UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Letras Griegas en el Mercado Mexicano de Opciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

A C T U A R I O

P r e s e n t a

MANLIO ANTONIO
ALEJO HERNÁNDEZ

Director de Tesis:

M. en I. Jorge Luis
Silva Haro

2011

1. Datos del Alumno
Alejo
Hernández
Manlio Antonio
55-88-38-86
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
302050835

2. Datos del Tutor
M. en I.
Jorge Luis
Silva
Haro

3. Datos del Sinodal 1
Actuario
Enrique
Maturano
Rodríguez

4. Datos del Sinodal 2
Actuaria
Ana Lilia
Mendoza
Romero

5. Datos del Sinodal 3
Actuaria
Ana Laura
Duarte
Carmona

6. Datos del Sinodal 4
Actuaria María Fernanda del Carmen
Agoitia
Hurtado

7. Datos del trabajo escrito
Letras Griegas en el Mercado Mexicano de Opciones
51 páginas
2011

Índice General

Agradecimientos

Quisiera agradecer primeramente a mi familia, que ha sido uno de los principales motores en mi vida, sin ellos esto no hubiera sido posible. A mi madre la *Sra. Virginia Hernández Muñís*, porque gracias a ella siempre fui constante en la escuela y porque me apoyo en los momentos más difíciles. A mi padre el *Sr. Bonifacio Alejo Pérez*, ya que su guía y apoyo me hicieron poner más empeño en mis estudios. También a mi hermano *Esaú*, por el apoyo incondicional que me ha brindado no solo en la escuela sino a lo largo de toda mi vida.

También quisiera agradecer a todos los amigos y profesores que me enseñaron las primeras, segundas y terceras letras, en especial quisiera dar las gracias a los profesores de preparatoria y de licenciatura, que me enseñaron lo esencial para poder hacer esta carrera, y también a los grandes amigos de la vida, porque sin ellos el trago hubiera sido amargo, y el camino pesado. En especial quisiera agradecer al profesor *Jorge Luis Silva Haro*, por guiarme a lo largo de la realización de este proyecto.

Quiero agradecer también a la *Universidad Nacional Autónoma de México*, por sus instalaciones, talleres, cursos, bibliotecas, museos, trabajadores, profesores, ayudantes, en fin a la UNAM porque por esta institución somos todos, y la hacemos día a día, sin su identidad y su formación integral y humanística, no me reconocería a mí mismo, creo firmemente en la educación como baluarte del desarrollo y la libertad, porque *Educar es redimir.*

Por último y no menos importante, quiero agradecer al amor de mi vida, *Miriam Gómez Martínez*, por tenerme paciencia y también por brindarme su incondicional cariño y apoyo, sin ti amor esto sería en vano. Mi más puro corazón para ti.

En fin, si se me ha olvidado alguien, no ha sido a propósito, es solo que hay tanta gente detrás de esto y resultaría imposible poder acordarme de todos. A aquellos con los que tengo deuda, gracias totales. Esto va dedicado con especial gratitud, a cada uno de ustedes.

México D.F., 3 de marzo del 2011.

Introducción

Breves Antecedentes

En el año de 1900 se da a conocer una tesis doctoral del matemático francés *Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier* (1870-1946), su trabajo titulado *"Théorie de la spéculation"* fue el primero en utilizar el movimiento Browniano para la valuación de opciones financieras y más aún, su tesis doctoral es considerada históricamente el primer tratado en el cual se utilizan las matemáticas avanzadas en materia financiera.

Años después, a principios de los años sesentas, un economista norteamericano de nombre *Paul Samuelson* (1915-2009) descubre la tesis doctoral de *Bachelier*, y sus posteriores investigaciones sobre el tema marcan la pauta para una nueva teoría financiera que tiene que ver con la cobertura del riesgo financiero y de mercado mediante productos derivados.

Posteriormente, en 1973 *Fischer Black* y *Myron Scholes* publican un artículo de nombre *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"* en este artículo se hace una descripción matemática de los mercados y los productos financieros derivados haciendo uso principalmente de las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas, el modelo propuesto es más tarde generalizado por el economista estadounidense *Robert C. Merton* en ese mismo año. Por este trabajo obtuvieron el premio Nobel de Economía en 1997, sin embargo Fischer Black fallecería dos años antes de la premiación y por esto no le fue entregado el premio, empero el comité de premiación destacaría su participación en este avance científico.

Desde entonces, la teoría financiera se ha visto impactada por estos desarrollos y hoy en día miles de millones de dólares se transan diariamente en los mercados de futuros y de opciones, existen un sin fin de productos derivados, sobre subyacentes financieros o no financieros, que son usados ya sea para coberturas de riesgo de mercado y así como también para especulación, son instrumentos versátiles que se adaptan rápidamente a los mercados internacionales y que están presentes en casi todos los países del mundo. Es por esto que este tipo de instrumentos son comúnmente usados para la cobertura en los riesgos de mercado, así como también el análisis de riesgos financieros desde el punto de vista de las coberturas de los mismos.

Objetivos

Los principales objetivos de este trabajo son:

1. **Dar a conocer las bases teóricas sobre las cuales se sustenta la valuación de algunos *productos derivados* hablando concretamente sobre opciones europeas.**

2. **Analizar y realizar la cobertura por medio de las llamadas *Letras Griegas* o simplemente *Griegas* que son tasas de cambio en el precio de una opción con respecto a sus variables de valuación. A partir de aproximaciones discretas se elaborará, analizará y ejemplificará la sensibilidad a cambios en el precio del subyacente y cambios en la tasa de interés libre de riesgo. Estas son las griegas llamadas Delta (Δ), Rho (P) respectivamente. La Gamma (Γ) mide los cambios de la Delta con respecto a cambios en el precio del subyacente.**

Sobre este trabajo

Como tal, en México no existe un Mercado Mexicano de Opciones, el mercado organizado en México es el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer). Dentro de este, se llevan a cabo compra y venta de Opciones y Futuros. Sin embargo en este escrito se valúan opciones con activos subyacentes nacionales y precios históricos del año 2009, tratando de que los ejemplos se asemejen lo mejor posible al MexDer.

El presente trabajo resume la teoría matemática y financiera para la valuación de productos derivados y a su vez ilustra el cálculo de algunas Griegas. Para esto, este trabajo se divide en dos partes:

- El apartado de teoría financiera y de valuación de los productos financieros derivados: Se revisan y discuten los modelos matemáticos y financieros para poder valuar *Productos Financieros Derivados*. Esta parte es importante pero no es el tema central de este trabajo. Resalta su importancia porque se necesita una base teórica para poder comprender y aplicar los procesos de valuación. Esto se detalla en los capítulos 2 y 3.

- La parte de aplicaciones: Como razones de cambio las griegas son por definición *derivadas continuas* sin embargo los mercados no funcionan de esta manera. Es por esto que se analizan tres griegas desde un enfoque discreto, es decir, haciendo aproximaciones a las derivadas por medio de diferencias en el subyacente y la tasa de interés libre de riesgo. Esta parte abarca el capítulo 4.

Se consideran los siguientes supuestos para la valuación de productos financieros derivados:

1. No existe ganancia sin riesgo, es decir, no hay oportunidades de arbitraje y la inversión inicial neta es nula.

2. No hay costos de transacción.

3. Los participantes en el mercado pueden pedir prestado o prestar dinero a la misma tasa de interés libre de riesgo r.

4. Los participantes en el mercado buscan maximizar ganancias y minimizar pérdidas.

Capítulo 1
Mercados de Derivados

Revisando la definición de la Real Academia Española, entendemos por la palabra mercado:

> *"Sitio público destinado permanentemente, o en días señalados, para vender, comprar o permutar bienes o servicios."*

En este caso los bienes de los que son estudio este trabajo son los *productos financieros derivados*, concretamente las opciones, las cuales se comercian en dos tipos de mercados:

1. Los mercados organizados o también mercados listados.
2. Los mercados OTC (por las siglas en inglés de *Over The Counter*).

La principal característica del mercado organizado es que todos los contratos están normalizados, esto implica que los activos subyacentes, los precios de ejercicio, los plazos y los horarios de comercialización son preestablecidos, siendo imposible modificarlos. Se cuenta además con un organismo llamado *cámara de compensación*, cuyo principal fin es el de garantizar el cumplimiento de las obligaciones financieras, además de esto funge como intermediaria para la comercialización de los contratos financieros derivados. A su vez vigila que las normas emitidas por las autoridades competentes sean acatadas. Por último cobra una *cuota* o *prima* inicial para poder suscribir contratos. En México el mercado listado de derivados es el Mercado Mexicano de Derivados (*MexDer*) y la cámara de compensación es un fideicomiso de administración y pago llamado *Asigna Compensación y Liquidación*. Ambos comenzaron operaciones en 1998.

Los mercados OTC o también conocidos como *mercados no organizados* son aquellos mercados en los que las operaciones son pactadas directamente entre dos instituciones financieras, entre éstas y uno de sus clientes o entre particulares. Se definen los términos del contrato entre el comprador y el vendedor, implicando esto que los contratos se ajustan a las necesidades específicas de cada contraparte. Sin embargo al ser estos contratos muy específicos, se reduce su liquidez dado que es muy difícil encontrar otra contraparte con un contrato hecho a medida de un cliente distinto.

1.1. Antecedentes del Mercado Mexicano de Derivados (MexDer)

Desde 1978 en México se comienzan a cotizar futuros sobre el tipo de cambio peso/dólar, estos contratos se suspendieron a raíz del control de cambios decretado en 1982. Hacia el año

1983 la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) listó futuros sobre acciones individuales y petrobonos, éstos últimos registraron operaciones hasta 1986. Debido a problemas de riesgo esta negociación se suspendió en el año de 1987.

El Gobierno Federal ha emitido diversos instrumentos híbridos de deuda, que incorporan contratos forwards para la valuación de los cupones, lo cual permite indizar estos valores nominales a distintas bases. Estos instrumentos han sido importantes para la constitución de carteras, aunque no han tenido liquidez en los mercados secundarios. Entre los principales destacan: Petrobonos (1977 a 1991), indizados al petróleo calidad Istmo; Pagarés (1986 a 1991), indizados al tipo de cambio controlado; Tesobonos (1989 a la fecha), indizados al tipo de cambio libre.

En la década de los noventa se comenzaron a negociar contratos forward OTC (over the counter) sobre tasas de interés de títulos gubernamentales, pactados de manera interinstitucional sin un marco operativo formal, por esto fueron suspendidos en 1992. A finales de 1994 entraron en vigor las normas de Banco de México para la operación de contratos forward sobre la Tasa de Interés Interbancaria Promedio (TIIP) y sobre el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), sujetos a registro ante el banco central y cumpliendo las normas del Grupo de los Treinta (un grupo de 30 países que están respaldados por las instituciones financieras participantes en los mercados financieros globales), para garantizar el control administrativo y de riesgo.

Finalmente en 1994, la BMV y la Sociedad de Depósito, Instituto para el Depósito de Valores (S.D. INDEVAL) crearon el primer mercado estandarizado en México. La BMV se encargó de financiar el proyecto de un mercado de opciones y futuros, mientras tanto, el INDEVAL, tomó la responsabilidad de promover una cámara de compensación de derivados que se denominó *Asigna, Compensación y Liquidación*. Sin embargo, MexDer y Asigna comenzaron operaciones a finales de 1998.

Actualmente en el MexDer se encuentran listados las siguientes opciones y futuros[11]:

	Futuros	Opciones
Divisas	Dólar de los Estados Unidos de América y EURO	Dólar de los Estados Unidos de América (DA)
Índices	Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la BMV	Opciones sobre Futuros del IPC y Cotizaciones de la BMV
Acciones	América Móvil L, Cemex CPO, Femsa UBD, GCarso A1, Telmex L y WALMEX V.	América Móvil (AX), Cemex CPO (CX), Televisa CPO (TV), GMéxico B (GM), Telmex L (TX), Walmex V (WA) y Naftrac 02 (NA).
Deuda	TIIE a 28 días(TE28), Cetes a 91 días (CE91), Swap de TIIE a 2 y 10 años (SW02 y SW10), Swaps de TIIE a 2 y 10 años (Liquidación en Especie), Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal a 3, 10 y 20 años (M3 ,M10 y M20), Unidades de Inversión (UDI).	

1.2. Derivados y activos subyacentes mexicanos en el extranjero

A finales del año de 1992 se inició la negociación de opciones sobre American Depositary Receipts (ADR's) de Telmex L en The Chicago Board Options Exchange (CBOE), los ADR's son títulos que representan la propiedad de acciones de una empresa o sociedad que fue constituida fuera de Estados Unidos pero cuya transacción se realizó en los mercados de estadounidenses.

En 1994 se operaban diversas opciones sobre acciones mexicanas en CBOE, The American Stock Exchange (AMEX), New York Options Exchange (NYOE), New York Stock Exchange (NYSE) y Philadelphia Stock Exchange (PHLX), además de las bolsas de Londres y Luxemburgo. Simultáneamente, se celebraban contratos forward y swaps sobre tipo de cambio, tasas de interés y commodities (mercancías), entre intermediarios extranjeros y entidades nacionales, sin reconocimiento ni protección jurídica.

Entre 1992 y 1994 se listaron en las Bolsas de Luxemburgo y de Londres, warrants sobre acciones e índices accionarios mexicanos. El contrato de Telmex L resultó uno de los más exitosos. En 1993, en el CBOE, se operaron más de 30 mil millones de dólares en opciones sobre Telmex, importe cercano a 50 % de la operación total en acciones en la BMV, durante ese mismo año.

A principios del mes de Abril del 2011, en una primera etapa el Chicago Mercantile Exchange (CME) abre sus puertas a inversionistas mexicanos, que de esta forma sin necesidad de acudir a un intermediario estadounidense tendrán acceso a futuros sobre índices, monedas y tasas de interés de Estados Unidos, así como a futuros de maíz, trigo, gas natural, oro y plata. En una segunda etapa programada para el tercer trimestre del mismo año, se plantea que participantes del CME tengan acceso directo a los instrumentos que opera el MexDer, como los derivados de tasas de interés y tipo de cambio. Banco Santander realizó la primera operación con futuros del peso mexicano en Chicago.[15]

Capítulo 2
Productos Derivados

Dentro de la teoría financiera existen instrumentos llamados *Productos Derivados* que para su valuación dependen de otros activos (financieros o no financieros) de ahí su nombre. Al activo o activos del cual depende el valor de un producto derivado se le denomina *Activo Subyacente* o simplemente *Subyacente*. El *activo subyacente* puede ser de dos tipos, financiero o no financiero, dentro de los subyacentes financieros más importantes se encuentran:

1. Tasas de interés e índices como TIIE, IPC, Unidad de Inversión (UDI), etc.
2. Divisas (tipo de cambio)
3. Acciones de una empresa
4. Bonos a tasa variable
5. Otros derivados (riesgo crediticio)

Los subyacentes *no financieros* o *commodities* se pueden clasificar como:

1. Agrícolas y metalúrgicos
2. Energéticos
3. Climáticos

Tomemos como ejemplo una casa de apuestas en la cual se llevará a cabo una pelea de box entre A y B, se tiene conocimiento de que la probabilidad de que gane A es de .7 y la probabilidad de que gane B es de .3. Supongamos que por cada peso apostado a favor de A la casa de apuestas paga el doble y en caso de ganar B, la casa de apuestas no paga nada. Además de esto todos pueden vender boletos que pagarán al poseedor un monto de cien pesos en caso de ganar A, y que no pagarán nada en caso de que B gane. El boleto sería un producto derivado, ya que su valor depende del resultado de la pelea. Se ilustra mejor en el siguiente diagrama.

