alpha\beta \in M(C) \subset \mathbf{C}(C, C)$, por lo que $1_C \in M(C)$, una contradicción.

Recíprocamente, si $\alpha \notin \mathrm{rad}_{\mathbf{C}}(C', C)$, entonces $\alpha \notin M(C')$ para algún ideal máximal M. Por lo que $(\alpha) + M = \mathbf{C}(\ \ , C)$, donde (α) es el ideal izquierdo generado por (α). De aquí que $\alpha\beta + m = 1_C$ para algún $m \in M(C)$, por lo que $1_C - \alpha\beta$ no tiene inversa derecha.

Ahora supongamos que $\alpha \in \mathrm{rad}_{\mathbf{C}}(C', C)$ y $\beta \in \mathbf{C}(C, C')$, por lo que hemos visto $(1_C - \alpha\beta)\gamma = 1_C$, para algún γ. De aquí que $\gamma = 1_C + \alpha(\beta\gamma)$ y por lo que se ha visto γ tiene una inversa derecha δ; de donde se sigue que $\delta = 1_C - \alpha\beta$, y $\gamma\delta = \gamma(1_C - \alpha\beta) = 1_C$, por lo que $1_C - \alpha\beta$ tiene inversa izquierda. □

Lema 1.22. $1_C - \alpha\beta$ *tiene inversa derecha si, y sólo si,* $1_{C'} - \beta\alpha$ *tiene inversa derecha.*

Demostración. Si $(1_C - \alpha\beta)\gamma = 1_C$, entonces

$$(1_{C'} - \beta\alpha)(1_{C'} + \beta\gamma\alpha) = 1'_C + \beta(1_C - \alpha\beta)\gamma\alpha - \beta\alpha$$

□

De los lemas 1.21 y 1.22, y de sus duales vemos que: si definimos $\mathrm{rad}\mathbf{C}(C,\ \ )$ como la intersección de todos los ideales máximales derechos de $\mathbf{C}(C,\ \ )$, entonces $\mathrm{rad}_{\mathbf{C}}(C',\ \ )(C) = \mathrm{rad}_{\mathbf{C}}(\ \ , C)(C')$. Por lo que si se define $\mathrm{rad}_{\mathbf{C}}(C', C) = \mathrm{rad}_{\mathbf{C}}(\ \ , C)(C')$, entonces $\mathrm{rad}_{\mathbf{C}}(-,-)$ es un ideal bilateral llamado el **radical de Jacobson** de $\mathbf{C}$. Del Lema 1.21, se sigue que $\mathrm{rad}_{\mathbf{C}}(C, C)$ es el radical de Jacobson del anillo de endomorfismos $\mathrm{End}(C)$, para cada C en $\mathbf{C}$.

Finalizamos esta sección con la siguiente:

Proposición 1.23. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría aditiva y sea* $\mathrm{rad}_{\mathbf{C}}$ *el radical de Jacobson de* $\mathbf{C}$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen*

(a) $\operatorname{rad}_{\mathbf{C}}(C,C)$ *es el radical de Jacobson del anillo de endomorfismos* $\operatorname{End}(C)$*, para todo objeto* C *en* $\mathbf{C}$.

(b) *Si* C *y* C' *son objetos en* $\mathbf{C}$ *tales que* $\operatorname{End}(C)$ *y* $\operatorname{End}(C')$ *son anillos locales, entonces el radical* $\operatorname{rad}_{\mathbf{C}}(C,C')$ *consta de todos los no-isomorfismos de* C *a* C'.

(c) $\operatorname{rad}_{\mathbf{C}}(C,\ \ ) = \operatorname{rad}\mathbf{C}(C,\ \ )$ *y* $\operatorname{rad}_{\mathbf{C}}(\ \ ,C) = \operatorname{rad}\mathbf{C}(\ \ ,C)$*, para todo objeto* C *en* $\mathbf{C}$.

(d) $\operatorname{rad}_{\mathbf{C}}(C',\ \ )(C) = \operatorname{rad}_{\mathbf{C}}(\ \ ,C)(C')$*, para todo par de objetos* C *y* C' *en* $\mathbf{C}$.

1.7. Un par de funtores adjuntos

En esta sección estudiaremos un par de funtores adjuntos entre categorías de funtores contravariantes, el cual usaremos frecuentemente en este trabajo.

Sea $\mathbf{C}$ una categoría preaditiva esqueléticamente pequeña. Consideremos una subcategoría $\mathcal{T}$ de $\operatorname{Mod}(\mathbf{C})$. Si $\operatorname{Mod}(\mathcal{T})$ es la categoría de funtores contravariantes que van de $\mathcal{T}$ en $\mathbf{Ab}$, podemos definir el siguiente funtor

$$\phi : \operatorname{Mod}(\mathbf{C}) \to \operatorname{Mod}(\mathcal{T}),\ \ \phi(M) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Mod}(\mathbf{C})}(\ \ , M)|_{\mathcal{T}}.$$

Abusando de la notación y sin temor a entrar a alguna confusión, hacemos el ánalogo al caso de módulos sobre un anillo, escribiendo simplemente $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(N,M)$ en lugar de $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Mod}(\mathbf{C})}(N,M)$. Con esta aclaración podemos escribimos simplemente

$$\phi : \operatorname{Mod}(\mathbf{C}) \to \operatorname{Mod}(\mathcal{T}),\ \ \phi(M) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ , M)_{\mathcal{T}}.$$

Nuestro propósito en esta sección es probar la existencia de un adjunto izquierdo de ϕ.

Definición 1.24. *Una categoría* $\mathcal{C}$ *es llamada completa (completa-pequeña) si cualquier funtor* $F : J \to \mathcal{C}$*, con* J *una categoría (pequeña) tiene límite.*

Sean J una categoría cualquiera y $f, g : X \to Y$ un par de morfismos en J. Un objeto Z de J, cuando exista, es llamado un **ecualizador** (o diferencia del kernel) de f y g, si existe un morfismo $e : Z \to X$ tal que $fe = ge$, con la propiedad universal: si $e' : Z' \to X$ es un morfismo tal que $fe' = ge'$, entonces existe un único morfismo $h : Z' \to Z$, tal que $eh = e'$. Observese que, en el caso de que J sea una categoría abeliana, el ecualizador de dos morfismos paralelos siempre existe, para ver esto basta tomar el kernel de la diferencia de f y g.

Usaremos el siguiente teorema cuya demostración puede verse en [Mac V.2 Teor. 1].

Teorema 1.25. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría y* J *una categoría pequeña. Si* J *tiene equalizadores para cualquier par de morfismos, y todos los productos indexados por los conjuntos* $\operatorname{Obj}(J)$ *y* $\operatorname{Mor}(J)$ *existen en* $\mathcal{C}$*, entonces* $\mathcal{C}$ *tiene un límite para todo funtor* $F : J \to \mathcal{C}$.

Recuerdese que en la categoría $\operatorname{Mod}(\mathbf{C})$ el producto de cualquier familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de $\mathbf{C}$-módulos siempre existe; además $\operatorname{Mod}(\mathbf{C})$ tiene ecualizadores por ser una categoría abeliana. Entonces, por el Teorema 1.25, tenemos la siguiente

Proposición 1.26. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría preaditiva esqueléticamente pequeña. Entonces, la categoría de funtores* $\operatorname{Mod}(\mathbf{C})$ *es completa.*

De acuerdo a la Proposición 1.26, podemos suponer siempre que todo funtor $\mathcal{F} : J \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, con J una categoría cualquiera, tiene límite.

Proposición 1.27. *El funtor ϕ preserva límites.*

Demostración. Sea J una categoría cualquiera y $\mathcal{F} : J \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ un funtor con límite $\mathrm{Lim}\mathcal{F}$ en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Como $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ también es completa, se sigue que la composición de funtores $\phi\mathcal{F}$ también tiene límite $\mathrm{Lim}(\phi\mathcal{F})$ en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$. Queremos ver que $\mathrm{Lim}(\phi\mathcal{F}) \cong \phi(\mathrm{Lim}\mathcal{F})$.

Necesitamos ver que, para cualquier objeto T en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ tenemos un isomorfismo $\mathrm{Lim}(\phi\mathcal{F})(T) \cong \phi(\mathrm{Lim}\mathcal{F})(T)$

Recordemos que el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T, \ \ ) : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Ab}$ preserva límites [Mac V.4 Teor. 1], por lo que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T, \mathrm{Lim}\mathcal{F}) = \mathrm{Lim}\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T, \ \ )\mathcal{F}$. Pero

$$\phi(\mathrm{Lim}\mathcal{F})(T) = (\ \ , \mathrm{Lim}\mathcal{F})_{\mathcal{T}}(T) = (T, \mathrm{Lim}\mathcal{F}) = \mathrm{Lim}\mathrm{Hom}(T, \ \ )\mathcal{F} \tag{1.2}$$

Ahora bien, por el Lema de Yoneda, el funtor $\mathrm{Hom}(T, \ \ )\mathcal{F} : J \to \mathbf{Ab}$ es isomorfo a la composición de los funtores

$$J \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}((\ \ , T), \ \ )} \mathbf{Ab}$$

En particular, tenemos el siguiente isomorfismo:

$$\mathrm{Lim}\mathrm{Hom}(T, \ \ )\mathcal{F} \cong \mathrm{Lim}\mathrm{Hom}((\ \ , T), \ \ )\phi\mathcal{F} \tag{1.3}$$

Del mismo modo, $\mathrm{Hom}((\ \ , T), \ \ ) : \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \to \mathbf{Ab}$ también preserva límites, por lo que

$$\mathrm{Hom}((\ \ , T), \mathrm{Lim}(\phi\mathcal{F})) \cong \mathrm{Lim}\mathrm{Hom}((\ \ , T), \ \ )\phi\mathcal{F} \tag{1.4}$$

Se sigue de (1.3), (1.4), (1.2) y del Lema de Yoneda que

$$\mathrm{Lim}(\phi\mathcal{F})(T) \cong \mathrm{Hom}((\ \ , T), \mathrm{Lim}(\phi\mathcal{F})) \cong \mathrm{Lim}\mathrm{Hom}(T, \ \ )\mathcal{F} \cong \phi(\mathrm{Lim}\mathcal{F})(T)$$

como se quería. □

Recordemos que, en una categoría arbitraria $\mathcal{C}$, un **conjunto cogenerador** es un conjunto de objetos Q tal que, para cualquier par de morfismos paralelos $h \neq h' : a \to b$ en $\mathcal{C}$, existe un objeto $q \in Q$ y un morfismo $g : b \to q$ con $gh \neq gh'$. Un sólo objeto q es un **cogenerador**, si el conjunto con un solo objeto $\{q\}$ es un conjunto cogenerador. Nótese que en el caso de que $\mathcal{C}$ sea preaditiva, Q es un conjunto cogenerador si para cualquier morfismo $0 \neq h : a \to b$ existe un morfismo $g : b \to q$ con $q \in Q$, tal que $gh \neq 0$. En el caso de la categoría de los grupos abelianos $\mathbf{Ab}$ es bien sabido que $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, el grupo aditivo de los números racionales módulo los enteros, es un cogenerador inyectivo de $\mathbf{Ab}$. Con estas definiciones en mente se procederá a demostrar que $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ tiene un conjunto de cogeneradores.

Consideremos el funtor $D : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C}^{op})$, tal que para cualquier funtor F en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ y cualquier objeto C en $\mathbf{C}$, se define $(DF)(C) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(F(C), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Proposición 1.28. *La transformación natural $\eta : F \to D^2(F)$, definida en cada objeto C en $\mathbf{C}$ como*

$$\begin{aligned} \eta_C \quad : \quad & F(C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(F(C), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ & \eta_C(x)(f) = f(x) \end{aligned}$$

para cada f en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(F(C), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ y x en $F(C)$, es un monomorfismo en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$.

Demostración. Sea x en el grupo abeliano $F(C)$ y supongamos que $\eta_C(x) = 0$. Entonces, para cualquier $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(F(C), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, se tiene que $\eta_C(x)(g) = g(x) = 0$, lo cual implica que x debe ser 0. De otro modo existiría un $g_0 \in \mathrm{Hom}(F(C), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, tal que $g_0(x) \neq 0$, por ser $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ un cogenerador de $\mathbf{Ab}$; pero entonces $\eta_C(x)(g_0) = g_0(x) = 0$. Una contradicción. $\square$

No es muy difícil verificar la siguiente:

Proposición 1.29. *Sean F en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ y G en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C}^{op})$. Entonces, tenemos un isomorfismo*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(F, DG) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{op}}(G, DF),$$

definido, para cada $\eta \in \mathrm{Hom}(F, DG)$, como $\Phi(\eta)_C(y)(x) = \eta_C(x)(y)$, para cada $x \in F(C), y \in G(C), C \in \mathbf{C}$.

Proposición 1.30. *Para cualquier objeto C en $\mathbf{C}$, el funtor $D\mathbf{C}(C, \ \ )$ es un objeto inyectivo en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$.*

Demostración. Considerese una sucesion exacta en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$: $0 \to F \to G \to H \to 0$. Aplicando D y evaluando en $C \in \mathbf{C}$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to DH(C) \to DG(C) \to DF(C) \to 0.$$

Por la Proposición 1.29 y el Lema de Yoneda, tenemos el siguiente diagrama conmutativo exacto en $\mathbf{Ab}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & DH(C) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & DG(C) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & DF(C) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (\mathbf{C}(C, \ \ ), DH) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & (\mathbf{C}(C, \ \ ), DG) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & (\mathbf{C}(C, \ \ ), DF) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (H, D\mathbf{C}(C, \ \ )) \arrow[r] & (G, D\mathbf{C}(C, \ \ )) \arrow[r] & (F, D\mathbf{C}(C, \ \ )) & \end{tikzcd}$$

es decir, la siguiente sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(H, D\mathbf{C}(C, \ \ )) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(G, D\mathbf{C}(C, \ \ )) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(F, D\mathbf{C}(C, \ \ )) \to 0$$

es exacta, i.e, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ , D\mathbf{C}(C, \ \ )) : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Ab}$ es exacto y $D\mathbf{C}(C, \ \ )$ es inyectivo. $\square$

Proposición 1.31. *La categoría $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ tiene un conjunto cogenerador pequeño.*

Demostración. Sea F en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Consideremos una sucesión exacta

$$\coprod_{i\in I}\mathbf{C}(C_i,\ \ ) \xrightarrow{f} DF \to 0$$

Luego, tenemos el monomorfismo $D^2F \xrightarrow{Df} \prod_{i\in I} D\mathbf{C}(C_i,\ \ )$. Finalmente, por la Proposición 1.28 tenemos el monomorfismo

$$F \xrightarrow{Df\circ\eta} \prod_{i\in I} D\mathbf{C}(C_i,\ \ )$$

Así, $\{D\mathbf{C}(C,\ \ )\}_{C\in\mathbf{C}}$ es un conjunto cogenerador en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. En efecto, sea $\alpha : G \to F$ un morfismo no cero de $\mathbf{C}$-módulos. Entonces, existe un monomorfismo de $\mathbf{C}$-módulos $\eta = (\eta_i)_{i\in I} : F \to \prod_{i\in I} D\mathbf{C}(C_i,\ \ )$ que cumple $\eta\alpha \neq 0$ pues $\alpha \neq 0$. Por lo que $\eta_i\alpha \neq 0$, para algún morfismo $\eta_i : F \to D(C_i,\ \ )$. Como $\mathbf{C}$ es pequeña, $\{D\mathbf{C}(C,\ \ )\}_{C\in\mathbf{C}}$ es un conjunto pequeño. □

Sean $\mathcal{C}$ una categoría cualquiera y $\mathbf{X} \to Y = \{X_i \xrightarrow{f_i} Y\}_{i\in I}$ una familia de morfismos. Un **producto fibrado** de $\mathbf{X} \to Y$ es un par $(\{P \xrightarrow{p_i} X_i\}_{i\in I}, L)$, donde $L : P \to Y$ es un morfismo tal que $f_ip_i = L$, el cual cumple la siguiente propiedad universal: si $(\{Q \xrightarrow{q_i} X_i\}_{i\in I}, L')$ es un par tal que $f_iq_i = L'$, para cada $i \in I$, entonces existe un morfismo único $\eta : L' \to L$ tal que $L'\eta = L$, y $p_i\eta = q_i$ para cada $i \in I$.

Proposición 1.32. *En* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ *cualquier conjunto de sub-objetos de un* $\mathbf{C}$*-módulo* F *tiene producto fibrado.*

Demostración. La demostración se seguirá inmediatamente de la siguiente Proposición. □

Proposición 1.33. *Sea* $\mathcal{A}$ *una categoría abeliana con productos arbitrarios, para cualquier familia de objetos. Entonces, cualquier conjunto de subobjetos de un objeto* Y *en* $\mathcal{A}$ *tiene un producto fibrado.*

Demostración. Sea $\{X_i \xrightarrow{J_i} Y\}_{i\in I}$ una familia de monomorfismos en $\mathcal{A}$. Las proyecciones canónicas nos dan una familia de epimorfismos $\{Y \xrightarrow{\pi_i} Y/X_i\}_{i\in I}$. Tenemos el morfismo inducido $\pi = (\pi_i)_{i\in I} : Y \to \prod_{i\in I} Y/X_i$. Sea $(\mathrm{Ker}\pi, L)$ el kernel de π. Entonces $0 = \pi L = (\pi_i)_{i\in I}L = (\pi_iL)_{i\in I}$, es decir $\pi_iL = 0$ para cada $i \in I$. Entonces, para cada $i \in I$ existe un $p_i : \mathrm{Ker}\pi \to X_i$ tal que $J_ip_i = L$.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
 & & X_i \arrow[d, "J_i"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\pi \arrow[ur, "p_i"] \arrow[r, "L"] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_i"] & \prod_{i\in I} Y/X_i \\
 & & Y/X_i \arrow[d] & \\
 & & 0 &
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

El par $(\{\mathrm{Ker}\pi \xrightarrow{p_i} X_i\}_{i\in I}, L)$ es el producto fibrado de $\{X_i \xrightarrow{J_i} Y\}_{i\in I}$. En efecto, sea $(\{Q \xrightarrow{q_i} Y\}_{i\in I}, L')$ tal que $J_i q_i = L'$, para cada $i \in I$. Ya se vio previamente que $\pi_i J_i = 0$, para toda $i \in I$, luego $0 = \pi_i J_i q_i = \pi_i L'$, se sigue entonces que $0 = (\pi_i L')_{i\in I} = \pi L'$. Así, por la propiedad universal del kernel, existe un morfismo único $\eta : Q \to \mathrm{Ker}\pi$ tal que $L\eta = L'$. Queremos ver que en el siguiente diagrama los triángulos conmutan.

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[d, "\eta"] \arrow[ddl, bend right, "q_i"'] \arrow[ddr, bend left, "L'"] & \\
 & \mathrm{Ker}\pi \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "L"] & \\
X_i \arrow[rr, "J_i"] & & Y
\end{tikzcd} \tag{1.6}$$

Sólo falta probar que $p_i\eta = q_i$, pero para cualquier J_i tenemos que $J_i p_i \eta = L\eta = L' = J_i q_i$ y como J_i es monomorfismo tenemos que $p_i\eta = q_i$, como se quería. □

Proposición 1.34. *El funtor ϕ preserva el producto fibrado de cualquier familia de monomorfismos.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{X} \to Y = \{X_i \xrightarrow{J_i} Y\}_{i\in I}$ es una familia de monomorfismos. Por la proposición anterior $(\{\mathrm{Ker}\pi \xrightarrow{p_i} X_i\}_{i\in I}, L)$ es el producto fibrado de de $\mathbf{X} \to Y$. Como ϕ es exacto y izquierdo preserva limites, el diagrama (1.6) induce el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
 & & (\ ,X_i) \arrow[d, "(\ ,J_i)"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\ ,\pi) \arrow[r, "(\ ,L)"] \arrow[ur, "(\ ,p_i)"] & Y \arrow[r, "(\ ,\pi)"] \arrow[d, "(\ ,\pi_i)"] & \prod_{i\in I}(\ ,Y/X_i) \\
 & & (\ ,Y/X_i) &
\end{tikzcd}
$$

Siguiendo la misma prueba, que en la demostración dada en la Proposición 1.33, puede verificarse que $(\{\phi(\mathrm{Ker}\pi) \xrightarrow{\phi(p_i)} \phi(X_i)\}_{i\in I}, \phi(L))$ es el producto fibrado de de $\phi(\mathbf{X}) \to \phi(Y)$. $\square$

Como ya vimos anteriormente, se sigue del hecho de que $\mathbf{C}$ es esqueleticamente pequeña que, para cada par de objetos F y G en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, los morfismos de F en G son un conjunto, más aún, como $\mathbf{Ab}$ es aditiva se sigue que $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ es una categoría aditiva, por lo cual $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(\mathbf{C})}(F,G) \in \mathbf{Ab}$, i.e, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(\mathbf{C})}(F,G)$ está siempre en el universo de los grupos abelianos. Con esto concluimos que $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ es hom-**pequeña** en el sentido de [Mac].

Enunciamos el siguiente teorema cuya demostración puede consultarse en [Mac V.8 Teor. 2].

Teorema 1.35 (Teorema Especial del Funtor Adjunto)**.** *Sea A una categoría completa-pequeña,* hom *pequeña, con un conjunto de cogeneradores Q, donde todo conjunto de sub-objetos de un objeto a en A tiene producto fibrado. Sea X una categoría* hom *pequeña. Entonces, un funtor $G : A \to X$ tiene un adjunto izquierdo si, y sólo si, preserva límites pequeños y productos fibrados de familias de monomorfismos.*

Teorema 1.36. *Sean $\mathbf{C}$ una categoría preaditiva esqueléticamente pequeña, y $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ la categoría de funtores contravariantes aditivos que van de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{Ab}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) (i) $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ *es completa-pequeña.*

(ii) $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ *tiene un conjunto cogenerador pequeño.*

(iii) *En $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ cualquier conjunto de sub-objetos de un objeto F tiene producto fibrado.*

(b) *Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría pequeña preaditiva plena de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Entonces, el funtor $\phi : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ preserva límites pequeños y productos fibrados de familias de monomorfismos.*

(c) *El funtor $\phi : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ tiene un funtor adjunto izquierdo*

Demostración. (a) (i) ya se probó en la Proposición 1.26, (ii) en la Proposición 1.31, (iii) se probó en la Proposición 1.32,

(b) se sigue de las Proposiciones 1.34 y 1.27.

(c) se sigue de (a), (b) y del Teorema Especial del Funtor Adjunto. $\square$

Denotaremos con $-\otimes\mathcal{T}$ al adjunto izquierdo de ϕ. Tenemos, para cualquier par de objetos T en $\mathcal{T}$ y F en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, el siguiente isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}((\ \ ,T)_{\mathcal{T}}\otimes\mathcal{T},F)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}((\ \ ,T)_{\mathcal{T}},\phi(F)).$$

Por el Lema de Yoneda se sigue que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}((\ \ ,T)_{\mathcal{T}},\phi(F))=\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}((\ \ ,T)_{\mathcal{T}},(\ \ ,F)_{\mathcal{T}})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T,F)$$

por lo que debemos tener que $(\ ,T)_{\mathcal{T}}\otimes\mathcal{T}\cong T$, para todo objeto T en $\mathcal{T}$.

La parte (c) de la Proposición 1.1 nos asegura que en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ hay suficientes proyectivos, mientras que las Proposiciones 1.3 y 1.4 nos aseguran que hay suficientes inyectivos. Entonces, para un par de $\mathbf{C}$-módulos arbitrarios, F y G, pueden definirse los funtores derivados derechos de los funtores $\mathbf{C}(F,\ \ )$y $\mathbf{C}(\ \ ,G)$, los cuales se denotarán con $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(F,\ \ )$ y $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\ \ ,G)$ respectivamente, para cada entero n. Análogamente, pueden definirse los funtores derivados izquierdos de los funtores $F\otimes_{\mathbf{C}}-$ y $-\otimes_{\mathbf{C}}G$, los cuales se denotarán con $\mathrm{Tor}^{\mathbf{C}}_n(F,\ \ )$ y $\mathrm{Tor}^{\mathbf{C}}_n(\ \ ,G)$ respectivamente.

Del mismo modo, podemos definir los funtores derivados derechos del funtor ϕ, y los denotaremos como $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\ \ ,-)_{\mathcal{T}}:\mathrm{Mod}(\mathbf{C})\to\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$. Dichos funtores se definen como $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\ \ ,-)_{\mathcal{T}}(F)=\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\ \ ,F)_{\mathcal{T}}$, para cada functor F en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Por supuesto, también podemos definir los funtores derivados izquierdos del funtor $-\otimes\mathcal{T}$ y los denotaremos como $\mathrm{Tor}^{\mathcal{T}}_n(\ \ ,\mathcal{T}):\mathrm{Mod}(\mathcal{T})\to\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Más adelante veremos como calcular dichos funtores derivados y que relaciones hay entre ellos.

Proposición 1.37. *Sea G un funtor finitamente presentado en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Entonces, el funtor $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(G,\ \ )$ conmuta con sumas arbitrarias. Más aún, si G tiene una resolución consistente de $\mathbf{C}$-módulos proyectivos finitamente generados, entonces los funtores $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(G,\ \ )$ conmutan con sumas arbitrarias, para $i>0$.*

Demostración. Si G es finitamente presentado tenemos una sucesión exacta

$$0\to\mathrm{Ker}(\alpha)\to\mathbf{C}(\ \ ,C)\xrightarrow{\alpha}G\to0 \tag{1.7}$$

con $\mathrm{Ker}(\alpha)$ un funtor finitamente generado y C en $\mathbf{C}$. Sea $\mathcal{F}=\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Después de aplicar $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,\coprod_{i\in I}F_i)$ a (1.7), se sigue la existencia de un isomorfismo η, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
(\mathbf{C}(\ \ ,C),\coprod\limits_{i\in I}F_i) & \to & (\mathrm{Ker}(\alpha),\coprod\limits_{i\in J}F_i) & \to & \mathrm{Ext}^1(G,\coprod\limits_{i\in I}F_i) & \longrightarrow & 0\\
\cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \eta\downarrow & & \\
\coprod\limits_{i\in I}(\mathbf{C}(\ \ ,C),F_i) & \to & \coprod\limits_{i\in I}(\mathrm{Ker}(\alpha),F_i) & \to & \coprod\limits_{i\in I}\mathrm{Ext}^1(G,F_i) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Esto es porque $\mathbf{C}(\ \ ,C)$ y $\mathrm{Ker}(\alpha)$ son funtores finitamente generados y por la Proposición 1.2. Si $i>0$, entonces la afirmación se sigue por inducción. $\square$

Proposición 1.38. *Supongamos que $\mathcal{T}$ es una subcategoría plena de* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ *cuyos objetos son finitamente presentados, entonces el funtor ϕ preserva sumas arbitrarias*

Demostración. Como todo T en $\mathcal{T}$ es finitamente presentado, tenemos, por la Proposición 1.2, el isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T, \coprod_{i\in I} F_i) \cong \coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T, F_i)$ para cualquier colección de $\mathbf{C}$-módulos $\{F_i\}_{i\in I}$, i.e., $\phi(\coprod_{i\in I} F_i) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\quad, \coprod_{i\in I} F_i)_{\mathcal{T}} \cong \coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\quad, F_i)_{\mathcal{T}} = \coprod_{i\in I} \phi(F_i)$. $\square$

Capítulo 2

El Teorema Brenner-Butler

En este capítulo introduciremos las nociones de categoría de inclinación y veremos que, con ligeras modificaciones, la prueba de Bongartz [Bo] del Teorema Brenner-Butler se extiende a variedades de annuli. También veremos que tenemos los correspondientes teoremas sobre invarianza de los grupos de Groethendieck y las relaciones entre la dimensión global de una categoría y su categoría inclinada. Veremos también que bajo ciertas condiciones débiles podemos restringir el Teorema Brenner-Butler a las categorías de funtores finitamente presentados. Para variedades dualizantes, tenemos resultados análogos a los resultados clásicos sobre módulos de inclinación para álgebras de dimensión finita.

2.1. Categorías de inclinación clásica

El Teorema de Morita establece que para anillos R, S las correspondientes categorías de módulos $\mathrm{Mod}(R)$ y $\mathrm{Mod}(S)$ son equivalentes (como categorías abelianas), si existe un progenerador P para $\mathrm{Mod}(R)$, tal que $S \cong \mathrm{End}_R(P)^{op}$. Para comparar categorías de módulos, que son en algún sentido similares sin ser Morita equivalentes, el concepto de módulo de inclinación se vuelve muy importante.

Definición 2.1. *Sea A un álgebra de dimensión finita. Un A-módulo T es llamado un* módulo de inclinación *si satisface las siguientes condiciones.*

(i) *Existe una sucesión exacta corta $0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$ con P_0 y P_1 proyectivos finitamente generados*

(ii) *El A-módulo T no tiene auto extensiones, i.e,* $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$.

(iii) *Existe una sucesión exacta $0 \to A \to T_0 \to T_1 \to 0$, donde T_0 y T_1 son sumandos directos de sumas finitas de copias de T.*

Alrededor de 1980, S. Brenner y M. Butler probaron un resultado importante que sirve para comparar las categorías de módulos finitamente generados $\mathrm{mod}(A)$ y $\mathrm{mod}(B)$, donde $B := \mathrm{End}_A(T)^{op}$ y T es un A-módulo de inclinación [BB]. En general, dichas categorías no son equivalentes, pero inducen equivalencias entre subcategorías de ambas.

Teorema 2.2 (Brenner-Butler). *Sea A un álgebra de dimensión finita, T un A-módulo de inclinación y $B := \mathrm{End}_A(T)^{op}$. Entonces, los funtores $\mathrm{Hom}_A(T,\ \ )$ y $T \otimes_B$ inducen equivalencias mutuamente inversas entre la subcategoría*

$$\mathscr{T}({}_AT) := \{{}_AM \in \mathrm{mod}(A) | \mathrm{Ext}^1_A(T, M) = 0\}$$

de $\mathrm{mod}(A)$ y la subcategoría

$$\mathscr{Y}(T_B) := \{{}_BN \in \mathrm{mod}(B) | \mathrm{Tor}^B_1(N, T) = 0\}$$

de $\mathrm{mod}(B)$. Mas aún, los funtores $\mathrm{Ext}^1_A(T,\ \ )$ y $\mathrm{Tor}^B_1(\ \ , T)$ inducen equivalencías mutuamente inversas entre las subcategoría

$$\mathscr{F}({}_AT) := \{{}_AM \in \mathrm{mod}(A) | \mathrm{Hom}_A(T, M) = 0\}$$

de $\mathrm{mod}(A)$ y la subcategoría

$$\mathscr{X}(T_B) := \{{}_BN \in \mathrm{mod}(B) | T \otimes_B N = 0\}$$

de $\mathrm{mod}(B)$.

Posteriormente, Colby y Fuller [CF] obtienen resultados más generales que extienden los resultados de Brenner y Butler a las categorías de módulos sobre cualquier anillo R, generalizando el concepto de módulo de incinación.

Definición 2.3. *Un módulo T en $\mathrm{Mod}(R)$ es llamado de inclinación, si T es finitamente presentado y satisface las siguientes condiciones:*

(i) $\mathrm{pdim}(T) \leq 1$,

(ii) $\mathrm{Ext}^1_R(T, T) = 0$,

(iii) *hay una sucesión $0 \to R \to T_0 \to T_1 \to 0$, donde T_0 y T_1 son sumandos de sumas finitas de copias de T.*

Sea R un anillo y $\mathrm{Mod}(R)$ la categoría de R-módulos izquierdos y supongamos que T es un módulo de inclinación en $\mathrm{Mod}(R)$. En teoría de inclinación de módulos sobre un anillo se estudia la relación entre las categorías de módulos $\mathrm{Mod}(R)$ y $\mathrm{Mod}(\mathrm{End}_R(T)^{op})$ vía el funtor

$$\mathrm{Hom}_R(T,\ \ ) : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(\mathrm{End}_R(T)^{op}).$$

Siguiendo este enfoque, se desea generalizar la teoría de inclinación al nivel de categorías de funtores. Para lograr este propósito, obsérvese que el anillo R puede considerarse como una categoría $\{R\}$ con un sólo objeto. Entonces, el estudiar la categoría de R-módulos $\mathrm{Mod}(R)$ es equivalente a estudiar la categoría de funtores $\mathrm{Mod}(\{R\})$ a través de la equivalencía de categorías dada por el funtor evaluación $e_R : \mathrm{Mod}(\{R\}) \to \mathrm{Mod}(R)$. Supongamos que T es un módulo de inclinación en la categoría $\mathrm{Mod}(R)$, entonces existe un objeto $\mathbf{T}$ en $\mathrm{Mod}(\{R\})$, con las mismas propiedades homológicas que T, tal que $e_R(\mathbf{T}) = \mathbf{T}(R) \cong T$. Sea $\mathcal{T} = \mathrm{add}\mathbf{T}$, la subcategoría de $\mathrm{Mod}(\{R\})$ cuyos objetos son sumandos directos de sumas finitas de copias de $\mathbf{T}$. Entonces se sigue inmediatamente, a partir de la definición, que las categorías $\mathfrak{p}(\mathbf{T})$ y $\mathfrak{p}(\mathcal{T})$ son equivalentes, por lo que $\mathrm{Mod}(\mathbf{T})$ y $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ son categorías equivalentes. Entonces, tenemos una equivalencia de categorías a través del funtor evaluación $e_{\mathbf{T}} : \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \to \mathrm{Mod}(\mathrm{End}_R(T)^{op})$.

Ahora bien, consideremos el funtor $\phi : \mathrm{Mod}(\{R\}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$, definido como $\phi(M) = \mathrm{Hom}_{\{R\}}(\ \ , M)_{\mathcal{T}}$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}(\{R\}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "e_R"'] & \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \arrow[d, "e_{\mathbf{T}}"'] \\
\mathrm{Mod}(R) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(T,\ \ )"] & \mathrm{Mod}(\mathrm{End}_R(T)^{op}).
\end{tikzcd}$$

En efecto, si M es un $\{R\}$-módulo, entonces la equivalencia $e_R : \mathrm{Mod}(\{R\}) \to \mathrm{Mod}(R)$ induce el isomorfismo $e_R : \mathrm{Hom}_{\{R\}}(\mathbf{T}, M) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathbf{T}(R), M(R))$ y se tiene que

$$e_{\mathbf{T}}(\phi(M)) = \mathrm{Hom}_{\{R\}}(\mathbf{T}, M) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathbf{T}(R), M(R)) \cong \mathrm{Hom}_R(T,\ \ )e_R(M)$$

Luego, estudiar la teoría de inclinación en las categorías de módulos, vía el funtor $\mathrm{Hom}_R(T,\ \ ) : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(\mathrm{End}_R(T)^{op})$, es equivalente a estudiar la relación entre categorías de funtores, vía el funtor $\phi : \mathrm{Mod}(\{R\}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$.

Así, podemos establecer una definición que nos permita generalizar la teoría de inclinación de R-módulos sobre un anillo R a $\mathbf{C}$-módulos sobre una variedad de annuli $\mathbf{C}$.

Definición 2.4. *Sea $\mathbf{C}$ una variedad. Una subcategoría $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ es de* ***inclinación****, si los objetos de $\mathcal{T}$ son finitamente presentados y satisfacen las siguientes condiciones.*

(i) $\mathrm{pdim}\mathcal{T} \leq 1$.

(ii) *Para cada par de objetos T, T' en $\mathcal{T}$ tenemos $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, T') = 0$.*

(iii) *Para cada objeto C en $\mathbf{C}$, el funtor representable $\mathbf{C}(\ \ , C)$ tiene una resolución*

$$0 \to \mathbf{C}(\ \ , C) \to T_0 \to T_1 \to 0$$

con T_0, T_1 en $\mathcal{T}$.

Observemos que la definición de categoría de inclinación coincide con la del caso clásico en que la categoría de inclinación consta de un sólo objeto, generalizando el caso de categorías de módulos sobre un anillo.

2.1.1. La traza

Sea $\mathbf{C}$ una variedad de annuli. En esta parte veremos que en la categoría de funtores se puede definir de manera natural la traza, $\tau_{\mathcal{T}}(M)$, de $\mathcal{T}$ en un $\mathbf{C}$-módulo M, para cualquier subcategoría $\mathcal{T}$. Veremos las propiedades de la traza cuando $\mathcal{T}$ es una subcategoría de inclinación de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, obteniendo algunas generalizaciones que aparecen en el caso clásico de módulos sobre un anillo.

Sea G un grupo abeliano. Para cualquier $\mathbf{C}$-módulo M, puede definirse el $\mathbf{C}$-módulo $G \otimes_{\mathbb{Z}} M$, en objetos como $(G \otimes_{\mathbb{Z}} M)(C) = G \otimes_{\mathbb{Z}} M(C)$, y $(G \otimes_{\mathbb{Z}} M)(f) = 1_G \otimes_{\mathbb{Z}} M(f)$, para cualquier morfismo f en $\mathbf{C}$. No es dificíl verificar el siguiente

Lema 2.5. *Supongamos que $\varphi : G_1 \to G_2$ es un homomorfismo de grupos abelianos. Entonces, para todo* **C**-*módulo M tenemos un morfismo de* **C**-*módulos*

$$\varphi \otimes_{\mathbb{Z}} 1_M = \{\varphi \otimes_{\mathbb{Z}} 1_{M(C)}\}_{C\in\mathbf{C}} : G_1 \otimes_{\mathbb{Z}} M \to G_2 \otimes_{\mathbb{Z}} M.$$

Más aún, $\varphi \otimes_{\mathbb{Z}} 1_M$ es un epimorfismo, si φ es un epimorfismo.

Sea T un objeto en $\mathcal{T}$ y $X = \{f_i\}_{i\in I}$ un conjunto de generadores del grupo abeliano $\mathbf{C}(T, M)$. Entonces, existe una $\mathbb{Z}$-base $\{\mu_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{Z}^{(X)}$ y un epimorfismo de grupos abelianos

$$\varphi : \mathbb{Z}^{(X)} \to \mathbf{C}(T, M),\ \varphi(\mu_i) = f_i, \forall i \in I$$

Para cada C en **C**, tenemos un isomorfismo de grupos abelianos

$$\psi_C : T^{(X)}(C) \to \mathbb{Z}^{(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} T(C),\ \ \psi_C((t_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \mu_i \otimes t_i,\ t_i \in T(C),$$

y claramente, tenemos un isomorfismo de **C**-módulos $\psi = \{\psi_C\} : T^{(X)} \to \mathbb{Z}^{(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} T$.

Sea $\alpha_i : T \to T^{(X)}$, la i-ésima inclusión canonica de T en el coproducto $T^{(X)}$ y $f = \sum c_i f_i \in \mathbf{C}(T, M)$, con $c_i \in \mathbb{Z}$. Entonces, por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo γ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\sum c_i\alpha_i"'] \arrow[d, "\sum c_i f_i"] \\ T^{(X)} \arrow[r, "\gamma"] & M \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Por otro lado, para cada C en **C**, definimos un morfismo de grupos abelianos

$$e_C^{(T,M)} : \mathbf{C}(T, M) \otimes T(C) \to M,\ e_C^{(T,M)}(\eta \otimes t) = \eta_C(t)$$

Proposición 2.6. *La colección $e^{(T,M)} = \{e_C^{(T,M)}\}_{C\in\mathbf{C}} : \mathbf{C}(T, M) \otimes_{\mathbb{Z}} T \to M$ es un morfismo de* **C**-*módulos.*

Demostración. Sea $\eta \in \mathbf{C}(T, M)$ y $f : C_1 \to C_2$ un morfimos en **C**. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T(C_2) \arrow[r, "\eta_{C_2}"] \arrow[d, "T(f)"'] & M(C_2) \arrow[d, "M(f)"'] \\ T(C_1) \arrow[r, "\eta_{C_1}"] & M(C_1) \end{tikzcd}$$

Esto es,

$$M(f)\eta_{C_2} = \eta_{C_1} T(f) \tag{2.2}$$

Queremos ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(T, M) \otimes T(C_2) \arrow[r, "e_{C_2}^{(T,M)}"] \arrow[d, "(\mathbf{C}(T,M)\otimes T)(f)"'] & M(C_2) \arrow[d, "M(f)"] \\ \mathbf{C}(T, M) \otimes T(C_1) \arrow[r, "e_{C_1}^{(T,M)}"] & M(C_1) \end{tikzcd}$$

Sea $(\eta \otimes t_C)$ un elemento de $\mathbf{C}(T,M) \otimes T(C_2)$. Entonces, de la ecuación (2.2) se sigue que

$$M(f)(e^{(T,M)}_{C_2}(\eta \otimes t_C)) = M(f)(\eta_{C_2}(t_C)) = \eta_{C_1}(T(f)(t_C)) \tag{2.3}$$

y por otro lado,

$$e^{(T,M)}_{C_1}(\mathbf{C}(T,M) \otimes T)(f)(\eta \otimes t_C) = e^{(T,M)}_{C_1}(\eta \otimes T(f)(t_C)) = \eta_{C_1}(T(f)(t_C)). \tag{2.4}$$

La afirmación se sigue de las ecuaciones (2.3) y (2.4). $\square$

En general, el morfismo $e^{(T,M)} : \mathbf{C}(T,M) \otimes_{\mathbb{Z}} T \to M$ no es natural en T, pero si en M.

Proposición 2.7. *El morfismo de* $\mathbf{C}$*-módulos* $e^{(T,M)}$ *es natural en* M*.*

Demostración. Sea T un objeto fijo en $\mathcal{T}$, y $\varphi : M_1 \to M_2$ un morfismo de $\mathbf{C}$-módulos. Entonces φ induce el siguiente morfismo de $\mathbf{C}$-módulos

$$\mathbf{C}(T,\varphi) \otimes_{\mathbb{Z}} 1_T : \mathbf{C}(T,M_1) \otimes_{\mathbb{Z}} T \to \mathbf{C}(T,M_2) \otimes_{\mathbb{Z}} T$$

definida en cada objeto C en $\mathbf{C}$ como $(\mathbf{C}(T,\varphi) \otimes_{\mathbb{Z}} 1_T)_C(\eta \otimes t_C) = (\varphi\eta \otimes t_C)$. Afirmamos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(T,M_1) \otimes_{\mathbb{Z}} T \arrow[r, "e^{(T,M_1)}"] \arrow[d, "\mathbf{C}(T,\varphi)\otimes_{\mathbb{Z}} 1_T"'] & M_1 \arrow[d, "\varphi"'] \\
\mathbf{C}(T,M_2) \otimes_{\mathbb{Z}} T \arrow[r, "e^{(T,M_2)}"] & M_2.
\end{tikzcd}$$

En efecto, sea $(\eta \otimes t_C) \in \mathbf{C}(T,M_1) \otimes_{\mathbb{Z}} T(C)$, con η es una transformación natural en $\mathbf{C}(T,M_1)$, C en $\mathbf{C}$ y $t_C \in T(C)$. Entonces se sigue que $\mathbf{C}(T,\varphi) \otimes_{\mathbb{Z}} 1_T(\eta \otimes t_C) = (\varphi\eta \otimes t_C)$. De este modo

$$\begin{aligned}
(\varphi e^{(T,M_1)})_C(\eta \otimes t_C) &= \varphi_C(e^{(T,M_1)}_C(\eta \otimes t_C)) \\
&= \varphi_C(\eta_C(t_C)) \\
&= (\varphi\eta)_C(t_C),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
(e^{(T,M_2)}\mathbf{C}(T,\varphi) \otimes_{\mathbb{Z}} 1_T)_C(\eta \otimes t_C) &= e^{(T,M_2)}_C((\mathbf{C}(T,\varphi) \otimes_{\mathbb{Z}} 1_T)_C(\eta \otimes t_C)) \\
&= e^{(T,M_2)}_C(\varphi\eta \otimes t_C) \\
&= (\varphi\eta)_C(t_C)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

nuestra afirmación se sigue de la igualdad de (2.5) y (2.6) $\square$

Una consecuencia importante está en el siguiente

Lema 2.8. *La composición de morfismos*

$$T^{(X)} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}^{(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} T \xrightarrow{\varphi \otimes_{\mathbb{Z}} 1_T} \mathbf{C}(T,M) \otimes_{\mathbb{Z}} T \xrightarrow{e^{(T,M)}} M \tag{2.7}$$

también hace conmutar el diagrama (2.1), y en conclusión $\gamma = e^{(T,M)} \circ \varphi \otimes_{\mathbb{Z}} 1_T \circ \psi$*, por la unicidad de* γ*.*

Demostración. En efecto, sean $C \in \mathbf{C}$ y $t \in T(C)$, entonces

$$\begin{aligned}
(e_C^{(T,M)} \circ \varphi \otimes_{\mathbb{Z}} 1_{T(C)} \circ \psi_C \circ \sum c_i(\alpha_i)_C)(t) &= e_C^{(T,M)}(\varphi \otimes_{\mathbb{Z}} 1_{T(C)}(\psi_C(c_i t)_{i\in I})) \\
&= e_C^{(T,M)}(\varphi \otimes_{\mathbb{Z}} 1_{T(C)}(\sum_{i\in I} \mu_i \otimes c_i t)) \\
&= e_C^{(T,M)}(\sum_{i\in I} \varphi(\mu_i) \otimes c_i t) \\
&= e_C^{(T,M)}(\sum_{i\in I} c_i f_i \otimes t) \\
&= \sum_{i\in I} c_i e_C^{(T,M)}(f_i \otimes t) \\
&= \sum_{i\in I} c_i (f_i)_C(t)
\end{aligned}$$

como se afirmó.

$\square$

Ahora resulta natural la siguiente

Definición 2.9. *Sean T y M objetos en* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. *Se define la* ***traza*** *de T en M es* $\tau_T(M) = \mathrm{Im}(e^{(T,M)})$.

Observemos que $(\tau_T(M))(C) \subseteq \tau_{T(C)}(M(C))$. En efecto

$$(\tau_T(M))(C) \subset \sum_{\eta \in \mathbf{C}(T,M)} \mathrm{Im}(\eta_C) \subset \tau_{T(C)}(M(C)).$$

Nótese que la igualdad se da cuando la categoria $\mathbf{C}$ consta de un solo objeto.

Tenemos, para la colección de objetos $\mathrm{Obj}\mathcal{T}$ y para un $\mathbf{C}$-módulo fijo M, el morfismo inducido

$$e^{(\mathcal{T},M)} = (e^{(T,M)})_{T\in \mathrm{obj}\mathcal{T}} : \coprod \mathbf{C}(T,M) \otimes T \to M \tag{2.8}$$

Proposición 2.10. *Sea M un $\mathbf{C}$-módulo fijo; y para cada objeto T en $\mathcal{T}$ consideremos un sistema de generadores X_T del grupo abeliano $\mathbf{C}(T,M)$. Entonces, para todo $T' \in \mathrm{Obj}\mathcal{T}$ y todo morfismo $f : T' \to M$, existen morfismos ρ y γ, con γ un epimorfismo, los cuales hacen conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & & T' \arrow[d, "f"] \arrow[dll, "\rho"'] \\
\coprod_{T\in \mathrm{Obj}\mathcal{T}} T^{(X_T)} \arrow[r, "\gamma"] & \coprod_{T\in \mathrm{Obj}\mathcal{T}} \mathbf{C}(T,M) \otimes_{\mathbb{Z}} T \arrow[r, "e^{(\mathcal{T},M)}"] & M
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea M un $\mathbf{C}$-módulo fijo y consideremos un conjunto de generadores X_T del grupo abeliano $\mathbf{C}(T,M)$, con $T \in \mathrm{obj}\mathcal{T}$. Entonces, la composición (2.7) induce la siguiente composición:

$$\coprod_{T\in\mathrm{Obj}\mathcal{T}} T^{(X_T)} \xrightarrow{\cong} \coprod_{T\in\mathrm{Obj}\mathcal{T}} \mathbb{Z}^{(X_T)} \otimes_{\mathbb{Z}} T \xrightarrow{(\varphi\otimes_{\mathbb{Z}}1_T)_{T\in\mathrm{Obj}\mathcal{T}}} \coprod_{T\in\mathrm{Obj}\mathcal{T}} \mathbf{C}(T,M)\otimes_{\mathbb{Z}} T \xrightarrow{e^{(\mathcal{T},M)}} M$$

donde la composición de los dos morfismos que aparecen del lado izquierdo es un epimorfismo.

Ahora bien, sea T' un objeto de $\mathcal{T}$ y $\beta_{T'} : T^{(X_{T'})} \to \coprod_{T\in\mathrm{Obj}\mathcal{T}} T^{(X_T)}$, la T'-ésima inclusión canónica.

Sean $X_{T'} = \{f_i\}_{i\in I}$ y $f = \sum_{i\in I} c_i f_i \in \mathbf{C}(T',M)$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & T'^{(X_{T'})} \arrow[dl, "\beta_{T'}"'] & T' \arrow[l, "\sum_{i\in I} c_i j_i"'] \arrow[dr, "f=\sum_{i\in I} c_i f_i"] & \\
\coprod_{T\in\mathrm{Obj}\mathcal{T}} T^{(X_T)} \arrow[r, "\cong"] & \coprod_{T\in\mathrm{Obj}\mathcal{T}} \mathbb{Z}^{(X_T)} \otimes_{\mathbb{Z}} T \arrow[r] & \coprod_{T\in\mathrm{Obj}\mathcal{T}} \mathbf{C}(T,M)\otimes_{\mathbb{Z}} T \arrow[r, "e^{(\mathcal{T},M)}"] & M
\end{tikzcd}$$

□

2.1.2. Teorías de torsión.

En [CF] se demuestra que para un A-módulo de inclinación T, la subcategoría $\mathscr{T}(T)$ de $\mathrm{Mod}(A)$, cuyos objetos son imágenes epimorficas de sumas de copias de T, es una subcategoría de torsión. Más aún, $\mathscr{T}(T) = \{M \in \mathrm{Mod}(A) | \mathrm{Ext}^1(T,M) = 0\}$. En esta parte se generaliza este hecho para el caso de la categoría de funtores.

Comenzamos recordando algunos conceptos generales. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana pequeña con sumas arbitrarías. Para mayores detalles, el lector puede consultar [S].

Definición 2.11. *Una **teoría de torsión** en una categoría $\mathcal{C}$ consiste en un par $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ de subcategorías de $\mathcal{C}$, que satisfacen los siguientes axiomas:*

(i) $\mathscr{T} \cap \mathscr{F} = 0$.

(ii) *$\mathscr{T}$ es cerrada bajo imágenes epimórficas.*

(iii) *$\mathscr{F}$ es cerrada bajo sub-objetos.*

(iv) *Para cada objeto X de $\mathcal{C}$ hay una sucesión exacta:*

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

con $X' \in \mathrm{Obj}\mathscr{T}$ y $X'' \in \mathrm{Obj}\mathscr{F}$.

Como consecuencia de la definición previa, los axiomas (i)-(iii) pueden ser reemplazados por el axioma de ortogonalidad:

(v) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = 0$ para cada $X \in \mathrm{Obj}\mathscr{T}$ y $Y \in \mathrm{Obj}\mathscr{F}$.

Dada una teoría de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ en $\mathcal{C}$, la subcategoría $\mathscr{T}$ es llamada **subcategoría de torsión**, y la subcategoría $\mathscr{F}$ es llamada **subcategoría libre de torsión**.

Como consecuencia de los axiomas (i)-(iv) de teoría de torsión tenemos la siguiente:

Proposición 2.12. *Sea $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una teoría de torsión. Entonces, un objeto X está en $\mathscr{T}$ si, y sólo si,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)=0$*, para todo Y en* $\mathrm{Obj}\mathscr{F}$*. Dualmente, Y está en $\mathscr{F}$ si, y sólo si,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)=0$*, para todo X en $\mathscr{T}$.*

Finalmente, para caracterizar las subcategorías de torsión, usaremos el siguiente teorema probado en [Po Teo. 8.4].

Teorema 2.13. *Una subcategoría plena $\mathscr{T}$ de $\mathcal{C}$ es una subcategoría de torsión en $\mathcal{C}$ si, y sólo si, $\mathscr{T}$ es cerrada bajo imágenes epimórficas, sumas directas y extensiones. Dualmente, una subcategoría plena $\mathscr{F}$ de $\mathcal{C}$ es una subcategoría libre de torsión de $\mathcal{C}$ si, y sólo si, $\mathscr{F}$ es cerrada bajo subobjetos, productos y extensiones.*

Sean $\mathbf{C}$ una categoría preaditiva y $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Denotamos con $\mathscr{T}(\mathcal{T})$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ cuyos objetos son imágenes epimórficas de sumas con objetos en $\mathcal{T}$.

El propósito en esta sección es demostrar que $\mathscr{T}(\mathcal{T})$ es una subcategoría de torsión de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$.

Proposición 2.14. *Sea M un objeto en* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$*. Entonces M está en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$ si, y sólo si, $e^{(\mathcal{T},M)}$ es un epimórfismo.*

Demostración. Sea $\mathrm{Obj}\mathcal{T}=\{T_i\}_{i\in I}$ el conjunto de objetos de $\mathcal{T}$. Consideremos un morfismo $\eta=(\eta^j)_{j\in J}:\coprod_{j\in J}T_j\to M$, donde $\{T_j\}_{j\in J}$ es una familia de objetos en $\mathrm{Obj}\mathcal{T}$. Por la Proposición 2.10, se sigue que para cada $j\in J$ existe un morfismo $\phi^j : T_j \to \coprod_{i\in I}(T_i,M)\otimes T_i$, tal que $e^{(\mathcal{T},M)}\phi^j=\eta^j$.

$$\begin{tikzcd} & T_j \arrow[dl, "\phi^j"'] \arrow[d, "\eta^j"] \\ \coprod_{i\in I}(T_i,M)\otimes_{\mathbb{Z}} T_i \arrow[r, "e^{(\mathcal{T},M)}"] & M \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

Sea $\phi=(\phi^j)_{j\in J}:\coprod_{j\in J}T_j\to\coprod_{i\in I}(T_i,M)\otimes_{\mathbb{Z}}T_i$ el morfismo inducido. Luego se tiene que $e^{(\mathcal{T},M)}\phi=\eta$.

De este modo, si η es un epimorfismo, i.e, si M está en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$, entonces $e^{(\mathcal{T},M)}$ es un epimorfismo. El recíproco se sigue de la Proposición 2.10. □

Proposición 2.15. *Si M está en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$, entonces* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T,M)=0$ *para cualquier* $T\in\mathrm{Obj}\mathcal{T}$*.*

Demostración. Supongamos que M está en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$. Entonces hay una sucesión exacta corta de la forma

$$0\to\mathrm{Ker}(\alpha)\to\coprod_{j\in J}T_i\xrightarrow{\alpha}M\to 0 \tag{2.10}$$

donde $\{T_j\}_{j\in J}$ es una familia de objetos en Obj$\mathcal{T}$. De la Proposición 1.37, se sigue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, \ \ )$ conmuta con sumas arbitrarias, pues T es finitamente presentado. También se cumple que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, T_j) = 0$, para cada $j \in J$, por la condición (ii) de categoría de inclinación y que $\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{C}}(T, \mathrm{Ker}(\alpha)) = 0$, porque pdim$T \leq 1$. Así, al aplicar $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T, \ \ )$ a la sucesión (2.10), se sigue de la sucesión larga de homología la siguiente sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, \coprod_{j\in J} T_j) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, M) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{C}}(T, \mathrm{Ker}(\alpha)) = 0,$$

y la afirmación se sigue. $\square$

Proposición 2.16. *La categoría $\mathscr{T}(\mathcal{T})$ es cerrada bajo extensiones, sumas directas e imágenes epimórficas. Es decir, $\mathscr{T}(\mathcal{T})$ es una subcategoría de torsión en* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$.

Demostración. Claramente es cerrada bajo sumas arbitrarias e imagenes epimórficas, sólo falta ver que es cerrada bajo extensiones. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0 \tag{2.11}$$

con M_1, M_3 en Obj$\mathscr{T}$. Luego, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_i, M_1) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_i, M_2) = 0$, por la Proposición 2.15.

Sea Obj$\mathcal{T} = \{T_i\}_{i\in I}$. Entonces, después de aplicar $\mathbf{C}(T_i, \ \ )$, para cada T_i, a la sucesión (2.11) tenemos sucesiónes exactas cortas de grupos abelianos

$$0 \to \mathbf{C}(T_i, M_1) \to \mathbf{C}(T_i, M_2) \to \mathbf{C}(T_i, M_3) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_i, M_1) = 0 \tag{2.12}$$

Después de aplicar $\otimes_{\mathbb{Z}} T_i(C)$ a la sucesión (2.12), para cada C en $\mathbf{C}$, obtenemos una sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos

$$\mathbf{C}(T_i, M_1) \otimes_{\mathbb{Z}} T_i(C) \to \mathbf{C}(T_i, M_2) \otimes_{\mathbb{Z}} T_i(C) \to \mathbf{C}(T_i, M_3) \otimes_{\mathbb{Z}} T_i(C) \to 0$$

de la cual obtenemos la siguiente sucesión exacta de $\mathbf{C}$-módulos

$$\coprod_{i\in I} \mathbf{C}(T_i, M_1) \otimes_{\mathbb{Z}} T_i \to \coprod_{i\in I} \mathbf{C}(T_i, M_2) \otimes_{\mathbb{Z}} T_i \to \coprod_{i\in I} \mathbf{C}(T_i, M_3) \otimes_{\mathbb{Z}} T_i \to 0$$

De este modo, por la Proposicion 2.7, tenemos el siguiente diagrama exacto conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod_{i\in I} \mathbf{C}(T_i, M_1) \otimes T_i \arrow[r] \arrow[d, "e^{(\mathcal{T}, M_1)}"'] & \coprod_{i\in I} \mathbf{C}(T_i, M_1) \otimes T_i \arrow[r] \arrow[d, "e^{(\mathcal{T}, M_2)}"'] & \coprod_{i\in I} \mathbf{C}(T_i, M_1) \otimes T_i \arrow[r] \arrow[d, "e^{(\mathcal{T}, M_3)}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & M_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Los morfismos $e^{(\mathcal{T}, M_1)}$ y $e^{(\mathcal{T}, M_3)}$ son epimorfismos por la Proposicion 2.14. Entonces, se sigue que $e^{(\mathcal{T}, M_2)}$ es un epimorfismo; y por la Proposicion 2.14, se sigue que M_2 está en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$. $\square$

Proposición 2.17. *Sea M un $\mathbf{C}$-módulo. Entonces, para cada objeto T' en $\mathcal{T}$ tenemos que* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T', M/\tau_{\mathcal{T}} M) = 0$. *En particular, $\tau_{\mathcal{T}}(M/\tau_{\mathcal{T}}(M)) = 0$.*

Demostración. Observese primero que $\tau_{\mathcal{T}}(M)$ es el $\mathbf{C}$-submódulo maximal de M contenido en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to \tau_{\mathcal{T}}(M) \to M \to M/\tau_{\mathcal{T}}(M) \to 0 \tag{2.13}$$

y $\eta : T' \to M/\tau_{\mathcal{T}}(M)$ cualquier transformación natural. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{T}}(M) & \longrightarrow & W & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{T}}(M) & \xrightarrow{j} & M & \xrightarrow{p} & M/\tau_{\mathcal{T}}(M) & \to & 0 \end{array} \tag{2.14}$$

con W el producto fibrado de η y p. La sucesión exacta superior se escinde, pues $\tau_{\mathcal{T}}(M)$ está en $\mathscr{T}$ y $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T', \tau_{\mathcal{T}}(M)) = 0$, por la Proposición 2.15. Así, existe un morfismo $f : T' \to M$ tal que $pf = \eta$. Pero $\mathrm{Im}(f) \subset \tau_{\mathcal{T}}(M)$, lo cual implica que $\eta = 0$. □

Proposición 2.18. *Sea $\mathcal{T}$ una categoría de inclinación en* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$*. Entonces:*

$$\mathscr{T}(\mathcal{T}) = \{M \in \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \mid \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, M) = 0, \ \ \forall T \in \mathcal{T}\}$$

Demostración. Sea $M \in \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ tal que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, M) = 0$, para cada T en $\mathcal{T}$. Entonces, de la sucesión exacta (2.13), se sigue que

$$0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, M) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, F/\tau_{\mathcal{T}}(M)) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{C}}(T, \tau_{\mathcal{T}}(M)) = 0 \tag{2.15}$$

de modo que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, M/\tau_{\mathcal{T}}M) = 0$.

Para $C \in \mathbf{C}$, tenemos una sucesión exacta $0 \to \mathbf{C}(\ \ , C) \to T_0 \to T_1 \to 0$, con $T_0, T_1 \in T$. La cual, al aplicarle $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ , M/\tau_{\mathcal{T}}(M))$ y usando la Proposición 2.17, induce la sucesión exacta:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T_0, M/\tau_{\mathcal{T}}(M)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}((\ \ , C), M/\tau_{\mathcal{T}}(M)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_1, M/\tau_{\mathcal{T}}(M)) \tag{2.16}$$

Como $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T_0, M/\tau_{\mathcal{T}}(M)) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_1, M/\tau_{\mathcal{T}}(M)) = 0$, se sigue del Lema de Yoneda que $0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}((\ \ , C), M/\tau_{\mathcal{T}}(M)) = M(C)/\tau_{\mathcal{T}}M(C))$, i.e, $M = \tau_{\mathcal{T}}(M)$ está en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$. La otra contención ya se probó en la Proposición 2.15. □

De la Proposición 2.16 concluimos que $\mathscr{T}(\mathcal{T})$ es una subcategoría de torsión y de este modo tenemos una teoría de torsión $(\mathscr{T}(\mathcal{T}), \mathscr{F}(\mathcal{T}))$. De acuerdo con la Proposición 2.20, la categoría $\mathscr{F}(\mathcal{T})$ puede calcularse como $\mathscr{F}(\mathcal{T}) = \{N \in \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \mid \mathrm{Hom}(G, N) = 0, \ \ \forall G \in \mathscr{T}(\mathcal{T})\}$.

Proposición 2.19. $\mathscr{F} = \{N \in \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) | \mathrm{Hom}(T, N) = 0, T \in \mathcal{T}\}$

Demostración. Sea M en $\mathscr{T}$. Entonces hay un epimorfismo $\coprod_{j \in J} T_j \to M$, con $\{T_j\}_{i \in J}$ una familia de objetos en $\mathcal{T}$. Sea $N \in \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ tal que $\mathrm{Hom}(T, N) = 0\ \forall T \in \mathcal{T}$. Luego, tenemos el monomorfismo

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N) \to (\coprod_{j \in J} T_j, N) \cong \prod_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T_j, N) = 0$$

Así, N está en $\mathscr{F}(\mathcal{T})$. La otra contención es evidente. □

Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Se define $\mathrm{Add}\mathcal{T}$ como la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ cuyos objetos son sumandos directos de sumas arbitrarias de objetos en $\mathcal{T}$. Sea $\phi : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ el funtor definido anteriormente. A continuación se demuestra una generalización de [Bo Prop. 1.4] en la siguiente:

Proposición 2.20. (i) *Si* $M_3 \xrightarrow{h} M_2 \xrightarrow{g} M_1 \xrightarrow{f} M_0$ *es una sucesión exacta en* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, *tal que* M_i *está en* $\mathscr{T}$, *entonces las sucesión*

$$\phi(M_2) \xrightarrow{\phi(g)} \phi(M_1) \xrightarrow{\phi(f)} \phi(M_0)$$

es exacta en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$.

(ii) *Para cada* $M \in \mathscr{T}(\mathcal{T})$, *hay una sucesión exacta*

$$\cdots \xrightarrow{t_{n+1}} T^n \to \cdots \to T^1 \xrightarrow{t_1} T^0 \xrightarrow{t_0} M \to 0$$

con T^i *en* $\mathrm{Add}\mathcal{T}$, *y tal que* $\mathrm{Ker}(t_i) \in \mathscr{T}(\mathcal{T})$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

(iii) *Para cada* M *en* $\mathscr{T}(\mathcal{T})$, *existe un isomorfismo* $\phi(M) \otimes \mathcal{T} \to M$ *en* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$.

(iv) $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(\phi(M), \mathcal{T}) = 0$.

(v) *Tenemos un isomorfismo* $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{T}}(\phi(M), \phi(N))$, *para cada par de objetos* M, N *en* $\mathscr{T}(\mathcal{T})$.

Demostración. (i) Como $\mathscr{T}(\mathcal{T})$ es cerrada bajo imágenes epimorficas, entonces $\in (h)$, $\mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Coker}(f)$ están en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$. De las sucesiónes exactas de $\mathbf{C}$-módulos $0 \to \mathrm{Im}h \to M_2 \to \mathrm{Im}g \to 0$, $0 \to \mathrm{Im}g \to M_1 \to \mathrm{Im}f \to 0$, $0 \to \mathrm{Im}f \to M_0 \to \mathrm{Coker}f \to 0$, se obtienen las siguientes sucesiónes exactas de $\mathcal{T}$-módulos

$$\begin{aligned} 0 \to (\ \ ,\mathrm{Im}h)_{\mathcal{T}} \to (\ \ ,M_2)_{\mathcal{T}} \to (\ \ ,\mathrm{Im}g)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,\mathrm{Im}h)_{\mathcal{T}} = 0 \\ 0 \to (\ \ ,\mathrm{Im}g)_{\mathcal{T}} \to (\ \ ,M_1)_{\mathcal{T}} \to (\ \ ,\mathrm{Im}f)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,\mathrm{Im}g)_{\mathcal{T}} = 0 \\ 0 \to (\ \ ,\mathrm{Im}f)_{\mathcal{T}} \to (\ \ ,M_0)_{\mathcal{T}} \to (\ \ ,\mathrm{Coker}f)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,\mathrm{Im}f)_{\mathcal{T}} = 0 \end{aligned}$$

y el resultado se sigue pegando las sucesiones exactas anteriores.

(ii) Por las Proposiciones 2.14 y 2.10, para cada $M \in \mathscr{T}(\mathcal{T})$, hay una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(\gamma_M) \to \coprod_{T \in \mathrm{Obj}\mathcal{T}} T^{(X_T)} \xrightarrow{\gamma_M} M \to 0, \tag{2.17}$$

donde $\gamma_M = e^{(\mathcal{T},M)} \circ \gamma$.

Sea $\eta : T' \to M$ un morfismo con T' en $\mathrm{Obj}\mathcal{T}$. Entonces, por la Proposición 2.10, existe un morfismo $g : T' \to \coprod_{T \in \mathrm{Obj}\mathcal{T}} T^{(X_T)}$ tal que $\gamma_M \circ g = \eta$. Esto es, el morfismo inducido por γ_M,

$$\mathrm{Hom}(T', \gamma_M) : \mathrm{Hom}(T', \coprod_{T \in \mathrm{Obj}\mathcal{T}} T^{(X_T)}) \to \mathrm{Hom}(T', M),$$

es un epimorfismo y por lo tanto $\mathrm{Ext}^1(T', \mathrm{Ker}(\gamma_M)) = 0$ $\forall T' \in \mathcal{T}$. Finalmente, se sigue de la Proposición 2.14 que $\mathrm{Ker}(\gamma_M)$ está en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$, y se procede por inducción.

(iii) Por la parte (ii), existe una sucesión exacta $\cdots \to T^1 \to T^0 \to M \to 0$, tal que $T^i = \coprod_{j\in J_i} T_j$, con $\{T_j\}_{i\in J_i}$ una familia de objetos en $\mathcal{T}$. Después de aplicar ϕ, obtenemos por (i) una sucesión exacta $\cdots \to \phi(T^1) \to \phi(T^0) \to \phi(M) \to 0$ en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$.

