



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONFIGURACIONES AFINES Y
PROYECTIVAS;
UN EJEMPLO DE SU RELACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
JORGE AVELLA MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:
JAVIER BRACHO CARPIZO



2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Para Sol

Quiero agradecer a mí familia por su apoyo y cariño. A mis amigos porque están conmigo siempre. Desde luego a mis profesores por la generosidad con que me regalaron su saber; de los cuales me permitiré mencionar a Roli, por ayudarme con gran paciencia a crear esta tesis. Y a Dino, Natalia, Ana Irene y Vero por ayudarme a enmendar cientos de errores. Gracias.

Un punto es lo que no tiene partes.

EUCLIDES

Índice general

Introducción	7
Capítulo 1. Preliminares	9
1.1. Espacios afines	9
1.2. Espacios proyectivos	12
1.3. Los encajes de \mathbb{A}^n en \mathbb{P}^n .	19
Capítulo 2. Espacios de configuraciones	22
2.1. Espacios de configuraciones afines de puntos: \mathbb{A}_k^d	22
2.2. \mathbb{A}_4^1	25
2.3. Espacios de configuraciones proyectivas de puntos: \mathbb{P}_k^d	29
2.4. \mathbb{P}_4^1	30
Capítulo 3. $F : \mathbb{A}_4^1 \rightarrow \mathbb{P}_4^1$	33
3.1. Los puntos que no saben a dónde ir.	34
3.2. Definiendo $F : \mathbb{A}_4^1 \rightarrow \mathbb{P}_4^1$	34
3.3. El comportamiento de F .	35
Bibliografía	45

Introducción

Los resultados de la presente tesis giran en torno a los espacios de configuraciones de puntos. Un espacio de configuraciones de puntos es un espacio topológico cociente de un producto cartesiano de espacios afines, o de espacios proyectivos, construidos de manera que reflejen dos características: la noción intuitiva de cercanía entre conjuntos de puntos coloreados en el espacio afín o proyectivo, y la equivalencia entre conjuntos bajo el grupo de las transformaciones afines o proyectivas, respectivamente.

Como antecedente directo de esta tesis, está el estudio de las relaciones entre las configuraciones de puntos y la transversalidad en conjuntos coloreados en el cual se tiene el mismo enfoque acerca de los espacios de configuraciones que el artículo de Gelfand et al.¹

Aunque existen varios resultados sobre la topología de los espacios de configuraciones, en la mayoría de los casos no se tiene una descripción de su geometría. Es en este contexto que surge la idea de estudiar una relación relativamente natural entre los espacios de configuraciones afines y proyectivos, con el fin de ampliar la gama de resultados sobre estos espacios, y aclarar su geometría.

Es hecho conocido que en un espacio proyectivo se pueden construir modelos del espacio afín de su misma dimensión. Para ello, sólo se requiere escoger un hiperplano y las transformaciones proyectivas que lo fijen. A dicho hiperplano seleccionado se acostumbra llamarlo hiperplano al infinito, ya que desde el punto de vista de la geometría afín estos puntos son distinguidos y no pueden ser transformados en más que en puntos del hiperplano al infinito. Es decir, se puede pensar que cualquier conjunto en el espacio afín tiene un conjunto geoméricamente equivalente en el espacio proyectivo, que no contiene puntos del hiperplano al infinito, aunque en el espacio proyectivo los puntos que eran considerados infinitos no se distinguieran de cualquier otro. En el caso de tener un conjunto de puntos coloreados la situación es análoga; es decir, a cada conjunto de puntos coloreados en el espacio afín se le puede asociar de manera natural un conjunto de puntos coloreados de la misma cardinalidad en el espacio proyectivo. Esta relación básica entre la geometría afín y la proyectiva permite definir una función entre un espacio de configuraciones afines y un espacio de configuraciones proyectivas.

El objetivo de esta tesis es definir y estudiar un ejemplo de dicha función: la inducida por una inclusión de la recta afín en la recta proyectiva. Los espacios de configuraciones en los cuales estará definida la función serán: el espacio de configuraciones de cuatro puntos ordenados en la recta afín y el espacio de configuraciones de cuatro puntos ordenados en la recta proyectiva. De estos dos espacios de configuraciones se conoce bien su geometría y, por lo tanto, el análisis de dicha función es más sencillo.

El programa a seguir para esta tesis es el siguiente:

¹Ver Gelfand et al [5]

En el primer capítulo abordamos los preliminares. A lo largo de este texto asumiremos que se tiene un conocimiento general de álgebra lineal y topología, así como de geometría en el espacio euclidiano multidimensional; a partir de ello daremos definiciones y resultados básicos de geometría afín y proyectiva que serán relevantes para el desarrollo del texto.

El segundo capítulo contiene la definición de los espacios de configuraciones de puntos proyectivos y afines. Además se da la descripción geométrica de los espacios de configuraciones de cuatro puntos coloreados en la recta afín y proyectiva, ya que éstos serán los espacios que utilizaremos en el último capítulo de este trabajo.

Por último, en el tercer capítulo desarrollamos la construcción de una función entre los espacios descritos geoméricamente en el capítulo dos y describiremos su comportamiento, el cual está relacionado con la familia de cónicas que pasan por cuatro puntos en el plano proyectivo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios afines

Comenzaremos dando una serie de definiciones y resultados sobre espacios afines que, desde el punto de vista de esta tesis, son en esencia un espacio real con un grupo especial de transformaciones actuando en él.

NOTACIÓN 1. A lo largo de este texto denotaremos como \mathbb{R}^n al espacio real de dimensión n , consistente en todas las n -adas de números reales. También utilizaremos la notación $GL(n, \mathbb{R})$ para referirnos a los automorfismos lineales de \mathbb{R}^n , o bien a las matrices invertibles de $n \times n$ con entradas reales.

DEFINICIÓN 2. Sea $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ un espacio lineal de dimensión m ; definimos un *subespacio afín de dimensión m* como el conjunto $l := \{x + a \in \mathbb{R}^n : x \in \mathcal{L}, a \in \mathbb{R}^n\}$. Al caso particular de subespacios afines de dimensión 1 le llamamos *rectas*. A los subespacios afines de dimensión $n-1$ les llamamos *hiperplanos*.

DEFINICIÓN 3. Decimos que $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ están en *posición general* si para cualquier subconjunto $\{x_{k_1}, \dots, x_{k_j}\} \subset \{x_1, \dots, x_k\}$ con $j \leq n + 1$, entonces $\{x_{k_2} - x_{k_1}, \dots, x_{k_j} - x_{k_1}\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto linealmente independiente.

Esta definición es simplemente la manera formal de expresar la idea geométrica de que un conjunto de puntos está en posición general: no hay tres puntos en una sola recta, no hay cuatro puntos contenidos en un plano, no hay cinco en un subespacio de dimensión 3, etcétera.

DEFINICIÓN 4. Definimos una *transformación afín* de \mathbb{R}^n como una función de la forma:

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad T(x) := L(x) + b$$

donde $L \in GL(n, \mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

OBSERVACIÓN 5. Cualquier transformación afín es biyectiva.

PROPOSICIÓN 6. *El conjunto de las transformaciones afines de \mathbb{R}^n es un subgrupo del grupo de funciones biyectivas de \mathbb{R}^n .*

DEMOSTRACIÓN. Sea T un transformación afín de la forma $T(x) = L(x) + b$.

- $Id(x) = Id(x) + 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y como $Id \in GL(n, \mathbb{R})$, entonces Id es una transformación afín.

- Sea $T'(x) := M(x) + c$ otra transformación afín, entonces $T'(T(x)) = M(L(x) + b) + c = M \circ L(x) + (M(b) + c)$, es decir $T' \circ T$ es una transformación afín.
- Sea $T^{-1}(x) := L^{-1}(x) - L^{-1}(b)$, entonces T^{-1} es una transformación afín y $T' \circ T = Id$.

□

NOTACIÓN 7. En adelante denotaremos como $Af(n)$ al grupo de transformaciones afines de \mathbb{R}^n .

OBSERVACIÓN 8. Notemos que una transformación afín de $Af(n)$ manda subespacios afines de dimensión k en subespacios afines de dimensión k , ya que todo automorfismo lineal y toda translación preserva subespacios afines.

TEOREMA 9. Sean $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ y $y_1, \dots, y_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ dos conjuntos de $n + 1$ puntos en posición general, entonces existe una única $T \in Af(n)$ tal que $T(x_i) = y_i$ donde $i \in \{1, \dots, n + 1\}$.

DEMOSTRACIÓN. Como los puntos se encuentran en posición general, entonces $\{x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_1\}$ y $\{y_2 - y_1, \dots, y_{n+1} - y_1\}$ son dos conjuntos linealmente independientes en \mathbb{R}^n ; siendo así, podemos encontrar un automorfismo lineal L tal que $L(x_i - x_1) = y_i - y_1$ para $1 < i \leq n + 1$. Ahora consideremos $T \in Af(n)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$ como $T(x) := L(x) + (y_1 - L(x_1))$ entonces para $1 \leq i \leq n + 1$ tenemos:

$$T(x_i) = L(x_i) + (y_1 - L(x_1)) = L(x_i - x_1) + y_1 = (y_i - y_1) + y_1 = y_i$$

Por lo tanto T es la transformación afín buscada.

Para demostrar la unicidad tomemos otra $T' \in Af(n)$ de la forma $T'(x) = M(x) + c$ tal que $T'(x_i) = y_i$ $i \in \{1, \dots, n + 1\}$. Primero notemos que $T'(x) - c = M(x)$; entonces para $1 < i \leq n + 1$ tenemos que:

$$M(x_i - x_1) = M(x_i) - M(x_1) = (T'(x_i) - c) - (T'(x_1) - c) = T'(x_i) - T'(x_1) = y_i - y_1$$

ello que significa que $M(x_i - x_1) = L(y_i - y_1)$ y por lo tanto $M = L$ ya que ambas son transformaciones lineales y los puntos x_i e y_i se encuentran en posición general. Por último $T'(x_i) = y_i = T(x_i)$ entonces:

$$\begin{aligned} T'(x_1) &= T(x_1) \Rightarrow \\ M(x_1) + c &= L(x_1) + (y_1 - L(x_1)) \Rightarrow \\ L(x_1) + c &= L(x_1) + (y_1 - L(x_1)) \Rightarrow \\ c &= y_1 - L(x_1) \end{aligned}$$

Y por lo tanto $T = T'$.

□

Finalmente, veremos una manera de expresar el grupo de transformaciones afines como matrices de números reales. Primero definamos al conjunto:

$$\mathbb{A}^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 1\}$$

Notemos que este conjunto, con las operaciones $(x_1, \dots, x_n, 1) + (y_1, \dots, y_n, 1) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, 1)$ y $\lambda(x_1, \dots, x_n, 1) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, 1)$, es isomorfo a \mathbb{R}^n . Ahora podemos definir una función del grupo afín a las matrices invertibles de $n + 1 \times n + 1$:

$$Af(n) \longrightarrow GL(n + 1, \mathbb{R})$$

$$T(x) = M(x) + b \longmapsto \begin{pmatrix} M & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donde } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

No es difícil ver que esta función es un monomorfismo, por lo cual:

$$Af(n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n + 1, \mathbb{R}) \right\}$$

Más aún, estas matrices fijan a \mathbb{A}^n y:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = (T(x_1, \dots, x_n), 1)$$

Resumiendo, tenemos el conjunto \mathbb{R}^n y el grupo de transformaciones $Af(n)$ de que actúa en él, a los cuales podemos identificar respectivamente con $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y un subgrupo de $GL(n + 1, \mathbb{R})$ que, abusando de la notación, también denotaremos como $Af(n)$ pues son equivalentes para fines geométricos. Así, a partir de ahora no haremos distinción entre ellos, usando \mathbb{A}^n o \mathbb{R}^n con su respectivo grupo de transformaciones según nos convenga; y los denotaremos indistintamente como \mathbb{A}^n , llamándole en adelante *espacio afín de dimensión n*, y a su grupo de transformaciones $Af(n)$.

1.2. Espacios proyectivos

En esta sección daremos las definiciones y resultados básicos sobre los espacios proyectivos que consideraremos, de manera análoga a los espacios afines, como un conjunto y un grupo de transformaciones. Comencemos con la definición de espacios proyectivos reales.

DEFINICIÓN 10. Definimos a \mathbb{P}^n el *espacio proyectivo real de dimensión n* como:

$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

donde $x \sim y$ si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

NOTA 11. En adelante omitiremos el adjetivo “real” real en el nombre de los espacios proyectivos reales. También denotaremos como $[x]$ a la clase de equivalencia de \mathbb{P}^n a la que pertenece $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, y le denominaremos simplemente *punto proyectivo*. Además llamaremos *recta proyectiva* y *plano proyectivo* a \mathbb{P}^1 y \mathbb{P}^2 respectivamente.

Como siguiente paso natural, introduciremos un sistema de coordenadas adecuado para manejar los espacios proyectivos.

DEFINICIÓN 12. Tomemos una base β de \mathbb{R}^{n+1} y $[x] \in \mathbb{P}^n$. Sea $x = (x_1, \dots, x_{n+1})_\beta$ la expresión de $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ en la base β . Definimos la expresión en *coordenadas homogéneas* de $[x]$ en la base β como $[x] := [x_1 : \dots : x_{n+1}]_\beta$.

Notemos que un punto de \mathbb{P}^n tiene tantas coordenadas homogéneas como representantes; sin embargo este problema no es grave ya que, si tenemos dos puntos x, y en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ que están en la misma clase de equivalencia entonces $[x] = [y]$ y por definición $[x_1 : \dots : x_{n+1}]_\beta = [y_1 : \dots : y_{n+1}]_\beta$; pero esto ocurre si y sólo si $x_i = \lambda y_i$ para $i = 1, \dots, n+1$ y algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

NOTA 13. En adelante sólo escribiremos explícitamente la base de las coordenadas homogéneas cuando sea relevante qué base estemos usando.

Antes de continuar será útil observar que en un espacio proyectivo \mathbb{P}^n podemos tomar de cada clase únicamente los representantes de norma uno; el resultado serán todos los puntos de la esfera \mathbb{S}^n pero identificados por antípodas. Esta forma de ver un espacio proyectivo será la que utilizaremos para representar algunas de las figuras de objetos en \mathbb{P}^1 y \mathbb{P}^2 a lo largo de este trabajo; la otra forma que usaremos para representar a \mathbb{P}^2 será considerarlo como \mathbb{R}^2 unido a una recta “al infinito”, esta forma de verlo es justificada por los resultados que se verán en la Sección 1.3. Retomando la idea de representar los espacios proyectivos por medio de una esfera, observemos que al identificar las antípodas de \mathbb{S}^1 volvemos a obtener a \mathbb{S}^1 y eso implica que topológicamente $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^1$.

DEFINICIÓN 14. Sea $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un espacio lineal de dimensión $m+1$; definimos un *subespacio proyectivo de dimensión m* como el conjunto $l := \{[x] \in \mathbb{P}^n : x \in \mathcal{L} \setminus \{0\}\}$. Al caso particular de subespacios proyectivos de dimensión 1 le llamamos *rectas proyectivas*. A los subespacios proyectivos de dimensión $n-1$ les llamamos *hiperplanos proyectivos*.

DEFINICIÓN 15. $[x_1], \dots, [x_k] \in \mathbb{P}^n$ están en *posición general* si cualquier subconjunto de sus representantes $\{x_{k_1}, \dots, x_{k_j}\} \subset \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $j \leq n+1$ es un conjunto linealmente independiente.

No es difícil ver que la definición anterior no depende de los representantes.

TEOREMA 16. Sean $[x_1], \dots, [x_{n+2}] \in \mathbb{P}^n$ una colección de puntos en posición general, entonces existe una base $\beta \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en la cual $[x_i] = [0_1 : \dots : 0_{i-1} : 1_i : 0_{i+1} : \dots : 0_{n+1}]_\beta$ cuando $i < n+2$, y $[x_{n+2}] = [1_1 : 1_2 : \dots : 1_{n+1}]_\beta$.

