

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

Modelos de Varianza Condicional para Estimar el Valor en Riesgo del Mercado

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

*INGENIERÍA DE SISTEMAS-INVESTIGACIÓN DE
OPERACIONES*

P R E S E N T A:

Ing. Víctor Membrillo Zarco

Tutor:

Dr. Ricardo Aceves García

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. José Jesús Acosta Flores

Secretario : Dr. Ricardo Aceves García

Vocal Dra. Idalia Flores de la Mota

1er Suplente Mtro. Jorge Eliecer Sánchez Cerón

2do Suplente Dra. Mayra Elizondo Cortés

Lugar donde se realizó la tesis:
MÉXICO D.F.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Ricardo Aceves

Agradecimientos a la UNAM
Dedicado a mi Gloria y mi Victorcito

“Aprovecha la oportunidad que te brinda la vida”

Lorenzo Membrillo Alfaro

Contenido

Introducción	9
Capítulo I. Antecedentes	12
1.1 Riesgo financiero	12
1.2 Relación Riesgo Capital	13
1.3 Tipos de Riesgo en la Banca	13
1.3.1 Riesgos cuantificables	15
1.3.2 Riesgos no cuantificables	15
1.3.3 Riesgo global	15
1.4 Regulación	15
1.4.1 Regulación Internacional	15
1.4.2 Regulación Nacional	18
1.5 Proceso de Administración de Riesgos	21
1.6 Casos de desastres Financieros.	24
1.7 Recomendaciones del G-30	26
1.8 Valor en riesgo y métodos de estimación	28
1.8.1 Descripción	28
1.8.2 Valor en riesgo (VaR).....	28
1.8.3 Propósitos del VaR	29
1.8.4 Métodos de estimación	30
Capítulo 2. Propiedades de los Modelos de Varianza Condicional	32
2.1 Calculo de Rendimientos	32
2.2 Evidencia empírica	32
2.3 Modelo ARCH.....	33
2.3.1 Modelo ARCH 1	34
2.3.2 Modelo ARCH p	34
2.3.3 Estructura de predicción del proceso \hat{e}_t (residual respecto a la media) en el modelo Arch	34
2.3.4 Estructura del proceso \hat{e}_t^2 en el modelo ARCH	35
2.3.5 Estimación en modelos ARCH	37
2.3.6 Validación del Modelo	38
2.3.7 Predicción ARCH	39
2.4 Modelos GARCH	40
2.4.1 Modelos GARCH (p,q)	40
2.4.2 Modelos GARCH (1,1)	40
2.4.3 Estudio del Proceso $\hat{e}_t = r_t - \hat{\mu}$ en modelos GARCH	40
2.4.4 Propiedades del proceso $\hat{e}_t = r_t - \hat{\mu}$ en modelos GARCH	43
2.4.5 Estimación del modelo Garch	43
2.4.6 Validación del modelo mediante análisis de residuales.....	43
2.4.7 Predicción GARCH (1,1)	44
2.4.8 Propiedades empíricas que replica y que no replica el modelo GARCH	45
2.5 Modificaciones a los modelos ARCH GARCH	46
2.5.1.- Asimetría: E-GARCH	46
2.5.2 Asimetría Glostein, Jagannathan, Runkle G,J,R	47
2.5.2.1 Análisis del modelo GJR (1,1):	47
2.5.2.2 Pruebas para detectar asimetría	47
2.5.3 Incluyendo efectos de la volatilidad en la media Garch-M	48
2.5.4 Incluyendo Efectos Umbral T-GARCH	49
2.5.5 Modelado de la media del proceso ARMA con errores GARCH	49

Capítulo 3 Aplicación de Modelos de Varianza Condicional para estimar la varianza del IPC	50
3.1 Presentación del comportamiento de los precios del IPC	50
3.2 Obtención de log-rendimientos	50
3.3 Pruebas de nivel de la serie r log-rendimientos	51
3.3.1 Prueba de Normalidad de los rendimientos	52
3.3.2 Prueba de Asimetría de los rendimientos	52
3.3.4 Prueba de Homocedasticidad en rendimientos	53
3.3.5 Prueba de efectos ARCH	53
3.3.6 Prueba de No auto-correlación en rendimientos	54
3.3.7 Prueba de ruido blanco en rendimientos	54
3.3.8 Prueba de No auto-correlación de la varianza en rendimientos	55
3.4 Propuestas de Modelos ARCH al proceso de rendimientos	56
3.4.1 Modelo ARCH 1	56
3.4.2 Modelo ARCH 2	56
3.4.3 Modelo ARCH 3	56
3.4.4 Modelo ARCH 4	56
3.4.5 Modelo ARCH 5	57
3.5 Propuestas de Modelo GARCH al proceso de rendimientos	57
3.5.1 Modelo GARCH 1,1	57
3.5.2 Modelo GARCH 2,1	57
3.5.3 Modelo GARCH 1,2	57
3.5.4 Modelo GARCH 2,2	57
3.6 Propuestas de modelos de asimetría	58
3.6.1 Modelo GJR 1,1,1	58
3.6.2 Modelo E-GARCH	58
3.7 Selección de modelos adecuado con criterio AIC y BIC	59
3.8 Estudio del modelo GARCH 1,1 y Validación de modelo	60
3.8.1 Cálculo de residuales	60
3.8.2 Cálculo de la varianza condicional	60
3.8.3 Cálculo de los rendimientos estandarizados GARCH 1,1	61
3.8.4 Correlación de los residuales estandarizados	61
3.8.5 Prueba de homocedasticidad de los residuales estandarizados	62
3.8.6 Prueba de normalidad de los residuales estandarizados	63
3.8.7 Prueba de Auto correlación de los residuales estandarizados cuadrados	64
3.9 Estudio del modelo E-GARCH y validación de modelo	67
3.9.1 Cálculo de residuales modelo E-GARCH	67
3.9.2 Cálculo de varianza condicional modelo E-GARCH	67
3.9.3 Cálculo de residuales estandarizados modelo E-GARCH	67
3.9.4 Cálculo de residuales estandarizados cuadrados del modelo E-GARCH	67
3.9.5 Auto correlación de residuales estandarizados del modelo E-GARCH	67
3.9.6 Auto correlación de residuales estandarizados cuadrados del modelo E-GARCH	67
3.9.7 Homocedasticidad de residuales estandarizados cuadrados del modelo E-GARCH	68
3.9.8 Normalidad de residuales estandarizados cuadrados del modelo E-Garch	68
3.10 Estudio del Modelo GJR y validación de supuestos	69
3.10.1 Obtención de parámetros del modelo GJR	69
3.10.2 Cálculo de residuales del modelo GJR	69
3.10.3 Cálculo de varianza condicional del modelo GJR	69
3.10.4 Cálculo de residuales estandarizados del Modelo GJR	69

3.10.5 Función de auto-correlación de los residuales estandarizados del GJR	69
3.10.6 Función de auto-correlación de los residuales estandarizados cuadrados del GJR	69
3.10.7 Prueba de Homocedasticidad los residuales estandarizados cuadrados GJR	70
3.10.8 Prueba de Normalidad los residuales estandarizados GJR	70
3.10.9 Prueba NO Autocorrelacion de los residuales estandarizados al cuadrado GJR	71
3.10.10 Prueba de ruido blanco de los residuales estandarizados al cuadrado del modelo GJR	73
3.11 Pronóstico de la varianza con el modelo adecuado GJR	76
Resultados y Conclusiones	76
Bibliografía	80
Anexo 1 Demostración de Propiedades del modelo ARCH	81
Anexo 2 Demostración de Propiedades del modelo GARCH	93
Anexo 3 Cuadros de estimación de parámetros de modelos propuesto	103

Índice de cuadros

Cuadro 1.1 Alcance de nuevo acuerdo de Basilea II	17
Cuadro 1.2 Administración de riesgo en México	18
Cuadro 1.3 Desastres financieros	24
Cuadro 1.4 Cronología de antecedentes de ENRON	25
Cuadro 1.5 Cronología de sucesos que conllevaron al colapso a ENRON	26
Cuadro 3.1 Prueba de normalidad de rendimientos	51
Cuadro 3.2 Cálculo de la Media de rendimientos	52
Cuadro 3.3 Prueba de asimetría de los rendimientos	52
Cuadro 3.4 Prueba de homocedasticidad en rendimientos	53
Cuadro 3.4.1 Prueba Conjunta de Homocedasticidad en rendimientos	53
Cuadro 3.5 Prueba Estadística de LM Engle (Prueba chi) efectos ARCH en rendimientos	53
Cuadro 3.6 Prueba de Ljung Box (ruido blanco) en rendimientos	54
Cuadro 3.7 Prueba de ruido blanco rendimientos	54
Cuadro 3.8 Modelo ARCH 1	Anexo3
Cuadro 3.9 Modelo ARCH 2	Anexo3
Cuadro 3.10 Modelo ARCH 3	Anexo3
Cuadro 3.11 Modelo ARCH 4	Anexo3
Cuadro 3.12 Modelo ARCH 5	Anexo3
Cuadro 3.13 Modelo GARCH 1,1	Anexo3
Cuadro 3.14 Modelo GARCH 2,1	Anexo3
Cuadro 3.15 Modelo GARCH 1,2	Anexo3
Cuadro 3.16 Modelo GARCH 2,2	Anexo3
Cuadro 3.17 Modelo GJR	Anexo3
Cuadro 3.18 Criterio de Información AIC y BIC Modelos GARCH	59
Cuadro 3.19 Criterio de Información AIC y BIC Modelos GARCH	59
Cuadro 3.20 Criterio de Información AIC y BIC Modelo GJR	59
Cuadro 3.21 Prueba de homocedasticidad para los residuales del modelo GARCH (1,1)	62
Cuadro 3.22 Prueba de heterocedasticidad GARCH (1,1)	62
Cuadro 3.23 Prueba de Normalidad en los residuales estandarizados	63
Cuadro 3.24 Función de auto-correlación de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GARCH (1,1)	65
Cuadro 3.25 Prueba de ruido blanco de los residuales estandarizados al cuadrado del Garch 1,1	66
Cuadro 3.26 Parámetros del Modelo E-GARCH	67
Cuadro 3.27 Prueba de Homocedasticidad del modelo E-GARCH	68
Cuadro 3.28 Prueba de Normalidad de residuales estandarizados del modelo E-GARCH	68
Cuadro 3.29 Parámetros del modelo GJR	69
Cuadro 3.30 Prueba de homocedasticidad de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GJR	70
Cuadro 3.31 Prueba de varianza constante de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GJR	70
Cuadro 3.32 Prueba de normalidad de los residuales estandarizados del modelo GJR	70
Cuadro 3.33 Valores de la función de auto-correlación de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GJR	72
Cuadro 3.34 Prueba de ruido Blanco de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GJR	73
Cuadro 3.35 Pronóstico del modelo GJR	74
Cuadro 3.36 Predicción de la varianza del modelo GJR	75

Índice de gráficas

Grafica 1.1 Proceso de administración de riesgos	21
Grafica 1.2 Tipos de riesgo	22
Grafica 1.3 Cuantificación del riesgo de mercado	23
Grafica 1.4 Función de la administración de riesgos	23
Grafica 3.1 IPC de 1991 a mayo 2011	50
Grafica 3.2 Gráfica de log-rendimientos (r) en el tiempo	51
Grafica 3.3 Auto-correlación de los rendimientos	54
Grafica 3.4 Auto correlación de rendimientos cuadrados	55
Grafica 3.5 Residuales del modelo GARCH(1,1)	60
Grafica 3.6 Varianza condicional del modelo GARCH(1,1)	60
Grafica 3.7 Residuales estandarizados del modelo GARCH(1,1)	61
Grafica 3.8 Función de auto-correlación de residuales estandarizados del modelo GARCH(1,1)	61
Grafica 3.9 Distribución de los residuales estandarizados del modelo GARCH(1,1)	63
Grafica 3.10 Función de auto-correlación de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GARCH(1,1)	64
Grafica 3.11 Función de auto-correlación de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GJR	71

Abreviaturas

VaR Valor en riesgo. Medida de la pérdida máxima probable a un determinado nivel de confianza

GJR Modelo Glostein, Jagannathan, Runkle de la familia Arch

ARCH Modelo autorregresivos de varianza condicional

GARCH Modelo autorregresivos de varianza condicional generalizado

AIC Criterio de información de Akaike

BIC Criterio de información de Bayes

Log logaritmo natural de los valores de los rendimientos

IPC Índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores

Introducción.

Las Instituciones de regulación en México implementan en 2007 los lineamientos de Basilea II en el que manifiestan su interés por impulsar la cultura de la administración de riesgos en las instituciones, estableciendo al efecto lineamientos que habrán de ser implementados para llevar a cabo la identificación, medición, vigilancia, limitación, control y divulgación de los distintos tipos de riesgos que enfrentan en su actividad diaria, así como la eficiencia de la administración de riesgos, lo cuál dependerá en gran medida de la instrumentación, difusión y correcta aplicación de manuales de políticas y procedimientos en la materia.

Las Instituciones de vigilancia exigen a las empresas del sector financiero que hagan valuación del riesgo a los que están expuestos, mostrando la pérdida máxima probable en que pueden incurrir, el objeto de esta valuación es constituir reservas adecuadas para garantizar el cumplimiento con sus obligaciones contractuales para con los clientes. Por ejemplo una aseguradora constituye grandes cúmulos de capital por primas de los asegurados y es obligación de la aseguradora constituir una reserva de riesgo en curso para cubrir sus reclamaciones, y debe preservar su valor en el tiempo invirtiéndola adecuadamente, existen reglas de inversión de estos recursos pero es muy conservador solo invertirlos en instrumentos de gobierno debido a su bajo rendimiento, existen alternativas de inversión como el mercado de valores en el que se han observado rendimientos anuales de hasta 80% en portafolios construidos eficientemente, es importante tener un control en el riesgo al que esta expuesto medido a través de la varianza de mercado, predecirlo pues con modelos adecuados ayudara a mejorar la toma de decisiones.

Las series temporales de alta frecuencia observadas en los mercados financieros y cambiarios se caracterizan por ser asimétricas, leptocúrticas, agrupamiento de la volatilidad, mostrar una elevada persistencia en volatilidad, correlaciones en los cuadrados, efecto leverage, etc. Estas características son las que se conoce en la literatura econométrica como hechos estilizados. Para recoger estas características de las series temporales se han planteado modelos no lineales, entre los que se pueden destacar básicamente dos tipos: por un lado, los modelos ARCH y GARCH y todas sus posibles variantes y por otro lado, los modelos de volatilidad estocástica. Estos modelos se diferencian entre sí en la forma de modelizar la volatilidad.

Determinar un patrón de comportamiento estadístico para la varianza es el cometido de los modelos Autorregresivos condicionales heterocedásticos: ARCH. Engle (1982) es el autor de una primera aproximación a la varianza condicional. Después de estos hay una amplia familia de sofisticaciones del modelo inicial que darán nombre a los modelos GARCH, IGARCH, EARCH, TARARCH, SWARCH, QS-ARCH, APARCH, FACTOR-ARCH,

En el artículo seminal de los modelos ARCH, Engle cita tres situaciones que motivan y justifican la modelización de la heterocedasticidad condicional Autorregresiva (nombre por él mismo dado). Estas serían las siguientes:

1. La experiencia empírica nos lleva a contrastar periodos de amplia varianza de error seguidos de otros de varianza más pequeña. Es decir, el valor de la dispersión del error respecto a su media cambia en el pasado, por lo que es lógico pensar que un modelo que atienda en la predicción a los valores de dicha varianza en el pasado servirá para realizar estimaciones más precisas.
2. En segundo lugar, Engle expone la validez de estos modelos para determinar los criterios de mantenimiento o venta de activos financieros. Los agentes económicos deciden esta cuestión en función de la información proveniente del pasado respecto al valor medio de su rentabilidad y la volatilidad que ésta ha tenido. Con los modelos ARCH se tendrían en cuenta estos dos condicionantes.
3. El modelo de regresión ARCH puede ser una aproximación a un sistema más complejo en el que no hubiera factores innovacionales con heterocedasticidad condicional. Los modelos

estructurales admiten, en multitud de ocasiones, una especificación tipo ARCH infinito que determina con parámetros cambiantes, lo que hace a este tipo de modelos capaces de contrastar la hipótesis de permanencia estructural que supone una de las hipótesis de partida y condición necesaria para la validez del modelo econométrico tradicional..

En definitiva, la clave de estos modelos está en considerar la información pasada de la variable y su volatilidad observada como factor altamente explicativo de su comportamiento presente y, por extensión lógica, de su futuro predecible. Estadísticamente, esta conclusión se refleja en tener en cuenta la esperanza condicional (conocida y fija la información hasta el momento inmediatamente anterior) del cuadrado de una variable (la expresión de su varianza si su media es nula).

El problema que se pretende resolver y se plantea en el presente trabajo de tesis es: Replicar el comportamiento de la volatilidad del Mercado Accionario Mexicano con eficiencia utilizando modelos de varianza condicional para estimar el valor en riesgo de mercado.

El objetivo es: proponer un modelo de varianza condicional que determine el patrón de comportamiento de la varianza que sirva para estimar la medida del valor en riesgo de mercado de una cartera de inversión con mayor eficiencia que los modelos que consideran la varianza constante, que es requerida por las Instituciones de Regulación y Vigilancia del sector financiero mexicano, utilizando técnicas estadísticas de varianza condicional para predecir la varianza de manera puntual (el corto plazo) en series financieras que no presentan simetría en rendimientos, que son leptocúrticas y que no tienen varianza constante.

En este trabajo se llevó a cabo en primer lugar, una revisión a la regulación nacional e internacional que norma el estudio del riesgo, en segundo lugar analiza las características del comportamiento de series financieras principalmente acciones o índices y se toma como caso de estudio el índice de precios y cotizaciones del mercado mexicano, cabe mencionar que ésta técnica se puede aplicar a una emisora o una cartera de acciones.

El estudio parte de una revisión de las características empíricas en el comportamiento de los rendimientos obtenidos por el índice del mercado en el que a través de un histograma de frecuencias y de pruebas como Jarque-Bera y de auto-correlación rechazamos la simetría, independencia y normalidad de los log-rendimientos, asimismo en una gráfica de log-rendimientos se observa estacionariedad en la media mas no en la varianza pues se notan periodos de calma y periodos de alta volatilidad, se observa también que las pérdidas son más severas que las ganancias lo que indica asimetría, mediante un análisis de la función de auto-correlación se prueba que no existe estructura de comportamiento en los rendimientos, más si estudiamos la función de auto correlación con el segundo momento respecto a la media, encontramos que existe una estructura de comportamiento en la varianza, lo que implica que la varianza en el periodo t tiene una relación con la varianza en periodos anteriores es decir se comporta como una serie de tiempo auto correlacionada, que coincide con la propuesta de Robert Engel el uso de modelos ARCH, modelos auto-regresivos de varianza condicional. Es por esto que en el capítulo dos se hace en el estudio una revisión de las propiedades empíricas de las series financieras que replican los modelos de la Familia GARCH, estas son simetría, curtosis y estacionariedad en los residuales de los modelos propuestos, posteriormente se toman los criterios de información de Akaike y Bayes para discriminar entre los modelos propuestos. Después de elegir uno de los modelos propuestos se utiliza para realizar pronósticos de la varianza de la serie y hacer una valuación de riesgo de mercado adecuada.

Los comandos de STATA utilizados comienzan con punto y se colocaron antes de una tabla ó gráfica.

CAPITULO 1. Antecedentes

1.1 Riesgo Financiero

“La palabra riesgo proviene del latín *riscare* que significa atreverse. En realidad tiene un significado negativo relacionado con el peligro, daño, siniestro o pérdida. Sin embargo, el riesgo es parte inevitable en los procesos de toma de decisiones en general y en los procesos de inversión en particular¹”.

“El origen etimológico del concepto riesgo tiene distintas acepciones, esto se puede observar en los diccionarios de la Real Academia o el Corominas que bajo las leyes fonéticas de evolución, las leyes de derivación o morfológicas, la coherencia semántica y la cronología suponen que su étimo es el verbo latino *resicare* (cortar), origen de *riesco* que significó “lugar cortado y fragoso” y luego “peligro”. También se le atribuye su significado al ambiente marino, debido a que su actividad estaba llena de riesgos ante la presencia de escollos o *riscos* marítimos. De esta forma, riesgo como se mencionó, se relaciona con peligro, deterioro, siniestro o pérdida, situación que aparece en actividades de rutina.”²

Para una institución financiera, el riesgo se puede relacionar con la incertidumbre de los resultados esperados, por la propia naturaleza de sus operaciones de inversión, crédito y servicios. Por ello, el riesgo en finanzas puede ser definido como “la incertidumbre que se tiene sobre el comportamiento de los factores que afectan el valor de los activos y pasivos de la institución.”

Cabe resaltar que, crear una sana administración de riesgos implica adoptar las medidas que permitan delimitar la pérdida de valor, ante escenarios que impacten el resultado de estrategias estructuradas y, en su caso, evaluarlas para una mejor gestión de la rentabilidad sujeta a un intervalo conocido de desviaciones, procurando reducir las pérdidas esperadas y no esperadas, para mantener un estatus de eficiencia relativo a la Institución.

1.2 Relación Riesgo-Capital

El objetivo de medir el riesgo y los escenarios de los flujos esperados, debe ser, la viabilidad del negocio en su total dimensión, situación que hace tangibles las estimaciones de los distintos tipos de riesgo.

En el balance contable de la Institución existen activos circulantes, tangibles e intangibles; sin embargo, para poder crear activos deben existir fondos que provienen de deuda, ya sea de corto o largo plazo, y capital propio. De aquí, se derivan los puntos estratégicos sobre el manejo de inversiones a plazo, la estructura de capital, el apalancamiento³ y la administración de los flujos generados por la operación.

Existe una gran relación entre la toma de decisiones sobre las metas administrativas de la alta dirección y los riesgos que implican éstas mismas; principalmente, por la cobertura entre los plazos de colocación y captación; las fuentes de fondeo o financiamiento; además de la administración de los flujos generados en el tiempo por las estrategias implementadas en sus tasas activas, pasivas, costos, gastos e impuestos. Así, con base en todos estos conceptos se debe determinar el capital estimado

¹ De Lara, “Medición y Control de Riesgos Financieros” 2001.

² Tovar A. 2008..

³ De manera general se refiere a la práctica de financiar activos con capital prestado.

necesario para cubrir los riesgos, así de esta forma, se procura que la Institución mantenga las condiciones actuales y futuras para generar valor.

Para generar valor, se cuidará que la Institución tenga una tasa de interés activa mayor a la tasa de interés de sus pasivos, también que el margen entre éstas alcance a cubrir los gastos, es decir, se debe dar seguimiento a las utilidades que se generen considerando una tasa real positiva mayor que el costo de capital, con la finalidad de mantener el patrimonio de la Institución Financiera sin deterioro. Para lograr esto, es necesario identificar los factores propios, de mercado así como los económicos, que afecten la generación de valor de la propia estructura del balance y por ende, los ingresos y costos que determinan la utilidad.

Al concepto de incertidumbre sobre los flujos de efectivo se le denomina Riesgo; por lo que, en resumen, es necesario identificar el perfil de riesgo que tiene el balance, *prevaleciendo el objetivo de la Institución sobre la decisión de medir, limitar y controlar los riesgos a los que las diferentes posiciones están expuestas para la generación de valor, “orientando sobre los flujos que se pueden presentar ante desviaciones en los factores de riesgo”.*

1.3 Tipos de Riesgo en la Banca

Las entidades financieras en su quehacer cotidiano están expuestas a diferentes riesgos, unos cuantificables y otros que no pueden ser cuantificados, esto depende de la naturaleza de las actividades, así como de las operaciones y posiciones que las mismas entidades financieras realicen

Dentro de las entidades financieras y tomando en consideración de las Disposiciones de Carácter General Aplicables a las Instituciones de Crédito⁴ (de ahora en adelante Disposiciones) se puede identificar la siguiente clasificación de riesgos:

1.3.1 Riesgos Cuantificables. Son aquéllos para los cuales es posible conformar bases estadísticas que permitan medir sus pérdidas potenciales, y a su vez se clasifican en:

a. **Riesgos Discrecionales.** Son aquéllos resultantes de la toma de una posición de riesgo, tales como:

- **Riesgo de Mercado.** Se define como la pérdida potencial por cambios en los Factores de Riesgo que inciden sobre la valuación o sobre los resultados esperados de las operaciones activas, pasivas o causantes de pasivo contingente, tales como: tasas de interés, tipos de cambio, índices de precios, entre otros. Este riesgo se realiza por la venta o costo de oportunidad de activos y pasivos contra el mercado. Por esto, la distribución del riesgo debe medirse a través de portafolios o posiciones que tengan probabilidad de presentarse.

Como ejemplo, una posición larga en el mercado de dinero otorga los derechos sobre ciertos flujos futuros a devengar; sin embargo, para recibirlos existe la obligación de conservar el título. Es por esto que, la tenencia de la posición implica obtener todos sus derechos y obligaciones, y venderla implica transferirlos. El precio por la transferencia de estos derechos depende de las condiciones de mercado. Por ende, existe la posibilidad de que las

⁴ “Artículo 66.-Los riesgos a que se encuentran expuestas las Instituciones, así como sus Subsidiarias Financieras, podrán clasificarse en los tipos siguientes...”

condiciones que se pactaron al momento de la compra pueden no ser las mismas al momento de la venta y, por tanto, generar una pérdida contable. Este concepto explica por qué debe considerarse el riesgo que pueden provocar ciertos factores de mercado en los precios de activos y pasivos.

-Riesgo de Crédito. Se define como la pérdida potencial por la falta de pago de un acreditado, incluyendo las garantías reales o personales que les otorguen; así como cualquier otro mecanismo de mitigación utilizado por las Instituciones.

En el proceso de otorgamiento de crédito, la variable que define la realización del riesgo estimado (el siniestro), está dada por el incumplimiento de los acreditados (no pago). Es así, que las personas deudoras bajo un escenario adverso global o individual, pueden caer en incumplimiento de pago, situación que implicaría una pérdida para la Institución ante la imposibilidad de recuperar el préstamo y los accesorios devengados. Haciendo hincapié, en que existe una tasa de *recuperación, la cual debe ser incluida en las estimaciones del riesgo crediticio para obtener la severidad de la pérdida*⁵.

Riesgo de Liquidez. Se define como la pérdida potencial por la imposibilidad o dificultad de renovar pasivos o de contratar otros en condiciones normales, por la venta anticipada o forzosa de activos a descuentos inusuales para hacer frente a sus obligaciones, o bien, por el hecho de que una posición no pueda ser oportunamente enajenada, adquirida o cubierta mediante el establecimiento de una posición contraria equivalente. El riesgo de liquidez está dado por el establecimiento de una estrategia en la colocación de los activos contra la estimación del vencimiento de los pasivos, afectando el flujo de recursos que se necesitan para cubrir los compromisos de vencimientos y retiros de clientes o contrapartes. Así, este riesgo se realiza ante la venta forzosa de activos o costos de fondeo, por la necesidad de cubrir pasivos que sean exigidos para su liquidación parcial o total.

b. Riesgos no Discrecionales. Son aquéllos resultantes de la operación del negocio⁶, pero que no son producto de la toma de una posición de riesgo, tales como:

- Riesgo Operacional. Se define como la pérdida potencial por fallas o deficiencias en los controles internos, por errores en el procesamiento y almacenamiento de las operaciones o en la transmisión de información; así como por resoluciones administrativas y judiciales adversas, fraudes o robos, y comprende, entre otros, el riesgo tecnológico y el riesgo legal. Este riesgo es consecuencia de la puesta en marcha de un negocio, ya sea un producto o servicio, y de la propia operación y administración corporativa. Los procesos necesarios para la operación se pueden dividir en Front, Middle, Back Office y Corporativo. Entonces, la realización del riesgo operativo se puede dar de *manera recurrente ante la implementación de un proceso para la operación de un negocio.*

⁵ "Porcentaje del saldo insoluto del crédito expuesto a riesgo, una vez tomado en cuenta el valor de las garantías."

⁶ "toda la operación que se realiza para el otorgamiento de un crédito hipotecario, que va desde la solicitud del cliente, que luego pasa por el análisis de la documentación, avales, etc., hasta la autorización y seguimiento del crédito"

- **Riesgo Legal**. Se define como la pérdida potencial por el incumplimiento de las disposiciones legales y administrativas aplicables, la emisión de resoluciones administrativas y judiciales desfavorables y la aplicación de sanciones, en relación con las operaciones que las Instituciones llevan a cabo. Este riesgo se genera ante una contingencia legal; sin embargo, es necesario identificar las causas y razón de ser de los distintos tipos de juicios legales que maneja la Institución. Los juicios mercantiles, son resultado de la posibilidad de la recuperación crediticia, por lo tanto, se convierte en un mecanismo de mitigación de riesgos de crédito y operativo. Por otro lado, para los casos penales, laborales, fiscales y civiles, el riesgo debe ser asignado al corporativo, adicionando los desembolsos por las posibles sanciones a las que puede estar expuesta la Institución por la distinta normatividad y leyes que rigen la operación.

- **Riesgo Tecnológico**. Se define como la pérdida potencial por daños, interrupción, alteración o fallas derivadas del uso o dependencia en el hardware, software, sistemas, aplicaciones, redes y cualquier otro canal de distribución de información en la prestación de servicios bancarios con los clientes de la Institución.

1.3.2 Riesgos no cuantificables. Son aquéllos derivados de eventos imprevistos para los cuales no se puede conformar una base estadística que permita medir las pérdidas potenciales. Por ejemplo, se tiene el riesgo de imagen para las instituciones.

1.3.3 Riesgo Global. El resultado final de medir todos estos riesgos será la determinación del impacto que pueden tener en el capital de la Institución de manera conjunta. El capital en riesgo debe ser modelado en el tiempo, tanto de forma individual (línea de negocio) como de forma global, y así estimar la rentabilidad, los riesgos esperados y no esperados ante cualquier escenario económico.

De aquí la importancia de la Estrategia de Negocio, basado en el conocimiento de aquellos productos que pueden generar valor contra aquéllos que pueden destruirlo bajo cierto escenario. Es decir, con base a la relación Riesgo-Rendimiento por línea de negocio y de forma Global, es necesario asignar el capital y deuda que permitan a cada negocio su operación, para de esta forma, mantener una estructura conveniente del balance.

1.4 Regulación

1.4.1 Regulación Internacional

En julio de 1988 el Comité de Basilea (Basel Committee on Banking and Supervisory Services) emitió la versión final del documento: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standard, denominado Basilea I.

El documento representaba el consenso de los reguladores de los países miembros para la medición de los requerimientos de capital y los estándares mínimos que los reguladores nacionales tenían la intención de implementar en sus respectivos países.

El acuerdo tenía como objetivos principales:

I. Reforzar la coherencia y estabilidad del sistema bancario internacional;

II. Reducir el riesgo sistémico a través del establecimiento de la aplicación consistente en los países miembros, de las reglas de capitalización, para evitar desigualdades competitivas entre los bancos internacionales;

III. Diseñar reglas de capitalización simples para poder distinguir los diferentes tipos de Riesgo de Crédito.

Las reglas requerían mantener un capital igual o mayor a un porcentaje de los activos ponderados por riesgo del portafolio. La ponderación se basaba en la calidad crediticia del acreditado y aplicadas a todas las transacciones.

El acuerdo distinguía cuatro grandes categorías de Riesgo de Crédito:

1. Exposiciones con gobiernos de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE) no requieren Capital.
2. Bancos de países de la OCDE y gobiernos de países que no son de la OCDE requieren 1.6% de Capital.
3. Los préstamos hipotecarios requieren 4% de Capital.
4. Los Corporativos, otros Bancos y otro tipo de exposiciones, requieren 8% de Capital.

El acuerdo original cubría requerimientos de Capital por Riesgo de Crédito, dejando a un lado otros riesgos : Riesgo de Mercado, Balance (tasa), Liquidez y Operacional.