Como ϕ preserva sumas arbitrarias y $\phi(T_j) \otimes \mathcal{T} = (\ \ ,T_j)_{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{T} \cong T_j$, existe un isomorfismo $\eta : \phi(M) \otimes \mathcal{T} \cong M$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\phi(T^1)\otimes\mathcal{T} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \phi(T^0)\otimes\mathcal{T} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \phi(M)\otimes\mathcal{T} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\coprod\limits_{j\in J_0} \phi(T_j)\otimes\mathcal{T} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \coprod\limits_{j\in J_1} \phi(T_j)\otimes\mathcal{T} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \phi(M)\otimes\mathcal{T} \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & 0 \\
T^1 \arrow[r] & T^0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

(iv) Es claro, a partir del diagrama anterior, que $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(\phi(M), \mathcal{T}) = 0$.

(v) Usando la sucesión construida en (ii) y la relación $\mathrm{Ext}^j_{\mathbf{C}}(T^n, N) = 0$, para todo $j \geq 0$ y $n \geq 0$, obtenemos, a través de argumentos de *cambio de dimensión*, el isomorfismo $\mathrm{Ext}^j_{\mathbf{C}}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathrm{Im}\ t_{j-1}, N) = 0$, para $j \geq 1$. Las sucesiones exactas

$$T^{j+1} \to T^j \to \mathrm{Im}\ t_j \to 0 \tag{2.18}$$

$$0 \to \mathrm{Im}\ t_j \to T^{j-1} \to \mathrm{Im}\ t_{j-1} \to 0 \tag{2.19}$$

inducen el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
\mathrm{Hom}(T_{j-1},N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(q,N)"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}(t_j,N)"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Im}\ t_j,N) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(p,N)"] & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Im}\ t_{j-1},N) \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{Hom}(T_j,N) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(t_{j+1},N)"] & & \\
 & \mathrm{Hom}(T_{j+1},N) & &
\end{tikzcd}$$

Así, tenemos isomorfismos

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathbf{C}}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathrm{Im}\ t_{j-1},N) \cong H^j(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T.,N)). \tag{2.20}$$

Aplicando ϕ a la sucesión exacta que está en (ii), obtenemos una resolución proyectiva para $\phi(M)$

$$\mathrm{Hom}(\ \ ,T.) \to (\ \ ,M)_{\mathcal{T}} : \cdots \to (\ \ ,T^1) \to (\ \ ,T^0) \to (\ \ ,M)_{\mathcal{T}} \to 0$$

Por el Lema de Yoneda tenemos $\mathrm{Hom}((\ \ ,T_.),(\ \ ,N)) \cong \mathrm{Hom}(T_., N)$, por lo que

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{T}}(\phi(M),\phi(N)) = H^j((\ \ ,T.),\phi(N)) = H^j(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T.,N)). \tag{2.21}$$

y nuestra afirmación se sigue de (2.20) y (2.21). □

2.2. El Teorema de inclinación

En esta sección veremos el Teorema Brenner-Butler para variedades de annuli. La prueba aquí presentada, la obtenemos sigue la de Bongartz [Bo]. También veremos que tenemos los correspondientes teoremas sobre invarianza de los grupos de Groethendieck y las relaciones entre la dimensión global de una categoría y su categoría inclinada.

2.2.1. El Teorema Brenner-Butler

Sean $\mathbf{C}$ una categoría preaditiva esqueleticamente pequeña y $\mathcal{T}$ una subcategoría de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, cuyos objetos son finitamente presentados. Tenemos un par de funtores adjuntos:

$$\phi : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$$
$$-\otimes \mathcal{T} : \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C}).$$

Los cuales se definieron en el Capítulo 1 de este trabajo. En el inicio de esta subsección, veremos como calcular dichos funtores, así como sus funtores derivados derechos e izquierdos respectivamente, los cuales nos servirán para demostrar el Teorema Brenner-Butler.

Proposición 2.21. *Para cada C en $\mathbf{C}$ y $M \in \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ existe un isomorfismo:*

$$(M \otimes \mathcal{T})(C) \cong (\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ ) \otimes_{\mathcal{T}} M,$$

el cual es natural en C.

Demostración. Consideremos una presentación de M

$$\coprod_{i\in I}(\ \ ,T_i) \xrightarrow{((\ \ ,f_{ij}))} \coprod_{j\in J}(\ \ ,T_j) \to M \to 0, \tag{2.22}$$

con T_i, T_j en $\mathcal{T}$.

Aplicando $\otimes\mathcal{T}$ y evaluando en C, obtenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$\coprod_{i\in I} T_i(C) \xrightarrow{(f_{ij})_C} \coprod_{j\in J} T_j(C) \to (M \otimes \mathcal{T})(C) \to 0. \tag{2.23}$$

Por las propiedades del producto tensorial y el Lema de Yoneda, tenemos los isomorfismos:

$$(\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ ) \otimes_{\mathcal{T}} \coprod_{i\in I}(\ \ ,T_i) \cong \coprod_{i\in I}(\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ ) \otimes_{\mathcal{T}} (\ \ ,T_i) \cong \coprod_{i\in I}(\mathbf{C}(\ \ ,C),T_i) \cong \coprod_{i\in I} T_i(C)$$

De este modo, al aplicar el funtor $(\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}} \otimes_{\mathcal{T}} -$ a la presentación (2.22) de M, obtenemos, a partir de los isomorfismos anteriores, un único isomorfismo η_C, el cual hace que el siguiente diagrama exacto conmute:

$$\begin{tikzcd}
((\ \ ,C),\ \ ) \otimes \coprod_{i\in I}(\ \ ,T_i) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & ((\ \ ,C),\ \ ) \otimes \coprod_{j\in J}(\ \ ,T_j) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & ((\ \ ,C),\ \ ) \otimes_{\mathcal{T}} M \arrow[r] \arrow[d, "\eta_C"'] & 0 \\
\coprod_{i\in I} T_i(C) \arrow[r, "(f_{ij})_C"] & \coprod_{j\in J} T_j(C) \arrow[r] & (M \otimes \mathcal{T})(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Veamos ahora que la colección de morfismos $\eta = \{\eta_C\}_{C\in\mathbf{C}}$ es una transformación natural. Sea $g : C_1 \to C_2$ un morfismo en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Entonces, g induce el siguiente diagrama conmutativo exacto donde todas los cuadrados conmutan, excepto posiblemente el cuadro donde aparecen η_{C_1} y η_{C_2}:

$$\begin{tikzcd}
((\ ,C_2),\ )\otimes\coprod_{i\in I}(\ ,T_i) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dd, bend right] & ((\ ,C_2),\ )\otimes\coprod_{j\in J}(\ ,T_j) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dd, bend right] & ((\ ,C_2),\ )\otimes_{\mathcal{T}} M \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{C_2}"] \arrow[dd, bend right] & 0 \\
\coprod_{i\in I} T_i(C_2) \arrow[r, "(f_{ij})_{C_2}"] \arrow[dd, bend left] & \coprod_{j\in J} T_j(C_2) \arrow[r] \arrow[dd, bend left] & (M\otimes\mathcal{T})(C_2) \arrow[r] \arrow[dd, bend left] & 0 \\
((\ ,C_1),\ )\otimes\coprod_{j\in I}(\ ,T_i) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & ((\ ,C_1),\ )\otimes\coprod_{j\in J}(\ ,T_j) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & ((\ ,C_1),\ )\otimes_{\mathcal{T}} M \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{C_1}"'] & 0 \\
\coprod_{i\in I} T_i(C_1) \arrow[r, "(f_{ij})_{C_1}"] & \coprod_{j\in J} T_j(C_1) \arrow[r] & (M\otimes\mathcal{T})(C_1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sin embargo, puede verificarse facilmente que dicho cuadro conmuta, lo cual prueba la proposición. $\square$

Proposición 2.22. *Para cada C en $\mathbf{C}$ y $M \in \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ existe un isomorfismo:*

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathcal{T}}((\mathbf{C}(\ ,C),\ ),M) \cong \mathrm{Tor}_n^{\mathcal{T}}(M,\mathcal{T})(C) \tag{2.24}$$

para todo entero no negativo n, el cual es natural en C.

Demostración. Consideremos una sucesión exacta

$$0 \to \Omega M \to (\ ,T) \to M \to 0 \tag{2.25}$$

donde T es una suma de objetos que están en $\mathcal{T}$.

Despues de aplicar $\otimes\mathcal{T}$ a (2.25), se obtiene la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(M,\mathcal{T}) \to \Omega M \otimes \mathcal{T} \to (\ ,T)\otimes\mathcal{T} \to M\otimes\mathcal{T} \to 0$$

Por otro lado, al aplicar $(\mathbf{C}(\ ,C),\ )\otimes_{\mathcal{T}} -$ a (2.25) se obtiene

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(((\ ,C),\ ),M) \to ((\ ,C),\ )\otimes_{\mathcal{T}}\Omega M \to ((\ ,C),\ )\otimes_{\mathcal{T}}(\ ,T) \to ((\ ,C),\ )\otimes_{\mathcal{T}} M \to 0$$

Por la Proposición 2.21, existe un morfismo γ_C, el cual es un isomorfismo, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(((\ ,C),\ ),M) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_C"] & ((\ ,C),\ )\otimes_{\mathcal{T}}\Omega M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & ((\ ,C),\ )\otimes_{\mathcal{T}}(\ ,T) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(M,\mathcal{T})(C) \arrow[r] & (\Omega M\otimes\mathcal{T})(C) \arrow[r] & T(C).
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que la colección de morfismos $\gamma = \{\gamma_C\}_{C\in\mathbf{C}}$ es una transformación natural. En efecto, sea $g : C_1 \to C_2$ un morfismo en $\mathbf{C}$. Luego, obtenemos el siguiente diagrama, en el cual todos los cuadrados conmutan, excepto posiblemente donde aparecen γ_{C_1} y γ_{C_2}:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbf{C}}((\mathbf{C}(\ ,C_2),\ ),M) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{C_2}"] \arrow[dd, bend right] & (\mathbf{C}(\ ,C_2),\ )\otimes\Omega M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dd, bend right] & (\mathbf{C}(\ ,C_2),\ )\otimes(\ ,T) \arrow[d, "\cong"] \arrow[dd, bend right] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(M,\mathcal{T})(C_2) \arrow[r] \arrow[dd, bend left] & \Omega M\otimes\mathcal{T}(C_2) \arrow[r] \arrow[dd, bend left] & T(C_2) \arrow[dd, bend left] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbf{C}}((\mathbf{C}(\ ,C_1),\ ),M) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{C_1}"'] & (\mathbf{C}(\ ,C_1),\ )\otimes\Omega M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & (\mathbf{C}(\ ,C_1),\ )\otimes(\ ,T) \arrow[d, "\cong"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(M,\mathcal{T})(C_1) \arrow[r] & \Omega M\otimes\mathcal{T}(C_1) \arrow[r] & T(C_1)
\end{tikzcd}$$

Sin embargo, puede verificarse sin problema alguno que dicho cuadro conmuta, lo cual prueba la proposición. $\square$

Antes de proseguir, necesitamos hacer una observación. Sean C_1, C_2 dos objetos cualesquiera de $\mathbf{C}$, y $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Consideremos las dos sucesiónes exactas $0 \to \mathbf{C}(\ ,C_1) \xrightarrow{g_1} T_0 \to T_1 \to 0$ y $0 \to \mathbf{C}(\ ,C_2) \xrightarrow{g_2} T_0' \to T_1' \to 0$, con T_i y T_i' en $\mathcal{T}$, para $i = 0, 1$. Sea $f : C_1 \to C_2$ un morfismo, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo, en el cual W es el producto cofibrado de g_1 y de $g_2\mathbf{C}(\ ,f)$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{C}(\ ,C_1) \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2\mathbf{C}(\ ,f)"'] & T_0 \arrow[r] \arrow[d] & T_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_0' \arrow[r] & W \arrow[r] & T_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.26}$$

Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_1, T_0') = 0$, la sucesión exacta inferior del diagrama en (2.26) se escinde. Así, existen morfismos u, v tales que hacen que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{C}(\ ,C_1) \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\mathbf{C}(\ ,f)"'] & T_0 \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & T_1 \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{C}(\ ,C_2) \arrow[r, "g_2"] & T_0' \arrow[r] & T_1' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{2.27}$$

Proposición 2.23. *Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación de* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$*. Entonces, para cada $\mathbf{C}$-módulo M, existe una sucesión exacta*

$$0 \to \phi(M)\otimes\mathcal{T} \to M \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,M)_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}) \to 0.$$

Además, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,M)_{\mathcal{T}}\otimes\mathcal{T} = 0$.

Demostración. Sea C un objeto en $\mathbf{C}$. Entonces, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \mathbf{C}(\ \ ,C) \to T_0 \to T_1 \to 0 \tag{2.28}$$

la cual induce la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \to (T_1,\ \ )_{\mathcal{T}} \to (T_0,\ \ )_{\mathcal{T}} \to (\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}} \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_1,\ \ )_{\mathcal{T}} = 0. \tag{2.29}$$

Después de aplicar $- \otimes_{\mathcal{T}} \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}}$ a la sucesión exacta (2.29), obtenemos la siguiente sucesión exacta :

$$\begin{aligned} 0 \to \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{T}}((\mathbf{C}(\ \ ,C), \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_1,M) \to \\ \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_0,M) \to (\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}} \otimes_{\mathcal{T}} \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}} \to 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Por otro lado, despues de aplicar $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)$ a la sucesión (2.28) obtenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$\begin{aligned} 0 \to (T_1,M) \to (T_0,M) \to (\mathbf{C}(\ \ ,C),M) \to \\ \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_1,M) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_0,M) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}(\ \ ,C),M) = 0. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Entonces, para cada C en $\mathbf{C}$, se sigue que

$$\begin{aligned} (\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{T})(C) &\cong \operatorname{Hom}(\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}} \otimes_{\mathcal{T}} \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,M), \text{ por Proposición 2.21,} \\ &\cong \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}(\ \ ,C),M)_{\mathcal{T}} = 0, \text{ por (2.30) y (2.31),} \end{aligned}$$

lo cual prueba una parte del teorema.

Ahora bien, por la Proposición 2.22, sabemos que

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{T}}(\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}}, \mathcal{T})(C) \cong \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{T}}(\mathbf{C}(\ \ ,C), \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}}). \tag{2.32}$$

Se sigue de (2.32) y el isomorfismo $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}(\ \ ,C),M) \cong M(C)$ junto con (2.30) y (2.31), que existe un morfismo γ_C que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
 & M(C) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_C"'] & \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_1,M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_0,M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{T}}(\operatorname{Ext}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}}, \mathcal{T})(C) \arrow[r, tail] & \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_1,M) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_0,M) &
\end{tikzcd}$$

El Lema de la Serpiente garantiza que γ_C es un epimorfismo.

Despues de aplicar $- \otimes_{\mathcal{T}} \phi(M)$ a la sucesión (2.29) obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\phi(M)(T_1) \to \phi(M)(T_0) \to \operatorname{Hom}(\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ ) \otimes_{\mathcal{T}} \phi(M) \to 0 \tag{2.33}$$

Entonces, por el isomorfismo $(\phi(M) \otimes \mathcal{T})(C) \cong \operatorname{Hom}(\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ ) \otimes_{\tau} \phi(M)$ y las sucesiones (2.31) y (2.33), existe un morfismo η_C, el cual hace conmutar el siguiente diagrama exacto:

$$\begin{tikzcd}
 & \phi(M)(T_1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \phi(M)(T_0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\phi(M) \otimes \mathcal{T})(C) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_C"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (T_1,M) \arrow[r] & (T_2,M) \arrow[r] & (\mathbf{C}(\ \ ,C),M) &
\end{tikzcd}$$

Nuevamente, del Lema de la Serpiente, se sigue que η_C es un monomorfismo.

Puede verificarse sin ningún problema que $\gamma = \{\gamma_C\}_{C\in\mathbf{C}}$ y $\eta = \{\eta_C\}_{C\in\mathbf{C}}$ son transformaciones naturales usando el diagrama (2.27). Finalmente, tenemos la siguiente sucesión exacta de $\mathbf{C}$-módulos:

$$0 \to \phi(M) \otimes \mathcal{T} \xrightarrow{\eta} M \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ , M), \mathcal{T}) \to 0,$$

lo que prueba la proposición. $\square$

Proposición 2.24. *Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación de* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. *Entonces, para cada $\mathcal{T}$-módulo N, existe una sucesión exacta*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(-, \mathrm{Tor}(N, \mathcal{T})) \to N \to \phi(N \otimes \mathcal{T}) \to 0.$$

Además, tenemos que $\phi(\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N, \mathcal{T})) = 0$.

Demostración. Escojemos dos resoluciones proyectivas

$$L_{\cdot} \to N \quad : \quad \cdots \to (-, T_2) \xrightarrow{(-,h_2)} (-, T_1) \xrightarrow{(-,h_1)} (-, T_0) \to N \to 0, \tag{2.34}$$
$$0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0, \tag{2.35}$$

con T_i una suma de objetos de $\mathcal{T}$, para $i \geq 0$.

Despues de aplicar $- \otimes \mathcal{T}$ al complejo $L.$ que está en (2.34), obtenemos el complejo $L. \otimes \mathcal{T}$, cuyos objetos están en $\mathrm{Add}\mathcal{T}$. De esta manera, obtenemos la siguiente sucesión exacta de complejos

$$0 \to (T, L_{\cdot} \otimes \mathcal{T}) \to (P_0, L_{\cdot} \otimes \mathcal{T}) \to (P_1, L_{\cdot} \otimes \mathcal{T}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, L_{\cdot} \otimes \mathcal{T}) = 0 \tag{2.36}$$

Notése que los complejos $L_{\cdot}(T)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T, L_{\cdot} \otimes \mathcal{T})$ son isomorfos. Así, la sucesión (2.36) se puede poner como

$$0 \to L_{\cdot}(T) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P_0, L_{\cdot} \otimes \mathcal{T}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P_1, L_{\cdot} \otimes \mathcal{T}) \to 0 \tag{2.37}$$

De (2.37) y de la sucesión larga de homología tenemos

$$\begin{aligned} 0 = H_1(L_{\cdot}(T)) \to H_1(\mathrm{Hom}(P_0, L_{\cdot} \otimes \mathcal{T})) \to H_1(\mathrm{Hom}(P_1, L_{\cdot} \otimes \mathcal{T})) \to \\ H_0(\mathrm{Hom}(L_{\cdot}(T))) \to H_0(\mathrm{Hom}(P_0, L_{\cdot} \otimes \mathcal{T})) \to H_0(\mathrm{Hom}(P_1, L_{\cdot} \otimes \mathcal{T})) \to 0 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Como P_i es proyectivo, para $i = 0, 1$, tenemos el isomorfismo

$$H_1(\mathrm{Hom}(P_i, L_{\cdot} \otimes \mathcal{T})) \cong \mathrm{Hom}(P_i, H_1(L_{\cdot} \otimes \mathcal{T})) = \mathrm{Hom}(P_i, \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N, \mathcal{T})).$$

Así, finalmente la sucesión (2.38) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}(P_0, \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N, \mathcal{T})) \to \mathrm{Hom}(P_1, \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N, \mathcal{T})) \to \\ N(T) \to \mathrm{Hom}(P_0, N \otimes \mathcal{T}) \to \mathrm{Hom}(P_1, N \otimes \mathcal{T}) \to 0 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Después de aplicar $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ , \mathrm{Tor}(N, \mathcal{T}))$ a la resolución proyectiva de T, obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N, \mathcal{T})) \to \mathrm{Hom}(P_0, \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N, \mathcal{T})) \to \\ \to \mathrm{Hom}(P_1, \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N, \mathcal{T})) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N, \mathcal{T})) \to 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Comparando (2.39) y (2.40) podemos asegurar que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T, \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T})) = 0$, i.e, $\phi(\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T}))(T) = 0$, esto prueba una parte de la proposición. Además (2.39) y (2.40) aseguran que existe un morfismo η_T, que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}(P_0,\mathrm{Tor}(N,\mathcal{T})) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(P_1,\mathrm{Tor}(N,\mathcal{T})) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T,\mathrm{Tor}(N,\mathcal{T})) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_T"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_0,\mathrm{Tor}(N,\mathcal{T})) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_1,\mathrm{Tor}(N,\mathcal{T})) \arrow[r] & N(T) &
\end{tikzcd} \tag{2.41}$$

El Lema de la Serpiente asegura que η_T es mono.

Despues de aplicar $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ , N\otimes\mathcal{T})$ a la resolución proyectiva de T, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{aligned}
&0 \to \mathrm{Hom}(T,\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T})) \to \mathrm{Hom}(P_0,\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T})) \to \\
&\to \mathrm{Hom}(P_1,\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T})) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T,\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T})) \to 0
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Las sucesiones (2.39) y (2.42) aseguran la existencia de un morfismo γ_T, el cual hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
& N(T) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_T"'] & (P_0, N\otimes\mathcal{T}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (P_1, N\otimes\mathcal{T}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & (T, N\otimes\mathcal{T}) \arrow[r] & (P_0, N\otimes\mathcal{T}) \arrow[r] & (P_1, N\otimes\mathcal{T}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}(T, N\otimes\mathcal{T})
\end{tikzcd} \tag{2.43}$$

Se sigue del Lema de la Serpiente que γ_T es epimorfismo. Más aún , tenemos que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ , N\otimes\mathcal{T}) = 0. \tag{2.44}$$

Sólo resta ver que las familias de morfismos, $\eta = \{\eta_T\}_{T\in\mathcal{T}}$ y $\gamma = \{\gamma_T\}_{T\in\mathcal{T}}$, son transformaciones naturales. Para esto, considerense T, T' objetos en $\mathcal{T}$, con sus respectivas resoluciones proyectivas: $0\to P_1\to P_0\to T\to 0$, $0\to P_1'\to P_0'\to T'\to 0$. Si $f: T\to T'$ es un morfismo en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$, entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & T \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1' \arrow[r] & P_0' \arrow[r] & T' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.45}$$

Puede verificarse sin problema alguno que η y γ son transformaciones naturales, usando el diagrama (2.45). De modo que hemos probado que tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(-,\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T})) \xrightarrow{\eta} N \xrightarrow{\gamma} \phi(N\otimes\mathcal{T}) \to 0$$

lo cual prueba la proposición. □

Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ y $(\mathscr{T}(\mathcal{T}), \mathscr{F}(\mathcal{T}))$ el par de torsión que se vió previamente. Consideremos las siguientes subcategorías de $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{X}(\mathcal{T}) &= \{N\in\mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \mid N\otimes\mathcal{T} = 0\}, \\
\mathscr{Y}(\mathcal{T}) &= \{N\in\mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \mid \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T}) = 0\}
\end{aligned}$$

y pongamos $F=\phi$, $G=-\otimes\mathcal{T}$, $F'=\operatorname{Ext}^1(\ \ ,-)_{\mathcal{T}}$, $G'=\operatorname{Tor}^1(\ \ ,\mathcal{T})$. Ahora resulta claro el siguiente

Teorema 2.25 (Brenner-Butler)**.** *Con la notación previa, las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(i) *Los funtores F y G inducen una equivalencia entre $\mathscr{T}$ y $\mathscr{Y}$.*

(ii) *Los funtores F' y G' inducen una equivalencia entre $\mathscr{F}$ y $\mathscr{X}$.*

(iii) *Tenemos que $FG'=F'G=0$ y $G'F=GF'=0$.*

Corolario 2.26. *El par de subcategorías $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ forman un par de torsión en* $\operatorname{Mod}(\mathcal{T})$*.*

Demostración. Es fácil ver que, para un par de objetos $X\in\mathscr{X}$ e $Y\in\mathscr{Y}$, tenemos que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(X,Y)=0$.

Para todo $N\in\operatorname{Mod}(\mathcal{T})$ tenemos una sucesión exacta corta:

$$0\to\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(-,\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T}))\xrightarrow{\eta}N\xrightarrow{\gamma}\phi(N\otimes\mathcal{T})\to 0$$

Por la condición (iii) del Teorema tenemos que $\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(-,\operatorname{Tor}(N,\mathcal{T}))\in\mathscr{X}$ y $\phi(N\otimes\mathcal{T})\in\mathscr{Y}$, lo cual implica que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es un par de torsión.

□

Generalizamos el siguiente resultado, el cual ocurre para algebras de dimensión finita. Sea A una K-álgebra de dimensión finita y $\operatorname{mod}(A)$ la categoría de A-módulos izquierdos finitamente generados. Supongamos que ${}_AT$ es un módulo de inclinación en $\operatorname{mod}(A)$ y $B=\operatorname{End}_A(T)$. El Teorema de inclinación [Bo] establece que el B-módulo derecho T_B es un módulo de inclinación en la categoría de B-módulos derechos finitamente generados $\operatorname{mod}(B)$, más aún, se cumple que A^{op} es isomoformo a $\operatorname{End}_B(T_B)$.

Proposición 2.27. *Supongamos que cada objeto de inclinación T en $\mathcal{T}$ tiene una resolución proyectiva $0\to P_1\to P_0\to T\to 0$, con P_1 y P_0 dos $\mathbf{C}$-módulos proyectivos finitamente generados. Entonces*

(a) *La subcategoría plena de $\operatorname{Mod}(\mathcal{T}^{op})$, cuyos objetos son $\{(\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}\}_{C\in\mathbf{C}}$ es una categoría de inclinación en $\operatorname{Mod}(\mathcal{T}^{op})$*

(b) *La categoría $\Theta=\{(\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}\}_{C\in\mathbf{C}}$ es equivalente a $\mathbf{C}^{op}$.*

Demostración. (a)(i) Para cada objeto C en $\mathbf{C}$, tenemos una resolución

$$0\to\mathbf{C}(\ \ ,C)\to T_0\xrightarrow{f}T_1\to 0 \tag{2.46}$$

con $T_i\in\mathcal{T}$, para $i=0,1$. Así, tenemos la siguiente sucesión exacta en $\operatorname{Mod}(\mathcal{T}^{op})$ por la sucesión larga de homología

$$0\to(T_1,\ \ )_{\mathcal{T}}\xrightarrow{(f,\ \ )}(T_0,\ \ )_{\mathcal{T}}\to(\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}\to\operatorname{Ext}(T_1,\ \ )_{\mathcal{T}}=0 \tag{2.47}$$

es decir, $\operatorname{pdim}(\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}\leq 1$.

(ii) Ya vimos en (2.47) que, para cualquier C en $\mathbf{C}$, tenemos una resolución proyectiva para $(\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}$. Sea C' en $\mathbf{C}$, entonces, despues de aplicar $\mathrm{Hom}(\ \ ,(\mathbf{C}(\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}})$ a (2.47), obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{aligned} 0 \to ((\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}},(\mathbf{C}(\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}}) \to ((T_0,\ \ ),(\mathbf{C}(\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}}) \to \\ \to ((T_1,\ \ ),(\mathbf{C}(\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}^{op}}((\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}},(\mathbf{C}(\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}}) \to 0 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Por otro lado, por el Lema de Yoneda, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} ((T_0,\ \ ),(\mathbf{C}(\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & ((T_1,\ \ ),(\mathbf{C}(\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}}) \arrow[d, "\cong"'] \\ (\mathbf{C}(\ \ ,C'),T_0) \arrow[r, "(\mathbf{C}(\ \ ,C'),f)"] \arrow[d, "\cong"'] & (\mathbf{C}(\ \ ,C'),T_1) \arrow[d, "\cong"'] \\ T_0(C') \arrow[r, "f_{C'}"] & T_1(C') \end{tikzcd} \tag{2.49}$$

Así, después de evaluar la sucesión (2.46) en C' y usar (2.47) junto con (2.48), se sigue que hay isomorfismos de grupos abelianos

$$((\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}},(\mathbf{C}(\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}}) \cong \mathbf{C}(C',C) \tag{2.50}$$

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}^{op}}((\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}},(\mathbf{C}(\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}}) \cong 0 \tag{2.51}$$

(iii) Sea T un objeto en la categoría $\mathcal{T}$, el cual tiene una resolución proyectiva

$$0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0 \tag{2.52}$$

con P_i proyectivo finitamente generado, $i = 0,1$. Entonces, existe un $\mathbf{C}$-módulo Q_i, tal que $P_i \coprod Q_i = \coprod_{j\in J_i} \mathbf{C}(\ \ ,C_j)$, para una colección finita $\{C_j\}_{j\in J_i}$ de objetos en $\mathbf{C}$, $i = 0,1$. Luego, $(P_i,\ \ )_{\mathcal{T}} \coprod (Q_i,\ \ )_{\mathcal{T}} = \coprod_{j\in J_i}(\mathbf{C}(\ \ ,C_j),\ \ )_{\mathcal{T}}$. Se sigue de (2.52), que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to (T,\ \ )_{\mathcal{T}} \to (P_0,\ \ )_{\mathcal{T}} \to (P_1,\ \ )_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}^{op}}(T,\ \ )_{\mathcal{T}} = 0$$

Como $(P_i,\ \ )_{\mathcal{T}}$ es sumando de $\coprod_{j\in J_i}(\mathbf{C}(\ \ ,C_j),\ \ )_{\mathcal{T}}$, para una colección finita $\{C_j\}_{j\in J_i}$, para $i = 1,0$. Entonces, se sigue que $(P_i,\ \ )_{\mathcal{T}}$ está en $\mathrm{add}\{(\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}\}_{C\in\mathbf{C}}$.

(b) Podemos definir un funtor

$$\alpha : \mathbf{C}^{op} \to \Theta,\ \ \alpha(C) = (\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}$$

es cual es evidentemente denso, y por la ecuación (2.50) es fielmente pleno. $\square$

2.2.2. Los Grupos $K_0(\mathbf{C})$ y $K_0(\mathcal{T})$

Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Denotemos con $|\mathrm{Mod}(\mathbf{C})|$ a la colección de clases de isomorfía de objetos en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Sea $\mathcal{A}$ el grupo abeliano libre generado por $|\mathrm{Mod}(\mathbf{C})|$ y $\mathcal{R}$ el subgrupo de $\mathcal{A}$ generado por las relaciones $M - K - L$ tales que $0 \to K \to M \to L \to 0$ es una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Entonces, el grupo de Grothendieck de $\mathbf{C}$ es $K_0(\mathbf{C}) = \mathcal{A}/\mathcal{R}$. Del mismo modo, denotemos con $|\mathrm{Mod}(\mathcal{T})|$ a la colección de clases de isomorfía de objetos en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ y con $\mathcal{B}$ al grupo libre abeliano generado por $|\mathrm{Mod}(\mathcal{T})|$. Sea $\mathcal{S}$ el subgrupo de $\mathcal{B}$ generado por las relaciones $M - K - L$ tales que $0 \to K \to M \to L \to 0$ es una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$. Entonces, el grupo de Grothendieck de $\mathcal{T}$ es $K_0(\mathcal{T}) = \mathcal{B}/\mathcal{S}$.

El Teorema de Inclinación Clásico, establece que $K_0(\mathbf{C})$ y $K_0(\mathcal{T})$ son ismomorfos cuando $\mathbf{C} = A$ es un anillo y $\mathcal{T} = T$ es un A-módulo de inclinación. Aquí generalizamos este resultado, siguiendo la prueba de [CF]. Para ello, seguiremos la notación del Teorema 2.25.

Proposición 2.28. *Los grupos de Groethendieck $K_0(\mathbf{C})$ y $K_0(\mathcal{T})$ son isomorfos.*

Demostración. Definimos $\hat{\phi} : \mathcal{A} \to K_0(\mathcal{T})$ como $\hat{\phi}(M) = |F(M)| - |F'(M)|$. Afirmamos que $\mathcal{R}$ está contenido en el núcleo de $\hat{\phi}$. En efecto, sea $M - K - L$ un generador de $\mathcal{R}$ corespondiente a la sucesión exacta $0 \to K \to M \to L \to 0$. Entonces, existe una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$:

$$\begin{aligned} 0 &\to (\ ,K)_{\mathcal{T}} \to (\ ,M)_{\mathcal{T}} \to (\ ,L)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,K)_{\mathcal{T}} \to \\ &\to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,M)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,L)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{C}}(\ ,K)_{\mathcal{T}} = 0 \end{aligned} \tag{2.53}$$

se sigue de (2.53) que:

$$-(|F(K)| - |F'(K)|) - (|F(L)| - |F'(L)|) + (|F(M)| - |F'(M)|) = 0$$

es decir, $\hat{\phi}(M - K - L) = 0$, por lo que $\mathcal{R} \subset \mathrm{Ker}(\hat{\phi})$. Así, tenemos un único morfismo $\phi : K_0(\mathbf{C}) \to K_0(\mathcal{T})$, $\phi(|M|) = |F(M)| - |F'(M)|$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\hat{\phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & K_0(\mathcal{T}) \\ K_0(\mathbf{C}) \arrow[ur, "\phi"] & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, para cada objeto C en $\mathbf{C}$, tenemos una sucesión exacta corta $0 \to \mathbf{C}(\ ,C) \to T^0 \to T^1 \to 0$ con T^i en $\mathcal{T}$, $i = 0, 1$. La cual induce la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T}^{op})$:

$$0 \to (T_1,\ )_{\mathcal{T}} \to (T_0,\ )_{\mathcal{T}} \to (\mathbf{C}(\ ,C),\ )_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_1,\ )_{\mathcal{T}} = 0$$

se sigue que $\mathrm{pdim}(\mathbf{C}(\ ,C),\ )_{\mathcal{T}} \leq 1$ y $\mathrm{Tor}^{\mathcal{T}}_n((\mathbf{C}(\ ,C),\ )_{\mathcal{T}}, N) = 0$, para $n > 1$ y cualquier $\mathcal{T}$-módulo N. Por lo tanto, si $0 \to K \to N \to L \to 0$ es una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$, tenemos la siguiente sucesión exacta, para cualquier C en $\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Tor}^{\mathcal{T}}_1(\mathbf{C}(\ ,C),\ ), K) \to \mathrm{Tor}^{\mathcal{T}}_1(\mathbf{C}(\ ,C),\ ), N) \to \mathrm{Tor}^{\mathcal{T}}_1(\mathbf{C}(\ ,C),\ ), L) \to \\ &\to (\mathbf{C}(\ ,C),\ ) \otimes_{\mathcal{T}} K \to (\mathbf{C}(\ ,C),\ ) \otimes_{\mathcal{T}} N \to (\mathbf{C}(\ ,C),\ ) \otimes_{\mathcal{T}} L \to 0 \end{aligned}$$

Luego, por Proposiciones 2.21 y 2.22, se sigue de la sucesión anterior la siguiente sucesión exacta de $\mathcal{T}$-módulos

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(K,\mathcal{T}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(L,\mathcal{T}) \to \\ \to K\otimes\mathcal{T} \to N\otimes\mathcal{T} \to L\otimes\mathcal{T} \to 0. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Análogamente, podemos definir $\hat{\psi} : \mathcal{B} \to K_0(\mathbf{C})$, como $\hat{\psi}(N) = |G(N)| - |G'(N)|$. Veamos que $\mathcal{S} \subset \mathrm{Ker}(\hat{\psi})$. En efecto, sea $N - K - L$ un generador de $\mathcal{S}$ representado por la sucesión exacta de $\mathcal{T}$-módulos $0 \to K \to N \to L \to 0$. Se sigue de (2.54) que

$$-(|G(K)| - |G'(K)|) - (|G(L)| - |G'(L)|) + (|G(N) - G'(N)|) = 0 \tag{2.55}$$

o bien $\hat{\psi}(N - K - L) = 0$, luego $\mathcal{S} \subset \mathrm{Ker}(\hat{\phi})$. Así, podemos definir $\psi : K_0(\mathcal{T}) \to K_0(\mathbf{C})$, como $\psi(|N|) = |G(N)| - |G'(N)|$.

Obsérvese que, por el Teorema Brenner-Butler, se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} \psi\phi(|M|) &= \psi(|F(M)| - |F'(M)|) \\ &= \psi(|F(M)|) - \psi(|F'(M)|) \\ &= (|GF(M)| - |G'F(M)|) - (|GF'(M)| - |G'F'(M)|) \\ &= |GF(M)| - |G'F'(M)|. \end{aligned}$$

Pero la sucesión exacta

$$0 \to GF(M) \to M \to G'F'(M) \to 0,$$

nos dice que $|M| = |GF(M)| - |G'F'(M)|$, i.e, $\psi\phi = 1_{K_0(\mathbf{C})}$. Un argumento parecido sirve para probar que $\phi\psi = 1_{K_0(\mathcal{T})}$. Esto termina la demostración. □

2.2.3. Dimensión global

Sean $\mathbf{C}$ una variedad y $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Sea $\mathscr{T}(\mathcal{T})$ la subca-tegoría de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, cuyos objetos son imágenes epimórficas de sumas arbitrarias de objetos en $\mathcal{T}$. Ya hemos visto anteriormente que $\mathscr{T}(\mathcal{T}) = \{F \in \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \mid \mathrm{Ext}^1(\mathcal{T}, F) = 0\}$. En esta subsección se comparan las dimensiones globales de $\mathbf{C}$ y $\mathcal{T}$.

Lema 2.29. *Sea M un objeto en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$ tal que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(M,\ \ )_{\mathscr{T}(\mathcal{T})} = 0$. Entonces M está en $\mathrm{Add}\mathcal{T}$.*

Demostración. Sea M un objeto en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$. La Proposición 2.20 asegura que existe una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha) \to \coprod_{i\in I} T_i \xrightarrow{\alpha} M \to 0$$

con $\mathrm{Ker}(\alpha)$ en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$, la cual se escinde porque $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(M, K) = 0$ y M está en $\mathrm{Add}\mathcal{T}$. □

Proposición 2.30. *Si M está en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$, entonces $\mathrm{pdim}\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ , M)_{\mathcal{T}} \leq \mathrm{pdim}M$.*

Demostración. Por inducción sobre pdim$M$. Si pdim$M = 0$, entonces M es proyectivo y como M está en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$ hay un epimorfismo $f : \coprod_{i\in I} T_i \to M \to 0$, con T_i en $\mathcal{T}$, el cual se escinde por ser M proyectivo, i.e, M es sumando de $\coprod_{i\in I} T_i$. Se sigue que M está en Add$\mathcal{T}$ y por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}}$ es sumando de $\coprod(\ \ ,T_i)$, i.e, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}}$ es proyectivo y pdim$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}} = 0$.

Supongamos que pdim$M = 1$. Por la Proposición 2.20, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to L \to T_0 \to M \to 0 \tag{2.56}$$

con T_0 en Add$\mathcal{T}$ y L en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$. La sucesión (2.56) induce la siguiente sucesión exacta

$$0 \to (\ \ ,L)_{\mathcal{T}} \to (\ \ ,T_0)_{\mathcal{T}} \to (\ \ ,M)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,L)_{\mathcal{T}} = 0 \tag{2.57}$$

Como pd$M = 1$, tenemos que $\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{C}}(M,\ \ )_{\mathscr{T}(\mathcal{T})} = 0$. Así, (2.56) induce la siguiente sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_0,\ \ )_{\mathscr{T}(\mathcal{T})} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(L,\ \ )_{\mathscr{T}(\mathcal{T})} \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{C}}(M,\ \ )_{\mathscr{T}(\mathcal{T})} = 0$$

Se sigue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(L,\ \ )_{\mathscr{T}(\mathcal{T})} = 0$ y por el Lema 2.29 tenemos que L está en Add$\mathcal{T}$. Finalmente tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,L)_{\mathcal{T}}$ es proyectivo. De la sucesión (2.57) se sigue que pdim$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,M) \leq 1$ y la proposición es válida en este caso.

Supongamos que $n \geq 2$ y que la afirmación es valida para objetos de $\mathscr{T}$ con dimensión proyectiva menor que n. Sea M en $\mathscr{T}$ y supongamos que pdim$M = n$. Entonces de la sucesión (2.56) se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 = \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(T_0,\ \ ) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(L,\ \ ) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathbf{C}}(M,\ \ ) = 0$$

Por hipótesis de inducción se tiene que pdim$L \leq n-1$ y pdim$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,L)_{\mathcal{T}} \leq n-1$. Ahora bien, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,T_0)$ es proyectivo. Luego, de la 1a sucesión (2.57), se sigue que

$$\mathrm{pdimHom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}} \leq \mathrm{pdimHom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,L)_{\mathcal{T}} + \mathrm{pdimHom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,T_0)_{\mathcal{T}} \leq (n-1)+1,$$

y la prueba está completa. $\square$

Teorema 2.31. *Con las mismas hipótesis que antes tenemos la desigualdad:*

$$\mathrm{gldim}(\mathcal{T}) \leq 1 + \mathrm{gldim}(\mathbf{C}).$$

Demostración. Sea X un objeto en Mod$(\mathcal{T})$, así tenemos una sucesión exacta

$$0 \to Y \to \coprod_{i\in I}(\ \ ,T_i) \to X \to 0 \tag{2.58}$$

Recordemos que tenemos una equivalencia de categorías $\phi : \mathscr{T}(\mathcal{T}) \to \mathscr{Y}$. Como $\coprod_{i\in I}(\ \ ,T_i)$ está en $\mathscr{Y}$ e $\mathscr{Y}$ es cerrada bajo sub-objetos, entonces Y está en $\mathscr{Y}$. Como ϕ es denso, existe un objeto M en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$, tal que $\phi(M) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}} \cong Y$ y pdim$Y \leq$ pdim$M$. De la sucesión (2.58) tenemos

$$\mathrm{pdim}X \leq 1 + \mathrm{pdim}Y \leq 1 + \mathrm{pdim}M \leq 1 + \mathrm{gldim}(\mathbf{C})$$

y $\mathrm{gldim}(\mathcal{T}) \leq 1 + \mathrm{gldim}(\mathbf{C})$. $\square$

2.3. La restricción de ϕ a la categoría $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$

En esta sección probaremos, bajo condiciones mínimas en las categorías $\mathbf{C}$ y $\mathcal{T}$, que el Teorema Brenner-Butler sigue siendo verdadero a nivel de las categorías de funtores finitamente presentados. En este mismo espíritu, teniendo en mente buscar aplicaciones en el caso $\mathbf{C} = \mathrm{mod}\ \Lambda$, estudiaremos la teoría de inclinación cuando $\mathbf{C}$ es una variedad dualizante.

2.3.1. El teorema de inclinación para funtores finitamente presentados

Comencemos probando que el funtor $\phi : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ puede restringirse a $\phi : \mathrm{mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{mod}(\mathcal{T})$ cuando $\mathbf{C}$ y $\mathcal{T}$ tienen pseudokerneles, o equivaléntemente, cuando $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ son abelianas (ver Proposición 1.13).

Proposición 2.32. *Si $\mathbf{C}$ y $\mathcal{T}$ tienen pseudokerneles, entonces el funtor*

$$\phi|\mathrm{mod}(\mathbf{C}) : \mathrm{mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$$

tiene imagen en $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$.

Demostración. (a) Para cada $C \in \mathbf{C}$, los $\mathcal{T}$-módulos $(\ ,\mathbf{C}(\ ,C))_{\mathcal{T}}$ y $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,\mathbf{C}(\ ,C))_{\mathcal{T}}$ están en $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$. En efecto, para cada C en $\mathbf{C}$, hay una sucesión exacta

$$0 \to \mathbf{C}(\ ,C) \to T_0 \to T_1 \to 0 \tag{2.59}$$

con T_0, T_1 en $\mathcal{T}$. De la sucesión (2.59) se sigue, por la sucesión larga de homología, la siguiente sucesión es exacta

$$\begin{aligned} 0 \to (\ ,\mathbf{C}(\ ,C))_{\mathcal{T}} \to (\ ,T_0)_{\mathcal{T}} \to (\ ,T_1)_{\mathcal{T}} \to \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,\mathbf{C}(\ ,C))_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,T_0)_{\mathcal{T}} = 0; \end{aligned}$$

y nuestra afirmación se sigue del hecho de que $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ es abeliana.

(b) Sea M en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. Como $\mathbf{C}$ tiene pseudokerneles, entonces M tiene una resolución

$$\cdots \to \mathbf{C}(\ ,C_3) \xrightarrow{(\ ,f_2)} \mathbf{C}(\ ,C_2) \xrightarrow{(\ ,f_1)} \mathbf{C}(\ ,C_1) \xrightarrow{(\ ,f_0)} \mathbf{C}(\ ,C_0) \to M \to 0$$

Sea $K_i = \mathrm{Im}(\ ,f_i)$ para $i \geq 0$, y pongamos $K_{-1} = M$. Afirmamos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,K_i)_{\mathcal{T}}$ es finitamente presentado para toda $i \geq 0$. En efecto, tenemos sucesiones exactas para toda $i \geq 0$:

$$0 \to K_i \xrightarrow{k_i} \mathbf{C}(\ ,C_i) \xrightarrow{p_i} K_{i-1} \to 0,$$

Se sigue, del hecho de que $\mathrm{pdim}\mathcal{T} \leq 1$ y la sucesión larga de homología, que las siguientes sucesiones son exactas, para toda $i \geq 0$:

$$\begin{aligned} 0 \to (\ ,K_i)_{\mathcal{T}} \xrightarrow{(\ ,k_i)} (\ ,\mathbf{C}(\ ,C_i))_{\mathcal{T}} \xrightarrow{(\ ,p_i)} (\ ,K_{i-1})_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\partial_i} \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,K_i)_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,k_i)} \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,\mathbf{C}(\ ,C_i))_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,p_i)} \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,K_{i-1})_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{C}}(\ ,K_i)_{\mathcal{T}} = 0 \end{aligned}$$

Por la parte (a), $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,\mathbf{C}(\ \ ,C_i))_{\mathcal{T}}$ es finitamente presentado, para toda $i \geq 0$. Se sigue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,K_{i-1})_{\mathcal{T}}$ es finitamente generado para toda $i \geq 0$ y por lo tanto $\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,k_i)_{\mathcal{T}})$ es finitamente generado para toda $i \geq 0$. De la sucesion exacta

$$0 \to \mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,k_i)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,\mathbf{C}(\ \ ,C_i))_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,p_i)} \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,K_{i-1})_{\mathcal{T}} \to 0,$$

obtenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,K_{i-1})_{\mathcal{T}}$ es finitamente presentado para toda $i \geq 0$, pues es el cokernel de un morfismo entre un funtor finitamente generado y un funtor finitamente presentado. Más aún, se sigue que $\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,k_i))$, para $i \geq 0$, es finitamente presentado, por ser el kernel de un morfismo entre funtores finitamente presentados, y porque $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ abeliana.

(c) El funtor $\mathrm{Im}(\partial_i) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,k_i))$ es finitamente presentado. En efecto, por la parte (b) los funtores $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,K_i)_{\mathcal{T}}$ y $\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,k_i))$ son finitamente presentados para $i \geq 0$, y $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,k_i))$ es el kernel de un morfismo entre funtores finitamente presentados.

(d) Finalmente, la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Im}((\ \ ,p_i)) \to (\ \ ,K_{i-1})_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Im}(\partial_i) \to 0$$

implica que $(\ \ ,K_{i-1})$ es finitamente presentado para cada $i \geq 0$, pues $\mathrm{Im}((\ \ ,p_i))$ es finitamente generado, y $\mathrm{Im}(\partial_i) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,k_i))$ es finitamente presentado, para $i \geq 0$, por la parte (c).

Hemos demostrado que $\phi(M) = (\ \ ,K_{-1})_{\mathcal{T}}$ es finitamente presentado.

□

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.33. *Si* $\mathbf{C}$ *y* $\mathcal{T}$ *tienen pseudokerneles, entonces* $\mathcal{T}$ *es contravariantemente finita en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

La siguiente proposición servirá para mostrar que podemos restringir los pares de funtores, $(\phi, \otimes\mathcal{T})$ y $(\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,-)_{\mathcal{T}}, \mathrm{Tor}^{\mathcal{T}}_1(\ \ ,\mathcal{T}))$, a subcategorías de funtores finitamente presentados.

Proposición 2.34. *Supongamos que* $\mathbf{C}$ *y* $\mathcal{T}$ *tienen pseudokerneles.*

(i) *Si* $M \in \mathrm{mod}(\mathbf{C})$. *Entonces, los funtores* $\phi(M)$ *y* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}}$ *son finitamente presentados.*

(ii) *Si* $N \in \mathrm{mod}(\mathcal{T})$. *Entonces, los funtores* $N \otimes \mathcal{T}$ *y* $\mathrm{Tor}^{\mathcal{T}}_1(N,\mathcal{T})$ *son finitamente presentados.*

Demostración. Como $\mathbf{C}$ y $\mathcal{T}$ tienen pseudokerneles, entonces las categorías $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ son abelianas.

(i) Sea M un $\mathbf{C}$-módulo finitamente presentado. De la sucesión exacta $0 \to \Omega M \to \mathbf{C}(\ \ ,C) \to M \to 0$, y la sucesión larga de homología obtenemos las siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,\Omega M)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,\mathbf{C}(\ \ ,C))_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{C}}(\ \ ,\Omega M)_{\mathcal{T}} = 0.$$

Se sigue, de la Proposición 2.32, que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,\Omega M)_{\mathcal{T}}$ y $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,\mathbf{C}(\ \ ,C))_{\mathcal{T}}$ son finitamente presentados, lo cual implica que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}}$ es un $\mathcal{T}$-módulo finitamente presentado. La otra parte de (i) ya se probó en la Proposición 2.32.

(ii) Sea N un un $\mathcal{T}$-módulo finitamente presentado y consideremos una presentación de N: $(\ \ ,T_1) \to (\ \ ,T_0) \to N \to 0$. Luego, aplicando $-\otimes\mathcal{T}$ obtenemos una sucesión exacta $T_1 \to T_0 \to N\otimes\mathcal{T} \to 0$ y como T_i, $i = 0,1$, son finitamente presentados, se sigue que $N\otimes\mathcal{T}$ es finitamente presentado. Consideremos una sucesión exacta $0 \to \Omega N \to (\ \ ,T) \to N \to 0$. Entonces, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T}) \to \Omega N \otimes \mathcal{T} \to T \to N \to 0.$$

Como $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ es abeliana, y $\Omega N \otimes \mathcal{T}$ y T son finitamente presentados, se sigue que $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T})$ es finitamente presentado.

□

Teorema 2.35. *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathcal{T}$ *con pseudokerneles. Entonces, los siguientes enunciados ocurren:*

(i) *Los funtores* F, F', G, G' *en el Teorema de Brenner-Butler se restringen a las categorías de funtores finitamente presentados.*

(ii) *Dado un funtor* $M \in \mathscr{T}(\mathcal{T}) \cap \mathrm{mod}(\mathbf{C})$*, existe una resolución*

$$\cdots \to T_2 \xrightarrow{t_2} T_1 \xrightarrow{t_1} T_0 \xrightarrow{t_0} M \to 0$$

tal que cada T_i *está en* $\mathrm{add}\mathcal{T}$ *y* $T_i \xrightarrow{\delta_i} \mathrm{Im}(t_i)$ *es una* $\mathcal{T}$*-aproximación a derecha.*

(iii) *Si* M *es un funtor en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*, la traza* $\tau_{\mathcal{T}}(M)$ *y* $M/\tau_{\mathcal{T}}(M)$ *son finitamente presentados.*

(iv) *Sea* $\tau_{\mathscr{X}}$ *el radical de la teoría de torsión* $(\mathscr{X}(\mathcal{T}),\mathscr{Y}(\mathcal{T}))$ *de* $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$*. Entonces, para cada funtor* N *en* $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$*,* $\tau_{\mathscr{X}}(N)$ *y* $N/\tau_{\mathscr{X}}(N)$ *son finitamente presentados.*

(v) *Para cualquier par de funtores finitamente presentados* M *y* N *en* $\mathscr{T}(\mathcal{T})$*, tenemos un isomorfismo* $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{T}}(\phi(M),\phi(T))$*.*

Demostración. (i) Ya se probó en la Proposición 2.35.

(ii) Sea M en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y $\delta : T^0 \to M$ un morfismo, con $T^0 \in \mathrm{Add}\mathcal{T}$, como en la proposición 2.10, el cual tiene imagen $\mathrm{Im}(\delta) = \tau_{\mathcal{T}}(M)$. Como $\mathcal{T}$ es contravariantemente finita en $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$, existe una $\mathcal{T}$-aproximación $T_0 \xrightarrow{t_0} M$. Así, t_0 se factoriza a través de δ y δ se factoriza a través de t_0. En consecuencia $\mathrm{Im}\ t_0 = \tau_{\mathcal{T}}(M)$. En particular si $M \in \mathscr{T}$, entonces t_0 es un epimorfismo.

Así, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(t_0) \to T_0 \xrightarrow{t_0} M \to 0,$$

con $\mathrm{Ker}(\delta_0)$ finitamente presentado, pues $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ es abeliana. Usando la sucesión larga de homología y el hecho de que $t_0 : T_0 \to M$ es una $\mathcal{T}$-aproximación, se sigue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,\mathrm{Ker}(t_0))_{\mathcal{T}} = 0$, i.e, $\mathrm{Ker}(\delta_0)$ está en $\mathscr{T}$. El resto de la prueba es por inducción.

(iii) Como M está en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, de la parte (ii) $T_0 \xrightarrow{t_0} M$ es una $\mathcal{T}$-aproximación con $\Im(t_0) = \tau_{\mathcal{T}}(M)$, tenemos que $\tau_{\mathcal{T}}(M)$ es finitamente generado. De la sucesión exacta

$$0 \to \tau_{\mathcal{T}}(M) \to M \to M/\tau_{\mathcal{T}}(M) \to 0$$

se sigue que $M/\tau_{\mathcal{T}}(M)$ es finitamente presentado. Usando nuevamente el hecho de que $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ es abeliana, se sigue que $\tau_{\mathcal{T}}(M)$ es finitamente presentado.

(iv) Supongamos que N está en $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$. Como los funtores F, F', G, G' preservan funtores finitamente presentados, todos los términos de la siguiente sucesión exacta son finitamente presentados

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}}(-, \mathrm{Tor}^{\mathcal{T}}(N, \mathcal{T})) \to N \to \phi(N \otimes \mathcal{T}) \to 0$$

son finitamente presentados. La afirmación se sigue de observar que $N/\tau_{\mathscr{X}}(N) \cong \phi(N \otimes \mathcal{T})$ y $\tau_{\mathscr{X}}(N) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}}(-, \mathrm{Tor}^{\mathcal{T}}(N, \mathcal{T}))$.

(v) Se procede como en la Proposición 2.20. $\square$

Denotemos con $(\tilde{\mathscr{T}}, \tilde{\mathscr{F}})$ y $(\tilde{\mathscr{X}}, \tilde{\mathscr{Y}})$ las intersecciones de las teorías de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ y $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ con las categorías $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ respectivamente. Tenemos el siguiente:

Teorema 2.36 (Brenner-Butler)**.** *Sean $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. *Supongamos que $\mathbf{C}$ y $\mathcal{T}$ tienen pseudokerneles. Con la notación previa se cumple lo siguiente:*

(i) *Los funtores F y G inducen una equivalencia entre $\tilde{\mathscr{T}}$ y $\tilde{\mathscr{Y}}$.*

(ii) *Los funtores F' y G' inducen una equivalencia entre $\tilde{\mathscr{F}}$ y $\tilde{\mathscr{X}}$.*

(iii) *Tenemos que $FG' = F'G$ y $G'F = GF' = 0$.*

2.3.2. Teoría de inclinación en variedades dualizantes

Para tener una analogía completa con la teoría de inclinación para álgebras de dimensión finita añadimos mas restricciones en nuestras categorias, como la dualidad. Supondremos en esta subsección que $\mathbf{C}$ y $\mathcal{T}$ son dualizantes, entonces tienen pseudokerneles, por lo que tenemos pares de torsión de $(\mathscr{T}(\mathcal{T}), \mathscr{F}(\mathcal{T}))$ y $(\mathscr{X}(\mathcal{T}), \mathscr{Y}(\mathcal{T}))$ en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ respectivamente y equivalencias de categorías

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}(\mathcal{T}) \arrow[dr, "\phi_{\mathcal{T}}"'] & & \mathscr{F}(\mathcal{T}) \arrow[dl, "\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,-)_{\mathcal{T}}"] \\
 & {} & \\
\mathscr{X}(\mathcal{T}) \arrow[ur, "\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(\ ,\mathcal{T})"] & & \mathscr{Y}(\mathcal{T}) \arrow[ul, "\otimes\mathcal{T}"']
\end{tikzcd}$$

Vimos que la categoría $\theta = \{\theta_C\}_{C \in \mathbf{C}}$, con $\theta_C = (\mathbf{C}(\ ,C),\ )_{\mathcal{T}}$, es una subcategoría de inclinación de $\mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op})$, entonces tenemos pares de torsión $(\mathscr{T}(\theta), \mathscr{F}(\theta))$ y $(\mathscr{X}(\theta), \mathscr{Y}(\theta))$ en $\mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op})$ y $\mathrm{mod}(\theta)$ respectivamente y equivalencias de categorías

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}(\theta) \arrow[dr, "\phi_\theta"'] & & \mathscr{F}(\theta) \arrow[dl, "\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}^{op}}(\ \ ,-)_\theta"] \\
& {} & \\
\mathscr{X}(\theta) \arrow[ur, "\mathrm{Tor}_1^\theta(\ \ ,\theta)"] & & \mathscr{Y}(\theta) \arrow[ul, "\otimes\theta"']
\end{tikzcd}$$

Por la proposición 2.27 tenemos una equivalencia de categorías $\alpha(C) : \mathbf{C}^{op} \to \theta$, $\alpha(C) = \theta_C = (\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}$, la cual induce una equivalencia de categorías

$$\alpha* : \mathrm{mod}(\theta) \to \mathrm{mod}(\mathbf{C}^{op}),\ \ \alpha * (H)(C) = H(\alpha(C)) = H(\theta_C) = H((\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}),$$

para cada C en $\mathbf{C}$ y cada H en $\mathrm{mod}(\theta)$.

Lema 2.37. *Sean N en $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ y C en $\mathbf{C}$. Entonces, tenemos lo siguiente*

(a) *Hay un isomorfismo $((\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}, DN) \cong D(N \otimes \mathcal{T})(C)$ y el siguiente cuadro es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{mod}(\mathbf{C}) \arrow[d, "D"'] & \mathrm{mod}(\mathcal{T}) \arrow[l, "\otimes\mathcal{T}"'] \arrow[d, "D"'] \\
\mathrm{mod}(\mathbf{C}^{op}) & \mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op}) \arrow[l, "\alpha*\phi_\theta"']
\end{tikzcd}$$

(b) *Hay un isomorfismo $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}^{op}}((\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}, DN) \cong D(\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T}))(C)$ y el siguiente cuadro es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{mod}(\mathbf{C}) \arrow[d, "D"'] & \mathrm{mod}(\mathcal{T}) \arrow[l, "\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(\ \ ,\mathcal{T})"'] \arrow[d, "D"'] \\
\mathrm{mod}(\mathbf{C}^{op}) & \mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op}) \arrow[l, "\alpha*\mathrm{Ext}^1(\ \ ,-)|\theta"']
\end{tikzcd}$$

(c) *Tenemos las siguientes equivalencias de categorias:*

   (i) *$D(\mathscr{X}(\mathcal{T})) \cong \mathscr{F}(\theta)$, $D(\mathscr{Y}(\mathcal{T})) \cong \mathscr{T}(\theta)$.*

   (ii) *$D(\mathscr{T}(\mathcal{T})) \cong \mathscr{Y}(\theta)$, $D(\mathscr{F}(\mathcal{T})) \cong \mathscr{X}(\theta)$.*

Demostración. Recordemos que, para cada C en $\mathbf{C}$, hay una sucesión exacta de $\mathcal{T}^{op}$-módulos

$$0 \to (T^1,\ \ ) \to (T^0,\ \ ) \to (\mathbf{C}(\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}} \to 0 \tag{2.60}$$

Después de aplicar $(\ \ ,DN)$ a la sucesión (2.60) se sigue, de la sucesión larga de homología y lema de Yoneda, que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to ((\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}, DN) \to DN(T^0) \to DN(T^1) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}^{op}}((\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}, DN) \to 0 \tag{2.61}$$

Después de Aplicar $\otimes_{\mathcal{T}} N$ a (2.60) obtenemos, por la sucesión larga de homología, la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N,\mathcal{T})(C) \to N(T^1) \to N(T^0) \to (N\otimes\mathcal{T})(C) \to 0 \tag{2.62}$$

Dualizando (2.62) y comparando con (2.61) obtenemos los isomorfismos de (a) y (b).

Veamos que el primer cuadro conmuta, sea N en $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$. Entonces,

$$\begin{aligned} \alpha * (\phi_\theta(DN))(C) &= \alpha * ((\ \ , DN)_\theta)(C) \\ &= (((\ \ , C),\ \ )_{\mathcal{T}}, DN) = D(N\otimes\mathcal{T})(C) \end{aligned}$$

Las igualdades

$$\begin{aligned} \alpha * (\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}^{op}}(\ \ ,-)_\theta(DN))(C) &= \alpha * (\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}^{op}}(\ \ , DN)_\theta)(C) \\ &= \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}^{op}}(((\ \ , C),\ \ ), DN) = D(\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(N\otimes\mathcal{T})(C) \end{aligned}$$

implican que el segundo cuadro conmuta.

Sólo resta probar (c). Por la parte (a) se sigue que:

$$\mathscr{T}(\theta) = \{N \in \mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op}) | \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}^{op}}(\theta_C, N) = 0\} = D(\mathscr{Y}(\mathcal{T})).$$

Por otro lado, tenemos equivalencias de categorías por el teorema de Brenner-Butler

$$\phi_\theta : \mathscr{F}(\theta) \to \mathscr{X}(\theta)$$
$$-\otimes\mathcal{T} : \mathscr{Y}(\mathcal{T}) \to \mathscr{T}(\mathcal{T})$$

entonces, tenemos un cuadro conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}(\mathcal{T}) \arrow[d, "D"'] & \mathscr{Y}(\mathcal{T}) \arrow[l, "\otimes\mathcal{T}"'] \arrow[d, "D"'] \\ \mathscr{Y}(\theta) & \mathscr{T}(\theta) \arrow[l, "\alpha*\phi_\theta"'] \end{tikzcd}$$

Por la parte (b) se sigue que

$$\mathscr{F}(\theta) = \{N \in \mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op}) | \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{op}}(\theta_C, N) = 0\} = D(\mathscr{X}(\mathcal{T}))$$

y tenemos equivalencias de categorías por el teorema de Brenner-Butler

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(\ \ ,\mathcal{T}) : \mathscr{X}(\mathcal{T}) \to \mathscr{F}(\mathcal{T})$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}^{op}}(\ \ ,-)_\theta : \mathscr{T}(\theta) \to \mathscr{Y}(\theta)$$

entonces, tenemos una cuadro conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(\mathcal{T}) \arrow[d, "D"'] & \mathscr{X}(\mathcal{T}) \arrow[l, "\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(\ \ ,\mathcal{T})"'] \arrow[d, "D"'] \\ \mathscr{X}(\theta) & \mathscr{F}(\theta) \arrow[l, "\alpha*\mathrm{Ext}^1(\ \ ,-)|\theta"'] \end{tikzcd}$$

□

Recordemos que cuando $\mathbf{C}$ es una variedad Krull-Schmidt dualizante, hay sucesiones que casi se dividen en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ [AR2].

Definición 2.38 (ASS)**.** *Sea $\mathbf{C}$ una variedad Krull-Schmidt dualizante. Una teoría de torsión $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ se **divide** si para todo $M \in \mathrm{mod}(\mathbf{C})$ inescindible ocurre que M está en $\mathscr{T}$ o M está en $\mathscr{F}$.*

Proposición 2.39 (ASS Prop. 1.7)**.** *Sea $\mathbf{C}$ una variedad Krull-Schmidt dualizante y $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ un par de torsión en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. Las siguiente condiciones son equivalentes:*

(a) *La teoría de torsión $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ se escinde.*

(b) *Sea τ el radical de la teoría de torsión. Entonces, para cada M en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, la sucesión $0 \to \tau(M) \to M \to M/\tau(M) \to 0$ se escinde.*

(c) *Para todo N en $\mathscr{F}$ y todo M en $\mathscr{T}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(N,M) = 0$.*

(c) *Si $M \in \mathscr{T}$, entonces $\mathrm{TrD}M \in \mathscr{T}$.*

(d) *Si $N \in \mathscr{F}$, entonces $\mathrm{DTr}N \in \mathscr{F}$.*

Análogo al caso de álgebras de dimensión finita, decimos que una subcategoría $\mathcal{T}$ de inclinación de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ se **separa** si el par inducido $(\mathscr{T}(\mathcal{T}),\mathscr{F}(\mathcal{T}))$ en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ se divide, y se **divide** si el par inducido $(\mathscr{Y}(\mathcal{T}),\mathscr{X}(\mathcal{T}))$ en $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ se divide.

Lema 2.40. *Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ que se divide.*

(a) *Sea $0 \to M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathrm{TrD}(M) \to 0$ una sucesión que casi se divide con M en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$. Entonces $0 \to \phi(M) \to \phi(E) \to \phi(\mathrm{TrD}(M)) \to 0$ es una sucesión que casi se divide, cuyos terminos están en $\mathscr{Y}(\mathcal{T})$.*

(b) *Sea $0 \to \mathrm{DTr}(M) \to E \to M \to 0$ una sucesión que casi se divide con M en $\mathscr{F}(\mathcal{T})$. Entonces, $0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,\mathrm{Dtr}(M))_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,E)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}} \to 0$ es una sucesion que casi se divide, cuyos términos están en $\mathscr{X}(\mathcal{T})$.*

Demostración. Sólo se probará (a). Por el lema previo $\mathrm{TrD}(M) \in \mathscr{T}(\mathcal{T})$. Entonces, por la sucesión larga de homología, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to (\ \ ,M)_{\mathcal{T}} \xrightarrow{(\ \ ,f)_{\mathcal{T}}} (\ \ ,E)_{\mathcal{T}} \xrightarrow{(\ \ ,g)_{\mathcal{T}}} (\ \ ,\mathrm{TrD}(M))_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,M)_{\mathcal{T}} = 0 \qquad (2.63)$$

cuyos extremos están en $\mathscr{Y}(\mathcal{T})$, pues ϕ es una equivalencia. Se sigue que el término de en medio está en $\mathscr{Y}(\mathcal{T})$, porque esta categoría es cerrada bajo extensiones.

El morfismo $(\ \ ,g)_{\mathcal{T}}$ es mínimo derecho. En efecto, sea $\tilde{\eta} : (\ \ ,E)_{\mathcal{T}} \to (\ \ ,E)_{\mathcal{T}}$ un endomorfismo tal que $(\ \ ,g)_{\mathcal{T}}\tilde{\eta} = (\ \ ,g)_{\mathcal{T}}$. Pero $\tilde{\eta} \in ((\ \ ,E)_{\mathcal{T}},(\ \ ,E)_{\mathcal{T}}) \cong (E,E)$, entonces $\tilde{\eta} = (\ \ ,\eta)_{\mathcal{T}}$, con $\eta : E \to E$. Entonces $g\eta = g$, y como g es mínimo derecho, se sigue que η es isomorfismo.

