



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

# **POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

## **FACULTAD DE CIENCIAS**

### **EL INVARIANTE DE BLOCH**

### **TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

## **MAESTRA EN CIENCIAS**

PRESENTA

### **ALEJANDRA TRUJILLO NEGRETE**

DIRECTOR DE TESIS: **DR. JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA**

CUERNAVACA, MORELOS

MARZO 2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Cuaternios . . . . .	1
1.2. Acciones de Grupos . . . . .	3
1.3. Espacios métricos . . . . .	7
1.3.1. Subgrupos de Isometrías . . . . .	9
1.4. Categorías y Funtores . . . . .	13
<b>2. Complejos Simpliciales</b>	<b>17</b>
2.1. Complejos Simpliciales . . . . .	17
2.2. Complejos Abstractos . . . . .	21
2.3. Triangulaciones Inducidas en Espacios de Orbitas . . . . .	22
2.4. Objetos Simpliciales . . . . .	25
2.5. Complejos de Cadenas . . . . .	33
<b>3. Espacios Clasificantes para Familias</b>	<b>37</b>
3.1. $G$ -espacios . . . . .	37
3.2. Familias de Subgrupos . . . . .	38
<b>4. El Grupo de Isometrías de <math>\mathcal{H}^3</math></b>	<b>49</b>
4.1. Transformaciones de Möbius . . . . .	49
4.1.1. La razón cruzada . . . . .	52
4.2. El modelo del semiespacio superior $\mathcal{H}^3$ del espacio hiperbólico . . . . .	55
4.2.1. Transformaciones de Möbius de $\mathcal{H}^3$ . . . . .	56
<b>5. El Invariante de Bloch</b>	<b>63</b>
5.1. 3-Variedades Hiperbólicas . . . . .	63
5.2. Espacios Clasificantes para Familias de Subgrupos de Isotropía . . . . .	70
5.3. El invariante $\alpha(M)$ de $M$ . . . . .	72
5.4. El invariante de Bloch . . . . .	74
5.5. El invariante $\alpha(M)$ es el invariante de Bloch . . . . .	75

# Agradecimientos

Primeramente, le agradezco a Dios por la vida, por permitirme terminar mi tesis y por poner a mi lado a personas muy especiales, quienes me ayudaron a lo largo de mi carrera.

A mis padres les agradezco todo su apoyo, amor y consejos que me dieron ánimo para seguir. Le agradezco a mi esposo por su amor y sus palabras de aliento.

También estoy muy agradecida con mi tutor Jose Luis Cisneros Molina, quien me brindó apoyo en toda mi carrera y me ayudó en la realización de esta tesis. A todos mis amigos les agradezco por su afecto y amistad.

# Introducción

El objetivo de esta tesis es definir el invariante de Bloch de una 3-variedad hiperbólica completa de volumen finito siguiendo el artículo [10]. Este invariante fue originalmente definido por Walter D. Neumann y Jun Yang en [18].

Sea  $\mathcal{H}^3$  el modelo del semiespacio superior del espacio hiperbólico. Veremos que el grupo de isometrías que preservan la orientación de  $\mathcal{H}^3$  es isomorfo a  $PSL_2(\mathbb{C})$ . Después definiremos una 3-variedad hiperbólica completa orientable como el cociente  $M = \mathcal{H}^3/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un subgrupo de  $PSL_2(\mathbb{C})$  discreto y libre de torsión. Ya que  $\Gamma$  es discreto y libre de torsión,  $\Gamma$  actúa libre y propiamente discontinua en  $\mathcal{H}^3$ , entonces la aplicación cociente  $p: \mathcal{H}^3 \rightarrow M$  es el cubriente universal de  $M$ . Así tenemos que  $\pi_1(M) = \Gamma$  y  $\pi_n(M) = 0$ , entonces  $M$  es un  $K(\Gamma, 1)$ , es decir  $M = B\Gamma$  el espacio clasificante de  $\Gamma$ . Tenemos una representación canónica  $\delta: \Gamma \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ , la cual puede ser levantada a  $SL_2(\mathbb{C})$ , es decir,

$$\begin{array}{ccc} & & SL_2(\mathbb{C}) \\ & \nearrow \tilde{\delta} & \downarrow \\ \Gamma & \xrightarrow{\delta} & PSL_2(\mathbb{C}) \end{array} .$$

Tal representación corresponde a una aplicación  $B_\delta: B\Gamma = M \rightarrow BSL_2(\mathbb{C})$  entre espacios clasificantes. En el caso cuando  $M$  es compacta, existe un invariante bien conocido  $\langle M \rangle$  de  $M$  en  $H_3(BSL_2(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$  dada por la imagen de la clase fundamental de  $M$  bajo el homomorfismo inducido en homología por  $B_\delta$ . Extenderemos este invariante a un invariante  $\alpha(M)$  cuando  $M$  es una 3-variedad hiperbólica de volumen finito (no necesariamente compacta) pero en este caso  $\alpha(M)$  tomará valores en  $H_3(B(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T}); \mathbb{Z})$ , donde  $B(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T})$  es el  $SL_2(\mathbb{C})$ -espacio de órbitas de  $E(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T})$  el espacio clasificante para  $SL_2(\mathbb{C})$ -acciones con subgrupos de isotropía en cierta familia  $\mathfrak{T}$  de subgrupos cerrados de  $SL_2(\mathbb{C})$ .

El pre-grupo de Bloch  $\mathcal{P}(F)$  de un campo  $F$  es el cociente del grupo abeliano generado por los símbolos formales  $[x]$ , con  $x \in F \cup \infty$  por las relaciones  $[0] = [1] = [\infty] = 0$  y

$$[x] - [y] + [y/x] - [(1 - x^{-1})/(1 - y^{-1})] + [(1 - x)/(1 - y)] = 0.$$

Newmann y Yang definieron el invariante de Bloch  $\beta(M)$  de una 3 variedad hiperbólica  $M$  completa orientable de volumen finito en el pre-grupo de Bloch  $\mathcal{P}(F)$  y mostraron que está determinado por los parámetros de los simplejos de cualquier triangulación ideal de grado uno de la variedad  $M$ .

Demostremos que el invariante  $\alpha(M)$  coincide con el invariante de Bloch  $\beta(M)$ , para  $M$  una 3-variedad completa orientable de volumen finito.

El contenido de esta tesis está organizado como sigue. En el capítulo 1 veremos los conceptos de cuaternios, acciones de grupos y espacios métricos, los cuales necesitaremos en los otros capítulos.

En el capítulo 2 daremos la definición de complejos simpliciales, veremos espacios triangulables y el espacio clasificante de un grupo.

En el capítulo 3 daremos la generalización del haz universal de un grupo. Dado un grupo  $G$  construiremos un espacio clasificante para  $G$ -acciones con subgrupos de isotropía en una familia  $\mathfrak{F}$ .

En el capítulo 4 veremos las transformaciones de Möbius en  $\widehat{\mathbb{C}}$  y las extendemos a  $\mathbb{R}^3$ , las cuales dejan invariante el semi-espacio superior  $\mathcal{H}^3$ , teniendo así que éstas son transformaciones de Möbius en  $\mathcal{H}^3$ . También veremos que las isometrías de  $\mathcal{H}^3$  (con la métrica hiperbólica) que preservan la orientación son realmente las transformaciones de Möbius en  $\mathcal{H}^3$ . Como el grupo de transformaciones de Möbius de  $\widehat{\mathbb{C}}$  es isomorfo a  $PSL_2(\mathbb{C})$ , entonces el grupo de isometrías de  $\mathcal{H}^3$  que preservan la orientación  $I_+(\mathcal{H}^3)$  es isomorfo a  $PSL_2(\mathbb{C})$ .

En el capítulo 5 definiremos las 3-variedades hiperbólicas completas orientadas y veremos cómo son estas variedades cuando tienen volumen finito, luego definiremos el invariante  $\alpha$  usando ejemplos especiales de espacios clasificantes para familias de subgrupos, el cual finalmente será el mismo que el invariante de Bloch.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo veremos algunos conceptos básicos que usaremos más adelante. Comenzaremos con cuaternios y algunas de sus propiedades, luego veremos grupos libres, productos libres y acciones de grupos, los cuales necesitaremos en el capítulo 2 de complejos simpliciales, también definiremos isometrías y algunos resultados de subgrupos de isometrías en espacios métricos y finalizaremos el capítulo dando una introducción a categorías y funtores.

### 1.1. Cuaternios

Daremos una introducción a los cuaternios, dando algunas de sus propiedades básicas, lo cual usaremos en el capítulo 4, para definir el modelo del espacio superior  $\mathcal{H}^3$  en el espacio hiperbólico.

**Definición 1.1.1.** Un *cuaternio* es una matriz compleja de  $2 \times 2$  de la forma

$$q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

El conjunto de cuaternios es denotado por  $\mathbb{H}$ .

La suma y multiplicación de cuaternios es como para matrices, entonces tenemos

- (i)  $\mathbb{H}$  es un grupo abeliano con respecto a la suma;
- (ii) Los cuaternios diferentes de cero forman un grupo no abeliano con respecto a la multiplicación;
- (iii)  $\mathbb{H}$  es un espacio vectorial 4-dimensional con base

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Como la multiplicación de matrices es distributiva, la multiplicación de cuaternios está determinada por los productos de los cuatro elementos  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ . En efecto, los elementos generan un grupo multiplicativo de orden 8 y

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1};$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j};$$

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}.$$

Los cuaternios contienen una copia de  $\mathbb{C}$  via la inclusión

$$x + iy \mapsto x\mathbf{1} + \mathbf{i}y$$

de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{H}$  la cual claramente preserva la suma y multiplicación.

Regresando a (1.1), si escribimos  $x + iy = z$  y  $u + iv = w$  entonces

$$q = (x\mathbf{1} + y\mathbf{i}) + (u\mathbf{j} + v\mathbf{k})$$

$$= (x\mathbf{1} + y\mathbf{i}) + (u\mathbf{1} + v\mathbf{i})\mathbf{j}. \quad (1.2)$$

En vista de esto, es conveniente cambiar nuestra notación y reescribir la ecuación (1.2) en la forma

$$q = z + w\mathbf{j},$$

donde tales expresiones pueden ser multiplicadas por la regla

$$(z_1 + w_1\mathbf{j})(z_2 + w_2\mathbf{j}) = (z_1z_2 - w_1\bar{w}_2) + (z_1w_2 + w_1\bar{z}_2)\mathbf{j}.$$

En particular, si  $z, w \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\mathbf{j}z = \bar{z}\mathbf{j}$$

y

$$(z + w\mathbf{j})(\bar{z} - w\mathbf{j}) = |z|^2 + |w|^2.$$

Así tenemos que

$$(z + w\mathbf{j})^{-1} = (\bar{z} - w\mathbf{j})/(|z|^2 + |w|^2).$$

## 1.2. Acciones de Grupos

Dado un grupo  $(G, \cdot)$ , se dice que una topología sobre  $G$  es *compatible* con la estructura de grupo si las dos aplicaciones

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 \\ G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son continuas, donde  $G \times G$  tiene la topología producto.

**Definición 1.2.1.** Un grupo dotado de una topología compatible con su estructura de grupo se llama *grupo topológico*.

**Ejemplos 1.2.2.** 1) Un grupo  $G$  con la topología discreta es un grupo topológico.

2)  $(\mathbb{R}, +)$  con la topología usual es un grupo topológico.

**Definición 1.2.3.** Una *acción* de un grupo topológico  $G$  en un espacio topológico  $X$  es una aplicación continua

$$\begin{aligned} \mu: G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

que satisface

- a)  $\mu(e, x) = e \cdot x = x$  para toda  $x \in X$ , donde  $e$  es el elemento identidad en  $G$ ;
- b) Para todo  $g, h \in G$ , y  $x \in X$  se tiene  $\mu(gh, x) = \mu(g, \mu(h, x))$ , es decir,  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ .

Observemos que para cada elemento  $g$  de  $G$ , la aplicación

$$\begin{aligned} \mu_g: X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es continua, porque es la restricción  $\{g\} \times X \rightarrow X$  de  $\mu$ . Su inversa está dada por  $\mu_g^{-1} = \mu_{g^{-1}}$ , ya que si  $x \in X$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mu_{g^{-1}}\mu_g(x) &= \mu_{g^{-1}}(g \cdot x) \\ &= g^{-1}g \cdot x \\ &= e \cdot x = x. \end{aligned}$$

Como  $(g^{-1})^{-1} = g$ , tenemos que  $\mu_g \mu_{g^{-1}}(x) = x$ , para toda  $x \in X$  y por lo tanto  $\mu_g$  es biyectiva.

Por lo tanto  $G$  actúa como grupo de homeomorfismos de  $X$ , es decir, cada elemento del grupo induce un homeomorfismo de  $X$ . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \xi: G &\rightarrow \text{Homeo}(X) \\ g &\mapsto \mu_g \end{aligned} \tag{1.3}$$

es un homomorfismo de grupos, ya que

$$\xi(gh) = \mu_{gh} = \mu_g \mu_h = \xi(g)\xi(h).$$

**Definición 1.2.4.** Una *acción* de un grupo  $G$  en un espacio topológico  $X$  es *efectiva* si  $\ker \xi = \{e\}$  y es *trivial* si  $\ker \xi = G$ .

**Ejemplos 1.2.5.** 1)  $(\mathbb{Z}, +)$  actúa en  $\mathbb{R}$  mediante traslaciones: Si  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{Z}$  sea

$$\mu(n, x) = x + n.$$

Claramente  $\mu$  es continua y cumple (a) y (b) ya que,  $\mu(0, x) = x$  y

$$\mu(n + m, x) = n + m + x = \mu(n, \mu(m, x)).$$

Como  $\xi(n) = Id \in \text{Homeo}(\mathbb{R})$  sólo si  $n = 0$ , entonces la acción es efectiva.

2) El grupo  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ , actúa sobre los complejos como

$$\mu(k, z) = w^k z,$$

donde  $k \in \mathbb{Z}_3$ ,  $z \in \mathbb{C}$  y  $w$  es una raíz cúbica de la unidad. Como  $\mu$  es continua y, para  $k, j \in \mathbb{Z}_3$  y  $z \in \mathbb{C}$  tenemos

$$\begin{aligned} \mu(0, z) &= w^0 z = z, \\ \mu(k + j, z) &= w^{k+j} z = w^k w^j z = \mu(k, \mu(j, z)), \end{aligned}$$

tenemos que  $\mu$  es una acción. Además  $\ker \xi = \{0\}$ , entonces la acción es efectiva.

Sea  $G$  un grupo topológico que actúa en el espacio topológico  $X$ . Si  $x \in X$  definimos *la órbita de  $x$*  por

$$Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Observemos que para  $h \in G$  tenemos que  $Gh \cdot x = Gx$ , ya que  $gh \in G$  para toda  $g \in G$  y  $Gh \cdot x \subseteq Gx$ . Por otro lado,  $h^{-1} \in G$ ; por la primera parte tenemos que  $Gh^{-1}h \cdot x = Gx \subseteq Gh \cdot x$ .

Entonces, si dos órbitas  $Gx$  y  $Gy$  se intersectan, tenemos que son iguales. Supongamos que  $Gx \cap Gy \neq \emptyset$ , es decir, existen  $g_1, g_2$  tales que  $g_1 \cdot x = g_2 \cdot y$ ; entonces

$$g_2^{-1}g_1 \cdot x = e \cdot y = y,$$

lo cual implica que para  $h = g_2^{-1}g_1$ ,  $Gy = Gh \cdot x$ , pero  $Gh \cdot x = Gx$ , por lo tanto  $Gx = Gy$ .

Definimos una relación en  $X$  mediante  $x \sim y$  si y sólo si existe  $g \in G$  tal que  $x = g \cdot y$ , es decir  $x$  y  $y$  están en la misma órbita.

**Proposición 1.2.6.** *La relación  $\sim$  es una relación de equivalencia.*

*Demostración.* 1)  $x \sim x$ . Si  $e \in G$  es el elemento identidad de  $G$ , entonces  $x = e \cdot x$ .

2) Si  $x \sim y$ , existe  $g \in G$  tal que  $x = g \cdot y$ ; como  $G$  es grupo,  $g$  tiene inverso  $g^{-1} \in G$ , entonces  $g^{-1}x = y$  y por tanto  $y \sim x$ .

3) Si  $x \sim y$  y  $y \sim z$ , existen  $g$  y  $h$  en  $G$  tales que  $x = g \cdot y$  y  $y = h \cdot z$ , entonces  $x = g(h \cdot z) = (gh) \cdot (z)$ , por tanto  $x \sim z$ .  $\square$

Las clases de equivalencia con esta relación son las órbitas de la acción. El espacio cociente correspondiente es llamado *el espacio de órbitas* y se denota por  $X/G$ .

**Definición 1.2.7.** Definimos

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

al *subgrupo de isotropía* de  $x$ .

Denotemos por  $\text{Iso}_G(X)$  el conjunto de grupos de isotropía de  $X$ .

**Proposición 1.2.8.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $G$  un grupo. Entonces si  $x \in X$ , tenemos*

$$gG_xg^{-1} = G_{g \cdot x} \quad \text{para todo } g \in G.$$

*Demostración.* Sea  $h \in G_x$ , es decir  $h \cdot x = x$ . Entonces,

$$\begin{aligned} (ghg^{-1})g \cdot x &= ghgg^{-1} \cdot x \\ &= gh \cdot x \\ &= g \cdot x. \end{aligned}$$

Esto es,  $ghg^{-1} \in G_{g \cdot x}$ .

Por otra parte, sea  $k \in G_{g \cdot x}$ . Queremos probar que existe  $h \in G_x$  tal que  $k = ghg^{-1}$ . Sea  $h = g^{-1}kg$ , entonces  $k = ghg^{-1}$  y

$$\begin{aligned} h \cdot x &= (g^{-1}kg) \cdot x \\ &= g^{-1}(k(g \cdot x)) \\ &= g^{-1}(g \cdot x) \\ &= (g^{-1}g) \cdot x \\ &= x. \end{aligned}$$

Luego,  $h \in G_x$ . □

De la proposición 1.2.8 tenemos el siguiente:

**Corolario 1.2.9.** *Sea  $G$  un grupo que actúa en un espacio  $X$ . Si  $H \in \text{Iso}_G(X)$ , entonces  $gHg^{-1} \in \text{Iso}_G(X)$  para todo  $g \in G$ .*

**Definición 1.2.10.** Decimos que una acción  $\mu$ , de un grupo  $G$  en un espacio  $X$  es *transitiva*, o que el grupo  $G$  *actúa transitivamente* sobre  $X$ , si dados  $x, y \in X$ , existe un elemento  $g \in G$  tal que  $\mu(g, x) = y$ .

**Definición 1.2.11.** Decimos que una acción  $\mu$  de un grupo  $G$  sobre un espacio topológico  $X$  es *libre* si tenemos  $\mu(g, x) = x$  si y sólo si  $g = e$ .

De ahora en adelante denotaremos la acción de un elemento  $g \in G$  en  $x \in X$  simplemente como  $gx$ .

Sea  $G$  un grupo que actúa en un espacio topológico  $X$ , y sean  $A, B \subseteq X$ . Definimos  $G_{A,B}$  como

$$G_{A,B} = \{g \in G \mid gA \cap B \neq \emptyset\},$$

donde  $gA = \{gx \mid x \in A\}$ . Cuando  $A = B$ , escribiremos  $G_A$ .

**Definición 1.2.12.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $G$  un grupo discreto. Una acción de  $G$  en  $X$  se dice que es *propia y discontinua* si y sólo si para cada par de puntos  $x, y \in X$ , existen vecindades  $U$  de  $x$  y  $V$  de  $y$ , tal que  $G_{U,V}$  es un conjunto finito.

**Ejemplo 1.2.13.** La acción  $\mu$  de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{R}$  mediante traslaciones dada por  $\mu(n, x) = x + n$  es una acción propia y discontinua, ya que dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , para las vecindades  $U = (x - 1, x + 1)$  y  $V = (y - 1, y + 1)$ , tenemos que  $G_{U,V}$  es finito. Notemos que sólo es necesario que las vecindades sean acotadas.

**Proposición 1.2.14.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $G$  un grupo discreto que actúa discontinuamente en  $X$ . Entonces, cada subgrupo de isotropía es finito.*

*Demostración.* Sea  $x = y$  en  $X$  y  $A = B$  vecindad de  $x$  en la definición 1.2.12, entonces

$$G_A = \{g \in G \mid gA \cap A \neq \emptyset\}$$

es finito, y como  $G_x \subseteq G_A$ , entonces  $G_x$  es finito. □

**Proposición 1.2.15.** *Sea  $G$  un grupo discreto el cual actúa en un espacio Hausdorff  $X$ . Si la acción es libre, propia y discontinua, entonces para cada punto  $x \in X$  existe una vecindad  $U$  tal que  $gU \cap U = \emptyset$  para todo  $g \in G \setminus \{e\}$ .*

*Demostración.* Si tomamos  $x = y$  en la definición 1.2.12, existen vecindades  $U$  y  $V$  de  $x$  tales que  $gU \cap V = \emptyset$ , excepto para un número finito de elementos, digamos  $g_0 = e, g_1, g_2, \dots, g_k \in G$ . Ya que la acción es libre,  $x \neq gx$ , para todo  $g \in G - \{e\}$ , en particular para  $g_i, (i = 1, \dots, k)$ . Como  $X$  es Hausdorff, para cada  $g_i$  existen vecindades disjuntas  $W_i$  de  $x$  y  $W'_i$  de  $g_i x$ . Sea

$$U' = U \cap V \cap W_1 \cap (g_1^{-1}W'_1) \cap \dots \cap W_k \cap (g_k^{-1}W'_k).$$

Mostraremos que  $U'$  tiene las propiedades requeridas.

Primero consideremos  $g = g_i$  para alguna  $1 \leq i \leq k$ . Si  $x \in U' \subseteq g^{-1}W'_i$ , entonces  $g_i x \in W'_i$ , el cual es ajeno a  $W_i$  y por lo tanto de  $U'$ . Entonces, tenemos que  $gU' \cap U' = \emptyset$ .

Por otro lado, si  $g \in G - \{e\}$  y no es alguno de los  $g_i$ , entonces para cualquier  $x \in U' \subseteq U$ , se tiene que  $gx \in gU$ , como  $gU' \subseteq gU$  y  $gU \cap V = \emptyset$ , tenemos que  $gU'$  es ajeno a  $V$  y por lo tanto también a  $U'$ .  $\square$

### 1.3. Espacios métricos

Ahora veamos algunos conceptos básicos en espacios métricos y subgrupos de isometrías.

Dado un espacio métrico  $X$  con distancia  $d$ , denotaremos por  $B(x, r)$  a la bola abierta centrada en  $x \in X$  y radio  $r > 0$ .

Denotaremos por  $A^\circ$  el interior de un subespacio  $A$  y por  $\bar{A}$  a su cerradura.

**Definición 1.3.1.** Decimos que un espacio métrico  $(X, d)$  es *finitamente compacto* si y sólo si todas sus bolas cerradas son compactas, es decir,

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

es compacta para cada  $a \in X$  y  $r > 0$ .

**Definición 1.3.2.** Sean  $(X, d_1)$  y  $(Y, d_2)$  espacios métricos y  $\phi: X \rightarrow Y$  una aplicación. Decimos que  $\phi$  es una *isometría* si y sólo si,

$$d_2(\phi(a), \phi(b)) = d_1(a, b)$$

para toda  $a$  y  $b$  en  $X$ .

Dos espacios métricos  $X$  y  $Y$  son *isométricos* si existe una isometría biyectiva entre ellos.

Denotaremos por  $I(X)$  al conjunto de isometrías del espacio  $X$  en si mismo. Notemos que  $I(X)$  es un grupo con respecto a la composición de funciones,

llamado *el grupo de isometrías de  $X$* . Si  $f$ ,  $g$  y  $h$  están en  $I(X)$ , entonces, la composición  $fg$  también es una isometría: Sean  $x$  y  $y$  en  $X$ ,

$$\begin{aligned} |fg(x) - fg(y)| &= |f(g(x)) - f(g(y))| \\ &= |g(x) - g(y)| \\ &= |x - y|, \end{aligned}$$

el elemento neutro es la identidad, la inversa existe y también la asociatividad se cumple por ser un subgrupo del espacio de funciones continuas.

Los siguientes teoremas caracterizan una isometría de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.3.3.** *Sea  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función. Entonces, las siguientes son equivalentes:*

(1) *La función  $\phi$  es una isometría.*

(2) *La función  $\phi$  preserva distancias.*

(3) *La función  $\phi$  es de la forma  $\phi(x) = a + Ax$ , donde  $A$  es una matriz ortogonal y  $a = \phi(0)$ .*

*Demostración.* Por definición, (1) implica (2). Supongamos que  $\phi$  preserva distancias. Entonces,  $A = \phi - \phi(0)$  también preserva distancias y  $A(0) = 0$ . Por tanto  $A$  preserva la norma Euclideana, ya que

$$|Ax| = |A(x) - A(0)| = |x - 0| = |x|.$$

Consecuentemente  $A$  es ortogonal, ya que

$$\begin{aligned} 2Ax \cdot Ay &= |Ax|^2 + |Ay|^2 - |Ax - Ay|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 = 2x \cdot y. \end{aligned}$$

Entonces, existe una matriz ortogonal  $A$  de  $n \times n$  tal que  $\phi(x) = \phi(0) + Ax$ , y así (2) implica (3). Si  $\phi$  es de la forma dada en (3), entonces  $\phi$  es la composición de una transformación ortogonal seguida de una traslación, y así  $\phi$  es una isometría. Entonces, (3) implica (1).  $\square$

**Definición 1.3.4.** Decimos que una función  $f: X \rightarrow Y$  entre espacios métricos es una *isometría local* si y sólo si para cada punto  $x$  de  $X$ , existe un  $r > 0$  tal que  $f$  manda la bola  $B(x, r)$  isométricamente en  $B(f(x), r)$ .

**Definición 1.3.5.** Decimos que una función  $\phi: X \rightarrow Y$  entre espacios métricos es una *similitud* si es biyectiva y existe un número real  $k > 0$  tal que

$$d_Y(\phi(x), \phi(y)) = kd_X(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

El siguiente teorema sigue del teorema 1.3.3.

**Teorema 1.3.6.** *Sea  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función. Entonces, las siguientes son equivalentes:*

- (1) *La función  $\phi$  es una similitud.*
- (2) *La función  $\phi$  es de la forma  $\phi(x) = a + kAx$ , donde  $A$  es una matriz ortogonal,  $k$  es una constante positiva, y  $a = \phi(0)$ .*

### 1.3.1. Subgrupos de Isometrías

Algunos resultados de acciones de grupos en espacios métricos son los siguientes.

**Definición 1.3.7.** Sea  $G$  un grupo actuando en un espacio métrico  $X$  y sea  $p: X \rightarrow X/G$  la aplicación cociente. La función distancia en el espacio de órbitas  $X/G$

$$d_G: X/G \times X/G \rightarrow \mathbb{R}$$

está definida por la fórmula

$$d_G(Gx, Gy) = \text{dist}(Gx, Gy),$$

donde  $\text{dist}$  denota la distancia entre conjuntos. Si  $d_G$  es la métrica en  $X/G$ , entonces  $d_G$  es llamada la *metriza del espacio de órbitas* en  $X/G$ .