En 1996, hubo una enmienda a Basilea I (conocida como BIS 98), para incluir requerimientos de Capital por Riesgo de Mercado. La enmienda, además, permite a los Bancos que demuestren tener áreas de administración de riesgo muy sólidas y usar sus modelos internos de Valor en Riesgo (VaR) para calcular el requerimiento de Capital por Riesgo de Mercado. Posteriormente, Basilea I se volvió obsoleto, debido a la vertiginosa evolución y complejidad del mundo financiero y la globalización económica.

Las críticas principales expuestas por los bancos internacionales fueron las siguientes:

* Las reglas de capitalización eran arbitrarias porque no tomaban en cuenta la probabilidad de insolvencia del acreditado.

* Excepto por la enmienda Bis 98, Basilea I no contemplaba otros tipos de riesgo.

* Excepto por la enmienda Bis 98, que permite el uso de modelos internos, Basilea I no considera efectos de diversificación del riesgo, coberturas (hedging), o nuevas técnicas de gestión del Riesgo del Portafolio de Crédito.

Ante tales críticas y teniendo en cuenta la necesidad de nuevas políticas financieras, en junio de 2004, el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea emitió un nuevo acuerdo definitivo (cuya implementación sería gradual) conocido como Basilea II, el cual se basa en tres pilares:

Pilar 1. Requerimientos de Capital Con opciones a elegir en los casos de riesgo de crédito y operacional.

Pilar 2. Proceso de Supervisión. Establecimiento de mejores prácticas y marcos de referencia estándar.

Pilar 3. Disciplina de Mercado. Requerimientos de revelación dependiendo del país y tamaño de la institución.

En el cuadro 1.1 se describen los alcances importantes de este nuevo Acuerdo.

Cuadro 1.1 Alcance del Nuevo Acuerdo (Basilea II)

Pilar	Alcance
1. Requerimientos de Capital	<p><i>Riesgo de Mercado.</i> Sin cambios desde la enmienda de 1998.</p> <p><i>Riesgo de Crédito.</i> Enfoque Estándar, enfoque de Modelos Internos (IRB), contexto de Bursatilización.</p> <p><i>Riesgo de Operacional.</i> Para su medición, tres enfoques: Básico, Estándar y Avanzado.</p>
2. Proceso de Supervisión	<p><i>Administración de Riesgos.</i> Mayor y mejor supervisión.</p> <p><i>Capital Regulatorio.</i> Mecanismos internos acordes.</p>
3. Disciplina de Mercado	Revelación de la Información. Recomendaciones y requerimientos de información

Fuente Documento de Acuerdos de Basilea II. Comité de Supervisión Bancaria

En lo que respecta al **Pilar 1**:

-Se incorpora el riesgo operacional a los requerimientos de capital. Además, se permite a los bancos determinar el requerimiento de capital en base a sus propios modelos internos.

El **Pilar 2** presenta cambios sustanciales en lo que respecta a la regulación y supervisión, basados en cuatro principios:

Principio 1. Los bancos deberán contar con mecanismos internos que permitan establecer objetivos de capitalización acordes con el nivel de exposición al riesgo.

Principio 2. Los supervisores deberán proporcionar una supervisión eficiente que examine las estrategias y controles internos de los bancos y que sea capaz de intervenir cuando no queden satisfechos con el resultado de este proceso.

Principio 3. Los supervisores pedirán a los bancos que operen bajo índices de capitalización mínimos y deberán tener facultades para solicitar que se aumente la capitalización arriba del mínimo.

Principio 4. Los supervisores deberán intervenir con prontitud y exigir la inmediata adopción de medidas correctivas, en el caso de que el capital descienda por debajo de los niveles mínimos requeridos.

Por su parte, el **Pilar 3** mostró cambios en cuanto al manejo de información:

Se considera que la revelación de información es, particularmente, importante en el nuevo acuerdo, y da una serie de recomendaciones y requerimientos de información que permitan a los participantes en el mercado la valuación de riesgos, suficiencia de capital y procesos de administración en las instituciones de crédito.

La revelación de información también contribuye a una mayor transparencia para los depositantes, inversionistas y clientes.

La revelación de información deberá cubrir aspectos cualitativos y cuantitativos de Riesgo de Mercado, Balance, Crédito y Operacional.

1.4.2 Regulación Nacional

La cultura de administración de riesgos en México es reciente, en el cuadro que se presenta a continuación se puede observar esta evolución de manera general:

Cuadro 1.2 Cultura de Administración de Riesgos en México

Año	Entidad	Publicación
1991	CNBV	Requerimientos de capitalización (8% sobre del total de activos ponderados por riesgo).
1995	Banxico	Requerimiento para operar coberturas cambiarias, futuros y opciones sobre USD.
1996	CNBV	Requerimientos de capitalización para casas de bolsa.
1998	Banxico	Extensión de requerimientos para todos los instrumentos derivados negociados por bancos y casas de bolsa.
1999	CNBV	Disposiciones de carácter prudencial en materia de administración integral de riesgos.
2000	CNBV	Circular sobre el riesgo de crédito comercial.
2000	CNSF	Circular sobre lineamientos de carácter prudencial en materia de administración integral de riesgos financieros.
2001	CNBV	Circular sobre el control interno
2004	CNBV	Nuevas circulares sobre administración de riesgos, riesgo operacional, compatibles con Basilea II.
2007	CNBV	Anexo 12 A, Riesgo operacional.
2007 ->		Basilea II en México

Fuente: CNSF

Las principales autoridades financieras nacionales dispusieron la conveniencia de compilar y actualizar la normatividad relativa a la regulación prudencial en materia de administración integral de riesgos, aplicable a las instituciones de crédito.

“...resulta necesario impulsar la cultura de la administración de riesgos en las instituciones, estableciendo al efecto lineamientos que habrán de ser implementados para llevar a cabo la identificación, medición, vigilancia, limitación, control y divulgación de los distintos tipos de riesgos que enfrentan en su actividad diaria, así como la eficiencia de la administración de riesgos, lo cuál dependerá en gran medida de la instrumentación, difusión y correcta aplicación de manuales de políticas y procedimientos en la materia.”⁷

Por disposición se menciona que las instituciones, para la administración integral de riesgos deberán:

I. “Definir sus objetivos sobre la exposición al riesgo y desarrollar políticas y procedimientos para la administración de los distintos tipos de riesgo a los que

⁷ CNSF, Circular S-11.6, 2000.

se encuentran expuestas, sean éstos cuantificables o no.

II. Delimitar claramente las diferentes funciones, actividades y responsabilidades en materia de Administración Integral de Riesgos entre sus distintos órganos sociales, unidades administrativas y personal de operación y de apoyo, en los términos del presente capítulo.

III. Identificar, medir, vigilar, limitar, controlar, informar y revelar los riesgos cuantificables a los que están expuestas, considerando, en lo conducente, los riesgos no cuantificables.

IV. Agrupar, considerando a sus subsidiarias financieras, los distintos tipos de riesgo a que se encuentran expuestas, por unidad de negocio o por factor de riesgo, causa u origen de éstos. Adicionalmente, los agruparán de forma global, incorporando para ello los riesgos de todas las unidades de negocio o los factores de riesgo, causa u origen de los mismos.” 8

De la misma manera, se refiere a la administración por tipo de riesgo y establece que:

”Las Instituciones deberán llevar a cabo la administración por tipo de riesgo de acuerdo con la clasificación establecida en el Artículo 66 de las presentes disposiciones...”⁹

En lo referente a los órganos y unidades administrativas responsables para la administración integral de riesgos las disposiciones mencionan:

“El Consejo de cada Institución será responsable de aprobar los objetivos, lineamientos y políticas para la Administración Integral de Riesgos, los Límites de exposición al riesgo y los mecanismos para la realización de acciones correctivas. El Consejo podrá delegar al comité de riesgos la facultad de aprobar los Límites Específicos de Exposición al Riesgo.”¹⁰

“El director general de la Institución, será responsable de vigilar que se mantenga la Independencia necesaria entre la unidad para la Administración Integral de Riesgos y las Unidades de Negocio.”¹¹

“El comité de riesgos para llevar a cabo la Administración Integral de Riesgos contará con una unidad especializada cuyo objeto será identificar, medir, vigilar e informar los riesgos cuantificables que enfrenta la Institución en sus operaciones, ya sea que éstos se registren dentro o fuera del balance, incluyendo, en su caso, los riesgos de sus Subsidiarias Financieras.

La unidad para la Administración Integral de Riesgos será Independiente de las Unidades de Negocio, a fin de evitar conflictos de interés y asegurar una adecuada separación de responsabilidades.”¹²

⁸ SHCP, Disposiciones Art. 67, 2005.

⁹ SHCP, Disposiciones Art. 79, 2005.

¹⁰ SHCP, Disposiciones Art. 68, 2005.

¹¹ SHCP, Disposiciones Art. 69, 2005.

¹² SHCP, Disposiciones Art. 73, 2005.

“Las instituciones de banca múltiple deberán contar con un área de auditoría interna Independiente de las Unidades de Negocio y administrativas, cuyo responsable o responsables serán designados por el Consejo o, en su caso, por el Comité de Auditoría, que lleve a cabo cuando menos una vez al año o al cierre de cada ejercicio una auditoría de Administración Integral de Riesgos...”¹³

Información

En lo que respecta a la información, las Instituciones deberán revelar al público inversionista, a través de notas a sus estados financieros y de manera trimestral a través de su página en la red electrónica mundial denominada Internet, la información relativa a las políticas, metodologías, niveles de riesgo asumidos y demás medidas relevantes adoptadas para la administración de cada tipo de riesgo, debiendo contemplar, como mínimo lo siguiente:

I. Información cualitativa:

- a.** Descripción de los aspectos cualitativos relacionados con el proceso de Administración Integral de Riesgos.
- b.** Los principales elementos de las metodologías empleadas en la administración de los riesgos de mercado, liquidez, crédito o crediticio y operativo, incluyendo:
 - 1.** Breve descripción de las metodologías para identificar y cuantificar los riesgos de crédito, liquidez y mercado.
 - 2.** Breve descripción de las metodologías empleadas para la administración y control del riesgo operativo, incluyendo el tecnológico y el legal.
- c.** Carteras y portafolios a los que se les está aplicando.
- d.** Breve explicación de la forma en que se deben interpretar los resultados de las cifras de riesgo que se den a conocer, incorporando, entre otros, la descripción del nivel de confianza y horizonte de tiempo utilizados en cada metodología, así como una descripción del tratamiento de riesgo de mercado aplicado a los títulos disponibles para la venta.

II. Información cuantitativa:

Revelación de los riesgos de mercado, crédito, liquidez y operativo, incluyendo el tecnológico y legal, a que esté expuesta la Institución a la fecha de emisión de los estados financieros. En este sentido deberán revelar, cuando menos lo siguiente:

- a.** Valor en riesgo.
- b.** Evaluación de variaciones en los ingresos financieros y en el valor económico.
- c.** Estadística descriptiva del riesgo de crédito o crediticio, incluyendo, entre otros, los niveles de riesgo y las pérdidas esperadas.
- d.** Valores promedio de la exposición por tipo de riesgo correspondiente al período de revelación.
- e.** Informe de las consecuencias y pérdidas que sobre el negocio generaría la

¹³ SHCP, Disposiciones Art. 76, 2005.

materialización de los riesgos operativos identificados.”¹⁴

Con el rápido desarrollo de las finanzas y la tecnología, la normativa vigente tiende a quedar obsoleta o corta, por lo tanto, existe la necesidad de incorporar de forma constante más y mejores esquemas de administración.

Por lo tanto, resulta conveniente que las instituciones de crédito incorporen en su proceso de administración integral de riesgos, aquellos relacionados por ejemplo con el riesgo operacional, así como los derivados de la realización de operaciones bancarias a través de tecnologías de información, en particular, cuando se encuentren relacionadas con la prestación de sus servicios a través de la red electrónica mundial, entre otros.

1.5 Proceso de Administración de Riesgos

Este proceso¹⁵ considera en primer lugar, la identificación de riesgos, en segundo lugar su cuantificación y control mediante el establecimiento de límites de tolerancia al riesgo y, finalmente, la ratificación, modificación o nulificación de dichos riesgos a través de disminuir la exposición a éstos, o de instrumentar una cobertura (gráfica 1.1).

Gráfica 1.1 Proceso de Administración de Riesgos



Fuente :De Lara Alfonso “Medición y Control de Riesgos financieros”

Para lograr una efectiva identificación de riesgo, es necesario considerar las diferentes naturalezas de los riesgos que se presentan en una sola transacción.

Los riesgos de mercado están asociados a la volatilidad, estructura de la correlaciones y liquidez, pero éstos no pueden estar separados de otros, tales como riesgos operativos (riesgos de modelo, de fallas humanas o de sistemas) o riesgos de crédito (incumplimiento de contrapartes, riesgos en la custodia de valores, en la liquidación, en la disminución de la calificación crediticia de algún instrumento o problemas con el colateral o garantías).

Por ejemplo, el riesgo de comprar una opción en el mercado de derivados (fuera de bolsa OTC), implica un riesgo de mercado pero también uno de crédito y riesgos operacionales al mismo tiempo.

En la gráfica 1.2 se establece la interconexión de los diferentes tipos de riesgos¹⁶, en el proceso de identificación de los mismos:

¹⁴ SHCP, Disposiciones Art. 88, 2005.

¹⁵ Proceso conforme a: DE LARA Haro Alfonso, 2001.

¹⁶ El Riesgo de Liquidez se considera dentro del Riesgo de Mercado.

Gráfica 1.2 Tipos de Riesgo



Fuente : De Lara Alfonso “Medición y Control de Riesgos financieros”

El siguiente paso en el proceso de administración de riesgos es el que se refiere a la cuantificación. Este aspecto ha sido suficientemente explorado en materia de riesgos de mercado. Existen una serie de conceptos que cuantifican el riesgo de mercado, entre ellos se destacan: valor en riesgo, duración, convexidad, peor escenario, análisis de sensibilidad, beta, delta, etc. Muchas medidas de riesgo pueden ser utilizadas.

En el presente trabajo se pone especial atención al concepto de valor en riesgo (VaR) que se popularizó gracias a JP Morgan (importante compañía financiera a nivel mundial). El valor en riesgo es un estimado de la máxima pérdida esperada que puede sufrir una cartera durante un período de tiempo específico y con un nivel de confianza o de probabilidad definido

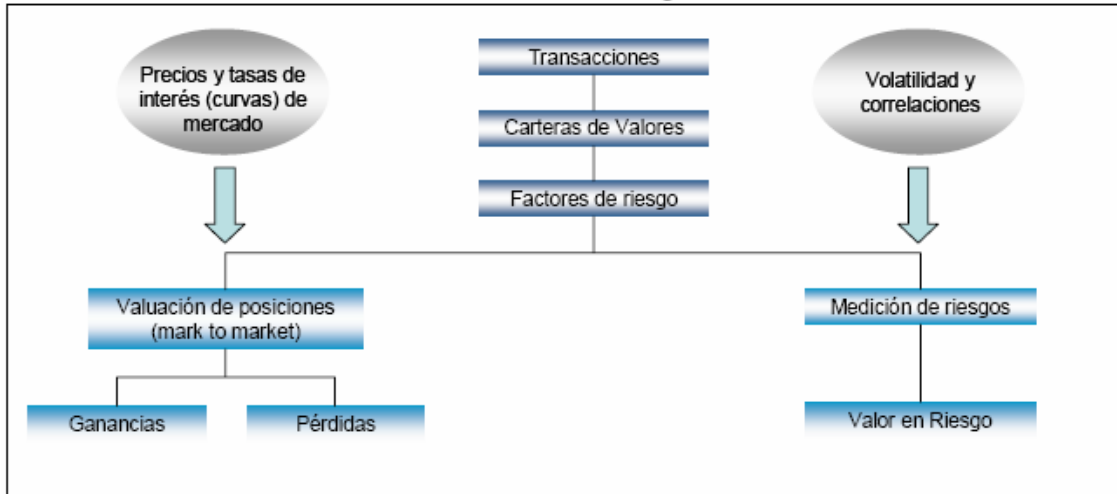
En el caso de riesgos de crédito, la cuantificación se realiza a partir del cálculo de la probabilidad de impago o de incumplimiento. JP Morgan ha publicado un documento técnico denominado CreditMetrics¹⁷ en el que pretende establecer un paradigma similar al del valor en riesgo pero instrumentado en riesgos de crédito, es decir, un estimado de pérdidas esperadas por riesgo crediticio.

La utilidad de este concepto radica en que las instituciones financieras pueden crear reservas preventivas de pérdidas derivadas de incumplimientos de contrapartes o de problemas con el colateral.

En la gráfica 1.3, se muestra la función de cuantificación del riesgo de mercado, por una parte se debe contar con los precios y tasas de interés de mercado para la valuación de los instrumentos y, por otra, cuantificar las volatilidades y correlaciones que permitan obtener el valor en riesgo por instrumento, por grupo de instrumentos y la exposición de riesgo global.

¹⁷ J.P. Morgan & Co. Incorporated. 1994.

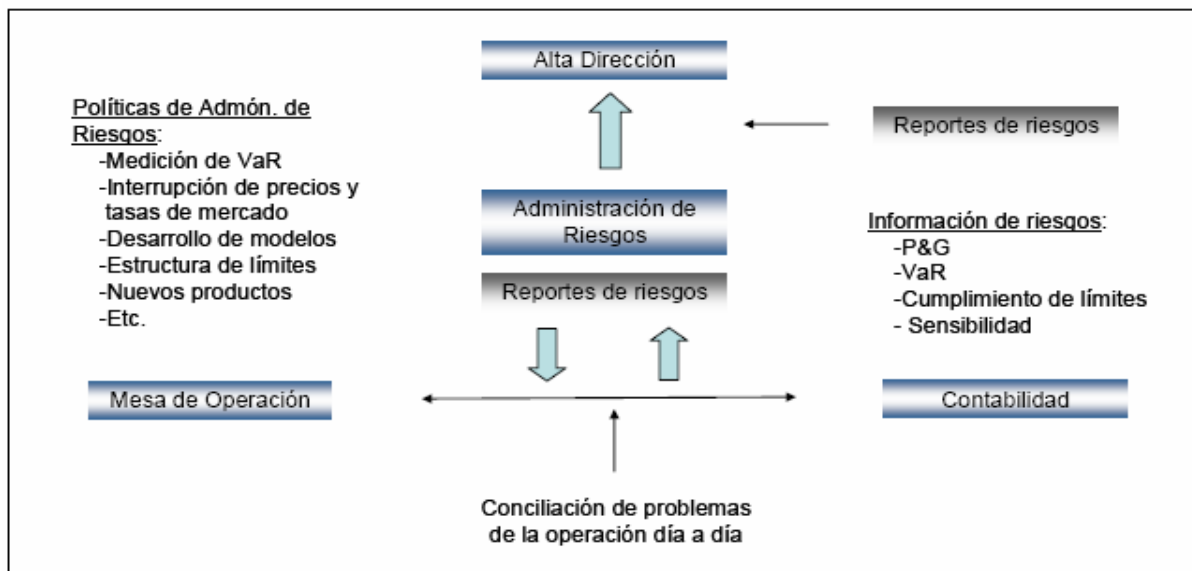
Gráfica 1.3 Cuantificación del Riesgo de Mercado



Fuente : De Lara Alfonso “Medición y Control de Riesgos financieros”

Por su parte, en la gráfica 1.4 se muestra la función primordial de la administración de riesgos: por una parte, la definición de políticas de administración de riesgos: la medición del riesgo (VaR) y el desarrollo de modelos y estructuras de límites, y por otra parte, la generación de reportes a la alta dirección que permitan observar el cumplimiento de límites, las pérdidas y ganancias realizadas y no realizadas. Asimismo, es función de administración y control de riesgos, la conciliación de posiciones entre las mesas de operación y las áreas contables. A esta última función se le conoce como el Middle office.

Gráfica 1.4 Función de la Administración de Riesgos



Fuente : De Lara Alfonso “Medición y Control de Riesgos financieros”

1.6 Casos de desastres Financieros

Las Empresas que tienen una cultura de riesgos, crean una ventaja competitiva frente a las demás, asumen riesgos más conscientemente, se anticipan a los cambios adversos, se protegen o cubren sus posiciones de eventos inesperados y logran experiencia en el manejo de riesgos. Por el contrario, las instituciones que no tienen una cultura de riesgos, posiblemente ganen más dinero en el corto plazo, pero en el largo plazo convertirán sus riesgos en pérdidas importantes que pueden significar inclusive, la bancarrota.

La posibilidad de contar hoy con más instrumentos y el acceso a mercados financieros internacionales, ha incrementado el apetito por riesgo de los inversionistas en general. Pero la ausencia de técnicas que midan el riesgo ha propiciado grandes desastres financieros.

Algunos ejemplos de estos desastres financieros se describen en el cuadro 1.3.

Cuadro 1.3 Desastres Financieros

Entidad	Desastre
Tesorería del Condado de Orange	Bob Citron, el Tesorero del condado de Orange en los Estados Unidos, invirtió en posiciones altamente riesgosas que se tradujeron en pérdidas por más de 1,700 millones de dólares, con el alza en las tasas de interés registradas en 1994.
Baring Bank	Nick Leeson, un operador del mercado de derivados que trabajaba en la subsidiaria del banco inglés Baring en Singapur, sufrió pérdidas que rebasaban en exceso el capital del banco y llevó a la quiebra a la institución en febrero de 1995 con pérdidas de más de 1,300 millones de dólares.
Daiwa Bank	Toshihide Iguchi un operador que manejaba posiciones en mercado de dinero en Daiwa Bank perdió 1,100 millones de dólares en 1995.
Sumitomo Corp.	Yasuo Hamanaka, un operador de contratos de cobre en Sumitomo Corp. perdió en junio de 1996, 1,800 millones de dólares.
Sistema Financiero Mexicano	En diciembre de 1994, la devaluación del peso mexicano dejó al descubierto la fragilidad del sistema financiero, ya que las Instituciones Financieras presentaron fuertes pérdidas tanto por riesgos de mercado, como por riesgos de crédito. El rescate se estima en un 20% del PIB (a valor de 1995).

Fuente : De Lara Alfonso "Medición y Control de Riesgos financieros"

El común denominador en estos desastres financieros fue la ausencia de políticas y sistemas de administración de riesgos en las instituciones, que permitieran medir y monitorear efectivamente las pérdidas potenciales de las posiciones en que estaban involucradas.

Para observar el desarrollo y magnitud de un desastre financiero se analizará a detalle un caso muy mencionado y, el que se considera uno de los más representativos, el caso de ENRON Corporation.

Caso: ENRON Corporation

ENRON Corporation, en cuestión de quince años, pasó de ser una pequeña empresa de gas en Texas, a ser el séptimo grupo empresarial de mayor valor en Estados Unidos, según la revista Fortune a mediados de 2001.

En el cuadro 1.4 se presentan la cronología de como se fue constituyendo el crecimiento de esta corporación:

Cuadro 1.4 Cronología de Antecedentes de ENRON

Fecha	Antecedente
Año 1985	- Surge de la fusión de Houston Natural Gas con InterNorth
Año 1989	- Comienza a comercializar gas natural como commodity
Noviembre 1999	- Se da el lanzamiento de "ENRON Online" un sistema de transacciones globales en Internet llegando a alcanzar 6000 transacciones diarias por un valor de 2.500 millones de dólares.
Año 2000	<ul style="list-style-type: none"> - Llego a ser la séptima compañía más grande de EUA, con 21.000 empleados en más de 40 países, habiendo superado los 100 billones de dólares de facturación en el ejercicio del año 2000. - Su compleja estructura corporativa es una enmarañada madeja de más de 3.000 sociedades unidas a través de holdings, lo que hace prácticamente imposible auditarla mediante métodos convencionales. - Creció rápidamente sobre la base de tres actividades de comercialización: energía, mayoreo y servicios globales. - Su éxito se originó no solamente por su papel en el mercado energético mundial sino también porque la administración de Bush consultaba a su presidente ejecutivo, Kenneth Lay, como asesor en energía. - ENRON consideraba que muchos de los servicios e incluso productos tales como anchos de banda eran en realidad commodities, que podían ser comprados, vendidos y almacenados tal como se hace con las acciones y los bonos. - ENRON fomentaba la participación de sus trabajadores en sus actividades.
Finales 2000	<ul style="list-style-type: none"> - Todos los administradores y empleados de ENRON tenían opciones que podían ejercerse en cerca de 47 millones de acciones. - En los 47 millones de opciones de ENRON, el strike price promedio fue de 30 dólares y el precio del mercado fue 83 dólares. El beneficio potencial fue casi de 2.500 millones de dólares.

Fuente : De Lara Alfonso "Medición y Control de Riesgos financieros"

En el cuadro 1.5 se muestran los sucesos que llevaron al colapso a ENRON, después de ser una de las empresas más importantes de Estados Unidos y del mundo:

Cuadro 1.5 Cronología de Sucesos que conllevaron al Colapso de ENRON

Fecha	Suceso
Año 2000	<ul style="list-style-type: none"> - Emergieron varios problemas: El Proyecto en la India presentó problemas debido a dificultades políticas del gobierno local; En Brasil la devaluación local afectó el valor de los activos (vía paridad); en Argentina la empresa filial Azurix presentó baja en los activos, de manera similar la empresa Wessex Water en Inglaterra.
Febrero 2001	<ul style="list-style-type: none"> - Kenneth Lay renuncia como presidente ejecutivo pero mantiene la presidencia del directorio a favor de su amigo Jeffrey Skilling. - Las acciones alcanzan la cotización record de \$84.87 convirtiendo a ENRON en la séptima empresa más valiosa de Estados Unidos.
Agosto 2001	<ul style="list-style-type: none"> - Jeffrey Skilling renuncia después de seis meses; Kenneth Lay retoma las responsabilidades ejecutivas máximas de la compañía. - El empleado de ENRON, Sherron Watkins envía una carta a Kenneth Lay previniéndole de irregularidades contables que podrían poner en peligro a la compañía. - Kenneth Lay convierte las opciones de ENRON en acciones.
Octubre 2001	<ul style="list-style-type: none"> - La firma del auditor Arthur Andersen comienza a destruir documentos de las auditorías realizadas a ENRON. La destrucción sigue hasta noviembre cuando la firma recibe una cédula para comparecer ante la Comisión de Seguridades y de Comercio. - ENRON reporta pérdidas millonarias entre julio y septiembre y anuncia una reducción en su stock accionario. ENRON establece un Comité de Investigación Especial. La reducción correspondía a asociaciones arregladas por el Vicepresidente Financiero Andrew Fastow. - La SEC (Securities and Exchange Commission) abre una investigación en ENRON respecto sus y practicas contables y transacciones particionadas. - En una conferencia, Kenneth Lay trata de dar confianza a los inversores y defiende el trabajo de Andrew Fastow. - ENRON despide a Andrew Fastow. - La investigación de la SEC se transforma en una investigación formal y más profunda.
Noviembre 2001	<ul style="list-style-type: none"> - ENRON revisa sus balances de los pasados cinco años. - La firma competidora Dynegy, informa que estaría dispuesta a hacerse cargo de ENRON. - ENRON dice que las pérdidas de su tercer trimestre son superiores a lo que se había informado y previene que necesitará financiar una deuda de 690 millones - El precio de las acciones de ENRON llega a su punto más bajo en 10 años mientras los inversores se preocupan acerca de si la empresa podrá superar sus problemas financieros. ENRON asegura una extensión de su deuda. - La calificación crediticia de ENRON es degradada. Las acciones de ENRON descienden por debajo de \$1 dólar (Dynegy retira su oferta). - ENRON implementa un plan de bonificaciones, donde prohíbe a sus empleados vender las acciones asignadas y ligas a sus planes de retiro, pero no funciona. - ENRON pide la protección de bancarrota prevista.

Fuente : De Lara Alfonso “Medición y Control de Riesgos financieros”

1.7 Recomendaciones del G-30

El Grupo de los Treinta (G-30) es un selecto grupo de economistas y financieros que fueron ministros de finanzas y/o presidentes de Bancos Centrales o Privados, establecido en 1978.

El grupo tiene como objetivo profundizar en la comprensión de las cuestiones económicas y financieras, para explorar las repercusiones internacionales de las decisiones adoptadas en los sectores público y privado, y examinar las opciones disponibles para los profesionales del mercado y los responsables políticos con la finalidad de desarrollar y recomendar las mejores prácticas y principios de conducta en los mercados.

Los desastres financieros entre otros aspectos, llevaron a que en 1993 el G-30 publicara algunas recomendaciones en relación con criterios prudenciales para instituciones que tienen productos derivados en posición de riesgo, los cuales se presentan a continuación:

1. El papel de la alta dirección. Los niveles gerenciales deben definir las políticas y controles asegurándose que se encuentren por escrito en un documento que sirva de base a clientes, reguladores y auditores. Las políticas deben incluir los límites que deben respetar las áreas de negocios.

2. Valuación a mercado de las posiciones de riesgo (marcar a mercado).

Esta valuación se conoce como Mark-to-Market, consiste en medir el valor justo o de mercado de un portafolio. La pérdida o ganancia no realizada de la posición de riesgo, se calcula mediante la diferencia entre el valor de adquisición de la posición y el valor de dicha posición en el mercado. Esta valuación debe hacerse preferentemente de manera diaria para evitar sorpresas y responder a la siguiente pregunta: si vendo mi posición hoy ¿a cuánto ascendería mi pérdida o mi ganancia?. Marcar a mercado es independiente de la metodología contable que se utilice para cuantificar las pérdidas y ganancias.

3. Cuantificación de riesgos. La medición de riesgos de mercado se logra mediante el cálculo de lo que se conoce como Valor en Riesgo (VaR). Este concepto fue propuesto por JP Morgan¹⁸ en octubre de 1994 y hoy en día es un estándar internacional. El VaR resume en un solo número la pérdida potencial máxima que se puede sufrir en una posición de riesgo dado un nivel de confianza elevado (usualmente 95 o 99 por ciento) y en un período de tiempo determinado.

4. Simulaciones extremas o de estrés. Estas consisten en valorar las posiciones en condiciones extremas y adversas de mercado. El valor en riesgo solamente es útil en condiciones normales de mercado. Existen muchas maneras de realizar estas pruebas, por ejemplo con escenarios de crisis reales o con escenarios extremos supuestos. Lo más común es contestar a la pregunta: ¿qué pasaría con mi posición si los factores de riesgo cambian dramáticamente? ¿Cuál podría ser la máxima pérdida que puedo sufrir en un evento poco probable pero posible?

5. Independencia en la medición de riesgos. Las áreas de negocio deben ser independientes, con el objetivo de evitar conflictos de interés que pueden surgir cuando éstas emiten sus propios reportes, miden sus propios riesgos y se monitorean a sí mismos.

6. Medición de riesgos de crédito. Dicha medición debe realizarse mediante el cálculo de probabilidades de incumplimiento de la contraparte. En instrumentos derivados debe medirse el riesgo actual y el riesgo potencial de crédito. El riesgo actual es el valor de mercado de las posiciones vigentes. El riesgo potencial mide la probable pérdida futura que pueda registrar un portafolio en caso de que la contraparte de la operación incumpla.

7. Experiencia y conocimiento de estadística y sistemas. La mayor parte de las técnicas para calcular el valor en riesgo tienen un fuerte soporte estadístico y la información debe ser entendible y accesible para medir el riesgo de manera oportuna. Por lo tanto, los administradores de riesgos, que realicen los cálculos y

¹⁸ J.P. Morgan & Co. Incorporated. 1994.

mediciones deben de tener la preparación adecuada para realizarlos y analizarlos correctamente.

1.8 El valor en riesgo y métodos de estimación

1.8.1 Descripción

La medida con mayor aceptación para la estimación del riesgo de mercado actualmente, es el Valor en Riesgo (VaR). Para saber el porque de su importancia en el ámbito financiero, es necesario analizarlo de forma detallada, que es el objetivo del presente capítulo.

Como primer punto, se muestra un análisis conceptual de VaR, origen, definiciones, utilidades, etcétera.

También se presenta los propósitos para los cuales fue concebido y se mencionan tipo de instituciones son las que lo utilizan.