DEMOSTRACIÓN. Como los puntos están en posición general entonces $\beta' = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ es una base para \mathbb{R}^{n+1} tal que $x_i = (0_1, \dots, 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, \dots, 0_{n+1})_{\beta'}$ cuando $i < n+2$; además $x_{n+2} = r_1 x_1 + \dots + r_{n+1} x_{n+1}$ para algunos $r_i \in \mathbb{R}$ distintos de cero. Ahora consideremos el conjunto $\beta = \{r_1 x_1, \dots, r_{n+1} x_{n+1}\}$. Este conjunto es base ya que β' lo es, además $r_i x_i = (0_1, \dots, 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, \dots, 0_{n+1})_\beta$ cuando $i < n+2$ y $x_{n+2} = (1_1, 1_2, \dots, 1_{n+1})_\beta$. Por lo tanto β es una base con la forma deseada. \square

DEFINICIÓN 17. Definimos al *grupo de transformaciones proyectivas de \mathbb{P}^n* como el conjunto cociente $PGL(n+1, \mathbb{R}) := GL(n+1, \mathbb{R})/\sim$, en donde $L \sim M$ si y sólo si $L = \lambda M$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A un elemento de $PGL(n+1, \mathbb{R})$ le llamaremos *transformación proyectiva* y lo denotaremos como $[L]$ donde L es un representante de la clase de equivalencia.

Todo automorfismo lineal puede representarse en forma de matriz con respecto a una base, por lo tanto toda transformación proyectiva tiene una representación en forma de matriz. Así, dos matrices representarán la misma transformación proyectiva si y sólo si una es un múltiplo escalar no cero de la otra.

Una transformación proyectiva $[L] \in PGL(n+1, \mathbb{R})$ define una función en $[L] : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ de la siguiente forma: $[L][x] := [L(x)]$. Esta definición no depende del representante de los puntos; si $x, y \in [x]$ son dos representantes distintos de la clase, entonces $x = \lambda y$ para algún número real λ distinto de cero. Por lo tanto, $[L][x] = [L(x)] = [L(\lambda y)] = [\lambda L(y)] = [L(y)]$. Tampoco depende del representante de la función ya que si $L, M \in [M]$ entonces $L = \lambda' M$ para algún número real λ' no cero; por lo tanto, $[L][x] = [L(x)] = [(\lambda' M)(x)] = [\lambda'(M(x))] = [M(x)] = [M][x]$.

OBSERVACIÓN 18. Las transformaciones proyectivas son funciones biyectivas y su inversa es un elemento de $PGL(n+1, \mathbb{R})$. Una transformación proyectiva manda cualquier subespacio proyectivo de dimensión k a un subespacio proyectivo de esa misma dimensión, ya que todo automorfismo lineal preserva los subespacios lineales de cualquier dimensión.

TEOREMA 19. Sean $[x_1], \dots, [x_{n+2}] \in \mathbb{P}^n$ y $[y_1], \dots, [y_{n+2}] \in \mathbb{P}^n$ dos conjuntos de $n+2$ puntos en posición general, entonces existe un único automorfismo lineal $[L] \in PGL(n+1, \mathbb{R})$ tal que $[L][x_i] = [y_i]$ $i \in \{1, \dots, n+2\}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 16 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $[x_i] = [0_1 : \dots : 0_{i-1} : 1_i : 0_{i+1} : \dots : 0_{n+1}]$ cuando $i < n + 2$, y $[x_{n+2}] = [1_1 : 1_2 : \dots : 1_{n+1}]$. Consideremos a L' como la matriz que tiene por columnas los vectores y_i y notemos que esta matriz define una transformación proyectiva tal que

$$[L'] [x_i] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n+11} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{n+12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n+1} & y_{2n+1} & \cdots & y_{n+1n+1} \end{bmatrix} [x_i] = [y_i]$$

para $i < n + 2$. De la definición de posición general deducimos que los vectores columnas y_i que componen la matriz son linealmente independientes, y por lo tanto $[L']$ está en $PGL(n + 1, \mathbb{R})$. Como son linealmente independientes existen $r_i \in \mathbb{R}$ no cero tales que $r_1 y_1 + \dots + r_{n+1} y_{n+1} = y_{n+2}$. Ahora, podemos considerar una nueva matriz L con vectores columnas $r_i y_i$, entonces $[L] \in PGL(n + 1, \mathbb{R})$ y

$$[L] [x_{n+2}] = \begin{bmatrix} r_1 y_{11} & r_2 y_{21} & \cdots & r_{n+1} y_{n+11} \\ r_1 y_{12} & r_2 y_{22} & \cdots & r_{n+1} y_{n+12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 y_{1n+1} & r_2 y_{2n+1} & \cdots & r_{n+1} y_{n+1n+1} \end{bmatrix} [x_{n+2}] = [y_{n+2}].$$

Además, para $i < n + 2$,

$$\begin{bmatrix} r_1 y_{11} & r_2 y_{21} & \cdots & r_{n+1} y_{n+11} \\ r_1 y_{12} & r_2 y_{22} & \cdots & r_{n+1} y_{n+12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 y_{1n+1} & r_2 y_{2n+1} & \cdots & r_{n+1} y_{n+1n+1} \end{bmatrix} [x_i] = [r_i y_i] = [y_i].$$

Entonces $[L]$ es la transformación proyectiva que buscamos.

La unicidad la obtenemos de que una otra transformación proyectiva $[L']$ de matriz representante L' con entradas l'_{kl} , tal que $[L'] [x_i] = [y_i]$ cuando $i < n + 2$, hace que necesariamente se cumplan las igualdades $[l'_{1i} : l'_{2i} : \dots : l'_{n+1i}] = [y_i]$, y por lo tanto $(l'_{1i}, l'_{2i} : \dots : l'_{n+1i}) = s_i y_i$ para algunos $s_i \in \mathbb{R}$ distintos de cero. Pero además, como $[L'] [x_{n+2}] = [y_{n+2}]$, tenemos que $[L'] [x_{n+2}] = [s_1 y_1 + \dots + s_{n+1} y_{n+1}] = [y_{n+2}]$. Entonces $t(s_1 y_1 + \dots + s_{n+1} y_{n+1}) = y_{n+2}$ con $t \in \mathbb{R}$ no cero, es decir $ts_1 y_1 + \dots + ts_{n+1} y_{n+1} = y_{n+2}$. Pero los vectores y_i son una base, por lo tanto $ts_i = r_i$ y entonces $tL' = L$ es decir $[L'] = [L]$. \square

1.2.1. Cónicas en \mathbb{P}^2 . El estudio de las propiedades de las cónicas proyectivas es bastante amplio; sin embargo, para el resto de la tesis nos interesarán sólo unos cuantos resultados. Así que daremos un breve resumen de las propiedades destacadas para los fines de este trabajo, en algunos casos sin demostración.

DEFINICIÓN 20. Llamamos *cónica proyectiva* al lugar geométrico definido por:

$$\mathfrak{C} := \left\{ [x : y : z]_{\beta} \in \mathbb{P}^2 : Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0 \right\}$$

donde no todos los coeficientes son cero.

Notemos que el conjunto anterior está bien definido ya que la condición en la definición de cónica no depende del representante de $[x : y : z]_\beta \in \mathbb{P}^2$, pues si una terna x, y, z satisface la ecuación, al ser ésta homogénea de grado 2, cualquier múltiplo $\lambda x, \lambda y, \lambda z$ también la satisface. Además, una cónica proyectiva no tiene una única ecuación asociada, todos los múltiplos escalares no cero de su ecuación definen a la misma cónica. Más aún, al escoger una base diferente para las coordenadas, la ecuación de la cónica varía, pero siempre en una ecuación homogénea de grado dos y por lo tanto también define una cónica.¹

En adelante nos referiremos a una cónica simplemente por la ecuación que la define, sobrentendiendo que nos referimos a un subconjunto de \mathbb{P}^2 .

TEOREMA 21. *Sean cinco puntos distintos en \mathbb{P}^2 con al menos cuatro de ellos en posición general, entonces existe una única cónica que pasa por ellos.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 16 podemos suponer que los cuatro puntos en posición general tienen coordenadas $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ y $[1 : 1 : 1]$. Sea $[\alpha : \beta : \gamma]$ el punto restante, entonces los cinco puntos se encuentran en una única cónica si podemos encontrar coeficientes para una ecuación de una cónica $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$, que se anule en los cinco puntos que tenemos; es decir, si existen $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ no todos cero tales que

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 0 \\ C &= 0 \\ A + B + C + D + E + F &= 0 \\ A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\alpha\beta + E\alpha\gamma + F\beta\gamma &= 0; \end{aligned}$$

simplificando tenemos

$$\begin{aligned} D + E + F &= 0 \\ D\alpha\beta + E\alpha\gamma + F\beta\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema claramente tiene soluciones no triviales, por lo cual existe al menos una cónica que pasa por los puntos. Para que la cónica sea única necesitamos que todas las soluciones sean un múltiplo escalar de una solución particular diferente de cero. Esto ocurre si y sólo si la matriz

$$(1.2.1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha\beta & \alpha\gamma & \beta\gamma \end{pmatrix}$$

tiene rango 2.

Para demostrar esto, bastará con ver que los dos renglones de esta matriz son linealmente independientes. Primero, el segundo renglón no puede ser cero ya que esto implicaría que al menos dos de las coordenadas de $[\alpha : \beta : \gamma]$ serían cero, por lo que sería igual a alguno de los otros cuatro puntos restantes, contradiciendo las hipótesis. Ahora

¹Ver Bracho [2]

supongamos que los dos renglones son linealmente dependientes, como $(\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma)$ no es cero; entonces $\lambda(1, 1, 1) = (\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ distinto de cero, por lo tanto:

$$\lambda = \alpha\beta, \lambda = \alpha\gamma \text{ y } \lambda = \beta\gamma \Rightarrow \alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma$$

Como al menos dos de los números α, β, γ son diferentes de cero, entonces

$$\alpha = \beta = \gamma \neq 0$$

Pero esto significaría que $[\alpha : \beta : \gamma] = [1 : 1 : 1]$ contradiciendo la hipótesis de que los cinco puntos son diferentes. Por lo tanto la matriz 1.2.1 tiene rango 2. \square

DEFINICIÓN 22. Sean dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{P}^n$, decimos que son *proyectivamente equivalentes* si existe $f \in PGL(n+1, \mathbb{R})$ tal que $f(A) = B$.

Con base en esta definición, se pueden identificar los conjuntos proyectivamente equivalente a una cónica cualquiera.

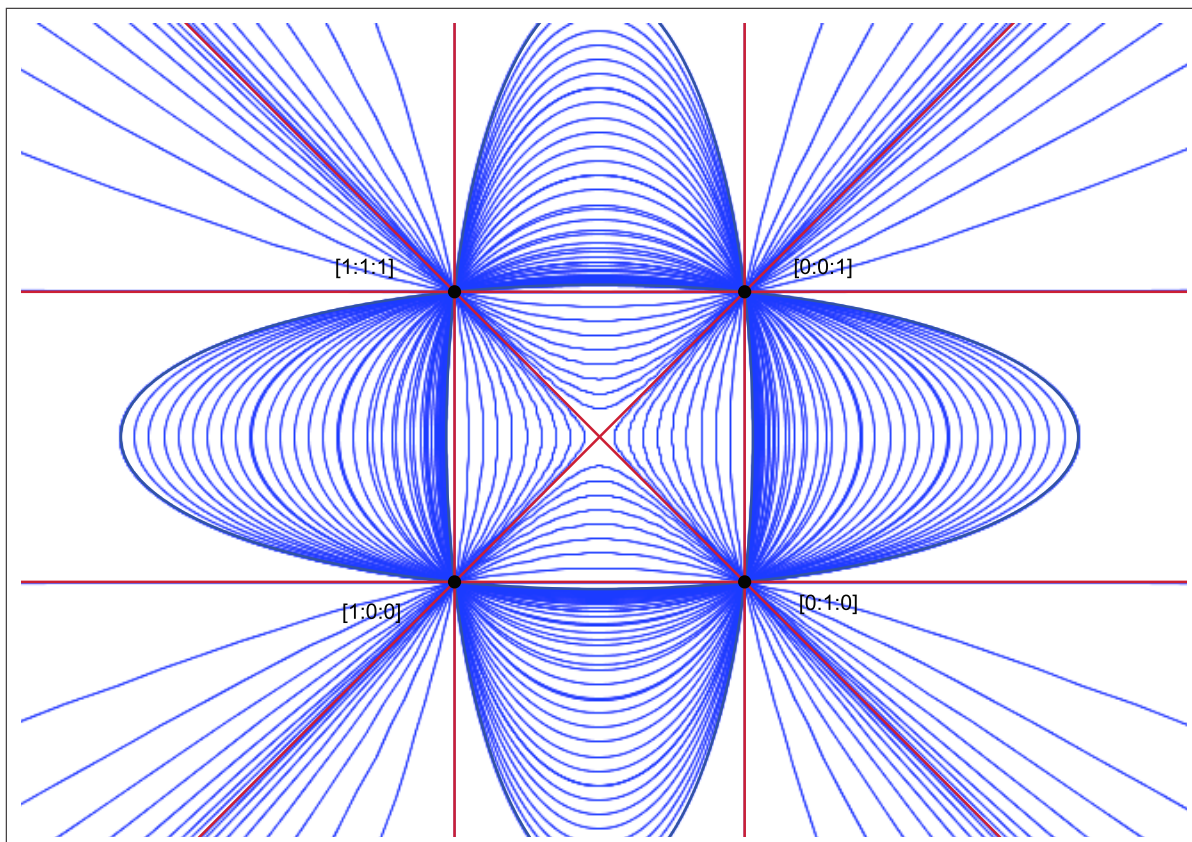
Las cónicas son proyectivamente invariantes; es decir la imagen de una cónica bajo una transformación proyectiva es también una cónica. Aunque la ecuación de la cónica resultante varía, es posible determinarla por medio de la transformación proyectiva aplicada y la ecuación de la cónica original. De hecho, basándose en ello, se puede hacer una clasificación proyectiva de cónicas resultando cuatro tipos proyectivamente diferentes, si excluimos al conjunto vacío.²

Cónica	Ecuación canónica	Puntos en posición general
No singular	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	Puede tener más de cuatro
Par de rectas	$x^2 - y^2 = 0$	Máximo cuatro
Recta doble	$x^2 = 0$	Máximo dos
Punto	$x^2 + y^2 = 0$	Máximo uno

Si tomamos cuatro puntos fijos $a, b, c, d \in \mathbb{P}^2$ en posición general, el Teorema 21 nos garantiza que al seleccionar cualquier punto diferente $\chi \in \mathbb{P}^2$ tendremos una única cónica \mathfrak{C}_χ tal que $a, b, c, d, \chi \in \mathfrak{C}_\chi$. Por otra parte, la unicidad de esta cónica nos garantiza que al escoger cualquier otro $\chi' \in \mathbb{P}^2$ distinto a nuestros cuatro puntos fijos, la nueva cónica $\mathfrak{C}_{\chi'}$ es tal que $\mathfrak{C}_{\chi'} = \mathfrak{C}_\chi$ ó $\mathfrak{C}_{\chi'} \cap \mathfrak{C}_\chi = \{a, b, c, d\}$. Esto significa que esta familia de cónicas nos da una partición de $\mathbb{P}^2 \setminus \{a, b, c, d\}$, la cual ilustramos en la Figura 1.2.1.

Esta familia de cónicas consta de conicas no singulares y tres pares de rectas asociadas a las ecuaciones $xy - xz = 0$, $xy - yz = 0$ y $xz - yz = 0$ que son las conicas singulares de la familia.

²Ver Rees [9]

FIGURA 1.2.1. Cónicas por cuatro puntos en \mathbb{P}^2

1.2.2. La razón cruzada. La razón cruzada es uno de los temas centrales del estudio clásico de la geometría proyectiva; en la presente sección daremos un resumen de algunos resultados básicos en la mayoría de los casos sin demostración, que nos permitirá definir la razón cruzada en el caso de haces de rectas en \mathbb{P}^2 .