Pelea (Subyacente) Boleto (Derivado)

$$\$1 \longmapsto \begin{cases} \$2 & \text{(Gana A)} \\ \$0 & \text{(Gana B)} \end{cases} \qquad X \longmapsto \begin{cases} \$100 & \text{(Gana A)} \\ \$0 & \text{(Gana B)} \end{cases}$$

La pregunta principal de este ejemplo es: ¿cuál es el precio justo del boleto? Si por ejemplo una persona decide vender el boleto en \$60 tendría una ganancia neta de \$10 sin importar el resultado de la pelea. Dado que apostaría \$50 en la pelea a favor de A y de ganar A, la casa de apuestas le pagaría \$100 con los cuales liquidaría la obligación al poseedor del boleto, en caso de ganar B se pierden los \$50, pero tampoco hay obligación de pagar al tenedor del boleto. Si decide vender el boleto en \$50, entonces no existirían ganancias sin riesgo, de ganar A se liquidaría la deuda contraída con el tenedor del boleto y en caso de ganar B no se tendría ganancia alguna.

Este ejemplo ilustra el supuesto de *no arbitraje*, básico para la valuación de productos financieros derivados. Se dice que un precio justo es aquél precio que elimina las oportunidades de ganancia sin riesgo. En los mercados financieros el arbitraje es inducido por una descompensación en los mercados.

Un ejemplo de una descompensación entre dos mercados es el siguiente: supongamos que un inversionista inglés desea adquirir ¥1,000 dado que el tipo de cambio en Londres es £5=\$10=¥1,000 por otro lado se da cuenta que el tipo de cambio en Tokio está dado por ¥1,000=\$12=£6. Entonces el inversionista podría aprovechar esta descompensación para convertir ¥1,000 en \$12 en Tokio y luego convertir en Londres esos \$12 en ¥1,200 para lograr así una ganancia libre de riesgo de ¥200, suponiendo que no hay costos de transacción con una inversión neta nula.

2.1. Contrato Forward (f_t)

Antes de comenzar con las letras griegas, conviene comenzar a desarrollar la teoría de derivados con el instrumento más sencillo y de ahí ir haciendo más complejos los modelos para llegar a la fórmula de Black-Scholes-Merton. Comenzaremos con el contrato Forward.

Definición 2.1 (Contrato Forward)**.** *Un contrato forward es un acuerdo de dos partes, una de las cuales se compromete a comprar o vender un activo (subyacente) a cierto precio pactado (K) en una cierta fecha futura (T), este contrato se denota con f_t. Al precio pactado (K) se le denominará "Strike" y a la fecha futura (T) se le llamará "fecha de maduración". Decimos que aquel que compra el forward tiene una posición larga y aquél que lo vende tiene una posición corta.*

Generalmente estos contratos son celebrados entre dos instituciones financieras, o entre una institución financiera y uno de sus clientes. La parte que compra el activo subyacente se dice que tiene una *posición larga* y se compromete a comprar, mientras que la parte que vende tiene una *posición corta* y se compromete a vender el activo subyacente. En el contrato Forward y en los demás contratos de productos financieros derivados tomaremos en consideración las siguientes variables.

1. $S(t)$ Es el precio del activo subyacente al tiempo t con $t \in \{0, 1, \cdots, T\}$

2. T es la fecha de maduración del contrato.

3. Sea $D(t, T)$ la tasa de descuento que va de t a T. Cabe aclarar que en tiempo continuo $D(t, T) = e^{-r(T-t)}$ donde r es la tasa de rendimiento o bien para el caso de tiempo discreto $D(t, T) = \frac{1}{(1+r(T-t))}$

El costo de la posición larga del contrato forward al tiempo T se puede valuar como el precio del subyacente a maduración es $S(T)$ menos K, dado que pactamos comprar el subyacente al tiempo T en K unidades monetarias. Es decir:

$$(S(T) - K) \tag{2.1}$$

Si a maduración ocurre que $S(T) > K$ entonces se tiene una ganancia porque se compra a K que es más baráto que $S(T)$. De manera contraria tendremos una pérdida si a maduración $S(T) < K$, es decir, se compra caro. Con la posición corta, se tiene que entregar el activo subyacente y se reciben K unidades monetarias por este subyacente. Pasa lo inverso de la posición larga. Se tiene que el *payoff* [(1)] de la posición corta es:

$$(K - S(T)) \tag{2.2}$$

Sin embargo hay que notar que en la ecuación (2.1) esta diferencia puede ser negativa, la gráfica de las posiciones forward es la siguiente, si tomamos en cuenta que $S(t) \in [0, \infty)$.

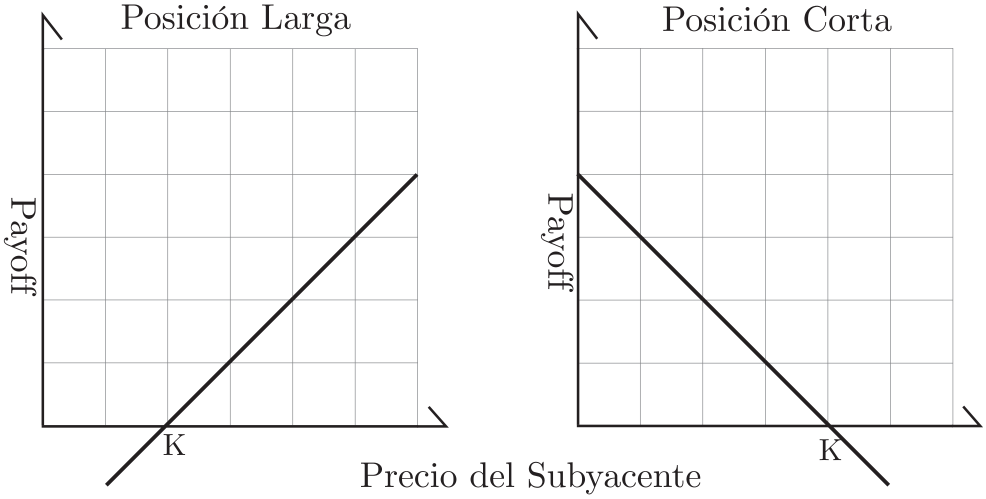

Figura 2.1: Gráficas de los payoffs del forward

2.1.1. Valuación del forward largo (f_t)

Por el supuesto de no arbitraje tenemos que si dos activos valen lo mismo en una fecha futura, entonces necesariamente hoy deben de valer lo mismo, consideremos para la valuación del forward los siguientes portafolios A y B que a fecha de maduración valen lo mismo y que están compuestos por:

Portafolio A	Portafolio B
Una unidad de activo subyacente ($S(0)$)	Forward largo (f_t) y efectivo por $D(t,T)K$

[(1)]El payoff se define como el valor del derivado al tiempo $t \in \{0, 1, \cdots, T\}$

Y de aquí notemos que en el Portafolio B se toman K unidades monetarias traídas las cuales se traen a valor presente, se toma este valor para poder comprar una unidad de subyacente (a precio K) en el futuro (T) y así poder cumplir con el contrato forward. Al tiempo t la unidad de subyacente tiene un valor de $S(t)$, si igualamos los payoffs en t, tenemos que:

$$\begin{aligned} f_t + D(t,T)K &= S(t) \\ f_t &= S(t) - D(t,T)K \end{aligned} \tag{2.3}$$

En la ecuación (2.3) tenemos el forward largo, ahora bien, qué hacemos si queremos valuar una posición corta, recordemos que el payoff del forward largo es menos el payoff del forward corto, esto haría que la posición contraria, invierta su signo quedando como:

$$f_t = D(t,T)K - S(t) \tag{2.4}$$

Definición 2.2 (Precio Forward)**.** *Aquél en el que no cuesta nada entrar en una posición en un contrato forward.*

De esta definición podremos obtener el valor de K tal que el valor del forward sea cero:

$$\begin{aligned} 0 &= S(t) - D(t,T)K \\ S(t) &= D(t,T)K \\ K &= S(t) \cdot D^{-1}(t,T) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pactando a (2.5) podremos entrar sin costo alguno en un contrato forward, sea en la posición corta o en la posición larga.

Este modelo también es útil para valuar forwards de tipo de cambio. Haciendo que el activo subyacente pague dividendos por ($\widehat{D}(t,T)$) unidades monetarias tenemos la composición de los siguiente portafolios:

Portafolio A	Portafolio B
Una unidad de activo subyacente ($S(0)$) y ($\widehat{D}(t,T)S(0)$) el dividendo pagado	Forward largo (f_t) y efectivo por $D(t,T)K$

Una vez más igualamos los payoffs de ambos portafolios en (t) tenemos:

$$\begin{aligned} f_t + D(t,T)K &= S(0)[\widehat{D}(t,T)] \\ f_t &= S(0)[\widehat{D}(t,T)] - D(t,T)K \end{aligned}$$

Y ahora obteniendo el precio forward:

$$\begin{aligned} 0 &= S(0)[\widehat{D}(t,T)] - D(t,T)K \\ K &= S(0)\left[\frac{\widehat{D}(t,T)}{D(t,T)}\right] \end{aligned}$$

Probablemente esto no diga mucho a simple vista, un ejemplo más concreto aclarará lo que se está haciendo. Considere a un inversionista mexicano que quiere realizar un pago en dólares de monto (K) en una fecha futura T, el inversionista decide pedir un préstamo en pesos equivalente a los dólares que necesita al tipo de cambio de hoy.

- Sea K el monto en dólares del pago.
- Sea $D(0,T)$ la tasa de interés que se paga en dólares.
- Sea $\widehat{D}(0,T)$ la tasa de interés que se paga en pesos mexicanos.
- Sea $S(0)$ el tipo de cambio el día de hoy.

Entonces el inversionista pide prestado:

$$S(0)[K](\widehat{D}(t,T))$$

Pero con ausencia de arbitraje, esto es equivalente a pedir prestados a tasa estadounidense los dólares a tipo de cambio futuro (f_t) en la fecha (T)

$$\begin{aligned} [K](f_t)D(0,T) &= [K]S(0)(\widehat{D}(0,T)) \\ f_t &= S(0)\left[\frac{\widehat{D}(0,T)}{D(0,T)}\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

Y así (2.6) da el tipo de cambio que aplica en una cierta fecha futura. A este instrumento se le llama sintético, porque aunque no es un derivado, se comporta como uno.

2.2. Contrato Futuro (F_t)

Los *contratos Futuros* son similares a los *contratos forward* pero hay algunas características en las que difieren: en primer lugar los contratos futuros son pactados comúnmente en un mercado estandarizado, esto quiere decir que son contratos estandarizados con fechas de maduración, subyacentes, tasas de interés y horarios preestablecidos, y que para cuyo cumplimiento se requiere un ajuste de márgenes diario,(2) para así asegurar el cumplimiento del contrato en su totalidad, en tanto que los contratos forward no cuentan con este tipo de regulación.

Definición 2.3 (Contrato Futuro)**.** *Es un acuerdo para comprar o vender un activo subyacente a precio establecido en una fecha futura también establecida. El tenedor del futuro está obligado a comprar el subyacente (posición larga), mientras que el emisor del Futuro (posición corta) acuerda vender el subyacente.*

Esto implica que a tiempo de maduración (T) el precio del contrato futuro y el precio del subyacente son el mismo. Porque de otra forma habría oportunidades de arbitraje. Cosa que se demuestra a continuación.

Lema 2.1. En T el precio del contrato futuro es igual al precio spot del subyacente en T. En otras palabras, $S(T) = F_T$

Demostración 2.1. Supongamos que no es cierto, en un primer caso supongamos que pasa que: $F_T > S(T)$ entonces tomamos en cuenta la siguiente estrategia:

1. Vendemos en corto un contrato de futuros. Recibimos en efectivo F_T.

(2) Las ganancias y pérdidas son colectadas día a día durante la vida del contrato

2. Compramos el subyacente cuyo valor es de S_T.

3. Realizamos la entrega del subyacente.

De esta manera hemos garantizado una ganancia libre de riesgo de $(F_T - S(T) > 0)$. Ahora suponemos que $S(T) > F_T$, las compañías interesadas en adquirir el activo subyacente, verán atractivo comprar futuros sobre este subyacente y esperar a que llegue el día de entrega, lo que provocaría la caída gradual del precio de los contratos futuros, las leyes de oferta y demanda equilibrarían el precio hasta una eventual igualdad. ■

De manera intuitiva el contrato futuro se puede ver como la suma o unión de varios contratos forward con duración de un día, esta observación es importante ya que nos ayudará en la siguiente sección a demostrar que si las tasas de interés son constantes, en consecuencia, los precios de ambos instrumentos deben de ser similares.

2.2.1. Valuación del contrato Futuro (F_t)

Al tener casi las mismas características que un forward largo, es de esperarse que bajo condiciones similares el precio de un contrato futuro sea similar o igual al del forward largo, esto lo demostraremos a continuación(3).

Teorema 2.1. *Dados un forward y un contrato Futuro con misma maduración y mismo activo subyacente, estos tienen el mismo precio si las tasas de interés son constantes en el tiempo.*

Demostración 2.2. Supongamos un contrato forward por n días, y F_i es el precio del futuro al final del día i-ésimo $(0 < i < n)$. Definimos también a k como la tasa libre de riesgo por día (por hipótesis constante) consideraremos la siguiente estrategia:

1. Tomar una posición larga en un contrato futuro por una cantidad de e^k al final del día 0

2. Incrementar la posición larga a e^{2k} al final del día 1

3. Incrementar la posición larga a e^{3k} al final del día 2

Y así en lo consecuente. El día i se tiene una posición larga en e^{ik} y la revisión de margen de ese día estaría dada por:

$$(F_i - F_{i-1})e^{ki}$$

Esta diferencia puede ser negativa o positiva. Ahora asumiendo que la ganancia o pérdida se invierte a la tasa de interés libre de riesgo k hasta el final del día n tenemos que:

$$(F_i - F_{i-1})e^{ik}e^{(n-i)k} = (F_i - F_{i-1})e^{nk}$$

El valor total de la inversión al día n sería:

$$\sum_{i=0}^{n}(F_i - F_{i-1})e^{kn} =$$

$$\left[(F_n - F_{n-1}) + (F_{n-1} - F_{n-3}) + \cdots + (F_2 - F_1) + (F_1 - F_0)\right] e^{kn} = (F_n - F_0)e^{kn}$$

(3)Esta estrategia fue propuesta por J.C. Cox, J.E. Ingersoll & S.A. Ross, en "The Relation between Forward Prices and Future Prices", *Journal of financial Economics 9* (Diciembre 1981); 321-46

Pero sabemos de antemano por el Lema (2.1) anterior que ($F_n = S(n)$) entonces sustituyendo:

$$(F_n - F_0)e^{kn} = (S(n) - F_0)e^{kn}$$

Invirtiendo F_0 en un bono libre de riesgo, junto con esta estrategia obtenemos:

$$F_0 e^{nr} + (S(n) - F_0)e^{kn} = S(n)e^{nk}$$

Ninguna inversión es requerida para las posiciones largas en futuros, por consiguiente un monto de F_0 puede ser invertido para obtener $S(t)e^{nk}$. Ahora por otro lado supongamos que el precio forward al final del día cero es G_0, invirtiendo G_0 en un bono libre de riesgo, y tomando una posición larga en e^{nk} contratos forward, garantizamos en T un monto de $S(T)e^{nk}$ (el precio forward y el precio de entrega son iguales) por lo tanto hay dos estrategias de inversión, una que requiere una inversión inicial de F_0 y la otra requiere una inversión inicial de G_0 y ambas generan una ganancia de $S(n)e^{nk}$ tenemos necesariamente que por hipótesis de no arbitraje:

$$F_0 = G_0$$

■

De esta forma hemos demostrado que el precio forward de la ecuación (2.1) de un forward largo es igual al de un contrato Futuro, bajo el supuesto de no arbitraje. Sin embargo cabe aclarar que si las tasas de interés se comportan de manera aleatoria el argumento de no arbitraje que relaciona estos dos instrumentos, deja de cumplirse. Aun cuando la diferencia entre estos sea muy pequeña.

