Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

EQUILIBRIO COURNOT-WALRAS COMO UN EQUILIBRIO PERFECTO EN SUBJUEGOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

MARIANA GARCÍA GUTIÉRREZ

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. MARÍA DE LA PALOMA ZAPATA LILLO

2011

Hoja de datos del jurado

Datos del alumno García Gutiérrez Mariana Teléfono: 55 22 48 15 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrerra: Matemáticas Número de cuenta: 40607152-7
Datos del tutor M. en C. María de la Paloma Zapata Lillo
Datos del sinodal 1 Dr. Jorge Ruiz Moreno
Datos del sinodal 2 M. en C. Salvador Ferrer Ramírez
Datos del sinodal 3 Act. Claudia Villegas Azcorra
Datos del sinodal 4 Mat. César Eduardo Sousa Mondragón
Datos del trabajo escrito Equilibrio Cournot-Walras como un equilibrio perfecto en subjuegos 89p 2011

A Dios

A mis padres

A la vida

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi asesora de tesis la profesora Paloma Zapata Lillo por su apoyo, tiempo y gran paciencia que me brindó durante el desarrollo de este trabajo. De igual manera a mis asesores Claudia Villegas, Jorge Ruiz y Salvador Ferrer por su amabilidad, apoyo y observaciones. A mis padres por su gran apoyo y enorme paciencia durante el desarrollo de mi tesis.

A mis profesores de la facultad, los cuales en su gran mayoría me compartieron su amor por la ciencia, sirvieron como un ejemplo a seguir y reafirmaron en mi la idea de que es posible contruir un México mejor.

A todos mis amigos y compañeros de la facultad sin los cuales esta etapa de mi vida no hubiera sido tan maravillosa como lo fue.

Introducción

Desde hace muchos años la modelación del comportamiento humano ha significado un desafío para la ciencia, de igual manera la interrogante sobre la manera de relacionarse y las posibles modificaciones del comportamiento que los individuos presentan por la interacción entre ellos no se ha quedado atrás.

Como una posible respuesta a esta búsqueda surgió la rama de las matemáticas conocida como Teoría de Juegos. Esta rama, que al principio se desarrolló como una herramienta para modelar cierto tipo de comportamientos por parte de los individuos en contextos de repartición de recursos y elecciones económicas, ahora es utilizadas en un sin número de áreas sociales y de ciencias exactas, ya que por su metodología es posible modelar fenoménos en los que la ganancia o resultado que pueda obtener un agente es afectado de manera directa por las decisiones de todos los demás involucrados en el problema.

Como una herramienta de gran utilidad dentro de la economía este trabajo esta enfocado a los modelos de economías de intercambio puro con una perspectiva de teoría de juegos, describiendo los equilibrios económicos de los modelos como equilibrios de Nash de su respectivo juego.

Nuestro objetivo es mostrar una nueva manera de abordar el problema de la fundamentación del equilibrio Cournot-Walras en una economía de intercambio puro. El nombre de este equilibrio proviene del hecho de que, en una economía de intercambio puro, cierto sector de los consumidores se comporta de manera estratégica o “a la Cournot” mientras que la parte restante de los consumidores se comporta de manera competitiva o “a la Walras”.

Diferentes versiones de este problema han sido abordadas por distintos autores; por ejemplo, uno de los primeros planteamientos fue desarrollado en 1972 por Gabszewicz y Vial [8], ellos propusieron un modelo de una economía de propiedad privada en donde existía un número reducido de empresa mientras que el número de consumidores era mucho mayor, de esta manera definieron el equilibrio de un juego no cooperativo en donde las empresas se comportaban de manera estratégica mientras los consumidores mostraban un comportamiento competitivo. Acuñando con esto el término del equilibrio Cournot-Walras.

No fue sino hasta 1991 que Codognato y Gabszewicz [6] iniciaron la linea de investigación del equilibrio Cournot-Walras en economías de intercambio puro, su propuesta consistía en el desarrollo de un juego con un conjunto de pocos consumidores, denominados oligopolistas, comportandose de manera estratégica y otro conjunto con un número muy grande de “pequeños” consumidores comportandose competitivamente. Este planteamiento logró resolver ciertos problemas que el modelo de Gabszewicz y Vial enfrentaron, pero, aún así, el problema de la falta de explicación para el comportamiento de los consumidores dependiendo del sector al que permanecieran no lograba ser resuelto.

Por otro lado en 1980 Okuno, Postlewaite y Roberts [10] propusieron una fundamentación para el comportamiento de los consumidores considerando un equilibrio al que nosotros durante el trabajo nos referiremos como equilibrio del modelo generalizado de Shapley o equilibrio Cournot-Nash. Este modelo desarrollado dentro de una economía de intercambio puro incluía como herramienta el uso de conjuntos atómicos y no atómicos de consumidores para explicar la diferenciación de comportamientos que se observaba en el equilibrio Cournot-Walras, proponiendo un comportamiento estratégico para todos los consumidores. La linea de investigación a la que este trabajo pertenece fue iniciada en 1977 por el trabajo de Shapley y Shubik [11].

De manera general, el trabajo de Shapley y Shubik planteaba un juego de una etapa en una economía de intercambio puro en donde los consumidores se comportaban de manera estratégica al intercambiar entre ellos sus dotaciones iniciales, obteniendo un pago igual a la utilidad obtenida por sus canastas de bienes finales.

Con estos dos modelos en mente, en 1995 Codognato [5] comparó el conjunto de equilibrios del modelo generalizado de Shapley propuesto por Okuno, Postlewaite y Roberts con el modelo de Codognato y Gabszewicz, mostrando que los conjuntos de equilibrios de estos dos modelos no necesariamente coincidían. Esta disimilitud podría tener sus bases en dos hechos. El primero consiste en que el equilibrio Cournot-Walras, como se verá en el trabajo, posee una naturaleza intrínseca de dos etapas, mientras que el modelo generalizado de Shapley se desarrolla únicamente en una. Y en segundo lugar la diferenciación de comportamientos por parte de los consumidores en el modelo de Codognato y Gabszewicz contrapuesto al comportamiento competitivo uniforme que se tiene en el modelo generalizado de Shapley.

Siguiendo esta linea de pensamiento en este trabajo mostraremos la versión generalizada del modelo de Shapley y la compararemos con una nueva versión del modelo de Shapley a la Cournot-Walras propuesta en 2008 por Busseto, Codognato y Ghosal [4] concluyendo, de manera semejante a como lo hizo en 1995 Codognato, que el conjunto de equilibrios de estos dos modelos no necesarimente coinciden.

Partiendo de esto suponemos que la no equivalencia se da por la diferencia de etapas en que se desarrolla cada uno de los modelos como se comentó arriba. Con el fin de resolver este problema planteamos una redefinición del modelo generalizado de Shapley como un juego de dos etapas en donde los grandes consumidores toman sus decisiones en la primera etapa y los pequeños lo hacen en la segunda. Con esta redefinición y resolviendo algunos otros detalles resultantes afirmamos que el conjunto de equilibrios de nuestro modelo de Shapley a la Cournot-Walras coincide con el conjunto de equilibrios de la redefinición del modelo generalizado de Shapley de dos etapas.

Para su clara comprensión y desarrollo de manera ordenada de los temas, el trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera. En la primera parte mostramos la teoría concerniente a los consumidores y la empresas, continuando con el desarrollo de dos diferentes modelos de economías Walrasianas: la de intercambio puro y la de propiedad privada. En la segunda parte damos un pequeño recorrido por los conceptos básicos de los juegos rectangulares y extensivos, se incluye también el desarrollo de dos importante modelos: El modelo del duopolio de Cournot y el modelo de Stackelberg. En la tercera parte, con el fin de integrar todas las ideas mencionadas, presentamos el modelo propuesto por Shapley y Shubik en 1977; a partir de él derivamos dos diferentes replanteamientos y describimos sus conjuntos de equilibrios. En el capítulo 4 comparamos dos de los modelos desarrollados con el fin de plantear y probar nuestro teorema final de equivalencia entre sus conjuntos de equilibrios. Finalmente en los apéndices 1 y 2 se encontrarán algunas definiciones y proposiciones matemáticas de nivel intermedio usadas a lo largo de este trabajo y las demostraciones de todas las proposiciones, lemas y el corolario enunciados durante los capítulos del trabajo, respectivamente.

Capítulo 1

Equilibrio Walrasiano

En esta primera sección estudiaremos los conceptos básicos de la teoría del equilibrio general, es decir, definimos los elementos y agentes que intervienen en un mercado y que son la base de los modelos que desarrollaremos más adelante.

1.1. Espacio de bienes

La economía de mercado que describiremos consta en primer lugar de un espacio de bienes, los cuales se quieren intercambiar, comprar o vender según sea el caso; por otra parte es necesario que haya demandantes de dichos bienes, los cuales denominaremos consumidores, y como es de imaginarse nuestros últimos agentes son los encargados de la producción y oferta de los bienes, estas son las empresas. Con los primeros dos elementos descritos es posible construir una economía de intercambio puro, a este tipo de economía se limita esencialmente este trabajo. Por otro lado, si agregamos a las empresas obtendremos una economía con producción, con fines ilustrativos únicamente analizaremos de manera superficial esta última.

Definición 1.1. *El espacio de bienes X^l es un subconjunto de la región positiva de un espacio Euclídeo l-dimensional $\mathbb{R}^l$, donde l nos representa el número de bienes que estamos considerando en nuestro análisis, es decir $X^l \subseteq \mathbb{R}^l_+$.*

Definición 1.2. *Una asignación es un vector $x \in X^l$ donde la entrada x_i del vector x nos indica la cantidad correspondiente del bien i, para $i = 1, ..., l$.*

Estos vectores serán usados en el estudio de cada uno de los agentes del mercado, pero en cada caso con un enfoque diferente; para el consumidor los llamaremos canastas de bienes y representarán en algunos casos las demandas de cada uno de los bienes por el consumidor. Para el caso de la empresa nos podrán representar la oferta o producción de cada uno de los bienes, así como un vector que represente la demanda de bienes necesaria para cierta producción o los planes de produccción de la empresa.

Una vez dicho esto sobre el espacio de bienes podemos pasar al análisis de los consumidores, a los que para su simplificación estudiaremos individualmente.

1.2. El consumidor

1.2.1. Relaciones de preferencia

No es muy difícil imaginar el papel y comportamiento que desempeñan los consumidores dentro de una economía, ya que dicho rol lo hemos jugado varias veces a lo largo de nuestra vida, a continuación fijaremos los axiomas base y seguiremos la idea intuitiva que poseemos de dicho comportamiento.

Supongamos que los gustos del consumidor están resumidos por una relación binaria llamada relación de preferencia y que es denotada por $\succeq$. Donde el operando $\succeq$ se lee como "al menos tan bueno como", es decir, dadas dos canastas de bienes $x, y \in X^l$ la expresión $x \succeq y$ se lee como x es al menos tan bueno como y. De lo anterior definimos las siguientes relaciones.

- Si el consumidor prefiere débilmente la canasta x a la canasta y, $x \succeq y$, y al mismo tiempo prefiere débilmente la canasta y a la canasta y, $y \succeq x$, decimos que es indiferente entre ambas canastas, y lo denotamos como $x \sim y$.
- Si el consumidor prefiere débilmente la canasta x a la canasta y, $x \succeq y$, y al mismo tiempo no prefiere estrictamente la canasta x a la canasta y, $\neg x \succeq y$, decimos que prefiere estrictamente la canasta x a la canasta y y lo denotamos por $x \succ y$.

Al definir estas relaciones de preferencia creamos un sistema, el cual, con el fin de hacerlo consistente deberá cumplir los siguientes axiomas. Decimos que $\forall\, x, y, z \in X^l$.

Axioma 1 (Axioma de completitud). *Siempre es posible comparar dos canastas cualesquiera, esto es, dadas x y y se cumple que $x \succeq y$ o $y \succeq x$ o ambas cosas, en cuyo caso, se dice que el consumidor es indiferente entre las canastas.*

Axioma 2 (Axioma de transitividad). *Si se cumple que $x \succeq y$ y $y \succeq z$ entonces afirmamos que $x \succeq z$.*

Axioma 3 (Axioma de continuidad). *Dada una canasta x si definimos al conjunto "al menos tan bueno como x" como $A(x) = \{y \mid y \succeq x\}$ y al conjunto "no mejor que x" como $B(x) = \{y \mid x \succeq y\}$ tenemos que $A(x)$ y $B(x)$ son cerrados.*

Estos axiomas derivados de la relación $\succeq$son llamados a veces axiomas de la teoría del consumidor, nos describen un comportamiento "racional" del consumidor el cual es uno de los supuestos más fuertes en la microeconomía.[1]

Dentro de las preferencias nos ocuparemos únicamente del tipo denomindao regulares o monótonas, en las cuales siempre supondremos que más es mejor, es decir, estaremos hablando estrictamente de bienes, sin llegar al punto de saciedad. Concretamente si tenemos dos canastas x, $y \in X^l$ donde y contiene al menos la misma cantidad de todos los bienes contenidos en la canasta x y más de al menos uno de ellos, entonces $y \succ x$.

¿Puede un consumidor ser indiferente entre varias canastas de bienes? ¡Por supuesto que sí! de hecho así es como delimitaremos las regiones de indiferencia. Decimos que la clase de indiferencia de la canasta $x \in X^l$ es el conjunto resultante de $A(x) \cap B(x)$.

Hasta el momento sabemos como comparar pares de canastas, pero que pasaría si quisieramos hacer una ordenación de todas ellas en la que fácilmente pudieramos saber cuál canasta es preferida dado cualquier conjunto de canastas. El economista francés Gerard Debreu demostró que los axiomas de completitud, transitividad y continuidad, antes mencionados, son suficientes para representar el ordenamiento de las preferencias por una función de utilidad.

Definición 1.3. *Una función $u : X^l \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa a la relación de preferencia $\succeq$ si $\forall x, y \in X^l$, $x \succeq y \iff u(x) \geq u(y)$.*

Usaremos el siguiente resultado para verificar que una función de utilidad u representa a la relación de preferencia completa$\succeq$.

Proposición 1.1. *Sea una relación de preferencia $\succeq$ completa sobre el conjunto X y una función $u : X \to \mathbb{R}$. Entonces los siguientes dos enunciados son equivalentes.*

a) *u representa a $\succeq$*

b) *Para todo x, $y \in X$*

$$\begin{cases} Si\ x \succ y, \text{ entonces } u(x) > u(y) \\ Si\ x \sim y, \text{ entonces } u(x) = u(y) \end{cases}$$

[2]

La función de utilidad nos facilitará el estudio del consumidor, ya que a partir de ella podremos obtener las clases de indiferencia y mucho mejor, podremos ordenar las preferencias. No hay que olvidar que esta función simplemente nos

[1] Recientes investigaciones de campo muestran que muchas veces es violado este supuesto, lo cual hace que gran parte de la teoría microeconomía clásica resulte ineficaz.

[2] Ver demostración en el apéndice 2.

da una ordenación de las preferencias no una cuantificación de tales, es decir, si tenemos una canasta que nos da una utilidad de 7 y otra que nos da 20000 lo único que podemos afirmar es que la segunda canasta es estrictamente preferida a la primera, pero ¿qué tan preferida es una a otra? con la función de utilidad es un dato que no podemos obtener y que para nuestra fortuna no nos será de interés. De la misma manera, algunas veces nos referiremos a la utilidad del consumidor como su bienestar en el sentido en que suponemos que el consumidor se encuentra mejor al adquirir una canasta que le reporte una mayor utilidad.

Finalmente agregaremos otros dos axiomas a nuestra relación de preferencia para garantizar que la solución al problema del consumidor se encuentre sobre la recta presupuestaria y asegurar cuasi-cóncavidad en la función de utilidad.

Axioma 4 (Axioma de no saciabilidad). *Dada cualquier canasta de bienes $x \in X^l$ y cualquier $\epsilon > 0$ existe una canasta $y \in X^l$ tal que $\|y - x\| \leq \epsilon$ y $y \succ x$.*

Axioma 5 (Axioma de convexidad). *Si $x, y \in X^l$ son tales que $x \succeq y$ entonces para $0 \leq \lambda \leq 1$ tenemos que $\lambda y + (1-\lambda)x \succeq y$.*

1.2.2. El presupuesto y el problema del consumidor

Denotaremos con $p \in \mathbb{R}^l_+$ al vector de precios de nuestra economía, en donde la entrada p_i del vector nos representa el precio del i-ésimo bien, con $i = 1, ..., l$. El modelo del equilibrio general utiliza los precios como dados, es decir, los agentes no pueden influir en ellos de ninguna manera y simplemente se comportan como tomadores de precios, a este comportamiento generalmente se le denomina competitivo. Por el momento haremos uso de este supuesto.

Cuando hemos hablado del consumidor únicamente nos hemos enfocado a sus preferencias sin tomar en cuenta qué tipo de restricciones puede poseer para la adquisición de ciertas canastas de bienes, y que, como todos bien sabemos, la gran mayoría de las veces resulta ser el presupuesto. Dados el vector de precios p y el presupuesto $w(t)$, existen una infinidad de canastas de bienes asequibles al consumidor t , la región que incluye a todas estas canastas es conocida como el conjunto presupuestario Δ^t_p, de manera matemática $\Delta^t_p = \left\{ x(t) \in X^l \mid p \cdot x(t) \leq w(t) \right\}$. Con fines prácticos nuestro presupuesto inicial nos será dado de dos posibles maneras. La primera de la forma $w \in \mathbb{R}_+$ nos representará una cantidad monetaria lista para pagar por la canasta de nuestra preferencia y la segunda $w \in \mathbb{R}^n_+$ hace referencia a una dotación inicial, la cual no es más que una asignación que nos indica la cantidad inicial de cada uno de los bienes con la que contamos para realizar operaciones en el mercado y que puede ser vendida o intercambiada parcial o totalmente.[3]

[3]Nótese que en este caso w puede ser un vector de n entradas y no necesariamente de l como se verá en el modelo de Shapley y Shubik. Específicamente $n = l$ o $n = l + 1$, en el primer caso, la dotación únicamente se encuentra integrada de los bienes del mercado y en el segundo caso damos la opción de que la dotación contenga los l bienes del mercado y la mercancía $l + 1$ con el papel operativo de "efectivo".

Integrando todo lo anterior tenemos que, dado un vector de precios p el problema que atañe al consumidor con presupuesto inicial w consiste en alcanzar el mayor nivel de utilidad posible sujeto a su restricción presupuestaria, es decir,

$$\begin{aligned} &\max_{x\geq 0} u(x) \\ &\text{s.a. } p\cdot x \leq w \end{aligned}$$

donde en w en el caso de ser una dotación inicial se interpreta como el dinero que obtendría el consumidor si vendiera la totalidad de su dotación en el mercado a los precios p, es decir $p \cdot w$.

Para aplicar los conceptos definidos hasta el momento veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.1. *Sea una economía con únicamente dos bienes x_1 y x_2, un vector de precios $p = (p_1,\, p_2)$, un consumidor cuya relación de preferencia es representada por la función de utilidad $u(x_1,\, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ y un presupuesto monetario inicial w.*

Entonces el problema del consumidor se expresa como

$$\begin{aligned} &\max_{x\geq 0} x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \\ &\text{s.a. } p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w \end{aligned}$$

que es un problema de programación no lineal, el cual fácilmente podemos resolver definiendo el lagrangiano $\mathcal{L}$ y aplicando las condiciones de primer orden de Kuhn-Tucker[4]como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 &\Rightarrow \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 &\Rightarrow (1-\alpha)(x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}) - \lambda p_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 &\Rightarrow -p_1 x_1 - p_2 x_2 + w = 0 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos la función de demanda de cada uno de los bienes

$$\begin{aligned} x_1(p_1, p_2, w) &= \frac{\alpha w}{p_1} \\ x_2(p_1, p_2, w) &= \frac{(1-\alpha) w}{p_2} \end{aligned}$$

Como se observa, las funciones de demanda del consumidor son funciones que dependen de los precios y la dotación inicial; en nuestro caso, dejando fija

[4]En este trabajo supondremos que las soluciones al problema del consumidor son interiores, es decir, que no tendremos soluciones de esquina. En caso de ser necesario podemos determinar la naturaleza de las soluciones haciendo uso de las condiciones de segundo orden y el Hessiano orlado.

la dotación inicial, si el precio de uno de los bienes aumenta la demanda por el mismo disminuye. En cambio la demanda del bien 1 no se ve afectada con un aumento o disminución del precio del bien 2 y viceversa.

1.3. Economía de intercambio puro

Como lo mencionamos en un principio, una economía de intercambio puro es aquella en donde los agentes son los consumidores y, como su nombre bien lo indica, simplemente se intercambian los bienes, es decir, suponemos que no hay oportunidad de producción y sólo se cuenta con las dotaciones iniciales de cada uno de los consumidores para llevar a cabo las únicas dos actividades de esta economía: el comercio y el consumo. Algunos de los modelos que desarrollaremos más adelante se llevarán a cabo dentro de este contexto. A continuación analizamos el modelo Walrasiano y un ejemplo.

Sea una economía de intercambio puro con l diferentes bienes, un conjunto de consumidores $T = \{1, ..., m\}$ cada uno con una relación de preferencias racional $\succeq_t$ representada por una función de utilidad cóncava, continua y estrictamente creciente $u_t : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$. y una dotación inicial $w(t) \in \mathbb{R}^l_+$ para todo $t \in T$. Un vector de demanda $x(t) \in \mathbb{R}^l_+$ consiste en el vector cuyas entradas representan la demanda final del bien i por parte del consumidor t, con $i = 1, ..., l$ y $t \in T$.

Inicialmente todos los consumidores se reunen en un mercado central, ahi venden sus dotaciones iniciales y compran bienes de consumo. Si el consumidor t vendiera completamente su dotación $w(t)$ obtendría un ingreso igual a $p \cdot w(t)$. De la misma manera el gasto total que ejerce el consumidor t al demandar $x(t)$ es igual a $p \cdot x(t)$. Con lo anterior el problema del consumidor t es

$$\begin{aligned} &\max_{x(t)\geq 0} \; u_t(x(t)) \\ &\text{s.a. } p \cdot x(t) \leq p \cdot w(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

para todo $t \in T$.

Diremos que un mercado se vacía o se limpia cuando la oferta iguala a la demanda. Generalmente el instrumento mediante el cual se hace esto posible es el vector de precios, es decir, necesitamos determinar los precios a los cuales no exista exceso de oferta ni de demanda de los bienes. Dichos precios los encontramos al resolver el sistema de ecuaciones que resulta de plantear los problemas de maximización respectivos para cada uno de los consumidores e igualar la demanda total de los bienes con la oferta total de los mismos.

Definición 1.4. *Dada una economía de intercambio puro determinada por un conjunto de consumidores $T = \{1, ..., m\}$ con una función de utilidad u_t que representa a una relación de preferencia $\succeq_t$ y una dotación inicial $w(t)$ para todo $t \in T$. Decimos que una asignación $x^* \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$, donde $x^* = (x^*(1), ..., x^*(m))$ y $x^*(t) \in \mathbb{R}^l_+$; y un vector de precios $p^* \in \mathbb{R}^l_+$ constituyen un equilibrio competitivo si*

i) *Para toda $t \in T$, $x^*(t)$ es solución del problema de maximización de la ecuación (1.1).*

ii) *El mercado se limpia, es decir,* $\sum_{t \in T} x_i^*(t) = \sum_{t \in T} w_i(t)$ *para todo* $i = 1, ..., l$.

El ejemplo más simple de este tipo de economía corresponde a un ontercambio de dos bienes entre dos consumidores cada uno con dotaciones iniciales. Formalmente tenemos, sea una economía de intercambio puro con dos bienes $l = 1, 2$, un conjunto de dos consumidores $T = \{1, 2\}$ con una relación de preferencias racional $\succeq_t$ representada por una función de utilidad $u_t : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, y una dotación inicial $w(t) \in \mathbb{R}_+^2$ para $t = 1, 2$. Definimos al vector de consumo $x(t) \in \mathbb{R}_+^2$ del consumidor t como $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, es decir, la demanda del bien i por parte de consumidor t es $x_i(t)$. La dotación inicial del bien 1 y 2 serán expresadas como $w_1(t)$ y $w_2(t)$ respectivamente, de tal manera que $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ para $t = 1, 2$ donde suponemos que $w_l(t) \geq 0$. A partir de esto tenemos que la existencia o dotación total en el mercado del bien l es de $\bar{w}_l = w_l(1) + w_l(2)$. Denominaremos una asignación $x \in \mathbb{R}^4$ al vector cuyas entradas son los vectores de consumo de ambos consumidores, o sea, $x = (x(1), x(2)) = ((x_1(1), x_2(1)), (x_1(2), x_2(2)))$. Afirmamos que una asignación es viable o factible si la cantidad total utilizada de cada uno de los bienes es menor o igual a la cantidad total disponible de ese mismo bien, es decir

$$x_l(1) + x_l(2) \leq \bar{w}_l \text{ para } l = 1, 2. \tag{1.2}$$

Por ejemplo una asignación viable es la que corresponde a las dotaciones iniciales de cada uno de los consumidores $x = ((w_1(1), w_2(1)), (w_1(2), w_2(2)))$, particularmente esta asignación además de ser factible es una asignación sin desperdicio ya que agota los recursos disponibles en la economía alcanzando la igualdad en la ecuación (1.2).[5]

Con todo esto, analizemos un ejemplo numérico.

Ejemplo 1.2. *Sea una economía con dos consumidores* $T = 1, 2$ *con una función de utilidad* $u_t(x_1(t), x_2(t)) = (x_1(t))^\alpha (x_2(t))^{1-\alpha}$ *para* $t \in T$ *y una dotación inicial* $w(1) = (1, 2)$ *y* $w(2) = (2, 1)$.

Mencionamos que en estos caso el presupuesto se calcularía como $p \cdot w$ por lo tanto el presupuesto para el consumidor 1 es igual a $p_1 + 2p_2$ y para el consumidor 2 es $2p_1 + p_2$, además $\bar{w}_1 = 3$ y $\bar{w}_2 = 3$. Entonces por el ejemplo (1.1) tenemos que los vectores de demanda que optimizan la utilidad de cada uno de los consumidores respectivamente son

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{\alpha(p_1 + 2p_2)}{p_1}, \frac{(1-\alpha)(p_1 + 2p_2)}{p_2} \right) \\ x_2 &= \left(\frac{\alpha(2p_1 + p_2)}{p_1}, \frac{(1-\alpha)(2p_1 + p_2)}{p_2} \right) \end{aligned}$$

[5] Si la desigualdad no se cumple diremos que existe un exceso de demanda por el bien ℓ y en caso de que la desiguald se cumpla de manera estricta tendremos un exceso de oferta, dichos casos no serán de gran relevancia en nuestro estudio.

ahora igualando la demanda total de cada uno de los bienes a la existencia total en el mercado, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(p_1+2p_2)}{p_1}+\frac{\alpha(2p_1+p_2)}{p_1} &= 3 \\ \frac{(1-\alpha)(p_1+2p_2)}{p_2}+\frac{(1-\alpha)(2p_1+p_2)}{p_2} &= 3 \end{aligned}$$

que da como solución la relación de precios $\frac{p_1}{p_2}=\frac{\alpha}{1-\alpha}$ buscada. Esta relación hace que la demanda sea igual a la oferta, evitando así exceso o falta de cualquiera de los bienes.