DEFINICIÓN 23. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1$ distintos y sea $\varphi \in PGL(2, \mathbb{R})$ tal que $\varphi(a) = [1 : 0]$, $\varphi(b) = [0 : 1]$ y $\varphi(c) = [1 : 1]$.³ Definimos a la *razón cruzada de a, b, c y d* como $\varphi(d) \in \mathbb{P}^1$; a la cual denotaremos como $(a, b; c, d)$.

OBSERVACIÓN 24. Notemos que en la definición anterior $(a, b; c, d)$ depende del orden de los puntos $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1$, aunque algunas permutaciones de ellos no alteran la razón cruzada.⁴

Si tomamos las coordenadas homogéneas de cuatro puntos distintos $a = [a_1 : a_2]$, $b = [b_1 : b_2]$, $c = [c_1 : c_2]$ y $d = [d_1 : d_2]$ tendríamos que la expresión de la transformación proyectiva φ de la Definición 23 será

$$\varphi = \begin{bmatrix} b_2(a_2c_1 - a_1c_2) & -b_1(a_2c_1 - a_1c_2) \\ a_2(b_2c_1 - b_1c_2) & -a_1(b_2c_1 - b_1c_2) \end{bmatrix}.$$

³La existencia y unicidad de φ esta garantizada por el Teorema 19

⁴Ver Efimov [3]

Por lo tanto, tenemos que

$$\varphi([d_1 : d_2]) = [(b_2d_1 - b_1d_2)(a_2c_1 - a_1c_2) : (a_2d_1 - a_1d_2)(b_2c_1 - b_1c_2)].$$

Si deshomogenizamos las coordenadas de este punto, obtenemos

$$\frac{(b_2d_1 - b_1d_2)(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2d_1 - a_1d_2)(b_2c_1 - b_1c_2)},$$

el cual es un número en los reales extendidos⁵ que corresponde a una definición más usual de la razón cruzada.⁶ En adelante usaremos indistintamente la razón cruzada definida como un punto de la recta proyectiva o como número real extendido, y podemos pasar de una expresión a otra por medio de la siguiente biyección:

$$\begin{aligned} [a : b] &\longmapsto \frac{a}{b} \text{ si } b \text{ es distinto de } 0 \\ [a : 0] &\longmapsto \infty \end{aligned}$$

Notemos que de la definición de razón cruzada y del Teorema 19 se deduce que para dos cuartetos de puntos diferentes a, b, c, d y a', b', c', d' en \mathbb{P}^1 , existe una transformación proyectiva ϕ tal que $\phi(a) = a'$, $\phi(b) = b'$, $\phi(c) = c'$ y $\phi(d) = d'$ si y sólo si $(a, b; c, d) = (a', b'; c', d')$.

Aunque dimos la definición de razón cruzada para \mathbb{P}^1 , se extiende de manera natural a cuartetos de puntos alineados en cualquier espacio proyectivo: cualquier recta proyectiva en \mathbb{P}^n está determinada por un subespacio lineal de dimensión 2 en \mathbb{R}^{n+1} ; por lo tanto, existe un sistema de coordenadas, determinado por una base de dos elementos, para ese subespacio, consistente en pares de números reales el cual, al homogenizarlo, da un sistema de coordenadas homogéneas para dicha recta proyectiva.

DEFINICIÓN 25. Decimos que un conjunto de rectas $\{l_i \subset \mathbb{P}^2 : i = 1, 2, \dots, n\}$ es un *haz de n rectas* si existe $p \in \mathbb{P}^2$ tal que $l_i \cap l_j = \{p\}$ para todo $i \neq j$, y llamamos *vértice del haz* al punto p .

Ahora enunciaremos, sin demostración, los resultados de la razón cruzada que nos permiten extender la definición a haces de cuatro rectas en el plano proyectivo.

TEOREMA 26. Sean $\{l_i \subset \mathbb{P}^2 : i = 1, 2, 3, 4\}$ un haz de cuatro rectas del plano proyectivo y $m, n \subset \mathbb{P}^2$ dos rectas distintas que no pertenecen al haz. Si consideramos los puntos de intersección $x_i \in l_i \cap m$ y $x'_i \in l_i \cap n$ de las rectas del haz con las respectivas rectas m y n , entonces $(x_1, x_2; x_3, x_4) = (x'_1, x'_2; x'_3, x'_4)$.

⁵Consideramos los números reales extendidos como $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, donde las operaciones que involucran o dan como resultado ∞ se definen por medio de un límite.

⁶Ver Rees [9]

Este teorema, cuya demostración se obtiene al proyectar a m en n desde p , implica la definición de razón cruzada para un haz de cuatro rectas.⁷

DEFINICIÓN 27. Sea $\{l_i \subset \mathbb{P}^2 : i = 1, 2, 3, 4\}$ un haz de cuatro rectas en \mathbb{P}^2 y sean $x_i \in l_i \cap m$ los puntos de intersección con una recta cualquiera $m \subset \mathbb{P}^2$ que no pertenezca al haz. Definimos la *razón cruzada del haz de cuatro rectas* como $(x_1, x_2; x_3, x_4)$ y la denotamos como $(l_1, l_2; l_3, l_4)$.

El siguiente teorema nos indica que la razón cruzada de un haz de cuatro rectas es un invariante proyectivo.

TEOREMA 28. Sea $\{l_i \subset \mathbb{P}^2 : i = 1, 2, \dots, 4\}$ un haz de cuatro rectas en \mathbb{P}^2 y $\varphi \in PGL(3, \mathbb{R})$, entonces $(l_1, l_2; l_3, l_4) = (\varphi(l_1), \varphi(l_2); \varphi(l_3), \varphi(l_4))$.⁸

1.3. Los encajes de \mathbb{A}^n en \mathbb{P}^n .

Una vez que hemos presentado el grupo de transformaciones afín y el grupo proyectivo por medio de matrices, podemos analizar una relación importante entre el espacio proyectivo y el espacio afín.

Tomemos un hiperplano proyectivo l (de dimensión $n - 1$) en \mathbb{P}^n . Podemos encontrar una base de \mathbb{R}^{n+1} tal que la expresión en coordenadas homogéneas de este hiperplano sea $l = \{[x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n : x_{n+1} = 0\}$.⁹ Entonces, existe un homeomorfismo de \mathbb{A}^n en $\mathbb{P}^n \setminus l$ dado por la función

$$(1.3.1) \quad i(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow [x_1 : x_2 : \dots : x_n : 1]$$

No es difícil ver que esta función es un encaje. Notemos además que, en principio, esta función depende del hiperplano l y de la base escogida para nuestro sistema de coordenadas. Pero esto no es un inconveniente para el estudio de las propiedades geométricas de \mathbb{P}^n ya que cualquier función de este tipo, se puede convertir en otra similar por medio de una transformación proyectiva.

LEMA 29. *Todos los encajes de \mathbb{A}^n en \mathbb{P}^n de finidos como en 1.3.1 son proyectivamente equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean dos encajes $i_l, i_m : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ determinados por los respectivos hiperplanos $l, m \subset \mathbb{P}^n$ y sean α, β un par de bases adecuadas $\alpha = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ y $\beta = \{b_1, \dots, b_{n+1}\}$ de \mathbb{R}^{n+1} , que permitan definirlos como en 1.3.1. Ahora, existe un único automorfismo lineal L tal que $L(a_i) = b_i$. Sabemos que L es invertible y, por lo tanto,

⁷Para una demostración del teorema ver Efimov [3]

⁸Para una demostración ver ibídem [3]

⁹Por ejemplo podemos tomar $n + 1$ puntos en posición general, de los cuales sólo n estén contenidos en l y encontrar una base de \mathbb{R}^{n+1} tal que las coordenadas de estos puntos sean $[1 : 0 : \dots : 0]$, $[0 : 1 : \dots : 0], \dots, [0 : 0 : \dots : 1 : 0]$ para los que se encuentren en l y $[0 : 0 : \dots : 1]$ para el restante.

está en $GL(n+1, \mathbb{R})$; entonces, L es el representante de una matriz $[L] \in PGL(n+1, \mathbb{R})$. Ahora sea $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$. Entonces

$$\begin{aligned} [L] \circ i_l(x_1, x_2, \dots, x_n) &= [L] [x_1 : x_2 : \dots : x_n : 1]_\alpha = [L(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)_\alpha] \\ &= [x_1 L(a_1) +, \dots, + x_n L(a_n) + L(a_{n+1})] \\ &= [x_1 b_1 +, \dots, + x_n b_n + b_{n+1}] \\ &= [x_1 : x_2 : \dots : x_n : 1]_\beta = i_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

El lema anterior implica que, para fines del plano proyectivo y su geometría, todos los encajes definidos de esta forma son esencialmente el mismo; por lo tanto, de ahora en adelante nos referiremos a ellos como un encaje canónico de \mathbb{A}^n en \mathbb{P}^n y no haremos distinción del hiperplano y la base que lo definen a menos que sea necesario.

Los encajes canónicos del espacio afín en el proyectivo son relevantes para el estudio de las relaciones entre estos dos espacios, y se usan, entre otras cosas, para demostrar teoremas geométricos del espacio afín con herramientas del espacio proyectivo. Esto es posible gracias a que la relación establecida por un encaje canónico induce un monomorfismo del grupo de transformaciones afines en el proyectivo. De hecho esto es un poco más general, no necesitamos explícitamente el encaje sino únicamente del subespacio l que lo define.

TEOREMA 30. *Sea $l \subset \mathbb{P}^n$ un hiperplano y G el conjunto de todas las transformaciones proyectivas que fijan a l , entonces G es isomorfo a $Af(n, \mathbb{R})$.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una base $\alpha = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ adecuada para que $l = \{[x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n : x_{n+1} = 0\}$, sin pérdida de generalidad supongamos que las coordenadas homogéneas de $[a_i] = [0_1 : 0_2 : \dots : 0_{i-1} : 1_i : 0_{i+1} : \dots : 0_{n+1}]$. Sea $[M] \in PGL(n+1, \mathbb{R})$ tal que $[M][x] \in l$ si y solo si $[x] \in l$. Ahora, como $[M][a_i] = [m_{1i} : m_{2i} : \dots : m_{n+1i}]$, que es la i -ésima columna de la matriz M , entonces $[m_{1i} : m_{2i} : \dots : m_{n+1i}] \in l$ si $i < n+1$ y $[m_{1n+1} : m_{2n+1} : \dots : m_{n+1n+1}] \notin l$; por lo tanto, $m_{in+1} = 0$ si $i < n+1$ y $m_{n+1n+1} \neq 0$. Esto quiere decir que

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n+1} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n+1n+1} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, es claro que si $[M] \in PGL(n+1, \mathbb{R})$ tiene esta forma, entonces

$$[M][x_1 : x_2 : \dots : x_n : 0] \in l$$

para cualquier punto que este en l . Así, tenemos que

$$G = \left\{ [M] \in PGL(n+1, \mathbb{R}) : [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n+1} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n+1n+1} \end{bmatrix} \right\}$$

Ahora tomemos un representante adecuado para cada elemento de G , que será dividir entre la coordenada m_{n+1n+1} y así obtendremos un conjunto isomorfo deshomogenizado

$$G \cong \left\{ [N] \in GL(n+1, \mathbb{R}) : [N] = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1n+1} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

donde $n_{ij} = m_{ij}/m_{n+1n+1}$. Pero este conjunto es exactamente la representación con matrices del grupo afín, por lo cual $G \cong Af(n, \mathbb{R})$. \square

Para concluir esta sección, introduciremos una notación útil. Dado l , un hiperplano proyectivo en \mathbb{P}^n , podemos definir un encaje canónico i de \mathbb{A}^n en \mathbb{P}^n y a su vez podemos definir un isomorfismo, que denotaremos como \bar{i} , del grupo afín correspondiente en el subgrupo de transformaciones proyectivas que fijan a l , que consiste en deshomogenizar como se vio en el teorema anterior.

Espacios de configuraciones

2.1. Espacios de configuraciones afines de puntos: \mathbb{A}_k^d

El primer tipo de espacios de configuraciones que abordaremos será el de los espacios de configuraciones de puntos en espacios afines. Comencemos con unas definiciones auxiliares.

NOTACIÓN 31. Para un conjunto X denotaremos como X^k al producto cartesiano consistente en todas las k -adas ordenadas de elementos de X .

DEFINICIÓN 32. Dado $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$; definimos su *soporte* como el conjunto $\{x_1, \dots, x_k\} \subset X$ y lo denotamos como $sop(x_1, \dots, x_k)$.

DEFINICIÓN 33. Decimos que un conjunto finito de puntos $\{x_1, \dots, x_i\} \subset \mathbb{A}^n$ *fijan* a \mathbb{A}^n si para toda $f \in Af(n)$ tal que $f(x_k) = x_k$ con $k = 1, \dots, i$ se tiene que $f = Id$.

OBSERVACIÓN 34. Notemos que del Teorema 9 se deduce que un conjunto de puntos en posición general x_1, \dots, x_i fijan a \mathbb{A}^n si y sólo si $i \geq n + 1$.

Ahora introduciremos la noción de espacio de configuración de puntos coloreados en \mathbb{A}^n . En primer lugar necesitamos considerar un conjunto finito de puntos coloreados en \mathbb{A}^n , esto con la intención de diferenciarlos. Así, por ejemplo, podríamos tomar el punto $(0, 0, \dots, 0)$ con color rojo y, para nuestros fines, sería distinto de $(0, 0, \dots, 0)$ amarillo. La manera en la que formalizaremos esto será pensar los colores como subíndices de nuestros puntos. Así, asignaremos un número a cada color; en el ejemplo anterior tendríamos que $(0, 0, \dots, 0)_1 \neq (0, 0, \dots, 0)_2$.

Si fijamos un número k de colores, podemos dar a k puntos coloreados de distinto color, un orden; es decir, si acomodamos los colores siempre en el mismo orden tendremos conjuntos ordenados de k puntos de \mathbb{A}^n . Dicho de otra manera podemos considerar simplemente que k puntos coloreados x_1, x_2, \dots, x_k son un elemento $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in (\mathbb{A}^n)^k$. Así, en adelante, la idea geométrica que manejaremos será la de k puntos coloreados pero formalmente estaremos considerando una k -ada de $(\mathbb{A}^n)^k$.

DEFINICIÓN 35. Definimos *un conjunto de k puntos k -coloreados u ordenados* de \mathbb{A}^n como un elemento $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in (\mathbb{A}^n)^k$; llamamos *colores* a cada uno de los subíndices y los denotaremos (x_1, x_2, \dots, x_k) ó x_1, x_2, \dots, x_k cuando no hagamos énfasis en su orden.

Usaremos la definición de soporte (Definición 32) para poder pasar de un conjunto coloreado de puntos (x_1, x_2, \dots, x_k) , a considerar simplemente esos puntos como un subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, en el cual no diferenciaremos el color ni el orden. Por ejemplo, el soporte de los puntos coloreados $(0, 0, \dots, 0)_1, (0, 0, \dots, 0)_2$ es el conjunto que sólo contiene al punto $(0, 0, \dots, 0)$.

Ahora tenemos una manera formal de tratar a los conjuntos de puntos k -coloreados de \mathbb{A}^n ; pero este espacio, como todas las geometrías, tiene una manera de definir cuando dos conjuntos son indistintos en términos de su geometría. Gracias al grupo de transformaciones $Af(n)$ podemos identificar si dos conjuntos de puntos son equivalentes desde el punto de vista afín simplemente si podemos encontrar un elemento de este grupo que mande un conjunto al otro. Además, en el caso de conjuntos coloreados les pediremos que mantengan la coloración (o el orden, si lo consideramos como un conjunto ordenado).

DEFINICIÓN 36. Dados $(x_1, x_2, \dots, x_k), (y_1, y_2, \dots, y_k) \in (\mathbb{A}^n)^k$, decimos que son *afínmente equivalentes* si existe $f \in Af(n)$ tal que $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)) = (y_1, y_2, \dots, y_k)$.

PROPOSICIÓN 37. La relación definida como $(x_1, x_2, \dots, x_k) \sim (y_1, y_2, \dots, y_k)$ si (x_1, x_2, \dots, x_k) es afínmente equivalente a (y_1, y_2, \dots, y_k) , es de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN. Sean $(x_1, x_2, \dots, x_k), (y_1, y_2, \dots, y_k), (z_1, z_2, \dots, z_k) \in (\mathbb{A}^n)^k$ y $f, g \in Af(n)$.