2.3. Opciones

Uno de los instrumentos más versátiles son las opciones, se pueden pactar opciones sobre casi cualquier activo subyacente. La definición de una opción es la siguiente:

Definición 2.4 (Opción)**.** *Una opción es un contrato que le da al poseedor el derecho más no la obligación de vender o comprar un activo subyacente* $[S(0)]$ *a un cierto precio pactado* (K) *en una cierta fecha futura* (T)*. Se dice que una opción es una put*[(4)]*, si es una opción de venta y decimos que una opción es una call, si es una opción de compra.*

Se tienen dos posiciones por cada contrato compra y venta o *posición larga* y *posición corta*, respectivamente:

	Posición larga	Posición corta
Put	Compra el derecho más no la obligación de vender	Vende el derecho más no la obligación de vender
Call	Compra el derecho más no la obligación de comprar	Vende el derecho más no la obligación de comprar

(4) Put y call son las palabras inglesas para *Poner* y *Llamar*. Respectivamente.

En estos contratos la opcionalidad la tiene el poseedor y no el emisor, en otras palabras, solo aquel que compra la opción puede decidir si desea ejercer su derecho o no, aquí también es importante distinguir dos tipos de opciones. Una tiene la posibilidad de ejercer el derecho de compra o venta solo al final del periodo, a fecha (T) y la otra en cambio puede ejercer este derecho en cualquier momento en la vida de la opción. Llamaremos a la primera *opción europea* y a la segunda *opción americana*.

Definición 2.5 (Opción Europea). *Es un contrato que da al poseedor el derecho más no la obligación de vender o comprar un activo subyacente* ($S(0)$) *a un cierto precio pactado* (K) *en una cierta fecha futura* (T). *Estas opciones se denotan como* $c[S(0), K, T]$ *o* $p[S(0), K, T]$ *para la call y put respectivamente*

Definición 2.6 (Opción Americana). *Es un contrato que da al poseedor el derecho más no la obligación de vender o comprar un activo subyacente* ($S(0)$) *a un cierto precio* (K) *en una fecha t comprendida entre el día que la opción comienza hasta una cierta fecha futura* (T). *La call americana se denota como* $C[S(0), K, T]$ *y la put americana* $P[S(0), K, T]$.

Tenemos las siguientes variables para calcular el valor intrínseco de las opciones:

1. $S(0)$ es el valor del activo subyacente a tiempo 0

2. K es el precio al cual se pacta el subyacente

3. T es la fecha de maduración de la opción

La diferencia entre el precio de mercado ($S(T)$) y el precio pactado K recibe el nombre de *valor intrínseco* o *payoff* y para las opciones puede ser cero, dado que en estos instrumentos tienen la posibilidad de no ser ejercidos. Por ejemplo si compramos una opción europea call con un precio pactado de \$10 sobre la acción de una empresa, se pacta comprar una acción en \$10 pero no se está obligado a esto. A fecha de maduración si el precio (en mercado) de la acción está por debajo de \$10, entonces conviene no ejercer y comprar la acción en el mercado, en este caso el payoff de la opción vale cero. Si por el contrario la acción en el mercado tiene un valor superior a \$10, entonces ejerceremos nuestro derecho a comprar. Es así para cualquier mercado donde los participantes desean maximizar la ganancia.

Entonces para cada opción tenemos un valor intrínseco distinto, a continuación una tabla para comprar los payoffs de cada posición y cada tipo de opción, recordemos que como en el forward, la posición corta es el negativo de la posición larga:

	Posición larga	Posición corta
Call	$max\{[S(t) - K], 0\}$	$-max\{[S(t) - K], 0\}$
Put	$max\{[K - S(t)], 0\}$	$-max\{[K - S(t)], 0\}$

El que adquiere una call espera poder comprar a precios bajos, entonces ($S(t) - K$) debería de ser una diferencia positiva. Para el que compra un put espera poder vender a un alto precio, esto implica que ($K - S(t)$) debe de ser una diferencia positiva. Pasa lo mismo con las posiciones cortas, estas reflejan las necesidades del vendedor de las opciones, así el que vende una opción de comprar espera que ($S(t) - K$) sea menor que cero y para alguien que vende la opción de vender espera que la diferencia $(K - S(t))$ sea menor que cero.

Esto se representa en la figura (2.2), donde se comparan las posiciones cortas con las posiciones largas, si observamos cada gráfica, veremos que este es un *juego de suma cero* donde la ganancia de un individuo es la pérdida de su contraparte. Por tal motivo, solo nos limitaremos a valuar la posición larga, de cada opción.

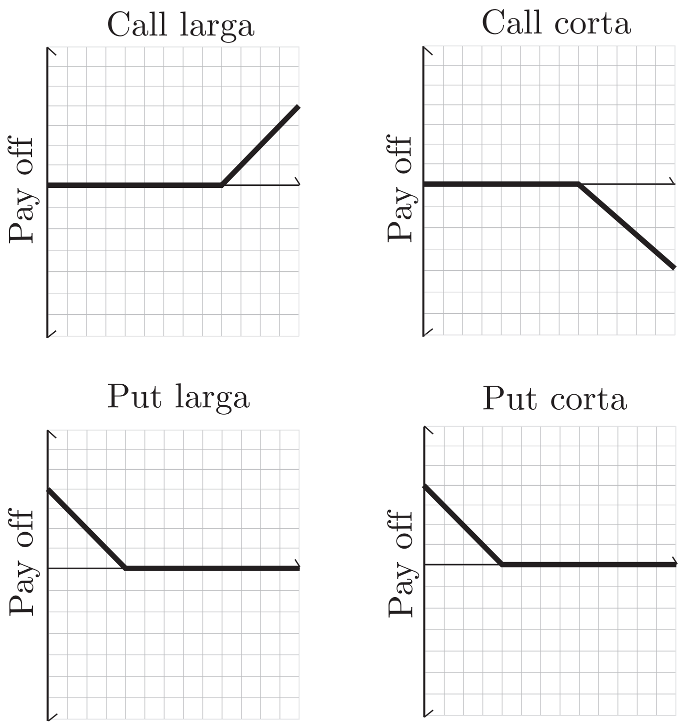

Figura 2.2: Gráficas de los payoffs de las Opciones

En lo siguiente, denotaremos el $max\{(A), 0\}$ donde A puede tomar cualquier valor intrínseco, como $(A)_+$. Uno de los resultados que ahora podremos enunciar es la paridad put-call, que nos dice que:

Teorema 2.2 (Paridad Put-Call)**.** *Una call larga más una put corta es igual a un forward largo*

$$c[S(t), K, (T-t)] - p[S(t), K, T] = S(0) - K \tag{2.7}$$

Demostración 2.3. Sean dos portafolios, compuestos de la siguiente manera:

- Portafolio A: Call larga y put corta
- Portafolio B: Forward largo

Tomamos los payoffs del portafolio A y el portafolio B:

$$\begin{aligned} \text{Payoff del portafolio A} &= (S(t) - K)_+ - (K - S(t))_+ = S(t) - K \\ \text{Payoff del portafolio B} &= (S(t) - K) \end{aligned}$$

Donde si en el portafolio A, se tiene que una de las opciones es cero, la otra debe de ser forzosamente $(S(t) - K)$ porque lo que gana una call lo pierde una put y viceversa. ■

2.3.1. Valuación de Opciones Europeas

Las opciones más sencillas, son las que tienen la libertad de elegir si son o no ejercidas a fecha de maduración, por esto, debemos de asegurar dos cosas al valuar una opción: lo primero a considerar es que independientemente de lo que pase con el precio del subyacente, tenemos que cubrir nuestra posición, esto es, no tenemos que terminar con pérdida o ganancia; y la segunda es que bajo cualquier escenario, el portafolio de cobertura debe de autofinanciarse, esto implica que no tenemos que sacar o inyectar dinero al portafolio.

Considérese la opción que solo vive durante un periodo, y supóngase también que el precio del subyacente puede tomar en el futuro dos valores posibles, para cada valor terminal del subyacente también hay un valor terminal del derivado.

$$S(0) \longmapsto \begin{cases} S_u > S(0) \\ \\ S_d < S(0) \end{cases}$$

Lo mismo pasa con el precio del derivado hoy (X), puede pasar que en el tiempo T este valga X_u o X_d, esto motivado en la dependencia del precio final del activo subyacente.

$$X \longmapsto \begin{cases} X_u \\ \\ X_d \end{cases}$$

Para cada escenario tenemos un portafolio asociado, consideremos un portafolio en el que se tienen una posición larga en Δ cantidad de subyacente y una posición corta en una opción, quisiéramos que bajo cualquier escenario, ambos portafolios tengan el mismo valor. Esto se cumple bajo el supuesto de no arbitraje:

$$\begin{aligned} \text{Precio del portafolio si el precio del subyacente sube} \quad &= S_u\Delta - X_u \qquad (2.8) \\ \text{Precio del portafolio si el precio del subyacente baja} \quad &= S_d\Delta - X_d \\ \text{Igualando ambas ecuaciones} \quad S_d\Delta - X_d &= S_u\Delta - X_u \\ \text{Despejando } \Delta, \quad \Delta &= \left\{ \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d} \right\} \qquad (2.9) \end{aligned}$$

Es así como obtenemos la igualdad para ambos precios, da lo mismo si el precio del subyacente se eleva a S_u o baja a S_d, en este caso el portafolio es libre de riesgo. Si observamos la ecuación (2.9) podremos ver la primer "griega", este cociente nos da la razón de cambio del derivado con respecto a cambios en el precio del subyacente. Sin embargo esto no toma mucho sentido porque estamos en un contexto discreto, y también porque es un derivado de un periodo.

Se tienen los precios del derivado igualados a maduración, lo que sigue ahora es saber para qué precio del derivado el día de hoy, ambos precios serán también iguales. ¿Qué precio el día de hoy nos garantiza una estrategia de no arbitraje? Si $D(0,T)$ es el valor presente de un peso pagado en T tendríamos que el valor presente del portafolio (2.8):

$$(S_u\Delta - X_u)D(0,T) \tag{2.10}$$

Si no hay oportunidades de arbitraje, el precio del portafolio hoy debería de ser igual al valor presente (2.10) entonces:

$$\begin{aligned} S(0)\Delta - X &= (S_u\Delta - X_u)D(0,T) \\ X &= S(0)\Delta + X_uD(0,T) - S_u\Delta D(0,T) \\ X &= \Delta[S(0) - S_uD(0,T)] + X_uD(0,T) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Sustituyendo (2.9) en (2.11) tenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} X &= \left\{\frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}\right\}[S(0) - S_uD(0,T)] + X_uD(0,T) \\ X &= S(0)\left\{\frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}\right\} - D(0,T)\left[X_u - S_u\left\{\frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}\right\}\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

La ecuación (2.12) se compone de dos partes: la primera es una parte positiva de una porción Δ del subyacente al tiempo 0 y la segunda parte es un bono, esto es importante porque posteriormente veremos la estrategia de cobertura y autofinanciamiento del modelo para varios periodos.

Para simplificar los cálculos introduciremos ahora un nuevo concepto, la *probabilidad de riesgo neutral.*

Definición 2.7 (Probabilidad de Riesgo Neutral)**.**

$$q = \left[\frac{S(0)D^{-1}(0,T) - S_d}{S_u - S_d}\right] \tag{2.13}$$

A esta probabilidad se le conoce también como *probabilidad sintética de riesgo ajustado* y a continuación demostraremos que q es menor que uno, pero mayor que cero, en ausencia de arbitraje.

Demostración 2.4. Por demostrar que en ausencia de arbitraje $0 < q < 1$:

$$0 < \left[\frac{S(0)D^{-1}(0,T) - S_d}{S_u - S_d}\right] < 1 \tag{2.14}$$

Sabemos que $S_u > S_d$ lo cual implica que $S_u - S_d > 0$

$$\begin{aligned} 0 &< \left[\frac{S(0)D^{-1}(0,T) - S_d}{S_u - S_d}\right] < 1 \\ 0 &< S(0)D^{-1}(0,T) - S_d < S_u - S_d \\ S_d &< S(0)D^{-1}(0,T) < S_u \end{aligned} \tag{2.15}$$

La desigualdad (2.15) se puede separar de tal forma que:

$$\begin{aligned} S(0)D^{-1}(0,T) &< S_u \\ S(0)D^{-1}(0,T) &> S_d \end{aligned}$$

De esta forma recordamos que $S(0)D^{-1}(0,T)$ es una inversión libre de riesgo, ahora supongamos que pasa lo contrario:

$$S(0)D^{-1}(0,T) > S_u$$
$$S(0)D^{-1}(0,T) < S_d$$

Esto daría cabida a una oportunidad de arbitraje dado que una inversión sin riesgo generaría mayores rendimientos que aquella que es riesgosa. ■

Retomando la ecuación (2.12) después de hacer álgebra, el valor del derivado hoy, quedaría como sigue:

$$X = D(0,T)[qX_u + (1-q)X_d] \tag{2.16}$$

En términos probabilísticos el precio del derivado hoy, es igual a traer a valor presente la esperanza del precio del derivado con respecto a una medida de probabilidad ($\mathbb{Q}$):

$$X = D(0,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] \tag{2.17}$$

Con $\mathbb{Q} = \{q, (1-q)\}$ la probabilidad de riesgo neutral.

Opciones Europeas Multiperiodo

La opción de un solo periodo se puede generalizar para muchos periodos. Uno de los conceptos fundamentales para poder valuar estos instrumentos son los *árboles binomiales* estos diagramas representan los posibles caminos de precios por los cuales el subyacente pasa a lo largo de la vida de la opción. Para cada nodo se tienen dos trayectorias posibles a saber, subir o bajar, y para cada una de estas trayectorias se tiene asociada una probabilidad. La hipótesis que estamos sustentando es que los precios del activo subyacente se comportan como una caminata aleatoria, es decir una sucesión aleatoria de pasos hacia arriba y hacia abajo.

En la figura (2.3) tenemos dos ejemplos de árboles binomiales. El que recombina valores y aquel que no recombina valores. El árbol que está a la izquierda en la figura (2.3) es un árbol que recombina valores, el árbol de la derecha es aquél que no recombina valores. Hay que notar que el árbol que recombina valores hay trayectorias que son equivalentes, es lo mismo ir de 1 a 2 y luego a 5 que ir de 1 a 3 y terminar en 5, no así en los árboles que no recombinan valores. Los nodos finales en un árbol que no recombina valores son justamente 2^N donde N es el número de periodos, en este particular ejemplo tenemos $2^3 = 8$ nodos finales.