**Teorema 1.3.8.** *Sea  $G$  un grupo de isometrías de un espacio métrico  $X$ . Entonces  $d_G$  es una métrica en  $X/G$  si y sólo si cada  $G$ -órbita es un subconjunto cerrado de  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $x, y \in X$  y sean  $g$  y  $h$  en  $G$ . Como  $g^{-1}$  es una isometría de  $X$ , tenemos que

$$d(g \cdot x, h \cdot y) = d(x, g^{-1}h \cdot y).$$

Por lo tanto

$$\text{dist}(Gx, Gy) = \text{dist}(x, Gy).$$

Supongamos que  $d_G$  es una métrica y que  $Gx \neq Gy$ . Entonces

$$\text{dist}(x, Gy) = d_G(Gx, Gy) > 0.$$

Sea  $r = \text{dist}(x, Gy)$ . Entonces,  $B(x, r) \subset X - Gy$ . Entonces,  $X - Gy$  es abierto y por lo tanto,  $Gy$  es cerrado. Entonces, cada órbita es un subconjunto cerrado de  $X$ .

Por otra parte, supongamos que cada  $G$ -órbita es un subconjunto cerrado de  $X$ . Si  $x, y \in X$ , por definición de  $d_G$ , tenemos que es simétrica y  $d_G(Gx, Gy) = 0$

si y sólo si  $Gx = Gy$ .

Si  $Gx \neq Gy$ , entonces

$$\begin{aligned} d(x, gy) + d(y, hz) &= d(x, gy) + d(gy, ghz) \\ &\geq d(x, ghz) \\ &\geq \text{dist}(x, Gz). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{dist}(x, Gz) \leq \text{dist}(x, Gy) + \text{dist}(y, Gz).$$

Entonces,  $d_G$  satisface la desigualdad del triángulo. Por lo tanto,  $d_G$  es una métrica.  $\square$

**Teorema 1.3.9** ([11, Thm. 5.3.5]). *Sea  $X$  un espacio métrico finitamente compacto. Entonces, un grupo  $\Gamma$  de isometrías de  $X$  es discreto si y sólo si actúa discontinuamente en  $X$ .*

**Proposición 1.3.10.** *Sea  $G$  un grupo de isometrías de un espacio métrico  $X$  tal que actúa libre y discontinuamente en  $X$ . Entonces, la aplicación cociente*

$$p: X \rightarrow X/G$$

*es una isometría local.*

*Demostración.* Sea  $x \in X$  arbitrario y  $r > 0$ . Entonces tenemos que

$$p(B(x, r)) \subseteq B(p(x), r).$$

Supongamos que  $y \in X$  y  $d_G(Gx, Gy) < r$ ; entonces,

$$\text{dist}(x, Gy) < r,$$

así que existe  $g \in G$  tal que  $d(x, g \cdot y) < r$ . Además tenemos que  $p(g \cdot y) = Gy$ . Por lo que  $p(B(x, r)) \subseteq B(p(x), r)$ , por lo tanto  $p(B(x, r)) = B(p(x), r)$ . Entonces  $p$  es una aplicación abierta.

Veamos ahora que es una isometría local. Como  $G$  actúa libremente en  $X$ , la aplicación  $x \mapsto g \cdot x$  es una biyección de  $G$  sobre  $Gx$ . Por el teorema 1.3.9 el conjunto  $Gx - \{x\}$  es discreto, entonces por la proposición 1.2.15  $Gx - \{x\}$  es cerrado. Así que

$$\text{dist}(x, Gx - \{x\}) > 0.$$

Sea

$$s = \frac{1}{2} \text{dist}(x, Gx - \{x\})$$

y sean  $y, z \in B(x, s/2)$  cualesquiera. Entonces  $d(y, z) < s$ . Sea  $g \neq e$  en  $G$ .

$$d(x, g \cdot x) \leq d(x, y) + d(y, g \cdot z) + d(g \cdot z, g \cdot x).$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} d(y, g \cdot z) &\geq d(x, g \cdot x) - d(x, y) - d(z, x) \\ &\geq 2s - s/2 - s/2 = s. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d_G(p(y), p(z)) = \text{dist}(Gy, Gz) = d(y, z).$$

Entonces,  $p$  es una isometría local.  $\square$

**Definición 1.3.11.** Un subconjunto  $R$  de un espacio métrico  $X$  es una *región fundamental* para un grupo  $\Gamma$  de isometrías de  $X$  si y sólo si

- (1) el conjunto  $R$  es abierto en  $X$ ;
- (2) los miembros de  $\{gR \mid g \in \Gamma\}$  son mutuamente ajenos; y
- (3)  $X = \cup\{g\bar{R} \mid g \in \Gamma\}$ .

**Ejemplo 1.3.12.** Observemos que la región  $R$  puede ser desconexa.

Sea  $X = \mathbb{R}$  y  $R = (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ , con  $\Gamma$  el grupo de isometrías que consiste de traslaciones por enteros. Entonces  $R$  es una región fundamental para  $\Gamma$ .

**Definición 1.3.13.** Un subconjunto  $D$  de un espacio métrico  $X$  es un *dominio fundamental* para un grupo  $\Gamma$  de isometrías de  $X$  si y sólo si  $D$  es una región fundamental conexa para  $\Gamma$ .

**Definición 1.3.14.** Una región fundamental  $R$  para un grupo  $\Gamma$  de isometrías de un espacio métrico  $X$  es *localmente finita* si y sólo si  $\{g\bar{R} \mid g \in \Gamma\}$  es una familia de subconjuntos localmente finita.

**Teorema 1.3.15.** Si un grupo  $\Gamma$  de isometrías de un espacio métrico  $X$  tiene una región fundamental, entonces  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de  $I(X)$ .

*Demostración.* Sea  $x$  un punto de una región fundamental  $R$  para el grupo de isometrías  $\Gamma$  de  $X$ . Entonces, la aplicación evaluación

$$\xi: \Gamma \rightarrow \Gamma x,$$

definido por  $\xi(g) = gx$ , es continua. Entonces, el punto  $x$  es abierto en  $\Gamma x$ , ya que  $R \cap \Gamma x = \{x\}$ . Además, el grupo de isotropía  $\Gamma_x$  es trivial, porque  $x \in R$  y  $\{R\} \cap \{gR\} = \emptyset$  para toda  $g \in \Gamma - \{e\}$ , por ser  $R$  una región fundamental. Por consiguiente  $e = \xi^{-1}(x)$  es abierto en  $\Gamma$ . Por lo tanto,  $\Gamma$  es discreto.  $\square$

**En el resto de la sección, sea  $X = \mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n$  ó  $\mathcal{H}^n$ .**

**Definición 1.3.16.** Un *poliedro fundamental convexo* para un grupo discreto  $\Gamma$  de isometrías de  $X$  es un poliedro convexo  $P$  en  $X$  cuyo interior es un dominio fundamental localmente finito para  $\Gamma$ .

**Definición 1.3.17.** Decimos que un poliedro fundamental convexo  $P$  para  $\Gamma$  es exacto si y sólo si para cada cara  $S$  de  $P$  existe un elemento  $g \in \Gamma$  tal que  $S = P \cap gP$ .

**Definición 1.3.18.** Una *teselación* de  $X$  es una colección  $\mathcal{P}$  de poliedros convexos de dimensión 3 en  $X$  tal que

- (1) los interiores de los poliedros en  $\mathcal{P}$  son mutuamente ajenos;
- (2) la unión de los poliedros en  $\mathcal{P}$  es  $X$ ; y
- (3) la colección  $\mathcal{P}$  es localmente finita.

**Definición 1.3.19.** Decimos que una teselación  $\mathcal{P}$  en  $X$  es *exacta* si y sólo si cada cara  $S$  de un poliedro  $P$  en  $\mathcal{P}$  es una cara de exactamente dos poliedros  $P$  y  $Q$  en  $\mathcal{P}$ .

**Teorema 1.3.20.** Sea  $P$  un poliedro convexo 3-dimensional en  $X$  y sea  $\Gamma$  un grupo de isometrías de  $X$ . Entonces,  $\Gamma$  es discreto y  $P$  es un poliedro fundamental convexo (exacto) para  $\Gamma$  si y sólo si

$$\mathcal{P} = \{gP \mid g \in \Gamma\}$$

es una teselación (exacta) de  $X$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\Gamma$  es discreto y  $P$  es un poliedro fundamental convexo para  $\Gamma$ . Entonces, el interior de  $P$ ,  $P^\circ$  es un dominio fundamental localmente finito para  $\Gamma$ . Luego, tenemos que

- (1) los miembros de  $\{gP^\circ \mid g \in \Gamma\}$  son mutuamente disjuntos;
- (2)  $X = \cup\{gP \mid g \in \Gamma\}$ ; y
- (3) la colección  $\mathcal{P}$  es localmente finita.

Entonces,  $\mathcal{P}$  es una teselación de  $X$ .

Ahora asumimos que  $P$  es exacto. Sea  $S$  una cara de  $P$ . Entonces, existe un único elemento  $g \neq e$  en  $\Gamma$  tal que  $S = P \cap gP$ , entonces  $g^{-1}S$  es una cara de  $P$ , así tenemos que  $S$  es una cara de  $gP$ . Por lo tanto,  $S$  es una cara de exactamente dos poliedros  $P$  y  $gP$  de  $\mathcal{P}$ . Como  $\mathcal{P}$  es  $\Gamma$ -equivariante lo mismo es verdad para cualquier cara de cualquier poliedro en  $\mathcal{P}$ . Entonces,  $\mathcal{P}$  es una teselación exacta.

Por otro lado, supongamos que  $\mathcal{P}$  es una teselación de  $X$ . Entonces,

- (1) los miembros de  $\{gP^\circ \mid g \in \Gamma\}$  son mutuamente ajenos;
- (2)  $X = \cup\{gP \mid g \in \Gamma\}$ ; y

- (3) la colección  $\mathcal{P}$  es localmente finita.

Entonces,  $P^\circ$  es un dominio fundamental localmente finito. Por lo tanto,  $\Gamma$  es discreto por el teorema 1.3.15 y  $P$  es un poliedro fundamental convexo para el grupo  $\Gamma$ .

Ahora asumimos que  $\mathcal{P}$  es exacta. Entonces, para cada cara  $S$  de  $P$ , existe  $g \in \Gamma$  tal que  $S$  es una cara de  $gP$ . Por consiguiente  $S \subset P \cap gP$ . Como  $P \cap gP \subset \partial P$  y  $S$  es un subconjunto maximal convexo de  $\partial P$ , tenemos que  $S = P \cap gP$ . Entonces  $P$  es exacto.  $\square$

## 1.4. Categorías y Funtores

En esta sección introduciremos las definiciones de categoría y funtor, y veremos algunos ejemplos de éstos.

**Definición 1.4.1.** Una *categoría*  $\mathcal{C}$  consiste de una clase de *objetos*  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  y para cada pareja ordenada de objetos  $A$  y  $B$  un conjunto de *morfismos*  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  con *dominio*  $A$  y *codominio*  $B$ . Si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , escribimos  $f: A \rightarrow B$ . Para cada terna de objetos  $A, B, C$  existe una función

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

que asocia a cada pareja de morfismos  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$ , su composición  $gf: A \rightarrow C$ . Se satisfacen los siguientes axiomas:

- (a) Asociatividad. Si  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  y  $h: C \rightarrow D$ , entonces  $h(gf) = (hg)f$ .
- (b) Identidad. Para todo objeto  $B$ , existe un morfismo  $1_B: B \rightarrow B$  tal que si  $f: A \rightarrow B$ ,  $1_B f = f$ , y si  $g: B \rightarrow C$  entonces  $g 1_B = g$ .

**Ejemplo 1.4.2.** i. La categoría **Set** donde los objetos  $\text{Obj}(\text{Set})$  son los conjuntos y los morfismos  $\text{Hom}_{\text{Set}}(A, B)$  son las funciones entre conjuntos.

- ii) La categoría **Top**, de espacios topológicos con las aplicaciones continuas entre ellos.
- iii) La categoría **Gr**, donde la clase de objetos  $\text{Obj}(\text{Gr})$  son los grupos y  $\text{Hom}_{\text{Gr}}(G, H)$  los homomorfismos de grupos.
- iv) La categoría **Ab**, donde los objetos son los grupos abelianos con morfismos  $\text{Hom}_{\text{Ab}}(G, H)$  los homomorfismos de grupos.
- v) La categoría de espacios topológicos y las clases de homotopía de aplicaciones continuas, denotada como  $\text{Top}_H$ .

- vi) La categoría  $\mathbf{Top}_*$ , que consiste de los espacios topológicos punteados con las aplicaciones continuas punteadas.
- vii) La categoría  $\mathbf{Poset}$ , que consiste de todos los conjuntos con orden parcial  $(P, \leq)$  y las funciones monótonas.

**Definición 1.4.3.** Decimos que una categoría  $\mathcal{C}$  es *pequeña* si los objetos de  $\mathcal{C}$  forman un conjunto.

**Ejemplos 1.4.4.** i. La categoría  $0$ , sin objetos y por tanto sin morfismos.

ii. La categoría  $1$  con un sólo objeto y el único morfismo la identidad.

iii. Sea  $X$  espacio topológico y sea  $\mathcal{C}$  la categoría donde  $\text{Obj}(\mathcal{C}) = X$  y los morfismos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  son las clases de homotopía de caminos  $\gamma: I \rightarrow X$  con  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$ .

Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  categorías, decimos que  $\mathcal{C}'$  es una *subcategoría* de  $\mathcal{C}$ , si  $\text{Obj}(\mathcal{C}')$  es una subclase de  $\text{Obj}(\mathcal{C})$ , y  $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ . Las composiciones en  $\mathcal{C}'$  son las restricciones de las composiciones en  $\mathcal{C}$ . Los morfismos identidad en  $\mathcal{C}'$  son los mismos que en  $\mathcal{C}$ .

**Definición 1.4.5.** Si  $\mathcal{C}'$  es una subcategoría de  $\mathcal{C}$  y  $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , decimos que  $\mathcal{C}'$  es una *subcategoría plena*.

**Ejemplo 1.4.6.** La categoría  $\mathbf{Ab}$  es subcategoría plena de  $\mathbf{Gr}$ , ya que todo grupo abeliano está en la categoría  $\mathbf{Gr}$  de grupos y además tenemos que  $\text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(G, H) = \text{Hom}_{\mathbf{Gr}}(G, H)$ .

**Definición 1.4.7.** Sea  $f: A \rightarrow B$  un morfismo en una categoría  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $f$  es un isomorfismo si existe un morfismo  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  tal que  $hf = 1_A$  y  $fh = 1_B$ . En éste caso decimos que  $A$  y  $B$  son *isomorfos* y se escribe  $A \cong B$ .

**Definición 1.4.8.** Dadas dos categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ , un *funtor covariante* (*contravariante*)  $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  asocia a cada objeto de  $A$  en  $\mathcal{C}$  un objeto  $T(A)$  en  $\mathcal{D}$  y a cada morfismo  $f: A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  un morfismo  $f_* = T(f): T(A) \rightarrow T(B)$  ( $f^* = T(f): T(B) \rightarrow T(A)$ ) de tal manera que

- (a)  $T(1_A) = 1_{T(A)}$ ,
- (b)  $T(gf) = T(g)T(f)$ ,  $(T(gf) = T(f)T(g))$ .

**Ejemplos 1.4.9.** i)  $T: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  el funtor olvido, donde a cada espacio topológico  $X$  lo envía bajo  $T$  al conjunto  $X$  (sin la topología.)

ii)  $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ , donde a cada conjunto  $A$  le asocia el mismo conjunto  $A$  con la topología discreta.

- iii).  $T: \text{Set} \rightarrow \text{Gr}$ , donde al conjunto  $X$  lo manda al grupo de permutaciones de  $X$ .
- iv)  $\text{Ab} \rightarrow \text{Gr}$ , la inclusión.
- v)  $T: \text{Gr} \rightarrow \text{Ab}$ , donde  $T(G) = G/[G, G]$  es la abelianización del grupo.
- vi)  $\text{Top} \rightarrow \text{Gr}$  donde  $X \mapsto \pi_1(X)$ .
- vii) Otro functor es el que asocia a  $X$  su  $n$ -ésimo grupo de homología  $H_n(X)$ , es un functor  $T: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ .

**Proposición 1.4.10.** *Sea  $T$  un functor de la categoría  $\mathcal{C}$  a la categoría  $\mathcal{D}$ . Si  $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  tales que  $A \cong B$ , entonces  $T(A) \cong T(B)$ .*

*Demostración.* Asumamos que  $T$  es covariante (el argumento es similar si  $T$  es contravariante). Sea  $f: A \rightarrow B$  un isomorfismo y sea  $f^{-1}: B \rightarrow A$  su inversa. Como  $f^{-1}f = 1_B$  y  $ff^{-1} = 1_A$ , tenemos que  $T(f^{-1})T(f) = 1_{T(A)}$  y  $T(f)T(f^{-1}) = 1_{T(B)}$ .  $\square$

Es posible comparar funtores.

**Definición 1.4.11.** Sean  $T_1, T_2: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores, ambos covariantes o ambos contravariantes. Una *transformación natural*  $\varphi$  entre  $T_1$  y  $T_2$ , en símbolos  $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$ , asocia a cada objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  un morfismo  $\varphi(A): T_1(A) \rightarrow T_2(A)$  de  $\mathcal{D}$ , de tal manera que para todo morfismo  $f: A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$  el diagrama apropiado conmuta. Cuando es covariante tenemos

$$\begin{array}{ccc} T_1(A) & \xrightarrow{T_1(f)} & T_1(B) \\ \downarrow \varphi(A) & & \downarrow \varphi(B) \\ T_2(A) & \xrightarrow{T_2(f)} & T_2(B) \end{array}$$

y cuando es contravariante

$$\begin{array}{ccc} T_1(A) & \xleftarrow{T_1(f)} & T_1(B) \\ \downarrow \varphi(A) & & \downarrow \varphi(B) \\ T_2(A) & \xleftarrow{T_2(f)} & T_2(B) \end{array}$$

Si  $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$  es una transformación natural tal que  $\varphi(A)$  es un isomorfismo en  $\mathcal{D}$  para cada objeto  $A$  en  $\mathcal{C}$ , entonces  $\varphi$  es llamada *equivalencia natural*.



# Capítulo 2

## Complejos Simpliciales

En este capítulo veremos la definición de complejos simpliciales, así como toda una teoría en torno a éstos, en la que se incluye la definición de aplicaciones simpliciales, espacios triangulables y espacios de órbitas.

### 2.1. Complejos Simpliciales

Sea  $\mathbb{E}^n$  el espacio euclideo de dimension  $n$  visto como espacio afín y sean  $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E}^n$ . El *hiperplano* de dimensión  $k$  generado por ellos consiste de todas las combinaciones lineales de la forma  $\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_k v_k$ , con  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) y  $\sum_0^k \lambda_i = 1$ .

Decimos que los puntos  $v_0, \dots, v_k$  están en *posición general* si cualquier subconjunto de ellos genera un hiperplano de dimensión estrictamente menor. Esto es equivalente a pedir que los vectores  $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0$  sean linealmente independientes.

**Definición 2.1.1.** Dados  $k + 1$  puntos en posición general  $v_0, \dots, v_k$  en  $\mathbb{E}^n$ , llamamos al conjunto convexo más pequeño que los contiene (envolvente convexa) un *simplejo* de dimensión  $k$  ó *k-simplejo*; denotaremos a este simplejo como  $(v_0 \dots v_k)$ .

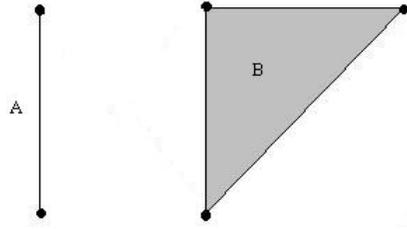
Los puntos  $v_0, \dots, v_k$  son los *vértices* del simplejo. Es fácil ver que un punto  $x$  está en el simplejo si se puede escribir como una combinación lineal

$$x = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_k v_k$$

con  $\sum_0^k \lambda_i = 1$  y  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ .

Denotaremos por  $\Delta_n$  al *n-simplejo estándar* en  $\mathbb{E}^n$  con vértices  $e_0, e_1, \dots, e_n$ , donde  $e_0$  es el origen y  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{E}^n$  es tal que la coordenada  $i$ -ésima es uno y las demás cero.

**Ejemplo 2.1.2.** En la siguiente figura tenemos el 1-simplejo  $A$  y el 2-simplejo  $B$ .

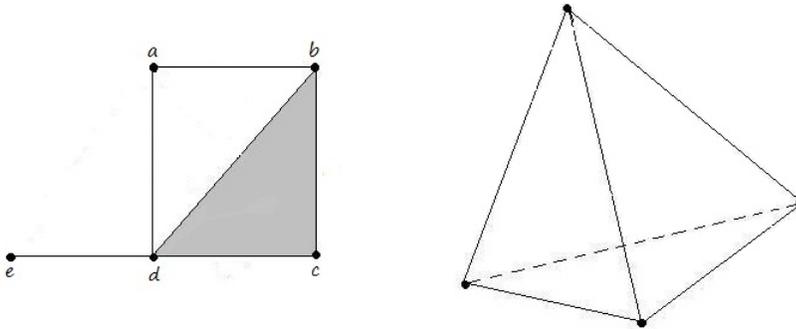


Si  $A$  y  $B$  son simplejos y los vértices de  $A$  son un subconjunto de los vértices de  $B$ , decimos que  $A$  es una *cara* de  $B$  y escribimos  $A < B$ .

**Definición 2.1.3.** Una colección finita de simplejos de algún espacio euclideo  $\mathbb{E}^n$  es llamado un *complejo simplicial* si cada vez que un simplejo está en la colección, también sus caras están y si dos simplejos de la colección se intersectan, la intersección es una cara en común.

La *dimensión* de un complejo simplicial  $K$  es el máximo de las dimensiones de los simplejos de  $K$ .

**Ejemplo 2.1.4.** En la siguiente figura se muestran dos complejos simpliciales.



En la izquierda es la unión de 1-simplejos y el 2-simplejo  $(bcd)$ , entonces es un complejo simplicial de dimensión 2. En la derecha es un complejo simplicial que es la unión de 1-simplejos, los cuales se intersectan en los vértices que son 0-simplejos. La dimensión de este complejo simplicial es 1.

**Definición 2.1.5.** Un *subcomplejo* es una subcolección de simplejos de un complejo simplicial  $K$ , el cual es a su vez un complejo simplicial.

La unión de todos los simplejos de un complejo simplicial es un subconjunto de un espacio euclideo y lo podemos ver como un espacio topológico dándole la topología de subespacio. Un complejo simplicial  $K$  visto de esta manera es llamado un *poliedro* o decimos que es la *realización geométrica* de  $K$  y se denota por  $|K|$ .

**Definición 2.1.6.** Una *triangulación* de un espacio topológico  $X$  consiste de un complejo simplicial  $K$  y un homeomorfismo

$$h: |K| \rightarrow X.$$

Sea  $K$  un complejo simplicial en  $\mathbb{E}^n$ , construiremos un complejo simplicial  $CK \subset \mathbb{E}^{n+1}$  llamado el *cono* de  $K$  como sigue: Sea  $v = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{E}^{n+1}$ . Si  $A$  es un  $k$ -simplejo en  $\mathbb{E}^n$  con vértices  $v_0, \dots, v_k$ , entonces, los puntos  $v_0, \dots, v_k, v$ , están en posición general. Por lo tanto determinan un  $k+1$ -simplejo en  $\mathbb{E}^{n+1}$ ; este simplejo es llamado el *join* de  $A$  con  $v$ . El *cono*  $CK$  de  $K$  consiste de los simplejos de  $K$ , el join de estos simplejos con  $v$  y el 0-simplejo  $v$ .

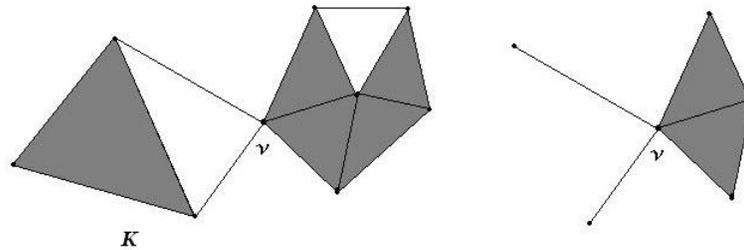
Claramente, estos simplejos se intersectan en caras comunes y forman un complejo simplicial. Como subconjunto de  $\mathbb{E}^{n+1}$ , el poliedro  $|CK|$  de  $CK$  consiste de todos los segmentos de recta que unen a  $v$  con los puntos de  $|K|$ . Recordemos que dado un espacio topológico  $X$  el cono de  $X$ , está dado por  $CX = (X \times I)/(X \times \{1\})$ . Entonces,  $|CK| \cong C|K|$ .

**Definición 2.1.7.** Sea  $A$  un simplejo en  $\mathbb{E}^n$  con vértices  $v_0, \dots, v_k$ . Definimos el *interior* de  $A$  como los puntos  $x \in A$  que se pueden escribir de la forma  $x = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_k v_k$ , con  $\sum_0^k \lambda_i = 1$  y  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, k$ .

Notemos que esta noción coincide con la definición topológica de interior cuando  $k = n$  pero no en otro caso.

**Definición 2.1.8.** Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $v$  un vértice de  $K$ . La *estrella abierta* de  $v$  en  $K$  es la unión de los interiores de los simplejos de  $K$  que tienen a  $v$  como uno de sus vértices. Esta es un subconjunto abierto de  $|K|$  la denotaremos por  $\text{star}(v, K)$ .

**Ejemplo 2.1.9.** En la siguiente figura se muestra a la izquierda el complejo  $K$  y a la derecha la estrella abierta de  $v$  en  $K$   $\text{star}(v, K)$ .



**Definición 2.1.10.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Dado un punto  $x \in |K|$ , el punto  $x$  está contenido en el interior de un único simplejo de  $K$ . Llamaremos a dicho simplejo *el portador* de  $x$ .

**Proposición 2.1.11.** Los vértices  $v_0, v_1, \dots, v_k$  de un complejo simplicial  $K$  forman un simplejo  $A$  de  $K$  si y sólo si la intersección de las estrellas abiertas de  $A$  es no vacía.

*Demostración.* Si  $v_0, v_1, \dots, v_k$  son los vértices del simplejo  $A$  de  $K$ , entonces, todo el interior de  $A$  está en  $\text{star}(v_i, K)$  para  $0 \leq i \leq k$ . Por otro lado, supongamos que  $x \in \bigcap_0^k \text{star}(v_i, K)$  y sea  $A$  el portador de  $x$ . Por definición de estrella abierta, cada  $v_i$  debe ser un vértice de  $A$ , y por lo tanto  $v_0, v_1, \dots, v_k$  forman alguna cara de  $A$ .  $\square$

**Definición 2.1.12.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales, no necesariamente en el mismo espacio euclideo. Decimos que  $K$  y  $L$  son *isomorfos* si existe una biyección  $\phi$  del conjunto de vértices de  $K$  al conjunto de vértices de  $L$ , tal que  $v_1, \dots, v_k$  forman los vértices de un simplejo en  $K$  si y sólo si  $\phi(v_1), \dots, \phi(v_k)$  forman los vértices de un simplejo en  $L$ .