- Para demostrar la reflexibilidad basta observar que $id_{\mathbb{A}^n} \in Af(n)$ entonces es claro que $(x_1, x_2, \dots, x_k) \sim (x_1, x_2, \dots, x_k)$.
- Para la simetría observemos que si $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)) = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ entonces como $f^{-1} \in Af(n)$ tenemos que $(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), \dots, f^{-1}(y_k)) = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, y por lo tanto $(y_1, y_2, \dots, y_k) \sim (x_1, x_2, \dots, x_k)$.
- Finalmente, para la transitividad tenemos que, si $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)) = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ y $(g(y_1), g(y_2), \dots, g(y_k)) = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ entonces $(g \circ f(x_1), g \circ f(x_2), \dots, g \circ f(x_k)) = (z_1, z_2, \dots, z_k)$, como $g \circ f \in Af(n)$ tenemos que $(x_1, x_2, \dots, x_k) \sim (z_1, z_2, \dots, z_k)$.

□

Con estos elementos podemos definir ahora los espacios de configuraciones.

DEFINICIÓN 38. Definimos el *espacio de configuraciones de k puntos k -coloreados en \mathbb{A}^n* como

$$\mathbb{A}_k^n := \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_k) \in (\mathbb{A}^n)^k : \text{sop}(x_1, \dots, x_k) \text{ fija a } \mathbb{A}^n \right\} / \sim$$

Donde $(x_1, x_2, \dots, x_k) \sim (y_1, y_2, \dots, y_k)$ si (x_1, x_2, \dots, x_k) es afínmente equivalente a (y_1, y_2, \dots, y_k) y \mathbb{A}_k^n estará dotado de la topología cociente inducida por la topología usual de $(\mathbb{A}^n)^k$. A los elementos de \mathbb{A}_k^n les llamaremos *configuraciones de puntos* y los denotaremos como $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle_A = \langle (x_1, x_2, \dots, x_k) \rangle_A$ o simplemente $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$, si

no hay lugar a confusión; estamos suponiendo, por supuesto, que $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in (\mathbb{A}^n)^k$ será cualquier representante de su clase de equivalencia.

La topología cociente que tiene \mathbb{A}_k^n , refleja la noción intuitiva de que tenemos cercanía en conjuntos de puntos en \mathbb{A}^n . Es decir, intuitivamente dos configuraciones estarán cercanas en \mathbb{A}_k^n si hay dos representantes de cada clase cercanos en $(\mathbb{A}^n)^k$. Lo cual quiere decir que, viéndolos como conjuntos k -coloreados de puntos, cada punto estará cerca del otro punto con su mismo color; o existirá un conjunto afinmente equivalente en el cual los puntos sí lo estén.

En la definición de espacios de configuraciones, únicamente consideramos los conjuntos de puntos que fijan al espacio; si no fuera así nuestro espacio resultante sería más complicado en el sentido de que no sería un espacio Hausdorff. Por ejemplo, consideremos los puntos coloreados $(0, 0)_1, (0, 0)_2, \dots, (0, 0)_k$, claramente no fijarán a \mathbb{A}^2 puesto que cualquier automorfismo lineal L del plano está en $Af(2)$ y $L(0, 0) = (0, 0)$. Si tomamos unos puntos coloreados arbitrarios $(x, y)_1, (x, y)_2, \dots, (x, y)_k$, la imagen de ellos bajo un automorfismo lineal del tipo $L_m(x, y) := \frac{1}{m}(x, y)$ con $m \in \mathbb{N}$ representaría la misma configuración afín; pero para un m adecuado nuestra configuración se encontraría tan cerca como deseáramos de $(0, 0)_1, (0, 0)_2, \dots, (0, 0)_k$. En este caso, si permitiéramos configuraciones que no fijen a \mathbb{A}^2 , tendríamos al menos un punto que estaría arbitrariamente cerca de cualquier otro en nuestro espacio de configuraciones.

Desde luego habría que garantizar que con esta condición basta para obtener un espacio Hausdorff. De hecho existe un resultado que garantiza que los espacios de configuraciones afines son variedades topológicas, dando homeomorfismos entre éstos y las grassmanianas. Y aunque no lo demostraremos en esta tesis, sí daremos la demostración de un caso particular que será \mathbb{A}_4^1 , ya que este espacio lo usaremos en nuestro resultado principal. Enunciemos el teorema general.

NOTACIÓN 39. Denotamos como $G(k, n)$ a la grassmaniana consistente en todos los subespacios lineales de dimensión k de \mathbb{R}^n .

TEOREMA 40. $\mathbb{A}_{n+1}^d \cong G(n - d, n)$.¹

En la siguiente sección analizaremos con detenimiento \mathbb{A}_4^1 y demostraremos el caso particular del teorema anterior. Para ello concluimos esta sección con una definición útil en las descripciones de configuraciones.

DEFINICIÓN 41. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k) \in (\mathbb{A}^n)^k$, decimos que tiene una *aglomeración de m puntos* si $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_m} = x_i$. Como el hecho de tener una aglomeración es invariante respecto a transformaciones afines, definimos que $\langle x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k \rangle \in \mathbb{A}_k^n$ tiene una *aglomeración de m puntos* si en cualquier representante $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k)$ de ella $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_m} = x_i$.

¹La demostración puede ser consultada en Colín [4] o Strausz [12].

Desde luego, esta definición no depende del representante elegido. Además, puede haber varias aglomeraciones en alguna configuración. Esta definición es útil en la descripción geométrica de los espacios de configuraciones, y es un caso particular de una definición más general que abarca aglomeraciones de diversas dimensiones.²

2.2. \mathbb{A}_4^1

En esta sección analizaremos con detenimiento la geometría de \mathbb{A}_4^1 . Por el Teorema 40 sabríamos que $\mathbb{A}_4^1 \cong G(2, 3)$, y considerando la dualidad que existe en \mathbb{R}^3 entre un plano y su recta ortogonal sabemos que $G(2, 3) \cong G(1, 3)$, además dado que las rectas en \mathbb{R}^3 son justamente las clases de equivalencia que forman el plano proyectivo tenemos que $\mathbb{A}_4^1 \cong G(1, 3) \cong \mathbb{P}^3$. Sin embargo en esta sección demostraremos esto de otra forma, ya que nos será útil dar una descripción geométrica por medio de celdas de diferentes dimensiones. Además daremos explícitamente un sistema de coordenadas homogéneas para cada configuración de \mathbb{A}_4^1 . Comencemos por esto último, y para ello nos bastará dar una demostración particular del Teorema 40.

2.2.1. Coordenadas para \mathbb{A}_4^1 .

TEOREMA 42. $\mathbb{A}_4^1 \cong \mathbb{P}^2$

DEMOSTRACIÓN. Sea una configuración $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \in \mathbb{A}_4^1$; ésta tiene un representante de la forma $(x'_1, x'_2, x'_3, 0)$ para algunos $x'_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, 3$, ya que para toda configuración podemos encontrar una translación $T \in Af(1)$ que cumpla $T(x_4) = 0$ y definimos $x'_i := T(x_i)$. Por otro lado como *sop* $((x'_1, x'_2, x'_3, 0))$ fija a \mathbb{A}^1 debe contener al menos dos puntos diferentes, lo que implica que existe al menos un $x_i \neq 0$. Esto quiere decir que las configuraciones $\langle x'_1, x'_2, x'_3, 0 \rangle$ con $x'_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, 2, 3$ donde algún $x'_i \neq 0$, parametrizan a \mathbb{A}_4^1 . Ahora sea otro representante $(y_4, y_2, y_3, 0) \in \langle x'_1, x'_2, x'_3, 0 \rangle$, entonces existe una transformación afín que la hace afínmente equivalente a $(x'_1, x'_2, x'_3, 0)$; pero ya que el cuarto punto de ambas configuraciones es cero, entonces las dos configuraciones son afínmente equivalentes si y sólo si existe un automorfismo lineal de \mathbb{R} que lleve los puntos de una a la otra (Ver Teorema 9); es decir, si y sólo si $x'_i = \lambda y_i$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Por lo anterior podemos definir el homeomorfismo

$$\mathbb{A}_4^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \longmapsto [x'_1 : x'_2 : x'_3]$$

Entonces tenemos que $\mathbb{A}_4^1 \cong \mathbb{P}^2$. Además tenemos la forma explícita de asociar coordenadas homogéneas a las configuraciones, ya que a una configuración $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle = \langle x'_1, x'_2, x'_3, 0 \rangle \in \mathbb{A}_4^1$ le corresponden las coordenadas homogéneas $[x'_1 : x'_2 : x'_3]$ en \mathbb{P}^2 . \square

²Ver Mavois [7]

Considerando el resultado anterior usaremos indistintamente dos nomenclaturas para los puntos de \mathbb{A}_4^1 : por su clase de equivalencia (*i.e.* $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$), y por la parametrización de \mathbb{A}_4^1 por medio de coordenadas homogéneas vistas en el teorema anterior (*i.e.* $[x : y : z]$).

2.2.2. \mathbb{A}_4^1 como n-celdas. Describamos ahora \mathbb{A}_4^1 por medio de pegado de celdas de diferentes dimensiones. Esto complementará la descripción que ya tenemos de este espacio.

Tomemos cuatro puntos coloreados x_1, x_2, x_3, x_4 en \mathbb{A}^1 tales que fijen a \mathbb{A}^1 . Buscaremos los diferentes tipos de configuraciones posibles con base en su soporte y su orden de coloración inducido por el orden lineal de³ \mathbb{A}^1 .

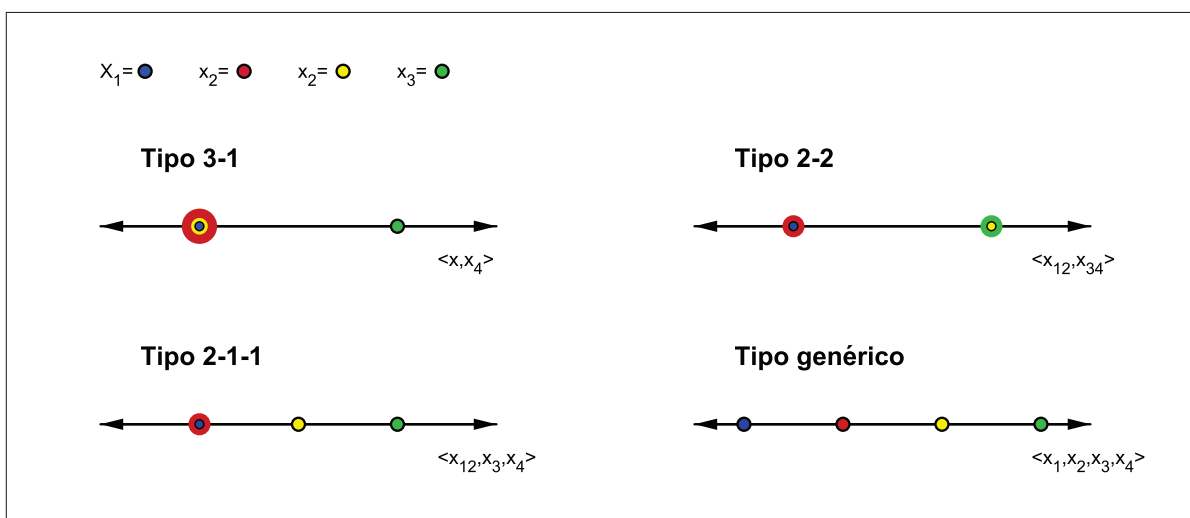


FIGURA 2.2.1. Los tipos de configuraciones de \mathbb{A}_4^1

Tipo 3-1: Las configuraciones con una aglomeración de 3 puntos. El soporte de estas configuraciones son dos puntos de la recta afín y por lo tanto cualquier configuración de este tipo con la misma coloración es afinmente equivalente. Así, esta configuración parametriza un solo punto de \mathbb{A}_4^1 por cada coloración diferente. De hecho podemos caracterizar cada uno de estos puntos por el color que no está en la aglomeración de 3 puntos, por ello la denotaremos $\langle x, x_i \rangle$ donde i es dicho color. De esta manera tenemos 4 puntos diferentes de este tipo.

Tipo 2-2: Las configuraciones con dos aglomeraciones de 2 puntos. Al igual que en el caso 3-1 su soporte son dos puntos. Así que en total tenemos 3 configuraciones de este tipo con distinta coloración que representan el mismo número de puntos de \mathbb{A}_4^1 . Denotaremos a esta configuración de la siguiente manera $\langle x_{ij}, x_{kl} \rangle$ donde los subíndices representan los colores en cada una de las aglomeraciones.

³Recordemos que $\mathbb{A}^1 \cong \mathbb{R}$, por lo cual podemos utilizar el orden usual de los reales para definir un orden en la recta afín.

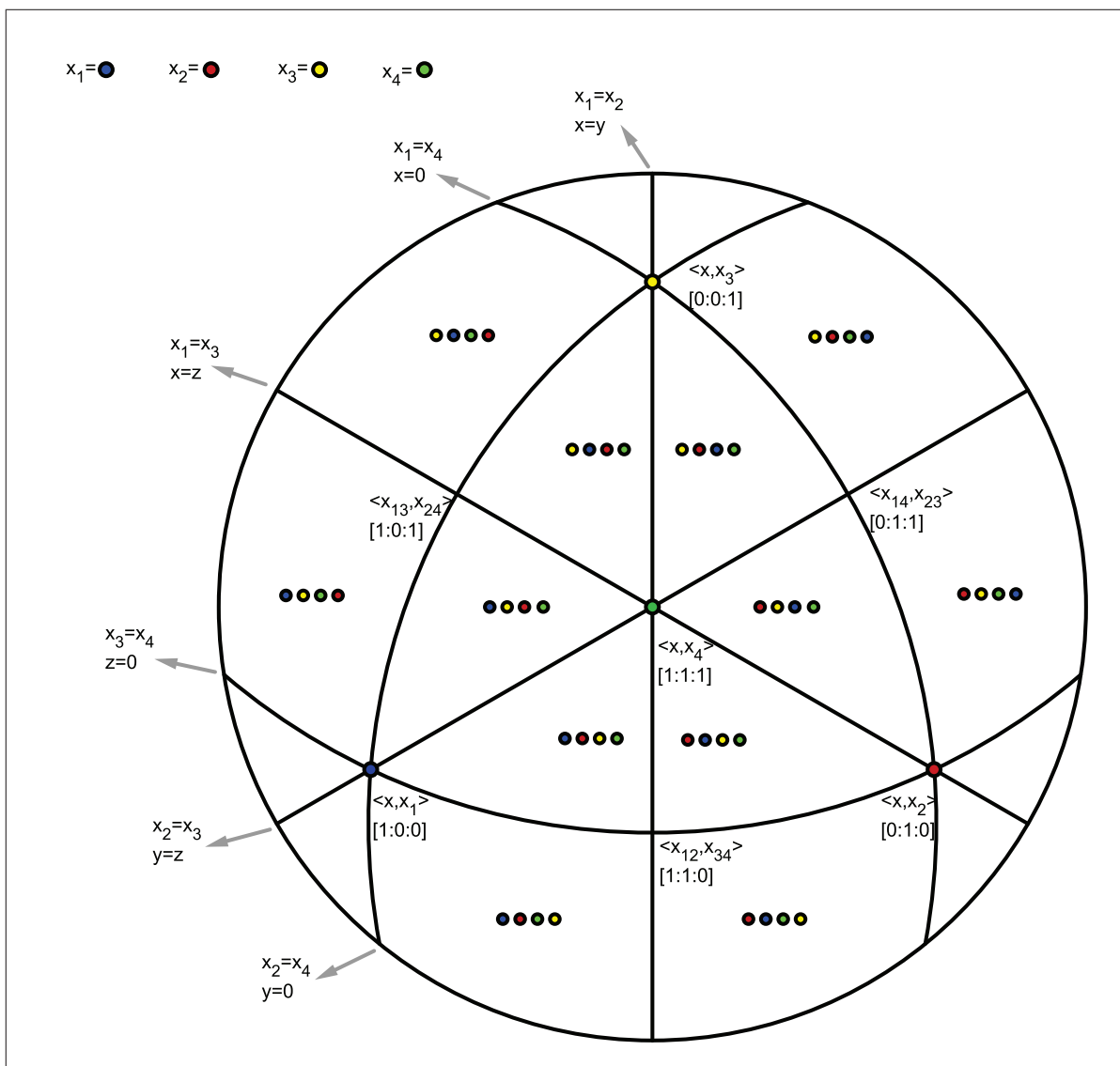
Tipo 2-1-1: Las configuraciones que tienen una sola aglomeración de 2 puntos. En este caso tendremos que su soporte de tres puntos representado en la recta real se verá como tres números $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < c$. Si en \mathbb{A}^1 tomamos tres puntos en esta disposición, cualquier transformación afín f preservará o invertirá el orden⁴, es decir $f(a) < f(b) < f(c)$ o $f(c) < f(b) < f(a)$; por lo tanto podemos llevar una configuración cualquiera a una afínmente equivalente, donde $a = 0$, y $c = 1$; de tal manera que b se encontrará en el intervalo $(0, 1)$; y con ese punto parametrizaremos todas las configuraciones de tipo 2-1-1 afínmente equivalentes y con la misma coloración en \mathbb{A}_4^1 , debido a que dos puntos fijan a \mathbb{A}^1 . Estas configuraciones parametrizan dieciocho intervalos abiertos de \mathbb{A}_4^1 , uno por cada posible 4-coloración de la configuración donde su soporte es de la forma $a < b < c$. Usaremos como notación $\langle x_i, x_j, x_{kl} \rangle$ o $\langle x_i, x_{kl}, x_j \rangle$ dependiendo de dónde se dé la aglomeración de puntos de este tipo.