Definición 2.8 (Árbol multiplicativo). *Se dice que un árbol binomial es multiplicativo si existen dos números reales u, d tales que $S_u = uS_i, S_d = dS_i$ donde S_i representa un nodo en particular.*

Es claro que el árbol que no recombina valores no es multiplicativo, dado que las trayectorias no se conmutan, es decir, no es lo mismo ir de 1 a 2 y terminar en 5, que ir de 1, luego a 3, para terminar en 6. El caso en donde el árbol recombina valores es lo mismo subir, bajar, subir que subir, subir, bajar.

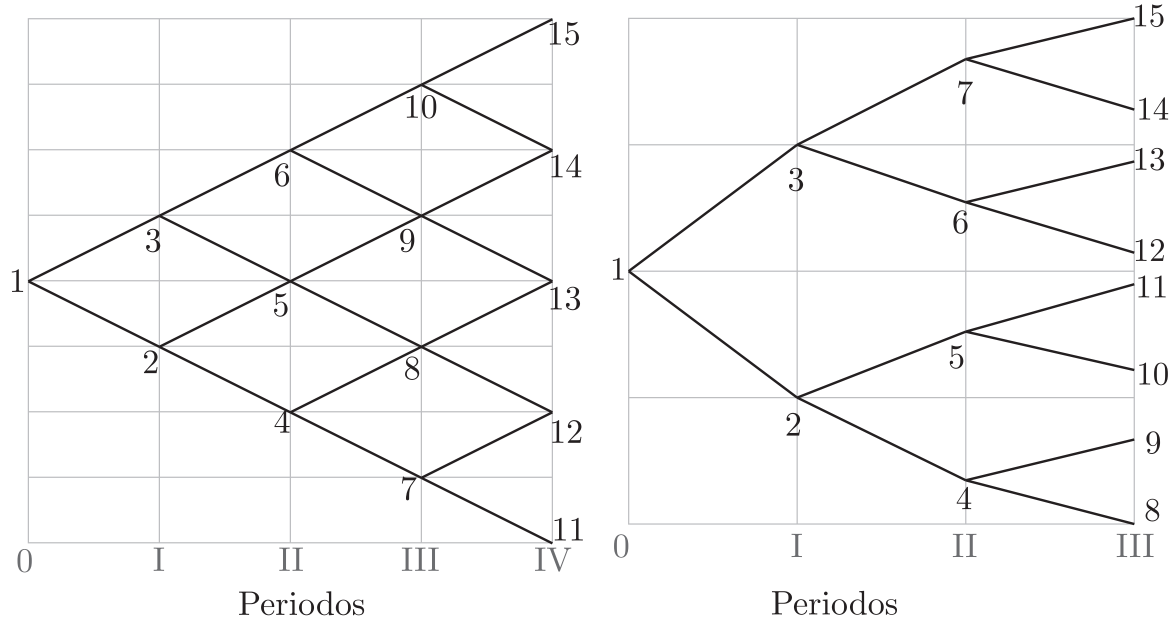

Figura 2.3: Gráficas de los árboles de precios

En este contexto podemos redefinir la probabilidad de riesgo neutral como sigue:

$$
\begin{aligned}
q_n &= \left[\frac{S(n)D^{-1}(n,n+1) - S_d}{S_u - S_d}\right] \\
q_n &= \left[\frac{S(n)(D^{-1}(n,n+1) - d)}{S(n)(u-d)}\right] \\
q_n &= \left[\frac{D^{-1}(n,n+1) - d}{u-d}\right]
\end{aligned}
$$

Un árbol binomial multiplicativo de dos periodos, se puede descomponer en tres árboles de un solo periodo. Entonces se puede aplicar el método de un solo periodo para cada árbol binomial de un periodo. En total serían tres iteraciones para darle precio al derivado. En el caso general tenemos $\left[\frac{N(N+1)}{2}\right]$ árboles de un solo periodo que coincide con el número de nodos a tiempo $(N-1)\delta$, en este conteo el periodo 0 también es tomado en cuenta, aunque en general este periodo es el día de hoy.

Entonces tenemos que la probabilidad de riesgo neutral (q) es la probabilidad de que el precio del subyacente suba y $(1-q)$ es la probabilidad de que el precio del subyacente baje, durante cada periodo el subyacente sigue una trayectoria, hasta llegar al tiempo T entonces iterando hacia atrás tendríamos las siguientes expresiones para un árbol como el de la figura (2.4):

$$
\begin{aligned}
X_u &= D(1\delta, T)[qX_{uu} + (1-q)X_{ud}] \\
X_d &= D(1\delta, T)[qX_{ud} + (1-q)X_{dd}] \\
X &= D(0, 1\delta)[qX_u + (1-q)X_d]
\end{aligned}
$$

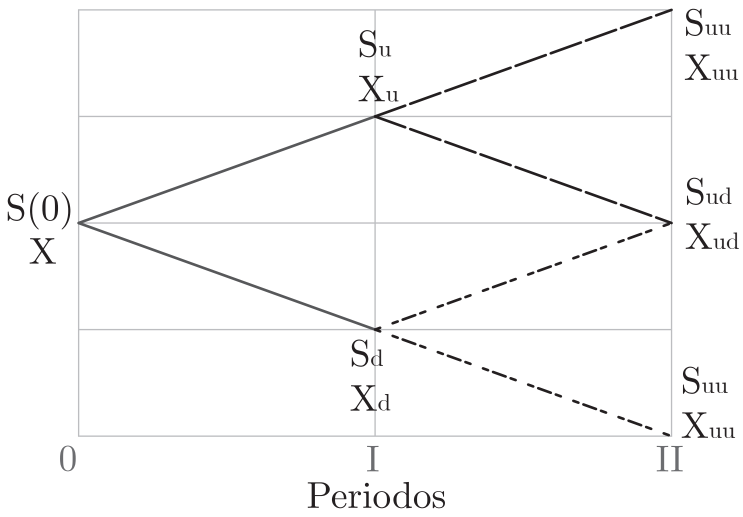

Figura 2.4: Árbol de dos periodos

Ahora bien sustituyendo los valores de X_u y de X_d tenemos la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
X &= D(0,1\delta)D(1\delta,T)\{q(qX_{uu}+(1-q)X_{ud})+[1-q][qX_{ud}+(1-q)X_{dd}]\} \\
X &= D(0,1\delta)D(1\delta,T)[q^2X_{uu}+2q(1-q)X_{ud}+(1-q)^2X_{dd}]
\end{aligned}
$$

En esta última ecuación notamos que q^2 es la probabilidad de subir dos veces, $(2q(1-q))$ es la probabilidad de quedar en el caso donde el subyacente vale $S_{ud}=S_{du}$ y para el caso donde el subyacente vale (S_{dd}) se tiene una probabilidad de $(1-q)^2$. En un árbol binomial ¿cuál es la probabilidad de subir j veces y bajar $N-j$? esta probabilidad está dada por una distribución de probabilidad binomial. Para el caso en que se tienen N periodos, se tiene la siguiente ecuación.

$$
\begin{aligned}
X &= \left[\prod_{i=0}^{N} D(i\delta,(i+1)\delta)\right]\left[\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{j}q^j\cdot(1-q)^{N-j}\cdot X_{u^jd^{n-j}}(S)\right] \\
X &= D^N\cdot\left[\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{j}q^j\cdot(1-q)^{N-j}\cdot X_{u^jd^{n-j}}(S)\right] \\
X &= D^N\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X]
\end{aligned}
$$

Tenemos que suponer además que para todo i en $\{0,1\delta,2\delta,\cdots,N\delta\}$, $D(i\delta,(i+1)\delta)=D$, es constante ya que q depende de la tasa de interés libre de riesgo que aplica en cada periodo.

Básicamente estamos valuando hacia atrás el árbol de precios del derivado, es decir, procedemos a valuar el precio de la opción en los últimos nodos, para seguir con los nodos del periodo $((N-1)\delta)$ y así hasta llegar a la fecha de inicio. Pero, ¿cómo podemos estar seguros de que este modelo es correcto? Dado que se aplica recursivamente el modelo de un periodo y este modelo está basado en la construcción de un portafolio que iguala el precio del derivado, bastará probar para toda trayectoria del precio del subyacente, que se replica el valor del derivado sin terminar con dinero adicional o sobrante. En cada periodo el portafolio debe ser reajustado, dado que el precio del subyacente va cambiando.

Consideremos el árbol binomial de la figura (2.5) de precios del subyacente[5], y sea $\omega = \{0, d, u, u\}$ un conjunto de nodos, es decir: bajar, subir, subir el camino que toma el subyacente. Para efectos del ejercicio, consideraremos una tasa de interés de 0 % y un precio pactado $K = 90$.

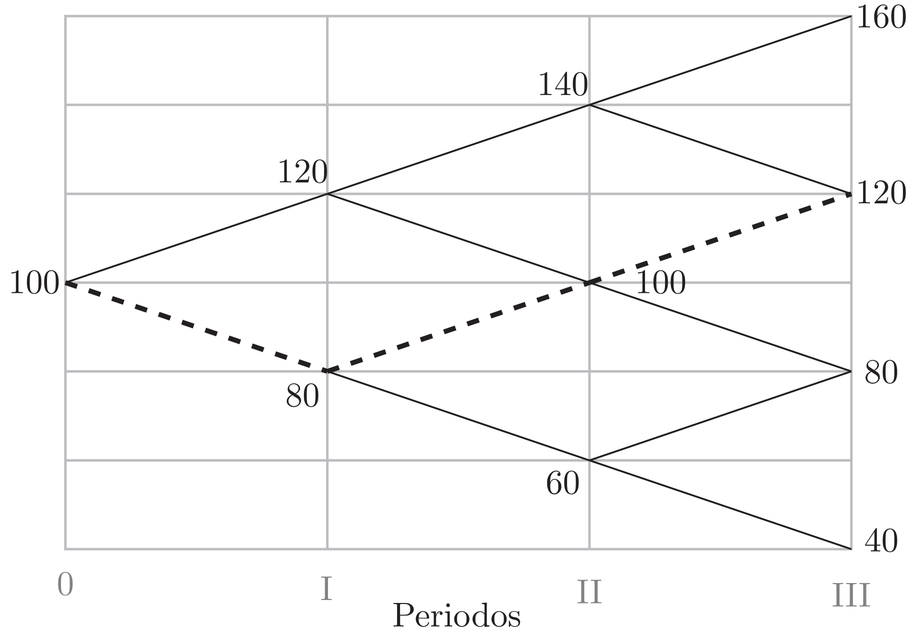

Figura 2.5: Árbol de precios de un activo subyacente, no multiplicativo

Bajo estos supuestos, podemos valuar el derivado primero en los nodos finales con la fórmula del payoff $(S(T) - K)_+$ para después valuar los nodos anteriores con la fórmula dada por la ecuación (2.16). En este ejercicio todas las probabilidades de riesgo neutral son iguales a 1/2. El valor del derivado en los nodos finales es: $(160 - 90)_+ = 70, (120 - 90)_+ = 30, (80 - 90)_+ = 0, (40 - 90)_+ = 0$.

Valor de $S(t)$	Unidades de subyacente $\Delta = \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}$	Préstamo Bancario $\beta = D((i-1)\delta, i\delta)[X_u - \Delta S_u]$	Valor del Derivado $\Delta S(t) + \beta$
100	5/8	-42.5	20
80	3/8	-22.5	7.5
100	3/4	-60	15
120	NA	NA	30

A continuación presentamos la estrategia:

1. En el día 0 el subyacente tiene un valor de 100, y nuestro portafolio está compuesto de 5/8 unidades de subyacente, es decir $(5/8)100 = 62.5$ y un bono con valor de -42.5, por lo tanto se obtienen 20 unidades monetarias de la opción y se piden prestados 42.5 para comprar los 62.5 del subyacente

[5]Ejemplo tomado del libro *Financial calculus: An introduction to Derivative Pricing* de Martin Baxter y Andre Rennie pp. 23-28

2. En el día 1 el subyacente baja de valor a 80, ahora nuestro portafolio está compuesto de 3/8 unidades de subyacente es decir debemos deshacernos de $(-2/8)80 = -20$ con lo que debemos de tener $(3/8)80 = 30$ del subyacente, la estrategia nos dice entonces que debemos tener 7.5 del derivado más una deuda por 22.5 esto es $22.5 + 7.5 = 30$

3. En el día 2 el subyacente incrementa su valor a 100, en esta ocasión debemos tener $(3/4)100 = 75$ del subyacente para esto tenemos una deuda de -60 y un valor del derivado por 15 para comprar 75 unidades monetarias del derivado

4. Llega el día de maduración, el subyacente ahora cuesta 120 esto es replicado por la estrategia del día anterior, esto es $120(3/4) - 60 = 30 = X_{duu}$ como se tenía previsto.

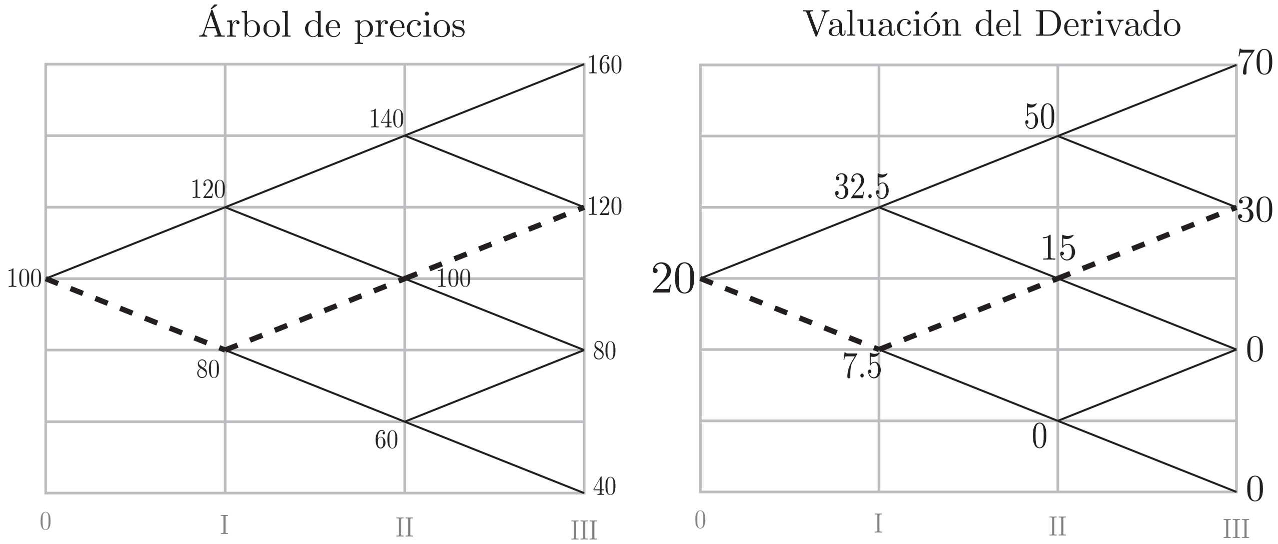

Figura 2.6: Valuación Recursiva

El contrato forward es parecido en su valor intrínseco a la opción, sin embargo la opción europea en T puede valer cero, este parecido de valores intrínsecos se puede aprovechar para verificar el modelo en un contrato forward que es más simple que una opción:

Demostración 2.5. Consideremos un contrato derivado simple que entrega una unidad de subyacente al tiempo de maduración T al tenedor del contrato, entonces el emisor compraría una unidad de subyacente el día de hoy y sin re balancear su portafolio la entregaría en T. O lo que es lo mismo:

$$X(0) = S(0)$$

Por otro lado es fácil demostrar que en un árbol multiplicativo la probabilidad de riesgo neutral cumple la siguiente igualdad[(6)]:

$$q \cdot u + (1 - q)d = D^{-1}((j)\delta, (j + 1)\delta) \tag{2.18}$$

[(6)]Para todo $j \in \{0, 1\delta, 2\delta, \cdots, (N - 1)\delta, N\delta = T\}$

Elevando la igualdad a la N

$$
\begin{aligned}
(qu+(1-q)d)^N &= D^{-N}((j-1)\delta, j\delta) \\
\sum_{i=0}^{N}\left[\binom{N}{i}q^i(1-q)^{N-i}u^i d^{N-i}\right] &= \left[D^{-N}(j\delta,(j+1)\delta)\right] \\
\sum_{i=0}^{N}\left[\binom{N}{i}q^i(1-q)^{N-i}u^i d^{N-i}S(0)\right] &= \left[D^{-N}(j\delta,(j+1)\delta)\right]S(0) \\
D(j\delta,(j+1)\delta)^N\sum_{i=0}^{N}\left[\binom{N}{i}q^i(1-q)^{N-i}(S(0)u^i d^{N-i})\right] &= S(0) \\
D(0,T)^N\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(T)] &= S(0) \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

En este resultado usamos el hecho de que:

$$\prod_{j=0}^{N} D(j\delta,(j+1)\delta) = D(0,T)$$

Lo cual se puede demostrar simplemente con una estrategia de arbitraje.