**Definición 2.1.13.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales. Si una aplicación

$$s: |K| \rightarrow |L|$$

manda simplejos de  $K$  linealmente en simplejos de  $L$ , es llamada *aplicación simplicial*.

Más precisamente, si  $A$  es un simplejo de  $K$  requerimos que  $s(A)$  sea un simplejo de  $L$ . La condición de linealidad significa que si  $v_0, \dots, v_k$  son los vértices de  $A$  y  $x \in A$  está dado por  $x = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_k v_k$  con  $\lambda_i \geq 0$  y  $\sum_0^k \lambda_i = 1$ , entonces,  $s(x)$  al ser expresado en términos de los vértices de  $s(A)$ , está dado por  $s(x) = \lambda_0 s(v_0) + \dots + \lambda_k s(v_k)$ . Es importante que  $s(A)$  puede ser de dimensión menor que  $A$ , pues no se pide que  $s$  sea inyectiva. En este caso tenemos que  $s(v_0), \dots, s(v_k)$  no son todos distintos.

Es claro que una función simplicial es continua, pues funciones lineales sobre simplejos son continuas y usando el lema del Pegado, concluimos que es continua. Debido a la linealidad sobre cada simplejo de  $K$ , una aplicación simplicial está totalmente determinada una vez que sabemos cómo actúa en los vértices de  $K$ . De hecho, si una función  $s$  de los vértices de  $K$  a los vértices de  $L$  es tal que si los vértices  $v_0, \dots, v_k$  de  $K$  generan un simplejo de  $K$ , entonces,  $s(v_0), \dots, s(v_k)$  generan un simplejo de  $L$ , entonces,  $s$  puede extenderse linealmente a una aplicación simplicial

$$|K| \rightarrow |L|.$$

En particular, un isomorfismo de  $K$  a  $L$ , se extiende de esta manera para dar un homeomorfismo de  $|K|$  en  $|L|$ .

**Lema 2.1.14.** *Sea  $K$  un complejo simplicial en  $\mathbb{E}^n$*

- (a)  *$|K|$  es un subconjunto cerrado y acotado en  $\mathbb{E}^n$ , por lo tanto  $|K|$  es compacto.*
- (b) *Cada punto de  $|K|$  está en el interior de exactamente un simplejo de  $K$ .*

(c) Si tomamos los simplejos de  $K$  separadamente y le damos a la unión la topología cociente, entonces, obtenemos exactamente  $|K|$ .

(d) Si  $|K|$  es un espacio conexo, entonces es arcoconexo.

*Demostración.* (a) Cada simplejo de  $K$  es cerrado y acotado. Como  $K$  es finito tenemos que  $|K|$  también es cerrado y acotado.

(b) Supongamos que  $A$  y  $B$  son simplejos de  $K$  tal que sus interiores se traslapan. Como  $K$  es un complejo,  $A$  y  $B$  necesariamente se juntan en una cara común. Pero la única cara de un simplejo que contiene puntos interiores es el mismo simplejo entero. Por lo tanto,  $A = B$ .

(c) Notemos que simplejos de  $K$  son subconjuntos cerrados de  $|K|$  como son cerrados en  $\mathbb{E}^n$ . Así, si  $C$  es un subconjunto de  $|K|$ , y si  $C \cap A$  es cerrado en  $A$  para cada simplejo  $A$  de  $K$ , entonces,  $C \cap A$  debe ser cerrado en  $|K|$ . Por tanto, la unión finita  $C = \bigcup \{C \cap A | A \in K\}$  es cerrado en  $|K|$ . Así, los subconjuntos cerrados de  $|K|$  son precisamente aquellos que intersectan cada simplejo de  $K$  en un conjunto cerrado, entonces,  $K$  tiene la topología cociente.

(d) Supongamos que  $|K|$  es conexo. Dado  $x \in |K|$ , sea  $L$  el subcomplejo de  $K$  que consiste de todos los simplejos de  $K$  que no contienen a  $x$ , y sea  $\varepsilon$  la distancia de  $x$  a  $|L|$ . Entonces, si  $\delta < \varepsilon$  el conjunto  $B(x, \delta) \cap |K|$  es arco-conexo, ya que cualquier punto en este conjunto se puede unir a  $x$  por una línea en algún simplejo de  $K$ . Esto significa que  $|K|$  es un espacio localmente arco-conexo, y  $|K|$  es conexo, por tanto  $|K|$  es arco-conexo.  $\square$

## 2.2. Complejos Abstractos

**Definición 2.2.1.** Un complejo simplicial *abstracto* finito es un conjunto  $V$  de objetos, llamados *vértices*,  $a_1, \dots, a_\alpha$ , y un conjunto  $A$  de subconjuntos  $s_i^p$  de vértices, llamados *simplejos*, donde  $p+1$  es el número de vértices en el simplejo  $s_i^p$ ; los simplejos de  $A$  satisfacen la condición de que cualquier subconjunto de un simplejo de  $A$  es también un simplejo de  $A$ . La dimensión de  $s_i^p$  es  $p$  y la dimensión de  $A$  es el máximo de las dimensiones de sus simplejos.

**Definición 2.2.2.** Se llama *isomorfismo* entre dos complejos abstractos  $A_1$  y  $A_2$  a una biyección  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  entre los vértices de  $A_1$  y  $A_2$  tal que si  $(a_0 \dots a_k)$  es un simplejo de  $A_1$  entonces,  $(\varphi(a_0) \dots \varphi(a_k))$  es un simplejo de  $A_2$ , y recíprocamente.

**Definición 2.2.3.** Una *realización* de un complejo simplicial abstracto  $A$  es un complejo simplicial  $K$  cuyo correspondiente complejo abstracto es isomorfo a  $A$ .

**Proposición 2.2.4** (de Realización). *Todo complejo simplicial abstracto tiene una realización.*

*Demostración.* Sean  $a_1, \dots, a_\alpha$  los vértices del complejo simplicial abstracto  $K$ . Sean  $b_1, \dots, b_\alpha$  los vértices de un  $(\alpha - 1)$ -simplejo  $s$ , en  $\mathbb{E}^{\alpha-1}$  con complejo simplicial abstracto  $A$  cuyos vértices son  $\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_\alpha$ . Entonces, cualquier biyección de los elementos de  $K$  a los elementos de  $A$  realiza a  $K$  como un subcomplejo de  $A$ .  $\square$

**Observación 2.2.5.** Observemos que todas las realizaciones geométricas de un mismo complejo abstracto son simplicialmente isomorfas.

**Definición 2.2.6.** Un *complejo simplicial abstracto infinito*  $K$  definido sobre una colección infinita de objetos, llamados *vértices*, es un conjunto infinito de subcolecciones finitas de  $n + 1$  vértices,  $s_i^n$ , llamados simplejos, que satisface la condición de que si  $s_i^n \in K$ , entonces, cualquier subcolección de  $s_i^n$  pertenece al complejo simplicial  $K$ .

Ahora veremos que cualquier complejo simplicial infinito  $K$  se puede realizar en algún espacio euclideo. Construiremos un espacio topológico a partir del complejo  $K$ .

Sea  $\{a_i\}_{i \in I}$  la colección de vértices de  $K$ ; es conveniente asumir que  $I$  es un conjunto totalmente ordenado y para exhibir las subcolecciones de los  $\{a_i\}$  de acuerdo al orden de sus superíndices.

**Definición 2.2.7.** Definimos la realización geométrica  $|K|$  de  $K$  de la siguiente manera. Los puntos de  $|K|$  son colecciones de números reales no negativos  $\{\lambda_i\}$ , un número por cada  $i \in I$ , sujetas a:

- (i) Las  $\lambda$ 's diferentes de cero tienen como elementos subíndices de  $I$  a aquellos que son los superíndices de los vértices de un simplejo de  $K$ ;
- (ii)  $\sum \lambda_i = 1$ .

Notemos que (ii) tiene sentido en vista de (i) y el hecho de que los simplejos de  $K$  son subcolecciones finitas de vértices.

**Ejemplo 2.2.8.** La acción de los enteros en la línea real por adición es simplicial, basta triangular la línea real como un complejo 1-dimensional introduciendo un vértice en cada entero.

## 2.3. Triangulaciones Inducidas en Espacios de Orbitas

**Definición 2.3.1.** Sea  $G$  un grupo discreto y  $K$  un complejo simplicial. Una *acción* de  $G$  sobre el poliedro  $|K|$  se dice *simplicial* si para todo  $g \in G$ , el homeomorfismo  $\psi_g: |K| \rightarrow |K|$  dado por  $\psi_g(x) = gx$ , es simplicial.

Sea  $X$  un espacio triangulable con triangulación  $K$  y  $G$  un grupo que actúa sobre  $X$  simplicialmente.

Por medio de la proyección  $p: X \rightarrow X/G$  podemos definir un complejo abstracto  $K/G$  como sigue:

- i) Los vértices de  $K/G$  son las órbitas (proyecciones) de los vértices de  $K$ .
- ii) Las órbitas  $\widehat{v}_0, \dots, \widehat{v}_k$  generan un simplejo de  $K/G$  si y sólo si existen vértices  $v_0, \dots, v_k \in K$ , con  $p(v_i) = \widehat{v}_i$  para  $0 \leq i \leq k$ , que generan un simplejo de  $K$ .

Hay una aplicación natural

$$p_1: X \rightarrow |K/G|.$$

Supongamos que  $x \in X$  tiene portador  $(v_0 v_1 \dots v_k)$ , es decir,  $x$  está en el interior del  $k$ -simplejo  $(v_0 v_1 \dots v_k)$ , entonces  $x$  se representa como

$$\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_k v_k$$

con  $0 < \lambda_i \leq 1$  y  $\sum_0^k \lambda_i = 1$ ; entonces, bajo  $p_1$ ,  $x$  va a dar al punto

$$\lambda_0 p_1(v_0) + \dots + \lambda_k p_1(v_k)$$

de  $|K/G|$ . Además, para cualquier  $g \in G$ ,  $x \in X$ , tenemos  $p_1(g(x)) = p_1(x)$ , de modo que  $p_1$  induce una aplicación

$$\psi: X/G \rightarrow |K/G|$$

para el cual, dado  $\widehat{x} \in X/G$  y cualquier punto  $x \in p^{-1}(\widehat{x})$ ,  $\psi(\widehat{x}) = p_1(x)$ .

La aplicación  $\psi$  es sobre y como la aplicación  $p$  es abierta, será continua si y sólo si  $p_1$  es continua. Sin embargo,  $p_1$  fue construido como una aplicación simplicial de  $K$  en  $K/G$  asegurando su continuidad.

Si  $\psi$  fuera un homeomorfismo podríamos considerar los espacios  $X/G$ ,  $|K/G|$  y las aplicaciones  $p, p_1$ , como esencialmente el mismo. En este caso la acción de  $G$  en  $X$  induce a través de la triangulación  $K$  de  $X$ , una triangulación  $K/G$  de  $X/G$ .

Notemos que en general  $\psi$  no es necesariamente 1-1.

Las siguientes dos condiciones demostrarán ser necesarias por separado y juntas son suficiente para que  $\psi$  sea un homeomorfismo.

CONDICIÓN 1: Dado cualquier 1-simplejo  $(v_i v_j)$  de  $K$ , para cualquier  $g \in G$ , tenemos que  $g(v_i) \neq v_j$ .

*Necesidad.* Supongamos que existe  $g \in G$  tal que  $g(v_i) = v_j$ , entonces,  $p(v_i) = p(v_j)$ . Consideremos algún punto  $x = \lambda v_i + (1 - \lambda)v_j$ , donde  $0 < \lambda < 1$ , entonces,

$$p_1(x) = \lambda p(v_i) + (1 - \lambda)p(v_j) = p(v_i) = p_1(v_i).$$

Sin embargo, como  $g$  es una transformación simplicial, no podemos tener a  $v_i$  como vértice y  $x$  no ser vértice, en la misma órbita. Así,  $p(x) \neq p(v_i)$  y  $\psi$  no puede ser 1-1.  $\square$

CONDICIÓN 2: Si dos simplejos  $(v_0 \dots v_k b)$  y  $(v_0 \dots v_k c)$  de  $K$  son tales que  $b$  y  $c$  están en la misma órbita, entonces, existe un elemento  $\tilde{g} \in G$  tal que

$$\begin{aligned}\tilde{g}(v_i) &= v_i \quad (0 \leq i \leq k), \\ \tilde{g}(b) &= c.\end{aligned}$$

*Necesidad.* Supongamos que  $\psi$  es un homeomorfismo y  $g(b) = c$ . Consideremos los puntos

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i + \mu b, \quad y = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i + \mu c,$$

donde  $0 < \lambda_i, \mu < 1$  y  $\sum_0^k \lambda_i + \mu = 1$ . Entonces,

$$p_1(x) = \sum \lambda_i p(v_i) + \mu p(b) = \sum \lambda_i p(v_i) + \mu p(c) = p_1(y).$$

Pero  $\psi$  es 1-1, por tanto debemos tener que  $p(x) = p(y)$ , entonces, existe  $\tilde{g} \in G$  con  $\tilde{g}(x) = y$ , es decir,

$$\tilde{g}(x) = \sum \lambda_i \tilde{g}(v_i) + \mu g(b) = \sum \lambda_i v_i + \mu c.$$

Como asumimos que  $\psi$  es un homeomorfismo, se cumple la condición 1, y entonces,  $\tilde{g}(v_i) \neq v_j$  para  $i \neq j$  y  $\tilde{g}(b) \neq v_i$  para  $0 \leq i \leq k$ . Por tanto debemos tener que  $\tilde{g}(v_i) = v_i \quad 0 \leq i \leq k$  y por tanto  $\tilde{g}(b) = c$ .

**Teorema 2.3.2.** *Si las Condiciones 1 y 2 se satisfacen, entonces  $\psi$  es un homeomorfismo.*

*Demostración.* (a)  $\psi$  es 1-1.

Consideremos dos puntos  $x, y \in X$ , digamos

$$x = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_k v_k,$$

$$y = \mu_0 u_0 + \dots + \mu_l u_l,$$

con  $0 < \lambda_i, \mu_i \leq 1$  y  $\sum_0^k \lambda_i = \sum_0^l \mu_j = 1$ .

Supongamos que  $p_1(x) = p_1(y)$ , entonces,

$$\sum_0^k \lambda_i p(v_i) = \sum_0^l \mu_j p(u_j).$$

La Condición 1 asegura que  $p(v_i) \neq p(v_j)$  y  $p(u_i) \neq p(u_j)$  siempre que  $i \neq j$ , por ello  $l = k$ , y podemos reordenar, si es necesario, tal que  $\mu_i = \lambda_i$ ,  $p(v_i) = p(u_i)$  para  $0 \leq i \leq k$ . En vista de esto, existen elementos  $g_i \in G$  tal que  $g_i(v_i) = u_i$  para  $0 \leq i \leq k$ . Si  $g_0(v_i) = u_i$  para  $0 \leq i \leq k$ , nada hay que probar, porque  $g_0(x) = y$ . De otra manera, existe un primer entero  $r_1$  tal que  $g_0(v_{r_1}) \neq u_{r_1}$ ; sea  $g_0(v_{r_1}) = w_{r_1}$ . Como  $g_{r_1}(v_{r_1}) = u_{r_1}$ , entonces,  $v_{r_1}, u_{r_1}$  y  $w_{r_1}$  están en la misma  $G$ -órbita; entonces, existe  $g \in G$  tal que  $g(w_{r_1}) = u_{r_1}$ . Aplicando la Condición 2 a los simplejos  $(v_0 \dots v_{r_1-1} v_{r_1})$ ,  $(v_0 \dots v_{r_1-1} w_{r_1})$ , tenemos la existencia de un elemento  $\tilde{g}_{r_1} \in G$  el cual satisface

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{r_1}(v_i) &= v_i & (0 \leq i \leq r_1 - 1) \\ \tilde{g}_{r_1}(w_{r_1}) &= v_{r_1}.\end{aligned}$$

Por tanto,  $\tilde{g}_{r_1} g_0(v_i) = u_i$  para  $0 \leq i \leq r_2 - 1$ ,  $r_1 < r_2$ .

Si ahora  $r_2 - 1 = k$  la prueba está completa, de otra forma repetimos el mismo argumento, el cual termina a lo más después de  $k$  pasos y aplicando la Condición 2 sucesivamente en cada paso proveemos un elemento  $g \in G$  tal que  $g(v_i) = u_i$  para  $0 \leq i \leq k$ , es decir,  $g(x) = y$ , teniendo  $p(x) = p(y)$  como requerimos.

(b)  $\psi$  es una aplicación abierta.

Ya tenemos que  $\psi$  es sobre, continua y 1-1, siendo  $p_1: |K| \rightarrow |K/G|$  una aplicación simplicial que preserva dimensión. Por tanto, la restricción de  $p_1$  a cualquier simplejo, de hecho a la cerradura de cualquier simplejo de  $K$  es un homeomorfismo. Esto significa que  $\psi^{-1}$  restringida a la cerradura de cualquier simplejo de  $K/G$  es continua, y por tanto  $\psi^{-1}$  es continua.  $\square$

## 2.4. Objetos Simpliciales

Veamos ahora la generalización de un complejo simplicial. Primero definiremos un conjunto simplicial para después generalizarlo como un functor llamado objeto simplicial. Y daremos algunos ejemplos, uno de ellos es el espacio clasificante de un grupo.

**Definición 2.4.1.** Sea  $\Delta$  la subcategoría plena de Poset con

$$Obj(\Delta) = \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\},$$

donde  $[n]$  denota el conjunto parcialmente ordenado  $\{0, 1, \dots, n\}$  con el orden usual en  $\mathbb{N}$ . Los morfismos en  $\Delta$  son las funciones monótonas  $f: [m] \rightarrow [n]$ , con  $n, m \in \mathbb{N}$ .

**Definición 2.4.2.** Un *conjunto simplicial* es una familia de conjuntos

$$K = \{K_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

y funciones  $K(f): K_n \rightarrow K_m$ , una por cada función monótona no decreciente  $f: [m] \rightarrow [n]$ , con  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ , tal que las siguientes condiciones se cumplen:  $K(Id) = Id$ , y si  $f: [m] \rightarrow [n]$ ,  $g: [n] \rightarrow [l]$ , entonces,

$$K(g \circ f) = K(f) \circ K(g).$$

Los elementos de  $K_n$  se llaman  $n$ -simplejos. Para cada función no decreciente  $f: [m] \rightarrow [n]$ , definimos la  $f$ -ésima cara  $\Delta_f$  como la aplicación lineal

$$\Delta_f: \Delta_m \rightarrow \Delta_n,$$

donde  $\Delta_n$  es el simplejo estándar y  $\Delta_f$  manda el vértice  $e_i \in \Delta_m$  en el vértice  $e_{f(i)} \in \Delta_n$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ .

Observemos que un conjunto simplicial es un funtor contravariante  $K$  de la categoría  $\Delta$  a la categoría **Set**,

$$\Delta \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$\begin{array}{ccc} [n] & \longmapsto & K[n] = K_n \\ f \uparrow & & \downarrow K(f) \\ [m] & \longrightarrow & K[m] = K_m \end{array}$$

Notemos que  $K: \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  es equivalente.

**Definición 2.4.3.** La *Realización Geométrica* de un conjunto simplicial

$$K: \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

es el espacio topológico cuyo conjunto subyacente está dado por

$$\bigsqcup_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times K_n) / R,$$

donde  $K_n = K([n])$  y  $R$  es la relación de equivalencia más débil que identifica a los puntos  $(s, x) \in \Delta_n \times K_n$  y  $(t, y) \in \Delta_m \times K_m$  como  $y = K(t)x$ ,  $s = \Delta_f(t)$ , para alguna función no decreciente  $f: [m] \rightarrow [n]$ .

Escribimos esta condición como  $(t, y) \mapsto (s, x)$ . La topología de  $K$  es la más débil para la cual el cociente por  $R$  es continua.

Podemos generalizar la definición de conjunto simplicial a cualquier categoría.

**Definición 2.4.4.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Un *objeto simplicial* en la categoría  $\mathcal{C}$  es un funtor contravariante

$$S: \Delta \rightarrow \mathcal{C}.$$

Es conveniente usar dos familias especiales de morfismos de  $\Delta$

$$\begin{aligned} d_n^i: [n-1] &\rightarrow [n] \quad 0 \leq i \leq n \\ s_n^j: [n+1] &\rightarrow [n] \quad 0 \leq j \leq n \end{aligned}$$

donde  $d_n^i$  es la única función estrictamente creciente que no toma el valor  $i$ , llamada  *$i$ -ésima cara* y  $s_n^i$  es la única función no decreciente que toma el valor  $j$  dos veces, llamada  *$i$ -ésima degeneración*. Es decir,

$$\begin{aligned} d_n^i(m) &= \begin{cases} m, & m < i \\ m+1, & i \leq m \leq n-1 \end{cases} \\ s_n^j(m) &= \begin{cases} m, & m \leq j \\ m-1, & j < m \leq n+1 \end{cases} \end{aligned}$$

**Proposición 2.4.5.** Los morfismos  $d_n^i$  y  $s_n^j$  satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} (a) \quad d_{n+1}^j d_n^i &= d_{n+1}^i d_n^{j-1}, \quad i < j \\ (b) \quad s_{n-1}^j d_n^i &= \begin{cases} d_{n-1}^i s_{n-2}^{j-1} & i < j \\ Id_{[n-1]} & i = j, i = j+1 \\ d_{n-1}^{i-1} s_{n-2}^j & i > j+1 \end{cases} \\ (c) \quad s_n^i s_{n+1}^j &= s_n^i s_{n+1}^{j+1}, \quad i < j. \end{aligned}$$

*Demostración.* (a) Sea  $i < j$ , entonces,

$$\begin{aligned} d_{n+1}^j d_n^i(m) &= m = d_{n+1}^i d_n^{j-1}(m), \quad \text{si } m < i, \\ d_{n+1}^j d_n^i(m) &= d_{n+1}^j(m+1) = m+1 = d_{n+1}^i d_n^{j-1}(m), \quad \text{si } i \leq m < j-1 \\ d_{n+1}^j d_n^i(m) &= m+2 = d_{n+1}^i d_n^{j-1}(m), \quad \text{si } m \geq j-1. \end{aligned}$$

(b) Si  $i < j$ , tenemos

$$\begin{aligned} s_{n-1}^j d_n^i(m) &= m = d_{n-1}^i s_{n-2}^{j-1}(m), \quad \text{si } m < i \\ s_{n-1}^j d_n^i(m) &= m+1 = d_{n-1}^i s_{n-2}^{j-1}(m), \quad \text{si } i \leq m < j \\ s_{n-1}^j d_n^i(m) &= m = d_{n-1}^i s_{n-2}^{j-1}(m), \quad \text{si } m \geq j \end{aligned}$$

Si  $i = j$ , entonces,

$$\begin{aligned} s_{n-1}^i d_n^i(m) &= s_{n-1}^i(m) = m \quad \text{para } m < i \\ s_{n-1}^i d_n^i(m) &= s_{n-1}^i(m+1) = m \quad \text{para } m \geq i. \end{aligned}$$

Si  $i = j + 1$

$$\begin{aligned} s_{n-1}^j d_n^{j+1}(m) &= s_{n-1}^j(m) = m \quad \text{para } m < j + 1 \\ s_{n-1}^j d_n^{j+1}(m) &= s_{n-1}^j(m+1) = m \quad \text{para } m \geq j + 1. \end{aligned}$$

por tanto,  $s_{n-1}^j d_n^i = Id_{[n-1]}$  para  $i = j$  ó  $i = j + 1$ .

Si  $i > j + 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} s_{n-1}^j d_n^i(m) &= s_{n-1}^j(m) = m, \quad m \leq j \\ s_{n-1}^j d_n^i(m) &= s_{n-1}^j(m) = m - 1, \quad j + 1 \leq m < i \\ s_{n-1}^j d_n^i(m) &= s_{n-1}^j(m+1) = m, \quad i \leq m \leq n - 1. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} d_{n-1}^{i-1} s_{n-2}^j(m) &= d_{n-1}^{i-1}(m) = m, \quad m \leq j \\ d_{n-1}^{i-1} s_{n-2}^j(m) &= d_{n-1}^{i-1}(m-1) = m - 1, \quad j + 1 \leq m < i \\ d_{n-1}^{i-1} s_{n-2}^j(m) &= d_{n-1}^{i-1}(m-1) = m, \quad i \leq m \leq n - 1 \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que  $s_{n-1}^j d_n^i = d_{n-1}^{i-1} s_{n-2}^j$  para  $i > j + 1$ .

(c) Si  $i < j$ ,

$$\begin{aligned} s_n^i s_{n+1}^j(m) &= s_n^i(m) = m, \quad m \leq i \\ s_n^i s_{n+1}^j(m) &= s_n^i(m) = m - 1, \quad i < m \leq j \\ s_n^i s_{n+1}^j(m) &= s_n^i(m-1) = m - 2, \quad j < m \leq n + 2. \end{aligned}$$

Y por otra parte,

$$\begin{aligned} s_n^i s_{n+1}^{j+1}(m) &= s_n^i(m) = m, \quad m \leq i \\ s_n^i s_{n+1}^{j+1}(m) &= s_n^i(m) = m - 1, \quad i < m \leq j \\ s_n^i s_{n+1}^{j+1}(m) &= s_n^i(m-1) = m - 2, \quad j < m \leq n + 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $s_n^i s_{n+1}^j = s_n^i s_{n+1}^{j+1}$ .

□

**Lema 2.4.6.** *Cualquier morfismo  $f: [m] \rightarrow [n]$  puede ser escrito de manera única en la forma*

$$f = d_n^{i_1} d_{n-1}^{i_2} \cdots d_{n-l+1}^{i_l} s_{m-t}^{j_1} \cdots s_{m-2}^{j_{t-1}} s_{m-1}^{j_t} \quad (2.1)$$

con  $n \geq i_1 > \dots > i_l \geq 0$ ,  $0 \leq j_1 < \dots < j_t < m$  y  $m - t + l = n$ .

*Demostración.* Sean  $i_1, \dots, i_l$ , los elementos de  $[n]$  que no están en  $f([m])$ , en orden inverso. Sean  $j_1, \dots, j_t$  los elementos de  $[m]$  con  $f(j) = j - 1$ , en orden. Entonces, (2.1) se cumple y muestra a  $f$  como la composición de un epimorfismo monótono no decreciente con un monomorfismo monótono creciente.  $\square$

Este lema nos da una definición alternativa de un objeto simplicial.