Con el fin de asegurar la existencia del equilibrio competitivo en las economías de intercambio demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea una economía de intercambio puro con un espacio de bienes $X^l \subseteq \mathbb{R}^l_+$ con X^l compacto y convexo, y un conjunto de consumidores $T=\{1,\,...,\,m\}$ cada uno con una función de utilidad $u : X^l \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi-cóncava que representa a la relación de preferencia completa $\succeq_t$ y una dotación inicial $w(t) \gg 0$, para todo $t \in T$. Entonces existen una asignación $x^* \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ y un vector de precios $p^* \in \mathbb{R}^l_+$ que constituyen un equilibrio competitivo.*

Demostración. Formulemos primero el conjunto de ecuaciones tales que su solución constituyan un equilibrio competitivo. Sea $\bar{x}(t,\,p)$ la solución del problema de optimización

$$\begin{aligned} &\max_{x(t)\geq 0}\ u_t(x(t)) \\ &\text{s.a. } p\cdot x(t) \leq p\cdot w(t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

para todo $t \in T$. Y $\tilde{x}(t,\,p)$ la solución del problema de optimización

$$\begin{aligned} &\max_{x(t)\geq 0}\ u_t(x(t)) \\ &\text{s.a. } p\cdot x(t) \leq p\cdot w(t) \\ &\qquad x(t) \leq 2\sum_{t\in T} w(t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

para todo $t \in T$. Observemos que la única diferencia entre el problema de optimización de la ecuación (1.3) y el de la ecuación (1.4) consiste en la restricción de la función de demanda. Esta restricción la agregamos con el fin de evitar la ideterminación existente en la ecuación (1.3) cuando $p_j = 0$ para algún $j = 1,\,...,\,l$. Sea el conjunto presupuestario del consumidor t , $\Delta^t_p = \left\{ x(t) \in X^l \mid p\cdot x(t) \leq p\cdot w(t) \right\}$ para todo $t \in T$; notemos que dado un vector de precios $p \in \mathbb{R}^l_+$ cualquier múltiplo escalar de este no produce cambio alguno en nuestro conjunto presupuestario, es decir, $\Delta_p^t = \Delta_{\lambda p}^t$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, lo que equivale a afirmar que únicamente los precios relativos son los que nos interesan. Por lo tanto normalizaremos los precios de la siguiente manera, sea $p \in N^{l-1}$ donde $N^{l-1} = \{p \in \mathbb{R}_+^l \mid \sum_{j=1}^l p_j = 1\}$.[6]

Dado que u_t es continua y estrictamente cuasi-cóncava y la restricción de la función de demanda $x(t) \leq 2\sum_{t\in T} w(t)$ es continua en p, y entonces por el teorema del máximo de Berge[7] tenemos que la función $\tilde{x}(t,\, p)$ que resuleve el problema de optimización de la ecuación (1.4) es una función continua en p.

Sean la función de exceso de demanda y la función de exceso de demanda truncada $\bar{z},: \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}_+^l$ tal que

$$\bar{z}(p) = \sum_{t\in T} \bar{x}(t,\, p) - \sum_{t\in T} w(t)$$

y la función de exceso de demanda truncada$\tilde{z} : \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}_+^l$ tal que

$$\tilde{z}(p) = \sum_{t\in T} \tilde{x}(t,\, p) - \sum_{t\in T} w(t)$$

Por otro lado como la función u_t es estrictamente creciente para todo $t \in T$ aseguramos que la solución $\tilde{x}(t,\, p)$ se debe encontrar en la frontera del conjunto presupuestario.

Con lo anterior podemos establecer la igualdad conocida como ley de Walras

$$p \cdot \tilde{z}(p) = 0$$

para todo $p \in N^{l-1}$. Por lo tanto nuestro problema de existencia del equilibrio se reduce a encontrar un precio $p \in N^{l-1}$ tal que $\tilde{z}(p) = 0$.

Para esto haremos uso del teorema de punto fijo de Brower, pero dado que el teorema hace referencia a puntos fijos de funciones continuas y no a ceros construiremos una función $f : N^{l-1} \to N^{l-1}$ tal que si $f(p^*) = p^*$ entonces $\tilde{z}(p^*) = 0$.

Intuitivamente la construcción de f se basa en tres puntos principales.

i) Dado un vector de precios $p \in N^{l-1}$, si el mercado no se encuentra en equilibrio necesitamos incrementar el precio de aquellos bienes que se encuentren con exceso de demanda.

ii) El tamaño del dicho incremento debe ser escogido de acuerdo al exceso de demanda del bien, es decir, entre mayor sea el exceso de demanda, mayor el incremento en su precio.

iii) Los nuevos precios determinados deben seguir en N^{l-1}.

Con lo anterior, sea la función que buscamos

$$f_j(p) = \frac{p_j + \text{máx}\{\tilde{z}_j(p),\, 0\}}{1 + \sum_{k=1}^l \text{máx}\{\tilde{z}_k(p),\, 0\}}$$

[6] Esta no es la única manera posible de normalizar los precios, pero es la que usaremos en este trabajo.

[7] Veáse apéndice 1

para todo $j = 1, ..., l$. Dado que f es una función continua de $N^{l-1} \to N^{l-1}$ y el conjunto N^{l-1} es compacto, convexo y contenido en $\mathbb{R}^l_+$, entonces por el teorema del punto fijo de Brower tenemos que existe un punto $p^* \in N^{l-1}$ tal que $f(p^*) = p^*$, es decir,

$$\frac{p_j^* + \text{máx}\{\tilde{z}_j(p^*), 0\}}{1 + \sum_{k=1}^l \text{máx}\{\tilde{z}_k(p^*), 0\}} = p_j^*$$

para todo $j = 1, ..., l$. Lo que equivale a

$$\text{máx}\{\tilde{z}_j(p^*), 0\} = p_j^* \sum_{k=1}^{l} \text{máx}\{\tilde{z}_j(p^*), 0\}$$

multiplicando le expresión por $\tilde{z}_j(p^*)$ y sumando sobre todas las j´s obtenemos

$$\sum_{j=1}^{l} \tilde{z}_j(p^*)\,\text{máx}\{\tilde{z}_j(p^*), 0\} = \sum_{j=1}^{l} p_j^* \tilde{z}_j(p^*) \sum_{k=1}^{l} \text{máx}\{\tilde{z}_j(p^*), 0\}$$

donde el lado derecho por la ley de Walras es igual a 0 quedando

$$\sum_{j=1}^{l} \tilde{z}_j(p^*)\,\text{máx}\{\tilde{z}_j(p^*), 0\} = 0$$

lo que equivale a

$$\sum_{\tilde{z}_j(p^*)>0} (\tilde{z}_j(p^*))^2 = 0$$

de donde se concluye que

$$\tilde{z}_j(p^*) \leq 0 \tag{1.5}$$

para todo $j = 1, ..., l$.

A partir de la desigualdad (1.5) analizaremos el comportamiento de p^* y $\tilde{z}(p^*)$.

Para p^*, supongamos que $p_j^* = 0$, entonces como la función u_t es estrictamente creciente tenemos que

$$\tilde{x_j}(t, p^*) = 2 \sum_{t \in T} w_j(t)$$

para todo $t \in T$. De aquí que

$$\tilde{z}_j(t, p^*) = (2m-1) \sum_{t \in T} w_j(t) > 0$$

contradicción! Por lo tanto $p^* = 0$.

Por otro lado para $\tilde{z}(p^*)$ tenemos que por la ley de Walras $p^* \cdot \tilde{z}(p^*) = 0$, es decir

$$p_j^* \tilde{z}_j(p^*) = -\sum_{k \neq j} p_k^* \tilde{z}_k(p^*)$$

para todo $j = 1, ..., l$. De donde se tiene directamente que $\tilde{z}_j(p^*) = 0$ para todo $j = 1, ..., l$.

Finalmente notemos que si

$$\sum_{t\in T} \bar{x}(t, p) < \sum_{t\in T} w(t) < 2\sum_{t\in T} w(t)$$

entonces la restricción de la función de demanda se cumple igualmente para las ecuaciones (1.3) y (1.4), es decir, $\tilde{z}(p^*) = \bar{z}(p^*)$, pero esto sólo se cumple cuando $\tilde{z}(p^*) \leq 0$. Por lo tanto $\bar{z}(p^*) = 0$ $\square$

El teorema anterior nos asegura la existencia del equilibrio Walrasiano en una economía de intecambio puro con un conjunto de consumidores finito. Pero, más adelante los conjuntos de consumidores serán modelados con un continuo, haciendo insuficiente la demostración anterior. Con el fin de generalizar el teorema anterior y asegurar la existencia del equilibrio Walrasiano en estos caso introducimos el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Sea una economía de intercambio puro con un espacio de bienes $X^l \subseteq \mathbb{R}^l_+$ con X^l compacto y convexo y un conjunto de consumidores $T \subset \mathbb{R}_+$ con una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi-cóncava que representa a la relación de preferencia $\succeq_t$ completa y una dotación inicial $w(t) \gg 0$, para todo $t \in T$. Entonces existen una asignación $x^* \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ y un vector de precios $p^* \in \mathbb{R}^l_+$ que constituyen un equilibrio competitivo.*

Demostración. Veáse Aumann [2]. $\square$

Para concluir el tema de economías de intercambio puro presentamos a continuación la versión básica de la caja de Edgeworth.

1.3.1. La caja de Edgeworth

Una herramienta comunmente utilizada para representar gráficamente los diversos resultados que se obtienen durante el proceso de intercambio, dentro de una economía de intercambio puro con únicamente dos bienes $l = 1, 2$ y dos consumidores $T = \{1, 2\}$ cada uno con una relación de preferencias $\succeq_t$ y una dotación inicial $w(t) \in \mathbb{R}^2_+$ para $t = 1, 2$, es la caja de Edgeworth.

El planteamiento que esta herramienta utiliza, además de ser un enfoque diferente al Walrasiano, posee una modelación más cercana a utilizada en la teoría de juegos, como se verá en el capítulo 2 y en el modelo de Shapley y Shubik desarrollado en el capítulo 3.

Primeramente recordemos que la asignación correspondiente a la dotación inicial de los consumidores $x = ((w_1(1), w_2(1)), (w_1(2), w_2(2)))$ constituye una asignación viable y sin desperdicio. Pasemos esta información a la caja; iniciemos graficando las preferencias y dotación del consumidor 1 en los ejes x e y

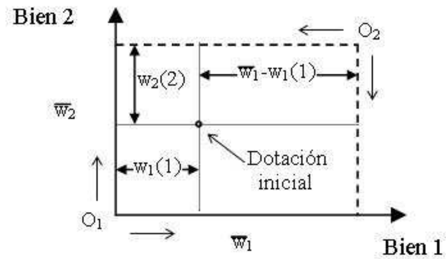

Figura 1.1: Dotación inicial en la caja de Edgeworth

cuyo origen O_1 es el punto $(0,\, 0)$ con la orientación habitual, para el caso de las preferencias y dotacion inicial del consumidor 2, dado el gráfico original, haremos una rotacion de 180° en torno a O_1, seguida de una traslacion del origen al punto $O_2 = (\bar{w}_1,\, \bar{w}_2)$, una vez hecho esto superponemos las clases de indiferencia de nuestros dos consumidores obteniendo asi la caja de Edgeworth de esta economía, en donde en el eje vertical se miden las cantidades concernientes al bien 1 y en el eje horizontal las del bien 2.

Como se observa el la figura (1.1) en la caja de Edgeworth las dotaciones iniciales de los consumidores quedan representadas por un solo punto, ya que la base tiene una de longitud $\bar{w}_1$ y altura de $\bar{w}_2$, de tal manera que al graficar las dotaciones iniciales tenemos que el punto $(w_1(1),\, w_2(1))$ medido desde el origen O_1 coincide con el punto $(w_1(2),\, w_2(2)) = (\bar{w}_1 - w_1(1),\, \bar{w}_2 - w_2(1))$ medido desde O_2 (y con la perspectiva del consumidor 2); al igual que esta asignación cualquier otro punto dentro de la caja nos representará asignaciones viables y sin desperdicio.

Observemos en la figura (1.2) que dado un conjunto de indiferencia del consumidor 1 todas aquellos conjuntos que se encuentran más hacia arriba y a la derecha le reportan una mayor utilidad, de la misma manera para el consumidor 2, bajo las mismas suposiciones y perspectiva, los mejores conjuntos son las que están más hacia abajo y a la izquierda, es así como queda determinada el área en donde se encuentran las asignaciones que mejoran el bienestar de ambos consumidores y es en esta área donde aseguramos que se llevará a cabo el intercambio.[8]

Siguiendo este razonamiento, tenemos que, cualquier punto de tangencia entre los conjuntos de indiferencia dentro del área determinada por los conjuntos de indiferencia correspondientes a las dotaciones iniciales de los consumidores representa una solución para el intercambio, de no ser así podríamos mejorar el bienestar de alguno de los consumidores sin afectar el del otro; en ese sentido las asignaciones determinadas por los puntos de tangencia de los conjuntos de indiferencia constituyen un óptimo de Pareto, ya que no se puede mejorar el bienestar de alguno de los agentes sin afectar al otro.

En lo que concierne a los conceptos básicos del consumidor y economías de

[8]Para este ejemplo supondremos que los conjuntos de indiferencia son curvas suaves.

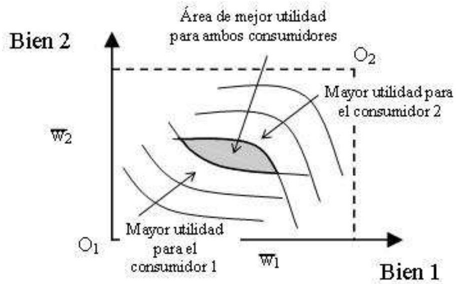

Figura 1.2: Curvas de indiferencia y bienestar en la caja de Edgeworth

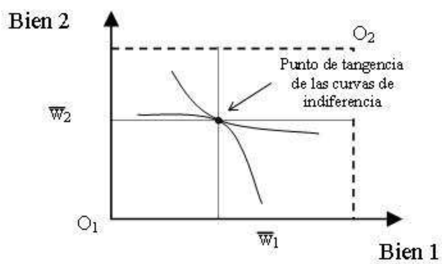

Figura 1.3: No es posible mejorar la utilidad de un consumidor sin afectar al otro.

intercambio puro hasta este punto estan cubiertos, ahora bien podemos pasar al análisis de otro importante agente económico.

1.4. La empresa

En lo que concierne a este trabajo nos abocaremos de manera casi exclusiva a los modelos de intercambio puro o sin produción, pero como dos de los modelos que usamos como ejemplos en la sección de teoría de juegos incluyen a la producción y además la propuesta final que nosotros hacemos puede ser extendida a economías de propiedad privada, presentamos a continuación las bases teóricas de las empresas como agentes de la economía.

1.4.1. Tecnología de la empresa

Como ya lo habíamos mencionado, otro de los agentes ecónomicos necesarios para la interacción dentro de un mercado son las empresas. En este apartado nos enfocaremos al estudio del comportamiento y teoría de dichas entidades. Dado que ya hemos estudiado la teoría del consumidor esta tarea nos resultará mucho más sencilla, primeramente porque ambos comportamientos poseen características semejantes y en segundo lugar porque el resultado de un proceso de producción es observable a diferencia del proceso de elección que simplemente nos arrojaba una utilidad, la cual difícilmente resulta tangible.

Para entrar al tema que nos ocupa empezaremos definiendo a las empresas, las cuales son entidades de producción con fines de lucro, esto es, su principal objetivo es la generación de utilidades a través de la producción de bienes o servicios.

Para poder llevar a cabo su producción cada una de las empresas necesita de diferentes insumos, los cuales denominaremos factores de producción y denotaremos con el vector $v \in V \subseteq \mathbb{R}^l_+$. donde V es el conjunto de factores de producción disponibles en la economía.[9]

Así como en el estudio del consumidor podíamos tener una herramienta que nos ayudaba a ordenar las preferencias indicandonos la utilidad obtenida al consumir una cesta en particular, en el caso de la empresa tenemos la función de producción $f : V \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(v)$ mide la cantidad máxima bienes que se pueden producir con la cantidad de factores $v = (v_1, \ldots, v_l)$. Este supuesto nos indica que la empresa conoce exactamente el proceso de producción y en que manera y proporción influyen cada uno de los factores, además damos por hecho que dicha relación se mantiene. Por simplicidad supondremos que cada empresa produce únicamente un bien al que denotaremos por $y \in \mathbb{R}_+$, es decir, $y = f(v)$.

Definición 1.5. *Dado un vector de factores de producción $v \in \mathbb{R}^l_+$ sea $Y \in \mathbb{R}^l_+$, $Y = (Y_1, ..., Y_i, ..., Y_l)$ el vector cuya i-ésima entrada $Y_i = y = f(v)$ y para toda $k \neq i$ la entrada $Y_k = 0$. Decimos que el vector $r \in \mathbb{R}^l$ tal que $r = Y - v$ constituye un plan de producción para la empresa que elabora el bien i-ésimo y que posee una función de producción $y = f(v)$.*

Una vez que tenemos la función de producción de la empresa podemos hablar de los retornos a escala, al hacerlo simplemente nos referimos al cambio que sufre la producción de la empresa al aumentar en cierta proporción los insumos, dado un vector de factores de producción $v \in V$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}_+$ con $\lambda > 1$ decimos que la función de producción $f(v)$ posee:

- Retornos crecientes a escala si $\lambda f(v) < f(\lambda v)$ o
- Retornos constantes a escala si $\lambda f(v) = f(\lambda v)$ o
- Retornos decrecientes a escala si $\lambda f(v) > f(\lambda v)$.

Para ver la importancia que tienen los retornos a escala dentro de la teoría de la empresa pasemos al planteamiento del problema.

[9] Con esto no estamos suponiendo que la empresa necesite de todos y cada uno de los bienes disponibles en la economía para su proceso de producción, varias de las entradas del vector v pueden ser iguales a cero.

1.4.2. Los costos y el problema de la empresa

Al realizar operaciones dentro de una empresa se puede incurrir en dos tipos de costos, los fijos y los variables. Los primeros se refieren a aquellos costos que se generan haya o no producción, por ejemplo los muebles e inmuebles de la empresa, publicidad, etc. En cambio los costos variables son aquellos que se crean directa y únicamente junto con la producción, es decir, el costo total de los factores de producción. Para nuestra comodidad supondremos que sólo existen costos variables.[10]

Sean $p \in \mathbb{R}^l_+$, el vector de precios de la economía, donde p se toma como dado, afirmamos que el costo total de producir la cantidad y de bienes es igual a $p \cdot v$ y el ingreso total por la venta de y es igual a $p \cdot Y$.

Con base en todo lo anterior podemos plantear el problema de la empresa, el cual por simple deducción sabemos que es el de maximizar sus beneficios, para esto definiremos la función de ganancia

$$\pi(v) = p \cdot Y - p \cdot v = p \cdot r$$

que nos indica que la ganancia final de la empresa es igual a la entrada total de la venta de la producción $y = f(v)$ a los precios p menos los costos variables $p \cdot v$ que genera dicha producción. Pero ¿qué pasaría si nuestra empresa tuviera retornos crecientes a escala? Haciendo un análisis de la función de ganancia alcanzamos a observar que dado un vector de insumos inicial v que nos produce una cantidad y de bienes, tenemos la oportunidad de aumentar la ganancia de la empresa si consideramos el vector de insumos $v' > v$ y una vez elegido el vector v' encontraremos otro vector v'' tal que $\pi(v'') > \pi(v')$ y así sucesivamente. Por lo tanto en caso de tener retornos crecientes a escala no existe una cota superior que nos delimite el conjunto de ganancia de la empresa. Para evitar este tipo de inconvenientes y poder determinar la oferta óptima de la empresa supondremos que la función $f(v)$ es cuasi-cóncava y doblemente diferenciable, el primer supuesto nos dice implicitamente que la función $f(v)$ posee retornos decrecientes o constantes a escala, nunca crecientes. Una vez aclarado este punto regresamos al problema de la empresa , el cual se expresa como

$$\max_{v \geq 0} \; p \cdot (Y - v) \tag{1.6}$$

Obervese que a diferencia del problema del consumidor la empresa no posee restricciones de ningún tipo, es decir, es libre producir la cantidad que esta desee, pero sabemos que lo hará sólo hasta el punto en que dicha producción le reporte una ganancia, es más, por el tipo de problema que esta entidad enfrenta, aseguramos que escogerá el plan de producción que le genere la mayor ganancia.

Para resolver el problema de optimización de la ecuación (1.6) procederemos de manera similar al problema del consumidor, esto es, obtendremos primero las condiciones de primer orden derivando la función de ganancia respecto a cada uno de los insumos. Tenemos que si v^* es un óptimo entonces

[10] Este desprecio de los costos fijos se puede justificar al suponer que el costo marginal de la empresa se encuentra por encima del costo variable medio.

$$p_i \frac{\partial f\,(v)}{\partial v_j} = s_j$$

para $j = 1, ..., l$ y donde p_i representa el precio del bien que produce la empresa.

Al resolver el sistema de ecuaciones resultante obtenemos las demandas derivadas $v\,(p)$ y con esto podemos calcular la función de oferta y de ganancia

$$\begin{aligned} y &= f\ (v(p)) \\ \pi(v) &= p_i f\ (v(p)) - p \cdot v(p)) \end{aligned}$$

Como se observa la función de oferta de la empresa es una función que depende de los precios y nos indica la cantidad del bien que la empresa debe producir para maximizar su ganancia.

Ahora examinemos un ejemplo en donde apliquemos los conocimientos acerca de la empresa adquiridos hasta ahora.

Ejemplo 1.3. *Sea una economía con tres bienes diferentes, un vector de precios $p = (p_1, p_2, p_3)$ y una empresa dedicada a la producción del tercer bien con una función de producción tipo Cobb-Douglas* [11] $f\,(v) = v_1^\alpha v_2^\beta$. *Observemos que si $\alpha + \beta > 1$ tendriamos retornos crecientes a escala, $\alpha + \beta = 1$ nos indica retornos constantes y para $\alpha + \beta < 1$ retornos decrecientes. Por simplicidad supondremos esto último.*

Entonces tenemos que el plan de producción de la empresa es $r = (-v_1, -v_2, v_1^\alpha v_2^\beta)$ y la función de ganancia es $\pi(v_1, v_2, v_3) = p_3 v_1^\alpha v_2^\beta - p_1 v_1 - p_2 v_2 = p \cdot r$, con lo cual el problema de la empresa se expresa como

$$\max_{v \geq 0} -p_1 v_1 - p_2 v_2 + p_3 v_1^\alpha v_2^\beta$$

derivando las condiciones de primer orden obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} p_3 \alpha v_1^{\alpha-1} v_2^\beta &= p_1 \\ p_3 \beta v_1^\alpha v_2^{\beta-1} &= p_2 \end{aligned}$$

que al resolver nos da las demandas derivadas

$$\begin{aligned} v_1(p) &= \left(\frac{p_3 \alpha^{1-\beta} \beta^\beta}{v_1^{1-\beta} v_2^\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ v_2(p) &= \left(\frac{p_3 \beta^{1-\alpha} \alpha^\alpha}{v_1^\alpha v_2^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ v_3(p) &= 0 \end{aligned}$$

[11] Este tipo de función lleva su nombre en honor al matemático Charles Cobb y al economista Paul Douglas.

sustituyendo esta información en las funciones de oferta y ganancia respectivamente, tenemos

$$
\begin{aligned}
y &= p_3^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{v_1^\alpha v_2^\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\
\pi(v(p)) &= (1-\alpha-\beta) \left(\frac{p_3 \alpha^\alpha \beta^\beta}{v_1^\alpha v_2^\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}
\end{aligned}
$$

Con este ejemplo finalizamos el estudio básico sobre la teoría de la empresa para asi dar paso a el estudio del equilibrio general en economías de propiedad privada.

1.5. Economía de propiedad privada

Una vez estudiados el comportamiento de los consumidores y los productores por separado haremos un análisis de la interacción entre ellos dentro de un mercado competitivo de propiedad privada.

Primeramente pensemos en qué pasaría si dentro de una economía los consumidores fueran al mismo tiempo los dueños de las empresas, mejor aún, supongamos que cada empresa es propiedad de un gran número de consumidores, es decir, los consumidores poseen la totalidad de la acciones de la empresa. Sea una economía con l diferente bienes, $T = \{1, ..., m\}$ el conjunto de consumidores y $K = \{1, ..., n\}$ el conjunto de empresas, de tal manera que el consumidor t posee una proporción $\theta(t, k) \geq 0$ de la empresa j donde $\sum_{t \in T} \theta(t, k) = 1$ para toda $k = 1, ..., n$. [12]. Entonces, dado un vector de precios $p \in \mathbb{R}_+^l$ y el plan de producción $r(k)$ de la empresa k el problema de maximización para el consumidor t con presupuesto inicial $w(t)$ es

$$
\begin{aligned}
&\max_{x(t)\geq 0} u_t(x(t)) \\
&\quad \text{s.a. } p \cdot x(t) \leq +w(t) + \sum_{k \in K} (\theta(t,k))\,(p \cdot r(k))
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

para todo $t \in T$, y donde el producto $(\theta(t, k))\,(p \cdot r(k))$ es la parte proporcional de los beneficios que le corresponden al consumidor t como accionista de la empresa k.

Analizando un poco más el supuesto de que los consumidores son al mismo tiempo propietarios de las empresas, tenemos que, un aumento en las ganancias de la misma produce un incremento en el bienestar global del consumidor-propietario al expandir su conjunto presupuestario. Aseguramos entonces que este supuesto respeta la naturaleza intrinseca de cada uno de los agentes, por un lado sigue siendo deseable maximizar las ganancias como empresa y por el otro

[12] No necesariamente todos los consumidores poseen parte de todas la empresas, se puede tener θ´s iguales a cero.

maximizar la utilidad como consumidor, y aun más, logra una sincronia perfecta entre los dos agentes al centrar sus objetivos en la maximización de la utilidad de la empresa, resultado que deriva en un aumento del bienestar general.

Este tipo de economía, en donde los agentes son consumidores-propietarios, se denomina de propiedad privada. Este último concepto nos hace pasar de manera natural a la definición del equilibrio Walrasiano dentro de este contexto.

Definición 1.6. *Dada una economía de propiedad privada con un espacio de bienes $X \subset \mathbb{R}^l_+$, un conjunto de consumidores $T = \{1, ..., m\}$ con una función de utilidad u_t que representa a una relación de preferencia $\succeq_t$, una dotación inicial $w(t)$ y un vector de participaciones $\theta(t) \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $\theta(t) = (\theta(t, 1), ..., \theta(t, n))$ para todo $t \in T$; y un conjunto de empresas $K = \{1, ..., n\}$ con una función de producción $y_k = f_k(v)$ para toda $k \in K$, donde $\sum_{t \in T} \theta(t, k) = 1$ para $k = 1, ..., n$. Decimos que una asignación (x^*, y^*) donde $x^* \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$, $y^* \in \mathbb{R}^l$ y tales que $x^* = (x^*(1), ..., x^*(m))$ y $y^* = (y^*(1) = f_1(v^*(1)), ..., y^*(1) = f_1(v^*(n)))$ y un vector de precios $p^* = (p_1^*, ..., p_l^*)$ constituyen un equilibrio Walrasiano si*

i) *Para toda $k \in K$, $y^*(k) \in \mathbb{R}^l_+$ maximiza las función de ganancia $\pi(v)$, es decir, si v_k^*es una solución óptima del problema de maximización de la ecuación (1.6) entonces $y^*(k) = f_k(v_k^*)$.*

ii) *Para toda $t \in T$, $x(t)$ es solución del problema de maximización de la ecuación (1.7).*

iii) *El mercado se limpia, es decir, $\sum_{t \in T} x^*(t) = \sum_{t \in T} w(t) + \sum_{k \in K} Y_k^*$.*

Mostraremos a continuación el teorema de existencia del equilibrio Walrasiano o competitivo para economías de propiedad privada, pero, dado que no será primordial en nuestro trabajo, únicamente daremos una idea general de la demostración.

Teorema 1.3. *Sea una economía de propiedad privada con un espacio de bienes $X^l \subseteq \mathbb{R}^l_+$, con X^l compacto y convexo, un conjunto de consumidores $T = \{1, ..., m\}$ con una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi-cóncava que representa a la relación de preferencia $\succeq_t$ completa, una dotación inicial $w(t) > 0$ y un vector de participaciones $\theta(t) \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $\theta(t) = (\theta(t, 1), ..., \theta(t, n))$ para todo $t \in T$; y un conjunto de empresas $K = \{1, ..., n\}$ con una función de producción $y_k = f_k(v)$ cuasi-cóncava y doblemente diferenciable y conjunto de planes de producción $Y_k \in \mathbb{R}^l_+$ compacto y convexo para toda $k \in K$, donde $\sum_{t \in T} \theta(t, k) = 1$ para $k = 1, ..., n$. Entonces existe una asignación (x^*, y^*) donde $x^* \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$, $y^* \in \mathbb{R}^l$ y un vector de precios $p^* \in \mathbb{R}^l_+$ que constituyen un equilibrio competitivo.*

Demostración. Sea la funcion de exceso de demanda $z : \mathbb{R}^l_{++} \to \mathbb{R}^l$ tal que

$$z(p) = \sum_{t \in T} x(t) - \sum_{t \in T} w(t) - \sum_{k \in K} y_k$$

donde

$$x(t,\, p) = x(t,\, p,\, \delta^t_p)$$

con

$$\delta^t_p = p \cdot w(t) + \sum_{k \in K} \theta(t,\, k) p \cdot Y_k(p)$$

Claramente una asignación $(x^*,\, y^*)$ donde $x^* \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$, $y^* \in \mathbb{R}^l$ y un vector de precios $p^* \in \mathbb{R}^l_+$ tales que $z(p^*) = 0$ constituyen un equilibrio competitivo.