Sea $\tilde{\gamma} : G \to (\ \ ,\mathrm{TrD}(M))$ un morfismo que no es epimorfismo escindible. Entonces $G \in \mathscr{X}(\mathcal{T})$ o $G \in \mathscr{Y}(\mathcal{T})$. Si $G \in \mathscr{Y}(\mathcal{T})$, entonces $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}(\mathcal{T}),\mathscr{Y}(\mathcal{T})) = 0$, i.e, $\tilde{\gamma} = 0$ y se factoriza por $(\ \ ,g)_{\mathcal{T}}$. De otro modo $G = (\ \ ,F)_{\mathcal{T}}$, con $F \in \mathscr{T}(\mathcal{T})$ y $\tilde{\gamma} = (\ \ ,\gamma)_{\mathcal{T}}$, con $\gamma : F \to \mathrm{TrD}M$. Entonces, $\tilde{\gamma} = (\ \ ,\gamma)_{\mathcal{T}}$ no es epimorfismo que se divide si, y sólo si, γ no es epimorfismo que se divide. Luego, γ se factoriza por g, lo que implica que $\tilde{\eta}$ se factoriza por $(\ \ ,g)_{\mathcal{T}}$. $\square$

Como consecuencia de los teoremas 2.36 y 2.35. Puede demostrarse el siguiente lema probado en [ASS 5.5]

Lema 2.41. *Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*. Si $M \in \mathscr{T}(\mathcal{T})$ y $N \in \mathscr{F}(\mathcal{T})$, entonces, para cualquier $j \geq 1$, hay un isomorfismo*

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathbf{C}}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^{j-1}_{\mathcal{T}}(\phi(M), \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,N)_{\mathcal{T}})$$

Usando el hecho de que $\theta = \{\theta_C = ((\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}\}_{C\in\mathbf{C}}$ es una subcategoría de inclinación en $\mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op})$, puede probarse el siguiente:

Teorema 2.42. *Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*. Entonces:*

(a) *$\mathcal{T}$ se separa si, y sólo si,* $\mathrm{pdim}Y$ *para todo $Y \in \mathscr{Y}(\mathcal{T})$.*

(b) *$\mathcal{T}$ se divide si, y sólo si,* $\mathrm{idim}N = 1$ *para todo $N \in \mathscr{F}(\mathcal{T})$.*

Demostración. (b) Está probado en [ASS Theo. 5.6] pero, para beneficio del lector, repetimos la prueba aquí.

Primero, la suficiencia. Supongamos que para todo $N \in \mathscr{F}(\mathcal{T})$, tenemos $\mathrm{idim}N = 1$. Sea $X \in \mathscr{X}(\mathcal{T})$ y $Y \in \mathscr{Y}(\mathcal{T})$. Entonces existe $M \in \mathscr{T}(\mathcal{T})$ y $N \in \mathscr{F}(\mathcal{T})$ tal que $X \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\ \ ,N)_{\mathcal{T}}$ y $Y \cong \phi(M)$, por el Teorema Brenner-Butler. De este modo, por el lema anterior tenemos:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}}(Y,X) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}}(\phi(M), \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\ ,N)_{\mathcal{T}}) \cong \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}}(M,N) = 0,$$

Recíprocamente, supongamos que $(\mathscr{X}(\mathcal{T}), \mathscr{Y}(\mathcal{T}))$ se divide y sea $N \in \mathscr{F}(\mathcal{T})$. Tomemos una resolución inyectiva de N

$$0 \to N \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \xrightarrow{d^2} I^2 \to \cdots$$

Sean $L^0 = \mathrm{Im}d^1$ y $L^1 = \mathrm{Im}d^2$. Como $\mathscr{T}(\mathcal{T}) = \mathrm{KerExt}^1_{\mathcal{C}}(\mathcal{T},\ \ )$ es una categoría cerrada bajo imagenes epimorficas que contiene los objetos inyectivos y $N \in \mathscr{F}(\mathcal{T})$, se sigue que $L^1 \in \mathscr{T}(\mathcal{T})$. Entonces, por el lema anterior, tenemos:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(L^1, L^0) \cong \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}}(L^1, N) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}}(\phi(L^1), \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\ ,N)_{\mathcal{T}}).$$

Pero, $\phi(L^1) \in \mathscr{Y}(\mathcal{T})$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\ ,N)_{\mathcal{T}} \in \mathscr{X}(\mathcal{T})$ y $(\mathscr{X}(\mathcal{T}), \mathscr{Y}(\mathcal{T}))$ se escinde por hipótesis.

Por la proposición 2.39, esto implica que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{T}}(\phi(L^1), \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\ ,N)_{\mathcal{T}}) = 0$, demostrando que la sucesión exacta $0 \to L^0 \to I^1 \to L^1 \to 0$ se escinde. Por lo que, L^0 es inyectivo y $\mathrm{idim}N \leq 1$. Finalmente, $N \in \mathscr{F}(\mathcal{T})$, implica N no es inyectivo, entonces $\mathrm{idim}N = 1$.

Veamos que (a) se sigue de (b):

Por definición $\mathcal{T}$ se separa si, y sólo, si el par de torsión $(\mathscr{T}(\mathcal{T}), \mathscr{F}(\mathcal{T}))$ en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ se divide, i.e, si, y sólo si, $(\mathscr{Y}(\theta), \mathscr{X}(\theta)) = (D\mathscr{F}(\mathcal{T}), D\mathscr{T}(\mathcal{T}))$ es una teoría de torsión que se divide en $\mathrm{mod}(\mathbf{C}^{op}) \cong \mathrm{mod}(\theta)$, si y sólo si, θ es una categoría de inclinacion que se divide en $\mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op})$, si y sólo si, $\mathrm{idim}N = 1$, para todo $N \in \mathscr{F}(\theta)$, por (b). Pero $\mathscr{F}(\theta) = D\mathscr{Y}(\mathcal{T})$, y (a) se sigue. $\square$

Corolario 2.43. *Si* $\mathrm{gdim}\mathbf{C} \leq 1$*, entonces toda subcategoría de inclinación $\mathcal{T} \subset$* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *se divide.*

Como consecuencia del teorema anterior y del lema 2.37, tenemos el siguiente:

Corolario 2.44. *Si* $\mathbf{C}$ *y* $\mathcal{T}$ *son hereditarias, entonces* $\mathcal{T}$ *se divide y separa.*

Los últimos teoremas de esta subsección tendrán concecuencias importantes en el caso hereditario, que serán considerados en próximo capítulo.

Capítulo 3

Ejemplos y aplicaciones

En este capítulo se mostrarará que hay ejemplos que surgen de manera natural de las nociones discutidas en los capítulos previos. En la primera sección se probará que un $\mathrm{End}_A(M)^{op}$-módulo inclinación T, donde A es un álgebra de dimensión finita con generador finito M, puede ser extendido a una categoría de inclinación en Mod(mod Λ).

Posteriormente, en el caso hereditario, consideraremos carcajes Q infinitos localmente finitos y consideraremos el álgebra de carcaj KQ como una categoría. Probaremos en este caso que una sección sin caminos dirigidos de longitud infinita, en la componente preproyectiva, produce una categoría de inclinación. De esta manera, aplicar el funtor de inclinación es análogo a aplicar una sucesión infinita de funtores de Coxeter parciales, para cambiar la orientación del carcaj. Después calcularemos las componentes de Auslander-Reiten de los diagramas de Dynkin infinitos.

Para describir la forma de todas las componentes del carcaj de Auslander-Reiten, es suficiente calcularlas con una orientación fija y después aplicar el funtor de inclinación. Para los ejemplos que aquí analizamos, escogemos carcajes cuyos vértices son fuentes o pozos.

Al final se verá, siguiendo los argumentos de [ABPRS], que las componentes regulares de un carcaj localmente finito son de tipo $\mathbb{Z}A_\infty$.

3.1. Extensión de módulos de inclinación

Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita y mod Λ la categoría de Λ-módulos finitamente generados. En esta sección veremos una alternativa de como encontrar categorías de inclinación para Mod(mod Λ). Más en general, veremos como, bajo ciertas condiciones, extender un módulo de inclinación a una subcategoría de inclinación de una categoría de funtores.

Recordemos del capítulo 1, que una K-variedad $\mathbf{C}$ es una K-categoría donde los idempotentes se dividen. Una K-categoría $\mathbf{C}$ es llamada Hom-finita si, los K-módulos $\mathbf{C}(C, C')$ son finitamente generados.

Sea $\mathbf{C}$ una K-variedad Hom-finita con un **generador aditivo finito** Λ, i.e, para cualquier objeto $C \in \mathbf{C}$ hay un epimorfismo de una suma finita de copias de Λ en C (por ejemplo, si Λ es una K-álgebra de dimensión finita, mod Λ es una K-categoría Hom-finita, con generador aditivo finito Λ).

Sea C un objeto de $\mathbf{C}$ y denotemos con $\{C\}$ a la la subcategoría plena de $\mathbf{C}$ cuyo único objeto es C. Para este objeto C, consideremos el anillo $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C)$, el anillo de endomorfismos de C. Denotemos a $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C)^{op}$ por R_C. Recordemos del capítulo 1 que el funtor evalución $e_C : \mathrm{Mod}(\{C\}) \to \mathrm{Mod}(R_C)$ induce una equivalencia de categorías. Recordemos también que $\mathrm{add}(\{C\})$ es una variedad de annuli generada por C y que las categorías $\mathrm{Mod}(\mathrm{add}\{C\})$ y $\mathrm{Mod}(\{C\})$ son equivalentes.

Dados las condiciones sobre $\mathbf{C}$, el anillo R_C resulta ser una K-álgebra de dimensión finita. Entonces, en caso de que exista en $\mathrm{Mod}(R_C)$ un módulo de inclinación, podremos encontrar un objeto en $\mathrm{Mod}(\mathrm{add}\{C\})$ con las mismas propiedades homológicas, al cual llamaremos objeto de inclinación. En este caso veremos como podemos extender un objeto de inclinación en $\mathrm{Mod}(R_C)$ a una subcategoría de inclinación en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$.

La idea de como hacer esto, se explica brevemente a continuación. Supongamos que C es un generador aditivo finito de $\mathbf{C}$ y que T es un $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C)^{op}$-módulo de inclinación T. Primero se extiende T a una subcategoría inclinación parcial de $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C}')$, donde $\mathbf{C}'$ es una subcategoría de $\mathbf{C}'$ que contiene a C. Luego $\mathcal{T}$ se extiende a una subcategoría de inclinación parcial $\mathbf{C} \otimes'_{\mathbf{C}} \mathcal{T}$ de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, mediante el funtor $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}') \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Finalmente se usa el argumento de Bongartz [Bo 2.1] para extender $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} \mathcal{T}$ a una subcategoría de inclinación *completa* de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$.

En esta sección diremos que una subcategoría $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ es **auto ortogonal**, si $\mathrm{Ext}^1_C(T, T') = 0$, para cada par de objetos T y T' de $\mathcal{T}$.

Lema 3.1. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría aditiva y* $\mathbf{C}'$ *una subcategoría plena de* $\mathbf{C}$. *Supongamos que* $\mathcal{T}$ *es una subcategoría plena auto ortogonal de* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C}')$*, cuyos objetos son finitamente presentados. Entonces la categoría* $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} \mathcal{T}$ *es una subcategoría auto ortogonal de* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$.

Demostración. Considerese un par de objetos culesquiera T_1 y T_2 de $\mathcal{T}$, con sus respectivas presentaciones finitas:

$$\mathbf{C}'(\ \ , C_1') \to \mathbf{C}'(\ \ , C_0') \to T_1 \to 0$$
$$\mathbf{C}'(\ \ , C_1'') \to \mathbf{C}'(\ \ , C_0'') \to T_2 \to 0$$

Dado que $\mathcal{T}$ es auto ortogonal, se cumple que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}'}(T_1, T_2) = 0$. Consideremos los funtores

$$\mathrm{res} : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C}')$$
$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}') \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$$

Afirmamos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} T_1, \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} T_2) = 0$. En efecto, sea $\mathbf{e}$ un elemento de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} T_1, \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} T_2)$,

$$\mathbf{e} : 0 \to \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} T_1 \to F \to \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} T_2 \to 0$$

Después de aplicar $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'}$ a las presentaciones de T_1 y T_2, por el Lema de la Herradura, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathbf{C}(\ ,C_1') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}(\ ,C_0') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'} T_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathbf{C}(\ ,C_1' \coprod C_1'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}(\ ,C_0' \coprod C_0'') \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathbf{C}(\ ,C_1'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}(\ ,C_0'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'} T_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nótese que de esta modo F tiene una presentación finita sobre $\mathbf{C}'$, de modo que por la proposición 1.10 tenemos el isomorfismo $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'} \mathrm{res}(F) \cong \mathrm{Id}_{\mathrm{Mod}(\mathbf{C})}(F) = F$.

Después de aplicar res obtenemos el siguiente diagrama exacto conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathbf{C}'(\ ,C_1') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}'(\ ,C_0') \arrow[r] \arrow[d] & T_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathbf{C}'(\ ,C_1' \coprod C_1'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}'(\ ,C_0' \coprod C_0'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{res}F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathbf{C}'(\ ,C_1'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}'(\ ,C_0'') \arrow[r] \arrow[d] & T_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nótese que la columna de la derecha se escinde, pero después de aplicar $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'}$ y usar el hecho de que $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'} \mathrm{res}(F) \cong F$, obtenemos el primer diagrama donde las columnas se escinden y $\mathbf{e}$ se escinde. $\square$

Definición 3.2. *Una subcategoría plena $\mathcal{T}$ de* $\mathrm{Mod}(C)$ *es de* ***inclinación parcial****, si sus objetos satisfacen las siguientes dos condiciones:*

(i) *Para cada objeto T en $\mathcal{T}$, hay una sucesión exacta $0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$, con P_i proyectivo finitamente generado.*

(ii) *Para todo par de objetos T_i y T_j en $\mathcal{T}$, tenemos $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_i, T_j) = 0$.*

Proposición 3.3. *Sea $\mathbf{C}$ una variedad y $\mathbf{C}'$ una subvariedad plena de $\mathbf{C}$ que contiene un generador finito de $\mathbf{C}$. Supongamos que $\mathcal{T}$ es una subcategoría plena parcial de inclinación de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C}')$, entonces $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'} \mathcal{T}$ es una subcategoría parcial de inclinación de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$.*

Demostración. Ya se probó en el lema 3.1 que $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'} \mathcal{T}$ es auto ortogonal, si $\mathcal{T}$ lo es. Sólo falta ver que cumple la condición (ii). Como se vio en la proposición 1.3 del la condición de que $\mathbf{C}'$ es variedad asegura que los $\mathbf{C}'$-módulos proyectivos finitamente generados son de la forma $\mathbf{C}'(\ \ , C')$ con C' en $\mathbf{C}'$. Sea T un objeto en $\mathcal{T}$, entonces existe una sucesión exacta

$$0 \to \mathbf{C}'(\ \ , C_1') \xrightarrow{\mathbf{C}'(\ \ ,f)} \mathbf{C}(\ \ , C_0') \to T \to 0$$

con C_0' y C_1' en $\mathbf{C}'$.

Aplicando $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'}$ a la sucesión exacta anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\mathbf{C}(\ \ , C_1') \xrightarrow{\mathbf{C}(\ \ ,f)} \mathbf{C}(\ \ , C_0') \to \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} T \to 0.$$

Como Λ está en $\mathbf{C}'$, tenemos que $\mathbf{C}'(\Lambda, C_0') = \mathbf{C}(\Lambda, C_0')$ y $\mathbf{C}'(\Lambda, C_1') = \mathbf{C}(\Lambda, C_1')$, por consiguiente $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} T(\Lambda) = T(\Lambda)$. La proposición estará probada si se demuestra que $\mathbf{C}(\ \ , f)$ es monomorfismo. Para ver que $\mathbf{C}(\ \ , f)$ es mono se necesita ver que $\mathbf{C}(C, f)$ es mono para todo objeto C en $\mathbf{C}$. Sea C un objeto en $\mathbf{C}$, como Λ es un generador finito de $\mathbf{C}$ entonces hay un epimorfismo $g : \Lambda^n \to C \to 0$ y por lo tanto monomorfismos $0 \to \mathbf{C}(C, C_i') \to \mathbf{C}(\Lambda, C_i')$, para $i = 0, 1$.

De este modo tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathbf{C}(C, C_1') \arrow[r, "\mathbf{C}(C,f)"] \arrow[d, "\mathbf{C}(g,C_1')"] & \mathbf{C}(C, C_0') \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{C}(g,C_0')"] & \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} T(C) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}'}T(g)"] & 0 \\
 & \mathbf{C}(\Lambda^n, C_1') \arrow[r, "\mathbf{C}(\Lambda^n,f)"] \arrow[d, equal] & \mathbf{C}(\Lambda^n, C_0') \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}'} T(\Lambda^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{C}'(\Lambda^n, C_1') \arrow[r, "\mathbf{C}'(\Lambda^n,f)"] & \mathbf{C}'(\Lambda^n, C_0') \arrow[r] & T(\Lambda^n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Así, $\mathbf{C}(C, f)$ es monomorfismo para todo objeto C en $\mathbf{C}$. $\square$

Teorema 3.4. *Sea* $\mathbf{C}$ *una* K*-variedad* Hom*-finita,* Λ *un generador aditivo finito de* $\mathbf{C}$ *y* $R_\Lambda = \mathrm{End}(\Lambda)^{op}$*. Supongamos que* $\mathrm{Mod}(R_\Lambda)$ *tiene un módulo de inclinación parcial, entonces* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ *tiene una subcategoría de inclinación.*

Demostración. En efecto, si $\mathrm{Mod}(R_\Lambda)$ tiene un objeto de inclinación parcial, dada la equivalencia que hay entre $\mathrm{Mod}(R_\Lambda)$ y $\mathrm{Mod}(\mathrm{add}\{\Lambda\})$, se sigue que en la categoría $\mathrm{Mod}(\mathrm{add}\{\Lambda\})$ hay un objeto de inclinación parcial. Ponemos $\mathbf{C}' = \mathrm{add}\{\Lambda\}$, $\mathbf{C}'$ es la subvariedad de annuli de $\mathbf{C}$ generada por Λ que contiene al generador finito de $\mathbf{C}$. Entonces, por la proposición 3.3 existe un objeto T en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ que es de inclinación parcial en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Como T es finitamente presentado, tenemos una sucesion exacta

$$0 \to L \to \mathbf{C}(\ \ , C_0) \to T \to 0 \tag{3.1}$$

con L finitamente generado.

Sea C un objeto en $\mathbf{C}$. Aplicando $\mathrm{Hom}(\ \ , \mathbf{C}(\ \ , C))$ a (3.1), por la sucesión larga de homología obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{C}(\ \ , C_0), \mathbf{C}(\ \ , C)) \to \mathrm{Hom}(L, \mathbf{C}(\ \ , C)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, \mathbf{C}(\ \ , C)) \to 0$$

Como L es finitamente generado, hay un epimorfismo $\mathbf{C}(\ \ ,C_1) \to L \to 0$ y luego un monomorfismo $0 \to \mathrm{Hom}(L, \mathbf{C}(\ \ ,\mathbf{C})) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{C}(\ \ ,C_1), \mathbf{C}(\ \ ,C)) \cong \mathrm{Hom}(C_1, C)$. Como $\mathbf{C}$ es Hom-finita, entonces $\mathrm{Hom}(C_1, C)$ es un K-espacio vectorial de dimensión finita, se sigue que $\mathrm{Hom}(L, \mathbf{C}(\ \ ,C))$ y $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, \mathbf{C}(\ \ ,C))$ son K-espacios vectoriales de dimensión finita.

Ahora procedemos como en [Bo]:

Sea $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d$ una K-base de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, \mathbf{C}(\ \ ,C))$. Representemos cada $\mathbf{e_i}$ con una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathbf{C}(\ \ ,C) \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{g_i} T \to 0$$

Consideremos el siguiente diagrama con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{C}(\ \ ,C)^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l"'] & \bigoplus_{i=1}^{d} E_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & T^d \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{C}(\ \ ,C) \arrow[r, "v"] & E_C \arrow[r, "w"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $f = \begin{pmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_d \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_d \end{pmatrix}$ y $l = [1, \ldots, 1]$ es el morfismo codiagonal. Denotemos con $\mathbf{e}_C$ al elemento de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T^d, \mathbf{C}(\ \ ,C))$ representado por la sucesión exacta

$$\mathbf{e}_C : 0 \to \mathbf{C}(\ \ ,C) \xrightarrow{v} E_C \xrightarrow{w} T^d \to 0$$

Sea $u_i : T \to T^d$ el homomorfismo inclusión en la i-ésima coordenada. Afirmamos que $\mathbf{e}_i = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(u_i, \mathbf{C}(\ \ ,C))\mathbf{e}_C$, para cada $i = 1, \ldots, d$. En efecto, consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{C}(\ \ ,C) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u_i''"'] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "u_i'"'] & T \arrow[r] \arrow[d, "u_i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{C}(\ \ ,C)^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l"'] & \coprod_{i=1}^{d} E_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & T^d \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{C}(\ \ ,C) \arrow[r, "v"] & E_C \arrow[r, "w"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde u_i', u_i'', u_i denotan las respectivas inclusiones. Como $lu_i'' = 1_{\mathbf{C}(\ \ ,C)}$, obtenemos un diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{C}(\ \ ,C) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "1"'] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "uu_i'"'] & T \arrow[r] \arrow[d, "u_i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{C}(\ \ ,C) \arrow[r, "v"] & E_C \arrow[r, "w"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y de aquí se sigue nuestra afirmación.

Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T, \ )$ a $\mathbf{e}_C$ obtenemos, por la sucesión larga de homología, la siguiente sucesion exacta:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T, T^d) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, \mathbf{C}(\ , C)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, T^d) = 0$$

Como $\mathbf{e_i} = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(u_i, \mathbf{C}(\ , C))\mathbf{e}_C = \delta(u_i)$, se sigue que cada elemento de la base de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, \mathbf{C}(\ , C))$ está en la imagen del morfismo de conección δ, el cual es por lo tanto supráyectivo. Por lo que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, E_C) = 0$.

Veremos que la subcategoría $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, con $\mathcal{T} = \{T \coprod E_C\}_{C \in \mathbf{C}}$, es una categoría de inclinación.

De la suceción exacta $\mathbf{e}_C$ y del Lema de la Herradura tenemos que E_C es finitamente presentado. Además, T es finitamente presentado por ser un objeto de inclinación parcial en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, por lo cual $T \coprod E_C$ es finitamente presentado, para cualquier objeto C en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$.

(i) $\mathrm{pdim} T \coprod E_C \leq 1$. Como T es un objeto inclinacion parcial en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, sabemos que $\mathrm{pdim} T \leq 1$, se sigue que $\mathrm{pdim} E_C \leq 1$ por la sucesión exacta $\mathbf{e}_C$, y por lo tanto $\mathrm{pdim} T \coprod E_C \leq 1$.

(ii) Para cuaquier par de objetos C y C' en $\mathbf{C}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T \coprod E_C, T \coprod E_{C'}) = 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ , T)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\ , E_{C'})$ a $\mathbf{e}_C$ obtenemos, por la sucesión larga de homología, las siguientes sucesiones exactas:

$$0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T^d, T) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(E_C, T) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}(\ , C), T) = 0, \tag{3.2}$$

$$0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T^d, E_{C'}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(E_C, E_{C'}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}(\ , C), E_{C'}) = 0; \tag{3.3}$$

Es decir, hemos probado que, para cualquier par de objetos C y C' de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, tenemos

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, E_{C'}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(E_C, T) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(E_C, E_{C'}) = 0$$

Usando el hecho $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T, T) = 0$ y las igualdades anteriores, la condición (ii) se cumple.

(iii) Esta condición se sigue de manera inmediata. $\square$

3.2. El caso hereditario

A lo largo de está sección, $Q = (Q_0, Q_1)$ es un carcaj infinito conexo **localmente finito**, i.e, para cada vértice $x \in Q_0$, existe un número finito de caminos en Q que inician o términan en x. Con esta condición la categoría $\mathrm{mod}(KQ)$ se corresponde con la categoría de KQ-módulos de longitud finita. Para tratar la teoría de inclinación en el estudio de la categoría de representaciones de dimensión finita $\mathrm{rep}(KQ)$ en este caso, recordaremos algunos hechos, los cuales enlistamos a continuación:

(a) La categoría de representaciones $\mathrm{rep}(KQ)$**.** Consideremos al carcaj KQ como una categoría $\mathbf{C}$, como sigue. A cada vértice $i \in Q_0$ se le asocia un idempotente e_i, en el álgebra KQ, correspondiente al camino trivial que inicia y termina en i. Entonces, se define la categoría $\mathbf{C}$ como

(i) $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}) = \{e_i\}_{i \in Q_0}$

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(e_i, e_j) = e_j KQ e_i$

Además, tenemos una equivalencia de categorías

$$\Theta : \mathrm{mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{rep}(KQ), \quad \Theta(F) = (F(e_i), F(\alpha))_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

De acuerdo con las condiciones impuestas sobre Q, el funtor $\mathbf{C}(\ \ , e_i)$ tiene soporte $\mathrm{Supp}\mathbf{C}(\ \ , e_i)$ finito. Más aún, dado que Q^{op} satisface las mismas condiciones que Q, entonces el funtor $\mathbf{C}(e_i, \ \ )$ tiene soporte finito en $\mathbf{C}^{op}$.

Puede verificarse sin ningún problema que $\mathbf{C} = KQ$ es una K-variedad Krull-Schmidt dualizante. Entonces en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ hay sucesiones que casi se dividen (ver [AR2]).

Recordemos que para calcular el dual transpuesto $\tau = D\mathrm{Tr}$ en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ consideramos el siguiente functor:

$$(\ \ )^* : \mathrm{mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{mod}(\mathbf{C}^{op})$$

definido como $(F)^*(C) = (F, \mathbf{C}(\ \ , C))$. Entonces, dado un objeto M en $\mathbf{C}$ no proyectivo con resolución proyectiva mínima

$$\mathbf{C}(\ \ , C_0) \to \mathbf{C}(\ \ , C_1) \to M \to 0,$$

se puede calcular el transpuesto $\mathrm{Tr}(M)$ de M aplicando $(\ \ )^*$ a la sucesión anterior, obteniendo la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\mathbf{C}^{op})$

$$0 \to (M)^* \to \mathbf{C}(C_1, \ \ ) \to \mathbf{C}(C_0, \ \ ) \to \mathrm{Tr}(M) \to 0$$

La dualidad $D : \mathrm{mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{mod}(\mathbf{C}^{op})$ se define como $DM(C) = \mathrm{Hom}_K(M(C), K)$, para cada $M \in \mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y $C \in \mathbf{C}$.

(b) Carcajes de translación. Sea $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ un carcaj conexo y acíclico. El carcaj de translación infinito $(\mathbb{Z}\Delta, \tau)$ se define como sigue. El conjunto de vértices de $\mathbb{Z}\Delta$ es

$$(\mathbb{Z}\Delta)_0 = \mathbb{Z} \times \Delta_0 = \{(n, x) | n \in \mathbb{Z}, x \in \Delta_0\}$$

y para cada $\alpha : x \to y$ en Δ_1 hay dos flechas

$$\begin{aligned} (n, \alpha) &: (n, x) \to (n, y) \\ (n, \alpha') &: (n+1, y) \to (n, x) \end{aligned}$$

en $(\mathbb{Z}\Delta)_1$ y estas son todas las flechas en $(\mathbb{Z}\Delta)_1$. Se define la translación τ sobre $\mathbb{Z}\Delta$ por $\tau(n, x) = (n+1, x)$, para todo vértice $(n, x) \in (\mathbb{Z}\Delta)_0$.

Para cada $(n, x) \in (\mathbb{Z}\Delta)_0$ se define la biyección entre el conjunto de flechas de final (n, x) y el conjunto de flechas de inicio $(n+1, x)$ por las fórmulas

$$\begin{aligned} \sigma(n, \alpha) &= (n, \alpha') \\ \sigma(n, \alpha') &= (n+1, \alpha) \end{aligned}$$

Véase la siguiente figura

$$\begin{tikzcd} (n+1, x) \arrow[d, "(n+1,\alpha)"'] & (n, x) \arrow[d, "(n,\alpha)"] \\ (n+1, y) \arrow[ur, "\sigma(n,\alpha)"'] & (n, \alpha) \end{tikzcd}$$

Se denota con $(-\mathbb{N}\Delta)$ el subcarcaj pleno del carcaj de translación $(-\mathbb{Z}\Delta)$, cuyos vértices son el conjunto $(-\mathbb{N}\Delta)_0 = \{(n,x) \in (\mathbb{Z}\Delta)_0 | n \leq 0\}$. Las funciones τ y σ pueden restringirse a $(-\mathbb{N}\Delta)$.

La componente preproyectiva $\mathcal{K}$ del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(KQ)$, de KQ, puede ser calculada como en el caso de carcajes finitos. Es fácil ver que este es un carcaj de translación de la forma $(-\mathbb{N}\Delta, \tau)$, con $\Delta = Q^{op}$ y $\tau = D\mathrm{Tr}$.

Definición 3.5 (ASS). *Sea (Γ, τ) un carcaj conexo de translación. Una subgrafica plena y conexa Σ de (Γ, τ) es una* ***sección*** *si satisface las siguientes condiciones:*

(S1) *Si $x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_t$ es un camino en Σ de longitud $l \geq 1$, entonces $x_0 \neq x_t$.*

(S2) *Para cada $x \in \Gamma_0$, existe un único $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\tau^n x \in \Sigma_0$.*

(S3) *Si $x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_t$ es un camino en Γ, con $x_0, x_t \in \Sigma_0$, entonces $x_i \in \Sigma_0$ para toda i tal que $0 \leq i \leq t$.*

Lema 3.6 (ASS VIII, 1.4). *Sea Σ una sección en (Γ, τ), entonces lo siguiente ocurre:*

(i) *Si $x \to y$ es una flecha en Γ y $x \in \Sigma_0$, entonces $y \in \Sigma_0$ o $\tau y \in \Sigma_0$.*

(ii) *Si $x \to y$ es una flecha en Γ y $y \in \Sigma_0$, entonces $x \in \Sigma_0$ o $\tau^{-1} y \in \Sigma_0$.*

Definición 3.7 (ARS). *Sea I un entero en alguno de los intervalos $(-\infty, n], [n, \infty), [m, n]$ para $m < n$ ó $\{1, \ldots, n\}$ módulo n. Sea $\cdots \to x_i \xrightarrow{f_i} x_{i+1} \to \cdots$ un camino en el carcaje de Auslander-Reiten (Γ, τ) con cada índice en I. Este camino es llamado* ***seccional****, si $\tau x_{i+2} \ncong x_i$.*

El siguiente lema puede probarse siguiendo la demostración dada en [ARS Teo. 2.4].

Lema 3.8. *Sea* $\mathbf{C}$ *una variedad dualizante y $x_1 \xrightarrow{f_1} x_2 \xrightarrow{f_2} \cdots x_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} x_n$ un camino seccional en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. *Entonces, la composición $f_{n-1} f_{n-2} \cdots f_1$ no es cero.*

(c) La categoría de malla. Sea Λ una K-álgebra de artin y $\Gamma(\Lambda)$ el carcaje de Auslander-Reiten de Λ. Recordemos que, para veŕtice $x \in \Gamma(\Lambda)_0$ no proyectivo, (i.e, que x no represente a un Λ-módulo proyectivo inescindible) tenemos una relación m_x sobre el carcaje $\Gamma(\Lambda)$, llamada la **relación de malla** y se define como $m_x = \Sigma_{\{\alpha \in \Gamma(\Lambda) | F(\alpha) = x\}} \alpha\sigma(\alpha)$. Nótese que dichas relaciones de malla se definen solamente a partir del hecho de que $\Gamma(\Lambda)$ es un carcaj de translación.

Sea Γ un carcaj, entonces de acuerdo con [Rin], se puede definir $K(\Gamma)$, la **categoria de caminos** de Γ, como la K-categoría aditiva cuyos objetos son sumas directas de objetos inescindibles, a saber, los vértices de Γ. Dados dos vértices x y y en Γ_0, se define $\mathrm{Hom}_{K(\Gamma)}(x, y)$ como el K-espacio vectorial cuya base es el conjunto de todos los caminos que van de x en y. La composición de morfismos es inducida por la composición usual de caminos:

$$(x|\alpha_1, \ldots, \alpha_r|y)(y|\beta_1, \ldots, \beta_s|z) = (x|\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s|z)$$

con $f = (x|\alpha_1, \ldots, \alpha_r|y)$ un camino de x a y y g=$(y|\beta_1, \ldots, \beta_s|z)$ un camino de y a z. Si Γ es un carcaj de translación, con translación τ y semi-translación σ, se define la **categoría**

de malla, como la categoría cociente de la categoría de caminos $K(\Gamma)$ módulo el ideal generado por los elementos m_z, donde z recorre todos los vértices no proyectivos de Γ.

El par $(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ es llamado categoría Krull-Schmidt con sucesiones exactas cortas, si $\mathcal{K}$ una categoría Krull-Schmidt y $\mathcal{S}$ es un conjunto de pares (f, g), tales que f es un kernel de g y g es un cokernel de f.

Si $(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ es una K-categoría Krull-Schmidt Hom-finita con sucesiones exactas cortas, puede defirse el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ de $(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ [Rin pag. 61], como en el caso de una categoría de módulos finitamente generados sobre una K-álgebra de dimensión finita, el cual resulta ser también un carcaj de translación.

Sea $(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ es una K-categoría Krull-Schmidt Hom-finita con sucesiones exactas cortas, $\Gamma(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ el carcaj de Auslander-Reiten de $(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ y $K(\Gamma(\mathcal{K}, \mathcal{S}))$ la categoría de malla de $\Gamma(\mathcal{K}, \mathcal{S})$. Entonces, $(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ es llamada **estándard**, si las categorías $\mathcal{K}$ y $K(\Gamma(\mathcal{K}, \mathcal{S}))$ son equivalentes.

Recordemos que, por ser KQ una álgebra hereditaría, todo morfismo no cero entre módulos proyectivos en $\mathrm{mod}(KQ)$ es monomorfismo y si $f : A \to B$ es un morfismo irreducible con B proyectivo, entonces A es proyectivo. Entonces, en la componente preproyectiva $\mathcal{K}$ de $\Gamma(KQ)$, los morfismos que casi se dividen dividen mínimos derechos en Z, con Z proyectivo, son monomorfismos.

Lema 3.9 (Rin pag.63)**.** *Sea $(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ una categoría Krull-Schmidt con sucesiones exactas cortas y con morfismos que casi se dividen minimos derechos. Sea $\Gamma(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ un carcaj de translación preproyectivo. Supongamos que el morfismo minimo casi se divide derecho en cualquier modulo inescindible Z, con $[Z]$ un vértice proyectivo, en $\Gamma(\mathcal{K}, \mathcal{S})$, es monomorfismo en $\mathcal{K}$. Entonces $(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ es estándard.*

Sea $\mathcal{K}$ una componente preproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(KQ)$. Considerando a $\mathcal{K}$ como una K-categoría, podemos identificar a $\mathcal{K}$ con $K(-\mathbb{N}\Delta)/ < m_x >$, siendo $< m_x >$ el ideal generado por las relaciones de malla m_x, con x que recorre todos los vértices no proyectivos de $\mathcal{K}$ y $\Delta = Q^{op}$.

Notemos que, dado un objeto $x \in \mathcal{K}$ y un entero positivo n, existe un número finito de caminos dirigidos en $(-\mathbb{N}Q, \tau)$ que inician en el vértice x y tienen longitud $\leq n$.

3.2.1. Categorías de inclinación en $\mathrm{mod}(KQ)$

Sea Q un carcaj infinito localmente finito y Σ una sección sin caminos dirigidos de longitud infinita en la componente preproyectiva del carcaje de Auslander-Reiten de KQ. En esta subsección se probará que Σ produce una categoría de inclinación para $\mathrm{mod}(KQ)$.

Necesitaremos el siguiente lema que puede ser probado como en [BGP] usando argumentos combinatorios, la demostración se deja a cargo del lector.

Lema 3.10. *Supongamos que Q no es un carcaj de tipo A_∞, A_∞^∞ ni D_∞. Sea v_0 un vértice en Q. Entonces, existe un subcarcaj pleno conexo $Q' \subset Q$ tal que Q' contiene a v_0 y Q' no es un Dynkin.*

Teorema 3.11. *Sea Q un carcaj infinito localmente finito y Σ una sección de $(-\mathbb{N}Q, \tau)$ sin caminos dirigidos de longitud infinita. Entonces ocurre lo siguiente:*

(a) *Para cualquier vértice X de $(-\mathbb{N}Q, \tau)$, el número de caminos dirigidos que inician en el vértice X y terminan en la sección es finito y existe un camino no cero de X a la sección.*

(b) *Para cualquier vértice X de $(-\mathbb{N}Q, \tau)$, el número de caminos dirigidos que inician en la sección y terminan en el vértice X es finito y existe un camino no cero de la sección a X.*

Demostración. (a) La demostración se hace por inducción sobre el menor entero $n \geq 0$, tal que $\tau^{-n}X$ está en Σ.

En caso de que no exista dicho entero n, entonces X es un sucesor de la sección y el número de caminos de X a la sección es cero.

Si $n = 0$, entonces X está sobre la sección y la afirmación es verdadera, pues el número de caminos dirigidos en la sección es finito.

Supongamos que $n = 1$ y consideremos X un elemento en la componente preproyectiva con sucesión que casi se divide:

$$0 \to X \overset{(\sigma\alpha_i)}{\to} \coprod_{i=1}^{n} E_i \overset{(\alpha_i)}{\to} \tau^{-1}X \to 0$$

Si todos los E_i estén en la sección, entonces no hay nada que probar.

Sea $\alpha_i : E_i \to \tau^{-1}X$ un morfismo que no está en la sección. Entonces el morfismo $\sigma^{-1}\alpha_i : \tau^{-1}X \to \tau^{-1}E_i$ está en la sección, supongamos que hay un morfismo irreducible $\beta : E_i \to Y$, diferente de α_i. Entonces hay un morfismo irreducible $\sigma^{-1}\beta : Y \to \tau^{-1}E_i$. Sea n el máximo de las longitudes de los caminos en Σ que inician en $\tau^{-1}X$. Por lo mencionado en (c) de la lista con que se inicio esta sección, existe sólo un número finito de caminos de longitud $\leq n$ que inician en Y. Supongamos que $Y \overset{\beta}{\to} Y_1 \overset{\beta_1}{\to} Y_2 \overset{\beta_2}{\to} ... \overset{\beta_{n-1}}{\to} Y_n$ es un camino que no intersecta a ninguno de los caminos que inician en $\tau^{-1}X$ y terminan en Σ. Entonces para $k \leq n$ tenemos el siguiente diagrama de morfismos irreducibles:

$$\begin{tikzcd}
\tau^{-1}Y_{k-1} & \tau^{-1}Y_{k-2} \arrow[l, "\sigma^{-2}\beta_{k-1}"'] & \cdots & \tau^{-1}Y & \tau^{-1}E_1 \arrow[l, "\sigma^{-2}\beta"'] & \tau^{-1}X \arrow[l, "\sigma^{-1}\alpha"'] & E_2 \arrow[l, "\alpha_2"'] \\
Y_k \arrow[u, "\sigma^{-1}\beta_k"] & Y_{k-1} \arrow[l, "\beta_k"'] \arrow[u, "\sigma^{-1}\beta_{k-1}"] & \cdots & Y_1 \arrow[u, "\sigma^{-1}\beta_1"] & Y \arrow[l, "\beta_1"'] \arrow[u, "\sigma^{-1}\beta"] & E_1 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[u, "\alpha"] & X \arrow[l, "\sigma\alpha"'] \arrow[u, "\sigma\alpha_2"]
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

con $\tau^{-1}Y_{k-1}$ en Σ, y no existe morfismo irreducible $\tau^{-1}Y_{k-1} \to Z$ con Z en Σ. Por las propiedades de sección, $\sigma^{-1}\beta_k : Y_k \to \tau^{-1}Y_{k-1}$ está en Σ.

Supongamos que, para cualquier X in $(-\mathbb{N}Q, \tau)$, sólo hay solo un número finito de caminos $\tau^{-m+1}X \in \Sigma_0$, para algún entero no negativo m.

Como antes, consideremos una sucesión que casi se divide que inicia en X y un morfismo $\alpha_i : E_i \to \tau^{-1}X$ que no esta en la sección. Entonces, por la hipótesis de inducción, sólo hay un número finito de caminos que van de $\tau^{-1}X$ a la sección. Sea n la longitud del camino más largo. Supongamos que hay un morfismo irreducible $\beta : E_i \to Y$, diferente de α_i. Argumentando como antes, consideremos un camino $Y \overset{\beta}{\to} Y_1 \overset{\beta_1}{\to} Y_2 \overset{\beta_2}{\to} ... \overset{\beta_{n-1}}{\to} Y_n$ que no intersecta a ninguno de los caminos que inician en $\tau^{-1}X$ y terminan en Σ. Entonces obtenemos un diagrama de morfismos irreducibles como en (3.4) y para algún entero $k \leq n$, $\tau^{-1}Y_{k-1}$ está in Σ. Entonces $\sigma^{-1}\beta_k : Y_k \to \tau^{-1}Y_{k-1}$ está en Σ, ó $\tau^{-1}Y_k$ está en Σ_0. En cualquier caso, se sigue del caso $n = 1$, que hay solamente un número finito de caminos que van de X a Σ. Más aún, como la composición de morfismos en un camino seccional es no cero, hay un morfismo no cero que va de X a la sección.

(b) Se prueba usando argumentos duales o yendo a la categoría opuesta. □

Proposición 3.12. *Sea $\mathcal{K}$ una componente preproyectiva en el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(KQ)$ y Σ una sección de $\mathcal{K}$ sin caminos dirigidos de longitud infinita. Sea P un KQ-módulo proyectivo inescindible. Entonces, existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to P \to T^0 \to T^1 \to 0,$$

con T^0, $T^1 \in \mathrm{add}\Sigma_0$.

Demostración. (1) Separamos la demostración en dos casos, suponiendo primero que Q no es de tipo A_∞, A_∞^∞ ó D_∞. Usamos la equivalencia $\mathcal{K} \cong K(-\mathbb{N}\Delta)/ < m_X >$, donde m_X denota con conjunto de relaciones de malla. El proyectivo P es identificado con un vértice v_0 in Δ_0. Sea

$$\mathcal{V}_0^- = \{v_i^- \in Q_0 \mid \text{ existe un camino dirigido } v_i^- \to v_0\},$$

sea $\mathcal{V}_0 = \{v_1, v_2 ..., v_n\}$ el conjunto de vértices de Σ que son el final de algún camino que inicia en algun v_i^-. Como Σ no tiene caminos dirigidos de longitud infinita, el conjunto $\mathcal{V}_1 = \{v_0, v_1 ..., v_m\}$ de todos los vértices de Σ que estan conectados con un camino dirigido a los vértices de $\mathcal{V}_0$, también es finito y contiene al conjunto $\mathcal{V}_0$. Sea Σ'' el subcarcaj pleno de Σ con conjunto de vértices $\mathcal{V}_1$. Denotemos con $\mathcal{V}_P$ a la colección de todos los caminos que inician en algún vértice de $\mathcal{V}_0^-$ y terminan en Σ.

Sean $\{T_0, T_1 ..., T_m\}$ los objetos de $\mathcal{K}$ que corresponden a los vértices $\mathcal{V}_1$ y denotemos por $\mathcal{P}$ la unión de los proyectivos inescindibles que aparecen como sumandos en las resoluciones proyectivas mínimas de cada T_i, para $1 \leq i \leq m$. Los objetos en $\mathcal{P}$ se corresponden con los vértices de un subcarcaj finito Q'' de Q, el cual por el lema 3.10 está contenido en un subcarcaj finito, pleno y conexo Q' de Q, que no es un Dynkin.

Sea $\Delta' = Q'^{op}$, como Δ' no es un diagrama de Dynkin, $(-\mathbb{N}\Delta')$ es un subcarcaj pleno y conexo de $(-\mathbb{N}\Delta)$ y $\mathcal{V}_P$ está completamente contenido en $(-\mathbb{N}\Delta')$. Identificamos la componente preproyectiva $\mathcal{K}'$ del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(KQ')$, con $K(-\mathbb{N}\Delta')/ < m'_X >$, donde m'_X es el conjunto de relaciones de malla en $K(-\mathbb{N}\Delta')$. Consideremos el ideal I de $K(-\mathbb{N}\Delta)$ definido como:

$$f \in I(X,Y) \text{ si, y sólo si, } f \text{ se factoriza a través de } \tau^{-i}Z, \text{ para algún } Z \in \Delta_0/\Delta_0',\ i \in \mathbb{N}.$$

Por la propiedad universal de las álgebras de carcaj, existe un funtor:

$$\bar{F} : K(-\mathbb{N}\Delta') \to \frac{K(-\mathbb{N}\Delta)}{I+ < m_X >}$$

El conjunto de relaciones de malla $\{m_X\}$ se puede separar en tres tipos distintos:

(i) Las relaciones m_{X_j} que también son relaciones de malla en $K(-\mathbb{N}\Delta')$, i.e, $m_{X_j} = m'_{X_j}$.

(ii) Las relaciones de malla $m_{X_k} = \Sigma_{\{\alpha\in\Gamma(\Lambda)|F(\alpha)=X_k\}}\alpha\sigma(\alpha)$ tal que $\alpha\sigma(\alpha)$ se factoriza por algún objeto en $(-\mathbb{N}\Delta) \setminus (-\mathbb{N}\Delta')$.

(iii) Las relaciones m_{X_l} que se escriben como $m_{X_l} = \rho_l^1 + \rho_l^2$ donde ρ_l^1 es una suma de morfismos que se factorizan por algún objeto que está en $(-\mathbb{N}\Delta) \setminus (-\mathbb{N}\Delta')$ y ρ_l^2 es una suma de morfismos que estan en el borde de $(-\mathbb{N}\Delta')$.

Entonces, es claro que el kernel de $\bar{F}$ es $< m'_X >$ y existe un funtor fiel, pleno y denso:

$$F : \frac{K(-\mathbb{N}\Delta')}{< m'_X >} \to \frac{K(-\mathbb{N}\Delta)}{I + < m_X >}$$

Sea Σ' el subcarcaj de Σ que consiste de todos los vértices que corresponden a las órbitas, bajo la translación inversa de Auslander-Reiten de los proyectivos correspondientes a los vértices de Q', como Q' no es un diagrama de Dynkin, Σ' es una sección de $\mathcal{K}'$.

(2) De acuerdo con [HR Teo. 7.2], existe una sucesión exacta corta de KQ'-módulos

$$0 \to P \xrightarrow{(f_i)_i} \coprod_i T_i \xrightarrow{(g_{ji})_{ji}} \coprod_j T_j \to 0$$

con T_i y T_j que corresponden a vértices en Σ'_0, y f_i, g_{ji} son K-combinaciones lineales de caminos en $K(-\mathbb{N}\Delta')$.

Por la equivalencia en la parte (1), $(f_i)_i$ es un monomorfismo y $\sum_i g_{ji} f_i = 0$ en $\mathcal{K}$.

Tenemos la sucesión exacta de KQ-módulos

$$0 \to P \xrightarrow{(f_i)_i} \coprod_i T_i \xrightarrow{(h_{ki})_{ki}} \coprod_k C_k \to 0$$

donde $C = \mathrm{Coker}(g_{ji})_{ji}$, es el cokernel de $(g_{ji})_{ji}$ en $\mathcal{K}$ y $C = \coprod_k C_k$ su descomposición en una suma de KQ-módulos inescindibles.

Por la propiedad universal del cokernel, existe un morfismo $(l_{jk})_{jk} : \coprod_k C_k \to \coprod_j T_j$ tal que el morfismo g_{ij} es igual a $\sum_k l_{jk} h_{ki} : T_i \to T_j$. Por la condición (S3) de la definición de sección, cada C_k está en Σ_0.

Si Q es de tipo A_∞, A_∞^∞ o D_∞, entonces podemos escoger $\Delta' = Q'^{op}$ suficientemente grande de modo que los KQ'-módulos inyectivos del carcaj de Auslander-Reiten de $\Gamma(KQ')$ aparezcan como sucesores de Σ'' y poder aplicar un argumento similar al primer caso. $\square$

Teorema 3.13. *Sea Q un carcaj infinito localmente finito, K un campo y KQ el álgebra de carcaj considerada como una categoría preaditiva. Sea $\mathcal{K}$ una componente preproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten de KQ y Σ una sección de $\mathcal{K}$ sin caminos dirigidos de longitud infinita. Entonces,* $\mathrm{add}\Sigma_0$ *es una subcategoría de inclinación de* $\mathrm{mod}(KQ)$.

Demostración. (i) Claramente los objetos de Σ_0 son finitamente presentados y además tienen dimensión proyectiva menor o igual que uno.

(ii) Sean T_1 y T_2 objetos en Σ_0, por la fórmula de Auslander-Reiten tenemos que $D\mathrm{Ext}^1_{KQ}(T_1, T_2)$ es un grupo cociente de $\mathrm{Hom}_{KQ}(T_2, \tau T_1)$. Sea $\varphi : T_2 \to \tau T_1$ un morfismo no cero. Entonces, usando la sucesión de Auslander-Reiten que inicia en τT_1, obtenemos un morfismo no cero entre morfismos inescindible

$$T_2 \to \tau T_1 \to * \to T_1$$

Se sigue de la condición (S3) de sección que $\tau T_1 \in \Sigma$, una contradicción.

(iii) Para cada objeto proyectivo P de $\mathcal{K}$, existe una sucesión exacta

$$0 \to P \to T^0 \to T^1 \to 0$$

con $T^0,\ T^1 \in \text{add}\Sigma_0$, por la proposición 3.12 □

Corolario 3.14. *Si* $\mathcal{T} = \text{add}\Sigma_0$ *es una subcategoría de inclinación de* $\text{Mod}(KQ)$*, entonces* $\text{Mod}(\mathcal{T})$ *es hereditaria.*

Demostración. Sea P un $\mathcal{T}$-módulo proyectivo inescindible. Como $\mathcal{T}$ es una categoría Krull-Schmidt tenemos que $P \cong (\ \ ,T)$ con T en Σ_0.

Por el Teorema Brenner-Butler, la subcategoría $\mathscr{Y} = \{G|\text{Tor}^1_{\mathcal{T}}(G,\mathcal{T}) = 0\} \subset \text{Mod}(\mathcal{T})$ es una subcategoria libre de torsión que contiene a los $\mathcal{T}$-módulos proyectivos y es equivalente a la subcategoría de torsión de $\mathscr{T} = \{F|\text{Ext}^1_{\mathbf{C}}(T_i,F) = 0, T_i \in \Sigma_0\} \subset \text{Mod}(\mathbf{C})$, vía el funtor ϕ.

Sea Y un sub-objeto de P no cero, entonces tenemos un monomorfismo $\alpha : Y \to P$. Como P está contenido en la subcategoría $\mathscr{Y} \subset \text{Mod}(\mathcal{T})$, entonces $Y \in \mathscr{Y}$, pues es cerrada bajo sub-objetos. Por la equivalencia $\phi : \mathscr{T} \to \mathscr{Y}$, existe un objeto F inescindible en $\mathscr{T}$ tal que $\phi(F) = (\ \ ,F)_{\mathcal{T}} \cong Y$. Además. la inclusión $Y \hookrightarrow P$ es de la forma $(\ \ ,f) : (\ \ ,F)_{\mathcal{T}} \to (\ \ ,T)$, con $f : F \to T$ un morfismo no cero. Como Y no es el funtor cero, existe un objeto $T' \in \Sigma_0$ tal que $0 \neq Y(T') = \text{Hom}(T',F)$. Sea $g \in \text{Hom}(T',F)$ un morfismo no cero, entonces tenemos una cadena de morfismos

$$T' \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} T$$

Entonces, F está de nuevo en Σ_0, por la propiedad (S3) de sección y finalmente Y es proyectivo. □

3.2.2. Las representaciones de los diagramas de Dynkin infinitos

Como ya se mencionó antes, puede adaptarse la teoría de Auslander-Reiten al estudio de las representaciones de carcajes infinitos localmente finitos. Recordemos que, para cualquier vértice $a \in Q_0$, puede definirse el nuevo carcaj $\sigma_a Q$ como sigue: a todas las flechas que inician o terminan en a se les cambia la orientación, al resto de las flechas se les deja igual que antes. En [BGP] Bernstein, Gelfand y Ponomarev introducen funtores de **reflexión**, cuando Q es finito; $S_a^+ : \text{rep}(KQ) \to \text{rep}(\sigma_a Q)$ si a es un pozo, y $S_a^- : \text{rep}(\sigma_a KQ) \to \text{rep}(Q)$, si a es fuente.

Sea a un pozo en Q y $s(a)$ el simple proyectivo asociado al vértice a. También tenemos proyectivos inescindibles $P(b)$, asociados a los vértices de Q_0, $b \neq a$. De acuerdo con [ARP], $\mathcal{T}(a) = \{s(a)\} \cup \{P(b)\}_{b\neq a}$ resulta ser una subcategoría inclinación en $\text{mod}(KQ)$, y como Q es localmente finito, entonces $\sigma_a Q$ es localmente finito. Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{mod}(KQ) & \xrightarrow{\phi_a} & \mathrm{mod}(K(\sigma_a Q)) & \xrightarrow{\otimes\mathcal{T}(a)} & \mathrm{mod}(KQ) \\
\cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\
\mathrm{rep}(KQ) & \xrightarrow{S_a^+} & \mathrm{rep}(K(\sigma_a Q)) & \xrightarrow{S_a^-} & \mathrm{rep}(KQ)
\end{array}$$

Entonces, para estudiar las representaciones de un carcaj infinito conexo aciclico localmente finito, basta elegir una orientación.

Se procederá ahora a estudiar los carcajes de Auslander-Reiten de los diagramas de Dynkin infinitos A_∞, A_∞^∞ y D_∞. Primero calcularemos las componentes de Auslander-Reiten usando una orientación, para hacer esto, procedemos como sigue: escogemos una orientación con fuentes y pozos solamente, entonces cambiamos la orientación mediante la subcategoría de inclinación dada por los objetos que aparecen en una sección, sin caminos de longitud infinita, en alguna componente preproyectiva, luego probamos que al hacer esto ocurre algo similar que en el caso finito dimensional, esto es, se remueve una porción de la componente preproyectiva y se pega sobre la componente preinyectiva del carcaj de Auslander-Reiten de la categoría inclinada, dejando las otras componentes invariantes.

Las representaciones de A_∞. Enumerémos los vértices de A_∞ con la siguiente orientación

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & 3 & & 5 & & \cdots \\
\swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow & \\
0 & & 2 & & 4 & & \cdots &
\end{array}$$

Sean a y b enteros tales que $0 \le a \le b$. Se define la representación M_a^b como sigue: para cada $i \in (A_\infty)_0$

$$(M_a^b)_i = \begin{cases} K & \text{si } a \le b, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, las representaciones de los inyectivos y proyectivos inescindibles es de la siguiente forma:

(a) Los proyectivos

- (i) $P(2n) = M_{2n}^{2n}$, si $n \ge 0$, son los simples proyectivos.
- (ii) $P(2n+1) = M_{2n}^{2(n+1)}$, si $n \ge 0$.

(b) Los inyectivos

- (i) $I(0) = M_0^1$ y $I(2n) = M_{2n-1}^{2n+1}$, si $n \ge 1$.
- (ii) $I(2n+1) = M_{2n+1}^{2n+1}$, $n \ge 0$, son los simples inyectivos.

Un cálculo sencillo nos permite ver que la componente preproyectiva de $K(A_\infty)$ puede verse de la siguiente manera:

$$
\begin{tikzcd}
 & P(7) \arrow[dr] & \cdots & & & & & & & \\
P(6) \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_4^8 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \cdots & & & & & & \\
 & P(5) \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_2^8 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \cdots & & & & & \\
P(4) \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_2^6 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_0^8 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \cdots & & & & \\
 & P(3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_0^6 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_1^8 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \cdots & & & \\
P(2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_0^4 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_1^6 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_3^8 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \cdots & & \\
 & P(1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_1^4 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_3^6 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_5^8 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & & \\
P(0) \arrow[ur] & & M_1^2 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & M_3^4 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & M_5^6 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & M_7^8 \arrow[ll, dotted] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Así, M_a^b está en la componente preproyectiva si, y sólo si, b es par.

Por otro lado, la componente inyectiva puede verse de la forma

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & & I(6) \arrow[dr] & \\
 & & & & & M_3^7 \arrow[ur] \arrow[dr] & & I(5) \arrow[ll, dotted] \\
 & & & & M_1^7 \arrow[ur] \arrow[dr] & & I(4) \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & M_0^7 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_1^5 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & I(3) \arrow[ll, dotted] \\
 & & M_2^7 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_0^5 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & I(2) \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & M_4^7 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_2^5 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_0^3 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & I(1) \arrow[ll, dotted] \\
M_6^7 \arrow[ur] & & M_4^5 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & M_2^3 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & I(0) \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Así, M_a^b está en la componente inyectiva si, y sólo, si b es impar. Concluimos que estas son todas las representacione de A_∞.

Las representaciones de A_∞^∞. Enumeremos los vértices de A_∞^∞ de la siguiente manera:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & -3 \arrow[dr] & & -1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] & \cdots & & \\
 & & -2 & & 0 & & 2 & & & & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Para cada par de enteros $a \leq b$ se define la representación N_a^b como sigue:

$$(N_a^b)_i = \begin{cases} K & \text{si } a \leq b, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, las representaciones de los inyectivos y proyectivos inescindibles es de la siguiente forma:

(a) Los proyectivos

(i) $P(2n) = N_{2n}^{2n}$, si $n \in \mathbb{Z}$, son los simples proyectivos.

(ii) $P(2n+1) = N_{2n}^{2(n+1)}$, si $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Los inyectivos

(i) $I(2n) = N_{2n-1}^{2n+1}$, si $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $I(2n+1) = N_{2n+1}^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, son los simples inyectivos.

Un cálculo sencillo nos permite observar que la componente preproyectiva de $K(A_\infty^\infty)$ es de la forma:

$$\begin{tikzcd}
P(4) \arrow[dr] & \cdots & & & \\
& P(3) \arrow[dr] & \cdots & & \\
P(2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_0^4 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \cdots & \\
& P(1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_{-2}^4 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \cdots \\
P(0) \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_{-2}^2 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_{-4}^4 \arrow[ll, dotted] \\
& P(-1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_{-4}^2 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & \cdots \\
P(-2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_{-4}^0 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & \cdots & \\
& P(-3) \arrow[ur] & \cdots & & \\
P(-4) \arrow[ur] & \cdots & & &
\end{tikzcd}$$

Así, las representaciones que están en la componente preproyectiva son de la forma N_a^b, con a y b pares.

La componente inyectiva es de la forma

$$
\begin{tikzcd}
 & & \cdots & I(3) \\
 & \cdots & I(2) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\cdots & N^3_{-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & I(1) \arrow[ll, dotted] \\
N^3_{-3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & I(0) \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\cdots & N^1_{-3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & I(-1) \arrow[ll, dotted] \\
 & \cdots & I(-2) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \cdots & I(-3)
\end{tikzcd}
$$

Así, las representaciones que están en la componente preinyectiva son de la forma N^b_a, con a y b impares.

Hay dos componentes regulares. En la primera componente regular están las representaciones N^b_a, tales que a es par y b impar:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \cdots & N^3_{-4} \arrow[dr] & \cdots & & \\
 & \cdots & N^3_{-2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & N^1_{-4} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \cdots & \\
\cdots & N^3_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & N^1_{-2} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & N^{-1}_{-4} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \cdots \\
N^3_2 \arrow[ur] & & N^1_0 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & N^{-1}_{-2} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & N^{-3}_{-4} \arrow[ll, dotted]
\end{tikzcd}
$$

En la segunda componente regular están las representaciones de la forma N^b_a tales que a es impar y b par:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \cdots & N^6_{-3} \arrow[dr] & \cdots & & & \\
 & & \cdots & N^4_{-3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & N^6_{-1} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \cdots & & \\
 & \cdots & N^2_{-3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & N^4_{-1} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & N^6_1 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \cdots & \\
\cdots & N^0_{-3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & N^2_{-1} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & N^4_1 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & N^6_3 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \cdots \\
N^2_{-3} \arrow[ur] & & N^0_{-1} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & N^2_1 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & N^4_3 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & N^6_5 \arrow[ll, dotted]
\end{tikzcd}
$$

Las representaciones de D_∞. Enumerémos los vértices de D_∞ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & & 3 & & 5 & & \cdots \\ \swarrow & \downarrow \; \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\ -1 & 0 \quad 2 & & 4 & & \cdots & & \end{array}$$

Consideremos las siguientes representaciones:

(a) Para cada par de enteros m y n, con $m \geq n$, defínase

$$(M_m^n)_i = \begin{cases} K & \text{si } m \leq i \leq n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) Para cada entero $m \geq 2$, defínase

$$(N_{-1}^m)_i = \begin{cases} K & \text{si } i \in \{0, \ldots, m\}, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(c) Para cada entero $m \geq 2$, defínase

$$(N_0^m)_i = \begin{cases} K & \text{si } i \in \{-1, \ldots, m\} - \{0\}, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(d) Para enteros m, l, k, tales que $m > l \geq k \geq 1$, defínase

$$(L_{k,l}^m)_i = \begin{cases} K^2 & \text{si } k \leq i \leq l, \\ K & i \in \{-1, \ldots, m\} - \{k, k+1, \ldots, l\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para calcular la componente preproyectiva de $K(D_\infty)$, es suficiente calcular las órbitas de $P(0)$ y $P(-1)$ bajo $\tau^{-1} = \mathrm{Tr}D$

$$\{P(0), N_0^2, N_{-1}^4, N_0^6, N_{-1}^8, \ldots\}, \;\; \{P(-1), N_{-1}^2, N_0^4, N_{-1}^6, N_0^8, \ldots\}$$

De esta manera, la componente preproyectiva de $K(D_\infty)$ es de la forma

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & \cdots & & M_{-1}^8 & & \cdots & & & & & & \\
 & & & & & \nearrow & & \searrow & & & & & & & \\
 & & \cdots & & M_{-1}^6 & & \dashleftarrow & & L_{1,2}^8 & & \cdots & & & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
P(2) & \dashleftarrow & M_{-1}^4 & & \dashleftarrow & & L_{1,2}^6 & & \dashleftarrow & & L_{1,4}^8 & & \cdots & & \\
\searrow & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & & \\
P(0) \to P(1) & \to & N_0^2 & \to & L_{1,2}^4 & \to & N_{-1}^4 & \to & L_{1,4}^6 & \to & N_0^6 & \to & L_{1,6}^8 & & \cdots \\
\nearrow & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
P(-1) & \dashleftarrow & N_{-1}^2 & & \dashleftarrow & & N_0^4 & & \dashleftarrow & & N_{-1}^6 & & \dashleftarrow & & N_0^8
\end{array}$$

Para calcular la componente preinyectiva de $K(D_\infty)$, es suficiente calcular las órbitas de $I(0)$ y $I(-1)$ bajo $\tau = D\mathrm{Tr}$

$$\{I(0), N_0^3, N_{-1}^5, N_0^7, N_{-1}^9, \ldots\}, \ \ \{I(-1), N_{-1}^3, N_0^5, N_{-1}^7, N_0^9, \ldots\}$$

De esta manera la componente preproyectiva de $K(D_\infty)$ es de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots & L_{1,1}^7 \arrow[dr] & & M_1^5 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & & I(3) \arrow[ll, dotted] \\
\cdots & L_{1,3}^7 \arrow[ur] \arrow[dr] & & L_{1,1}^5 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & I(2) \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
L_{1,5}^7 \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & N_{-1}^5 \arrow[r] & L_{1,3}^5 \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & N_0^3 \arrow[r] & L_{1,1}^3 \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & I(0) \arrow[r] & I(1) \\
\cdots & N_0^5 \arrow[ur] & & N_{-1}^3 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & I(-1) \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Finalmente, usamos el hecho de que toda representación inescindible tiene suporte en un diagrama de Dynkin finito, cuya representación ya conocemos (ver [Rin]).

Procediendo como en el caso finito dimensional, vemos que en los tres casos las componentes preproyectivas son de la forma $(-\mathbb{N}Q, \tau)$ y las componentes preinyectivas son de la forma $(\mathbb{N}Q, \tau)$

De esta manera hemos demostrado la siguiente:

Proposición 3.15. *Sea Q un diagrama de Dynkin infinito con solamente fuentes y pozos, $\Gamma(Q)$ el carcaj de Auslander-Reiten de Q entonces:*

(a) Si $Q = A_\infty,\ D_\infty$, entonces $\Gamma(Q)$ tiene dos componentes: la componente preinyectiva y la componente preproyectiva.

(b) Si $Q = A_\infty^\infty$ tiene 4 componentes: la componentes preproyectiva y preinyectiva y dos componentes regulares.

Supongamos que Q es un carcaje localmente finito, entonces $\mathbf{C} = KQ$ es una variedad dualizante. Si Σ es una sección, sin caminos infinitos, en una componente preproyectiva del carcaje de Auslander-Reiten $\Gamma(Q)$, entonces $\mathcal{T} = \mathrm{add}\Sigma_0$ es una subcategoría de inclinación de $\mathrm{mod}(KQ)$ y el functor $\phi : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ se restringe a la categoría de funtores finitamente presentados $\phi_{\mathrm{mod}(\mathbf{C})} : \mathrm{mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{mod}(\mathcal{T})$. También hemos probado que $\mathcal{T}$ es una variedad hereditaría dualizante, por lo que KQ y $\mathcal{T}$ se escinden.

Observemos que escoger una sección sin caminos infinitos corresponde a un cambio de orientación del carcaj Q. Despues observamos que el proceso de *inclinación* con los objetos de una sección sin caminos infinitos en la componente preproyectiva, se comporta como el caso de carcajes finitos. Las componentes del carcaj de Auslander-Reiten de la categoría inclinada son como sigue: cortamos los predecesores de la sección en la componente preproyectiva para obtener la componente preproyectiva de la categoría inclinada. Pegamos lo que cortamos como sucesores de los inyectivos, para obtener la componente preinyectiva de la categoría inclinada. Las componente regulares se quedan sin cambio alguno.

Denotemos con $\mathcal{P}(KQ)$ a la componente preproyectiva de $\Gamma(KQ)$ y con $\mathcal{Q}(\mathcal{T})$ a la componente preinyectiva de $\Gamma(\mathcal{T})$. Por la fórmula de Auslander-Reiten tenemos

$$\begin{aligned} \mathscr{T}(\mathcal{T}) &= \{X \in \operatorname{mod}(KQ) | \operatorname{Ext}^1_{KQ}(T, X) = 0, T \in \Sigma_0\} \\ &= \{X \in \operatorname{mod}(KQ) | \operatorname{Hom}_{KQ}(X, \tau T) = 0, T \in \Sigma_0\} \end{aligned}$$

y también sabemos que

$$\mathscr{F}(\mathcal{T}) = \{X \in \operatorname{mod}(KQ) | \operatorname{Hom}_{KQ}(T, X) = 0, T \in \Sigma_0\}$$

Definición 3.16. *El conjunto de predecesores (resp. sucesores) de Σ denotado como* $\operatorname{succ}\Sigma$ *(resp.* $\operatorname{pre}\Sigma$*), es el conjunto de objetos inescindibles X tales que existe un $T \in \Sigma_0$ y un entero $n > 0$, con $T = \tau^{-n}X$ (resp. $T = \tau^n X$).*

Lema 3.17. *Sea X un objeto inescindible en* $\operatorname{mod}(KQ)$*. Entonces, X está en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$ si, y sólo si, X no es predecesor de Σ. Más aún, $\mathscr{F}(\mathcal{T}) = \operatorname{pre}\Sigma$.*

Demostración. Supongamos que X está en $\mathscr{T}(\mathcal{T})$. Si X es un predecesor de Σ, entonces, por el teorema 3.11, existe un camino no cero de X a $\tau\Sigma$, una contradicción.