**Teorema 2.4.7.** *Un objeto simplicial  $S$  en una categoría  $\mathcal{C}$ , es una familia  $\{S_n\}$  de objetos de  $\mathcal{C}$  junto con una familia de morfismos de  $\mathcal{C}$ ,*

$$d_i: S_n \rightarrow S_{n-1} \quad y \quad s_j: S_n \rightarrow S_{n+1}$$

que satisfacen las siguientes identidades:

$$(i) \quad d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad i < j,$$

$$(ii) \quad d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & i < j \\ Id_{S_n} & i = 1, \quad i = j + 1 \\ s_j d_{i-1} & i > j + 1 \end{cases}$$

$$(iii) \quad s_i s_j = s_{j+1} s_i, \quad i < j.$$

*Demostración.* Como  $S$  es un funtor contravariante, los morfismos

$$d_i = S(d_n^i) \quad y \quad s_j = S(s_n^j)$$

satisfacen (i)-(iii) que son las duales de (a)-(c). Recíprocamente dadas  $d_i$  y  $s_j$  escribimos cualquier morfismo  $f: [m] \rightarrow [n]$  en la forma única (2.1) dada por el lema 2.4.6 y definamos

$$S(f) = s_{j_t} \cdots s_{j_1} d_{i_l} \cdots d_{i_1}: S_n \rightarrow S_m.$$

Las identidades (i)-(iii) bastan para conmutar cualesquiera dos  $d_i$  ó  $s_j$  y por lo tanto para la factorización de una composición  $fg$  a partir de la factorización de  $f$  y la de  $g$ . Por tanto se tiene que  $S(fg) = S(g)S(f)$ . Esto hace a  $S: \Delta \rightarrow \mathcal{C}$  contravariante.  $\square$

**Definición 2.4.8.** Si  $S$  y  $S'$  son objetos simpliciales en una categoría  $\mathcal{C}$ , una *aplicación simplicial*  $F: S \rightarrow S'$  es una transformación natural entre funtores contravariantes  $S, S': \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ . En otras palabras, una aplicación simplicial  $F: S \rightarrow S'$  es una familia de morfismos  $F_m: S_m \rightarrow S'_m$  de  $\mathcal{C}$  tales que

$$F_m S(f) = S'(f) F_n$$

para cada morfismo  $f: [m] \rightarrow [n]$ , es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{S(f)} & S_m \\ \downarrow F_n & & \downarrow F_m \\ S'_n & \xrightarrow{S'(f)} & S'_m \end{array}$$

O equivalentemente,  $F d_i = d'_i F$ ,  $F s_i = s'_i F$  para toda  $i$ .

Los objetos simpliciales en  $\mathcal{C}$  forman una categoría  $\Delta^o \mathcal{C}$  con morfismos las aplicaciones simpliciales. Para el caso  $\mathbf{Set}$ , es decir conjuntos simpliciales, tenemos que si  $F: K \rightarrow K'$  es una aplicación simplicial, entonces,  $F$  induce una aplicación continua entre las realizaciones geométricas  $|F|: |K| \rightarrow |K'|$ . Sea  $\tilde{F}: \bigsqcup_n \Delta_n \times K_n \rightarrow \bigsqcup_n \Delta_n \times K'_n$  definida como  $\tilde{F}(s, x) = (s, F_n(x))$ . Es claro que  $\tilde{F}$  manda puntos equivalentes en puntos equivalentes, por lo tanto induce la aplicación  $|F|$  (realizando el cociente.)

Observemos que  $|Id| = Id_{|K|}$ , ya que  $\tilde{Id}(s, x) = (s, Id(x))$  y al hacer el cociente, tenemos que  $|Id| = Id_{|K|}$ . Además si tenemos aplicaciones simpliciales  $F: S \rightarrow S'$  y  $G: K \rightarrow S$ , entonces  $|F \circ G|: |K| \rightarrow |S'|$ , donde

$$H: \bigsqcup_n \Delta_n \times K_n \rightarrow \bigsqcup_n \Delta_n \times S'_n,$$

está definida como  $H(s, x) = (s, H_n(x)) = (s, F_n G_n(x))$ , así tenemos que

$$|F \circ G| = |F| \circ |G|.$$

Por lo tanto la realización geométrica de un conjunto simplicial nos da un funtor  $|\cdot|: \Delta^o \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ .

**Ejemplo 2.4.9.** Sea  $Y$  espacio topológico y  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una cubierta de  $Y$ . La categoría *nervio de la cubierta*  $\mathcal{U}$ , denotada por  $N(\mathcal{U})$  es aquella donde los objetos son subconjuntos finitos de  $A$ , tal que  $J \in N(\mathcal{U})$  si y solo si  $\bigcap_{j \in J} U_j \neq \emptyset$  y el vacío  $\emptyset \in N(\mathcal{U})$ . Sea

$$X_n = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \mid U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset\} \subset N(\mathcal{U}).$$

Para cada  $f: [m] \rightarrow [n]$ , tenemos  $\chi(f)(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = (\alpha_{f(0)}, \dots, \alpha_{f(n)})$ .  
Entonces, tenemos el objeto simplicial

$$CN: \Delta^{op} \longrightarrow N(\mathcal{U})$$

$$\begin{array}{ccc} [m] & \longrightarrow & X_m \\ \downarrow f & & \uparrow \chi(f) \\ [n] & \longrightarrow & X_n \end{array}$$

**Ejemplo 2.4.10.** Sea  $Y$  un espacio topológico. Un  $n$ -simplejo singular de  $Y$  es una función continua  $\varphi: \Delta_n \rightarrow Y$ . Sea

$$X_n = \{\varphi: \Delta_n \rightarrow Y \mid \varphi \text{ es un } n\text{-simplejo singular}\}.$$

Para  $f: [m] \rightarrow [n]$ , definimos  $\chi(f)(\varphi) = \varphi \circ \Delta_f$ , con  $\Delta_f: \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ .  
Entonces, tenemos un objeto simplicial

$$SS: \Delta^{op} \longrightarrow \text{Set}$$

$$\begin{array}{ccc} [n] & \longrightarrow & X_n \\ \uparrow f & & \downarrow \chi(f) \\ [m] & \longrightarrow & X_m \end{array}$$

**Ejemplo 2.4.11.** El espacio clasificante de un grupo. Sea  $G$  un grupo y sea

$$NG: \Delta^{op} \rightarrow \text{Set}$$

el conjunto simplicial dado por  $NG([0]) = \{e\}$ , donde  $e$  es el elemento identidad de  $G$  y

$$NG([n]) = G^n = \prod_{i=1}^n G_i$$

donde  $G_i = G$  para toda  $i = 1, \dots, n$ . Denotaremos a los elementos de  $G^n$  como  $[g_1|g_2|\dots|g_n]$ .

Las degeneraciones y caras estan dadas por

$$NG(s_n^j)[g_1|\dots|g_n] = [g_1|\dots|g_j|e|g_{j+1}|\dots|g_n]$$

$$NG(d_n^i)[g_1|\dots|g_n] = \begin{cases} [g_2|\dots|g_n] & \text{si } i = 0 \\ [g_1|\dots|g_i g_{i+1}|\dots|g_n] & 0 < i < n \\ [g_1|\dots|g_{n-1}] & \text{si } i = n. \end{cases}$$

La realización geométrica del conjunto simplicial  $NG$  lo llamaremos *el espacio clasificante* del grupo  $G$  y lo denotaremos por  $BG$ .

Otra forma de ver el espacio clasificante de un grupo es la siguiente.

Sea  $G$  un grupo. Definimos el siguiente conjunto simplicial dado por el funtor

$$\tilde{N}G: \Delta^{op} \rightarrow \text{Set}$$

que asocia a cada objeto  $[n] \in \Delta^{op}$  el conjunto  $\prod_{i=0}^n G_i$ , donde  $G_i = G$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ , es decir, le asocia el conjunto de  $(n+1)$ -adas  $(g_0, \dots, g_n)$  de elementos del grupo  $G$ .

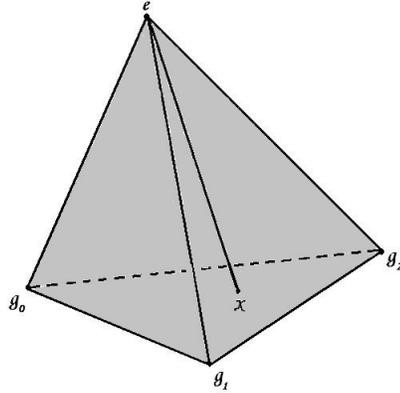
Los morfismos caras  $d_n^i$  y degeneraciones  $s_n^j$  están dadas como

$$\begin{aligned} \tilde{N}G(d_n^i)(g_0, \dots, g_n) &= (g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n), \\ \tilde{N}G(s_n^j)(g_0, \dots, g_n) &= (g_0, \dots, g_i, g_i, \dots, g_n), \end{aligned}$$

donde  $\widehat{g}_i$  significa que esa coordenada no aparece.

**Definición 2.4.12.** La realización geométrica de este conjunto simplicial es conocido como el *haz universal del grupo  $G$*  y lo denotaremos por  $EG$ .

El complejo  $EG$  es contraíble por la homotopía  $h_t$  que desliza cada punto  $x \in (g_0, \dots, g_n)$  a lo largo del segmento de línea en  $(e, g_0, \dots, g_n)$  de  $x$  al vértice  $(e)$ , donde  $e$  es el elemento identidad de  $G$ . Esta está bien definida en  $EG$  ya que cuando restringimos a una cara  $(g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n)$  tenemos la deformación lineal a  $(e)$  en  $(e, g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n)$ . La siguiente figura ilustra la homotopía.



El grupo  $G$  actúa por la izquierda en  $EG$  como sigue: un elemento  $g$  de  $G$ , manda el  $n$ -simplejo  $(g_0, \dots, g_n)$  linealmente en el  $n$ -simplejo  $(gg_0, \dots, gg_n)$ . Observemos que sólo la identidad  $e$  manda cualquier simplejo en si mismo, por lo cual la acción es libre. Además  $G$  actúa en  $EG$  mandando un  $n$ -simplejo en otro  $n$ -simplejo diferente cuando  $g \neq e$ , entonces, la acción es propiamente discontinua.

**Proposición 2.4.13.** *Sea  $G$  un grupo. El espacio de órbitas  $EG/G$  es el espacio clasificante de  $G$ .*

*Demostración.* Sea  $A = [g_0, g_1, \dots, g_n]$  la clase en  $EG/G$  del  $n$ -simplejo  $(g_0, g_1, \dots, g_n)$ . Entonces,

$$[g_0, g_1, \dots, g_n] = g_0^{-1}[g_0, g_1, \dots, g_n] = [e, g_0^{-1}g_1, \dots, g_0^{-1}g_n]$$

Entonces, tenemos la correspondencia

$$\begin{aligned} \phi: EG/G &\rightarrow BG \\ [g_0, g_1, \dots, g_n] &\mapsto [g_0^{-1}g_1 | \cdots | g_{n-1}^{-1}g_n] \end{aligned}$$

la cual manda la  $i$ -ésima cara (degeneración) de un elemento  $A$  en  $BG$  en la  $i$ -ésima cara de su imagen  $\phi(A)$ . Por lo tanto  $EG/G$  es el espacio clasificante  $BG$ .  $\square$

**Definición 2.4.14.** Un espacio  $X$  que tiene un solo grupo de homotopía no trivial  $\pi_n(X) \cong G$  es llamado un *espacio Eilenberg-MacLane*  $K(G, n)$ .

**Proposición 2.4.15.** *El espacio clasificante  $BG$  de un grupo  $G$  es un  $K(G, 1)$ .*

*Demostración.* Como  $G$  actúa en  $EG$  de manera libre y propiamente discontinua, por la proposición 1.2.15 tenemos que la aplicación cociente

$$\pi: EG \rightarrow BG = EG/G$$

es una aplicación cubriente y como  $EG$  es contraíble, entonces  $\pi$  es el cubriente universal del espacio de órbitas  $BG$ . Luego por [2, Prop. 1.40] tenemos que  $\pi_1(BG) \cong G$  y para  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(BG) = \pi_n(EG) = 0$ , por lo tanto  $BG$  es un  $K(G, 1)$ .  $\square$

## 2.5. Complejos de Cadenas

Ahora veremos complejos de cadenas y la definición de homología. También veremos algunos ejemplos, tales como homología simplicial y homología singular.

**Definición 2.5.1.** Un *complejo de cadenas*  $C_* = \{C_n, \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una sucesión de grupos abelianos libres decreciente

$$\cdots C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tal que la composición  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$  para  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Lema 2.5.2.** *Si  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ , entonces,  $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \text{ker } \partial_n$ .*

*Demostración.* Como  $\partial_n(\partial_{n+1}(c_{n+1})) = 0$ , entonces,

$$\text{Im}(\partial_{n+1}) = \partial_{n+1}(C_{n+1}) \subseteq \ker \partial_n.$$

□

**Definición 2.5.3.** Definimos el  $n$ -ésimo grupo de homología de  $C_*$  como

$$H_n(C_*) = \ker \partial_n / \text{Im} \partial_{n+1},$$

y la homología de  $C_*$  la definimos como  $H_*(C_*) = \{H_n(C_*)\}$ .

Los complejos de cadenas forman una categoría  $\mathcal{CC}$  donde los objetos son complejos de cadenas  $C_* = \{C_n, \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  y los morfismos son colecciones de homomorfismos  $\varphi = (\varphi_n): C_* \rightarrow D_*$  que hace conmutar los cuadros

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \\ & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} & \\ \cdots & D_{n+1} & \longrightarrow & D_n & \longrightarrow & D_{n-1} & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

**Proposición 2.5.4.** *El siguiente*

$$H_*: \mathcal{CC} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

*es un funtor, donde  $\mathbf{Ab}$  denota la categoría de grupos abelianos.*

Sea  $F: \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  un conjunto simplicial. Siempre podemos definir un grupo abeliano libre simplicial, es decir, un funtor

$$\begin{aligned} G: \Delta^{op} &\rightarrow \mathbf{AbL} \\ [n] &\mapsto G([n]) = \langle F([n]) \rangle \end{aligned}$$

donde  $\langle X \rangle$  es el grupo abeliano libre generado por  $X$  y  $G$  está definido como la composición

$$\Delta^{op} \xrightarrow{F} \mathbf{Set} \xrightarrow{g} \mathbf{AbL}$$

$$[n] \longrightarrow X_n \longrightarrow \langle X_n \rangle$$

**Teorema 2.5.5.**  $C_*(F) = \{\langle F([n]) \rangle, \partial_n\}_{n=0,1,\dots}$  con  $\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i G(d_n^i)$  es un complejo de cadenas.

*Demostración.* Falta demostrar que  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ .

$$\begin{aligned}
\partial_n \partial_{n+1} &= \partial_n \left( \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i G(d_{n+1}^i) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_n (G(d_{n+1}^i)) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sum_{j=0}^n (-1)^j G(d_n^j) \circ G(d_{n+1}^i) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} G(d_{n+1}^i d_n^j) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j < i} (-1)^{i+j} G(d_{n+1}^i d_n^j) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} G(d_{n+1}^i d_n^j) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j < i} (-1)^{i+j-1} G(d_{n+1}^i d_n^{j-1}) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} G(d_{n+1}^i d_n^j) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

observese que aplicamos que  $d_{n+1}^j d_n^i = d_n^i d_{n+1}^{j-1}$ . □

**Ejemplo 2.5.6.** Sea  $F: \Delta^{op} \rightarrow \text{Set}$  un conjunto simplicial, entonces,  $H_n(C_*(F))$  es la *homología simplicial*.

**Ejemplo 2.5.7.** Sea  $G$  un grupo, entonces,  $H_n(G) = H_n(BG) = H_n(C_*(NG))$  es la *homología de grupos*.

# Capítulo 3

## Espacios Clasificantes para Familias

En este capítulo comenzaremos viendo  $G$ -espacios, y después construiremos el espacio clasificante para familias de subgrupos de isotropía de un grupo  $G$ , que es la generalización del haz universal de  $G$ . Veremos que un espacio de este tipo es un objeto final en la categoría de  $G$ -espacios  $\mathfrak{F}$ -numerables, con morfismos las clases de  $G$ -homotopías.

### 3.1. $G$ -espacios

**Definición 3.1.1.** Sea  $X$  un espacio y  $G$  un grupo. Decimos que  $X$  es un  $G$ -espacio si  $G$  actúa en  $X$ .

**Definición 3.1.2.** Sean  $X$  y  $Y$   $G$ -espacios,  $f: X \rightarrow Y$  es una  $G$ -aplicación o aplicación  $G$ -equivariante si  $f(gx) = gf(x)$ .

Observemos que los  $G$ -espacios con las  $G$ -aplicaciones forman una categoría a la cual denotaremos por  $G\text{-Top}$ .

**Proposición 3.1.3.** Si  $X$  es  $G$ -espacio y  $Y$  es  $K$ -espacio, entonces,  $X \times Y$  es un  $G \times K$ -espacio.

*Demostración.* Sea

$$\begin{aligned}\phi: (G \times K) \times (X \times Y) &\rightarrow X \times Y \\ ((g, k), (x, y)) &\mapsto (gx, ky)\end{aligned}$$

la cual es continua y cumple con lo requerido.  $\square$

**Definición 3.1.4.** Sean  $X, Y$   $G$ -espacios y  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$   $G$ -aplicaciones. Decimos que  $f_0$  y  $f_1$  son  $G$ -homotópicas ( $f_0 \simeq_G f_1$ ), si existe una aplicación

$F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  (llamada  $G$ -homotopía) tal que  $F(x, s)$  es  $G$ -aplicación para toda  $s \in [0, 1]$ ,  $F(x, 0) = f_0(x)$ ,  $F(x, 1) = f_1(x)$  y la acción de  $G$  en  $[0, 1]$  es trivial. Denotaremos por  $[X, Y]_G$  al conjunto de clases de  $G$ -homotopía de  $G$ -aplicaciones de  $X$  a  $Y$ .

## 3.2. Familias de Subgrupos

Ahora sólo consideraremos grupos compactos Hausdorff actuando en espacios Hausdorff.

El *tipo de órbita* de un  $G$ -espacio  $X$  es el conjunto de clases de isomorfismos de espacios homogéneos  $\{G/H\}$  los cuales son isomorfos a órbitas.

El *tipo de isotropía* de  $X$  es el conjunto de clases de conjugación de los grupos de isotropía en  $\text{Iso}_G(X)$  vistos en la definición 1.2.7.

Sea  $G$  un grupo y sea  $\mathbf{sub}(G)$  el conjunto de todos los subgrupos de  $G$ .

**Definición 3.2.1.** Una *familia de isotropía* (o *familia*) para el grupo  $G$  es un subconjunto  $\mathfrak{F} \subset \mathbf{sub}(G)$  de subgrupos cerrados de  $G$ , el cual es cerrado bajo conjugación e intersecciones finitas.

Sea  $\{H_i\}_{i \in I}$  un conjunto de subgrupos de  $G$ , denotamos por  $\mathfrak{F}(H_i)$  a la familia que consiste de todos los subgrupos de los grupos  $H_i$  y todos sus conjugados por elementos de  $G$ .

**Definición 3.2.2.** Un *espacio clasificante* para  $G$ -acciones con subgrupos de isotropía en  $\mathfrak{F}$ , o un espacio  $X$  de tipo  $E(G, \mathfrak{F})$ , es un  $G$ -espacio con las siguientes propiedades:

i) Para cada  $H \in \mathfrak{F}$ ,

$$X^H = \{x \in X \mid hx = x, \forall h \in H\}$$

es contraíble.

ii) Para cada  $H \in \mathbf{sub}(G) - \mathfrak{F}$ ,  $X^H = \emptyset$ .

Sea  $G$  un grupo, si tenemos la familia  $\mathfrak{F} = \{e\}$ , entonces el espacio  $E(G, \{1\})$  es el haz universal  $EG$  del grupo  $G$  (visto en la sección 2.4). Ya que si  $H = \{e\}$ , tenemos que  $EG^H = \{x \in EG \mid ex = x\} = EG$  el cual es contraíble, y para  $H \in \mathbf{sub}(G) - \mathfrak{F}$ , entonces,  $EG^H = \{x \in EG \mid hx = x, \forall h \in H\} = \emptyset$ , porque la acción de  $G$  en  $EG$  es libre.

Así tenemos que la definición anterior generaliza al haz universal de un grupo.

Vamos a definir ahora el join de una familia de espacios topológicos, el cual usaremos para la construcción del espacio clasificante  $E(G, \mathfrak{F})$ .

**Definición 3.2.3.** Sea  $\{X_j | j \in J\}$  una familia de espacios topológicos. El *join*  $X = *_{j \in J} X_j$ , se define como el siguiente espacio: los elementos de  $X$  están representados por  $J$ -uplas

$$(t_j x_j | j \in J), \quad t_j \in [0, 1], \quad x_j \in X_j, \quad \sum_{j \in J} t_j = 1,$$

con solamente un número finito de  $t_j$  distintos de cero.

Los elementos  $(t_j x_j)$  y  $(u_j y_j)$  definen el mismo elemento de  $X$  si y sólo si:

- i) Para toda  $j$  en  $J$ ,  $t_j = u_j$
- ii) Para toda  $j$  en  $J$ :  $t_j \neq 0$  implica  $x_j = y_j$ .

Consideremos las aplicaciones coordenadas

$$\begin{aligned} T_j: X &\rightarrow [0, 1] \\ (t_i x_i) &\mapsto t_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_j: t_j^{-1}(0, 1] &\rightarrow X_j \\ (t_i x_i) &\mapsto x_j \end{aligned}$$

La topología en  $X$  es la más gruesa que hace continuas a  $T_j$  y  $p_j$ . Esta topología está caracterizada por las siguientes propiedades: Una aplicación  $f: Y \rightarrow X$  es continua si y sólo si las composiciones

$$\begin{aligned} T_j f: Y &\rightarrow [0, 1], \\ p_j f: f^{-1} T_j^{-1}(0, 1] &\rightarrow X_j, \end{aligned}$$

son continuas. Y si los  $X_j$  son  $G$ -espacios, entonces,  $(g, (t_j x_j)) \mapsto (t_j g x_j)$  define una  $G$ -acción continua en el join.

Los conjuntos  $V_j = T_j^{-1}(0, 1]$ ,  $j \in J$  forman una cubierta abierta de  $X$  y las funciones  $T_i$  son una partición de la unidad puntualmente finita, es decir, para cada  $x \in X$  el conjunto  $\{j \in J | T_j(x) \neq 0\}$  es finito y  $\sum_{j \in J} T_j(x) = 1$ .

**Ejemplos 3.2.4.** 1) Si  $X$  es el join de tres puntos distintos  $x_1, x_2, x_3$  de  $\mathbb{R}^2$ , tenemos una correspondencia entre  $X$  y el 2-simplejo  $(x_1 x_2 x_3)$ , ya que cada punto  $y$  en el 2-simplejo podemos verlo como  $y = t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3$ , con  $t_i \geq 0$  y  $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ .

- 2) Del join de  $X = [0, 1]$  con un punto  $y$ , tenemos una correspondencia de  $X$  con las líneas que unen a  $y$  con los puntos de  $X$ , es decir, con un triángulo.

- 3) Si  $X_1 = [a, b]$  y  $X_2 = [c, d]$ , entonces  $Y = X_1 * X_2$  podemos verlo como las todas las líneas que unen un cada punto de  $X_1$  con los de  $X_2$ .

**Definición 3.2.5.** Un  $G$ -espacio  $X$  es  $\mathfrak{F}$ -numerable si se cumple lo siguiente: existe una cubierta abierta  $U = \{U_j \mid j \in J\}$  de  $X$  por  $G$ -subespacios con las siguientes propiedades:

- (i) Para cada  $j \in J$ , existe una  $G$ -aplicación

$$f_j: U_j \rightarrow G/G_j \quad G_j \in \mathfrak{F}.$$

- (ii) Existe una partición de la unidad localmente finita  $(t_j \mid j \in J)$  subordinada a  $U$  por  $G$ -funciones  $t_j: X \rightarrow [0, 1]$ .

Note que no pedimos que los subgrupos de isotropía de un  $G$ -espacio  $\mathfrak{F}$ -numerable pertenezcan a  $\mathfrak{F}$ .

**Proposición 3.2.6.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una  $G$ -aplicación entre  $G$ -espacios. Si  $Y$  es  $\mathfrak{F}$ -numerable, entonces,  $X$  también es  $\mathfrak{F}$ -numerable.

*Demostración.* Sea  $U = \{U_j \mid j \in J\}$  una cubierta numerable de  $Y$  con  $G$ -aplicaciones  $f_j: U_j \rightarrow G/H_j$ , con  $H_j \in \mathfrak{F}$  y  $j \in J$ . Y sea  $\{t_j\}$  la partición de la unidad localmente finita subordinada a  $U$ .

Si  $W_j = f^{-1}(U_j)$ , entonces,  $\{W_j \mid j \in J\}$  es una cubierta numerable de  $X$ . Las  $G$ -aplicaciones dadas por la composición  $f'_j = f_j f|_{W_j}: W_j \rightarrow G/H_j$ . Y sea  $\{s_j\}$  la partición de la unidad localmente finita, con  $s_j = t_j f$ .  $\square$

Veamos ahora algunos resultados de particiones de la unidad, las cuales necesitaremos más adelante. Comenzaremos con el siguiente lema tomado de [5] en Ap. A2, prop. 2.8.

**Lema 3.2.7.** Si  $\pi = \{\pi_j \mid j \in J\}$  es una partición de la unidad (no necesariamente puntualmente finita), entonces existe una partición localmente finita  $\rho = \{\rho_j \mid j \in J\}$  tal que  $\rho_j^{-1}(0, 1] \subset \pi_j^{-1}(0, 1]$  para todo  $j \in J$ . Si las funciones  $\pi_j$  son  $G$ -invariantes, entonces, las  $\rho_j$  pueden ser elegidas como  $G$ -invariantes.

Sea  $G$  un grupo de Lie compacto o con la topología discreta y  $\mathfrak{F}$  una familia para el grupo  $G$ . Mostraremos que la categoría homotópica de  $G$ -espacios  $\mathfrak{F}$ -numerales tiene un objeto terminal, el cual es un *espacio clasificante*  $E(G, \mathfrak{F})$  para la familia  $\mathfrak{F}$ .

Denotaremos por  $T(G, \mathfrak{F})$  la categoría de  $G$ -espacios  $\mathfrak{F}$ -numerales con morfismos las  $G$ -aplicaciones. Y sea  $T(G, \mathfrak{F})h$  la categoría de  $G$ -espacios  $\mathfrak{F}$ -numerales con morfismos las clases de  $G$ -homotopía de las  $G$ -aplicaciones.

**Teorema 3.2.8.** Sea  $\mathfrak{F}$  una familia para un grupo  $G$  compacto de Lie o con la topología discreta. Existe un  $G$ -espacio  $\mathfrak{F}$ -numerable  $J_{\mathfrak{F}}(G)$  tal que cada  $G$ -espacio  $\mathfrak{F}$ -numerable  $X$  admite salvo  $G$ -homotopía una única  $G$ -aplicación  $X \rightarrow J_{\mathfrak{F}}(G)$ , es decir,  $J_{\mathfrak{F}}(G)$  es un objeto terminal en la categoría  $T(G, \mathfrak{F})h$ .