Definamos la función continua

$$f_j(p) = \frac{p_j + \text{máx}\{\tilde{z}_j(p),\, 0\}}{1 + \sum_{k=1}^{l} \text{máx}\{\tilde{z}_k(p),\, 0\}}$$

para todo $j = 1,\, ...,\, l$ y procedamos de manera semejante a la demostración de la existencia del equilibrio competitivo en economías de intercambio puro $\square$

En los modelos de intercambio puro que plantearemos con el fin de fundamental la teoría del equilibrio competitivo, ciertos agentes muestran un comportamiento competitivo, como el que se estudió en este capítulo, mientras que, algunos otros se comportan de manera estratégica. Para modelar dicho comportamiento presentamos a continuación la herramienta fundamental del comportamiento estratégico: La teoría de juegos.

Capítulo 2

Teoría de juegos

Como se caba de mencionar la herramienta fundamental con la que comunmente se modela el comportamiento competitivo es la teoría de juegos, en esta sección estudiaremos los conceptos básicos referentes a los juegos rectangulares y extensivos necesarios para los modelos presentados en los capítulos 3 y 4.

2.1. Juegos rectangulares y equilibrio de Nash

Para adentrarnos en el tema de los juegos rectangulares abordaremos un juego bastante conocido en la teoría de juegos, el dilema del prisionero [12]. Imaginemos que dos ladrones llevan a cabo un robo a mano armada y en el momento en que se encuentran huyendo son aprehendidos por las autoridades. Dado que nadie se quiere ver involucrado en problema legales, no existen declaraciones en su contra, por lo cual la policía no puede sentenciarlos directamente. Pero poseen otro recurso, las declaraciones de los presuntos culpables. De esta manera en la comisaría se les informa que serán interrogados por separado esperando obtener alguna prueba suficiente para deshechar o continuar el caso.

Los presos saben que si ellos se delataran entre si, ambos obtendrían una pena de 5 años en la cárcel por el delito cometido. Por otro lado si alguno de ellos, en el afán de desligarse del caso, culpara a su compañero y este a su vez optara por guardar silencio, el delatador sería puesto de manera inmediata en libertad y su compañero condenado a 7 años de cárcel por los delitos de robo a mano armada y obstrucción de la justicia . Finalmente si los dos decidieran guardar silencio, la policia a falta de pruebas, únicamente los podría condenar a 2 años de cárcel por portación de armas. Condensemos toda esta información en la siguiente matriz

		Preso 2	
		Confiesa	No confiesa
Preso 1	Confiesa	(-5, -5)	(0, -7)
	No Confiesa	(-7, 0)	(-2, -2)

Esta matriz es conocida como la matriz de pago del juego, en este caso el dilema del prisionero. En ella se representan los pagos para todas la posibles combinaciones de estrategías dentro de un juego bipersonal con conjuntos de estratégias finitas.

Para el dilema del prisionero tenemos que nuestros dos jugadores son los ladrones, denotados en la tabla como Preso 1 y Preso 2 donde cada uno de ellos posee dos posibles estratégias o decisiones {Confiesa, No confiesa}. El vector (ϕ_1, ϕ_2) de la entrada (i, j) de la matriz nos indica que dado que el jugador 1 escogió la estrategia i y el jugador 2 la estratégia j el jugador 1 obtiene un pago ϕ_1 y el jugador 2 un pago de ϕ_2. En la matriz de pagos del dilema del prisionero la entradas de los vectores (ϕ_1, ϕ_2) son negativas por que los pagos recibidos hacen referencia a un tiempo de castigo o pérdida, implicitamente esto representa el supuesto de que los ladrones se encuentran mejor entre menos tiempo pasen en la cárcel.

Como se mostrará a continuación con los elementos estudiados hasta este momento basta para definir un juego de manera estratégica.

Definición 2.1. *La representación en forma estratégica de un juego G con n jugadores consiste en la colección $\{N, \{D^j\}_{j\in N}, \{\phi_j\}_{j\in N}\}$ donde N es el conjunto de jugadores, D^j es el conjunto de estrategias puras del jugador j y ϕ_j es la función de pago del jugador j, tal que $\phi_j : D^j \to \mathbb{R}$*

Definición 2.2. *Decimos que el vector $d \in \prod_j D^j$ tal que $d = \left(d^1, ..., d^n\right)$ con $d^j \in D^j$ para todo $j \in N$ es un perfil estratégico.*

Regresando al dilema de los prisioneros veamos en qué acaba el caso. Antes del interrogatorio los ladrones discuten las posibles condenas que se les informó podrían pagar, a partir de esto concluyen que el menor tiempo posible a pasar entre ambos en la cárcel es de 4 años, como claramente se observa en la matriz de pago. Con este fin y en un acto de buena fe acuerdan no confesar durante el interrogatorio. Con esta combinación de estrategias cada uno pasaría únicamente 2 años en la carcel, pero, ¿qué sucedería si alguno de ellos violara el acuerdo?

Con el acuerdo en mente el primer prisionero pasa al interrogatorio, ahí se da cuenta de que si su compañero, tal como acordaron, no va a confesar, a él le conviene faltar a su palabra y quedar inmediatamente en libertad. Por otro lado piensa que si a su compañero se le ocurriera el mismo razonamiento, su decisión estaría únicamente entre pasar 5 o 7 años preso, por lo que concluye que de cualquier manera seguir el acuerdo no le conviene. Estas ideas nos inducen directamente a la siguiente definición.

Definición 2.3. *Dado un perfil estratégico $d \in \prod_j D^j$, decimos que $\bar{d^j} \in D^j$ es una mejor respuesta para el jugador j al vector de estrategias dado si*

$$\phi_j(d \mid \bar{d^j}) \geq \phi_1(d)$$

para toda $d^j \in D^j$. *Donde* $d \mid \bar{d}^j$ *significa que ell jugador* j *cambia su estrategia* d^j *por* $\bar{d}^j$ *mientras los demás continúan con la estrategia* d^i *para* $i \neq j$.

En el caso de los ladrones tenemos que para el jugador $i \in$ {Preso 1, Preso 2} siempre es una mejor estrategia Confesar que No confesar, es decir, para cada estrategia que juegue el prisionero j, la pérdida del prisionero i será menor si habla que si calla.

Definición 2.4. *En el juego en forma estratégica de n jugadores,* $G = \{N, \{D^j\}_{j\in N}, \{\phi_j\}_{j\in N}\}$ *decimos que el vector de estrategias* $(\tilde{d}^1, \ldots, \tilde{d}^n)$, *donde* $\tilde{d}^j \in \{D\}^j$ *para todo* $j \in N$, *constituye un equilibrio de Nash si para cada jugador* i, $\tilde{d}^i$ *es la mejor respuesta del jugador* i, *o al menos una de ellas, a las estrategias de los otros* $n-1$ *jugadores , es decir*

$$\phi_i(\tilde{d}^1, ..., \tilde{d}^{i-1}, \tilde{d}^i, \tilde{d}^{i+1}, ..., \tilde{d}^n) \geq \phi_i(\tilde{d}^1, ..., \tilde{d}^{i-1}, d^i, \tilde{d}^{i+1}, ..., \tilde{d}^n)$$

para toda $d^i \in D^i$. *Donde el vector* $(\tilde{d} \mid d^i)$ *nos representa al perfil estratégico* $\tilde{d}$ *en donde todas las entradas* j *con* $j \neq i$ *son iguales a* $\tilde{d}^j$ *y la entrada i-ésima es igual a* d^i.

Claramente el estado del juego en donde los dos presos deciden confesar es un equilibrio de Nash, por lo cual ninguno querrá cambiar su estrategia, ya que, están obteniendo el mejor pago que pueden asegurar independientemente de la estrategia que elija el otro preso. Después de este pequeño análisis fácilmente alcanzamos a vislumbrar lo que pasará con cada uno de los presos al momento que se les pida su declaración: Se acusarán mutuamente.

Si al principio del problema nos hubieran dicho que casi seguramente los dos presos se culparían, quizá nos hubiera sorprendido, dado que parece mas lógico optar por pasar 2 años en la cárcel que 5, a este problema con la paradójica elección por parte de los jugadores se le conoce como El dilema del prisionero. Es importante notar que la ambición de los jugadores es la que hace que el pago recibido al final por todos, sea menor al que podrían obtener si existiera una verdadera cooperación entre los involucrados.

2.1.1. Modelo del duopolio de Cournot

En 1838 el matemático francés Antoine Augustin Cournot publicó su obra *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* en la cual desarrolló el modelo que a partir de entonces se conoce como el duopolio de Cournot; grosso modo este modelo esboza la manera en que interactúan dos empresas cuando éstas son las únicas que producen un bien, es decir, cuando dichas empresas mantienen un duopolio en el mercado. La importancia de este modelo en el ámbito económico radicó en el énfasis que se le dió a la interdependencia de las decisiones de las empresas, relación que la economía clásica no tomaba en cuenta. De la misma manera, más de un siglo después el modelo fue retomado para su estudio en el área de la teoría de juegos, en donde se mostró que el equilibrio que Cournot había determinado en su planteamiento no eran más que un equilibrio de Nash de un caso particular de un juego no cooperativo. A continuación desarrollamos el modelo.

Plantearemos el modelo de manera general para cualquier oligopolio. Supongamos que en el mercado únicamente n empresas producen cierto bien,[1] el cual posee características idénticas y cuyo costo de producción de cada unidad es c sin importar la empresa que se encargue de su manufactura ni la cantidad de artículos producidos. Asimismo la demanda por parte de los consumidores para dicho bien es d, con $d - c > 0$. Cada empresa i es libre de decidir producir la cantidad q_i con $i = 1, ..., n$ por lo tanto afirmamos que las q_i´s son independientes. Hasta este momento las hipótesis aquí planteadas no nos han mostrado la relación de interdependencia de las empresas y sus desiciones que habíamos mencionado en la introducción; para modelar este hecho Cournot propuso que el precio del producto en el mercado estuviera determinado por la función

$$p(q) = d - \sum_{j=1}^{n} q_j \tag{2.1}$$

la cual claramente refleja esa dependencia de la que hemos hablado. Por un lado cada empresa elegirá libremente su producción, pero, al mismo tiempo, tratará de encontrar un punto óptimo, tomando en cuenta la producción de las otras empresas, donde la elaboración y venta de los artículos le sea lo más redituable posible. Analizando más de cerca la ecuación podemos reducir el intervalo de oscilación de la producción de las empresas, observemos que $p(q) = 0$ si y sólo si $d = \sum_{i=1}^{n} q_j$ con lo cual podemos inferir que ninguna empresa bajo ninguna circustancia querrá tener una producción mayor a d. Es decir, directamente no hay obstáculo alguno para que una empresa abarrote el mercado con sus productos, no obstante si suponemos que la empresa actúa de manera racional, es esta misma actitud la que le impedirá llevar a cabo dicha estrategia.

Igualmente, es importante percatarnos de la forma en que la función (2.1) refleja los cambios de precio del producto respecto a las variaciones que se presentan en la oferta y la demanda. Por ejemplo, para una oferta fija, conforme la demanda aumenta, el precio del bien se eleva, contrario a lo que sucede si se presenta una disminución en la demanda del producto; en el caso de una demanda fija, mientras la oferta del bien aumenta, el precio disminuye proporcionalmente a esta, opuesto a lo que sucedería si las empresas redujeran sus niveles de producción.

Por lo descrito anteriormente podemos decir que el precio que la función determina es un precio de equilibrio, ya que iguala la oferta con la demanda. Finalmente nos da una interpretación plausible para d, la demanda que existiría del bien si su precio fuera cero.

Para terminar el planteamiento de este problema supondremos que las ganancias de las empresas son simplemente el beneficio neto, lo que equivale a la diferencia entre el importe por los artículos vendidos menos el costo de producción

[1] Con $n \in \mathbb{N}$ y suficientemente pequeño para crear un oligopolio

de los mismos[2], denominaremos a ésta la función de pago

$$\pi_i(q) = q_i p(q) - q_i c$$

con $i = 1, ..., n$.[3]

Bajo este contexto Cournot modeló el comportamiento que seguían las producciones de las empresas, considerando siempre que cada una perseguía obtener el mayor beneficio posible. Nosotros analizaremos el problema desde una perspectiva de teoría de juegos, sin alterar con esto el resultado.

Recolectemos primero los elementos necesarios para el juego. En el juego del oligopolio de n empresas el conjunto de jugadores es $N = \{e_1, ..., e_n\}$, con un conjunto de estrategias [4] $q_i \in [0, d]$ y las funciones de pago de las empresas son

$$\pi_i(q) = q_i \big[d - c - \sum_{j=1}^{n} q_j\big] \tag{2.2}$$

para $i = 1, ..., n$. Con lo anterior queda determinado nuestro juego.

De aquí que el problema de la empresa i, suponiendo que las otras empresas han decidido producir q_j, sea

$$\max_{q_i > 0} \; q_i \big[d - c - \sum_{j=1}^{n} q_j\big]$$

donde aseguramos que se alcanza el máximo cuando $\frac{\partial}{\partial q_i}\pi_i = 0$ ya que $\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\pi_i = -2$ y la función es continua sobre q_i para $i = 1, ..., n$.

Al realizar este procedimiento encontramos la mejor respuesta para la empresa i dado que las otras empresas decidieros producir q_j para $j \neq i$. Al hacerlo para todas las empresas, obtenemos un sistema de ecuaciones, del cual aseguramos que su solución es el equilibrio de Nash de juego de Cournot.

Analicemos primero el modelo para un monopolio, es decir, para $n = 1$. Dadas una demanda d, un costo marginal igual a c, con $d - c > 0$ y una producción q_1, el precio del producto del bien queda determinado por la función $p(q) = d - q_1$ y la función de pago de la empresa es

$$\pi_1(q_1) = q_1 \big[d - q_1 - c\big] \tag{2.3}$$

con lo anterior, al igual que en el problema de la empresa, el objetivo de e_1 es maximizar sus ganancias es decir

$$\max_{q_1 \geq 0} q_1 \big[d - q_1 - c\big]$$

[2] Volvemos a hacer uso del supuesto de costos fijos iguales a cero.

[3] Esta función es la que en el estudio de la empresa denominamos función de ganancia, pero como ahora estamos abordando el problema desde la teoría de juegos en esta sección la llamaremos función de pago.

[4] Donde suponemos que el producto es infinitamente divisible

al resolver tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,q_1}\pi_1 &= 0\\ -2q_1+d-c &= 0\\ q_1^* &= \frac{d-c}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto cuando una empresa posee el monopolio del mercado la cantidad de producción que maximiza su ganancia es $\frac{d-c}{2}$ obteniendo

$$\pi_1\Big(\frac{d-c}{2}\Big)=\frac{d-c}{2}\Big[d-\Big(\frac{d-c}{2}\Big)-c\Big]=\Big(\frac{d-c}{2}\Big)^2$$

y vendiendo el producto a un precio

$$p(q_1^*)=\frac{d+c}{2}$$

denominaremos a $\frac{d-c}{2}$ cantidad de producción de monopolio (q_m) y al pago obtenido ganancia de monopolio (π_m).

Analizemos ahora el modelo para un duopolio, es decir, para $n=2$. Dadas dos empresas dentro de la economía con una demanda d, un costo marginal igual a c, con $d-c>0$, el precio del producto del bien queda determinado por la función $p(q)=d-q_1-q_2$ y la función de pago de la empresa es

$$\pi_i(q)=q_i\big[d-q_1-q_2-c\big]$$

para $i=1,\,2$.

Como hemos mencionado, cada empresa elige libremente sus cantidades de producción, con base en esto la entidad contraria busca la mejor respuesta a esta decisión; desarrollemos este proceso para la empresa 1. Maximizar π_1 dado que e_2 ha decidido producir una cantidad fija de artículos q_2^*, se reduce a

$$\max_{q_1\geq 0} q_1\big[d-q_1-q_2^*-c\big]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_1}\pi_1 &= 0\\ d-2q_1-q_2^*-c &= 0\\ q_1^* &= \frac{d-q_2^*-c}{2}\end{aligned}$$

aplicando el mismo procedimiento tenemos que la mejor respuesta de la empresa 2 a la decisión de producción q_1^* por parte de la empresa 1 es

$$q_2^* = \frac{d-q_1^*-c}{2}$$

con lo cual obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} q_1^* & = \frac{d-q_2^*-c}{2} \\ q_2^* & = \frac{d-q_1^*-c}{2} \end{cases}$$

que resolviendo nos queda

$$q_1^* = q_2^* = \frac{d-c}{3}$$

Por lo tanto la estrategía $q_1 = \frac{d-c}{3}$ por parte de la empresa 1 como respuesta a la decisión de producción $q_2 = \frac{d-c}{3}$ elegida por la empresa 2, maximiza las ganancías de la primera. Análogamente para la empresa 2 la cantidad $q_2 = \frac{d-c}{3}$ maximiza sus ganancías ante la estrategía $q_1 = \frac{d-c}{3}$ de la empresa 1. Es decir, el perfil estratégico $(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{d-c}{3}, \frac{d-c}{3}\right)$ constituye un equilibrio de Nash para el duopolio de Cournot.

Sustituyendo las estrategías mencionadas para cada una de las empresas en las respectivas funciones de pago, obtenemos

$$\pi_1(q_1^*, q_2^*) = \pi_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{d-c}{3}\left[d - \frac{2}{3}(d-c) - c\right] = \left(\frac{d-c}{3}\right)^2$$

y el precio final del producto

$$p(q_1^*, q_2^*) = \frac{d+2c}{3}$$

Supongamos que partimos de un monopolio en el mercado, en donde la producción óptima es $q_m = \frac{d-c}{2}$ obteniendo una ganancía de $\left(\frac{d-c}{2}\right)^2$. Si por alguna razón ajena a nuestro conocimiento, la empresa se debiera dividir en dos, formandose dos empresas independientes administradas por un mismo dueño y donde las dos debieran producir las mismas cantidades. Bajo estas suposiciones es lógico pensar que el empresario calcularía la producción que maximiza las ganancias de su emporio y sencillamente asignaría la mitad de esta a cada una de las empresas, es decir la cantidad de monopolio entre dos.

Es decir, el empresario propone el perfil de estrategias $\left(\frac{d-c}{4}, \frac{d-c}{4}\right)$ para sus empresas, obteniendo así cada una de las empresas una ganancía

$$\pi_1\left(\frac{d-c}{4}, \frac{d-c}{4}\right) = \pi_2\left(\frac{d-c}{4}, \frac{d-c}{4}\right) = \frac{(d-c)^2}{8}$$

Recordando que en el desarrollo del duopolio Cournot las ganancias obtenidas por cada una de las empresas era $\left(\frac{d-c}{3}\right)^2$, podemos hacer una comparación entre dicho resultado y el mostrado previamente, en el cual la ganancia es $\frac{(d-c)}{8}^2$; claramente $\frac{(d-c)^2}{9} < \frac{(d-c)}{8}^2$ pero ¿cuál es el factor que hace que las ganancias dependan del enfoque del problema? Por un lado en el modelo del duopolio de Cournot partiamos del supuesto que las empresas eran independientes y que cada una individualmente buscaria maximizar su beneficio y en el segundo caso las dos empresas coordinadamente fijaban y acordaban la produccion de cada una de ellas. ¡Sorpresa! el dilema del prisionero no resulto ser tan ajeno a la realidad.

Analizemos ahora el mismo problema para $n = 3$ donde, al igual que en el planteamiento de Cournot las empresas actuarán de manera individualista para maximizar sus ganancias. Bajo las mismas hipótesis de una demanda d y un costo marginal igual a c, con $d - c > 0$ y con nuestras respectivas funciones de precio y de pago

$$\begin{aligned} p(q) &= d - q_1 - q_2 - q_3 \\ \pi_i(q) &= q_i\big[d - q_1 - q_2 - q_3 - c\big] \end{aligned}$$

para $i = 1,\, 2,\, 3$. Para determinar el equilibrio de Nash de este juego procedemos como lo hemos venido haciendo hasta ahora. Sean q_2^*, q_3^* las estrategias de las empresas e_2 y e_3 respectivamente. Entonces la empresa 1 enfrenta el problema

$$\max_{q_1 \geq 0} q_i\big[d - q_1 - q_2^* - q_3^* - c\big]$$

donde resolviendo tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1}\pi_1 &= 0 \\ d - 2q_1 - q_2^* - q_3^* - c &= 0 \\ q_1^* &= \frac{d - c - q_2^* - q_3^*}{2} \end{aligned}$$

de manera similar obtenemos para las empresa 2 y 3

$$\begin{aligned} q_2^* &= \frac{d - c - q_1^* - q_3^*}{2} \\ q_3^* &= \frac{d - c - q_1^* - q_2^*}{2} \end{aligned}$$

con lo cual llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} q_1^* &= \frac{d-c-q_2^*-q_3^*}{2} \\ q_2^* &= \frac{d-c-q_1^*-q_3^*}{2} \\ q_3^* &= \frac{d-c-q_1^*-q_2^*}{2} \end{cases}$$

que al resolver simultáneamente obtenemos

$$q_1^* = q_2^* = q_3^* = \frac{d - c}{4}$$

Sustituyendo esta cantidad en las respectivas funciones de pago nos da la ganancia para cada una de las empresas

$$\pi_i\left(q_1^*,\, q_2^*,\, q_3^*\right) = \pi_i\left(\frac{d-c}{4}, \frac{d-c}{4}, \frac{d-c}{4}\right) = \frac{d-c}{4}\left[d - \frac{3}{4}(d-c) - c\right] = \left(\frac{d-c}{4}\right)^2$$

para $i = 1, 2, 3, 4$. Y el precio final del producto

$$p(q_1^*, q_2^*, q_3^*) = \frac{d + 3c}{4}$$

Una vez más llegamos a que las empresas obtienen una ganancia menor a la que podrían obtener al dividirse la cantidad de producción del monopolio q_m equitativamente entre las tres, es decir, si las empresas acordaran producir cada una $\frac{q_m}{3}$ sus utilidades serían de

$$\pi_i\left(\frac{q_m}{3}, \frac{q_m}{3}, \frac{q_m}{3}\right) = \pi_i\left(\frac{d-c}{6}, \frac{d-c}{6}, \frac{d-c}{6}\right) = \frac{d-c}{6}\left[d - \frac{1}{2}(d-c) - c\right] = \frac{(d-c)^2}{12}$$

donde claramente podemos observar que

$$\frac{(d-c)^2}{12} > \frac{(d-c)^2}{16}$$

la primera vez que observamos este fenómeno nos asombró, en esta ocasión era un final de fácil vaticinio.

Finalmente la siguiente proposición nos ofrece la solución al problema de maximización bajo el contexo de Cournot para n empresas.

Proposición 2.1. *Sean n empresas en un mercado como el descrito arriba, donde la empresa i produce q_i artículos, con $i = 1, ..., n$. Entonces la cantidad q_i que maximiza la ganancia de la empresa i dadas las estrategias de las otras $n-1$ empresas es $q_i = \frac{d-c}{n+1}$ obteniendo una ganancia $\pi_i = \left(\frac{d-c}{n+1}\right)^2$ para $i = 1, ..., n$ y un precio final del producto $p(q^*) = \frac{d+nc}{n+1}$.*

Cabe observar que si el número de empresas n es muy grande, la cantidad que optimiza sus ganancias tiende a cero, el precio unitario del producto tiende al costo unitario y las ganancias se reducen exponencialmente. De la misma manera, dado un mercado saturado de oferta, la decisión de producción de una sola empresa afecta de manera mínima, casi nula, el precio del bien. Con todo lo anterior podemos concluir dado un mercado Cournotiano con n empresas, si n es suficientemente grande el mercado se torna competitivo, es decir, los precios se toman como dados ya que las empresas no tienen injerencia sobre ellos y las ganancias de las empresas tienden a cero.

2.1.2. Teorema de existencia del equilibrio de Nash en estrategias puras

Para asegurar la existencia del equilibrio de Nash en estrategias puras de los modelos subsecuentes demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sea un juego G en forma estrategica $\{N, \{D_j\}_{j\in N}, \{\phi_j\}_{j\in N}\}$, donde el conjunto de estrategias es un subconjunto de un espacio euclideo $D_j \in$*

$\mathbb{R}^m$, con D_j no vacío, compacto y convexo, y la función ϕ_j continua en d y cuasi-cóncava en d_j para todo $j \in N$, $d \in D$ y $d_j \in D_j$. Entonces existe un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Demostración. Dado un perfil de estrategias $\tilde{d} = (\tilde{d}^1, ..., \tilde{d}^n)$ definimos la correspondencia de mejor respuesta del jugador j como

$$\varphi_1^j(\tilde{d}) = \{d^j \in D^j \mid \max \phi_j(\tilde{d} \mid d^j)\}$$

para todo $d^j \in D^j$. Por el teorema del máximo de Berge tenemos que esta correspondencia es compacta y semicontinua superiormente. Por otro lado como ϕ_j es una función cuasi-cóncava entonces la correpondencia de mejor respuesta φ_j es convexa. Sea la correpondencia $\varphi_2 : D \twoheadrightarrow D$ el producto cartesiano de las correspondencias φ_1^j para todo $j \in N$, de aquí que φ_2 es también compacta y semicontinua superiormente. Tenemos que un punto fijo de la correspondencia φ_2 es un perfil estratégico $\tilde{d}$ tal que $\varphi_2(\tilde{d}) = \tilde{d}$ donde $\tilde{d}^j \in \varphi_1^j(\tilde{d})$ para todo $j \in N$, entonces cualquier punto fijo de la correspondencia φ_2 constituye un equilibrio de Nash para este juego.

Para aplicar el teorema de punto fijo de Kakutani basta ver que

i) D es compacto, convexo y no vacío.

ii) $\varphi_2(\tilde{d})$ es convexo.

iii) $\varphi_2(\tilde{d})$ es no vacío.

iv) φ_2 es semicontinua superiormente.

Por definición tenemos que los espacios de entrategias D^j´s son no vacios, compactos y convexos , entonces $D = D^1 \times \cdots \times D^n$ es también un conjunto no vacío, compacto y convexo.

Como la función de pago ϕ_j es cuasi-cóncava para todo $j \in N$, entonces $\varphi_1^j(\tilde{d})$ es convexa para todo $j \in N$, lo que implica que $\varphi_2(\tilde{d})$ también lo sea.

De igual manera, dado que ϕ_j es una función continua, entonces φ_1^j es un problema de optimización de una función continua en un espacio compacto. Por lo tanto ϕ_j alcanza su máximo y $\varphi_1^j(\tilde{d})$ es no vacío al igual que $\varphi_2(\tilde{d})$.

Finalmente sabíamos que el producto de correspondencias semicontinuas superiormente es semicontinua superiormente, entonces, dado que φ_1^j es semicontinua superiormente para todo $j \in N$, φ_2 los es.

Por lo tanto, por el teorema de punto fijo de Kakutani existe un punto fijo $\tilde{d} \in D$ que constituye un equilibrio de Nash. □

Los ejemplos mostrados arriba poseen en común la característica de ser juegos que se desarrollan en una sola etapa, es decir, las decisiones de los jugadores son simultáneas[5]. En el siguiente apartado extenderemos la noción que teníamos a juegos de varias etapas o extensivos, para nuestros fines nos bastará con dos etapas.

[5]En nuestro contexto simultaneidad no se refiere a que todas las decisiones necesariamente sean tomadas en el mismo instante. Basta con que los jugadores no conozcan entre si las decisiones tomadas por los otros jugadores sino hasta que todos hayan decidido y sea momento de calcular los pagos finales.

2.2. Juegos extensivos sin partidas infinitas ni jugadas de azar

Como lo comentamos en un principio la historia de la teoría de juegos está intimamente relacionada con ciertos problemas de economía. Los contextos en que se desarrollan algunos problemas económicos en donde se desea aplicar la teoría de juegos incluyen estructuras dinámicas, los modelos de teoria de juegos que se utilizan para este tipo de situaciones se denominan juegos en forma extensiva. Como veremos a continuación la forma extensiva de un juego nos indica de manera explicita el orden en que los jugadores juegan y la información que poseen los jugadores en el momento de su decisión.

Para abordar el tema describiremos algunas de las características que usaremos en nuestros modelos extensivos.

