



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DINÁMICA DE ÁTOMOS FRÍOS INTERACTUANDO
CON EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO DE UNA
CAVIDAD

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

ERICK RAFAEL
ROMERO SÁNCHEZ

TUTORA:
ROCÍO JAÚREGUI RENAUD



Ciudad Universitaria

Agosto 2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado

Presidente: Dr. José Francisco Récamier Angelini

Vocal: Dr. Alfred Barry U'Ren Cortés

Secretario (Tutora): Dra. Rocío Jáuregui Renaud

Suplente: Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar

Suplente: Dr. Pablo Barberis Blostein

Lugar donde se realizó la tesis

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México
(IF-UNAM)

Tutora de tesis

Dra. Rocío Jáuregi Renaud

Lo importante en la ciencia no es tanto obtener nuevos hechos sino descubrir nuevas maneras de pensar acerca de ellos

Sir William Bragg

Las ideas no son responsables de lo que los hombres hacen de ellas

Werner Heisenberg

No es valiente aquel que no tiene miedo sino el que sabe conquistarlo

Nelson Mandela

DINÁMICA DE ÁTOMOS FRÍOS INTERACTUANDO CON EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO DE UNA CAVIDAD

Erick Rafael Romero Sánchez
Facultad de Ciencias



Universidad Nacional Autónoma de México
2011

Romero Sánchez Erick Rafael

Facultad de Ciencias-Instituto de Física,
Universidad Nacional Autónoma de México.

e-mail: *erickromero@fisica.unam.mx*

erickrs77@hotmail.com

Revisión de estilo: Gabriela Bengoa G.

*Edición de tesis realizada con \LaTeX ,
GNU-gedit y sistema operativo libre GNU/Linux.*

Gráficas realizadas con Wolfram Mathematica.

México D.F. 2011

A mis padres:

Alcira y Rafael

*Por todo el apoyo que me han brindado de
forma generosa, incondicional y permanente*

A ustedes, con todo mi amor♡

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a la Dra. Rocío Jáuregui por su paciencia, solidaridad y comprensión. La sencillez que mostró a cada momento me hizo notar la excelente calidad de persona y de investigadora que es la Dra. Rocío. Este trabajo no se habría podido concretar sin su apoyo.

Agradezco infinitamente a la vida las condiciones que me han sido brindadas. A mis padres que con su infinito amor, paciencia y comprensión me brindaron las condiciones ideales para mi formación y a los cuales les estaré agradecido por siempre infinitamente. Por mostrarme que el mundo puede ser maravilloso. A ustedes por siempre mi más profundo respeto, admiración y sobre todo amor, a ustedes ofrezco esta simbólica recompensa.

Este es mi primer logro significativo y finalmente ha sido concluido, quiero compartirlo con la gente que me ha apoyado a lo largo de esta sinuosa marcha. Durante la realización de este trabajo, se presentaron diferentes altibajos de diversas características, por lo que me parece importante dedicar un pequeño espacio para agradecer a aquellas personas que me han apoyado no solo a lo largo de este periodo, sino en todos aquellos momentos que se han hecho determinantes para llegar a este punto, a las personas que se han cruzado en mi camino y de alguna forma han sido parte de mí, aquellos que la vida dispuso como mi familia y/o mis amigos. Habiendo concluido los agradecimientos técnicos, lo siguiente se puede ver como una lista de la gente que se ha hecho importante a lo largo de mi vida.

Quiero agradecer inicialmente a Vanessa Romero, mi hermanita, a mis primos, con los que crecí: Rodolfo Carmona, Efrén Pérez, Julieta Vilchis, Mónica Romero, Edgar Pérez, Oscar Carmona, Gerardo Romero, Ma. de la Luz Carmona, Yunuen Romero, Tonatihu Romero. A todos mis tios (de ambos lados de la familia y los postizos, que son muchos), a mi Mamá María y a mis abuelos postizos Esperanza y Andrés, a todos, que en conjunto han sido la parte más valiosa de mi vida, mi familia. A los que respeto y que siempre han sido parte importante en mi crecimiento y desarrollo.

También a aquellas personas que me mostraron los primeros rasgos de amistad sincera, Alejandro Guillén, Paulina Chabolla, Gavroche Gutierrez, María F. Hernández, Carlos Charro, Diego Meza, Victor Corona, Victor M. Gómez, aquellos a los que a lo largo de los años he aferrado mi cariño de manera entrañable.

A aquellos que aparecieron en diferentes momentos y han sido grandes compañeros de vida: Ariel Enguntza, Itzel Delgado, Mauricio Infante, Jasmin Delgado, Christian Barragán, Alán Valdéz, Alin Oliver, Galia Ponce, Liliana Arredondo, Gabriela Romero, Quetzalli Hernández, Michelle Barragán, Judith Salas, Montserrat Valdéz, Ivan Tovar, Saúl Agular, Cynthia Flores, Karla Quintana.

Por las experiencias que hemos compartido y los muchos lugares recorridos a lo largo de estos 8 años, quiero agradecerles a mis amigos de la Facultad de Química: Victor Noriega, Daniela Pérez, Carlos Soto, Karla Tagle, Arturo Mendoza, Miguel Nava, Enrique Muñoz, Esaú Jiménez, Norma Parra, Alondra González, Gabriela Bengoa, Flor Sierra, Raquel Dominguez, Janina Martínez, Manuel Buendía, Claudio Meléndez, Carlos E. Bravo, Laura A. Pérez, Paola Roncagliolo.

A María Barrera, porque fuiste una de las personas más importantes de mi vida.

A aquellos que en algún momento nos diremos colegas o que recordemos que nos conocimos en esa gran Facultad de Ciencias:

Luis Hernández, Berenice Rojo, Abelardo Alcántara, Daniel Monsivais, Jennifer Cruz, Enrique Reyes, Cecilia García, Emilio Flores, Valeria Buendía, Yarummi Álvarez, Shanty Acosta, Ingrid Membrillo, Sarahi Rosas.

Mónica Antúnez Argüelles, te agradezco haberme dado la oportunidad de conocerte, admiro tu alegría por la vida.

A todos aquellos que por diferentes razones he dejado de ver, espero en algún momento volver a encontrarnos.

Erick Romero

Dinámica de átomos fríos interactuando con radiación electromagnética de una cavidad

Tesis de Licenciatura

Resumen

Erick Rafael Romero Sánchez

Facultad de Ciencias - IFUNAM
Universidad Nacional Autónoma de México

En este trabajo se plantea la descripción de la dinámica de un átomo de ^{87}Rb con dos posibles estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$, desplazándose a lo largo del eje z , con una baja energía cinética, interactuando con un modo de campo electromagnético que está contenido en una cavidad limitada a una región de longitud L .

La existencia del campo electromagnético produce un desdoblamiento de los eigenvalores del hamiltoniano, generando diferentes efectos en cada uno de los subestados, por lo que será necesario hacer uso de la base de los estados vestidos para lograr realizar la descripción. Posteriormente, realizando una aproximación adiabática se propone una solución a la función de onda con un perfil gaussiano.