Tipo genérico: Las configuraciones que se encuentran en posición general. Denotemos a cuatro puntos en posición general en \mathbb{A}^1 por x_1, x_2, x_3, x_4 . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$; análogamente al caso 2-1-1 una configuración de este tipo es afínmente equivalente a una donde x_2 y x_3 estén en el intervalo $(0, 1)$ y $x_1 = 0, x_4 = 1$, entonces dos puntos en $(1, 0)$ que cumplen $x_2 < x_3$ parametrizan a las configuraciones con un orden de coloración dado, por lo tanto por cada orden tenemos un triángulo abierto. En total tendremos doce triángulos, uno por cada posible coloración diferente de los cuatro puntos. Denotaremos a cada triángulo por el orden lineal de sus colores en el soporte de alguna de sus configuraciones, así por ejemplo si los cuatro puntos del soporte cumplen que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, lo denotaremos como 1, 2, 3, 4 ó 4, 3, 2, 1, ya que las reflexiones invierten el orden en \mathbb{R} .

Los triángulos abiertos formados por las configuraciones de tipo genérico son nuestras celdas de mayor dimensión, así que un análisis de las degeneraciones en la frontera de uno de ellos nos dará la información requerida para reconstruir \mathbb{A}_4^1 .

Iniciemos el análisis de un sólo triángulo formado por configuraciones genéricas con un sólo orden en su coloración, y encontremos sus posibles degeneraciones en configuraciones de otros tipos. Sea $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \in \mathbb{A}_4^1$ una configuración de tipo genérico. Tenemos 3 posibles degeneraciones en configuraciones del tipo 2-1-1 $\langle x_{12}, x_3, x_4 \rangle$, $\langle x_1, x_{23}, x_4 \rangle$ y $\langle x_1, x_2, x_{34} \rangle$. A su vez estas configuraciones del tipo 2-1-1 pueden degenerar en una configuración del tipo 2-2 $\langle x_{12}, x_{34} \rangle$ y en dos del tipo 3-1 $\langle x, x_4 \rangle$, $\langle x_1, x \rangle$. Además una configuración del tipo 2-1-1 en la frontera puede venir también de degenerar una configuración de un triángulo adyacente; de tal manera sabemos que los triángulos adyacentes a los lados (una frontera del tipo 2-1-1) son $\langle x_2, x_1, x_3, x_4 \rangle$, $\langle x_1, x_3, x_2, x_4 \rangle$ y $\langle x_1, x_2, x_4, x_3 \rangle$. Este análisis es análogo en cada triángulo, así sabemos cómo se componen sus fronteras y que son adyacentes los triángulos con una coloración que sea el resultado de la transposición de dos de sus colores; con lo cual reconstruimos el plano proyectivo.

⁴Una transformación afín de \mathbb{A}^1 es de la forma $\alpha x + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ por lo cual preserva o invierte el orden dependiendo del signo de α .

FIGURA 2.2.2. Representación de \mathbb{A}_4^1

Por último, parametrizaremos algunas configuraciones usando las coordenadas homogéneas $[x : y : z]$ de \mathbb{A}_4^1 definidas en la Sección 2.2.1, en las cuales para cada configuración se buscaba un representante tal que $x_4 = 0$. Así, la configuración $\langle x, x_1 \rangle$, en donde $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ y $x_1 \neq 0$, tiene como coordenadas $[x_1 : 0 : 0]$ que es equivalente a $[1 : 0 : 0]$. De manera análoga podemos determinar las coordenadas de los restantes puntos de tipo 3-1 resultando que: $\langle x, x_1 \rangle = [1 : 0 : 0]$, $\langle x, x_2 \rangle = [0 : 1 : 0]$, $\langle x, x_3 \rangle = [0 : 0 : 1]$ y $\langle x, x_4 \rangle = [1 : 1 : 1]$. Ahora, en la configuración $\langle x_{12}, x_{34} \rangle$ caracterizada por un representante con aglomeraciones $x_1 = x_2 \neq 0$ y $x_1 = x_4 = 0$, las coordenadas homogéneas que le corresponden son $[x_1 : x_1 : 0] = [1 : 1 : 0]$. Procediendo análogamente tendremos las coordenadas de todos los puntos de tipo 2-2, resultando: $\langle x_{12}, x_{34} \rangle = [1 : 1 : 0]$, $\langle x_{13}, x_{24} \rangle = [1 : 0 : 1]$ y $\langle x_{14}, x_{23} \rangle = [0 : 1 : 1]$. Además observemos que los puntos

tipo 2-1-1 quedan contenidos en seis rectas proyectivas. La descomposición celular explícita de \mathbb{P}^2 , con las coordenadas homogéneas de las celdas de dimensión cero y las ecuaciones en estas coordenadas que determinan las celdas de dimensión uno, se encuentra representada en la Figura 2.2.2.

2.3. Espacios de configuraciones proyectivas de puntos: \mathbb{P}_k^d

En esta sección definiremos los espacios de configuraciones proyectivas. El desarrollo es análogo al de los espacios afines; pero usando los espacios proyectivos y sus grupos de transformaciones respectivos.

DEFINICIÓN 43. Decimos que un conjunto finito de puntos $\{x_1, \dots, x_i\} \subset \mathbb{P}^n$ fijan a \mathbb{P}^n si para toda $f \in PGL(n+1, \mathbb{R})$ tal que $f(x_k) = x_k$ $k = 1, \dots, i$ entonces $f = Id$.

OBSERVACIÓN 44. Notemos que del Teorema 19 se sigue que unos puntos en posición general x_1, \dots, x_i fijan a \mathbb{P}^n si y sólo si $i \geq n+2$.

DEFINICIÓN 45. Definimos k puntos coloreados en \mathbb{P}^n como un elemento $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in (\mathbb{P}^n)^k$; llamamos colores a cada uno de los subíndices y, si no hay confusión, los denotaremos simplemente como x_1, x_2, \dots, x_k .

DEFINICIÓN 46. Sean $(x_1, x_2, \dots, x_k), (y_1, y_2, \dots, y_k) \in (\mathbb{P}^n)^k$, decimos que son *proyectivamente equivalentes* si existe $f \in PGL(n+1, \mathbb{R})$ tal que $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)) = (y_1, y_2, \dots, y_k)$.

PROPOSICIÓN 47. La relación definida como $(x_1, x_2, \dots, x_k) \sim (y_1, y_2, \dots, y_k)$ si (x_1, x_2, \dots, x_k) es proyectivamente equivalente a (y_1, y_2, \dots, y_k) , es de equivalencia.

Omitiremos esta última demostración ya que es análoga a la mostrada en la Proposición 37. Continuemos con la definición de espacios de configuraciones.

DEFINICIÓN 48. Definimos al espacio de configuraciones de k puntos coloreados en \mathbb{P}^n como:

$$\mathbb{P}_k^n := \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_k) \in (\mathbb{P}^n)^k : \text{sop}(x_1, \dots, x_k) \text{ fija a } \mathbb{P}^n \right\} / \sim$$

Donde $(x_1, x_2, \dots, x_k) \sim (y_1, y_2, \dots, y_k)$ si (x_1, x_2, \dots, x_k) es proyectivamente equivalente a (y_1, y_2, \dots, y_k) y \mathbb{P}_k^n estará dotado de la topología cociente inducida por la topología usual de \mathbb{P}^n . A los elementos de \mathbb{P}_k^n les llamaremos *configuraciones de puntos* y los denotaremos como $\langle (x_1, x_2, \dots, x_k) \rangle_P$, $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle_P$ o simplemente $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$, si no hay confusión; en donde $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in (\mathbb{P}^n)^k$ será cualquier representante de su clase de equivalencia.

DEFINICIÓN 49. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k) \in \mathbb{P}^n$, decimos que tiene una *aglomeración de m puntos* si $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_m} = x_i$. Como el hecho de tener una aglomeración es invariante respecto a transformaciones proyectivas, definimos que $\langle x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k \rangle \in \mathbb{P}_k^n$ tiene una *aglomeración de m puntos* si en cualquier representante $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k)$ de ella $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_m} = x_i$.

A diferencia de los espacios de configuraciones afines, en los espacios de configuraciones proyectivos la definición no garantiza que sean espacios de Hausdorff. Existen resultados para identificar qué tipo de configuraciones corresponden a puntos no Hausdorff y dar reglas para restringir las configuraciones permitidas para obtener un subespacio de Hausdorff compacto.⁵ Dejaremos al margen de este trabajo el tratamiento general de dicho problema y daremos una descripción directa de \mathbb{P}_4^1 .

2.4. \mathbb{P}_4^1

Ahora daremos la descripción geométrica de \mathbb{P}_4^1 , con la cual notaremos que este espacio es básicamente \mathbb{S}^1 con tres pares de puntos no Hausdorff. Además veremos cómo tratar a los puntos no Hausdorff para tener un espacio más manejable que será simplemente \mathbb{S}^1 .

Primero recordemos que se necesitan tres puntos para fijar a \mathbb{P}^1 . Por lo tanto el soporte de cualquier configuración de \mathbb{P}_4^1 debe tener al menos tres puntos, así tendremos un solo tipo de degeneración: aglomeración de dos puntos, que denotaremos como $\langle x_{ij}, x_k, x_l \rangle$ cuando $x_i = x_j$.

Tomemos una configuración $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ en \mathbb{P}_4^1 y consideremos los puntos coloreados x_1, x_2, x_3, x_4 en \mathbb{P}^1 que la representan. Supongamos que x_1, x_2 y x_3 son puntos diferentes, por el Teorema 19 existe una única $\varphi \in PGL(2, \mathbb{R})$ tal que $\varphi(x_1) = [1 : 0]$, $\varphi(x_2) = [0 : 1]$, $\varphi(x_3) = [1 : 1]$, entonces $\varphi(x_4)$ es el único punto en \mathbb{P}^1 tal que $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle = \langle [1 : 0], [0 : 1], [1 : 1], \varphi(x_4) \rangle$; es decir, los puntos en $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^1$ nos parametrizan todas las configuraciones de \mathbb{P}_4^1 donde x_1, x_2 y x_3 sean diferentes, incluyendo las tres configuraciones donde $x_4 = x_i$ donde $i = 1, 2, 3$ respectivamente, es decir las correspondientes a $\langle x_{14}, x_3, x_3 \rangle$, $\langle x_1, x_{24}, x_3 \rangle$ y $\langle x_1, x_2, x_{34} \rangle$.

Notemos que además de las configuraciones descritas en el párrafo anterior nos falta contemplar las configuraciones en las que x_1, x_2 y x_3 no son diferentes para considerar todo \mathbb{P}_4^1 ; estas serán: $\langle x_{12}, x_3, x_4 \rangle$, $\langle x_1, x_{23}, x_4 \rangle$ y $\langle x_{13}, x_2, x_4 \rangle$, definidas por $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $x_1 = x_3$, respectivamente. Ubiquemos estos tres puntos en la descripción de \mathbb{P}_4^1 por medio de su cercanía a otras configuraciones. Si tenemos una sucesión de configuraciones $(x_{1_k}, x_{2_k}, x_{3_k}, x_{4_k})$ donde $x_{1_k} := [1 : 0]$, $x_{2_k} := [0 : 1]$, $x_{3_k} := [1 : 1]$ y $x_{4_k} := [1 : \frac{1}{k}] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} [1 : 0] = x_{1_k}$, cada elemento de esta sucesión se puede mandar me-

diante la transformación proyectiva $\phi_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ a otro proyectivamente equivalente $(y_{1_k}, y_{2_k}, y_{3_k}, y_{4_k})$ donde $y_{i_k} := \phi_k(x_{i_k})$. La transformación ϕ_k hace que $y_{1_k} = [1 : 0]$, $y_{2_k} = [0 : 1]$, $y_{4_k} = [1 : 1]$ y manda x_{3_k} a $y_{3_k} = [1 : k] = [\frac{1}{k} : 1]$ que tiende a $[0 : 1] = y_{2_k}$ cuando $k \rightarrow \infty$. Así tenemos, para todo k , que $\langle x_{1_k}, x_{2_k}, x_{3_k}, x_{4_k} \rangle = \langle y_{1_k}, y_{2_k}, y_{3_k}, y_{4_k} \rangle$, y entonces $\langle x_{1_k}, x_{2_k}, x_{3_k}, x_{4_k} \rangle$ es una sucesión que tiende a $\langle x_{14}, x_2, x_3 \rangle$ y $\langle x_1, x_{23}, x_4 \rangle$; esto implica que las configuraciones $\langle x_{14}, x_2, x_3 \rangle$ y $\langle x_1, x_{23}, x_4 \rangle$ son puntos no Hausdorff

⁵Ver Arocha et al. [1]

que comparten vecindades en \mathbb{P}_4^1 . De manera análoga nos podemos dar cuenta de que $\langle x_1, x_{24}, x_3 \rangle$ con $\langle x_{13}, x_2, x_4 \rangle$ y $\langle x_1, x_2, x_{34} \rangle$ con $\langle x_{12}, x_3, x_4 \rangle$ comparten vecindades.

Introduzcamos una nomenclatura para los dos tipos de puntos de \mathbb{P}_4^1 :

Tipo degenerado: Le llamaremos así a las configuraciones de cuatro puntos tales que sus representantes en \mathbb{P}^1 no estén en posición general; es decir los seis puntos no Hausdorff $\langle x_{14}, x_2, x_3 \rangle$, $\langle x_1, x_{23}, x_4 \rangle$, $\langle x_1, x_{24}, x_3 \rangle$, $\langle x_{13}, x_2, x_4 \rangle$, $\langle x_1, x_2, x_{34} \rangle$ y $\langle x_{12}, x_3, x_4 \rangle$.

Tipo genérico: Serán las configuraciones de cuatro puntos tales que sus representantes en \mathbb{P}^1 estén en posición general. Las configuraciones de este tipo forman tres intervalos abiertos, correspondientes cada uno al orden ciclico en \mathbb{P}^1 de los representantes de sus configuraciones.

Representamos estos dos tipos en la Figura 2.4.1.