Observamos que la ecuación (2.19) es un operador lineal por ser una esperanza, usamos el precio forward.

$$S(0) - D(t,T)K$$

Sacando la esperanza al payoff del forward largo:

$$
\begin{aligned}
D(0,T)^N\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(0)-K] &= D(0,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(0)] + D(0,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[K] \\
D(0,T)^N\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(0)-K] &= S(0) + D(0,T)K
\end{aligned}
$$

■

De esta forma las ecuaciones para la valuación de opciones en el contexto de un árbol binomial que recombina valores, quedan de esta manera:

$$
\begin{aligned}
c[S(t),K,T] &= D^N\sum_{j=0}^{N}\left[\binom{N}{j}q^j(1-q)^{N-j}(S(j)-K)_+\right] \\
p[S(t),K,T] &= D^N\sum_{j=0}^{N}\left[\binom{N}{j}q^j(1-q)^{N-j}(K-S(j))_+\right]
\end{aligned}
$$

En cada caso el valor resultante de la call y la put, es traer a valor presente la esperanza bajo la medida de probabilidad de riesgo neutral $\mathbb{Q} = \{q,(1-q)\}$ el valor del payoff de la opción.

2.3.2. Valuación de Opciones Americanas

Hasta este momento únicamente hemos valuado opciones cuya opcionalidad se ejerce hasta la maduración de la opción. Las opciones americanas, pueden ejercer su opcionalidad en cualquier momento de la vida del contrato, esto en tiempo discreto es muy similar a la valuación de opciones Europeas.

Denotaremos a las opciones americanas de forma similar a las europeas, pero en esta ocasión usaremos letras mayúsculas para distinguirlas de las Europeas:

- $C[S(t), K, T]$ denotará una opción del tipo Call Americana, con un precio de subyacente a tiempo t igual a $S(t)$ y un precio pactado o Strike igual a K y con maduración en una fecha futura T
- $P[S(t), K, T]$ denotará una opción del tipo Put Americana, con un precio de subyacente a tiempo t igual a $S(t)$ y un precio pactado o Strike igual a K y con maduración en una fecha futura T

El valor de la opción americana en nodos finales es exactamente igual al valor de una opción europea, sin embargo, al trabajar los nodos más cercanos a cero, el valor de la opción puede ser sustituido por el valor de ejercicio y en lugar de seguir trabajando el árbol hacia atrás con los valores de la opción esta vez consideraremos el valor del payoff de la opción. De esta manera, un nodo en particular, tendría dos valores posibles a saber:

1. Traer a valor presente la esperanza de los precios de la opción o lo que es igual $S_n = D(n\delta, (n+1)\delta)[qX_u + (1-q)X_d]$
2. El valor de ejercer la opción en dicho nodo es decir $(S(t) - K)$ para una call y $(K - S(t))$ para el caso de una put, esto tendría repercusiones en los nodos anteriores, y por lo consiguiente en el precio de la opción.

Apelando a esta línea de razonamiento en cada nodo habría que comparar el payoff de la opción contra la esperanza del payoff, siendo óptimo escoger el máximo entre estos dos.

De esta manera, el valor de los nodos es:

- $X_u = max\{X_u, D(1\delta, T)[qX_{uu} + (1-q)X_{ud}]\}$
- $X_d = max\{X_d, D(1\delta, T)[qX_{ud} + (1-q)X_{dd}]\}$
- $X = max\{X, D(0, 1\delta)[qf_u + (1-q)f_d]\}$

Supongamos que tenemos un árbol de precios idéntico al mostrado en la figura (2.5) además consideremos una opción Put con $K = 110$ y para simplificar los cálculos consideraremos que la tasa de interés libre de riesgo es igual a 0 % de esta forma tenemos que para cada nodo la probabilidad de riesgo neutral asociada es de 1/2. Los precios que aparecen arriba de cada nodo representan el payoff de la opción $(K - S(t))$ mientras que los precios que aparecen debajo son los precios de la valuación de una opción europea, a la derecha aparece el precio de la opción americana.

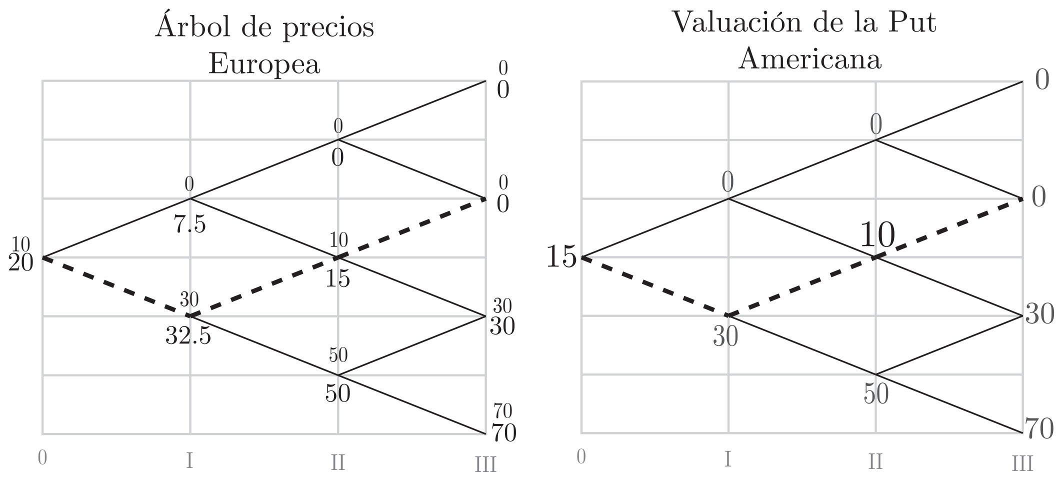

Figura 2.7: Gráficas comparativas de valuación Europea y Americana

En este ejemplo, se eligió ejercer en el segundo periodo, es decir se sustituye el valor del derivado ($X_{ud} = 15$) por el correspondiente payoff ($K - S(2\delta)) = (110 - 100)$, se aplica recursivamente el modelo y llegamos a que una opción americana valdría 15 unidades monetarias.

Notemos que el valor de una opción americana es idéntico al de una opción europea, solo cuando ejercemos la opción americana en T, o sea a maduración, de este razonamiento podemos deducir que el ejercicio prematuro de una opción americana no es óptimo. A continuación la demostración de este hecho:

Demostración 2.6. Encontraremos primeramente una cota inferior para una Opción Call Europea, para esto, supongamos que tenemos los siguientes portafolios:

- Portafolio A: Una Call Europea y una cuenta bancaria por $D(0,T)K$
- Portafolio B: Una unidad de subyacente

En T, la cuenta bancaria tiene un valor de K, si a maduración pasa que $S(T) > K$ la Call Europea es ejercida, se entrega el monto de la cuenta bancaria y este Portafolio en T tiene un valor de $S(T)$. Pero si acontece que $S(T) < K$ entonces no se ejerce la opción y se tiene que el valor del Portafolio a maduración es K. Es decir que a maduración A vale $max\{S(T), K\}$.

Por otro lado en T el Portafolio B, cuesta justamente $S(T)$, el Portafolio A, puede valer ya sea K si $S(T) < K$ o bien puede valer $S(T)$ si ocurre que $S(T) > K$, esto implica que a maduración el valor del Portafolio A puede ser mayor o igual que el valor del Portafolio B. Pero en ausencia de arbitraje, dos activos que valen lo mismo en una fecha futura, necesariamente valen lo mismo el día de hoy. Por lo tanto se cumple la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \text{Portafolio A} &\geq \text{Portafolio B} \\ c + D(0,T)K &\geq S(0) \\ c &\geq S(0) - D(0,T)K \end{aligned}$$

Debido a que el poseedor de una Call Americana tiene en todo momento el derecho de ejercer la opción, mientras que el poseedor de una opción Europea solo goza de este beneficio a fecha de maduración T, podemos argumentar que:

$$C \geq c \geq S(0) - D(0,T)K$$

En caso de que la tasa libre de riesgo sea mayor que cero, tendríamos que $C > (S(0) - K)$ si fuera óptimo ejercer prematuramente esta desigualdad se convertiría en igualdad quedando $C = (S(0) - K)$.

Esto quiere decir que el día de hoy, una opción americana cuesta más que el correspondiente Payoff de una opción Europea.

■

La valuación de opciones hasta ahora presentada, resulta poco práctica en los mercados financieros reales, sin embargo introduce un concepto muy importante para poder extender este modelo a un contexto continuo, este concepto es el de la caminata aleatoria. Tomando como punto de partida la distribución binomial, se puede hacer tender a cero el intervalo entre los nodos, esto se comporta como un proceso estocástico continuo que se utiliza en la modelación del comportamiento de los precios del activo subyacente con respecto al tiempo, este proceso estocástico es comúnmente llamado Movimiento Browniano o Proceso de Wiener. La siguiente sección es un desglose elemental de cómo se obtiene el modelo para tiempo continuo.

2.4. La fórmula de Black-Scholes-Merton

En 1973, Robert C. Merton, publicó *"Theory of Rational Option Pricing"* en este trabajo se hace referencia a un modelo matemático para la valuación de opciones llamado por él, *modelo de Black & Scholes*, este modelo tuvo repercusiones importantes, por no decir revolucionarias, en la forma en la que los *traders* valúan y cubren posiciones en opciones. Además se ha vuelto esencial para el éxito y desarrollo de la llamada *Ingeniería Financiera* desde su publicación hasta la fecha. En el año de 1997 esto les valió a sus creadores Myron Scholes y Robert C. Merton, el premio Nobel en Economía, Fisher Black fallecería en el año de 1995 y por lo tanto solo se entregó un premio simbólico.

A continuación se hace un esbozo del desarrollo de la fórmula, tomado del libro *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*[8] de Paul Wilmott.

Para su deducción, el modelo de Black-Scholes-Merton hace los siguientes supuestos:

- Las oportunidades de arbitraje no pueden existir por un tiempo significativo de tiempo, dado que las leyes de oferta y demanda hacen que los precios se muevan, eliminando así la ganancia sin riesgo.

- Existen las inversiones libres de riesgo, que garantizan una ganancia segura. Como bonos gubernamentales o depósitos en los bancos que crecen a una cierta tasa fija.

- Los precios del subyacente son modelados por un proceso estocástico llamado Movimiento Browniano Geométrico $\left\{S_t = S_0\left(\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right]\right)\Big| t \geq 0\right\}$ que depende del tiempo, donde B_t es un movimiento Browniano que cumple:
  1. $B_0 = 0$.
  2. La función $t \rightarrow B_t$ es continua.
  3. Tiene incrementos independientes, es decir si $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$ entonces $(B_{t_1} - B_{s_1})$ es independiente de $(B_{t_2} - B_{s_2})$.
  4. $(B_t - B_s) \sim N(0, t-s)$ si $s < t$
- No hay costos de transacción y el subyacente no pagan dividendos durante la vida de la opción.
- Se pueden hacer ventas en corto y el subyacente se puede dividir.
- Tanto la tasa libre de riesgo (r) y la volatilidad del subyacente (σ) son procesos determinísticos, es decir, se conoce su valor durante toda la vida de la opción.

De esta forma formamos un portafolio Π, que consiste en una posición corta en una opción financiera (V) y una posición larga en (Δ) unidades de subyacente. Es decir:

$$\Pi = V - \Delta S$$

Ahora bien, conforme pasa el tiempo el subyacente cambia de precio, suponiendo que el incremento en el tiempo está dado por (dt) y el subyacente cambia de S a $(S + dS)$ entonces la tasa de crecimiento con respecto al precio (S) está dada por (dS/S) en la mayoría de los modelos descompone esta tasa de cambio en dos partes. La primera determinística dada por μdt dónde μ es constante y representa la tasa promedio de crecimiento del subyacente y la segunda parte corresponde a cambios aleatorios en el precio del subyacente y está dada por σdX donde σ representa la volatilidad del subyacente y dX representa una muestra de una normal estándar, que será explicada más adelante.

Uniendo los dos componentes del rendimiento, obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt \tag{2.20}$$

Ahora bien, el término dX es el único que no hemos explicado, supongamos por un momento que la volatilidad es cero, es decir que este término aleatorio es nulo, entonces el rendimiento esperado estaría dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} &= \mu dt \\ \text{Integrando} \quad \int \frac{dS}{S} &= \int \mu dt \\ \text{Resolviendo la ecuación diferencial} \quad \log(S) + k &= (t)\mu \\ S &= e^{(t)\mu + c} \end{aligned}$$

Pero si tenemos como condición inicial que a tiempo t_0, el valor del subyacente es S_0 (haciendo $c = \log(S_0) - \mu t_0$) entonces tenemos la siguiente ecuación.

$$S = S_0 e^{\mu(t-t_0)}$$

Esta ecuación modela una inversión libre de riesgo en tiempo continuo, con tasa de interés μ y fecha de inicio igual a t_0, esto tomando en cuenta que el componente de aleatoriedad no está presente, es decir, cuando la volatilidad del subyacente es igual a cero, pero en el caso de que esto no sea así, se agrega el factor σdX.

El término dX representa la aleatoriedad del proceso de precios del subyacente, y es representado mediante un proceso de Wiener, o también conocido como movimiento Browniano, esto motivado principalmente porque existe una probabilidad creciente de que el precio de un subyacente esté más alejado del precio inicial conforme se aleja de la fecha inicial. Este movimiento Browniano cumple tres propiedades en concreto las cuales son:

1. dX es una variable aleatoria Normal Estándar
2. La media de dX es cero
3. La varianza de dX está dada por dt

O bien descrito de otra forma:

$$dX = \phi\sqrt{dt}$$

Donde $\phi \sim N(0,1)$. Sin embargo la ecuación (2.20) es un ejemplo particular de una caminata aleatoria y por esto no se puede resolver de manera determinística para el precio del subyacente (S) por medio del cálculo infinitesimal que usamos anteriormente, es por esto que usaremos el *Lema de Itô* para resolver esta ecuación diferencial estocástica. Básicamente el Lema de Itô es el Teorema de Taylor para variables aleatorias.