Primeramente si en cualquier etapa k del juego todos los jugadores conocen las decisiones tomadas en todas las etapas previas $0, 1, \ldots, k-1$ del juego entonces diremos que existe información perfecta. Por otro lado si la función de pago de cada jugador es conocida por todos los demás jugadores diremos que existe información completa.

Respecto a las decisiones que se toman en la etapa k del juego, es necesario que sean simultáneas, es decir, si a un jugador le toca decidir en la etapa k del juego, entonces él escoge su acción sin conocer las decisiones que están siendo tomadas en ese mismo momento por todos los otros jugadores que están jugando en esa etapa.[6]

En general el conjunto estratégico del jugador t en la etapa 1 depende de lo que haya sucedido previamente, por lo tanto denotaremos como $A_t(h^1)$ al conjunto de posibles estrategias en la etapa dos dada la historia del juego h^1; este razonamiento se puede seguir para cualquier historia h^k obteniendo que los conjuntos estratégicos consistentes con la historia h^k en la etapa $k-1$ quedan determinados por $A_t(h^k)$ para todo $t \in T$.

2.2.1. Equilibrio de Nash y equilibrio perfecto en subjuegos

Con la notación desarrollada y siguiendo bajo el mismo contexto pasamos a las siguientes definiciones.

Definición 2.5. *Una estrategia pura para el jugador t consiste en el plan de contingencia que le indica la estrategia a jugar en la etapa k del juego, para cada posible historia h^k .*

[6]Notemos que esta última afirmación no excluye la opción de que los jugadores jueguen alternadamente, supongamos un juego con un conjunto de jugadores $T = T' \cup T''$, en donde el subconjunto T' de los jugadores toman sus decisiones en una etapa k mientras los de T'' únicamente observan lo que sucede, y los del subconjunto T'' toman sus decisiones en la etapa $k+1$ mientras los del T' observan lo que pasa, en este caso podremos decir que todos los jugadores T juegan en la etapa k, en donde la estrategia de los jugadores en T'' es la acción "no hacer nada", igualmente para la etapa $k+1$ podemos decir que todos los jugadores juegan si aseguramos que la estrategias de los jugadores del conjunto T' es la acción "no hacer nada".

Es decir, sea H^k el conjunto de todas las posibles historias en la etapa k del juego y

$$A_t(H^k) = \cup_{h^k \in H^k} A_t(h^k)$$

entonces una estrategia pura para el jugador t es una secuencia de funciones $\{s_t^k\}_{k=0}^K$, donde $s_t^k(h^k) \in A_t(h^k)$ para toda h^k. A partir de esto se tiene de manera directa que las acciones en la etapa 0 son $a^0 = s^0(h^0)$ y para la etapa 1 $a^1 = s^1(a^0)$ que serán, por el momento, las únicas de nuestro interés.

Definición 2.6. *Un equilibrio de Nash en estrategias puras consiste en un perfil estratégico s tal que ningún jugador $t \in T$ pueda obtener un mejor pago con la estrategia $\tilde{s}^t$ para toda $\tilde{s}^t \in S^t$, es decir*

$$u_t(s) \geq u_t(s \mid \tilde{s}^t)$$

Antes de continuar con los siguientes ejemplos definiremos un equilibrio perfecto en subjuegos, para esto comentaremos ciertos detalles.

Recordando la definición de un juego en forma normal, llevaremos un juego extensivo a su forma normal. Dado que en la etapa k del juego todos los jugadores conocen la historia h^k de decisiones tomadas hasta antes de la etapa k, podemos ver el juego extensivo como un juego normal $G(h^k)$. Notemos que si las acciones desde el estado k hasta el estado K están determinadas por a^k hasta a^K entonces la historia final h^{K+1} queda como $h^{K+1} = (h^k, a^k, a^{k+1}, \ldots, a^K)$, a partir de esto podemos definir a la función de pago del juego $G(h^k)$ como $u_t(h^{K+1})$ para todo $t \in T$. Finalmente los conjuntos estratégicos de los jugadores, como ya lo mencionamos, quedan definidos como una función de h^k es decir $A_t(h^k)$.

Como es de imaginarse, dado un perfil de estrategias s del juego completo, se induce un perfil estratégico $s[h^k]$ del juego $G(h^k)$, en donde para cada jugador $t \in T$ el perfil estratégico $s_t[h^k]$ es simplemente la restricción de s_t a todas las historias consistentes con h^k.

Definición 2.7. *Un perfil estratégico s de un juego de varias etapas con incformación completa es un equilibrio perfecto en subjuegos si para cada h^k la restricción $s[h^k]$ del juego $G(h^k)$ es un equilibrio de Nash de $G(h^k)$.*

Esta intrincada definición se ve reducida al algoritmo de inducción hacia atrás cuando estamos en un juego con partidas finitas e información completa.

2.2.2. Inducción hacia atrás

Para determinar el equilibrio perfecto en subjuegos de un juego extensivo con partidas finitas e información pefecta generalmente se utiliza el algoritmo denominado inducción hacia atrás, el cual determina por separado los planes de contingencia de cada uno de los jugadores en cada etapa del juego y los anida de manera retrospectiva para determinar el equilibrio. Analicemos un juego de dos etapas con información completa y perfecta para explicar el algoritmo.

Sea un juego que temporalmente se desarrolla de la siguiente manera

i) El jugador 1 toma su decisión de acción a_1.

ii) El jugador 2 observa a_1 y toma su decisión a_2.

iii) Se calcula el pago de los jugadores como $u_i(a_1, a_2)$ para $i = 1, 2$.

Para aplicar el algoritmo partiremos de la última etapa del juego, es decir, la etapa donde le toca decidir al jugador 2 su estrategia a jugar. Dado que estamos en un juego con información perfecta entonces sabemos que la historia en la etapa 1 del juego es $h^1 = a_1$ de donde el jugador 2 sabe que el jugador 1 jugó a_1 a partir de esto simplemente le queda resolver el problema de maximización

$$\max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1, a_2)$$

Supongamos que dicho problema tiene una solución única, la cual denominaremos mejor respuesta del jugador 2 a la acción a_1 por parte del jugador 1 y denotaremos por $r_2(a_1)$ para todo $a_1 \in A_1$. Con esta información en mente retrocedemos una etapa del juego para llegar a la etapa en donde le toca decidir al jugador 1 su estrategia. Dado que es un juego con información completa, el jugador 1 conoce la función de ganancía del jugador 2 con lo cual facílmente puede obtener su función de mejor respuesta $r_2(a_1)$ para cualquier estrategia a_1 que el jugador 1 decida jugar. Entonces el problema del primer jugador se reduce a

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, r_2(a_1))$$

Supongamos que este problema también posee una solución única a_1^*.

Por lo tanto el perfil estratégico $(a_1^*, r_2(a_1^*))$ es el resultado de la inducción hacia atrás y constituye un equilibrio de Nash de este juego ya que los dos jugadores están jugando con su mejor respuesta, es decir, ninguno puede obtener un mejor pago con alguna otra estrategia.

Apliquemos a continuación la inducción hacia atrás para resolver un modelo muy conocido dentro de la economía.

2.2.3. Modelo de Stakelberg

En 1984 el economista alemán Heinrich Freiherr von Stackelberg propuso un modelo dinámico para un duopolio, en donde una de las empresas era la lider y la otra la seguidora. Bajo los supuestos del duopolio de Cournot y este último de liderazgo tenemos un juego que temporalmente se desarrolla de la siguiente manera.

i) La empresa líder toma su decisión de producción $q_1 \geq 0$.

ii) La empresa seguidora observa la decisión de la líder y escoge producir $q_2 \geq 0$.

iii) Se determinan los precios como en el caso de Cournot y se calculan las ganancias de las empresas como

$$\pi_i(q_1,\, q_2) = q_i\big[d - c - \sum_{i=1}^{2} q_i\big]$$

Calculemos uno de los equilibrios de este juego con el algoritmo de inducción hacia atrás. Primeramente sea la reacción de la empresa 2 a una decisión de producción arbitraria q_1 de la empresa 1. Es decir, el conjunto de mejores respuestas de la empresa 2 a q_1 es

$$r_2(q_1) = \{q_2 \in Q_2 \mid \max_{q_2 \geq 0} q_2\big[d - c - q_1 - q_2\big]$$

de donde

$$r_2(q_1) = \frac{d - c - q_1}{2}$$

Observemos que en el duopolio de Cournot obteníamos la misma expresión para q_2^*, pero, notemos que en este caso la expresión es realmente la reacción de la empresa 2 ante una decisión de la empresa 1, mientras que en el duopolio de Cournot la expresión era simplemente la mejor respuesta de la empresa 2 a una cantidad hipotética que era determinada simultáneamente por la empresa 2.

Regresando a la solución del problema, cuando a la empresa 1 le corresponde tomar su decisión sabe que la respuesta de la empresa 2 a una decisión q_1 que ella tome es $r_2(q_1)$, por lo tanto en la primera etapa del juego la empresa 1 se enfrenta al problema

$$\max_{q_1 \geq 0} \pi_1\left(q_1,\, r_2(q_1)\right)$$

es decir

$$\max_{q_1 \geq 0} q_1\left[d - c - q_1 - r_2(q_1)\right]$$

que al resolver nos da

$$q_1^* = \frac{d - c}{2}$$

lo que implica

$$q_2^* = \frac{d - c}{4}$$

de aqui tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_1(q) &= \frac{d - c}{8} \\ \pi_2(q) &= \frac{d - c}{16} \end{aligned}$$

Observemos que bajo este esquema las ganancias de la empresa 1 son mejores que cuando tiene que suponer la cantidad de producción de la empresa 2, en este caso conoce exactamente la cantidad de producción de la empresa 2 para cada q_1 que ella decida. En cambio la empresa 2 recibe una ganancia menor que en el duopolio de Cournot.

Veámos como se aplica la inducción hacia atrás cuando tenemos jugadas simultáneas en cada etapa del juego. Analicemos un juego de dos etapas con información completa e imperfecta.

Sea un juego de dos etapas con un conjunto de 4 jugadores estructurado temporalmente de la siguiente manera.

i) Los jugadores 1 y 2 escogen simultáneamente sus acciones $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$.

ii) Los jugadores 3 y 4 observan el perfil (a_1, a_2) y escogen simultáneamente $a_3 \in A_3$ y $a_4 \in A_4$.

iii) Se calculan las gancias como $u_i(a_1, a_2, a_3, a_4)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Para determinar el equilibrio de Nash de este juego seguiremos un razonamiento semejante al del juego con información completa y perfecta, solo que en este caso tendremos que resolver el subjuego que se obtiene en cada etapa.

Primeramente nos situamos en la última etapa del juego y tenemos $h^1 = (a_1, a_2)$ de donde los jugadore 2 y 3 plantean sus problemas de maximización

$$\begin{aligned} &\max_{a_3 \in A_3} u_3(a_1, a_2, a_3, a_4) \\ &\max_{a_4 \in A_4} u_4(a_1, a_2, a_3, a_4) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Supongamos que para todo perfil $(a_1, a_2) \in (A_1, A_2)$ existe un equilibrio de Nash $(a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$ que resuelve los problemas de maximización (2.4). Entonces en la primera etapa del juego los jugadores 1 y 2 prevén que el comportamiento de los jugadores 3 y 4 en la segunda etapa del juego vendrá dado por $(a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$. Por lo tanto, después de este razonamiento, el juego queda reducido temporalmente a

i) Los jugadores 1 y 2 escogen simultáneamente sus acciones $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$.

ii) Se calculan las gancias como $u_i(a_1, a_2, a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Es decir, tenemos que resolver el juego que se presenta en la etapa 1 de este juego para los problemas de maximización

$$\begin{aligned} &\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, a_2, a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2)) \\ &\max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1, a_2, a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2)) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Supongamos que en la primera etapa existe un equilibrio de Nash (a_1^*, a_2^*) que es solución a los problemas de maximización (2.5). Por lo tanto el conjunto de estrategias $(a_1^*, a_2^*, a_3^*(a_1^*, a_2^*), a_4^*(a_1^*, a_2^*)$ es el resultado de la inducción hacia atrás, es decir, el equilibrio perfecto en subjuegos de este juego.

Capítulo 3

Modelos de intercambio puro

Como lo comentamos en la introducción de este trabajo la fundamentación del equilibrio Cournot-Walras en economías con y sin producción ha sido un problema desde hace ya algún tiempo. Con el fin de proponer una posible solución para este problema en economías de intercambio puro, a continuación desarrollamos tres modelos, uno con un conjunto de consumidores homogéneo, y los dos siguientes con un conjunto de consumidores compuesto de pequeños y grandes consumidores. A partir de los mismos en el siguiente capítulo se construirá un redefinición de uno de ellos para ofrecer una posible explicación a la fundamentación del equilibrio Cournot-walras en economías de intercambio puro.

3.1. Modelo con un conjunto uniforme de consumidores

A continuación presentamos el modelo desarrollado en 1977 por Shapley y Shubik, y con el cual, como se mencionó al principio, se abrió la linea de investigación de la fundamentación del equilibrio Cournot-Walras a través de un enfoque de teoría de juegos, al considerar un comportamiento estratégico para todos los consumidores.

3.1.1. Modelo de Shapley y Shubik

En 1977 los economistas estadounidenses Lloyd Shapley y Martin Shubik presentaron la modelación del equilibrio no cooperativo de una economía de intercambio puro en donde los precios dependían única y naturalmente de las decisiones de compra y venta de los consumidores, de esta manera, hacían a un lado el supuesto clásico del modelo del equilibrio general en donde los individuos debían mirar los precios como dados.

La pieza clave del enfoque propuesto por ellos radicó en el uso de una precisa y única mercancía como mercancía universal de intercambio o dinero, la cual podía o no poseer un valor intrínseco. El modelo fue abordado como un juego estratégico no cooperativo en donde las estrategias eran cantidades, siguiendo así la esencia de Nash y Cournot. Otra de sus características fue que todas las reglas del juego, incluyendo el mecanismo de formación de precios, eran independientes del comportamiento o contexto del equilibrio, suposiciones que, en cambio, tomaban sentido a través de las soluciones del juego.

El modelo propuesto por ellos consiste, como ya se mencionó, en un mercado de intercambio puro en donde cada consumidor posee inicialmente una dotación de bienes, incluyendo el bien "efectivo", a partir de esto cada uno de ellos decide que cantidad de cada uno de sus bienes diferentes del dinero quiere llevar al mercado con el propósito de ser vendidos, de la misma forma reparten su presupuesto monetario, asignando a cada mercado de bienes la cantidad que están dispuestos a gastar en el consumo de dicho bien, sin saber el precio que este tendrá; a partir de lo anterior se determinan los precios que hacen que la oferta sea igual a la demanda, es decir, se utiliza un modelo clásico del equilibrio general para la formación de los precios.

Como las estratégias de los consumidores se ven reducidas exclusivamente a las cantidades ofrecidas de bienes y "efectivo", se dice que este modelo es una generalización del enfoque original de Cournot. Asimismo, recordando el gráfico de la caja de Edgeworth, este modelo se denomina a veces la generalización de la caja de Edgeworth por describir una economía en donde los consumidores intercambian sus bienes para mejorar su bienestar. Pero a diferencia de este último nuestro modelo sí incluye precios y a la mercancía dinero.

Formalmente, sea un juego estratégico con un conjunto T constituido por m consumidores intercambiando entre ellos $l+1$ bienes, en donde el $l+1-\acute{e}simo$ bien desempeña un papel operativo especial, además de su posible utilidad como bien de consumo.[1] Para todo $t \in T$ existe una dotación inicial fija $w(t) \in \mathbb{R}_+^{l+1}$, tal que $w(t) = (w_1(t), w_2(t), ..., w_{l+1}(t))$, donde $w_{l+1}(t)$ representa la cantidad del bien efectivo que poseee el consumidor t y un conjunto de preferencias representadas por funciones de utilidad cóncavas, continuas y estrictamente crecientes $u_t : \mathbb{R}_+^{l+1} \to \mathbb{R}$. Los consumidores pueden entonces entrar a cada uno de los mercados como vendedor, comprador, ambos o ninguno. Sean los vectores q^t, $b^t \in \mathbb{R}_+^l$ y $s^t \in \mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}_+^l$ tales que $q^t = (q_1^t, ..., q_l^t)$, $b^t = (b_1^t, ..., b_l^t)$ y $s^t = (q^t, b^t)$. Donde la entrada q_j^t representa la cantidad del bien j que el consumidor t envía al mercado, a concesión, para ser vendida, y la entrada b_j^t, $j = 1, ..., l$, representa la cantidad del bien efectivo que el comerciante t desea gastar en la compra del bien j para $j = 1, ..., l$ y $t \in T$. Definimos el conjunto de estrategias de jugador t $S^t = \left\{ s^t \in \mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}_+^l \mid q_j^t \leq w_j(t),\ j = 1, ..., l \text{ y } \sum_{j=1}^l b_j^t \leq \mathrm{w}_{l+1}(t),\ j = 1, ..., l \right\}$ para todo $t \in T$. Sea $S = S^1 \times \cdots \times S^m$ decimos que el vector de estrategias $s \in S$ es un perfil estratégico; de igual manera sea $S^{-i} = S^1 \times \cdots \times S^{i-1} \times S^{i+1} \times \cdots \times S^m$ definimos al perfil estratégico $s_j^{-i} \in S_j$ como el perfil que incluye todas las estrategias de los jugadores, excepto la del i-ésimo jugador. Finalmente deno-

[1] De aquí en adelante nos referiremos a la mercancía $l+1$ simplemente como efectivo, sin preocuparnos por el valor intrínseco que este pueda tener ni por distintos papeles que lleva a cabo dentro de la economía; únicamente nos concentraremos en su rol como medio de pago.

taremos por $\bar{q}_j = \sum_{t\in T} q_j^t$ y análogamente $\bar{b}_j = \sum_{t\in T} b_j^t$. Una vez definido lo anterior pasaremos ahora a la descripción del mecanismo de formación de precios en nuestro modelo.

Observemos que en el j-ésimo mercado, es decir, el mercado donde se comercia únicamente el bien j, con $j = 1, ..., l$, la cantidad total de mercancía recibida a concesión para ser vendida es igual a $\bar{q}_j$, de la misma manera la cantidad total de efectivo recibido para la compra del mismo bien es $\bar{b}_j$; por lo tanto, en el afán de lograr que el mercado se limpie definimos

$$p_j = \begin{cases} \bar{b}_j/\bar{q}_j & \text{si } \bar{q}_j \neq 0 \\ 0 & \text{si } \bar{q}_j = 0 \end{cases}$$

$j = 1, ..., l$. A partir de esto obtenemos las asignaciones finales del consumidor t

$$x_j^t(\mathrm{s}) = \begin{cases} w_j(t) - q_j^t + b_j^t(\bar{q}_j/\bar{b}_j) & \text{si } \bar{b}_j \neq 0 \\ w_j(t) - q_j^t & \text{si } \bar{b}_j = 0 \end{cases}$$

$j = 1, ..., l$. Y para el bien $l+1$-ésimo tenemos

$$x_{l+1}^t(\mathrm{s}^t) = w_{l+1}^t - \sum_{j=1}^{l} b_j^t + \sum_{j=1}^{l} q_j^t p_j$$

para todo $t \in T$.

La asignación anterior constituye una asignación viable y sin desperdicio, fácilmente se muestra esto al sumar la asignación sobre todos los agentes y ver que

$$\sum_{t\in T} x_j^t = \sum_{t\in T} w_j^t$$

para $j = 1, ..., l$. Finalmente calculamos el pago recibido por cada consumidor, definimos a la función de pago de nuestro juego como $\varphi^t(\mathrm{s}^t) = u^t(x^t(\mathrm{s}))$. Con el desarrollo anterior queda totalmente caracterizado el juego m-personal en forma estratégica de una economía de intercambio puro, al cual en lo sucesivo nos referiremos como el modelo de Shapley original.

Como ya se había mencionado usaremos la notación $\hat{s} \mid s^t$ para referirnos al perfil estratégico obtenido al reemplazar con $s^t \in S^t$ a $\hat{s}^t$ en s.

Definición 3.1. *Decimos que el perfil estratégico $\hat{s}$ constituye un equilibrio de Nash si*

$$u_t(x(\hat{\mathrm{s}})) \geq u_t(x(\hat{\mathrm{s}} \mid s^t)),$$

para todo $t \in T$ y toda $s^t \in S^t$.

Hagamos ahora una pausa para comentar algunas características inherentes a este juego que hasta el momento no se han señalado. Imaginemos un escenario en donde el jugador t, para algún $t \in T$, desea comprar el bien j, para algún $j = 1, ..., l$, y por lo mismo ofrece una cantidad $b_j^t > 0$ mientras, al mismo tiempo, se registra en el mercado $\bar{q}_j = 0$, veamos que implicaciones trae para el jugador este contexto. Primeramente la asignación final del bien j se ve reducida a

$$x_j^t = w_j^t - q_j^t$$

es decir, el consumidor recibe una cantidad igual a 0 de la mercancía j, nada diferente de lo que nos podríamos esperar. Pero, por otro lado su efectivo final queda determinado por

$$x_{l+1}^t(\mathrm{s}^t) = w_{l+1}^t - \sum_{j=1}^{l} b_j^t + \sum_{j=1}^{l} q_j^t p_j$$

es decir, a pesar de que no pudo comprar ninguna cantidad del bien j, ¡el efectivo destinado a dicha transacción le fue restado! Un fenómeno semejante se observa al tener $\bar{b}_j = 0$ y $q_j^t > 0$, en este caso la asignación final del bien j comprende la respectiva disminución del mismo, ¡a pesar de que el producto no fue vendido a nadie! En el caso de la asignación final del efectivo no se obtiene nada fuera de lo esperado.

Con este pequeño análisis encontramos un equilibrio de Nash trivial para este juego, es decir, la estrategía nula en la que todos los consumidores deciden no entrar a ninguno de los mercados, ni como compradores, ni como vendedores, constituye claramente un equilibrio de Nash. Sin embargo nuestro objetivo ahora consiste en demostrar la existencia de un equilibrio de Nash diferente del trivial para el juego. Con este fin demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Sea un juego como el descrito arriba. Entonces un equilibrio de Nash distinto del trivial existe para este juego.*

Demostración. Dado el perfil estrategico $s \in S$ definimos

i) La cantidad total de oferta en el j-ésimo mercado

$$Q_j(s) = \sum_{t \in T} q_j^t$$

y la cantidad de oferta en el j-ésimo mercado sin tomar en cuenta la oferta del consumidor i

$$Q_j(s^{-i}) = \sum_{t \in T} q_j^t - q_j^i = \sum_{t \neq i} q_j^t$$

para $j = 1, ..., l$.

ii) La cantidad total de dinero ofrecido por el bien j

$$B_j(s) = \sum_{t \in T} b_j^t$$

y la cantidad total de dinero ofrecido por el bien j sin tomar en cuenta la oferta del consumidor i

$$B_j(s^{-i}) = \sum_{t \in T} b_j^t - b_j^i = \sum_{t \neq i} b_j^t$$

para $j = 1, ..., l$.

iii) El conjunto de todas las asignaciones finales posibles, de los primeros l bienes, para la estrategia (q^i, b^i) del consumidor i

$$D^i(Q(s^{-i}),\, B(s^{-i})) = \left\{ v \in \mathbb{R}^l_+ \mid v_j = w_j(i) - q^i_j + \frac{b^i_j \left(Q_j(s^{-i}) + q^i_j\right)}{\left(B_j(s^{-i}) + b^i_j\right)},\, j = 1, \ldots, l \right\}$$

iv) El conjunto de todas las asignaciones finales posibles, de todos los $l+1$ bienes, para la estrategia (q^i, b^i) del consumidor i

$$H^i(Q(s^{-i}),\, B(s^{-i})) = \left\{ v \in \mathbb{R}^{l+1}_+ \mid v_{l+1} = w_{l+1}(i) + \sum_{j=1}^{l} \frac{B_j \left(w_j(i) - v_j\right)}{Q_j + w_j(i) - v_j} \text{ y } (v_1,\, ...,\, v_l) \in D^i(Q(s^{-i}),\, B(s^{-i})) \right\}$$

v) El conjunto de las asignaciones finales posibles que maximizan la utilidad del consumidor i

$$\bar{H}^i(Q(s^{-i}),\, B(s^{-i})) = \left\{ \tilde{v} \in H^i(Q(s^{-i}),\, B(s^{-i})) \mid u_i(\tilde{v}) = \max_{v \in H^i(Q(s^{-i}),\, B(s^{-i}))} u_i(v) \right\}$$

A partir de lo anterior, sea la correspondencia $\varphi^i_1 : s^{-i} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{l+1}_+$ tal que

$$\varphi^i_1(s^{-i}) = H^i(Q(s^{-i}),\, B(s^{-i}))$$

donde es directo que φ_1 es continua. Sea la correspondencia

$$\varphi^i_2(s^{-i}) = \bar{H}^i(Q(s^{-i}),\, B(s^{-i}))$$

y dado que la función u_i es continua en $\mathbb{R}^{l+1}_+$ entonces por el teorema del máximo de Berge φ^i_2 es semicontinua superiormente.

Mostraremos a continuación que $\bar{H}^i$ contiene un solo punto. Supongamos que existen $v,\, v' \in \bar{H}^i$, sea $v'' = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v'$ entonces como u_i es cóncava tenemos

$$\begin{aligned} u_i(v'') &\geq \frac{1}{2}u_i(v) + \frac{1}{2}u_i(v') \\ &= u_i(v) \end{aligned}$$

pero dado que v^{l+1} es una función estrictamente creciente, entonces existe $\gamma > 0$ tal que $v'' + \gamma e^{l+1} \in \bar{H}^i$, además, dado que $u_i$es estrictamente creciente tenemos que

$$u_i(v'' + \gamma e^{l+1}) > u_i(v)$$

contradicción! Por lo tanto $\bar{H}^i$ contiene un solo punto.

Denotemos por “Proy” a la proyección geométrica tal que si $v = (v_1,\, ...,\, v_{l+1})$ entonces $\text{Proy}_j(v) = v_j$.

Sea

$$\tilde{S}_j(s^{-i}) = \psi^i_j(\text{Proy}_j \bar{H}^i(Q(s^{-i}),\, B(s^{-i})),\, Q(s^{-i}),\, B(s^{-i}))$$

con

$$\tilde{S}^i(s^{-i}) = \tilde{S}^i_1(s^{-i}) \times \cdots \times \tilde{S}^i_l(s^{-i})$$

Observemos que $\psi^i_j(x_j(t), Q_j(s^{-i}), B_j(s^{-i}))$ es el conjunto de estrategias que le otorgan una cantidad $x_j(i)$ del bien j al consumidor i, dado que la oferta y pujas totales por parte de los otros conusumidores en el j-ésimo mercado son $Q_j(s^{-i})$ y $B_j(s^{-i})$ respectivamente. Claramente este conjunto es convexo y continuo en sus variables.

Sea la correspondencia φ_3 tal que

$$\varphi^i_3(s^{-i}) = \tilde{S}^i(s^{-i})$$

entonces, dado que φ^i_2 es semicontinua superiormente y ψ es continua tenemos que φ_3 es también semicontinua superiormente.

Definamos ahora la correspondencia $\varphi_4 : \tilde{S}^i \twoheadrightarrow S^i$ tal que

$$\varphi^i_4(s^{-i}) = \varphi^i_3(s^{-i}) \cap H^i$$

por la definición de H^i es claro que $\varphi^i_4(s^{-i})$ es diferente del vacío. Finalmente sea la correspondencia $\varphi : S \twoheadrightarrow S$ tal que

$$\varphi(s) = \varphi^1_4(s^{-1}) \times \cdots \times \varphi^m_4(s^{-m})$$

se sigue directo que φ satisface las condiciones del teorema de punto fijo de Kakutani, por lo tanto existe $\hat{s} \in S$ tal que $\hat{s} \in \varphi(\hat{s})$. Este es claramente un equilibrio de Nash del juego $\square$

3.2. Modelos con grandes y pequeños consumidores

Cuando la descisión de un agente dentro de una economía afecta de manera directa y observable los precios decimos que posee poder de mercado. Un ejemplo de este es el modelo de Cournot con n´s suficientementes pequeñas. Por otro lado cuando los agentes únicamente actúan como tomadores de precios, es decir, sus decisiones no afectan de manera alguna el nivel de precios en la economía, decimos que no poseen poder de mercado.