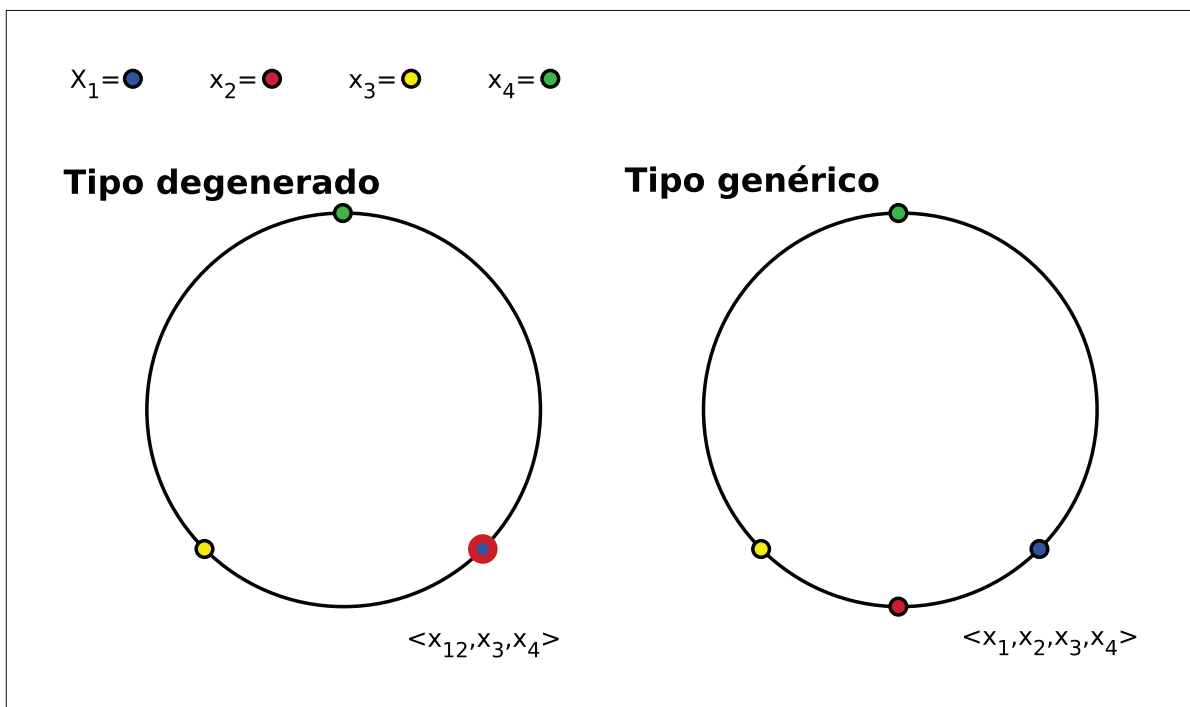


FIGURA 2.4.1. Las configuraciones de \mathbb{P}_4^1

Con ello podemos completar la descripción de \mathbb{P}_4^1 , obteniendo a \mathbb{S}^1 con tres pares de puntos no Hausdorff que comparten vecindades. Representamos dicha descripción en la Figura 2.4.2 a la izquierda, en ella unimos con una línea punteada las configuraciones degeneradas que comparten vecindades, además denotamos en los arcos entre ellos el orden cíclico correspondiente a las configuraciones que se encuentran en él.

Por último definamos un espacio cociente de \mathbb{P}_4^1 que utilizaremos en el siguiente capítulo. Tomemos la relación de equivalencia en la cual cada punto Hausdorff esté relacionado sólo con él mismo, y los puntos no Hausdorff estén relacionados por pares, cada uno con el punto que comparte vecindades. Luego, haciendo el espacio cociente bajo esta relación, tendremos un espacio de Hausdorff y homeomorfo a \mathbb{S}^1 , en el cual: $\langle x_{14}, x_2, x_3 \rangle = \langle x_1, x_{23}, x_4 \rangle$, $\langle x_1, x_{24}, x_3 \rangle = \langle x_{13}, x_2, x_4 \rangle$ y $\langle x_1, x_2, x_{34} \rangle = \langle x_{12}, x_3, x_4 \rangle$. En adelante denotaremos este espacio como P_4^1 y lo representamos en la Figura 2.4.2 a la derecha.

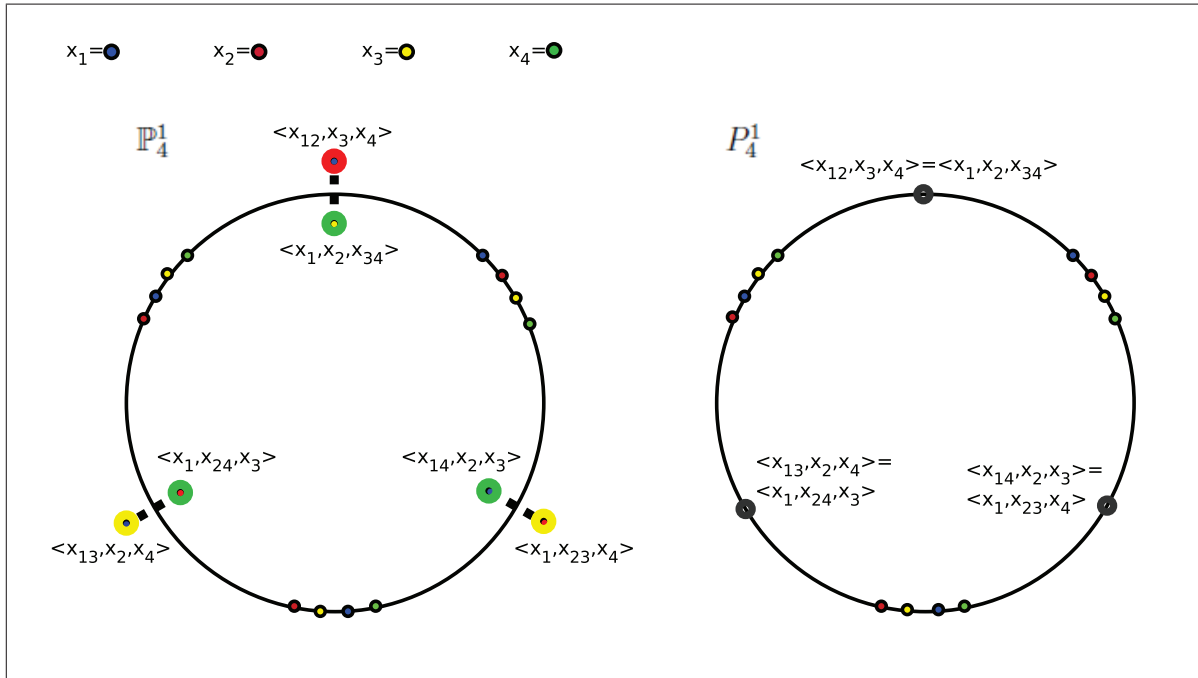


FIGURA 2.4.2. \mathbb{P}_4^1 y P_4^1

Capítulo 3

$$F : \mathbb{A}_4^1 \rightarrow \mathbb{P}_4^1$$

Como ya vimos anteriormente, en la Sección 1.3, el espacio afín está contenido en el espacio proyectivo de la misma dimensión. Más aún, el grupo de transformaciones de la recta proyectiva contiene como subgrupo al grupo afín de dimensión 1. Vamos a usar esta propiedad para definir una función de \mathbb{A}_4^1 a \mathbb{P}_4^1 .

Consideremos $\langle x \rangle \in \mathbb{A}_4^1$ y sea $i : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ un encaje canónico de la recta afín en la recta proyectiva. Teniendo en cuenta que un punto en \mathbb{A}_4^1 es una clase de equivalencia de cuartetos de puntos de \mathbb{A}^1 , podemos considerar un representante de dicha clase y aplicarle a cada punto nuestro encaje a \mathbb{P}^1 manteniendo la misma coloración del punto y su imagen. Luego, para definir F , consideramos la clase correspondiente a esta configuración en \mathbb{P}_4^1 . Es decir:

$$"F : \mathbb{A}_4^1 \rightarrow \mathbb{P}_4^1 \quad F(\langle x \rangle_A) = \langle i(x) \rangle_P"$$

Donde si $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es un representante de la clase, entonces $i(x) := (i(x_1), i(x_2), i(x_3), i(x_4))$.

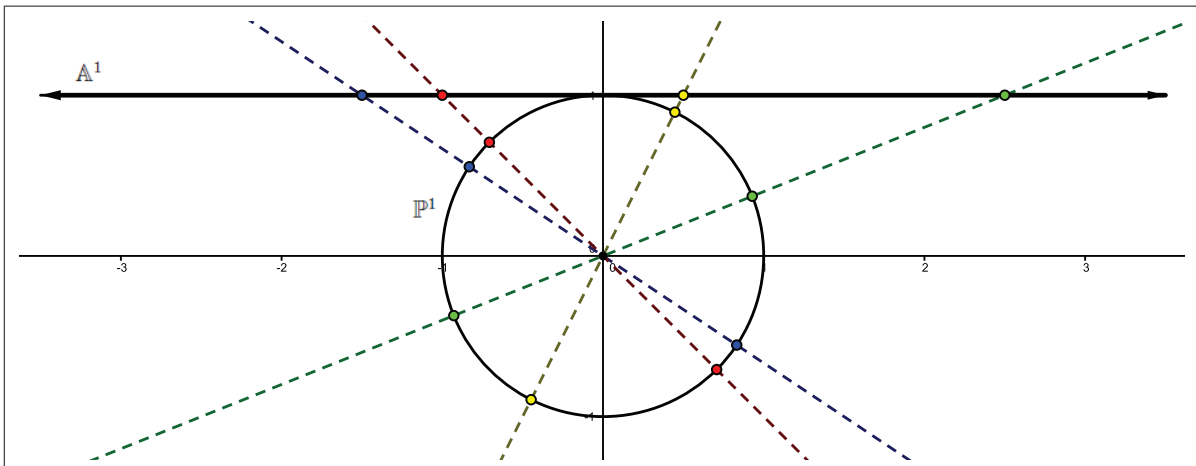


FIGURA 3.0.1. La definición intuitiva de F .

Ésta es la idea general para construir la función que deseamos; pero tenemos que demostrar que está bien definida. De hecho veremos que dicha regla de correspondencia no está definida para algunos puntos de \mathbb{A}_4^1 . Sin embargo, a partir de conocer los puntos en los que no podemos definirla, encontraremos una nueva función (en un subconjunto de \mathbb{A}_4^1) que será el objeto de nuestro estudio.

3.1. Los puntos que no saben a dónde ir.

Tenemos en esencia un problema para definir la función F como deseamos: las configuraciones en \mathbb{A}_4^1 cuyo soporte es una dupla en \mathbb{A}^1 , *i.e.* los que tienen aglomeraciones de tres puntos y aquellas que vienen de un par de aglomeraciones de dos puntos.

Veamos qué sucede y cómo evitar este tipo de puntos. Siguiendo la filosofía de nuestro bosquejo de definición para F analicemos lo que ocurre: estos tipos de configuración tienen como soporte dos puntos en \mathbb{A}^1 , así que al aplicarles i tendremos dos puntos de \mathbb{P}^1 ; pero en \mathbb{P}^1 necesitamos al menos tres puntos para fijarlo. Entonces estas duplas de puntos no tienen una representación en \mathbb{P}_4^1 (ver 2.3). La modificación necesaria de nuestra función será redefinirla tomando su dominio a un subconjunto $A_4^1 \subset \mathbb{A}_4^1$, definido de la siguiente forma $A_4^1 := \{\langle x \rangle \in \mathbb{A}_4^1 : |\text{sop}(\langle x \rangle)| > 2\}$; es decir, tomamos \mathbb{A}_4^1 menos siete puntos: las cuatro duplas que tienen una aglomeración de tres puntos, y las tres que contienen dos aglomeraciones de dos puntos.

3.2. Definiendo $F : \mathbb{A}_4^1 \rightarrow \mathbb{P}_4^1$

Procedamos a la definición formal de F . Como primer paso demostraremos que está bien definida como función.

DEFINICIÓN 50. Sea $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \in A_4^1 = \{\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \in \mathbb{A}_4^1 : |\text{sop}(\langle x \rangle)| > 2\}$ y sea $i : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ un encaje de la recta afín en la recta proyectiva, definimos la función F como:

$$F : A_4^1 \rightarrow \mathbb{P}_4^1 \quad F(\langle \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \rangle_A) = \langle \langle i(x_1), i(x_2), i(x_3), i(x_4)) \rangle \rangle_P$$

PROPOSICIÓN 51. F está bien definida.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \in A_4^1$ y tomemos dos representantes $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$. Tomando el encaje $i : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ que define a nuestra función F demostraremos que $\langle i(x_1), i(x_2), i(x_3), i(x_4) \rangle = \langle i(y_1), i(y_2), i(y_3), i(y_4) \rangle$. Para ello basta con probar que existe un elemento $\phi \in PGL(2, \mathbb{R})$, tal que

$$(i(x_1), i(x_2), i(x_3), i(x_4)) \underset{\phi}{\sim} (i(y_1), i(y_2), i(y_3), i(y_4)))$$

sabemos que existe una transformación afín φ que hace que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \underset{\varphi}{\sim} (y_1, y_2, y_3, y_4),$$

ahora aplicamos el operador \bar{i} inducido por el encaje i entre $Af(1)$ y $PGL(2, \mathbb{R})$ a φ para definir $\phi := \bar{i}(\varphi)$. Por las propiedades vistas de \bar{i} (ver Sección 1.3) sabemos que

$$(i(x_1), i(x_2), i(x_3), i(x_4)) \underset{\phi}{\sim} (i(y_1), i(y_2), i(y_3), i(y_4)))$$

es decir $\langle i(x_1), i(x_2), i(x_3), i(x_4) \rangle = \langle i(y_1), i(y_2), i(y_3), i(y_4) \rangle$. □

La proposición anterior nos garantiza que, dada i , podemos definir una función F , por lo cual sería adecuado denotarla como F_i . Sin embargo en la siguiente proposición demostraremos que en realidad la función F_i no depende del encaje i .

PROPOSICIÓN 52. *Una función F_i definida como en la Definición 50 no depende del encaje i .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos dos encajes $i, j : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ y sus respectivas funciones F_i, F_j definidas como en la Definición 50. Ahora sea $\langle x \rangle \in A_4^1$ y tomemos un representante $x \in \langle x \rangle$, ahora por el Lema 29 existe $\phi \in PGL(2, \mathbb{R})$ tal que $i(x) \underset{\phi}{\sim} j(x)$ y por lo tanto $\langle i(x) \rangle = \langle j(x) \rangle$. \square

Gracias al resultado anterior denotaremos simplemente como F a dicha función.

3.3. El comportamiento de F .

La demostración del Teorema 58 nos dará información precisa sobre la imagen inversa de un punto en \mathbb{P}_4^1 bajo F , y por lo tanto nos describirá su comportamiento geométrico. Pero antes de demostrarlo nos será útil probar algunos resultados que nos proporcionarán información adicional sobre F .