La función de onda propuesta, consta de un grosor $\sigma(t)$, posición del centro de la campana $z_0(t)$ y de tres fases complejas $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\gamma(t)$, un total de cinco funciones dependientes del tiempo.

Por medio del *Teorema de Ehrenfest* y del *Teorema del Virial Cuántico* se busca un sistema de ecuaciones diferenciales temporales que se resolverán de manera numérica y de esta manera se describirá la evolución temporal del sistema.

Finalmente se presentan los resultados obtenidos para cada una de las funciones, además de la energía cinética $K_{\pm}(t)$ y la dinámica que presenta el paquete gaussiano al ser evaluado a cada tiempo t con dichas funciones y diferentes potenciales de la cavidad. Se comparan los resultados obtenidos entre cada uno de los potenciales involucrados y se presenta una dependencia de los parámetros temporales en función de la velocidad inicial.

Contenido

Agradecimientos	VI
Resumen	VIII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Física Atómica, Molecular y Óptica	2
1.3. Desarrollo de la CQED	3
1.4. Objetivos y Lineamientos	4
2. Interacción Átomo - Campo Electromagnético	7
2.1. Campo Electromagnético	8
2.1.1. Ecuaciones de Maxwell	8
2.1.2. Cuantización del Campo Electromagnético	10
2.1.3. Cuantización del Campo Electromagnético en una Cavidad Unidimensional	13
2.2. Hamiltoniano del Átomo en un Campo Electromagnético	14
2.3. Hamiltoniano Atómico	16
2.4. Hamiltoniano de la Interacción	17
2.4.1. Aproximación Dipolar	18
3. Electrodinámica Cuántica en Cavidades	19
3.1. Cavidades	20
3.2. Átomos de Rydberg	21
3.3. Sistema Átomo-Cavidad	21
3.4. Dispositivos Experimentales	22
3.5. Átomos Fríos	24
3.5.1. Enfriamiento Doppler	25
3.5.2. Enfriamiento Sisyphus	27
4. Modelo de Jaynes-Cummings	31
4.1. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings	31
4.2. Estados Vestidos	34

CONTENIDO

5. Aproximación Adiabática	37
5.1. Aproximación Adiabática Aplicada Sobre el Hamiltoniano de JC	37
5.2. Adiabaticidad	39
6. Ecuación de Schrödinger Propuesta Bajo la Aproximación Adiabática	41
6.1. Solución a la Ecuación de Schrödinger Propuesta con Perfil Gaussiano	41
6.2. Evolución Temporal de las Funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$, $\gamma_{\pm}(t)$, $\sigma_{\pm}(t)$ y $z_{0\pm}(t)$. . .	43
6.2.1. Valores Esperados	43
6.2.2. Ecuación Diferencial de la Función $z_{0\pm}(t)$	44
6.2.3. Dependencia Temporal de $\langle z^2 \rangle$	45
6.2.4. Dependencia Temporal de $\langle p \rangle$	46
6.2.5. Dependencia Temporal de $\langle zp \rangle$	46
6.2.6. Dependencia Temporal del Hamiltoniano	47
6.3. Sistema de Ecuaciones Diferenciales	47
7. Modo del Campo en la Cavidad	49
7.1. Potenciales	49
7.2. Potencial Nulo	52
7.2.1. Sistema de ecuaciones para el potencial nulo	52
7.3. Potencial Mesa	53
7.3.1. Sistema de ecuaciones para el potencial mesa	55
7.4. Potencial Gaussiano	57
7.4.1. Sistema de ecuaciones para el potencial gaussiano	58
8. Resultados Numéricos	59
8.1. Método Numérico	60
8.2. Potencial Nulo	60
8.2.1. Resultados numéricos para las funciones $\sigma^2(t)$, $z_0(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\gamma(t)$ en el caso de $W(z) = 0$	61
8.3. Potencial Mesa	63
8.3.1. Potencial <i>mesa</i> con $L = 116\mu\text{m}$	64
8.3.2. Dependencia de la velocidad para el caso con potencial mesa	70
8.4. Potencial Gaussiano	74
8.4.1. Potencial gaussiano con $L = 4\mu\text{m}$	74
8.4.2. Potencial gaussiano con $L = 116\mu\text{m}$	78
8.4.3. Variación de la velocidad para el caso con potencial gaussiano	82
8.5. Comparación Entre los Distintos Potenciales	86
Conclusiones	91
A. Funciones Especiales	95
A.1. Función Unitaria de Heaviside	95
A.2. Función Error	97
B. Teorema de Ehrenfest	99

Índice de Figuras

2.1. Diagrama de una cavidad unidimensional	13
3.1. Cavidad experimental real	20
3.2. Átomo de Rydberg	22
3.3. Diagrama de una cavidad experimental del grupo de Haroche	23
3.4. Diagrama del desdoblamiento de los subniveles por la presencia de láseres contrapropagantes en dos arreglos distintos	28
7.1. Potenciales mesa y gaussiano	50
8.1. Comparación entre resultados analíticos y numéricos del caso de partícula libre	63
8.2. Resultados numéricos de las funciones $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\gamma(t)$ en el caso de partícula libre	64
8.3. Funciones $z_{0\pm}(t)$ y $\log(\sigma_{\pm}^2(t))$ numéricas, para el caso de potencial mesa . . .	65
8.4. Funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ numéricas, para el caso de potencial mesa	66
8.5. Funciones $\gamma_{\pm}(t)$ y $K_{\pm}(t)/K_0$ numéricas, para el caso de potencial mesa . . .	67
8.6. Evolución temporal de $Im(\psi_0^{\pm}(z, t))$ durante la interacción con el potencial mesa de la cavidad	68
8.7. Evolución temporal de $\rho(z)$ durante la interacción con el potencial mesa de la cavidad	69
8.8. Energía cinética normalizada $K_{\pm}(t)/K_0$	70
8.9. Resultados numéricos para las funciones $z_{0\pm}(t)$ y $\sigma_{\pm}(t)$ con diferentes valores para la condición inicial $\beta_{\pm}(0)$ en el caso del potencial mesa	72
8.10. Resultados numéricos para las funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$ y $\gamma_{\pm}(t)$ con diferentes valores para la condición inicial $\beta_{\pm}(0)$, en el caso de potencial mesa	73
8.11. Solución numérica de las funciones $z_{0\pm}(t)$ y $\log(\sigma_{\pm}^2(t))$ para el potencial gaussiano	75
8.12. Solución numérica de las funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$ y $\gamma_{\pm}(t)$ para el potencial gaus- siano	75
8.13. Evolución temporal de $Im(\psi_n^{\pm}(z, t))$ durante la interacción con el potencial gaussiano de la cavidad.	76
8.14. Evolución temporal de la función $\rho(z)$ con $L = 4\mu m$ en el caso de potencial gaussiano	77
8.15. Solución numérica de las funciones $z_{0\pm}(t)$ y $\sigma_{\pm}^2(t)$, para el caso del potencial gaussiano	78