Lema 2.2 (Lema de Itô)**.** Supóngase que $f(s,t)$ es una función tal que todas sus segundas derivadas son continuas, sea (s) un proceso estocástico que satisface

$$ds = \mu dt + \sigma dX$$

Entonces $f(s,t)$ satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$df = \sigma s \frac{\partial f}{\partial s} dX + \left[\mu S \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right] dt$$

En un caso más particular, podemos suponer que tenemos una opción que depende del precio del subyacente (S) y del tiempo (t), digamos, $V(S,t)$ entonces usando el lema de Itô, podemos escribir:

$$dV = \sigma S \frac{dV}{dS} dX + \left[\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right] dt \tag{2.21}$$

Y regresando a nuestra primera línea de razonamiento, tenemos un portafolio Π que está integrado por una opción V y una posición corta en Δ cantidad de subyacente, entonces el cambio en el valor del mismo está dado por:

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

Sustituyendo todas las ecuaciones[(7)], tendremos que el cambio en el valor del portafolio está dado por:

$$
\begin{aligned}
d\Pi &= \left\{\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dX + \left[\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right]dt\right\} - \Delta[S(\mu dt + \sigma dX)] \\
d\Pi &= \sigma S\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)dX + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu\Delta S\right)dt
\end{aligned}
$$

Para eliminar la aleatoriedad del modelo, se puede sustituir

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Quedando la ecuación como sigue:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \tag{2.22}$$

Ahora bien la ecuación anterior modela el crecimiento de un portafolio compuesto de un derivado y Δ unidades de subyacente, supongamos que la tasa de crecimiento libre de riesgo es de r, entonces una inversión por un monto inicial de Π crecería $r\Pi dt$ en un tiempo igual a dt, si la parte derecha de (2.22) es más grande que $r\Pi dt$ entonces un inversionista podría pedir prestado a tasa r un monto total de Π para comprar el portafolio y en dt liquidar su deuda por $r\Pi dt$ y obtener una ganancia. Ahora bien si $r\Pi dt$ es menor que la parte derecha de la ecuación (2.22) el inversionista vendería el portafolio e invertiría (Π) en un banco que garantice un rendimiento de $r\Pi dt$.

En ambas estrategias se garantiza una ganancia sin riesgo instantánea y sin costo. Entonces la posibilidad de existencia de dichas oportunidades nos indica que la ganancia del portafolio y una inversión sin riesgo deben de ser iguales. Entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
r\Pi dt &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \\
\text{(Sustituyendo } \Pi\text{)} \qquad r\left[V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right]dt &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \\
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV &= 0 \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

La igualdad que se presenta en (2.23) es la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes y a pesar de que una ecuación de esta naturaleza puede no tener más que soluciones numéricas, es decir, no existe una familia de funciones que satisfagan este tipo de ecuaciones, para este caso en particular sí tenemos muchas soluciones, los valores de las calls y puts, inclusive S satisface esta ecuación. Sin embargo el desarrollo matemático de la resolución de esta ecuación queda fuera de los objetivos de este trabajo, es por esto que solo se enuncia la solución.

$$c = S(0)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{2.24}$$

$$p = Ke^{-rT}N(d_2) - S(0)N(d_1) \tag{2.25}$$

En donde:

[(7)]Usando la ecuación (2.20) dónde $dS = S(\mu dt + \sigma dX)$

$S(0)$	Valor del subyacente al tiempo 0
d_1	$\dfrac{ln(S(0)/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$
d_2	$\dfrac{ln(S(0)/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$
r	Es la tasa de interés libre de riesgo
$N(x)$	Es la probabilidad acumulada hasta x de una función de distribución normal estándar
σ^2	Es la volatilidad del activo subyacente

Capítulo 3
Las letras griegas

El problema que enfrentan los emisores y compradores de opciones es la Administración del Riesgo, muchas veces este riesgo es aminorado o eliminado al hacer operaciones simultaneas con posiciones opuestas a las que se desea una cobertura, por ejemplo si una empresa emite una opción de venta de dólar, lo ideal sería cubrir esta posición con una opción de las mismas características pero con una posición larga. Esto en la práctica puede resultar complicado, dado que es necesario encontrar la opción de posición opuesta pero con características iguales o en el peor de los casos muy similares.

Para tratar de resolver este problema podemos analizar los cambios que generan un riesgo dentro de la valuación de una opción, como pueden ser el precio del subyacente ($S(t)$), el tiempo (t), la desviación estándar del subyacente (σ) y la tasa de interés (r). Estas variables afectan el precio de la opción, así podremos elaborar estrategias de cobertura usando estas tasas de cambio, las cuales reciben el nombre de *Letras griegas* o simplemente *griegas*. Suponiendo que los precios de la call y la put son respectivamente:

$$c = S(0)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{3.1}$$

$$p = Ke^{-rT}N(d_2) - S(0)N(d_1) \tag{3.2}$$

De dónde:

$S(0)$	Valor del subyacente al tiempo 0
d_1	$\frac{ln(S(0)/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$
d_2	$\frac{ln(S(0)/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$
r	Es la tasa de interés libre de riesgo
$N(x)$	Es la probabilidad acumulada hasta x de una función de distribución normal estándar
σ^2	Es la volatilidad del activo subyacente

Las letras griegas se definen como las tasas o razones de cambio del precio de la opción con respecto a las variables de valuación (precio del subyacente, tiempo a maduración, desviación estándar del subyacente, tasa de interés). Estas derivadas juegan un papel importante en la administración del riesgo.

3.1. Razón de cambio entre el precio de la opción y el subyacente: Delta (Δ)

La delta de una opción, se define como el cambio porcentual del precio de una opción con respecto al precio del subyacente. Generalmente se le da tres interpretaciones:

1. Es la sensibilidad en el precio del derivado a las variaciones del precio del subyacente.
2. Es la cantidad de subyacente para tener un portafolio libre de riesgo.
3. Es la probabilidad de que la opción sea ejercida o acabe dentro del dinero.

$$\text{Para el caso de una call} \quad \Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) \tag{3.3}$$

$$\text{Para el caso de una put} \quad \Delta = \frac{\partial p}{\partial S} = 1 - N(d_1) \tag{3.4}$$

3.2. Sensibilidad de la Delta con respecto al precio del subyacente: Gamma (Γ)

La Gamma es la sensibilidad de la delta (Δ) a los cambios en el precio del activo subyacente, esto quiere decir que la Gamma mide la exposición al riesgo de la cobertura delta, en otras palabras la gamma nos dice la variabilidad de la delta con respecto a pequeños cambios en el precio del activo subyacente, si la Gamma es pequeña esto implica que la delta cambia muy poco con respecto a cambios pequeños en el precio del subyacente, y por ende, el rebalanceo del portafolio libre de riesgo puede no ser tan frecuente, si por otro lado la Gamma es grande, esto implica que la delta cambiará en gran medida a pequeños cambios en el precio del activo subyacente, el rebalanceo tiene que hacerse de manera frecuente, ya que existe una exposición importante al riesgo del mercado.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 X}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S(0)\sigma\sqrt{T}} \tag{3.5}$$

La variable $N'(x)$ es la función de densidad de una normal estándar. Desglosada a continuación.

3.3. Razón de cambio entre el precio de la opción y el tiempo: Theta (Θ)

La Theta se define como la tasa de cambio del precio de la opción con respecto a la fecha de vencimiento, esta griega suele ser negativa, dado que mientras el tiempo transcurre y lo demás es constante, la opción pierde su valor. Es decir mientras más cerca esté la fecha de entrega del subyacente, la opción valdrá menos. Recordemos que el tiempo es también una medida que afecta la volatilidad en el modelo de *Black-Scholes* el valor de la Theta es:

$$\text{Para el caso de una call} \quad \Theta = -\frac{\partial c}{\partial T} = -\frac{S(0)N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2) \tag{3.6}$$

$$\text{Para el caso de una put} \quad \Theta = -\frac{\partial p}{\partial T} = -\frac{S(0)N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2) \tag{3.7}$$

Tomando en consideración que $N(-d_2) = 1 - N(d_2)$ por la simetría de la distribución normal estándar, la theta de la put, es mayor que la theta de su correspondiente call.

Y definiendo $N'(x)$ como:

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Es decir la función de densidad de una normal estándar o en otras palabras $\mathbb{P}[X = x]$ cuando $X \sim N(0,1)$

3.4. Razón de cambio entre el precio de la opción y la volatilidad: Vega (ν)

En este apartado cabe aclarar que aunque la *Vega* no forma parte del alfabeto griego, se le da el nombre de letra griega por convencionalismo, ya que como veremos a continuación, es una derivada parcial del precio de una opción. Se denota generalmente con la letra griega *Ni* minúscula (ν), aunque algunos textos manejan a su vez las letras Tau (τ) y Kappa (κ) minúsculas.

Una de las hipótesis que hemos tomado para la valuación de opciones tiene que ver con la volatilidad, es decir, suponemos que la volatilidad es constante, pero en la práctica esto no ocurre. La Vega es la derivada del precio de una opción con respecto a la volatilidad, esta letra griega mide la variación porcentual en el precio de la opción con respecto a cambios pequeños en la volatilidad. Si el valor absoluto de la Vega es pequeño esto implica que el instrumento no resiente cambios pequeños de la volatilidad, si por el contrario el valor absoluto de la Vega es grande eso quiere decir que el valor de la opción cambia drásticamente cuando hay pequeños cambios en la volatilidad y lo demás es constante. La Vega para una Put o una Call, se calcula como sigue:

$$\nu = \frac{\partial X}{\partial \sigma} = S(0)\sqrt{T}N'(d_1) \tag{3.8}$$

3.5. Razón de cambio entre el precio de la opción y la tasa de interés: Rho (P)

La Rho de una opción es la tasa de cambio de su precio con respecto a pequeños cambios en la tasa de interés libre de riesgo, mientras lo demás es constante. Así como la volatilidad esta variable es considerada como constante durante toda la vida del contrato, el respectivo valor de esta griega está dado a continuación:

$$\text{Para el caso de una call} \quad P = \frac{\partial c}{\partial r} = KTe^{-rt}N(d_2) \tag{3.9}$$

$$\text{Para el caso de una put} \quad P = \frac{\partial p}{\partial r} = -KTe^{-rT}N(-d_2) \tag{3.10}$$

Capítulo 4
Ejemplos de letras griegas

Uno de los factores que dificultan el cálculo de las letras griegas, es el grado de complejidad que significa el derivar las fórmulas de Black-Scholes-Merton, porque estas ecuaciones resultan de múltiples composiciones de funciones no lineales (en la mayoría de los casos), aunado a esto tenemos también que el factor de continuidad no está presente en los mercados financieros actuales, es decir que no es posible de manera formal medir las tasas de interés, el tiempo, y precios de subyacentes de forma continua porque los mercados se actualizan y se mueven de forma discreta a intervalos más o menos homogéneos.

Sin embargo, no es necesario calcular las derivadas, una aproximación bastante certera y en un contexto discreto se puede dar por medio de diferenciales. Es decir, por medio de diferencias podemos hacer una aproximación a la recta tangente de una función en un punto dado.

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Y para las derivadas de segundo orden tenemos la siguiente fórmula[(1)]:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

De esta forma podemos hacer pequeñas variaciones en la variable x para poder ajustar una recta secante a la función de precio de una opción call o put. Tomaremos los siguientes cambios en las variables de valuación:

- Para el tiempo, tomaremos como Δt igual a un día $(\frac{1}{365})$
- Para la tasa de interés libre de riesgo tomaremos como Δr una diezmilésima de punto porcentual, es decir $.0001 = .01\,\%$
- Para el subyacente, tomaremos como ΔS igual a ¢1, un centavo.

De esta forma podemos aproximar de manera muy certera el comportamiento de las derivadas, con simple cálculos aritméticos. A continuación un ejemplo desarrollado en Excel, para ver el comportamiento de la función $f(x) = x^3$ tomando un incremento $h = .1$.

[(1)]Esta aproximación se deduce de usar la definición de derivada de manera iterativa:

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a + h/2) - f'(a)}{h}$$

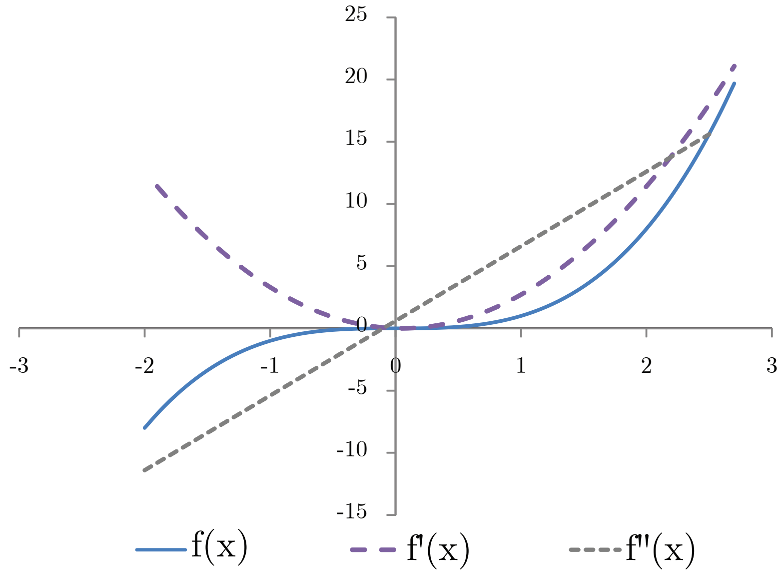

Figura 4.1: Gráfica de x^3 y las aproximaciones a $f'(x)$ y a $f''(x)$

4.1. La cobertura Delta (Δ)

Uno de los resultados inmediatos que se desprenden de la fórmula de Black-Scholes-Merton son las letras griegas, se entienden como cambios en el precio de una opción con respecto a cambios en las variables intrínsecas de valuación (K, T, r, S σ) a grandes rasgos estos cambios pueden predecir la manera en la cual el precio de la opción varía. Todas las griegas tienen un signo (positivo o negativo) un signo positivo indica que el valor de la opción se incrementará cuando el factor incrementa, un signo negativo nos dice que el valor de la opción disminuirá cuando ese factor incrementa.

La delta es la letra griega asociada a un portafolio de riesgo neutral, tomemos un subyacente contingente el precio de este subyacente a futuro puede tomar dos valores posibles, digamos S_u y S_d donde $S_d < S(0) < S_u$, la dependencia del precio de la opción a los cambios en el precio del subyacente, obliga a que el derivado cambie su precio dependiendo del escenario que se presente en el futuro, supongamos que para S_u el derivado toma un valor intrínseco de X_u y para el caso en que el subyacente valga S_d el derivado valdría X_d.

Ahora imaginemos que tenemos un portafolio X con una posición larga en Δ unidades de subyacente y una posición corta en una opción, quisiéramos que en un futuro el valor del derivado sea igual sin importar el estado de la naturaleza en el que terminemos, para lograr esto tomemos en cuenta el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} X &= \Delta S_u - X_u \\ X &= \Delta S_d - X_d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones en la variable Δ tendríamos que Delta vale:

$$\Delta = \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}$$

Que es justamente la definición de una Delta, es decir, una tasa de cambio en el precio del derivado con respecto al precio del subyacente. Como ya se había visto en la sección (2.3.1). Si la call está muy fuera del dinero,(2) la delta es muy cercana a cero, si la call está muy dentro del dinero(3) ésta se acerca a 1, el valor de la delta se ve afectado por cambios en el valor del subyacente, a mayor precio en el subyacente, la delta se acerca a uno, y a menor precio del subyacente la delta se acerca a cero. Esto es consistente con el modelo antes desarrollado, ya que es más conveniente conservar subyacente si estamos muy dentro del dinero, y conviene más vender subyacente si estamos muy afuera del dinero. Esto se ilustra mejor en la siguiente gráfica.