OBSERVACIÓN 53. F es sobreyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\langle y_1, y_2, y_3, y_4 \rangle \in \mathbb{P}_4^1$, tomemos un punto $y_0 \in \mathbb{P}^1$ tal que $y_0 \notin \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, ahora tomemos el encaje canónico i_{y_0} de \mathbb{A}^1 en \mathbb{P}^1 que está definido por el subespacio proyectivo $\{y_0\} \subset \mathbb{P}^1$ (ver Sección 1.3). Como el conjunto $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ está en la imagen de i_{y_0} entonces podemos usar su función inversa para obtener el conjunto $\{i_{y_0}^{-1}(y_1), i_{y_0}^{-1}(y_2), i_{y_0}^{-1}(y_3), i_{y_0}^{-1}(y_4)\} \in \mathbb{A}^1$, por lo tanto

$$\langle i_{y_0}^{-1}(y_1), i_{y_0}^{-1}(y_2), i_{y_0}^{-1}(y_3), i_{y_0}^{-1}(y_4) \rangle \in A_4^1$$

ya que $i_{y_0}^{-1}$ es biyectiva y ello implica la cardinalidad del soporte de un conjunto es el mismo que el de su imagen bajo $i_{y_0}^{-1}$. Entonces:

$$\begin{aligned} & F \left(\langle i_{y_0}^{-1}(y_1), i_{y_0}^{-1}(y_2), i_{y_0}^{-1}(y_3), i_{y_0}^{-1}(y_4) \rangle_A \right) = \\ & F_{i_{y_0}} \left(\langle i_{y_0}^{-1}(y_1), i_{y_0}^{-1}(y_2), i_{y_0}^{-1}(y_3), i_{y_0}^{-1}(y_4) \rangle_A \right) = \\ & = \langle i_{y_0}(i_{y_0}^{-1}(y_1)), i_{y_0}(i_{y_0}^{-1}(y_2)), i_{y_0}(i_{y_0}^{-1}(y_3)), i_{y_0}(i_{y_0}^{-1}(y_4)) \rangle_P = \langle y_1, y_2, y_3, y_4 \rangle_P \end{aligned}$$

\square

LEMA 54. *Si $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \in A_4^1$ es una configuración de tipo genérico, entonces $F(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle)$ es una configuración de tipo genérico en \mathbb{P}_4^1*

DEMOSTRACIÓN. Si $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ es de tipo genérico entonces el soporte $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de esa configuración tiene cuatro puntos. Ahora sea i un encaje canónico de la recta afín en la recta proyectiva, entonces $i(\{x_1, x_2, x_3, x_4\})$ es un conjunto en \mathbb{P}^1 de cuatro puntos, más aún $\text{sop} \langle i(x_1), i(x_2), i(x_3), i(x_4) \rangle = i(\{x_1, x_2, x_3, x_4\})$; pero las únicas configuraciones de \mathbb{P}_4^1 con este soporte son las de tipo genérico. Por lo tanto $F(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle) = \langle (i(x_1), i(x_2), i(x_3), i(x_4))) \rangle$ es de tipo genérico. \square

LEMA 55. Si A_4^1 es parametrizado con el sistema de coordenadas homogéneas de la Sección 2.2.1, y $F : A_4^1 \rightarrow \mathbb{P}_4^1$ es la función de la Definición 50; entonces:

$$F([x : y : z]) = \langle [x : 1], [y : 1], [z : 1], [0 : 1] \rangle_P$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $[x : y : z] \in A_4^1$ expresado en coordenadas homogéneas. Entonces, por cómo asociamos las coordenadas, tenemos que $[x : y : z] = \langle x, y, z, 0 \rangle$, donde el segundo término está expresado como una clase de configuraciones de puntos ordenados. Ahora

$$F([x : y : z]) = F(\langle x, y, z, 0 \rangle_A) = \langle (i(x), i(y), i(z), i(0)) \rangle_P$$

donde i es el encaje canónico de \mathbb{A}^1 en \mathbb{P}^1 ; pero

$$\{i(x), i(y), i(z), i(0)\} = \{[x : 1], [y : 1], [z : 1], [0 : 1]\}$$

Por lo tanto:

$$F(\langle x, y, z, 0 \rangle_A) = \langle [x : 1], [y : 1], [z : 1], [0 : 1] \rangle_P$$

\square

Antes de probar el teorema central de este capítulo, extenderemos la función F ; para ello tendremos que cambiar su codominio¹ por P_4^1 .

OBSERVACIÓN 56. F se extiende de manera continua a los puntos de tipo 2-2 en \mathbb{A}_4^1

Cada punto del tipo 2-2 está contenido en dos rectas proyectivas formadas de puntos del tipo 2-1-1. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el punto en cuestión es $\langle x_{12}, x_{34} \rangle$. En una vecindad adecuada de $\langle x_{12}, x_{34} \rangle$ sólo hay configuraciones del tipo genérico (en celdas de dimension 2) y del tipo 2-1-1 de la forma $\langle x_1, x_2, x_{34} \rangle$ y $\langle x_{12}, x_3, x_4 \rangle$ (contenidas en dos rectas proyectivas). Por la definición de F y de P_4^1 sabemos que $F(\langle x_1, x_2, x_{34} \rangle) = F(\langle x_{12}, x_3, x_4 \rangle)$. Por otro lado, las configuraciones de tipo genérico en la vecindad de $\langle x_{12}, x_{34} \rangle$ son cercanos a las dos rectas de tipo 2-1-1 y por lo tanto sus imágenes bajo F serán cercanas al punto $\langle x_1, x_2, x_{34} \rangle_P = \langle x_{12}, x_3, x_4 \rangle_P$ en P_4^1 . Por lo cual la manera natural de extender la función será enviar el punto $\langle x_{12}, x_{34} \rangle_A$ a $\langle x_1, x_2, x_{34} \rangle_P = \langle x_{12}, x_3, x_4 \rangle_P$.

¹En realidad es un abuso de notación conservar la nomenclatura F para la función durante el argumento de la Observación 56, ya que cambiamos su codominio; pero como P_4^1 es un espacio cociente de \mathbb{P}_4^1 conservaremos la misma notación para indicar la función inducida por F a dicho cociente durante el argumento de la observación.

DEFINICIÓN 57. Sea $\bar{A}_4^1 := A_4^1 \cup \{\langle x_{ij}, x_{kl} \rangle \in \mathbb{A}_4^1 : i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}\}$. Definimos $\bar{F} : \bar{A}_4^1 \rightarrow P_4^1$ como:

$$\bar{F}(\langle x \rangle_A) = \begin{cases} F(\langle x \rangle_A) & \text{si } \langle x \rangle_A \text{ no es de tipo 2-2} \\ \langle x_i, x_j, x_{kl} \rangle_P = \langle x_{ij}, x_k, x_l \rangle_P & \text{si } \langle x \rangle_A = \langle x_{ij}, x_{kl} \rangle_A \end{cases}$$

TEOREMA 58. *La imagen inversa de un punto en P_4^1 bajo \bar{F} , es una cónica en $\mathbb{A}_4^1 (\cong \mathbb{P}^2)$; en la familia que pasa por cuatro puntos fijos en posición general, y estos puntos son aquellos en donde \bar{F} no está definida.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, supongamos que los cuatro puntos fijos por los que pasa nuestra familia de cónicas son: $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ y $[1 : 1 : 1]$. Ahora siguiendo el procedimiento de la Sección 2.2.1 tendremos unas coordenadas homogéneas de \mathbb{A}_4^1 en las que los cuatro puntos de tipo 3-1 tienen las coordenadas: $\langle x, x_1 \rangle = [1 : 0 : 0]$, $\langle x, x_2 \rangle = [0 : 1 : 0]$, $\langle x, x_3 \rangle = [0 : 0 : 1]$ y $\langle x, x_4 \rangle = [1 : 1 : 1]$.

Procedamos por casos. Sea $\langle X \rangle \in P_4^1$:

CASO 1. $\langle X \rangle$ no es de tipo genérico, es decir $\langle X \rangle$ sólo puede ser alguno de los tres puntos $\langle y_{14}, y_2, y_3 \rangle = \langle y_1, y_{23}, y_4 \rangle$, $\langle y_1, y_{24}, y_3 \rangle = \langle y_{13}, y_2, y_4 \rangle$ o $\langle y_1, y_2, y_{34} \rangle = \langle y_{12}, y_3, y_4 \rangle$.

Supongamos que $\langle X \rangle = \langle y_{14}, y_2, y_3 \rangle = \langle y_1, y_{23}, y_4 \rangle$ y tomemos $[x_1 : x_2 : x_3] \in \bar{A}_4^1$ tal que $\bar{F}([x_1 : x_2 : x_3]) = \langle X \rangle$, entonces por el Lema 54 $[x_1 : x_2 : x_3]$ no es de tipo genérico. Esto significa que sólo puede ser una configuración de tipo 2-2 ó 2-1-1, que son los tipos restantes en \bar{A}_4^1 . Más aún, si consideramos la expresión de F en coordenadas homogéneas (ver Lema 55) tenemos que si

$$\bar{F}([x_1 : x_2 : x_3]) = \langle y_{14}, y_2, y_3 \rangle = \langle y_1, y_{23}, y_4 \rangle,$$

entonces, de la definición de \bar{F} , deducimos que: $[x_1 : x_2 : x_3] = [0 : x_2 : x_3]$ ó $[x_1 : x_2 : x_3] = [x_1 : x_2 : x_2]$ ó $[x_1 : x_2 : x_3] = [0 : 1 : 1]$. Es decir, $[x_1 : x_2 : x_3]$ es la unión de de las rectas proyectivas $l := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \bar{A}_4^1 : x_1 = 0\}$ y $m := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \bar{A}_4^1 : x_2 = x_3\}$. Por último notemos que $l \cup m$ es exactamente la parte que se encuentra en \bar{A}_4^1 de la cónica dada por la ecuación $xy - xz = 0$, que es una de las cónicas degeneradas de nuestra familia.

Análogamente se demuestra que $\bar{F}^{-1}(\langle y_1, y_{24}, y_3 \rangle) = \bar{F}^{-1}(\langle y_{13}, y_2, y_4 \rangle)$ es la intersección con \bar{A}_4^1 de la cónica $xy - yz = 0$, y $\bar{F}^{-1}(\langle y_1, y_2, y_{34} \rangle) = \bar{F}^{-1}(\langle y_{12}, y_3, y_4 \rangle)$ es la intersección con \bar{A}_4^1 de la cónica $xy - xz = 0$.

CASO 2. $\langle X \rangle$ es de tipo genérico, es decir su soporte consta de cuatro puntos distintos.

Sean $[x_1 : x_2 : x_3], [y_1 : y_2 : y_3] \in \bar{A}_4^1$ tales que $\bar{F}([y_1 : y_2 : y_3]) = \bar{F}([x_1 : x_2 : x_3]) = \langle X \rangle$.

De la definición de \bar{F} y el Lema 54 se tiene que $[x_1 : x_2 : x_3]$ y $[y_1 : y_2 : y_3]$ son de tipo genérico; como en los puntos de tipo genérico tenemos que $\bar{F} = F$, podemos trabajar sólo con F . Ahora como $F([x_1 : x_2 : x_3]) = F([y_1 : y_2 : y_3])$ entonces:

$$\langle [x_1 : 1], [x_2 : 1], [x_3 : 1], [0 : 1] \rangle_P = \langle [y_1 : 1], [y_2 : 1], [y_3 : 1], [0 : 1] \rangle_P$$

pero esto ocurre si y sólo si existe una transformación proyectiva $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PGL(2, \mathbb{R})$ tal que:

$$(3.3.1) \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

para $i = 1, 2, 3$. De hecho, como ambas son configuraciones del tipo genérico, cualquier representante de sus imágenes bajo F consta de cuatro puntos de \mathbb{P}^1 en posición general; así que, de encontrar una matriz proyectiva $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ que cumpla las ecuaciones de 3.3.1, necesariamente estará en $PGL(2, \mathbb{R})$. Ahora de la primera igualdad de 3.3.1 podemos deducir que $[b : d] = [0 : 1]$ y entonces $b = 0$. De esto y de las otras igualdades obtenemos que las igualdades de 3.3.1 ocurren si y sólo si:

$$\begin{bmatrix} ax_i \\ cx_i + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow ax_i = y_i(cx_i + d) \Leftrightarrow ax_i - cx_iy_i - dy_i = 0$$

Las últimas igualdades plantean el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax_1 - cx_1y_1 - dy_1 &= 0, \\ ax_2 - cx_2y_2 - dy_2 &= 0, \\ ax_3 - cx_3y_3 - dy_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sus soluciones distintas de cero, si existen, serán las entradas que se necesitan para la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. De no ser así la única solución tendría que ser la matriz cero que no pertenece a $PGL(2, \mathbb{R})$ y no cumple las ecuaciones de 3.3.1. Pero esto ocurre si y sólo si:

$$\begin{vmatrix} x_1 & -x_1y_1 & -y_1 \\ x_2 & -x_2y_2 & -y_2 \\ x_3 & -x_3y_3 & -y_3 \end{vmatrix} = 0 \\ (3.3.2) \quad \Leftrightarrow x_1(x_2y_2y_3 - x_3y_3y_2) - x_2(x_1y_1y_3 - x_3y_3y_1) + x_3(x_1y_1y_2 - x_2y_2y_1) = 0$$

Por otra parte, supongamos que \mathfrak{C} es una cónica de la familia que pasa por los puntos $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ y $[1 : 1 : 1]$. Entonces, si

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0$$

es la ecuación general de \mathfrak{C} , al evaluarla en los cuatro puntos anteriores tendremos:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 0 \\ C &= 0 \\ A + B + C + D + E + F &= 0 \end{aligned}$$

Por lo cual deducimos que la ecuación general de \mathfrak{C} es de la forma $Dxy + Exz + Fyz = 0$ con $D + E + F = 0$.

Entonces $[x_1 : x_2 : x_3], [y_1 : y_2 : y_3] \in \mathfrak{C}$ si y sólo si ambos satisfacen la ecuación general de \mathfrak{C} ; es decir, si y sólo si

$$\begin{aligned} D + E + F &= 0, \\ Dy_1y_2 + Ey_1y_3 + Fy_2y_3 &= 0, \\ Dx_1x_2 + Ex_1x_3 + Fx_2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Pero esto es posible si y sólo si existen soluciones no triviales para los coeficientes D , E y F . Esto ocurre si y sólo si el determinante del sistema de ecuaciones es cero; es decir, si y sólo si

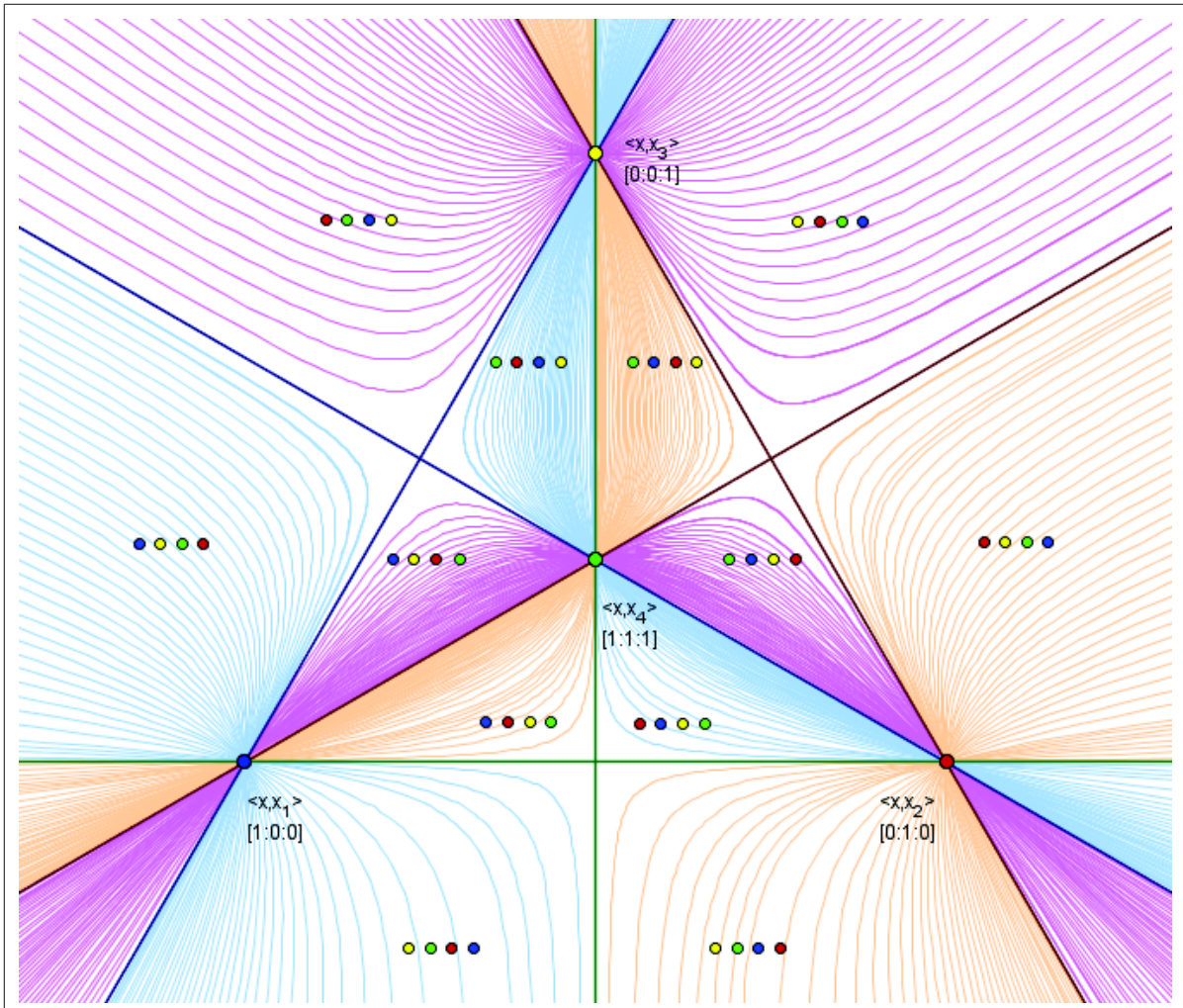
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1y_2 & y_1y_3 & y_2y_3 \\ x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2x_3y_3y_1 - x_1x_3y_3y_2 + x_1x_2y_2y_3 - x_3x_2y_2y_1 + x_3x_1y_1y_2 - x_2x_1y_1y_3 = 0$$

que es exactamente la ecuación 3.3.2.