Si observamos los mercados que se desarrollan día a día a nuestro alrededor, los modelos en donde todos los agentes tienen poder de mercado o bien todos son tomadores de precios no poseen la complejidad que se observa en la realidad, en donde, dentro de un mismo mercado interactúan agentes con y sin poder de mercado.[2]

Con el fin de evitar este problema, en esta sección presentamos dos modelos los cuales se basan en el modelo de Shapley y Shubik, integran elementos de la teoría de juegos a su planteamiento y poseen un conjunto de consumidores con pequeños y grandes consumidores.

[2] Al mencionar esto obviamente no nos estamos refiriendo a ninguno de los monopolios existentes en el país.

3.2.1. Descripción del espacio de consumidores

Para el desarrollo de nuestros modelos a continuación planteamos las bases necesarias sobre el conjunto de consumidores, sus dotaciones y preferencias.

Denominaremos como grandes consumidores a aquellos que poseen poder de mercado y pequeños consumidores a aquellos que no. Para modelar el hecho de que las decisiones de los primeros pesen más que las de los segundos utilizaremos instrumentos de teoría de la medida.

Consideremos una economía de intercambio puro en donde el conjunto de los comerciantes T está constituido de la siguiente manera $T = T_0 \cup T_1$ donde $T_o = [0, 1]$ nos representa al conjunto no atómico de comerciantes, es decir, un continuo de pequeños comerciantes y $T_1 = \{2, ..., m+1\}$ el conjunto de los grandes comerciantes o átomos.

Sabemos que dado $a, b \in T_0$ la colección de conjuntos $S_0 = \{[a, b) \mid a, b \in T_0, a \leq b\}$ es un semianillo; y la colección de todos los subconjuntos de T_1, $S_1 = \mathcal{P}(T_1)$ es un álgebra. Denotaremos por μ_0 a la medida de Lebesgue restringida a S_0 y por μ_1 a la medida de conteo restringida a S_1.

Proposición 3.1. *Dados T el conjunto de consumidores, $S = \{E \subset T \mid E = A \cup B$ con $A \in S_0$ y $B \in S_1\}$ y $\mu : S \to [0, \infty)$ la función tal que $\mu(E) = \mu_0(E \cap T_0) + \mu_1(E \cap T_1)$ para cada $E \in S$. El triplete (T, S, μ) representa un espacio de medida.*

Sea μ^* la extensión de μ. Dado que $\mu^*(T) = 1 + m < \infty$ entonces el espacio de medida (T, S, μ) es finito también, de ahí que digamos que todo subconjunto $E \in T$ es μ-medible si y sólo si $\mu^*(E) + \mu^*(E) + \mu_1(E^c) = \mu^*(T)$. Con lo anterior podemos completar el espacio de medida definido.

Proposición 3.2. *Sea $\mathcal{T}$ la colección de todos los subconjuntos μ-medibles de T, entonces el triplete $(T, \mathcal{T}, \mu^*)$ es un espacio de medida completa y μ^* es la única extensión de μ en $\mathcal{T}$.*

Consideremos ahora el espacio de medida determinado por el triplete (T_0, S_0, μ_0). Sean μ_0^* la extensión de la medida μ_0 y $\mathcal{T}_0$ la colección de todos los suconjuntos μ_0-medibles de T_0 . Por el mismo argumento usado en la proposición anterior tenemos que (T_0, S_0, μ_0^*) es un espacio de medida completa y además μ_0^* es la única extensión de μ_0 en $\mathcal{T}_0$.

Proposición 3.3. *Sea $\mathcal{T}_{T_0} = \{E \cap T_0 \mid E \in \mathcal{T}\}$ la restricción de $\mathcal{T}$ en T_0. Entonces el triplete $(T_0, \mathcal{T}_{T_0}, \mu^*)$ es un espacio de medida con $\mathcal{T}_{T_0} = \mathcal{T}_0$ y $\mu^* = \mu_0^*$ cuando la medida se restringe a $\mathcal{T}_{T_0}$.*

De manera análoga aseguramos que el espacio de medida determinado por el triplete (T_1, S_1, μ_1) es un espacio de medida completa, con μ_1^* la extensión de la medida μ_1 y S_1 la colección de todos los suconjuntos μ_1-medibles de T_1 .

Proposición 3.4. *Sea* $\mathcal{T}_{T_1} = \{E \cap T_1 \mid E \in \mathcal{T}\}$ *la restricción de* $\mathcal{T}$ *en* T_1*. Entonces el triplete* $(T_1, \mathcal{T}_{T_1}, \mu^*)$ *es un espacio de medida con* $\mathcal{T}_{T_1} = \mathcal{T}_1$ *y* $\mu^* = \mu_1^*$ *cuando la medida se restringe a* $\mathcal{T}_{T_1}$*.*

A partir de ahora por simplicidad las extensiones μ^*, μ_0^* y μ_1^* las denotaremos únicamente por μ, μ_0 y μ_1 respectivamente. De esta manera el espacio de consumidores queda denotado por es espacio de medida completa $(T, \mathcal{T}, \mu)$.

Por las proposiciones (3.3) y (3.4) se tiene de manera directa que el espacio de medida $(T_0, \mathcal{T}_{T_0}, \mu)$ es no atómico y, en cambio, el espacio $(T_1, \mathcal{T}_{T_1}, \mu^*)$ es puramente atómico.

En nuestra economía tendremos l diferentes bienes de tal manera que las canastas de bienes quedan representadas por puntos en $\mathbb{R}^l_+$. Y existe una dotación inicial $w(t)\,\forall\, t \in T$ tal que satisface el siguiente supuesto.

Supuesto 1. $w(t) > 0\,\forall t\, \in T,\, \int_{T_0} w(t)d\mu$

Definimos a una asignación como una función integrable $x : T \to \mathbb{R}^l_+$. Como lo comentamos en un principio, una asignación x tal que $\int_T x(t)d\mu = \int_T w(t)d\mu$ es una asignación viable y sin desperdicio, a partir de este momento al mencionar la palabra "asignación" nos referiremos únicamente a las de este tipo. Por otro lado, las preferencias de cada uno de los consumidores $t \in T$ son descritas por una función de utilidad $u_t : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ que satisface los siguientes supuestos.

Supuesto 2. $u_t : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ *es continua, estrictamente monótona y estrictamente cuasi-cóncava* $\forall t \in T$*.*

Supuesto 3. $u : T \times \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ *dada por* $u\,(t,\, x) = u_t(x)$ *es medible.*

Para cada vector de precios $p \in \mathbb{R}^l_+$definimos las correspondenciasΔ_p y Γ_p, teniendo $\Delta_p : T \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^l)$ tal que

$$\Delta_p(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ \mid p\,x \le p\,w(t)\right\}$$

y $\Gamma_p = T \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^l)$ tal que

$$\Gamma_p(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ \mid \forall y \in \Delta_p(t),\, u_t(x) \ge u_t(y)\right\}$$

Basandonos en estas correspondencias redefinimos al equilibrio Walrasiano con un vector de precios p^* y una asignación x^*, es decir, con el par $(p^*,\, x^*)$ tal que

$$x^*(t) \in \Delta_{p^*}(t) \cap \Gamma_{p^*}(t)$$

para todo $t \in T$. Este resultado se sigue intuitivamente del análisis de los conjuntos Δ_{p^*} y Γ_{p^*}, esto es, por un lado tenemos, basado el vector de precios p^*, el conjunto presupuestario Δ_{p^*} y por el otro Γ_{p^*} nos representa a todas las canastas de bienes débilmente preferidas a las canastas asequibles a el consumidor

t a los precios p^*. De tal manera que una asignación x^* que pertenezca a los dos conjuntos, es decir, a la intersección de los mismos, es una asignación que maximiza la utilidad del consumidor a los precios p^*.

Durante el desarrollo de los siguientes modelos automáticamente ignoraremos los conjuntos nulos, es decir, todos aquellos conjuntos cuya medida de Lebesgue es 0; de la misma manera el término “integrable” se tomara únicamente en el sentido de Lebesgue. Dada una función g definida en T, denotaremos como ${}^0g$ y ${}^1g$ a las restricciones de g sobre T_o y T_1 respectivamente; análogamente para cualquier tipo de correspondencia G definida en T, escribiremos ${}^0G$ y ${}^1G$ para las restricciones de G en T_0 y T_1 respectivamente.

Proposición 3.5. *Bajo los supuestos 1, 2 y 3, $\forall\, p \in \mathbb{R}^l_{++}$ la función ${}^0x(t, p)$ es integrable.*

Con la teoría y notación desarrollada pasamos ahora al planteamiento de los modelos.

3.2.2. Modelo generalizado de Shapley de una etapa

Decimos que un mercado es completo si cada uno de los bienes puede fungir el papel de dinero, es decir, puede ser intercambiado por cualquier otro bien. El modelo de Shapley que analizamos en la primera parte de este capítulo se desarrollaba en un mercado no completo, ya que el único bien que podia ser intercambiado por cualquier otro era el $l+1$-ésimo bien, al que denominamos “efectivo”. Para el modelo siguiente tomaremos una versión modificada del mostrado en la sección (3.1.1) en la cual, el mercado se vuelve completo dándonos la opción de eliminar el $l+1$-ésimo bien. De tal manera que ahora las decisiones de los consumidores estarán representadas por una matriz b de la forma

$$b = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ll} \end{pmatrix}$$

en donde la entrada b_{ij} nos representará la cantidad del bien i que se ofrece a cambio del bien j, con i, $j = 1, ..., l$.

Por otro lado la generalización que aquí planteamos incluye la integración de un conjunto de pequeños y grandes consumidores, como el descrito arriba, al modelo. Pasemos entonces al planteamiento.

Primeramente consideraremos las decisiones estratégicas de los consumidores. Sea $b \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ una matriz como la descrita. Definimos a lconjunto estratégico del consumidor t con la correspondencia $\mathrm{B} : T \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{l^2})$ tal que

$$\mathrm{B}(t) = \left\{ b \in \mathbb{R}^{l^2} \mid b_{ij} \geq 0,\, i,\, j = 1, ..., l \text{ y } \sum_{i=1}^{l} b_{ij} \leq \mathrm{w}^i(t),\, i = 1, ..., l \right\}$$

para todo $t \in T$. Una selección estratégica es una función integrable $\mathrm{b} : T \to \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ para todo $t \in T$ y $\mathrm{b}(t) \in \mathrm{B}(t)$. Dada la selección estratégica b, definimos la matriz agregada $\bar{\mathrm{b}} = (\int_T \mathrm{b}_{ij}(t)d\mu)$. Bajo este contexto definimos nuestro mecanismo de formación de precios de la siguiente manera.

Definición 3.2. *Dada una selección estratégica* b *decimos que el vector de precios* $p \in \mathbb{R}^l_{++}$ *iguala el precio de la oferta con el de la demanda si*

$$\sum_{i=1}^{l} p^i \bar{\mathrm{b}}_{ij} = p^j \left(\sum_{i=1}^{l} \bar{\mathrm{b}}_{ji} \right) \tag{3.1}$$

para $j = 1, ..., l$.

Proposición 3.6. *Dada la matriz agregada* $\bar{\mathrm{b}}$*. El vector de precios que hace que el precio de la oferta sea igual al de la demanda existe y es único, salvo múltiplos escalares, si y sólo si* $\bar{\mathrm{b}}$ *es una matriz irreducible.*

Basandonos en la proposición (3.6) expresemos como $p(\mathrm{b})$ a la función que asocia con cada selección estratégica b al único vector de precios p, salvo múltiplos escalares de este, que hace que el precio de la oferta sea igual al de la demanda, es decir, al vector p tal que $\bar{\mathrm{b}}$ es irreducible. Consideremos ahora, dada la selección estratégica b y el vector único, salvo múltiplos escalares, de precios p , al reparto

$$x_j(t, \mathrm{b}(t), p(\mathrm{b})) = w_j(t) - \sum_{i=1}^{l} \mathrm{b}_{ji}(t) + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{b}_{ij}(t) \frac{p^i(\mathrm{b})}{p^j(\mathrm{b})} \tag{3.2}$$

para toda $t \in T$, $j = 1, ..., l$. Es fácil ver que la repartición mencionada constituye una asignación. Dada una selección estratégica b las dotaciones finales de los comerciantes son

$$x_j(t) = \begin{cases} x_j(t, \mathrm{b}(t), p(\mathrm{b})) & \text{si } p \text{es único y limpia el mercado} \\ w_j(t) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para todo $t \in T$ y $j = 1, ..., l$.

Con esta reformulación del modelo de Shapley para economías de intercambio mixtas podemos definir el concepto del equilibrio Cournot-Nash.

Definición 3.3. *Decimos que una selección estratégica* $\hat{\mathrm{b}}$ *tal que* $\bar{\hat{\mathrm{b}}}$ *es irreducible constituye un equilibrio Cournot-Nash si*

$$u_t(x(t, \hat{\mathrm{b}}(t), p(\hat{\mathrm{b}}))) \geq u_t(x(t, b(t), p(\hat{\mathrm{b}} \mid b(t)))),$$

para todo $t \in T$ *y toda* $b(t) \in \mathrm{B}(t)$.

A partir de la modificación del conjunto de consumidores del modelo de Shapley original a un conjunto de grandes y pequeños consumidores emergen nuevas características del modelo, analicémoslas.

Primeramente aseguramos que bajo las suposiciones anteriores la parte no atómica de consumidores no poseen la cualidad de influir en los precios finales. Dado esto es directo afirmar que los pequeños consumidores se comporta de manera competitiva, es decir, como tomadores de precios, de tal manera que sus demandas finales corresponden a demandas Walrasianas. Para la demostración de la proposición enunciaremos el siguiente lema.

Lema 3.1. *Dados $p \gg 0$ y $w(t) > 0$ para todo $t \in T$. La asignación $\Delta_p^{*t} = \left\{ x(t) \in X^l \mid p \cdot x(t) = p \cdot w(t) \right\}$ para todo $t \in T$ si y sólo si*

$$x_j(t) = \lambda^j(t) \frac{\sum_{j=1}^{l+1} p^j w_j(t)}{p^j} \tag{3.3}$$

con $\lambda^j \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{l} \lambda^j = 1$ para $j = 1, ..., l$.

Proposición 3.7. *Dado un perfil estratégico* b *tal que la matriz* $\bar{\mathrm{b}}$ *es irreducible, para cada $t \in T_0$ tenemos*

i) $p(\mathrm{b}) = p(\mathrm{b} \mid b(t))$ *para todo* $b(t) \in \mathrm{B}(t)$

ii) $x(t,\, b(t),\, p(\mathrm{b} \mid b(t))) \in X_{p(b)}(t)$ *para todo* $b(t) \in \arg\max\{u_t(x(t,\, b(t),\, p(\mathrm{b} \mid b(t)))) \mid b(t) \in \mathrm{B}(t)\}$

Por otro lado, el siguiente ejemplo nos mostrará que dado un perfil estratégico $\hat{b}$ tal que constituye un equilibrio del modelo generalizado de Shapley, entonces las asignaciones finales no necesariamente constituyen un equilibrio Walrasiano para todo $t \in T$.

Ejemplo 3.1. *Sea una economía de intercambio puro con $l = 2$, $T_0 = [0,\, 1]$, $T_1 = \{2,\, 3\}$ donde*

- *Para $T_0 = [0,\, \frac{1}{2}]$, $w(t) = (1,\, 0)$ y $u_t(x) = \ln x_1 + \ln x_2$*
- *Para $T_0 = [\frac{1}{2},\, 1]$, $w(t) = (0,\, 1)$ y $u_t(x) = x_1 + \ln x_2$ y*
- *Para $T_1 = \{2,\, 3\}$, $w(t) = (1,\, 0)$ y $u_t(x) = \ln x_1 + \ln x_2$*

Calculemos primero el equilibrio Walrasiano de esta economía

- Para $T_0 = [0,\, \frac{1}{2}]$
  Problema del consumidor: $\max_{x \geq 0} \ln x_1 + \ln x_2$ s.a. $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq p_1$
  $\Rightarrow$ las demandas Walrasianas son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{p_1}{2p_2}$

- Para $T_0 = [\frac{1}{2},\, 1]$

  Problema del consumidor: $\text{máx}_{x\geq 0}\, x_1 + \ln x_2$ s.a. $p_1x_1 + p_2x_2 \leq p_2$

  $\Rightarrow$ las demandas Walrasianas son $x_1 = \frac{p_2}{p_1} - 1$ y $x_2 = \frac{p_1}{p_2}$

- Para $T_1 = \{2,\, 3\}$

  Problema del consumidor: $\text{máx}_{x\geq 0} \ln x_1 + \ln x_2$ s.a. $p_1x_1 + p_2x_2 \leq p_1$

  $\Rightarrow$ las demandas Walrasianas son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{p_1}{2p_2}$

Para equilibrar el mercado la oferta debe ser igual a la demanda, en este caso, para el bien 1

$$\begin{aligned}
\int_{T_o} w_1(t)d\mu + \int_{T_1} w_1(t)d\mu &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}d\mu + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{p_2}{p_1}d\mu + \int_{T_1} \frac{1}{2}d\mu \\
\frac{5}{2} &= \frac{3}{4} + \frac{p_2}{2p_1}
\end{aligned}$$

y para el bien 2

$$\begin{aligned}
\int_{T_o} w_2(t)d\mu + \int_{T_1} w_2(t)d\mu &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{p_1}{2p_2}d\mu + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{p_1}{p_2}d\mu + \int_{T_1} \frac{p_1}{2p_2}d\mu \\
\frac{1}{2} &= \frac{7p_1}{4p_2}
\end{aligned}$$

por lo tanto $p^* = \frac{2}{7}$, $x_1^*(2) = x_1^*(3) = \frac{1}{2}$, $x_2^*(2) = x_2^*(3) = \frac{2}{14}$, $x_1^*(t) = \frac{1}{2}$, $x_2^*(t) = \frac{2}{14}$ para $t \in [0,\, \frac{1}{2}]$ y $x_1^*(t) = \frac{5}{2}$, $x_2^*(t) = \frac{2}{7}$ para $t \in [\frac{1}{2},\, 1]$.

Calculemos ahora el equilibrio del modelo generalizado de Shapley. Dada la selección estratégica b, sea la matriz agregada

$$\bar{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathrm{b}}_{11} & \bar{\mathrm{b}}_{12} \\ \bar{\mathrm{b}}_{21} & \bar{\mathrm{b}}_{22} \end{pmatrix}$$

con $\bar{\mathrm{b}}_{ij} = \int_T \mathrm{b}_{ij}(t)d\mu$. Entonces buscamos al único, salvo múltiplos escalares, vector de precios que dada b satisface (3.1). Para $j = 1$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{l} p_i\bar{\mathrm{b}}_{i1} = p_1\left(\sum_{i=1}^{l} \bar{\mathrm{b}}_{1i}\right)$$

entonces

$$p(\mathrm{b}) = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\bar{\mathrm{b}}_{21}}{\bar{\mathrm{b}}_{12}}$$

a partir de esto obtenemos la asignación y problema de cada consumidor

- Para $T_0 = [0,\, \frac{1}{2}]$

  $x_1(t) = 1 - \mathrm{b}_{12}(t)$ y $x_2(t) = \mathrm{b}_{12}(t)\frac{p_1}{p_2}$

  Problema del consumidor: $\text{máx}_{\mathrm{b}_{12}(t)\geq 0} \ln(1 - \mathrm{b}_{12}(t)) + \ln\left(\mathrm{b}_{12}(t)\frac{p_1}{p_2}\right)$

- Para $T_0 = [\frac{1}{2}, 1]$
  $x_1(t) = \mathrm{b}_{21}(t)\frac{p_2}{p_1}$ y $x_2(t) = 1 - \mathrm{b}_{21}(t)$
  Problema del consumidor: $\max_{\mathrm{b}_{21}(t)\geq 0} \mathrm{b}_{21}(t)\frac{p_2}{p_1} + \ln(1 - \mathrm{b}_{21}(t))$

- Para $T_1 = \{2, 3\}$
  $x_1(t) = 1 - \mathrm{b}_{12}(t)$ y $x_2(t) = \mathrm{b}_{12}(t)\frac{p_1}{p_2}$
  Problema del consumidor: $\max_{\mathrm{b}_{12}(t)\geq 0} \ln(1 - \mathrm{b}_{12}(t)) + \ln\left(\mathrm{b}_{12}(t)\frac{p_1}{p_2}\right)$

Concluyendo que el único equilibrio del modelo generalizado de Shapley simétrico es el perfil estratégico $\hat{\mathrm{b}}_{12}(2) = \hat{\mathrm{b}}_{12}(3) = \frac{1+\sqrt{13}}{12}$, $\hat{\mathrm{b}}_{12}(t) = \frac{1}{2}$ para todo $t \in T_0 = [0, \frac{1}{2}]$, $\hat{\mathrm{b}}_{21}(t) = \frac{5+2\sqrt{13}}{11+2\sqrt{13}}$ generando las asignaciones finales $\hat{x}_1(2) = \hat{x}_1(3) = \frac{11+\sqrt{13}}{12}$, $\hat{x}_2(2) = \hat{x}_2(3) = \frac{1+\sqrt{13}}{22+4\sqrt{37}}$, $\hat{x}_1(t) = \frac{1}{2}$, $\hat{x}_2(t) = \frac{3}{11+2\sqrt{13}}$ para todo $t \in [0, \frac{1}{2}]$ y $\hat{x}_1(t) = \frac{5+2\sqrt{13}}{6}$, $\hat{x}_2(t) = \frac{6}{11+2\sqrt{13}}$ para todo $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Por lo tanto el equilibrio del modelo generalizado de Shapley no corresponde al equilibrio Walrasiano para todo $t \in T$. Es decir, por la proposición (3.7) sabíamos que la parte no atómica de los comenrciantes se comportaba de manera competitiva y por el ejemplo anterior tenemos que los equilibrio Walrasianos y del modelo generalizado de Shapley no necesariamente coinciden, concluyendo así que los grandes consumidores no muestran un comportamiento competitivo.

Finalmente para asegurar la existencia del equilibrio Cournot-Nash mostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Sea una economía de intercambio puro con un conjunto de consumidores como el descrito al principio. Entonces existe el equilibrio Cournot-Nash.*

Demostración. Denotemos por $L_1(\mu, \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l)$ al conjunto de funciones integrables con imagen en $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ y por $L_1(\mu, \mathrm{B}(\cdot))$ al conjunto de selecciones estratégicas.

Lema 3.2. *El conjunto $L_1(\mu, \mathrm{B}(\cdot))$ es compacto, convexo y no vacío.*

A partir de esto definimos a las correspondencias $\alpha_t : L_1(\mu, \mathrm{B}(\cdot)) \twoheadrightarrow \mathrm{B}(t)$ tal que $\alpha_t(\mathrm{b}) = \arg\max\{u_t(\mathrm{x}(t, b(t), p(\mathrm{b} \mid b(t)))) \mid b(t) \in \mathrm{B}(t)\}$ y $\alpha : L_1(\mu, \mathrm{B}(\cdot)) \twoheadrightarrow L_1(\mu, \mathrm{B}(\cdot))$ tal que $\alpha(\mathrm{b}) = \{\mathrm{b} \in \mathrm{L}_1(\mu, \mathrm{B}(\cdot)) \mid \mathrm{b}(t) \in \alpha_t(\mathrm{b})$ para casi todo $t \in T$.

Lema 3.3. *La correspondencia α es semicontinua superiormente y tal que para todo $\mathrm{b} \in L_1(\mu, \mathrm{B}(\cdot))$ el conjunto $\alpha(\mathrm{b})$ es convexo y no vacío.*

Con los dos lemas anteriores y aplicando el teorema de punto fijo de Kakutani a la correspondencia α se obtiene de manera directa que el equilibrio Cournot-Nash existe □

3.2.3. Modelo Cournot-Walras

Dejando a un lado la generalización del modelo de Shapley pasemos ahora al planteamiento de otro modelo de intercambio con pequeños y grandes consumidores.

En este modelo suponemos desde el principio que los consumidores poseen un comportamiento diferente dependiendo si son grandes o pequeños.

A los pequeños consumidores les asignaremos un comportamiento competitivo a través de la función de demanda ${}^{o}x(\cdot,\, p) : T_0 \to \mathbb{R}^l_+$ tal que

$$
{}^{0}x(t,\, p) = \Delta_p(t) \cap \Gamma_p(t)
$$

para todo $t \in T_0$.

Pasemos ahora al comportamiento de los grandes consumidores. Sea $e \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ una matriz de la forma

$$
e = \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{l1} & \cdots & e_{ll} \end{pmatrix}
$$

Definimos al conjunto entratégico del consumidor t con la correspondencia $\mathrm{E} : T_1 \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{l^2})$ tal que

$$
\mathrm{E}(t) = \left\{ e \in \mathbb{R}^{l^2} \mid e_{ij} \geq 0,\, i, j = 1,\, ...,\, l;\, \sum_{j=1}^{l} e_{ij} \leq w_i(t),\, i = 1,\, ...,\, l \right\}
$$

para todo $t \in T_1$. Una selección estratégica es un función integrable $\mathrm{e} : T_1 \to \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ para todo $t \in T_1$ y $\mathrm{e}(t) \in \mathrm{E}(t)$. Donde para cada $t \in T_1$ la entrada $\mathrm{e}_{ij}(t)$ con $i, j = 1,\, ...,\, l$ representa la cantidad del bien i que el comerciante t ofrece a cambio del bien j. Sea E el conjunto de todas las selecciones estratégicas o perfil estratégico. Denotaremos ahora como $\pi(\mathrm{e})$ a la correspondencia que asocia para todo $\mathrm{e} \in E$ al vector de precios tal que

$$
\int_{T_0} {}^{0}x_j(t,\, p) d\mu + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{e}_{ij}(t) d\mu \frac{p_i}{p_j} = \int_{T_0} w_j(t) d\mu + \sum_{i=1}^{l} \int_{T_1} \mathrm{e}_{ji}(t) d\mu \tag{3.4}
$$

para $j = 1,\, ...,\, l$.

Supuesto 4. *Para cada* $\mathrm{e} \in E$, $\pi(\mathrm{e}) \neq \emptyset$ *y* $\pi(\mathrm{e}) \subset \mathbb{R}^l_{++}$

Definimos como una selección de precio a la función $p(\mathrm{e})$ que relaciona con cada $\mathrm{e} \in E$ a un vector de precios $p \in \pi(\mathrm{e})$ y tal que $p(\mathrm{e}') = p(\mathrm{e}'')$ si $\int_{T_1} \mathrm{e}'(t) d\mu = \int_{T_1} \mathrm{e}''(t) d\mu$.

Para cada selección estratégica $\mathrm{e} \in E$ denotaremos a las dotaciones finales del sector atómico como una función ${}^{1}x(\cdot,\, \mathrm{e}(t),\, p(\mathrm{e})) : T_1 \to \mathbb{R}^l_+$ tal que

$$
{}^{1}x_j(t,\, \mathrm{e}(t),\, p(\mathrm{e})) = w_j(t) - \sum_{i=1}^{l} \mathrm{e}_{ij}(t) + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{e}_{ij}(t) \, \frac{p_i(\mathrm{e})}{p_j(\mathrm{e})} \tag{3.5}
$$

para $j = 1, ..., l$.

Dada una selección estratégica $\mathrm{e} \in E$, tomando en cuenta la estructura del espacio de medida de los comerciantes, el supuesto 4 y la ecuación (3.4) es directo mostrar que la función

$$x(t) = \begin{cases} {}^0x(t,\, p(\mathrm{e}) & \text{para } t \in T_0 \\ {}^1x(t,\, p(\mathrm{e}) & \text{para } t \in T_1 \end{cases}$$

es una asignación.

Con base en lo descrito anteriormente nos es posible definir al equilibrio Cournot-Walras de la siguiente manera.

Definición 3.4. *Dados una selección estratégica* $\tilde{\mathrm{e}}$ *y una asignación* $\tilde{x}$ *tales que*

$$x(t) = \begin{cases} {}^0x(t,\, p(\mathrm{e}) & \textit{para } t \in T_0 \\ {}^1x(t,\, p(\mathrm{e}) & \textit{para } t \in T_1 \end{cases}$$

Decimos que el par $(\tilde{\mathrm{e}},\, \tilde{x})$ *describe el equilibrio Cournot-Walras de una economía de intercambio puro con respecto a la selección de precios* $p(\mathrm{e})$ *si*

$$u_t({}^1x(t,\, \tilde{\mathrm{e}}(t),\, p(\tilde{\mathrm{e}}))) \geq u_t({}^1x(t,\, e(t),\, p(\tilde{\mathrm{e}} \mid e(t))))$$

para toda $t \in T_1$ *y para toda* $e(t) \in E(t)$. [3]

El modelo descrito arriba puede ser visto como una redefinición a la Cournot-Walras del juego no cooperativo de un mercado de intercambio puro propuesto originalmente por Shapley y el cual ya estudiamos en la al inicio de este capítulo.