Además se muestran otros métodos que existen para realizar la estimación del VaR (Simulación Histórica, Simulación Monte Carlo y Paramétrico).

Posteriormente se presenta el desarrollo general de la Teoría Modelos Garch, esta teoría se basa en el comportamiento autorregresivos de la varianza condicional. Por lo cuál, se analiza toda la teoría que muestran las propiedades en los procesos de los rendimientos y de la varianza a través del operador esperanza matemática condicional.

Para comparar el resultado obtenido se realiza el calculo del VaR histórico y VaR paramétrico y VaR de simulación Montecarlo.

1.8.2 Valor en Riesgo (VaR)

En 1952 Harry Markowitz¹⁹ propuso usar la variabilidad de los rendimientos de los activos financieros, como medida de riesgo. Así, la varianza de los rendimientos de los activos, se mantuvo como la medida de riesgo universalmente aceptada hasta finales de la década de los ochentas y principio de los noventas, cuando finalmente se hizo evidente que esta es más bien una medida de incertidumbre que de riesgo.

De manera coincidente con las grandes crisis financieras ocurridas precisamente en este periodo, se percibió la necesidad de que la medida de riesgo, tenía que expresarse en términos de pérdidas potenciales, con una cierta probabilidad de ocurrencia.

Actualmente, la medida más aceptada de riesgo es la que se conoce como el Valor en Riesgo (VaR), la cual intenta dar una idea sobre la pérdida en que se puede incurrir al ser inciertas las pérdidas y ganancias, es necesario asociar probabilidades y temporalidad a las diferentes pérdidas potenciales.

El VaR es un método para cuantificar la exposición al riesgo de mercado, utilizando distintas técnicas estadísticas. Ciertamente es una medida estadística de riesgo de mercado que estima la pérdida máxima que podría registrar una cartera de inversión en un intervalo de tiempo y considerando unos niveles de probabilidad o de confianza.

¹⁹ Markowitz, H. 1952.

Algunas definiciones son:

“El VaR mide la peor pérdida esperada en un intervalo de tiempo determinado bajo condiciones normales del mercado ante un nivel de confianza dado”²⁰

“El VaR corresponde al cuantil asociado al nivel de confianza fijado α , de la distribución de probabilidades de pérdidas y ganancias que puede tener el conjunto de activos, en un horizonte de tiempo dado T, dadas las condiciones de incertidumbre que prevalecen en ese momento en el mercado”²¹

$$\text{VaR}_{\alpha,T} = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{ \Pr[\text{pérdida}_{en_T} \geq x] = \alpha \}$$

Lo interesante del VaR es que una sola cifra resume la exposición de la entidad al riesgo de mercado; así como la probabilidad de un movimiento adverso. Con el conocimiento de dicha pérdida, los directivos de una empresa pueden realizar toma de decisiones.

1.8.3 Propósitos

El VaR es útil para los siguientes propósitos:

- I. **Presentación de Información.** A través del VaR los directivos pueden evaluar los riesgos que corren las operaciones de mercado y de inversión. Asimismo, el VaR proporciona información a los accionistas sobre los riesgos financieros de la empresa en términos no técnicos.
- II. **Asignación de Recursos.** El VaR puede utilizarse para determinar límites de posición a los operadores y para decidir donde asignar los recursos de capital. La ventaja del VaR es que crea un denominador común con el cual comparar las actividades riesgosas en diversos mercados. También el riesgo total de la empresa puede descomponerse (VaR Incremental) que permiten a los usuarios descubrir qué posiciones contribuyen más al riesgo total.
- III. **Evaluación de Desempeño.** Que debe de considerar una institución respecto a la administración financiera.²² El VaR puede utilizarse para ajustar el desempeño por riesgo. Esto es esencial en un entorno operativo, donde los operadores tienen una tendencia natural a tomar un riesgo extra. Los cargos de capital de riesgo basados en medidas de VaR proporcionan incentivos corregidos a operadores. Desde su aparición el VaR ha sido utilizado por cualquier institución que esta expuesta al riesgo financiero de mercado, entre ellas se cuentan a las instituciones financieras y no financieras, los expertos en regulación y a los administradores de activos, entre otros.

• **Instituciones financieras.** Las instituciones financieras, como los bancos y las casas de bolsa, que manejan importantes carteras han estado a la vanguardia de la administración del riesgo a través del VaR. Las empresas que tienen que ver con numerosas fuentes de riesgo financiero e instrumento complicado están implementando ahora sistemas centralizados de administración del riesgo.

²⁰ Jorion 2004.

²¹ Banxico “Definiciones Básicas de Riesgos” 2005.

²² Jorion 2004.

- **Expertos en regulación.** Algunos organismos importantes como el Comité de Basilea para la Supervisión Bancaria, el Banco de Reserva de los Estados Unidos y la mayoría de las instituciones de la Unión Europea han aceptado al VaR como una medida aceptable del riesgo. Por ejemplo, en 1995, la Securities and Exchange Commission (SEC), propuso establecer mecanismos para mejorar el riesgo de mercado, por ello, se invitaba a las empresas públicas de los Estados Unidos que emitieran información acerca de la actividad con derivados y que cuantificaran el VaR de esta actividad, a través de las técnicas conocidas. Así, las instituciones reguladoras exigen niveles mínimos de capital como reserva contra el riesgo financiero.

- **Empresas no financieras.** Cualquier empresa que tenga exposición al riesgo financiero debe de contar con una administración centralizada del riesgo. Por ejemplo, las empresas multinacionales, que cuentan con flujos de efectivo con varias divisas y por ello pueden tener oscilaciones cambiarias adversas. A través del VaR las empresas pueden contar con una herramienta que descubra su exposición al riesgo financiero, el cual es un escalón para generar una política de información de cobertura.

- **Administradores de activos.** En la actualidad, las instituciones que tienen como una de sus actividades la inversión en diferentes activos financieros, como las Sociedades de Inversión, han adoptado al VaR para medir y controlar los riesgos financieros.

1.8.4 Métodos de estimación

- **VaR Paramétrico.** Tienen como característica el supuesto de que los rendimientos de los activos se distribuyen de acuerdo con una curva de densidad de probabilidad que, generalmente, es la normal y en el supuesto de linealidad en el valor de los activos. Bajo el supuesto de normalidad y de media de rendimientos igual a cero, el modelo paramétrico que determina el valor en riesgo de una posición es el siguiente²³:

$$\text{VaR} = F * S * \sigma * t$$

Donde:

F= Factor que determina el nivel de confianza del cálculo.

S= Monto total de la inversión.

σ = Desviación estándar de los rendimientos del activo, la varianza es constante.

t= Horizonte de tiempo

Sin embargo, en la práctica se ha observado que la mayoría de los activos no necesariamente siguen un comportamiento aleatorio que se puede aproximar bien por una distribución normal y, por lo tanto, los resultados que se obtienen al medir el riesgo suponiendo normalidad, generalmente, subestiman el nivel real de riesgo de una cartera.

- **VaR con Simulación Histórica.** Intuitivamente, la simulación histórica es un ejercicio que examina los posibles valores de una cartera de activos financieros y sus correspondientes pérdidas y ganancias respecto a su valor actual, suponiendo que se pueden repetir escenarios que ya se han observado en algún momento anterior.

²³ Banxico. "Definiciones Básicas de Riesgos" 2005.

Consiste en valorar los activos de un portafolio de instrumentos, en los escenarios de factores de riesgo históricamente observados en un cierto periodo de tiempo. La pérdida o ganancia relacionada con cada escenario es la diferencia entre el valor actual de la cartera y el de la cartera valuada con los niveles de riesgo del escenario en cuestión.

Con las pérdidas y ganancias asociadas a cada escenario, se define una función de distribución de pérdidas y ganancias del valor del portafolio, de la que se puede obtener el VaR que, como ya se explicó, corresponde al cuantil de dicha distribución, elegida por el analista.

El método de simulación histórica tiene buena aceptación, porque no se basa en supuestos de correlaciones y volatilidades que en situaciones de movimientos extremos en los mercados pudieran no cumplirse. Tampoco descansa en el supuesto de normalidad y es aplicable a instrumentos no lineales.

-VaR con Simulación Montecarlo. A diferencia de la simulación histórica, el método Montecarlo consiste en generar de manera aleatoria, escenarios de ocurrencia de los factores de riesgo que afectan el valor de los activos contenidos en un portafolio de activos financieros.

Un vez generados los escenarios, se procede igual que en la simulación histórica; es decir: se valúa la cartera con los valores de los factores de riesgo asociados a cada escenario y se obtienen las pérdidas o ganancias asociadas a cada escenario, como la diferencia entre su valor actual y el que corresponde al escenario. Así, se obtiene la función de distribución de pérdidas y ganancias y el VaR, como el cuantil de la distribución correspondiente al nivel de confianza escogido. Además, de que es aplicable a instrumentos no lineales, lo que se busca es incorporar escenarios que pudieran ocurrir, aunque nunca se hayan observado antes; ni siquiera algunos parecidos.

Las limitaciones de la técnica son, en primer lugar, que se requieren supuestos sobre las distribuciones de probabilidad que caracterizan el comportamiento de los factores de riesgo, así como sus correlaciones entre sí, lo cual puede conducir a generar escenarios incongruentes con el comportamiento real de los mercados, aún en *condiciones de crisis*. En segundo lugar, la demanda sobre los recursos de cálculo, para generar un número suficiente grande de escenarios que dé confiabilidad estadística a los resultados, es considerable.

-VaR bajo estimación GARCH de la varianza

Se predice la varianza bajo la el método garch adecuado, para el caso de un ARCH(p) con la expresión siguiente :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k \epsilon_{t-k}^2 \tag{10}$$

Estimada la varianza para los siguientes días se simula el rendimiento correspondiente que depende de el rendimiento promedio mas ϵ_t , un termino aleatorio normal (0,1) escalado por el valor de la desviación estándar obtenida por el modelo Garch. La simulación se hace con base en el método de simulación Montecarlo pero la varianza es la propuesta por algún modelo Garch.

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \epsilon_t$$

Capítulo II.- Propiedades de los Modelos de Varianza Condicional

Los modelos de la familia Garch tienen por objeto replicar series financieras en donde la varianza no es constante, el objeto de replicar la varianza es hacer predicciones de esta para constituir reservas adecuadas y para que las instituciones financieras no pongan en riesgo sus obligaciones contractuales con un alto nivel de confianza.

Se observa en el comportamiento de una serie financiera ciertas evidencias empíricas que los modelos tradicionales de cálculo de el valor en riesgo dejan al margen al trabajar con supuestos de normalidad y de varianza constante.

2.1 Cálculo de Rendimientos

El estudio se realiza a partir de una variable que representa los rendimientos de la serie financiera en forma continua, de esta forma obtenemos un cambio de escala y obtenemos primeras diferencias, el propósito es obtener una serie estacionaria en la media y varianza.

$$r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) \quad (2.1)$$

donde p_{t-1} es el precio en $t-1$

Cuando hay dividendos

$$r_t = \ln\left(\frac{p_t + d_t}{p_{t-1}}\right) \quad (2.1.b)$$

donde p_{t-1} es el precio en $t-1$

2.2 Evidencia empírica:

Se observa que la variable de rendimientos es estacionaria en la media por el cambio de escala y por la primer diferencia implícita, mas no en la varianza. En una grafica se nota que los rendimientos oscilan alrededor una recta que representa un valor central o media, esto indica estacionariedad en la media, pero observamos periodos de alta volatilidad que se alejan mucho respecto a la media y periodos de calma en que los rendimientos no se alejan demasiado de la media a este comportamiento inferimos que la varianza no es constante en el tiempo.

Si obtenemos una función de auto correlación tratamos de determinar si el comportamiento del rendimiento tiene alguna relación con su pasado, es decir si lo que sucede hoy depende de el día anterior o la semana pasada

Con apoyo de la función de auto correlación se observa que:

$$1.- \text{corr} = \text{Corr}(r_t, r_{t-1}) \approx 0 \quad (2.3)$$

No hay estructura de comportamiento en la media.

Si la variable la consideramos en términos cuadráticos con apoyo de la función de auto correlación observamos que si hay una estructura de comportamiento de la varianza.

$$2.- \text{corr} = \text{Corr}(r_t^2, r_{t-1}^2) \neq 0 \quad (2.4)$$

Se observa en un histograma de frecuencias de los rendimientos del IPC que las caídas son ligeramente mas severas que las subidas (asimetría).

3.- $f(r)$ es sesgada a la izquierda

4.- $f(r)$ es parecida a una distribución leptocurtica, mas picuda que una normal, $k > 3$

Entre los posibles modelos para caracterizar el proceso de log rendimientos descartamos los modelos ARIMA debido a que sus distribuciones marginales son normales y la varianza debe ser constante.

En la teoría clásica de series temporales (metodología de Box-Jenkins), el desarrollo estadístico se realiza a partir de un proceso estocástico estacionario; es decir (en sentido amplio o débil) de un proceso con:

- Media constante.
- Varianza constante.
- correlación entre dos observaciones distintas igual a la de otras dos cualquiera separadas por la misma distancia (mismo número de períodos).

En torno a la confirmación de la ausencia de tendencia (determinista o aleatoria), hay un nutrido conjunto de teorías y desarrollos matemáticos centrados en la diferenciabilidad de la serie temporal y en la existencia o no de raíces unitarias a partir de los conocidos test de Dickey y Fuller, de Mackinon o de Phillips y Perron, por citar algunos. Sin embargo, el estudio de la componente de varianza constante es un fenómeno menos extendido y, no tener en cuenta una posible no constancia de este componente, puede suponer diversos problemas estadísticos cuando se estiman modelos econométricos (problemas ligados con la eficiencia de los parámetros estimados y su fuerte volatilidad ante el amplio intervalo de confianza en el que se mueven)

Axioma 0

Existe poder predictivo en la varianza del proceso de precios de la emisora

$$VAR = f(r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-3}, r_{t-4}, \dots, r_{t-n}) \quad (2.5)$$

No existe poder predictivo de los rendimientos, se sustenta a la hipótesis fuerte de mercados eficientes.

El modelaje de la varianza de estas series financieras lo construiremos con metodología ARCH

2.3 Modelo General ARCH

Auto Regresivo de varianza condicional, la fuerza de estos modelos radica en que no considera a la varianza constante, depende de lo ocurrido a través de la historia.

$$\sigma_t = \mu_t \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (2.6)$$

Mu: Se asume que la Media es constante y cercana a cero en función de un vector de parámetros

$$\mu_t = \mu = E(r_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-3}, r_{t-n}) \quad (2.7)$$

h. varianza en función de un vector de parámetros

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (r_{t-1} - \mu) \quad (2.8)$$

$$\mu, \alpha_0, \alpha_1$$

ε : iid²⁴ con distribución general $(0,1)$

²⁴ Independiente idénticamente distribuido

2.3.1 Modelo ARCH 1

En este modelo para estimar la varianza se considera un parámetro independiente y un parámetro relacionado con el periodo pasado, y el rendimiento esperado depende del valor estimado de la varianza y de una variable iid aleatoria que se distribuye en forma normal con media cero y varianza unitaria

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (2.1)$$

$$Var(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1} - \mu)^2 \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_t \approx iid \dots D(0,1)$$

$$\varepsilon_t \sim N(\mu, \alpha_0, \alpha_1)$$

Todos los resultados de esperanza varianza y covarianzas referentes a el modelo ARCH son demostrados en el Anexo 1 :Demostración de propiedades del Modelo ARCH

2.3.2 Modelo ARCH p

Es una generalización del modelo Arch 1 en donde los parámetros se relacionan con mas observaciones pasadas de los rendimientos y de la media

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (2.3)$$

$$h_t = Var(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-p}) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k (\varepsilon_{t-k} - \mu)^2 \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_t \approx iid \dots D(0,1)$$

$$\varepsilon_t \sim N(\mu, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

2.3.3 Estructura de predicción del proceso residual respecto a la media, \hat{e}_t en el modelo ARCH

$$e_t = r_t - \mu \quad (2.5)$$

El proceso residual respecto a la media es la comparación del rendimiento observado en el periodo t respecto al valor de la media, es importante analizar con la teoría estadística cual es el valor del valor esperado, de la varianza y de la covarianza de este proceso.

La esperanza

Obtenemos la esperanza de este proceso con base en lo ocurrido en el pasado, hacemos una filtración en el tiempo t-1, es decir obtenemos toda la información disponible hasta el tiempo t-1

$$E[e_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}] = E[\sqrt{h_t} * \varepsilon_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}] \quad (2.6)$$

$$= \sqrt{h_t} * 0 = 0 \quad (2.7)$$

La varianza del proceso \hat{e}_t

$$Var[e_t] = Var[E[e_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}]] + E[Var[e_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}]] \quad (2.8)$$

$$Var[e_t] = \alpha_0 + \alpha_1 Var[e_{t-1}] \quad (2.9)$$

Pedimos que $E[e_{t-1}^2] = E[e_t^2]$ Para que el proceso sea estacionario en la varianza Las marginales tienen que ser la misma

$$Var [r_t] = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \dots \forall t \quad (2.10)$$

El resultado anterior significa que los valores de la predicción de la varianza convergen a un valor que esta en función de los parámetros alfas del modelo Arch 1 lo que implica que son adecuados para hacer predicciones en el corto plazo.

Covarianza del proceso residual respecto a la media, $\hat{Cov}[e_t, e_{t-k}]$

Con la definición de el estadístico covarianza obtenemos la covarianza del proceso

$$Cov [r_t, e_{t-k}] = E [r_t * e_{t-k}] - E [r_t] E [e_{t-k}] \quad (2.11)$$

$$Cov [r_t, e_{t-k}] = 0 \quad (2.12)$$

Implica que

$$Corr [r_t, e_{t-k}] = 0 \quad (2.13)$$

El resultado obtenido se interpreta como un comportamiento entre el rendimiento y su pasado, con la serie de datos, la prueba se hace con la función de auto correlación que presenta como resultado un correlograma de la variable con ella misma pero con distintos retraso.

2.3.4 Estructura del proceso e_t^2 en el modelo ARCH

Se considera el cuadrado del proceso residuales de los rendimientos respecto a la media como estimador de la varianza

$$e_t^2 = (r_t - \mu)^2 \quad (2.14)$$

El estudio de este nuevo proceso involucra el calculo de su valor esperado, de su varianza y de su covarianza para determinar si este presenta una estructura de comportamiento cuando consideramos que la varianza se comporta como un modelo arch 1

e_t^2 es un AR 1

La esperanza del proceso e_t^2

$$E [e_t^2] = E [E [e_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}]] \quad (2.15)$$

$$\dots = E [e_t^2]$$

$$E [e_t^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E [e_{t-1}^2] \quad (2.16)$$

Pedimos que $E [e_{t-1}^2] = E [e_t^2]$ Para que el proceso sea estacionario en la varianza Las marginales tienen que ser la misma

$$E [e_t^2] = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \dots \forall t \quad (2.17)$$

$$E [e_t^2] = Var [r_t]$$

La demostración de este resultado en el anexo 1 demostraciones de propiedades del modelo Garch

La esperanza de este nuevo proceso converge y es igual a la varianza del proceso anterior: residuales de los rendimientos respecto a su media

La varianza del proceso e_t^2

Por la definición de varianza

$$\text{Var} \left[e_t^2 \right] = E \left[e_t^4 \right] - \left(E \left[e_t^2 \right] \right)^2 \quad (2.18)$$

Aplicamos las propiedades de la esperanza condicional

$$\text{Var} \left(e_t^2 \right) = \frac{\alpha_0^2 \left(\frac{1 + \alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) E \left[e_{it}^4 \right]}{1 - \alpha_1^2 E \left[e_{it}^4 \right]} - \left(\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \right)^2 \quad (2.19)$$

Estudio de la curtosis de los rendimientos

$$k = \frac{E \left[e_t^4 \right] - E \left[e_t^2 \right]^2}{\text{Var}^2 \left(e_t^2 \right)} \quad (2.20)$$

$$k = \frac{3 \left(-\alpha_1^2 \right)}{1 - 3\alpha_1^2} \quad (2.21)$$

Proponemos que $k > 3$ para replicar una distribución leptocúrtica

$$\frac{3 \left(-\alpha_1^2 \right)}{1 - 3\alpha_1^2} > 3 \quad (2.22)$$

Simplificamos

$$\frac{\left(-\alpha_1^2 \right)}{1 - 3\alpha_1^2} > 1 \quad (2.23)$$

$$\text{Si } 1 - 3\alpha_1^2 > 0 \quad \text{implica que } \alpha_1^2 < \frac{1}{3} \quad (2.24)$$

$$1 - \alpha_1^2 > 1 - 3\alpha_1^2 \quad \text{implica que } \alpha_1 > 0 \quad (2.25)$$

$$\text{Si } 1 - 3\alpha_1^2 < 0 \quad \text{implica que } 1 - \alpha_1^2 < 1 - 3\alpha_1^2 \quad \text{no tiene solución} \quad (2.26)$$

Por lo tanto

$$0 < \alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.27)$$

Va a tener colas mas pesadas y es mas picuda que la normal

Correlación del proceso e_t^2

$$\text{Cov} \left(e_t^2, e_{t-1}^2 \right) = E \left[e_t^2 e_{t-1}^2 \right] - E \left[e_t^2 \right] E \left[e_{t-1}^2 \right] \quad (2.28)$$

$$\text{Cov} \left(e_t^2, e_{t-1}^2 \right) = \alpha_0^2 \left(1 + \alpha_1 \right)$$

Existe covarianza con la variable que representa el cuadrado de los rendimientos por lo tanto existe una estructura en el comportamiento, es decir hay correlación, los valores actuales se explican por el pasado. (2.29)

El proceso $\{r_t^2\}$ es un proceso Auto regresivos de orden 1

A partir del cálculo del error

$$v_t = e_t^2 - E\{e_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\} \quad (2.30)$$

Y aplicando las propiedades de esperanza condicional

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 - v_t \quad (2.31)$$

Y se cumple que el proceso $\{r_t^2\}$ es un proceso autorregresivos de orden 1

Si consideramos a $\mu = 0$

$$r_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 - v_t \quad (2.32)$$

$\{r_t^2\}$ es un proceso autorregresivos de orden 1

En la función de auto correlación se observa una caída exponencial

Se debe cumplir que $0 < \alpha_1 < 1$ para estacionariedad

α_0 puede asumir cualquier numero positivo

Podemos concluir que:

$$\text{Corr}\{r_t^2, r_{t-k}^2\} > 0 \quad (2.33)$$

2.3.5 Estimación en modelos ARCH

Máxima Verosimilitud

Cuando tratamos de replicar a una variable con distintos modelos Arch la manera de discriminarlos y seleccionar alguno es mediante algún criterio de información Akaike ó Bayesiano con base en la función de verosimilitud.

Datos $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_T$

$$\text{Arch} \left(\begin{matrix} r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t \\ h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (r_{t-1} - \mu)^2 \end{matrix} \right) \quad (2.34)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (r_{t-1} - \mu)^2 \quad (2.35)$$

$$L(\mu, \alpha_1 | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = f(r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) \quad (2.36)$$

Función de densidad conjunta

$$L(\mu, \alpha_1 | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = f(r_1) f(r_2 | r_1) f(r_3 | r_2, r_1) f(r_4 | r_3, r_2, r_1) \dots f(r_T | r_{T-1}, r_2, r_1) \quad (2.37)$$

$$L(\mu, \alpha_1 | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = f(r_T, r_{T-1}, r_2, r_1) \quad (2.38)$$

$$L(\mu, \alpha_1 | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = N(\mu, h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (r_{t-1} - \mu)^2) \quad (2.39)$$

Verosimilitud condicional en r_1

Condicionar en r_1

$$L(\mu, \alpha_1 | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = \prod_{k=2}^T N(\mu, h_k) \quad (2.40)$$

$$l(\mu, \alpha_1 | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = \sum_{i=2}^T \ln N(\mu, h_i) = \sum_{i=2}^T -\frac{1}{2} \ln |\Pi| - \frac{1}{2h_i} (r_i - \mu)^2 \quad (2.41)$$

Prueba de hipótesis de errores ARCH en un análisis de regresión

Efectos ARCH en regresión

Procedimiento

Llevar a cabo la regresión y obtener los residuales

$$Y_t = X_t' \beta + \varepsilon_t \quad (2.42)$$

Llevar a cabo una segunda regresión con los errores de la primera regresión

$$\hat{\varepsilon}_t = +\alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2} + \alpha_p \hat{\varepsilon}_{t-p} + v_t \quad (2.43)$$

Hipótesis nula: Hay homocedasticidad

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 \dots \alpha_p = 0$$

$$H_a: \text{al menos una } \alpha_i \neq 0$$

El estadístico de prueba es $TR^2 \approx \chi_p^2$ rechazamos para valores muy grandes

Selección de p:

- Correlogramas
- Ensayo y error
- Criterios de información

$$\text{AIC Akaike} \quad AIC = -2\hat{l} + 2p \quad (2.44)$$

$$\text{BIC Schwartz} \quad BIC = -2\hat{l} + p \ln \hat{\sigma}^2 \quad (2.45)$$

Hay que seleccionar el menor valor en el criterio elegido

2.3.6 Validación del Modelo

Análisis de residuales de los rendimientos respecto a su media

$$\hat{e}_t = r_t - \hat{\mu}_t \quad (2.46)$$

Las pruebas para validar que el Arch 1 es el modelo adecuado para replicar la varianza se deben hacer con residuales estandarizados

$$\hat{e}_t^* = \frac{\hat{e}_t}{\sqrt{\hat{h}_t}} \quad \text{residuales estandarizados} \quad (2.47)$$

Las pruebas necesarios para la validación y aplicación del modelo para predicción son:

1.- No correlación

Función de Autocorrelación de $\hat{e}_t, \hat{e}_t^*, \hat{e}_t^2$

Grafica de \hat{e}_t v.s. tiempo

2.- Homocedasticidad, que la varianza de los residuales estandarizados es constante

Grafica de \hat{e}_t^2 v.s. tiempo

Prueba White Lagrange

3.- Normalidad, que los residuales se distribuyen normalmente

Prueba Jarque-Bera \hat{e}_t^*

Histograma

Q teórico-Q empírico Plot

2.3.7 Predicción ARCH

Ya que seleccionamos el modelo con base en algún criterio de información se procede a hacer la predicción de la media y de la varianza.

Predicción de la media

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (2.48)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (r_{t-1} - \mu)^2 \quad (2.49)$$

$$\hat{r}_{T+1|T} = \hat{E}[r_{T+1} | \mathfrak{F}_T^-] \quad (2.50)$$

$$\hat{r}_{T+1|T} = \hat{\mu} \quad (2.51)$$

$$\hat{r}_{T+k|T} = \hat{\mu} \quad (2.52)$$

Se concluye que la mejor estimación del rendimiento es su media

Predicción de la varianza

La varianza en la predicción del periodo t+1 depende de la varianza de periodo t, se va incrementando el periodo de la filtración.

$$\hat{h}_{t+1|t} = \hat{E}[\alpha_0 + \alpha_1 (r_t - \mu)^2 | \mathfrak{F}_t^-], \quad e_t^2 = (r_t - \hat{\mu})^2 \quad (2.53)$$

$$\hat{h}_{T+1|T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 e_T^2 \quad (2.54)$$

$$\hat{h}_{t+2|t} = \hat{\alpha}_0 (1 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_1^2) + \hat{\alpha}_1^3 e_t^2 \quad (2.55)$$

$$\hat{h}_{t+k|t} = \hat{\alpha}_0 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \hat{\alpha}_1^i \right) + \hat{\alpha}_1^k e_t^2 \quad (2.56)$$

$$\hat{h}_{t+k|t} = \hat{\alpha}_0 \left(\frac{1 - \hat{\alpha}_1^{k+1}}{1 - \hat{\alpha}_1} \right) + \hat{\alpha}_1^k e_t^2 \quad (2.57)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{h}_{t+k|t} = \frac{\hat{\alpha}_0}{1 - \hat{\alpha}_1} \quad \text{Varianza marginal constante} \quad (2.58)$$

La varianza converge a un valor que esta en función de los parámetros alfa estimados por el modelo Arch.

2.4 Modelos GARCH

Modelos auto regresivos de varianza condicional

Son una generalización de los modelos ARCH en la que se adiciones términos que representan la contribución de la varianza pasada en la varianza actual y son modelos más parsimoniosos, con menos términos o parámetros.

Todos los resultados de esperanza varianza y covarianzas referentes a el modelo ARCH son demostrados en el Anexo 2 Demostración de propiedades del Modelo Arch

2.4.1 Modelos GARCH (p,q)

$$Garch(p, q) \quad (2.59)$$

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \dots iid D(0, 1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k (r_{t-k} - \mu_{t-k})^2 + \sum_{k=1}^q \gamma_k h_{t-k} \quad (2.60)$$

2.4.2 Modelos GARCH (1,1)

$$Garch(1, 1) \quad (2.61)$$

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \dots iid D(0, 1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (r_{t-1} - \mu_{t-1})^2 + \gamma_1 h_{t-1} \quad (2.62)$$

H es una funcion predecible del pasado

Para estacionariedad se pide que:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &> 0 \\ \alpha_1 &\geq 0 \\ \gamma_1 &\geq 0 \\ \alpha_1 + \gamma_1 &< 1 \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.4.3 Propiedades del Proceso $\hat{e}_t = r_t - \hat{\mu}$ en modelos GARCH

Esperanza del proceso $\hat{e}_t = r_t - \hat{\mu} = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$

$$E(\hat{e}_t) = E(\sqrt{h_t} \varepsilon_t) \quad (2.64)$$

El valor esperado de la variable es 0

$$E(\hat{e}_t) = E[\sqrt{h_t} \times 0] = 0 \quad (2.65)$$

Varianza del proceso $\hat{e}_t = r_t - \hat{\mu}$

Varianza condicional

$$Var(\hat{e}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = Var(\sqrt{h_t} \varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) \quad (2.66)$$

(2.165)

$$\text{Var}(\hat{e}_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \gamma_1} \quad \text{la varianza depende de los valores de los parámetros} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \gamma_1 \geq 0 \\ \alpha_1 + \gamma_1 < 1 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Covarianza

$$\text{Cov}(\hat{e}_t, \hat{e}_{t+k}) = E(\hat{e}_t \hat{e}_{t+k}) - E(\hat{e}_t)E(\hat{e}_{t+k}) \quad (2.69)$$

$$\text{Cov}(\hat{e}_t, \hat{e}_{t+k}) = 0 \quad (2.70)$$

Curtosis

$$E[\hat{e}_t^4] = E[\varepsilon_t^4] \quad (2.71)$$

$$E[\varepsilon_t^4] = \frac{3\alpha_0^2(1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1)}{(1 - \alpha_1 - \gamma_1)(-2\alpha_1^2 - \alpha_1 + \gamma_1)} \quad (2.72)$$

Finalmente la curtosis

$$k = \frac{E[\varepsilon_t^4]}{\text{Var}(\varepsilon_t)} \quad (2.73)$$

$$k = \frac{\frac{3\alpha_0^2(1 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1)}{(1 - \alpha_1 - \gamma_1)(-2\alpha_1^2 - \alpha_1 + \gamma_1)}}{\frac{\alpha_0^2}{(-\alpha_1 - \gamma_1)}} \quad (2.74)$$

$$k = \frac{3(1 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1)(-\alpha_1 - \gamma_1)}{(-2\alpha_1^2 - \alpha_1 + \gamma_1)} \quad (2.75)$$

$$k = \frac{3\left(1 - (\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1)^2\right)}{(-2\alpha_1^2 - \alpha_1 + \gamma_1)} \rightarrow 3 \quad (2.76)$$

Pedimos que $k > 3$ para que \hat{e}_t tenga colas mas pesadas que la normal

$$\left(1 - \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1\right)^2\right) > \left(-2\alpha_1^2 - \left(\alpha_1 + \gamma_1\right)\right) \quad (2.77)$$

Al sustituir los valores de los parámetros si se cumple la desigualdad 2.200 aseguramos que la distribución de los residuales de los rendimientos respecto a su media, calculados bajo un modelo Garch tienen colas mas pesadas que la normal que se apega a las evidencias empíricas de la serie financiera.