ÍNDICE DE FIGURAS

8.16. Solución numérica de las funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$, $\gamma_{\pm}(t)$ y $K_{\pm}(t)/K_0$, en el caso del potencial gaussiano	79
8.17. Evolución temporal de $Im(\psi_n^{\pm}(z, t))$ durante la interacción con el potencial gaussiano	80
8.18. Evolución temporal de la función $\rho(z)$ del átomo que interactúa con el potencial gaussiano	81
8.19. Energía cinética normalizada $K_{\pm}(t)/K_0$ para el caso de potencial gaussiano con $L = 116\mu m$	83
8.20. Resultados numéricos para las funciones $z_{0\pm}(t)$ y $\sigma_{\pm}(t)$ con diferentes valores para la condición inicial $\beta_{\pm}(0)$, para el caso de potencial gaussiano con $L = 116\mu m$	84
8.21. Resultados numéricos para las funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$ y $\gamma_{\pm}(t)$ con diferentes valores para la condición inicial $\beta_{\pm}(0)$, para el caso de potencial mesa con $L = 116\mu m$	85
8.22. Diferencia en la dependencia temporal de las funciones $z_{0\pm}(t)$ y $\sigma_{\pm}(t)$	87
8.23. Diferencia en la dependencia temporal de las funciones $\alpha_{\pm}(t)$ y $\beta_{\pm}(t)$	88
8.24. Diferencia en la dependencia temporal de las funciones $\gamma_{\pm}(t)$ y la energía cinética normalizada $K_{\pm}(t)/K_0$	89
8.25. Solución numérica de [45]	93
A.1. Función de Heaviside	95
A.2. Aproximación a la función de $H(-x)$ por medio de $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{\epsilon}{x}\right)$	96
A.3. Función error $\text{erf}(x)$	97

Índice de Tablas

3.1. Valores experimentales para diversas frecuencias de diferentes grupos de investigación	24
3.2. Parámetros experimentales para cavidades utilizadas por diferentes grupos de investigación	24
8.1. Valores numéricos de varias constantes	61
8.2. Condiciones iniciales para la partícula libre	62
8.3. Condiciones iniciales para el caso con potencial mesa	65
8.4. Condiciones iniciales iguales para todos los casos modificandose la velocidad inicial en el caso del potencial mesa	70
8.5. Diferentes velocidades iniciales y correspondientes temperaturas para un átomo de ^{87}Rb	71
8.6. Condiciones iniciales para el primer caso de con el potencial gaussiano con $L = 4\mu m$	74
8.7. Condiciones iniciales para el segundo caso con el potencial gaussiano con $L = 116\mu m$	78
8.8. Condiciones iniciales con las cuales se estudia la dependencia de la velocidad para caso con potencial gaussiano	82
8.9. Diferentes velocidades iniciales y correspondientes temperaturas para un átomo de ^{87}Rb	82
8.10. Condiciones iniciales con las cuales se estudia la comparación de la dinámica para los potenciales mesa y gaussiano	86

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

La luz es un fenómeno que nos rodea de forma permanente al igual que la materia. La comprensión cotidiana y macroscópica de éstos, se puede lograr parcialmente gracias a la observación realizada en la vida diaria. Sin embargo, el estudio profundo de los fenómenos es abordado por la *Electrodinámica Clásica* y la *Electrodinámica Cuántica* (CED y QED respectivamente, por sus siglas en inglés). La electrodinámica es una teoría poderosa que se forjó tras el trabajo de muchos científicos a lo largo de varios años y desembocó en las ecuaciones de Maxwell en 1861 con importantes consecuencias. Algunas de ellas son la descripción de la luz como un fenómeno electromagnético, desarrollada por Maxwell, la emisión de ondas electromagnéticas producidas por la oscilación de un dipolo eléctrico, desarrollada por Hertz, y por último, pero no menos importante, la unificación de las fuerzas eléctrica y magnética durante el siglo XIX. Fue tan trascendente el desarrollo de la teoría electromagnética que se creía que la Física se había terminado y que, salvo algunos pequeños problemas, la Física se había descrito por completo.

Sin embargo, la electrodinámica clásica no es una teoría completa y a inicios del siglo XX se hizo patente: se observaron fenómenos que no podían describirse de forma clásica. Los entonces recientes descubrimientos en el área de Física Atómica dieron evidencia de que las teorías clásicas no eran suficientes para describir lo observado. Aunque la gran mayoría de la comunidad científica se rehusaba a aceptar los nuevos conceptos que emergían de los resultados experimentales, poco a poco fue haciéndose evidente que existían huecos en las teorías clásicas. Fue durante los inicios del siglo XX cuando aparece en forma paulatina la Mecánica Cuántica (QM, por sus siglas en inglés), que se desarrolló por un gran número de personas quienes entraban en la escena científica con asombrosos avances, tanto experimentales como teóricos. La lista de genios que dejaron huella es muy grande; en ella se encuentran Planck, Einstein, Bohr, Born, Schrödinger, Heisenberg, Pauli, Stern, Gerlach..., éstos son sólo algunos de los científicos que de alguna forma y en mayor o menor magnitud, aportaron algo a la naciente teoría, la cual ha dado paso a varios estudios históricos que rodean su desarrollo. ¹

¹Se puede consultar el *Apéndice A* de [31] o el *Capítulo 13* de [34], donde en cada una se encuentra una breve historia de la Mecánica Cuántica.

1.2 Física Atómica, Molecular y Óptica

La Mecánica Cuántica es un tema de interés para los historiadores de la ciencia por varias razones, el contexto histórico, geográfico, político y social en el cual se desarrolló y las implicaciones filosóficas que ha traído consigo. Es un hecho innegable que el entorno social actual es en gran medida consecuencia del desarrollo de la ciencia y en específico de la Física del siglo XX. El éxito que la Mecánica Cuántica ha obtenido y la revolución tecnológica de la que ha sido un sólido pilar, hacen de sus avances cronológicos un tema muy interesante para los historiadores de la ciencia, científicos e incluso para el público en general [32, 33].

En un inicio, el formalismo de la QM se utilizó principalmente para estudiar el comportamiento de partículas materiales ante campos electromagnéticos dados. Hacía falta entonces una descripción unificada de la radiación electromagnética con la dinámica de las fuentes que generan esa radiación, todo ello en el contexto de la QM. No fue sino hasta inicios de la década de los 40 cuando se concluyó la formulación de la *Electrodinámica Cuántica* (QED) con notables científicos detrás de ella, entre ellos Richard Feynman, quien llamó a la QED *La joya de la Física*, gracias a que la teoría tiene una gran precisión en las predicciones de resultados experimentales.²

Gracias a las personas que con incansable entusiasmo aportaron poco o mucho a la mecánica cuántica, la comprensión de la estructura de la materia fue cada vez más amplia, ésto permitió la realización de experimentos cada vez más sofisticados.