Nótemos que en este modelo los pequeños consumidores se comportan de manera competitiva al obtener sus demandas Walrasianas, mientras los grandes consumidores se comportan de manera estratégica maximizando su utilidad respecto a los precios, los cuales se ven afectados directamente sus decisiones. Este razonamiento nos hace intuir que pasaría en el caso de tener un continuo de grandes consumidores. Concretamente supongamos que el conjunto de consumidores $T = T_0 \cup T_1$ es denotado por el espacio de medida completa $(T,\, \mathcal{T},\, \mu)$ donde $T_0 = [0,\, 1]$ y $T_1 = [2,\, 3]$, $\mathcal{T}$ es la colección de todos los subconjuntos μ-medibles de T y μ es la medida de Lebesgue. Mostremos que en este contexto el conjunto de equilibrios Cournot-Walras coincide con el conjunto de equilibrios Walrasianos.

Proposición 3.8. *Dada una economía de intercambio puro con un conjunto de consumidores como el que se acaba de mencionar. Tenemos que*

i) *Dados un perfil estratégico y una asignación final* $(\tilde{\mathrm{e}},\, \tilde{x})$ *tales que constituyan un equilibrio Cournot-Walras respecto a la selección de precios* $p(\tilde{\mathrm{e}}^*)$ *, entonces existe un vector* $\tilde{p}$ *tal que el par* $(\tilde{p},\, \tilde{x})$ *constituye un equilibrio Walrasiano.*

[3] Donde $\mathrm{e} \mid e(t)$ es la selección estratégica obtenida al reemplazar $\mathrm{e}(t)$ en e con $e(t) \in \mathrm{E}(t)$.

ii) *Dados un vector de precios y una asignación final* $(p^*, \tilde{x}^*)$ *tales que constituyan un equilibrio Walrasiano, entonces existe una perfil estratégico* $\tilde{e}^*$ *tal que el par* $(\tilde{e}^*, \tilde{x}^*)$ *constituye un equilibrio Cournot-Walras respecto a la selección de precios* $p(\tilde{e}^*)$*.*

Desprendidendo el siguiente corolario de la proposición anterior, aseguramos la existencia del equilibrio Cournot-Walras para economías de intercambio puro con un continuo de consumidores.

Corolario 3.1. *El equilibrio Cournot-Walras existe.*

Observemos que la equivalencia entre el equilibrio Cournt-Walras y el Walrasiano únicamente se da cuando los grandes consumidores pierden su poder de mercado al convertirse en un conjunto no atómico. Para el caso en que los grandes consumidores son modelados por un conjunto atómico la equivalencia se pierde y ellos recuperan su poder de mercado, tal como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.2. *Sea una economía de intercambio puro con* $l = 2$, $T_0 = [0, 1]$, $T_1 = \{2, 3\}$ *donde*

- *Para* $T_0 = [0, \frac{1}{2}]$, $w(t) = (1, 0)$ *y* $u_t(x) = \ln x_1 + \ln x_2$
- *Para* $T_0 = [\frac{1}{2}, 1]$, $w(t) = (0, 1)$ *y* $u_t(x) = \ln x_1 + \ln x_2$ *y*
- *Para* $T_1 = \{2, 3\}$, $w(t) = (1, 0)$ *y* $u_t(x) = \ln x_1 + \ln x_2$

Calculemos primero el equilibrio Walrasiano de esta economía

- Para $T_0 = [0, \frac{1}{2}]$

  Problema del consumidor: $\max_{x \geq 0} \ln x_1 + \ln x_2$ s.a. $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq p_1$

  $\Rightarrow$ las demandas Walrasianas son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{p_1}{2p_2}$
- Para $T_0 = [\frac{1}{2}, 1]$

  Problema del consumidor: $\max_{x \geq 0} \ln x_1 + \ln x_2$ s.a. $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq p_2$

  $\Rightarrow$ las demandas Walrasianas son $x_1 = \frac{p_2}{2p_1}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$
- Para $T_1 = \{2, 3\}$

  Problema del consumidor: $\max_{x \geq 0} \ln x_1 + \ln x_2$ s.a. $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq p_1$

  $\Rightarrow$ las demandas Walrasianas son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{p_1}{2p_2}$

Para equilibrar el mercado la oferta debe ser igual a la demanda, en este caso, para el bien 1

$$\begin{aligned}\int_{T_o} w_1(t)d\mu + \int_{T_1} w_1(t)d\mu &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}d\mu + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{p_2}{2p_1}d\mu + \int_{T_1} \frac{1}{2}d\mu \\ \frac{5}{2} &= \frac{5}{4} + \frac{p_2}{4p_1}\end{aligned}$$

y para el bien 2

$$\begin{aligned}\int_{T_o} w_2(t)d\mu + \int_{T_1} w_2(t)d\mu &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{p_1}{2p_2}d\mu + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2}d\mu + \int_{T_1} \frac{p_1}{2p_2}d\mu \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} + \frac{5p_1}{4p_2}\end{aligned}$$

por lo tanto $p^* = \frac{1}{5}$, $x_1^*(2) = x_1^*(3) = \frac{1}{2}$, $x_2^*(2) = x_2^*(3) = \frac{1}{10}$, $x_1^*(t) = \frac{1}{2}$, $x_2^*(t) = \frac{1}{10}$ para $t \in [0, \frac{1}{2}]$ y $x_1^*(t) = \frac{1}{2}$, $x_2^*(t) = \frac{1}{10}$ para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Calculemos ahora el equilibrio Cournot-Walras. Buscamos los vectores de precios tales que dado un perfil estratégico e satisfaga (3.4). Para $j = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_{T_0} {}^0x_1(t, p)d\mu + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{e}_{i1}(t)d\mu\frac{p^i}{p^j} &= \int_{T_0} w_1(t)d\mu + \sum_{i=1}^{l} \int_{T_1} \mathrm{e}_{1i}(t)d\mu \\ \frac{1}{4} + \frac{p_2}{4p_1} &= \frac{1}{2} + \mathrm{e}_{12}(2) + \mathrm{e}_{12}(3)\end{aligned}$$

y para $j = 2$

$$\begin{aligned}\int_{T_0} {}^0x_2(t, p)d\mu + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{e}_{i2}(t)d\mu\frac{p_i}{p_2} &= \int_{T_0} w_2(t)d\mu + \sum_{i=1}^{l} \int_{T_1} \mathrm{e}_{2i}(t)d\mu \\ \frac{1}{2} + \frac{p_1}{4p_2} + \mathrm{e}_{12}(2)\frac{p_1}{p_2} + \mathrm{e}_{12}(3)\frac{p_1}{p_2} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{1 + 4\mathrm{e}_{12}(2) + 4\mathrm{e}_{12}(3)}$$

a partir de esto obtenemos las asignaciones finales de los grandes consumidores

$$\begin{aligned}{}^1x_1(2, \mathrm{e}(2), p(\mathrm{e})) &= 1 - \mathrm{e}_{12}(2) \\ {}^1x_2(2, \mathrm{e}(2), p(\mathrm{e})) &= \frac{\mathrm{e}_{12}(2)}{1 + 4\mathrm{e}_{12}(2) + 4\mathrm{e}_{12}(3)} \\ {}^1x_1(3, \mathrm{e}(2), p(\mathrm{e})) &= 1 - \mathrm{e}_{12}(3) \\ {}^1x_2(3, \mathrm{e}(2), p(\mathrm{e})) &= \frac{\mathrm{e}_{12}(3)}{1 + 4\mathrm{e}_{12}(2) + 4\mathrm{e}_{12}(3)}\end{aligned}$$

y su problema de maximización

$$\max_{\mathrm{e}_{12}(2)\geq 0} \ln\left(1-\mathrm{e}_{12}(2)\right)+\ln\left(\frac{\mathrm{e}_{12}(2)}{1+4\mathrm{e}_{12}(2)+4\mathrm{e}_{12}(3)}\right)$$
$$\max_{\mathrm{e}_{12}(3)\geq 0} \ln\left(1-\mathrm{e}_{12}(3)\right)+\ln\left(\frac{\mathrm{e}_{12}(3)}{1+4\mathrm{e}_{12}(2)+4\mathrm{e}_{12}(3)}\right)$$

de donde tenemos que el único equilibrio Cournot-Walras simétrico es $\tilde{\mathrm{e}}_{12}(2) = \tilde{\mathrm{e}}_{12}(3) = \frac{1+\sqrt{13}}{12}$, entonces $\tilde{x}_1(2) = \tilde{x}_1(3) = \frac{11-\sqrt{13}}{12}$, $\tilde{x}_2(2) = \tilde{x}_2(3) = \frac{1+\sqrt{13}}{20+8\sqrt{13}}$, $\tilde{x}_1(t) = \frac{1}{2}$, $\tilde{x}_2(t) = \frac{3}{10+4\sqrt{13}}$ para todo $t \in [0, \frac{1}{2}]$ y $\tilde{x}_1(t) = \frac{5+2\sqrt{13}}{6}$, $\tilde{x}_2(t) = \frac{1}{2}$ para todo $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Por lo tanto en este caso existe un equilibrio Walrasiano que no corresponde a ningún equilibrio Cournot-Walras.

La pregunta ahora es si los últimos dos modelos desarrollado, a parte de pertenecer a la linea de investigación de Shapley y Shubik para economías de intercambio puro, guardan algún otro tipo de relación, para responder a esta y otras preguntas en el siguiente capítulo haremos una comparación de los modelos

Capítulo 4

Relación entre los equilibrios Cournot-Walras y Cournot -Nash

De primera vista podría parecer que los modelos generalizados de Shapley y la redefinición al estilo Courno-Walras acabados de estudiar solo mantienen características pertenecientes a su planteamiento, como el hecho llevarse a cabo los dos dentro de una economía de propiedad privada o la manera en que el conjunto de consumidores esta constituido, pero haciendo un análisis más detallado de estos dos modelos podemos obtener mucha más información de lo que uno originalmente esperaría.

4.1. Comparación de los modelos

Recordemos que en la versión generalizada del modelo de Shapley todos los consumidores se comportan de manera estratégica, pero dado que las decisiones de los pequeños consumidores no tienen influencia sobre los precios demostramos que su comportamiento se tornaba competitivo, mientras los grandes consumidores se seguian comportando estratégicamente. Por otro lado, en nuestra versión a la Cournot-Walras del modelo de Shapley supusimos que los pequeños consumidores mostraban un comportamiento competitivo, mientras que los grandes se comportaban de manera estratégica. Por lo tanto parece razonable pensar que el conjunto de las asignaciones correspondientes al equilibrio de la versión generalizada del modelo de Shapley coincide con el conjunto de las asignaciones del equilibrio Cournot-Walras. Veámos con un ejemplo si esto es cierto.

Ejemplo 4.1. *Sea una economía de intercambio puro con* $l = 2$, $T_0 = [0, 1]$, $T_1 = \{2, 3\}$ *donde*

- *Para* $T_0 = [0, \frac{1}{2}]$, $w(t) = (1, 0)$ *y* $u_t(x) = \ln x_1 + \ln x_2$

- *Para* $T_0 = [\frac{1}{2}, 1]$, $w(t) = (0, 1)$ *y* $u_t(x) = x_1 + \ln x_2$ *y*
- *Para* $T_1 = \{2, 3\}$, $w(t) = (1, 0)$ *y* $u_t(x) = \ln x_1 + \ln x_2$

Calculemos primero el equilibrio Cournot-Walras de esta economía. Sean los problemas de los consumidores del sector no atómico

- Para $T_0 = [0, \frac{1}{2}]$
  $\text{máx}_{x\geq 0} \ln x_1 + \ln x_2$ s.a. $p_1x_1 + p_2x_2 \leq p_1$
  $\Rightarrow$ las demandas Walrasianas son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{p_1}{2p_2}$
- Para $T_0 = [\frac{1}{2}, 1]$
  $\text{máx}_{x\geq 0} x_1 + \ln x_2$ s.a. $p_1x_1 + p_2x_2 \leq p_2$
  $\Rightarrow$las demandas Walrasianas son $x_1 = \frac{p_2}{p_1} - 1$ y $x_2 = \frac{p_1}{p_2}$

Ahora buscamos los vectores de precios tales que dado un perfil estratégico e satisfacen la ecuación (3.4). Para $j = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{T_0} {}^0x_1(t, p)d\mu + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{e}_{i1}(t)d\mu\frac{p^i}{p^1} &= \int_{T_0} w_1(t)d\mu + \sum_{i=1}^{l}\int_{T_1} \mathrm{e}_{1i}(t)d\mu \\ \frac{1}{4} + \frac{p_2}{4p_1} &= \frac{1}{2} + \mathrm{e}_{12}(2) + \mathrm{e}_{12}(3) \end{aligned}$$

y para $j = 2$

$$\begin{aligned} \int_{T_0} {}^0x_2(t, p)d\mu + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{e}_{i2}(t)d\mu\frac{p^i}{p^2} &= \int_{T_0} w_2(t)d\mu + \sum_{i=1}^{l}\int_{T_1} \mathrm{e}_{2i}(t)d\mu \\ \frac{p_1}{4p_2} + \frac{p_1}{2p_2} + \mathrm{e}_{12}(2)\frac{p_1}{p_2} + \mathrm{e}_{12}(3)\frac{p_1}{p_2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

entonces

$$\pi(\mathrm{e}) = \frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{3 + 4\mathrm{e}_{12}(2) + 4\mathrm{e}_{12}(3)}$$

a partir de esto obtenemos las asignaciones finales de los grandes consumidores

$$\begin{aligned} {}^1x_1(2, \mathrm{e}(2), p(\mathrm{e})) &= 1 - \mathrm{e}_{12}(2) \\ {}^1x_2(2, \mathrm{e}(2), p(\mathrm{e})) &= \frac{2\mathrm{e}_{12}(2)}{3 + 4\mathrm{e}_{12}(2) + 4\mathrm{e}_{12}(3)} \\ {}^1x_1(3, \mathrm{e}(2), p(\mathrm{e})) &= 1 - \mathrm{e}_{12}(3) \\ {}^1x_2(3, \mathrm{e}(2), p(\mathrm{e})) &= \frac{2\mathrm{e}_{12}(3)}{3 + 4\mathrm{e}_{12}(2) + 4\mathrm{e}_{12}(3)} \end{aligned}$$

y planteamos su problema de maximización

$$\max_{\mathrm{e}_{12}(2)\geq 0} \ln(1 - \mathrm{e}_{12}(2)) + \ln\left(\frac{2\mathrm{e}_{12}(2)}{3 + 4\mathrm{e}_{12}(2) + 4\mathrm{e}_{12}(3)}\right)$$

$$\max_{\mathrm{e}_{12}(3)\geq 0} \ln(1 - \mathrm{e}_{12}(3)) + \ln\left(\frac{2\mathrm{e}_{12}(3)}{3 + 4\mathrm{e}_{12}(2) + 4\mathrm{e}_{12}(3)}\right)$$

de donde tenemos que el único equilibrio Cournot-Walras simétrico es $\tilde{\mathrm{e}}_{12}(2) = \tilde{\mathrm{e}}_{12}(3) = \frac{-1+\sqrt{37}}{12}$ generando las asignaciones finales $\tilde{x}_1(2) = \tilde{x}_1(3) = \frac{13-\sqrt{37}}{12}$, $\tilde{x}_2(2) = \tilde{x}_2(3) = \frac{-1+\sqrt{37}}{14+4\sqrt{37}}$, $\tilde{x}_1(t) = \frac{1}{2}$, $\tilde{x}_2(t) = \frac{3}{7+2\sqrt{37}}$ para todo $t \in [0, \frac{1}{2}]$ y $\tilde{x}_1(t) = \frac{1+2\sqrt{37}}{6}$, $\tilde{x}_2(t) = \frac{6}{7+2\sqrt{37}}$ para todo $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Y por el ejemplo (3.1) sabemos que el único equilibrio del modelo generalizado de Shapley simétrico para esta economía es el perfil estratégico $\hat{\mathrm{b}}_{12}(2) = \hat{\mathrm{b}}_{12}(3) = \frac{1+\sqrt{13}}{12}$, $\hat{\mathrm{b}}_{12}(t) = \frac{1}{2}$ para todo $t \in T_0 = [0, \frac{1}{2}]$, $\hat{\mathrm{b}}_{21}(t) = \frac{5+2\sqrt{13}}{11+2\sqrt{13}}$ generando las asignaciones finales $\hat{x}_1(2) = \hat{x}_1(3) = \frac{11+\sqrt{13}}{12}$, $\hat{x}_2(2) = \hat{x}_2(3) = \frac{1+\sqrt{13}}{22+4\sqrt{37}}$, $\hat{x}_1(t) = \frac{1}{2}$, $\hat{x}_2(t) = \frac{3}{11+2\sqrt{13}}$ para todo $t \in [0, \frac{1}{2}]$ y $\hat{x}_1(t) = \frac{5+2\sqrt{13}}{6}$, $\hat{x}_2(t) = \frac{6}{11+2\sqrt{13}}$ para todo $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Por lo tanto la equivalencia entre los conceptos del equilibrio del modelo generalizado de Shapley y el equilibrio Cournot-Walras dentro de este contexto no se da, es decir, existe una asignación del equilibrio del modelo generalizado de Shapley que no corresponde a ninguna asignación del equilibrio Cournot-Walras.

Para explicarnos esta diferencia observemos primeramente que en el modelo generalizado de Shapley, las asignaciones finales de todos los consumidores es una función $x(t, \mathrm{b}(t), p(\mathrm{b}))$ que depende de sus preferencias, dotación inicial y las decisiones conjuntas de todos los consumidores, haciendo que el modelo se desarrolle en una sola etapa. Por otro lado en el equilibrio del modelo Cournot-Walras las asignaciones finales de los grandes consumidores es una función ${}^1x(t, \mathrm{e}(t), p(\mathrm{e}))$ que depende de sus preferencias, dotación inicial y decisiones e de ese sector, mientras que, las asignaciones finales de los pequeños consumidores es una función ${}^0x(t, p(\mathrm{e}))$ que depende de sus preferencias, dotación inicial y decisiones e de los grandes consumidores, a partir de esto podemos decir que el modelo Cournot-Walras posee intrinsecamente una naturaleza de dos etapas.

Con el fin de evitar esta disimilitud presentamos una reformulación del modelo generalizado de Shapley como un juego de dos etapas, en donde, en la primera etapa los grandes consumidores toman sus decisiones y en la segunda etapa, justo después de haber observado las decisiones de los grandes consumidores, los pequeños consumidores actuan.

Esta reformulación es la razón de ser de este trabajo, ya que, a partir de ella enunciaremos el teorema cuya demostración es el objetivo final de esta tesis. El teorema afirma que el conjunto de las asignaciones del equlibrio Cournot-Walras coincide con un conjunto específico de las asignaciones de equilibrio perfecto de un subjuego derivado de la reformulación de dos etapas mencionada, denominando a estas últimas como asignaciones de un equilibrio perfecto en subjuegos de pseudo-Markov.

4.2. Modelo generalizado de Shapley de dos etapas

Siendo así, tenemos que el juego se desarrolla en las etapas 0 y 1. Analizemos las acciones de los consumidores. Sea la matriz $a \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ tal que

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \end{pmatrix}$$

Sean las correspondencias de acciones A^k en la etapa k del juego, para $k = 0,\, 1$, definidas en T y tales que $\mathrm{A}^0(t)$ es la acción "no hacer nada", para todo $t \in T_0$, y

$$\mathrm{A}^0(t) = \left\{ a \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \mid a_{ij} \geq 0,\, i, j = 1, ..., l \text{ y } \sum_{j=1}^{l} a_{ij} \leq w_i(t),\, i = 1, ..., \, l \right\}$$

para todo $t \in T_1$ y

$$\mathrm{A}^1(t) = \left\{ a \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \mid a_{ij} \geq 0,\, i, j = 1, ..., l \text{ y } \sum_{j=1}^{l} a_{ij} \leq w_i(t),\, i = 1, ..., \, l \right\}$$

para todo $t \in T_0$, y $\mathrm{A}^1(t)$ es la acción "no hacer nada", para todo $t \in T_1$.

Una selección de acción en la etapa 0 es una función a^0 definida en T, tal que $\mathrm{a}^0(t) \in \mathrm{A}^0(t)$, para todo $t \in T$, y donde ${}^1\mathrm{a}^0$ es integrable; igualmente una selección de acción en la etapa 1 es una función a^1 definida en T, tal que $\mathrm{a}^1(t) \in \mathrm{A}^1(t)$, para todo $t \in T$, y donde ${}^0\mathrm{a}^1$ es integrable.

Para cada $t \in T_1$ y $t \in T_0$, ${}^1\mathrm{a}^0_{ij}(t)$ $i,\, j = 1, \ldots l$ y ${}^0\mathrm{a}^1(t)$ $i,\, j = 1, \ldots l$, respectivamente, representan la cantidad del bien i que el consumidor t ofrece a cambio del bien j. Sean S^0 y S^1 los perfiles estratégicos de la etapa 0 y 1 respectivamente y H^0 y H^1 el conjunto de historias de las etapas 0 y 1 respectivamente, donde $H^0 = \emptyset$ y $H^1 = S^0$ y $H^2 = S^0 \times S^1$, donde H^2 es el conjunto de todas las historias finales.

Dada una historia final $\mathrm{h}^2 = (\mathrm{a}^0,\, \mathrm{a}^1)$, definimos a la matriz agregada $\bar{\mathrm{a}} = (\bar{\mathrm{a}}_{ij}) = (\int_{T_0} {}^0\mathrm{a}^1_{ij}(t) d\mu + \int_{T_1} {}^1\mathrm{a}^0_{ij}(t) d\mu)$.

Definición 4.1. *Dada la historia final* $\mathrm{h}^2 = (\mathrm{a}^0,\, \mathrm{a}^1)$*, decimos que el vector de precios* $p \in \mathbb{R}^l_{++}$ *iguala el precio de la oferta con el de la demanda si*

$$\sum_{i=1}^{l} p^i \bar{\mathrm{a}}_{ij} = p^j \left(\sum_{i=1}^{l} \bar{\mathrm{a}}_{ji} \right) \tag{4.1}$$

para $j = 1, ..., l$.

Por la proposición (3.6) afirmamos que existe un único vector de precios p, salvo múltiplos escalares de este, que satisface (4.1) si y sólo si $\bar{\mathrm{a}}$ es una matriz irreducible. Denotemos por $p(\mathrm{h}^2)$ a la función que asocia con cada historia final $\mathrm{h}^2 = (\mathrm{a}^0,\, \mathrm{a}^1)$ tal que $\bar{\mathrm{a}}$ es irreducible, al único vector de precios p, salvo múltiplos escalares, que hace que el precio de la oferta sea igual al precio de la demanda.

Consideremos ahora, dada una historia final $\mathrm{h}^2 = (\mathrm{a}^0,\, \mathrm{a}^1)$ y el vector único, salvo múltiplos escalares, de precios p, al reparto

$$\mathrm{x}_j(t,\, \mathrm{h}^2(t),\, p(\mathrm{h}^2)) = \begin{cases} \mathrm{w}_j(t) - \sum_{i=1}^{l} {}^0\mathrm{a}^1_{ji}(t) + \sum_{i=1}^{l} {}^0\mathrm{a}^1_{ij}(t)\, \frac{p^i(\mathrm{h}^2)}{p^j(\mathrm{h}^2)} & \text{para } t \in T_0 \\ \mathrm{w}_j(t) - \sum_{i=1}^{l} {}^1\mathrm{a}^0_{ji}(t) + \sum_{i=1}^{l} {}^1\mathrm{a}^0_{ij}(t)\, \frac{p^i(\mathrm{h}^2)}{p^j(\mathrm{h}^2)} & \text{para } t \in T_1 \end{cases}$$

para $j = 1, ..., l$. Es fácil ver que la repartición mencionada constituye una asignación.

Finalmente, dada una historia final $\mathrm{h}^2 = (\mathrm{a}^0,\, \mathrm{a}^1)$ la dotación final del comerciante t puede ser vista como

$$\mathrm{x}_j = \begin{cases} \mathrm{x}_j(t,\, \mathrm{h}^2(t),\, p(\mathrm{h}^2)) & \text{si } p \text{ es único y limpia el mercado} \\ \mathrm{w}_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para toda $t \in T$, $j = 1, ..., l$.

Para el planteamiento extensivo del juego definimos ahora al perfil estratégico s como la secuencian de funciones $\{\mathrm{s}^0,\, \mathrm{s}^1\}$, donde s^0 está definida en $T \times H^0$ y es tal que $\mathrm{s}^0(t,\, \mathrm{h}^0) \in \mathrm{A}^0(t)$ para toda $t \in T$, y $\mathrm{s}^0(\cdot,\, \mathrm{h}^0) \in S^0$; s^1 está definida en $T \times H^1$ y es tal que, dada $\mathrm{h}^1 \in H^1$, $\mathrm{s}^1(t,\, \mathrm{h}^1) \in \mathrm{A}^1(t)$, para toda $t \in T$, $\mathrm{s}^1(\cdot,\, \mathrm{h}^1) \in S^1$.

Para cada $t \in T$, denotemos por $s(t,\, \cdot)$ a la secuencia de funciones $\{s^0(t,\, \cdot),\, s^1(t,\, \cdot)\}$, donde $s^0(t,\, \cdot) : H^0 \to \mathrm{A}^0(t)$ y $s^1(t,\, \cdot) : H^1 \to \mathrm{A}^1(t)$. Sea

$$\mathrm{s} \mid s(t,\, \cdot) = \{\mathrm{s}^0 \mid s^0(t,\, \cdot),\, \mathrm{s}^1 \mid s^1(t,\, \cdot)\}$$

el perfil estratégico obtenido al reemplazar $\mathrm{s}^0(t,\, \cdot)$ en s^0 y $\mathrm{s}^1(t,\, \cdot)$ en s^1, respectivamente, con las funciones $s^0(t,\, \cdot)$ y $s^1(t,\, \cdot)$. Dado un pefil estratégico s, denotaremos por ${}^1\mathrm{s}^0$ y ${}^0\mathrm{s}^1$ a las funciones definidas, respectivamente, en T_1 y T_0, y tales que ${}^1\mathrm{s}^0(t) ={}^1 \mathrm{a}^0(t) = \mathrm{s}^0(t,\, \mathrm{h}^0)$, para todo $t \in T_1$, y ${}^0\mathrm{s}^1(t) ={}^0 \mathrm{a}^1(t) = \mathrm{s}^1(t,\, \mathrm{h}^1)$, para todo $t \in T_0$, con $\mathrm{h}^1 = \mathrm{s}^0(\cdot,\, \mathrm{h}^0)$. Además, dado un perfil estratégico s, definimos a la matriz agregada $\bar{\mathrm{s}} = (\bar{\mathrm{s}}_{ij}) = (\int_{T_0} {}^0\mathrm{s}^1_{ij}(t)d\mu + \int_{T_1} {}^1\mathrm{s}^0_{ij}(t)d\mu)$.

Definición 4.2. *Dado un perfil estratégico* s *tal que la matriz* $\bar{\mathrm{S}}$ *es irreducible, denotamos por* $p(\mathrm{s})$ *a la función que nos asocia con cada* s *al único vector de precios, salvo ecalares, que hace que el precio de la oferta sea igual al precio de la demanda, es decir, que satisface*

$$\sum_{i=1}^{l} p^i \bar{\mathrm{s}}_{ij} = p^j \left(\sum_{i=1}^{l} \bar{\mathrm{s}}_{ji} \right) \tag{4.2}$$

para $j = 1, ..., l$.