Supongamos ahora que X no es predecesor de Σ. Si existe $T \in \Sigma_0$ y un morfismo no cero $f : X \to \tau T$, entonces para algún entero positivo k, $\tau^k T$ es proyectivo, de aquí se sigue que X es preproyectivo y tiene que ser un sucesor de Σ. Entonces existe un $T_0 \in \Sigma_0$ y un morfismo no cero $g : T_0 \to X$.

Entonces tenemos morfismos: $T_0 \to X \to \tau T \to E \to T$, contradiciendo el hecho de que T_0 y T están en Σ_0.

La última afirmación es consecuencia de que la categoría de inclinación $\mathcal{T}$ se separa. $\square$

Tenemos la siguiente:

Proposición 3.18. *Los siguientes enunciados ocurren:*

(a) *Para cada $T \in \Sigma_0$, el $\mathcal{T}$-módulo $\operatorname{Ext}^1_{KQ}(\ \ , \tau T)_{\mathcal{T}}$ es inyectivo.*

(b) *Para cualquier entero positivo k, y cualquier objeto T en Σ, hay un isomorfismo $\tau^k \operatorname{Ext}^1_{KQ}(\ \ , \tau T)_{\mathcal{T}} \cong \operatorname{Ext}^1_{KQ}(\ \ , \tau^{k+1}T)_{\mathcal{T}}$.*

(c) *Dado un proyectivo inescindible $(-, C)$, existe un isomorfismo natural en* $\operatorname{mod}(\mathcal{T}^{op})$ *: $D(\operatorname{Ext}^1(-, (-, C))_{\mathcal{T}}) \cong \tau(((-, C), -)_{\mathcal{T}})$.*

Demostración. (a) Para cada $X \in \operatorname{mod}(\mathcal{T})$, y cada entero no negativo $T \in \mathcal{T}$ existe un isomorfismo

$$(X, \operatorname{Ext}^1_{KQ}(\ \ , \tau T)_{\mathcal{T}}) \cong DX(T).$$

En efecto, sea $0 \to (\ \ , T_1) \to (\ \ , T_0) \to X \to 0$ una resolución proyectiva de X, y T en $\mathcal{T}$ un objeto no proyectivo. Aplicando la fórmula de Auslander-Reiten, obtenemos un isomorfismo $\eta : (X, \operatorname{Ext}^1(\ \ , \tau T)_{\mathcal{T}}) \to DX(T)$, el cual hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to (X, \operatorname{Ext}^1(\ \ , \tau T)) & \to & ((\ \ , T_0), \operatorname{Ext}^1(\ \ , \tau T)) & \to & ((\ \ , T_1), \operatorname{Ext}^1(\ \ , \tau T)) \\ \eta\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\ 0 \to D(X(T)) & \longrightarrow & D(T, T_0) & \longrightarrow & D(T, T_1) \end{array}$$

(b) Consideremos una sucesión que casi se divide en $\mathscr{F}(\mathcal{T})$:

$$0 \to \tau^2 T \to E \to \tau T \to 0$$

La cual induce, por el lema 2.40, la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{X}(\mathcal{T})$:

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{KQ}(-, \tau^2 T)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{KQ}(-, E)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{KQ}(-, \tau T)_{\mathcal{T}} \to 0$$

de lo cual se sigue que $\tau \mathrm{Ext}^1_{KQ}(\ \ , \tau T)_{\mathcal{T}} \cong \mathrm{Ext}^1_{KQ}(\ \ , \tau^2 T)_{\mathcal{T}}$. El resto por inducción.

(c) Sea $(-, C)$ un objeto proyectivo inescindible en $\mathrm{mod}(KQ)$, entonces hay una sucesión exacta:

$$0 \to (-, C) \to T_1 \to T_0 \to 0$$

la cual induce, por la sucesión larga de homología, las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \to (-, (-, C)) \to (-, T_1) \to (-, T_0) \to \mathrm{Ext}^1_{KQ}(-, (-, C))_{\mathcal{T}} \to \ \ 0$$

$$0 \to (T_0 -) \to (T_1, -) \to ((-, C), -)_{\mathcal{T}} \to 0$$

La segunda sucesión exacta nos da una presentación proyectiva de $((-, C), -)_{\mathcal{T}}$, tomando la transpuesta y dualizando obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \to \tau(((-, C), -)_{\mathcal{T}}) \to D((-, T_0)) \to D((-, T_1)) \to 0$$

Dualizando la primera sucesión obtenemos una sucesión exacta:

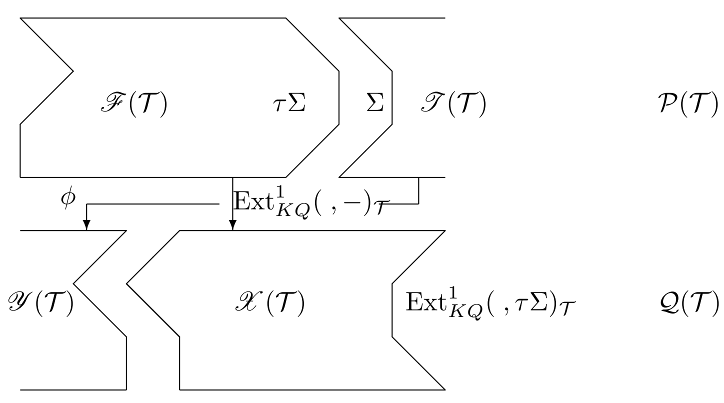
$$0 \to D(\mathrm{Ext}^1_{KQ}(-, (-, C))_{\mathcal{T}}) \to D((-, T_0)) \to D((-, T_1)) \to 0$$

lo cual implica:

$$D(\mathrm{Ext}^1_{KQ}(-, (-, C))_{\mathcal{T}}) \cong \tau(((-, C), -)_{\mathcal{T}})$$

□

Los resultados en la proposición pueden ser interpretados como la construcción de las componentes del carcaj de Auslander-Reiten de $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ a través del pegado de los sucesores de Σ como sucesores de los inyectivos dejando el resto de las componentes sin cambios, como se ilustra en el siguiente diagrama:



Como corolario obtenemos el teorema principal de la sección.

Teorema 3.19. *Sea Q un diagrama de Dynkin infinito localmente finito y $\Gamma(Q)$ el carcaj de Auslander-Reiten de Q. Entonces:*

(a) $\Gamma(A_\infty)$ y $\Gamma(D_\infty)$ tienen sólo dos componentes: las componentes preproyectiva y preinyectiva.

(b) $\Gamma(A_\infty^\infty)$ tiene 4 componentes: la preproyectiva, la preinyectiva y dos componentes regulares de tipo A_∞.

3.2.3. Las componentes regulares

Recuerdese que, si Λ una álgebra de artin hereditaria, a cada Λ-módulo inescindible no proyectivo C se le asocia el número $\alpha(C)$, que es el número de sumandos inescindibles de una descomposición de B, cuando hay un morfismo casi se divide derecho mínimo $f : B \to C$. En [ABPRS] se demuestra que $\alpha(C) \leq 2$, para cada C correspondiente a un vértice en una componente regular del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\Lambda)$.

Para ello, primero se prueba que $\alpha(C) \leq 3$ y el caso $\alpha(C) = 3$ tiene como consecuencia la siguiente proposición, cuya demostración puede consultarse en [ARS Prop. 4.11].

Proposición 3.20. *Supongamos que Λ es un álgebra de artin hereditaria. Sea M un Λ-módulo inescindible regular con $\alpha(M) = 3$ y*

$$0 \to \mathrm{DTr}M \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{smallmatrix}\right)} B_1 \coprod B_2 \coprod B_3 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{smallmatrix}\right)} M \to 0$$

una sucesión casi se divide con B_i inescindible, para $i = 1, 2, 3$. Entonces, tenemos lo siguiente

(a) *Para $i = 1, 2, 3$, hay sucesiones de monomorfismos irreducibles $B_{i,t_i} \to B_{i,t_{i-1}} \to \cdots \to B_{i,1} = B_i \to M$, con $\alpha(B_{i,t_i}) = 1$ y $\alpha(B_{i,j}) = 2$ para $j < t_i$.*

(b) *Para $i = 1, 2, 3$, hay sucesiones de epimorfismos irreducibles $M \to \mathrm{TrD}B_i = \mathrm{TrD}B_{i,1} \to \mathrm{TrD})^2 B_{i,2} \to \cdots \to (\mathrm{TrD})^{t_i} B_{i,t_i}$, con $\alpha((\mathrm{TrD})^j B_{i,j} < 2$ para $j < t_i$, además $\alpha((\mathrm{TrD})^{t_i} B_{i,t_i}) = 1$.*

(c) *Cada modulo inescindible A, donde el vértice correspondiente $[A]$ esta en la componente conexa de $\Gamma(\Lambda)$ determinada por M, es isomorfo a $(\mathrm{TrD})^s X$, para algún $s \in \mathbb{Z}$ y $X \in \{B_{i,j} | i = 1, 2, 3, \ \ 1 \leq j \leq t_i\} \cup \{M\}$.*

En la demostración de $\alpha(C) \leq 3$ y la proposición 3.20 se usan propiedades del radical de una categoría y argumentos en los que interviene la longitud de los objetos de mod Λ, puede verificarse sin ningún problema que dichos argumentos funcionan en el caso mod($\mathbf{C}$) con $\mathbf{C} = KQ$, donde Q es un carcaj localmente finito. Se desea probar que $\alpha(C) \leq 2$, para cada vértice C en alguna componente regular del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(KQ)$.

De acuerdo con las condiciones impuestas sobre Q, la categoría satisface las condiciones del siguiente:

Lema 3.21. *Sea* $\mathbf{C}$ *una* K*-variedad Krull-Schmidt dualizante y localmente finita. Sea* $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ *una familia finita de objetos en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*. Para cada* $i \in I$*, consideremos la sucesión que casi se divide en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$

$$0 \to \mathrm{DTr}(B_i) \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{g_i} B_i \to 0$$

Entonces, hay una subcategoría finita $\mathbf{C}' \subset \mathbf{C}$*, tal que la restricción*

$$0 \to \mathrm{DTr}(B_i)|\mathbf{C}' \xrightarrow{g_i|\mathbf{C}'} E_i|\mathbf{C}' \xrightarrow{f_i|\mathbf{C}'} B_i|\mathbf{C}' \to 0$$

es una sucesión que casi se divide en $\mathrm{mod}(\mathbf{C}')$*.*

Demostración. Para cada $i \in I$, consideremos la resolución proyectiva mínima de B_i

$$\mathbf{C}(\ \ , C_1^i) \to \mathbf{C}(\ \ , C_0^i) \to B_i \to 0 \tag{3.5}$$

Considerese la subcategoría de $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}' = \{C | C \in \mathrm{Supp}\mathbf{C}(\ \ , C_j^i) \cup \mathrm{Supp}\mathbf{C}(C_j^i,\ \ );\ \ i \in I,\ \ j = 0, 1\}$$

la cual es finita, pues $\mathbf{C}$ es localmente finita.

(a) Sean F_1 y F_2 objetos en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ tales que $F_1(C) = F_2(C) = 0$, para cada $C \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{C}'$ y $g = \{g_C : F_1|\mathbf{C}'(C) \to F_2|\mathbf{C}'(C)\}_{C\in\mathbf{C}'}$ un morfismo de $\mathbf{C}'$-módulos. Entonces, g puede extenderse a un morfismo de $\mathbf{C}$-módulos $f = \{f_C\}_{C\in\mathbf{C}} : F_1 \to F_2$, tal que $f|\mathbf{C}' = g : F|\mathbf{C}' \to G|\mathbf{C}'$, mediante

$$f_C = \begin{cases} g_C & \text{si } C \in \mathbf{C}' \\ 0 & \text{si } C \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{C}' \end{cases}$$

(b) Sea $\mathrm{DTr}_{\mathbf{C}}(B_i)$ el dual transpuesto de B_i en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y $\mathrm{DTr}_{\mathbf{C}'}(B_i|\mathbf{C}')$ el dual transpuesto de $B_i|\mathbf{C}'$ en $\mathrm{mod}(\mathbf{C}')$. Se afirma que $(\mathrm{DTr}_{\mathbf{C}}(B_i))|\mathbf{C}' \cong \mathrm{DTr}_{\mathbf{C}'}(B_i|\mathbf{C}')$. En efecto, aplicando $|\mathbf{C}'$ a la resolución proyectiva mínima de B_i que aparece en (3.5) obtenemos la siguiente resolución proyectiva mínima de $B_i|\mathbf{C}'$

$$\mathbf{C}'(\ \ , C_1^i) \to \mathbf{C}'(\ \ , C_0^i) \to B_i|\mathbf{C}' \to 0 \tag{3.6}$$

Entonces, se puede calcular $\mathrm{Tr}_{\mathbf{C}}(B_i)$ aplicando $(\ \ )^*$ a la resolución (3.5) obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to (B_i)^* \to \mathbf{C}(C_0^i,\ \ ) \to \mathbf{C}(C_1^i,\ \ ) \to \mathrm{Tr}_{\mathbf{C}}(B_i) \to 0 \tag{3.7}$$

del mismo modo, se puede calcular $\mathrm{Tr}_{\mathbf{C}'}(B_i)|\mathbf{C}'$ aplicando $(\ \ \ )^*$ a la resolución (3.6), obteniendo la siguiente sucesión exacta

$$0 \to (B_i|\mathbf{C}')^* \to \mathbf{C}'(C_0^i,\ \ ) \to \mathbf{C}'(C_1^i,\ \ ) \to \mathrm{Tr}_{\mathbf{C}'}(B_i|\mathbf{C}') \to 0 \tag{3.8}$$

La afirmación se sigue de aplicar $|\mathbf{C}'$ a la sucesión (3.7) y comparar con la sucesión (3.8) .

(c) Si $0 \to \mathrm{DTr}(B_i) \to E_i \to B_i \to 0$ es una sucesión que casi se divide, entonces después de aplicar $|\mathbf{C}'$, la parte (b) nos asegura que la siguiente es una sucesión exacta de $\mathbf{C}'$-módulos

$$0 \to \mathrm{DTr}(B_i|\mathbf{C}') \xrightarrow{f_i|\mathbf{C}'} E_i|\mathbf{C}' \xrightarrow{g_i|\mathbf{C}'} B_i|\mathbf{C}' \to 0$$

Por construcción $B_i(C) = \mathrm{DTr}(B_i)(C) = 0$, para cada $C \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{C}'$, entonces $E_i|\mathbf{C}'(C) = 0$, para cada $C \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{C}'$. Se afirma que $g_i|\mathbf{C}' : E_i|\mathbf{C} \to B_i|\mathbf{C}'$ no es epimorfismo que se divide. En efecto, si $h : B_i|\mathbf{C}' \to E_i|\mathbf{C}'$ es tal que $g_i|\mathbf{C}'h = 1_{B_i|\mathbf{C}'}$, por la parte (a) h puede extendenderse a $\tilde{h} : B_i \to E_i$, y como $(g_i)_C = 0$ para cada $C \in \mathbf{C}$, se sigue que $g_i\tilde{h} = 1_{B_i}$, una contradicción. Un razonamiento parecido muestra que todo no-isomorfismo $h : B_i|\mathbf{C}' \to B_i|\mathbf{C}'$ se factoriza a través de g_i. □

Teorema 3.22. *Sea $Q = (Q_0, Q_1)$ un carcaj infinito conexo localmente finito y M un KQ-módulo inescindible en alguna componente regular del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(KQ)$. Entonces, $\alpha(M) \leq 2$.*

Demostración. Sea $\mathbf{C} = KQ$. Dado que ya conocemos la forma de las componentes de Auslander-Reiten de los diagramas de Dynkin infinitos, podemos suponer que Q no es un Dynkin.

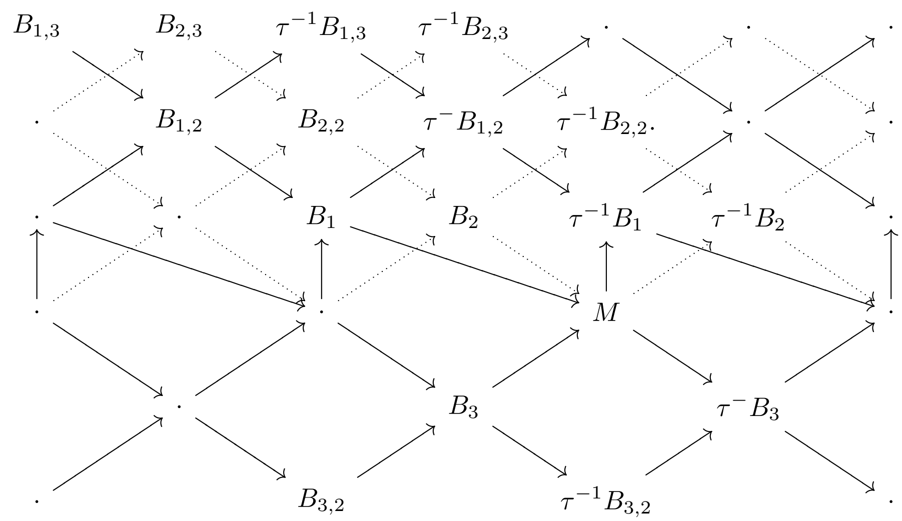
Supongamos que $\alpha(M) = 3$. Sea $0 \to \mathrm{DTr}(M) \to \coprod_{i=1}^{3} B_i \to M \to 0$ una sucesión que casi se divide. Entonces, por la proposición 3.20 podemos considerar las cadenas de morfismos irreducibles: $B_{i,t_i} \to \cdots \to B_{i,1} = B_i \to M,\ i = 1, 2, 3$.

(a) Procedemos como en el lema 3.21, definiendo $\mathcal{B} = \{M\} \cup \{B_{i,j}\} \cup \{\mathrm{TrD}(B_{i,j})\}$, $i = 1, 2, 3,\ 1 \leq j \leq t_i$, para encontrar una subcategoría $\mathbf{C}' \subset \mathbf{C}$, en la cual las sucesiones que casi se dividen de los objetos en $\mathcal{B}$, se restringen a sucesiones que casi se dividen en $\mathrm{mod}(\mathbf{C}')$

$$\begin{array}{lll} 0 & \to & \mathrm{DTr}(B_{i,j})|\mathbf{C}' \to E_i|\mathbf{C}' \to B_{i,j}|\mathbf{C}' \to 0, 1 \leq j \leq t_i \\ 0 & \to & B_{i,j}|\mathbf{C}' \to E_i'|\mathbf{C}' \to \mathrm{TrD}B_{i,j}|\mathbf{C}' \to 0, 1 \leq j \leq t_i \\ 0 & \to & \mathrm{DTr}M|\mathbf{C}' \to \displaystyle\coprod_{i=1}^{3} B_i|\mathbf{C}' \to M|\mathbf{C}' \to 0, \end{array}$$

Añadiendo un número finito de objetos, si es necesario, podemos identificar $\mathbf{C}'$ con KQ', donde Q' es un subcarcaj conexo finito de Q, que no es un Dynkin. Observemos que estas sucesiones que casi se dividen serán sucesiones que casi se dividen para cualquier álgebra de carcaj de un subcarcaj finito Q'' de Q que contiene a Q', pues este contiene el soporte de los objetos que aparecen en las sucesiones.

Como $\alpha(M) = 3$, el módulo $M|\mathbf{C}'$ está en una componente preinyectiva o preproyectiva. Podemos suponer que está en una componente preinyectiva, el otro caso se seguirá por dualidad.



Como estamos suponiendo que Q' no es un Dynkin, la componente preproyectiva es de la forma $(-\mathbb{N}\Delta', \tau)$, con $Q' = \Delta'$. De aquí, la sección que consiste de los tres caminos $B_{i,t_i} \to \cdots \to B_{i,1} = B_i \to M,\ i = 1, 2, 3$, es isomorfa a Q', después de un cambio de orientación. Pero, para cualquier carcaj mas grande Q'', el álgebra KQ'' tendrá la misma sección en su componente preproyectiva como en KQ', lo cual implica que Q es un carcaj finito, lo que contradice nuestra hipotesis. $\square$

La forma del carcaj de Auslander-Reiten de los Dynkin infinitos fue encontrada de manera independiente por [BSP].

Parte II

Categorías de Inclinación Generalizada

Capítulo 4

Categorías derivadas

Este capítulo servirá para familiarizar al lector con la notación y para recordar algunos conceptos útiles, los cuales serán necesarios para la comprensión de esta parte, en el presente trabajo. La mayoría de los resultados aquí expuestos han sido tomados de [V], [GM], [Miy], [Mil], [We] y [CPS].

De aquí en adelante, a menos que se diga otra cosa, $\mathcal{A}$ se usará para denotar siempre una categoría abeliana.

4.1. Translaciones, conos y cilindros

Denotaremos con $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ a la categoría de complejos de co-cadena en con objetos en $\mathcal{A}$. A menos que se diga otra cosa, usaremos siempre complejos de co-cadena y nos referiremos a ellos simplemente como complejos. Un morfismo de complejos $X^\cdot \to Y^\cdot$ en $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ es llamado un cuasi-isomorfismo si los morfismos correspondientes $H^n(X^\cdot) \to H^n(Y^\cdot)$, entre sus grupos de homología, son todos isomorfos. Un complejo $X^\cdot = (X^i, d_X^i)$ es llamado *acotado*, si casi todos los objetos X^n son cero; es acotado *por arriba* (respectivamente, *por abajo*) si existe una cota b (repectivamente, a) tal que $X^n = 0$ para todo $n > b$ (respectivamente, $n < a$). La subcategoría plena de $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ cuyos objetos son los complejos acotados se denotará con $\mathrm{Ch}^b(\mathcal{A})$. De manera análoga los complejos acotados por arriba (respectivamente, acotados por abajo) forman una subcategoría plena de $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$, que es denotada por $\mathrm{Ch}^-(\mathcal{A})$ (respectivamente, por $\mathrm{Ch}^+(\mathcal{A})$).

a. Sea $X^\cdot = (X^i, d_X^i)$ un complejo en $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$. Para cualquier entero n se define el complejo *trasladado* $X^\cdot[n]$ mediante: $X[n]^i = X^{i+n}$ y $d_X[n] = (-1)^n d_X$. Para un morfismo de complejos $f : X^\cdot \to Y^\cdot$ se define $f[n] : X^\cdot[n] \to Y^\cdot[n]$ como un morfismo de complejos que coincide con f sobre las componentes de $X^\cdot[n]$ (las cuales son las componentes de $X^\cdot$). Es claro que esto permite definir un funtor *translación* $T[n] : \mathrm{Ch}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ por $T[n](X) = X[n]$ y $T[n](f) = f[n]$. Claramente este es un autofuntor de la categoría $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$. Este funtor define una auto equivalencia entre cualquiera de las categorías $\mathrm{Ch}^*(\mathcal{A}); * = b, +, -$.

b. Sea $f : X^{\cdot} \to Y^{\cdot}$ un morfismo de complejos. El cono de f es el complejo $C(f)$:

$$C(f) = X^{\cdot}[1] \oplus Y^{\cdot}, \;\; d^i_{C(f)} = \begin{pmatrix} -d^{i+1}_X & 0 \\ f^{i+1} & d^i_Y \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

c. Usando la misma notación, el cilindro de un morfismo f es el complejo $Cyl(f)$:

$$Cyl(f) = X^{\cdot} \oplus X^{\cdot}[1] \oplus Y^{\cdot}, \;\; d^i_{Cyl(f)} = \begin{pmatrix} -d^i_X & 1 & 0 \\ 0 & -d^{i+1}_X & 0 \\ 0 & f^{i+1} & d^i_Y \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Lema 4.1. *Para cualquier morfismo $f : X^{\cdot} \to Y^{\cdot}$, existe un diagrama conmutativo en* $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ *con renglones exactos, el cual es funtorial en f:*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & Y^{\cdot} \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[d, "\alpha"] & C(f) \arrow[r, "\delta=\delta(f)"] \arrow[d, equal] & X^{\cdot}[1] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^{\cdot} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, equal] & Cyl(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & C(f) \arrow[r] & 0 & \\
 & X^{\cdot} \arrow[r, "f"] & Y^{\cdot} & & &
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

donde α y β son cuasi-isomorfismos. Más aún, $\beta\alpha = \mathrm{id}_{Y^{\cdot}}$ y $\alpha\beta$ es homotópico a $\mathrm{id}_{Cyl(f)}$.

Demostración. Tomense a $\overline{\pi}$ y $\overline{f}$ como las inclusiones naturales, a δ y π como las proyecciones naturales. Sean α y β representadas por las matrices

$$\alpha_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \beta_n = \begin{bmatrix} f_n & 0,1 \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

Es fácil ver que α es un cuasi-isomorfismo (ver por ejemplo [W 1.5.6]). Definase el morfismo $\gamma : Cyl(f) \to Cyl(f)$, por medio de $\gamma_n = 1_{Cyl(f)} - \alpha_n\beta_n$. Para cada n considere el morfismo

$$S_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Claramente $\gamma_n = S_{n+1}d^n_{Cyl(f)} + d^{n-1}_{Cyl(n)}S_n$, y por lo tanto $\alpha\beta \sim \mathrm{id}_{Cyl(f)}$. Evidentemente $\beta\alpha = \mathrm{id}_{Y.}$ $\square$

4.2. Categorías trianguladas

a. Sean $X^{\cdot}$ y $Y^{\cdot}$ dos complejos en $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$. Considerese la colección

$$\mathcal{H}(X^{\cdot}, Y^{\cdot}) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}(X^{\cdot}, Y^{\cdot}) | f \text{ es homotópicamente nulo}\}$$

Puede verificarse sin ningún problema que esto nos permite definir un bifuntor

$$\mathcal{H}(-,-) : \mathrm{Ch}(\mathcal{A})^{op} \times \mathrm{Ch}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Ab},$$

el cual es un ideal de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}(-,-)$.

La categoría cociente $\frac{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}{\mathcal{H}}$ es llamada *la categoría homotópica de* $\mathcal{A}$ y se denotará con $K(\mathcal{A})$. Nótese que se tiene de manera natural un funtor $\mathrm{Ch}(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{A})$.

b. Regresando a la sección anterior, se ve que si ambos complejos $X^{\cdot}$ y $Y^{\cdot}$ son acotados por arriba, por abajo o por ambos lados, entonces $C(f)$ y $Cyl(f)$ son ambos acotados de la misma forma. De este modo tenemos diagramas (4.3) como los del lema 4.1 para cada una de las categorías $\mathrm{Ch}^*(\mathcal{A})$, $* = \emptyset, +, -, b$. Como el diagrama (4.3) del lema 4.1 es funtorial en f, tenemos diagramas análagos en la categoría $K^*(A)$, $* = \emptyset, +, -, b$.

Un *triángulo* en una categoría de complejos ($K^*(\mathcal{A})$, $* = \emptyset, +, -, b$) es un diagrama de la forma

$$X^{\cdot} \xrightarrow{f} Y^{\cdot} \xrightarrow{g} Z^{\cdot} \xrightarrow{h} X[1]^{\cdot}$$

Un triángulo es *distinguido*, si es isomorfo a la parte media de

$$X^{\cdot} \xrightarrow{f} Cyl(f) \xrightarrow{\pi} C(f) \xrightarrow{\delta} X[1]^{\cdot}.$$

de algún diagrama de la forma (4.3)

Definición 4.2 (Verdier)**.** *Una categoría aditiva K es llamada categoría triangulada si, está equipada con un automorfismo $T : K \to K$ (llamado el funtor translación) y una familia de triángulos (f, g, h) (llamados triángulos exactos en K), los cuales están sujetos a los siguientes cuatro axiomas:*

(TR1) *Todo morfismo $f : X \to Y$ puede ser embebido en un triángulo exacto (f, g, h). Si $X = Y$ y $Z = 0$, entonces el triángulo $(idX, 0, 0)$ es exacto. Si (f, g, h) es un triángulo sobre (X, Y, Z), isomorfo a un triángulo (f', g', h') exacto sobre (X', Y', Z'), entonces (f, g, h) es exacto también*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\cong"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\cong"'] & TX \arrow[d, "\cong"'] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & TX'
\end{tikzcd}$$

(TR2) *(Rotación). Si (f, g, h) es un triángulo exacto sobre (X, Y, Z), entonces las* rotaciones $(g, h, -Tf)$ *y $(-T^{-1}h, f, g)$ son también triángulos exactos sobre (Y, Z, TX) y $(T^{-1}Z, X, Y)$, respectivamente.*

(TR3) *(Morfismos). Dados dos triángulos exactos*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \tag{4.6}$$

$$X' \xrightarrow{f'} Y \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h} TX' \tag{4.7}$$

con morfismos $u : X \to X'$, $v : Y \to Y'$ tales que $vf = f'u$, entonces existe un morfismo $w' : Z \to Z'$, de modo que (u, v, w) es un morfmismo de triángulos:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"'] & TX \arrow[d, "Tu"'] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & TX'
\end{tikzcd}$$

(TR4) *(El axioma del octaedro). Dados objetos X, Y, Z, X', Y', Z' en K, supongamos que existen triángulos exactos: (f, j, ∂) sobre (X, Y, Z'); (g, a, i) sobre (Y, Z, X'); (gf, b, δ) sobre (X, Z, Y'). Entonces, existe un cuarto triángulo exacto $(u, v, T(j)i)$ sobre (Z', Y', X').*

En [We 10.2.4, 10.2.5] se demuestra que $K^*(\mathcal{A})$ es una categoría triangulada donde $* = \emptyset, +, -, b$. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor entre categorías trianguladas. Se dice que F es un δ-funtor o un funtor exacto si envia triángulos en triángulos, i.e, si $X \to Y \to Z \to TX$ es un tringulo en $\mathcal{C}$, entonces $FX \to FY \to FZ \to TFX$ es un triángulo en $\mathcal{D}$.

c. Un funtor $H : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ de una categoría triangulada $\mathcal{C}$ a la categoría de grupos abelianos $\mathbf{Ab}$ es llamado *funtor cohomológico covariante*, si para cualquier triángulo (X, Y, Z, f, g, h) la sucesión

$$\cdots \to H(T^iX) \xrightarrow{H(T^if)} H(T^iY) \xrightarrow{H(T^ig)} H(T^iZ) \xrightarrow{H(T^ih)} H(T^{i+1}X) \cdots$$

es una sucesión exacta. Dualmente, un funtor $H : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ de una categoría triangulada $\mathcal{C}$ a la categoría de grupos abelianos $\mathbf{Ab}$ es llamado *funtor cohomológico contravariante*, si para cualquier triángulo (X, Y, Z, f, g, h) la sucesión

$$\cdots \to H(T^iX) \xrightarrow{H(T^if)} H(T^iY) \xrightarrow{H(T^ig)} H(T^iZ) \xrightarrow{H(T^ih)} H(T^{i-1}X) \cdots$$

Puede verse (por ejemplo en [Ha 1.2]) que para cualquier objeto X en $\mathcal{C}$ los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \ \ )$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\ \ , X)$ son cohomológicos. Dichos funtores se usan para probar el siguiente:

Lema 4.3 (Lema del 5)**.** *Supongamos que (u, v, w) es un morfismo entre los triángulos (X, Y, Z, f, g, h), (X', Y', Z', f', g', h'), tal que u y v son isomorfismos, entonces w es un isomorfismo.*

Por otro lado $H^n : K^*(\mathcal{A}) \to \mathbf{Ab}$ es un funtor cohomológico, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Aquí, $H^n(X^\cdot)$ es el n-ésimo grupo de homología de $X^\cdot \in K^*(\mathcal{A})$ [We 10.1.4].

4.3. Sistemas multiplicativos y localizaciones

Sea $\mathcal{C}$ una categoría cualquiera. Para cualquier morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$, llamamos a X la fuente de f y a Y el pozo de f.

a. Un *sistema multiplicativo* en una categoría $\mathcal{C}$ es una colección de morfismos en $\mathcal{C}$ que satisface los siguientes axiomas:

(S1) id_X está en S para todo objeto X en C. Si s, t están en S, entonces su composición está en S (cuando esta tiene sentido).

(S2) (Condición de Ore) Para todo diagrama $X' \xleftarrow{f} X \xrightarrow{s} Y$ en S, existe un diagrama $X' \xrightarrow{t} Y' \xleftarrow{g} Y$, con t en S y $gs = tf$. Dualmente, para todo diagrama $X' \xrightarrow{t} Y' \xleftarrow{g} Y$, con t en S, existe un diagrama $X' \xleftarrow{f} X \xrightarrow{s} Y$ en S, con s en S y $gs = tf$.

(S3) Si $f, g : X \to Y$ son dos morfismos C, entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes

(1) Existe un s en S con $sf = sg$.

(2) Existe un t en S con $ft = gt$.

No es difícil ver que la colección S de cuasi-isomorfismos es $K^*(\mathcal{A})$ es un sistema multiplicativo. Por ejemplo, veamos la Condición de Ore. Sea $X' \xleftarrow{f} X \xrightarrow{s} Y$ un ángulo en $K^*(\mathcal{A})$. Por (TR1) puede embeberse el morfismo $X \xrightarrow{s} Y$ en un triángulo exacto

$$X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{i} U \xrightarrow{p} TX$$

Por (TR2) hay un triángulo distinguido $(i, p, -T(s))$ sobre $(Y, U, T(X)$. Nuevamente por (TR1) puede embeberse el morfismo $U \xrightarrow{T(f)p} TX'$ en un triángulo

$$V \xrightarrow{i'} Z \xrightarrow{p} TX \xrightarrow{-T(t)} TV$$

El cuadro conmutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, "T(f)"] \\ U \arrow[r, "T(f)p"] & TX' \end{tikzcd}$$

induce un morfismo de triángulos, por (TR3)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & U \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[r, "-T(s)"] \arrow[d] & TY \arrow[d, "Tf"] \\ V \arrow[r, "i'"] & U \arrow[r, "T(f)p"] & TX' \arrow[r, "-T(t)"] & TV \end{tikzcd}$$

Por la sucesion larga de homología se ve que en el triángulo $X \to U \to TX \xrightarrow{-T(s)} TY$, $-T(s)$ es cuasi-isomorfismo si, y sólo si, U es acíclico, por lo que en el triángulo $V \to U \to TX \xrightarrow{-T(t)} TV$, $T(t)$ es cuasi-isomorfismo. Finalmente t es cuasi-isomorfismo. Las otras propiedades se prueban de manera parecida.

b. Dado un sistema multiplicativo S de $\mathcal{C}$, y un objeto Y en $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, se define la categoría S^Y como sigue:

(1) $\mathrm{Ob}S^Y = \{s|\text{fuente } (s) = Y\}$,

(2) $\mathrm{Hom}_{S^Y}(s, s') = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{pozo}(s), \mathrm{pozo}(s')|fs = s'\}$,

Ahora bien, para cualquier objeto X en $\mathcal{C}$ consideremos el funtor $h_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Sets}$. De esta manera podemos definir un funtor covariante $h_X \circ \mathrm{pozo} : S^Y \to \mathbf{Sets}$, donde $h_X \circ \mathrm{pozo}(s) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{pozo}(s))$

Lema 4.4. *Sean X, Y objetos en $\mathcal{C}$. Definase una relación $\sim$ sobre la colección*

$$\{(f, s)|s \in S^Y, f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{pozo}(s))\}$$

como sigue $(f_1, s_1) \sim (f_2, s_2)$ si, y sólo si, existen morfismos $h_1 \in \mathrm{Hom}_{S^Y}(s_1, s')$, $h_2 \in \mathrm{Hom}_{S^Y}(s_2, s')$ de modo que el siguiente sea un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{pozo}(s_1) \arrow[d, "h_1"] & \\
X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \mathrm{pozo}(s) & Y \arrow[ul, "s_1"'] \arrow[l, "s'"'] \arrow[dl, "s_2"] \\
 & \mathrm{pozo}(s_2) \arrow[u, "h_2"] &
\end{tikzcd}$$

Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia y tenemos que

$$\mathrm{colim}_{S^Y} h_X \circ \mathrm{pozo} = \{(f, s)|s \in S^Y,\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{pozo}(s))\}/\sim$$

En general, no se garantiza que siempre exista el colímite, pues podría ser que S^Y no sea una una categoría pequeña. Pero el colimite existe si hay una subcategoría pequeña S'^Y de S^Y que cumple la siguiente propiedad: para cualquier $s \in S^Y$, existe un morfismo $f : s \to s'$ con $s' \in S'^Y$. En este caso decimos que S es *localmente pequeña*. Con esta condición extra sobre S^Y el colímite existe y

$$\mathrm{colim}_{S^Y} h_X \circ \mathrm{pozo} = \mathrm{colim}_{S'^Y} h_X \circ \mathrm{pozo}$$

Ahora bien, sean X, Y, Z tres objetos cualesquiera, tenemos un morfismo bien definido

$$\mathrm{colim}_{S^Y} h_X \circ \mathrm{pozo} \times \mathrm{colim}_{S^Z} h_Y \circ \mathrm{pozo} \to \mathrm{colim}_{S^Z} h_X \circ \mathrm{pozo} \tag{4.8}$$

el cual se define como sigue: para cada par $([(f,s)],[(g,t)])$ en el producto tenemos el ángulo $\text{pozo}(s) \xleftarrow{s} Y \xrightarrow{g}$, por la condición de Ore existe $s' \in S$ y un morfismo $g : \text{pozo}(s) \to \text{pozo}(s')$ de modo que el cuadro en el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & \text{pozo(t)} \arrow[d, "s'"'] & Z \arrow[l, "t"'] \\
X \arrow[r, "f"] & \text{pozo}(s) \arrow[r, "g'"] & \text{pozo}(s') &
\end{tikzcd}$$

Se asocia el par $([(f,s)],[(g,t)])$ con la clase de equivalencia $[(g'f, s't)]$. En el caso en que S es un sistema multiplicativo pequeño para $\mathcal{C}$ puede hablarse de una *categoría cociente* sin ningún problema de acuerdo al Teorema Gabriel-Zisman [We 10.3.7].

Definición 4.5 (Categoría cociente)**.** *Se define la categoría cociente $S^{-1}\mathcal{C}$ como sigue:*

(1) $\text{Ob}(S^{-1}\mathcal{C}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$*.*

(2) *Para X, Y en $\text{Ob}(\mathcal{C})$, se define $\text{Hom}_{S^{-1}\mathcal{C}}(X,Y) = \text{colim}_{S^Y} h_X \circ \text{pozo}$.*

(3) *La composición se define de acuerdo con (4.8).*

(4) *La identidad de X está dada por la clase de equivalencia $[(1_X, 1_X)]$.*

Se define el funtor *cociente* $Q : \mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ en objetos como $Q(X) = X$ para X en C, y en morfismos como $Q(f) = [(f, 1_Y)]$ para f en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Una de las propiedades importantes de Q es que $Q(s)$ es un isomorfismo para cada s en S, de hecho esta es una de sus propiedades que la la caracteriza con una propiedad universal, tal como se ve en la siguiente:

Proposición 4.6 (Unicidad del Cociente)**.** *Sea $\mathcal{D}$ una categoría y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor tal que $F(s)$ es isomorfismo para todo s en S. Entonces, existe un único funtor $\overline{F} : S^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $F = \overline{F}Q$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "Q"] \arrow[dr, "F"] & \\
S^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\overline{F}"'] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como todo objeto de $S^{-1}\mathcal{C}$ es de la forma QX para $X \in \mathcal{C}$, puede definirse $\overline{F} : S^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ como sigue. Sea $\overline{F}(QX) = F(X)$ para $QX \in S^{-1}\mathcal{C}$ y $\overline{F}([(f,s)]) = (Fs)^{-1}Ff$ para $[(f,s)] \in S^{-1}\mathcal{C}$. Entonces se tiene $F = \overline{F}Q$ y la propiedad requerida. □

c. Supongamos que $\mathcal{L}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$ con la propiedad de que para cualquier objeto X en $\mathcal{A}$ existe un epimorfismo $P \to X \to 0$, con P en $\mathcal{L}$.

Sea

$$X^{\cdot} : \cdots \to X_2 \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0=0} 0 \to \cdots$$

un complejo en $K^{-}(\mathcal{A})$. Entonces, podemos suponer que $d_i = 0$ y $X_{i-1} = 0$, para $i \leq 0$. Pongamos $Z_i = \mathrm{Ker}(d_i)$ y $q_i : Z_i \to X_i$ la inclusión, como $d_i d_{i+1} = 0$ se sigue, de la propiedad del kernel, que existe un morfismo $p_{i+1} : X_{i+1} \to Z_i$, tal que $q_i p_{i+1} = d_{i+1}$.

Sea $\pi_0 : P_0 \to X_0$ un epimorfismo, con P_0 un objeto de $\mathcal{L}$ y $X_1 \xleftarrow{u_0} W_0 \xrightarrow{w_0} P_0$, el producto fibrado de $X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xleftarrow{\pi_0} P_0$. Sea $v_0 : P_1 \to W_0$ un epimorfismo, con P_1 en $\mathcal{L}$. Como π_0 y v_0 son epimorfismos, tenemos que $\mathrm{Coker}(w_0 v_0) \cong \mathrm{Coker}(w_0) \cong \mathrm{Coker}(d_1)$ [Po 5.2, 5.3]. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
P_1 & \xrightarrow{v_0} & W_0 & \xrightarrow{w_0} & P_0 & \to & \mathrm{Coker}(w_0 v_0) & \to & 0 \\
{\scriptstyle u_0 v_0}\downarrow & & {\scriptstyle u_0}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_0}\downarrow & & {\scriptstyle \cong}\downarrow & & \\
X_1 & = & X_1 & \xrightarrow{q_0 = d_1} & X_0 & \to & \mathrm{Coker}(d_1) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Procediendo por inducción se desea construir un complejo $P^{\cdot} = (P^i, d'_i) \in K^{-}(\mathcal{L})$, y un morfismo de complejos $\pi : P^{\cdot} \to X^{\cdot}$ tal que, para cada n, tengamos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \to & \mathrm{Ker}(d'_n) & \xrightarrow{q'_n} & P_n \\
& & \downarrow & & {\scriptstyle \pi_n}\downarrow \\
0 & \to & \mathrm{Ker}(d_n) & \xrightarrow{q_n} & X_n \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0
\end{array}$$

y $H^n(P^{\cdot}) \cong H^n(X^{\cdot})$.

Sea $Z'_n = \mathrm{Ker}(d'_n)$ y supongamos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \to & Z'_n & \to & P_n \\
& & \downarrow & & {\scriptstyle \pi_n}\downarrow \\
0 & \to & Z_n & \xrightarrow{q_n} & X_n \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0
\end{array}$$

Sea $X_{n+1} \xleftarrow{u_{n+1}} W_{n+1} \xrightarrow{w_{n+1}} Z'_n$ el producto fibrado de $X_{n+1} \xrightarrow{p_{n+1}} Z_n \leftarrow Z'_n$ y tómese un epimorfismo $v_{n+1} : P_{n+1} \to W_{n+1}$. Sea $d'_n : P_{n+1} \xrightarrow{v_{n+1}} W_{n+1} \xrightarrow{w_{n+1}} Z'_n \to P_n$ y $\pi_{n+1} = u_{n+1} v_{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccc}
P_{n+1} & \xrightarrow{v_{n+1}} & W_{n+1} & \xrightarrow{w_{n+1}} & Z'_n & \longrightarrow & P_n \\
{\scriptstyle u_{n+1}v_{n+1}}\downarrow & & {\scriptstyle u_{n+1}}\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle \pi_n}\downarrow \\
X_{n+1} & = & X_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & Z_n & \longrightarrow & X_n \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Tenemos que $\text{Coker}(w_{n+1}) \cong \text{Coker}(p_{n+1})$ [Po 5.2, 5.3]. Entonces

$$H^n(P^\cdot) = \text{Coker}(w_{n+1}v_{n+1}) \cong \text{Coker}(p_{n+1}) = H^n(X^\cdot)$$

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Z'_{n+1} & \longrightarrow & P_{n+1} & \to & \text{Im}(d'_{n+1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Z_{n+1} & \longrightarrow & X_{n+1} & \to & \text{Im}(d'_{n+1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

y también el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \text{Im}(d'_{n+1}) & \to & Z'_n & \to & H^n(P^\cdot) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \cong\downarrow & & \\
0 & \to & \text{Im}(d_{n+1}) & \to & Z_n & \to & H^n(X^\cdot) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Entonces, al pegar los diagramas anteriores, obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Z'_{n+1} & \longrightarrow & P_{n+1} & \to & H^n(P^\cdot) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \cong\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Z_{n+1} & \longrightarrow & X_{n+1} & \to & H^n(X^\cdot) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

se sigue que $Z'_{n+1} \to Z_{n+1}$ es un epimorfismo. De esta manera hemos probado la siguiente:

Proposición 4.7. *Sea $\mathcal{L}$ una coleccion de objetos de $\mathcal{A}$ tales que, todo objeto X en $\mathcal{A}$ es imagen de un epimorfismo de algún objeto en $\mathcal{L}$. Entonces para todo $X^\cdot \in K^-(\mathcal{A})$, existe $P^\cdot \in K^-(\mathcal{L})$ y un morfismo $f : P^\cdot \to X^\cdot$ tal que f es un cuasi-isomorfismo*

Enunciamos sin demostración el dual de la proposición 4.7.

Proposición 4.8. *Sea $\mathcal{L}$ una colección de objetos de $\mathcal{A}$ tales que, todo objeto X en $\mathcal{A}$ es imagen de un monomorfismo de algún objeto en $\mathcal{L}$. Entonces para todo $X^{\cdot} \in K^{+}(\mathcal{A})$, existe $I^{\cdot} \in K^{+}(\mathcal{L})$ y un morfismo $f : X^{\cdot} \to I^{\cdot}$ tal que f es un cuasi-isomorfismo.*

d. Para una categoría abeliana dada $\mathcal{A}$, le asociamos la categoría de complejos, módulo la relación de homotopia, $K(\mathcal{A})$, junto con sus categorías plenas $K^{*}(\mathcal{A})$, donde $* = +, -, b$ o $\emptyset$ y sirve para denotar a los complejos acotados por arriba, por abajo, acotados por ambos lados o nada, respectivamente. En adición, denotamos con $K^{+,b}(\mathcal{A})$ (respectivamente, con $K^{-,b}(\mathcal{A})$) la subcategoría plena de $K^{+}(\mathcal{A})$ (respectivamente, de $K^{-}(\mathcal{A})$), cuyos objetos tienen cohomología acotada. Estas categorías son trianguladas.

Para cada $K^{*}(\mathcal{A})$, tenemos la correspondiente *categoría derivada* $D^{*}(\mathcal{A})$, la cual es también triangulada, y se obtiene a partir de $K^{*}(\mathcal{A})$, a través de la inversión de cuasi-isomorfismos. En un principio debemos preocuparnos sobre el problema lógico que surge, cuando observamos que la colección de cuasi-isomorfismos podría no ser un conjunto. Sin embargo, en el caso en que $\mathcal{A}$ tenga suficientes proyectivos o suficientes inyectivos, el problema es superado en el caso $* = -, +$; pues la categoría de complejos de proyectivos (respectivamente, de inyectivos) $K^{-}(Proj\mathcal{A})$ (respectivamente, $K^{+}(Inj\mathcal{A})$) y la categoría derivada $D^{-}(\mathcal{A})$ (respectivamente, $D^{+}(\mathcal{A})$) son equivalentes. En el caso de la categoría de complejos acotados, las categorías $K^{-,b}(Proj\mathcal{A})$ y $K^{+,b}(Inj\mathcal{A})$ son ambas equivalentes a la categoría $D^{b}(\mathcal{A})$, para mayores detalles, el lector puede consultar a [V], [GM], [Miy], [Mil], [We].

Por la parte (c) de esta sección puede verse que, cuando $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos, para cualquier complejo $X^{\cdot}$ en $D^{+}(\mathcal{A})$ puede encontrarse un cuasi-isomorfismo $X^{\cdot} \to I^{\cdot}$, con $I^{\cdot} \in K^{+}(Inj\mathcal{A})$. Dualmente, cuando $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, para cualquier complejo $X^{\cdot}$ en $D^{-}(\mathcal{A})$ puede encontrarse un cuasi-isomorfismo $P^{\cdot} \to X^{\cdot}$, con $P^{\cdot} \in K^{-}(Proj\mathcal{A})$.

4.4. La categoría $D(\mathrm{Mod}(\mathbf{C}))$

En este apartado justificaremos la existencia de la categoría $D(\mathrm{Mod}(\mathbf{C}))$. Para esto seguiremos la línea de argumentos que aparecen en [Miy].

a. La categoría $\mathrm{Ch}^{*}(\mathcal{A})$ es Frobenius. Consideremos la categoría de complejos $\mathrm{Ch}^{*}(\mathcal{A})$, con $* = +, -, b, \emptyset$, y $\mathcal{S}_{\mathrm{Ch}^{*}(\mathcal{A})}$ la colección de sucesiones exactas de complejos $0 \to X^{\cdot} \xrightarrow{f} Y^{\cdot} \xrightarrow{g} Z^{\cdot} \to 0$ en $\mathrm{Ch}^{*}(\mathcal{A})$, tales que

$$0 \to X^{n} \xrightarrow{f^{n}} Y^{n} \xrightarrow{g^{n}} Z^{n} \to 0$$

es una sucesión exacta que se escinde, para todo entero positivo n. En [Miy Prop. 6.8] se prueba que $(\mathrm{Ch}^{*}(\mathcal{A}), \mathcal{S}_{\mathrm{Ch}^{*}(\mathcal{A})})$ es una categoría Frobenius, este hecho es de importancia para nosotros, como veremos en la siguiente proposición, probada en [Miy Prop. 5.8], la cual es valida para cualquier categoría Frobenius.

Proposición 4.9. *En la categoría $(\mathrm{Ch}^{*}(\mathcal{A}), \mathcal{S}_{\mathrm{Ch}^{*}(\mathcal{A})})$, la imagen de cualquier elemento $0 \to X^{\cdot} \xrightarrow{u} Y^{\cdot} \xrightarrow{v} Z^{\cdot} \to 0$ de $\mathcal{S}_{\mathrm{Ch}^{*}(\mathcal{A})}$ puede ser embebida en un triángulo $X^{\cdot} \xrightarrow{\overline{u}} Y^{\cdot} \xrightarrow{\overline{v}} Z^{\cdot} \to X^{\cdot}[1]$, en $K^{*}(\mathcal{A})$.*

b. Categorías Abn y límites homotopicos.

Definición 4.10 (Categorías Abn)**.** *Se dan algunas condiciones en categorías abelianas:*

(Ab3) *Decimos que una categoría abeliana $\mathcal{A}$ satisface la condición* Ab3 *(resp.* Ab3**) si $\mathcal{A}$ tiene coproductos (resp. productos) de objetos indexados por conjuntos arbitrarios.*

(Ab4) *Decimos que una categoría abeliana $\mathcal{A}$ satisface la condición* Ab4 *(resp.* Ab4**) si $\mathcal{A}$ satisface la condición* Ab3 *(resp.* Ab3**), y el coproducto (resp. producto) de monomorfismos (resp. epimorfismos) es monomorfismo (resp. epimorfismo).*

Si $\mathcal{A}$ es Ab3 (resp. Ab3*), no es muy difícil ver que que $K(\mathcal{A})$ tiene coproductos (resp. productos) arbitrarios de objetos indexados por conjuntos arbitrarios.

Sea $\{X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de morfismos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ que satisface la condición Ab3, denotamos con shift : $\coprod_i X_i \to \coprod_i X_i$ al coproducto de los morfismos de la sucesion. Dualmente, sea $\{X_{i+1} \xrightarrow{f_i} X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de morfismos en una categoría abeliana abeliana $\mathcal{A}$ que satisface la condición Ab3*, denotamos con shift : $\prod_i X_i \to \prod_i X_i$ al producto de los morfismos de la sucesión. Necesitaremos del siguiente lema, cuya prueba puede consultarse en [Miy Lema 11.6].

Lema 4.11. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Lo siguiente ocurre*

(a) *Supongamos que $\mathcal{A}$ satisface la condición* Ab3*, y sea $\{X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de morfismos, si existe un $n \in \mathbb{N}$, tal que f_i es un monomorfismo que se escinde, para toda $i \geq n$, entonces tenemos una sucesión exacta que se escinde*

$$0 \to \coprod_i X_i \xrightarrow{1-\text{shift}} \coprod_i X_i \to \varinjlim X_i \to 0.$$

(b) *Supongamos que $\mathcal{A}$ satisface la condición* Ab3**, y sea $\{X_{i+1} \xrightarrow{f_i} X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de morfismos, si existe un $n \in \mathbb{N}$, tal que f_i es un epimorfismo que se escinde, para toda $i \geq n$, entonces tenemos una sucesión exacta que se escinde*

$$0 \to \varinjlim X_i \to \coprod_i X_i \xrightarrow{1-\text{shift}} \coprod_i X_i \to 0.$$

Los siguientes conceptos serán de interés para nosotros en el caso en que $K = K(\mathcal{A})$.

Definición 4.12. *Sea K una categoría triangulada*

(a) *Supongamos que coproductos númerables existen en K. Sea*

$$X_0 \xrightarrow{j_1} X_1 \xrightarrow{j_2} X_2 \xrightarrow{j_3} \cdots$$

una sucesión de objetos y morfismos en K. El colimite homotopico de la sucesión, denotado $\operatorname{\underrightarrow{hcolim}} X_i$, está dado por definición, por el triángulo

$$\coprod_i X_i \xrightarrow{1-\text{shift}} \coprod_i X_i \to \operatorname{\underrightarrow{hcolim}} X_i \to T(\coprod_i X_i)$$

Aquí, el morfismo $\coprod_i X_i \xrightarrow{\text{shift}} \coprod_i X_i$ *es el coproducto de* $j_{i+1} : X_i \to X_{i+1}$*. El morfismo* $1 - \text{shift}$ *está dado por la matriz infinita*

$$1 - \text{shift} = \begin{pmatrix} 1_{X_0} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -j_1 & 1_{X_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -j_2 & 1_{X_2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -j_3 & 1_{X_3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

(b) *Supongamos que productos númerables existen en* K*. Sea*

$$\cdots \xrightarrow{p_3} X_2 \xrightarrow{p_2} X_1 \xrightarrow{p_1} X_0$$

una sucesión de objetos y morfismos en K*. El límite homotopico de la sucesión, denotado* $\underrightarrow{\text{hlim}} X_i$*, está dado por definición, por el triángulo*

$$\underrightarrow{\text{hlim}} X_i \to \prod_i X_i \xrightarrow{1-\text{shift}} \prod_i X_i \to T(\underrightarrow{\text{hlim}} X_i)$$

Aquí, el morfismo $\prod_i X_i \xrightarrow{\text{shift}} \coprod_i X_i$ *es el producto de* $p_{i+1} : X_{i+1} \to X_i$*. El morfismo* $1 - \text{shift}$ *está dado por la matriz infinita*

$$1 - \text{shift} = \begin{pmatrix} 1_{X_0} & -p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1_{X_1} & -p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1_{X_2} & -p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1_{X_3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Estamos listos para la siguiente proposición:

Proposición 4.13. *Sea* $\mathcal{A}$ *una categoría abeliana.*

(a) *Supongamos que* $\mathcal{A}$ *satisface la condición* Ab3 *y* $\{X_i \to X_{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de complejos en* $\text{Ch}(\mathcal{A})$ *que satisfacen la siguiente condición: para cada* $j \in \mathbb{Z}$*, existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $X_i^j \to X_{i+1}^j$ *son monomorfismos que se escinden, para toda* $i \geq n$*. Entonces, tenemos una sucesión exacta en* $\text{Ch}(\mathcal{A})$*:*

$$0 \to \coprod_i X_i \xrightarrow{1-\text{shift}} \coprod_i X_i \to \underrightarrow{\text{colim}} X_i \to 0$$

la cual está en $\mathcal{S}_{\text{Ch}^*(\mathcal{A})}$*. En particular,* $\underrightarrow{\text{colim}} X_i \cong \underrightarrow{\text{hcolim}} X_i$ *en* $K(\mathcal{A})$*.*

(b) *Supongamos que* $\mathcal{A}$ *satisface la condición* Ab3* *y* $\{X_{i+1} \to X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de complejos en* $\text{Ch}(\mathcal{A})$ *que satisfacen la siguiente condición: para cada* $j \in \mathbb{Z}$*, existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $X_i^j \to X_{i+1}^j$ *son epimorfismos que se escinden, para toda* $i \geq n$*. Entonces, tenemos una sucesión exacta en* $\text{Ch}(\mathcal{A})$*:*

$$0 \to \varinjlim X_i^{\cdot} \to \prod_i X_i^{\cdot} \xrightarrow{1-\text{shift}} \prod_i X_i^{\cdot} \to 0$$

la cual está en $\mathcal{S}_{\mathrm{Ch}^*(\mathcal{A})}$. En particular, $\varinjlim X_i^{\cdot} \cong \underrightarrow{\mathrm{hlim}} X_i^{\cdot}$ en $K(\mathcal{A})$.

Demostración. Solo se prueba (a), la prueba de (b) es dual. Por el Lema 4.11, para cualquier j tenemos la siguiente sucesión exacta que se escinde en $\mathcal{A}$:

$$0 \to \coprod_i X_i^j \xrightarrow{1-\text{shift}} \coprod_i X_i^j \to \underrightarrow{\mathrm{colim}} X_i^j \to 0$$

Entonces, tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{Ch}^*(\mathcal{A})$, la cual está en $\mathcal{S}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}$:

$$0 \to \coprod_i X_i^{\cdot} \xrightarrow{1-\text{shift}} \coprod_i X_i^{\cdot} \to \underrightarrow{\mathrm{colim}} X_i^{\cdot} \to 0 \tag{4.9}$$

Por otro lado, por la proposición, la sucesión (4.9) puede ser embebida en un triángulo en $K(\mathcal{A})$, $\coprod_i X_i^{\cdot} \xrightarrow{1-\text{shift}} \coprod_i X_i^{\cdot} \to \underrightarrow{\mathrm{colim}} X_i^{\cdot} \to (\coprod_i X_i^{\cdot})[1]$. Ahora bien, si consideramos la sucesion de complejos inducida en $K(\mathcal{A})$, $\{X_i^{\cdot} \to X_{i+1}^{\cdot}\}$, podemos calcular el colimite homotopico $\underrightarrow{\mathrm{hcolim}} X_i^{\cdot}$. Así, por el axioma (TR3) tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $K(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_i X_i^{\cdot} \arrow[r, "1-\text{shift}"] \arrow[d, equal] & \coprod_i X_i^{\cdot} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \underrightarrow{\mathrm{colim}} X_i^{\cdot} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & (\coprod_i X_i^{\cdot})[1] \arrow[d, equal] \\
\coprod_i X_i^{\cdot} \arrow[r, "1-\text{shift}"] & \coprod_i X_i^{\cdot} \arrow[r] & \underrightarrow{\mathrm{hcolim}} X_i^{\cdot} \arrow[r] & (\coprod_i X_i^{\cdot})[1]
\end{tikzcd}$$

Se sigue del Lema del 5, que el morfismo punteado es isomorfismo en $K(\mathcal{A})$.

□

Proposición 4.14. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, y $K^{\phi}(\mathcal{A})$ la subcategoría de $K(\mathcal{A})$, cuyos objetos son los complejos aciclicos.*

(i) *Si $\mathcal{A}$ satisface* Ab4 *y tiene suficientes proyectivos, entonces todo objeto de $K(\mathcal{A})$ es cuasi-isomorfo a un complejo $P^{\cdot}$ de proyectivos con* $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P^{\cdot}, K^{\phi}(\mathcal{A})) = 0$

(ii) *Si $\mathcal{A}$ satisface* Ab4* *y tiene suficientes inyectivos, entonces todo objeto de $K(\mathcal{A})$ es cuasi-isomorfo a un complejo $I^{\cdot}$ de injectivos con* $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(K^{\phi}(\mathcal{A}), I^{\cdot}) = 0$

Antes de ver la demostración de la Proposición (4.14) necesitaremos el siguiente:

Lema 4.15. *Para $X^{\cdot}$ en $K(\mathcal{A})$ y $P^{\cdot} \in K^{-}(Proj\mathcal{A})$ ($I^{\cdot} \in K^{+}(Inj\mathcal{A})$). Si $X^{\cdot}$ es aciclico, entonces tenemos* $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P^{\cdot}, X^{\cdot}) = 0$ *(*$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^{\cdot}, I^{\cdot}) = 0$*).*

Demostración. Sea

$$X^{\cdot}: \cdots \to X^2 \xrightarrow{d_X^2} X^1 \xrightarrow{d_X^2} X^0 \cdots$$

Primero nótese que cualquier morfismo $h_n : P^n \to X_n$, tal que $d_X^n h_n = 0$, se factoriza por d_X^{n+1}. En efecto, como $X^{\cdot}$ es aciclico d_X^{n+1}, se factoriza como $X^{n+1} \xrightarrow{p_n} \mathrm{Ker}(d_X^n) \xrightarrow{q_n} X^n$, con q_n monomorfismo y p_n epimorfismo. Como $d_X^n h_n = 0$, existe un morfismo $s'_n : P^n \to \mathrm{Ker}(d_X^n)$, tal que $q_n s'_n = h_n$. Como P_n es proyectivo, existe un morfismo $s_n : P^n \to X^{n+1}$ tal que $p_n s_n = s'_n$. Así, tenemos pues el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & P^n \arrow[dll, "s_n"'] \arrow[dl, "s'_n"] \arrow[d, "h_n"] & \\
X^{n+1} \arrow[r, "p_n"] & \mathrm{Ker}(d_X^n) \arrow[r, "q_n"] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] & X^{n-1}
\end{tikzcd}$$

Sea $f = (f_n) : P^{\cdot} \to X^{\cdot}$. Ahora bien, $d_X^{-1} f_0 = 0$, por lo anterior existe $s_0 : P^0 \to X^1$ tal que $d_X^1 s_0 = f_0$. Si $s_{-1} = 0$ se tiene que $f_0 = d_X^1 s_0 + s_{-1} d_P^{-1}$. Procediendo por inducción supongase que para $n > 1$ existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & P^n \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, "f_n - s_{n-1} d_P^n"] & \\
X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] & X^{n-1}
\end{tikzcd}$$

tal que $d_X^n(f_n - s_{n-1} d_P^n) = 0$. Entonces tenemos que

$$d_X^{n+1}(f_{n+1} - s_n d_P^{n+1}) = d_X^{n+1} f_{n+1} - d_X^{n+1} s_n d_P^{n+1}$$
$$f_n d_P^{n+1} - d_X^{n+1} s_n d_{n+1}^P = (f_n - d_X^{n+1} s_n) d_P^{n+1} = (s_{n-1} d_P^n) d_P^{n+1} = 0$$

por lo que existe un morfismo $s_{n+1} : P^{n+1} \to X^{n+1}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & P^{n+1} \arrow[dl, "s_{n+1}"'] \arrow[d, "f_{n+1} - s_n d_P^{n+1}"] & \\
X^{n+2} \arrow[r, "d_X^{n+2}"] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] & X^{n-1}
\end{tikzcd}$$

$\square$

Demostración de la Proposición 4.14 . Solo se prueba (i), la prueba de (ii) es dual.

(a) Para cualquier complejo $X^\cdot$ en $K(\mathcal{A})$, tenemos una sucesión de monomorfismos de complejos $j_{i+1} : \tau_{\leq i}X^\cdot \to \tau_{\leq i+1}X^\cdot$, $i \geq 0$, como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq i}X^\cdot \arrow[d, "j_i"'] & \cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ker}(d^i) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\tau_{\leq i+1}X^\cdot & \cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] & X^i \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d^{i+1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De acuerdo con el Lema (4.7), para cada $i \geq 0$, existe un complejo $P_i^\cdot \in K^-(proj\mathcal{A})$ junto con un cuasi-isomorfismo $s_i : P_i^\cdot \to \tau_{\leq i}X^\cdot$. Se sigue de la condición de Ore que, dado el angulo $\tau_{\leq i}X^\cdot \xrightarrow{j_{i+1}} \tau_{\leq i+1}X^\cdot \xleftarrow{s_{i+1}} P_i^\cdot$, existe un angulo $\tau_{\leq i}X^\cdot \xleftarrow{r_i} Q^\cdot \xrightarrow{q_{i+1}} P_{i+1}$, tal que r_i es un cuasi-isomorfismo y el siguiente cuadro conmuta

$$\begin{tikzcd}
Q^\cdot \arrow[r, "q_{i+1}"] \arrow[d, "r_i"'] & P_{i+1} \arrow[d, "s_{i+1}"'] \\
\tau_{\leq i}X^\cdot \arrow[r, "j_{i+1}"] & \tau_{\leq i+1}X^\cdot
\end{tikzcd}$$

pues la colección de cuasi-isomorfismos son un sistema multiplicativo de $K(\mathcal{A})$.

Como $Q^\cdot \xrightarrow{q_{i+1}} P_{i+1}$ es cuasi-isomorfismo, puedes suponerse que $Q^\cdot \in K^-(\mathcal{A})$. Entonces, existe un cuasi-isomorfismo $s_i' : P_i^\cdot \to Q^\cdot$, y de este modo tenemos un cuadro conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P_i^\cdot \arrow[r, "j_{i+1}'=s_i'q_{i+1}"] \arrow[d, "s_i=r_is_i'"'] & P_{i+1}^\cdot \arrow[d, "s_{i+1}"'] \\
\tau_{\leq i}X^\cdot \arrow[r, "j_{i+1}"] & \tau_{\leq i+1}X^\cdot
\end{tikzcd}$$

Así, tenemos un morfismo de triangulos

$$\begin{tikzcd}
\coprod_i P_i^\cdot \arrow[r, "1-\mathrm{shift}"] \arrow[d, "\coprod_i s_i"'] & \coprod_i P_i^\cdot \arrow[r] \arrow[d, "\coprod_i s_i"'] & \underrightarrow{\mathrm{hcolim}} P_i^\cdot \arrow[r] \arrow[d, dotted] & T\coprod_i P_i^\cdot \arrow[d, "T\coprod_i s_i"'] \\
\coprod_i \tau_{\leq i}X^\cdot \arrow[r, "1-\mathrm{shift}"] & \coprod_i \tau_{\leq i}X^\cdot \arrow[r] & \underrightarrow{\mathrm{hcolim}} \tau_{\leq i}X^\cdot \arrow[r] & T\coprod_i \tau_{\leq i}X^\cdot
\end{tikzcd} \tag{4.10}$$

Por otro lado, como en morfismo inducido $H^n(s_i) : H^n(P_i^\cdot) \to H^n(\tau_{\leq i}X^\cdot)$ en $\mathcal{A}$ es isomorfismo, para cada $n \geq 0$, tenemos que $\coprod_i H^n(s_i)$ es isomorfismo, para cada $i \geq 0$, pues $\mathcal{A}$ es Ab4. Se sigue de esto que $H^n(\coprod_i s_i)$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}$, y finalmente que $\coprod_i s_i$ es un cuasi-isomorfismos en $K(\mathcal{A})$. Así, al aplicar el funtor H^* al diagrama (4.10) se sigue, de la sucesión larga de homología y del Lema del 3, que el morfismo punteado es cuasi-isomorfismo.

Ahora bien, $P^\cdot = \underrightarrow{\text{hcolim}} P_i^\cdot$ es un complejo en $K(Proj\mathcal{A})$ por construcción, de hecho es el cono del morfismo $1 - \text{shift}$, i.e, $P^\cdot = C(1 - \text{shift}) = (\coprod_i P_i^\cdot)[1] \coprod (\coprod_i P_i^\cdot)$.