Condiciones de estacionariedad sobre las marginales

$$\hat{e}_t = r_t - \mu \quad (2.78)$$

$$E\left[\hat{e}_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] = 0 \quad (2.79)$$

$$E\left[\hat{e}_t^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] = h_t = \text{Var}\left(\hat{e}_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right) \quad (2.80)$$

$$E\left[\hat{e}_t^2\right] = \text{Var}\left(\hat{e}_t\right) = E\left[h_t\right] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \gamma_1} \quad (2.81)$$

$$k > 3 \quad (2.82)$$

$$\text{Cov}\left(\hat{e}_t, \hat{e}_{t+k}\right) = 0 \quad (2.83)$$

2.4.4 Propiedades del proceso $\hat{e}_t^2 = \left(\epsilon_t - \mu\right)^2$ en modelos GARCH

Esperanza condicional

$$E\left[\hat{e}_t^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] = h_t \quad (2.84)$$

$$E\left[\hat{e}_t^2\right] = E\left[h_t\right] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \gamma_1} \quad (2.85)$$

Varianza condicional

$$\text{Var}\left[\hat{e}_t^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] = E\left[\left(\hat{e}_t^2 - E\left[\hat{e}_t^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right]\right)^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] \quad (2.86)$$

$$\text{Var}\left[\hat{e}_t^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] = h_t^2 E\left[h_t^4\right] \left(\epsilon_t\right)^2 \quad (2.87)$$

Varianza marginal

$$\text{Var}\left[\hat{e}_t^2\right] = E\left[\text{Var}\left(\hat{e}_t^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right)\right] + \text{Var}\left(E\left[\hat{e}_t^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right]\right) \quad (2.88)$$

$$\text{Var}\left[\hat{e}_t^2\right] = E\left[h_t^2\right] E\left[h_t^4\right] \left(\epsilon_t\right)^2 \quad (2.89)$$

Correlaciones

$$\text{Corr}\left(\hat{e}_t, \hat{e}_{t+k}\right) \propto \left| \alpha_1 + \gamma_1 \right|^{k-1} \quad (2.90)$$

El proceso \hat{e}_t es un modelo autorregresivos y de promedios móviles

$$\left(\hat{e}_t\right)_{t=1}^{\infty} = \text{ARMA}(1,1) \quad (2.91)$$

Residuales de la estimación de la varianza

$$v_t = \hat{e}_t - h_t \quad (2.92)$$

$$v_t = \hat{e}_t - \left(\alpha_0 + \alpha_1 \hat{e}_{t-1} \right) + \gamma_1 h_{t-1} \quad (2.93)$$

$$\hat{e}_t = \underbrace{\left(\alpha_0 + \alpha_1 \hat{e}_{t-1} \right)}_{\text{AR}(1)} + \underbrace{\left(v_t - \gamma_1 v_{t-1} \right)}_{\text{MA}(1)} \quad (2.94)$$

Covarianza de los residuales de la varianza

$$v_t = \hat{e}_t - h_t = h_t \varepsilon_t^2 - h_t = h_t \left(\varepsilon_t^2 - 1 \right) \quad (2.95)$$

$$\text{Cov}\left(\hat{e}_t, v_{t+k}\right) = E\left[v_{t+k}\right] E\left[\hat{e}_t\right] = 0 \quad (2.96)$$

$$\text{Cov}\left(\hat{e}_t, v_{t+k}\right) = E\left[\left(\varepsilon_t^2 - 1\right) h_{t+k} \left(-1\right)\right] = 0 \quad (2.97)$$

2.4.5 Estimación del modelo GARCH

Selección de p y q en el modelo GARCH

- AIC
- BIC
- Ensayo y error

2.4.6 Validación del modelo se hace mediante análisis de residuales

$$\hat{e}_t = r_t - \hat{\mu}_t \quad \text{Análisis de residuales} \quad (2.98)$$

$$\hat{e}_t^* = \frac{\hat{e}_t}{\sqrt{\hat{h}_t}} \quad \text{Análisis residuales estandarizados} \quad (2.99)$$

Se deben comportar como una muestra aleatoria iid $N(0,1)$

Graficas para análisis

1.- No correlación

Función de Autocorrelograma de $\hat{e}_t, \hat{e}_t^*, \hat{e}_t^2$

Grafica de \hat{e}_t v.s. tiempo

2.- Homocedasticidad

Grafica de \hat{e}_t^2 v.s. tiempo
Prueba White Lagrange

3.- Normalidad

Prueba Jarque-Bera \hat{e}_t^*
Histograma
Q teórico-Q empírico Plot

Pruebas

Ljung Box: Ruido blanco
Jarque Bera : normalidad
Breush- Pagan : Homocedasticidad

2.4.7 Predicción GARCH (1,1)

Rendimientos

$$\hat{r}_{T+k|T} = \hat{E} \left[r_{T+k|T} \mid \mathfrak{S}_T \right] \quad (2.100)$$

Para $k=1$

$$\hat{r}_{T+1|T} = \hat{E} \left[\mu_{T+1} + \sqrt{h_{T+1}} \varepsilon_{T+1} \mid \mathfrak{S}_T \right] \quad (2.101)$$

$$\hat{r}_{T+1|T} = \hat{\mu}_{T+1} \quad (2.102)$$

Para $k=2$

$$\hat{r}_{T+2|T} = \hat{\mu}_{T+2} + \sqrt{h_{T+2}} \hat{E} \left[\varepsilon_{T+2} \mid \mathfrak{S}_T \right] \quad (2.103)$$

$$\hat{r}_{T+2|T} = \hat{\mu}_{T+2} \quad (2.104)$$

Se puede generalizar

$$\hat{r}_{T+k|T} = \hat{\mu}_{T+k} \quad (2.105)$$

Varianza

$$\hat{h}_{T+k|T} = \hat{E} \left[\hat{h}_{T+k} \mid \mathfrak{S}_T \right] \quad (2.106)$$

Para $k=1$

$$\hat{h}_{T+1|T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \left(\hat{e}_T \right)^2 + \hat{\gamma}_1 \hat{h}_T \quad (2.107)$$

Para $k=2$

$$\hat{h}_{T+2|T} = \hat{\alpha}_0 \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \hat{h}_{T+1|T} \quad (2.108)$$

Para $k=3$

$$\hat{h}_{T+3|T} = \hat{\alpha}_0 \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \hat{h}_{T+1|T} + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^2 \hat{h}_{T+1|T} \quad (2.109)$$

Para $k=4$

$$\hat{h}_{T+4|T} = \hat{\alpha}_0 \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^2 \hat{h}_{T+1|T} + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^3 \hat{h}_{T+1|T} + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^4 \hat{h}_{T+1|T} \quad (2.110)$$

Se puede generalizar

$$\hat{h}_{T+k|T} = \hat{\alpha}_0 \left(\sum_{i=0}^{k-2} \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^i \right) + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^{k-1} \hat{h}_{T+1|T} \quad (2.111)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\hat{h}_{T+k|T} \right) = \hat{\alpha}_0 \left(\frac{1}{1 - \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)} \right) + 0 * \hat{h}_{T+1|T} = \frac{\hat{\alpha}_0}{1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1} \quad (2.112)$$

2.4.8 Propiedades empíricas que replica y que no replica el modelo GARCH

Si replica

- Colas pesadas
- $\text{Corr} \left(r_t, r_{t+k} \right) > 0$
- $\text{Corr} \left(r_t^2, r_{t+k}^2 \right) > 0$

No replica

- Asimetría en la distribución

2.5 Modificaciones a los modelos ARCH GARCH

- 1.- Asimetría: E-GARCH, GJR
- 2.- Incluyendo efectos de la varianza en la media: Garch-M
- 3.- Incluyendo efectos de umbral(valor que hace que todo cambie): T-Garch
- 4.- Modelando la media del proceso: Modelos ARMA con errores Garch
- 5.- GARCH integrados: I- GARCH
- 6.- Modelaje incluyendo co-variables
- 7.- Distribuciones alternativas a la Normal: t-student, Valores extremos

2.5.1.- E-GARCH

Cuando el rendimiento cae por abajo de lo esperado nos lleva a un escenario donde las noticias son malas, esto viene asociado a la observación de que la volatilidad se incrementa y por otra parte cuando las noticias son buenas la volatilidad disminuye. Dentro de los modelos con varianza condicional variable hay dos familias de modelos que se utilizan para modelar esta característica: EGARCH y TARCH.

En 1990 Pagan y Schwert y en 1991 Nelson desarrollaron el modelo exponencial GARCH, denotado como EGARCH, en la cual hacen notar que en el mercado de capitales no repercuten igual las buenas noticias que las malas noticias, los movimientos a la baja en el mercado vienen con mayores volatilidades que los movimientos al alza

Un modelo GARCH tiene la limitación de que trata los efectos de modo simétrico debido a que utiliza los cuadrados de las innovaciones. Otra limitación son las desigualdades que tienen que cumplir los parámetros, estas restricciones eliminan el comportamiento al azar-oscilatorio que pueda presentar la varianza condicional. En cambio en un modelo EGARCH no hay restricciones en los parámetros.

$$Garch(1) \quad (2.113)$$

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \dots iid(0,1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (r_{t-1} - \mu_{t-1})^2 + \gamma_1 h_{t-1} \quad (2.114)$$

E_GARCH

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \dots iid(0,1) \quad (2.115)$$

$$\ln h_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \beta_x \hat{e}_{t-k}^* + \sum_{k=1}^p \xi_x \left(\left| \hat{e}_{t-k}^* \right| - E \left[\left| \hat{e}_{t-k}^* \right| \right] + \sum_{k=1}^p \gamma_x \ln h_{t+k} \right) \quad (2.116)$$

Donde

$$\hat{e}_{t-k}^* = \frac{r_t - \mu_t}{\sqrt{h_t}} \quad (2.117)$$

E-GARCH(p=1,q=1)

$$\ln h_t = \alpha_0 + \beta_x \hat{e}_{t-1}^* + \xi_x \left(\left| \hat{e}_{t-1}^* \right| - E \left[\left| \hat{e}_{t-1}^* \right| \right] \right) + \gamma_x \ln h_{t+1} \quad (2.118)$$

Si $\hat{e}_{t-1}^* \leq 0$

$$\ln h_t = \alpha_0 + \beta_1 - \xi_x \hat{e}_{t-1}^* - \xi_x E \left[\left| \hat{e}_{t-1}^* \right| \right] + \gamma_1 \ln h_{t-1} \quad (2.119)$$

Si $\hat{e}_{t-1}^* \geq 0$

$$\ln h_t = \alpha_0 + \beta_1 + \xi_x \hat{e}_{t-1}^* - \xi_x E \left[\left| \hat{e}_{t-1}^* \right| \right] + \gamma_1 \ln h_{t-1} \quad (2.120)$$

$$\text{Si } e_t \approx N(0,1) \text{ entonces } E\left[\left|e_{t-1}^*\right|\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.121)$$

2.5.2 Asimetría Glostein, Jagannathan, Runkle G,J,R

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \text{ iid } D(0,1) \quad (2.122)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_x \hat{e}_{t-k}^2 + \sum_{k=1}^p \beta_x \hat{e}_{t-k}^2 I_{t-k} + \sum_{k=1}^p \gamma_x h_{t-k} \quad (2.123)$$

$$\text{Donde } I_{t+k} = \begin{cases} 1 & \text{Si } \hat{e}_{t+k} \leq 0 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases} \quad (2.124)$$

GJR (1,1,1)

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \text{ iid } D(0,1) \quad (2.125)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{e}_{t-1}^2 + \beta_1 \hat{e}_{t-1}^2 I_{t-1} + \gamma_x h_{t-1} \quad (2.126)$$

$$\text{Donde } \hat{e}_{t-1} = \varepsilon_{t-1} - \mu_{t-1} \quad (2.127)$$

$$\text{Si } \hat{e}_{t+k} \leq 0$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1 \hat{e}_{t-1}^2 + \gamma_x h_{t-1} \quad (2.128)$$

$$\text{Si } \hat{e}_{t+k} > 0$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{e}_{t-1}^2 + \gamma_x h_{t-1} \quad (2.129)$$

2.5.2.1 Análisis del Modelo GJR (1,1,1):

Si $\beta_1 > 0$ aumenta la volatilidad

Si los rendimientos anteriores están por debajo de la media se espera mayor volatilidad que la de antes.

Las caídas siguientes son mas grandes que subidas anteriores

2.5.2.2 Pruebas para detectar asimetría

Regresión de los residuales con una variable indicadora que tome 1 para valores negativos de los rendimientos

2.5.3 Incluyendo efectos de la volatilidad en la media Garch-M

La familia (G) ARCH-M, es una clase de modelos que ha sido estudiada en profundidad ya que esta tiene la característica de que la varianza condicional aparece como un regresor en el modelo. En 1987 Engle, Lilien y Robins idearon esta clase de modelos para permitir que la media condicional dependa de la varianza condicional. Estos modelos se usan en el mercado de capitales en los llamados modelos CAPM donde el objetivo es

comparar dos variables, el rendimiento del título y el rendimiento del mercado, ambos, respecto de la tasa libre de riesgo.

La relación entre estos dos excesos de rendimiento (del título y del mercado) está dada por una constante llamada beta y es la que expresa el exceso de rendimiento de un título sobre el rendimiento que ofrece el mercado.

El modelo ARCH-M incorpora directamente el efecto ARCH en las variables explicativas, aunque algunas veces resulta no significativo si el rendimiento de mercado compete como otro regresor en el modelo.

Supondremos que los agentes tienen aversión al riesgo, o sea son renuentes a aceptar mayores riesgos si no hallan que el rendimiento del activo compensa el riesgo asumido. El modelo está construido de modo que la desviación estándar (y así la varianza) es una medida del riesgo. El rendimiento esperado es una función creciente del nivel que presenta la varianza condicional.

El modelo (G) ARCH-M(p,q) simple está dado por:

Estos modelos son ideales para evaluar el rendimiento de las acciones ya que la volatilidad debida al nerviosismo, repercute en los rendimientos del instrumento.

La razón por la cual estos modelos han resultado importantes se comprende cuando observamos que:

- 1.- Se puede usar la varianza ($\gamma=2$) o la desviación estándar ($\gamma=1$) como un regresor.
- 2.- Los errores pueden ser un proceso MA.
- 3.- Pueden ir otras variables como regresores.
- 4.- Pueden los retrasos de la variable Y utilizarse como regresores.

*La volatilidad medida a través de la varianza h
Para un modelo Garch-M(1,1)*

$$r_t = \mu_t \left(\xi_1 \sqrt{h_t} + \sqrt{h_t} \varepsilon_t \right) \dots \dots \dots \varepsilon_t \dots \dots \dots \text{iid } D(0,1) \quad (2.130)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \left(r_{t-1} - \mu_{t-1} \right) \left(\xi_1 \sqrt{h_{t-1}} \right) + \gamma_x h_{t-1} \quad (2.131)$$

*Si $\xi_1 > 0$, el promedio aumenta en proporción a la raíz de la volatilidad
En periodos de alta volatilidad los rendimientos positivos serian muy altos*

2.5.4 Incluyendo Efectos Umbral T-GARCH

El segundo tipo de modelos que son capaces de producir efectos asimétricos son los llamados modelos TAR, (Threshold Heteroskedastic Autoregressive Models) son modelos que dependen de un umbral (threshold) por medio del cual definen su reacción.

Observar con atención que si la innovación es negativa el umbral esta activo por lo que el efecto sobre la varianza condicional es mayor, por una contribución. Mientras que si la innovación es positiva el umbral esta apagado y no hay contribución a la varianza condicional. De esta forma se mide el peso que tienen las malas noticias, por lo que si d es cero no hay efecto asimétrico, este punto es vital para decidir si un modelo pertenece a esta familia puesto que se hace la estimación y se procede a realizar la prueba de hipótesis $d=0$ utilizando el estadístico t-student común y corriente. En resumen, el efecto que hay sobre la varianza condicional es que las buenas noticias pesan a , mientras que las malas noticias pesan $(a + d)$.

$$r_t = \mu_t \left(\frac{1}{\sigma} \right) \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \dots iid D(0,1) \quad (2.132)$$

$$h_t = \left(\alpha_0^+ + \alpha_1^+ \left(\frac{1}{\sigma} \right) \left(r_{t-1} - \mu_{t-1} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right) \right)^2 + \gamma_1^+ h_{t-1} I_{t-1}^+ + \left(\alpha_0^- + \alpha_1^- \left(\frac{1}{\sigma} \right) \left(r_{t-1} - \mu_{t-1} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right) \right)^2 + \gamma_1^- h_{t-1} I_{t-1}^- \quad (2.133)$$

$$I_{(c, umbral)} = \begin{cases} 1 \dots Si \dots r_{t+k} \geq c, umbral \\ 0 \dots \dots \dots c.o.c \end{cases} \quad (2.134)$$

2.5.6 Modelado de la media del proceso ARMA con errores GARCH

$$r_t = \mu_t \left(\frac{1}{\sigma} \right) \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \dots iid D(0,1) \quad (2.135)$$

$$h_t = Garch(p, q)$$

Arma (1, 1) con errores Garch(1, 1)

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \theta_1 v_{t-1} + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \dots iid D(0,1) \quad (2.136)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{1}{\sigma} \right) \left(r_{t-1} - \mu_{t-1} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \right) + \gamma_1 h_{t-1} \quad (2.137)$$

Arima

$$\Delta Y_t = e_t$$

Para garantizar estacionariedad

$$Garch(1, 1) \Rightarrow \alpha_1 + \gamma_1 < 1 \quad (2.138)$$

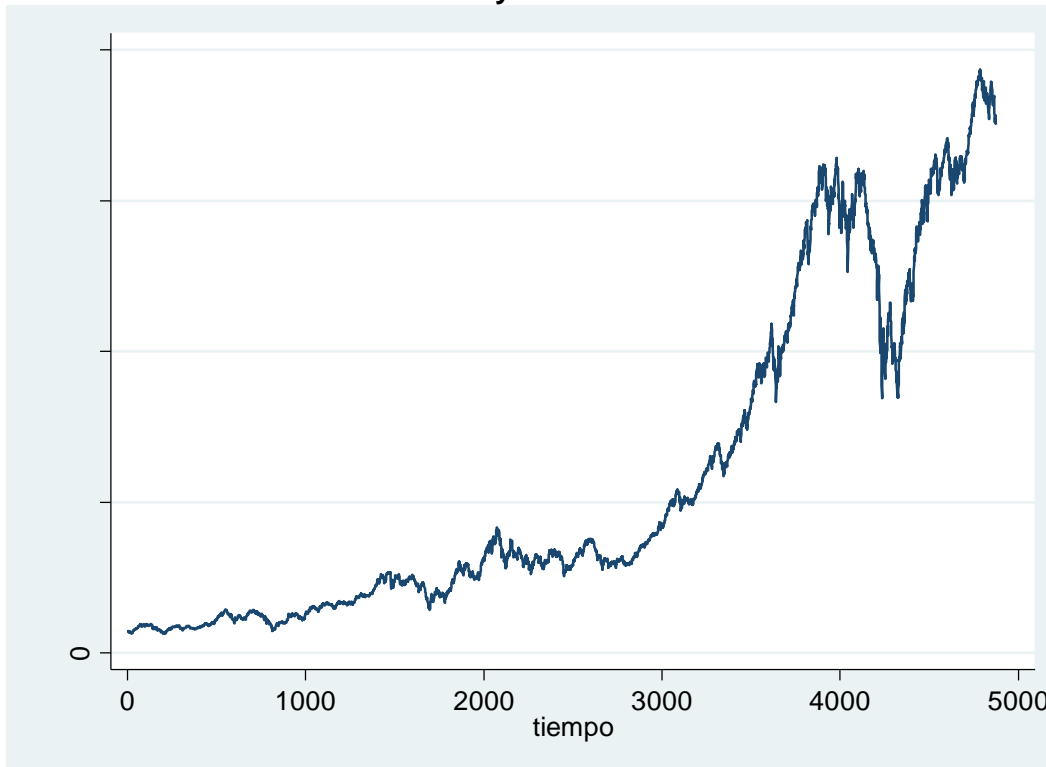
$$Garch(p, q) \Rightarrow \sum_{k=1}^p \alpha_k + \sum_{k=1}^q \gamma_k < 1$$

Capítulo 3 Aplicación de Modelos de Varianza Condicional para Estimar la Varianza del IPC

El objeto del presente capítulo es modelar la serie del IPC a través de la metodología GARCH para valuar el VaR de una cartera que replique el IPC

3.1 Presentación del comportamiento de los precios del IPC

Grafica 3.1 IPC de 1991 a 12 de mayo 2011



SE observa empíricamente que no hay estacionariedad en la media no en varianza no es recomendable trabajar con esta serie para hacer predicciones.

Para ello se busca una variable que disminuya la problemática. Esta variable la obtenemos con log-rendimientos

3.2 Obtención de log-rendimientos

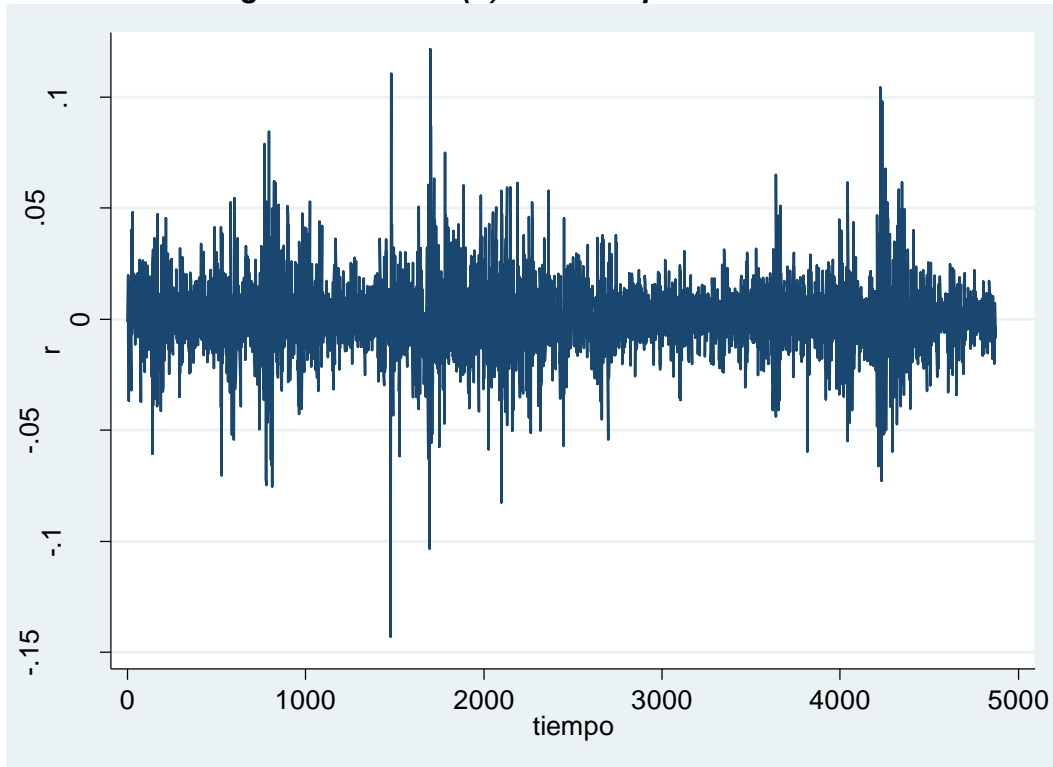
`.gen rendimiento =ln(IPC/I.IPC)=ln IPC- ln IPC(t-1)`

Con esta función cambiamos de escala los valores originales y además obtenemos primeras diferencias que son las estrategias en el modelo de regresión general para hacer una serie estacionaria.

`.line r tiempo`

Se observa en la siguiente grafica que hay periodos de calma y periodos de alta volatilidad, esto se considera como evidencia empírica.

Grafica 3.2 de log-rendimientos (r) en el tiempo



Se observa que con esta transformación de los precios obtenemos estacionariedad en la media pero no en la varianza. Es decir la media permanece constante en el tiempo, pero no la varianza

Por lo que si se justifican estas evidencias empíricas también se justifica el uso de modelos de varianza condicional.

3.3 Pruebas de nivel de la serie r (log-rendimientos)

Se refiere a hacerle pruebas estadísticas de normalidad, independencia y homocedasticidad a los datos de rendimientos.

3.3.1 Prueba de Normalidad

Cuadro 3.1 Prueba de normalidad de rendimientos

```
. sktest r
```

Skewness/Kurtosis tests for Normality				
----- joint -----				
Variable	Pr(Skewness)	Pr(Kurtosis)	adj chi2(2)	Prob>chi2
r	0.357	0.000	.	0.0000

La prueba de Jarque Bera concluye que no hay normalidad en rendimientos la probabilidad del estadístico de prueba debe ser mayor a 5% para rechazar la hipótesis de No normalidad

Cuadro 3.2 Calculo de la Media de rendimientos

Realizamos una regresión lineal de los rendimientos sin ninguna variable explicativa.

Comando: `. regress r`

Source	SS	df	MS			
Model	0	0	.	Number of obs =	4873	
Residual	1.287672	4872	.0002643	F(0, 4872) =	0.00	
				Prob > F =	.	
				R-squared =	0.0000	
				Adj R-squared =	0.0000	
				Root MSE =	.01626	
Total	1.287672	4872	.0002643			

r	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
_cons	.0006581	.0002329	2.83	0.005	.0002015	.0011146

Dado el resultado anterior de la prueba de nivel observamos que tiene un rendimiento promedio distinto de cero, de .0006581. Para simplificar el proceso de análisis de la serie, transformaremos la variable de rendimiento

$re = r - (.0006581)$

$gen re = r - .0006581$

3.3.2 Prueba de asimetría de los rendimientos

Para realizar esta prueba es posible con el uso de una regresión de los rendimientos cuadrados y como variables explicativas una variable indicadora de los rendimientos negativos y una variable que represente el monto de los rendimientos negativos.

`. gen re2=re^2`

(1 missing value generated)

`. gen indmenor=0`

`. replace indmenor=1 if re <=0`

`. gen intera=indmenor*re`

Cuadro 3.3 Prueba de asimetría de rendimientos

`. regress re2 1.indmenor 1.intera`

Source	SS	df	MS			
Model	.000126355	2	.000063178	Number of obs =	4872	
Residual	.002403067	4869	4.9354e-07	F(2, 4869) =	128.01	
				Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.0500	
				Adj R-squared =	0.0496	
				Root MSE =	.0007	
Total	.002529422	4871	5.1928e-07			

re2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
indmenor	-.0001376	.0000247	-5.56	0.000	-.0001861	-.0000891
L1.						
inter	-.0191781	.0012417	-15.44	0.000	-.0216125	-.0167438
L1.						
_cons	.0002226	.0000142	15.72	0.000	.0001949	.0002504

Puesto que los rendimientos al cuadrado son explicados con las variables que muestran valores negativos podemos concluir que hay asimetría, se eligieron los rendimientos negativos en el modelo porque se observa en el histograma una ligera asimetría hacia la izquierda

Con el estadístico (Numero de observaciones*coef correlación)

$tr^2 = 243.6 > x_{\alpha=0.05}^2 = 3.84$ se confirma que no hay simetría.

$x_{\alpha=0.05}^2 = 3.84$, g.l 1

3.3.4 Prueba de homocedasticidad en rendimientos

La prueba de homocedasticidad se realiza con una regresión de los rendimientos cuadrados y como variable explicativa el rendimiento cuadrado con un retraso.

Cuadro 3.4 Prueba de homocedasticidad

```
. regress re2 l.re2
. regress re2 l.re2
```

Source	SS	df	MS			
Model	.000138251	1	.000138251	Number of obs =	4872	
Residual	.002391171	4870	4.9100e-07	F(1, 4870) =	281.57	
Total	.002529422	4871	5.1928e-07	Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.0547	
				Adj R-squared =	0.0545	
				Root MSE =	.0007	

re2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
re2						
l1.	.2337886	.0139325	16.78	0.000	.2064746	.2611026
_cons	.0002025	.0000107	18.94	0.000	.0001815	.0002235

H_0 : Hay Homocedasticidad

H_a : No hay Homocedasticidad

Dado que los cuadrados de los rendimientos se explican con ellos mismos Se rechaza la H_0 y se acepta la H_a por lo tanto: No hay Homocedasticidad en el proceso re2

Cuadro 3.4.1 Prueba Conjunta de Homocedasticidad en rendimientos

(1) $L.e2 = 0$

..... $F(1, 4870) = 281.57$
 $Prob > F = 0.0000$

Dado que el p-value=0.000<.05, Se rechaza H_0 , por lo que los residuales no son homocedásticos.

3.3.5 Prueba de efectos Arch

Cuadro 3.5 Prueba Estadística de LM Engle(Prueba chi) efectos ARCH

```
. archlm,lags(1)
. archlm,lags(1)
LM test for autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH)
```

lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
1	48.472	1	0.0000

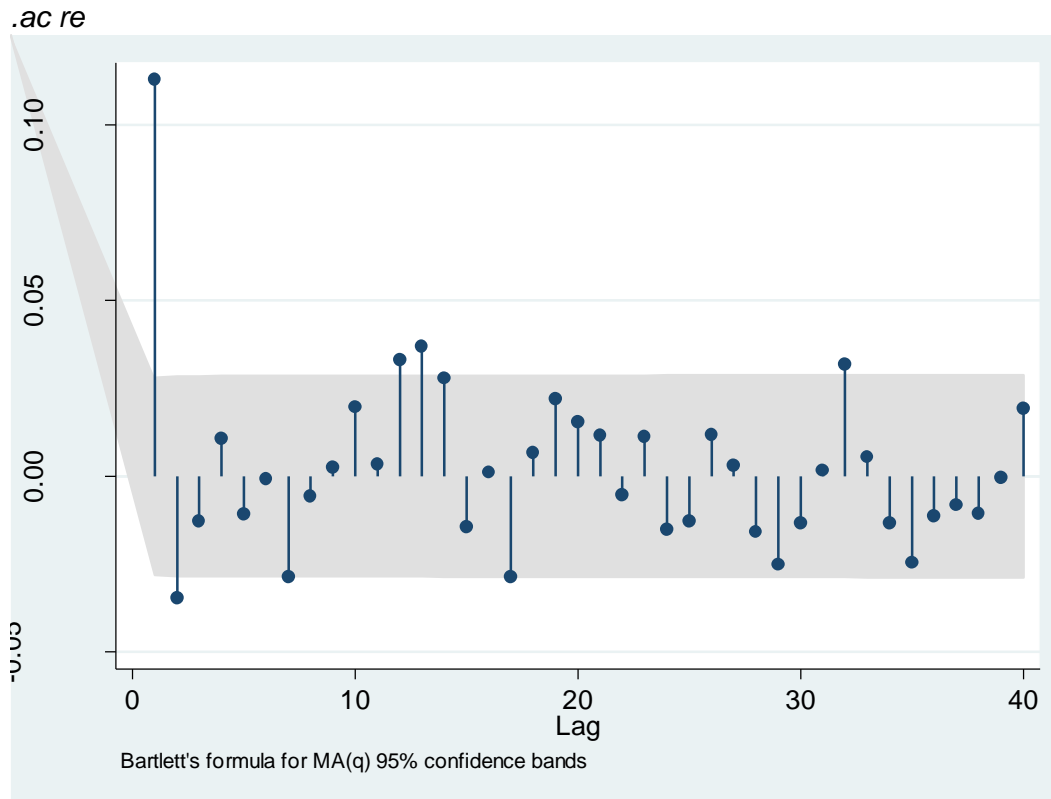
H0: no ARCH effects vs. H1: ARCH(p) disturbance

Existe un 0% de probabilidad de que los residuales sean homocedásticos por lo tanto se rechaza H_0 : los residuales son homocedásticos, Se acepta la hipótesis alternativa H_a : los residuales son heterocedásticos.

3.3.6 Prueba de No auto correlación en rendimientos

En primer lugar se calcula los valores de la función de auto correlación y se observa su gráfica.