Consideremos ahora, dados un pefil estratégico s y el vector único, salvo múltiplos escalares, de precios p, que satisface (4.2 al reparto

$$\mathrm{x}_j(t,\,\mathrm{s}(t),\,p(\mathrm{s})) = \begin{cases} w_j(t) - \sum_{i=1}^{l} {}^0\mathrm{s}^1_{ji}(t) + \sum_{i=1}^{l} {}^0\mathrm{s}^1_{ij}(t)\,\frac{p_i(\mathrm{s})}{p_j(\mathrm{s})} & \text{para } t \in T_0 \\ w_j(t) - \sum_{i=1}^{l} {}^1\mathrm{s}^0_{ji}(t) + \sum_{i=1}^{l} {}^1\mathrm{s}^0_{ij}(t)\,\frac{p_i(\mathrm{s})}{p_j(\mathrm{s})} & \text{para } t \in T_1 \end{cases}$$

para $j = 1, ..., l$. Y, como es de esperarse, las dotaciones del consumidor t dado el perfil estratégico s quedan como

$$\mathrm{x}_j = \begin{cases} \mathrm{x}_j(t,\,\mathrm{s}(t),\,p(\mathrm{s})) & \text{si } p \text{ es único y limpia el mercado} \\ w_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para toda $t \in T$, $j = 1, ..., l$.

Consideremos ahora el subjuego obtenido en la etapa 1 del juego mencionado arriba. Dada la historia $\mathrm{h}^1 \in H^1$ y el perfil de estratégico s, la selección estratégica $\mathrm{s}[\mathrm{h}^1]$ es una función definida en T y tal que, para cada $\mathrm{h}^1 \in H^1$, $\mathrm{s}[\mathrm{h}^1(t)] = s^1(t,\,\mathrm{h}^1)$, para todo $t \in T$. Por otro lado dada la historia $\mathrm{h}^1 \in H^1$ y el perfil estratégico s, definimos a la matriz agregada $\bar{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1] = (\bar{\mathrm{s}}_{ij}[\mathrm{h}^1]) = (\int_{T_0} {}^0\mathrm{s}_{ij}(t)[\mathrm{h}^1]d\mu + \int_{T_1} {}^1\mathrm{h}^1_{ij}(t)d\mu)$.

Entonces, nuevamente tenemos.

Definición 4.3. *Dada la historia* $\mathrm{h}^1 \in H^1$ *y el perfil estratégico* s *tal que la matriz* $\bar{\mathrm{S}}[\mathrm{h}^1]$ *es irreducible, denotamos por* $p(\mathrm{s}[\mathrm{h}^1])$ *a la función que nos asocia con cada* s *al único vector de precios, salvo ecalares, que hace que el precio de la oferta sea igual al precio de la demanda, es decir, que satisface*

$$\sum_{i=1}^{l} p^i(\bar{\mathrm{s}}_{ij}[\mathrm{h}^1_{ij}]) = p^j\left(\sum_{i=1}^{l}(\bar{\mathrm{s}}_{ij}[\mathrm{h}^1])\right) \tag{4.3}$$

para $j = 1, ..., l$.

Obteniendo, dados $\mathrm{h}^1 \in H^1$ y el vector único, salvo multiplos escalares, tal que $\bar{\mathrm{s}}$ es irreducible, las dotaciones finales

$$\mathrm{x}_j(t,\,\mathrm{s}[\mathrm{h}^1(t)],\,p(\mathrm{s}[\mathrm{h}^1])) = \begin{cases} \mathrm{w}_j(t) - \sum_{i=1}^{l} {}^0\mathrm{s}[\mathrm{h}^1_{ji}(t)] + \sum_{i=1}^{l} {}^0\mathrm{s}[\mathrm{h}^1_{ij}(t)]\,\frac{p_i(\mathrm{s}[\mathrm{h}^1])}{p_j(\mathrm{s}[\mathrm{h}^1])} & \text{para } t \in T_0 \\ \mathrm{w}_j(t) - \sum_{i=1}^{l} {}^1\mathrm{h}^1{}_{ji}(t) + \sum_{i=1}^{l} {}^1\mathrm{h}^1{}_{ij}(t)\,\frac{p_i(\mathrm{s}[\mathrm{h}^1])}{p_j(\mathrm{s}[\mathrm{h}^1])} & \text{para } t \in T_1 \end{cases}$$

para $j = 1, ..., l$. Y, finalmente, las dotaciones finales del consumidor t quedan como

$$\mathrm{x}_j = \begin{cases} \mathrm{x}_j(t,\,\mathrm{s}[\mathrm{h}^1(t)],\,p(\mathrm{s}[\mathrm{h}^1])) & \text{si } p\text{es único y limpia el mercado} \\ \mathrm{w}_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para toda $t \in T$, $j = 1, ..., l$.

Con la notación especificada hasta este punto podemos pasar a definir el concepto del equilibrio perfecto de un subjuego para el juego de dos etapas descrito arriba.

Definición 4.4. *Un perfil estratégico* $\hat{\mathrm{s}}$ *tal que la matriz* $\bar{\hat{\mathrm{s}}}[\mathrm{h}^1]$ *es irreducible para cada* $\mathrm{h}^1 \in H^1$ *es un equilibrio de subjuego perfecto si para todo* $t \in T$,

$$u_t(\mathrm{x}(t,\, \hat{\mathrm{s}}(t),\, p(\hat{\mathrm{s}}))) \geq u_t(\mathrm{x}(t,\, s(t,\, \cdot),\, p(\hat{\mathrm{s}} \mid s(t,\, \cdot))),$$

para todas las posibles funciones de secuencias de funciones $s(t,\, \cdot)$, *y, para cada* $\mathrm{h}^1 \in H^1$,

$$u_t(\mathrm{x}(t,\, \hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1(t)],\, p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1]))) \geq u_t(\mathrm{x}(t,\, s(t)[\mathrm{h}^1],\, p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1] \mid s(t)[\mathrm{h}^1]))),$$

para todo $t \in T$ *y para todo* $s(t) \mid \mathrm{h}^1 \in \mathrm{A}^1(t)$.

En este punto de nuestra construcción tendremos que lidiar con el siguiente problema. En el modelo Cournot-Walras, todas las diferentes estrategias del sector atómico que agrega una misma oferta nos genera los mismos precios. Por otro lado, en el equilibrio perfecto del subjuego de dos etapas del modelo de Shapley, nada nos asegura que el sector no atómico reaccione de manera semejante ante las diferentes historias que conducen a una misma oferta agregada, generando asi los mismo precios, a pesar de que las ofertas del sector atómico afecta a los pagos sólo en el agregado. Con el fin de evitar este comportamiento tan poco razonable, haremos uso del concepto de teoria de juegos denominado equilibrio perfecto en subjuegos; esta herramienta en nuestro caso se caracteriza por el hecho de que, en la segunda etapa del juego, los pequeños comerciantes utilizan cierto tipo de estrategias invariantes con respecto a las diferentes ofertas de los grandes comerciantes que conducen a las mismas cantidades ofertadas.

Para este propósito denotaremos por $H^{1*}(\cdot)$ a la partición de H^1 tal que, para cada $\mathrm{h}^{1\prime} \in H^1$,

$$H^{1*}(\mathrm{h}^{1\prime}) = \{\mathrm{h}^{1\prime\prime} \in H^1 \mid \int_{T_1} \mathrm{h}^{1\prime\prime}(t)d\mu = \int_{T_1} \mathrm{h}^{1\prime}(t)d\mu\}$$

Para nuestro problema H^{1*} es una partición del conjunto de las historias de la etapa 1 suficiente, aunque seguramente no seria una partición lo suficientemente fina para definir un equilibrio perfecto de Markov. Por esta razón denominaremos a nuestro equilibrio como equilibrio perfecto de pseudo-Markov. Formalmente tenemos lo siguiente.

Definición 4.5. *Decimos que un equilibrio perfecto de un subjuego* $\hat{\mathrm{s}}$ *constituye un equilibrio perfecto de pseudo-Markov si, para todo* $t \in T$, $\hat{\mathrm{s}}^1(t,\, \mathrm{h}^{1'}) = \hat{\mathrm{s}}^1(t,\, \mathrm{h}^{1''})$ *siempre que* $\mathrm{h}^{1''} \in H^{1*}(\mathrm{h}^{1'})$.

4.3. Equilibrio Cournot-Walras como un equilibrio perfecto en subjuegos

Finalmente para la demostración de nuestro teorema de equivalencia agregaremos un último supuesto acerca de las dotaciones y preferencias de los pequeños consumidores. Denotaremos por L al conjunto de bienes $\{1, ..., l\}$ y por

$\mathbb{R}^l_{+j>0} \subset \mathbb{R}^l_+$ al conjunto de vectores en $\mathbb{R}^l_+$ cuya j-ésima componente es estrictamente positiva. Para cada $i \in L$, consideraremos al al conjunto $T_i = \{t \in T_0 \mid \mathrm{w}_i(t) > 0\}$. Claramente, por el supuesto 1, $\mu(T_i) > 0$. Diremos que los bienes $i,\, j \in L$ mantienen una relación C si existe un subconjunto medible $T'_j \subset T_i$, con $\mu(T'_i) > 0$, tal que, para todo $t \in T'_i$, $\{x \in \mathbb{R}^l_+ \mid u_t(x) = u_t(y)\} \subset \mathbb{R}^l_{+j>0}$ para todo $y \in \mathbb{R}^l_{++}$.

Definición 4.6. *Decimos que el espacio de bienes L es neto si $\{\langle i,\, j\rangle : iCj\} \neq \emptyset$ y para cualquier par de vértices diferentes, i y j, de la gráfica dirigida $D_L(L,\, C)$, existe una arista que los une.*

Supuesto 5. *El conjunto de bienes L es neto.*

Con todo lo anterior nos encontramos listos para enunciar nuestro teorema de equivalencia.

Teorema 4.1. *Dada una economía de intercambio que satisface los supuestos 1, 2, 3, 4 y 5, entonces*

i) *Si el par $(\tilde{\mathrm{e}},\, \tilde{\mathrm{x}})$ es un equilibrio Cournot-Walras respecto a la selección de precios $p(\mathrm{e})$ constituye un equilibrio Cournot-Walras, entonces existe un equilibrio perfecto de pseudo-Markov $\tilde{\mathrm{s}}$ tal que $\mathrm{x}(t,\, p(\mathrm{e})) = \mathrm{x}(t,\, \tilde{\mathrm{s}}(t),\, p(\tilde{\mathrm{s}}))$ para todo $t \in T$.*

ii) *Si $\tilde{\mathrm{s}}$ es un equilibrio perfecto de pseudo-Markov, entonces existen un perfil estratégico $\hat{\mathrm{e}}$ y una selección de precio $p(\mathrm{e})$ tal que el par $(\hat{\mathrm{e}},\, \hat{\mathrm{x}})$, donde $\hat{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{x}(t,\, \hat{\mathrm{s}}(t),\, p(\hat{\mathrm{s}})) =^0 \mathrm{x}(t,\, p(\hat{\mathrm{e}}))$ para todo $t \in T_0$ y $\hat{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{x}(t,\, \hat{\mathrm{s}}(t),\, p(\hat{\mathrm{s}})) =^1 \mathrm{x}(t,\, \hat{\mathrm{e}}(t),\, p(\hat{\mathrm{e}}))$ para todo $t \in T_1$, es un equilibrio Cournot-Walras con respecto a la selección de precio $p(\mathrm{e})$.*

Demostración. i) Sea $(\tilde{\mathrm{e}},\, \tilde{\mathrm{x}})$ un equilibrio Cournot-Walras con respecto a la selección de precios $p(\mathrm{e})$. Denotemos por $p(\mathrm{h}^1)$ a la función obtenida al reemplazar, en la selección de precio $p(\mathrm{e})$, a cada perfil estratégico e con la historia h^1 tal que $\mathrm{h}^1(t) = \mathrm{e}(t)$ para todo $t \in T_1$.

Consideremos ahora la historia h^1. Como $\mathrm{h}^1 \in H^1$, entonces, dado que $p(\mathrm{h}^1) \gg 0$ por hipótesis y el supuesto 2 tenemos que

$$p(\mathrm{h}^1)^0\mathrm{x}(t,\, p(\mathrm{h}^1)) = p(\mathrm{h}^1)w(t)$$

para todo $t \in T_0$. Por el lema (3.1) sabemos que para todo $t \in T_0$ existe $\lambda^j(t) > 0$ con $\sum_{j=1}^{l} \lambda^j(t) = 1$ para $j = 1,\, ...,\, l$ tal que

$$^0\mathrm{x}_j(t,\, p(\mathrm{h}^1)) = \lambda^j(t)\frac{\sum_{j=1}^{l} p^j(\mathrm{h}^1)w_j(t)}{p^j(\mathrm{h}^1)}$$

Definimos ahora a la función $\lambda : T_0 \to \mathbb{R}^l_+$ tal que

$$\lambda^j(t) = \lambda^j(t)$$

para $t \in T_0$ y $j = 1, \ldots, l$. Denotemos por $\tilde{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1]$ a la función definida en T tal que $\tilde{\mathrm{s}}(t)[\mathrm{h}^1] \in \mathrm{A}^1(t)$ para todo $t \in T$ y

$$^0\tilde{\mathrm{s}}_{ij}[\mathrm{h}^1] = w_i(t)\lambda^j(t),\ i,\ j, = 1,\ ...,\ l$$

para todo $t \in T_0$. Es claro que la función $^0\tilde{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1]$ es integrable.

Mostremos ahora que la matriz $\bar{\tilde{\mathrm{s}}}[\mathrm{h}^1] = (\bar{\tilde{\mathrm{s}}}_{ij}[\mathrm{h}^1]) = (\int_{T_0} {}^0\mathrm{s}^1_{ij}[\mathrm{h}^1]d\mu + \int_{T_0} {}^1\mathrm{h}^1_{ij}d\mu)$ es irreducible.

Sean i, j dos bienes que mantienen la relación C. Sea $t \in T'_i$. Por hipótesis $p(\mathrm{h}^1) \gg 0$, de aquí que $p(\mathrm{h}^1) \cdot w(t) > 0$. Con esto y el supuesto 2 tenemos que $^0\mathrm{x}(t,\, p(\mathrm{h}^1)) > 0$ y dado que los bienes i y j mantienen la relación C, entonces $^0\mathrm{x}_j(t,\, p(\mathrm{h}^1)) > 0$.

Consideremos ahora a la matriz $\bar{\mathrm{s}}^L[\mathrm{h}^1] = (\bar{\mathrm{s}}^L_{ij}[\mathrm{h}^1])$ con

$$(\bar{\mathrm{s}}^L_{ij}[\mathrm{h}^1]) = \begin{cases} \int_{T'_i} w_i(t)\lambda^j(t)d\mu & \text{si } iCj \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si iCj entonces $\bar{\mathrm{s}}^L_{ij}[\mathrm{h}^1] > 0$ dado que $w_i(t) > 0$ y $\lambda^j(t) > 0$ para todo $t \in T'_i$. Entonces dado que $\bar{\tilde{\mathrm{s}}}_{ij}[\mathrm{h}^1] > \bar{\mathrm{s}}^L_{ij}[\mathrm{h}^1]$ para $i,\ j = 1,\ ...,\ l$ tenemos que la matriz $\bar{\tilde{\mathrm{s}}}[\mathrm{h}^1]$ es irreducible. Con lo anterior, el supuesto 5 y el argumento usado en la parte (ii) de la demostración de la proposición (3.7) tenemos que la matriz $\bar{\mathrm{s}}^L[\mathrm{h}^1]$ es irreducible.

Por lo anterior tenemos que las asignaciones finales de los pequeños consumidores quedan determinadas por

$$^0\mathrm{x}_j(t,\, p(\mathrm{h}^1)) = w_j(t) - \sum_{i=1}^{l} \tilde{\mathrm{s}}_{ji}(t)[\mathrm{h}^1] + \sum_{i=1}^{l} \tilde{\mathrm{s}}_{ij}(t)[\mathrm{h}^1]\frac{p_i(\mathrm{h}^1)}{p_j(\mathrm{h}^1)}$$

para todo $t \in T_0$ y $j = 1,\ ...,\ l$. Por otro lado, como la función $p(\mathrm{h}^1)$ satisface la ecuación (3.4) tenemos

$$\int_{T_0} w_j(t)d\mu - \sum_{i=1}^{l} \tilde{\mathrm{s}}_{ji}(t)[\mathrm{h}^1]d\mu + \sum_{i=1}^{l} \int_{T_0} \tilde{\mathrm{s}}_{ij}(t)[\mathrm{h}^1]d\mu\frac{p_i(\mathrm{h}^1)}{p_j(\mathrm{h}^1)} + \sum_{i=1}^{l} \int_{T_1} \mathrm{h}^1_{ij}(t)d\mu\frac{p_i(\mathrm{h}^1)}{p_j(\mathrm{h}^1)} =$$

$$= \int_{T_0} w_j(t)d\mu + \sum_{i=1}^{l} \int_{T_1} \mathrm{h}^1_{ji}(t)d\mu$$

para $j = 1, \ldots, l$. Esto implica que

$$\sum_{i=1}^{l} p_i(\mathrm{h}^1)\bar{\tilde{\mathrm{s}}}_{ij}[\mathrm{h}^1] = p_j(\mathrm{h}^1)\left(\sum_{i=1}^{l} \bar{\tilde{\mathrm{s}}}_{ji}[\mathrm{h}^1]\right)$$

para $j = 1, \ldots, l$. Y por la ecuación (4.1) tenemos que

$$p(\mathrm{h}^1) = p(\tilde{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1])$$

De lo anterior se tiene de manera directa que

$$x_j(t,\, \tilde{\mathrm{s}}(t)[\mathrm{h}^1],\, p(\tilde{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1])) = \begin{cases} {}^0x_j(t,\, p(\mathrm{h}^1)) & \text{para } t \in T_0 \\ {}^1x_j(t,\, \mathrm{h}^1(t),\, p(\mathrm{h}^1) & \text{para } t \in T_1 \end{cases}$$

Ahora únicamente nos resta mostrar que ningún jugador $t \in T$ en la etapa 1 del juego obtiene ventaja al desviarse de de $\tilde{\mathrm{s}}(t)[\mathrm{h}^1]$.

Dado que los grandes consumidores por definición en la segunda etapa juegan con la acción "no hacer nada", basta mostrar lo anterior para los pequeños consumidores. Sea $t \in T_0$ y una acción $s(t)[\mathrm{h}^1] \in A^1(t)$ tal que

$$u_t(x(t,\, s(t)[\mathrm{h}^1],\, p(\tilde{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1] \mid s(t)[\mathrm{h}^1]))) > u_t(x(t,\, \tilde{\mathrm{s}}(t)[\mathrm{h}^1],\, p(\mathrm{s}[\mathrm{h}^1])))$$

Por la definición (4.1) tenemos que

$$p(\tilde{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1] \mid s(t)[\mathrm{h}^1] = p(\tilde{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1]$$

Por lo tanto la última desigualdad implica que

$$u_t(x(t,\, s(t)[\mathrm{h}^1],\, p(\mathrm{h}^1))) > u_t({}^0x(t,\, p(\mathrm{h}^1)))$$

Como

$$p(\mathrm{h}^1)x(t,\, s(t)[\mathrm{h}^1],\, p(\mathrm{h}^1) = p(\mathrm{h}^1)w(t)$$

entonces

$${}^0x(t,\, p(\mathrm{h}^1)) \notin \Delta_{p(\mathrm{h}^1)}(t) \cap \Gamma_{p(\mathrm{h}^1)}$$

contadicción!

Sean $\tilde{\mathrm{h}}^1$ una historia del juego tal que $\tilde{\mathrm{h}}^1(t) = \tilde{\mathrm{e}}(t)$ para todo $t \in T_1$ y $\tilde{\mathrm{s}}$ un perfil estratégico tal que $\tilde{\mathrm{s}}^0(t, \mathrm{h}^0)] = \tilde{\mathrm{h}}^1(t)$ y $\tilde{\mathrm{s}}^1(t, \mathrm{h}^1) = \tilde{\mathrm{s}}(t)[\mathrm{h}^1]$ para todo $t \in T$ y $\mathrm{h}^1 \in H^1$. Entonces $p(\tilde{\mathrm{e}}) = p(\tilde{\mathrm{s}})$ y

$$x_j(t,\, \tilde{\mathrm{s}}(t),\, p(\tilde{\mathrm{s}})) = \begin{cases} {}^0x_j(t, p(\tilde{\mathrm{e}})) & \text{para } t \in T_0 \\ {}^1x_j(t, \tilde{\mathrm{e}}(t), p(\tilde{\mathrm{e}})) & \text{para } t \in T_1 \end{cases}$$

para $j = 1, \ldots, l$.

Por otro lado dado que $p(\mathrm{h}^1)$ es una selección de precio, entonces $p(\mathrm{h}^{1\prime}) = p(\mathrm{h}^{1\prime\prime})$ para cualquier $\mathrm{h}^{1\prime\prime} \in H^{1^\star}(\mathrm{h}^{1\prime})$. Esto implica que para todo $t \in T$

$$\mathrm{s}^1(t, \mathrm{h}^{1\prime}) = \mathrm{s}^1(t, \mathrm{h}^{1\prime\prime})$$

para cualquier $\mathrm{h}^{1\prime\prime} \in H^{1^\star}(\mathrm{h}^{1\prime})$.

Finalmente nos falta mostrar que en la primera etapa ningún jugador oobtiene ventaja al desviarse de $\tilde{\mathrm{s}}$.

Para los pequeños consumidores tenemos que

$$p(\tilde{\mathrm{s}} \mid s(t,\cdot)) = p(\tilde{\mathrm{s}}[\tilde{\mathrm{h}}^1] \mid s(t,\tilde{\mathrm{h}}^1)[\mathrm{h}^1]$$

por lo tanto, de la discusión anterior tenemos que ningún $t \in T_0$ obtiene ventaja al desviarse de $\tilde{\mathrm{s}}$.

Para los grandes consumidores, supongamos que existe un consumidor $t \in T_1$ con su secuencia de funciones $s(t,\cdot)$ tales que

$$u_t(x(t,\tilde{\mathrm{s}} \mid s(t,\cdot), p(\tilde{\mathrm{s}} \mid s(t,\cdot)))) > u_t(x(t,\tilde{\mathrm{s}}(t), p(\tilde{\mathrm{s}}))) \tag{4.4}$$

Sean $\mathrm{h}^1 \mid h(t)$ la historia obtenida al remplazar $\tilde{\mathrm{h}}^1(t)$ en $\tilde{\mathrm{h}}^1$ con $h(t) = s^0(t,\mathrm{h}^0)$ y $\tilde{\mathrm{e}} \mid e(t)$ la selección estratégica obtenida al remplazar $\tilde{\mathrm{e}}(t)$ en $\tilde{\mathrm{e}}$ con $e(t) = s^0(t,\mathrm{h}^0)$.

Como $p(\tilde{\mathrm{e}} \mid e(t)) = p(\tilde{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1] \mid h(t)) = p(\tilde{\mathrm{s}} \mid s(t,\cdot))$, entonces la desigualdad (4.4) implica

$$\begin{aligned} u_t({}^1x(t,e(t),p(\tilde{\mathrm{e}} \mid e(t)))) &= u_t(x(t,s(t,\cdot),p(\tilde{\mathrm{s}} \mid s(t,\cdot)))) > \\ > u_t(x(t,\tilde{\mathrm{s}}(t),p(\tilde{\mathrm{s}}))) &= u_t({}^1x(t,\tilde{\mathrm{e}}(t),p(\tilde{\mathrm{e}}))) \end{aligned}$$

contradicción!

ii) Sea $\hat{\mathrm{s}}$un equilibrio perfecto en subjuegos, consideremos la historia $\mathrm{h}^1 \in H^1$.

Para los pequeños consumidores tenemos que

$$p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1]x(t,\tilde{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1], p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1])) = p(\hat{s}[\mathrm{h}^1])w(t)$$

Mostremos ahora que para todo $t \in T_0$

$$x(t,\hat{s}[\mathrm{h}^1(t)], p(\hat{s}[\mathrm{h}^1])) =^0 x(t,p(\hat{s}[\mathrm{h}^1]))$$

Supongamos que existe un consumidor $t \in T_0$ tal que la igualdad no se cumple. Por el supuesto 2 tenemos que existe una canasta

$$z \in \{x \in \mathbb{R}^l_+ \mid p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1]x = p(\hat{s}[\mathrm{h}^1]w(t)\}$$

tal que

$$u_y(z) > u_t(x(t,\hat{s}[\mathrm{h}^1(t)], p(\hat{s}[\mathrm{h}^1]))$$

Entonces por el lema (3.1) sabemos que existe $\lambda^j \geq 0$, para $j = 1,\ldots,l$, con $\sum_{j=1}^l \lambda^j = 1$ y tal que

$$z_j = \lambda^j \frac{\sum_{j=1}^l p_j(\hat{s}[\mathrm{h}^1])w_j(t)}{p_j(\hat{s}[\mathrm{h}^1])}$$

para $j = 1,\ldots,l$. Sea $s_{ij}(t) = w_i(t)\lambda^j$ para $i,j = 1,\ldots,l$. Con esto y la definición (4.1) tenemos que

$$p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1]) = p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1] \mid s(t)[\mathrm{h}^1])$$

para $j = 1, \ldots, l$, se sigue de aquí que

$$z_j = x_j(t, s(t), p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1] \mid s(t)[\mathrm{h}^1]))$$

para $j = 1, \ldots, l$. Pero esto implica que

$$u_t(x(t, s(t), p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1] \mid s(t)[\mathrm{h}^1]))) = u_t(z) > u_t(x(t, \hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1(t)], p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1]))$$

contradicción!

Como la función $x(\cdot, \mathrm{h}^1(\cdot), p(\hat{s}[\mathrm{h}^1]))$ es una asignación tenemos que

$$\int_{T_0} {}^0x_j(t, p(\hat{s}[\mathrm{h}^1]))d\mu + \sum_{i=1}^{l} \int_{T_1} \mathrm{h}^1_{ij}(t) d\mu \frac{p_i(\hat{s}[\mathrm{h}^1])}{p_j(\hat{s}[\mathrm{h}^1])} = \int_{T_0} w_j(t) d\mu + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{h}^1_{ji}(t) d\mu \tag{4.5}$$

Sea ahora $p(\mathrm{e})$ la función que asocia con cada e el vector de precios $p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1])$, donde h^1 es tal que $\mathrm{h}^1(t) = \mathrm{e}(t)$ para todo $t \in T_1$.

Como la selección estratégica $\hat{\mathrm{s}}$ constituye un equilibrio perfecto en subjuegos con la partición determinada por $H^{1^\star}$, sabemos que $p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^{1\prime}] = p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^{1\prime\prime}]$ si $\int_{T_1} \mathrm{h}^{1\prime}(t) d\mu = \int_{T_1} \mathrm{h}^{1\prime\prime}(t) d\mu$, entonces $p(\mathrm{e}') = p(\mathrm{e}'')$ si $\int_{T_1} \mathrm{e}'(t) d\mu = \int_{T_1} \mathrm{e}''(t) d\mu$. Remplazando en la ecuación (4.5) la historia h^1 con la selección estratégica e tal que $\mathrm{e}(t) = \mathrm{h}^1(t)$ para todo $t \in T_1$ y la función de precios $p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1])$ con la función de precios $p(\mathrm{e})$ nos queda

$$\int_{T_0} {}^0x_j(t, p(\mathrm{e})))d\mu + \sum_{i=1}^{l} \int_{T_1} \mathrm{e}_{ij}(t) d\mu \frac{p_i(\mathrm{e})}{p_j(\mathrm{e})} = \int_{T_0} w_j(t) d\mu + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{e}_{ji}(t) d\mu$$

de donde se tiene de manera directa que la función $p(\mathrm{e})$ satisface la ecuación (3.4). Por lo tanto la función $p(\mathrm{e})$ es una selección de precio.

Siguiendo el mismo argumento tenemos que para toda historia $\mathrm{h}^1 \in H^1$

$$\hat{x}(t) = x(t, \hat{\mathrm{s}}(t), p(\hat{\mathrm{s}})) = \begin{cases} {}^0x(t, p(\hat{\mathrm{e}}) & \text{para } t \in T_0 \\ {}^1x(t, \hat{\mathrm{e}}(t), p(\hat{\mathrm{e}})) & \text{para } t \in T_1 \end{cases}$$

donde $\hat{\mathrm{e}}$ es la selección estratégica tal que $\hat{\mathrm{e}}(t) = \mathrm{h}^1(t)$ para todo $t \in T_1$.