(b) Tenemos un cuasi-isomorfismo: $\underrightarrow{\text{hcolim}}\tau_{\leq i}X^\cdot \to \underrightarrow{\text{colim}}\tau_{\leq i}X^\cdot = X^\cdot$. En efecto, la sucesión de morfismos $j_{i+1} : \tau_{\leq i}X^\cdot \to \tau_{\leq i+1}X^\cdot$, $i \geq 0$, satisface la condición (a) del lema 4.13, entonces tenemos un isomofismo $\underrightarrow{\text{hcolim}}\tau_{\leq i}X^\cdot \to \underrightarrow{\text{colim}}\tau_{\leq i}X^\cdot$ en $K(\mathcal{A})$.

Observemos que $\underrightarrow{\text{colim}}\tau_{\leq i}X^\cdot = X^\cdot$. En efecto, sea $n \in \mathbb{Z}$. Si $n < 0$, entonces $j_i^n : (\tau_{\leq i}X^\cdot)^n \to (\tau_{\leq i+1}X^\cdot)^n$ es $1_{X^n} : X^n \to X^n$ para $i > 0$; si $n \geq 0$, entonces $j_i^n : (\tau_{\leq i}X^\cdot)^n \to (\tau_{\leq i+1}X^\cdot)^n$ es $1_{X^n} : X^n \to X^n$ para $i > n$. Entonces $(\underrightarrow{\text{colim}}\tau_{\leq i}X^\cdot)^n = \underrightarrow{\text{colim}}(\tau_{\leq i}X^\cdot)^n$. En cualquier caso $(\underrightarrow{\text{colim}}\tau_{\leq i}X^\cdot)^n$ es el colimite del sitema dirigido $\{j_i^n : (\tau_{\leq i}X^\cdot)^n \to (\tau_{\leq i+1}X^\cdot)^n\}$, el cual es $(X^\cdot)^n$; para ver esto puede verificarse sin ningun problema que el morfismo

$$(j_0^n \; j_1^n \; j_2^n \cdots) : \coprod_i (\tau_{\leq i}X^\cdot)^n \to (X^\cdot)^n$$

es el Cokernel del morfismo

$$\coprod_i (\tau_{\leq i}X^\cdot)^n \xrightarrow{1-\text{shift}} \coprod_i (\tau_{\leq i}X^\cdot)^n$$

Se sigue que $\underrightarrow{\text{colim}}\tau_{\leq i}X^\cdot = X^\cdot$, y la afirmación está probada.

(c) Se sigue de (a) y (b) que tenemos un cuasi-isomorfismo $P^\cdot \to X^\cdot$, con $P^\cdot \in K(Proj\mathcal{A})$. Aplicando $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\quad, K^\phi(\mathcal{A}))$ al triangulo superior del diagrama (4.10), obtenemos una sucesión exacta

$$\prod_i \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(TP_i, K^\phi(\mathcal{A})) \to \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P^\cdot, K^\phi(\mathcal{A})) \to \prod_i \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P_i, K^\phi(\mathcal{A}))$$

Pero $\text{Hom}(P_i, K^\phi(\mathcal{A})) = \text{Hom}(TP_i, K^\phi(\mathcal{A})) = 0$ por el Lema 4.15 y el resultado se sigue. $\square$

c. La categoría derivada de una categoría Ab4 (Ab4*) con suficientes proyectivos (inyectivos).

Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y S el sistema multiplicativo de los cuasi-isomorfismos en $K(\mathcal{A})$. Para cualquier objeto Y en $K(\mathcal{A})$, también podemos definir la categoría S_Y como sigue:

(1) $\text{Ob}S_Y = \{s \in S | \text{pozo } (s) = Y\}$

(2) $\text{Hom}_{S_Y}(s, s') = \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{fuente}(s'), \text{fuente}(s)) | sf = s'\}$

Diremos que S es localmente pequeña a la derecha (resp. a la izquierda), si existe una subcategoría pequeña S'^Y (resp. S'_Y) de S^Y (resp. de S_Y) con la siguiente propiedad: para cualquier $s \in S^Y$ (resp. $s \in S_Y$), existe un morfismo $f : s \to s'$ (resp. $f : s' \to s$) con $s' \in S'^Y$ (resp. con $s' \in S'_Y$).

Como ya hemos comentado, se garantiza la existencia de la categoría derivada $D(\mathcal{A})$ en el caso en que S sea localmente pequeña por la derecha (resp. por la izquierda).

Teorema 4.16. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y S la colección de cuasi-isomofismos en $K(A)$. Entonces $D(A)$, existe si ocurre una de las siguientes condiciones*

(i) *La categoría $\mathcal{A}$ satisface la condición* Ab4 *y tiene suficientes proyectivos.*

(ii) *La categoriía $\mathcal{A}$ satisface la condición* Ab4* *y tiene suficientes inyectivos.*

Demostración. Supongamos que ocurre (i), el otro caso se sigue por dualidad. Probaremos que S es localmente pequeña por la izquierda. Sea $s : X \to Y$ un objeto de S_Y, por (TR1) existe un triángulo

$$X \xrightarrow{s} Y \to Z \to X[1] \tag{4.11}$$

en $K(\mathcal{A})$. Tenemos que, por la sucesión larga de homología el objeto Z es aciclico, i.e, Z es un objeto de $K^{\phi}(\mathcal{A})$. Por la proposición 4.14, existe un cuasi-isomorfismo $s' : P^{\cdot} \to Y$, con $P^{\cdot} \in K(Proj\mathcal{A})$, para el cual se tiene que $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P^{\cdot}, K^{\phi}(\mathcal{A})) = 0$. En particular tenemos que $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P^{\cdot}, Z) = 0$. Entonces, al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A}}(P^{\cdot},\ \ )$ al triángulo (4.11) se sigue que, por la sucesión larga de homología, existe un morfismo $f : P^{\cdot} \to X$ tal que $sf = s'$. Claramente la subcategoría $S_Y = \{s' : P^{\cdot} \to Y\}$ de S_Y es pequeña, i.e, S es localmente pequeña a la izquierda. □

d. Las condiciones Ab4 y Ab4* en Mod($\mathbf{C}$).

Sea $\mathbf{C}$ una variedad de annuli. Consideremos $\{f_i : M_i \to M_{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de monomorfismos en Mod($\mathbf{C}$). Entonces, para cualquier objeto $C \in \mathbf{C}$, tenemos que $\{(f_i)_C : M_i(C) \to M_{i+1}(C)\}_{\in\mathbb{N}}$ es una familia de monomorfismos en la categoría de grupos abelianos $\mathbf{Ab}$, la cual es una categoría que satisface Ab4 y Ab4* [We],[Miy]. Se sigue que el coproducto $\coprod_i f_i : \coprod_i M_{\to} \coprod_i M_i$ es monomorfismo, pues $(\coprod_i f_i)_C = \coprod_i (f_i)_C : \coprod_i M_i(C) \to \coprod_i M_i(C)$ es monomorfismo en $\mathbf{Ab}$. Analogamente, se ve que el producto de una sucesión de epimorfismos $\{f_i : M_{i+1} \to M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en Mod($\mathbf{C}$) es un epimorfismo. Por otro lado, ya hemos visto que Mod($\mathbf{C}$) tiene suficientes proyectivos y suficientes inyectivos. Entonces, el teorema 4.16 garantiza la existencia de $D(\mathrm{Mod}(\mathbf{C}))$.

4.5. Funtores derivados

a. Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son categorías abelianas, un functor $F : K^*(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$ es un δ-funtor (o funtor exacto) si envia triángulos en triángulos. Si $D(A)$ existe, una subcategoría $K^*(\mathcal{A}) \subset K(\mathcal{A})$ es *localizante*, si satisface las siguientes condiciones: (a) Si S es un sistema multiplicativo de $K(\mathcal{A})$, entonces $S \cap K^*(\mathcal{A})$ es un sistema multiplicativo de $K^*(\mathcal{A})$, (b) el funtor inclusión $(S \cap K^*(\mathcal{A}))^{-1}K^*(\mathcal{A}) \to S^{-1}K(\mathcal{A})$ es fielmente pleno.

Definición 4.17. (a) *Supongamos que $K^*(\mathcal{A})$ es localizante y $G : K^*(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$ es un δ-funtor. El funtor derivado derecho de F es un δ-funtor*

$$\mathbf{R}^*F : D^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$$

junto con un morfismo funtorial de δ-funtores

$$\xi : Q_{\mathcal{B}}F \to \mathbf{R}^*FQ_{\mathcal{A}}$$

tal que si $\mathbf{G} : D^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ es un δ-funtor y un morfismo $\zeta : Q_{\mathcal{B}}F \to \mathbf{G}Q^*_{\mathcal{A}}$, existe un único morfismo de funtores $\eta : \mathbf{R}^*F \to \mathbf{G}$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathcal{B}}F \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\zeta"] & \mathbf{R}^*FQ^*_{\mathcal{A}} \arrow[dl, "\eta Q^*_{\mathcal{A}}"] \\
GQ^*_{\mathcal{A}} &
\end{tikzcd}$$

(b) *Supongamos que $K^*(\mathcal{B})$ es localizante y $G : K^*(\mathcal{B}) \to K(\mathcal{C})$ es un δ-funtor. El funtor derivado izquierdo de G es un δ-funtor $\mathbf{L}^*G : D^*(\mathcal{B}) \to D(\mathcal{C})$ junto con un morfismo funtorial de δ-funtores $\xi : \mathbf{L}^*GQ^*_{\mathcal{B}} \to Q_{\mathcal{C}}G$ tal que, para cada δ-funtor $\mathbf{H} : D^*(\mathcal{B}) \to D(\mathcal{C})$, y cada transformación natural $\zeta : \mathbf{H}Q_{\mathcal{B}} \to Q_{\mathcal{C}}G$ existe una única transformación natural $\eta : \mathbf{H} \to \mathbf{L}^*G$, tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}Q^*_{\mathcal{B}} \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\eta Q^*_{\mathcal{B}}"] & Q_{\mathcal{C}}G \arrow[dl, "\xi"] \\
L^*GQ^*_{\mathcal{B}} &
\end{tikzcd}$$

b. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías aditivas, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor aditivo y $\mathrm{Ch}^*(\mathcal{A})$, $\mathrm{Ch}^*(\mathcal{B})$ las categorías de complejos correspondientes. Definimos para cada complejo $X^\cdot$ en $\mathrm{Ch}^*(\mathcal{A})$ el objeto graduado

$$F(X^\cdot)^p = F(X^p) \text{ para cada } p \in \mathbb{Z}$$

con el diferencial $d^p_{F(X^\cdot)} = F(d^p_{X^\cdot}) : F(X^p) \to F(X^{p+1})$, para cualquier $p \in \mathbb{Z}$. Claramente $F(X^\cdot)$ es un complejo en $\mathrm{Ch}^*(\mathcal{B})$. Para cualquier morfismo $f : X^\cdot \to Y^\cdot$ en $\mathrm{Ch}^*(\mathcal{A})$ se puede definir un morfismo graduado $F(f) : F(X^\cdot) \to F(Y^\cdot)$ por $F(f)^p = F(f^p)$. Claramente $F(f)$ es un morfismo de complejos. Decimos que el funtor inducido $\mathrm{Ch}^*(\mathcal{A}) \to \mathrm{Ch}^*(\mathcal{B})$ por F es un *levantamiento* de F a las categorías de complejos $\mathrm{Ch}^*(\mathcal{A})$ y $\mathrm{Ch}^*(\mathcal{B})$.

Sean $f^\cdot : X^\cdot \to Y^\cdot$ y $g^\cdot : X^\cdot \to Y^\cdot$ dos morfismo homotópicos, con homotopía h, entonces

$$F(f^p) - F(g^p) = d^{p-1}_{FY}F(h^p) + F(h^{p+1})d^p_{F(X^\cdot)},$$

para todo $p \in \mathbb{Z}$. Es decir $F(h)$, define una homotopía entre $F(X^\cdot)$ y $F(Y^\cdot)$. Entonces F induce un morfismo de grupos abelianos $\mathrm{Hom}_{K^*(\mathcal{A})}(X^\cdot, Y^\cdot) \to \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{B})}(F(X^\cdot), F(Y^\cdot))$.

De este modo F induce un funtor $K^*(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$, llamamos a este el levantamiento de F a la categoría homotópica de complejos.

Abusando de la notación, representamos los levantamientos mencionados anteriormente simplemente con F, sin que haya peligro de confusión en el contexto en que se este usando. Claramente $FT = TF$, es decir, el levantamiento F es un funtor graduado. Las nociones de cono y cilindro se conservan bajo F, y el levantamiendo $F^* : K^*(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$ es un δ-funtor entre categorías trianguladas.

Una propiedad importante que se conserva bajo el levantamiento es la adjunción de funtores, esto es, supongase que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son categorías abelianas y que $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ son dos funtores aditivos tales que F es un funtor adjunto izquierdo de G, entonces el levantamiento $F : K^*(A) \to K^*(B)$ es un adjunto izquierdo de $G : K^*(\mathcal{B}) \to K^*(\mathcal{A})$ [Mil 5 1.1.3].

4.6. Clases adaptadas

a. En [Miy 12. 5] se dan condiciones suficientes para la existencia de un funtor derivado derecho, estas estan dadas en el siguiente

Teorema 4.18 (Existencia). *Sea $K^*(\mathcal{A})$ una subcategria localizante de $K(\mathcal{A})$ y $F : K^*(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$ un δ-funtor. Supongamos que existe una subcategoría triangulada $\mathcal{L}$ de $K^*(\mathcal{A})$ tal que*

(i) *Para cualquier $X^\cdot \in K^*(\mathcal{A})$ existe un cuasi-isomorfismo $X^\cdot \to I^\cdot$ con $I^\cdot \in \mathcal{L}$.*

(ii) *Si $\mathcal{L}^\phi$ denota la colección de objetos de $\mathcal{L}$ que son acíclicos, $F(\mathcal{L}^\phi)$ consta de objetos acíclicos.*

Entonces, existe el funtor derivado derecho $(\mathbf{R}^*F, \xi)$ tal que $\xi : Q_B F(I^\cdot) \to \mathbf{R}^*F(I^\cdot)$ es un cuasi-isomorfismo.

Nótese que el cuasi-isomorfismo $\xi : Q_B F(I^\cdot) \to \mathbf{R}^*F(I^\cdot)$ nos permite calcular $\mathbf{R}^*F(X^\cdot)$ en cualquier complejo de $D^*(\mathcal{A})$. En efecto, X puede ser *representado* por un complejo $I^\cdot$ en $\mathcal{L}$, mediante un cuasi-isomorfismo $X^\cdot \to I^\cdot$. Entonces, tenemos un isomorfismo $\mathbf{R}^*F(X^\cdot) \to \mathbf{R}^*F(I^\cdot)$. Pero, el quasi-isomorfismo $\xi : Q_B F(I^\cdot) \to \mathbf{R}^*F(I^\cdot)$ nos asegura que $\mathbf{R}^*F(X^\cdot)$ es isomorfo a $Q_{\mathcal{B}}F(I^\cdot)$ en $D(\mathcal{B})$. Dicho de otra forma $\mathbf{R}^*F(X^\cdot)$ es representado por $F(I^\cdot)$ en $D(\mathcal{B})$.

Dualmente, si cambiamos (ii) de la hipótesis del teorema 4.18 por la existencia de una subcategoría triangulada $\mathcal{L}$ de $K^*(\mathcal{A})$, tal que para cada $X^\cdot \in K^*(\mathcal{A})$ existe un cuasi-isomorfismo $P^\cdot \to X^\cdot$, con $P^\cdot \in \mathcal{L}$; entonces, se tiene la existencia de un funtor derivado izquierdo.

Un hecho importante es cuando tenemos un levantamiento de un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ exacto. En este caso el levantamiento $F : K^*(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$ siempre tiene un funtor derivado derecho [Mil 5 1.2.2].

b. Estamos interesados de manera particular en este trabajo en los funtores derivados de levantamientos de funtores entre categorías abelianas. Supongamos que $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor entre categorías abelianas, el cual induce un funtor $F : K^*(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{A})$ que tiene un funtor derivado $\mathbf{R}^*F : D^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$, decimos es este caso que $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se levanta a un funtor (o que tiene un funtor) derivado derecho $\mathbf{R}^*F : D^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$. La misma noción se tiene la para levantamientos de funtores derivados izquierdos.

Definición 4.19. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías abelianas y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor aditivo. Una subcategoría plena $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ es adaptada derecha de F si satisface las siguientes propiedades*

(i) *El objeto 0 esta en $\mathcal{R}$;*

(ii) *Si M y N estan en R entonces $M \coprod N$ está en $\mathcal{R}$;*

(iii) *Para cualquier objeto M en A existe R en $\mathcal{R}$ y un monomorfismo $i : M \to R$;*

(iv) *Si $R^\cdot$ es un complejo acíclico en $K^*(\mathcal{R})$, entonces $F(R^\cdot)$ es acíclico.*

Análogamente, si $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es un funtor aditivo entre categorías abelianas y $\mathcal{B}$ tiene una subcategoría $\mathcal{L}$ con las mismas propiedades (i), (ii) y (iv), y sustituimos la propiedad (iii) de la definición 4.19 por la siguiente propiedad: para cualquier objeto N en B existe L en $\mathcal{L}$ y un epimorfismo $p : L \to N$, decimos que $\mathcal{L}$ es una subcategoría de B que es adaptada izquierda para G.

Un caso especial ocurre cuando $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos, entonces la subcategoría $Inj\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$, cuyos objetos son los objetos inyectivos satisface trivialmente las condiciones (i)-(iii) de la Definición 4.19 para cualquier funtor aditivo $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre categorías abelianas. La propiedad (iv) la satisface de acuerdo con [Mil 5 3.1.2]. La propiedad (iv) es una condición del teorema 4.18 y la propiedad (iii) implica la condición (i) del teorema 4.18, de acuerdo al dual de la proposición 4.7.

Teorema 4.20. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, con suficientes inyectivos, entonces todo funtor aditivo $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tiene un funtor derivado derecho $\mathbf{R}^+F : D^+(A) \to D(\mathcal{B})$.*

Dualmente, si $\mathcal{B}$ tiene suficientes proyectivos, entonces cualquier funtor aditivo $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ entre categorías abelianas tiene un funtor derivado izquierdo $\mathbf{L}^-G : D^-(\mathcal{B}) \to D(\mathcal{C})$.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categoría abelianas y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor aditivo. Sea $\mathcal{R}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$ tal que es adaptada derecha para F. Considere la inclusión natural $i : \mathcal{A} \to D^+(\mathcal{A})$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se definen los funtores aditivos

$$\mathbf{R}^nF : \mathcal{A} \xrightarrow{i} D^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathbf{R}^+F} D(\mathcal{B}) \xrightarrow{H^n} \mathcal{B} \tag{4.12}$$

Una propiedad importante, que se demuestra en [Mil 5 3.2.1], es que $\mathbf{R}^0F \cong F$ si, y sólo, F es exacto izquierdo.

Supongamos que $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor exacto izquierdo. Sea $\mathcal{R}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$ tal que es adaptada derecha para F. Un objeto M en $\mathcal{A}$ es llamado F-acíclico si $\mathbf{R}^nF(M) = 0$, para $n > 0$. La subcategoría plena de $\mathcal{A}$ cuyos objetos son F-acíclicos son de gran importancia, para calcular $\mathbf{R}^+F(X^\cdot)$ para cualquier complejo en $D^+(\mathcal{A})$.

Proposición 4.21. *Sea $\mathcal{Z}$ la subcategoría plena de que consta de todos los objetos F-acíclicos en $\mathcal{A}$. Entonces*

(i) *La subcategoría $\mathcal{Z}$ es adaptada derecha para F.*

(ii) *La subcategoría Z es la subcategoría derecha adaptada más grande para F.*

(iii) *Todos los objetos inyectivos de $\mathcal{A}$ están en $\mathcal{Z}$.*

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías abelianas y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Sea $\mathcal{R}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$ tal que es adaptada derecha para F. En estas condiciones el funtor derivado derecho $\mathbf{R}^+F : D^+(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ existe. Si el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ | \mathbf{R}^n F \neq 0\}$ no está acotado, diremos que la dimensión cohomológica de F es infinita. De otro modo, decimos que la dimensión cohomologia derecha de F es finita. Más precisamente, si d es un entero positivo, decimos que la dimensión cohomologica finita de F es menor o igual que d, si $\mathbf{R}^n F = 0$, con $n > d$.

La importancia de que un funtor exacto izquierdo $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tenga dimensión cohomológica finita nos asegura que la subcategoría $K^*(\mathcal{Z})$ de $K(\mathcal{A})$ donde $\mathcal{Z}$ es la subcategoría de $\mathcal{A}$ cuyos objetos son F-acíclicos, satisface las condiciones del Teorema de existencia 4.18 [Mil 5 3.4.1, 5 3.4.2], lo cual justifica el siguiente:

Teorema 4.22. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor exacto izquierdo de dimensión cohomológica finita entonces los funtores derivados derechos $\mathbf{R}^*F : D^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ existen para $* = +, -, b, \emptyset$*

De hecho puede verse que $\mathbf{R}^*F \cong \mathbf{R}F_{D^*(\mathcal{A})} : D^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ [Har 7, I, sección 5.3], [Miy Prop. 12.7].

4.7. Bicomplejos y complejos totales

a. Consideremos el bicomplejo C_{**} representado en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{p,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{p+1,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{p,q} \arrow[r, "d^h_{pq}"] \arrow[d, "d^v_{pq}"'] & C_{p+1,q} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{p,q+1} \arrow[r] & C_{p,q+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

junto con los morfismo $d^h_{pq} : C_{pq} \to C_{p+1,q}$, $d^v_{pq} : C_{pq} \to C_{p,q+1}$, que satisfacen $d^h d^h = d^v d^v = d^v d^h + d^h d^v = 0$.

Se define el complejo total $\mathrm{Tot}^{\prod} C_{**}$ con objetos $(\mathrm{Tot}^{\prod} C_{**})_n = (\prod_{p+q=n} C_{p,q})$ (nótese que el producto puede formarse tomando los factores de manera ordenada yendo sobre las diagonales punteadas). Los diferenciales

$$d_n : (\mathrm{Tot}^{\prod} C_{**})_n \to (\mathrm{Tot}^{\prod} C_{**})_{n+1}$$

se definen como sigue: sea $X^* \in (\mathrm{Tot}^{\prod} C_{**})_n = \cdots \times C_{p-1,q+1} \times C_{p,q} \times C_{p+1,q-1} \times \cdots$ y $x \in C_{p-1,q+1}$, $y \in C_{p,q}$ dos cordenadas *consecutivas* en X^*; se define $d_n(X^*) \in (\mathrm{Tot}^{\prod} C_{**})_{n+1} = \cdots \times C_{p-1,q+2} \times C_{p+1,q} \times C_{p+1,q} \times \cdots$, cuya coordenada es $d^h_{p-1,q+1}(x) + d^v_{p,q}(y)$. Puede verificarse sin ningún problema que $d_{n+1} d_n = 0$.

Sea $A_{\cdot} = (A_p, d_p^A)$ un complejo de cadena y $B^{\cdot} = (B^q, d_B^q)$ un complejo de co-cadena. Se define el bicomplejo $\mathrm{Hom}(A_{\cdot}, B^{\cdot})$ con objetos $\mathrm{Hom}(A_{\cdot}, B^{\cdot})_{p,q} = \mathrm{Hom}(A_p, B^q)$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A_p, B^q) \arrow[r, "d^h_{p,q}"] \arrow[d, "d^v_{p,q}"'] & \mathrm{Hom}(A_{p+1}, B^q) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A_p, B^{q+1}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A_{p+1}, B^{q+1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

con diferenciales

$$\begin{aligned}
d^h_{p,q} &: \mathrm{Hom}(A_p, B^q) \to \mathrm{Hom}(A_{p+1}, B^q), f \mapsto f d^A_{p+1} \\
d^v_{p,q} &: \mathrm{Hom}(A_p, B^q) \to \mathrm{Hom}(A_p, B^{q+1}), f \mapsto (-1)^{p+q+1} d_B^{q+1} f
\end{aligned}$$

Ahora bién, sean $X^{\cdot}$, $Y^{\cdot}$ dos complejos de co-cadena. A partir de $X^{\cdot}$ obtenemos un complejo $Z_{\cdot}$ por medio de la sustitución $Z_n = X^{-n}$, $d_n^Z = d_X^{-n}$. De este modo definimos el complejo $\mathrm{Hom}^{\cdot}(X^{\cdot}, Y^{\cdot})$ como el complejo total $\mathrm{Tot}^{\prod}(Z_{\cdot}, Y^{\cdot})$. Ambos funtores, $\mathrm{Hom}^{\cdot}(A^{\cdot}, \ \ )$ y $\mathrm{Hom}^{\cdot}(\ \ , B^{\cdot})$, son funtores de categorías trianguladas, de $K(\mathcal{A})$ y $K(\mathcal{A})^{op}$ a $K(\mathbf{Ab})$ respectivamente. De hecho,

$$\mathrm{Hom}^{\cdot}(\ \ , \ \ ) : K(\mathcal{A})^{op} \times K(\mathcal{A}) \to K(\mathbf{A})$$

es un bifuntor.

Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos (respectivamente, proyectivos), entonces el funtor derivado derecho (respectivamente, izquierdo) $\mathbf{R}^+\mathrm{Hom}^{\cdot}(A^{\cdot}, \ \ ) : D^+(\mathcal{A}) \to D(\mathbf{Ab})$ (respectivamente, $\mathbf{R}^-\mathrm{Hom}^{\cdot}(\ \ , B^{\cdot}) : D^-(\mathcal{A}) \to D(\mathbf{Ab})$) existe para todo complejo $A^{\cdot}$ (respectivamente, $B^{\cdot}$). Se escribe $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(A^{\cdot}, B^{\cdot})$ para el objeto $\mathbf{R}^+\mathrm{Hom}^{\cdot}(A^{\cdot}, \ \ )B^{\cdot}$ (respectivamente, $\mathbf{R}^-\mathrm{Hom}(\ , B^{\cdot})A^{\cdot}$) de $D(\mathbf{Ab})$. En [We 10.7.4] se demuestra el siguiente:

Teorema 4.23. *Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos, entonces* $\mathbf{R}\mathrm{Hom}$ *es un bifuntor*

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom} : D(\mathcal{A})^{op} \times D^+(\mathcal{A}) \to D(\mathbf{Ab})$$

Dualmente, si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces $\mathbf{R}\mathrm{Hom}$ *es un bifuntor*

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom} : D^-(\mathcal{A})^{op} \times D(\mathcal{A}) \to D(\mathbf{Ab})$$

4.8. Funtores adjuntos y truncamientos

a. En esta sección veremos algunas relaciones que hay entre pares de funtores adjuntos. En [We 10.4.7] se demuestra el siguiente:

Lema 4.24. *Si $I^{\cdot}$ es un complejo de inyectivos acotado por abajo, entonces,*

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, I) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, I)$$

para todo X. Dualmente, si P es un complejo de proyectivos acotado por arriba, entonces,

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(P, X) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P, I)$$

En [Mil 5 1.1.3] se prueba la siguiente

Proposición 4.25. *Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funtores entre categorías abelianas, tales que G es adjunto izquierdo de de F. Entonces, el funtor $K(G) : K(\mathcal{B}) \to K(\mathcal{A})$ es adjunto izquierdo de $K(F) : K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$*

b. Considerese un complejo $X^\cdot$ en $D^*(\mathcal{A})$:

$$X^\cdot : \dots \to X^{s-1} \xrightarrow{d_{s-1}} X^s \xrightarrow{d_s} X^{s+1} \to \dots$$

Entonces, dado el morfismo canónico $p_s : X^s \to \mathrm{Coker}(d_{s-1})$, se sigue de la propiedad universal del cokernel que existe un único morfismo $q_s : \mathrm{Coker}(d_{s-1}) \to X^{s+1}$ tal que $q_s p_s = d_s$. Obtenemos un morfismo de complejos $X^\cdot \to \tau_{\geq s} X^\cdot$

$$\begin{tikzcd}
X^{s-2} \arrow[r] \arrow[d] & X^{s-1} \arrow[r, "d_{s-1}"] \arrow[d] & X^s \arrow[r, "d_s"] \arrow[d, "p_s"'] & X^{s+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^{s+2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
0 \arrow[r, "0"] & \mathrm{Coker}(d_{s-1}) \arrow[r, "q_s"] & X^s \arrow[r] & X^{s+1} \arrow[r] & X^{s+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dado un morfismo de complejos $f = (f_i) : X^\cdot \to W^\cdot$ en $K^*(\mathcal{A})$, para toda $s \in \mathbb{Z}$ existe un morfismo $\overline{f}_s : \mathrm{Coker}(d_X^{s-1}) \to \mathrm{Coker}(d_W^{s-1})$ de modo que el siguiente es un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X^{s-1} \arrow[r, "d_X^{s-1}"] \arrow[d, "f^{s-1}"] & X^s \arrow[rr, dotted, "d_s"] \arrow[d, "f^s"] \arrow[ddr, "p_X^s"] & & X^{s+1} \arrow[d, "f^{s+1}"] \\
W^{s-1} \arrow[r, "d_W^{s-1}"] & W^s \arrow[rr, dotted, "d_X^s"] \arrow[ddr, "p_W^s"'] & & W^{s+1} \\
& & \mathrm{Coker}(d_X^{s-1}) \arrow[uur, "q_X^s"'] \arrow[d, "\overline{f}_s"] & \\
& & \mathrm{Coker}(d_W^{s-1}) \arrow[uur, "q_W^s"'] &
\end{tikzcd}$$

De este modo tenemos un morfismo de complejos $\tau_{\geq s}(f) : \tau_{\geq s} X^\cdot \to \tau_{\geq s} W^\cdot$ definido como

$$\tau_{\geq s}(f)^i = \begin{cases} 0 & \text{if } i < s, \\ \overline{f}_s & \text{if } i = s, \\ f^i & \text{if } i > s. \end{cases}$$

Para cualquier entero $s \in \mathbb{Z}$, se denota con $D^{*,\geq s}(\mathcal{A})$ (respectivamente con, $D^{*,\leq s}(\mathcal{A})$) a la subcategoría plena de $D^*(\mathcal{A})$ cuyos objetos $X^\cdot$ satisfacen que $H^n(X^\cdot) = 0$, si $n < s$ (respectivamente, $n > s$).

De este modo, para cada $s \in \mathbb{Z}$ tenemos un funtor $\tau_{\geq s} : D^*(\mathcal{A}) \to D^{*,\geq s}(\mathcal{A})$, definido en objetos como $\tau_{\geq s}(X^\cdot) = \tau_{\geq s}X^\cdot$ y si $(f,t) : X^\cdot \to Y^\cdot$ es un morfismo en $D^*(\mathcal{A})$ representado por la fracción

$$X^\cdot \xrightarrow{f} W^\cdot \xleftarrow{t} Y^\cdot,$$

se define $\tau_{\geq s}(f,t)$ como el morfismo

$$\tau_{\geq s}X^\cdot \xrightarrow{\tau_{\geq s}f} \tau_{\geq s}W^\cdot \xleftarrow{\tau_{\geq s}t} \tau_{\geq s}Y^\cdot$$

Lema 4.26. *Sea s un entero. Entonces,*

(i) $\tau_{\leq s} : D^*(\mathcal{A}) \to D^{*,\leq s}(\mathcal{A})$ *es un adjunto derecho del funtor inclusión*

$$D^{*,\leq s}(\mathcal{A}) \to D^*(\mathcal{A}),$$

(ii) $\tau_{\geq s} : D^*(\mathcal{A}) \to D^{*,\geq s}(\mathcal{A})$ *es un adjunto izquierdo del funtor inclusión*

$$D^{*,\geq s}(\mathcal{A}) \to D^*(\mathcal{A}).$$

Demostración. Solo se probará (ii), la prueba de (i) es dual. Sea $X^\cdot$ en $D^*(\mathcal{A})$, $Y^\cdot$ en $D^{*,\geq s}(\mathcal{A})$ y considerese un morfismo $\phi = (f,t)$ en $\mathrm{Hom}_{D^{*,\geq s}}(\tau_{\geq s}X^\cdot, Y^\cdot)$ representado por la fracción

$$\tau_{\geq s}X^\cdot \xrightarrow{f} W^\cdot \xleftarrow{t} Y^\cdot \tag{4.13}$$

Como $Y^\cdot$ está en $D^{*,\geq s}(\mathcal{A})$ y es cuasi-isomorfismo a $W^\cdot$, se sigue que $H^p(W^\cdot) = 0$, si $p < s$. Luego, hay un cuasi-isomorfismo $\pi : W^\cdot \to \tau_{\geq s}W^\cdot$. De esta forma tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & W^\cdot \arrow[d, "\pi"] & \\
\tau_{\geq s}X^\cdot \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\pi f"'] & \tau_{\geq s}W^\cdot \arrow[d, equal] & Y^\cdot \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "\pi t"] \\
 & \tau_{\geq s}W^\cdot &
\end{tikzcd}$$

Entonces, se puede suponer que ϕ está representado por una fracción (4.13) con $W^p = 0$, para $p < s$. Completamos la fracción $\tau_{\geq s}X^\cdot \xrightarrow{f} W^\cdot \xleftarrow{t} Y^\cdot$ como sigue:

$$\begin{tikzcd}
X^\cdot \arrow[d, "p"] & \cdots \arrow[r] & X^{s-1} \arrow[r, "d_{s-1}"] \arrow[d, "0"] & X^s \arrow[r, "d_s"] \arrow[d, "p_s"] & X^{s+1} \arrow[r, "d_{s+1}"] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\tau_{\geq s}X^\cdot \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & \mathrm{Coker}(d_{s-1}) \arrow[r, "q_s"] \arrow[d, "f_s"] & X^{s+1} \arrow[r, "d_{s+1}"] \arrow[d, "f_{s+1}"] & \cdots \\
W^\cdot & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & W^s \arrow[r] & W^{s+1} \arrow[r] & \cdots \\
Y^\cdot \arrow[u, "t"] & \cdots \arrow[r] & Y^{s-1} \arrow[r, "0"] \arrow[u] & Y^s \arrow[r] \arrow[u, "t_s"] & Y^{s+1} \arrow[r] \arrow[u, "t_{s+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Se define

$$\begin{array}{rcl} \psi : \operatorname{Hom}_{D^{*,\geq s}(\mathcal{A})}(\tau_{\geq s}X^{\cdot}, Y^{\cdot}) & \to & \operatorname{Hom}_{D^{*}(\mathcal{A})}(X^{\cdot}, Y^{\cdot}) \\ \phi & \mapsto & (fp, t) \end{array}$$

Claramente ψ es suprayectiva, por lo que sólo falta ver que es inyectiva. Sea $\phi \in \operatorname{Hom}_{D^{*,\geq s}(\mathcal{A})}(\tau_{\geq s}X^{\cdot}, Y^{\cdot})$. Como antes, podemos suponer $W^p = 0$ si $p < s$. Supongase que $\psi(\phi) = 0$, entonces, la fracción (pf, t) es equivalente a $X^{\cdot} \xrightarrow{0} Y^{\cdot} \xleftarrow{1_Y} Y^{\cdot}$, i.e, existen cuasi-isomorfismos k, l y un complejo $E^{\cdot}$, tales que hacen que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} & W^{\cdot} \arrow[d, "k"] & \\ X^{\cdot} \arrow[ur, "pf"] \arrow[dr, "0"'] & E^{\cdot} & Y^{\cdot} \arrow[ul, "t"'] \arrow[l, "l"'] \arrow[dl, "1_Y"] \\ & Y^{\cdot} \arrow[u, "l"] & \end{tikzcd} \tag{4.14}$$

Como k es cuasi-isomorfismo, $H^p(E^{\cdot})$ si $p < s$. Así, tenemos el cuasi-isomorfismo canónico $E^{\cdot} \to \tau_{\geq s}E^{\cdot}$. Renombrando los complejos en el diagrama (4.14) podemos suponer que $(E^{\cdot})^p = 0$, si $p < s$. De este modo el morfismo $X^{\cdot} \xrightarrow{p} \tau_{\geq s}X^{\cdot} \xrightarrow{f} W^{\cdot} \xrightarrow{k} E^{\cdot}$ es homotópico a cero. Es decir, existen morfismos $h^j : X^j \to E^{j-1}$, tales que $h_j = 0$ si $j < s$, y satisfacen

$$\begin{array}{rcl} h^{s+1}d_s^X & = & k_s f_s p_s, \\ d_{j-1}^E h^j + h^{j+1}d_j^E & = & k_j f_j p_j, \text{ si } j \geq s+1 \end{array}$$

Pero $d_s^X = q_s p_s$, con p_s un epimorfismo y $p_j = 1_{X_j}$, si $j \geq s+1$. Se sigue entonces que

$$\begin{array}{rcl} h^{s+1}q_s^X & = & k_s f_s, \\ d_{j-1}^E h^j + h^{j+1}d_j^E & = & k_j f_j, \text{ si } j \geq s+1 \end{array}$$

Esto dice que kf es homotópico a cero. Asi, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & W^{\cdot} \arrow[d, "k"] & \\ \tau_{\geq s}X^{\cdot} \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "0"'] & E^{\cdot} & Y^{\cdot} \arrow[ul, "t"'] \arrow[l, "kt"'] \arrow[dl, "1_Y"] \\ & Y^{\cdot} \arrow[u, "kt"] & \end{tikzcd}$$

y ϕ es cero en $\operatorname{Hom}_{D^{*,\geq s}}(\tau_{\geq s}X^{\cdot}, Y^{\cdot})$ □

c. Los truncamientos son una herramienta útil como lo veremos en lo que sigue. La subcategoría plena triangulada de $K^+(\mathcal{A})$ (respectivamente, $K^-(\mathcal{A})$) consistente de todos aquellos complejos con homología acotada es denotada con $K^{+,b}(\mathcal{A})$ (respectivamente, $K^{-,b}(\mathcal{A})$). De manera similar, La subcategoría plena triangulada de $D^+(\mathcal{A})$ (respectivamente, $D^-(\mathcal{A})$ consistente de todos aquellos complejos con homología acotada es denotada con $D^{+,b}(\mathcal{A})$ (respectivamente, $D^{-,b}(\mathcal{A})$). Note que ambas categorías $D^{+,b}(\mathcal{A})$ y$D^{-,b}(\mathcal{A})$ son equivalentes a $D^b(\mathcal{A})$ [V II, sección 1].

Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funtores entre categorías abelianas. Supongamos que $\mathcal{A}$ (respectivamente, $\mathcal{B}$) tiene suficientes inyectivos (respectivamente, proyectivos). Entonces $\mathbf{R}^+F$ existe (respectivamente, $\mathbf{L}^-G$ existe) y se denota $\mathbf{R}^+F|_{D^b(\mathcal{A})}$ con $\mathbf{R}^{+,b}F$ (respectivamente, $\mathbf{L}^+G|_{D^b(\mathcal{B})}$ con $\mathbf{L}^{+,b}G$).

Una subcategoría especial de $D^*(\mathcal{A})$ es la subcategoría $D^{\leq 0,\geq 0}(\mathcal{A}) = D^{\geq 0,\leq 0}(\mathcal{A})$, cuyos objetos son los complejos $X^\cdot$ tales que $H^n(X^\cdot) = 0$, si $|n| > 0$. Dicha subcategoría es llamada el *corazón* de $D^*(\mathcal{A})$. De manera natural tenemos el funtor inclusión $i : \mathcal{A} \to D^*(\mathcal{A})$; i considera a cada objeto de $\mathcal{A}$ como un complejo concentrado en grado cero. No es dificil ver que los funtores i y $H^0 : D^{\geq 0,\leq 0}(\mathcal{A}) = D^{\leq 0,\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ definen una equivalencia de categorías y son mutuamente inversas. Más aún, puede verificarse que tenemos isomorfismos de funtores $\tau_{\leq 0}\tau_{\geq 0} \cong \tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0} \cong H^0$.

Supongamos que ahora que $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor aditivo exacto izquierdo y que $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos. Entonces $\mathbf{R}^+F$ existe y bajo estas condiciones es fácil ver que $\mathbf{R}^+F$ envia $D^{+,\geq 0}(\mathcal{A})$ en $D^{+,\geq 0}(\mathcal{B})$ y como concecuencia $\mathbf{R}^{+,b}F$ envia $D^{b,\geq 0}(\mathcal{A})$ en $D^{b,\geq 0}(\mathcal{B})$.

Lema 4.27. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas y $\mathcal{A}$ con tiene suficientes inyectivos. Supongamos que $\hat{G} : D^b(\mathcal{B}) \to D^b(\mathcal{A})$ es un adjunto izquierdo de $R^{+,b}F$. Entonces $\hat{G}$ envia $D^{b,\leq 0}(\mathcal{B})$ en $D^{b,\leq 0}(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sea $X^\cdot$ un complejo en $D^{b,\geq 1}(\mathcal{A})$, $Y^\cdot$ en $D^{b,\leq 0}(\mathcal{B})$. Por el mismo razonamiento previo $\mathbf{R}^{+,b}F(X^\cdot)$ está en $D^{b,\geq 1}(\mathcal{B})$, i.e, $H^p(\mathbf{R}^{+,b}F(X^\cdot)) = 0$, si $p \leq 0$. De este módo debe tenerse que $H^p(\tau_{\leq 0}\mathbf{R}^{+,b}F(X^\cdot)) = 0$, para cualquier entero p. Entonces $\tau_{\leq 0}\mathbf{R}^{+,b}F(X^\cdot)$ es cero en $D^b(\mathcal{B})$. Luego, $0 = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{B})}(Y^\cdot, \tau_{\leq 0}\mathbf{R}^{+,b}F(X^\cdot))$. Usando el hecho de que $\hat{G}$ y $\mathbf{R}^{+,b}F$ son adjuntos y de la parte (ii) del lema 4.26

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{B})}(Y^\cdot, \mathbf{R}^{+,b}F(X^\cdot)) &\cong \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(\hat{G}(Y^\cdot), X^\cdot) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D^{b,\geq 1}(\mathcal{A})}(\tau_{\geq 1}\hat{G}(Y^\cdot), X^\cdot) \end{aligned}$$

para cualquier $X^\cdot$ en $D^{b,\geq 1}(\mathcal{A})$. En particular, si $X^\cdot = \tau_{\geq 1}\hat{G}(Y)$, se sigue que

$$1_{\tau_{\geq 1}\hat{G}(Y)} \in \mathrm{Hom}_{D^{b,\geq 1}(\mathcal{A})}(\tau_{\geq 1}\hat{G}(Y^\cdot), \tau_{\geq 1}\hat{G}(Y^\cdot)) = 0$$

y por lo tanto que $\tau_{\geq 1}\hat{G}(Y) = 0$. Entonces $\hat{G}(Y)$ está en $D^{b,\leq 0}(\mathcal{A})$. □

Se puede decir un poco más a partir del lema 4.27. Sea X un objeto de $\mathcal{A}$, Y en $\mathcal{B}$ y consideremoslos como complejos concentrados en grado cero en $D^{b,\geq 0}(\mathcal{A})$ y $D^{b,\leq 0}(\mathcal{B})$ respectivamente. Entonces $\mathbf{R}^{+,b}F(X)$ está en $D^{b,\geq 0}(\mathcal{B})$ y $\hat{G}(Y)$ en $D^{b,\leq 0}(\mathcal{A})$.

Tenemos cuasi-isomorfismos $\mathbf{R}^{+,b}F(X) \xrightarrow{p} \tau_{\geq 0}\mathbf{R}^{+,b}F(X)$ y $\tau_{\leq 0}\hat{G}(Y) \xrightarrow{i} \hat{G}(Y)$, los cuales inducen otros cuasi-isomorfismos:

$$\tau_{\leq 0}\mathbf{R}^{+,b}F(X) \xrightarrow{\tau_{\leq 0}p} \tau_{\leq 0}\tau_{\geq 0}\mathbf{R}^{+,b}F(X) \quad (4.15)$$

$$\tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}\hat{G}(Y) \xrightarrow{\tau_{\geq 0}i} \tau_{\geq 0}\hat{G}(Y) \quad (4.16)$$

junto con los isomorfismos

$$\begin{aligned} H^0(\hat{G}(Y)) &\cong \tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}\hat{G}(Y) \quad (4.17)\\ F(X) &\cong H^0(\mathbf{R}^{+,b}F)(X) \\ &\cong \tau_{\leq 0}\tau_{\geq 0}\mathbf{R}^{+,b}F(X) \quad (4.18)\end{aligned}$$

implican que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H^0\hat{G}(Y),X) &\cong \mathrm{Hom}_{D^{b,\geq 0}(\mathcal{A})}(H^0(\hat{G}(Y)),X) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D^{b,\leq 0}(\mathcal{A})}(\tau_{\geq 0}\hat{G}(Y),X) \quad \text{por (4.16) y (4.17)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D^{b}(\mathcal{A})}(\hat{G}(Y),X) \quad \text{por el Lema 4.26 (ii)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D^{b}(\mathcal{B})}(Y,\mathbf{R}^{+,b}F(X)) \quad \text{por ser adjuntos} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D^{b,\leq 0}(\mathcal{B})}(Y,\tau_{\leq 0}\mathbf{R}^{+,b}F(X)) \quad \text{por el Lema 4.26 (i)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D^{b,\leq 0}(\mathcal{B})}(Y,H^0(\mathbf{R}^{+,b}F(X))) \quad \text{por (4.15) y (4.18)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D^{b,\leq 0}(\mathcal{B})}(Y,F(X)) \quad \text{por (4.18)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D^{b}(\mathcal{B})}(Y,F(X)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,F(X))\end{aligned}$$

Es decir $H^0\hat{G}$ compuesto con la inclusión $B \to D^b(\mathcal{B})$ es adjunto izquierdo de F. Así, hemos probado la primera parte del siguiente

Lema 4.28. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor aditivo exacto izquierdo entre categorías abelianas. Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos y $\mathcal{B}$ suficientes proyectivos. Supongamos que el funtor derivado $\mathbf{R}^{+,b}F : D^b(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ tiene imagen en $D^b(\mathcal{B})$ y tiene como adjunto a un funtor $\hat{G} : D^b(\mathcal{A}) \to D^b(\mathcal{B})$ entre categorías trianguladas. Entonces, F tiene un adjunto izquierdo $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ y el funtor $\mathbf{L}^{-,b}G : D^b(\mathcal{B}) \to D^b(\mathcal{A})$ tiene imagen en $D^b(\mathcal{A})$ y como tal es el adjunto izquierdo de $\mathbf{R}^{+,b}F$, ya mecionado.*

Demostración. Por la parte (ii) del lema 4.26, $\tau_{\geq s} : D^-(\mathcal{A}) \to D^{-,\geq s}(\mathcal{A}) = D^{b,\geq s}(\mathcal{A})$ es adjunto a la inclusión $D^{b,\geq s}(\mathcal{A}) \to D^-(\mathcal{A})$. Ya se há discutido previamente que existe un funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, tal que G es adjunto izquierdo de F. Como $\mathcal{B}$ tiene suficientes proyectivos, entonces $\mathbf{L}^{-,b}G$ existe, más aún, $\mathbf{L}^{-,b}G$ envia $D^{-,b}(\mathcal{B})$ en $D^-(\mathcal{A})$.

Se afirma que el funtor

$$\tau_{\geq s}\mathbf{L}^{-,b}G : D^{-,b}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathbf{L}^{-,b}G} D^-(\mathcal{A}) \xrightarrow{\tau_{\geq s}} D^{-,\geq s}(\mathcal{A}) = D^{b,\geq s}(\mathcal{A}) \quad (4.19)$$

es adjunto izquierdo de $\mathbf{R}^{+,b}F|D^{b,\geq s}(\mathcal{A})$. En efecto, sea $X^\cdot$ un complejo en $D^{-,b}(\mathcal{B})$ representado en $K^-(\mathcal{B})$ por un complejo $P^\cdot$ de objetos proyectivos. Sea $Y^\cdot$ en $D^{b,\geq s}(\mathcal{A})$ representado en $K^+(\mathcal{A})$ con un complejo $Q^\cdot$ de objetos inyectivos. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{D^{b,\geq s}(\mathcal{A})}(\tau_{\geq s}\mathbf{L}^{-,b}G(X^\cdot),Y^\cdot) &\cong \mathrm{Hom}_{D^-(\mathcal{A})}(\mathbf{L}^{-,b}G(X^\cdot),Y^\cdot) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(G(P^\cdot),Q^\cdot) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{B})}(P^\cdot,F(Q^\cdot)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{B})}(X^\cdot,\mathbf{R}^{+,b}F(Y^\cdot))\end{aligned}$$

por los lemas 4.24, 4.25 y la parte (ii) del lema 4.26. La afirmación está probada.

Ahora bién, tenemos la cadena de isomorfismos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{B})}(Y^\cdot, \mathbf{R}^{+,b}F(X^\cdot)) &\cong \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(\hat{G}(Y^\cdot), X^\cdot)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(\tau_{\geq s}\hat{G}(Y^\cdot), X^\cdot),\end{aligned}$$

por parte (ii) del lema 4.26.

Así, $\tau_{\geq s}\hat{G}$ es también adjunto de $\mathbf{R}^{+,b}F|D^{b,\geq s}(\mathcal{A})$, por lo que tenemos un isomorfismo $\tau_{\geq s}\mathbf{L}^{-,b}G \cong \tau_{\geq s}\hat{G}$. Para cualquier complejo $X^\cdot$ en $D^b(\mathcal{B})$, existe un entero s_0 para el cual $\tau_{\geq s}\hat{G}(X^\cdot)$ es cuasi-isomorfo a $\hat{G}(X^\cdot)$ para $s < s_0$ (Esto es porque $\hat{G}(X^\cdot)$ homología acotada por abajo, es decir, $H^p(\hat{G}(X^\cdot))$, si $p < s_0$). Obsérvese primero que, se sigue del el hecho de que $X^\cdot$ puede considererse en $D^-(\mathcal{B})$, $\mathbf{L}^{-,b}G(X)$ está en $D^-(\mathcal{A})$. Afirmamos que $H^p(\mathbf{L}^{-,b}(X)) = 0$, si $p < s_0$. Supongase lo contrario, entonces existe un entero $t_0 < s_0$, tal que $\tau_{\geq t_0}\mathbf{L}^{-,b}G(X)$ tiene t_0-ésima homología distinta de cero. Pero $\tau_{\geq t_0}\mathbf{L}^{-,b}G(X) \cong \tau_{\geq t_0}\hat{G}(X)$ y $\tau_{\geq t_0}\hat{G}(X)$ es cuasi-isomorfo a $\hat{G}(X)$. Entonces $H^{t_0}(\hat{G}(X))$ es no cero, una contradicción, $\mathbf{L}^{-,b}G(X)$ está en $D^{-,b}(\mathcal{A})$. □

4.9. Categorías derivadas acotadas y funtores adjuntos

Ahora veremos condiciones para poder levantar un par adjunto de funtores entre categorías abelianas a un par de funtores adjuntos entre sus categorías derivadas acotadas respectivas.

Teorema 4.29. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías abelianas, tales que $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos y $\mathcal{B}$ suficientes proyectivos. Sean $F : \mathcal{A} \to G$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funtores aditivos tales que :*

(i) *F es adjunto derecho de G;*

(ii) *$\mathbf{R}^+F$ y $\mathbf{L}^-G$ tienen dimensión cohomologica finita;*

Entonces, $\mathbf{R}^{+,b}F : D^b(\mathcal{A}) \to D^b(\mathcal{B})$ es adjunto derecho de $\mathbf{L}^{-,b}G : D^b(\mathcal{B}) \to D^b(\mathcal{A})$

Demostración. (1) Primero veamos que $\mathbf{R}^{+.b}F$ tiene imagen en $D^b(\mathcal{B})$. Supongamos que la dimensión cohomológica de F es $\leq q$ y sea $X^\cdot \in D^b(\mathcal{A})$, entonces existe un complejo $I^\cdot \in K^{+,b}(Inj\mathcal{A})$ que consta de inyectivos y un cuasi-isomorfismo $X \to I^\cdot$. Sin perdida de generalidad, puede suponerse que $I^n = 0$, para $n < 0$. Entonces, $\mathbf{R}^{+,b}F(X^\cdot) \cong \mathbf{R}^{+,b}F(I^\cdot) = F(I^\cdot)$ y por lo tanto $H^n(\mathbf{R}^{+,b}(X^\cdot)) \cong H^n(F(I^\cdot))$. Como $I^\cdot$ tiene homología acotada, existe un entero $p \in \mathbb{N}$ tal que $H^n(I^\cdot) = 0$, para $n > p$, entonces el complejo

$$\tau_{\geq p+1}I^\cdot : \cdots \to \mathrm{Coker}(d^{p+1}) \to I^{p+2} \to I^{p+3} \to \cdots$$

es acíclico. Se sigue de la sucesión exacta $0 \to \mathrm{Im}(d^p) \to I^p \to \mathrm{Coker}(d^{p+1}) \to 0$ la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Im}(d^p) \to I^{p+1} \to I^{p+2} \to \cdots$$

Sea $U^\cdot$ en complejo

$$I^{p+1} \to I^{p+2} \to \cdots$$

con I^{p+1} concentrado en grado cero. Entonces $\mathbf{R}^m F(\mathrm{Im}(d^p)) = H^m(F(U^\cdot))$. Como F tiene dimensión cohomologica finita $\leq q$, se tiene que $\mathbf{R}^m F(\mathrm{Im}(d^p)) = H^m(F(U^\cdot)) = 0$, para $m > q$.

Pero $H^n(F(U^\cdot)) = H^{n+p}(F(I^\cdot))$ para todo entero $n \geq 0$, tenemos entonces que $H^n(F(I^\cdot)) = 0$, para $n > p + q$.

Del mismo modo puede suponerse que un complejo $Y^\cdot \in D^b(\mathcal{B})$ puede ser representado por un complejo $P^\cdot \in K^{-,b}(Proj\mathcal{B})$ mediante un cuasi-isomorfismo $P^\cdot \to Y^\cdot$ y haciendo un razonamiento analogo se ve que $\mathbf{L}^{-,b}G(Y) \cong G(P^\cdot)$ tiene homologia acotada.

(2) Sean $X^\cdot \in D^b(\mathcal{A})$ y $Y^\cdot \in D^b(\mathcal{B})$, representados mediante cuasi-isomorfismos $P^\cdot \to Y^\cdot$ y $X^\cdot \to I^\cdot$ con $P^\cdot \in K^{-,b}(Proj\mathcal{B})$ y $I^\cdot \in K^{-,b}(Inj\mathcal{A})$. Entonces, $\mathbf{R}^{+,b}F(X^\cdot) = F(I^\cdot)$ y $\mathbf{L}^{-,b}G(Y^\cdot) = G(P.)$.

Por la proposición 4.24 tenemos isomofismos

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(G(P^\cdot), I^\cdot) \cong \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(G(P^\cdot), I^\cdot))$$
$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{B})}(P^\cdot, F(I^\cdot)) \cong \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{B})}(P^\cdot, F(I^\cdot))$$

Por la proposición 4.25 sabemos que $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(I^\cdot, G(P^\cdot)) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{B})}(F(I^\cdot), P^\cdot)$.

Además, tenemos isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(I^\cdot, G(P^\cdot)) \cong \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X^\cdot, \mathbf{L}^{-,b}G(Y^\cdot))$$
$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{B})}(F(I^\cdot, P^\cdot)) \cong \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{B})}(\mathbf{R}^{+,b}F(X^\cdot), Y^\cdot)$$

y el resultado se sigue $\square$

Lema 4.30. *Sea*

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1],$$

un triángulo distinguido en alguna categoría triangulada $\mathcal{D}$. Entonces f es un isomorfismo si, y sólo si, $Z \cong Z$. Sea $F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ un δ-funtor entre categorías trianguladas, entonces Ff es un isomorfismo si y sólo si $FZ \cong 0$.

Demostración. Supongamos que f es un isomorfismo. Considerese el triángulo distinguido $X \xrightarrow{1_X} X \to 0 \to X[1]$. Por el axioma (TR2) de categorías trianguladas existe un morfismo $Z \to 0$ que hace que el siguiente sea un morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dotted] & X[1] \arrow[d, "1_{X[1]}"'] \\
X \arrow[r, "1_X"] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

$\square$

Finalmente, mostramos uno de los teoremas más importantes de esta sección

Teorema 4.31. *Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ dos categorías trianguladas, y sea $F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, $G : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ δ-funtores. Supongamos que*

(i) *F es adjunto derecho de G;*

(ii) *El funtor adjunción $\theta : \mathrm{id}_{\mathcal{E}} \to FG$ es isomorfismo;*

(iii) *$FZ \cong 0$, sólo si $Z \cong 0$.*

Entonces, el funtor adjunción $\eta : GF \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ es isomorfismo, de modo que F y G son equivalencias.

Demostración. Como θ es un isomorfismo natural, $\theta F \to FGF$ es isomorfismo natural. Considerese ahora la transformación natural $F\eta : FGF \to F$. Se sabe que la composición:

$$F \xrightarrow{\theta F} FGF \xrightarrow{F\eta} F$$

es la trasnsformación identidad id_F [Mac]. Luego, $F\eta$ es un isomorfismo. Para ver que η es un isomorfismo, es suficiente ver que es un isomorfismo en cada objeto. Para ver esto, basta ver que F refleja isomorfismos. Sea $f : X \to Y$ en $\mathcal{D}$ tal que $F(f)$ es isomorfismo. Existe un triángulo (*) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to hTX$ en $\mathcal{D}$, pero F preserva triángulos. Asi, tenemos el triángulo $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \xrightarrow{Fh} TFX$ en $\mathcal{E}$, con Ff isomorfismo. Por el lema 4.30, se sigue que $FZ \cong 0$ y por (iii) tenemos $Z \cong 0$. Nuevamente, el lema 4.30 y el hecho de que $Z \cong 0$ implican que f es isomorfismo en el triángulo (*). $\square$

Capítulo 5

Un teorema de Happel para categorías derivadas

En [Ha], Happel obtiene una equivalencia de la categoría derivada $D^b(\text{mod}\,\Lambda)$ con otras categorías derivadas similares en el caso especial, en que Λ es un álgebra de dimensión finita de dimensión global finita, usando la noción de módulo de inclinación, como la que se introdujo en el capítulo 2.

Más adelante Cline, Parshall y Scott generalizan los resultados de Happel, para anillos arbitrarios usando el concepto de módulo de inclinación generalizado. En este capítulo introduciremos las nociones de categoría de inclinación generalizada y veremos que, con ligeras modificaciones, la prueba de Cline, Parshall y Scott del teorema de Happel [CPS] se extiende a variedades de annuli. También veremos que tenemos un converso de dicho teorema. Posteriormente probamos que, bajo ciertas condiciones débiles, podemos restringir el Teorema de Happel a las categorías de functores finitamente presentados. Para variedades dualizantes, tenemos resultados análogos a los resultados clásicos sobre módulos de inclinación para álgebras de dimensión finita. Finalizamos este capítulo mostrando algunas relaciones entre categorías de inclinación generalizadas y categorías contravariantemente finitas.

5.1. Categorías de inclinación generalizadas

Sea A un anillo y $\mathcal{A}$ la categoría de A-módulos izquierdos. Para un A-módulo T, denotamos con $\text{add}_A = \text{add}T$ a la subcategoría plena de $\mathcal{A}$, cuyos objetos son sumandos directos de sumas de copias finitas de T. Un A-módulo T es llamado, *módulo de inclinación generalizado* si satisface las siguientes condiciones

(i) El módulo T tiene una resolución proyectiva finita

$$0 \to P_f \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$$

con cada P_i un A-módulo proyectivo finitamente generado;

(ii) Para todo entero positivo n, tenemos $\mathrm{Ext}^n_A(T,T) = 0$.

(iii) Cada A-módulo proyectivo finitamente generado P tiene una resolución

$$0 \to P \to T^0 \to \cdots \to T^g \to 0$$

con T^i en add$T$.

Sea $B = \mathrm{End}_A(T)^{op}$ el anillo de endomorfismos de T y $\mathcal{B} = \mathrm{Mod}(B)$, la categoría de B-módulos izquierdos. En [Ha] D. Happel obtiene una equivalencia entre las categorías derivadas $D^b(\mathcal{A})$ y $D^b(\mathcal{B})$, cuando A es una álgebra de dimensión finita con dimensión global finita, en el caso $f = g = 1$. Más adelante, Cline, Parshall y Scott demuestran el mismo resultado para cualquier anillo A, con f y g enteros no negativos arbitrarios [CPS].

Al igual que en la Parte I de este trabajo, al tratar de generalizar este enfoque, si consideramos el anillo A y el A-módulo T como categorías con un solo objeto $\mathbf{C} = \{A\}$ y $\mathbf{T} = \{T\}$, entonces podemos ver a las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como las categorías de funtores $\mathrm{Mod}(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$ y $\mathrm{Mod}(\mathbf{T}) = (\mathbf{T}, \mathbf{Ab})$.

Así, podemos definir el concepto de *subcategoría de inclinación* de una categoría de funtores $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, para una variedad de annuli $\mathbf{C}$ y recuperar la definición de módulo de inclinación para el caso de anillos.

Definición 5.1. *Sea* $\mathbf{C}$ *una variedad de annuli. Una subcategoría* $\mathcal{T}$ *de* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ *es una categoría de inclinación generalizada si satisface lo siguiente:*

(i) *Existe un entero fijo* f*, tal que, todo objeto* T *en* $\mathcal{T}$ *tiene una resolución proyectiva*

$$0 \to P_f \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to T \to 0,$$

con cada P_i *proyectivo finitamente generado.*

(ii) *Para cada par de objetos* T, T' *en* $\mathcal{T}$ *y cualquier entero positivo* n*, tenemos que* $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(T,T') = 0$.

(iii) *Cada funtor representable* $(\ \ ,C)$, $C \in \mathcal{C}$, *tiene una resolución*

$$0 \to (\ \ ,C) \to T^0_C \to \cdots \to T^{g_C}_C \to 0,$$

con T^i_C *in* $\mathcal{T}$.

5.2. El teorema de Happel

Para poder demostrar el Teorema de Happel, necesitamos una condición más fuerte
(iii') Existe un entero fijo g tal que cada funtor $(\ \ ,C)$, $C \in \mathbf{C}$, tiene una resolución

$$0 \to (\ \ ,C) \to T^0_C \to \cdots \to T^g_C \to 0,$$

con T^i_C en $\mathcal{T}$.

Inmediatamente después veremos que la condición (iii') es necesaria.

Después discutiremos cuando la condición (iii) implica la condición (iii').

Tenemos el siguiente teorema que es una generalización del Teorema de Happel, cuya demostración damos siguiendo la línea de argumentos que aparecen en [CPS 2.1].

Teorema 5.2. *Sea* $\mathbf{C}$ *una variedad de annuli y* $\mathcal{T}$ *una subcategoría de* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ *que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii'). Consideremos los funtores* $\phi : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ *y* $- \otimes \mathcal{T} : \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. *Entonces*

(a) *El funtor* $\mathbf{R}^{+,b}\phi : D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C})) \to D(\mathrm{Mod}(\mathcal{T}))$ *tiene imagen en* $D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{T}))$. *De hecho* $\dim \mathbf{R}^{+,b}\phi \leq f$.

(b) *De manera análoga, el funtor* $\mathbf{L}^{-,b} - \otimes\mathcal{T} : D^{-,b}(\mathrm{Mod}(\mathcal{T})) \to D(\mathrm{Mod}(\mathbf{C}))$ *tiene imagen en* $D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C}))$. *De hecho,* $\dim \mathbf{L}^{-,b} - \otimes\mathcal{T} \leq g$.

(c) *Los funtores* $\mathbf{R}^{+,b}\phi$ *y* $\mathbf{L}^{-,b} - \otimes\mathcal{T}$ *inducen una equivalencia de categorías trianguladas, entre* $D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C}))$ *y* $D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{T}))$.

(d) *La subcategoría de* $\mathrm{Mod}(\mathcal{T}^{op})$, *cuyos objetos son* $\{((\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}\}_{C\in\mathbf{C}}$, *es una subcategoría de inclinación generalizada, la cual es equivalente a* $\mathbf{C}^{op}$.

Demostración. (a) Sea F un objeto en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ y

$$F \to I^{\cdot} : 0 \to X \to I^0 \to I^1 \to \cdots$$

una resolución inyectiva de F, entonces hay un cuasi-isomorfismo

$$\begin{array}{ccccccc} F & & \cdots \to & F & \to & 0 & \to \cdots \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & \\ I^{\cdot} & & \cdots \to & I^0 & \to & I^1 & \to \cdots \end{array}$$

Puede verse a F como un complejo concentrado en grado 0 en $D^{+,b}(\mathrm{Mod}(\mathbf{C}))$, representado por un complejo de inyectivos $I^{\cdot} \in K^+(\mathcal{A})$ y

$$\mathbf{R}^n(\phi)(F) = H^n(\phi(I^{\cdot})) = H^n((\ \ ,I^{\cdot})_{\mathcal{T}}) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\ \ ,F)_{\mathcal{T}}$$

Como $\mathrm{pdim}(\mathcal{T}) \leq f$, entonces $\mathbf{R}^n(\phi)(F) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\ \ ,F)_{\mathcal{T}} = 0$, para $n > f$.

(b) Sea C un objeto en $\mathbf{C}$. Entonces, tenemos una resolución

$$0 \to (\ \ ,C) \to T^0 \xrightarrow{d_1} T^1 \to \cdots T^{g-1} \xrightarrow{d_g} T^g \to 0$$

La sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(d_g) \to T^{g-1} \to T^g \to 0,$$

implica que $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\mathrm{Ker}(d_g),\ \ )_{\mathcal{T}} = 0$, por la sucesión larga de homología y la propiedad (ii), para cada entero positivo $n > 0$. Yendo hacia atras usando inducción se ve que $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\mathrm{Ker}(d_i),\ \ )_{\mathcal{T}} = 0$, para $i = 1, \ldots, g$ y cada entero positivo n. Así, tenemos una sucesión exacta en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T}^{op})$

$$0 \to (T^g,\ \ ) \to (T^{g-1},\ \ ) \to \cdots \to (T^0,\ \ ) \to ((\ \ ,C),\ \ )|\mathcal{T} \to 0 \tag{5.1}$$

lo cual implica que $\mathrm{pdim}((\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}} \leq g$.

Sea G un objeto en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ y

$$P^{\cdot} \to G : \cdots \to P_1 \to P_0 \to G \to 0$$

una resolución proyectiva de G, entonces existe hay un cuasi-isomorfismo

$$\begin{array}{cccccccc} P^{\cdot} & \cdots \to & P_1 & \to & P_0 & \to \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ G & \cdots \to & 0 & \to & G & \to \cdots \end{array}$$

Puede verse a G como un complejo concentrado en grado 0 en $D^{-,b}(\mathrm{Mod}(\mathcal{T}))$, representado por un complejo de proyectivos $P^{\cdot} \in K^{-}(\mathrm{Mod}(\mathcal{T}))$. Entonces

$$\mathbf{L}^n(G \otimes \mathcal{T}) = H^n(L^{-}(G \otimes \mathcal{T})) = H^n(P^{\cdot} \otimes \mathcal{T}) = \mathrm{Tor}_n^{\mathcal{T}}(G, \mathcal{T})$$

Ahora bién, para todo $C \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Tor}_n^{\mathcal{T}}(G, \mathcal{T})(C)$ puede ser calculado mediante la resolución proyectiva de $((\ \ , C), \ \ )_{\mathcal{T}}$ que aparece en (5.1), i.e,

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathcal{T}}(G, \mathcal{T})(C) = \mathrm{Tor}_n^{\mathcal{T}}(((\ \ , C), \ \ )_{\mathcal{T}}, G)$$

Pero $\mathrm{pdim}((\ \ , C), \ \ )_T \leq g$, entonces $\mathrm{Tor}_n^{\mathcal{T}}(G, \mathcal{T})(C) = 0$, para $n > g$.