Así, $\bar{F}([y_1 : y_2 : y_3]) = \bar{F}([x_1 : x_2 : x_3]) = \langle X \rangle$ si y sólo si $[x_1 : x_2 : x_3], [y_1 : y_2 : y_3] \in \mathfrak{C}$. De esto último, y de que F es sobreyectiva, concluimos que la imagen inversa de una configuración de tipo genérico es una cónica que pasa por $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ y $[1 : 1 : 1]$. \square

Con la información proporcionada por el teorema previo, podemos saber cuáles puntos de \mathbb{A}_4^1 tienen la misma imagen bajo \bar{F} . Considerando a \mathbb{A}_4^1 como \mathbb{P}^2 con cuatro puntos fijos y la familia de cónicas que pasan por ellos como en la Figura 1.2.1, cada cónica tiene un mismo punto como imagen bajo \bar{F} . Así, viendo a \mathbb{A}_4^1 como celdas de varias dimensiones, dos triángulos compuestos por configuraciones del tipo genérico se mapean en un mismo intervalo de configuraciones genéricas de P_4^1 si el orden de los colores que caracteriza a uno se obtiene de permutar cíclicamente a la coloración característica del otro triángulo. Representamos esto en la Figura 3.3.1. Adicionalmente este último resultado nos indica el comportamiento de nuestra función original $F : A_4^1 \rightarrow \mathbb{P}_4^1$ ya que en los puntos genéricos el comportamiento es idéntico a \bar{F} ; y en los puntos restantes tenemos que cada una de las seis rectas de las cónicas degeneradas se mapean respectivamente en uno de los seis puntos no Hausdorff en \mathbb{P}_4^1 de acuerdo su coloración característica.

FIGURA 3.3.1. Representación de \mathbb{A}_4^1 como dominio de F

Notemos que el Caso 2 del Teorema 58 es la parte fundamental en la demostración de la descripción del comportamiento de F . Enunciaremos este caso del teorema ahora como un corolario, ya que para concluir este capítulo demostraremos su equivalencia a un teorema conocido de la geometría proyectiva. Para demostrar dicha equivalencia daremos una interpretación geométrica de la función F auxiliándonos en la relación de las configuraciones proyectivas con la razón cruzada.

COROLARIO 59. *Sea $Gen := \{\langle x \rangle \in \mathbb{A}_4^1 : \langle x \rangle \text{ es de tipo genérico}\}$ entonces la imagen inversa de un punto genérico en P_4^1 bajo $F|_{Gen}$ es una cónica no degenerada en $\mathbb{A}_4^1 (\cong \mathbb{P}^2)$ de la familia que pasa por cuatro puntos fijos en posición general, y estos puntos son los cuatro de tipo 3-1.*

Ahora daremos una definición que nos permitirá enunciar un teorema equivalente.

DEFINICIÓN 60. Sean cinco puntos $a, b, c, d, x \in \mathbb{P}^2$ en posición general; definimos la *razón cruzada de a, b, c y d proyectados desde x* como la razón cruzada $(l_a, l_b; l_c, l_d)$ del haz $\{l_a, l_b, l_c, l_d\}$ (ver Sección 1.2.2) que tiene como vértice a x y formado por cada una de las rectas pasan por a, b, c y d respectivamente. Denotamos la razón cruzada de los cinco puntos como $(a, b; c, d)_x$.

Notemos que, de la definición y del Teorema 28, se deduce que esta razón cruzada está bien definida y es un invariante proyectivo. Adicionalmente notemos que la condición de pedir los puntos en posición general implica que $(a, b; c, d)_x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

TEOREMA 61. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{P}^2$ en posición general y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{P}^2 : (a, b; c, d)_x = \lambda\}$ es la cónica que pasa por a, b, c, d y x , sin los puntos a, b, c y d .

Podemos encontrar una demostración del teorema anterior en libro de Graustein²; nosotros lo probaremos al mostrar la equivalencia entre éste y el Corolario 59.

Ahora veamos qué relación tiene la razón cruzada con nuestras configuraciones proyectivas de cuatro puntos y cómo a partir de ella se puede reinterpretar la función F .

OBSERVACIÓN 62. Dada la forma en que definimos la razón cruzada (ver Definición 23) como un punto de \mathbb{P}^1 que indica cuándo cuatro puntos con orden son proyectivamente equivalentes a otros cuatro puntos ordenados, podemos deducir que en el caso de cuatro puntos en posición general las definiciones de configuración y de razón cruzada coinciden; es decir, si $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1$ son cuatro puntos distintos entonces $\langle a, b, c, d \rangle = (a, b; c, d)$.

A continuación definiremos una función nueva que, como se verá en la siguiente proposición, es una definición alternativa de F y que ilustramos en la Figura 3.3.2.

DEFINICIÓN 63. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{A}_4^1 (\cong \mathbb{P}^2)$ con coordenadas: $a = [1 : 0 : 0]$, $b = [0 : 1 : 0]$, $c = [0 : 0 : 1]$ y $d = [1 : 1 : 1]$, definamos

$$G : Gen \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

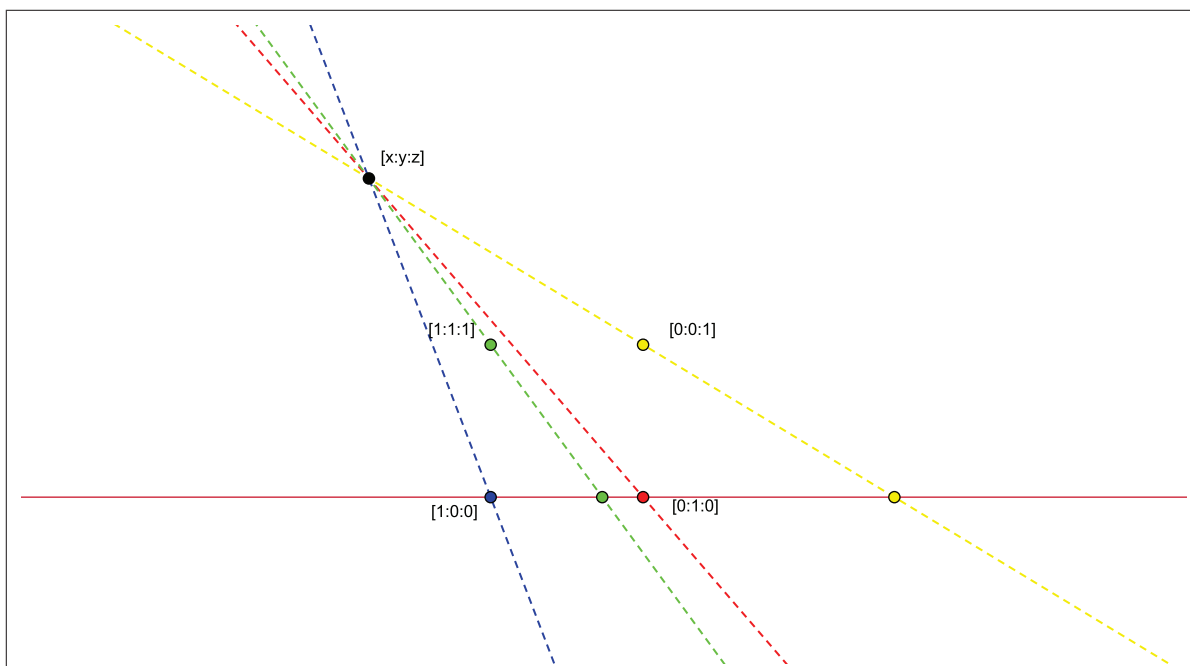
$$G([x : y : z]) := (a, b; c, d)_{[x:y:z]}$$

en donde $(a, b; c, d)_{[x:y:z]}$ es la razón cruzada de a, b, c y d proyectados desde $[x : y : z]$.

PROPOSICIÓN 64. Para todo $[x : y : z] \in Gen \subset \mathbb{A}_4^1$ se tiene que $G([x : y : z]) = F([x : y : z])$

DEMOSTRACIÓN. Sea $[x : y : z] \in Gen$. Calculemos $G([x : y : z]) = (a, b; c, d)_{[x:y:z]}$ en términos de una razón cruzada de puntos en una recta. Para ello consideremos la recta proyectiva $l := \{[\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3] \in \mathbb{P}^2 : \alpha_3 = 0\}$ con un sistema de coordenadas homogéneas dado por $\beta := \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$; así, para todo $[\alpha_1 : \alpha_2 : 0] \in l$ sus coordenadas en la base β serán $[\alpha_1 : \alpha_2]_\beta$. Ahora, al igual que en la Definición 60,

²Ver Graustein [6]

FIGURA 3.3.2. La función G

tomemos el haz de rectas $\{l_a, l_b, l_c, l_d\}$ con vértice $[x : y : z]$, encontremos los puntos de intersección de cada recta del haz con l . Ya que $a = [1 : 0 : 0]$ y $b = [0 : 1 : 0]$, entonces $l \cap l_a = \{[1 : 0 : 0]\}$ y $l \cap l_b = \{[0 : 1 : 0]\}$. Ahora, como todo punto en l_c y l_d queda determinado por las siguientes ecuaciones de planos en \mathbb{R}^3 :

$$(3.3.3) \quad \begin{aligned} l_c &: r(x, y, z) + s(0, 0, 1) \quad \text{p. a. } r, s \in \mathbb{R} \\ l_d &: t(x, y, z) + u(1, 1, 1) \quad \text{p. a. } t, u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Para encontrar las intersecciones de l con l_c y l_d se deben cumplir las igualdades:

$$\begin{aligned} rz + s &= 0 \\ tz + u &= 0 \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} s &= -rz \\ u &= -tz \end{aligned}$$

Sustituyendo en 3.3.3 resulta:

$$\begin{aligned}
l \cap l_c &= \{[rx : ry : rz - rz]\} = \{[x : y : 0]\} = \{[x : y]_\beta\} \\
l \cap l_d &= \{[tx - tz : ty - tz : tz - tz]\} = \{[x - z : y - z : 0]\} = \{[x - z : y - z]_\beta\}
\end{aligned}$$

Resumiendo, por la Definición 60, la definición de razón doble de un haz de cuatro rectas (ver la Definición 27) y los resultados del párrafo anterior, tenemos que para todo $[x : y : z] \in Gen$:

$$\begin{aligned}
G(x : y : z) &= (a, b, c, d)_{[x:y:z]} \\
&= (l_a, l_b : l_c, l_d) \\
&= ([1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0]; [x : y : 0], [x - z : y - z : 0]) \\
&= \left([1 : 0]_\beta, [0 : 1]_\beta; [x : y]_\beta, [x - z : y - z]_\beta \right)
\end{aligned}$$

Por otra parte, gracias a la Observación 62 podemos expresar F en términos de la razón cruzada para obtener

$$F([x : y : z]) = \langle [x : 1], [y : 1], [z : 1], [0 : 1] \rangle = ([x : 1], [y : 1]; [z : 1], [0 : 1])$$

Así para demostrar que $G([x : y : z]) = F([x : y : z])$ basta probar que:

$$\left([1 : 0]_\beta, [0 : 1]_\beta; [x : y]_\beta, [x - z : y - z]_\beta \right) = ([x : 1], [y : 1]; [z : 1], [0 : 1])$$

Demostraremos esto último exhibiendo directamente la equivalencia proyectiva de ambos conjuntos:

$$\varphi := \begin{bmatrix} (y^2 - zy)x & -(x^2 - zx)y \\ (y^2 - zy) & -(x^2 - zx) \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
(3.3.4) \quad \varphi([1 : 0]) &= [(y^2 - zy)x : (y^2 - zy)] = [x : 1] \\
\varphi([0 : 1]) &= [-(x^2 - zx)y : -(x^2 - zx)] = [y : 1] \\
\varphi([x : y]) &= [y^2x^2 - zyx^2 - x^2y^2 + zxy^2 : xy^2 - zyx - yx^2 + zyx] \\
&= [z(xy^2 - x^2y) : (xy^2 - x^2y)] = [z : 1]
\end{aligned}$$

en donde $(y^2 - zy)$, $(x^2 - zx)$ y $(xy^2 - x^2y)$ son todos distintos de cero, ya que de no ser así tendríamos:

$$\begin{aligned}
y^2 - zy = 0 &\Rightarrow y^2 = zy \Rightarrow y = z \\
x^2 - zx = 0 &\Rightarrow x^2 = zx \Rightarrow x = z \\
xy^2 - x^2y = 0 &\Rightarrow xy^2 = x^2y \Rightarrow y = x
\end{aligned}$$

lo cual no puede suceder, porque x , y y z son necesariamente diferentes entre sí y distintos de cero ya que $[x : y : z] \in Gen$. Como $\{[1 : 0], [0 : 1], [x : y]\}$ y $\{[x : 1], [y : 1], [z : 1]\}$ son conjuntos de puntos en posición general, entonces $\varphi \in PGL(2, \mathbb{R})$.

Por último:

$$\begin{aligned} & \varphi([x - z : y - z]) = \\ & [(y^2 - zy)(x^2 - zx) - (x^2 - zx)(y^2 - zy) : (y^2 - zy)(x - z) - (x^2 - zx)(y - z)] = \\ & [0 : 1] \end{aligned}$$

De esta última igualdad, de 3.3.4, y la Definición 23 tenemos que:

$$\left([1 : 0]_\beta, [0 : 1]_\beta ; [x : y]_\beta, [x - z : y - z]_\beta \right) = ([x : 1], [y : 1] ; [z : 1], [0 : 1])$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

De la proposición anterior se deduce directamente la equivalencia entre nuestro resultado principal y el teorema de geometría que mencionamos antes, así tenemos el siguiente corolario:

COROLARIO 65. *El Teorema 61 y el Corolario 59 son equivalentes.*

Bibliografía

- [1] AROCHA, J. L., BRACHO, J., AND MONTEJANO, L. Configurations of flats i: Manifolds of points in the projective line. *Discrete & Computational Geometry* 34(1) (2005), 111–128.
- [2] BRACHO, J. *Introducción analítica a las geometrías*. Fondo de Cultura Económica, 2009.
- [3] EFÍMOV, N. V. *Geometría superior*. Editorial Mir, 1984.
- [4] GARCÍA COLÍN, N. La combinatoria de cinco puntos en el plano. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2003.
- [5] GELFAND, I. M., GORESKEY, R. M., MACPHERSON, R. D., AND SERGANOVA, V. V. Combinatorial geometries, convex polyhedra and schubert cells. *Advances in Mathematics* 63(3) (1987), 301–316.
- [6] GRAUSTEIN, W. C. *Introduction to Higher Geometry*. Macmillan, 1952.
- [7] MAUVOIS ROMERO, M. Espacios de configuraciones. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2001.
- [8] RAMÍREZ, A. I., AND SEADE, J. *Introducción a la geometría avanzada*. Las Prensas de Ciencias, 2002.
- [9] REES, E. G. *Notes on Geometry*. Springer-Verlag, 1988.
- [10] ROSEMAN, D. *Elementary Topology*. Prentice Hall, 1999.
- [11] RYAN, P. J. *Euclidean and non-Euclidean Geometry: An analytic approach*. Cambridge University Press, 1986.
- [12] STRAUSZ SANTIAGO, R. Separoides: el complejo de radon. Tesis de maestría, Facultad de Ciencias, UNAM, 2001.

Esta tesis fue elaborada con los programas *Lyx* y *Geogebra*.