La materia que conocemos está formada por átomos y éstos absorben, emiten y dispersan la luz, la cual es una parte fundamental en nuestra comprensión de los alrededores. Por medio de ella y de la interacción que sufre con la materia recibimos mucha de la información que se filtra a través de nuestros sentidos.

Conceptualmente, los fotones son las partículas intermediarias de la interacción electromagnética. Los fotones conforman la luz en la parte más fundamental. Cuando los átomos y la radiación se estudian en una forma detallada en el contexto cuántico, observamos que presentan comportamientos que la intuición en algunos casos no podría concebir. Una vez inmerso en este régimen, la descripción de la luz como onda y del un átomo como partícula comienza a no ser del todo correcta, pues las propiedades de ambos se mezclan, adquiriendo un carácter dual onda-partícula.

1.2. Física Atómica, Molecular y Óptica

Las interacciones del tipo átomo-átomo o átomo-radiación deben ser tratadas de forma cuántica, o al menos de manera semiclásica, donde por semiclásica entendemos que las velocidades medias de los átomos son suficientemente grandes como para describirla de la siguiente manera $v = dx/dt$, en lugar de $v = \langle \hat{p} \rangle / m$, en el régimen semiclásico los efectos cuánticos no son del todo observables.

Cuando el estudio de las interacciones átomo-átomo y átomo-radiación se realiza de manera cuántica, se tiene como consecuencia que algunas de las ramas de la física que anteriormente estaban separadas, hayan tenido que unirse debido a que en ellas se involucran sistemas

²Richard Feynman desarrolló un sistema de diagramas que representan interacciones entre partículas conocido actualmente como *Diagramas de Feynman*. Además, contribuyó al planteamiento de la renormalización de la QED.

de diferentes áreas. En escalas de sólo unos pocos átomos, se han agrupado la *Física Atómica*, *Física Molecular* y *Óptica* en una sola rama conocida actualmente como *AMO physics* (Atomic, Molecular, and Optical physics), las características y energías involucradas en cada una de las disciplinas son muy semejantes y ésto las hace difícilmente independientes.

El desarrollo de esta área se ha incrementado en los últimos años, obteniéndose resultados importantes tanto en investigación básica como en aplicaciones tecnológicas. Átomos y moléculas ultrafrías, dispositivos de precisión metrológica, condensados de Bose-Einstein, gases degenerados de Fermi, relojes atómicos y manipulación de nanoestructuras son sólo algunas de los resultados obtenidos por varios grupos de investigación que enfocan sus esfuerzos en *AMO physics*, aunque aún está pendiente el desarrollo de la tan anhelada computadora cuántica.

Día a día se innova en relación a sistemas de interacción entre materia y radiación. Por ahora nos enfocaremos en sistemas en los cuales se logran aislar los átomos y la radiación que se confina a una cavidad. Los sistemas en los cuales se describe la interacción entre la materia y la radiación confinada en una cavidad han sido llamados *Cavity Quantum Electrodynamics* (CQED, Electrodinámica Cuántica en Cavidades) y han sido ampliamente estudiados por varios grupos a lo largo del mundo.

1.3. Desarrollo de la CQED

Los inicios de la CQED se remontan a las ideas de Purcell en 1947, cuando publicó un artículo donde se expone que las propiedades radiativas de un átomo no son totalmente propias. En lugar de eso, se propone que dichas propiedades pueden ser cambiadas, controlando las condiciones de frontera de los campos electromagnéticos con espejos o cavidades. Los experimentos en el área de CQED inicialmente eran realizados para medir modificaciones en las tasas de emisión producidas por variaciones en los patrones espaciales de cavidades, posteriormente los experimentos han sido orientados al control del campo electromagnético y de las propiedades radiativas del átomo.

La CQED es una teoría que describe la interacción entre partículas cargadas y campos electromagnéticos en presencia de objetos macroscópicos como espejos (metálicos o dieléctricos), cavidades o guías de onda. En ésta teoría, la radiación contenida en la cavidad está cuantizada y las cargas (generalmente electrones que están ligados a átomos o moléculas) son descritas de acuerdo con la mecánica cuántica no relativista. Los objetos macroscópicos, ya sean metálicos o dieléctricos, son tomados en cuenta en la interacción debido a que la radiación debe cumplir las condiciones de frontera en las superficies que impone el material.

Algunas de las características más destacadas de la teoría de QED han sido las referentes al vacío y a sus propiedades. En el proceso de cuantización del campo electromagnético, el concepto de vacío es redefinido, en QED el vacío NO significa el estado carente de campos, es el estado con mínima energía y es mayor que cero. En ese estado, las fluctuaciones del campo son fuente de efectos observables. Esas fluctuaciones dependen de las condiciones de frontera. En presencia de objetos macroscópicos como espejos, estas fluctuaciones dependen de la posición, específicamente de la configuración de dichos espejos. Mas aún, la homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo se modifican por la presencia de los espejos, y en consecuencia,

1.4 Objetivos y Lineamientos

la energía, momento y momento angular no son necesariamente iguales a su valor en ausencia de fronteras. Los cambios de energía por la presencia de fronteras dan paso a la aparición de las llamadas fuerzas Casimir entre cuerpos macroscópicos neutros.

En años recientes, el desarrollo experimental en la CQED ha crecido de manera impresionante. Algunos de los grupos que son pioneros en estos experimentos, y actualmente los más destacados son los grupos del *Laboratoire Kastler Brossel* de l' *École Normale Supérieure*, del *Max-Planck-Institute für Quantenoptik* y el *Norman Bridge Laboratory of Physics* de *Caltech*.

En la actualidad, el desarrollo experimental toma gran importancia debido a las repercusiones tecnológicas que trae consigo, mientras que el desarrollo teórico permite comprender la forma en que funcionan los dispositivos y abre paso a nuevas propuestas experimentales. Es de esta manera que en conjunto teoría y experimentos revelan las formas en las que la materia y la radiación interactúan.

1.4. Objetivos y Lineamientos

Es importante describir el interés del desarrollo de este trabajo, la manera en que se realizará y los objetivos que se desean cumplir.