(c) $\mathrm{id}_{D^b(\mathcal{B})} \to \mathbf{R}^{+,b}\phi\mathbf{L}^{-,b}\otimes\mathcal{T}$ es un isomorfismo. (c1) Cualquier suma $\coprod_{i\in I} T_i$ de objetos en $\mathcal{T}$ es ϕ-acíclico. En efecto, se sigue de la parte (a) que, $\mathbf{R}^n\phi(T) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\ \ , T)_{\mathcal{T}} = 0$, para todo T en $\mathcal{T}$ y $n > 0$. Como los objetos en $\mathcal{T}$ son finitamente presentados, entonces el funtor $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(T, \ \ )$ conmuta con sumas arbitrarías, para cualquier T en $\mathcal{T}$ y $n > 0$, como se ven en la proposición 1.37. Entonces tenemos que

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(T, \coprod_{i\in I} T_i) \cong \coprod_{i\in I} \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(T, T_i) = 0$$

De modo que $\mathbf{R}^n\phi(\coprod_{i\in I} T_i) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\ \ , \coprod_{i\in I} T_i)_{\mathcal{T}} = 0$, i.e, $\coprod_{i\in I} T_i$ es ϕ-acíclico.

(c2) Sea $Y^{\cdot}$ un objeto en $D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{T}))$ representado por un complejo de proyectivos en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$

$$\mathbf{P}. : \cdots \to \coprod_{i\in I}(\ \ , T_i) \to \coprod_{j\in J}(\ \ , T_j) \to \cdots$$

Entonces, basta ver que los complejos $\mathbf{P}.$ y $\mathbf{R}^{+,b}\phi(\mathbf{P}. \otimes \mathcal{T})$ son isomorfos. Para ver esto, nótese que tenemos el complejo

$$\mathbf{P}. \otimes \mathcal{T} : \cdots \to \coprod_{i\in I} T_i \to \coprod_{j\in J} T_j \to \cdots$$

Por la parte (c1), $\mathbf{P}. \otimes \mathcal{T}$ es un complejo de objetos ϕ-acíclicos. Recordemos que, por la proposición 1.38, tenemos un isomorfismo de natural de $\mathcal{T}$-módulos: $(\ \ , \coprod_{i\in I} T_i) \cong \coprod_{i\in I}(\ \ , T_i)$, por lo que $\phi(\mathbf{P}. \otimes \mathcal{T}) \cong \mathbf{P}$. Finalmente $\mathbf{R}^{+,b}\phi(\mathbf{P}. \otimes \mathcal{T}) = \phi(\mathbf{P}. \otimes \mathcal{T}) \cong \mathbf{P}$.

(c3) Para cualquier objeto C en $\mathbf{C}$, el funtor *evaluación* $e_C : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Ab}$ es un funtor exacto, de modo que tenemos un funtor entre categorías derivadas

$$e_C : D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C})) \to D^b(\mathbf{Ab})$$

Se afirma que, para cada objeto C en $\mathbf{C}$, tenemos el isomorfismo

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathbf{R}^{+,b}\phi(\mathbf{C}(\ \ , C)), \ \ )\mathbf{R}^{+,b}\phi \cong e_C$$

En efecto, nótese que de la resolución de $\mathbf{C}(\ \ ,C)$

$$0 \to \mathbf{C}(\ \ ,C) \to T^0 \to T^1 \to \cdots \to T^g \to 0$$

puede considerarse a $\mathbf{C}(\ \ ,C)$ como un complejo en $D^b(\mathcal{A})$ que es cuasi-isomorfo a un complejo objetos ϕ-acíclicos

$$T. : \cdots 0 \to T^0 \to T^1 \to \cdots \to T^g \to 0 \cdots$$

por lo que $\mathbf{R}^{+,b}\phi(\mathbf{C}(\ \ ,C)) = \phi(T.)$ es un complejo de $\mathcal{T}$-módulos proyectivos.

Si $X^{\cdot}$ en $D^b(\mathcal{A})$ está representado por un complejo $Q^{\cdot}$ en $K^+(\mathcal{A})$ de objetos ϕ-acíclicos, entonces $\mathbf{R}^{+,b}\phi(X^{\cdot}) \cong \phi(Q^{\cdot})$. Tenemos la siguiente cadena de isomorfismos

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}\mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathbf{R}^{+,b}\phi(\mathbf{C}(\ \ ,C)),\ \ )\mathbf{R}^{+,b}\phi(X^{\cdot}) &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathbf{R}^{+,b}\phi(\mathbf{C}(\ \ ,C)),\ \ )\phi(Q^{\cdot}) \\
&\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}^{\cdot}(\phi(T^{\cdot}),\ \ )\phi(Q^{\cdot}) \\
&\cong \mathrm{Hom}^{\cdot}(\phi(T^{\cdot}), \phi(Q^{\cdot})) \\
&\cong \mathrm{Hom}^{\cdot}(T^{\cdot}, Q^{\cdot}),
\end{aligned}$$

por el lema de Yoneda y porque $\phi(T^{\cdot})$ consta de $\mathcal{T}$-módulos proyectivos.

Consideremos el bi-complejo $\mathrm{Hom}(T., Q^{\cdot})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & (T^g, Q^1) & \longrightarrow & (T^{g-1}, Q^1) & \cdots & (T^0, Q^1) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & (T^g, Q^0) & \longrightarrow & (T^{g-1}, Q^0) & \cdots & (T^0, Q^0)
\end{array}$$

Para cada q fija, el complejo

$$\mathrm{Hom}(T., Q^q) : 0 \to \mathrm{Hom}(T^g, Q^q) \to \cdots \to \mathrm{Hom}(T^1, Q^q) \to \mathrm{Hom}(T^0, Q^q)$$

es exacto, pues Q^i es ϕ-acíclico y tiene homología $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}(\ \ ,C), Q^q) = Q^q(C)$ en grado cero y homología cero en los demas grados. Tenemos una sucesión espectral $\{E^*_{pq}\}$ con $E^0_{pq} = \mathrm{Hom}(T^p, Q^q)$, que converge a la homología del complejo total $\mathrm{Hom}^{\cdot}(T., Q^{\cdot})$, la cual es la homología de $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}(\ \ ,C), Q^q) = Q^q(C)$ [We 5.2.12, 5.6.2]. Así, los complejos $\mathrm{Hom}^{\cdot}(\phi(T.), \phi(Q^{\cdot}))$ y $e_C(Q^{\cdot}) = Q^{\cdot}(C)$ con cuasi-isomorfos y tenemos el siguiente isomorfismo en $D^b(\mathbf{Ab})$

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathbf{R}^{+,b}\phi(\mathbf{C}(\ \ ,C)),\ \ )\mathbf{R}^{+,b}\phi(X) \cong \mathrm{Hom}^{\cdot}(\phi(T.), \phi(Q^{\cdot})) \cong e_C(Q^{\cdot}) \cong e_C(X^{\cdot})$$

Luego, si $X^{\cdot}$ es un complejo en $D^b(\mathcal{A})$ tal que $\mathbf{R}^{+,b}\phi(X) \cong 0$ en $D^b(\mathcal{B})$, entonces $e_C(X^{\cdot}) = X^{\cdot}(C) \cong 0$ en $D^b(\mathbf{Ab})$, para todo C en $\mathbf{C}$. Entonces $X^{\cdot}$ es un complejo acíclico en de grupos abelianos, para todo C en $\mathbf{C}$, i.e, $X^{\cdot}$ es un complejo acíclico en $D^b(\mathcal{A})$.

(d) (i') $\mathrm{pdim}\{((\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}\} \leq g$ por (5.1).

(ii') Si C y C' objetos de $\mathbf{C}$, entonces se puede calcular $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{T}^{op}}(((\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}},((\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}})$ usando la resolución proyectiva de $((\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}$ que aparece en la ecuación (5.1), i.e, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{T}^{op}}(((\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}},((\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}})$ es el n-ésimo grupo de homología de

$$((T^0,\ \ ),((\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}}) \to ((T^1,\ \ ),((\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}}) \to \cdots \to ((T^g,\ \ ),((\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}})$$

Entonces, por el Lema de Yoneda $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{T}^{op}}(((\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}},((\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}})$, es el n-ésimo grupo de homología del complejo

$$T^0(C') \to T^1(C') \to \cdots \to T^g(C') \to 0$$

la cual es una sucesión exacta. Se sigue que $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{T}^{op}}(((\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}},((\ \ ,C'),\ \ )_{\mathcal{T}}) = 0$, $n > 0$.

(iii') La condición (i) implica que la sucesión

$$0 \leftarrow (T,\ \ ) \leftarrow (P_0,\ \ ) \leftarrow \cdots \leftarrow (P_f,\ \ ) \leftarrow 0$$

es exacta con $(P_i,\ \ ) \in \mathrm{add}\{((\ \ ,C),\ \ )_{\mathcal{T}}\}$, $i = 0,\dots,f$. El resto de la prueba de (d) es similar a la prueba para el caso clásico, que se ve en la parte I.

La prueba se sigue de los incisos anteriores junto con los teoremas 4.31 y 4.29. $\square$

Ahora queda por demostrar que la condición (iii') del teorema anterior es necesaria, i.e, se verá que si $-\otimes\mathcal{T}$ tiene dimensión cohomologica finita entonces $g_C = g$, para una g fija, a saber $g = \dim \mathbf{L}^{-,b} - \otimes\mathcal{T}$.

Seran necesarios algunos resultados preliminares

Lema 5.3. *Consideremos el funtor* $D : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C}^{op})$ *definido por* $DF(C) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$*, para* F *en* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ *y* C *en* $\mathbf{C}$*. Supongamos que* E *un* $\mathbf{C}$*-módulo finitamente presentado. Entonces existe un isomorfismo natural de funtores*

$$D(\ \ )\otimes_{\mathbf{C}} E \cong \mathrm{Hom}((E,\ \ ),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Demostración. Sea $(\ \ ,C_1) \to (\ \ ,C_0) \to E \to 0$ una presentación de E. Aplicando $DB\otimes_{\mathbf{C}} -$ tenemos el siguiente diagrama conmuativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
DB\otimes_{\mathbf{C}}(\ \ ,C_1) & \longrightarrow & DB\otimes_{\mathbf{C}}(\ \ ,C_0) & \longrightarrow & DB\otimes_{\mathbf{C}} E & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \| & & \\
DB(C_1) & \longrightarrow & DB(C_0) & \longrightarrow & DB\otimes_{\mathbf{C}} E & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \| & & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B(C_1),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B(C_0),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & DB\otimes_{\mathbf{C}} E & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Aplicando $(\ \ ,B)$ a la presentación de E, entonces por el lema de Yoneda tenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & (E,B) & \longrightarrow & ((\ \ ,C_0),B) & \to & ((\ \ ,C_0),B) \\
 & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\
0 & \longrightarrow & (E,B) & \longrightarrow & B(C_0) & \longrightarrow & B(C_1)
\end{array}$$

el isomorfismo deseado se sigue de aplicar $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ \ ,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Sólo falta ver la naturalidad. Sea $\eta : B \to B'$ un morfismo de $\mathbf{C}$-módulos y consideremos sus presentaciones. Entonces, tenemos un diagrama exacto conmutativo en $\operatorname{Mod}(\mathbf{C}^{op})$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_i (C'_i, \ \ ) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_i"'] & \coprod_j (C'_j, \ \ ) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_j"'] & DB' \arrow[r] \arrow[d, "D\eta"'] & 0 \\
\coprod_i (C_i, \ \ ) \arrow[r] & \coprod_j (C_j, \ \ ) \arrow[r] & DB \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

tensoreando con E obtenemos

$$\begin{tikzcd}
\coprod_i E(C'_i) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_i \otimes_{\mathbf{C}} E"'] & \coprod_j E(C'_j) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_j \otimes_{\mathbf{C}} E"'] & DB' \otimes E \arrow[r] \arrow[d, "D\eta \otimes_{\mathbf{C}} E"'] & 0 \\
\coprod_i E(C_i) \arrow[r] & \coprod_j E(C_j) \arrow[r] & DB \otimes_{\mathbf{C}} E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{5.3}$$

Aplicando $(\ \ , DE)$ al diagrama (5.2) obtenemos el siguiente diagrama exacto conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (DB, DE) \arrow[r] \arrow[d, "(\eta, DE)"'] & (\coprod_j (\ \ , C_j), DE) \arrow[r] \arrow[d, "(\eta_j, DE)"'] & (\coprod_i (\ \ , C_i), DE) \arrow[d, "(\eta_i, DE)"'] \\
0 \arrow[r] & (DB', DE) \arrow[r] & (\coprod_j (\ \ , C'_j), DE) \arrow[r] & (\coprod_i (\ \ , C'_i), DE)
\end{tikzcd} \tag{5.4}$$

Por la Proposición 1.29 se sigue que $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}^{op}}(DB, DE) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(E, D^2B)$. Se afirma que hay un ismorfismo

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(E, D^2B) \cong \operatorname{Hom}(((E, B), Q/Z), Q/Z) \tag{5.5}$$

En efecto, aplicando $(\ \ , D^2B)$ a la presentación de E, se tiene que

$$0 \to (E, D^2B) \to D^2(C_0) \to D^2(C_1)$$

pero aplicando $(\ \ , B)$ a la presentación de E y luego aplicando dos veces $(\ \ , Q/Z)$ se tiene la sucesión exacta

$$0 \to (((E, B), Q/Z), Q/Z) \to ((B(C_0), Q/Z), Q/Z) \to ((B(C_1), Q/Z), Q/Z)$$

y la afirmación se sigue.

Por otro lado tenemos

$$(\coprod_i (\mathbf{C}_i, \ \ ), DE) \cong \prod_i ((\mathbf{C}_i, \ \ ), DE) \cong \prod_i (E(C_i), Q/Z) \cong (\coprod_i E(C_i), Q/Z)$$

Entonces, por (5.5), el diagrama (5.4) puede ponerse como sigue

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (((E,B),Q/Z,Q/Z)) & \to & (\coprod_j (E(C_j),Q/Z) & \longrightarrow & (\coprod_i (E(C_i),Q/Z) \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle ((E,\eta),Q/Z),Q/Z)} & & \downarrow{\scriptstyle (\eta_j,Q/Z)} & & \downarrow{\scriptstyle (\eta_i,Q/Z)} \\ 0 & \longrightarrow & (((E,B'),Q/Z,Q/Z)) & \to & (\coprod_j (E(C'_j),Q/Z) & \longrightarrow & (\coprod_i (E(C_i),Q/Z) \end{array}$$

se sigue entonces que el siguiente diagrama exacto es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \coprod_i E(C'_i) & \longrightarrow & \coprod_j E(C'_j) & \to & ((E,B'),Q/Z) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle ((E,\eta),Q/Z)} & & \\ \coprod_i E(C_i) & \longrightarrow & \coprod_j E(C_j) & \to & ((E,B),Q/Z) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{5.6}$$

y la naturalidad se sigue de (5.3) y (5.6). □

Lema 5.4. *Todo* **C***-módulo plano finitamente presentado es proyectivo*

Demostración. Sea E plano finitamente presentado y sea $A \to A' \to 0$ una sucesión exacta. Quiere verse que $(E, A) \to (E, A') \to 0$ es exacta. Pero $0 \to DA' \otimes_{\mathbf{C}} E \to DA \otimes_{\mathbf{C}} E$ es exacta por ser E plano, por lo que

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}((E, A'), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}((E, A), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

es exacta por el lema 5.3.

Finalmente, como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador en la categoría de grupos abelianos, se sigue que $(E, A) \to (E, A') \to 0$ es exacta. □

Teorema 5.5. *Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación generalizada de* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. *Si el funtor*

$$- \otimes \mathcal{T} : \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$$

tiene dimensión cohomológica finita $\leq g$. Entonces, para cada objeto $C \in \mathbf{C}$, hay una sucesión exacta

$$0 \to (\ \ , C) \to T^0 \to T^1 \to \cdots \to T^{g-1} \to T^g \to 0$$

con $T^i \in \mathcal{T}$.

Demostración. Sea

$$0 \to (\ \ , C) \to T^0 \xrightarrow{d_1} T^1 \to \cdots \to T^{n-1} \xrightarrow{d_n} T^n \to 0$$

una resolución de $(\ \ , C)$ con T^i en $\mathcal{T}$ y con $n > g$. Entonces, procediendo como en la demostración de la parte (b) del teorema 5.2, tenemos una resolución proyectiva para $((\ \ , C),\ \ )_{\mathcal{T}}$ en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T}^{op})$:

$$0 \to (T^n,\ \ ) \to (T^g,\ \ ) \to \cdots \to (T^1,\ \ ) \xrightarrow{(d_1,\ \ )} (T^0,\ \ ) \to ((\ \ , C),\ \ ) \to 0$$

Si $-\otimes\mathcal{T}:\mathrm{Mod}(\mathcal{T})\to\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ tiene dimensión cohomologica finita $\leq g$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^m(-\otimes\mathcal{T})(G)(C) &= H^m(\mathbf{L}^{-,b}(G\otimes\mathcal{T}))(C)\\ &= \mathrm{Tor}_m^{\mathcal{T}}(G,\mathcal{T})(C)\\ &= \mathrm{Tor}_m^{\mathcal{T}}(((\ \ ,C),\ \ ),G)=0\end{aligned}$$

para $m\geq g+1$, y $G\in\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$.

Pero entonces

$$\mathrm{Tor}_{g+1}^{\mathcal{T}}(((\ \ ,C),\ \ ),G)\cong\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{T}}(\mathrm{Ker}(d_{g-1},\ \ ),G)$$

para todo G in $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$, i.e, $\mathrm{Ker}((d_{g-1},\ \ ))$ es plano y tenemos una resolución

$$0\to(T^n,\ \ )\to(T^{n-1},\ \ )\to\cdots\to\mathrm{Ker}(d_{g-1},\ \ )\to 0,$$

es decir, $\mathrm{Ker}(d_{g-1},\ \ )$ también es finitamente presentado. Por el lema 5.4 se sigue que $\mathrm{Ker}(d_{g-1},\ \ )$ es proyectivo, por lo que la sucesión

$$0\to\mathrm{Ker}(d_g,\ \ )\to(T^g,\ \ )\to\mathrm{Ker}(d_{g-1},\ \ )\to 0$$

se escinde, pero entoces tenemos el siguiente diagrama conmuativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(d_g,\ \ ) & \longrightarrow & (T^g,\ \ ) & \rightarrow & \mathrm{Ker}(d_{g-1},\ \ ) & \longrightarrow & 0\\ & & \cong\downarrow & & \| & & \cong\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\mathrm{Im}(d_{g+1}),\ \ ) & \rightarrow & (T^g,\ \ ) & \longrightarrow & (\mathrm{Im}(d_g),\ \ ) & \longrightarrow & 0\end{array}$$

es decir, $0\to\mathrm{Im}(d_{g+1})\to T^g\to\mathrm{Im}(d_g)\to 0$ se escinde y $\mathrm{Im}(d_g)\in\mathcal{T}$. Finalmente, la resolución

$$0\to(\ \ ,C)\to T^0\to\cdots\to T^{g-1}\to\mathrm{Im}(d_g)\to 0$$

satisface las condiciones deseadas. □

5.3. Un reciproco del teorema de Happel

En esta sección se daremos una demostración de un converso del Teorema de Happel. Para motivar y justificar la forma en que enunciamos el teorema observamos lo siguiente:

Sea $\mathbf{C}$ una variedad de annuli y $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinción de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$. Denotamos con $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$ y $\mathfrak{p}(\mathcal{T})$ las subcategorías plenas de proyectivos finitamente generados de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ y $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ respectivamente. Las categorías homotópicas $K^b(\mathfrak{p}(\mathbf{C}))$ y $K^b(\mathfrak{p}(\mathcal{T})$ se embeben en $D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C}))$ y $D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{T}))$ respectivamente (ver [Har]). Se sigue, de la demostración dada anteriormente que los funtores derivados $\mathbf{R}^{+,b}\phi:D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C}))\to D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{T}))$ inducen una equivalencia a nivel de las categorías de complejos $K^b(\mathfrak{p}(\mathbf{C}))$ y $K^b(\mathfrak{p}(\mathbf{C}))$.

Teorema 5.6. *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{B}$ *variedades de annuli. Denotamos con* $\mathfrak{p}(\mathbf{C})$ *y* $\mathfrak{p}(\mathbf{B})$ *a las subcategorías plenas de objetos proyectivos finitamente generados de* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ *y* $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$*, respectivamente y sea*

$$F : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{B})$$

un funtor exacto izquierdo. Supongamos que $\mathbf{R}^{+,b}F : D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C})) \to D(\mathrm{Mod}(\mathbf{B}))$ *envia* $D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C}))$ *en* $D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{B}))$*, induciendo una equivalencia de categorías trianguladas, asi como una equivalencia entre* $K^b(\mathfrak{p}(\mathbf{C})))$ *y* $K^b(\mathfrak{p}(\mathbf{B}))$*. Entonces,* $\mathbf{B}$ *es equivalente a una subcategoría de inclinación generalizada* $\mathcal{T}$ *de* $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$*, mediante un funtor*

$$\tilde{F} : \mathbf{B} \to \mathcal{T}$$

En particular, existe una equivalencia de categorías trianguladas:

$$\mathbf{R}^{+,b}F' : D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C})) \xrightarrow{\mathbf{R}^{+,b}F} D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{B})) \xrightarrow{\mathbf{R}^{+,b}\tilde{F}} D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{T}))$$

con $F' : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ *definida por* $F'(X) = (\ \ , X)_{\mathcal{T}}$

Demostración. Sea $\hat{G}$ la cuasi-inversa de $\mathbf{R}^{+,b}F$. Por la proposición 4.28, el funtor F tiene un adjunto izquierdo G el cual está dado por la composición

$$\mathrm{Mod}(\mathbf{B}) \xrightarrow{i} D^b(\mathbf{B}) \xrightarrow{\hat{G}} D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C})) \xrightarrow{H^0} \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$$

para el cual se cumple que $\mathbf{L}^{-,b}G \cong \hat{G}$.

Para cada objeto B en $\mathbf{B}$, consideremos el functor $(\ \ , B) \in \mathrm{Mod}(\mathbf{B})$ y sea $T_B = G(\ \ , B)$, la imagen del functor representable $(\ \ , B)$ en la $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ bajo G. Sea $\mathcal{T}$ la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ cuyos objetos son son la colección $\{T_B\}_{B\in\mathbf{B}}$.

Observemos que como F es exacto izquierdo, $\mathbf{R}^0F = H^0(\mathbf{R}^{+,b}F) \cong F$, además se tiene

$$\mathbf{R}^{+,b}F\mathbf{L}^{-,b}G(\ \ , B) \cong (\ \ , B) \tag{5.7}$$

por ser una equivalencia. Como $(\ \ , B)$ es G-acíclico, se sigue que $\mathbf{L}^{-,b}G(\ \ , B) \cong G(\ \ , B)$.

Entonces, calculando el 0-grupo de homología a ambos lados de (5.7) obtenemos:

$$H^0(\mathbf{R}^{+,b}F\mathbf{L}^{-,b}G(\ \ , B)) \cong H^0((\ \ , B)) \cong (\ \ , B)$$

Pero $H^0(\mathbf{R}^{+,b}F\mathbf{L}^{-,b}G(\ \ , B)) = (H^0\mathbf{R}^{+,b}F)(\mathbf{L}^{-,b}G(\ \ , B)) = F(G(\ \ , B))$, es decir,

$$FG(\ \ , B) \cong (\ \ , B) \tag{5.8}$$

Tenemos entonces funtores

$$\begin{aligned} \phi &: \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \\ - \otimes \mathcal{T} &: \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \end{aligned}$$

Queremos ver que las composiciones de funtores

$$\mathrm{Mod}(\mathbf{B}) \xrightarrow{G} \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$$
$$\mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \xrightarrow{-\otimes\mathcal{T}} \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \xrightarrow{F} \mathrm{Mod}(\mathbf{B})$$

inducen una equivalencia de categorías, para esto, es suficiente ver que inducen una equivalencia entre las subcategorías de proyectivos finitamente generados $\mathfrak{p}(\mathbf{B})$ y $\mathfrak{p}(\mathcal{T})$.

Sea $(\ \ ,B) \in \mathcal{P}_{\mathbf{B}}$. Entonces, tenemos los siguientes isomorfismos:

$$\begin{aligned}
(F \circ - \otimes \mathcal{T}) \circ (\phi \circ G)(\ \ ,B) &= (F \circ - \otimes \mathcal{T}) \circ \phi(G(\ \ ,B)) \\
&= (F \circ - \otimes \mathcal{T}) \circ \phi(T_B) \\
&= (F \circ - \otimes \mathcal{T})(\ \ ,T_B)_{\mathcal{T}} \\
&= F((\ \ ,T_B)_{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{T})) \\
&= F(T_B) = FG(\ \ ,B) = (\ \ ,B), \quad \text{por } (5.8)
\end{aligned}$$

Sea $(\ \ ,T_B)$ en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$. Entonces, tenemos los siguientes isomorfismos:

$$\begin{aligned}
(\phi \circ G) \circ (F \circ - \otimes \mathcal{T})(\ \ ,T_B) &= (\phi \circ G)(F((\ \ ,T_B) \otimes \mathcal{T})) \\
&= (\phi \circ G)F(T_B) \\
&= (F \circ - \otimes \mathcal{T})(FG(\ \ ,B)), \quad \text{por } (5.8) \\
&= (\phi \circ G)(\ \ ,B) \\
&= \phi(G(\ \ ,B)) = \phi(T_B) = (\ \ ,T_B)
\end{aligned}$$

Observemos que la equivalencia entre $\mathfrak{p}(\mathbf{B})$ y $\mathfrak{p}(\mathcal{T})$ induce una equivalencia entre $\mathbf{B}$ y $\mathcal{T}$ dada por funtores

$$\begin{aligned}
\overline{G} &: \mathbf{B} \to \mathcal{T},\ \ \overline{G}(B) = T_B \\
\overline{F} &: \mathcal{T} \to \mathbf{B},\ \ \overline{F}(T_B) = B,
\end{aligned}$$

los cuales hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, "\overline{G}"] \arrow[d, "P_{\mathbf{B}}"'] & \mathcal{T} \arrow[r, "\overline{F}"] \arrow[d, "P_{\mathcal{T}}"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "P_{\mathbf{B}}"'] \\
\mathfrak{p}(\mathbf{B}) \arrow[r, "\phi\circ G"] & \mathfrak{p}(\mathcal{T}) \arrow[r, "F\circ-\otimes\mathcal{T}"] & \mathfrak{p}(\mathbf{B})
\end{tikzcd}$$

Asi, tenemos funtores mutuamente inversos que inducen equivalencias

$$\begin{aligned}
\tilde{F} &: \mathrm{Mod}(\mathbf{B}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T}),\ \ \tilde{F}(M)(T_B) = M(\overline{F}(T_B)) \\
\tilde{G} &: \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{B}),\ \ \tilde{G}(N)(B) = N(\overline{G}(B))
\end{aligned}$$

Para $M \in \mathrm{Mod}(\mathbf{B})$ y $N \in \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$. Más aún, $\tilde{F}|\mathfrak{p}(\mathbf{B}) = \phi \circ G$ y $\tilde{G}|\mathfrak{p}(\mathcal{T}) = F \circ - \otimes \mathcal{T}$.

Así, las siguientes composiciones

$$\mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \xrightarrow{F} \mathrm{Mod}(\mathbf{B}) \xrightarrow{\tilde{F}} \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \tag{5.9}$$

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\tilde{G}} \mathrm{Mod}(\mathbf{B}) \xrightarrow{G} \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \tag{5.10}$$

son un par adjunto, los cuales inducen una equivalencia de categorías trianguladas

$$D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C})) \xrightarrow{\mathbf{R}^{+,b}F} D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{B})) \xrightarrow{\mathbf{R}^{+,b}\tilde{F}} D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{T}))$$

Entonces, para X en $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ y $(\ \ ,T_B)$ en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$, tenemos por el isomorfismo de adjunción

$$((\ \ ,T_B),\tilde{F}F(X)) \cong (G\tilde{G}(\ \ ,T_B),X)$$

pero

$$\begin{aligned} G\tilde{G}(\ \ ,T_B) &= G(F\circ -\otimes\mathcal{T})(\ \ ,T_B) \\ &= (G\circ F)((\ \ ,T_B\otimes\mathcal{T}) \cong G(F(T_B)) \\ &= G(FG(\ \ ,B)) = G(\ \ ,B) = T_B \end{aligned}$$

y $((\ \ ,T_B),\tilde{F}F(X)) \cong \tilde{F}F(X)(T_B)$, por el Lema de Yoneda. Haciendo $F' = \tilde{F}F$ queda demostrada una parte del teorema.

Sólo falta ver que la subcategoría $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ es una categoría de inclinación.

(i) Consideramos cada $\mathbf{B}$-módulo $(\ \ ,B)$ como un objeto en $\mathrm{K}^b(\mathfrak{p}(\mathbf{B}))$. Dada la equivalencia inducida entre $\mathrm{K}^b(\mathfrak{p}(\mathbf{B}))$ y $\mathrm{K}^b(\mathfrak{p}(\mathbf{C}))$ por los funtores $\mathbf{R}^{+,b}F$ y $\mathbf{L}^{-,b}G$, existe un objeto $P^{\cdot}$ en $\mathrm{K}^b(\mathfrak{p}(\mathbf{C}))$ tal que $P^{\cdot} \cong \mathbf{L}^{-,b}G(\ \ ,B) = G(\ \ ,B) = T_B$, i.e, hay un cuasi-isomorfismo $P^{\cdot} \to T_B$.

Los diferenciales en grados no negativos del complejo

$$P^{\cdot} : 0 \to P_{m'} \xrightarrow{d_{m'}} P_{m'+1} \to \cdots \to P_0 \xrightarrow{d_0} P_1 \to \cdots \to P_m \to 0$$

son epimorfismos que se escinden. Entonces, cada $\mathrm{Im}(d_i)$ es proyectivo, para $m \geq i \geq 0$. Se sigue de la sucesión exacta $0 \to \mathrm{Ker}(d_0) \xrightarrow{j} P_0 \to \mathrm{Im}(d_0) \to 0$ que $\mathrm{Ker}(d_0)$ es proyectivo.

Por la propiedad universal del kernel, existe un único morfismo $q : P_{-1} \to \mathrm{Ker}(d_0)$ que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc} \tau_{\leq 0}P^{\cdot} & \cdots \longrightarrow & P_{-1} & \xrightarrow{q} & \mathrm{Ker}d_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow & & \| & & j\downarrow & & \downarrow & & \\ P^{\cdot} & \cdots \longrightarrow & P_{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & P_0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ T_B & \cdots \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{q} & T_B & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

y la composición $\tau_{\leq 0}P^{\cdot} \to P^{\cdot} \to T_B$ es un cuasi-isomorfismo. Por esta razón, podemos substituir $P^{\cdot}$ por un complejo en $\mathrm{K}^b(\mathcal{P}_{\mathbf{C}})$ concentrado en grados ≤ 0. Esta es una resolución de T_B de módulos proyectivos

$$0 \to P_{m'} \to \cdots \to \mathrm{Ker}d_0 \to T_B \to 0$$

Por la primera parte de la demostración podemos identificar las categoría $\mathcal{T}$ con la categoría $\mathbf{B}$ y suponer que $F = \phi : \mathrm{Mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ induce una equivalencia de categorías trianguladas

$$\mathbf{R}^{+,b}\phi : D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C})) \to D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{T}))$$

así como entre las subcategorías $K^b(\mathcal{P}_{\mathbf{C}})$ y $K^b(\mathcal{P}_{\mathcal{T}})$. Asi, $-\otimes\mathcal{T} : \mathrm{Mod}(\mathcal{T}) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ es el adjunto de ϕ. Se observo ya que

$$(\phi\circ -\otimes\mathcal{T})(\ \ ,T) \cong (\ \ ,T).$$

(ii) En la demostración del teorema 5.2 se observó que

$$\mathbf{R}^n\phi(T) = H^n(\mathbf{R}^{+,b}\phi(T)) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\ \ ,T)_{\mathcal{T}},$$

para cualquier $T \in \mathcal{T}$. Ahora bien, por la equivalencia se tiene el isomorfismo

$$\mathbf{R}^{+,b}\phi\mathbf{L}^{-,b}(-\otimes\mathcal{T})(\ \ ,T) \cong (\ \ ,T)$$

y calculando el n-ésimo grupo de homología a ambos lados tenemos:

$$H^n(\mathbf{R}^{+,b}F\mathbf{L}^{-,b}(-\otimes\mathcal{T})(\ \ ,T)) = H^n((\ \ ,T)) = 0,$$

para $n > 0$.

Pero

$$\begin{aligned} H^n(\mathbf{R}^{+,b}\phi\mathbf{L}^{-,b}(-\otimes\mathcal{T})(\ \ ,T)) &= (H^n\mathbf{R}^{+,b}\phi)(\mathbf{L}^{-,b}(-\otimes\mathcal{T})(\ \ ,T)) \\ &= (H^n\mathbf{R}^{+,b}\phi)((\ \ ,T)\otimes\mathcal{T})) = (H^n\mathbf{R}^{+,b}\phi)(T) \\ &= \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\ \ ,T)_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Concluimos que $\mathrm{Ext}^n(\ \ ,T)_{\mathcal{T}} = 0$, $n > 0$ y cada $T \in T$, i.e, $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(T,T') = 0$, para cada par de objetos $T, T' \in \mathcal{T}$.

(iii) Cada funtor $(\ \ ,C) \in \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$ se considera como un complejo en $K^b(\mathfrak{p}(\mathbf{C}))$ concentrado en grado cero. Existe un complejo X en $K^b(\mathfrak{p}(\mathcal{T}))$ tal que

$$(\ \ ,C) \cong \mathbf{L}^{-,b}(-\otimes\mathcal{T})(X) = G(X)$$

en $D^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{C}))$. Nótese que G envía $K^b(\mathfrak{p}(\mathcal{T}))$ en $K^b(\mathcal{T})$. Así tenemos el siguiente cuasi-isomorfismo

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \to & (\ \ ,C) & \to & 0 & \longrightarrow & \cdots & \\ & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 \to T^{-h} & \to & \cdots & \to & & T^{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & T^0 & \xrightarrow{d_0} & T^1 & \to \cdots \to & T^g & \longrightarrow 0 \end{array}$$

con cada $T^i \in \mathcal{T}$.

Defínase $H = T^0/\mathrm{Im}(d_{-1})$. Como $(\ \ ,C) \cong \mathrm{Ker}(d_0)/\mathrm{Im}(d_{-1})$, entonces tenemos que $H/(\ \ ,C) \cong T^0/\mathrm{Ker}(d_0) \cong \mathrm{Im}(d_0)$. De modo que tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to (\ \ ,C) \to H \to \mathrm{Im}(d_0) \to 0 \tag{5.11}$$

(iii.a) $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\mathrm{Im}(d^0),\ \ )_{\mathcal{T}} = 0$, para todo entero positivo n. En efecto, considerese la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Im}(d_0) \to T^1 \xrightarrow{d_1} T^2 \to \cdots T^{g-1} \xrightarrow{d_{g-1}} T^g \to 0 \tag{5.12}$$

Entonces, de la sucesión exacta corta $0 \to \mathrm{Im}(d_{g-1}) \to T^{g-1} \xrightarrow{d_g} T^g \to 0$, la sucesión larga de homología y la parte (ii) se tiene que $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\mathrm{Im}(d_{g-1}),\ \ )_{\mathcal{T}} = 0$. Usando inducción hacia atras y la sucesión larga de homología nos permite ver que $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\mathrm{Im}(d^0),\ \ )_{\mathcal{T}} = 0$.

(iii.b) Por la parte (iii.a) sabemos que $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\mathrm{Im}(d^0), \ \ )_{\mathcal{T}} = 0$. Pero, $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}((\ \ , C), \ \ )_{\mathcal{T}} = 0$, pues $(\ \ , C)$ es proyectivo. Entonces por la sucesión (5.11), tenemos que $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(H, \ \ )_{\mathcal{T}} = 0$.

(iii.c) Consideremos la otra suesión exacta

$$0 \to T_{-h} \xrightarrow{d_{-h}} T_{-h+1} \to \cdots \to T^{-2} \xrightarrow{d_{-2}} T^{-1} \to H \to 0$$

Se sigue de la sucesión exacta corta $0 \to \mathrm{Im}(d_{-2}) \to T^{-1} \to H \to 0$, de el isomorfismo $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(H, \ \ )_{\mathcal{T}} = 0$ probado en (iii.b) y de la sucesión larga de homología, que $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\mathrm{Im}(d_{-1}), \ \ )_{\mathcal{T}} = 0$. Usando inducción hacia atras y usando la sucesión larga de homología, nos permite ver que $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(\mathrm{Im}(d_{-h+1}), \ \ )_{\mathcal{T}} = 0$ y en particular, debemos tener $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathrm{Im}(d_{-h+2}, T^{-h})_{\mathcal{T}} = 0$. De esta manera la sucesión exacta

$$0 \to T_{-h} \to T_{-h+1} \to \mathrm{Im}(d_{-h+2}) \to 0$$

se escinde y $\mathrm{Im}(d_{-h+1}) \in \mathcal{T}$. Yendo hacia adelante y usando la sucesión larga de homología tenemos qu e $\mathrm{Im}(d_{-1}) \in \mathcal{T}$. Finalmente la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Im}(d_{-1}) \to T^{-1} \to H \to 0$$

se escinde pues ya se probó en (iii.b) que $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(H, \ \ )_{\mathcal{T}} = 0$ y H es sumando de T^{-1}, por lo que $H \in \mathcal{T}$. Finalmente de (5.11) y (5.12) se obtiene una sucesión exacta

$$0 \to (\ \ , C) \to H \to T^1 \to T^2 \to \cdots \to T^g \to 0$$

□

5.4. El teorema de Happel para variedades dualizantes

En esta sección analizamos la posibilidad de extender el Teorema de Happel a las categorías de funtores finitamente presentados.

Observemos que, dada una variedad de annuli $\mathbf{C}$ y una subcategoría de inclinación $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Mod}(\mathbf{C})$, para garantizar que las categorías de funtores finitamente presentados $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ sean abelianas, necesitamos que $\mathbf{C}$ y $\mathcal{T}$ tengan pseudokerneles. Primero probamos que esta condición es sufienciente para restringir los funtores ϕ y $-\otimes\mathcal{T}$ a las categorías de funtores finitamente presentados. Más aún, probaremos que es equivalente suponer que $\mathcal{T}$ tiene pseudokerneles a suponer que $\mathcal{T}$ es contravariantemente finita en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

Para obtener el análogo del teorema principal de la sección anterior, necesitamos objetos inyectivos en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, para asegurar esta propiedad, supondremos que $\mathbf{C}$ es dualizante y $\mathcal{T}$ tiene pseudokerneles. Veremos que estas condiciones son suficientes para obtener una equivalencia de categorías trianguladas $D^b(\mathrm{mod}(\mathbf{C})) \cong D^b(\mathrm{mod}(\mathcal{T}))$. Finalizamos esta sección estudiando el caso en que $\mathcal{T}$ también es una variedad dualizante y probamos que en este caso hay una equivalencia de categorías trianguladas $D^b(\mathrm{mod}(\mathbf{C}^{op})) \cong D^b(\mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op}))$.

Lema 5.7. *Sea* $\mathbf{C}$ *una variedad de annuli con pseudokerneles y* $\mathcal{T}$ *una subcategoría de inclinación de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *con* $\mathrm{pdim}\mathcal{T} = f$. *Si* $\mathcal{T}$ *tiene pseudokerneles, entonces para* $i > 0$, *los* $\mathcal{T}$*-módulos* $(\ ,(\ ,C))_{\mathcal{T}}$ *y* $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,C))_{\mathcal{T}}$ *son finitamente presentados.*

Demostración. Usaremos el hecho de que $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ es abeliana. Para cada C en $\mathbf{C}$, hay una resolución de $(\ ,C)$

$$0 \to (\ ,C) \xrightarrow{d_0} T^0 \xrightarrow{d_1} T^1 \to \cdots \to T^{g-1} \xrightarrow{d_g} T^g \to 0$$

la cual se divide en sucesiones exactas cortas:

$$\begin{gathered} 0 \to \mathrm{Im}d_{g-1} \to T^{g-1} \xrightarrow{d^g} T^g \to 0 \\ 0 \to \mathrm{Im}d_{g-2} \to T^{g-2} \to \mathrm{Im}d_{g-1} \to 0 \\ \vdots \\ 0 \to (\ ,C) \to T^0 \to \mathrm{Im}d_1 \to 0 \end{gathered}$$

Por la sucesión larga de homología, existen sucesiones exactas:

$$0 \to (\ ,\mathrm{Im}d_{g-1})_{\mathcal{T}} \to (\ T^{g-1})_{\mathcal{T}} \xrightarrow{d^g} (\ T^g)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,\mathrm{Im}d_{g-1})_{\mathcal{T}} \to 0 \tag{5.13}$$

$$\begin{gathered} 0 \to (\ ,\mathrm{Im}d_{g-2})_{\mathcal{T}} \to (\ ,T^{g-2})_{\mathcal{T}} \to (\ ,\mathrm{Im}d_{g-1})_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,\mathrm{Im}d_{g-2})_{\mathcal{T}} \to 0 \\ \vdots \\ 0 \to (\ ,(\ ,C))_{\mathcal{T}} \to (\ ,T^0)_{\mathcal{T}} \to (\ ,\mathrm{Im}d_1)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,C))_{\mathcal{T}} \to 0 \end{gathered}$$

De la sucesión (5.13), se sigue que $(\ ,\mathrm{Im}d_{g-1})_{\mathcal{T}}$ y $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,\mathrm{Im}d_{g-1})_{\mathcal{T}}$ son finitamente presentados, lo cual implica que $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(\ ,\mathrm{Im}d_{g-1})_{\mathcal{T}} = 0$, para $i \geq 2$. Aplicando inducción se sigue que, para $g \geq i > 0$, los funtores $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,\mathrm{Im}d_{i-1})_{\mathcal{T}}$ y $(\ ,(\ ,C))_{\mathcal{T}}$ son finitamente presentados. Más aún, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{para} \quad i \geq 3, &\quad \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(\ ,\mathrm{Im}d_{g-2})_{\mathcal{T}} = 0; \\ \text{para} \quad i \geq 4, &\quad \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(\ ,\mathrm{Im}d_{g-3})_{\mathcal{T}} = 0; \\ &\quad \vdots \\ \text{para } i \geq g+1, &\quad \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,C))_{\mathcal{T}} = 0. \end{aligned}$$

Estas igualdades junto con los siguientes isomorfismos, para $j \geq 1$:

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathbf{C}}(\ ,\mathrm{Im}d_{g-1})_{\mathcal{T}} \cong \mathrm{Ext}^{j+1}_{\mathbf{C}}(\ ,\mathrm{Im}d_{g-2})_{\mathcal{T}}, \ldots, \mathrm{Ext}^j_{\mathbf{C}}(\ ,\mathrm{Im}d_1)_{\mathcal{T}} \cong \mathrm{Ext}^{j+1}_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,C))_{\mathcal{T}}$$

implican

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,C))_{\mathcal{T}} \cong \begin{cases} \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ ,\mathrm{Im}d_{i-1})_{\mathcal{T}} & \text{si } g \geq i > 0, \\ 0 & \text{si } i > g, \end{cases}$$

De aquí, se sigue que $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,C))_{\mathcal{T}}$ es finitamente presentado, para para toda $i > 0$. $\square$

Ahora estamos preparados para demostrar la siguiente:

Proposición 5.8. *Supongamos que* $\mathbf{C}$ *es una variedad de annuli con pseudokerneles y* $\mathcal{T}$ *es una subcategoría de inclinación de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *con* $\mathrm{pdim}\mathcal{T} = f$. *Si* $\mathcal{T}$ *tiene psudokerneles, entonces* $\phi|\mathrm{mod}(\mathbf{C}) : \mathrm{mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ *tiene imagen en* $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$*, en consecuencia,* $\mathcal{T}$ *es contravariantemente finita en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

Demostración. Sea M un $\mathbf{C}$-módulo finitamente presentado y

$$\cdots \xrightarrow{(\ ,f_3)} (\ ,C_2) \xrightarrow{(\ ,f_2)} (\ ,C_1) \xrightarrow{(\ ,f_1)} (\ ,C_0) \to M \to 0$$

una resolución proyectiva de M. Ponemos $K_i = \mathrm{Im}(\ ,f_i)$ y dividamos la resolución en sucesiones exactas cortas: $0 \to K_{i+1} \xrightarrow{q_i} (\ ,(\ ,C_i)) \xrightarrow{p_i} K_i \to 0$. Como $\mathrm{pdim}\mathcal{T} = f$, se sigue por la sucesión larga de homología que, para cada $i \geq 1$, existe una sucesión exacta

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^{f-1}_{\mathbf{C}}(\ ,K_{i+1})_{\mathcal{T}} &\xrightarrow{\mathrm{Ext}^{f-1}_{\mathbf{C}}(\ ,q_i)} \mathrm{Ext}^{f-1}_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,C_i))_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\mathrm{Ext}^{f-1}_{\mathbf{C}}(\ ,p_i)} \mathrm{Ext}^{f-1}_{\mathbf{C}}(\ ,K_i)_{\mathcal{T}} \to \\ \to \mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,K_{i+1})_{\mathcal{T}} &\xrightarrow{\mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,q_i)} \mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,C_i))_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,p_i)} \mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,K_i)_{\mathcal{T}} \to 0.\end{aligned}$$

Afirmamos que, para cada par de enteros $i, j \geq 1$, el funtor $\mathrm{Ext}^{j}_{\mathbf{C}}(\ ,K_i)_{\mathcal{T}}$ es finitamente presentado. Como $\mathrm{Ext}^{j}_{\mathbf{C}}(\ ,K_i)_{\mathcal{T}} = 0$, para $j > f$, solo necesitamos probar la afirmación para $1 \leq j \leq f$. En efecto, por el lema 5.7 sabemos que cada funtor $\mathrm{Ext}^{j}_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,C_i))_{\mathcal{T}}$ es finitamente presentado, entonces tenemos lo siguiente:

(1) Para $i, j \geq 1$, los funtores $\mathrm{Ext}^{f}_{\mathcal{T}}(\ ,(\ ,K_i))_{\mathcal{T}}$ y $\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^{j}_{\mathbf{C}}(\ ,p_i))$ son imágenes epimorficas de funtores finitamente presentados, en particular son finitamente generados.

(2) Por (1), $\mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,K_{i+1})_{\mathcal{T}}$ es finitamente generado, se sigue que $\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,q_i))$ es finitamente generado. Para $i \geq 1$, $\mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,K_i))_{\mathcal{T}}$ es el cokernel de un morfismo entre un funtor finitamente generado y un funtor finitamente presentado, se sigue que, para $i > 0$, cada funtor $\mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,K_i))_{\mathcal{T}}$ es finitamente presentado.

(3) Hay una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,q_i)) \to \mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,C_i))_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,K_i)_{\mathcal{T}} \to 0.$$

Por (2), $\mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,K_i))_{\mathcal{T}}$ es finitamente presentado. Entonces, por la sucesión exacta de arriba y el hecho de que $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ es abeliana, se sigue que $\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^{f}(\ ,q_i))$ es finitamente presentado.

(4) Cada $\mathrm{Ext}^{f-1}_{\mathbf{C}}(\ ,K_i)_{\mathcal{T}}$ es una extensión de los funtores finitamente presentados $\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^{f-1}_{\mathbf{C}}(\ ,p_i))$ y $\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^{f}_{\mathbf{C}}(\ ,q_i))$, entonces, para $i \geq 1$, el funtor $\mathrm{Ext}^{f-1}_{\mathbf{C}}(\ ,K_i)_{\mathcal{T}}$ es finitamente presentado. Continuando hacia atras por inducción, obtenemos la afirmación.

De la sucesión exacta $0 \to K_1 \to (\ ,C_0) \to M \to 0$ y de la sucesión larga de homología obtenemos una sucesión exacta

$$(\ ,K_1)_{\mathcal{T}} \to (\ ,(\ ,C_0))_{\mathcal{T}} \to (\ ,M)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^{1}_{\mathbf{C}}(\ ,K_1)_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^{1}_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,C_0))_{\mathcal{T}} \to \cdots$$

Usando el hecho de que $(\ ,(\ ,C_0))_{\mathcal{T}}$, $\mathrm{Ext}^{1}_{\mathbf{C}}(\ ,K_1)_{\mathcal{T}}$ y $\mathrm{Ext}^{1}_{\mathbf{C}}(\ ,(\ ,C_0))_{\mathcal{T}}$ son finitamente presentados, se sigue que $(\ ,M)_{\mathcal{T}}$ es finitamente presentado, en particular finitamente generado, lo que prueba que $\mathcal{T}$ es contravariantemente finito en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. $\square$

El recíproco de la proposición previa está contenido en la siguiente:

Proposición 5.9. *Sea* $\mathbf{C}$ *una variedad de annuli con pseudokerneles y* $\mathcal{T}$ *una subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*. Entonces ocurre lo siguiente:*

(a) *Si* $\mathcal{T}$ *es contravariantemente finita en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*, entonces* $\mathcal{T}$ *tiene pseudokerneles.*

(b) *Si $\mathcal{T}$ es covariantemente finita en* $\text{mod}(\mathcal{C})$*, entonces $\mathcal{T}$ tiene pseudocokerneles.*

(c) *Supongamos que $\mathcal{T}$ es una subcategoría de inclinación de* $\text{mod}(\mathbf{C})$*. Entonces $\mathcal{T}$ tiene pseudokerneles si, y sólo si, es covariantemente finita en* $\text{mod}(\mathbf{C})$*.*

Demostración. (a) Sea $T_1 \xrightarrow{g} T_0$ un morfismo en $\mathcal{T}$. Entonces existe una sucesión exacta en $\text{mod}(\mathbf{C})$, $0 \to \text{Ker}(g) \xrightarrow{j} T_1 \xrightarrow{g} T_0$. Sea $T_2 \xrightarrow{h} \text{Ker}(g)$ una $\mathcal{T}$-aproximación. De aquí se sigue que, la sucesión $(\ ,T_2)_{\mathcal{T}} \xrightarrow{(\ ,hj)} (\ ,T_1)_{\mathcal{T}} \xrightarrow{(\ ,g)} (\ ,T_0)_{\mathcal{T}}$ es una sucesión exacta de $\mathcal{T}$-módulos, y hemos probado que $\mathcal{T}$ tiene pseudokerneles.

(b) Es dual a (a).

(c) Se sigue de (a) y la proposición previa. □

Supongamos que $\mathbf{C}$ es una variedad dualizante y que $\mathcal{T}$ es una subcategoría de inclinación de $\text{mod}(\mathbf{C})$ con pseudokernles. Entonces, $\text{mod}(\mathbf{C})$ tiene suficientes objetos proyectivos, $proj(\mathbf{C})$, y suficientes objetos inyectivos, $inj(\mathbf{C})$, mientras $\text{mod}(\mathcal{T})$ tiene suficientes proyectivos, $proj(\mathcal{T})$. Denotemos con $K^{+,b}(inj(\mathbf{C}))$ y $K^{-,b}(proj(\mathcal{T}))$ las correspondientes categorías homotopicas con homología acotada. Usando argumentos estándar (ver [Miy]), existe una equivalencia de categorías triangualdas: $D^b(\text{mod}(\mathbf{C})) \cong K^{+,b}(inj(\mathbf{C}))$ y $D^b(\text{mod}(\mathcal{T})) \cong K^{-,b}(proj(\mathcal{T}))$. El par de funtores adjuntos $\phi|_{\text{mod}(\mathbf{C})}$ y $-\otimes\mathcal{T}|_{\text{mod}(\mathcal{T})}$ tienen funtores derivados $\mathbf{R}^{+,b}\phi : D^b(\text{mod}(\mathbf{C})) \to D^b(\text{mod}(\mathcal{T}))$, $\mathbf{L}^{-,b} - \otimes\mathcal{T} : D^b(\text{mod}(\mathcal{T})) \to D^b(\text{mod}(\mathbf{C}))$, formando un par adjunto. Entonces, toda la linea de argumentos usada para probar la versión general del teorema de Happel puede ser usada para probar el siguiente:

Teorema 5.10 (Happel)**.** *Sea $\mathbf{C}$ una variedad dualizante y $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación generalizada de* $\text{mod}(\mathbf{C})$ *que satisface la condición (iii') y tiene pseudokerneles. Entonces:*

(a) *El par de funtores* $\mathbf{R}^{+,b}\phi : D^b(\text{mod}(\mathbf{C})) \to D^b(\text{mod}(\mathcal{T}))$ $\mathbf{L}^{-,b}-\otimes\mathcal{T} : D^b(\text{mod}(\mathcal{T})) \to D^b(\text{mod}(\mathbf{C}))$ *induce una equivalencia de categorías derivadas.*

(b) *La subcategoría plena* $\{((\ ,C),\ )_{\mathcal{T}}\}_{C\in\mathbf{C}}$ *de* $\text{mod}(\mathcal{T}^{op})$ *es una categoría de inclinación que satisface la condición más fuerte (iii'), la cual es equivalente a la categoría* $\mathbf{C}^{op}$*.*

Observemos que en el teorema dado anteriormente se pierde la simetría, para poder recuperarla necesitamos suponer que $\mathcal{T}$ es una variedad dualizante. En las proximas proposiciones damos condiciones suficientes sobre $\mathcal{T}$ para que sea una variedad dualizante. Necesitaremos la proposición 2.6 de [AR2], en la cual se prueba que si $\mathbf{C}$ es una variedad dualizante, entonces $\text{mod}(\mathbf{C})$ también es dualizante.

Proposición 5.11. *Sea $\mathbf{C}$ una variedad dualizante y $\mathcal{T}$ una subcategoría funtorialmente finita de* $\text{mod}(\mathbf{C})$*. Entonces, $\mathcal{T}$ es una variedad dualizante.*

Demostración. para simplificar la notación, ponemos $\mathbf{B} = \text{mod}(\mathbf{C})$. Como $\mathbf{B}$ es una variedad dualizante, tiene pseudokerneles (ver [AR2 Teo. 2.4]), de aquí se sigue que $\text{mod}(\mathbf{B})$ es abeliana. Sea $D : \text{mod}(\mathbf{B}) \to \text{mod}(\mathbf{B}^{op})$ una dulidad. Entonces, para cada objeto T en $\mathcal{T}$, el funtor $\mathbf{B}(\ ,T)$ es un objeto en $\text{mod}(\mathbf{B})$ y $D\mathbf{B}(\ ,T)$ un objeto de $\text{mod}(\mathbf{B}^{op})$. Sea

$$\mathbf{B}(B_1,\ ) \to \mathbf{B}(B_0,\ ) \to D\mathbf{B}(\ ,T) \to 0$$

una presentación de $D\mathbf{B}(\ ,T)$ en $\mathrm{mod}(\mathbf{B}^{op})$.

(1) Afirmamos que $D\mathbf{B}(\ ,T)$ está en $\mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op})$. En efecto, como $\mathcal{T}$ es covariantemente finito, existe T_0 en $\mathcal{T}$ y una sucesión exacta:

$$B_0 \xrightarrow{g} T_0 \to \mathrm{Coker}(g) \to 0,$$

la cual induce una sucesión exacta corta de $\mathcal{T}^{op}$-módulos

$$0 \to \mathbf{B}(\mathrm{Coker}(g),\ )_{\mathcal{T}} \to \mathbf{B}(T_0,\ )_{\mathcal{T}} \to \mathbf{B}(B_0,\ )_{\mathcal{T}} \to 0.$$

De manera similar, usando que $\mathcal{T}$ es contravariantemente finita, se sigue que existe un morfismo $\mathrm{Coker}(g) \to T_0'$, el cual induce un epimorfismo $\mathbf{B}(T_0',\ )_{\mathcal{T}} \to \mathbf{B}(\mathrm{Coker}(g),\ )_{\mathcal{T}} \to 0$. Esto es: existe una sucesión exacta corta de $\mathcal{T}^{op}$-módulos

$$\mathbf{B}(T_0',\ )_{\mathcal{T}} \to \mathbf{B}(T_0,\ )_{\mathcal{T}} \to \mathbf{B}(B_0,\ )_{\mathcal{T}} \to 0.$$

Intercambiando B_0 y B_1, obtenemos una sucesión exacta corta

$$\mathbf{B}(T_1',\ )_{\mathcal{T}} \to \mathbf{B}(T_1,\ )_{\mathcal{T}} \to \mathbf{B}(B_1,\ )_{\mathcal{T}} \to 0.$$

Como los funtores finitamente presentados son cerrados bajo cokerneles, se sigue que $D\mathbf{B}(\ ,T)$ es finitamente presentado.

(2) Si N es un $\mathcal{T}$-módulo finitamente presentado, existe una sucesión exacta

$$\mathbf{B}(\ ,T_1)_{\mathcal{T}} \to \mathbf{B}(\ ,T_0)_{\mathcal{T}} \to N \to 0.$$

Después de dualizarla, obtenemos una sucesión exacta de $\mathcal{T}^{op}$-módulos

$$0 \to DN \to D\mathbf{B}(\ ,T_0)_{\mathcal{T}} \to D\mathbf{B}(\ ,T_1)_{\mathcal{T}}.$$

Como $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ es abeliana y $D\mathbf{B}(\ ,T_0)_{\mathcal{T}}$ y $D\mathbf{B}(\ ,T_1)_{\mathcal{T}}$ son funtores finitamentes presentados, por (1), se sigue que DN es finitamente presentado.

La prueba de que si N es un $\mathcal{T}^{op}$-módulo finitamente presentado, implica que DN es un $\mathcal{T}$-módulo finitamente presentado es dual. $\square$

Aún no conocemos la respuesta de la siguiente:

Pregunta: Sea $\mathbf{C}$ una variedad dualizante y $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, supongamos que $\mathcal{T}$ es una variedad dualizante, ¿ la categoría $\mathcal{T}$ es funtorialmente finita en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$?.

En el último teorema de la sección vimos que si suponemos que $\mathcal{T}$ es una variedad dualizante, entonces es funtorialmente finita y recuperamos la simetria: existe una subcategoría de inclinación de $\mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op})$, la cual es equivalente a $\mathbf{C}^{op}$. Más precisamente:

Teorema 5.12. *Sea* $\mathbf{C}$ *una variedad dualizante,* $\mathcal{T}$ *una subcategoría de inclinación de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *que satisface la condición (iii'). Supongamos que* $\mathcal{T}$ *es una variedad dualizante y sea* θ *la subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op})$ *con objetos* $\{((\ ,C),\ )_{\mathcal{T}}\}$. *Entonces,* θ *es una subcategoría de inclinación de* $\mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op})$ *equivalente a* $\mathbf{C}^{op}$ *y el funtor* $\phi_\theta : \mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op}) \to \mathrm{mod}(\theta) \cong \mathrm{mod}(\mathbf{C}^{op})$, *induce una equivalencia de categorías trianguladas*

$$\mathbf{R}^{+,b}\phi_\theta : D^b(\mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op})) \to D^b(\mathrm{mod}(\mathbf{C}^{op})).$$

Demostración. Como θ y $\mathbf{C}^{op}$ son equivalentes, θ es una variedad dualizante, en particular tiene pseudokerneles, en concecuencia, tenemos las mismas condiciones que en el Teorema 5.10. $\square$

Más adelante, en el próximo capítulo, veremos que para variedades dualizantes $\mathbf{C}$, cualquier subcategoría de inclinación de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ satisface la condición (iii').

Capítulo 6

Teoría de inclinación y categorías covariantemente finitas

En el capítulo previo vimos que, para una variedad dualizante $\mathbf{C}$, hay una definición de categoría de inclinación generalizada, la cual nos permite probar una versión del Teorema de Happel, para las categorías de funtores finitamente presentados. Entonces, es natural buscar caracterizaciones de dichas categorías de inclinación. Esta cuestión fue considerada en el caso de álgebras de artin por Auslander y Reiten en [AR1], donde usan resultados de Auslander y Buchweitz [AB].

Nuestro proposito en esta sección es extender estos resultados para variedades dualizantes. Mas precisamente:

Sea $\mathbf{C}$ una variedad Krull-Schmidt dualizante y $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. Veremos que hay una biyección entre subcategoría de inclinación de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ con $\mathrm{pdim}\mathcal{T} \leq n$, tal que $\mathcal{T}$ es un generador de $\mathcal{T}^{\perp}$, y subcategorías $\mathscr{Y}$ de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ que son covariantemente finitas y resolventes, tales que $\mathrm{pdim}({}^{\perp}\mathscr{Y}) \leq n$.

Después veremos que si $\mathcal{T}$ es contravariantemente en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, entonces la condición (iii') se cumple.

La prueba de estos resultados, la damos siguiendo las líneas de los articulos [AB] y [AR1]. Para beneficio del lector bosquejamos en las primeras secciones las definiciones y resultados de estos artículos que usaremos, y mostramos que modificaciones necesitamos para que los teoremas mencionados anteriormente se cumplan.

6.1. Aproximaciones y generadores proyectivos

A través de esta sección $\mathbf{C}$ es una variedad de annuli con pseudokerneles. Las definiciones tomadas en lo que sigue de la sección fueron tomadas libremente del artículo escrito por Auslander y Buchweitz [AB].

Cuando digamos que $\mathscr{A}$ es una *subcategoría* de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ entenderemos que $\mathscr{A}$ es una subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, cerrada bajo sumas finitas en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, y cerrada bajo objetos isomorfos, i.e, cualquier objeto en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ que es isomorfo a algún objeto en $\mathscr{A}$ es de nuevo un objeto en $\mathscr{A}$.

Diremos que una sucesión de morfismos

$$\cdots \to A_{i+1} \to A_i \to A_{i-1} \to \cdots$$

en $\mathscr{A}$ es *exacta*, si vista como sucesión en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ es exacta.

Supongamos que M es un objeto en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. Se define $\mathscr{A} -$ resol.dim izquierda M como el menor entero no negativo n tal que hay una sucesión exacta

$$0 \to A_n \to A_{n-1} \to \cdots \to A_0 \to M \to 0$$

con A_i en $\mathscr{A}$, si tal entero existe. Decimos que $\mathscr{A} -$ resol.dim izquierda $M < \infty$ si $\mathscr{A} -$ resol.dim izquierda $M = n$ para algún enterno no negativo n. La subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ que consiste en todos los objetos M tales que $\mathscr{A} -$ resol.dim izquierda $M < \infty$ se denotará con $\hat{\mathscr{A}}$. Análogamente, hay una definición para $\mathscr{A} -$ resol.dim derecha M. La subcategoría de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ que consiste en todos los objetos M tales que $\mathscr{A} -$ resol.dim derecha $M < \infty$ se denotará con $\check{\mathscr{A}}$.

Para cada entero no negativo n, se denota con $\hat{\mathscr{A}_n}$ a la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ que consiste en todos los objetos M en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, tales que $\mathscr{A} -$ resol.dim izquierda $M \leq n$ y ponemos $\hat{\mathscr{A}_{-1}} = 0$. Nótese que $\hat{\mathscr{A}_0} = \mathscr{A}$ y que $\hat{\mathscr{A}_{i-1}} \subset \hat{\mathscr{A}_i}$ para $i \geq 0$. Dualmente, para cada entero no negativo n, se denota con $\check{\mathscr{A}_n}$ a la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ que consiste de todos los objetos M, tales que $\mathscr{A} -$ resol.dim derecha $M \leq n$ y ponemos $\check{\mathscr{A}_{-1}} = 0$. También se cumple $\check{\mathscr{A}_0} = \mathscr{A}$ y $\check{\mathscr{A}_{i-1}} \subset \check{\mathscr{A}_i}$ para $i \geq 0$.

Finalmente decimos que una subcategoría $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ es un *generador* para $\mathscr{A}$ si, para cada objeto A en $\mathscr{A}$, existe una sucesión exacta $0 \to A' \to B \to A \to 0$ en $\mathscr{A}$ con B en $\mathscr{B}$. De manera dual, tenemos el concepto de una subcategoría que es *co-generador* de $\mathscr{A}$.

A lo largo de esta sección $\mathscr{Y}$ es una subcategoría de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, aditivamente cerrada, cerrada bajo extenciones, y ω es una subcategoría de $\mathscr{Y}$, la cual es aditivamente cerrada y es un generador de $\mathscr{Y}$. Sólo usaremos $\mathscr{Y}$-resoluciones derechas, por lo cual, dado cualquier objeto M en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, $\mathscr{Y} -$ resol.dim$M$ servirá para denotar la dimensión de resolución derecha de M.

En [AB Prop. 2.1] está probado el dual del siguiente teorema.

Teorema 6.1. *Para cada C en $\check{\mathscr{Y}}$ hay sucesiones exactas:*

$$\begin{gathered} 0 \to C \to Y^C \to X^C \to 0, \\ 0 \to Y_C \to X_C \to C \to 0, \end{gathered} \tag{6.1}$$

con Y_C y Y^C en $\mathscr{Y}$ y X^C y X_C en $\check{\omega}$.

Haciendo una variación del teorema 6.1 tenemos la siguiente:

Proposición 6.2. *Para cada C en $\check{\mathscr{Y}_n}$, $n \geq 0$ hay sucesiones exactas:*

$$\begin{gathered} 0 \to C \to Y^C \to X^C \to 0, \\ 0 \to Y_C \to X_C \to C \to 0, \end{gathered} \tag{6.2}$$

con Y_C, Y^C en $\mathscr{Y}$ y X^C en $\check{\omega}_{n-1}$, X_C en $\check{\omega}_n$.

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre $n = \mathscr{Y} - \text{resol.dim}C$. Si $0 = \mathscr{Y} - \text{resol.dim}C$, entonces C está en $\mathscr{Y}$, y como ω es un generador de $\mathscr{Y}$, hay una sucesión exacta $0 \to Y \to W \to C \to 0$ en $\mathscr{Y}$, esta sucesión junto con la sucesion exacta $0 \to C \xrightarrow{=} C \to 0 \to 0$ satisfacen el caso $n = 0$.

Supongamos que $n > 0$ y que la proposición es cierta para $n-1$. Si $n = \mathscr{Y} - \text{resol.dim}C$, entonces tenemos una sucesión exacta $0 \to C \to Y^0 \xrightarrow{d_0} Y^1 \to \cdots \to Y^n \to 0$, con Y^i en $\mathscr{Y}$. Sea $K = \text{Im}(d_0)$, entonces $\mathscr{Y} - \text{resol.dim}K = n - 1$ y por hipotesis de inducción hay una sucesión exacta

$$0 \to Y_K \to X_K \to K \to 0 \tag{6.3}$$

con X_K en $\check{\omega}_{n-1}$ y Y_k en $\mathscr{Y}$. Tenemos el siguiente diagrama exacto de producto fibrado:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & Y_K & = & Y_K & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & U & \to & X_K & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C & \to & Y_0 & \to & K & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

como $\mathscr{Y}$ es cerrada bajo extensiones, tenemos que U esta en $\mathscr{Y}$. Por lo cual tenemos una sucesión exacta

$$0 \to C \to U \to X_K \to 0 \tag{6.4}$$

con U en $\mathscr{Y}$ y X_K en $\check{\omega}_{n-1}$. Esto prueba una parte de la Proposición.