La prueba de este teorema esta en los lemas 3.2.9, 3.2.12 y la proposición 3.2.13 que veremos más adelante.

Vamos a construir el espacio  $J_{\mathfrak{F}}(G)$ . Sea  $\Upsilon$  cualquier  $G$ -espacio tal que  $\mathfrak{F}$  es precisamente la familia de subgrupos de  $G$  los cuales fijan al menos un punto de  $\Upsilon$ . Sea

$$J_{\mathfrak{F}}(G) = \Upsilon * \Upsilon * \Upsilon * \cdots, \quad (3.1)$$

el join de una cantidad numerable de copias de  $\Upsilon$ . Con funciones coordenadas

$$t_j: J_{\mathfrak{F}}(G) \rightarrow [0, 1], \quad y \quad p_j: V_j \rightarrow \Upsilon,$$

para  $j = 1, 2, \dots$ , con  $V_j = t_j^{-1}(0, 1]$ , entonces,  $V_j = (t_j x_j)$ , con  $x_j \in \Upsilon$  y la coordenada  $t_j x_j$  distinta de cero. Por construcción de  $J_{\mathfrak{F}}(G)$ , tenemos que  $\{V_j \mid j = 1, 2, \dots\}$  es una cubierta abierta de  $J_{\mathfrak{F}}(G)$ .

Tenemos que para todo subgrupo  $H$  en  $\mathfrak{F}$ ,  $H$  fija al menos un elemento de  $\Upsilon$ . Sea  $H_j \in \mathfrak{F}$ , uno de los subgrupos que deja fijo a  $x_j \in \Upsilon$ . Como la coordenada  $t_j x_j$  de  $(t_j v_i) \in V_j$  es distinto de cero, podemos definir

$$f_j: V_j \rightarrow G/H_j$$

como  $f_j((t_i g x_i)) = g H_j$ .

Por definición de join,  $\{t_j\}$  es una partición de la unidad puntualmente finita, entonces, por el lema 3.2.7, existe una partición de la unidad localmente finita  $\{s_j\}$  tal que  $s_j^{-1}(0, 1] \subset t_j^{-1}(0, 1] = V_j$  para  $j = 1, 2, \dots$ . Entonces, tenemos que la partición  $\{s_j\}$  es subordinada a la cubierta  $\{V_j \mid j = 1, 2, \dots\}$ .

Así tenemos el siguiente:

**Lema 3.2.9.**  $J_{\mathfrak{F}}(G)$  es un  $G$ -espacio  $\mathfrak{F}$ -numerable.

**Corolario 3.2.10.** Sea  $\mathfrak{F} = \{H_j \mid j \in J\}$  una familia como en el teorema 3.2.8, y sea  $X = \coprod_{j \in J} G/H_j$  la unión disjunta de espacios homogéneos, entonces,

$$J_{\mathfrak{F}}(G) = X * X * X * \cdots.$$

*Demostración.* Ya que  $X$  es un  $G$ -espacio que cumple que para todo  $H \in \mathfrak{F}$ ,  $H$  fija al menos un punto de  $X$ , por la construcción anterior de  $J_{\mathfrak{F}}(G)$  tenemos el resultado.  $\square$

Veamos ahora un resultado de particiones de la unidad, que necesitaremos para la demostración del siguiente lema.

Sea  $\{U_b \mid b \in B\}$  una cubierta abierta de  $Z$  con partición de la unidad subordinada  $\{t_j \mid b \in B\}$ . Para cada subconjunto finito  $S \subset B$ , sea

$$U(S) = \{z \in Z \mid i \in S, j \in B - S \Rightarrow t_i(z) > t_j(z)\}.$$

Sean  $S$  y  $T$  subgrupos finitos de  $B$ . Observemos que si la cardinalidad de  $S$  es igual a la de  $T$  y  $U(S) \cap U(T) \neq \emptyset$ , entonces  $S = T$ . Sea

$$U_n = \coprod_{|S|=n} U(S),$$

donde  $|S|$  denota la cardinalidad de  $S$ .

**Lema 3.2.11.** *Los  $U_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , son una cubierta numerable de  $Z$ .*

*Demostración.* Sobre  $U(S)$  tomamos la función

$$q_S(z) = \max(0, \min_{i \in S} t_i(z) - \max_{j \in B-S} t_j(z))$$

y definimos  $q_n: U_n \rightarrow [0, \infty)$  por  $q_n|_{U(S)} = q_S$ . Entonces,

$$v_n = \frac{q_n}{\sum_1^\infty q_i}$$

es una numeración de  $\{U_n\}$ . □

**Lema 3.2.12.** *Sea  $Z$  un  $G$ -espacio  $\mathfrak{F}$ -numerable. Entonces,  $Z$  admite una  $G$ -aplicación  $Z \rightarrow J_{\mathfrak{F}}(G)$ .*

*Demostración.* Usando el lema 3.2.11, encontramos una cubierta  $\{U_n\}$  con numeración  $v_n$ .

Como  $Z$  es  $\mathfrak{F}$ -numerable, para cada  $U_j$  existe una  $G$ -aplicación sobre  $G/H_j$ , con  $H_j \in \mathfrak{F}$ , entonces, existe una  $G$ -aplicación  $\psi_j: U_j \rightarrow X = \coprod_i G/H_i$  dada por la inclusión.

Tenemos que la  $G$ -aplicación requerida esta dada por

$$z \mapsto (v_1(z)\psi_1(z), v_2(z)\psi_2(z), \dots).$$

Si  $\psi_n(z)$  no está definida, entonces,  $v_n(z)\psi_n(z)$  será interpretada como  $0 \cdot x$ , para toda  $x \in X$ . □

La prueba del teorema 3.2.8 será completada con la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.13.** *Sea  $Y$  un  $G$ -espacio y  $E = Y * Y * \dots$  el join de una cantidad numerable de copias de  $Y$ . Entonces, cualesquiera dos  $G$ -aplicaciones  $Z \rightarrow E$  son homotópicas.*

*Demostración.* Dadas dos  $G$ -aplicaciones  $f, g: Z \rightarrow E$ , nos fijamos en las coordenadas

$$(t_1(x)f_1(x), t_2(x)f_2(x), \dots) \quad y \quad (u_1(x)g_1(x), u_2(x)g_2(x), \dots)$$

de  $f(x)$  y  $g(x)$ . Demostraremos que  $f$  y  $g$  son homotópicas a aplicaciones con coordenadas

$$\begin{aligned} (t_1(x)f_1(x), 0, t_2(x)f_2(x), 0, \dots) \\ (0, u_1(x)g_1(x), 0, u_2(x)g_2(x), \dots) \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $0$  denota cualquier elemento de la forma  $0 \cdot y$ . Si éste es el caso, entonces, dos aplicaciones de esta forma son homotópicas por una homotopía

$$((1-t)t_1(x)f_1(x), tu_1(x)g_1(x), (1-t)t_2(x)f_2(x), tu_2(x)g_2(x), \dots).$$

Comenzando con la forma de (3.2), se construye la homotopía en un número infinito de pasos. El primer paso es

$$(t_1(x)f_1(x), tt_2(x)f_2(x), (1-t)t_2(x)f_2(x), tt_3(x)f_3(x), (1-t)t_3(x)f_3(x), \dots)$$

la cual remueve el primer  $0$  en (3.2). Ahora iterando este procedimiento, obtenemos una homotopía continua (porque en cada lugar sólo un número finito de homotopías son efectivas) que nos lleva a  $f$ . Y algo similar se hace para  $g$ .  $\square$

**Teorema 3.2.14.** (*Caracterización Homotópica de  $J_{\mathfrak{F}}(G)$* ). Sea  $G$  un grupo compacto de Lie y  $\mathfrak{F}$  una familia para el grupo  $G$ .

- (i) Para cualquier familia  $\mathfrak{F}$  existe un espacio  $J_{\mathfrak{F}}(G)$  cuyos grupos de isotropía pertenecen a  $\mathfrak{F}$ .
- (ii) El espacio  $J_{\mathfrak{F}}(G)$  es un espacio de tipo  $E(G, \mathfrak{F})$ .

*Demostración.* (i) Para el modelo  $J_{\mathfrak{F}}(G) = X * X * X \cdots$ , con  $X = \coprod_{H \in \mathfrak{F}} G/H$ , los grupos de isotropía de este espacio son intersecciones finitas de los grupos de isotropía que aparecen en  $X$  y por tanto pertenecen a  $\mathfrak{F}$ .

(ii) Tenemos una biyección

$$\psi: [G/H \times J_{\mathfrak{F}}(G)^H, J_{\mathfrak{F}}(G)]_G \xrightarrow{\cong} [J_{\mathfrak{F}}(G)^H, J_{\mathfrak{F}}(G)^H],$$

donde  $H \in \mathfrak{F}$ ,  $[X, Y]_G$  denota el espacio de clases de  $G$ -homotopía de  $G$ -aplicaciones de  $X$  a  $Y$  y  $J_{\mathfrak{F}}(G)^H$  es considerado un  $G$ -espacio con  $G$  acción trivial.

Dada  $f: G/H \times J_{\mathfrak{F}}(G)^H \rightarrow J_{\mathfrak{F}}(G)$ , definimos  $\psi$  como

$$\psi(f)(gH, x) = gf(1H, x) = gt(x).$$

Si  $h \in H$ , entonces  $ht(x) = hf(1H, x) = f(hH, hx) = f(1H, x) = t(x)$ , ya que  $H \subseteq G$  actúa trivialmente en  $J_{\mathfrak{F}}(G)^H$ . Por lo tanto,  $t: J_{\mathfrak{F}}(G)^H \rightarrow J_{\mathfrak{F}}(G)^H$ .

Si  $k: J_{\mathfrak{F}}(G)^H \rightarrow J_{\mathfrak{F}}(G)^H$ , definimos la inversa de  $\psi$ , como  $\phi(k)(x) = f$ , donde  $f(gH, x) = gk(x)$ .

Veamos que es la inversa: con las mismas funciones  $f$  y  $k$ ,

$$\begin{aligned}\phi\psi(f)(gH, x) &= \phi(gt(x)) = f(gH, x), \\ \psi\phi(k)(x) &= \psi(1H, x) = k(x).\end{aligned}$$

Sea  $G/H \times J_{\mathfrak{F}}(G) \rightarrow G/H$  la inclusión, como  $G/H$  es un  $G$ -espacio  $\mathfrak{F}$ -numerable y  $G/H \times J_{\mathfrak{F}}(G)^H$  es un  $G$ -espacio, por la proposición 3.2.6, tenemos que  $G/H \times J_{\mathfrak{F}}(G)^H$  es un  $G$ -espacio  $\mathfrak{F}$ -numerable. Entonces,  $[G/H \times J_{\mathfrak{F}}(G)^H, J_{\mathfrak{F}}(G)]_G$  consiste de un solo elemento. Por lo tanto  $[J_{\mathfrak{F}}(G)^H, J_{\mathfrak{F}}(G)^H]$  tiene solo un elemento, es decir  $J_{\mathfrak{F}}(G)^H$  es contraíble.  $\square$

Por el teorema anterior, podemos denotar a  $J_{\mathfrak{F}}(G)$  como  $E(G, \mathfrak{F})$ .

**Proposición 3.2.15.** *Si  $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$  son dos familias de subgrupos de isotropía de un grupo  $G$ . Entonces, existe una  $G$ -aplicación*

$$E(G, \mathfrak{F}_1) \rightarrow E(G, \mathfrak{F}_2)$$

*única salvo  $G$ -homotopía.*

*Demostración.* Observemos que  $E(G, \mathfrak{F}_1)$  es un  $G$ -espacio  $\mathfrak{F}_2$  numerable, ya que  $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ . Entonces, por el teorema 3.2.8 existe una  $G$ -aplicación

$$E(G, \mathfrak{F}_1) \rightarrow E(G, \mathfrak{F}_2)$$

única salvo  $G$ -homotopía.  $\square$

Sea  $H$  un subgrupo de  $G$ , entonces, restringiendo la acción del grupo  $G$  a  $H$  induce un funtor

$$\begin{aligned}\text{res}_H^G: G\text{-Top} &\rightarrow H\text{-Top} \\ X &\mapsto \text{res}_H^G X\end{aligned}$$

llamado *restricción*. Si  $f: X \rightarrow Y$  es una  $G$ -aplicación, entonces, obtenemos una  $H$ -aplicación  $f: X \rightarrow Y$ , simplemente restringiendo la acción de  $G$  a  $H$ .

Hay otro funtor llamado *inducción* dado por

$$\begin{aligned}\text{ind}_H^G: H\text{-Top} &\rightarrow G\text{-Top} \\ X &\mapsto \text{ind}_H^G X = G \times_H X\end{aligned}$$

Vamos a describir este funtor. Sea  $X$  un  $H$ -espacio, entonces, el espacio  $G \times X$  tiene una  $H$ -acción dada por

$$h \cdot (g, x) = (gh^{-1}, hx).$$

El espacio de órbitas es denotado por  $G \times_H X = \text{ind}_H^G(X)$ , en el cual la  $G$ -acción está dada por

$$g' \cdot [g, x] = [g'g, x].$$

Veamos que está bien definida. Sea  $[g_1, x_1] = [g_2, x_2]$ , es decir, existe  $h \in H$  tal que  $(g_1, x_1) = (g_2 h^{-1}, h x_2)$ , entonces, si  $g \in G$  tenemos

$$\begin{aligned} g \cdot (g_1, x_1) &= g \cdot (g_2 h^{-1}, h x_2) \\ &= (g g_2 h^{-1}, h x_2) \end{aligned}$$

y  $g \cdot (g_2, x_2) = (g g_2, x_2)$ . Como  $[g g_2, x_2] = [g g_2 h^{-1}, h x_2]$ , entonces,

$$g \cdot [g_1, x_1] = g \cdot [g_2, x_2].$$

Sea  $f: X \rightarrow Y$  es una  $H$ -aplicación, definimos la  $G$ -aplicación

$$\begin{aligned} \text{ind}_H^G f: G \times_H X &\rightarrow G \times_H Y \\ [g, x] &\mapsto [g, f(x)]. \end{aligned}$$

La cual está bien definida, ya que si  $[g_1, x_1] = [g_2, x_2]$ , entonces, tenemos que  $(g_1, x_1) = (g_2 h^{-1}, h x_2)$  para alguna  $h \in H$ . Así que

$$\begin{aligned} \text{ind}_H^G f(g_1, x_1) &= \text{ind}_H^G f(g_2 h^{-1}, h x_2) \\ &= (g_2 h^{-1}, f(h x_2)) \\ &= (g_2 h^{-1}, h f(x_2)) \quad \text{ya que } f \text{ es una } H\text{-aplicación,} \end{aligned}$$

entonces  $[g_1, f(x_1)] = [g_2, f(x_2)]$ .

Denotaremos por  $\text{Top}_G(X, Y)$  al conjunto de  $G$ -aplicaciones de  $X$  a  $Y$ .

**Proposición 3.2.16.** Sean  $X$   $H$ -espacio y  $Y$   $G$ -espacio, con  $H \subseteq G$ . Existe una biyección canónica

$$\text{Top}_G(G \times_H X, Y) \cong \text{Top}_H(X, \text{res}_H^G Y).$$

*Demostración.* Sea

$$\zeta: \text{Top}_G(G \times_H X, Y) \rightarrow \text{Top}_H(X, \text{res}_H^G Y)$$

definida por

$$\zeta(F)(x) = F[e, x].$$

Veamos está bien definida. Sea  $h \in H$ ,

$$\begin{aligned} F[e, h \cdot x] &= F[hh^{-1}, h \cdot x] \\ &= F[h, x] \\ &= F[he, x] \\ &= F(h \cdot [e, x]) \\ &= h \cdot F[e, x]. \end{aligned}$$

Sea

$$\gamma: \text{Top}_H(X, \text{res}_H^G Y) \rightarrow \text{Top}_G(G \times_H X, Y)$$

para la  $H$ -aplicación  $f: X \rightarrow Y$ , definimos su imagen bajo  $\gamma$  como

$$\gamma(f)[g, x] = g \cdot f(x).$$

Falta probar que son inversas:

(i)

$$\begin{aligned} \zeta(\gamma(f))(x) &= \gamma(f)[e, x] \\ &= e \cdot f(x) = f(x). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \gamma(\zeta(F))[g, x] &= g \cdot \zeta(f)(x) \\ &= g \cdot F[e, x] \\ &= F[g, x]. \end{aligned}$$

□

Tenemos que  $[X, Y]_G = \pi_0(\text{Top}_G(X, Y))$ , el cual definimos en 3.1.4. Entonces, de la proposición anterior tenemos el siguiente

**Corolario 3.2.17.**  $[G \times_H X, Y]_G \cong [X, \text{res}_H^G Y]_H$ .

Si  $\mathfrak{F}$  es una familia de subgrupos de  $G$ , sea

$$\mathfrak{F}/H = \{L \cap H \mid L \in \mathfrak{F}\}$$

la familia inducida de subgrupos de  $H$ . Con estas notaciones tenemos:

**Proposición 3.2.18.**  $\text{res}_H^G E(G, \mathfrak{F}) = E(H, \mathfrak{F}/H)$ .

*Demostración.* Por el corolario 3.2.17

$$[Y, \text{res}_H^G E(G, \mathfrak{F})]_H \cong [G \times_H Y, E(G, \mathfrak{F})]_G.$$

Si  $Y$  es un  $H$ -espacio  $\mathfrak{F}/H$ -numerable entonces,  $G \times_H Y$  es un  $G$ -espacio  $\mathfrak{F}$ -numerable. Entonces, el conjunto de homotopías  $H$ -equivariantes

$$[Y, \text{res}_H^G E(G, \mathfrak{F})]_H \cong [G \times_H Y, E(G, \mathfrak{F})]_G$$

contiene un sólo elemento, lo cual significa que  $\text{res}_H^G E(G, \mathfrak{F})$  es un objeto terminal. Por lo tanto,  $\text{res}_H^G E(G, \mathfrak{F})$  es un  $H$ -espacio  $\mathfrak{F}/H$ -numerable.  $\square$

Entonces, tenemos que  $\text{res}_H^G E(G, \mathfrak{F})$  es un objeto terminal en la categoría  $T(H, \mathfrak{F}/H)h$ .

# Capítulo 4

## El Grupo de Isometrías de $\mathcal{H}^3$

En este capítulo definiremos las transformaciones de Möbius en  $\widehat{\mathbb{C}}$  y veremos que el grupo de estas transformaciones es isomorfo a  $PSL_2(\mathbb{C})$ . Después definiremos el modelo del semi-espacio superior del espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^3$  y daremos la extensión de las transformaciones de Möbius en  $\mathbb{C}$  a  $\mathcal{H}^3$ . Y veremos que las isometrías de  $\mathcal{H}^3$  que preservan la orientación son las transformaciones de Möbius de  $\mathcal{H}^3$  definidas de esta forma, teniendo así que el grupo de isometrías de  $\mathcal{H}^3$  que preservan la orientación es isomorfo a  $PSL_2(\mathbb{C})$ .

### 4.1. Transformaciones de Möbius

**Definición 4.1.1.** Definimos las transformaciones de Möbius de  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  sobre sí mismo como las transformaciones de la forma

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (4.1)$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$ .

**Proposición 4.1.2.** *Toda transformación de Möbius se puede escribir como la composición de las transformaciones elementales*

i)  $T_b: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  definida como  $T_b(z) = z + b$ , llamada *traslación*;

ii)  $L_a: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  definida como  $L_a(z) = az$ ;

iii)  $H: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  definida como  $T(z) = 1/z$ , llamada *inversión*.

*Demostración.* Sea  $g$  una transformación de Möbius de la forma

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

como

$$g(z) = -\frac{ad - bc}{c^2} \frac{1}{z + d/c} + a/c,$$

entonces,  $g$  se puede escribir como la composición

$$g(z) = T_{a/c} L_t H T_{d/c}(z),$$

con  $t = -(ad - bc)/c^2$ . □

**Corolario 4.1.3.** *Las transformaciones de Möbius son homeomorfismos de  $\widehat{\mathbb{C}}$  y son transformaciones que preservan la orientación.*

*Demostración.* Como las transformaciones elementales  $T_b$ ,  $L_a$  y  $H$  de la proposición anterior son homeomorfismos de  $\widehat{\mathbb{C}}$  y preservan la orientación, tenemos el resultado. □

**Proposición 4.1.4.** *Las transformaciones de Möbius de  $\widehat{\mathbb{C}}$  forman un grupo bajo composición.*

*Demostración.* Sean

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{y} \quad h(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

con  $a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$  y  $a'd' - b'c' \neq 0$ . Entonces, la composición  $hg$  también es una transformación de Möbius, ya que

$$hg(z) = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)}$$

con

$$(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) = (a'd' - b'c')(ad - bc) \neq 0.$$

La transformación identidad tiene  $a = d \neq 0$  y  $b = c = 0$ , y la inversa de  $g$  es la transformación

$$g^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

con  $ad - (-b)(-c) \neq 0$ . □

**Definición 4.1.5.** Denotaremos al grupo de transformaciones de Möbius de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , como  $M(\widehat{\mathbb{C}})$ .

Ahora vamos a identificar  $M(\widehat{\mathbb{C}})$  con las matrices de  $2 \times 2$  con determinante distinto de cero, es decir con  $GL_2(\mathbb{C})$  *el grupo general lineal*.

Consideremos la función

$$\begin{aligned} \theta: GL_2(\mathbb{C}) &\rightarrow M(\widehat{\mathbb{C}}) \\ M &\mapsto g(z) \end{aligned}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad y \quad g(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Sean

$$N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad y \quad g'(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}.$$

Tenemos que

$$NM = \begin{pmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

Y si hacemos la composición  $hg(z)$  tenemos

$$\begin{aligned} hg(z) &= \frac{a'(\frac{az+b}{cz+d}) + b'}{c'(\frac{az+b}{cz+d}) + d'} \\ &= \frac{a'(az+b) + b'(cz+d)}{c'(az+b) + d'(cz+d)} \\ &= \frac{(aa' + b'c)z + a'b + b'd}{(ac' + cd')z + bc' + dd'}. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos  $\theta(NM) = hg = \theta(N)\theta(M)$ , de manera que  $\theta$  es un homomorfismo de grupos, de hecho es un epimorfismo porque  $\theta$  es sobre.

Sea  $K = \ker(\theta)$ , entonces,

$$\begin{aligned} K &= \{M \in GL_2(\mathbb{C}) \mid \theta(M) = Id\} \\ &= \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}, \end{aligned}$$

donde  $Id$  es la función identidad e  $I$  es la matriz identidad en  $GL_2(\mathbb{C})$ . Entonces, dos matrices  $M, N \in GL_2(\mathbb{C})$  determinan la misma transformación en  $M(\widehat{\mathbb{C}})$  si y sólo si  $M = \lambda N$  para alguna  $\lambda \neq 0$ . Aplicando el primer teorema de isomorfismo a  $\theta$ , obtenemos

$$M(\widehat{\mathbb{C}}) \cong GL_2(\mathbb{C})/K = PGL_2(\mathbb{C}),$$

$PGL_2(\mathbb{C})$  es llamado *el grupo proyectivo lineal*.

Como  $\det(NM) = \det(N)\det(M)$  para  $M, N \in GL_2(\mathbb{C})$ , la función

$$\det : GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

es un homomorfismo de grupos, con kernel el grupo especial lineal  $SL_2(\mathbb{C})$  que consiste de las matrices  $M \in GL_2(\mathbb{C})$  tal que  $\det(M) = 1$ . Como  $\det$  es sobre, por el primer teorema de isomorfismo de Noether tenemos

$$GL_2(\mathbb{C})/SL_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*.$$

Si  $N \in GL_2(\mathbb{C})$  entonces, podemos escribir  $N = \lambda M$ , donde  $\lambda^2 = \det(N)$  y  $M \in SL_2(\mathbb{C})$ . Como  $\theta(N) = \theta(M)$ , esto demuestra que toda transformación  $g \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  es de la forma

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1. \quad (4.2)$$

equivalentemente,  $\theta$  manda  $SL_2(\mathbb{C})$  sobre  $M(\widehat{\mathbb{C}})$ . Entonces,  $PGL_2(\mathbb{C})$  coincide con el grupo proyectivo especial lineal  $PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$ , la imagen de  $SL_2(\mathbb{C})$  en el grupo cociente  $GL_2(\mathbb{C})/K$ , y así hemos probado el siguiente

**Teorema 4.1.6.** *El grupo  $M(\widehat{\mathbb{C}})$  de transformaciones de Möbius de  $\widehat{\mathbb{C}}$  es isomorfo a  $PSL_2(\mathbb{C})$ .*

**Proposición 4.1.7.** *Sea  $g \in M(\widehat{\mathbb{C}})$ , si  $\Sigma$  es una circunferencia, entonces  $g(\Sigma)$  es una circunferencia.*

*Demostración.* Por la proposición 4.1.2 tenemos que  $g$  es composición de transformaciones elementales, entonces basta probarlo para ellas. Si  $g(z)$  es una traslación ó  $g(z) = az$ , con  $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ , es claro que  $g(\Sigma)$  es una circunferencia.

Supongamos ahora que  $g$  es la inversión. Como  $\Sigma$  es una circunferencia, todo  $z \in \Sigma$  con  $z = x + iy$ , satisface la ecuación

$$a_0(x^2 + y^2) + a_1x + a_2y + a_3 = 0, \quad (a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}), \quad (4.3)$$

dividiendo la ecuación (4.3) por  $x^2 + y^2$  tenemos que  $g(z) = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = x_0 + iy_0$  (con  $x_0 = x/(x^2 + y^2)$  y  $y_0 = -y/(x^2 + y^2)$ ) satisface la ecuación

$$a_0 + a_1x_0 - a_2y_0 + a_3(x_0^2 + y_0^2) = 0,$$

por lo tanto  $g(\Sigma)$  es una circunferencia. □

### 4.1.1. La razón cruzada

**Definición 4.1.8.** Si  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  es una 4-upla de puntos distintos en  $\mathbb{C}$ , la *razón cruzada* esta definida como

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)};$$

Tomando el límite de cuando  $z_i = \infty$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), entonces tenemos

$$(1) \quad [\infty : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)};$$

$$(2) \quad [z_1 : \infty : z_3 : z_4] = \frac{(z_4 - z_1)}{(z_3 - z_1)};$$

$$(3) \quad [z_1 : z_2 : \infty : z_4] = \frac{(z_4 - z_1)}{(z_4 - z_2)};$$

$$(4) \quad [z_1 : z_2 : z_3 : \infty] = \frac{(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_1)}.$$

**Teorema 4.1.9.** *Si  $z_1, z_2, z_3$  son tres puntos distintos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , entonces, existe una única transformación  $g \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  tal que*

$$g(z_1) = 0, \quad g(z_2) = \infty \quad y \quad g(z_3) = 1.$$

*Demostración.* Sea  $g(z) = [z_1 : z_2 : z_3 : z]$ . En cada caso,  $g \in M(\widehat{\mathbb{C}})$ , y  $g$  envía  $z_1, z_2, z_3$  a  $0, \infty, 1$  respectivamente.