Comenzamos con los objetivos de este trabajo:

1. Proponer un modelo que describa la dinámica de un átomo de dos niveles al interactuar con el campo electromagnético contenido en una cavidad, mientras éste se desplaza a muy bajas velocidades y cruza dicha cavidad
2. Obtener un sistema de ecuaciones diferenciales dependientes únicamente del tiempo que describan la evolución temporal del sistema
3. Comprobar la validéz del modelo al interpretar los resultados que se obtengan y compararlo en la medida de lo posible con los modelos y resultados existentes
4. Proponer estudios posteriores que complementen el trabajo realizado en esta tesis

Para lograr el cumplimiento de manera exitosa de los objetivos, será necesario plantear un lineamiento que oriente mis esfuerzos a la realización cabal de los objetivos mencionados;

1. Realizar una revisión bibliográfica con la intención de familiarizarse con el lenguaje, conceptos, fenómenos y herramientas experimentales de la CQED
2. Plantear cuánticamente la dinámica de un átomo al interactuar con el campo electromagnético cuantizado de una cavidad
3. Proponer una función con perfil gaussiano y parámetros temporales como solución aproximada a la ecuación de Schrödinger
4. Hallar una relación entre las funciones paramétricas temporales

1.4 Objetivos y Lineamientos

5. Evaluar la función de onda con los parámetros obtenidos y compararla con resultados conocidos, buscando nuevas relaciones y corrigiendo en los casos en que el modelo no pueda describir los casos ya conocidos y aceptándolo como válido cuando el modelo describa casos ya muy estudiados
6. Graficar los resultados obtenidos y tomar como ciertos los resultados obtenidos a partir del modelo que sea capaz de describir los sistemas ya estudiados, considerando que nuestra propuesta es una aproximación

Las razones por las cuales he decidido realizar este trabajo son muy diversas, pero la más importante es el interés en temas de la física actual relacionados con la física atómica, la óptica y la mecánica cuántica, por lo cual recurrí (en mi opinión personal, aunque se que muchas personas la comparten) a una de las mejores investigadoras en física de estas áreas en el país, la Dra. Rocío Jáuregui, quien amablemente me orientó y abrió un abanico de temas sumamente interesantes.

1.4 Objetivos y Lineamientos

Capítulo 2

Interacción Átomo - Campo Electromagnético

En este capítulo se hará una revisión de las ecuaciones de Maxwell, las cuales gobiernan el electromagnetismo clásico [10]. Posteriormente, se realizará un desarrollo teórico que nos encaminará a la cuantización del campo electromagnético [25, 26]. Una vez obtenida una expresión cuántica para el campo electromagnético, ésta se aplicará en el sistema de nuestro interés, un sistema con una cavidad donde se darán los primeros pasos en el terreno de electrodinámica cuántica en cavidades [65].

Se describirá el Hamiltoniano para un átomo como partícula libre y además se describirá la forma en la que ocurre la interacción entre el átomo y la radiación. La obtención de una expresión para cada subsistema y su interacción es el objetivo de la sección 2.4, en la cual se describe la naturaleza de dicha interacción en términos del potencial vectorial \mathbf{A} y el momento cinético $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$ [49].

Una vez obtenidas las expresiones anteriores, se describirá la dinámica de un sistema de un átomo con dos estados internos accesibles y los efectos que sufre al interactuar con radiación electromagnética con frecuencia cercana a la frecuencia de transición del átomo. Dentro de las aproximaciones necesarias se encuentran la *aproximación dipolar* y la llamada *aproximación de onda rotante* (RWA Rotating Wave Aproximation)[60]. En cada uno de los casos se ha comenzado por describir un caso de una forma generalizada y después se simplifica paulatinamente, poniendo énfasis en las características del sistema que se estudiará.

El acoplamiento entre una partícula cargada de masa m y un campo externo descrito como \mathbf{A} recae en el concepto de mínimo acoplamiento. Donde reemplazamos el momento canónico \mathbf{p} por el momento cinético $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$ y agregamos un potencial $V(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r}, t)$. La justificación de esta aseveración fue realizada por H. Weyl en 1928, conectando de forma elegante la invarianza de la electrodinámica bajo transformaciones de norma con la mecánica cuántica.

2.1. Campo Electromagnético

Comenzaremos planteando las ecuaciones para un campo electromagnético clásico, que son conocidas como ecuaciones de Maxwell. Después, utilizaremos dichas expresiones y los operadores de creación y aniquilación para obtener una expresión cuántica para el mismo campo y finalmente la expresión para un campo cuántico confinado en una cavidad con paredes reflejantes.

2.1.1. Ecuaciones de Maxwell

El campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y el campo magnético (densidad de flujo magnético) $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, generados por una distribución de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$ y una densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, están gobernadas por las ecuaciones de Maxwell, las cuales (en SI) son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon} \rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

estos campos se acoplan a los electrones atómicos, a través de los llamados potenciales escalar y vectorial.

Los campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ están representados bajo una transformación de norma en términos de un potencial escalar $\phi(\mathbf{r}, t)$ y un potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, por medio de las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},\tag{2.2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\phi(\mathbf{r}, t)$ están relacionados debido a que satisfacen la condición de Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0\tag{2.3}$$

por lo cual se satisfacen las ecuaciones de Maxwell, y las ecuaciones inhomogéneas pueden ser escritas como

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Los campos eléctrico y magnético permanecen invariantes si los potenciales \mathbf{A} y ϕ son sujetos a una transformación de norma de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t), \\ \phi(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.5}$$

y utilizando la condición de Lorentz, obtenemos que la transformación $\chi(\mathbf{r}, t)$ satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2\chi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}.\tag{2.6}$$

Los potenciales también satisfacen la ecuación de onda, por lo que podemos proponer una solución de forma general para cada uno de los potenciales

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}_{\pm}(\mathbf{r}, t)e^{\mp i\omega t}, \\ \phi(\mathbf{r}, t) &= \phi_{\pm}(\mathbf{r}, t)e^{\mp i\omega t}\end{aligned}\tag{2.7}$$

y obtener una expresión para los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} en términos del potencial vectorial \mathbf{A} de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}, \omega) &= \pm i\omega\mathbf{A}_{\pm}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{B}_{\pm}(\mathbf{r}, \omega) &= \mathbf{A}_{\pm}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Estas relaciones se utilizarán en la sección 2.1.2 en las expresiones referentes a la cuantización del campo; por ahora utilizaremos la expresión clásica para el Hamiltoniano del campo electromagnético

$$H_{Fc} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 |\mathbf{E}^2| + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}^2| dV,\tag{2.9}$$

que de entre las soluciones a las ecuaciones de Maxwell en el vacío, se pueden escribir los campos clásicos para un sólo modo como

$$\begin{aligned}E_x(z, t) &= \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} q(t) \text{sen}(\mathbf{k}z), \\ B_y(z, t) &= \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mathbf{k}}\right) \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \dot{q}(t) \cos(\mathbf{k}z),\end{aligned}\tag{2.10}$$

donde $q(t)$ y $p(t)$ son la coordenada y momento canónico respectivamente y guardan la siguiente relación canónica $\dot{q}(t) = p(t)$ para una partícula de masa unitaria y $\mathbf{k} = |\vec{\mathbf{k}}| = 2\pi/\lambda$ el número de onda.

2.1 Campo Electromagnético

2.1.2. Cuantización del Campo Electromagnético

La cuantización del campo electromagnético se puede realizar de una manera ya muy conocida, aunque de la ecuación 2.9 se obtiene de manera natural considerando operadores de creación y aniquilación. La cuantización del campo electromagnético que se calcula es realizada de forma general para un campo con número de modos arbitrario y después se simplifica en el sistema enfocándonos en el que se desea estudiar.