Con lo cual únicamente nos resta mostrar que ningún consumidor $t \in T_1$ obtiene ventaja al desviarse de la selección estratégica $\hat{\mathrm{e}}$. Supongamos que existe un consumidor $t \in T_1$ y una selección estratégica $e(t) \in \mathrm{E}(t)$ tales que

$$u_t({}^1x(t, e(t), p(\hat{\mathrm{e}} \mid e(t)))) > u_t({}^1x(t, \hat{\mathrm{e}}(t), p(\hat{\mathrm{e}}))) \tag{4.6}$$

Sean $\mathrm{h}^1 \mid h(t)$ la historia obtenida la remplazar $\hat{\mathrm{h}}^1(t)$ en $\hat{\mathrm{h}}^1$ con $h(t) = e(t)$ y $\hat{\mathrm{s}} \mid s(t)$ el perfil estratégico obtenido al remplazar $\hat{\mathrm{s}}^0(t, \cdot)$ en $\hat{\mathrm{s}}^0$ con $s^0(t) = h(t)$. Como $p(\hat{\mathrm{s}} \mid s(t)) = p(\hat{\mathrm{s}}[\mathrm{h}^1] \mid h(t) = p(\hat{\mathrm{e}} \mid e(t))$, entonces la desigualdad (4.6) implica que

$$\begin{aligned} u_t({}^1x(t, s(t), p(\hat{\mathrm{s}} \mid s(t)))) &= u_t({}^1x(t, e(t), p(\hat{\mathrm{e}} \mid e(t)))) > \\ &> u_t({}^1x(t, \hat{\mathrm{e}}(t), p(\hat{\mathrm{e}}))) = u_t({}^1x(t, \hat{\mathrm{s}}(t), p(\hat{\mathrm{s}}))) \end{aligned}$$

contradicción! $\square$

Apéndice A

Bases matemáticas

En este apéndice se enuncian varios de los conceptos matemáticos utilizados a lo largo del trabajo.

Teoría de la medida

Con el fin de desarrollar las bases matemáticas necesarias para la construcción del espacio de consumidores del capítulo 3 a continuación mostramos algunas definiciones.

Definición A.1. *Espacios métricos Sea una familia no vacía de subconjutos del conjunto . Decimos que es un álgebra de conjuntos si es cerrada bajo complementos y uniones finitas. Esto es dados entonces Una -álgebra es un álgebra que también es cerrada bajo uniones contables. Es decir, si entonces*

Definición A.2. *Espacios métricos Sea una familia no vacía de subconjutos del conjunto . Decimos que es un álgebra de conjuntos si es cerrada bajo complementos y uniones finitas. Esto es dados entonces Una -álgebra es un álgebra que también es cerrada bajo uniones contables. Es decir, si entonces*

Definición A.3. *Dado un espacio de medida (X, Σ, μ), decimos que un conjunto medible A constituye un átomo si $\mu^*(A) > 0$ y para todo $B \subset A$, $\mu^*(B) = 0$ o $\mu^*(A \setminus B) = 0$. Por otro lado, si el espacio (X, Σ, μ) no contiene átomos decimos que es un espacio no atómico. Finalmente si existe un conjunto contable A tal que para cada $a \in A$ el conjunto de un solo elemento $\{a\}$ es medible con $\mu^*(a) > 0$ y $\mu^*(X \setminus A) = 0$ decimos que el espacio de medida es puramente atómico.*

Matrices no negativas

Recordemos que una matriz A de dimensiones $m \times n$ es una matriz cuadrada si $m = n$.

Por otro lado si las entradas $a_{ij} \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots n$ entonces estamos hablando de una matriz no negativa. Una vez revisados estos conceptos podemos pasar a nuestra siguiente definición.

Definición A.4. *Decimos que una matriz cuadrada no negativa A es irreducible si para cada par i, j, con $i \neq j$, existe $k \in \mathbb{Z}_{++}$ denominado $k = k(i, j)$ tal que $a_{ij}^k > 0$, donde a_{ij}^k representa la ij-ésima entrada de la k-ésima potencia A^k de A.*

Correspondencias

Definiciones

Definición A.5. *Sean $(\mathbb{R}^n, d_n)$ y $(\mathbb{R}^m, d_m)$ dos espacios métricos euclideanos, decimos que $\varphi : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ es una correspondencia si para cada $x \in \mathbb{R}^n$, φ le asocia un conjunto $\varphi(x) \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Al igual que cuando estudiamos la continuidad de una función, para el caso de las correspondencias tenemos lo siguiente.

Definición A.6. *Decimos que la correspondencia $\varphi : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ es*

- *Semicontinua superiormente en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si para cada vecindad, V de $\varphi(x_0)$ existe una vecindad N de x_0 tal que*

  $$\varphi(x) \subseteq V$$

  para todo $x \in N$.

- *Semicontinua inferiormente en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si, para cada subconjunto abierto de V de $\mathbb{R}^m$ tal que $\varphi(x_0) \cap V \neq \emptyset$ existe una vecindad N de x_0 tal que*

  $$\varphi(x) \cap V \neq \emptyset$$

  para todo $x \in N$.

- *Continua en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si es a la vez semicontinua superior e inferiormente en x_0.*

Diremos que la correspondecia φ es semicontinua superiomente sobre un conjunto $A \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si es semicontinua superiormente en cada punto $x \in A$. De manera similar usaremos la terminología para correspondencias semicontinuas inferiormente y continuas.

Definición A.7. *Si tenemos m correspondencias $\varphi_i : S \twoheadrightarrow T_i$ definimos el producto de correspondencias φ como la correspondencia cuyo rango es el producto de los T_i de la siguiente manera*

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{m} \varphi_i(x)$$

para todo $x \in S$.

Aplicaciones

Una de las tantas aplicaciones de las correspondencias es, como veremos a continuación, para un problema de optimización.

Sea una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}^n$, sabemos que

$$x^* \in \arg \text{máx}_{x \in A} f(x) \Leftrightarrow f(x^*) = \max_{x \in A} f(x)$$

es decir, x^* es el valor que optimiza la función f sobre el conjunto A. Entonces la aplicación que lleva $A \subset \mathbb{R}^n$ en $\arg \text{máx}_{x \in A} f(x)$ es una correspondencia.

Para el producto de correspondencias presentamos la siguiente proposición.

Proposición A.1. *Sean m correspondencias $\varphi_i : S \twoheadrightarrow T_i$ para $i = 1, ..., m$. Entonces si para algún $x^* \in S$ se cumple que $\varphi_i(x^*)$ es semicontinua superiormente y con valores compactos para todo i, entonces la correspondencia del producto $\varphi(x) = \prod_{i=1}^{m} \varphi_i(x)$ es semicontinua superiormente y con valores compactos en x^*.*

En varios de los teoremas de existencia haremos uso del siguiente teorema

Teorema A.1 (Teorema del máximo de Berge). *Sean los conjuntos $S \subset \mathbb{R}^n$ y $T \subset \mathbb{R}^m$, la función $g : S \times T \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sup\{f(x, y) \mid y \in \varphi(x)\}$ y la correspondencia $\mu : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\mu(x) = \{y \in \varphi(x) \mid f(x, y) = g(x)\}$ donde $f : S \times T \to \mathbb{R}$. Si $x^* \in S$ y se cumple*

i) $\varphi(x^*)$ *es compacto*

ii) f *es una función continua en* (x^*, y) *para toda* $y \in \varphi(x^*)$

iii) φ *es una correspondencia continua en* x^*

entonces

a) $\mu(x^*)$ *es compacto y no vacío*

b) g *es una función continua en* x^* *y*

c) μ *es una correspondencia superiormente semicontinua.*

Básicamente lo que este teorema nos dice es que bajo ciertas condiciones de continuidad de un problema de optimización la solución al problema conserva la continuidad.

Teoremas de punto fijo

Para las demostraciones de existencia de los equilibrios de los diferentes modelos que plantearemos será necesario usar algún teorema de punto fijo, ya sea para funciones o para correspondencias. Enunciemos entonces dichos teoremas.

Teorema de Brower

Teorema A.2 (Teorema de Brower). *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, convexo y no vacío y $f : X \to X$ una función continua. Entonces existe un punto $x^* \in X$ tal que $f(x^*) = x^*$.*

Teorema de Kakutani

La generalización del teorema de punto fijo de Brower es el teorema de punto fijo de Kakutani para correspondencias.

Teorema A.3 (Teorema de Kakutani). *Sea $K \in \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, convexo y no vacío y $\varphi : K \twoheadrightarrow K$ una correspondencia semicontinua superiormente, compacta, convexa y no vacía. Entonces existe un punto $x^* \in K$ tal que $\varphi(x^*) = x^*$.*

Apéndice B

Demostraciones

Demostración de la proposición 1.1. a)$\Rightarrow$b) Sean x, $y \in X$. Si $x \succ y$ por definición tenemos que se cumple $x \succeq y$ y $\neg y \succeq x$. Aplicando la definición de función de utilidad a estas expresiones nos queda que $u(x) \geq u(y)$ y $\neg u(y) \geq u(x)$. Por lo tanto $u(x) > u(y)$. Con un razonamiento igual legamos a que si $x \sim y$ entonces $u(x) = u(y)$.

b)$\Rightarrow$a) Sean x, $y \in X$. Por demostrar que

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

$\Rightarrow$) Si $x \succeq y$ por definición $x \succ y$ o $x \sim y$, aplicando la función de utilidad tenemos que $u(x) > u(y)$ o $u(x) = u(y)$. Por lo tanto $u(x) \geq u(y)$.

$\Leftarrow$) Por completitud tenemos que $x \succeq y$ o $y \succeq x$. Supongamos que no se cumple $x \succeq y$. Entonces $y \succ x$ lo que por b) implica $u(y) > u(x)$ contradicción! Por lo tanto $x \succeq y$.

□

Demostración de la proposición 2.1. Sabemos que el problema de la i-ésima empresa es

$$\max_{q_i > 0} q_i \left[d - c - \sum_{i=1}^{n} q_i\right]$$

para $i = 1, ..., n$. Planteando las condiciones de primer orden tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_i}\pi_i &= 0 \\
d - 2q_i - \sum_{j\neq i} q_j - c &= 0 \\
2q_i + \sum_{j\neq i} q_j &= d - c \\
q_i &= \frac{d - \sum_{j\neq i} q_j - c}{2}
\end{aligned}$$

Con base en esto formamos el sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & & 1 & 1 & d-c \\
1 & 2 & & 1 & 1 & d-c \\
 & & \ddots & & & \vdots \\
1 & 1 & & 2 & 1 & d-c \\
1 & 1 & & 1 & 2 & d-c
\end{array}\right)$$

que para resolver multiplicamos el último renglón por n y le restamos los $n-1$ renglones primeros obteniendo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
2 & 1 & & 1 & 1 & d-c \\
1 & 2 & & 1 & 1 & d-c \\
 & & \ddots & & & \vdots \\
1 & 1 & & 2 & 1 & d-c \\
0 & 0 & & 0 & 1 & \frac{d-c}{n+1}
\end{array}\right)$$

el último renglón de esta matriz nos indica que la estrategia óptima de la n-ésima empresa es $q_n^* = \frac{d-c}{n+1}$; a partir de esto, dado que el problema es simétrico aseguramos que

$$q_i^* = \frac{d-c}{n+1}$$

para $i = 1, ..., n$. Finalmente la ganancia de la empresa i es igual a

$$\pi_i(q_i) = \frac{d-c}{n+1}\left[d - \sum_{j=1}^{n}\frac{d-c}{n+1} - c\right] = \frac{d-c}{n+1}\left[d - n\left(\frac{d-c}{n+1}\right) - c\right] = \left(\frac{d-c}{n+1}\right)^2$$

$\square$

Demostración de la proposición 3.1. Dado que la colección S_0 es un semianillo y la colección S_1 un álgebra, se sigue de manera directa que S es un semianillo. Por otro lado tenemos

$$\mu(\emptyset) = \mu_0(\emptyset) + \mu_1(\emptyset) = 0$$

Sea $\{E_n\}$ una sucesión disjunta de S con $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) &= \mu_0\left((\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \cap T_0\right) + \mu_1\left((\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \cap T_1\right) \\
&= \mu_0\left(\cup_{n=1}^{\infty}(E_n \cap T_0)\right) + \mu_1\left(\cup_{n=1}^{\infty}(E_n \cap T_1)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n \cap T_0) + \mu_1 \sum_{n=1}^{\infty}(E_n \cap T_1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_0(E_n \cap T_0) + \mu_1(E_n \cap T_1)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)
\end{aligned}$$

Por lo tanto μ es una medida en S. □

Demostración de la proposición 3.2. Se sigue de manera directa del teorema 10.23 de Aliprantis y Border [1]. □

Demostración de la proposición 3.3. Veámos que para todo subconjunto $E \subset T_0$, $\mu^*(E) = \mu_0^*(E)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \mid \{E_n\} \subset S \text{ y } E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n\} \\
&= \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n \cap T_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E_n \cap T_1) \mid \{E_n\} \subset S \text{ y } E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n\} \\
&= \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n \cap T_0) \mid \{E_n\} \subset S, \{E_n \cap T_1 = \emptyset \text{ y } E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty}(E_n \cap T_0)\} \\
&= \mu_0^*(E)
\end{aligned}$$

Notemos que dado que T_0 es μ-medible, entoces la colección $\mathcal{T}_{T_0}$ es una colección de subconjuntos de T_0 μ-medibles. Sea $E \subset T_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\mu^*(T) &\leq \mu^*(E) + \mu^*(E^c) = \mu^*(E) + \mu^*\left((E^c \cap T_0) \cup T_1\right) \leq \\
&\leq \mu^*(E) + \mu^*(E^c \cap T_0) + \mu^*(T_1)
\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que E es μ_0-medible tenemos

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) + \mu^*(E^c \cap T_0) + \mu^*(T_1) &= \mu_0^*(E) + \mu_0^*(E^c \cap T_0) + \mu^*(T_1) = \\
= \mu_0^*(T_0) + \mu^*(T_1) &= \mu^*(T_0) + \mu^*(T_1) = \mu^*(T)
\end{aligned}$$

Esto nos idica que $\mu^*(E) + \mu^*(E^c) = \mu^*(T)$ por lo cual afirmamos que E es un conjunto μ-medible, de donde $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_{T_0}$. Sea ahora $E \subseteq \mathcal{T}_{T_0}$, dado que E es un conjunto μ-medible

$$\mu^*(E) + \mu^*(E^c) = \mu^*(T)$$

además
$$\mu^*(E) + \mu^*(E^c \cap T_0) + \mu^*(T_1) = \mu^*(T_0) + \mu^*(T_1)$$
Ya que $\mu_0^*(E)+\mu_0^*(E^c \cap T_0) = \mu_0^*(T_0)$, sabemos que el conjunto E es μ_0-medible, entonces $\mathcal{T}_{T_0} \subseteq \mathcal{T}_0$. Por lo tanto $\mathcal{T}_{T_0} = \mathcal{T}_0$. □

Demostración de la proposición 3.4. Siguiendo el mismo razonamiento de la primera parte de la demostración anterior es posible demostrar que
$$\mu^*(E) = \mu_1^*(E) = \mu_1(E)$$
Por otro lado, dado que $S \subseteq \mathcal{T}$ entonces
$$S_1 = S \cap T_1 \subseteq \mathcal{T} \cap T_1 = \mathcal{T}_{T_1}$$
y además
$$\mathcal{T}_{T_1} \subseteq \mathcal{P}(T_1) = S_1$$
Por lo tanto $S_1 = \mathcal{T}_{T_1}$. □

Demostración de la proposición 3.5. Sea $p \in \mathbb{R}^l_{++}$, por Aumann [2] sabemos que las correspondencias ${}^0\Delta_p$ y ${}^0\Gamma_p$ son Borel medibles, por lo tanto la función
$${}^0\mathrm{x}(t,\, p) = {}^0\Delta_p(t) \cap {}^0\Gamma_p(t)$$
lo es también. Además la función ${}^0\mathrm{x}(t,\, p)$ está acotada superiormente dado que
$${}^0\mathrm{x}(t,\, p) \leq \frac{\sum_{j=1}^{l} p^j w^j(t)}{p^i}$$
para $i = 1, \ldots, l$ y $t \in T_0$. Por lo tanto la función ${}^0\mathrm{x}(t,\, p)$ es integrable. □

Demostración de la proposición 3.6. Veáse Sahi y Yao Lema 1 □

Demostración del lema 3.1. $\Rightarrow$) Para cada $x(t) \in \Delta_p^{*t}$ tenemos
$$x^j(t) = \lambda^j(t)\frac{\sum_{j=1}^{l+1} p^j w^j(t)}{p^j}$$
con $0 \leq \lambda^j(t) \leq 1$ para $j = 1, \ldots, l$. Dado que $x(t) \in \Delta_p^{*t}$ entonces
$$\sum_{j=1}^{l} p^j x^j(t) = \sum_{j=1}^{l} \lambda^j(t) \left(\sum_{j=1}^{l} p^j w^j(t) \right) = \sum_{j=1}^{l} p_j w_j(t)$$
esto implica de manera directa que $\sum_{j=1}^{l} \lambda^j = 1$.

$\Leftarrow)$ Sea $x^j(t)$ que satisface la ecuación (3.3) para $j = 1, ..., l$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{l} p^j x^j(t) = \sum_{j=1}^{l} \lambda^j(t) \left(\sum_{j=1}^{l} p^j w^j(t) \right) = \sum_{j=1}^{l} p_j w_j(t)$$

es decir $x^j(t) \in \Delta_p^{*t}$ para $j = 1, ..., l$.

□

Demostración de la proposición 3.7. i) Se sigue de manera directa de la definición de matriz irreducible dada al principio y la proposición (3.6).

ii) Por la definición del equilibrio Cournot-Nash sabemos que la matriz agregada $\hat{\hat{\mathrm{b}}}$ es irreducible, de ahi que $p \gg 0$. Por otro lado, sean $\hat{p} = p(\hat{\mathrm{b}})$ y $\hat{x}(t) = x(t, \hat{\mathrm{b}}(t), \hat{p})$ tenemos que $\hat{p} \cdot \hat{x}(t) = \hat{p} \cdot w(t)$ para todo $t \in T_0$.

Supongamos que existe un consumidor para el cual $\hat{x}(t) \notin \{x(t) \mid \text{máx}_{x(t)} u_t(x(t))\}$, es decir, existe

$$\tilde{x}(t) \in \{x(t) \mid \hat{p} \cdot x = \hat{p} \cdot w(t)\}$$

tal que

$$u_t(\tilde{x}(t)) > u_t(\hat{x}(t))$$

por el lema (3.1) tenemos que existe $\tilde{\lambda}^j \in \mathbb{R}_{++}^{l+1}$ con $\sum_{j=1}^{l+1} \lambda^j = 1$ tal que

$$\tilde{x}_j = \tilde{\lambda}^j \frac{\sum_{j=1}^{l+1} \hat{p}_j w_j(t)}{\hat{p}_j}$$

para $j = 1, ..., l+1$. Supongamos que $\tilde{\mathrm{b}}_{ij} = w_i(t)\tilde{\lambda}^j(t)$ con $i, j = 1, ..., l$. Entonces sustituyendo en la ecuación (3.2) y aplicando (i) tenemos

$$\tilde{x}_j(t) = w_j(t) - \sum_{i=1}^{l} w_j j(t)\tilde{\lambda}^i + \sum_{i=1}^{l} w_i(t)\tilde{\lambda}^j \frac{\hat{p}_i}{\hat{p}_j} = \sum_{i=1}^{l} w_i(t)\tilde{\lambda}^j \frac{\hat{p}_i}{\hat{p}_j}$$

pero entonces

$$u_t(x(t, \tilde{b}(t), \hat{p}((b))) > u_t(\hat{x}(t))$$

contradicción! Ya que por definición del equilibrio Cournot-Nash teniamos que

$$u_t(x(t, \hat{b}(t), p(\hat{\mathrm{b}}))) \geq u_t(x(t, b(t), p(\hat{\mathrm{b}} \setminus b(t))))$$

□

Demostración del lema 3.2. Sea $\lambda_{ij} > 0$ para $i = 1, ..., l$ con $\sum_{i=1}^{l} \lambda_{ij} = 1$. Dado que w es una s asignación, entonces la función $\mathrm{b} : T \to \mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}_+^l$ tal que $\mathrm{b}_{ij}(t) = \lambda_{ij} w_i(t)$ para $i, j = 1, ..., l$ y todo $t \in T$ pertenece a $L_1(\mu, \mathrm{B}(\cdot))$. Como el conjunto $L_1(\mu, \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^l)$ es un espacio vectorial, y $\mathrm{B}(t)$ es un conjunto convexo para todo $t \in T$, entonces el conjunto $L_1(\mu, \mathrm{B}(\cdot))$ es convexo. La compacidad de $L_1(\mu, \mathrm{B}(\cdot))$ se prueba siguiendo el razonamiento usado en Khan [9]. □

Demostración del lema 3.3. Veáse el Lema 2 de Busetto, Codognato & Ghosal [3] □

Demostración de la proposición 3.8. i) Sea el par $(\tilde{\mathrm{e}}, \tilde{\mathrm{x}})$ un equilibrio Cournot-Walras respecto a la selección de precio $p(\mathrm{e})$. De manera directa se tiene que $\tilde{p}\tilde{\mathrm{x}}(t) = \tilde{p}w(t)$, donde $\tilde{p} = p(\tilde{\mathrm{e}})$ para todo $t \in T_1$. Mostremos ahora que $\tilde{\mathrm{x}}(t) \in \Delta_{\tilde{p}}(t) \cap \Gamma_{\tilde{p}}(t)$ para todo $t \in T_1$. Supongamos que que existe un $t \in T_1$ para el cual $\tilde{\mathrm{x}}(t) \notin \Delta_{\tilde{p}}(t) \cap \Gamma_{\tilde{p}}(t)$. Por el supuesto 2 sabemos que existe una canasta $z \in \{x \in \mathbb{R}^l_+ \mid \tilde{p}x = \tilde{p}w(t)\}$ tal que $u_t(z) > u_t(\tilde{\mathrm{x}}(t))$, entonces por el lema 3.1 existe $\lambda^j \geq 0$, para $j = 1, ..., l$ con $\sum_{j=1}^{l} \lambda^j = 1$ tal que

$$z_j = \lambda^j \frac{\sum_{j=1}^{l} \tilde{p}_j w_j(t)}{\tilde{p_j}}$$

para $j = 1, ..., l$. Por la ecuación 3.4 sabemos que $p(\tilde{\mathrm{e}}) = p(\tilde{\mathrm{e}} \mid e(t))$. Sea $e_{ij}(t) = w_i(t)\lambda^j$ con $i, j = 1, ..., l$ para todo $t \in T_1$, sustituyendo en la ecuación 3.5 tenemos que

$${}^1\mathrm{x}_j(t, e(t), p(\tilde{\mathrm{e}} \mid e(t)) = w_j(t) - \sum_{i=1}^{l} w_j(t)\lambda^i + \sum_{i=1}^{l} w_i(t)\lambda^j \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_j}$$

para $j = 1, ..., l$. Pero entonces

$$u_t({}^1\mathrm{x}(t, e(t), p(\tilde{\mathrm{e}} \mid e(t)))) = u_t(z) > u_t(x) = u_t({}^1\mathrm{x}(t, \tilde{\mathrm{e}}(t), p(\tilde{\mathrm{e}})))$$

lo cual contradice que el par $(\tilde{\mathrm{e}}, \tilde{\mathrm{x}})$ constituye un equilibrio Cournot-Walras. ii) Sea (p^*, x^*) un equilibrio Walrasiano. Dado que u_t es continua y estrictamente creciente entonces que $p^* \gg 0$ y $p^* \cdot x^*(t) = p^* \cdot w(t)$ para todo $t \in T$. Por el lema 3.1 tenemos que para todo $t \in T$ existe $\lambda^{*j}(t) > 0$ con $\sum_{j=1}^{l} \lambda^{*j}(t) = 1$ para $j = 1, ..., l$ tal que

$$x^{*j}(t) = \lambda^{*j}(t) \frac{\sum_{j=1}^{l} p^{*j} w^j(t)}{p^{*j}}$$

para $j = 1, ..., l$. Sean las funciones $\Lambda^* : T_1 \to \mathbb{R}^{l^2}_+$ tal que

$$\Lambda^{*j}(t) = \lambda^{*j}(t)$$

para $j = 1, ..., l$ y $t \in T_1$ y $e^* : T_1 \to \mathbb{R}^{l^2}_+$ tal que

$$e^*_{ij}(t) = w^i(t)\Lambda^{*j}(t)$$

para i, $j = 1$, ..., l. Claramente la función e^* es integrable. Usando la ecuación (4.1) tenemos que

$$x^{*j}(t) = w^j(t) - \sum_{i=1}^{l} e^*_{ji}(t) + \sum_{i=1}^{l} e^*_{ij}(t)\frac{p^{*i}}{p^{*j}}$$

para $j = 1$, ..., l y $t \in T$. Dado que x^* es una asignación tenemos que

$$\int_{T_0} x^{*j}(t)d\mu + \int_{T_1} w^j(t)d\mu - \sum_{i=1}^{l}\int_{T_1} e^*_{ji}(t)d\mu + \sum_{i=1}^{l}\int_{T_1} e^*_{ij}(t)d\mu\frac{p^{*i}}{p^{*j}} = \int_{T} w^j(t)d\mu$$

para $j = 1$, ..., l. Esto implica que

$$\int_{T_0} x^{*j}(t)d\mu + \sum_{i=1}^{l}\int_{T_1} e^*_{ij}(t)d\mu\frac{p^{*i}}{p^{*j}} = \int_{T_0} w^j(t)d\mu + \sum_{i=1}^{l}\int_{T_1} e^*_{ji}(t)d\mu$$

para $j = 1$, ..., l. Y entonces por el supuesto 4 existe una selección de precio $p(e)$ tal que $p^* = p(e^*)$, entonces

$$x^*(t) = \begin{cases} {}^0x(t,\, p(e^*)) & \text{para } t \in T_0 \\ {}^1x(t,\, e^*(t),\, p(e^*)) & \text{para } t \in T_1 \end{cases}$$

Finalmente sólo nos falta demostrar que ningún consumidor $t \in T_1$ obtiene ventaja al desviarse de e^*. Supongamos que sí, entonces existen un consumidor $t \in T_1$ y una estrategia $e(t) \in \mathrm{E}(t)$ tal que

$$u_t({}^1\mathrm{x}(t,\, e(t),\, p(\mathrm{e}^* \mid e(t)))) > u_t({}^1\mathrm{x}(t,\, \mathrm{e}^*(t),\, p(\mathrm{e}^*)))$$

Por la ecuación (3.4) tenemos que

$$p(\mathrm{e}^* \mid e(t)) = p(\mathrm{e}^*) = p^*$$

Además

$$p^{*\,1}\mathrm{x}(t,\, e(t),\, p(\mathrm{e}^* \mid e(t)) = p^*\mathrm{w}(t)$$

Pero entonces el par $(p^*,\, \mathrm{x}^*)$ no es un equilibrio Walrasiano, contradicción! □

Demostración del corolario 3.1. Por Aumann [2] sabemos que existe un equilibrio Walrasiano para economías de intercambio puro con un conjunto continuo de consumidores, y aplicando (ii) de la proposición (3.8) tenemos que el equilibrio Cournot-Walras existe □

Bibliografía

[1] **Aliprantis C.D., Border K.C.** (2005) Infinite dimensional analysis, Springer, New York.

[2] **Aumann R.J.** (1966) Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders, Econometrica 24, 1-17.

[3] **Busetto F., Codognato G., Ghosal S.** (2008a) Noncooperative oligopoly in markets with a continuum of traders, Journal of Economic Literature.

[4] **Busetto F., Codognato G., Ghosal S.** (2008b) Cournot-Walras equilibrium as a subgame perfect equilibrium, International Journal of Game Theory.

[5] **Codognato G.** (1995) Cournot-Walras and Cournot equilibria in mixed markets: a comparison, economic Theory 5, 361-370.

[6] **Codognato G., Gabszewicz J.J.** (1991) Equilibres de Cournot-Walras dans une économie d'échange, Revue Economique 42, 1013-1026.

[7] **Fudenberg D., Tirole J.** (2006) Game theory, MIT Press, London.

[8] **Gabszewicz J.J, Vial J.-P.** (1972), Oligopoly á la Cournot-Walras" in a general equilibrium analysis, Journal of Economic Theory 4, 381-400.

[9] **Khan M.A.** (1985) On extensions of the Cournot-Nash theorem, Advances in equilibrium theory, Springer, New York.

[10] **Okuno M., Postlewaite A., Roberts J.** (1980) Oligopoly and competition in large markets, American Economic Review 70, 22-31.

[11] **Shapley L.S., Shubik M.** (1977) Trade using one commodity as a means of payment, Journal of Political Economy 85, 937-968.

[12] **Zapata P.** (2007) Economía política y otros juegos, UNAM, México.