Además  $g$  es única, si  $M(\widehat{\mathbb{C}})$  también envía  $z_1, z_2, z_3$  a  $0, \infty, 1$  respectivamente, entonces  $fg^{-1}$  fija a  $0, \infty, 1$  entonces, si

$$fg^{-1} = \frac{az + b}{cz + d}$$

sustituyendo  $0, 1, \infty$  tenemos las ecuaciones

$$fg^{-1}(0) = \frac{b}{d} = 0 \tag{4.4}$$

$$fg^{-1}(1) = \frac{a + b}{c + d} = 1 \tag{4.5}$$

$$fg^{-1}(\infty) = \infty \tag{4.6}$$

de (4.4) concluimos que  $b = 0$  y  $d \neq 0$ , de (4.6)  $c = 0$  y entonces, de (4.5) tenemos que  $a = d \neq 0$ . Por tanto,  $fg^{-1}$  es la identidad y así  $f = g$ .  $\square$

**Corolario 4.1.10.** *Sean  $z_1, z_2, z_3$  tres puntos distintos en  $\widehat{\mathbb{C}}$  y sean  $w_1, w_2, w_3$  cualesquiera otros tres puntos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Entonces, existe una única transformación de Möbius en  $M(\widehat{\mathbb{C}})$  que manda  $z_1, z_2, z_3$  a  $w_1, w_2, w_3$  respectivamente.*

*Demostración.* Por el teorema 4.1.9, existen  $g_1, g_2 \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  tales que

$$g_1(z_1) = g_2(w_1) = 0, \quad g_1(z_2) = g_2(w_2) = \infty \quad y \quad g_1(z_3) = g_2(w_3) = 1.$$

Entonces,  $g = g_2^{-1}g_1 \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  envía  $z_j$  a  $w_j$  para  $j = 1, 2, 3$ . Por unicidad de  $g_1$  y  $g_2$ , también  $g$  es único.  $\square$

**Corolario 4.1.11.** Si  $g \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  y  $g$  fija tres puntos distintos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , entonces  $g$  es la identidad.

*Demostración.* Si  $g \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  fija  $z_1, z_2$  y  $z_3$ , entonces, ambas  $g$  y la identidad  $Id$  envían  $z_j$  en si mismo ( $j = 1, 2, 3$ ), luego por unicidad tenemos que  $g = Id$ .  $\square$

**Teorema 4.1.12.** Sean  $(z_0, z_1, z_2, z_3)$  y  $(w_0, w_1, w_2, w_3)$  dos 4-uplas de elementos distintos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Entonces, existe alguna  $g \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  con  $g(z_j) = w_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ), si y sólo si  $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [w_0 : w_1 : w_2 : w_3]$ .

*Demostración.* Supongamos que existe  $g \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  tal que  $g(z_j) = w_j$  para  $j = 0, 1, 2, 3$ . Entonces,  $f(z) = [w_0 : w_1 : w_2 : z]$  es el único elemento de  $M(\widehat{\mathbb{C}})$  que envía  $w_0, w_1, w_2$  a  $0, \infty, 1$  respectivamente (ver demostración del teorema 4.1.9). Entonces,  $fg$  es un elemento de  $M(\widehat{\mathbb{C}})$  que envía  $z_0, z_1, z_2$  a  $0, \infty, 1$  respectivamente, es decir  $fg(z) = [z_0 : z_1 : z_2 : z]$ , entonces,

$$[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = fg(z_3) = f(w_3) = [w_0 : w_1 : w_2 : w_3].$$

A la inversa, si  $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [w_0 : w_1 : w_2 : w_3] = \lambda$ , entonces, existen  $f, h \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  tal que mandan las 4-uplas  $z_0, z_1, z_2, z_3$  y  $w_0, w_1, w_2, w_3$  a  $0, \infty, 1, \lambda$ . Tomamos  $g = f^{-1}h$ , el cual cumple  $f^{-1}h(z_j) = w_j$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).  $\square$

**Corolario 4.1.13.** Sea  $(z_0, z_1, z_2, z_3)$  una 4-upla de elementos distintos de  $\widehat{\mathbb{C}}$  y  $(0, \infty, 1, z)$  otra 4-upla con  $z \in \mathbb{C}$  distinto de  $0, \infty$  y  $1$ . Entonces, existe  $g \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  tal que  $g(z_0) = 0$ ,  $g(z_1) = \infty$ ,  $g(z_2) = 1$  y  $g(z_3) = z$  si y sólo si  $z = [z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$ .

*Demostración.* Por el teorema 4.1.12, tenemos que existe  $g \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  tal que  $g(z_0) = 0$ ,  $g(z_1) = \infty$ ,  $g(z_2) = 1$ ,  $g(z_3) = z$ , si y sólo si

$$[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [0 : \infty : 1 : z],$$

pero  $[0 : \infty : 1, z] = z$ , entonces tenemos el resultado.  $\square$

**Teorema 4.1.14.** El grupo  $M(\widehat{\mathbb{C}})$  permuta circunferencias en  $\widehat{\mathbb{C}}$  transitivamente, es decir, si  $c_1$  y  $c_2$  son circunferencias en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , entonces, existe  $g \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  tal que  $g(c_1) = c_2$ .

*Demostración.* Sean  $z_1, z_2, z_3$  puntos en  $c_1$  y  $z_3, z_4, z_5$  puntos en  $c_2$ , entonces, por el corolario 4.1.10, existe  $g \in M(\widehat{\mathbb{C}})$  que manda  $z_1, z_2$  y  $z_3$  en  $z_4, z_5$  y  $z_6$  respectivamente, pero por la proposición 4.1.7,  $g$  manda circunferencias en circunferencias, entonces  $g(c_1) = c_2$ .  $\square$

## 4.2. El modelo del semiespacio superior $\mathcal{H}^3$ del espacio hiperbólico

Identificamos  $\mathbb{R}^3$  con un subespacio de los cuaternios como sigue: a cada elemento  $(x, y, t)$  de  $\mathbb{R}^3$  lo identificamos con el cuaternio  $z + tj$ , donde  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definición 4.2.1.** Definimos el semiespacio superior  $\mathcal{H}^3$  como

$$\mathcal{H}^3 = \{z + tj \mid z \in \mathbb{C}, t > 0\}.$$

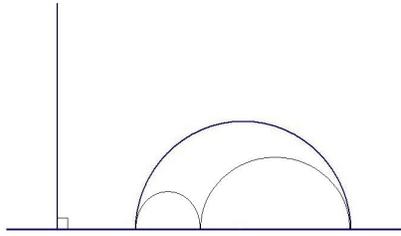
**Definición 4.2.2.** La distancia entre dos puntos  $w_1$  y  $w_2$  de  $\mathcal{H}^3$  esta definida por

$$\cosh \rho(w_1, w_2) = 1 + \frac{|w_1 - w_2|^2}{t_1 t_2},$$

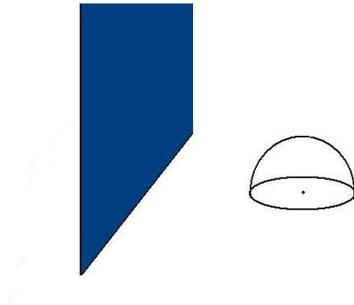
donde  $w_1 = z_1 + t_1 j$  y  $w_2 = z_2 + t_2 j$  son puntos de  $\mathcal{H}^3$ . Llamaremos a  $\mathcal{H}^3$  con esta métrica *el modelo del semi-espacio superior del espacio Hiperbólico*.

Las siguientes proposiciones describen las geodesicas o planos en  $\mathcal{H}^3$ , tales proposiciones se siguen de [11, Thm. 4.6.3].

**Proposición 4.2.3.** *Las geodésicas o h-lineas con respecto a la métrica hiperbólica son medios círculos o líneas en  $\mathcal{H}^3$  las cuales son ortogonales a la frontera de  $\mathcal{H}^3$ , es decir al plano complejo  $\mathbb{C}$ .*



**Proposición 4.2.4.** *Los planos hiperbólicos en  $\mathcal{H}^3$  son semi-esferas con centro en  $\mathbb{C}$  o planos ortogonales al plano complejo.*



### 4.2.1. Transformaciones de Möbius de $\mathcal{H}^3$

Sea  $g$  una transformación de Möbius en  $M(\widehat{\mathbb{C}})$  dada por

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

entonces, podemos extender a  $g$  a una transformación de Möbius de  $\widehat{\mathbb{R}}^3$  como

$$g(z + tj) = (a(z + tj) + b)(c(z + tj) + d)^{-1},$$

donde el producto es el producto de cuaternios.

Observemos que si la restringimos a  $\widehat{\mathbb{C}}$ , tenemos la transformación de Möbius original.

Además esta transformación de Möbius  $g$  de  $\widehat{\mathbb{R}}^3$  deja invariante el espacio superior  $\mathcal{H}^3$ , ya que

$$\begin{aligned} g(z + tj) &= [a(z + tj) + b][c(z + tj) + d]^{-1} \\ &= [(az + b) + atj][cz + d + ctj]^{-1} \\ &= [(az + b) + atj][cz + d + ctj]^{-1}[(\overline{cz + d}) - ctj]^{-1}[(\overline{cz + d}) - ctj] \\ &= [(az + b) + atj][|cz + d|^2 + |c|^2 t^2]^{-1}[(\overline{cz + d}) - ctj] \\ &= \frac{[(az + b) + atj][(\overline{cz + d}) - ctj]}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2} \\ &= \frac{(az + b)(\overline{cz + d}) + a\bar{c}t^2 + (ad - bc)tj}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2} \\ &= \frac{(az + b)(\overline{cz + d}) + a\bar{c}t^2 + tj}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2} \end{aligned}$$

Si denotamos por  $[g(z + tj)]_3$  al coeficiente del término que lleva la  $j$  en  $g(z + tj)$ , entonces, si  $t > 0$ , tenemos que  $[g(z + tj)]_3 > 0$ , por lo tanto las transformaciones de Möbius de  $\mathbb{R}^3$  dejan invariante al semi-espacio superior  $\mathcal{H}^3$ .

**Definición 4.2.5.** Denotaremos como  $M(\mathcal{H}^3)$  al subgrupo de transformaciones de Möbius de  $\mathcal{H}^3$  definidas de esta manera.

Observemos que en este caso, si  $g$  es transformación elemental inversión, esta debe ser con signo negativo para que deje invariante el semi-espacio superior  $\mathcal{H}^3$ , la cual es llamada anti-inversión, ya que

$$\begin{aligned} g(z + tj) &= -(z + tj)^{-1} \\ &= -(z + tj)^{-1}(\bar{z} - tj)^{-1}(\bar{z} - tj) \\ &= -[|z|^2 + t^2]^{-1}(\bar{z} - tj) \\ &= \frac{-\bar{z} + tj}{|z|^2 + t^2}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

deja invariante  $\mathcal{H}^3$ .

Si tenemos  $g(z + tj) = a(z + tj)$ , con  $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ , entonces,

$$\begin{aligned}
 g(z + tj) &= \frac{a^{1/2}(z + tj)}{a^{-1/2}} \\
 &= \frac{a^{1/2}(z + tj)(\overline{a^{-1/2}})}{a^{-1/2}\overline{a^{-1/2}}} \\
 &= \frac{a^{1/2}\overline{a^{-1/2}}z + tja^{-1/2}}{|a^{-1/2}|^2} \\
 &= \frac{a^{1/2}\overline{a^{-1/2}}z}{|a|^{-1}} + \frac{a^{1/2}tja^{-1/2}}{|a|^{-1}} \\
 &= \frac{|a|a^{1/2}a^{1/2}}{|a|}z + |a|ta^{1/2}a^{-1/2}j \\
 &= az + |a|tj
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

**Teorema 4.2.6.** *Sea  $g$  una transformación de Möbius en  $M(\mathcal{H}^3)$ , entonces la restricción de  $g$  a  $\mathcal{H}^3$  es una isometría de  $\mathcal{H}^3$ .*

*Demostración.* Como  $g$  es la composición de transformaciones elementales, basta probarlo para estas.

Supongamos que  $g(z + tj) = z + tj + a$ , con  $a \in \mathbb{C}$ . Sean  $w_1 = z_1 + t_1j$  y  $w_2 = z_2 + t_2j$  en  $\mathcal{H}^3$ , entonces,

$$\begin{aligned}
 \frac{|g(w_1) - g(w_2)|^2}{[g(w_1)]_3[g(w_2)]_3} &= \frac{|z_1 + t_1j + a - z_2 - t_2j - a|^2}{t_1t_2} \\
 &= \frac{|w_1 - w_2|^2}{t_1t_2},
 \end{aligned}$$

entonces  $g$  es una isometría de  $\mathcal{H}^3$ .

Si  $g(z + tj) = a(z + tj)$ , por (4.8) tenemos que  $g(z + tj) = az + |a|tj$ ,

entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{|g(w_1) - g(w_2)|^2}{[g(w_1)]_3[g(w_2)]_3} &= \frac{|az_1 + |a|t_1j - (az_2 + |a|t_2j)|^2}{(|a|t_1)(|a|t_2)} \\
&= \frac{|(az_1 - az_2) + (|a|t_1j - |a|t_2j)|^2}{|a|^2t_1t_2} \\
&= \frac{|az_1 - az_2|^2}{|a|^2t_1t_2} + \frac{||a|(t_1j - t_2j)|^2}{|a|^2t_1t_2} \\
&= \frac{|a|^2|z_1 - z_2|^2}{|a|^2t_1t_2} + \frac{|a|^2|t_1j - t_2j|^2}{|a|^2t_1t_2} \\
&= \frac{|z_1 - z_2|^2}{t_1t_2} + \frac{|t_1j - t_2j|^2}{t_1t_2} \\
&= \frac{|(z_1 - z_2) + (t_1j - t_2j)|^2}{t_1t_2} \\
&= \frac{|w_1 - w_2|^2}{t_1t_2}.
\end{aligned}$$

así tenemos que  $g$  es una isometría.

Ahora supongamos que  $g$  es la anti-inversión, entonces, por (4.7) tenemos

$$g(z + tj) = -(z + tj)^{-1} = \frac{-\bar{z} + tj}{|z|^2 + t^2}.$$

Para  $w_1$  y  $w_2$  en  $\mathcal{H}^3$  definidos como antes tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{|g(w_1) - g(w_2)|^2}{[g(w_1)]_3[g(w_2)]_3} \\
&= \frac{\left| \frac{-\bar{z}_1 + t_1j}{|z_1|^2 + t_1^2} - \frac{-\bar{z}_2 + t_2j}{|z_2|^2 + t_2^2} \right|^2}{\frac{t_1}{(|z_1|^2 + t_1^2)} \frac{t_2}{(|z_2|^2 + t_2^2)}} \\
&= \frac{\left| \frac{(|z_2|^2 + t_2^2)(-\bar{z}_1 + t_1j) - (|z_1|^2 + t_1^2)(-\bar{z}_2 + t_2j)}{(|z_1|^2 + t_1^2)(|z_2|^2 + t_2^2)} \right|^2}{\frac{t_1t_2}{(|z_1|^2 + t_1^2)(|z_2|^2 + t_2^2)}} \\
&= \frac{|(|z_2|^2 + t_2^2)(-\bar{z}_1 + t_1j) - (|z_1|^2 + t_1^2)(-\bar{z}_2 + t_2j)|^2}{t_1t_2(|z_1|^2 + t_1^2)(|z_2|^2 + t_2^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|(z_2 + t_2j)(\bar{z}_2 - t_2j)(-\bar{z}_1 + t_1j) - (z_1 + t_1j)(\bar{z}_1 - t_1j)(-\bar{z}_2 + t_2j)|^2}{t_1t_2(|z_1|^2 + t_1^2)(|z_2|^2 + t_2^2)} \\
 &= \frac{|(\bar{z}_2 - t_2j)(-\bar{z}_1 + t_1j)[(z_2 + t_2j) - (z_1 + t_1j)]|^2}{t_1t_2(|z_1|^2 + t_1^2)(|z_2|^2 + t_2^2)} \\
 &= \frac{|(\bar{z}_2 - t_2j)(-\bar{z}_1 + t_1j)|^2|(z_2 + t_2j) - (z_1 + t_1j)|^2}{t_1t_2(|z_1|^2 + t_1^2)(|z_2|^2 + t_2^2)} \\
 &= \frac{|(z_2 + t_2j) - (z_1 + t_1j)|^2}{t_1t_2} \\
 &= \frac{|w_1 - w_2|^2}{t_1t_2}
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 4.2.7.** *Sea  $g$  una transformación de Möbius de  $\mathcal{H}^3$ . Si  $\Sigma$  es una esfera, entonces  $g(\Sigma)$  es también una esfera.*

*Demostración.* Ya que  $g$  es la composición de transformaciones elementales en  $\mathbb{R}^3$  y estas transformaciones mandan esferas en esferas, tenemos el resultado. □

**Corolario 4.2.8.** *Las transformaciones de Möbius mandan h-líneas en h-líneas.*

**Definición 4.2.9.** Denotaremos por  $I_+(\mathcal{H}^3)$  al grupo de isometrías de  $\mathcal{H}^3$  que preservan la orientación.

Hemos visto que las transformaciones de Möbius de  $\mathcal{H}^3$  preservan la orientación y son isometrías de  $\mathcal{H}^3$ , vamos a probar que de hecho, las transformaciones de Möbius de  $\mathcal{H}^3$  son las únicas isometrías de  $\mathcal{H}^3$  que preservan la orientación. Para ello, veamos primero algunos resultados.

Observemos que si  $\psi$  es una isometría de  $\mathcal{H}^3$  y se tienen los puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$  distintos los cuales están en una h-línea en ese orden, entonces sus imágenes bajo  $\psi$  satisfacen

$$\rho(\psi(a), \psi(b)) + \rho(\psi(b), \psi(c)) = \rho(\psi(a), \psi(c))$$

y por tanto deben ser colineales, con  $\psi(b)$  entre  $\psi(a)$  y  $\psi(c)$ . Esto implica que  $\psi$  manda h-líneas orientadas en h-líneas orientadas.

**Proposición 4.2.10.** *Sea  $\psi$  una isometría de  $\mathcal{H}^3$ . Si  $M$  y  $L$  son dos líneas en  $\mathcal{H}^3$  que se intersectan ortogonalmente, entonces,  $\psi(L)$  y  $\psi(M)$  son dos líneas que se intersectan ortogonalmente.*

*Demostración.* Supongamos que  $L$  y  $M$  se intersectan ortogonalmente en  $a$ . Para  $b \neq a$  en  $M$ , la distancia de  $b$  a los puntos de  $L$  alcanzan su mínimo en  $a$ , entonces, la distancia de  $\psi(b)$  a los puntos de  $\psi(L)$  alcanzan su mínimo en  $\psi(a)$ . Consecuentemente,  $\psi(M)$  debe intersectar a  $\psi(L)$  ortogonalmente. □

**Teorema 4.2.11.** *Toda isometría de  $\mathcal{H}^3$  que preserva la orientación es la restricción de una transformación de Möbius de  $\mathcal{H}^3$ .*

*Demostración.* Sean  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  líneas orientadas en  $\mathcal{H}^3$  mutuamente ortogonales con punto de intersección  $o$ . Si  $\psi$  es una isometría de  $\mathcal{H}^3$ , entonces,  $\psi(L_1)$ ,  $\psi(L_2)$  y  $\psi(L_3)$  son mutuamente ortogonales. Luego, existe  $f \in M(\mathcal{H}^3)$  tal que  $f(L_1) = \psi(L_1)$ ,  $f(L_2) = \psi(L_2)$  y  $f(L_3) = \psi(L_3)$ .

Entonces,  $f^{-1}\psi$  deja fijas puntualmente a  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ . Esto tiene que probar que  $f^{-1}\psi$  es la identidad.

Observemos que toda línea que une un punto de  $L_1$  y un punto de  $L_2$  (ambos diferentes de  $o$ ), es fija puntualmente bajo  $f^{-1}\psi$ , ya que  $f^{-1}\psi$  es una isometría y deja fijos a los puntos de  $L_1$  y  $L_2$ . Entonces, cualquier línea que pasa por  $o$  es fija puntualmente por  $f^{-1}\psi$ . El mismo argumento se aplica para una línea arbitraria  $L \neq L_3$  que pasa por  $o$  con  $L_1$  y  $L_2$  reemplazados por  $L_3$  y la intersección del plano generado por  $L_3$  y  $L$  con el plano generado por  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente, teniendo así que  $f^{-1}\psi$  es la identidad en el espacio entero  $\mathcal{H}^3$ .  $\square$

De los teoremas 4.2.6 y 4.2.11, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.12.** *El grupo  $I_+(\mathcal{H}^3)$  es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius que preservan la orientación  $M(\mathcal{H}^3)$ .*

Entonces, del teorema 4.1.6 se sigue directamente el siguiente

**Teorema 4.2.13.** *El grupo  $I_+(\mathcal{H}^3)$  de isometrías que preservan la orientación de  $\mathcal{H}^3$  es isomorfo a  $PSL_2(\mathbb{C})$ .*

Las transformaciones de Möbius son clasificadas por sus puntos fijos de la siguiente manera.

**Definición 4.2.14.** Sea  $\phi$  una transformación de Möbius de  $\mathcal{H}^3$ . La transformación se dice que es

- (1) *Elíptica* si  $\phi$  fija un punto de  $\mathcal{H}^3$ .
- (2) *Parabólica* si  $\phi$  no fija puntos en  $\mathcal{H}^3$  y fija un único punto de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- (3) *Hiperbólica* si  $\phi$  no fija puntos en  $\mathcal{H}^3$  y fija dos puntos en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Ejemplo 4.2.15.** La traslación  $g(z+tj) = z+tj+a$ , con  $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ , tiene un solo punto fijo, el cual es el punto al infinito, entonces es una transformación parabólica.

**Ejemplo 4.2.16.** Sea  $g(z+tj) = a(z+tj)$ , con  $a \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ . Esta transformación tiene como únicos puntos fijos a 0 y  $\infty$ , entonces es de tipo hiperbólica.

**Lema 4.2.17.** *Sea  $\phi$  una transformación de Möbius de  $\mathcal{H}^3$ , y sea  $F_\phi$  el conjunto de puntos fijos de  $\phi$  en  $\overline{\mathcal{H}^3} = \mathcal{H}^3 \cup \widehat{\mathbb{C}}$ . Si  $\psi$  es una transformación de Möbius de  $\mathcal{H}^3$ , entonces,*

$$F_{\psi\phi\psi^{-1}} = \psi(F_\phi).$$

*Demostración.* Sea  $x \in F_{\psi\phi\psi^{-1}}$ , es decir,  $\psi\phi\psi^{-1}(x) = x$ , entonces tenemos  $\phi\psi^{-1}(x) = \psi^{-1}(x)$ , así que  $\psi^{-1}(x) \in F_\phi$ , es decir  $x \in \psi(F_\phi)$ . Por otro lado, si  $y \in \psi(F_\phi)$ , tenemos que  $\psi^{-1}(y) \in F_\phi$ , entonces,  $\phi\psi^{-1}(y) = \psi^{-1}(y)$ , de donde obtenemos que  $\psi\phi\psi^{-1}(y) = y$ . Por lo tanto,  $y \in F_{\psi\phi\psi^{-1}}$ .  $\square$

Entonces tenemos que ser elíptica, parabólica, o hiperbólica depende sólo de la clase de conjugación de  $\phi$  en  $M(\mathcal{H}^3)$ .

**Proposición 4.2.18.** *Una transformación de Möbius  $\phi$  de  $\mathcal{H}^3$  es elíptica, parabólica o hiperbólica si y sólo si  $\psi\phi\psi^{-1}$  es elíptica, parabólica o hiperbólica respectivamente, con  $\psi$  una transformación de Möbius de  $\mathcal{H}^3$ .*

**Corolario 4.2.19.** *Toda transformación de Möbius parabólica es de orden infinito.*

*Demostración.* Observemos que toda transformación parabólica es conjugada a una traslación, la cual es una transformación parabólica que fija  $\infty$ . Sea  $\phi$  una transformación parabólica, entonces  $\phi = \psi T \psi^{-1}$ , con  $\psi \in M(\mathcal{H}^3)$  y  $T$  una traslación. Si  $\phi$  fuera de orden finito, digamos  $n$ , tenemos que

$$\begin{aligned} Id &= (\psi T \psi^{-1})^n \\ &= \psi T^n \psi^{-1}, \end{aligned}$$

entonces  $T^n = \psi^{-1} Id \psi = Id$ , lo cual no es posible, por que las traslaciones son de orden infinito.  $\square$

**Teorema 4.2.20.** *Una transformación de Möbius  $\phi$  de  $\mathcal{H}^3$  es hiperbólica si y sólo si  $\phi$  es conjugada en  $M(\mathcal{H}^3)$  a la extensión a  $\mathcal{H}^3$  de una similitud  $\psi$  de  $\mathbb{C}$  de la forma  $\psi(x) = kAx$ , donde  $k > 1$  y  $A$  es una transformación ortogonal de  $\mathbb{C}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\phi$  es hiperbólica. Por conjugación podemos asumir que uno de los puntos fijos es  $\infty$ . Sea  $a \in \mathbb{C}$  otro punto fijo y sea  $\tau$  la traslación de  $\mathbb{R}^3$  por  $-a$ . Entonces,  $\tau\phi\tau^{-1}$  fija a 0 y  $\infty$ . Esto implica que hay un escalar  $k > 0$  y una transformación ortogonal  $A$  de  $\mathbb{C}$  tal que

$$\tau\phi\tau^{-1}(x) = k\tilde{A}x.$$

Donde  $\tilde{A}$  es la extensión de  $A$  a  $\mathbb{R}^3$ . Como  $\tilde{A}$  fija  $j$  y  $\tau\phi\tau^{-1}$  no tiene puntos fijos en  $\mathcal{H}^3$ , debemos tener  $k \neq 1$ .

Sea  $\sigma(x) = x/|x|^2$ . Entonces,

$$\sigma\tau\phi\tau^{-1}\sigma^{-1}(x) = k^{-1}\tilde{A}x.$$

Entonces, podemos asumir que  $k > 1$ .