A través del uso de las variables canónicas conjugadas p_j y q_j como operadores, para cada modo j , se obedecen las siguientes reglas de conmutación

$$[p_l, q_j] = i\hbar\delta_{lj}. \quad (2.11)$$

El análogo clásico del Hamiltoniano del campo electromagnético libre es

$$H_F = \frac{1}{2} \sum_j [p_j^2 + \omega_j^2 q_j^2]. \quad (2.12)$$

Definimos los operadores de creación y aniquilación, análogos a los del oscilador armónico

$$a_j = \frac{\omega_j q + ip_j}{\sqrt{2\hbar\omega_j}}, \quad a_j^\dagger = \frac{\omega_j q - ip_j}{\sqrt{2\hbar\omega_j}} \quad (2.13)$$

que por construcción obedecen la siguiente regla de conmutación

$$[a_l, a_j^\dagger] = \delta_{lj}. \quad (2.14)$$

Con esta información ahora escribimos el Hamiltoniano del campo en términos de estos operadores

$$H_F = \hbar \sum_j \omega_j \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right). \quad (2.15)$$

Es necesaria una observación en este punto, debido a que aún cuando el espacio carezca de modos, la energía del espacio es diferente de cero.

El operador de creación tiene asociada una dependencia temporal, que está descrita de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} a_j = \frac{i}{\hbar} [H_F, a_j], \quad (2.16)$$

que por las reglas de conmutación, sólo sobreviven los términos correspondientes al mismo modo

$$\frac{d}{dt} a_j = \frac{i}{\hbar} \left[\hbar\omega \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right), a_j \right] \quad (2.17)$$

y nos queda

$$\frac{d}{dt}a_j = -i\omega a_j, \quad (2.18)$$

la cual tiene como solución

$$a_j(t) = a_j(0)e^{-i\omega t}, \quad (2.19)$$

que análogamente tiene la siguiente solución para el complejo conjugado

$$a_j^\dagger(t) = a_j^\dagger(0)e^{i\omega t}. \quad (2.20)$$

Con el desarrollo teórico presentado hasta el momento, podemos escribir los campos \mathbf{E} , \mathbf{B} y \mathbf{A} en términos de los operadores de creación y aniquilación. Utilizando las expresiones (2.12) y (2.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \sum_j \hat{\mathbf{e}}_j \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_j}} \left[a_j e^{i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)} + a_j^\dagger e^{-i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)} \right], \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_j \hat{\mathbf{e}}_j \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{2\epsilon_0 V}} \left[a_j e^{i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)} - a_j^\dagger e^{-i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)} \right], \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_j \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_j}{c} \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{2\epsilon_0 V}} \left[a_j e^{i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)} - a_j^\dagger e^{-i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)} \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_j$ es el vector que indica la polarización del campo del modo j , y $\hat{\mathbf{k}}$ el vector de onda unitario.

Algunas veces parece ser conveniente separar el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en las partes positivas y negativas de la frecuencia

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (2.22)$$

donde $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ contiene la suma de los operadores de aniquilación a_j oscila de esta forma $e^{-i\omega_j t}$, mientras que $\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ contiene la suma de los operadores de creación a_j oscilando con esta forma $e^{i\omega_j t}$ y de donde se obtiene la obvia relación

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \right)^\dagger. \quad (2.23)$$

Ahora que \mathbf{A} , \mathbf{E} y \mathbf{B} pueden expresarse en términos de los operadores de aniquilación y creación, se hace indispensable describir algunas de sus propiedades.

El producto de operadores $a^\dagger a$ tiene una característica particular y es conocido como el operador de número, en ocasiones escrito como \hat{n} . Indicamos ahora el significado de $|n_j\rangle$ con un valor de la energía de \mathcal{E}_{n_j} , donde el total de la energía del sistema es

2.1 Campo Electromagnético

$$H_F |n_j\rangle = \hbar \sum_j \omega_j \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right) |n_j\rangle = \sum_j \mathcal{E}_{n_j} |n_j\rangle. \quad (2.24)$$

La justificación del nombre que reciben los operadores de creación y aniquilación se hace evidente en el siguiente conjunto de propiedades, que se cumplen para cualquier modo arbitrario j , a partir de este punto nos referiremos a dicho modo y por lo tanto ya no será necesario escribir el subíndice j .

$$\begin{aligned} a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \\ a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a |0\rangle = 0, \\ a^\dagger a |n\rangle &= n |n\rangle, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde $|0\rangle$ es el estado base o estado vacío (cero fotones) a partir del cual podemos obtener cualquier estado $|n\rangle$ tras la aplicación sucesiva del operador de creación a^\dagger n veces, y que está descrita por la ecuación

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.26)$$

Los operadores H_F y \hat{n} son hermitianos, los estados de diferente número producidos por el operador \hat{n} son ortogonales $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ y una propiedad adicional es

$$\begin{aligned} \langle n-1|a|n\rangle &= \sqrt{n} \langle n-1|n-1\rangle = \sqrt{n}, \\ \langle n+1|a|n\rangle &= \sqrt{n+1} \langle n+1|n+1\rangle = \sqrt{n+1}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Todo lo anterior ocurre para cada modo j del campo electromagnético.

Retomando el cálculo del Hamiltoniano para el campo electromagnético de la ecuación (2.24), observamos que existe un término que diverge a infinito, $\sum_j \frac{1}{2} \hbar \omega_j = \infty$, lo cual tiene que ver con que la energía del estado base de un oscilador no es cero: la serie diverge debido a que la radiación electromagnética tiene un número infinito de osciladores. En nuestro sistema de interés, los únicos términos que son relevantes son los que se relacionan con un sólo modo del campo electromagnético. Enfocándonos en esto, la serie no diverge porque se suma sobre todos los modos, y en nuestro planteamiento se utiliza sólo uno.

Por lo anterior, el Hamiltoniano del campo electromagnético cuantizado H_F , se describe como

$$H_F = \hbar \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (2.28)$$

en términos de los operadores de creación y aniquilación.

2.1.3. Cuantización del Campo Electromagnético en una Cavity Unidimensional

Nos acercamos cada vez más a la descripción del sistema de nuestro interés y para ello es necesario describir la forma del comportamiento de un campo dentro de una cavidad con paredes totalmente reflejantes¹.

A partir de ahora, consideraremos el sistema confinado a una región unidimensional. El sistema puede considerarse como un sistema descrito por la CQED, favorecido por la presencia de objetos macroscópicos y por las condiciones a la frontera.

Nuestro sistema consta de una cavidad unidimensional con paredes totalmente reflejantes que contiene radiación electromagnética; la presencia de las paredes impone condiciones a la frontera en la radiación.

Si la dirección de propagación de la onda electromagnética está dada por \hat{e}_3 , el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ se escribe en una dimensión como $\hat{e}E(z, t)$, donde \hat{e} es el vector de polarización (que es necesariamente perpendicular a \hat{e}_3) y el campo magnético asociado está dado por $\mathbf{B}(z, t) = \hat{e}_3 \times \mathbf{E}(z, t)$.