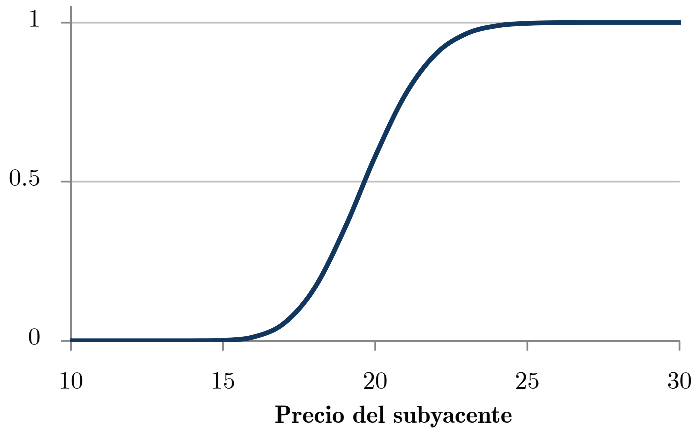

Figura 4.2: Comportamiento de la Delta de una Call con respecto al precio del subyacente

Como ya lo vimos en la página anterior la Delta de una call define lo que llamamos *"Hedge Ratio"* o la *"Tasa de cobertura"* que sirve para crear una cobertura sin riesgo, si se tienen Δ unidades de subyacente y una posición corta en una opción call, este portafolio en teoría es libre de riesgo, aunque, estrictamente hablando esta cobertura de riesgo solo es posible para pequeños cambios en el precio del subyacente, conforme pasa el tiempo cambian la delta y el precio del subyacente, y conforme la delta cambia, partes o proporciones del total del subyacente deben ser vendidas o compradas para mantener el equilibrio del portafolio sin riesgo.

Supongamos que un banco quiere comprar dentro de 180 días $\$1,000$ dólares americanos a un precio pactado de $\$13.7738$ [12] pesos por dólar, cuando hoy día su precio es de $\$13.7738$ pesos por dólar, tomando en cuenta una tasa libre de riesgo de 4.50 % (anualizada) y una estimación(4) de la desviación estándar $\sigma = 0.6372$. Es decir que los datos de entrada son: $S(0) = \$13.7738(1,000)$, $K = \$13.7738(1,000)$, $r = .045$, $\sigma = 0.637240$ y $T = 180/360 = .5$.

$$d_1 = \frac{ln(1) + (.045 + \frac{.4060^2}{2})(.5)}{.637240(\sqrt{.5})} \quad = \quad 0.27523$$

$$d_2 = \frac{ln(1) + (.045 - \frac{.4060^2}{2})(.5)}{.637240(\sqrt{.5})} \quad = \quad -0.17536$$

(2)El valor del subyacente es por mucho, menor al valor del precio pactado, en otras palabras $(S(t) < K)$ esto implica que el valor intrínseco de la opción es cero

(3)Es decir que su valor intrínseco es por mucho, estrictamente mayor que cero, o en otras palabras $(K < S(t))$

(4)Precios históricos desde el día 1° de enero del 2009 hasta el 31 de diciembre del 2009

Entonces el valor de este derecho sería igual a:

$$c = 13,773.8 \cdot N(0.27523) - [13,773.8(e^{-.045(.5)}) \cdot N(-0.17536)] = \$2,584.10$$

Como ya sabemos la opcionalidad es siempre ejercida para aquel que compra este derecho, en otras palabras, para el emisor de esta call, es una obligación entregar $1,000 dólares dentro de 180 días, si y solo sí, el tenedor de la opción decide ejercer este derecho, el tenedor del derecho se está cubriendo de una eventual alza en el precio del dólar. Pero para la parte corta de este contrato (el que vende el derecho) hay un riesgo abierto, debido a la incertidumbre sobre el precio futuro del dólar, si en una fecha futura el precio del dólar aumenta, entonces el cliente ejercerá su derecho a comprar dólares y la parte corta del contrato tendrá que comprar los dólares en el mercado cambiario a un precio mayor al pactado y entregarlos a su cliente. Si el precio del dólar es menor que el precio pactado, el tenedor del derecho no ejercerá y comprará los dólares en el mercado cambiario, a un precio menor.

Haciendo uso de diferenciales podemos aproximar el valor de la delta, para cambios muy pequeños en el subyacente, por ejemplo tomemos como cambio en el subyacente $.01, calculando el precio de una call con un subyacente $.01 más caro el día de hoy tenemos un valor teórico de $2.57201 (por cada dólar pactado) haciendo el siguiente cociente obtenemos que:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} \approx \frac{c(S+h) - c(S)}{h} = \frac{2.590194 - 2.584107}{.01} = 0.608740421$$

La estrategia a seguir es formar un portafolio sin riesgo compuesto de una call corta (c), un préstamo bancario ($B < 0$) y Δ unidades de subyacente, esto se ejemplifica mejor en la siguiente ecuación:

$$c - B = \Delta S$$

Es decir, para comprar Δ unidades de subyacente es necesario contraer una deuda sin riesgo y cobrar el respectivo precio de la call. En este ejemplo el portafolio sin riesgo está compuesto de una call corta igual a $c = \$2,584.10$, una deuda de $B = -\$5,800.56$, y $\Delta = 608.74$ dólares con un monto de $\Delta(S) = \$8,384.66$ pesos, o expresado como en la ecuación anterior:

$$\$2,584.10 + \$5,800.56 = (0.60874)(\$13,773.8)$$

La cobertura delta es una cobertura *dinámica*, ya que cada cierto periodo hay que rebalancear este portafolio, a diferencia de las coberturas *Hedge & forget* en las cuales no hace falta reajustar el portafolio, la cobertura delta tiende a cambiar conforme el subyacente cambia, es por esto que mantener un portafolio cubierto, o con delta neutral, requiere de ajustes periódicos.

Decimos que una delta es neutral cuando la delta del subyacente compensa la delta de la opción, por ejemplo supongamos que existe un subyacente cuyo precio es de $100, y el precio de la opción es de $10, cada contrato ampara 2000 unidades de subyacente, supongamos que un inversionista vende una call, la posición del inversionista puede ser cubierta al comprar 1,200 unidades de subyacente, o lo que es lo mismo $2000(.6) = 1200$, si el precio del subyacente se incrementa en $1, entonces hay una ganancia en las unidades de subyacente por $\$1,200$ y la opción incrementaría su precio en $.60 (produciendo una pérdida de $(\$.06)(2000) = \$1,200$) si el precio del subyacente baja $1 entonces las opciones bajarán de precio también generando una ganancia de $\$1,200$ pero las $1,200$ unidades de subyacente generarán una pérdida de $\$1,200$.

Es así como elaboramos una cobertura dinámica: cada 7 días se revisa el precio del subyacente y la correspondiente delta, la información aparece resumida en la siguiente tabla.

	Precio Stock	Delta Δ	Precio Call	Dólares comprados	Costo de compra	Costo acumulado	Costo de intereses	Bono de Deuda
1	$13.77	0.609	$2,584.11	608.74	$8,384.67	$8,384.67	$7.24	-$5,800.56
2	$13.35	0.579	$2,279.25	-29.75	-$397.04	$7,994.87	$6.89	$2,676.28
3	$13.84	0.609	$2,520.20	29.81	$412.61	$8,414.37	$7.25	$2,107.59
4	$13.94	0.613	$2,527.23	4.43	$61.69	$8,483.31	$7.30	$2,465.54
5	$14.17	0.626	$2,614.25	13.07	$185.14	$8,675.75	$7.46	$2,429.11
6	$14.54	0.649	$2,795.16	22.47	$326.67	$9,009.89	$7.74	$2,468.49
7	$14.36	0.636	$2,619.57	-12.93	-$185.63	$8,832.00	$7.58	$2,805.20
8	$14.61	0.652	$2,723.57	15.73	$229.77	$9,069.36	$7.78	$2,493.79
9	$14.83	0.665	$2,807.63	13.92	$206.50	$9,283.64	$7.96	$2,601.13
10	$15.34	0.698	$3,088.43	32.45	$497.72	$9,789.33	$8.39	$2,590.70
11	$15.31	0.697	$3,007.80	-0.63	-$9.62	$9,788.10	$8.38	$3,017.42
12	$14.05	0.606	$2,115.84	-91.54	-$1,286.21	$8,510.27	$7.27	$3,402.05
13	$14.27	0.622	$2,181.30	15.88	$226.63	$8,744.18	$7.47	$1,954.67
14	$14.15	0.611	$2,038.74	-11.07	-$156.66	$8,594.99	$7.33	$2,195.40
15	$13.57	0.556	$1,627.43	-54.85	-$744.34	$7,857.98	$6.69	$2,371.77
16	$13.09	0.502	$1,297.10	-53.25	-$696.89	$7,167.77	$6.09	$1,994.00
17	$13.18	0.505	$1,266.20	3.00	$39.46	$7,213.33	$6.12	$1,226.74
18	$13.87	0.575	$1,557.79	69.48	$963.48	$8,182.93	$6.95	$594.31
19	$13.22	0.497	$1,126.97	-78.05	-$1,032.16	$7,157.73	$6.06	$2,159.13
20	$13.22	0.488	$1,036.00	-8.73	-$115.47	$7,048.32	$5.96	$1,151.47
21	$12.97	0.443	$824.23	-44.88	-$582.03	$6,472.26	$5.46	$1,406.26
22	$13.13	0.454	$797.52	10.50	$137.87	$6,615.59	$5.58	$659.65
23	$13.26	0.459	$742.76	5.50	$72.96	$6,694.13	$5.64	$669.80
24	$13.48	0.483	$716.06	23.61	$318.28	$7,018.06	$5.92	$397.78
25	$13.35	0.435	$505.93	-48.05	-$641.65	$6,382.33	$5.36	$1,147.58
26	$13.32	0.379	$303.26	-55.77	-$742.82	$5,644.88	$4.72	$1,046.08
27	$13.28	0.154	$37.28	-225.23	-$2,990.59	$2,659.01	$2.14	$3,027.87

Como ya vimos al principio del ejemplo, en cuanto se emite la opción, ésta tiene una delta igual a 0.61 se construye un portafolio con delta neutral, al comprar $.61(1,000) = 608.74$ dólares (lo cual tiene un costo de $\$8,384.67$ pesos) esto genera un interés igual a $\$8,384.67(.045)(7/365) = \$7.24$. Al comienzo de la segunda semana, la delta decae a .58 para compensar este cambio se venden 29.75 dólares de los 608.74 anteriormente comprados esto genera una ganancia de \$397.04. Por lo tanto la composición del portafolio cambia, tomando en cuenta que ahora la call vale \$2,279.25:

$$\$2,279.25 - \$2,676.28 = -\$397.04$$

Conforme el tiempo pasa el dólar incrementa su precio, tanto así que para la semana 3, la opción se encuentra dentro del dinero, es decir, la diferencia entre el precio del subyacente menos el precio pactado es positiva, la delta crece para compensar estas alzas en el activo subyacente, y por consiguiente lo hace el precio de la opción, en cada semana se revisa el valor de la correspondiente Delta y se rebalancea el portafolio para obtener un portafolio libre de riesgo que sea invariante a pequeños cambios en el precio del subyacente, sin embargo para la semana 11 el precio del subyacente comienza a caer y esto obliga a que la opción se encuentre fuera del dinero, es decir que no es conveniente ejercer la opción porque estaríamos comprando caro, específicamente a \$13.7738. Hacia la semana 15 el payoff de la opción es cero dado que $(\$13.57 - \$13.77) < 0$, la delta decae hasta que finalmente una semana antes de la entrega su valor es de 0.379072.

Hacia la fecha de entrega la opción no se ejerce y el costo de la cobertura está dado por la suma de los costos de adquisición de dólares para mantener la posición larga en el activo subyacente, el costo total de esta cobertura es de $\$2,678.64$. Si descontamos este costo de cobertura 180 días atrás, tendremos que:

$$\frac{\$2,659.01}{1+.045(180/360)} = \$2,601.28$$

Que es muy cercano al valor teórico de la call, la diferencia de estos dos resultados radica en la periodicidad del rebalanceo de la cobertura, mientras más frecuente es el error tiende a ser menor.

4.2. La Gamma (Γ)

La sensibilidad de la delta con respecto del subyacente recibe el nombre de Gamma (Γ), su comportamiento nos da una idea sobre la exposición al riesgo, ya que si la gamma es pequeña entonces el cambio en la delta será pequeño cuando el precio en el subyacente cambie, en este caso el rebalanceo (cambio en el número de unidades del subyacente) del portafolio puede no ser tan frecuente, si por el contrario la gamma es muy grande esto implicaría que el cambio en la delta es muy drástico para un pequeño cambio en el precio del subyacente, y por lo tanto, el rebalanceo del portafolio debe de hacerse más seguido.

La gama se define como la segunda derivada del precio de la opción con respecto al subyacente, esto se puede aproximar con la siguiente diferencial:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \approx \frac{c(S+h) - 2c(S) + c(S-h)}{h^2}$$

El comportamiento de la Gamma cambia conforme la opción tiene valor intrínseco negativo o positivo, por ejemplo consideremos una opción que está muy afuera del dinero (es decir su valor intrínseco es negativo), la delta de esta opción es muy cercana a cero, aún si el precio del subyacente cambia un poco, el valor de delta seguiría muy cercano a cero, esto implica que la gamma es pequeña para una opción cuyo valor intrínseco es negativo.

Ahora supongamos una opción que está muy dentro del dinero, es decir que es muy factible que sea ejercida, en este caso la delta es muy cercana a 1, y para pequeños cambios en el subyacente la delta seguiría siendo muy cercana a 1, en este caso la gamma también es muy cercana a cero, porque pequeños cambios en el precio del subyacente no afectan de gran manera a la delta.

La delta de una opción que está en el dinero (esto ocurre cuando, el precio pactado es igual al precio del subyacente) cambiará drásticamente para pequeños cambios en el precio del subyacente, por ejemplo imaginemos una opción que está en el dinero y cuyo tiempo de maduración es próximo, entonces si el precio del subyacente cambia un centavo, esto implicaría que la opción pasaría de estar en el dinero a terminar, según sea el caso, fuera del dinero o dentro del dinero, esto motivaría a cambios drásticos en la delta y por lo tanto la gamma sería grande, es por eso que la gamma tiene un punto máximo cuando la opción está en el dinero.