Grafica 3.3 Función de auto correlación de los rendimientos



En la función de auto correlación se observa que no hay una estructura de comportamiento en los rendimientos

3.3.7 Prueba de ruido blanco en rendimientos

A una serie financiera que tiene media 0, varianza constante y los diferentes términos no presentan correlación entre sí se le llama ruido blanco.

Cuadro 3.6 Prueba de Ljung Box (ruido blanco)

```
. wntestq re,lags(1)
```

Portmanteau test for white noise

```
-----  
Portmanteau (Q) statistic = 62.0969  
Prob > chi2(1) = 0.0000
```

H_0 : Los rendimientos se comportan como ruido blanco

H_a : Los rendimientos no se comportan como ruido blanco

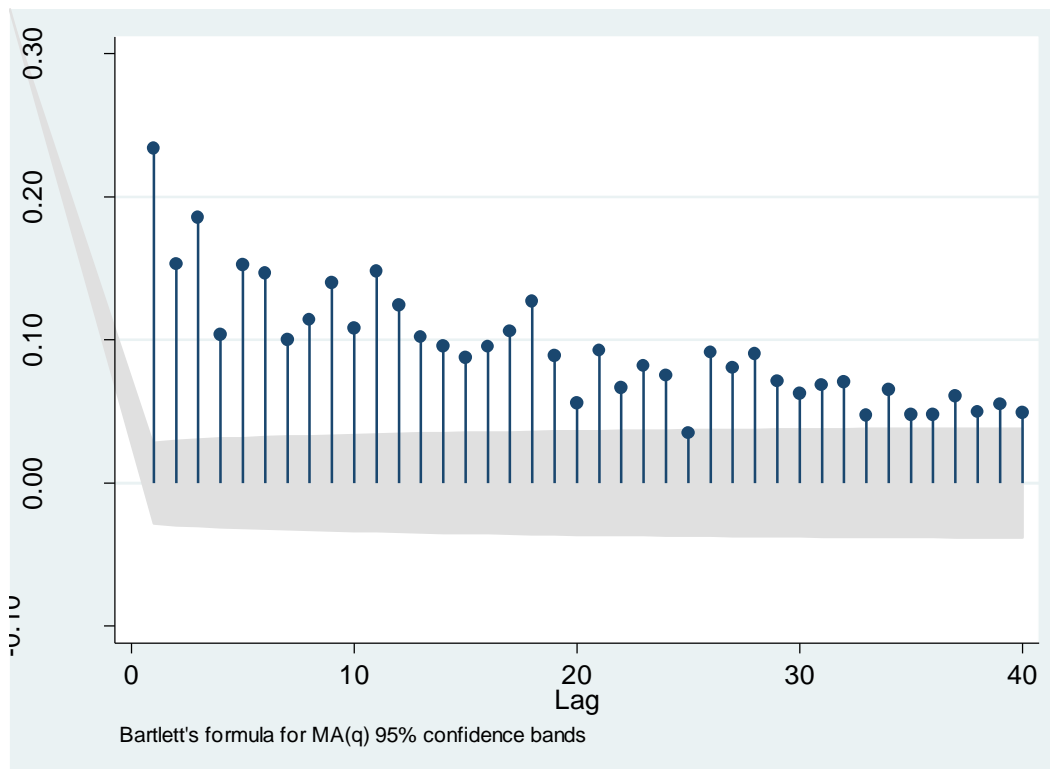
Resultado

$P=0<.05$ Por lo tanto no rechazo H_0 , por lo que los rendimientos no se comportan como ruido blanco. Es necesario hacer la prueba con los e_2 estimados

3.3.8 Prueba de No Auto correlación de la varianza

Para ver si existe correlación de los rendimientos con su pasado se analiza la función de auto correlación y si se observa una estructura en el valor de las correlaciones se dice que la serie esta correlacionada.

Grafica 3.4 Auto correlación de re2
.ac re2



El comportamiento de la función de auto correlaciones parciales presenta una caída en forma exponencial que según la teoría Box and Jenkins se trata de una serie con alguna estructura de comportamiento. Por ejemplo un auto regresivo.

Aunque hemos detectado que hay una estructura en el comportamiento del proceso de los rendimientos al cuadrado, reforzamos nuestra afirmación con una prueba de ruido blanco

Cuadro 3.7 Prueba de ruido blanco re2

wntestq re2,lags(1)

Portmanteau test for white noise

Portmanteau (Q) statistic = 266.4952
Prob > chi2(1) = 0.0000

Se observa que los rendimientos al cuadrado no son ruido blanco. Es decir la varianza no es constante y la serie analizada no es independiente de su pasado.

Conclusión de las pruebas de nivel

Mediante las pruebas de nivel se reafirma la evidencia empírica en la serie financiera del Índice de Precios y Cotizaciones lo que justifica el uso de modelos de la familia GARCH.

3.4 Propuestas de Modelos de la familia GARCH al proceso de rendimientos

Tabla de parámetros de los modelos en el Anexo 3

3.4.1 Modelo ARCH 1

$$r_t = 0.0006581 + \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$
$$Var(\varepsilon_t | \mathfrak{F}_{t-1}) = h_t = 0.0001808 + 0.351653(\varepsilon_{t-1} - \mu)^2$$
$$\varepsilon_t \approx iid \dots N(0,1)$$

Todos los parámetros resultaron significativos con un nivel de confianza al 95%
Función de máxima verosimilitud 13384.15.

3.4.2 Modelo ARCH 2

$$r_t = 0.0006581 + \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$
$$Var(\varepsilon_t | \mathfrak{F}_{t-1}) = h_t = 0.000147 + 0.2599(\varepsilon_{t-1} - \mu)^2 + 0,2183(\varepsilon_{t-2} - \mu)^2$$
$$\varepsilon_t \approx iid \dots N(0,1)$$

Todos los parámetros resultaron significativos con un nivel de confianza al 95%
Función de máxima verosimilitud 13477.563.

3.4.3 Modelo ARCH 3

$$r_t = 0.0006581 + \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$
$$Var(\varepsilon_t | \mathfrak{F}_{t-1}) = h_t = 0.000147 + 0.2171(\varepsilon_{t-1} - \mu)^2 + 0,1810(\varepsilon_{t-2} - \mu)^2 + 0,1653(\varepsilon_{t-3} - \mu)^2$$
$$\varepsilon_t \approx iid \dots N(0,1)$$

Todos los parámetros resultaron significativos con un nivel de confianza al 95%
Función de máxima verosimilitud 13556.52.

3.4.4 Modelo ARCH 4

$$r_t = 0.0006581 + \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$
$$Var(\varepsilon_t | \mathfrak{F}_{t-1}) = h_t = 0.0001029 + 0.204925(\varepsilon_{t-1} - \mu)^2 + 0,16078(\varepsilon_{t-2} - \mu)^2 + 0,15818(\varepsilon_{t-3} - \mu)^2$$
$$+ 0,1350(\varepsilon_{t-4} - \mu)^2$$
$$\varepsilon_t \approx iid \dots N(0,1)$$

Todos los parámetros resultaron significativos con un nivel de confianza al 95%
Función de máxima verosimilitud 13596.702.

3.4.5 Modelo ARCH 5

$$r_t = 0.0006581 + \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = h_t = 0.0000916 + 0.18339(\varepsilon_{t-1} - \mu)^2 + 0.151124(\varepsilon_{t-2} - \mu)^2 + 0.144695(\varepsilon_{t-3} - \mu)^2 + 0.100188(\varepsilon_{t-4} - \mu)^2 + 0.111398(\varepsilon_{t-5} - \mu)^2$$

$$\varepsilon_t \approx iid \dots N(0,1)$$

Todos los parámetros resultaron significativos con un nivel de confianza al 95%
Función de máxima verosimilitud 13644.702. Tabla de parámetros en el Anexo 3

3.5 Modelos GARCH

3.5.1 Modelo Garch 1,1

$$r_t = 0.0006581 + \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$

$$h_t = 0.0000038 + 0.0997899(\varepsilon_{t-1} - \mu)^2 + 0.889027h_{t-1}$$

Todos los parámetros resultaron significativos con un nivel de confianza al 95%
Función de máxima verosimilitud 13785.068

3.5.2 Modelo GARCH 2,1

$$r_t = 0.0006581 + \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$

$$h_t = 0.00000263 + 0.1637792(\varepsilon_{t-1} - \mu)^2 - 0.0838453(\varepsilon_{t-2} - \mu)^2 + 0.912441h_{t-1}$$

Todos los parámetros resultaron significativos con un nivel de confianza al 95%
Función de máxima verosimilitud 13793.476

3.5.3 Modelo GARCH 1,2

$$r_t = 0.0006581 + \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$

$$h_t = 0.00000468 + 0.1288504(\varepsilon_{t-1} - \mu_{t-1})^2 + 0.539411h_{t-1} + 0.3138068h_{t-2}$$

Todos los parámetros resultaron significativos con un nivel de confianza al 95%
Función de máxima verosimilitud 13788.75

3.5.4 Modelo GARCH 2,2

$$r_t = 0.0006581 + \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$

$$h_t = 0.00000468 + 0.133137(\varepsilon_{t-1} - \mu)^2 - 0.1291673(\varepsilon_{t-2} - \mu)^2 + 1.761775h_{t-1} - 0.761775h_{t-2}$$

Todos los parámetros resultaron significativos con un nivel de confianza al 95%
Función de máxima verosimilitud 13788.75

3.6 Modelo que corrigen asimetría

3.6.1 Modelo GJR 1,1,1

GJR (1,1,1)

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \dots \text{iid } D(0,1)$$

$$h_t = 0.00000516 + 0.1794702 \hat{e}_{t-1}^2 - 0.1432496 \hat{e}_{t-1}^2 I_{t-1} + 0.8805762 h_{t-1}$$

Donde $\hat{e}_{t-1}^2 = (r_{t-1} - \mu)^2$

$$I_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{Si } \hat{e}_{t-1} \leq 0 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

Todos los parámetros resultaron significativos con un nivel de confianza al 95%
Función de máxima verosimilitud 137869.26

3.6.2 Modelo E-GARCH

E-GARCH(p=1,q=1)

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \dots \text{iid } N(0,1)$$

$$\ln h_t = -0.2154664 - 0.099812 \hat{e}_{t-1}^* + 0.1887 \left(\hat{e}_{t-1}^* - E \left[\hat{e}_{t-1}^* \right] \right) + 0.9734042 \ln h_{t-1}$$

Donde

$$\hat{e}_t^* = \frac{r_t - \mu}{\sqrt{h_t}}$$

Si $e_t \approx N(0,1)$ entonces $E \left[\hat{e}_{t-1}^* \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Todos los parámetros resultaron significativos con un nivel de confianza al 95%
Función de máxima verosimilitud 137871.08

Conclusión de los modelos propuestos.

En todos los modelos propuestos, sus parámetros resultaron significativos con apoyo del estadístico t de student las salidas del programa STATA se encuentran en el Anexo 3. Entre ellos se debe seleccionar el modelo que tenga máxima verosimilitud y proporcione mayor información, se debe elegir de acuerdo a un criterio de información, este puede ser el Bayesiano o el de Akaike. Se debe optar por un criterio en forma sistemática para comparar entre modelos.

3.7 Selección de modelos

El criterio de selección se basa en los criterios de información de Akaike y Bayesiano

Los cuadros siguientes resumen los valores de máxima verosimilitud, el criterio de Akaike y el de Bayes, en ambos criterios se penaliza el numero de parámetros del modelo, es decir tiene menor penalización aquel modelo con menor parámetros. Parsimonia.

Cuadro 3.18 Criterio de Informacion AIC y BIC Modelos arch

Modelo	loglikelihood	Parametres	AIC	BIC
Arch(1)	13384.15	2	-13.0436529	-2.02072281
Arch(2)	13477.56	3	-13.0175627	-2.03463263
Arch(3)	13556.53	4	-11.0292473	-2.04631717
Arch(4)	13596.7	5	-9.03516479	-2.0522347
Arch(5)	13644.88	6	-7.04223928	-2.05930919

Cuadro 3.19 Criterio de Informacion AIC y BIC Modelos Garch

Modelo	loglikelihood	Parametres	AIC	BIC
Garch(1,1)	13785.07	3	-13.0626828	-2.07975272
Garch(1,2)	13788.75	4	-11.0632166	-2.08028656
Garch(2,1)	13793.48	4	-11.0639026	-2.08097251
Garch(2,2)	13806.75	5	-9.06582576	-2.08289568

Cuadro 3.20 Criterio de Informacion AIC y BIC Modelo GJR

Modelo	loglikelihood	Parametres	AIC	BIC
GJR	13869.26	4	-11.0748603	-2.09193023
E-GARCH	13871.08	4	-11.0542531	-2.09521721

Los modelos que son preferibles son el ARCH 1 y el GARCH 1,1 bajo el criterio AIC
Lo compararemos con el GJR y EGARCH que resuelven el problema de asimetría

3.8 Estudio del modelo GARCH (1,1) y validación de supuestos

Para decidir por este modelo los residuales del modelo de la variable de rendimientos cuadrados comparada con el modelo que se propone deben cumplir con los supuestos de normalidad, independencia y homocedasticidad.

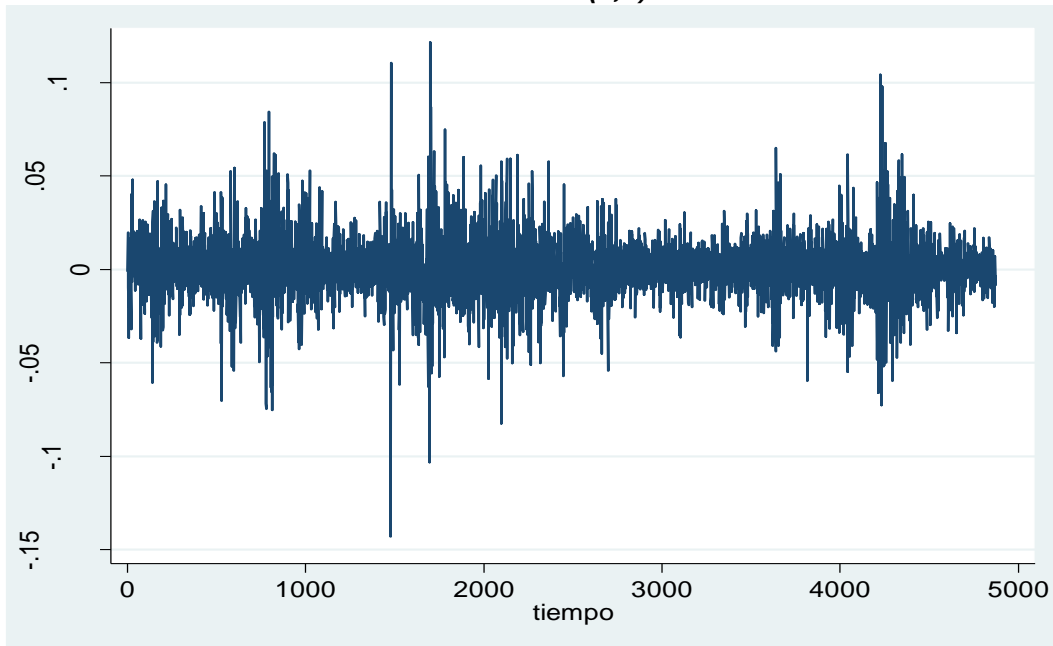
3.8.1 Calculo de residuales

Modelo GARCH 1,1

```
. arch r ,arch(1/1) garch(1/1) noconstant
```

```
. predict resid,residuals
```

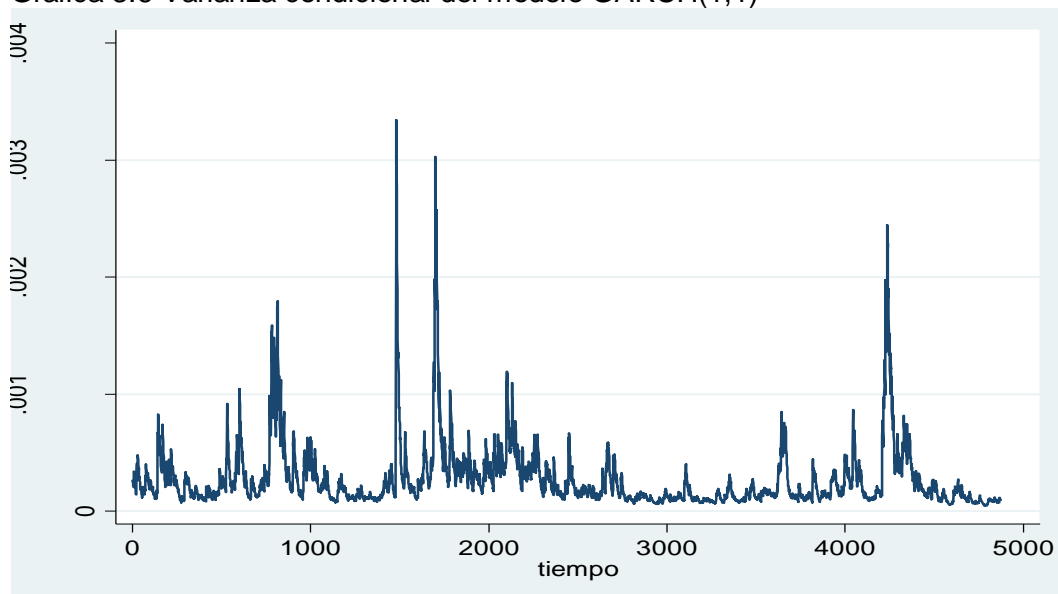
Grafica 3.5 residuales del modelo GARCH(1,1)



3.8.2 Calculo de la varianza condicional

```
. predict vara,variance
```

Grafica 3.6 Varianza condicional del modelo GARCH(1,1)

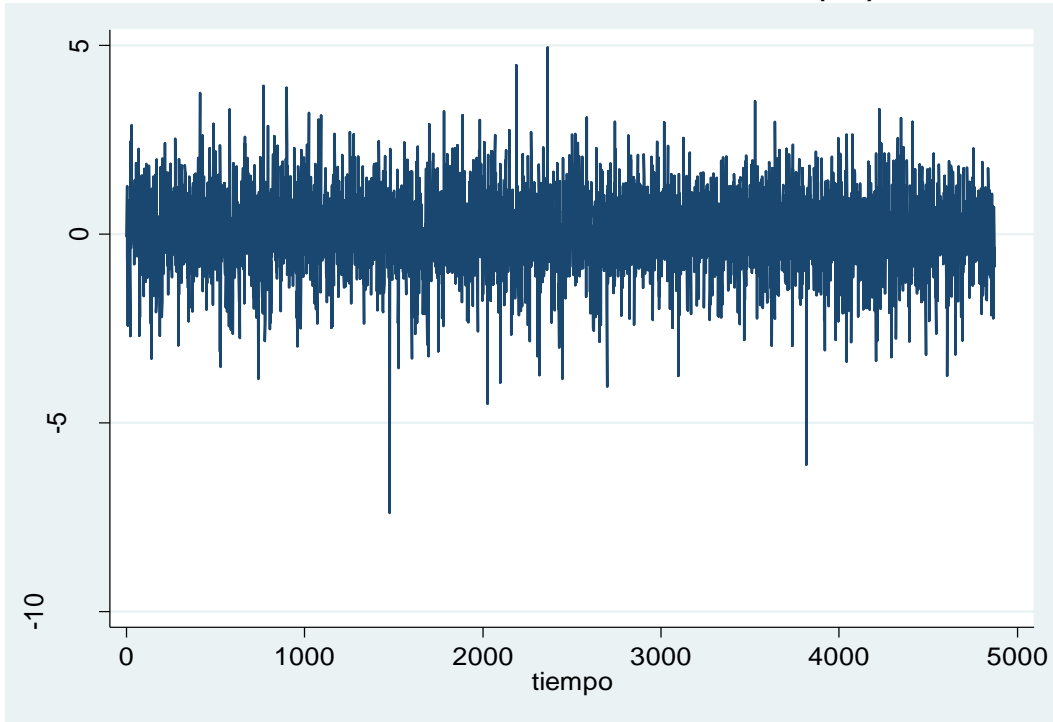


Obtenemos la varianza condicional y Los rendimientos estimados con el m Garch (1,1)

3.8.3 Cálculo de los rendimientos estandarizados GARCH 1,1

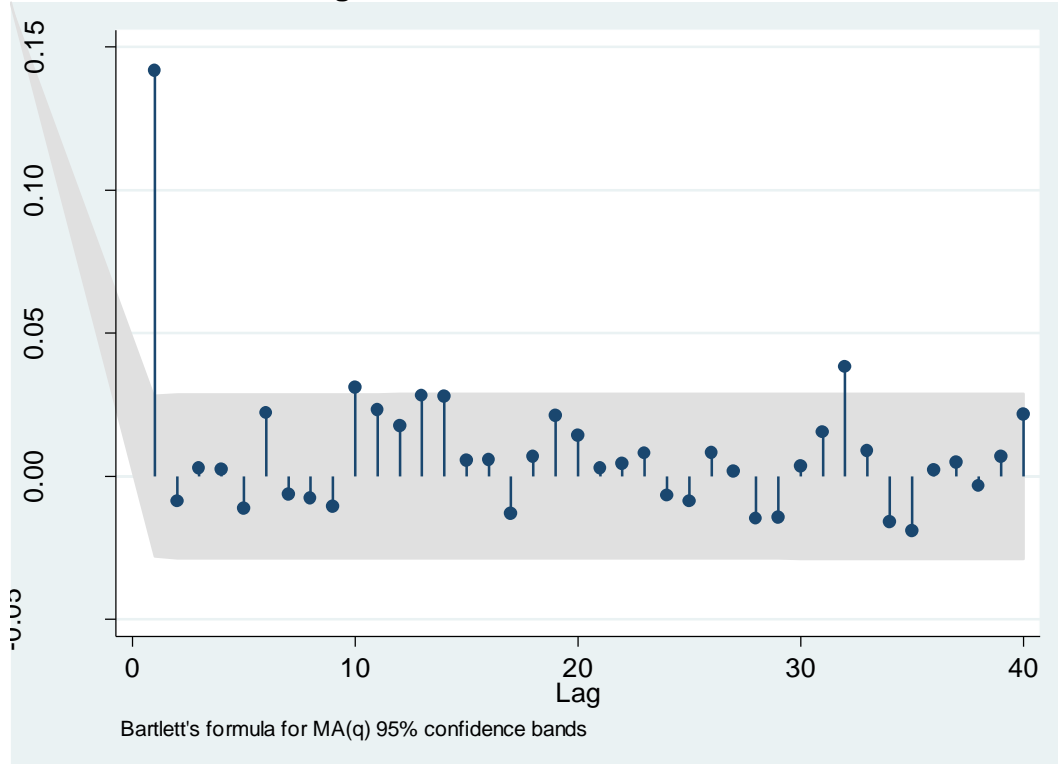
Obtenemos las residuales estandarizados $\hat{e}_t^* = \frac{\hat{e}_t}{\sqrt{\hat{h}_t}}$

Grafica 3.7 Residuales estandarizados del modelo GARCH(1,1)



3.8.4 Correlación de los residuales estandarizados

Grafica 3.8 Autocorrelograma de residuales estandarizados del modelo GARCH(1,1)



3.8.5 Prueba de homocedasticidad de los residuales estandarizados cuadrados

Con esta prueba a través de una regresión de los residuales estandarizados al cuadrado con su pasado probamos si hay varianza constante.

Cuadro 3.21 Prueba de homocedasticidad para los residuales del modelo GARCH(1,1)

```
. regress rsta2 l.rsta2
```

Source	SS	df	MS			
Model	25.0090603	1	25.0090603	Number of obs =	4872	
Residual	18802.9064	4870	3.8609664	F(1, 4870) =	6.48	
Total	18827.9154	4871	3.86530803	Prob > F =	0.0110	
				R-squared =	0.0013	
				Adj R-squared =	0.0011	
				Root MSE =	1.9649	

rsta2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
rsta2						
L1.	.0364456	.01432	2.55	0.011	.0083718	.0645194
_cons	.9638741	.0315859	30.52	0.000	.9019514	1.025797

Dado que el coeficiente de la variable l.rsta2 es distinto de cero se considera que no hay homocedasticidad en los residuales

```
. hettest
```

Cuadro 3.22 Prueba de heterocedasticidad

Breusch-Pagan / Cook-Weisberg test for heteroskedasticity

Ho: Constant variance

Variables: fitted values of rsta2

chi2(1) = 121.36

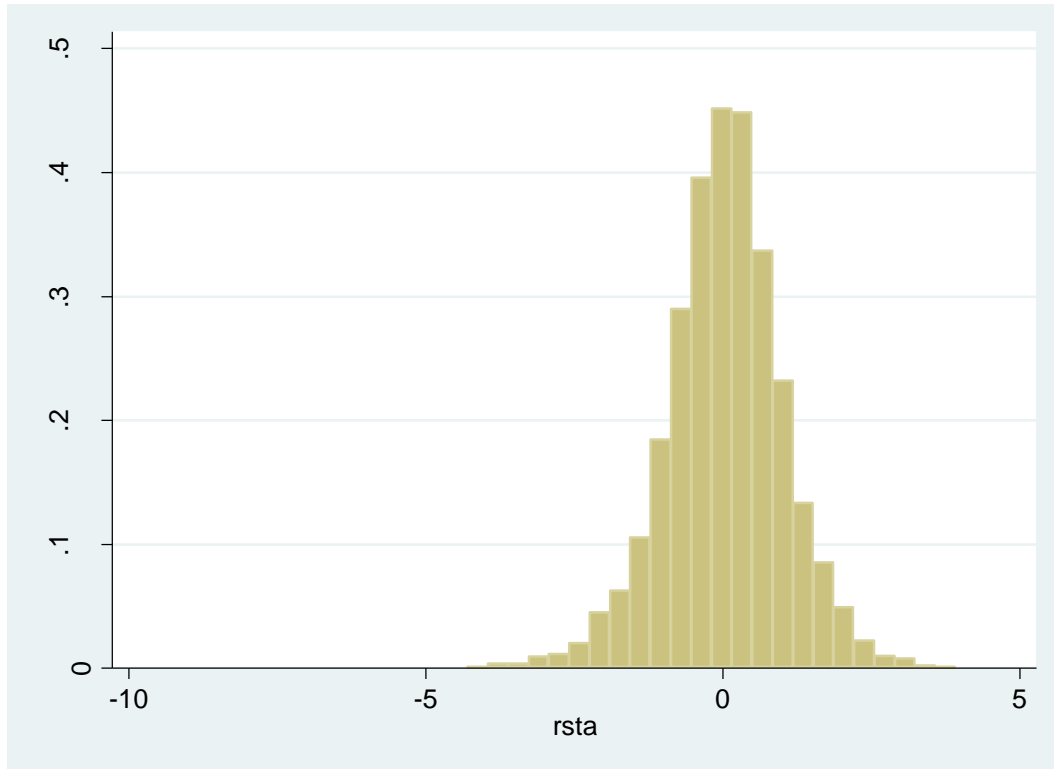
Prob > chi2 = 0.0000

Se confirma que no hay homocedasticidad con la prueba de Bush Pagan la probabilidad debe ser mayor que .05

3.8.6 Prueba de normalidad de los residuales estandarizados

Grafica 3.9 Distribución de los residuales estandarizados del modelo GARCH(1,1)

Prueba de normalidad



Cuadro 3.23 Prueba de Normalidad en los residuales estandarizados

```
. sktest rsta
```

```
Skewness/Kurtosis tests for Normality
----- joint -----
Variable | Pr(Skewness) Pr(Kurtosis) adj chi2(2) Prob>chi2
-----+-----
rsta | 0.000 0.000 . 0.0000
```

Se observa que no hay normalidad, las probabilidades deben ser mayor que .05

3.8.7 Prueba de Auto correlación de los residuales estandarizados cuadrados

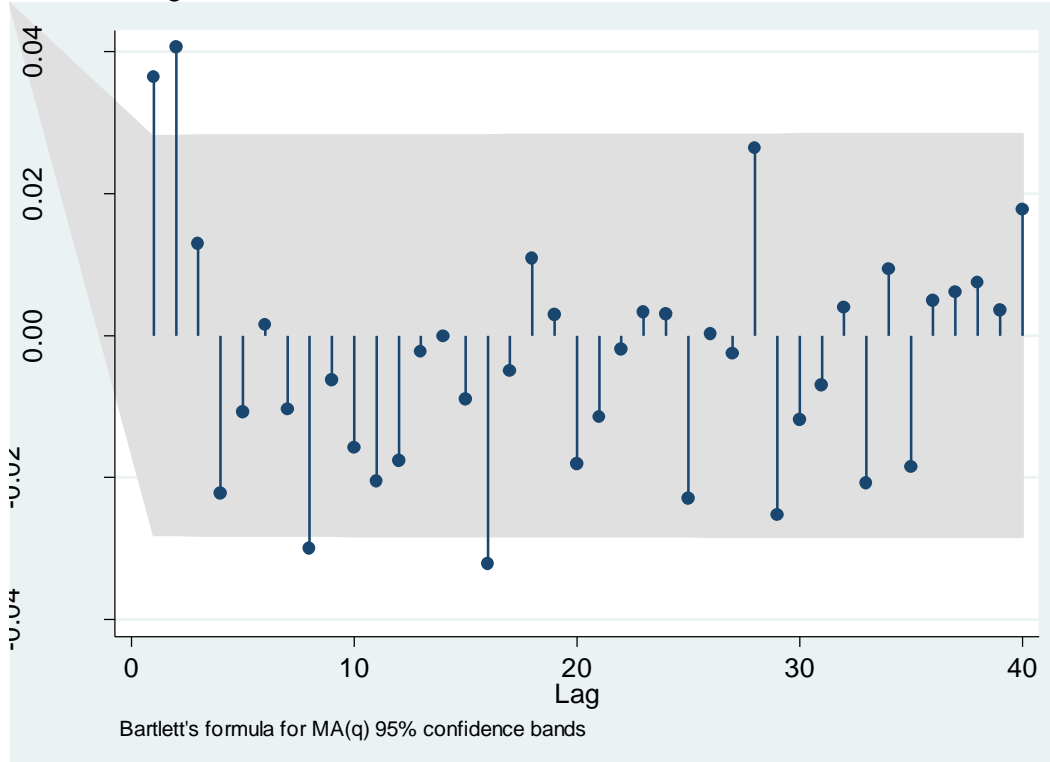
Con esta prueba obtenemos el valor de los coeficientes de correlación, se observa en la grafica que estos valores son muy bajos, pero la garantía de que sean significativos se extrae de la prueba con el estadístico Q.