La cavidad está al vacío y tiene 2 espejos colocados en los extremos de la misma como se muestra en la figura 2.1². Se dice que el sistema está en $1D$, aun cuando el planteamiento indica que es un arreglo tridimensional, porque z es la dirección que nos interesa, los fotones con modos que se propagan a lo largo del eje z son los importantes para la descripción. Las condiciones a la frontera que imponen las paredes totalmente reflejantes son las siguientes

$$E(0, t) = E(L, t) = 0, \tag{2.29}$$

donde naturalmente puede observarse que las eigensoluciones para este sistema puede ser de la forma $\sin(m\pi z/L)$, para $m = 1, 2, \dots$

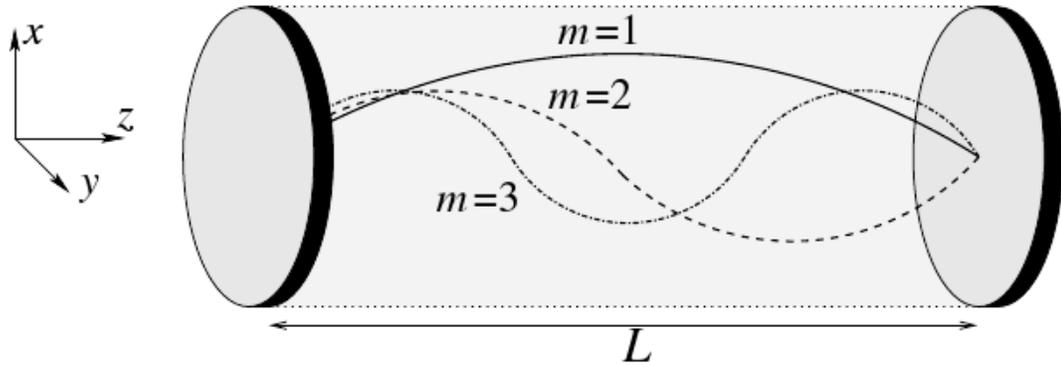


Figura 2.1: Arreglo tridimensional de una cavidad unidimensional de longitud L que contiene algunos modos del campo electromagnético

¹El caso es idealizado, experimentalmente la presencia de paredes reflejantes evitaría el paso de los átomos. Sin embargo en este trabajo se hace referencia a potenciales que funcionan de manera teórica (Potencial Mesa) y potenciales que son factibles de manera experimental (Potencial Gaussiano) en el capítulo 7.

²Figura 2.1 tomada de [26]

2.2 Hamiltoniano del Átomo en un Campo Electromagnético

Los campos cuantizados en una sola dimensión y confinados a una cavidad de longitud L quedan expresados como

$$E(z, t) = \sum_j \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{2\epsilon_0 L}} \left[a_j e^{-i\omega_j t} + a_j^\dagger e^{i\omega_j t} \right] \text{sen}(m\pi z/L),$$

$$B(z, t) = -\frac{i}{c} \sum_j \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{2\epsilon_0 L}} \left[a_j e^{-i\omega_j t} - a_j^\dagger e^{i\omega_j t} \right] \text{cos}(m\pi z/L).$$
(2.30)

Se ha utilizado la expresión para una sola dimensión y a continuación se utilizará la expresión para un sólo modo de campo, debido a que las expresiones se simplifican y la esencia de las expresiones es más fácil de observar.

A partir de ahora, nos referiremos al campo electromagnético $E(z, t)$ y consideraremos que la diferencia entre las magnitudes de la interacción dipolar eléctrica y la dipolar magnética es muy grande, debido a que los dipolos magnéticos presentes en el átomo son fácilmente apantallables y la magnitud del dipolo magnético total es muy pequeña.

El sistema idealizado y simplificado consta de un solo modo de radiación; se puede entender como un haz monocromático y contenido en una cavidad. El campo electromagnético dentro de la cavidad es

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L}} \left[a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t} \right] \text{sen}(m\pi z/L),$$
(2.31)

donde ω es la frecuencia del haz y $\omega = m\pi c/L$, con longitud de onda $\lambda = 2L/m$ para algún $m = 1, 2, 3, \dots$, de esta manera la radiación está confinada a una dimensión.

2.2. Hamiltoniano del Átomo en un Campo Electromagnético

Considérese el átomo de hidrógeno (utilizamos este átomo por ser el más simple y porque con él se puede describir la física que nos interesa del sistema) con un protón de masa m_p en posición \mathbf{r}_p y un electrón de masa m_e en posición \mathbf{r}_e , que están ligados por un potencial coulombiano $V_c(|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|)$. Además

$$V_c(|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|},$$
(2.32)

el Hamiltoniano del átomo queda determinado por

$$H_A = H_e + H_p + V_c(|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|),$$
(2.33)

donde H_e es el Hamiltoniano del electrón y H_p el del protón, las cuales quedan definidos como sigue

$$H_e = \frac{\mathbf{p}_e^2}{2m_e} - \frac{q}{m_e} \mathbf{A}(\mathbf{r}_e, t) \cdot \mathbf{p}_e + \frac{q^2}{2m_e} \mathbf{A}^2(\mathbf{r}_e, t)$$
(2.34)

2.2 Hamiltoniano del Átomo en un Campo Electromagnético

y

$$H_p = \frac{\mathbf{p}_p^2}{2m_p} + \frac{q}{m_p} \mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t) \cdot \mathbf{p}_p + \frac{q^2}{2m_p} \mathbf{A}^2(\mathbf{r}_p, t). \quad (2.35)$$

A continuación se definen dos coordenadas, \mathbf{r} centro de masa, \mathbf{r}_{ep} posición relativa y la masa del átomo $m = m_p + m_e$

$$\mathbf{r} = \frac{m_e}{m} \mathbf{r}_e + \frac{m_p}{m} \mathbf{r}_p, \quad (2.36)$$

mientras que

$$\mathbf{r}_{ep} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p, \quad (2.37)$$

con los cuales podemos expresar las posiciones del electrón

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{r} + \frac{m_p}{m} \mathbf{r}_{ep} \quad (2.38)$$

y del protón como

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r} - \frac{m_e}{m} \mathbf{r}_{ep}, \quad (2.39)$$

ambos en términos de la posición del centro de masa y la posición relativa.