Por otra parte, supongamos que  $\phi$  es conjugada en  $M(\mathcal{H}^3)$  a la extensión de Poincaré de una similitud  $\psi$  de  $\mathbb{C}$  de la forma  $\psi(x) = kAx$ , donde  $k > 1$  y  $A$  es una transformación ortogonal de  $\mathbb{C}$ . Entonces, la extensión de Poincaré  $\tilde{\psi}$  es hiperbólica, ya que 0 y  $\infty$  son sus únicos puntos fijos. Por lo tanto  $\phi$  es hiperbólica.  $\square$

**Corolario 4.2.21.** *Toda transformación de Möbius hiperbólica es de orden infinito.*

*Demostración.* Sea  $\phi$  una transformación de Möbius hiperbólica. Por el teorema 4.2.20, existe  $\tau \in M(\mathcal{H}^3)$  tal que  $\tau\phi\tau^{-1} = \tilde{\psi}$ , donde  $\psi(x) = kAx$  es una similitud de  $\mathbb{C}$  con  $k > 1$  y  $A$  es una transformación ortogonal de  $\mathbb{C}$ . Si  $\phi$  fuera de orden finito, digamos  $r$ , entonces,  $\tau\phi^r\tau^{-1} = Id$ , por lo que

$$\psi^r = (\tau\phi^r\tau^{-1})|_{\mathbb{C}} = Id_{\mathbb{C}},$$

lo cual no es posible, porque  $\psi$  es una similitud con  $k > 1$ .  $\square$

**Definición 4.2.22.** Sea  $\phi$  una isometría de  $\mathcal{H}^3$ , y sea  $\varphi \in M(\mathcal{H}^3)$  la transformación tal que  $\varphi|_{\mathcal{H}^3} = \phi$ , decimos que  $\phi$  es elíptica, parabólica o hiperbólica si  $\varphi$  es elíptica, parabólica o hiperbólica, respectivamente.

**Definición 4.2.23.** Una isometría  $\phi$  de  $\mathbb{R}^n$  es *elíptica* si y sólo si  $\phi$  fija un punto de  $\mathbb{R}^n$ ; de otra forma  $\phi$  es *parabólica*.

Ya que tenemos por el teorema 4.2.11 que toda transformación de Möbius de  $\mathcal{H}^3$  se restringe a una isometría de  $\mathcal{H}^3$ , tenemos el siguiente corolario directamente de la proposición 4.2.18.

**Corolario 4.2.24.** *Una isometría  $\phi$  de  $\mathcal{H}^3$  es elíptica, parabólica o hiperbólica si y sólo si  $\psi\phi\psi^{-1}$  es elíptica, parabólica o hiperbólica respectivamente, para cualquier  $\psi$  isometría de  $\mathcal{H}^3$ .*

**Definición 4.2.25.** Un subgrupo  $G$  de  $M(\mathcal{H}^3)$  es *elemental* si y sólo si  $G$  tiene una órbita finita en  $\overline{\mathcal{H}^3} = \mathcal{H}^3 \cup \widehat{\mathbb{C}}$ .

Dividimos los subgrupos elementales de  $M(\mathcal{H}^3)$  en tres tipos. Sea  $G$  un subgrupo elemental de  $M(\mathcal{H}^3)$ .

- (1) El grupo  $G$  es llamado de *tipo elíptico* si y sólo si  $G$  tiene una órbita finita en  $\mathcal{H}^3$ .
- (2) El grupo  $G$  se dice que es de *tipo parabólico* si y sólo si  $G$  fija un punto de  $\partial\mathcal{H}^3 = \widehat{\mathbb{C}}$  y no tiene otras órbitas finitas en  $\overline{\mathcal{H}^3}$ .
- (3) Decimos que  $G$  es de *tipo hiperbólico* si y sólo si  $G$  no es de tipo parabólico ni de tipo elíptico.

# Capítulo 5

## El Invariante de Bloch

En este capítulo definiremos las 3-variedades hiperbólicas completas y orientadas en el semiespacio superior  $\mathcal{H}^3$ . En la sección 5.2 veremos algunos ejemplos del espacio clasificante para familias de subgrupos que vimos en el capítulo 3. Después definiremos el invariante  $\alpha(M)$  y el invariante de Bloch de una 3-variedad hiperbólica completa  $M$  orientada no compacta de volumen finito. Finalizaremos el capítulo demostrando que el invariante  $\alpha(M)$  es el invariante de Bloch.

### 5.1. 3-Variedades Hiperbólicas

Vimos en la proposición 4.2.13 que  $PSL_2(\mathbb{C})$  es isomorfo a  $I_+(\mathcal{H}^3)$  el grupo de isometrías de  $\mathcal{H}^3$  que preservan la orientación. Entonces, tenemos una acción de  $PSL_2(\mathbb{C})$  en  $\mathcal{H}^3$ , la acción esta dada por

$$\begin{aligned}\varphi: PSL_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}^3 &\rightarrow \mathcal{H}^3 \\ (g, w) &\mapsto g(w) = (aw + b)(cw + d)^{-1},\end{aligned}$$

donde

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1. \quad (5.1)$$

**Proposición 5.1.1.** *El grupo de isotropía del punto  $(0, 1) \in \mathcal{H}^3$  es  $PSU(2)$ .*

*Demostración.* Recordemos que una matriz  $A \in PSU(2)$  si y sólo si el  $A$  es una matriz con determinante 1 y  $AA^* = I$ , donde  $A^*$  denota la transpuesta de la conjugada de  $A$ .

Sea  $g \in PSL_2(\mathbb{C})$ , dado como en (5.1), entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(g, j) &= (aj + b)(cj + d)^{-1} \\ &= (aj + b)[(cj + d)(\bar{d} - cj)]^{-1}(\bar{d} - cj) \\ &= (aj + b)(\bar{d} - cj)(|c|^2 + |d|^2)^{-1} \\ &= \frac{a\bar{c} + adj - bcj + b\bar{d}}{|c|^2 + |d|^2}\end{aligned}$$

entonces,  $\varphi(g, j) = j$  si y sólo si se cumplen

$$\frac{ad - bc}{|c|^2 + |d|^2} = 1, \quad y \quad (5.2)$$

$$a\bar{c} + b\bar{d} = 0. \quad (5.3)$$

Como  $ad - bc = 1$ , la ecuación (5.2) se cumple si y sólo si  $|c|^2 + |d|^2 = 1$ .

Usando que  $ad - bc = 1$  y  $a\bar{c} = -b\bar{d}$ , tenemos

$$\begin{aligned}\bar{a}\bar{b}(ad - bc) &= \bar{a}\bar{b} \\ \bar{b}d|a|^2 - c\bar{a}|b|^2 &= \bar{a}\bar{b} \\ \bar{b}d(|a|^2 + |b|^2) &= \bar{a}\bar{b} \\ d(|a|^2 + |b|^2) &= \bar{a} \\ |d|^2(|a|^2 + |b|^2) &= \bar{a}\bar{d}\end{aligned}$$

y haciendo lo mismo, pero sustituyendo  $b\bar{d} = -a\bar{c}$  tenemos que

$$|c|^2(|a|^2 + |b|^2) = -\bar{b}\bar{c},$$

entonces,

$$(|c|^2 + |d|^2)(|a|^2 + |b|^2) = \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = 1,$$

como  $|c|^2 + |d|^2 = 1$ , debemos tener que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ , y por tanto, si  $\varphi(g, j) = j$  entonces  $g \in PSU(2)$ .

Por otro lado, sea  $A \in PSU(2)$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{con } ad - bc = 1 \text{ y } AA^* = I$$

entonces,

$$AA^* = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{c} & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

por lo que  $A$  cumple con (5.2) y (5.3), por lo tanto  $\phi(A, j) = j$ .  $\square$

Entonces, tenemos la correspondencia

$$\begin{aligned} PSL_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{H}^3 \\ g &\mapsto g(0, 1) \end{aligned}$$

la cual es sobre por ser  $\varphi$  transitiva, entonces tenemos un difeomorfismo

$$PSL_2(\mathbb{C})/PSU(2) \cong \mathcal{H}^3,$$

y por el tercer teorema de isomorfismo de Noether,

$$PSL_2(\mathbb{C})/PSU(2) = (SL_2(\mathbb{C})/\{\pm Id\})/(SU(2)/\{\pm Id\}) \cong SL_2(\mathbb{C})/SU(2),$$

por lo tanto

$$PSL_2(\mathbb{C})/PSU(2) \cong SL_2(\mathbb{C})/SU(2) \cong \mathcal{H}^3.$$

**Teorema 5.1.2.** *Un grupo discreto  $\Gamma$  de isometrías de  $\mathcal{H}^3$  actúa libremente en  $\mathcal{H}^3$  si y sólo si es libre de torsión.*

*Demostración.* Supongamos que  $\Gamma$  es un grupo libre de torsión. Como  $\mathcal{H}^3$  es finitamente compacto, del teorema 1.3.9 tenemos que  $\Gamma$  actúa discontinuamente en  $\mathcal{H}^3$ . Entonces, por la proposición 1.2.14, el grupo de isotropía  $\Gamma_x$  de  $x$  es finito para cada  $x \in \mathcal{H}^3$ . Como  $\Gamma$  es libre de torsión, entonces,  $\Gamma_x = \{e\}$  para cada  $x \in \mathcal{H}^3$ , entonces,  $\Gamma$  actúa libremente en  $\mathcal{H}^3$ . Por otro lado, supongamos que  $\Gamma$  actúa libremente en  $\mathcal{H}^3$ , es decir, para cualquier  $g \in \Gamma$ , tal que  $g \neq e$ , tenemos  $g(x) \neq x$ , entonces no tiene un punto fijo en  $\mathcal{H}^3$ . Entonces, todo elemento distinto de la identidad en  $\Gamma$  es o parabólico o hiperbólico. Luego por los corolarios 4.2.19 y 4.2.21 ningún elemento de  $\Gamma$  tiene orden finito. Entonces  $\Gamma$  es libre de torsión.  $\square$

Sea  $\Gamma$  un subgrupo de  $PSL_2(\mathbb{C})$ , discreto y libre de torsión. Entonces, por el teorema 5.1.2,  $\Gamma$  actúa libremente en  $\mathcal{H}^3$  y también actúa discontinuamente en  $\mathcal{H}^3$  por el teorema 1.3.9. Luego de la proposición 1.2.15, tenemos que la aplicación cociente

$$p: \mathcal{H}^3 \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{H}^3 = M,$$

es una aplicación cubriente, y como  $\pi_1(\mathcal{H}^3) = 0$  es el cubriente universal.

Como  $\mathcal{H}^3$  es una variedad Riemanniana, entonces  $M$  también lo es con la métrica inducida de  $\mathcal{H}^3$  por  $p$ . Como  $\mathcal{H}^3$  es un espacio métrico completo,  $M$  es una variedad completa [11, Thm. 8.5.7]. Así tenemos la siguiente definición.

**Definición 5.1.3.** Una *3-variedad hiperbólica completa y orientada* es el cociente del 3-espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^3$  por un grupo discreto, libre de torsión  $\Gamma$  de isometrías de  $\mathcal{H}^3$  que preservan la orientación.

Por [2, Prop. 1.40] tenemos que  $\Gamma$  es isomorfo al grupo de transformaciones cubrientes y

$$\Gamma \cong \pi_1(M)/p_*(\pi_1(\mathcal{H}^3)) = \pi_1(M) \quad \text{y} \quad \pi_n(M) = \pi_n(\mathcal{H}^3) = 0 \quad \text{para } n > 1,$$

entonces  $M$  es un  $\mathbf{K}(\Gamma, 1)$ .

**Teorema 5.1.4.** *Sean  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  dos subgrupos de  $PSL_2(\mathbb{C})$ , discretos libres de torsión. Entonces,  $M_1 = \Gamma \backslash \mathcal{H}^3$  y  $M_2 = \Gamma' \backslash \mathcal{H}^3$  son isométricos por una isometría que preserva la orientación si y sólo si  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  son conjugados en  $PSL_2(\mathbb{C})$  el grupo de isometrías de  $\mathcal{H}^3$  que preservan la orientación.*

*Demostración.* Sea  $\phi \in PSL_2(\mathbb{C})$  tal que  $\Gamma' = \phi\Gamma\phi^{-1}$ . Luego para cada  $g \in \Gamma$  y  $w \in \mathcal{H}^3$ , tenemos

$$\phi g(w) = (\phi g \phi^{-1})\phi(w).$$

Como  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  actúan libremente en  $\mathcal{H}^3$ , entonces,  $\phi g(w)$  está en la misma  $\Gamma'$ -órbita que  $\phi(w)$ . Entonces,  $\phi$  induce un homeomorfismo

$$\bar{\phi}: M_1 \rightarrow M_2$$

definido por  $\bar{\phi}(\Gamma w) = \Gamma' \phi(w)$ . Sea  $\rho_\Gamma$  la métrica inducida de  $\mathcal{H}^3$  en el espacio  $\Gamma \backslash \mathcal{H}^3$  de manera dual sea  $\rho_{\Gamma'}$ . Entonces, si  $w_1, w_2 \in \mathcal{H}^3$ , tenemos

$$\begin{aligned} \rho_{\Gamma'}(\bar{\phi}(\Gamma w_1), \bar{\phi}(\Gamma w_2)) &= \rho_{\Gamma'}(\Gamma' \phi(w_1), \Gamma' \phi(w_2)) \\ &= \rho_{\Gamma'}(\phi \phi^{-1} \Gamma' \phi(w_1), \phi \phi^{-1} \Gamma' \phi(w_2)) \\ &= \rho_{\Gamma'}(\phi \Gamma w_1, \phi \Gamma w_2) \\ &= \rho_\Gamma(\Gamma w_1, \Gamma w_2). \end{aligned}$$

Entonces,  $\bar{\phi}$  es una isometría y preserva la orientación por definición.

Por otra parte, supongamos que  $\psi: M_1 \rightarrow M_2$  es una isometría que preserva la orientación. Como  $p_1: \mathcal{H}^3 \rightarrow M_1$  y  $p_2: \mathcal{H}^3 \rightarrow M_2$  son cubrientes y  $\mathcal{H}^3$  es simplemente conexo,  $\psi$  se levanta a un homeomorfismo  $\tilde{\psi}$  que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^3 & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \mathcal{H}^3 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ M_1 & \xrightarrow{\psi} & M_2. \end{array}$$

Como  $p_1$ ,  $p_2$  y  $\psi$  son isometrías locales por el teorema 1.3.10 y preservan la orientación ya que  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  son subgrupos de isometrías que preservan la orientación, entonces  $\tilde{\psi}$  también es una isometría local que preserva la orientación. Sean  $x, y \in \mathcal{H}^3$  distintos. Como  $\mathcal{H}^3$  es completo, existe un arco de geodesica

$\alpha : [0, l] \rightarrow \mathcal{H}^3$  que une  $x$  con  $y$ , ver [11, Thm. 8.5.7]. Ya que  $\tilde{\psi}$  es una isometría local, tenemos que

$$|\tilde{\psi}\alpha| = |\alpha| = l = \rho(x, y).$$

Entonces,

$$\rho(\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y)) \leq \rho(x, y).$$

También tenemos que

$$\rho(\tilde{\psi}^{-1}(x), \tilde{\psi}^{-1}(y)) \leq \rho(x, y).$$

Luego, tenemos

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \rho(\tilde{\psi}^{-1}\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}^{-1}\tilde{\psi}(y)) \\ &\leq \rho(\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y)). \end{aligned}$$

Por tanto,  $\rho(\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y)) = \rho(x, y)$ , es decir,  $\tilde{\psi}$  es una isometría, la cual preserva la orientación.

Sea  $g$  un elemento arbitrario de  $\Gamma$ . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} p_2\tilde{\psi}g\tilde{\psi}^{-1} &= \psi p_1 g \tilde{\psi}^{-1} \\ &= \psi p_1 \tilde{\psi}^{-1} \\ &= p_2 \tilde{\psi} \tilde{\psi}^{-1} \\ &= p_2 \end{aligned}$$

Entonces,  $\tilde{\psi}g\tilde{\psi}^{-1}$  es una transformación cubriente de  $p_2$ . Por lo cual tenemos que  $\tilde{\psi}g\tilde{\psi}^{-1}$  está en  $\Gamma'$ , entonces,  $\tilde{\psi}\Gamma\tilde{\psi}^{-1} \subseteq \Gamma'$ . Haciendo lo mismo, para  $g' \in \Gamma'$ , tenemos que  $\tilde{\psi}\Gamma'\tilde{\psi}^{-1} \subseteq \Gamma$ . Por lo tanto  $\tilde{\psi}\Gamma\tilde{\psi}^{-1} = \Gamma'$ . Así concluimos que  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  son conjugados en  $PSL_2(\mathbb{C})$ .  $\square$

Sea  $\Gamma$  un subgrupo discreto y libre de torsión de  $PSL_2(\mathbb{C})$  y  $M = \Gamma \backslash \mathcal{H}^3$ , por el teorema 5.1.4 a esta 3-variedad hiperbólica podemos asociarle una representación  $\delta : \pi_1(M) = \Gamma \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$  la cual es canónica salvo equivalencia.

Como  $\mathcal{H}^3 \cong PSL_2(\mathbb{C})/PSU(2)$ , tenemos que cualquier 3-variedad hiperbólica completa y orientada  $M$  está dada por el doble cociente

$$M = \Gamma \backslash PSL_2(\mathbb{C}) / PSU(2),$$

con  $\Gamma = \pi_1(M)$  un subgrupo discreto libre de torsión.

Tenemos la siguiente proposición de [7].

**Proposición 5.1.5.** *Sea  $M$  una 3-variedad hiperbólica. La representación canónica  $\pi_1(M)$  en  $PSL_2(\mathbb{C})$  puede ser levantada a una representación en  $SL_2(\mathbb{C})$ , es decir,*

$$\begin{array}{ccc} & & SL_2(\mathbb{C}) \\ & \nearrow \delta & \downarrow \\ \Gamma & \xrightarrow{\delta} & PSL_2(\mathbb{C}) \end{array}$$

Entonces, cualquier 3-variedad hiperbólica completa, orientada puede ser vista como

$$M = \Gamma \backslash SL_2(\mathbb{C}) / SU(2)$$

donde podemos identificar a  $\Gamma$  con un subgrupo de  $SL_2(\mathbb{C})$  usando la representación  $\Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$ .

Sea  $\Gamma$  un subgrupo discreto y libre de torsión de  $M(\mathcal{H}^3)$  tal que el  $\infty$  queda fijo por un elemento parabólico de  $\Gamma$ . Entonces, el grupo de isotropía  $\Gamma_\infty$  es un grupo elemental de tipo parabólico, es decir, fija a  $\infty$  y no tiene otras órbitas finitas en  $\overline{\mathcal{H}}^3$ . Por lo tanto  $\Gamma_\infty$  corresponde bajo la extensión a  $\mathbb{R}^3$  a un subgrupo discreto de  $I(\mathbb{C})$  el grupo de isometrías de  $\mathbb{C}$  sin puntos fijos. Entonces,  $\Gamma_\infty$  consiste de las traslaciones que están en  $\Gamma$ , las cuales se corresponden con las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \lambda \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

entonces el rango de  $\Gamma_\infty$  es 2 y es de índice finito (ver [4]). Además  $H$  deja invariante el plano complejo  $\mathbb{C}$ . Por el teorema [11, Thm. 7.4.2], tenemos que  $\mathbb{C}/\Gamma_\infty$  es compacto. Sea  $r > 0$  y sea  $N_r$  la  $r$ -vecindad del plano complejo  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $N_r$  es invariante bajo  $\Gamma_\infty$ . Sea

$$U_r = \overline{\mathcal{H}}^3 - \overline{N}_r.$$

Entonces,  $U_r$  es un subconjunto abierto  $\Gamma_\infty$ -invariante de  $\overline{\mathcal{H}}^3$ . El conjunto  $U_r$  es llamado *región cúspide* para  $\Gamma$  basado en  $\infty$  si y sólo si para toda  $g \in \Gamma - \Gamma_\infty$ , tenemos

$$U_r \cap gU_r = \emptyset.$$

**Definición 5.1.6.** Un *punto cúspide* de un subgrupo discreto  $\Gamma$  de  $PSL_2(\mathbb{C})$  es un punto fijo  $c \in \mathbb{C}$  de un elemento parabólico de  $\Gamma$  tal que existe una región cúspide  $U$  para  $\Gamma$  basado en  $c$ .

**Definición 5.1.7.** Sea  $\Gamma$  un subgrupo discreto elemental, libre de torsión de  $PSL_2(\mathbb{C})$  de tipo parabólico y sea  $U$  una región cúspide en  $\mathcal{H}^3$  para  $\Gamma$ . Una 3-variedad hiperbólica isométrica a  $U/\Gamma$  es llamada una *cúspide* 3-dimensional.

**Lema 5.1.8.** Sea  $\Gamma$  un subgrupo discreto de  $PSL_2(\mathbb{C})$  y sea  $C$  el conjunto de puntos cúspide de  $\Gamma$ . Entonces, para cada punto  $c$  en  $C$ , existe una región cúspide  $U(c)$  basado en  $c$  para  $\Gamma$  tal que las regiones  $\{\overline{U}(c) : c \in C\}$  son mutuamente disjuntos y  $gU(c) = U(g(c))$  para cada  $g$  en  $\Gamma$  y  $c$  en  $C$ .

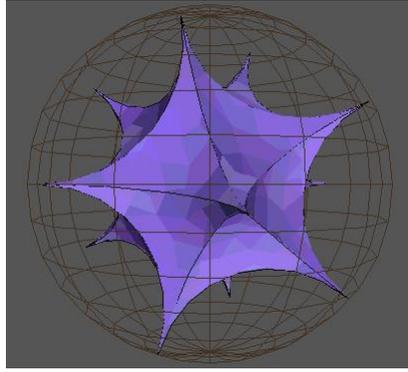
Para la demostración ver [11, Lem. 7 de sec. 12.6].

Desde ahora,  $M$  denotará una 3-variedad hiperbólica orientable completa no compacta de volumen finito.

**Teorema 5.1.9.** *Sea  $M$  una 3-variedad hiperbólica completa orientable no compacta de volumen finito. Entonces, existe  $M_0 \subset M$  3-variedad compacta con frontera, tal que  $M - M_0$  es la unión disjunta de un número finito de cúspides. Cada cúspide de  $M$  es difeomorfa a  $T^2 \times (0, \infty)$ , donde  $T^2$  denota el 2-toro.*

Para la demostración ver [11, Prop. 12.6.6, Thm. 10.2.1].

En la siguiente figura se muestra una variedad de este tipo.



**Observación 5.1.10.** Sea  $M$  una 3-variedad hiperbólica completa orientada de volumen finito con  $d$  cúspides. Tomamos un punto base  $x_0$  en  $M$  y un punto  $x_i$  en una sección del toro  $T_i^2$  del extremo correspondiente a la  $i$ -ésima cúspide ( $i = 1, \dots, d$ ). Sea  $q_i(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) el camino en  $M$  con  $q_i(0) = x_0$  y  $q_i(1) = x_i$ . Consideremos el homomorfismo

$$(q_i)_\# : \pi_1(T_i^2, x_i) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$$

inducido por  $q_i$  y pongamos  $\Gamma_i = (q_i)_\#(\pi_1(T_i^2, x_i))$ . Los subgrupos  $\Gamma_i$  son llamados *subgrupos tóricos periféricos* de  $\Gamma$ . La imagen de  $\Gamma_i$  bajo la representación  $\delta: \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$  dada por la inclusión es un grupo abeliano libre de rango 2 de  $SL_2(\mathbb{C})$ . Los subgrupos  $\Gamma_i$  consisten sólo de elementos parabólicos, es decir, sin puntos fijos de  $\mathcal{H}^3$  y un único punto fijo en la frontera  $\widehat{\mathbb{C}}$  de  $\mathcal{H}^3$ . Todos los elementos en  $\Gamma_i$  tienen como punto fijo el correspondiente punto cuspide (ver [19] sección 4.5). Como la acción en  $SL_2(\mathbb{C})$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$  es transitiva y por el corolario 4.2.24 los conjugados de isometrías parabólicas son parabólicas, podemos asumir que el punto fijo es el punto al infinito  $\infty$  el cual denotaremos por sus coordenadas homogéneas  $\infty = [1, 0]$  y como los elementos parabólicos que tienen como punto fijo a  $\infty$  son las traslaciones, tenemos que los subgrupos  $\Gamma_i$  son conjugados al grupo de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \lambda \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Observación 5.1.11.** Vamos a usar dos formas de compactificar a la variedad  $M$ . Sea  $M_+$  la compactificación de  $M$  por un punto y sea  $\widehat{M}$  la compactificación que consiste en agregarle a  $M$  los puntos cúspide. Entonces  $M_+ = \widehat{M}/\mathcal{C}$ .

Luego, por el teorema 5.1.9 tenemos que  $M$  es homotópicamente equivalente a  $M_0$ , entonces

$$M_+ = M_0/\partial M_0.$$

Tenemos que  $(\widehat{M}, \mathcal{C})$  es una pareja con collar, luego de la sucesión exacta de parejas tenemos

$$0 = H_3(\mathcal{C}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_3(\widehat{M}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_3(\widehat{M}, \mathcal{C}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\mathcal{C}; \mathbb{Z}) = 0,$$

entonces,

$$H_3(\widehat{M}; \mathbb{Z}) = H_3(\widehat{M}, \mathcal{C}; \mathbb{Z}) = H_3(\widehat{M}/\mathcal{C}; \mathbb{Z}) = H_3(M_+; \mathbb{Z}) = H_3(M_0, \partial M_0; \mathbb{Z}).$$

Luego por [9, VI.9] tenemos que  $H_3(M_0, \partial M_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ , de donde concluimos que  $H_3(\widehat{M}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ .

Denotaremos por  $[\widehat{M}]$  al generador y lo llamaremos la clase fundamental de  $\widehat{M}$  en  $H_3(\widehat{M}; \mathbb{Z})$ .

## 5.2. Espacios Clasificantes para Familias de Subgrupos de Isotropía

En esta sección veremos algunos ejemplos de espacios clasificantes para familias de subgrupos de isotropía, que vimos en el capítulo 3 y llegaremos a ciertos resultados para estos ejemplos y los que usaremos para construir el invariante  $\alpha(M)$ , para una 3-variedad hiperbólica completa orientada de volumen finito.

**Ejemplo 5.2.1.** Consideremos  $SL_2(\mathbb{C})$  como un subgrupo discreto. En la sección 2.4 vimos que la acción de  $SL_2(\mathbb{C})$  en el haz universal  $ESL_2(\mathbb{C})$  es libre y que  $ESL_2(\mathbb{C})$  es contraíble, entonces, tenemos que  $ESL_2(\mathbb{C})$  es de tipo  $E(SL_2(\mathbb{C}), \{1\})$ .

**Ejemplo 5.2.2.** Ahora consideremos la esfera  $\mathbb{S}^2$  como los números complejos extendidos  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Por el corolario 4.1.10 tenemos que  $SL_2(\mathbb{C})$  actúa triple transitivamente en  $\mathbb{S}^2$ . Sea  $T$  el subgrupo de isotropía de  $\infty$ , entonces,

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\}.$$

ya que si  $g \in SL_2(\mathbb{C})$  es tal que

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

## 5.2. ESPACIOS CLASIFICANTES PARA FAMILIAS DE SUBGRUPOS DE ISOTROPÍA 71

Entonces,

$$g(\infty) = \infty$$

si y sólo si  $a \neq 0$  y  $c = 0$ , pero se tiene que cumplir que  $ad - bc = 1$ , entonces  $ad = 1$ , de donde tenemos el resultado.