Grafica 3.10 Autorrelograma de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GARCH(1,1)

Prueba de auto correlación

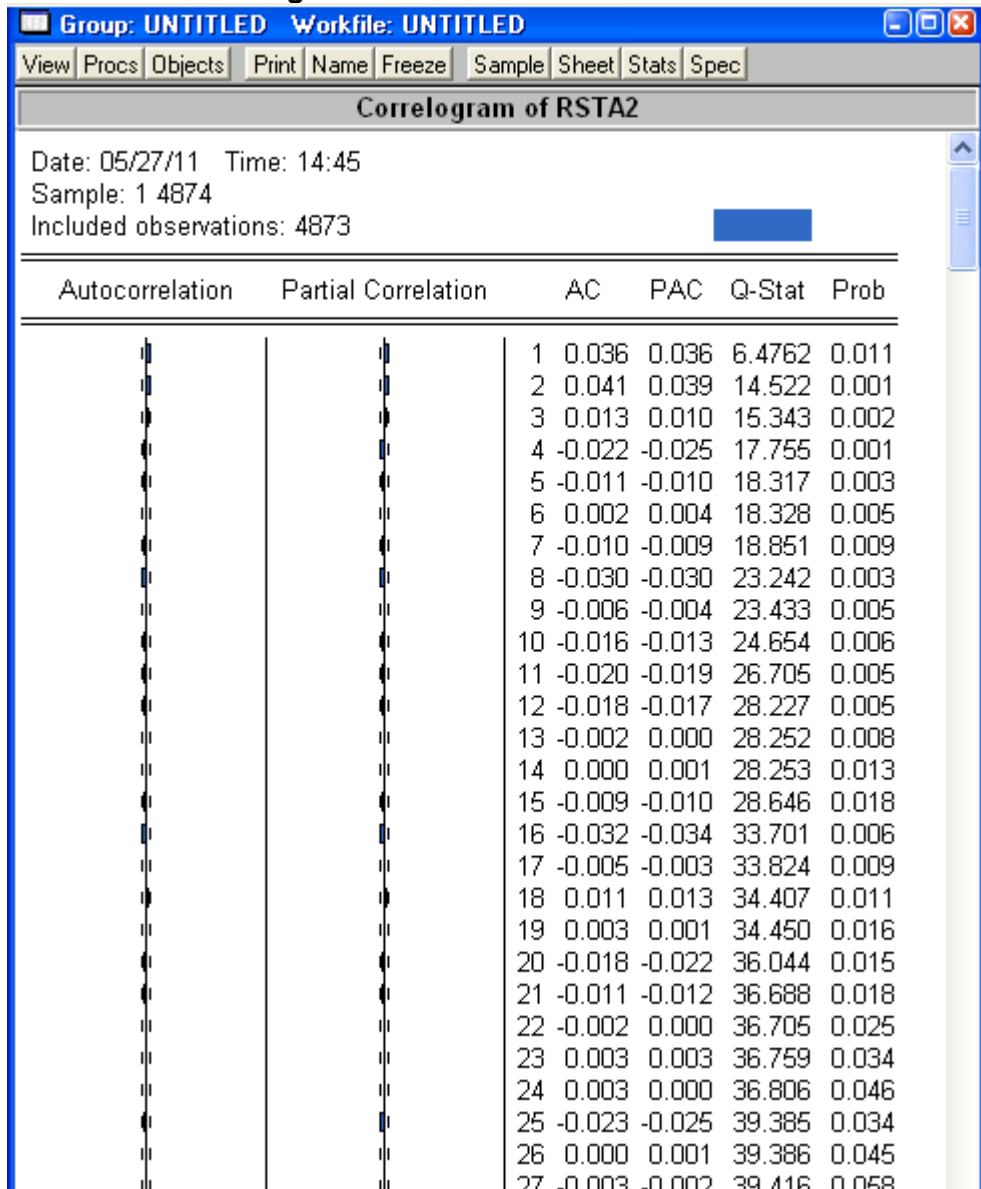
Ac rsta2

Autocorrelograma de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GARCH 1,1



En este cuadro observamos que aunque son bajos los valores de auto correlacion, con base en el estadístico Q no podemos garantizar independencia, la sprobabilidades deben ser menores que 5%

Cuadro 3.24 Correlograma de los residuales estandarizados del GARCH 1,1



Las probabilidades son menores que .05 por lo que no se puede rechazar la hipótesis de auto correlación

3.8.8 Prueba de ruido blanco

Cuadro 3.25 Prueba de ruido blanco de los residuales estandarizados al cuadrado del GARCH 1,1

wntestq rsta2

Portmanteau test for white noise

Portmanteau (Q) statistic = 53.3806

Prob > chi2(40) = 0.0766

Se acepta que es ruido blanco

Conclusión en la validación del modelo

Evidencia

No se probó independencia en los residuales cuadrados del modelo GARCH

No se probó homocedasticidad en los residuales cuadrados del modelo GARCH

No es un modelo adecuado para proyectar la varianza

3.9 Estudio del modelo E-GARCH y validación

A partir del modelo propuesto se debe calcular los residuales estandarizados cuadrados para hacer las pruebas de los supuestos en los residuales

```
.arch r,earch(1/1) egarch(1/1) noconstant
```

Cuadro 3.26 *parametros del Modelo EGARCH*

```
Iteration 24: log likelihood = 13871.081
```

```
ARCH family regression
```

```
sample: 1 to 4872
```

```
Number of obs = 4872
```

```
wald chi2(1) = 371.19
```

```
_log likelihood = 13871.08
```

```
Prob > chi2 = 0.0000
```

r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ARCH						
earch						
L1.	-.0998121	.0051807	-19.27	0.000	-.109966	-.0896581
earch_a						
L1.	.1887507	.0093926	20.10	0.000	.1703415	.20716
egarch						
L1.	.9734042	.0024517	397.03	0.000	.9685989	.9782095
_cons	-.2154664	.021009	-10.26	0.000	-.2566432	-.1742895

3.9.1 Calculo de residuales Modelo E-GARCH

Se presentan los comandos en STATA para obtener los residuales del modelo

```
. predict reside,residuals
```

3.9.2 Calculo de varianza condicional Modelo E-GARCH

Se presenta el comando en STATA para obtener el valor de la varianza condicional de la serie de tiempo que servirá para calcular los residuales estandarizados

```
. predict vare,var
```

3.9.3 Calculo de residuales estandarizados Modelo E-GARCH

Con la definición de residuales estandarizados se obtiene la serie de estos valores dividiendo los residuales del Modelo EGARCH entre la raíz de la varianza condicional previamente obtenida para cada punto de la serie.

```
. gen rste=reside/sqrt(vare)
```

3.9.4 Calculo de residuales estandarizados cuadrados del Modelo E-GARCH

Es importante obtener los residuales estandarizados cuadrados porque con ellos se prueban los supuestos del modelo

```
. gen rste2=rste^2
```

3.9.5 Autocorrelacion de residuales estandarizados del Modelo E-GARCH

Para obtener la serie de los valores de auto correlación de la serie de residuales del modelo E GARCH

```
. ac rste
```

3.9.6 Autocorrelacion de residuales estandarizados cuadrados del Modelo E-GARCH

El análisis se debe hacer con los residuales estandarizados cuadrados porque estamos estudiando la varianza que es el segundo momento de los rendimientos.

```
. ac rste2
```

3.9.7 Homocedasticidad de residuales estandarizados cuadrados del Modelo E-GARCH.

La prueba de varianza constante se hace con una regresión de los residuales al cuadrado del modelo con su pasado, si los coeficientes resultasen significativos, se concluye que los residuales cuadrados se explican con su pasado y por lo tanto no son homocedasticos.

Cuadro3.27 Prueba de Homocedasticidad del modelo E GARCH

```
. regress rste2 l.rste2
```

Source	SS	df	MS			
Model	15.7816011	1	15.7816011	Number of obs =	4871	
Residual	16685.1934	4869	3.42682141	F(1, 4869) =	4.61	
Total	16700.975	4870	3.42935833	Prob > F =	0.0319	
				R-squared =	0.0009	
				Adj R-squared =	0.0007	
				Root MSE =	1.8512	

rste2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
rste2						
L1.	.0307396	.0143242	2.15	0.032	.0026578	.0588214
_cons	.9693759	.030145	32.16	0.000	.910278	1.028474

Se observa que no hay homocedasticidad en los residuales porque los residuales cuadrados se explica con el pasado

3.9.8 Normalidad de residuales estandarizados cuadrados del Modelo E-GARCH

```
. sktest rste
```

Cuadro3.28 Prueba de Normalidad de residuales estandarizados del modelo E GARCH

Skewness/Kurtosis tests for Normality

----- joint -----

Variable	Pr(Skewness)	Pr(Kurtosis)	adj chi2(2)	Prob>chi2
rste	0.000	0.000	.	0.0000

Conclusión de la validación del modelo

No se prueba homocedasticidad en los residuales del modelo que explica la varianza
 No se observa Normalidad

El modelo E GARCH No es adecuado para predecir la varianza de los rendimientos de la serie financiera del IPC

3.10 Estudio del modelo GJR y validación

3.10.1 Obtención de Parámetros del Modelo GJR

```
.arch r, arch(1/1) garch(1/1) tarch(1/1) noconstant
```

Cuadro 3.29 Parámetros del modelo GJR

```
Iteration 15: log likelihood = 13865.732
ARCH family regression
Sample: 1 to 4872
Log likelihood = 13865.73
Number of obs = 4872
Wald chi2(3) = 77136.89
Prob > chi2 = 0.0000
```

r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ARCH						
arch L1.	.1796029	.009253	19.41	0.000	.1614673	.1977386
tarch L1.	-.1434172	.0087923	-16.31	0.000	-.1606499	-.1261845
garch L1.	.8805209	.0064276	136.99	0.000	.8679231	.8931187
_cons	5.17e-06	5.61e-07	9.22	0.000	4.07e-06	6.27e-06

3.10.2 Cálculo de residuales del Modelo GJR

```
predict residt, residuals
```

3.10.3 Cálculo de varianza condicional del Modelo GJR

```
. predict var, var
```

3.10.4 Cálculo de residuales estandarizados del Modelo GJR

```
. gen rstd=residt/sqrt(var)
```

3.10.5 Autocorrelograma de los residuales estandarizados del GJR

```
. ac rstd
```

3.10.6 Autocorrelograma de los residuales estandarizados cuadrados del GJR

```
. gen rstd2=rstd*rstd
```

```
. ac rstd2
```

3.10.7 Prueba de Homocedasticidad los residuales estandarizados cuadrados GJR

Cuadro 3.30 Prueba de homocedasticidad de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GJR

```
. regress rsth2 l.rsth2
```

Source	SS	df	MS			
Model	4.04697265	1	4.04697265	Number of obs =	4871	
Residual	16384.4288	4869	3.36505008	F(1, 4869) =	1.20	
Total	16388.4758	4870	3.3651901	Prob > F =	0.2728	
				R-squared =	0.0002	
				Adj R-squared =	0.0000	
				Root MSE =	1.8344	

rsth2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
rsth2						
l.	.0157141	.0143291	1.10	0.273	-.0123775	.0438057
_cons	.9844991	.029937	32.89	0.000	.9258091	1.043189

Se prueba homocedasticidad en los residuales del modelo porque el intervalo del 95% contiene al cero.

```
.hettest
```

Cuadro 3.31 Prueba de varianza constante de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GJR

Breusch-Pagan / Cook-Weisberg test for heteroskedasticity

H0: Constant variance

Variables: fitted values of rsth2

$chi2(1) = 21.81$
 $Prob > chi2 = 0.0000$

```
test l.rsth2
```

(1) $L.rsth2 = 0$

$F(1, 4869) = 1.20$
 $Prob > F = 0.2728$

Se reafirma que hay homocedasticidad en los residuales del modelo

3.10.8 Prueba de Normalidad los residuales estandarizados GJR

Cuadro 3.31 Prueba de normalidad de los residuales estandarizados del modelo GJR
`sktest rsth`

Skewness/Kurtosis tests for Normality

----- joint -----

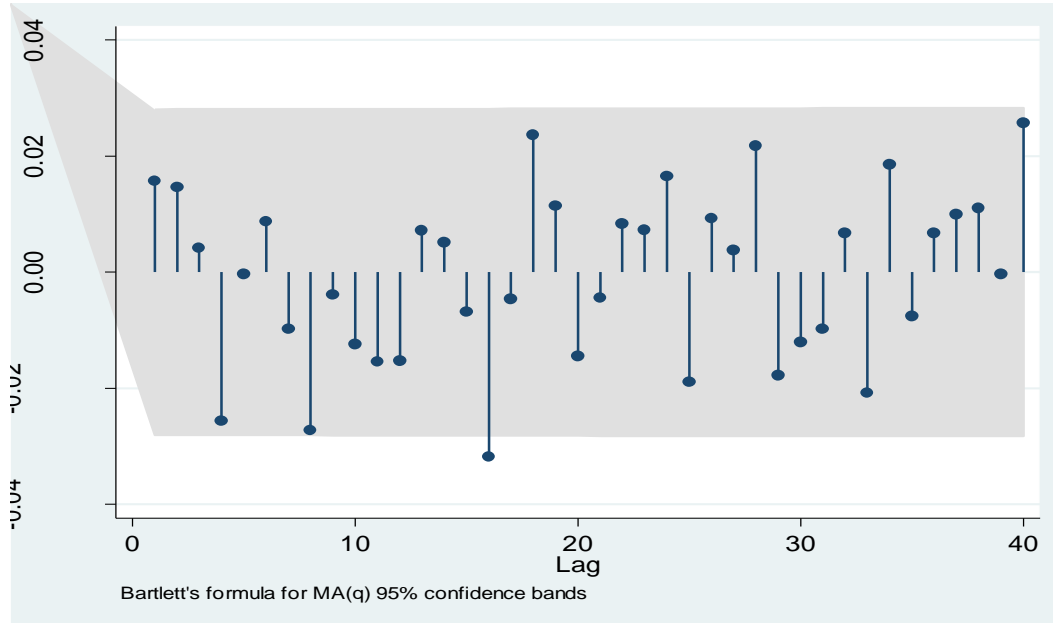
Variable	Pr(Skewness)	Pr(Kurtosis)	adj chi2(2)	Prob>chi2
rsth	0.814	0.025	.	0.07000

Hay normalidad en los residuales del modelo

3.10.9 Prueba No Auto correlación de los residuales estandarizados al cuadrado GJR

Grafica 3.11 Correlograma de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GJR

Prueba de auto correlación



No hay correlación de los residuales estandarizados cuadrados con su pasado

Cuadro 3.33 Valores de auto correlación de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GJR

Correlogram of RSTT2						
Date: 05/27/11 Time: 15:58						
Sample: 1 4874						
Included observations: 4872						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.016	0.016	1.2037	0.273
		2	0.015	0.014	2.2517	0.324
		3	0.004	0.004	2.3372	0.505
		4	-0.026	-0.026	5.5446	0.236
		5	0.000	0.000	5.5450	0.353
		6	0.009	0.009	5.9135	0.433
		7	-0.010	-0.010	6.3831	0.496
		8	-0.027	-0.028	10.011	0.264
		9	-0.004	-0.003	10.087	0.344
		10	-0.012	-0.011	10.840	0.370
		11	-0.015	-0.015	12.003	0.363
		12	-0.015	-0.016	13.141	0.359
		13	0.007	0.008	13.395	0.418
		14	0.005	0.005	13.523	0.486
		15	-0.007	-0.008	13.753	0.544
		16	-0.032	-0.033	18.718	0.284
		17	-0.005	-0.003	18.823	0.339
		18	0.024	0.025	21.559	0.252
		19	0.011	0.009	22.190	0.275
		20	-0.014	-0.018	23.217	0.278
		21	-0.004	-0.005	23.315	0.327
		22	0.008	0.011	23.655	0.366
		23	0.007	0.007	23.915	0.409
		24	0.017	0.013	25.249	0.392
		25	-0.019	-0.020	27.015	0.355
		26	0.009	0.011	27.433	0.387
		27	0.004	0.004	27.505	0.437
		28	0.022	0.021	29.820	0.372
		29	-0.018	-0.019	31.370	0.348
		30	-0.012	-0.010	32.086	0.364
		31	-0.010	-0.009	32.557	0.390

Hay independencia, las probabilidades son mayores que 0.05

Se prueba que hay independencia en los residuales del modelo GJR porque las probabilidades de la prueba Q son mayores de 5% por lo que se rechaza la hipótesis de auto correlación

3.10.10 Prueba de Ruido Blanco de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GJR

```
. ac rstt2  
. wntestq rstt2
```

Cuadro 3.34 Prueba de Ruido Blanco de los residuales estandarizados cuadrados del modelo GJR

Portmanteau test for white noise

```
-----  
Portmanteau (Q) statistic = 41.4177  
Prob > chi2(40)          = 0.4086
```

Los residuales se comportan como ruido blanco porque la probabilidad es mayor de 5%

Validación del modelo

Evidencia

Hay independencia en los residuales del modelo
Hay varianza constante en los residuales del modelo
Son ruido Blanco los residuales del modelo
Hay normalidad en los residuales del modelo

Conclusión

El modelo GJR es adecuado para hacer predicciones de la varianza de los rendimientos de la serie financiera del IPC

3.10.11 Pronóstico de la varianza del modelo GJR

Para hacer el pronóstico de la varianza con el modelo adecuado GJR primero se extiende el periodo de tiempo de la serie. Después se vuelve a estimar el modelo con una restricción de tiempo, hasta donde tenemos información, ya con el modelo se hace la predicción de los valores de la varianza.

Cuadro 3.35 Pronóstico del modelo GJR

```
. tsset tiempo
      time variable: tiempo, 1 to 4962
.arch r if tiempo<4873,arch(1/1) garch(1/1) tarch(1/1) noconstant
```

```
Iteration 15: log likelihood = 13865.732
```

ARCH family regression

Sample: 1 to 4872

Log likelihood = 13865.73

	Number of obs	=	4872
	wald chi2(3)	=	77139.36
	Prob > chi2	=	0.0000

r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]
ARCH					
arch					
L1.	.1795994	.0092528	19.41	0.000	.1614642 .1977346
tarch					
L1.	-.1434142	.0087921	-16.31	0.000	-.1606465 -.1261819
garch					
L1.	.8805231	.0064275	136.99	0.000	.8679254 .8931207
_cons	5.17e-06	5.61e-07	9.22	0.000	4.07e-06 6.27e-06

```
. predict yhat
(option xb assumed; linear prediction)
```

```
. predict vartarch,var
```

Resultados y conclusiones

Al principio se estudió el modelo GARCH (1,1) para estimar la varianza, al hacer las pruebas estadísticas se descartó el uso del modelo porque los residuales no mostraron ser homocedásticos, es decir no presentaron varianza constante, asimismo no presentaron simetría, ni normalidad.

Por ello se decidió aplicar los modelos E GARCH y los modelos GJR

En primer lugar se probó el uso del modelo EGARCH que tiene como ventaja sobre el modelo GARCH que resuelve el problema de asimetría. Cuando ensayamos el modelo y se obtuvieron los residuales no pasaron la prueba de homocedasticidad, esta prueba se hace con una regresión de los residuales estandarizados al cuadrado del modelo explicados por ellos mismos con un retraso y se observó que los coeficientes del modelo fueron significativos, es decir se explican por su pasado, concluimos que no son homocedásticos, ni independientes.

Se probó el modelo GJR en este modelo en el análisis de los residuales estandarizados se observó que son homocedásticos y no presentaron auto correlación de ningún nivel, asimismo se presentaron como ruido blanco y muy cercanos a la normalidad por ello se aceptó el uso del modelo para hacer pronóstico de la varianza.

Estos resultados implican que el modelo GJR replica correctamente el comportamiento de la varianza del IPC, y la evidencia empírica que se observó en la serie financiera de los rendimientos del IPC, son: su distribución es más picuda que una normal, es asimétrica, varianza no constante y hay una estructura de comportamiento en la varianza es decir auto-correlacionados.

Se proyectó la varianza para 27 días pero observamos que hay una convergencia a partir del día 10 esto implica que el uso de estos modelos para hacer proyecciones es de corto plazo y es adecuado para hacer un cálculo del VaR a 5 días son adecuados.

Comparamos estos resultados con el cálculo de la varianza histórica y percibimos que en épocas de alta o baja volatilidad es mejor esta estimación pues la varianza histórica subestima ó sobre estima el cálculo de la varianza proyectada.

Con base en la proyección de la varianza se hizo una simulación montecarlo de los rendimientos proyectados para 5 días con varianza estimada por el modelo GJR con 10,000 escenarios para encontrar el cuantil correspondiente a 5% que corresponde a la pérdida máxima probable con un nivel de confianza de 95%

GJR (1,1,1)

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \dots \text{iid } D(0,1)$$

$$h_t = 0.00000516 + 0.1794702 \hat{e}_{t-1}^2 - 0.1432496 \hat{e}_{t-1}^2 I_{t-1} + 0.8805762 h_{t-1}$$

Donde $\hat{e}_{t-1}^2 = (r_{t-1} - \mu)^2$

$$I_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{Si } \hat{e}_{t-1} \leq 0 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

La siguiente tabla presenta la predicción de la varianza en los siguientes 28 días, se observa que rápidamente converge a un valor por lo que debemos concluir que estos modelos son de estimación puntual y no de largo plazo, es muy arriesgado predecir la varianza para más de 15 días, un periodo adecuado de predicción son de 1 a 5 días,

Cuadro 3.36 Predicción de la varianza del modelo GJR

	Estimada	Pronóstico	Vartarch
1	0.000,0750	0.000,1247	
2	0.000,0723	0.000,1246	
3	0.000,0717	0.000,1244	
4	0.000,1115	0.000,1243	
5	0.000,1036	0.000,1242	
6	0.000,0964	0.000,1241	
7	0.000,0903	0.000,1240	
8	0.000,0887	0.000,1240	
9	0.000,0851	0.000,1239	
10	0.000,0885	0.000,1239	
11	0.000,0839	0.000,1238	
12	0.000,0800	0.000,1238	
13	0.000,0808	0.000,1237	
14	0.000,0814	0.000,1237	
15	0.000,0769	0.000,1237	
16	0.000,0753	0.000,1237	
17	0.000,0775	0.000,1236	
18	0.000,0807	0.000,1236	
19	0.000,0763	0.000,1236	
20	0.000,0906	0.000,1236	
21	0.000,0871	0.000,1236	
22	0.000,0820	0.000,1236	

La primer columna muestra el numero de días de operación después de la fecha de análisis

La segunda columna muestra los resultados de la serie estimados con el modelo GJR con base en el rendimiento real de los días 13 de mayo a 13 de junio de 2011

La tercer columna muestra los resultados de el pronóstico de la varianza con el modelo GJR el día 12 de mayo para predecir la varianza hasta el 13 de junio de 2011.

Varianza

	1 día	5 días
varianza	0.0001247	0.0006235
desviación	0.011166915	0.02496998

VaR GJR utilizando la distribución normal para determinar el cuantil de 5%

$z = -1.644853626951$ al 95% de confianza

$\mu + z \cdot \sigma = -0.04106681 = -4.10\%$

Se estima una pérdida del 4.10%

VaR GJR con Simulación Montecarlo para determinar el cuantil de 5% en los rendimientos

Pérdida máxima probable 95%	-
	-4.04%
	-\$40,364.4307

Para una inversión de \$ 1,000,000

Pérdida máxima probable 99%	-
	-5.74%
	-57,360.84808

Para una inversión de \$ 1,000,000

Var histórico

Pérdida máxima probable 95%	-12.1945%
	-\$121,945.9

Para una inversión de \$ 1,000,000

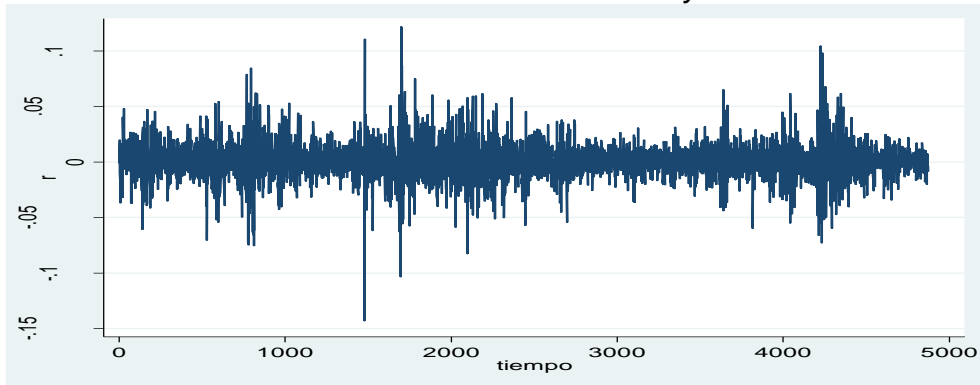
Pérdida máxima probable 99%	-22.029%
	-\$220,290

Para una inversión de \$ 1,000,000

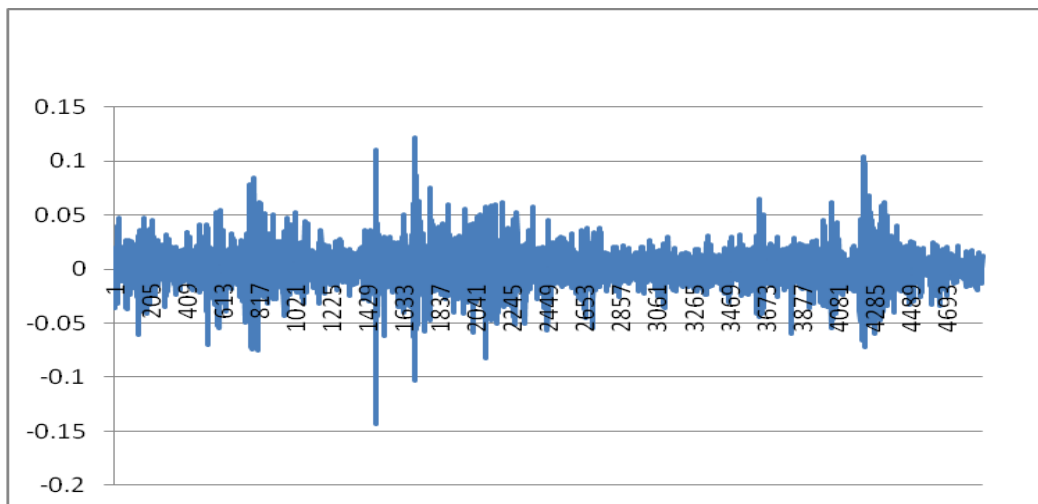
La explicación de estos resultados se extrae de las siguientes gráficas de los rendimientos históricos y de la varianza condicional. Se observa que en el momento de la predicción en el mercado hay estabilidad es decir la volatilidad es baja y la base de construcción de los modelos Garch es de varianza condicional es decir a ante un escenario de baja volatilidad la mejor predicción es baja volatilidad y viceversa.

Contrario a este resultado si el presente estudio se realizara en momentos de alta volatilidad los resultados en la comparación contra el VaR histórico serían invertidos.

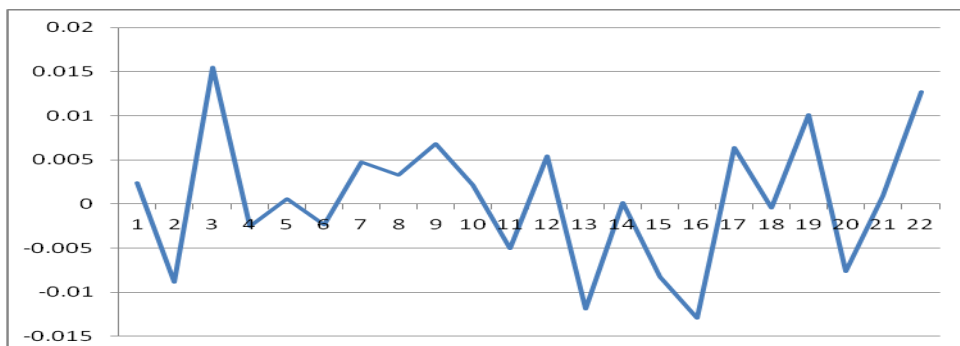
Gráfica de rendimientos de 1991 a 12 Mayo 2011



Rendimientos 1991 a 13 de junio de 2011



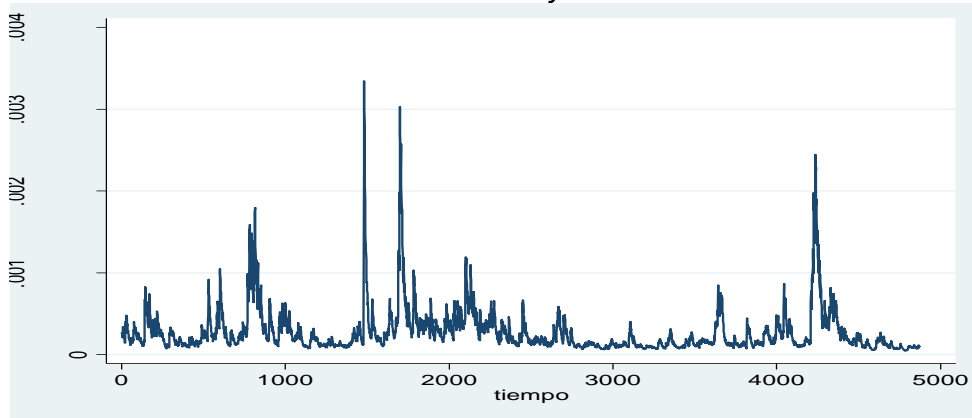
Rendimientos en el mes de 12 de mayo a 13 de junio de 2011



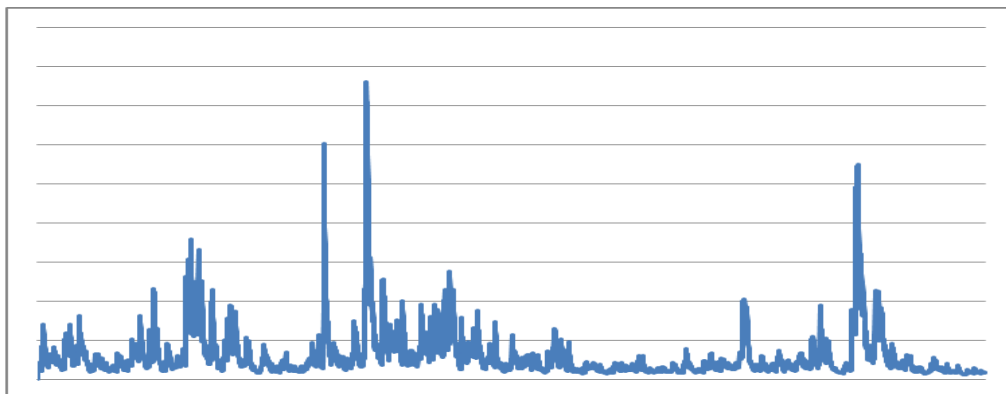
EFFECTIVAMENTE SE OBSERVA BAJA VOLATILIDAD EN EL MERCADO

Comparación de la varianza condicional calculada con el modelo GJR de la familia GARCH

Varianza condicional de 1991 a 12 de mayo 2011



Varianza condicional de 1991 a 13 de junio de 2011



Bibliografía:

BANCO DE MEXICO."Definiciones Básicas de Riesgo".México 2005

BANCO DE MEXICO."Glosario".México 2005

Bolleslev, Tim 1986 generalizad autorregresive condicional heteroskedacitty Journal of econometrics. Pp307-327

Circular S.11.6 . Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.2000.

Disposiciones de carácter general Aplicables a las Instituciones de Crédito. SHCP. Mexico.2005.

DE LARA, Haro. Alfonso."Medición y Control de Riesgos Financieros"

Engle, R. (1982), "Autorregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of United Kingdom Inflation", Econometrica, 50, 987-1008.

FERNÁNDEZ DURÁN JUAN JOSÉ "ECONOMETRIA FINANCIERA, ITAM "

Grinstead, C. Snellj: "Teorem Limited Central".1997

GUJARATI, D. "Econometria". McGraw Hill. Cuarta Edición. México 2003

HULL, J. "Risk Magnament and Financial Institutions". Pearson Printice Hall. 2007

Johnston, J., and DiNardo, J. (1997), Econometric Methods, Fourth Edition, New York: McGraw-Hill.

Lamoureux, G. C., and Lastrapes, W. D. (1990), "Heteroskedasticity in Stock Return Data: Volume versus GARCH Effects," Journal of Finance, 45, 221-229.