Como U está en $\mathscr{Y}$ y ω es un generador de $\mathscr{Y}$ entonces hay una sucesión exacta

$$0 \to Y' \to W \to U \to 0 \tag{6.5}$$

con Y' en $\mathscr{Y}$ y W en ω. De la sucesiónes (6.4) y (6.5) tenemos el siguiente diagrama exacto conmutativo de producto fibrado:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & Y' & = & Y' & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & Z & \to & W & \to & X_K & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & U & \to & X_K & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Como W está en ω y X_K está en $\check{\omega}_{n-1}$, de la sucesión exacta $0 \to Z \to W \to X_K \to 0$ se sigue que Z está en $\check{\omega}_n$, por lo que finalmente tenemos una sucesión exacta

$$0 \to Y' \to Z \to C \to 0$$

con Y' en $\mathscr{Y}$ y Z en $\check{\omega}_n$. $\square$

Regresemos al teorema 6.1 y la proposición 6.2 por un momento. Si C es un objeto de $\check{\mathscr{Y}}$, decimos que la sucesión (6.1) es una *$\mathscr{Y}$-aproximación izquierda* de C, mientras que si C es un objeto en $\check{\mathscr{Y}}_n$ decimos que la sucesión (6.2) es una *$\mathscr{Y}_n$-aproximacion izquierda* del objeto C.

En el resto de esta sección ponemos $\mathcal{C} = \mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

Sean A y B dos objetos en $\mathcal{C}$. Si existe un entero n, para el cual $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(A, C) = 0$, para toda $i > 0$, entonces el menor de tales enteros es llamado la *A-dimensión inyectiva* de C (que se denota $A - \mathrm{inj.dim}C$), o la *C-dimensión proyectiva* de A (que se denota $C - \mathrm{proj.dim}A$). De otro modo se define $A - \mathrm{inj.dim}C = \infty = C - \mathrm{proj.dim}A$. Si $\mathscr{B}$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$, para cada A en $\mathcal{C}$ se define $A - \mathrm{inj.dim}\mathscr{B}$ como el máximo (en $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$) de $A - \mathrm{inj.dim}B$ para cada B en $\mathscr{B}$. Dualmente, para cada C en $\mathcal{C}$, se define $C - \mathrm{proj.dim}\mathscr{B}$ como el máximo de $C - \mathrm{proj.dim}B$ para cada B en $\mathscr{B}$. Claramente $A - \mathrm{inj.dim}\mathscr{B} = \mathscr{B} - \mathrm{proj.dim}A$.

Supóngase que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son subcategorías de $\mathcal{C}$. Entonces se define $\mathscr{A} - \mathrm{proj.dim}\mathscr{B}$ como el máximo de $A - \mathrm{proj.dim}B$, para toda A en $\mathscr{A}$ y toda B en $\mathscr{B}$. Se define de manera dual $\mathscr{A} - \mathrm{inj.dim}\mathscr{B}$ como el máximo $A - \mathrm{inj.dim}B$ para toda A en $\mathscr{A}$ y toda B en $\mathscr{B}$. Otra vez, es claro que $\mathscr{A} - \mathrm{inj.dim}\mathscr{B} = \mathscr{B} - \mathrm{proj.dim}\mathscr{A}$.

Si para tales subcategorías tenemos que $\mathscr{A} - \mathrm{inj.dim}\mathscr{B} = 0 = \mathscr{B} - \mathrm{proj.dim}\mathscr{A}$, se dice entonces que $\mathscr{A}$ es *ortogonal izquierdo* a $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}$ es ortogonal derecho a $\mathscr{B}$. Consecuentemente, si $\mathscr{A}$ consta de todos aquellos objetos A para los cuales $A - \mathrm{inj.dim}\mathscr{B}$, se dice que $\mathscr{A}$ es el *complemento ortogonal izquierdo* de $\mathscr{B}$ en $\mathcal{C}$, denotado $\mathscr{A} =^{\perp} \mathscr{B}$. Dualmente, el complemento ortogonal derecho de $\mathscr{A}$ en $\mathcal{C}$, denotado como $\mathscr{A}^{\perp}$, es la subcategoría de que consta de todos los objetos B en $\mathcal{C}$ para los cuales $\mathscr{A} - \mathrm{inj.dim}B = 0$.

No resulta difícil ver que los complementos ortogonales son subcategorías de $\mathcal{C}$ que son aditivamente cerradas, exactas, y que en el complemento ortogonal izquierdo ${}^{\perp}\mathscr{B}$ es cerrado bajo kerneles de epimorfismo, mientras que el complemento ortogonal derecho $\mathscr{A}^{\perp}$ es cerrado bajo cokerneles de monomorfismos. Además ${}^{\perp}\mathscr{B}$ los contiene a todos los objetos proyectivos de $\mathcal{C}$, dualmente, $\mathscr{A}^{\perp}$ los contiene a todos los objetos inyectivos de $\mathcal{C}$.

Regresando a nuestras subcategorías ω y $\mathscr{Y}$ de $\mathcal{C}$ decimos que ω es un generador proyectivo para $\mathscr{Y}$ si $\mathscr{Y} - \mathrm{proj.dim}\omega = 0$, i.e, $\omega \subset^{\perp} \mathscr{Y}$.

En [AB Prop.2.1] está probado el dual de la siguiente

Proposición 6.3. *Dado un objeto C en $\check{\mathscr{Y}}$, donde $\mathscr{Y}$ es una subcategoría exacta aditivamente cerrada de $\mathcal{C}$ y ω un generador proyectivo de $\mathscr{Y}$, las siguientes son equivalentes para cualquier entero $n \geq 0$:*

(a) *$\mathscr{Y} - \mathrm{resol.dim}C = n$,*

(b) *$C - \mathrm{proj.dim}\omega = n$,*

(c) *$C - \mathrm{proj.dim}\check{\omega} = n$,*

(d) $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{C}}(X,C)=0$*, para todo* X *en* $\breve{\omega}$.

Demostración. La demostración es por inducción sobre $n = \mathscr{Y} - \mathrm{resol.dim}C$. Supóngase primero que $n=0$.

(a) implica (b). Si $n=0$, entonces C está en $\mathscr{Y}$, y como $\omega \subset^{\perp} \mathscr{Y}$ entonces $\mathrm{Ext}^{i}_{\mathcal{C}}(\omega,C)=0$, para $i>0$.

(b) implica (c). Se sigue del argumento de cambio de dimensión usual.

(c) implica (d). Es la definición de $C - \mathrm{proj.dim}\breve{\omega}$

(d) implica (a). Como C está en $\check{\mathscr{Y}}$ entonces se sigue del teorema 6.1 que hay una $\mathscr{Y}$-aproximación $0 \to C \to Y^C \to X^C \to 0$, con X^C en $\breve{\omega}$ y Y^C en $\mathscr{Y}$, la cual se escinde por (d). Luego C es sumando de Y^C y finalmente C está en $\mathscr{Y}$.

Para el paso de inducción solo probaremos (d) implica (a), las otras son más a menos inmediatas. Supóngamos que $n>0$ y que es cierta la siguiente afirmación: si $\mathrm{Ext}^{n}_{\mathcal{C}}(X,C)=0$ para toda X en $\breve{\omega}$ entonces $\mathscr{Y} - \mathrm{resol.dim}C = n-1$. Se quiere probar que $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{C}}(X,C)=0$ para toda X en $\breve{\omega}$ implica que $\mathscr{Y} - \mathrm{resol.dim}C = n$. Como C está en $\check{\mathscr{Y}}$, por el teorema 6.1 hay una sucesión exacta

$$0 \to C \to Y^C \to X^C \to 0 \tag{6.6}$$

con Y^C está en $\mathscr{Y}$ y X^C está en $\breve{\omega}$. Nótese que X^C está en $\check{\mathscr{Y}}$, por lo que si se prueba que $\mathrm{Ext}^{n}_{\mathcal{C}}(X,X^C)=0$ para todo X en $\breve{\omega}$ entonces $\mathscr{Y} - \mathrm{resol.dim}X^C = n-1$ por hipótesis de inducción, y de la sucesión (6.6) tendriamos que

$$\mathscr{Y} - \mathrm{resol.dim}C = \mathscr{Y} - \mathrm{resol.dim}X^C + \mathscr{Y} - \mathrm{resol.dim}Y^C = n$$

Sólo falta probar la afirmación: $\mathrm{Ext}^{n}_{\mathcal{C}}(X,X^C)=0$ para todo X en $\breve{\omega}$. En efecto, sea X en $\breve{\omega}$, entonces hay una sucesión exacta

$$0 \to X \to W_0 \to \cdots \to W_m \to 0$$

con W_i en ω. Como $\omega \subset^{\perp} \mathscr{Y}$, un argumento usual de cambio de dimensión muestra que $\mathrm{Ext}^{i}_{\mathcal{C}}(X,Y^C)=0$ para todo $i>0$. Por hipótesis tenemos que $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{C}}(X,C)=0$. Entonces de la sucesión (6.6) y de la sucesión larga de homología tenemos que

$$\cdots \to 0 = \mathrm{Ext}^{n}_{\mathcal{C}}(X,Y^C) \to \mathrm{Ext}^{n}_{\mathcal{C}}(X,X^C) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{C}}(X,C)=0$$

y $\mathrm{Ext}^{n}_{\mathcal{C}}(X,X^C)=0$ como se quería. □

Corolario 6.4. $\mathscr{Y} - \mathrm{proj.dim}\breve{\omega} = 0$.

Demostración. Para todo C en Y se cumple que $\mathscr{Y} - \mathrm{resol.dim}C = 0$ y por la proposición (6.3) se sigue que $C - \mathrm{proj.dim}\breve{\omega} = 0$ y finalmente $\mathscr{Y} - \mathrm{proj.dim}\breve{\omega} = 0$. □

Obsérvese que $\mathscr{Y} - \mathrm{proj.dim}\breve{\omega} = 0$ significa que $\mathrm{Ext}^{i}_{\mathcal{C}}(\breve{\omega},\mathscr{Y})=0$, para $i>0$. Como $\breve{\omega}_n \subset \breve{\omega}$, para todo $n \geq 0$, se sigue que $\mathrm{Ext}^{i}_{\mathcal{C}}(\breve{\omega}_n,\mathscr{Y})=0$, es decir, tenemos el siguiente:

Corolario 6.5. $\mathscr{Y} - \mathrm{proj.dim}\breve{\omega}_n = 0$*, para todo entero* $n \geq 0$.

Teorema 6.6. *Sea* $0 \to C \xrightarrow{j_C} Y^C \to X^C \to 0$ *una* $\mathscr{Y}$*-aproximación de* C *en* $\check{\mathscr{Y}}$*. Entonces para cada* Y *en* $\mathscr{Y}$ *tenemos:*

(a) $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^C, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \to \mathrm{Hom}(C, Y) \to 0,$

(b) j_C *induce isomorfismos* $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C, Y)$, *para todo* $i > 0$.

Demostración. Por el corolario 6.4 tenemos que $\mathscr{Y} - \text{proj.dim}\breve{\omega} = 0$, i.e, $\mathrm{Ext}^i(X^C, Y) = 0$, para toda $i > 0$, pues X^C está en $\breve{\omega}$. □

Haciendo una pequeña variación del teorema anterior y usando el hecho de que $\mathscr{Y} - \text{proj.dim}\breve{\omega}_n = 0$, para $n \geq 0$, tenemos el siguiente :

Teorema 6.7. *Sea* $0 \to C \xrightarrow{j_C} Y^C \to X^C \to 0$ *una* $\mathscr{Y}_n$*-aproximación de* C *en* $\check{\mathscr{Y}}_n$*. Entonces para cada* Y *en* $\mathscr{Y}$ *tenemos:*

(a) $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^C, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) \to 0,$

(b) j_C *induce isomorfismos* $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C, Y)$, *para todo* $i > 0$.

En la proposición 6.2 se probó que, para $n \geq 0$, todo objeto C en $\check{\mathscr{Y}}_n$ tiene una $\mathscr{Y}_n$-aproximación $0 \to C \to Y^C \to X^C \to 0$, con X^C en $\breve{\omega}_{n-1}$. La siguiente proposición caracteriza a $\breve{\omega}_n$ como una subcategoría de $\check{\mathscr{Y}}_n$, probando que $\breve{\omega}_n = {}^{\perp}\mathscr{Y} \cap \check{\mathscr{Y}}_n$. La siguiente es una variación de [AB Prop.3.6]

Proposición 6.8. *Para un objeto* C *en* $\check{\mathscr{Y}}_n$*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *C está en* $\breve{\omega}_n$*.*

(b) $\mathscr{Y} - \text{proj.dim}C = 0$*, esto es,* C *está en* ${}^{\perp}\mathscr{Y} \cap \check{\mathscr{Y}}_n$*.*

(c) *Sea* $0 \to C \to Y^C \to X^C \to 0$ *una* $\mathscr{Y}_n$*-aproximación, es decir,* Y^C *está en* $\mathscr{Y}$ *y* X^C *en* $\breve{\omega}_{n-1}$*. Entonces* Y^C *está en* ω*.*

Antes de ver la demostración de la proposición 6.8 necesitaremos el siguiente

Lema 6.9. *Sea* Y *en* $\mathscr{Y}$*. Si* $\mathscr{Y} - \text{proj.dim}Y = 0$*, entonces* Y *está en* ω*.*

Demostración. Como ω es un generador proyectivo de $\mathscr{Y}$, tenemos hay una sucesión exacta $0 \to Y' \to W \to Y \to 0$ en $\mathscr{Y}$, con W en ω. Si $\mathscr{Y} - \text{proj.dim}Y = 0$, entonces, para toda $i > 0$, tenemos que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(Y, \mathscr{Y}) = 0$ y la sucesion se escinde, i.e, Y es sumando de W. □

Demostración de la Proposición 6.8. Veremos primero el caso $n = 0$. Aquí $\breve{\omega}_0 = \omega$, y $\check{\mathscr{Y}}_0 = \mathscr{Y}$. Entonces suponemos que C está en $\mathscr{Y}$.

(a) implica (b). Si C está en $\breve{\omega}_0 = \omega$ entonces por definición de generador proyectivo $\omega \subset {}^{\perp}\mathscr{Y}$, i.e, $\mathscr{Y} - \text{proj.dim}C = 0$.

(b) implica (c). Como C está en $\mathscr{Y}$, entonces $\mathscr{Y} - \text{proj.dim}C = 0$ implica que C está en ω, por el lema 6.9. Por lo que si

$$0 \to C \xrightarrow{=} Y^C \to 0 \to 0$$

es una $\mathscr{Y}_0$-aproximación, entonces $Y^C = C$ está en ω.

(c) implica (d). Es evidente.

Si $n > 0$.

(a) implica (b). Si C está en $\breve{\omega}_n$, entonces $\mathscr{Y}-\text{proj.dim}C = 0$, por el corolario 6.5 .

(b) implica (c). Supongamos que $\text{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C, \mathscr{Y}) = 0$ para todo $i > 0$. Consideremos una $\mathscr{Y}_n$-aproximación de C, $0 \to C \to Y^C \to X^C \to 0$, entonces, por el corolario 6.5 tenemos que $\text{Ext}^i_{\mathcal{C}}(X^C, \mathscr{Y}) = 0$. De la sucesión larga de homologia se sigue que $\text{Ext}^i_{\mathcal{C}}(Y, \mathscr{Y}) = 0$, para todo $i > 0$. Por el lema 6.9 tenemos que Y^C está en ω, entonces para la $\mathscr{Y}_n$-aproximación $0 \to C \to Y^C \to X^C \to 0$ se tiene que C está en $\breve{\omega}_n$.

(c) implica (d). Es evidente.

□

6.2. Categorías covariantemente finitas y categorías de inclinación en $\text{mod}(\mathbf{C})$

En esta sección $\mathbf{C}$ es una K-variedad Krull-Schmidt dualizante. Por [AR2 Prop. 2.6] $\text{mod}(\mathbf{C})$ vuelve a ser una K-variedad dualizante. Según se probó en el capítulo 1, $\text{mod}(\mathbf{C})$ es una K-variedad Krull-Schmidt, i.e, $\text{mod}(\mathbf{C})$ es una K-variedad Krull-Schmidt dualizante. Como $\text{mod}(\mathbf{C})$ es una categoría Krull-Schmidt, se sigue que cualquier subcategoría $\mathcal{C}$ aditivamente cerrada de $\text{mod}(\mathbf{C})$ es Krull-Schmidt, y por consiguiente los objetos en $\text{mod}(\mathcal{C})$ tienen cubiertas proyectivas.

Bajo las condiciones ya mencionandas anteriormente se desea estudiar la relación entre subcategorías covariantemente finitas y co-resolventes de $\text{mod}(\mathbf{C})$ y las subcategorías de inclinación generalizadas de $\text{mod}(\mathbf{C})$, generalizando los resultados de M. Auslander y e I. Reiten. Los resultados aquí expuestos, los obtenemos siguiendo el artículo [AR1].

6.2.1. Subcategorías covariantemente y contravariantemente finitas

Sea $\mathscr{X}$ una subcategoría en $\text{mod}(\mathbf{C})$. Se dice que un morfismo $f : X \to F$ en $\text{mod}(\mathbf{C})$, con X en $\mathscr{X}$, es una *$\mathscr{X}$-aproximación derecha* de F, si $(\ \ , X)_{\mathscr{X}} \xrightarrow{(\ \ ,h)_{\mathscr{X}}} (\ \ , F)_{\mathscr{X}} \to 0$ es una sucesión exacta de $\mathscr{X}$-módulos. Dualmente, sea $\mathscr{Y}$ una subcategoría de $\text{mod}(\mathbf{C})$, un morfismo $g : F \to Y$, con Y en $\mathscr{Y}$, es llamada una *$\mathscr{Y}$-aproximación izquierda* de F, si $(Y,\ \ )_{\mathscr{Y}} \xrightarrow{(g,\ \ )_{\mathscr{Y}}} (F,\ \ )_{\mathscr{Y}} \to 0$ es una sucesión exacta de $\mathscr{Y}$-módulos.

Recordemos que un morfismo $f : X \to Y$ es un morfismo *mínimo derecho*, si que para cada morfimo g en $\text{End}(X)$, la igualdad $fg = f$ implica que g es un automorfismo. De manera dual se tiene el concepto de morfimos mínimo izquierdo. Asi, una $\mathscr{X}$-aproximación $h : X \to F$ es mínima si, h es un morfismo mínimo. De manera dual, se tiene el concepto de $\mathscr{Y}$-aproximación mínima izquierda.

Se sigue inmediatamente, a partir de la definición, que dos $\mathscr{X}$-aproximaciones mínimas derechas izquierdas $f_i : X_i \to F$, $i = 1, 2$ son isomorfas en el sentido de que existe un isomorfismo $h : X_1 \to X_2$ tal que $f_1 h = f_2$. De manera dual, dos $\mathscr{Y}$-aproximaciónes mínimas de F son isomorfas.

Se usará $f_F : X_F \to F$ ($g_F : F \to Y^F$) para denotar una $\mathscr{X}$-aproximación derecha (izquierda) de F. Una subcategoría $\mathscr{X}$ de $\text{mod}(\mathbf{C})$ es *contravariantemente* (*covariantemente*) finita en $\text{mod}(\mathbf{C})$ si todo objeto F en $\text{mod}(\mathbf{C})$ tiene una $\mathscr{X}$-aproximación derecha ($\mathscr{Y}$-aproximación izquierda).

Lo primero que se verá es que, si $\mathscr{X}$ es una subcategoría de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ aditivamente cerrada, entonces la existencia de una $\mathscr{X}$-aproximación mínima derecha $f : X \to C$ implica la existencia de una $\mathscr{X}$-aproximación mínima derecha.

Proposición 6.10. *Sea $f : X \to C$ un morfismo en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. Entonces, existe una descomposición $X = X_0 \coprod X_1$ tal que $f|B_0$ es mínimo derecho y $f|B_1 = 0$*

Demostración. Sea $F = \mathrm{Coker}((\ \,,X) \xrightarrow{(\ ,f)} (\ \,,C))$, entonces tenemos una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\mathrm{mod}(\mathbf{C}))$

$$(\ \,,X) \xrightarrow{(\ ,f)} (\ \,,C) \xrightarrow{\pi} F \to 0$$

Como $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ es una variedad Krull-Schmidt hay cubiertas proyectivas en $\mathrm{mod}(\mathrm{mod}(\mathbf{C}))$, y por lo tanto hay una descomposición de $C = C_1 \coprod C_0$, tal que $\pi_0 = \pi|(\ \,,C_0) : (\ \,,C_0) \to F \to 0$ es una cubierta proyetiva de F. Si $K_0 = \mathrm{Ker}\pi_0$, entonces hay un epimorfismo $(\ \,,X) \to \mathrm{Ker}\pi_0$ y por lo tanto, hay una descomposición de $X = X_0 \coprod X_1$ tal que $(\ \,,X_0) \to \mathrm{Ker}\pi_0$ es una cubierta proyectiva. Por lo cual, no resulta difícil ver que tenemos el siguiente diagrama conmutativo exacto, con columnas que se escinden:

$$\begin{array}{ccccccc}
(\ \,,X_1) & \xrightarrow{(\ ,f_1)} & (\ \,,C_1) & \longrightarrow & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
(\ \,,X_1 \coprod X_0) & \xrightarrow{(\ ,f)} & (\ \,,C_1 \coprod C_0) & \xrightarrow{\pi} & F & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
(\ \,,X_0) & \xrightarrow{(\ ,f_0)} & (\ \,,C_0) & \xrightarrow{\pi_0} & F & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Entonces, f puede escribirse como:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_0 \end{pmatrix} = X_1 \coprod X_0 \to C_1 \coprod C_0$$

tal que $(\ \,,X_0) \xrightarrow{(\ ,f_0)} (\ \,,C_0) \xrightarrow{\pi_0} F \to 0$ es una presentación proyectiva mínima de F y $(\ \,,X_1) \xrightarrow{(\ ,f_1)} (\ \,,C_1) \to 0$ es un epimorfismo que se escinde. Se sigue que hay una descomposición $X_1 = X_1' \coprod X_1''$ tal que $f_1 = (h\ \ 0) : X_1' \coprod X_1'' \to C_1$ y h es un isomorfismo. Entonces, si ponemos $B_0 = X_0 \coprod X_1'$ y $B_1 = X_1''$, tenemos

$$f|B_0 = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

y claramente $f|B_1 = f_1|B_1 = 0$.

Se afirma que $f|B_0$ es un morfismo mínimo derecho. En efecto, sea g un morfismo

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : X_0 \coprod X_1' \to X_0 \coprod X_1'$$

tal que $(f|B_0)g = f|B_0$. Se sigue que

$$\begin{pmatrix} f_0 a & f_0 b \\ hc & hd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

y $f_0 a = f_0$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}(\ ,X_0) \arrow[r, "(\ ,f_0)"] \arrow[d, "(\ ,a)"'] & (\ ,C_0) \arrow[r, "(\ ,f_0)"] \arrow[d, equal] & (\ ,F) \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, equal] & 0 \\ (\ ,X_0) \arrow[r, "(\ ,f_0)"] & (\ ,C_0) \arrow[r, "(\ ,f_0)"] & (\ ,F) \arrow[r, "\pi_0"] & 0\end{tikzcd}$$

Por la propiedades que tienen las presentaciones proyectivas mínimas se sigue que $(\ ,a)$ es isomorfismo, y como h es iso se sigue que $c = 0$ y que $d = 1_{X_1'}$, de modo que g es una matriz invertible, lo que muestra que f_0 es minimal. $\square$

Corolario 6.11. *Sea $\mathscr{X}$ una subcategoría cerrada bajo sumandos y contravariantemente finita de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*. Entonces todo objeto en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *tiene una $\mathscr{X}$-aproximación mínima derecha.*

Demostración. Sea C un objeto en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y $f : X \to C$ una $\mathscr{X}$-aproximación. Por la Poposición 6.10 hay una descomposición $X = X_0 \coprod X_1$ tal que $f|X_0$ es mínimo y $f|X_1 = 0$. Como $\mathscr{X}$ es aditivamente cerrada X_0 está en $\mathscr{X}$ nuevamente. Sólo falta ver que $f|X_0 : X_0 \to C$ es una $\mathscr{X}$-aproximación derecha. Sea $h : X' \to C$ un morfismo con X' en $\mathscr{X}$, entonces existe un morfismo $g : X' \to X$ tal que $fg = h$. Poniendo $f = (f|X_0 \ \ f|X_1)$ tenemos claramente que el siguiente es un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "g=\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}"'] \arrow[d, "h"] \\ X_0 \coprod X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "(1 \ \ 0)"'] & C \\ & X_0 \arrow[u, "f|X_0"'] \end{tikzcd}$$

es decir $f|X_0 g_0 = h$, como X es cerrada bajo sumandos X_0 es un objeto de $\mathscr{X}$ y se sigue que $f|X_0 : X_0 \to C$ es una $\mathscr{X}$ aproximación mínima derecha. $\square$

No se enuncia el dual del corolario 6.11, el cual se puede demostrar de la misma forma y se usara con toda libertad.

Lema 6.12 (Wakamatsu)**.** *Sea $\mathscr{X}$ una subcategoría de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *la cual es cerrada bajo extensiones. Sea C un un objeto en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$

(a) *Si $0 \to Y \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} C$ es exacta con f una $\mathscr{X}$-aproximación mínima derecha, entonces* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, Y) = 0$*, i.e,* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X', Y) = 0$ *para todo X' en $\mathscr{X}$.*

(b) *Si $C \xrightarrow{g} X \to Z \to 0$ es exacta con g una $\mathscr{X}$-aproximación mínima izquierda, entonces* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(Z, \mathscr{X}) = 0$.

Demostración. Sólo se probará la parte (a) y la otra se seguirá por dualidad.

(1) Sea $X \xrightarrow{p} \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{j} C$ la factorización de f por su imagen. Como f es una $\mathscr{X}$-aproximación, se sigue que $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathrm{Im} f) \xrightarrow{(\mathscr{X}, j)} \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, C)$ es un isomorfismo de grupos abelianos y $\mathrm{Coker}(\mathscr{X}, h) \cong (\mathscr{X}, C)$.

(2) El morfismo inducido por h, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, h) : \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, Y) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, X)$, es el morfismo 0. En efecto, sea X' en $\mathscr{X}$ y $\varphi : 0 \to Y \to W \to X' \to 0$ un elemento de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X', Y)$, entonces tenemos el siguiente diagrama exacto de coproducto fibrado

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Y & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{f} & C \\
 & & \downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \| \\
0 & \to & W & \to & Z & \xrightarrow{f'} & C \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & X' & = & X' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

donde $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X', h)(\varphi)$ esta representado por la sucesión exacta : $0 \to X \to Z \to X' \to 0$. Basta ver que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X', h)(\varphi)$ se escinde. Pero Z está en $\mathscr{X}$, pues $\mathscr{X}$ es cerrada bajo extensiones, de modo que f' se factoriza por f, pues f es una $\mathscr{X}$-aproximación de C, i.e, existe un morfismo $g' : Z \to X$ tal que $fg' = f'$. Entonces $g'g$ es un elemento en $\mathrm{End}(X)$ y $f(g'g) = (f'g) = f$. Como f es mínimo, entonces $g'g$ es un automorfismo y g se escinde.

(3) Considerese la sucesión exacta

$$0 \to Y \xrightarrow{h} X \xrightarrow{p} \mathrm{Im}(f) \to 0 \tag{6.7}$$

Por la parte (2) tenemos que $\mathrm{Im}\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, h) = 0$. Después de aplicar $(\mathscr{X},\ \ )$ a la sucesión (6.7) y usar la sucesión larga de homología tenemos

$$0 \to \mathrm{Coker}(\mathscr{X}, h) \to (\mathscr{X}, \mathrm{Im}(f)) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, Y) \to 0$$

pero por la parte (1) tenemos que $\mathrm{Coker}(\mathscr{X}, h) \cong (\mathscr{X}, \mathrm{Im}(f))$, por lo que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, Y) = 0$ como se queria □

Se vera como pueden construir subcategorías convariantemente o contravariantemente finitas a partir de otras subcategorías covariantes o contravariantemente finitas. Para comenzar esa discusion, a partir de este momento, $\mathscr{X}$ y $\mathscr{Y}$ de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ denotan subcategorías plenas de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ que son cerradas bajo sumandos e isomorfismo. De este modo, si un objeto F en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ tiene una $\mathscr{X}$-aproximación derecha (resp. izquierda), entonces F tiene una aproximación mínima derecha (resp. izquierda), por el corolario 6.11.

Proposición 6.13. *Supóngase que $\mathscr{X}$ es una subcategoría de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ cerrada bajo extensiones y $\mathscr{Y}$ la subcategoría de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ consistente de todos los objetos Y tales que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, Y) = 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un objeto F en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$.*

(a) $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ , F)|\mathscr{X}$ *es un funtor finitamente generado de $\mathscr{X}$ a los grupos abelianos.*

(b) *Hay una sucesión exacta $0 \to F \xrightarrow{g} Y \to X \to 0$, con g una aproximación mínima izquierda de F con X en $\mathscr{X}$.*

Demostración. (b) implica (a). De la sucesión exacta

$$(\mathscr{X}, Y) \to (\mathscr{X}, X) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, F) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, Y) = 0.$$

se sigue el epimorfismo $(\ \ , X)|\mathscr{X} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ , F)|\mathscr{X} \to 0$.

(a) implica (b). Nótese que como estamos suponiendo que $\mathscr{X}$ es cerrada bajo sumandos, entonces, es una categoría Krull-Schmidt y los $\mathscr{X}$-módulos tienen cubiertas proyectivas. Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ , F)|\mathscr{X}$ es finitamente generado tiene una cubierta proyectiva $(\ \ , X) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ , F)|\mathscr{X} \to 0$. Sea $\varphi(1_X)$ la sucesión exacta $0 \to F \xrightarrow{g} Y \to X \to 0$.

El morfismo $F \xrightarrow{g} Y$ es mínimo. En efecto, sea $h : Y \to Y$ es un morfismo tal que $hg = g$, veamos que h es isomorfismo. Existe un morfismo $h' : X \to X$ que hace conmutar el siguiente diagrama con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & F & \xrightarrow{g} & Y & \to & X & \to & 0 \\
 & & \| & & h\downarrow & & h'\downarrow & & \\
0 & \to & F & \xrightarrow{g} & Y & \to & X & \to & 0
\end{array}$$

tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccc}
(\ \ , Y)|\mathscr{X} & \longrightarrow & (\ \ , X)|\mathscr{X} & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ , F)|\mathscr{X} & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle (\ ,h)}\downarrow & & {\scriptstyle (\ ,h')}\downarrow & & \| & & \\
(\ \ , Y)|\mathscr{X} & \longrightarrow & (\ \ , X)|\mathscr{X} & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ , F)|\mathscr{X} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

De la igualdad $\varphi(\ \ , h') = \varphi$ se sigue que $(\ \ , h')$ es isomorfismo, y por lo tanto h' es iso, finalmente se sigue del lema del tres que h es isomorfismo.

Si se supone que Y está en $\mathscr{Y}$, entonces se tiene una sucesión exacta

$$(Y, \ \ )|\mathscr{Y} \to (F \ \ ,)|\mathscr{Y} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X, \ \ )\mathscr{Y} = 0$$

y entonces, $\mathscr{Y}$ es covariantemente finita, y la prueba estaría completa pues X está en $\mathscr{X}$. Así que, se procederá a demostrar que la Y en la sucesión exacta $0 \to F \to Y \to X \to 0$ está en $\mathscr{Y}$. Se probará que cualquier sucesión exacta $0 \to Y \xrightarrow{f} U \to X' \to 0$ se escinde.

Dada una sucesión de este tipo, nos induce el siguiente diagrama exacto de coproducto fibrado

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & F & = & F & & & & \\
 & & g\downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & Y & \xrightarrow{f} & U & \to & X' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & X & \to & W & \to & X' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Como $\mathscr{X}$ es cerrado bajo extensiones, se tiene que W esta en $\mathscr{X}$. Del hecho de que $(\ \ ,X)|\mathscr{X} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,F)|\mathscr{X} \to 0$ es exacta implica que hay un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & F & \to & U & \to & W & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & F & \xrightarrow{g} & Y & \to & X & \to & 0 \end{array}$$

Por lo cual, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & F & \xrightarrow{g} & Y & \to & X & \to & 0 \\ & & \| & & f\downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & F & \to & U & \to & W & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & F & \xrightarrow{g} & Y & \to & X & \to & 0 \end{array}$$

Como $g : F \to Y$ es minimal izquierdo, entonces debe tenerse que la composicion de morfismos $Y \xrightarrow{f} U \to Y$ es isomorfismo, por lo cual f se escinde, y por lo tanto la sucesión exacta $0 \to Y \xrightarrow{f} U \to X' \to 0$ se escinde y Y está en $\mathscr{Y}$. □

Como consecuencia inmediata se tiene el siguiente corolario

Corolario 6.14. *Sea $\mathscr{X}$ una subcategoría de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *cerrada bajo extensiones y sea $\mathscr{Y}$ la subcategoría de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *consistente de los objetos Y tales que* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, Y) = 0$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) *El funtor* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,F)|\mathscr{X}$ *es finitamente generado para todo F en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

(b) *La categoría $\mathscr{Y}$ es covariantemente finita en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *y si* $0 \to F \xrightarrow{g} Y \to X \to 0$ *es exacta, con g una aproximación mínima izquierda, entonces X está en $\mathscr{X}$.*

Demostración. Sólo se prueba (a) implica (b). Como en la demostración de (a) implica (b), de la demostración de la proposición 6.13, si $(\ \ ,X')|\mathscr{X} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,F) \to 0$ es exacta, con X' en $\mathscr{X}$, entonces la sucesión exacta $\varphi(1_{X'}) : 0 \to F \xrightarrow{g'} Y' \to X' \to 0$ es tal que $F \xrightarrow{g'} Y$ es una $\mathscr{Y}$-aproximación mínima y X' está en $\mathscr{X}$. Entonces, como las aproximaciones mínimas izquierdas son isomorfas, debemos tener que $Y \cong Y'$, y por lo tanto $X \cong X'$, como se quería. □

Nótese que como se define $\mathscr{Y}$ en la proposición 6.13 contiene a todos los inyectivos, por lo tanto todas las $\mathscr{Y}$-aproximaciones izquierdas son monomorfismos, nótese tambien que $\mathscr{Y}$ es cerrado bajo extensiones.

Se enuncian sin pruebas los duales de la proposición 6.13 y de su corolario.

Proposición 6.15. *Supongamos que $\mathscr{Y}$ es una subcategoría de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *cerrada bajo extensiones y $\mathscr{X}$ la subcategoría de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *consistente de todos los objetos X tales que* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X, \mathscr{Y}) = 0$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un objeto F en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

(a) $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(F,\ \ )|\mathscr{Y}$ *es un funtor finitamente generado de $\mathscr{Y}$ a los grupos abelianos.*

(b) *Hay una sucesión exacta* $0 \to Y \to X \xrightarrow{f} F \to 0$, *con* f *una aproximación mínima derecha de* F *con* Y *en* $\mathscr{Y}$.

Corolario 6.16. *Sea* $\mathscr{Y}$ *una subcategoría de* $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$ *cerrada bajo extenciones y sea* $\mathscr{X}$ *la subcategoría de* $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$ *consistente de los objetos* X *tales que* $\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X, \mathscr{Y}) = 0$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) *El funtor* $\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(F, \ \ )|\mathscr{Y}$ *es finitamente generado para todo* F *en* $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$

(b) *La categoría* $\mathscr{X}$ *es contravariantemente finita en* $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$ *y si* $0 \to Y \to X \xrightarrow{f} F \to 0$ *es exacta con* f *una aproximación mínima derecha, entonces* Y *está en* $\mathscr{Y}$.

Tenemos la siguiente consecuencia fácil de estos resultados

Proposición 6.17. *Supongamos que* $\mathscr{T}$ *es una subcategoría de* $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$ *la cual es cerrada bajo extenciones, tal que* $\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ , F)|\mathscr{T}$ *es finitamente generado para todo* F *en* $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$. *Entonces tenemos lo siguiente:*

(a) *La subcategoría* $\mathscr{Y} = \{Y \text{ en } \operatorname{mod}(\mathbf{C}) | \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{T}, Y) = 0\}$ *es covariantemente finita en* $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$, *cerrada bajo extensiones, y contiene a todos los* $\mathbf{C}$*-módulos inyectivos.*

(b) *La subcategoría* $\mathscr{X} = \{X \text{ en } \operatorname{mod}(\mathbf{C}) | \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X, \mathscr{Y}) = 0\}$ *es contravariantemente finita cerrada bajo extensiones y contiene a* $\mathscr{T}$, *asi como a los todos los* $\mathbf{C}$*-módulos proyectivos.*

(c) *Para cada* F *en* $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$, *hay sucesiones exactas* $0 \to F \xrightarrow{g} Y^F \to T^F \to 0$ *y* $0 \to Y_F \to X_F \xrightarrow{f} F \to 0$ *con* g *una* $\mathscr{Y}$*-aproximación mínima izquierda y* T^F *en* $\mathscr{T}$ *y con* f *una* $\mathscr{X}$*-proximación mínima derecha*

(d) $\mathscr{Y} = \{F \text{ en } \operatorname{mod}(\mathbf{C}) | \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, F) = 0\}$.

Demostración. (a) Es consecuencia inmediata del corolario 6.14. Nótese que al tener $\mathscr{Y}$ a todos los inyectivos, toda $\mathscr{Y}$-aproximación izquierda es monomorfismo. Además $\mathscr{Y}$ es aditivamente cerrada, por lo cual para cada objeto F en $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$ hay una sucesión exacta

$$0 \to F \xrightarrow{g} Y^F \to T^F \to 0$$

tal que g es una $\mathscr{Y}$-aproximación mínima izquierda y T^F está en $\mathscr{T}$, nuevamente por el corolario 6.14.

(b) Claramente $\mathscr{X}$ contiene a $\mathscr{T}$ y a los proyectivos. Por la parte (a) $\mathscr{Y}$ es aditivamente cerrada y cerrada bajo extensiones. Solo basta ver que $\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(F, \ \ )|\mathscr{Y}$ es finitamente generado para cualquier objeto F en $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$ y el resto de la afirmación se seguirá del corolario 6.16. En efecto, sea $P \to F \to 0$ la cubierta proyectiva de F, entonces hay una sucesión exacta corta $0 \to K \to P \to F \to 0$. Ahora bien, por la parte (a) hay una sucesión exacta

$$0 \to K \xrightarrow{g} Y^K \to T^K \to 0$$

tal que g es una $\mathscr{Y}$-aproximación mínima izquierda de K y T^K está en $\mathscr{T}$. Así, tenemos el siguiente diagrama exacto de coproducto-fibrado

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & Y^K & \to & X & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & T^K & = & T^K & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

como T^K está en $\mathscr{T} \subset \mathscr{X}$ y usando el hecho de que $\mathscr{X}$ contiene a P y es cerrada bajo extensiones, tenemos que X está en $\mathscr{X}$. Se sigue de la sucesión exacta $0 \to Y^K \to X \to F \to 0$ y de la sucesión larga de homologia, la siguiente sucesión exacta:

$$(X, \ \ )|\mathscr{Y} \to (Y^K, \ \ )|\mathscr{Y} \to \mathrm{Ext}^1(F, \ \ )|\mathscr{Y} \to \mathrm{Ext}^1(X, \ \ )|\mathscr{Y} = 0,$$

es decir, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(F, \ \ )|\mathscr{Y}$ es finitamente generado.

(c) En (a) se probó la existencia de la sucesión

$$0 \to F \xrightarrow{g} Y^F \to T^F \to 0$$

con g una $\mathscr{Y}$-aproximación mínima izquierda y T^F en $\mathscr{T}$. También se probo en (a) que $\mathscr{Y}$ es cerrada bajo extensiones y en la parte (b) se probó que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(F, \ \ )|\mathscr{Y}$ es finitamente generado. Como $\mathscr{X}$ es cerrada bajo sumandos ademas de contener a todos los proyectivos, se sigue del corolario 6.16 que existe una sucesión exacta

$$0 \to Y_F \to X_F \xrightarrow{f} F \to 0$$

con f una $\mathscr{X}$-proximación mínima derecha y Y_F en $\mathscr{Y}$.

(d) Si Y es un objeto de $\mathscr{Y}$ entonces claramente $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, Y) = 0$, de acuerdo como se define $\mathscr{X}$ en (b), entonces Y está en $\{F \text{ en } \mathrm{mod}(\mathbf{C}) | \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, F) = 0\}$. Supongamos que F es un objeto en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y es tal que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, F) = 0$, entonces como $\mathscr{X}$ contiene a $\mathscr{T}$, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{T}, F) = 0$, y F está en $\mathscr{Y}$ de acuerdo a como se define $\mathscr{Y}$ en (a). $\square$

Nótese que puede dualizarse la proposición 6.17 y se establece sin demostración y se usará cuando sea necesario. Una aplicación de la proposición 6.17 y de su dual es la siguiente:

Proposición 6.18. *Considerense $\mathscr{X}$ y $\mathscr{Y}$ subcategorías de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *que satisfacen X está en $\mathscr{X}$ si y solo si $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X, \mathscr{Y}) = 0$ y Y está en $\mathscr{Y}$ si y solo si $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, Y) = 0$. Sea $\omega = \mathscr{X} \cap \mathscr{Y}$, entonces tenemos lo siguiente:*

(a) *La categoría $\mathscr{Y}$ es covariantemente finita en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *si, y solo si, $\mathscr{X}$ es contravariantemente finita en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

(b) *Si $\mathscr{Y}$ es covariantemente finita, entonces para cada F en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *hay sucesiones exactas:* $0 \to F \xrightarrow{g} Y^F \to X^F \to 0$ *y* $0 \to Y_F \to X_F \xrightarrow{f} F \to 0$*, donde g es una $\mathscr{Y}$-aproximación mínima izquierda, con X^F en $\mathscr{X}$ y f es una $\mathscr{X}$-aproximación mínima derecha, con Y_F está en $\mathscr{Y}$.*

(c) $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\omega, \omega) = 0$.

(d) *Supongamos que $\mathscr{Y}$ es covariantemente finita en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. *Entonces,*

   (i) *Para cada Y en $\mathscr{Y}$, hay una sucesión exacta $0 \to Y' \to w \to Y \to 0$ en $\mathscr{Y}$, con w en ω.*

   (ii) *Para cada X en $\mathscr{X}$, hay una sucesión exacta $0 \to X \to w \to X' \to 0$ en $\mathscr{X}$, con w en ω.*

Demostración. (a) Para poder usar la proposición 6.17 para mostrar que, $\mathscr{X}$ contravariantemente finita en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ implica que $\mathscr{Y}$ es covariantemente finita, sólo necesita observarse que, $\mathscr{X}$ contravariantemente finita en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ implica que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\quad, F)|\mathscr{X}$ es finitamente generado, para todo F en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. El resto de (a) se seguirá por dualidad. Supongamos que $\mathscr{X}$ es contravariantemente finita. Nótemos que $\mathscr{X}$ es cerrada bajo extensiones y contiene a todos los proyectivos, por lo cual toda $\mathscr{X}$-aproximación derecha en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ es un epimorfismo. Observemos que $\mathscr{Y}$ contiene a todos los inyectivos y que es cerrada bajo extensiones. Sea $0 \to F \xrightarrow{h} I$ la envolvente inyectiva de F, entonces hay una sucesión exacta

$$0 \to F \xrightarrow{h} I \to \mathrm{Coker}(h) \to 0.$$

Como $\mathscr{X}$ es cerrada bajo sumandos hay una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker} f \to X \xrightarrow{f} \mathrm{Coker}(h) \to 0$$

donde $X \xrightarrow{f} \mathrm{Coker}(h)$ es una $\mathscr{X}$-aproximación mínima derecha y por el Lema de Wakamatsu $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, \mathrm{Ker}(f)) = 0$, i.e., $\mathrm{Ker}(f)$ está en $\mathscr{Y}$.

Luego, tenemos el siguiente diagrama exacto de producto fibrado:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathrm{Ker}(f) & = & \mathrm{Ker}(f) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & f\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{h} & I & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(h) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Como $\mathscr{Y}$ es cerrada bajo extenciones, y el hecho de que I y $\mathrm{Ker}(f)$ están en $\mathscr{Y}$, se sigue que Y está en $\mathscr{Y}$. Entonces, tenemos un sucesión exacta

$$0 \to F \to Y \to X \to 0$$

con Y en $\mathscr{Y}$ y X en $\mathscr{X}$

Por la sucesión larga de homología se tiene la siguiente sucesión exacta

$$(\ \ ,Y)|\mathscr{X} \to (\ \ ,X)|\mathscr{X} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,F)|\mathscr{X} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\ \ ,Y)|\mathscr{X} = 0$$

es decir, $\mathrm{Ext}^1(\ \ ,F)|\mathscr{X}$ es finitamente generado.

(b) Es consecuencia de la proposición 6.17.

(c) Es consecuencia de la definición de ω.

(d)(i) Sea Y en $\mathscr{Y}$. Como $\mathscr{Y}$ es covariantemente finito sabemos de (b) que hay una sucesión exacta $0 \to Y \to X \to Y' \to$ con X en $\mathscr{X}$, como $\mathscr{Y}$ cerrada bajo extensiones entonces X está en ω. (ii) se prueba de amanera análoga a la parte (i). □

Como consecuencia tenemos la siguiente:

Proposición 6.19. *Sea $\mathscr{Y}$ una subcategoría covariantemente finita de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *cerrada bajo extensiones que contiene a los inyectivos. Si* $\mathscr{X} = \{X \text{ en } \mathrm{mod}(\mathbf{C}) | \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X, \mathscr{Y}) = 0\}$. *Entonces* $\mathscr{Y} = \{F \text{ en } \mathrm{mod}(\mathbf{C}) | \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, F) = 0\}$

Demostración. Es claro que $\mathscr{Y}$ está contenido en $\{F \text{ en } \mathrm{mod}(\mathbf{C}) | \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, F) = 0\}$. Supongase que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, F) = 0$. Como Y es covariantemente finita, hay una $\mathscr{Y}$-aproximación izquierda $F \xrightarrow{g_F} Y^F$, la cual es monomorfismo pues $\mathscr{Y}$ contiene a todos los inyectivos. Como $\mathscr{Y}$ es cerrada bajo sumandos tenemos una sucesión exacta

$$0 \to F \xrightarrow{g_F} Y^F \to \mathrm{Coker}(g_F) \to 0 \tag{6.8}$$

con $F \xrightarrow{g_F} Y^F$ una $\mathscr{Y}$-aproximación mínima izquierda, tal que $\mathrm{Coker}(g_F)$ está en $\mathscr{X}$ por el Lema de Wakamatsu. Entonces la sucesión (6.8) se escinde y F está en $\mathscr{Y}$. □

6.2.2. Subcategorías co-resolventes

Sean $\mathscr{X}$ y $\mathscr{Y}$ subcategorías de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, no resulta difícil verificar que $\mathscr{X} \subset^{\perp} (\mathscr{X}^{\perp})$ y que $\mathscr{Y} \subset (^{\perp}\mathscr{Y})^{\perp}$, pero no necesariamente $\mathscr{X} =^{\perp} (\mathscr{X}^{\perp})$, ni $\mathscr{Y} = (^{\perp}\mathscr{Y})^{\perp}$. En esta parte se estudian ciertos tipos de subcategorías $\mathscr{X}$ y $\mathscr{Y}$, en las cuales se da la igualdad. Más aún se verá que hay una biyección entre este tipo de subcategorías.

Sea una subcategoría $\mathcal{C}$ de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, decimos que $\mathcal{C}$ es una subcategoría *resolvente* de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ si satisface las siguientes tres condiciones: (a) es cerrada bajo extensiones, (b) es cerrada bajo kerneles de epimorfismos, y (c) contiene a los proyectivos. En la sección anterior se vio que dada cualquier subcategoría $\mathcal{C}$ de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, el complemento ortogonal izquierdo $^{\perp}\mathcal{C}$ es una subcategoría de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ que es resolvente.

Dualmente, dada una subcategoría $\mathcal{C}$ de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, decimos que $\mathcal{C}$ es una subcategoría *co-resolvente* de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ si satisface las siguientes tres condiciones: (a) es cerrada bajo extensiones, (b) es cerrada bajo cokerneles de monomorfismos, y (c) contiene a los inyectivos. En la sección anterior se vio que dada cualquier subcategoría $\mathcal{C}$ de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, el complemento ortogonal derecho $\mathcal{C}^{\perp}$ es una subcategoría de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ que es co-resolvente.

El proposito de esta sección es ver que hay una biyección entre subcategorías covariantemente finitas y co-resolventes de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y subcategorías contravariantemente finitas y resolventes.

Lema 6.20. *Supongamos que* $\mathscr{X}$ *una subcategoría resolvente de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*. Sea* $\mathscr{Y} = \{Y \text{ en } \mathrm{mod}(\mathbf{C}) | \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, Y) = 0\}$*. Entonces,*

(a) $\mathscr{Y} = X^{\perp}$,

(b) $\mathscr{Y}$ *es una subcategoría coresolvente de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*.*

Demostración. (a) Claramente $\mathscr{X}^{\perp} \subset \mathscr{Y}$. Sólo necesita probarse que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, Y) = 0$ para todo Y en $\mathscr{Y}$ implica que $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, Y) = 0$, para todo Y en $\mathscr{Y}$ y $i > 0$. Sea X en $\mathscr{X}$ y sea $\cdots \xrightarrow{\delta_2} P_2 \xrightarrow{\delta_1} P_1 \xrightarrow{\delta_0} P_0 \to X \to 0$ una resolución proyectiva mínima de X. Como $\mathscr{Y}$ es resolvente es cerrada bajo kerneles de epis, por lo que $\mathrm{Im}\delta_i$ está en $\mathscr{Y}$, para todo $i \geq 0$, pero entonces $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(X, Y) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathrm{Im}\delta_i, Y) = 0$, para $i \geq 2$, y la afirmación se sigue.

(b) Se sigue de (a). □

Enunciamos el dual del lema 6.20.

Lema 6.21. *Supongamos que* $\mathscr{Y}$ *una subcategoría co-resolvente de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*. Sea* $\mathscr{X} = \{X \text{ en } \mathrm{mod}(\mathbf{C}) | \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X, \mathscr{Y}) = 0\}$*. Entonces,*

(a) $\mathscr{X} = {}^{\perp}\mathscr{Y}$,

(b) $\mathscr{X}$ *es una subcategoría resolvente de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*.*

Combinando los lemas 6.19 y 6.20 y los resultados de la sección anterior se obtiene los siguiente:

Proposición 6.22. *Sea* $\mathscr{Y}$ *una subcategoría covariantemente finita y co-resolvente de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*. Entonces, ocurre lo siguiente:*

(a) $\mathscr{X} = {}^{\perp}\mathscr{Y}$ *es una subcategoría contravariantemente finita y resolvente de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*.*

(b) $\mathscr{Y} = \mathscr{X}^{\perp} = ({}^{\perp}\mathscr{Y})^{\perp}$.

(c) *Para cada* F *en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*, existe una única sucesión exacta, hasta isomorfismo,* $0 \to F \xrightarrow{g} Y^F \to X^F \to 0$*, que satisface:*

  (i) g *es una* $\mathscr{Y}$*-aproximación mínima izquierda de* F*,*

  (ii) X^F *está en* $\mathscr{X}$*,*

  (iii) g *induce un isomorfismo* $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(Y^F, Y) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(F, Y)$*, para toda* $i > 0$ *y toda* Y *en* $\mathscr{Y}$*.*

(d) *Para cada* F *en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*, existe una única sucesión exacta, hasta isomorfismo,* $0 \to Y_F \to X_F \xrightarrow{f} F \to 0$ *que satisface:*

  (i) f *es una* $\mathscr{X}$*-aproximación mínima derecha de* F*,*

  (ii) Y_F *está en* $\mathscr{Y}$*,*

  (iii) f *induce un isomorfismo* $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(X, X_F) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(X, F)$*, para toda* $i > 0$ *y toda* X *en* $\mathscr{X}$*.*

Demostración. (a) Por el lema 6.21 $\mathscr{X} = \{X \in \mathrm{mod}(\mathbf{C}) | \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X, \mathscr{Y}) = 0\}$. Para probar que $\mathscr{X}$ es contravariantemente finita, necesitamos usar el dual de la proposición 6.17, y para ello sólo basta probar que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(F, \ )|\mathscr{Y}$ es finitamente generado, para cualquier F en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, y para ello sólo es necesario encontrar una sucesión exacta $0 \to Y \to X \to F \to 0$ con Y en $\mathscr{Y}$ y X en $\mathscr{X}$. Sea $P \to F \to 0$ una cubierta proyectiva de F, entonces tenemos una sucesión exacta $0 \to K \to P \to F \to 0$. Como $\mathscr{Y}$ es covariantemente finita, usando el Lema de Wakamatsu, sabemos que hay una sucesión exacta

$$0 \to K \xrightarrow{g} Y^K \to X^K \to 0$$

tal que g es una $\mathscr{Y}$-aproximación mínima y X^K esta en $\mathscr{X}$. Así tenemos un diagrama exacto de coproducto fibrado

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & Y^K & \to & X & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & X^K & = & X^K & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Como $\mathscr{X}$ es cerrada bajo extenciones y los objetos P y X^K están en tenemos que $0 \to Y^K \to X \to F \to 0$ satisface las condiciones deseadas.

(b) Como $\mathscr{Y}$ es covariantemente finita, cerrada bajo extensiones y contiene a los inyectivos, sabemos de la proposición 6.19 que $\mathscr{Y} = \{Y \text{ en } \mathrm{mod}(\mathbf{C}) | \mathrm{Ext}^1(\mathscr{X}, Y) = 0\}$. Como $\mathscr{X}$ es resolvente, sabemos del lema 6.20 que $\mathscr{Y} = \mathscr{X}^{\perp}$.

(c) El hecho de que hay una sucesión exacta $0 \to F \to Y^F \to X^F \to 0$ que satisface (i) y (ii) ha sido probado en la proposición 6.17. Que satisface (iii) es consecuencia de que que $\mathscr{X} =^{\perp} \mathscr{Y}$.

(d) Es dual a (c). □

Dada una categoría covariantemente finita y coresolvente $\mathscr{Y}$, denotamos ${}^{\perp}\mathscr{Y}$ por $\mathscr{X}$ y se denota $\mathscr{Y} \cap \mathscr{X}$ por ω. Con esta notación en mente, tenemos el siguinte resultado.

Proposición 6.23. *Sea $\mathscr{Y}$ una subcategoría covarientemente finita y resolvente de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*. Entonces, $\omega = \mathscr{Y} \cap \mathscr{X}$ tiene las siguientes propiedades:*

(a) *ω es auto ortogonal.*

(b) *Para cada X en $\mathscr{X}$ hay una sucesión exacta $0 \to X \to W \to X' \to 0$ con W en ω y X' en $\mathscr{X}$.*

(c) *Para cada Y en $\mathscr{Y}$ hay una sucesión exacta $0 \to Y' \to W \to Y \to 0$ con W en ω y Y' en $\mathscr{Y}$.*

Demostración. (a) Es inmediata de la definición de ω. (b) y (c) están probadas en proposición 6.18. $\square$

En lugar de empezar la proposición 6.22 con una subcategoría $\mathscr{Y}$ covariantemente finita y coresolvente de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, pudimos iniciar con una subcategoría $\mathscr{X}$ que fuera contravariantemente finita y resolvente y obtener un resultado dual a la proposición 6.22. Esto muestra que hay una biyección entre subcategorías covariantemente fininitas resolventes y subcategorías contravariantemente finitas resolventes en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ dada por $\mathscr{Y} \mapsto^{\perp} \mathscr{Y}$ con inversa $\mathscr{X} \mapsto \mathscr{X}^{\perp}$.

6.2.3. Categorías de inclinación y covariantemente finitas

En esta parte se verá que hay una relación entre subcategorías de inclinación en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y subcategorías covariantemente finitas y co-resolventes de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

Sea ω una subcategoría auto ortogonal de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ se define la categoría $\mathscr{Y}_\omega$ de $\omega^{\perp}$ cuyos objetos son los F para los que existe una sucesión exacta:

$$\cdots \to T_{i+1} \xrightarrow{d_i} T_i \to \cdots \to T_1 \xrightarrow{d_0} T_0 \to F \to 0$$

tales que T_i esta en ω, y $\mathrm{Im}(d_i)$ está en $\omega^{\perp}$. Obsérvese que ω es un generador de $\mathscr{Y}_\omega$ y como $\mathscr{Y}_\omega \subset \omega^{\perp}$, entonces $\omega \subset^{\perp} \mathscr{Y}_\omega$, i.e, ω es un generador proyectivo de $\mathscr{Y}_\omega$.

Por lo mencionado anteriormente, nos conviene que ω represente una subcategoría cerrada bajo sumandos. Tenemos una consecuencia importante que nos será util mas delante

Proposición 6.24. *Sea ω una subcategoría auto ortogonal de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. *Si ω es un generador de $\omega^{\perp}$, entonces $\mathscr{Y}_\omega = \omega^{\perp}$*

Demostración. Sólo necesita probarse que $\omega^{\perp} \subset \mathscr{Y}_\omega$. Como ω es generador de $\omega^{\perp}$, entonces para cada F en $\omega^{\perp}$ hay una sucesión exacta corta $0 \to F'_0 \to W_0 \to F \to 0$ en $\omega^{\perp}$, con W_0 en ω, de manera recursiva hay una sucesión exacta $0 \to F'_i \to W_i \to F'_{i-1} \to 0$ en $\omega^{\perp}$, con W_i en ω para toda $i > 1$. Asi, de la existencia de la sucesión $\cdots \to W_1 \to W_0 \to F \to 0$, se sigue que F esta en $\mathscr{Y}_\omega$. $\square$

En [AR1 Prop.5.1] está probado el dual de la siguiente proposición:

Proposición 6.25. *Para una categoría auto ortogonal ω la categoría $\mathscr{Y}_\omega$ es cerrada bajo extensiónes, cokerneles de monomorfismos, y sumandos directos.*

Es de interés estudiar $\mathscr{Y}_\omega$ cuando $(\check{\mathscr{Y}}_\omega)_n = \mathrm{mod}(\mathbf{C})$, para algún entero $n \geq 0$, pues esto da una conexión entre subcategorías covariantemente finitas que son resolventes de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ y subcategorías de inclinación. Para ello será de suma importancia la siguiente:

Proposición 6.26. *Sea $\mathscr{Y}$ es una subcategoría de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *tal que es aditivamence cerrada y cerrada bajo extensiones con generador proyectivo ω. Si $\check{\mathscr{Y}}_n = \mathrm{mod}(\mathbf{C})$, entonces:*

(a) *$\mathscr{Y}$ es covariantemente finita en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

(b) *$\mathscr{X} =^{\perp} \mathscr{Y} = \check{\omega}_n$.*

Demostración. (a) Supongamos que $\operatorname{mod}(\mathbf{C}) = \check{\mathscr{Y}}_n$, entonces cada F en $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$ tiene una $\mathscr{Y}$-aproximación izquierda $0 \to F \to Y^F \to X^F \to 0$, con Y^F en $\mathscr{Y}$ y X^F en $\check{\omega}_{n-1}$. Por la proposición 6.5, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to (X^F, \ )|\mathscr{Y} \to (Y^F, \ )|\mathscr{Y} \to (F, \ )|\mathscr{Y} \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{C}}(X^F, \ )|\mathscr{Y} = 0$$

es decir $\mathscr{Y}$ es covariantemente finita.

(b) Por la proposición 6.8 tenemos que $\check{\omega}_n =^{\perp} \mathscr{Y} \cap \check{\mathscr{Y}}_n$. Pero si $\check{\mathscr{Y}}_n = \operatorname{mod}(\mathbf{C})$, entonces $\check{\omega}_n =^{\perp} \mathscr{Y} \cap \operatorname{mod}(\mathbf{C}) =^{\perp} \mathscr{Y}$. □

Consideremos un entero positivo $n \geq 0$, se denota con $\mathcal{P}^n(\mathbf{C})$ la subcategoría de $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$ cuyos objetos tienen dimensión proyectiva menor o igual que n. Análogamente $\mathcal{I}^n(\mathbf{C})$ denota la subcategoría de $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$ cuyos objetos tienen dimensión inyectiva menor o igual que n.

Proposición 6.27. *Sea $\mathscr{Y}$ una subcategoría covariantemente finita y co-resolvente de* $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$, *y $\mathscr{X} =^{\perp} \mathscr{Y}$ la subcategoría contravariantemente finita y resolvente asociada de* $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$. *Entonces, $\check{\mathscr{Y}}_n = \operatorname{mod}(\mathbf{C})$ si, y solo si, $\mathscr{X} \subset \mathcal{P}^n(\mathbf{C})$.*

Demostración. Supongamos primero que $\check{\mathscr{Y}}_n = \operatorname{mod}(\mathbf{C})$. Sea X en $\mathscr{X}$, se probaremos que $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{C}}(X, \check{\mathscr{Y}}_n) = 0$, para todo $i > n$. Sea F en $\check{\mathscr{Y}}_n$ entonces hay una sucesion exacta

$$0 \to F \to Y^0 \xrightarrow{d_0} Y^1 \to \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} Y^{n-1} \to Y^n \to 0.$$

De la sucesión exacta $0 \to \operatorname{Im} d_{n-1} \to Y^{n-1} \to Y^n \to 0$ y la sucesión larga de homología obtenemos la siguiente la sucesión exacta:

$$0 = \operatorname{Ext}^i(X, Y^{n-1}) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathbf{C}}(X, Y^n) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_{\mathbf{C}}(X, \operatorname{Im} d_{n-1}) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_{\mathbf{C}}(X, Y^{n-1}) = 0$$

para $i > 1$, y $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{C}}(X, \operatorname{Im} d_{n-1}) = 0$, para $i > 1$. De las misma forma, yendo hacia atras, se sigue que $\operatorname{Ext}^i(X, \operatorname{Im} d_1) = 0$, para $i > n$. Usando este hecho, y la sucesión larga de homología, tenemos que $\operatorname{Ext}^i(X, F) = 0$, para todo $i > n$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{X} \subset \mathcal{P}^n(\mathbf{C})$. Sea F en $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$, se probará que F está en $\check{\mathscr{Y}}_n$. Por la proposición 6.22 $\mathscr{X}$ es una subcategoría contravariantemente finita y resolvente de $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$, y $\mathscr{X}^{\perp} = (^{\perp}\mathscr{Y})^{\perp} = \mathscr{Y}$. Entonces, $\operatorname{Ext}^{i+n}(\mathscr{X}, F) = 0$, $i > 0$. Sea una resolución de F

$$0 \to F \to I^0 \to \cdots \to I^{n-1} \to \Omega^{-n} F \to 0$$

donde cada I^i es inyectivo. Entonces, $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, \Omega^{-n} F) \cong \operatorname{Ext}^{n+i}_{\mathbf{C}}(\mathscr{X}, F) = 0$, para $i > 0$, es decir $\Omega^{-n} F$ está en $\mathscr{X}^{\perp} = (^{\perp}\mathscr{Y})^{\perp} = \mathscr{Y}$ y F está en $\check{\mathscr{Y}}_n$, pues $\mathscr{Y}$ contiene a los inyectivos por ser resolvente. □

Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 6.28. *Sea $\mathscr{Y}$ una subcategoría covariantemente finita y co-resolvente de* $\operatorname{mod}(\mathbf{C})$. *Pongamos $\mathscr{X} =^{\perp} \mathscr{Y}$ y $\omega = \mathscr{Y} \cap \mathscr{X}$. Entonces, las siguientes afirmaciones ocurren:*

(a) *$\mathscr{Y} = \omega^{\perp}$ si, y solo si, $\mathscr{X} \cap \omega^{\perp} = \omega$.*

(b) *Si* ${}^{\perp}\mathscr{Y} \subset \mathcal{P}^n(\mathbf{C})$, *entonces* $\mathscr{Y} = \omega^{\perp}$.

Demostración. (a) Si $\mathscr{Y} = \omega^{\perp}$, es claro que $\mathscr{X} \cap \omega^{\perp} = \omega$. Como $\omega \subset^{\perp} \mathscr{Y}$, entonces $\mathscr{Y} = ({}^{\perp}\mathscr{Y})^{\perp} \subset \omega^{\perp}$. Entonces, sólo falta ver que $\omega^{\perp} \subset \mathscr{Y}$, si $\mathscr{X} \cap \omega^{\perp} = \omega$. Sea C en $\omega^{\perp}$. Como $\mathscr{Y}$ es covariantemente y coresolvente hay una sucesión exacta (*) $0 \to C \to Y \to X \to 0$, con Y en $\mathscr{Y}$ y X en $\mathscr{X}$. Como C y Y están en $\omega^{\perp}$ se sigue que X esta en $\omega^{\perp}$, i.e, X está en $\omega^{\perp} \cap \mathscr{X} = \omega$, entonces la sucesión (*) se escinde, y C está en $\mathscr{Y}$.

(b) Si ${}^{\perp}\mathscr{Y} \subset \mathcal{P}^n(\mathbf{C})$ se sigue de la proposición 6.27 que $\mathrm{mod}(\mathbf{C}) = \check{\mathscr{Y}}_n$. De la proposición 6.26 se tiene que $\check{\omega}_n =^{\perp} \mathscr{Y} \cap \check{\mathscr{Y}}_n =^{\perp} \mathscr{Y}$ de modo que $\mathscr{X} \cap \omega^{\perp} = \check{\omega}_n \cap \omega^{\perp}$. Entonces por la parte (a) basta verificar que $\omega = \check{\omega}_n \cap \omega^{\perp}$. Claramente $\omega \subset \check{\omega}_n \cap \omega^{\perp}$. Sea Y en $\check{\omega}_n \cap \omega^{\perp}$, se afirma que Y esta en ω. Para verificar la afirmación se procede por induccion sobre n. Si $n = 0$ entonces $\check{\omega}_0 = \omega$ y la afirmación es cierta. Suponemos que es cierta para $n - 1 > 0$. Sea Y en $\check{\omega}_n \cap \omega^{\perp}$, entonces se tiene una sucesión exacta

$$0 \to Y \to W_0 \xrightarrow{d_1} W_1 \to \cdots \to W_{n-1} \xrightarrow{d_n} W_n \to 0$$

con W_i en ω. Como $\omega^{\perp}$ es cerrada bajo cokerneles de monomorfismos, entonces $\mathrm{Im}(d_1)$ esta en $\omega^{\perp}$. Se sigue que $W' = \mathrm{Im}(d_1)$ está en $\check{\omega}_{n-1} \cap \omega^{\perp}$ y por hipótesis de inducción $W' = \mathrm{Im}(d_1)$ está en ω, así tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to Y \to W_0 \to W_1' \to 0$$

con Y en $\omega^{\perp}$ y W_1' está en ω. La cual se escinde y Y es sumando de ω, como ω es cerrada bajo sumandos se sigue que Y está en ω, como se quería. $\square$

Tenemos la siguiente versión de los resultados en [AR1]

Proposición 6.29. *Sea ω una subcategoría auto ortogonal de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. *Entonces,*

(a) *Si ω es una subcategoría de inclinación en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *tal que* $\mathrm{pdim}\omega \leq n$ *y ω es un generador de $\omega^{\perp}$, entonces* $(\check{\mathscr{Y}}_{\omega})_n = \mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

(b) *Si* $(\check{\mathscr{Y}}_{\omega})_n = \mathrm{mod}(\mathbf{C})$, *entonces ocurre lo siguiente:*

   (i) $\mathscr{Y}_{\omega}$ *es covariantemente finita y co-resolvente.*

   (ii) *La categoría ω es una subcategoría de inclinación de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *con* $\mathrm{pdim}\omega \leq n$ *y $\check{\omega}_n$ contiene a los objetos proyectivos.*

Demostración. (a) Supongamos que ω es una categoría de inclinación y ω es un generador de $\omega^{\perp}$. Entonces $\mathscr{Y}_{\omega} = \omega^{\perp}$ por el lema 6.24. Sea F un objeto en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, se probará que F esta en $(\check{\omega^{\perp}})_n$. Como $\mathrm{pdim}\omega \leq n$, tenemos que $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(\omega, F) = 0$, para toda $i > n$. Sea $0 \to F \to I^0 \to I^1 \to \cdots \Omega^{-n}F \to 0$ una resolución inyectiva mínima de F, entonces $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(\omega, \Omega^{-n}F) = \mathrm{Ext}^{i+n}_{\mathbf{C}}(\omega, F) = 0$, para toda $i > 0$. Entonces, $\Omega^{-n}F$ esta en $\omega^{\perp}$ y como $\omega^{\perp}$ contiene a todos los inyectivos se sigue que F esta en $(\check{\omega^{\perp}})_n$.