Así que tenemos un difeomorfismo dado por

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{C})/T &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ gT &\mapsto g(\infty). \end{aligned}$$

Sea  $J(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2 * \mathbb{S}^2 * \dots$ , el join de una cantidad numerable de copias de  $\mathbb{S}^2$ . Entonces,  $J(\mathbb{S}^2)$  es de tipo  $E(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{F}(T))$ , por construcción del espacio clasificante para familias (ver la proposición ??), donde  $\mathfrak{F}(T)$  es la familia que contiene a los subgrupos de  $T$  y sus conjugados por elementos en  $SL_2(\mathbb{C})$ .

**Ejemplo 5.2.3.** Sea  $\Gamma$  un subgrupo discreto libre de torsión de  $SL_2(\mathbb{C})$ . La acción de  $\Gamma$  en  $\mathcal{H}^3$  es libre y como  $\mathcal{H}^3$  es contraíble, entonces  $\mathcal{H}^3$  es un espacio de tipo  $E(\Gamma, \{1\}) = E\Gamma$ , entonces,  $M = \Gamma \backslash \mathcal{H}^3$  es un  $E\Gamma/\Gamma = B\Gamma$ .

Sea  $M = \Gamma \backslash \mathcal{H}^3$  una 3-variedad hiperbólica completa orientable no compacta de volumen finito, sea

$$p: \mathcal{H}^3 \rightarrow M$$

el cubriente universal de  $M$  y  $\mathcal{C}$  el conjunto de *puntos cúspide*, es decir, las preimágenes de cúspides de  $M$  en  $\partial\overline{\mathcal{H}^3} = \widehat{\mathbb{C}}$ , o equivalentemente, puntos fijos de elementos parabólicos de  $\Gamma$  y sea  $\widehat{Y} = \mathcal{H}^3 \cup \mathcal{C}$ . Tenemos que la acción de  $\Gamma$  en  $\widehat{Y}$  ya no es libre. Los puntos cúspide tienen como subgrupos de isotropía los subgrupos tóricos periféricos  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_d$  de  $\Gamma$  o sus conjugados. Entonces, por construcción de  $E(\Gamma, \mathfrak{F})$ , tenemos que  $\widehat{Y}$  es del tipo  $E(\Gamma, \mathfrak{F}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_d))$ .

**Corolario 5.2.4.**

(i) *Existe una  $SL_2(\mathbb{C})$ -aplicación*

$$l: ESL_2(\mathbb{C}) \rightarrow J(\mathbb{S}^2)$$

*única salvo  $SL_2(\mathbb{C})$ -homotopía.*

(ii) *Existe una  $\Gamma$ -aplicación  $h: \mathcal{H}^3 \rightarrow \widehat{Y}$  única salvo  $\Gamma$ -homotopía.*

*Demostración.* (i) y (ii) se siguen directamente de la proposición 3.2.15, (i) se obtiene usando que  $\{1\} \subset \mathfrak{F}(T)$  y que  $ESL_2(\mathbb{C}) = E(SL_2(\mathbb{C}), \{1\})$  y  $J(\mathbb{S}^2)$  es de tipo  $E(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{F}(T))$ . Para (ii), se usa que  $\{1\} \subset \mathfrak{F}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_d)$  y como se tiene que  $\mathcal{H}^3$  es de tipo  $E(\Gamma, \{1\})$  y  $J(\mathbb{S}^2)$  es de tipo  $E(\Gamma, \mathfrak{F}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_d))$ , tenemos el resultado.  $\square$

Y de la proposición 3.2.18, tenemos

**Corolario 5.2.5.**

(1)  $\text{res}_\Gamma ESL_2(\mathbb{C})$  es  $\Gamma$ -homotópico a  $E(\Gamma, \{1\}) = \mathcal{H}^3$ .

(2) Existe una  $\Gamma$ -aplicación

$$\widehat{Y} \rightarrow \text{res}_\Gamma J(\mathbb{S}^2)$$

única salvo  $\Gamma$ -homotopía.

*Demostración.* (1) sigue directamente de la proposición 3.2.18. Y también por la proposición 3.2.18 tenemos que  $\text{res}_\Gamma(J(\mathbb{S}^2))$  es un  $E(\Gamma, \mathfrak{F}(T)/\Gamma)$ . Luego, por el ejemplo 5.2.3,  $\widehat{Y}$  es un  $E(\Gamma, \mathfrak{F}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_d))$  donde  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_d$  son los subgrupos tóricos periféricos. Tenemos que  $\mathfrak{F}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_d) \subset \mathfrak{F}(T)/\Gamma$ , entonces, por la proposición 3.2.15 tenemos (2).  $\square$

Siguiendo esto, tenemos una versión simplicial de la aplicación

$$l: ESL_2(\mathbb{C}) \rightarrow J(\mathbb{S}^2)$$

del corolario 5.2.4, la cual usaremos en las siguientes secciones.

**Ejemplo 5.2.6.** Consideremos  $ESL_2(\mathbb{C})$  como la realización geométrica del complejo simplicial donde un  $n$ -simplejo es una  $(n+1)$ -upla  $(g_0, \dots, g_n)$  con  $g_i \in SL_2(\mathbb{C})$ . Y el join infinito  $J(\mathbb{S}^2)$  es la realización geométrica del conjunto simplicial cuyos  $n$ -simplejos son las  $(n+1)$ -uplas  $(a_0, \dots, a_n)$  de elementos de  $\mathbb{S}^2 = \widehat{\mathbb{C}}$ , (ver la definición 2.4.12).

Por consiguiente la aplicación  $l: ESL_2(\mathbb{C}) \rightarrow J(\mathbb{S}^2)$  es la realización geométrica de la  $SL_2(\mathbb{C})$ -aplicación simplicial

$$(g_0, \dots, g_n) \mapsto (g_0 \cdot \infty, \dots, g_n \cdot \infty). \quad (5.4)$$

Eligiendo un punto base diferente en lugar de  $\infty$  por el corolario 5.2.4 obtenemos una  $SL_2(\mathbb{C})$ -aplicación homotópica.

### 5.3. El invariante $\alpha(M)$ de $M$

Para simplificar la notación, si  $G$  es un grupo y  $X$  es un  $G$ -espacio, denotaremos el espacio de órbitas  $G \backslash X$  por  $X_G$ . También para el resto del capítulo, sea  $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}(T)$ , con  $T$  como en el ejemplo 5.2.2 y

$$B(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{X}) = E(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{X})_{SL_2(\mathbb{C})}.$$

Sea  $M$  una 3-variedad hiperbólica completa orientable de volumen finito, entonces tenemos que  $M = \Gamma \backslash \mathcal{H}^3$  para algún subgrupo discreto libre de torsión de  $SL_2(\mathbb{C})$ . Sea  $\widehat{Y} = \mathcal{H}^3 \cup \mathcal{C}$ , con  $\mathcal{C}$  el conjunto de puntos cúspide y sea  $\widehat{M} = \Gamma \backslash \widehat{Y}$ . Si  $M$  es compacta,  $\mathcal{C} = \emptyset$  y  $\widehat{M} = M$ , si  $M$  no es compacta, tenemos que

$\widehat{M}$  es la compactificación punta de  $M$ , lo cual es el resultado de agregar las cúspides de  $M$ . Por (2) del corolario 5.2.5 existe una  $\Gamma$ -aplicación

$$\widehat{M} \rightarrow J(\mathbb{S}^2)_\Gamma = E(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T})_\Gamma$$

la cual es única salvo  $\Gamma$ -homotopía. También tenemos que

$$ESL_2(\mathbb{C})_{SL_2(\mathbb{C})} = B(SL_2(\mathbb{C})).$$

Combinando esto con el corolario 5.2.4 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & ESL_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{l} & E(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T}) & \\
 \nearrow \phi & \uparrow h & & \nearrow \mu & \\
 \mathcal{H}^3 & \xrightarrow{\quad} & \widehat{Y} & & \\
 \downarrow & \downarrow \gamma & \downarrow k & \downarrow \gamma & \\
 & BSL_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{k} & B(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T}) & \\
 \nearrow f & \uparrow q & & \nearrow \psi & \\
 M & \xrightarrow{\quad} & \widehat{M} & & 
 \end{array} \tag{5.5}$$

donde  $q$  y  $k$  son las aplicaciones inducidas por  $h$  y  $l$  respectivamente, del corolario 5.2.4 en los conjuntos de  $\Gamma$  y  $SL_2(\mathbb{C})$  órbitas, respectivamente. Tenemos que  $f = B_\delta: B\Gamma = M \rightarrow BSL_2(\mathbb{C})$  es la aplicación entre espacios clasificantes los cuales en grupos fundamentales induce la representación canónica

$$\delta: \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$$

de  $M$ , y  $\psi$  está dada por la composición

$$\psi: \widehat{M} \rightarrow E(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T})_\Gamma \rightarrow B(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T}). \tag{5.6}$$

Las aplicaciones  $\phi$  y  $\mu$  se tienen por el corolario 5.2.5, dadas al restringir la acción a  $\Gamma$ . Y de las aplicaciones denotadas con flechas punteadas, las dos al frente son cocientes por  $\Gamma$  y las dos de atrás son los cocientes por  $SL_2(\mathbb{C})$ .

La aplicación  $\psi$  induce un homomorfismo

$$\psi_*: H_3(\widehat{M}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(B(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T})). \tag{5.7}$$

Si  $[\widehat{M}]$  denota la clase fundamental de  $\widehat{M}$  en  $H_3(\widehat{M}; \mathbb{Z})$ , (ver la observación 5.1.11). Denotamos por  $\alpha(M)$  la clase canónica en  $H_3(B(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T}); \mathbb{Z})$  dada por

$$\alpha(M) = \psi_*([\widehat{M}]). \tag{5.8}$$

## 5.4. El invariante de Bloch

Ahora definiremos el invariante de Bloch de una 3-variedad hiperbólica completa orientable no compacta de volumen finito el cual tiene una triangulación ideal.

**Definición 5.4.1.** El *pre-grupo de Bloch*  $\mathcal{P}(F)$  de un campo  $F$  es el cociente del grupo abeliano generado por los símbolos formales  $[x]$ , con  $x \in F \cup \{\infty\}$  por las siguientes relaciones

$$[0] = [1] = [\infty] = 0$$

$$[x] - [y] + [y/x] - [(1-x^{-1})/(1-y^{-1})] + [(1-x)/(1-y)] = 0.$$

Sea  $\overline{\mathcal{H}^3} = \mathcal{H}^3 \cup \widehat{\mathbb{C}}$  la compactificación estándar del 3-espacio hiperbólico  $\mathcal{H}^3$ . Nos referiremos a los elementos de la frontera  $\widehat{\mathbb{C}}$  de  $\mathcal{H}^3$  como *puntos al infinito*.

Un *tetraedro ideal* (o *simplejo ideal*) en  $\mathcal{H}^3$  es un tetraedro con vértices en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Sea  $\Delta(a_0, a_1, a_2, a_3)$  un tetraedro con vértices  $a_0, a_1, a_2, a_3$ . El grupo  $PSL_2(\mathbb{C})$  actúa en  $\widehat{\mathbb{C}}$  por las transformaciones de Möbius y la acción es triplemente transitiva (corolario 4.1.10). Por lo tanto, existe un elemento  $g \in PSL_2(\mathbb{C})$  tal que

$$g \cdot a_0 = 0, \quad g \cdot a_1 = \infty, \quad g \cdot a_2 = 1, \quad g \cdot a_3 = z,$$

por el teorema 4.1.9,  $z = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3]$  es la razón cruzada de los vértices.

Por tanto las clases de congruencia de tetraedros ideales son parametrizadas por  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Extendemos la definición de razón cruzada a

$$[a_0 : a_1 : a_2 : a_3] = 0$$

siempre que  $a_i = a_j$  para alguna  $i \neq j$ .

**Definición 5.4.2.** Sea  $M$  una 3-variedad completa orientable no compacta de volumen finito. Una *triangulación ideal* para  $M$  es una triangulación donde todos sus tetraedros  $\Delta_i$  son tetraedros ideales.

**Observación 5.4.3.** En [6] Epstein y Penner demuestran que este tipo de variedades pueden ser descompuestas en poliedros ideales convexos, pero se desconoce si esta descomposición puede ser subdividida en una triangulación ideal.

Por esta razón, a partir de ahora vamos a suponer que cuando  $M$  es una 3-variedad hiperbólica completa orientable no compacta, esta tiene una triangulación ideal.

**Definición 5.4.4.** Sea  $M$  una 3-variedad hiperbólica y sean  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  los tetraedros ideales de una triangulación ideal en  $M$ . Sea  $z_i \in \mathbb{C}$  el parámetro de  $\Delta_i$  para cada  $i$ . Estos parámetros definen un elemento

$$\beta(M) = \sum_{i=1}^n [z_i]$$

en el pre-grupo de Bloch. El elemento  $\beta(M)$  es llamado *el invariante de Bloch de  $M$* .

**Observación 5.4.5.** Neumann y Yang definieron el invariante de Bloch usando triangulaciones ideales de grado uno, de esta manera está definido para toda 3-variedad hiperbólica de volumen finito, incluso las compactas, ver [18, Sec. 2] para los detalles.

Si se tiene una cantidad finita de 3-simplejos geométricos y los pegamos identificando las caras en pares, entonces, obtenemos un complejo (celular)  $N$ , el cual es una variedad excepto posiblemente en los puntos aislados. Si el complemento de esos puntos aislados es orientado llamaremos a  $N$  un *3-ciclo geométrico*. En este caso el complemento  $N - N^{(0)}$  de los vértices es una variedad orientada.

**Definición 5.4.6.** Supongamos que  $M = \mathcal{H}^3 \setminus \Gamma$  es una variedad hiperbólica. Una *triangulación ideal de grado uno* de  $M$  consiste de un 3-ciclo geométrico  $N$  junto con una aplicación  $f: N - N^{(0)} \rightarrow M$  que satisface

- i)  $f$  es de grado uno casi en todo  $M$ ;
- ii) para cada 3-simplejo  $S$  de  $N$ , existe una aplicación  $f_S$  de  $S$  a un simplejo ideal en  $\mathcal{H}^3$ , biyectiva de vértices, tal que  $f|_{S-S^{(0)}}: S - S^{(0)} \rightarrow M$  es la composición  $p \circ f_S|_{S-S^{(0)}}$ , donde  $p: \mathcal{H}^3 \rightarrow M$  es la proyección.

## 5.5. El invariante $\alpha(M)$ es el invariante de Bloch

En esta sección demostraremos que la clase característica  $\alpha(M)$  de una 3-variedad completa orientable de volumen finito  $M$  es igual a su invariante de Bloch  $\beta(M)$ , en particular, esto da una nueva prueba de que el invariante de Bloch es independiente de la triangulación ideal, o desde un punto de vista diferente, podemos calcular  $\alpha(M)$  usando una triangulación ideal de  $M$ .

Para el resto del capítulo vamos a considerar  $J(\mathbb{S}^2)_{SL_2(\mathbb{C})}$  como el modelo para  $B(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T})$ .

**Lema 5.5.1.** [3, Lem. 2.2]

$$H_3(B(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T}); \mathbb{Z}) = H_3(J(\mathbb{S}^2)_{SL_2(\mathbb{C})}; \mathbb{Z}) \cong \mathcal{P}(\mathbb{C}).$$

*Demostración.* Sea  $G = SL_2(\mathbb{C})$ . Recordemos que

$$H_3(J(\mathbb{S}^2)_G) = \ker \partial_3 / \text{Im} \partial_4.$$

Sea  $C_n$  el grupo abeliano libre generado por las clases de los  $n$ -simplejos  $(a_0, \dots, a_n)_G$  de  $J(\mathbb{S}^2)_G$  y sea  $(a_0, a_1, a_2, a_3)_G \in C_3$ , observemos que

$$\begin{aligned} \partial_3(a_0, a_1, a_2, a_3)_G &= (a_1, a_2, a_3)_G - (a_0, a_2, a_3)_G + (a_0, a_1, a_3)_G - (a_0, a_1, a_2)_G \\ &= (0, \infty, 1)_G - (0, \infty, 1)_G + (0, \infty, 1)_G - (0, \infty, 1)_G = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto  $\ker \partial_3 = C_3$ .

Notemos que toda  $SL_2(\mathbb{C})$ -órbita de un  $n$ -simplejo en  $C_n$  podemos verlo como  $(0, \infty, 1, a_1, \dots, a_{n-2})_G$ , entonces, por el corolario 4.1.13 tenemos que  $(a_0, a_1, a_2, a_3)_G = (0, \infty, 1, z)_G$ , con  $z = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3]$ , la razón cruzada del 3-simplejo  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ . Denotaremos por  $[z] = (0, \infty, 1, z)_G$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \partial_4(0, \infty, 1, x, y)_G &= (\infty, 1, x, y)_G - (0, 1, x, y)_G + (0, \infty, x, y)_G - (0, \infty, 1, y)_G \\ &\quad + (0, \infty, 1, x)_G \\ &= \left(0, \infty, 1, \frac{1-x}{1-y}\right)_G - \left(0, \infty, 1, \frac{1-x^{-1}}{1-y^{-1}}\right)_G + (0, \infty, 1, y/x)_G \\ &\quad - (0, \infty, 1, y)_G + (0, \infty, 1, x)_G \\ &= [(1-x)/(1-y)] - [(1-x^{-1})/(1-y^{-1})] + [y/x] - [y] + [x]. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} H_3(J(\mathbb{S}^2)_{SL_2(\mathbb{C})}; \mathbb{Z}) &\rightarrow P(\mathbb{C}). \\ (a_0, a_1, a_2, a_3)_{SL_2(\mathbb{C})} &\mapsto [a_0 : a_1 : a_2 : a_3], \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde  $[a_0 : a_1 : a_2 : a_3]$  es la razón cruzada del simplejo  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ .  $\square$

Por el lema 5.5.1 tenemos que  $\alpha(M) \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ .

**Observación 5.5.2.** Sea  $M$  una 3-variedad hiperbólica no compacta completa orientable de volumen finito. Sea  $p: \mathcal{H}^3 \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{H}^3 = M$  el cubriente universal de  $M$ . Entonces,  $M$  levanta a un poliedro ideal, fundamental, exacto y convexo  $P$  de  $\Gamma$  [11, Thm. 11.2.1]. Una triangulación ideal de  $M$  da una decomposición de  $P$  en un número finito de tetraedros ideales. Luego, por el teorema 1.3.20,  $\mathcal{P} = \{gP \mid g \in \Gamma\}$  es una teselación exacta de  $\mathcal{H}^3$ , esta decomposición de  $P$  da una triangulación ideal de  $\mathcal{H}^3$ .

**Teorema 5.5.3.** *Sea  $M$  una 3-variedad completa orientable de volumen finito. Entonces  $\alpha(M) = \beta(M)$ .*

*Demostración.* Por la observación 5.5.2 tenemos que una triangulación ideal de  $M$  da una triangulación ideal de  $\mathcal{H}^3$ . Como en el ejemplo 5.2.3, sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de puntos cúspide y sea  $\widehat{Y} = \mathcal{H}^3 \cup \mathcal{C}$ , el cual es el resultado de añadir los vértices del tetraedro ideal de la triangulación ideal de  $\mathcal{H}^3$ . Entonces, podemos considerar a  $\widehat{Y}$  como un complejo simplicial con vértices dados por los puntos cúspide.

Para probar el teorema, usaremos la versión simplicial de la  $\Gamma$ -aplicación  $\widehat{Y} \rightarrow J(\mathbb{S}^2)$  dada en (2) del corolario 5.2.5. Consideremos  $J(\mathbb{S}^2)$  como la realización geométrica de un complejo simplicial que vimos en el ejemplo 5.2.6. Considerando a  $\widehat{Y}$  como la realización geométrica de su triangulación ideal y como sus vértices son los puntos cúspide  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ , tenemos que la  $\Gamma$ -aplicación  $\widehat{Y} \rightarrow J(\mathbb{S}^2)$  esta dada por la realización geométrica de la  $\Gamma$ -aplicación simplicial equivariante

$$\begin{aligned} \widehat{Y} &\rightarrow J(\mathbb{S}^2) \\ (a_0, a_1, a_2, a_3) &\mapsto (a_0, a_1, a_2, a_3). \end{aligned}$$

La composición (5.6) induce en 3-cadenas la aplicación

$$\begin{aligned} C_3(\widehat{M}) &\rightarrow C_3(J(\mathbb{S}^2)_{SL_2(\mathbb{C})}) \\ (a_0, a_1, a_2, a_3)_\Gamma &\mapsto (a_0, a_1, a_2, a_3)_{SL_2(\mathbb{C})} = (0, \infty, 1, z)_{SL_2(\mathbb{C})}, \end{aligned}$$

donde  $(a_0, a_1, a_2, a_3)_\Gamma$  (respectivamente  $(a_0, a_1, a_2, a_3)_{SL_2(\mathbb{C})}$ ) denota la  $\Gamma$ -órbita (respectivamente  $SL_2(\mathbb{C})$ -órbita) del 3-simplejo  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  y  $z$  es la razón cruzada  $[a_0 : a_1 : a_2 : a_3]$ .

Sean  $\Delta_i = \Delta(a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , los tetraedros ideales de una triangulación de  $M$  y  $z_i = [a_0^i : a_1^i : a_2^i : a_3^i] \in \mathbb{C}$  es el parámetro de  $\Delta_i$  para cada  $i$ , ahora es claro que salvo el homomorfismo (5.7) la clase fundamental  $[\widehat{M}]$  es enviado al invariante de Bloch  $\beta(M)$

$$\begin{aligned} H_3(\widehat{M}) &\rightarrow H_3(J(\mathbb{S}^2)_\Gamma) \rightarrow P(\mathbb{C}) \\ [\widehat{M}] &\mapsto \sum_{i=1}^n (a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i)_\Gamma \mapsto \sum_{i=1}^n (a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i)_{SL_2(\mathbb{C})} = \sum_{i=1}^n [z_i]. \end{aligned}$$

Para el caso cuando  $M$  es compacta, siguiendo [[18], Chap.2] elegimos una triangulación ideal de grado uno de  $M$  dada por un 3-ciclo geométrico  $Y$  y una aplicación  $f: Y - Y^{(0)} \rightarrow M$  con  $|Y| = M$ . Como en [[18], Chap.2], formamos pull-back cubriente

$$\begin{array}{ccc} \widehat{Y - Y^{(0)}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y - Y^{(0)} & \longrightarrow & M \end{array}$$

y completamos para obtener un complejo simplicial  $\widehat{Y}$  con una  $\Gamma$ -acción (que es libre exepcto tal vez en los vértices). Por el corolario 5.2.5 existe una  $\Gamma$ -aplicación  $\widehat{Y} \rightarrow J(\mathbb{S}^2)$  y podemos sustituír  $\mathcal{H}^3$  por  $ESL_2(\mathbb{C})$ . Tomando los cocientes por  $SL_2(\mathbb{C})$  y  $\Gamma$  obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (Y - Y^{(0)}) & \longrightarrow & M \\ \downarrow f & & \downarrow \\ BSL_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{k} & B(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T}) \end{array}$$

donde  $\Gamma \backslash \widehat{Y} = Y = M$ . El resto de la prueba es como para el caso no compacto con este  $\widehat{Y}$ .  $\square$

Por el teorema 5.5.3, podemos calcular  $\alpha(M)$  mediante triangulaciones ideales.

**Ejemplo 5.5.4.** Sea  $M = \mathbb{S}^3 - K$ , donde  $K$  es el nudo 8.  $M$  tiene una triangulación ideal dada por los tetraedros

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (0, \infty, w, -1) \\ \Delta_2 &= (0, \infty, w + 1, w), \end{aligned}$$

con  $w = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Sean  $\phi(z) = \frac{z}{w}$  y  $\psi(z) = \frac{z}{w+1}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0, \quad \phi(\infty) = \infty, \quad \phi(w) = 1, \quad \phi(-1) = -w^{-1} = z_1, \quad y \\ \psi(0) &= 0, \quad \psi(\infty) = \infty, \quad \psi(w + 1) = 1, \\ \psi(w) &= \frac{w}{w + 1} = \frac{w}{w + 1} \frac{w^{-1}}{w^{-1}} = \frac{1}{1 + w^{-1}}, \end{aligned}$$

Luego,  $1 + w^{-1} = 1 + \bar{w} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , de donde obtenemos

$$(1 + w^{-1})^{-1} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -w^{-1},$$

entonces  $z_1 = z_2 = w + 1$ .

Por lo tanto

$$\beta(M) = 2[w + 1].$$

# Bibliografía

- [1] Alan F. Beardon, “The Geometry of Discrete Groups”, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag.
- [2] Allen Hatcher, “Algebraic Topology”, Cambridge University, 2002.
- [3] A. A. Suslin, “ $K_3$  of a field and the Bloch group”, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 4:217-239, 1991.
- [4] A.A. Suslin, “On the equivalence of  $K$ -theories”, Communications in Algebra, 9(15):1559-1566, 1981.
- [5] Albrecht Dold, “Lectures on algebraic topology”, Berlin-Heidelberg, New York, Springer, 1972.
- [6] D. B. A. Epstein and R. Penner, “Euclidean decomposition of non-compact hyperbolic manifolds”. J. Diff. Geom., 27:67-80, 1988.
- [7] Francisco González Acuña and José María Montesinos-Amilibia, “On the character variety of group representations in  $SL(2, \mathbb{C})$  and  $PSL(2, \mathbb{C})$ ”, Mathematische Zeitschrift, Vol.214, No.1, 627-652, Springer-Verlag, 1993.
- [8] Gareth A. Jones and David Singerman, “Complex Functions”, Cambridge University Press 1987.
- [9] Glen E. Breda, “Topology and Geometry”, Graduate Texts in Mathematics 139, Springer-Verlag, 1991.
- [10] José Luis Cisneros Molina y John D. S. Jones, “The Bloch invariant as a characteristic class in  $B(SL_2(\mathbb{C}), \mathfrak{T})$ ”, Homology, Homotopy and Applications, vol.5(1), 2003, pp.325-344.
- [11] John G. Ratcliffe, “Foundations of Hyperbolic Manifolds”, Graduate Texts in Mathematics 149, Springer-Verlag, 1994.
- [12] L. Ahlfors, “Möbius Transformations in Several Dimensions”, Lectures at the University of Minnesota, 1981.

- [13] M. A. Armstrong, “Basic Topology”, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1983.
- [14] Manfredo Perdigao do Carmo, “Riemannian Geometry”, Translated by Francis Flaherty, ISBN 0-8176-3490-8
- [15] Marc Culler and Peter B. Shalen, “Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds”, *Annals of Mathematics*, 117(109-146), 1983.
- [16] Tammo tom Dieck, “Transformation Groups”, de Gruyter Studies in Mathematics 8, 1987.
- [17] Tammo tom Dieck, “Transformation Groups and Representation Theory”, *Lecture Notes in Mathematics* 766, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1979.
- [18] Walter D. Neumann and Jung Yang, “Bloch invariants of hyperbolic 3-manifolds”. *Duke Math. J.*, 96(1):29-59, 1999.
- [19] William P. Thurston, “Three-Dimensional Geometry and Topology”, Volumen 1, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1997.
- [20] Wolfgang Lück , “Survey on Classifying Spaces for Families of Subgroups”, *Mathematics Subject Classification* (2000). 55R35, 57S99, 20F65, 18G99.