Paginas web de referencias

[.http://mx.finance.yahoo.com](http://mx.finance.yahoo.com)

<http://schwert.simon.rochester.edu>

<http://www.uam.es/otroscentros/klein/doctras/doctra9806.pdf>

Rafael de Arce I.L.Klein INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS AUTORREGRESIVOS CON HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONAL (ARCH), diciembre de 1998

ANEXO 1
Propiedades del Modelo ARCH

Arch1

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t \tag{A1.1}$$

$$Var(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1} - \mu)^2 \tag{A1.2}$$

$$\varepsilon_t \approx iid \dots D(0,1)$$

$$\varepsilon_t \sim \mu, \alpha_0, \alpha_1$$

Modelo ARCH p

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t \tag{A1.3}$$

$$h_t = Var(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-p}) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k (\varepsilon_{t-k} - \mu)^2 \tag{A1.4}$$

$$\varepsilon_t \approx iid \dots D(0,1)$$

$$\varepsilon_t \sim \mu, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p \tag{A1.5}$$

Estructura de predicción del proceso residual respecto a la media, \hat{e}_t

$$e_t = r_t - \mu \tag{A1.6}$$

La esperanza del proceso residual respecto a la media, \hat{e}_t

De la ecuación 2.11 y 2.14 sustituimos el valor del proceso e_t

$$E[e_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}] = E[\sqrt{h_t} * \varepsilon_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}] \tag{A1.7}$$

Dado que la varianza ya es conocida en el tiempo t por el modelo arch, es una constante y sale del operador esperanza

$$\begin{aligned} &= \sqrt{h_t} * E[e_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}] \\ &\dots\dots\dots \sqrt{h_t} \text{ depende de } t-1 \\ &= \sqrt{h_t} * 0 = 0 \end{aligned} \tag{A1.8}$$

porque la variable épsilon se distribuye con media 0

La varianza del proceso \hat{e}_t

$$Var[e_t] = Var[E[e_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}]] + E[Var[e_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}]] \tag{A1.9}$$

El primer término es igual a 0

y el segundo término

$$Var[e_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}] = Var[\sqrt{h_t} * \varepsilon_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}] \tag{A1.10}$$

$$\begin{aligned} &= h_t * Var[\varepsilon_t | r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n}] \\ &= h_t * 1 = h_t \end{aligned} \tag{A1.11}$$

Finalmente

$$Var[e_t] = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots + \dots\dots\dots E[h_t] \tag{A1.12}$$

por (2.12) y reduciendo obtenemos:

$$Var[e_t] = E[\alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1} - \mu)^2] \tag{2A1.13}$$

$$Var[e_t] = E[\alpha_0] + \alpha_1 E[(\varepsilon_{t-1} - \mu)^2] \tag{A1.14}$$

$$Var \left[r_t \right] = \alpha_0 + \alpha_1 E \left[r_{t-1}^2 \right] \quad (A1.15)$$

$$Var \left[r_t \right] = \alpha_0 + \alpha_1 Var \left[r_{t-1} \right] \quad (A1.16)$$

Pedimos que $E \left[r_{t-1}^2 \right] = E \left[r_t^2 \right]$ Para que el proceso sea estacionario en la varianza
Las marginales tienen que ser la misma

$$Var \left[r_t \right] = \alpha_0 + \alpha_1 Var \left[r_t \right] \quad (A1.17)$$

$$Var \left[r_t \right] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \dots \forall t \quad (A1.18)$$

El resultado anterior significa que los valores de la predicción de la varianza convergen a un valor que esta en función de los parámetros alfas del modelo Arch 1 lo que implica que son adecuados para hacer predicciones en el corto plazo.

Covarianza del proceso residual respecto a la media, e_t : $Cov \left[r_t, e_{t-k} \right]$

Con la definición de el estadístico covarianza obtenemos la covarianza del proceso

$$Cov \left[r_t, e_{t-k} \right] = E \left[r_t * e_{t-k} \right] - E \left[r_t \right] E \left[e_{t-k} \right] \quad (A1.19)$$

pero..... $E \left[r_t \right] = 0$ por (A1.16)

$$Cov \left[r_t, e_{t-k} \right] = E \left[r_t e_{t-k} \right] \quad (A1.20)$$

$$Cov \left[r_t, e_{t-k} \right] = E \left[r_t e_{t-k} \mid r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n} \right] \quad (A1.21)$$

$$Cov \left[r_t, e_{t-k} \right] = E \left[r_{t-k} e_t \mid r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n} \right] \quad (A1.22)$$

$e_{t-k} \dots$ ya..es..conocido

ysabemos..que..... $E \left[r_t \mid r_{t-1}, r_{t-2}, r_{t-n} \right] = 0$

Por lo tanto

$$Cov \left[r_t, e_{t-k} \right] = 0 \quad (A1.23)$$

Implica que

$$Corr \left[r_t, e_{t-k} \right] = 0 \quad (A1.24)$$

El resultado obtenido se interpreta como un comportamiento entre el rendimiento y su pasado, con la serie de datos, la prueba se hace con la función de auto correlación que presenta como resultado un correlograma de la variable con ella misma pero con distintos retraso.

Estructura del proceso e_t^2 en Arch

Se considera el cuadrado del proceso residuales de los rendimientos respecto a la media como estimador de la varianza

$$e_t^2 = \left(r_t - \mu \right)^2 \quad (A1.25)$$

El estudio de este nuevo proceso involucra el calculo de su valor esperado, de su varianza y de su covarianza para determinar si este presenta una estructura de comportamiento cuando consideramos que la varianza se comporta como un modelo Arch 1

e_t^2 es un AR 1

La esperanza de e_t^2

$$\begin{aligned}
 E \left[e_t^2 \right] &= E \left[E \left[e_t^2 \mid r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n} \right] \right] \\
 \dots\dots &= E \left[E \left[E \left[e_t^2 \mid r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n} \right] \right] \right] \\
 \dots\dots &= E \left[E \left[E \left[e_t^2 \mid r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n} \right] \right] \right] \\
 \dots\dots &= E \left[E \left[e_t^2 \right] \right] \\
 \dots\dots &= E \left[e_t^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{A1.26}$$

$$\begin{aligned}
 E \left[e_t^2 \right] &= E \left[\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 \right] \\
 E \left[e_t^2 \right] &= E \left[\alpha_0 + \alpha_1 E \left[e_{t-1}^2 \right] \right] \\
 E \left[e_t^2 \right] &= \alpha_0 + \alpha_1 E \left[e_{t-1}^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{A1.27}$$

Pedimos que $E \left[e_{t-1}^2 \right] = E \left[e_t^2 \right]$ Para que el proceso sea estacionario en la varianza
 Las marginales tienen que ser la misma

$$\begin{aligned}
 E \left[e_t^2 \right] &= \alpha_0 + \alpha_1 E \left[e_t^2 \right] \\
 E \left[e_t^2 \right] &= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \dots\dots\dots \forall t \\
 E \left[e_t^2 \right] &= \text{Var} \left[e_t \right]
 \end{aligned}
 \tag{A1.28}$$

La esperanza de este nuevo proceso converge y es igual a la varianza del proceso anterior: residuales de los rendimientos respecto a su media

La varianza de e_t^2

$$\text{Var} \left[e_t^2 \right] = E \left[e_t^4 \right] - \left(E \left[e_t^2 \right] \right)^2
 \tag{A1.29}$$

Del primer termino

$$E \left[e_t^4 \right] = E \left[E \left[e_t^4 \mid r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n} \right] \right]
 \tag{A1.29}$$

$$E \left[e_t^4 \right] = E \left[E \left[e_t^2 e_{it}^2 \mid r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n} \right] \right]
 \tag{A1.30}$$

$$E \left[e_t^4 \right] = E \left[e_t^2 E \left[e_{it}^2 \right] \right]
 \tag{A1.31}$$

$E \left[e_{it}^2 \right]$ es cualquier numero, 3 si se trata de una distribución Normal (0, 1)

$$E \left[e_t^4 \right] = E \left[e_t^2 \right] * E \left[e_{it}^2 \right]
 \tag{A1.32}$$

$$E \left[e_t^4 \right] = E \left[\left(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 \right)^2 \right] * E \left[e_{it}^2 \right]
 \tag{A1.33}$$

$$E \left[e_t^4 \right] = E \left[\alpha_0^2 + \alpha_1^2 e_{t-1}^4 + 2 \alpha_0 \alpha_1 e_{t-1}^2 \right] * E \left[e_{it}^2 \right]
 \tag{A1.34}$$

$$E \left[e_t^4 \right] = \left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 E \left[e_{t-1}^4 \right] + 2 \alpha_0 \alpha_1 E \left[e_{t-1}^2 \right] \right) * E \left[e_{it}^2 \right]
 \tag{A1.35}$$

Por estacionariedad necesaria

$$E \left[e_t^4 \right] = E \left[e_{t-1}^4 \right]
 \tag{A1.36}$$

$$E \left[e_t^4 \right] = \left(\alpha_0^2 + 2 \alpha_0 \alpha_1 \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \right) * E \left[e_{it}^2 \right] + \alpha_1^2 E \left[e_t^4 \right] * E \left[e_{it}^2 \right]
 \tag{A1.37}$$

Despejamos

$$E \left[\epsilon_t^4 \right] = \frac{\alpha_0^2 \left(1 + \frac{2\alpha_1}{1-\alpha_1} \right) E \left[\epsilon_{it}^4 \right]}{1 - \alpha_1^2 E \left[\epsilon_{it}^4 \right]} \quad (\text{A1.38})$$

agrupamos

$$E \left[\epsilon_t^4 \right] = \frac{\alpha_0^2 \left(\frac{1+\alpha_1}{1-\alpha_1} \right) E \left[\epsilon_{it}^4 \right]}{1 - \alpha_1^2 E \left[\epsilon_{it}^4 \right]} \quad (\text{A1.39})$$

Por lo tanto

$$\text{Var} \left(\epsilon_t^2 \right) = \frac{\alpha_0^2 \left(\frac{1+\alpha_1}{1-\alpha_1} \right) E \left[\epsilon_{it}^4 \right]}{1 - \alpha_1^2 E \left[\epsilon_{it}^4 \right]} - \left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \right)^2 \quad (\text{A1.40})$$

Estudio de la curtosis de los rendimientos

$$k = \frac{E \left[\epsilon_t^4 \right] - E \left[\epsilon_t \right]^4}{\text{Var}^2 \left(\epsilon_t \right)} \quad (\text{A1.41})$$

$$k = \frac{E \left[\epsilon_t^4 \right]}{\left(\text{Var} \left(\epsilon_t \right) \right)^2} \quad (\text{A1.42})$$

$$k = \frac{\alpha_0^2 \left(\frac{1+\alpha_1}{1-\alpha_1} \right) E \left[\epsilon_{it}^4 \right]}{\left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \right)^2} \quad (\text{A1.43})$$

$$k = \frac{\left(1 - \alpha_1^2 \right) E \left[\epsilon_{it}^4 \right]}{1 - \alpha_1^2 E \left[\epsilon_{it}^4 \right]} \quad (\text{A1.44})$$

$E \left[\epsilon_{it}^4 \right] = 3$ por ser normal

$$k = \frac{3 \left(1 - \alpha_1^2 \right)}{1 - 3\alpha_1^2} \quad (\text{A1.45})$$

Proponemos que $k > 3$

$$\frac{3 \left(1 - \alpha_1^2 \right)}{1 - 3\alpha_1^2} > 3 \quad (\text{A1.46})$$

Simplificamos

$$\frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} > 1 \quad (A1.46B)$$

$$\text{Si } 1 - 3\alpha_1^2 > 0 \quad \text{implica que } \alpha_1^2 < \frac{1}{3} \quad (A1.47)$$

$$1 - \alpha_1^2 > 1 - 3\alpha_1^2 \quad \text{implica que } \alpha_1^2 > 0 \quad (A1.48)$$

$$\text{Si } 1 - 3\alpha_1^2 < 0 \quad \text{implica que } 1 - \alpha_1^2 < 1 - 3\alpha_1^2 \quad \text{no tiene solución} \quad (A1.49)$$

Por lo tanto

$$0 < \alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (A1.50)$$

Va a tener colas mas pesadas y es mas picuda que la normal

Correlación del proceso

$$\text{Cov}(e_t^2, e_{t-1}^2) = E[e_t^2 e_{t-1}^2] - E[e_t^2] E[e_{t-1}^2] \quad (A1.51)$$

El primer termino

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = E[E[e_t^2 e_{t-k}^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n}]] \quad (A1.52)$$

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = E[E_{t-k}^2 E_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n}] \quad (A1.53)$$

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = E[E_{t-k}^2 E_t \varepsilon_{it}^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n}] \quad (A1.54)$$

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = E[E_{t-k}^2 h_t E_{it}^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n}] \quad (A1.55)$$

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = E[E_{t-k}^2 h_t] \quad (A1.56)$$

porque $E[E_{it}^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n}] = 1$

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = E[E_t \varepsilon_t h_{t-k} \varepsilon_{t-k}^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n}] \quad (A1.57)$$

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = E[h_{t-k} E_t \varepsilon_{t-k}^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n}] \quad (A1.58)$$

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = E[h_{t-k} E_t E_{t-k}^2] \quad (A1.59)$$

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = E[h_{t-k}] \quad (A1.60)$$

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = E[\alpha_0 + \alpha_1 e_t^2] (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-k}^2) \quad (A1.61)$$

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = E[\alpha_0^2 + \alpha_0 \alpha_1 e_t^2 + \alpha_0 \alpha_1 e_t^2 + \alpha_1^2 e_t^2 e_{t-k}^2] \quad (A1.62)$$

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = \alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^2 E[e_t^2 e_{t-k}^2] \quad (A1.63)$$

$$E[e_t^2 e_{t-k}^2] = \frac{\alpha_0^2 \left(1 + \frac{2\alpha_1}{1 - \alpha_1}\right)}{1 - \alpha_1^2} \quad (A1.64)$$

$$\text{Cov}(e_t^2, e_{t-1}^2) = \frac{\alpha_0^2 \left(1 + \frac{2\alpha_1}{1 - \alpha_1}\right)}{1 - \alpha_1^2} - \left(\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}\right)^2 \quad (A1.65)$$

$$\text{Cov}(e_t^2, e_{t-1}^2) = \alpha_0^2 (1 + \alpha_1)$$

Existe covarianza con la variable que representa el cuadrado de los rendimientos por lo tanto existe una estructura en el comportamiento, es decir hay correlacion, los valores actuales se explican por el pasado. (A1.66)

Justificación de que el proceso $\{r_t^2\}$ es un proceso autorregresivos de orden 1

A partir del cálculo del error

$$v_t = e_t^2 - E\{e_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\} \quad (A1.67)$$

Estudio del segundo termino

$$E\{e_t^2 | \mathcal{S}_{t-1}\} = E\{e_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\} \quad (A1.68)$$

$$E\{e_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\} = E\{e_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\} \quad (A1.69)$$

Al ser h_t función de $t-1$ sale del operador

$$E\{e_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\} = h_t E\{e_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\} \quad (A1.70)$$

e_t^2 es independiente de r_{t-1}, r_{t-2}, \dots

$$E\{e_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\} = h_t E\{e_t^2\} \quad (A1.71)$$

$$E\{e_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\} = h_t \quad (A1.72)$$

Se cumple que

$$E\{e_t^2\} = 1 \quad \text{por}$$

$$\text{Var}\{e_t\} = 1 = E\{e_t^2\} - (E\{e_t\})^2 = 1 \quad (A1.73)$$

donde $E\{e_t\} = 0$

$$v_t = e_t^2 - h_t \quad (A1.74)$$

$$v_t = e_t^2 - (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 - \mu) \quad (A1.75)$$

$$v_t = e_t^2 - (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2) \quad (A1.76)$$

por lo tanto

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 - v_t \quad (A1.77)$$

Y se cumple que el proceso $\{r_t^2\}$ es un proceso autorregresivos de orden 1

Si consideramos a $\mu = 0$

$$r_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 - v_t \quad (A1.78)$$

$\{r_t^2\}$ es un proceso autorregresivos de orden 1

En la función de autocorrelación se observa una caída exponencial

Se debe cumplir que $0 < \alpha_1 < 1$ para estacionariedad

α_0 puede asumir cualquier numero positivo

Podemos concluir que:

$$\text{Corr}\{r_t^2, r_{t-k}^2\} > 0 \quad (A1.79)$$

Estimación en modelos ARCH

Máxima Verosimilitud

Cuando tratamos de replicar a una variable con distintos modelos Arch la manera de discriminarlos y seleccionar alguno es mediante algún criterio de información Akaike o Bayesiano con base en la función de verosimilitud.

Datos $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_T$

Arch

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (A1.80)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (A1.81)$$

$$L(\theta | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = f(\varepsilon_1, r_2, r_3, \dots, r_T) \quad (A1.82)$$

Función de densidad conjunta

$$L(\theta | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2 | r_1) f(\varepsilon_3 | r_2, r_1) f(\varepsilon_4 | r_3, r_2, r_1) \dots f(\varepsilon_T | r_{T-1}, r_2, r_1) \quad (A1.83)$$

$$L(\theta | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = f(\varepsilon_1) \frac{f(\varepsilon_2, r_1)}{f(\varepsilon_2)} \frac{f(\varepsilon_3, r_2, r_1)}{f(\varepsilon_3, r_2, r_1)} \dots \frac{f(\varepsilon_T, r_{T-1}, r_2, r_1)}{f(\varepsilon_{T-1}, r_3, r_2, r_1)} \quad (A1.84)$$

$$L(\theta | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = f(\varepsilon_T, r_{T-1}, r_2, r_1) \quad (A1.85)$$

$$L(\theta | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = N(\mu, h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2) \quad (A1.86)$$

Verosimilitud condicional en r_1

Opción 1

Condicionar en r_1

$$L(\theta | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = \prod_{k=2}^T N(\mu, h_t) \quad (A1.87)$$

$$l(\theta | r_1, r_2, r_3, \dots, r_T) = \sum_{t=2}^T \ln N(\mu, h_t) = \sum_{t=2}^T -\frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2h_t} (\varepsilon_t - \mu)^2 \quad (A1.88)$$

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{MV} - \theta) \rightarrow N(0, I(\theta)^{-1})$$

$I(\theta)$ matriz de Información de Fisher

$$I(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial l_i}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial l_i}{\partial \theta} \right)' \right] \quad (A1.89)$$

$$I(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \left(\frac{\partial l_i}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial l_i}{\partial \theta} \right)' \Big|_{\theta=\hat{\theta}_{MV}} \quad (2.90)$$

$$\left(\frac{\partial l_i}{\partial \theta} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial l_t}{\partial \mu} \\ \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A1.91)$$

Vector score

$$I(\underline{\theta}) = E \begin{pmatrix} \frac{\partial l_t}{\partial \mu} & & \\ \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0} & \dots \dots & \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_1} & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{\partial l_t}{\partial \mu} \\ \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_1} \end{matrix} \quad (A1.92)$$

$$I(\underline{\theta}) = E \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial l_t}{\partial \mu}\right)^2 & \left(\frac{\partial l_t}{\partial \mu} \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0}\right) & \left(\frac{\partial l_t}{\partial \mu} \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_1}\right) \\ \left(\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial l_t}{\partial \mu}\right) & \left(\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0}\right)^2 & \left(\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_1}\right) \\ \left(\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial l_t}{\partial \mu}\right) & \left(\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0}\right) & \left(\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_1}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (A1.93)$$

$$I(\underline{\theta}) = J(\underline{\theta})' E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'} \\ \left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha_0 \partial \mu}\right) & \left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha_0^2}\right) & \left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha_1 \partial \mu}\right) & \left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_0}\right) & \left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha_1^2}\right) \end{pmatrix} \quad (A1.94)$$

$$\bar{J} \begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix}_{MV} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'} \bigg|_{\theta = \hat{\theta}_{MV}} \quad (A1.95)$$

Máxima Cuasiverosimilitud

Suponer que $D(\underline{\theta}, 1) \cong N(\underline{\theta}, 1)$

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} \hat{\theta} - \theta \\ \hat{\theta} - \theta \\ \hat{\theta} - \theta \\ \hat{\theta} - \theta \end{pmatrix}_{CMV} \rightarrow N \left(\underline{0}, J(\underline{\theta})^{-1} I(\underline{\theta}) J(\underline{\theta})^{-1} \right) \quad (A1.96)$$

Prueba de hipótesis de errores Arch en un análisis de regresión

Efectos ARCH en regresión

Procedimiento

Llevar a cabo la regresión y obtener los residuales

$$Y_t = X_t' \beta + \varepsilon_t \quad (A1.97)$$

Llevar a cabo una segunda regresión con los errores de la primera regresión

$$\hat{e}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{e}_{t-1} + \alpha_2 \hat{e}_{t-2} + \dots + \alpha_p \hat{e}_{t-p} + v_t \quad (A1.98)$$

Hipótesis nula: Hay homocedasticidad

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

$$H_a: \text{al menos una } \alpha_i \neq 0$$

El estadístico de prueba es $TR^2 \approx \chi_p^2$ rechazamos para valores muy grandes

$$r_t = x_t' \beta + \sqrt{h_t} e_t \quad (A1.99)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (\hat{e}_{t-1} - \mu)^2 + \alpha_2 (\hat{e}_{t-2} - \mu)^2 + \dots + \alpha_p (\hat{e}_{t-p} - \mu)^2 \quad (A1.100)$$

Selección de p:

- Correlogramas
- Ensayo y error
- Criterios de información

$$\text{AIC Akaike} \quad AIC = -2\hat{l} + 2p \quad (A1.101)$$

$$\text{BIC Schwartz} \quad BIC = -2\hat{l} + p \ln \hat{\sigma}^2 \quad (A1.102)$$

Hay que seleccionar el menor valor en el criterio elegido

Validación del Modelo ARCH

Análisis de residuales de los rendimientos respecto a su media

$$\hat{e}_t = r_t - \hat{\mu}_t \quad (A1.103)$$

Las pruebas para validar que el Arch 1 es el modelo adecuado para replicar la varianza se deben hacer con residuales estandarizados

$$\hat{e}_t^* = \frac{\hat{e}_t}{\sqrt{\hat{h}_t}} \quad \text{residuales estandarizados} \quad (A1.104)$$

Las pruebas necesarios para la validación y aplicación del modelo para predicciones son:

1.- No correlación

Función de Autocorrelación de $\hat{e}_t, \hat{e}_t^*, \hat{e}_t^2$

Grafica de \hat{e}_t v.s. tiempo

2.- Homocedasticidad, que la varianza de los residuales estandarizados es constante

Grafica de \hat{e}_t^2 v.s. tiempo

Prueba White Lagrange

3.- Normalidad, que los residuales se distribuyen normalmente

Prueba Jarque-Bera \hat{e}_t^*

Histograma

Predicción Arch

Ya que seleccionamos el modelo con base en algún criterio de información se procede a hacer la predicción de la media y de la varianza.

En rendimientos

$$\text{Arch} \left(\begin{array}{l} r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t \end{array} \right) \quad (\text{A1.105})$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1} - \mu)^2 \quad (\text{A1.116})$$

$$\hat{r}_{T+1|T} = \hat{E} \left[r_{T+1} \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A1.107})$$

$$\hat{r}_{T+1|T} = \hat{E} \left[\mu + \sqrt{h_{T+1}} e_{T+1} \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A1.108})$$

$$\hat{r}_{T+1|T} = \hat{\mu} + \hat{E} \left[\sqrt{h_{T+1}} e_{T+1} \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A1.109})$$

$$\hat{r}_{T+1|T} = \hat{\mu} + \sqrt{h_{T+1}} \hat{E} \left[e_{T+1} \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A1.110})$$

$$\hat{r}_{T+1|T} = \hat{\mu} \quad (\text{A1.111})$$

$$\hat{r}_{T+k|T} = \hat{\mu} \quad (\text{A1.112})$$

Se concluye que la mejor estimación del rendimiento es su media

La varianza en la predicción del periodo $t+1$ depende de la varianza de periodo t , se va incrementando el periodo de la filtración.

En varianza

$$\hat{h}_{\varepsilon_{t+1}|t} = \hat{E} \left[\alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_t - \mu)^2 \mid \mathfrak{F}_t \right] \quad (\text{A1.113})$$

$$\hat{h}_{T+1|T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{e}_T^2 \quad (\text{A1.114})$$

$$\hat{h}_{\varepsilon_{t+2}|t} = \hat{E} \left[\alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t+1} - \mu)^2 \mid \mathfrak{F}_t \right] \quad (\text{A1.115})$$

$$\hat{h}_{\varepsilon_{t+2}|t} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{E} \left[(\varepsilon_{t+1} - \mu)^2 \mid \mathfrak{F}_t \right] \quad (\text{A1.116})$$

$$\hat{h}_{\varepsilon_{t+2}|t} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{E} \left[\varepsilon_{t+1}^2 \mid \mathfrak{F}_t \right] \quad (\text{A1.117})$$

$$\hat{h}_{\varepsilon_{t+2}|t} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \left[\hat{h}_{T+1|T} \right] \quad (\text{A1.118})$$

$$\hat{h}_{\varepsilon_{t+2}|t} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \left[\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{e}_T^2 \right] \quad (\text{A1.119})$$

$$\hat{h}_{\varepsilon_{t+2}|t} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_0 \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_1 \hat{e}_T^2, \quad (\text{A1.120})$$

$$\hat{e}_T^2 = \left(r_T - \hat{\mu} \right)^2 \quad (\text{A1.121})$$

$$\hat{h}_{\epsilon_{+3} | \mathfrak{F}_T} = \hat{E} \left[\epsilon_0 + \alpha_1 \epsilon_{T+2} - \mu \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A1.122})$$

$$\hat{h}_{\epsilon_{+3} | \mathfrak{F}_T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{E} \left[\epsilon_{T+2} - \mu \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A1.123})$$

$$\hat{h}_{\epsilon_{+3} | \mathfrak{F}_T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \left[\hat{h}_{T+2 | \mathfrak{F}_T} \right] \quad (\text{A1.124})$$

$$\hat{h}_{\epsilon_{+2} | \mathfrak{F}_T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \left[\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_0 \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_1 \hat{e}_T^2 \right] \quad (\text{A1.125})$$

$$\hat{h}_{\epsilon_{+2} | \mathfrak{F}_T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_0 \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_0 \hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_1 \hat{e}_T^2 \quad (\text{A1.126})$$

$$\hat{h}_{\epsilon_{+2} | \mathfrak{F}_T} = \hat{\alpha}_0 \left(1 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_1^2 \right) + \hat{\alpha}_1 \hat{e}_T^2 \quad (\text{A1.127})$$

Generalización

$$\hat{h}_{\epsilon_{+k} | \mathfrak{F}_T} = \hat{\alpha}_0 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \hat{\alpha}_1^i \right) + \hat{\alpha}_1 \hat{e}_T^2 \quad (\text{A1.128})$$

$$\hat{e}_T^2 = \left(r_T - \hat{\mu} \right)^2 \quad (\text{A1.129})$$

$$S = 1 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_1^2 + \dots + \hat{\alpha}_1^k \quad (\text{A1.130})$$

$$\hat{\alpha}_1 S = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_1^2 + \dots + \hat{\alpha}_1^{\hat{k}+1} \quad (\text{A1.131})$$

$$S - \hat{\alpha}_1 S = 1 - \hat{\alpha}_1^{\hat{k}+1} \quad (\text{A1.132})$$

$$S = \frac{1 - \hat{\alpha}_1^{\hat{k}+1}}{1 - \hat{\alpha}_1} \quad (\text{A1.133})$$

$$\hat{h}_{\epsilon_{+k} | \mathfrak{F}_T} = \hat{\alpha}_0 \left(\frac{1 - \hat{\alpha}_1^{\hat{k}+1}}{1 - \hat{\alpha}_1} \right) + \hat{\alpha}_1 \hat{e}_T^2 \quad (\text{A1.134})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{h}_{\epsilon_{+k} | \mathfrak{F}_T} = \frac{\hat{\alpha}_0}{1 - \hat{\alpha}_1} \quad \text{Varianza marginal constante} \quad (\text{A1.135})$$

La varianza converge a un valor que esta en función de los parámetros alfa estimados por el modelo Arch.

ANEXO 2
Propiedades de Modelos GARCH
Auto regresivos de varianza condicional generalizados

Éstos modelos son una generalización de los modelos Arch en la que se adiciones términos que representan la contribucion de la varianza pasada en la varianza actual y son modelos más parsimoniosos, con menos términos o parámetros.