(b) (i) Supóngase que $(\check{\mathscr{Y}}_{\omega})_n = \mathrm{mod}(\mathbf{C})$. Por las proposición 6.26, sabemos que $\check{\mathscr{Y}}_{\omega}$ es covariantemente finita y ${}^{\perp}\mathscr{Y}_{\omega} = \check{\omega}_n$. Por la proposición 6.25, $\mathscr{Y}_{\omega}$ es cerrada bajo extensiones, cokerneles de monomorfismos y sumandos directos, para ver que es resolvente sólo necesita verse que $\mathscr{Y}_{\omega}$ contiene a los inyectivos. Como $(\check{\mathscr{Y}}_{\omega})_n = \mathrm{mod}(\mathbf{C})$, entonces para todo inyectivo I hay una sucesión exacta $0 \to I \to Y \to Y' \to 0$, donde Y esta en $\mathscr{Y}_\omega$ y Y' en $(\check{\mathscr{Y}}_\omega)_{n-1}$, la cual obviamente se divide, mostrando que I es un sumando de Y, y como $\mathscr{Y}_\omega$ es cerrada bajo sumandos entonces I esta en $\mathscr{Y}_\omega$.

(ii) Tenemos que $\mathscr{Y}_\omega$ es covariantemente finita, co-resolvente y ${}^\perp\mathscr{Y}_\omega = \check{\omega}_n$ por (b)(i). De la proposición 6.27 tenemos que $\mathrm{pdim}({}^\perp\mathscr{Y}_\omega) = n$. Entonces, $\mathrm{pdim}(\check{\omega}_n) = \mathrm{pdim}({}^\perp\mathscr{Y}_\omega) = n$, y como $\omega \subset \check{\omega}_n$, entonces, $\mathrm{pdim}\omega \leq n$. Por otro lado, es obvio que cada proyectivo está en ${}^\perp\mathscr{Y}_\omega = (\check{\omega})_n$. □

Sea Λ un álgebra de artin, y T módulo auto ortogonal en mod Λ. En [AR1 Teo.5.5] prueban que las funciones $T \mapsto T^\perp$, $\mathscr{Y} \mapsto \mathscr{Y} \cap^\perp \mathscr{Y}$ inducen una biyección entre clases de módulos de inclinación y subcategorías covariantemente finitas y co-resolventes de mod Λ. Para hacer esto, primero prueban que si T es un módulo de inclinación en mod Λ, entonces $\mathscr{Y}_T = T^\perp$, i.e, add$T$ es un generador de $T^\perp$. Como variación de dicho resultado, aquí se tiene el siguiente:

Teorema 6.30. *$\omega \mapsto \omega^\perp$ y $\mathscr{Y} \mapsto \mathscr{Y} \cap^\perp \mathscr{Y}$ inducen una biyección entre clases de equivalencia de subcategorías de inclinación ω de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$*, con* $\mathrm{pdim}\omega \leq n$*, tales que ω es un generador de $\omega^\perp$ y subcategorías $\mathscr{Y}$ de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *que son covariantemente finitas y co-resolventes, cuyo complemento ortogonal izquierdo ${}^\perp\mathscr{Y}$ está contenido en* $\mathcal{P}^n(\mathbf{C})$

Demostración. (1) Sea ω una subcategoría de inclinación de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ tal que $\mathrm{pdim}\omega \leq n$, tal que ω es un generador proyectivo de $\omega^\perp$. Como ω es un generador de $\omega^\perp$, entonces $\mathscr{Y}_\omega = \omega^\perp$, por la proposición 6.24. Por la proposición 6.29 tenemos que $(\check{\mathscr{Y}}_\omega)_n = \mathrm{mod}(\mathbf{C})$, lo que a su vez implica que $\mathscr{Y}_\omega = \omega^\perp$ es covariantemente finita y co-reolvente, y por consiguiente tenemos que ${}^\perp\mathscr{Y}_\omega \subset \mathcal{P}^n(\mathbf{C})$, por la proposición 6.27.

(2) Sea $\mathscr{Y}$ una subcategoría de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ covariantemente finita y co-resolvente tal que ${}^\perp\mathscr{Y} \subset \mathcal{P}^n(\mathbf{C})$ y $\omega =^\perp \mathscr{Y} \cap \mathscr{Y}$. Entonces $(\check{\mathscr{Y}})_n = \mathrm{mod}(\mathbf{C})$, por la proposición 6.27. Además, se tiene que $\mathscr{Y} \subset \mathscr{Y}_\omega$, por la proposición 6.22, se sigue inmediatamente que $(\check{\mathscr{Y}}_\omega)_n = (\check{\mathscr{Y}})_n = \mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

Entonces, por la proposición 6.29, se sigue que ω es una subcategoría de inclinación de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, tal que $\mathrm{pdim}\omega \leq n$, y $\mathscr{Y}_\omega$ es una subcategoría covariantemente finita y coreolvente de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. Además, por la proposición 6.26, tenemos que ${}^\perp\mathscr{Y}_\omega =^\perp \mathscr{Y} = (\check{\omega})_n$, y por lo tanto $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}_\omega$. La condición ${}^\perp\mathscr{Y} \subset \mathcal{P}^n(\mathbf{C})$ implica que $\mathscr{Y} = \omega^\perp$, por la proposición 6.28. Entonces, ω es un generador de $\mathscr{Y}_\omega = \mathscr{Y} = \omega^\perp$

Para ver la biyección verificamos que la composiciónes

$$\omega \mapsto \omega^\perp \mapsto (\omega^\perp) \cap^\perp (\omega^\perp), \quad \mathscr{Y} \mapsto (\mathscr{Y} \cap^\perp \mathscr{Y}) \mapsto (\mathscr{Y} \cap^\perp \mathscr{Y})^\perp$$

son ω y $\mathscr{Y}$ respectivamente.

Sea ω una subcategoría de inclinación de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ tal que $\mathrm{pdim}\omega \leq n$. Se probó en (1) que $\mathscr{Y}_\omega = \omega^\perp$ es una subcategoría covariantemente finita, co-resolvente tal que $(\check{\mathscr{Y}}_\omega)_n = \mathrm{mod}(\mathbf{C})$. Veamos que $\mathscr{Y}_\omega \cap^\perp \mathscr{Y}_\omega = \omega$. Se tiene ${}^\perp\mathscr{Y}_\omega = \check{\omega}_n$, por la proposición 6.26, entonces $\mathscr{Y}_\omega \cap^\perp \mathscr{Y}_\omega = \check{\omega}_n \cap \omega^\perp = \omega$, como se ve en demostración de la proposición 6.28.

Sea $\mathscr{Y}$ una subcategoría de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ covarientemente finita y co-resolvente tal que ${}^\perp\mathscr{Y} \subset \mathcal{P}^n(\mathbf{C})$ entonces si $\omega =^\perp \mathscr{Y} \cap \mathscr{Y}$, se sigue de la parte (b) de la proposición 6.28 que $\omega^\perp = \mathscr{Y}$. □

Enunciamos el dual del teorema 6.30.

Teorema 6.31. *$\omega \mapsto \omega^{\perp}$ y $\mathscr{X} \mapsto \mathscr{X} \cap \mathscr{X}^{\perp}$ inducen una biyección entre clases de equivalencia de subcategorías de co-inclinación ω de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, con $\mathrm{idim}\omega \leq n$, tales que ω es co-generador de ${}^{\perp}\omega$ y subcategorías $\mathscr{X}$ de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ que son contravariantemente finitas y co-resolventes, cuyo complemento ortogonal derecho $\mathscr{X}^{\perp}$ está contenido en $\mathcal{I}^{n}(\mathbf{C})$*

Corolario 6.32. *Sea ω una subcategoría de inclinación de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, tal que ω es un generador de $\omega^{\perp}$. Si $\mathrm{gdim}\mathbf{C} < \infty$, entonces ω es una subcategoría de co-inclinación en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$.*

Demostración. Sabemos que $\mathscr{Y}_{\omega}$ es una subcategoría de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ que es covariantemente finita y co-resolvente. Como $\mathrm{gdim}\mathbf{C} < \infty$, se tiene que $\mathscr{X} =^{\perp} \mathscr{Y}_{\omega} \subset \mathcal{I}^{m}(\mathbf{C})$ es una subcategoría contravariantemente finita y resolvente de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, con $m = \mathrm{gdim}\mathbf{C}$. Por el teorema 6.30 se sabe que $\omega = \mathscr{Y}_{\omega} \cap^{\perp} \mathscr{Y}_{\omega}$. Pero la igualdad $\mathscr{Y}_{\omega} \cap^{\perp} \mathscr{Y}_{\omega} = \mathscr{X} \cap \mathscr{X}^{\perp}$ implica que ω es una subcategoría de co-inclinación de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, por el teorema 6.31. □

6.2.4. Categorías de Inclinación en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$

En esta sección usaremos los resultados obtenidos previamente, para probar que una subcategoria de inclinación contravariantemente finita $\mathcal{T}$ de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ satisface la condición (iii'). Necesitaremos lo siguiente

Proposición 6.33. *Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación contravariantemente finita de $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$. Entonces, para cada F en $\mathcal{T}^{\perp}$, existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to F' \to T \xrightarrow{h} F \to 0$$

tal que $h : T \to F$ es una $\mathcal{T}$-aproximación mínima derecha de F y $F' \in \mathcal{T}^{\perp}$. Esto es: $\mathcal{T}$ es un generador de $\mathcal{T}^{\perp}$, y en consecuencia, $\mathscr{Y}_{\mathcal{T}} = \mathcal{T}^{\perp}$.

Demostración. Sea F en $\mathcal{T}^{\perp}$, y sea $(\ \ , C) \to F \to 0$ su cubierta proyectiva. Además, $(\ \ , C)$ está en $\check{\mathcal{T}}$, por lo que tenemos el siguiente diagrama exacto conmutativo de coproducto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\ \ , C) \arrow[r] \arrow[d] & T_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & T_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & T_m \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] & W \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

con T_i en $\mathcal{T}$, y $L = \mathrm{Im}(g)$. Como L está en $\check{T}$, entonces $\mathrm{Ext}^{i}_{\mathbf{C}}(L, \mathcal{T}^{\perp}) = 0$ para $i > 0$. Así, la sucesión $0 \to F \to W \to L \to 0$ se escinde y tenemos un epimorfiso $T_0 \xrightarrow{f} F \to 0$. Ahora bien, como $\mathcal{T}$ es covariantemente finita en $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$, podemos escoger una $\mathcal{T}$-aproximación derecha $T \xrightarrow{h} F$, entonces existe un morfismo $T_0 \xrightarrow{k} T$, el cual hacer conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& T_0 \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "f"] \\
T \arrow[r, "h"] & F \arrow[d] \\
& 0
\end{tikzcd}$$

se sigue que la $\mathcal{T}$-aproximación derecha h es epimorfismo. Así, por el Lema de Wakamatsu, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(h) \to T \xrightarrow{h} F \to 0$$

tal que h es una $\mathcal{T}$-aproximación mínima derecha y $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}, \mathrm{Ker}(h)) = 0$. Entonces, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to (\ \ , \mathrm{Ker}(h))_{\mathcal{T}} \to (\ \ , T)_{\mathcal{T}} \xrightarrow{(\ \ ,h)} (\ \ , F)_{\mathcal{T}} \to 0$$

Se sigue entonces de la sucesión larga de homologia que $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}, \mathrm{Ker}(h)) = 0$, para toda $i > 0$, es decir $\mathrm{Ker}(h)$ esta en $\mathcal{T}^{\perp}$. $\square$

Tenemos el siguiente resultado principal de esta sección, el cual es consecuencia de la proposición 6.33 y la proposición 6.29.

Teorema 6.34. *Sea* $\mathbf{C}$ *una R-variedad Krull-Schmidt dualizante, y* $\mathcal{T}$ *una subcategoría de inclinación de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *con pseudokerneles. Entonces* $\mathcal{T}$ *satisface la condición (iii').*

y como consecuencia el siguiente corolario:

Corolario 6.35 (Happel)**.** *Sea* $\mathbf{C}$ *una R-variedad Krull-Schmidt dualizante y* $\mathcal{T}$ *una subcategoría de inclinación generalizada de* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$ *con pseudokerneles. Entonces,*

(a) el par de funtores $\mathbf{R}^{+,b}\phi : D^b(\mathrm{mod}(\mathbf{C})) \to D^b(\mathrm{mod}(\mathcal{T}))$, $L^{-,b}-\otimes\mathcal{T} : D^b(\mathrm{mod}(\mathcal{T})) \to D^b(\mathrm{mod}(\mathbf{C}))$ *induce una equivalencia de categorías derivadas,*

(b) la subcategoría plena $\theta = \{((\ \ , C,\ \ )_{\mathcal{T}}\}_{C \in \mathbf{C}}$ *de* $\mathrm{mod}(\mathcal{T}^{op})$ *es una categoría de inclinación, que satisface la condición (iii'), la cual es equivalente a la categoría* $\mathbf{C}^{op}$.

Para probar el resto de los resultados de esta sección necesitaremos el siguiente resultado probado en [AR1 Prop.5.9]:

Proposición 6.36. *Sea* (F, G) *un par de funtores adjuntos tales que* $F : \mathrm{mod}(\mathbf{C}) \to \mathrm{mod}(\mathcal{T})$, $G : \mathrm{mod}(\mathcal{T}) \to \mathrm{mod}(\mathbf{C})$. *Sea* $\mathscr{Y} \subset \mathrm{mod}(\mathbf{C})$, *tal que el isomorfismo natural* $GF \to I$, *donde* I *es la identidad, es un isomorfismo sobre los objetos de* $\mathscr{Y}$ *y* $\mathscr{X} \subset \mathrm{mod}(\mathcal{T})$ *tal que el isomorfismo natural* $I \to FG$ *es un isomorfismo en los objetos de* $\mathscr{X}$, *y supongamos que* $F(\mathscr{Y}) \subset \mathscr{X}$ *y* $G(\mathscr{X}) \subset \mathscr{Y}$

(a) *Si* $\mathscr{X}$ *es contravariantemente finita en* $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$, *entonces* $\mathscr{Y}$ *es contravariantemente finita en* $\mathrm{mod}(\mathbf{C})$.

(b) *Si* $\mathscr{Y}$ *es covariantemente finita en* $\text{mod}(\mathbf{C})$*, entonces* $\mathscr{X}$ *es covariantemente en* $\text{mod}(\mathbf{C})$

Supongamos que $\mathcal{T}$ una subcategoría de inclinación de $\text{mod}(\mathbf{C})$, con $\text{pdim}\mathcal{T} \leq f$, que es contravariantemente finita $\text{mod}(\mathbf{C})$. Por la proposición 6.33 $\mathcal{T}$ es un generador de $\mathcal{T}^{\perp}$, entonces por la proposición 6.29 se tiene que $(\check{\mathcal{T}})_f$ contiene a los proyectivos de $\text{mod}(\mathbf{C})$, y $\mathscr{Y}_{\mathcal{T}} = \mathcal{T}^{\perp}$ es covariantemente finita y corresolvente. Se sigue del corolario 6.35 que $\mathcal{B} = \{((\ \ ,C),\ \ )_T\}_{C\in\mathbf{C}}$ es una subcategoría de inclinación en $\text{mod}(\mathcal{T}^{op})$. De modo que si $\mathcal{T}$ es funtorialmente finita, tenemos que $\mathcal{T}$ es dualizante por la proposición 5.11 y por lo tanto $D\mathcal{B}$ es una subcategoría de co-inclinación en $\text{mod}(\mathcal{T})$.

Proposición 6.37. *Sea* $\mathcal{T}$ *una subcategoría de inclinación en* $\text{mod}(\mathbf{C})$*, con* $\text{pdim}\mathcal{T} \leq n$*. Si* $\mathcal{T}$ *es funtorialmente finita, entonces*

(a) *El par de funtores* $(\phi, -\otimes\mathcal{T})$ *inducen una equivalencia de categorías entre* $\mathscr{Y}_{\mathcal{T}} \subset \text{mod}(\mathbf{C})$ *y* ${}^{\perp}D\mathcal{B} \subset \text{mod}(\mathcal{T})$

(b) $D\mathcal{B}$ *es un generador de* ${}^{\perp}D\mathcal{B}$*, y por lo tanto* ${}^{\perp}D\mathcal{B}$ *es contravariantemente finita.*

(c) $\mathscr{Y}_{\mathcal{T}}$ *es es funtorialmente finita y co-resolvente*

Demostración. (a) Supongamos que F está en $\mathscr{Y}_{\mathcal{T}}$, entonces tenemos una sucesión exacta

$$T. \to F \to 0 \quad : \quad \cdots \to T_2 \xrightarrow{d_1} T_1 \xrightarrow{d_0} T_0 \to F \to 0 \tag{6.9}$$

tal que $\text{Im}(d_i)$ está en $\mathcal{T}^{\perp}$. Entonces, al aplicar ϕ a la sucesión (6.9) obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$(\ \ ,T.) \to \phi(F) \to 0 \quad : \quad \cdots \xrightarrow{(\ \ ,d_1)} (\ \ ,T_1) \xrightarrow{(\ \ ,d_0)} (\ \ ,T_0) \to (\ \ ,F)_{\mathcal{T}} \to 0 \tag{6.10}$$

De este modo tenemos una resolución proyectiva de $\phi(F)$. Sea $D((\ \ ,C),\ \ )$ en $D\mathcal{B}$. Así

$$\text{Ext}^i_{\mathcal{T}}(\phi(F), D((\ \ ,C),\ \ )) = H^i(\text{Hom}_{\mathcal{T}}((\ \ ,T.), D((\ \ ,C),\ \ )) = H^i(DT.(C))$$

Como $H^i(T.)$, si $|i| > 0$, se sigue que $H^i(DT.)$, si $|i| > 0$. Entonces, se sigue que $\text{Ext}^i_{\mathcal{T}}(\phi(F), D((\ \ ,C),\ \ )) = 0$ para cada C en $\mathbf{C}$ y toda $i > 0$. Por lo tanto $\phi(F)$ está en ${}^{\perp}D\mathcal{B}$ y como $\otimes\mathcal{T}$ es exacto derecho tenemos que $F \cong \phi(F) \otimes \mathcal{T}$.

Supongamos que G es un $\mathcal{T}$-módulo en ${}^{\perp}D\mathcal{B}$, entonces $\text{Ext}^i_{\mathcal{T}}(G, D((\ \ ,C),\ \ )) = 0$, para todo $i > 0$ y toda C en $\mathbf{C}$. Consideremos una resolución proyectiva para G:

$$(\ \ ,T.) \to G \to 0 \quad : \quad \cdots \to (\ \ ,T_1) \xrightarrow{(\ \ ,d_0)} (\ \ ,T_0) \to G \to 0 \tag{6.11}$$

Entonces , tenemos isomorfismos

$$\text{Ext}^i_{\mathcal{T}}(G, D((\ \ ,C),\ \ )) \cong H^i(\text{Hom}_{\mathcal{T}}((\ \ ,T.), D((\ \ ,C),\ \ )) \cong H^i(DT.(C))$$

se sigue que $H^i(T.) = 0$, si $|i| > 0$. Ponemos $K_i = \text{Im}d_i$, entonces tenemos sucesiones exactas $0 \to K_{i+1} \to T_{i+1} \to K_i \to 0$, para $i \geq 0$. Afirmamos que $K_i \in \mathcal{T}^{\perp}$. En efecto, como no hay auto extensiones en $\mathcal{T}$ y $\text{pdim}\mathcal{T} = f$, hay una cadena de isomorfismos:

$$\text{Ext}^1_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}, K_0) \cong \text{Ext}^2_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}, K_1) \cong \text{Ext}^3_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}, K_2) \cong \cdots \cong \text{Ext}^{f+1}_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}, K_f) = 0$$

Análogamente, para $j > 1$, tenemos

$$\mathrm{Ext}^{j}_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}, K_0) \cong \mathrm{Ext}^{j+1}_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}, K_1) \cong \mathrm{Ext}^{j+2}_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}, K_2) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}^{f+1}_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}, K_{j+f+1}) = 0$$

Por lo que K_0 está en $\mathcal{T}^{\perp}$. Usando inducción, se sigue que K_i está en $\mathcal{T}^{\perp}$, para cada $i > 1$.

Aplicando $\otimes\mathcal{T}$ a la sucesión (6.11), tenemos la sucesión exacta

$$\cdots T_1 \xrightarrow{d_0} T_0 \to G \otimes \mathcal{T} \to 0$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}, \ \ )$ a las sucesiónes

$$0 \to K_0 \to T_0 \to G \otimes \mathcal{T} \to 0$$
$$0 \to K_1 \to T_1 \to K_0 \to 0,$$

se sigue entonces que, de la sucesión larga de homología y del hecho de que K_0 y K_1 están en $\mathcal{T}^{\perp}$, que

$$0 \to (\ \ , K_1) \to (\ \ , T_1) \to (\ \ , T_0) \to (\ \ , G \otimes \mathcal{T}) \to 0 \tag{6.12}$$

es exacta y que $\mathrm{Ext}^{i}_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}, G \otimes \mathcal{T}) = 0$ para cada $i > 0$, i.e, $G \otimes \mathcal{T}$ esta en $\mathcal{T}^{\perp}$. Más aún de (6.11) y de (6.12) se ve inmediatamente que $\phi(G \otimes \mathcal{T}) \cong G$

(b) Obsérvese primero que $\phi D(C, \ \ ) \cong D((\ \ , C), \ \ )_{\mathcal{T}}$ para cualquier C en $\mathbf{C}$. Sea G en ${}^{\perp}D\mathcal{B}$, entonces existe un objeto F en $\mathcal{T}^{\perp}$, tal que $G \cong \phi(F)$, por la equivencia demostrada en la parte (a). Sea $(C, \ \ ) \to DF \to 0$ una cubierta proyectiva de DF, entonces tenemos una sucesión exacta

$$0 \to F \xrightarrow{f} D(C, \ \ ) \to \mathrm{Coker}(f) \to 0$$

Como F y $D(C, \ \ )$ están en $\mathcal{T}^{\perp}$ ($D(\ \ , C)$ es inyectivo), se sigue que $\mathrm{Coker}(f)$ esta en $\mathcal{T}^{\perp}$, de modo que esta es una sucesión exacta en $\mathcal{T}^{\perp}$. Sea $G' = \phi(\mathrm{Coker}(f))$. Se sigue de la sucesión larga de homología que

$$0 \to (\ \ , F)_{\mathcal{T}} \to (\ \ , D(\ \ , C))_{\mathcal{T}} \to (\ \ , \mathrm{Coker}(f))_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Ext}^{1}_{\mathbf{C}}(\ \ , F)_{\mathcal{T}} = 0$$

o lo que es lo mismo,

$$0 \to G \to D((\ \ , C), \ \ ) \to G' \to 0$$

es decir $D\mathcal{B}$ es una subcategoría de co-inclinación de $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$ tal que $D\mathcal{B}$ es un co-generador de ${}^{\perp}D\mathcal{B}$ y se sigue que ${}^{\perp}D\mathcal{B} = \mathscr{X}_{D\mathcal{B}}$ es contravariantemente finita por el teorema 6.31

(c) Se sigue de (b) y del teorema 6.36. □

Tenemos la siguiente :

Pregunta En vista de este teorema es natural hacerce la siguiente pregunta: Si $\mathscr{Y}_{\mathcal{T}}$ es co-resolvente y funtorialmente finita, entonces es $\mathcal{T}$ funtorialmente finita?.

Capítulo 7

El álgebra de matrices triangulares

Sea Λ un álgebra de artin y consideremos la categoría $\mathcal{C} = \text{mod } \Lambda$, la categoría de Λ-módulos finitamente generados. De acuerdo con [ARS], la categoría de maps($\mathcal{C}$) es equivalente a la categoría de Γ-módulos finitamente generados, mod Γ, sobre el álgebra de artin de matrices triangulares $\Gamma = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda \end{pmatrix}$.

En este capítulo probamos que las categorías de inclinación generalizadas de mod($\mathbf{C}$) se corresponden con categorías de inclinación relativas de maps($\mathcal{C}$) [AS1] y que algunas categorías importantes de mod($\mathbf{C}$) relacionadas con las categorías de inclinación, según vimos en el capítulo anterior, como: contravariantemente finita, covariantemente finita, funtorialmente finita, se corresponden con subcategorías de maps($\mathcal{C}$), las cuales tienen propiedades similares.

7.1. Homología relativa

En esta sección recordaremos algúnos conceptos de homología relativa, los cuales fuerón introducidos por Auslander y Solberg [AS1].

Sea Γ una álgebra de artin y mod Γ la categoría de Γ-módulos finitamente generados. En esta parte se veran algunas propiedades de los subfunctores F del bifunctor aditivo $\text{Ext}^1_\Gamma(\ ,\ ) : (\text{mod } \Gamma)^{op} \times \text{mod } \Gamma \to \mathbf{Ab}$.

Sea F un subfuntor de $\text{Ext}^1_\Gamma(\ ,\ )$. Decimos que una sucesión exacta $\eta : 0 \to N \to E \to M \to 0$ en mod Γ es F-exacta, o que es una sucesión exacta relativa a F, si η esta en $F(M,N)$. Un módulo es llamado F-proyectivo, o proyectivo relativo a F, si para cualquier sucesión F-exacta, la sucesión $0 \to (P,N) \to (P,E) \to (P,M) \to 0$ es exacta. Análogamente, un módulo es llamado F-inyectivo, o inyectivo relativo a F, si para cualquier sucesión F-exacta, la sucesión $0 \to (M,I) \to (E,I) \to (N,I) \to 0$ es exacta.

Sea F un subfuntor aditivo de $\text{Ext}^1_\Gamma(\ ,\ )$ con la siguiente propiedad: si para cada Γ-módulo existe una sucesión F-exacta $0 \to N \to P \to M \to 0$, tal que P es proyectivo relativo a F, entonces decimos que F tiene suficientes proyectivos, o que mod Γ tiene sufiencientes proyectivos relativos a F. Dualmente se dice que F tiene suficientes inyectivos, o que mod Γ tiene sufiencietes inyectivos relativos a F, si para cada Γ-módulo N existe una sucesión F-exacta $0 \to N \to I \to M \to 0$, con I inyectivo relativo a F.

Sea M un Γ-módulo, y un subfuntor aditivo F de $\mathrm{Ext}^1_\Gamma(\ ,\ )$. Una resolución

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

es llamada una resolución F-proyectiva si cada P_i es proyectivo relativo a F. Dualmente, una resolución

$$0 \to N \to I_0 \to I_1 \to \cdots$$

es llamada una resolución F-inyectiva si para cada I_i es inyectivo relativo a I.

Pueden definirse los funtores derivados derechos de $\mathrm{Hom}_\Gamma(M,\ )$ y $\mathrm{Hom}_\Gamma(\ ,N)$ para cualesquiera par de Γ-módulos M y N cuando F tiene suficientes proyectivos o suficientes inyectivos. Similarmente como en el caso estándar, el cálculo de los functores derivados derechos de esta manera es independiente de las resoluciones escogidas. Mas aún, si F tiene suficientes proyectivos e inyectivos, los funtores derivados derechos de $\mathrm{Hom}_\Gamma(M,\ )$ y $\mathrm{Hom}(\ ,N)$ usando F-inyectivos y F-proyectivos coinciden. Se denota con $\mathrm{Ext}^i_F(M,\ )$ a los funtores derivados derechos de $\mathrm{Hom}_\Gamma(M,\ )$ y con $\mathrm{Ext}^i_\Gamma(\ ,N)$ a los funtores derivados derechos de $\mathrm{Hom}^i_\Gamma(\ ,N)$ para todos los Γ-módulos M y N. De manera similar a la prueba en donde se demuestra, que $\mathrm{Ext}^1_\Gamma(M,N)$ corresponde a las clases de equivalencia de sucesiónes exactas cortas, puede probarse que, si F tiene suficientes proyectivos o suficientes inyectivos, entonces $\mathrm{Ext}^1_F(M,N) = F(M,N)$.

7.2. El álgebra de matrices triangulares y la categoría maps(modΛ)

Sea $\mathit{\Lambda}$ un álgebra de artin y

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathit{\Lambda} & 0 \\ \mathit{\Lambda} & \mathit{\Lambda} \end{pmatrix}$$

el álgebra de matrices triangulares sobre $\mathit{\Lambda}$. Es sabido que la categoría mod Γ es equivalente a la categoría maps(mod Λ) y en ocaciones nos referiremos a ella como la categoría $\mathit{\Lambda} - \mathrm{maps}$, la categoria de morfismos en $\mathit{\Lambda}$ [Au1].

Recuerdese que la categoria $\mathit{\Lambda} - \mathrm{maps}$ está definida de la siguiente manera:

(a) $\mathrm{Obj}(\mathit{\Lambda} - \mathrm{maps}) = \mathrm{morph}(\mathrm{mod}\Lambda)$, i.e, consiste de todos los morfismos de Λ-módulos.

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathit{\Lambda}-\mathrm{maps}}(g,h) = \{(h_1,h_2) | h_1,h_2 \in \mathrm{morph}(\mathrm{mod}\mathit{\Lambda})\}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[d, "h_2"'] \\ N_1 \arrow[r, "g"] & N_2 \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

Un objeto $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ en la categoría $\Lambda-$ maps suele denotarse con el triple (M_1, M_2, f), y el morfismo (7.1) se representa con el par (h_1, h_2), asi el diagrama (7.1) se denota con $(h_1, h_2) : (M_1, M_2, f) \to (N_1, N_2, g)$.

Dado que las categorías mod Γ y Λ-maps son equivalentes, podemos identificarlas y considerarlas como la misma en lo que sigue.

El diagrama (7.1), induce el siguiente diagrama conmutativo en mod(modΛ)

$$\begin{array}{ccccccc}
(\ ,A_1) & \xrightarrow{(\ ,f_1)} & (\ ,B_1) & \to & \mathrm{Coker}(\ ,f_1) & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle (\ ,h_1)}\downarrow & & {\scriptstyle (\ ,h_2)}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \\
(\ ,A_2) & \xrightarrow{(\ ,f_2)} & (\ ,B_2) & \to & \mathrm{Coker}(\ ,f_2) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

De esta manera puede definirse un functor

$$\phi : \Lambda - \mathrm{maps} \to \mathrm{mod}(\mathrm{mod}\Lambda)$$

como $\phi(f) = \mathrm{Coker}((\ ,f))$ y $\phi((h_1, h_2)) = h$ [Au1].

Proposición 7.1. *Sea Λ un álgebra de artin y sea*

$$0 \to (N_1, N_2, g) \to (E_1, E_2, h) \to (M_1, M_2, f) \to 0$$

una sucesión exacta en $\Lambda-$maps. Denotemos con (N_0, g_0), (E_0, h_0), (M_0, f_0) a los kerneles de los morfismos g, h y f, respectivamente. Supongamos que en el siguiente diagrama exacto conmutativo las columnas se escinden

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & N_0 & \xrightarrow{g_0} & N_1 & \xrightarrow{g} & N_2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & E_0 & \xrightarrow{h_0} & E_1 & \xrightarrow{h} & E_2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & M_0 & \xrightarrow{f_0} & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array} \tag{7.2}$$

Entonces, existe una sucesión exacta de functores en mod(modΛ)

$$0 \to \phi(N) \to \phi(E) \to \phi(M) \to 0.$$

Recíprocamente, dada una sucesión exacta $0 \to G \to H \to F \to 0$ en mod(modΛ), *existe un diagrama conmutativo (7.2) con culumnas que se escinden tal que las siguientes sucesiones*

$$(\ ,N_2) \to (\ ,N_1) \to G \to 0$$
$$(\ ,E_2) \to (\ ,E_1) \to H \to 0$$
$$(\ ,M_2) \to (\ ,M_1) \to F \to 0$$

son exactas

Demostración. Sea un diagrama (7.2), en el cual las columnas se escinden. Por el Lema de la Serpiente tenemos un diagrama exacto conmutativo en mod(modΛ):

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\ ,N_0) & \xrightarrow{(\ ,g_0)} & (\ ,N_1) & \xrightarrow{(\ ,g)} & (\ ,N_2) & \longrightarrow & \phi(g) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\ ,E_0) & \xrightarrow{(\ ,h_0)} & (\ ,E_1) & \xrightarrow{(\ ,h)} & (\ ,E_2) & \longrightarrow & \phi(h) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\ ,M_0) & \xrightarrow{(\ ,f_0)} & (\ ,M_1) & \xrightarrow{(\ ,f)} & (\ ,M_2) & \longrightarrow & \phi(f) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Por otro lado, supongamos que tenemos una sucesión exacta de functor finitamente presentados

$$0 \to G \to H \to F \to 0$$

y

$$0 \to (\ ,N_0) \to (\ ,N_1) \xrightarrow{(\ ,g)} (\ ,N_2) \to G \to 0$$
$$0 \to (\ ,M_0) \to (\ ,M_1) \xrightarrow{(\ ,f)} (\ ,M_2) \to F \to 0$$

son las resoluciones proyectivas mínimas de G y F. Por el Lema de la Herradura, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\ ,N_0) & \xrightarrow{(\ ,g_0)} & (\ ,N_1) & \xrightarrow{(\ ,g)} & (\ ,N_2) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\ ,E_0) & \xrightarrow{(\ ,h_0)} & (\ ,E_1) & \xrightarrow{(\ ,h)} & (\ ,E_2) & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\ ,M_0) & \xrightarrow{(\ ,f_0)} & (\ ,M_1) & \xrightarrow{(\ ,f)} & (\ ,M_2) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

donde $E_0 = N_0 \coprod M_0$ y $E_1 = N_1 \coprod M_1$, $E_2 = N_2 \coprod M_2$. Claramente obtenemos un diagrama (7.2) con culumnas que se escinden y ademas tenemos un diagrama exacto conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \phi(g) & \to & \phi(h) & \to & \phi(f) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

□

A continuación veremos que el tipo de extensiones descritas en la proposición 7.1 definen un subfuntor de $\mathrm{Ext}^1_\Gamma(\ ,\ )$.

Lema 7.2. *Sea $F(M,N)$ el conjunto de extensiones en $\Lambda-$maps*

$$0 \to (N_1,N_2,g) \xrightarrow{j} (E_1,E_2,h) \xrightarrow{p} (M_1,M_2,f) \to 0$$

tal que en el siguiente diagrama exacto conmutativo las columnas se escinden

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & N_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "j_0"'] & N_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j_1"'] & N_2 \arrow[d, "j_2"'] \\
0 \arrow[r] & E_0 \arrow[r, "h_0"] \arrow[d, "p_0"'] & E_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"'] \\
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces, $F(\ ,\ )$ es un subfunctor de $\mathrm{Ext}^1_\Gamma(\ ,\ )$.

Demostración. Sea

$$0 \to N \xrightarrow{q} E \xrightarrow{p} M \to 0 \tag{7.3}$$

un elemento de $F(N,M)$ y

$$\rho = (\rho_1,\rho_2) : (X_1 \xrightarrow{v} X_2) \to (M_1 \xrightarrow{f} M_2)$$

un morfimos en $\Lambda-$maps. Consideremos el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "="'] & W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\psi"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & E \arrow[r, "p"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenemos el siguiente diagrama tridimensional:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & 0 \arrow[dr] & 0 \arrow[dr] & & & & \\
0 \arrow[r] & N_0 \arrow[r, "w_0"] \arrow[dr, "i_0"] \arrow[dd, "="] & N_1 \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "i_1"] & N_2 \arrow[dr, "i_2"] & & & \\
0 \arrow[dr] & 0 \arrow[r] & W_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[dr, "q_0"] \arrow[dd, "\psi_0"] & W_1 \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "q_1"] & W_2 \arrow[dr, "q_2"] & & \\
0 \arrow[r] & N_0 \arrow[dr, "j_0"'] & 0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\rho_0"] & X_1 \arrow[r, "v"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\rho_1"'] & X_2 \arrow[dr] \arrow[dd, "\rho_2"'] & \\
& 0 \arrow[r] & E_0 \arrow[dr, "p_0"'] & & 0 & 0 & 0 \\
& & 0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[dr] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & M_2 \arrow[dr] & \\
& & & & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

cuyas caras verticales son:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_k \arrow[r, "i_k"] \arrow[d, "="'] & W_k \arrow[r, "q_k"] \arrow[d, "\psi_k"'] & X_k \arrow[r] \arrow[d, "\rho_k"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_k \arrow[r, "j_k"] & E_k \arrow[r, "p_k"] & M_k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

para $k = 0, 1, 2$.

Como cada extensión $0 \to N_k \xrightarrow{j_k} E_k \xrightarrow{p_k} 0$ se escinde, entonces existen morfismos $t_k : E_k \to N_k$ tales que $t_k j_k = 1_{N_k}$. Se sigue entonces que para cada $k = 0, 1, 2$

$$(t_k \psi_k) i_k = t_k(\psi_k i_k) = t_k j_k = 1_{N_k}$$

por lo que las columnas del siguiente diagrama conmutativo excacto se escinden,

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & N_0 \arrow[r, "w_0"] \arrow[d, "i_0"'] & N_1 \arrow[r, "w"] \arrow[d, "i_1"'] & N_2 \arrow[d, "i_2"'] \\
0 \arrow[r] & W_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[d, "q_0"'] & W_1 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q_1"'] & W_2 \arrow[d, "q_2"'] \\
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d] & X_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d] & X_2 \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

de este modo $0 \to N \xrightarrow{i} W \xrightarrow{q} X \to 0$ esta en $F(N, X)$.

Dualmente, con argumento similar se puede probar que si $\rho = (\rho_1, \rho_2) : (N_1, N_2, g) \to (X_1, X_2, w)$ es un morfismo en $\Lambda -$ maps, al tomar coproducto-fibrado

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & N & \overset{q}{\to} & E & \overset{p}{\to} & M & \to & 0 \\
 & & \rho\downarrow & & \psi\downarrow & & =\downarrow & & \\
0 & \to & X & \overset{i}{\to} & W & \overset{q}{\to} & M & \to & 0
\end{array}$$

La extensión $0 \to X \to W \to M$ esta en $F(X, M)$. □

Lema 7.3. *El funtor F tiene suficientes proyectivos y suficientes inyectivos. Los proyectivos relativos a F son de la forma:*

$$0 \to M \text{ y } M \xrightarrow{1_M} M$$

Los inyectivos relativos a F son de la forma:

$$M \to 0 \text{ y } M \xrightarrow{1_M} M$$

Demostración. Una sucesión exacta de la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & N_0 & \overset{g_0}{\to} & N_1 & \overset{g}{\to} & N_2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & E_0 & \overset{h_0}{\to} & E_1 & \overset{h}{\to} & E_2 \\
 & & \downarrow & & p_1\downarrow & & p_2\downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \overset{0}{\to} & M & \overset{1_M}{\to} & M \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

tal que las columnas se escinden debe escindirse. En efecto, sean $s_i : M_i \to E_i$ tales que $p_i s_i = 1_{M_i}$, $i = 1, 2$. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
M & \overset{1_M}{\longrightarrow} & M \\
s_1\downarrow & & s_2\downarrow \\
E_1 & \overset{h}{\longrightarrow} & E_2 \\
p_1\downarrow & & p_2\downarrow \\
M & \overset{1_M}{\longrightarrow} & M
\end{array}$$

por lo que la sucesión exacta se escinde.

De mismo modo se puede ver que la siguiente sucesión exacta en $\Lambda-$maps con columnas que se escinden, se escinde:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
N_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j_1"'] & N_2 \arrow[d, "j_2"'] \\
E_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d] & E_2 \arrow[d, "p"'] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

Lo que prueba que los $0 \to M$ y $M \xrightarrow{1_M} M$ son objetos proyectivos relativos a F.

Supongamos que $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ es proyectivo relativo a F. Se sigue que la siguiente sucesión exacta se escinde

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[d, "\left[\begin{smallmatrix} f \\ -1 \end{smallmatrix}\right]"'] \\
M_1 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]"] \arrow[d, "1_{M_1}"'] & M_1 \coprod M_2 \arrow[d, "{[f \;\; 1]}"'] \\
M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

Por lo que $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ es sumando de $0 \to M_2$ y $M_1 \xrightarrow{1_{M_1}} M_1$, los cuales, según vimos anteriormente, son proyectivos relativos a F.

De manera dual, se prueba que los son los objetos inyectivos relativos a F son los objetos de la forma $M \xrightarrow{1_M} M$ y $M \to 0$.

□

Sea $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ un objeto en $\Lambda-$ maps y $M_0 = \mathrm{Ker}(f)$. Entonces, hay una sucesión exacta $0 \to M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f} M_2$ y puede construirse una resolución proyectiva relativa como sigue:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M_0 \arrow[d, "\begin{pmatrix} -1_{M_0} \\ f_0 \end{pmatrix}"] \\
 & M_0 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "1_{M_0}"] & M_0 \oplus M_1 \arrow[d, "\begin{pmatrix} f_0 & 1_{M_1} \end{pmatrix}"] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & M_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f_0 \\ -1_{M_0} \end{pmatrix}"'] & M_1 \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_{M_1} \\ -f \end{pmatrix}"] \\
M_0 \arrow[r] \arrow[d, "1_{M_0}"'] & M_1 \oplus M_0 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_{M_0} & f_0 \end{pmatrix}"'] & M_1 \oplus M_2 \arrow[d, "\begin{pmatrix} f & 1_{M_2} \end{pmatrix}"'] \\
M_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

Se sigue que $\Omega M = M_0 \xrightarrow{f_0} M_1$ es el syzygy relativo, más aún, no resulta dificil ver que $\phi(\Omega M) = \Omega\phi(M)$. Además tenemos que la dimensión proyectiva relativa de M, rpdim$M$, es ≤ 2.

Proposición 7.4. *Sean $M : M_1 \xrightarrow{f} M_2$, $N : N_1 \xrightarrow{g} N_2$ objetos en* maps(mod Λ)*, tales que en las sucesiones exactas cortas*

$$
\begin{gathered}
0 \to M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f} M_2 \\
0 \to N_0 \xrightarrow{g_0} M_1 \xrightarrow{g} M_2
\end{gathered}
$$

los objetos (M_0, M_1, f_0), (M_1, M_2, f), (N_0, N_1, g_0) y (N_1, N_2, g) no tienen sumandos proyectivos relativos ni sumandos inyectivos relativos. Entonces, el functor $\phi : \Lambda -$ maps $\to$ mod(modΛ) *induce un isomorfismo de grupos abelianos*

$$\phi : F(M,N) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{mod(mod}\ \Lambda)}(\phi(M), \phi(N))$$

Demostración. Dada una extensión $0 \to \phi(N) \to H \to \phi(M) \to 0$, se sigue de la proposicion 7.1, que existe una sucesión $0 \to N \to E \to M \to 0$ en $F(N,M)$ tal que tenemos un diagrama conmutativo exacto

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \phi(N) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & H \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \phi(M) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \phi(N) \arrow[r] & \phi(E) \arrow[r] & \phi(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

por lo que ϕ es suprayectiva.

Sea $0 \to N \to E \to M \to 0$ un elemento de $F(N,M)$. Supongamos que $N_0 \xrightarrow{g_0} N_1$ y $N_1 \xrightarrow{g} N_2$ no tienen sumando inyectivos relativos a F, ni sumandos proyectivos relativos a F, luego, si $0 \to \phi(N) \xrightarrow{j} \phi(E) \xrightarrow{p} \phi(M) \to 0$ es cero en $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{mod}\Lambda}(\phi(M), \phi(N))$, i.e, se escinde, entonces existe un morfismo $t : \phi(E) \to \phi(M)$ tal que $tj = 1_{\phi(M)}$. El morfismo $t : \phi(E) \to \phi(M)$ se levanta a un morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\ ,E_0) \arrow[r, "(\ ,h_0)"] \arrow[d, "(\ ,t_0)"'] & (\ ,E_1) \arrow[r, "(\ ,h)"] \arrow[d, "(\ ,t_1)"'] & (\ ,E_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\ ,t_2)"'] & \phi(E) \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\ ,N_0) \arrow[r, "(\ ,g_0)"] & (\ ,N_1) \arrow[r, "(\ ,g)"] & (\ ,N_2) \arrow[r, "\pi"] & \phi(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De modo que tenemos el siguiente diagrama exacto conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\ ,N_0) \arrow[r, "(\ ,g_0)"] \arrow[d, "(\ ,j_0)"'] & (\ ,N_1) \arrow[r, "(\ ,g)"] \arrow[d, "(\ ,j_1)"'] & (\ ,N_2) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "(\ ,j_2)"'] & \phi(N) \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\ ,E_0) \arrow[r, "(\ ,h_0)"] \arrow[d, "(\ ,t_0)"'] & (\ ,E_1) \arrow[r, "(\ ,h)"] \arrow[d, "(\ ,t_1)"'] & (\ ,E_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\ ,t_2)"'] & \phi(E) \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\ ,N_0) \arrow[r, "(\ ,g_0)"] & (\ ,N_1) \arrow[r, "(\ ,g)"] & (\ ,N_2) \arrow[r, "\pi"] & \phi(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis tenemos que $0 \to (\ ,N_0) \to (\ ,N_1) \to (\ ,N_2) \xrightarrow{\pi} \phi(N) \to 0$ es una resolución proyectiva mínima. Como $\pi = tj\pi = \pi(\ ,t_2)(\ ,j_2)$ y $\pi : (\ ,N_2) \to \phi(N)$ es una cubierta proyectiva, debemos tener que $(\ ,t_2)(\ ,j_2)$ es isomorfismo, y finalmente t_2 y j_2 son isomorfismos. Yendo hacia atras debemos tener que t_i, j_i son isomorfismos, para $i = 0, 1, 2$, i.e, $0 \to N \to E \to M \to 0$ se escinde. □

Como $\mathrm{gdim}(\mathrm{mod}\ \Lambda) \leq 2$, resulta de interés el siguiente

Corolario 7.5. $F(\Omega M, N) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{mod}(\mathrm{mod}\Lambda)}(\Omega\phi(M), N)$

Resulta natural establecer la siguiente definición:

Definición 7.6. *Una subcategoría de inclinación relativa de la categoría* $\mathrm{maps}(\mathrm{mod}\ \Lambda)$ *es una categoría* $\mathcal{T}_{\mathrm{mod}\ \Lambda}$ *tal que:*

(i) *Si* $T : T_1 \to T_0$ *está en* $\mathcal{T}_{\mathrm{mod}(\mathbf{C})}$, *entonces* $\mathrm{rpdim} T \leq 2$.

(ii) *Dados* $T : T_1 \to T_0$, $T' : T'_1 \to T'_0$ *en* $\mathcal{T}_{\mathrm{mod}\ \Lambda}$ *tenemos* $F(T, T') = F(\Omega T, T') = 0$.

(iii) *Dado un objeto* C *en* $\mathrm{mod}\ \Lambda$, *el morfismo* $(0, C, 0)$ *tiene una resolución*

$$0 \to (0, C, 0) \to T^0 \to T^1 \to \cdots \to T^n \to 0$$

en $\mathrm{maps}(\mathrm{mod}\ \Lambda)$, *con* $T^i \in \mathcal{T}_{\mathrm{mod}\ \Lambda}$.

Se puede establecer un resultado análogo para categorías de inclinación $\mathcal{T}_{\mathrm{mod}\ \Lambda}$ con dimensión proyectiva ≤ 2.

Teorema 7.7. *Las subcategorías de inclinación clásica de* $\mathrm{mod}(\mathrm{mod}\Lambda)$ *se corresponden con subcategorías* $\mathcal{T}_{\mathrm{mod}\ \Lambda}$ *de* $\mathrm{maps}(\mathrm{mod}\ \Lambda)$ *tales que*

(i) *Los objetos de $\mathcal{T}$ son monomorfismos*

(ii) *Para cada par de objetos $T : T_1 \to T_0, T' : T_1' \to T_0'$ en $\mathcal{T}_{\text{mod }\Lambda}$, tenemos que $F(T, T') = 0$.*

(iii) *Para cada objeto C en* mod Λ*, el morfismo $(0, C, 0)$ existe una sucesión exacta en* maps(mod Λ)*, con columnas que se escinden*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
T_1 \arrow[r] \arrow[d] & T_0 \arrow[d] \\
T_1' \arrow[r] \arrow[d] & T_0' \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

Teorema 7.8. *Sea $\mathcal{C}$ una subcategoria de* maps(mod Λ)*, entonces ocurre lo siguiente:*

(a) Si $\mathcal{C}$ es contravariantemente finita, entonces $\phi(\mathcal{C})$ es una subcategoria contravariantemente finita de mod(modΛ)

(b) Si $\mathcal{C}$ es covariantemente finita, entonces $\phi(\mathcal{C})$ es una subcategoria covariantemente finita de mod(modΛ)

(c) Si $\mathcal{C}$ es functorialmente finita, entonces $\phi(\mathcal{C})$ es una subcategoria funtorialmente finita de mod(modΛ)

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C} \subset \Lambda -$ maps es contravariantemente finita. Sea $F \in$ mod(modΛ) y $(\ , M_1) \xrightarrow{(\ ,f)} (\ , M_2) \to F \to 0$ una resolución proyectiva mínima de F. Entonces existe un morfismo $Z : Z_1 \xrightarrow{h} Z_2$ y un morfismo en $\Lambda -$ maps

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q_1"'] & Z_2 \arrow[d, "q_2"'] \\
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2
\end{tikzcd}$$

tal que $Z = (Z_1, Z_2, h)$ es una $\mathcal{C}$-aproximación derecha de M. El diagrama anterior induce el siguiente diagrama exacto conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\ , Z_1) \arrow[r, "(\ ,h)"] \arrow[d, "(\ ,q_1)"'] & (\ , Z_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\ ,q_2)"'] & \phi(h) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
(\ , M_1) \arrow[r, "(\ ,f)"] & (\ , M_2) \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sea $H \in \phi(\mathcal{C})$, $\eta : H \to F$ y $(\ \ , X_1) \xrightarrow{(\ \ ,r)} (\ \ , X_2) \to H \to 0$ una resolución proyectiva mínima de H. Tenemos un levantamiento:

$$\begin{tikzcd}
(\ \ , X_1) \arrow[r, "(\ \ ,r)"] \arrow[d, "(\ \ ,s_1)"'] & (\ \ , X_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\ \ ,s_2)"'] & \phi(h) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
(\ \ , M_1) \arrow[r, "(\ \ ,f)"] & (\ \ , M_2) \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "s_1"'] & X_2 \arrow[d, "s_2"'] \\
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2
\end{tikzcd}$$

y $X = (X_1, X_2, r) \in \mathcal{C}$. Existe un morfismo :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "t_1"'] & X_2 \arrow[d, "t_2"'] \\
Z_1 \arrow[r, "f"] & Z_2
\end{tikzcd}$$

Tal que en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "t_1"'] & X_2 \arrow[d, "t_2"'] \\
Z_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q_1"'] & Z_2 \arrow[d, "q_2"'] \\
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2
\end{tikzcd}$$

El cual implica que el siguiente es un diagrama exacto conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\ \ , X_1) \arrow[r, "(\ \ ,r)"] \arrow[d, "(\ \ ,t_1)"'] & (\ \ , X_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\ \ ,t_2)"'] & H \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & 0 \\
(\ \ , Z_1) \arrow[r, "(\ \ ,h)"] \arrow[d, "(\ \ ,q_1)"'] & (\ \ , Z_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\ \ ,q_2)"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & 0 \\
(\ \ , M_1) \arrow[r, "(\ \ ,f)"] & (\ \ , M_2) \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y $\rho\theta = \eta$ $\square$

Teorema 7.9. *Sea* $\mathcal{C} \subset \Lambda -$ maps *una categoría que contiene a los objetos de la forma* $(M, 0, 0)$, $(M, M, 1_M)$ *y supongamos que* $\phi(\mathcal{C})$ *es contravariantemente finita. Entonces,* $\mathcal{C}$ *es contravariantemente finita.*

Demostración. Sea $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ un morfismo entonces tenemos una sucesión exacta $0 \to (\ \ , M_1) \xrightarrow{(\ ,f)} (\ \ , M_2) \to \phi(f) \to 0$, Existe además $G \in \phi(\mathcal{C})$ tal que:

$$0 \to (\ \ , Z_1) \xrightarrow{(\ ,h)} (\ \ , Z_2) \to G \to 0$$

es una presentación proyectiva mínima de G, y $\rho : G \to F$ una $\phi(\mathcal{C})$-aproximación derecha.

Entonces existe un morfismo $(r_1, r_2) : (Z_1, Z_2, h) \to (M_1, M_2, f)$ tal que

$$\begin{tikzcd}
(\ \ , Z_1) \arrow[r, "(\ {,}h)"] \arrow[d, "(\ {,}r_1)"'] & (\ \ , Z_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\ {,}r_2)"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & 0 \\
(\ \ , M_1) \arrow[r, "(\ {,}f)"] & (\ \ , M_2) \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es un levantamiento de ρ.

Sea (X_1, X_2, g) en $\mathcal{C}$ y un morfismo $(v_1, v_2) : (X_1, X_2, g) \to (M_1, M_2, f)$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v_1"'] & X_2 \arrow[d, "v_2"'] \\
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2
\end{tikzcd}$$

el cual induce el siguiente diagrama exacto conmutativo en mod(modΛ):

$$\begin{tikzcd}
(\ \ , X_1) \arrow[r, "(\ {,}g)"] \arrow[d, "(\ {,}v_1)"'] & (\ \ , X_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\ {,}v_2)"'] & H \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & 0 \\
(\ \ , M_1) \arrow[r, "(\ {,}f)"] & (\ \ , M_2) \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $\rho : G \to F$ es una $\phi(\mathcal{C})$-aproximación derecha, existe un morfismo $\theta : H \to G$ tal que $\eta\theta = \rho$. Asi, θ induce un morfismo en $\Lambda -$ maps

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t_1"'] & X_2 \arrow[d, "t_2"'] \\
Z_1 \arrow[r, "h"] & Z_2
\end{tikzcd}$$

tal que $\phi(t_1, t_2) = \theta$.

Se tienen dos levantamientos de ρ

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "(\ ,v_0)"', "(\ ,r_0t_0)"] & (\ ,X_1) \arrow[r, "(\ ,g)"] \arrow[d, "(\ ,v_1)"', "(\ ,r_1t_1)"] & (\ ,X_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\ ,v_2)"', "(\ ,r_2t_2)"] & H \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r, "f_0"] & (\ ,M_1) \arrow[r, "(\ ,f)"] & (\ ,M_2) \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

por lo que existen morfismos $(\ ,\lambda_1) : (\ ,X_1) \to (\ ,M_0,\ \ ,(\ ,\lambda_2) : (\ ,X_2) \to (\ ,M_1)$ los cuales satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$v_1 = r_1t_1 + f_0\lambda_1 + \lambda_2 g \tag{7.4}$$
$$v_2 = r_2t_2 + f\lambda_2 \tag{7.5}$$

tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "m_1"'] & X_2 \arrow[d, "m_2"'] \\
Z_1 \coprod M_0 \coprod M_1 \arrow[r, "w"] \arrow[d, "n_1"'] & Z_2 \coprod M_1 \arrow[d, "n_2"'] \\
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2
\end{tikzcd}$$

con los morfismos $n_1 = (r_1\ \ f_0\ 1_{M_1}),\ \ n_2 = (r_2\ \ f_2)$ y

$$m_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 g \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{M_1} \end{pmatrix}$$

pero $w : Z_1 \coprod M_0 \coprod M_1 \to Z_2 \coprod M_1$ esta en $\mathcal{C}$ y

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \coprod M_0 \coprod M_1 \arrow[r, "w"] \arrow[d, "n_1"'] & Z_2 \coprod M_1 \arrow[d, "n_2"'] \\
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2
\end{tikzcd}$$

es una $\mathcal{C}$-aproximación derecha de $M_1 \xrightarrow{f} M_2$

□

El cuadro (7.1) induce el siguiente diagrama exacto conmuativo en mod(modΛ^{op})

$$\begin{tikzcd}
(M_2,\ ) \arrow[r, "(f,\ )"] \arrow[d, "(h_2,\ )"'] & (M_1,\ ) \arrow[r] \arrow[d, "(h_1,\ )"'] & \mathrm{Coker}(f,\ ) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
(N_2,\ ) \arrow[r, "(g,\ )"] & (N_1,\ ) \arrow[r] & \mathrm{Coker}(g,\ ) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Así, podemos definir el funtor $\phi^{op} : \mathit{\Lambda} - \mathrm{maps} \to \mathrm{mod}(\mathrm{mod}\mathit{\Lambda}^{op})$, como $\phi^{op}(f) = \mathrm{Coker}(f, \ )$ y se tiene un teorema dual al teorema previo.

Teorema 7.10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría en $\mathit{\Lambda} - \mathrm{maps}$ que contiene a los objetos de forma $(0, M, 0)$ y $(M, M, 1_M)$. Si $\phi^{op}(\mathcal{C})$ es contravariantemente finita, entonces $\mathcal{C}$ es covariantemente finita.*

Definición 7.11. *La subcategoría $\mathcal{C}$ de $\mathit{\Lambda} - \mathrm{maps}$, cuyos objetos son (M_1, M_2, f) con f epimorfismo será llamada la subcategoría de epimaps, dualmente la subcategoría $\mathcal{C}$ de $\mathit{\Lambda} - \mathrm{maps}$, cuyos objetos son (M_1, M_2, f) con f monomorfismo serán llamada subcategoría de monomaps.*

Tenemos los siguientes ejemplos de subcategorías functorialmente finitas de las categoría maps(modΛ):

Proposición 7.12. *Las subcategorías de epimaps y monomaps de* maps(mod Λ) *son funtorialmente finitas en* maps(mod Λ).

Demostración. Sea $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ un objeto maps(modΛ). Entonces, tenemos la siguiente aproximación derecha:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Im}(f) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\ M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 & \end{tikzcd}$$

Consideremos un epimorfismo $X_2 \xrightarrow{g} X_2 \to 0$ y un morfismo $(t_1, t_2) : (X_1, X_2, g) \to (M_1, M_2, f)$ en maps(modΛ). Entonces tenemos el siguiente diagrama conmuativo:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "t_2"] & 0 \arrow[d] & \\ M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $\pi t_2 = 0$, el morfismo $t_2 : X_2 \to M_2$ se factoriza a través de $j : \mathrm{Im}(f) \to M_2$, esto es : existe un morfismo $u : X_2 \to \mathrm{Im}(f)$ tal que $ju = t_2$, y tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\ M_1 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Im}(f) \arrow[d, "j"] & \\ M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 & \end{tikzcd}$$

Ahora, sea $P \xrightarrow{p} M_2 \to 0$ una cubierta proyectiva de M_2. Entonces, obtenemos un diagrama exacto conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & & \\ {\scriptstyle \binom{1}{0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{M_2}} & & \\ M_1 \oplus P & \xrightarrow{[f\ p]} & M_2 & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{7.6}$$

Sea $X_1 \xrightarrow{g} X_2 \to 0$ un epimorfismo y

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & & \\ {\scriptstyle s_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_2} & & \\ X_1 & \xrightarrow{g} & X_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un morfismo en maps(mod Λ).

Como P es proyectivo, tenemos el siguiente cuadro conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{p} & M_2 & & \\ {\scriptstyle \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_2} & & \\ X_1 & \xrightarrow{g} & X_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Entonces, pegando ambos cuadros:

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & & \\ {\scriptstyle \binom{1}{0}}\downarrow & & \| & & \\ M_1 \oplus P & \xrightarrow{[f\ p]} & M_2 & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle [s_1\ \mu]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_2} & & \\ X_1 & \xrightarrow{g} & X_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

obtenemos un morfismo (s_1, s_2).

Entonces (7.6) es una aproximación izquierda. La segunda parte es dual. $\square$

Corolario 7.13. (i) *La categoría $\mathcal{C}^O$ de funtores que se anulan en proyectivos es funtorialmente finita.*

(ii) *La categoría $\hat{\mathcal{C}}$ de funtores con* pd ≤ 1 *es funtorialmente finita.*

La demostración se sigue inmediatamente de

$$\mathcal{C}^O = \phi(\text{epimaps}),\ \hat{\mathcal{C}} = \phi(\text{monomaps})$$

Bibliografía

[Au] Auslander M., *Applications of morphisms determined by modules.* Representation theory of algebras (Proc. Conf., Temple Univ., Philadelphia, Pa.,1976). Lecture Notes in Pure Appl. Math., Vol. 37, Dekker, New York, 1978, pag. 245 - 327.

[Au1] Auslander M., *Representation Dimension of Artin Algebras I*, Queen Mary College Mathematics Notes, 1971, Selected Works of Maurice Auslander, Part 1 AMS, pag. 505 - 574.

[Au2] Auslander M., *Representation Theory of Artin Algebras I.* Communications In Algebra, 1(3), (1974), pag. 177-268.

[AB] Auslander M., Buchweitz Ragnar-Olaf *The Homological Theory of Maximal Cohen-Macaulay Approximations.* Sociéte Mathématique de France Mémoire No. 38, 1989. pag. 5-37.

[ABPRS] Auslander M., Bautista R., Platzeck M. I., Reiten I., Smalø S. O., *Almost Split Sequences Whose Middle Term Has at Most Two Indescomposable Summands.* Can. J. Math., Vol. XXX1, No. 5, 1979, pag. 942-960.

[AF] Anderson Frank A., Fuller Kent R., *Rings and Categories of Modules.* Graduate Texts in Mathematics, Springer; 2nd edition (1991).

[APR] Auslander M., Platzeck M. I., Reiten I., *Coxeter Functors Without Diagramas.* Trans. Amer. Math. Soc., No. 250, (1979), pag. 1-46.

[ARS] Auslander M., Reiten I., Smalø S. O., *Representation Theory of Artin Algebras.* Cambridge Studies in Advandced Mathematics 36, 1995.

[AR1] Auslander M., Reiten I., *Aplications of Contravariantly Finite Subcategories.* Adavances in Mathematics Vol.86, No.1, March 1991, pag. 111 - 151.

[AR2] Auslander M., Reiten I., *Stable Equivalence of Dualizing R-Varietes.* Adavances in Mathematics Vol.12, No.3, 1974, pag. 306 - 366.

[AR3] Auslander M., Reiten I., *Stable equivalence of Artin algebras.* Proceedings of the Conference on Orders, Group Rings and Related Topics (Ohio State Univ., Columbus, Ohio, 1972), Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 353 (1973), pag. 8 - 71.

[AS1] Auslander M., Solberg Ø., *Relative homology and repres entation theory I. Relative cotilting theory,* Communications in Algebra, 21(9), (1993), pag. 3033 - 3097.

[AS2] Auslander M., Solberg Ø., *Relative homology and representation theory I. Relative homology and homologically finite subcategories,* Communications in Algebra, 21(9), (1993), pag. 2995 - 3031.

[ASS] Assem I., Simson D., Skowrónski A., *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras Vol.1*, London Mathematical Society Student Texts 65, 2005.

[Ba] Bautista R., *Irreducible morphisms and the radical of a category.* An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México 22 (1982), pag. 83-135.

[Bo] Bongartz K., *"Tilted Algebras", Representations of Algebras*, Procedings, Puebla, Mexico 1980. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlang Berlin - Heidelberg New York, 1981. pag. 26-38.

[BB] Brenner S., Butler M. C. R., *Generalisations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors* in Proc. ICRA II (Ottawa, 1979), Lecture Notes in Math. No. 832, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980, pag. 103-169.

[BGP] Bernstein I. N., Gelfand I. M., Ponomarev V.A., *Coxeter Functors and Gabriel's Theorem.* Uspiehi Mat. Nauk, 28(1973), 19.33 (in Russian), English translation in *Russian Math. Surveys,* 28(1973), pag. 17-32.

[BLP] Bautista R., Liu S., Paquette Ch., *Auslander-Reiten theory over an infinite quiver.* ICRA XIV Conference Abstracts, August 11 - 15, 2010.

[CF] Colby Robert R., Fuller Kent R., *Equivalence and Duality For Module Categories*, Cambridge Tracts in Mathematics 161. Cambridge University Press, 2004.

[CPS] Cline E., Parshall B., Scott L., *Derived Categories and Morita Theory*, Journal of Algebra Vol. 104, No.2 December 1986, pag. 397 - 409.

[GM] Gelfand S.I., Manin Yu.I., *Methods of homological algebra.* (EMS 38) (Springer, 1996).

[Ha] Happel D., *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras.* London Mathematical Society Lecture Note Series 119, 1988.

[Har] Hartshorne, R.,*Residues ans Duality* Lecture Notes in Math., No. 20, Springer-Verlang, Berlin, 1966.

[HR] Happel D., Ringel C.M., *Tilted Algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), no. 2, pag. 399-443.

[Mac] Maclane S., *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics, Springer; 2nd edition (September 25, 1998).

[Mil] Miličić D., *Lectures on Derived Categories.* www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/dercat.pdf

[Mit] Mitchell, B., *Rings with several objects.* Advances in Math. 8, 1-161 (1972).

[Miy] Miyachi Jun-Ichi, *Derived Categories With Applications to Representations of Algebras.* www.u-gakugei.ac.jp/˜miyachi/papers/ChibaSemi.pdf

[Miy1] Miyashita Y., *Generalized Tilting Modules and Applications on Module Theory,* Math. J. Okayama. Univ. 34 (1992), pag. 75-98.

[MV] Martínez-Villa R., *Applications of Koszul algebras: The preprojective algebra,* Representation Theory of Algebras, CMS Conf. Proc. vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1996), pp. 487-504.

[MVS1] Martínez-Villa R., Solberg Ø., *Graded and Koszul categories,* Appl. Categ. Structures, doi:10.1007/s10485-009-9191-6, in press.

[MVS2] Martínez-Villa R., Solberg Ø., *Artin and Schelter regular algebras and categories,* Journal of Pure and Applied Algebra, in press.

[MVS3] Martínez-Villa R., Solberg, Ø., *Noetherianity and Gelfand-Kirillov dimension of components.* J. Algebra 323 (2010), no. 5, 1369-1407.

[MVS4] Martínez-Villa R., Solberg Ø., *Serre duality for Artin-Schelter regular K-categories.* Int. J. Algebra 3 (2009), no. 5-8, 355-375.

[MZ] Martínez-Villa R., Zacharia D., *Auslander-Reiten sequences, locally free sheaves and Chebysheff polynomials.* Compos. Math. 142 (2006), no.2, 397–408.

[N] Neeman A., *Triangulated Categories.* Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press 1977.

[Po] N. Popescu., *Abelian Categories.* London Mathematical Society Monographs. Academic Press & New York 1973.

[Ric] Rickard J., *Morita Theory for Derived Categories.* J. London Math. Soc. 1989, 39, pag. 436-456.

[Rin] Ringel C. M., *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlang Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984.

[Ro] Rotman, J. J.,*An Introduction to Homological Algebra.* Pure and Applied Mathematics 85, Academic Press (1979).

[S] Stenström Bo., *Rings of Quotients.* 217, Springer-Verlang, New York 1975.

[V] Verdier, Jean-Louis, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes.* Edited and with a note by Georges Maltsiniotis. Asterisque No. 239 (1996).

[We] Weibel Charles A., *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38, 1994.