La figura (4.3) ilustra la gráfica de la Gamma de una call con un precio de ejercicio igual a \$100

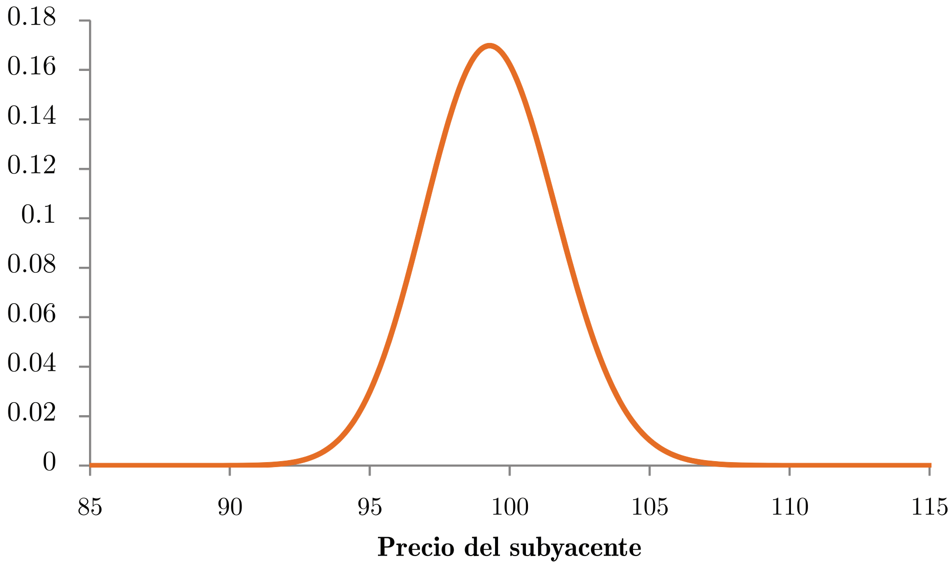

Figura 4.3: Comportamiento de la Gamma con respecto al precio del subyacente

Por si sola la cobertura delta es insuficiente, dado que como ya se mencionó antes, existe una posibilidad de exposición al riesgo importante si no se rebalancea el portafolio de manera frecuente. Supongamos que una institución financiera desea comprar 100 acciones de Walmex, sabiendo que el día de hoy el precio al cierre de una acción de Wal-Mart de México, S.A.B. de C.V costó \$18.85 [13] el inversionista quisiera comprar a \$18.00 cada acción, todo esto dentro de 90 días $T = 90/360 = .25$, teniendo una estimación de la desviación estándar de $\sigma = 189\,\%$ y una tasa libre de riesgo igual a $7\,\%$. Calculando d_1 y d_2 tenemos que:

$$d_1 = \frac{\ln(18.85/18.00) + (.07 + \frac{1.89^2}{2})(.25)}{(1.89)\sqrt{.25}} \quad = \quad 0.5388$$

$$d_2 = \frac{\ln(18.85/18.00) + (.07 - \frac{1.89^2}{2})(.25)}{(1.89)\sqrt{.25}} \quad = \quad -0.4038$$

De esta forma, llegamos al precio de la opción call con los datos antes propuestos:

$$c = 1,885.00 \cdot N(0.5436) - 1,800.00e^{-,07(,25)}N(-0.3924) = \$721.90322$$

Haciendo uso de diferenciales calculamos la respectiva delta y la respectiva gamma:

$$\begin{aligned}\Delta \approx \frac{721.973 - 721.903}{.01} &= 0.70596 \\ \Gamma \approx \frac{721.973 - 2(721.903) + 721.832}{.01^2} &= 0.000194187\end{aligned}$$

Lo cual nos indica que la delta es poco sensible a variaciones en el precio del activo subyacente, es decir que por cada centavo de movimiento la delta se moverá una diezmilésima.

Con esta información hacemos el portafolio Delta neutral, comprando 70.771 unidades de subyacente el día de hoy, con un costo neto de $(70.771)\$18.85 = \$1,334.03$ así temporalmente tenemos un portafolio neutral al riesgo. Ahora aquí es donde entra la gamma, al día siguiente a la firma del contrato el precio del subyacente cambia de \$18.85 a \$19.25 un cambio de \$.40, o bien para efectos del contrato un cambio de $\$.40(100) = \$40$. Entonces al ser nuestro portafolio neutral a cambios en el precio del subyacente tenemos que:

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= -721.90 + .705(\$1,885.00) = \$607.02 \\ \Pi_1 &= -738.31 + .705(\$1,925.00) = \$618.81\end{aligned}$$

Es decir el valor del portafolio no ha cambiado de manera significativa, la Gamma nos dice entonces que no es necesario rebalancear tan frecuentemente. Sin embargo este portafolio con Delta neutral no lo será por mucho tiempo, dado que la Gamma no es cero.

4.3. La Rho (P)

Uno de los supuestos básicos para la valuación de opciones, tiene que ver con la tasa de interés, en este trabajo, hemos dado por sentado que la tasa de interés son constantes. Sin embargo en algunos casos la tasa de interés no lo es, por esto analizaremos la Rho.

Recordemos que la Rho es la derivada del precio de la opción con respecto a cambios en la tasa libre de riesgo, por lo tanto podemos aproximarla con la siguiente formula, para h muy pequeña:

$$P = \frac{\partial c}{\partial r} \approx \frac{c(r+h) - c(r)}{h}$$

Esta griega es la que más tiene relevancia para los subyacentes cuyos precios son elevados, esto es debido a que una opción con esta cualidad respalda una gran cantidad de subyacente con relativamente poca inversión, la mayoría de las veces la relación entre el precio del subyacente y el precio de la opción es de diez a uno, es decir, si la tasa de interés crecieran y si tuviéramos que comprar subyacente necesitaríamos más dinero para pagar los intereses relacionados con esta operación, esto se vería reflejados en el precio de una opción. Entonces si la tasa de interés incrementa, el valor de la call se también lo hará, caso contrario si se trata de una put. Es por esto que la Rho de una call es siempre negativa, y la Rho de una put es negativa.

A pesar de esto no muchos emisores prestan atención a esta griega dado que las tasas de interés suelen ser estables, sin embargo, su comprensión es parte importante para la cobertura de la opción, recordemos que en la estrategia de cobertura dinámica Delta es necesario comprar o vender partes del activo subyacente, en este proceso se recibe el valor de la opción pero no es suficiente para cubrir el costo de las Delta unidades de subyacente, es por esto que se tiene que pedir prestado para realizar la cobertura. A continuación la gráfica de la Rho, con respecto a incrementos en la tasa libre de riesgo:

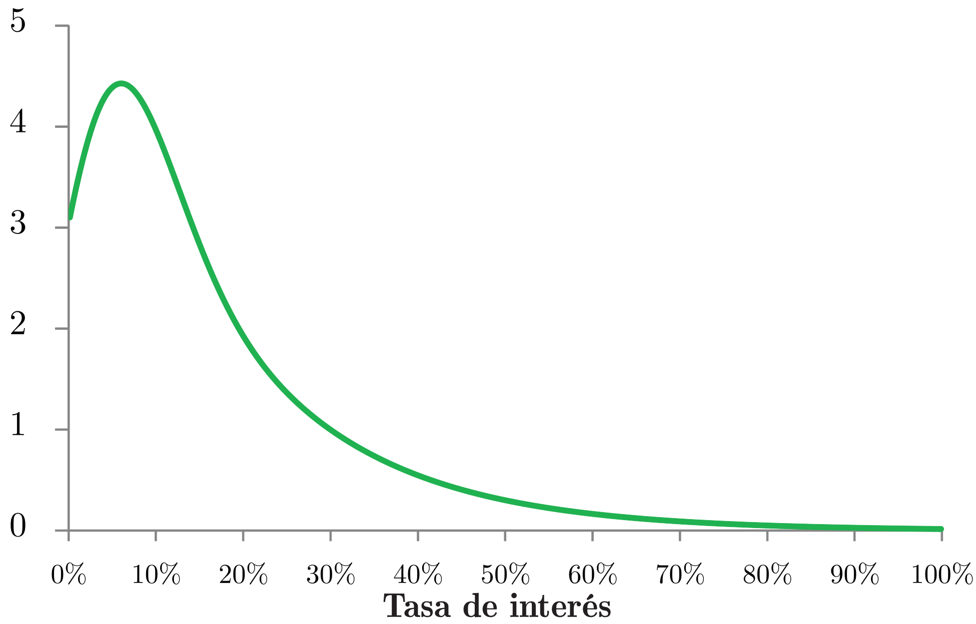

Figura 4.4: Rho de una call con respecto a la tasa libre de riesgo

Supongamos que un accionista desea comprar 1,000 acciones de Telmex dentro de 90 días a un precio de 10.00, entonces sabiendo que cada contrato listado ampara 100 acciones, decide comprar 10 contratos que le den el derecho más no la obligación de comprar dichas acciones, supongamos que el precio de una acción del día de hoy es de \$10.06 [14] además consideremos una tasa de interés de 5.0 %, además de eso la estimación de la volatilidad es $\sigma = 40.2\,\%$. Es decir los datos de entrada para calcular el precio de la call son: $S(0) = \$10.06$, $K = 10.00$, $r = .05$, $\sigma = .402$ y $T = 90/360 = .25$. Con estos datos calculamos entonces las respectivas d_1 y d_2:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln(1,006.00/1,000.00) + (.05 + \frac{.402^2}{2}).25}{.402\sqrt{.25}} = 0.1915 \\
d_2 &= \frac{\ln(1,006.00/1,000.00) + (.05 - \frac{.402^2}{2}).25}{.402\sqrt{.25}} = -0.0084
\end{aligned}
$$

De esta forma obtenemos el precio de la call que es:

$$c = 1,006.00 \cdot N(0{,}1915) - 1,000.00e^{-{,}05({,}25)}N(-0.0084) = \$88.8815$$

Usando un incremento del $0.0001 = 0.01\,\%$ obtenemos la siguiente aproximación:

$$P \approx \frac{88.8935 - 88.8815}{.0001} = 120.9569084$$

Estos son los valores para un solo contrato call, que ampara cien acciones de Telmex, sin embargo en nuestro ejemplo el accionista desea comprar diez veces esta cantidad de activo subyacente por lo tanto, el valor de la call, y el respectivo valor de Rho se multiplican por 10.

$$\begin{aligned} 10c &= 10(\$88.8815) = \$888.815 \\ 10P &= 10(120.9569084) = 1,209.569084 \end{aligned}$$

El modelo que hemos estado usando para la valuación de opciones asume que la tasa de interés es constante, sin embargo el estudio de las tasas de interés muestra que las tasas son también estocásticas, es decir, las tasas de interés se mueven como parte de una curva de tasas de interés y dicha curva no puede ser definida por una función determinística, es entonces cuando la Rho cobra importancia dado que permite a un inversionista conocer el riesgo, en términos monetarios, de cambios en las tasa de interés.

Conclusiones

En este trabajo expone la teoría básica de la valuación de opciones. Las cuales son una de tantas herramientas para la cobertura de riesgos financieros como el de mercado y el de incumplimiento. Se ha buscado simplificar el cálculo algebraico de las derivadas parciales y exponer ejemplos que sean comprensibles y sencillos para su mejor comprensión.

Se ha hablado de una faceta del Mercado Mexicano de Derivados, porque está aún en crecimiento y además de esto, los instrumentos que se transan, son simples y están íntimamente relacionados con las finanzas nacionales y con empresas de la misma índole. Falta mucho por hacer, principalmente apremia el listado de más instrumentos, la apertura de estos al público en general para así tener más liquidez y al mismo tiempo crear una cultura financiera sólida en la sociedad mexicana.

Dentro de los instrumentos que se han analizado se han escogido los llamados *plain vanilla*, dado que representan una base sólida para el manejo y aprendizaje de contratos más sofisticados como las opciones barrera, warrants, notas estructuradas, entre otros. Se comienza con el instrumento más simple que es la opción europea para concluir con las opciones americanas en tiempo discreto, destaca la importancia de los árboles binomiales porque son conceptualmente el homólogo discreto al proceso estocástico continuo llamado movimiento Browniano y sobre el cual se desarrolla en la parte continua de este trabajo.

Por último se presentan algunos ejemplos prácticos sobre tres griegas, en concreto, la Delta, la Gamma y la Rho. Se escogió la Delta por el concepto que engloba, es decir en su demostración formal la fórmula de Black-Scholes-Merton, se construye un portafolio sin riesgo por medio de esta sensibilidad, es por esto que se ha incluido y se ha expuesto una cobertura sobre los precios de dólar del primero de enero del 2009 hasta el 31 de diciembre del mismo año. Las aproximaciones por medio de diferenciales, resultaron muy exactas, el promedio de los errores entre la Delta real y la estimada fue de -0.000554627.

La Gamma es el complemento de la Delta por eso se ha ilustrado, porque la Gamma es la variación de la Delta con respecto el precio del subyacente, esta griega también se ajustó bien a los valores reales, arrojando un error de 0.004395446 en acciones del grupo Walmex S.A. de C.V. ambas griegas resultan importantes para las estrategias de cobertura.

Se excluyó a la Theta de los ejemplos, porque representa el decaimiento de la opción con respecto al tiempo, si bien es cierto que conceptualmente esta griega es importante para la Delta, también es cierto que no hay ninguna incertidumbre sobre el tiempo, es decir, no se puede elaborar una cobertura sobre el paso del tiempo. Así también se excluyó la Vega, porque esta griega representa el cambio en el precio de una opción con respecto a la volatilidad cuando lo demás es constante, la volatilidad se ha manejado siempre constante.

Por último se incluye la Rho, dado que el movimiento de la tasa de interés libre de riesgo representa un riesgo, más sin embargo esta griega es de las menos documentadas, dado que en la práctica las tasas de interés permanecen relativamente constantes y el precio de la opción parece ser un poco indiferente a estos cambios. Empero es de vital importancia su análisis dado que es de gran impacto conocer cómo cambia el precio de la opción con respecto a las tasas de interés para poder elaborar una cobertura Delta adecuada, una alza en las tasas de interés libre de riesgo representaría un riesgo para los emisores de opciones de venta, una baja en las tasas de interés repercutiría negativamente en una cobertura Delta de una opción de venta.

Bibliografía

Medios Impresos

[1] C. Hull, John; *Options, Futures & Other Derivatives*, 7th Edition, Ed. Pearson Prentice Hall, USA, 2009

[2] Francisco Venegas Martínez; *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, 2^a edición, Ed. CENGAGE Learning, 2008.

[3] Salih N., Neftci & Fame Geneva, Switzerland, *Principles of Financial Engineering*, 1st Edition, Ed. Elsevier Academic Press, USA, 2004.

[4] David A. Dubofsky & Thomas W. Miller, Jr.,*Derivatives, Valuation and Risk Management*, Ed. Oxford University Press, Inc., USA, 2003.

[5] Martin Baxter, Andrew Rennie; *Financial calculus: An introduction to derivative pricing*, 9th Edition, Ed. Cambridge University Press, UK, 2003.

[6] Elizer Z. Prisman, *Pricing Derivatives Securities. An Interactive Dynamic Environment with Maple V and Matlab*, Ed. Academic Press, USA, 2000.

[7] Geoffrey Poitras; *Risk Management, speculation, and Derivative Securities*, Ed. Academic Press, USA, 2002.

[8] Wilmott, Paul; *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*, Ed. John Wiley & Sons, 1998.

[9] Hernán Sabau García, Gloria Roa Béjar, José Antonio Ordás Porras et ál.; *Derivados Financieros: Teoría y Práctica*, Ed. Grupo Financiero Serfin, México D.F., 1997.

Páginas web

[10] http://www.asigna.com.mx/

[11] http://www.mexder.com.mx/

[12] http://www.banxico.org.mx/

[13] http://www.walmex.mx/es/accion-walmex/precios-historicos.html

[14] http://mx.finance.yahoo.com/q/hp?s=TELMEXL.MX

[15] http://www.elporvenir.com.mx/notas.asp?nota_id=483999