Modelos GARCH (p,q)

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \text{ iid } D(0,1) \tag{A2.1}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k (r_{t-k} - \mu_{t-k})^2 + \sum_{k=1}^q \gamma_k h_{t-k} \tag{A2.2}$$

Modelos GARCH (1,1)

$$r_t = \mu + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_t \text{ iid } D(0,1) \tag{A2.2}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (r_{t-1} - \mu_{t-1})^2 + \gamma_1 h_{t-1} \tag{A2.4}$$

*H es una funcion predecible del pasado
Para estacionariedad se pide que:*

$$\begin{aligned} \alpha_0 &> 0 \\ \alpha_1 &\geq 0 \\ \gamma_1 &\geq 0 \\ \alpha_1 + \gamma_1 &< 1 \end{aligned} \tag{A2.5}$$

Estudio del Proceso $\hat{e}_t = r_t - \hat{\mu}$

Esperanza del proceso $\hat{e}_t = r_t - \hat{\mu} = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$

$$E(\hat{e}_t) = E(\sqrt{h_t} \varepsilon_t) \tag{A2.6}$$

$$E(\hat{e}_t) = E[E(\sqrt{h_t} \varepsilon_t | \mathfrak{F}_{t-1})] \tag{A2.7}$$

h_t es predecible en funcion de \mathfrak{F}_{t-1}

$$E(\hat{e}_t) = E[\sqrt{h_t} E(\varepsilon_t | \mathfrak{F}_{t-1})] \tag{A2.8}$$

ε_t es ruido blanco iid

$$E(\hat{e}_t | \mathfrak{F}_{t-1}) = 0 \tag{A2.9}$$

$$E(\hat{e}_t) = E[\sqrt{h_t} \times 0] = 0 \tag{A2.10}$$

Varianza del proceso $\hat{e}_t = r_t - \hat{\mu}$

Varianza condicional

$$Var(\hat{e}_t | \mathfrak{F}_{t-1}) = Var(\sqrt{h_t} \varepsilon_t | \mathfrak{F}_{t-1}) \tag{A2.11}$$

$$\text{Var}\left(\hat{e}_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right) = h_t \text{Var}\left(\epsilon_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right) \quad (\text{A2.12})$$

$$\text{Var}\left(\hat{e}_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right) = h_t \quad (\text{A2.13})$$

Varianza marginal

$$\text{Var}\left(\hat{e}_t\right) = E\left[\text{Var}\left(\hat{e}_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right)\right] \quad (\text{A2.14})$$

$$\text{Var}\left(\hat{e}_t\right) = E\left[h_t\right] \quad (\text{A2.15})$$

$$\text{Var}\left(\hat{e}_t\right) = E\left[\alpha_0 + \alpha_1 \left(\epsilon_{t-1} - \mu_{t-1}\right)^2 + \gamma_1 h_{t-1}\right] \quad (\text{A2.16})$$

$$\text{Var}\left(\hat{e}_t\right) = E\left[\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_t^2 + \gamma_1 h_{t-1}\right] \quad (\text{A2.17})$$

$$\text{Var}\left(\hat{e}_t\right) = \alpha_0 + \alpha_1 E\left[\left(\hat{e}_t\right)^2\right] + \gamma_1 E\left[h_{t-1}\right] \quad (\text{A2.18})$$

$$\text{Var}\left(\hat{e}_t\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \text{Var}\left[\left(\hat{e}_t\right)\right] + \gamma_1 \text{Var}\left[e_{t-1}\right] \quad (\text{A2.19})$$

$$\text{Var}\left(\hat{e}_t\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \text{Var}\left[\left(\hat{e}_t\right)\right] + \gamma_1 \text{Var}\left[\hat{e}_t\right] \quad (\text{A2.20})$$

$$\text{Var}\left(\hat{e}_t\right) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \gamma_1} \quad (\text{A2.21})$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \gamma_1 \geq 0 \\ \alpha_1 + \gamma_1 < 1 \end{aligned} \quad (\text{A2.22})$$

Covarianza

$$\text{Cov}\left(\hat{e}_t, \hat{e}_{t+k}\right) = E\left(\hat{e}_t \hat{e}_{t+k}\right) - E\left(\hat{e}_t\right)E\left(\hat{e}_{t+k}\right) \quad (\text{A2.23})$$

$$\text{Cov}\left(\hat{e}_t, \hat{e}_{t+k}\right) = E\left(\hat{e}_t \hat{e}_{t+k}\right) \quad (\text{A2.24})$$

$$\text{Cov}\left(\hat{e}_t, \hat{e}_{t+k}\right) = E\left[\sqrt{h_t} \epsilon_t \sqrt{h_{t+k}} \epsilon_{t+k} \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] \quad (\text{A2.25})$$

$$\text{Cov}\left(\hat{e}_t, \hat{e}_{t+k}\right) = E\left[\sqrt{h_t} \epsilon_t \sqrt{h_{t+k}} E\left[\epsilon_{t+k} \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right]\right] \quad (\text{A2.26})$$

$$\text{Cov}\left(\hat{e}_t, \hat{e}_{t+k}\right) = 0 \quad (\text{A2.27})$$

Curtosis

$$E[e_t^{\wedge 4}] = E[E_t^2 \varepsilon_t^4] \quad (A2.28)$$

$$E[e_t^{\wedge 4}] = E[E_t^2 \varepsilon_t^4] \quad (A2.29)$$

$$E[e_t^{\wedge 4}] = E[E[E_t^2 \varepsilon_t^4 | \mathfrak{F}_{t-1}]] \quad (A2.30)$$

$$E[e_t^{\wedge 4}] = E[E_t^2 E[\varepsilon_t^4 | \mathfrak{F}_{t-1}]] \quad (A2.31)$$

$$E[e_t^{\wedge 4}] = E[E_t^2 E[\varepsilon_t^4 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-k}]] \quad (A2.32)$$

$$\varepsilon_t^4 \perp r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-k} \text{ son independientes} \quad (A2.33)$$

$$E[e_t^{\wedge 4}] = E[E_t^2 E[\varepsilon_t^4]] \quad (A2.34)$$

Porque $E[\varepsilon_t^4]$ es un numero

$$E[e_t^{\wedge 4}] = E[E_t^2] E[\varepsilon_t^4] \quad (A2.35)$$

Estudio del primer factor

$$E[E_t^2] = E[\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \gamma_1 h_{t-1}]^2 \quad (A2.36)$$

$$E[E_t^2] = E[\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1^2 h_{t-1}^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + 2\alpha_0 \gamma_1 h_{t-1} + 2\alpha_1 \varepsilon_{t-1} \gamma_1 h_{t-1}] \quad (A2.37)$$

Por estacionariedad

$$E[E_t^2] = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 E[\varepsilon_{t-1}^2] + \gamma_1^2 E[h_{t-1}^2] + 2\alpha_0 \alpha_1 E[\varepsilon_{t-1}] + 2\alpha_0 \gamma_1 E[h_{t-1}] + 2\alpha_1 \gamma_1 E[\varepsilon_{t-1} h_{t-1}] \quad (A2.38)$$

$$E[E_t^2] = \left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 E[E_t^2] + \gamma_1^2 E[h_{t-1}^2] + 2\alpha_0 \alpha_1 \frac{\hat{\alpha}_0}{1 - \hat{\alpha}_1} + 2\alpha_0 \gamma_1 \frac{\hat{\alpha}_0}{1 - \hat{\alpha}_1} + 2\alpha_1 \gamma_1 E[E_t^2] \right) \quad (A2.39)$$

El ultimo termino se redujo así

$$E[\varepsilon_{t-1} h_{t-1}] = E[E[\varepsilon_{t-1} h_{t-1} | \mathfrak{F}_{t-2}]] \quad (A2.40)$$

$$E[\varepsilon_{t-1} h_{t-1}] = E[E_{t-1} E[\varepsilon_{t-1}^2 | \mathfrak{F}_{t-2}]] \quad (A2.41)$$

$$E[\varepsilon_{t-1} h_{t-1}] = E[E_{t-1} h_{t-1} E[\varepsilon_{t-1}^2 | \mathfrak{F}_{t-2}]] \quad (A2.42)$$

$$E[\varepsilon_{t-1} h_{t-1}] = E[E_{t-1}^2] \quad (A2.43)$$

Volviendo a la ec. 183 agrupamos $E[E_t^2]$ en el miembro izquierdo

$$E[E_t^2] - \alpha_1^2 E[E_t^2] - \gamma_1^2 E[h_{t-1}^2] - 2\alpha_1 \gamma_1 E[E_t^2] = \left(\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 \frac{\hat{\alpha}_0}{1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1} + 2\alpha_0 \gamma_1 \frac{\hat{\alpha}_0}{1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1} \right)$$

(A2.44)

$$E \left[\left(-\alpha_1^2 E \left[\gamma_1^2 - 2\alpha_1 \gamma_1 \right] \right) \right] = \left(\alpha_0^2 + \frac{2\alpha_0^2 \alpha_1 + 2\alpha_0^2 \gamma_1}{1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1} \right) \quad (\text{A2.190})$$

$$E \left[\left(-\alpha_1^2 E \left[\gamma_1^2 - 2\alpha_1 \gamma_1 \right] \right) \right] = \frac{\alpha_0^2 \left(1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1 \right)}{1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1} \quad (\text{A2.45})$$

Despejamos $E \left[\gamma_1^2 \right]$

$$E \left[\gamma_1^2 \right] = \frac{\alpha_0^2 \left(1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1 \right)}{\left(1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1 \right) \left(-\alpha_1^2 E \left[\gamma_1^2 - 2\alpha_1 \gamma_1 \right] \right)} \quad (\text{A2.46})$$

Por lo tanto en 2.180

$$E \left[\gamma_1^4 \right] = \frac{\alpha_0^2 \left(1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1 \right) E \left[\gamma_1^4 \right]}{\left(1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1 \right) \left(-\alpha_1^2 E \left[\gamma_1^4 - 2\alpha_1 \gamma_1 \right] \right)} \quad (\text{A2.47})$$

Si pedimos normalidad $E \left[\gamma_1^4 \right] = 3$

$$E \left[\gamma_1^4 \right] = \frac{3\alpha_0^2 \left(1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1 \right)}{\left(1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1 \right) \left(-3\alpha_1^2 - \gamma_1^2 - 2\alpha_1 \gamma_1 \right)} \quad (\text{A2.48})$$

$$E \left[\gamma_1^4 \right] = \frac{3\alpha_0^2 \left(1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1 \right)}{\left(1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1 \right) \left(-2\alpha_1^2 - \alpha_1 + \gamma_1 \right)} \quad (\text{A2.49})$$

Finalmente la curtosis

$$k = \frac{E \left[\gamma_1^4 \right]}{\left(\text{Var} \left[\gamma_1 \right] \right)^2} \quad (\text{A2.50})$$

$$k = \frac{\frac{3\alpha_0^2 \left(1 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)}{\left(1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1 \right) \left(-2\alpha_1^2 - \alpha_1 + \gamma_1 \right)}}{\frac{\alpha_0^2}{\left(-\alpha_1 - \gamma_1 \right)^2}} \quad (\text{A2.51})$$

$$k = \frac{3 \left(1 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \left(-\alpha_1 - \gamma_1 \right)}{\left(-2\alpha_1^2 - \alpha_1 + \gamma_1 \right)} \quad (\text{A2.52})$$

$$k = \frac{3 \left(1 - \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^2 \right)}{\left(-2\alpha_1^2 - \alpha_1 + \gamma_1 \right)} > 3 \quad (\text{A2.53})$$

Pedimos que $k > 3$ para que \hat{e}_t tenga colas mas pesadas que la normal

$$\left(1 - \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^2 \right) > \left(-2\alpha_1^2 - \alpha_1 + \gamma_1 \right) \quad (\text{A2.54})$$

Al susutituir los valores de los parámetros si se cumple la desigualdad 2.200 aseguramos que la distribución de los residuales de los rendimientos respecto a su media, calculados bajo un modelo Garch tienen colas mas pesadas que la normal que se apega a las evidencias empiricas de la serie financiera.

Condiciones de estacionariedad sobre las marginales

$$\hat{e}_t = r_t - \mu \quad (\text{A2.55})$$

$$E \left[\hat{e}_t \mid \mathfrak{F}_{t-1} \right] = 0 \quad (\text{A2.56})$$

$$E \left[\hat{e}_t^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1} \right] = h_t = \text{Var} \left(\hat{e}_t \mid \mathfrak{F}_{t-1} \right) \quad (\text{A2.57})$$

$$E \left[\hat{e}_t^2 \right] = \text{Var} \left(\hat{e}_t \right) = E \left[\hat{e}_t^2 \right] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \gamma_1} \quad (\text{A2.58})$$

$$k > 3 \quad (\text{A2.59})$$

$$\text{Cov} \left(\hat{e}_t, \hat{e}_{t+k} \right) = 0 \quad (\text{A2.60})$$

Propiedades del proceso $\hat{e}_t^2 = \alpha_0 - \mu \hat{e}_t$

Esperanza condicional

$$E \left[\hat{e}_t^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1} \right] = h_t \quad (\text{A2.61})$$

$$E \left[\hat{e}_t^2 \right] = E \left[\hat{e}_t^2 \right] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \gamma_1} \quad (\text{A2.62})$$

Varianza condicional

$$\text{Var} \left[\hat{e}_t^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1} \right] = E \left[\left(\hat{e}_t^2 - E \left[\hat{e}_t^2 \right] \right)^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1} \right] \quad (\text{A2.63})$$

$$\text{Var}\left[\hat{e}_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] = E\left[\hat{e}_t^4 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] - \left(E\left[\hat{e}_t^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right]\right)^2 \quad (\text{A2.64})$$

$$\text{Var}\left[\hat{e}_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] = E\left[h_t^2 \varepsilon_t^4 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] \sigma_{\varepsilon_t}^2 \quad (\text{A2.65})$$

$$\text{Var}\left[\hat{e}_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] = h_t^2 E\left[\varepsilon_t^4\right] \sigma_{\varepsilon_t}^2 \quad (\text{A2.66})$$

2.4.2.2.3 Varianza marginal

$$\text{Var}\left[\hat{e}_t\right] = E\left[\text{Var}\left(\hat{e}_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right)\right] + \text{Var}\left(E\left[\hat{e}_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right]\right) \quad (\text{A2.67})$$

$$\text{Var}\left[\hat{e}_t\right] = E\left[h_t^2 E\left[\varepsilon_t^4\right] \sigma_{\varepsilon_t}^2\right] + \text{Var}\left[h_t\right] \quad (\text{A2.68})$$

$$\text{Var}\left[\hat{e}_t\right] = E\left[h_t^2\right] E\left[\varepsilon_t^4\right] \sigma_{\varepsilon_t}^2 + E\left[h_t\right] \sigma_{\varepsilon_t}^2 \quad (\text{A2.69})$$

$$\text{Var}\left[\hat{e}_t\right] = E\left[h_t^2\right] E\left[\varepsilon_t^4\right] \sigma_{\varepsilon_t}^2 \quad (\text{A2.70})$$

Correlaciones

$$\text{Corr}\left(\hat{e}_t, \hat{e}_{t+k}\right) \propto \sigma_{\varepsilon_t} + \gamma_1^{|k|} \quad (\text{A2.71})$$

Prueba de que el proceso \hat{e}_t es un modelo autorregresivos y de promedios móviles

$$\left(\hat{e}_t\right)_{t=1}^{\infty} = \text{ARMA}(1,1) \quad (\text{A2.72})$$

$$v_t = \hat{e}_t - h_t \quad (\text{A2.73})$$

$$v_t = \hat{e}_t - \left(\alpha_0 + \alpha_1 \hat{e}_{t-1} + \gamma_1 h_{t-1}\right) \quad (\text{A2.74})$$

$$v_t = \hat{e}_t - \left(\alpha_0 + \alpha_1 \hat{e}_{t-1} + \gamma_1 \left(\hat{e}_{t-1} - v_{t-1}\right)\right) \quad (\text{A2.75})$$

$$\hat{e}_t = \left(\alpha_0 + \alpha_1 \hat{e}_{t-1} + \gamma_1 \left(\hat{e}_{t-1} - v_{t-1}\right)\right) + v_t \quad (\text{A2.76})$$

$$\hat{e}_t = \underbrace{\left(\alpha_0 + \alpha_1 \hat{e}_{t-1} + \gamma_1 \hat{e}_{t-1}\right)}_{\text{AR}(1)} + \underbrace{\left(v_t - \gamma_1 v_{t-1}\right)}_{\text{MA}(1)} \quad (\text{A2.77})$$

Covarianza

$$v_t = \hat{e}_t - h_t = h_t \varepsilon_t^2 - h_t = h_t \left(\varepsilon_t^2 - 1\right) \quad (\text{A2.78})$$

$$\text{Cov}\left(\hat{e}_t, v_{t+k}\right) = E\left[h_t v_{t+k}\right] = E\left[h_t \left(\varepsilon_t^2 - 1\right)\right] \quad (\text{A2.79})$$

$$\text{Cov}(\epsilon_t, v_{t+k}) = E \left[\left(\epsilon_t^2 - 1 \right) \widehat{h}_{t+k} \left(\epsilon_{t+k}^2 - 1 \right) \right] \quad (\text{A2.80})$$

$$\text{Cov}(\epsilon_t, v_{t+k}) = E \left[\left(\epsilon_t^2 - 1 \right) \widehat{h}_{t+k} \left(\epsilon_{t+k}^2 - 1 \right) \right] r_{t+k-1}, r_{t+k-2}, \dots = \quad (\text{A2.81})$$

$$\text{Cov}(\epsilon_t, v_{t+k}) = E \left[\left(\epsilon_t^2 - 1 \right) \widehat{h}_{t+k} E \left[\left(\epsilon_{t+k}^2 - 1 \right) \right] \right] r_{t+k-1}, r_{t+k-2}, \dots = \quad (\text{A2.82})$$

$$\text{Cov}(\epsilon_t, v_{t+k}) = E \left[\left(\epsilon_t^2 - 1 \right) \widehat{h}_{t+k} \left(-1 \right) \right] = 0 \quad (\text{A2.83})$$

Estimación de Máxima verosimilitud

Selección de p y q en el modelo GARCH

- AIC
- BIC
- Ensayo y error

Validación del modelo se hace mediante análisis de residuales

$$\hat{e}_t = r_t - \hat{\mu}_t \quad \text{Análisis de residuales} \quad (\text{A2.84})$$

$$\hat{e}_t^* = \frac{\hat{e}_t}{\sqrt{\hat{h}_t}} \quad \text{Análisis residuales estandarizados} \quad (\text{A2.85})$$

Se deben comportar como una muestra aleatoria iid $N(0, 1)$

Graficas para análisis

1.- No correlación

Función de Autocorrelograma de $\hat{e}_t, \hat{e}_t^*, \hat{e}_t^2$

Grafica de \hat{e}_t v.s. tiempo

2.- Homocedasticidad

Grafica de \hat{e}_t^2 v.s. tiempo
Prueba White Lagrange

3.- Normalidad

Prueba Jarque-Bera \hat{e}_t^*
Histograma
Q teórico-Q empírico Plot

Pruebas

Ljung Box: Ruido blanco
Jarque Bera : normalidad
Breush- Pagan : Homocedasticidad

Predicción GARCH (1,1)

Predicción en Rendimientos

$$\hat{r}_{T+k|T} = \hat{E} \left[r_{T+k|T} \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A2.86})$$

Para $k=1$

$$\hat{r}_{T+1|T} = \hat{E} \left[\mu_{T+1} + \sqrt{h_{T+1}} \varepsilon_{T+1} \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A2.87})$$

$$\hat{r}_{T+1|T} = \hat{\mu}_{T+1} + \sqrt{h_{T+1}} \hat{E} \left[\varepsilon_{T+1} \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A2.88})$$

$$\hat{r}_{T+1|T} = \hat{\mu}_{T+1} \quad (\text{A2.89})$$

Para $k=2$

$$\hat{r}_{T+2|T} = \hat{E} \left[\mu_{T+2} + \sqrt{h_{T+2}} \varepsilon_{T+2} \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A2.90})$$

$$\hat{r}_{T+2|T} = \hat{\mu}_{T+2} + \sqrt{h_{T+2}} \hat{E} \left[\varepsilon_{T+2} \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A2.91})$$

$$\hat{r}_{T+2|T} = \hat{\mu}_{T+2} \quad (\text{A2.92})$$

Se puede generalizar

$$\hat{r}_{T+k|T} = \hat{\mu}_{T+k} \quad (\text{A2.93})$$

2.4.4.2 Varianza

$$\hat{h}_{T+k|T} = \hat{E} \left[\hat{h}_{T+k} \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A2.94})$$

Para $k=1$

$$\hat{h}_{T+1|T} = \hat{E} \left[\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_T^2 + \gamma_1 h_T \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A2.95})$$

$$\hat{h}_{T+1|T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \left(\hat{e}_T \right)^2 + \hat{\gamma}_1 \hat{h}_T \quad (\text{A2.96})$$

$$\hat{h}_{T+1|T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \left(\hat{e}_T \right)^2 + \hat{\gamma}_1 \hat{h}_T \quad (\text{A2.97})$$

Para $k=2$

$$\hat{h}_{T+2|T} = \hat{E} \left[\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{T+1}^2 + \gamma_1 h_{T+1} \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A2.98})$$

$$\hat{h}_{T+2|T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \left(\hat{e}_{T+1} \right)^2 + \hat{\gamma}_1 \hat{h}_{T+1|T} \quad (\text{A2.99})$$

$$\hat{h}_{T+2|T} = \hat{E} \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left(\hat{e}_{T+1} \right)^2 + \gamma_1 h_{T+1} \mid \mathfrak{F}_T \right] \quad (\text{A2.100})$$

$$\hat{h}_{T+2|T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{h}_{T+1|T} + \hat{\gamma}_1 \hat{h}_{T+1|T} \quad (\text{A2.101})$$

$$\hat{h}_{T+2|T} = \hat{\alpha}_0 + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \hat{h}_{T+1|T} \quad (\text{A2.102})$$

$$\hat{h}_{T+2T} = \hat{\alpha}_0 + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \hat{h}_{T+1T} \quad (\text{A2.103})$$

Para k=3

$$\hat{h}_{T+3T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{h}_{T+2T} + \hat{\gamma}_1 \hat{h}_{T+2T} \quad (\text{A2.104})$$

$$\hat{h}_{T+3T} = \hat{\alpha}_0 + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \hat{h}_{T+2T} \quad (\text{A2.105})$$

$$\hat{h}_{T+3T} = \hat{\alpha}_0 + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \left(\hat{\alpha}_0 + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \hat{h}_{T+1T} \right) \quad (\text{A2.106})$$

$$\hat{h}_{T+3T} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_0 \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \hat{h}_{T+1T} \quad (\text{A2.107})$$

$$\hat{h}_{T+3T} = \hat{\alpha}_0 \left(1 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^2 \hat{h}_{T+1T} \quad (\text{A2.108})$$

$$\hat{h}_{T+3T} = \hat{\alpha}_0 \left(\hat{\alpha}_0 + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \right) + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^2 \hat{h}_{T+1T} \quad (\text{A2.109})$$

Para k=4

$$\hat{h}_{T+4T} = \hat{\alpha}_0 + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \hat{h}_{T+3T} \quad (\text{A2.110})$$

Sustituyendo el caso de k=3 y reduciendo y agrupando

$$\hat{h}_{T+4T} = \hat{\alpha}_0 \left(\hat{\alpha}_0 + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^2 \right) + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^2 \hat{h}_{T+1T} \quad (\text{A2.111})$$

Se puede generalizar

$$\hat{h}_{T+kT} = \hat{\alpha}_0 + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right) \hat{h}_{T+k-1T} \quad (\text{A2.112})$$

$$\hat{h}_{T+kT} = \hat{\alpha}_0 \left(\sum_{i=0}^{k-2} \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^i \right) + \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)^{k-1} \hat{h}_{T+1T} \quad (\text{A2.113})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\hat{h}_{T+kT} \right) = \hat{\alpha}_0 \left(\frac{1}{1 - \left(\hat{\alpha}_1 + \hat{\gamma}_1 \right)} \right) + 0 * \hat{h}_{T+1T} = \frac{\hat{\alpha}_0}{1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\gamma}_1} \quad (\text{A2.114})$$

Propiedades empíricas que replica y que no replica el modelo GARCH

Si replica

- Colas pesadas
- $\text{Corr}(r_t, r_{t+k}) \geq 0$
- $\text{Corr}(r_t^2, r_{t+k}^2) \geq 0$

No replica

- Asimetría en la distribución

Anexo 3
Tablas de parámetros de los modelos propuestos realizados en STATA

Modelo Arch 1

Cuadro 3.8 Modelo arch 1

```
. arch r,arch(1/1)

(setting optimization to BHHH)
Iteration 0: log likelihood = 13370.392
Iteration 1: log likelihood = 13380.353
Iteration 2: log likelihood = 13382.79
Iteration 3: log likelihood = 13383.727
Iteration 4: log likelihood = 13384.004
(switiching optimization to BFGS)
Iteration 5: log likelihood = 13384.109
Iteration 6: log likelihood = 13384.148
Iteration 7: log likelihood = 13384.15
Iteration 8: log likelihood = 13384.15
Iteration 9: log likelihood = 13384.15

ARCH family regression

Sample: 1 to 4873
Log likelihood = 13384.15
Number of obs = 4873
wald chi2(.) = .
Prob > chi2 = .
```

r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
r						
_cons	.0011243	.0002094	5.37	0.000	.0007138	.0015348
ARCH						
arch						
L1.	.3516531	.0153514	22.91	0.000	.321565	.3817413
_cons	.0001808	3.09e-06	58.46	0.000	.0001747	.0001868

Modelo Arch 2

Cuadro 3.9 Modelo arch2

```
. arch r,arch(1/2) noconstant

(setting optimization to BHHH)
Iteration 0: log likelihood = 13449.507
Iteration 1: log likelihood = 13472.316
Iteration 2: log likelihood = 13477.403
Iteration 3: log likelihood = 13477.563
Iteration 4: log likelihood = 13477.563
(switiching optimization to BFGS)
Iteration 5: log likelihood = 13477.563

ARCH family regression

Sample: 1 to 4873
Log likelihood = 13477.56
Number of obs = 4873
wald chi2(2) = 624.15
Prob > chi2 = 0.0000
```

r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ARCH						
arch						
L1.	.2599999	.0159812	16.27	0.000	.2286774	.2913225
L2.	.2183951	.0149066	14.65	0.000	.1891786	.2476115
_cons	.000147	3.29e-06	44.73	0.000	.0001405	.0001534

Modelo Arch 3

Cuadro 3.10 Modelo arch 3

. arch r,arch(1/3) noconstant

```
(setting optimization to BHHH)
Iteration 0: log likelihood = 13527.647
Iteration 1: log likelihood = 13551.799
Iteration 2: log likelihood = 13556.405
Iteration 3: log likelihood = 13556.521
Iteration 4: log likelihood = 13556.525
(switching optimization to BFGS)
Iteration 5: log likelihood = 13556.525
```

ARCH family regression

```
Sample: 1 to 4873          Number of obs   =    4873
                          Wald chi2(3)        =    715.54
Log likelihood = 13556.53    Prob > chi2      =    0.0000
```

r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ARCH						
arch						
L1.	.217119	.0170883	12.71	0.000	.1836267	.2506114
L2.	.181066	.0142072	12.74	0.000	.1532204	.2089116
L3.	.1653061	.0136413	12.12	0.000	.1385697	.1920426
_cons	.0001232	3.17e-06	38.88	0.000	.000117	.0001294

Modelo Arch 4

Cuadro 3.11 Modelo arch 4

. arch r,arch(1/4) noconstant

```
(setting optimization to BHHH)
Iteration 0: log likelihood = 13543.875
Iteration 1: log likelihood = 13586.095
Iteration 2: log likelihood = 13596.254
Iteration 3: log likelihood = 13596.678
Iteration 4: log likelihood = 13596.702
(switching optimization to BFGS)
Iteration 5: log likelihood = 13596.702
Iteration 6: log likelihood = 13596.702
```

ARCH family regression

```
Sample: 1 to 4873          Number of obs   =    4873
                          Wald chi2(4)        =    774.21
Log likelihood = 13596.7    Prob > chi2      =    0.0000
```

r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ARCH						
arch						
L1.	.2049255	.017475	11.73	0.000	.170675	.2391759
L2.	.1607882	.0130388	12.33	0.000	.1352326	.1863438
L3.	.1581854	.0136804	11.56	0.000	.1313723	.1849986
L4.	.1350462	.0129747	10.41	0.000	.1096163	.160476
_cons	.0001029	3.47e-06	29.68	0.000	.0000961	.0001096

Modelo Arch 5

Cuadro 3.12 Modelo arch 5

```

. arch r,arch(1/5) noconstant
(setting optimization to BHHH)
Iteration 0: log likelihood = 13595.254
Iteration 1: log likelihood = 13635.949
Iteration 2: log likelihood = 13644.345
Iteration 3: log likelihood = 13644.831
Iteration 4: log likelihood = 13644.879
(switching optimization to BFGS)
Iteration 5: log likelihood = 13644.882
Iteration 6: log likelihood = 13644.882

ARCH family regression
Sample: 1 to 4873
Log likelihood = 13644.88
Number of obs = 4873
wald chi2(5) = 836.24
Prob > chi2 = 0.0000

```

r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ARCH						
arch						
L1.	.1833999	.0169829	10.80	0.000	.150114	.2166859
L2.	.1511247	.0126038	11.99	0.000	.1264218	.1758276
L3.	.144695	.0131959	10.97	0.000	.1188314	.1705585
L4.	.1001898	.013327	7.52	0.000	.0740694	.1263102
L5.	.1113988	.01288	8.65	0.000	.0861545	.1366431
_cons	.0000916	3.34e-06	27.46	0.000	.0000851	.0000982

Modelo Garch

Modelo Garch 1,1

Cuadro 3.13 Modelo Garch 1,1

```

. arch r,arch(1/1) garch(1/1) noconstant
(setting optimization to BHHH)
Iteration 0: log likelihood = 13576.996
Iteration 1: log likelihood = 13705.709
Iteration 2: log likelihood = 13770.824
Iteration 3: log likelihood = 13781.861
Iteration 4: log likelihood = 13784.337
(switching optimization to BFGS)
BFGS stepping has contracted, resetting BFGS Hessian (0)
Iteration 5: log likelihood = 13784.981
Iteration 6: log likelihood = 13785.067 (backed up)
Iteration 7: log likelihood = 13785.067 (backed up)
Iteration 8: log likelihood = 13785.067 (backed up)
Iteration 9: log likelihood = 13785.068
Iteration 10: log likelihood = 13785.068

ARCH family regression
Sample: 1 to 4873
Log likelihood = 13785.07
Number of obs = 4873
wald chi2(2) = 89560.71
Prob > chi2 = 0.0000

```

r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ARCH						
arch						
L1.	.0997899	.0046788	21.33	0.000	.0906197	.1089602
garch						
L1.	.8890276	.0054108	164.31	0.000	.8784226	.8996326
_cons	3.81e-06	5.32e-07	7.16	0.000	2.76e-06	4.85e-06

Modelo Garch 2,1

Cuadro 3.14 Modelo Garch 2,1

```
. arch r,arch(1/2) garch(1/1) noconstant
(setting optimization to BHHH)
Iteration 0: log likelihood = 13575.501
Iteration 1: log likelihood = 13736.549
Iteration 2: log likelihood = 13774.986
Iteration 3: log likelihood = 13790.787
Iteration 4: log likelihood = 13793.296
(switiching optimization to BFGS)
Iteration 5: log likelihood = 13793.46
BFGS stepping has contracted, resetting BFGS Hessian (0)
Iteration 6: log likelihood = 13793.473
Iteration 7: log likelihood = 13793.473 (backed up)
Iteration 8: log likelihood = 13793.474 (backed up)
Iteration 9: log likelihood = 13793.476 (backed up)
Iteration 10: log likelihood = 13793.476 (backed up)
Iteration 11: log likelihood = 13793.476
Iteration 12: log likelihood = 13793.476

ARCH family regression

Sample: 1 to 4873
Log likelihood = 13793.48
Number of obs = 4873
wald chi2(3) = 157245.73
Prob > chi2 = 0.0000
```

	r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ARCH							
	arch						
	L1.	.1637792	.0139732	11.72	0.000	.1363922	.1911662
	L2.	-.0838453	.0152482	-5.50	0.000	-.1137313	-.0539594
	garch						
	L1.	.9127411	.0056132	162.61	0.000	.9017395	.9237426
	_cons	2.63e-06	4.42e-07	5.94	0.000	1.76e-06	3.49e-06

Modelo Garch 1,2

Cuadro 3.15 Modelo Garch 1,2

```

. arch r,arch(1/1) garch(1/2) noconstant
(setting optimization to BHHH)
Iteration 0: log likelihood = 13654.524
Iteration 1: log likelihood = 13751.735
Iteration 2: log likelihood = 13781.978
Iteration 3: log likelihood = 13787.459
Iteration 4: log likelihood = 13788.364
(switiching optimization to BFGS)
BFGS stepping has contracted, resetting BFGS Hessian (0)
Iteration 5: log likelihood = 13788.67
Iteration 6: log likelihood = 13788.673 (backed up)
Iteration 7: log likelihood = 13788.689 (backed up)
Iteration 8: log likelihood = 13788.697 (backed up)
Iteration 9: log likelihood = 13788.722
BFGS stepping has contracted, resetting BFGS Hessian (1)
Iteration 10: log likelihood = 13788.75
Iteration 11: log likelihood = 13788.75 (backed up)
Iteration 12: log likelihood = 13788.75 (backed up)
Iteration 13: log likelihood = 13788.75 (backed up)
Iteration 14: log likelihood = 13788.75
(switiching optimization to BHHH)
Iteration 15: log likelihood = 13788.75

ARCH family regression

Sample: 1 to 4873      Number of obs      =      4873
                      Wald chi2(3)      =     55335.05
Log likelihood = 13788.75      Prob > chi2        =      0.0000

```

	r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ARCH							
	arch						
	L1.	.1288504	.012918	9.97	0.000	.1035316	.1541691
	garch						
	L1.	.5394111	.097319	5.54	0.000	.3486695	.7301528
	L2.	.3183068	.0858261	3.71	0.000	.1500908	.4865228
	_cons	4.68e-06	7.42e-07	6.31	0.000	3.23e-06	6.14e-06

Modelo Garch 2,2

Cuadro 3.16 Modelo Garch 2,2

ARCH family regression

Sample: 1 to 4873

Log likelihood = 13806.75

Number of obs = 4873
 wald chi2(4) = 7.83e+07
 Prob > chi2 = 0.0000

r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ARCH						
arch						
L1.	.1331371	.007279	18.29	0.000	.1188705	.1474038
L2.	-.1291673	.007128	-18.12	0.000	-.143138	-.1151966
garch						
L1.	1.761775	.020508	85.91	0.000	1.72158	1.80197
L2.	-.7660324	.0196773	-38.93	0.000	-.8045992	-.7274657
_cons	8.61e-08	3.33e-08	2.58	0.010	2.07e-08	1.51e-07

Modelo GJR

Modelo GJR 1,1,1

Cuadro 3.17 Modelo GJR

ARCH family regression

Sample: 1 to 4873

Log likelihood = 13869.26

Number of obs = 4873
 wald chi2(3) = 77248.32
 Prob > chi2 = 0.0000

r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ARCH						
arch						
L1.	.1794702	.0092432	19.42	0.000	.1613539	.1975864
tarch						
L1.	-.1432496	.0087839	-16.31	0.000	-.1604657	-.1260336
garch						
L1.	.8805762	.0064245	137.06	0.000	.8679843	.893168
_cons	5.16e-06	5.61e-07	9.21	0.000	4.07e-06	6.26e-06

Modelo E-Garch

.arch r,earch(1/1) egarch(1/1) noconstant

Cuadro 3.26 *parametros del Modelo Egarch*

Iteration 24: log likelihood = **13871.081**

ARCH family regression

sample: **1 to 4872**

Number of obs = **4872**

wald chi2(1) = **371.19**

_log likelihood = **13871.08**

Prob > chi2 = **0.0000**

r	Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ARCH						
earch						
L1.	-.0998121	.0051807	-19.27	0.000	-.109966	-.0896581
earch_a						
L1.	.1887507	.0093926	20.10	0.000	.1703415	.20716
egarch						
L1.	.9734042	.0024517	397.03	0.000	.9685989	.9782095
_cons	-.2154664	.021009	-10.26	0.000	-.2566432	-.1742895