Introducimos el siguiente término \mathbf{p} , el momento total del átomo, asociado con el momento de la masa total m

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_p, \quad (2.40)$$

y el momento asociado a la masa reducida m_r

$$\mathbf{p}_r = \frac{m_p}{m} \mathbf{p}_e - \frac{m_e}{m} \mathbf{p}_p, \quad (2.41)$$

donde m_r se define como

$$m_r = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}. \quad (2.42)$$

Expresamos el momento del electrón como

$$\mathbf{p}_e = \frac{m_e}{m} \mathbf{p} + \mathbf{p}_r \quad (2.43)$$

y el momento del protón como

$$\mathbf{p}_p = \frac{m_p}{m} \mathbf{p} - \mathbf{p}_r, \quad (2.44)$$

ambos en términos de \mathbf{p} y \mathbf{p}_r . Ahora buscamos que la energía cinética del átomo se puede expresar de forma equivalente como sigue

$$\frac{\mathbf{p}_e^2}{2m_e} + \frac{\mathbf{p}_p^2}{2m_p} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_r^2}{2m_r}, \quad (2.45)$$

2.3 Hamiltoniano Atómico

el cual es justo el momento del centro de masa y el momento del movimiento relativo, lo que nos permitirá simplificar las expresiones para el Hamiltoniano del átomo.

Una vez determinadas las coordenadas relativas, el Hamiltoniano puede describirse en términos de dichas coordenadas como sigue

$$\begin{aligned}
 H_{AI} = & \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_r^2}{2m_r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_{ep}|^2} - \left[\frac{q}{m_e} \mathbf{A} \left(\mathbf{r} + \frac{m_p}{m} \mathbf{r}_{ep}, t \right) + \frac{q}{m_p} \mathbf{A} \left(\mathbf{r} - \frac{m_e}{m} \mathbf{r}_{ep}, t \right) \right] \cdot \mathbf{p}_r \\
 & - \frac{q}{m} \left[\mathbf{A} \left(\mathbf{r} + \frac{m_p}{m} \mathbf{r}_{ep}, t \right) - \mathbf{A} \left(\mathbf{r} - \frac{m_e}{m} \mathbf{r}_{ep}, t \right) \right] \cdot \mathbf{p} \\
 & + \frac{q^2}{2m_e} \mathbf{A}^2 \left(\mathbf{r} + \frac{m_p}{m} \mathbf{r}_{ep}, t \right) + \frac{q^2}{2m_p} \mathbf{A}^2 \left(\mathbf{r} - \frac{m_e}{m} \mathbf{r}_{ep}, t \right),
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

en donde se pueden identificar los términos que corresponden al átomo H_A y los que corresponden a la interacción H_{int} .

2.3. Hamiltoniano Atómico

De la ecuación (2.46) identificamos los términos que corresponden al Hamiltoniano del átomo,

$$\begin{aligned}
 H_A &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_r^2}{2m_r} + V_c(|\mathbf{r}_{ep}|), \\
 &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + H_a,
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

que está distribuido en dos partes; la parte cinética del átomo y la parte interna H_a .

En el caso en que se tuviera un sistema de mas electrones, el Hamiltoniano debería tomar en cuenta la interacción entre estos y el núcleo, así como la interacción electrón-electrón.

Átomos de dos niveles

En la naturaleza no existe un sistema atómico con sólo dos niveles, pero debido a las reglas de selección y a la existencia de frecuencias características, en condiciones experimentales adecuadas podemos utilizar esta descripción considerándola muy cercana a la realidad.

Definimos el estado base $|g\rangle$ y el estado excitado $|e\rangle$ como los eigenestados de interés del Hamiltoniano interno del átomo H_a y aproximamos

$$H_a \approx \hbar\omega_e|e\rangle\langle e| + \hbar\omega_g|g\rangle\langle g|, \tag{2.48}$$

y nombramos $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$ como la diferencia de energía de los niveles $|e\rangle$ y $|g\rangle$, también conocida como frecuencia de resonancia.

2.4. Hamiltoniano de la Interacción

En la sección 2.1 se obtuvo el Hamiltoniano para el campo electromagnético y en la 2.3 se escribe el Hamiltoniano para un átomo libre, entre ellos existe una interacción que es debida en gran medida al término dipolar que corresponde a la disposición electrónica en el átomo y el acoplamiento que sufre con el campo electromagnético. De acuerdo con la ecuación (2.46) los términos correspondientes a la interacción en el sistema de referencia del centro de masa y las coordenadas relativas están dados por

$$\begin{aligned}
 H_{int} = & - \left[\frac{q}{m_e} \mathbf{A} \left(\mathbf{r} + \frac{m_p}{m} \mathbf{r}_{ep}, t \right) + \frac{q}{m_p} \mathbf{A} \left(\mathbf{r} - \frac{m_e}{m} \mathbf{r}_{ep}, t \right) \right] \cdot \mathbf{p}_r \\
 & - \frac{q}{m} \left[\mathbf{A} \left(\mathbf{r} + \frac{m_p}{m} \mathbf{r}_{ep}, t \right) - \mathbf{A} \left(\mathbf{r} - \frac{m_e}{m} \mathbf{r}_{ep}, t \right) \right] \cdot \mathbf{p} \\
 & + \frac{q^2}{2m_e} \mathbf{A}^2 \left(\mathbf{r} + \frac{m_p}{m} \mathbf{r}_{ep}, t \right) + \frac{q^2}{2m_p} \mathbf{A}^2 \left(\mathbf{r} - \frac{m_e}{m} \mathbf{r}_{ep}, t \right).
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

En la ecuación anterior se observa que es necesario conocer la dependencia espacial del potencial vectorial \mathbf{A} alrededor de un punto \mathbf{r} , para lo cual consideramos $\mathbf{A}(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{r}_{ep}, t)$, donde $\epsilon \mathbf{r}_{ep}$ puede ser $\epsilon \mathbf{r}_{ep} \equiv -(m_e/m) \mathbf{r}_{ep}$ o $\epsilon \mathbf{r}_{ep} \equiv (m_p/m) \mathbf{r}_{ep}$. Al expandir el potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{r}_{ep}, t)$ en series de Taylor, se obtiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{r}_{ep}) \simeq \mathbf{A}(\mathbf{r}) + [\epsilon \mathbf{r}_{ep} \cdot \nabla] \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \dots \tag{2.50}$$

Utilizamos el hecho de que $m_e/m_p \ll 1$ y \mathbf{r}_{ep} es del tamaño del átomo, para comparar el término de la corrección $[\epsilon \mathbf{r}_{ep} \cdot \nabla]$ en cada término de la ecuación (2.49) y observar que resulta ser muy pequeño respecto a $\mathbf{A}(\mathbf{r})$

$$\frac{|[\epsilon \mathbf{r}_{ep} \cdot \nabla]|}{|\mathbf{A}(\mathbf{r})|} \ll 1, \tag{2.51}$$

de tal manera que el electrón y protón sienten esencialmente el mismo potencial

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{r}_e, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t), \tag{2.52}$$

por lo que el Hamiltoniano de la interacción queda como

$$H_{int} = - \frac{q}{m_r} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{p}_r + \frac{q^2}{2m_r} \mathbf{A}^2(\mathbf{r}, t). \tag{2.53}$$

Considerando el Hamiltoniano atómico, el total se puede escribir como

$$H_T = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2m_r} [\mathbf{p}_r - q \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + H_F. \tag{2.54}$$

Al considerar la relación entre el potencial \mathbf{A} y el campo \mathbf{E} , se pueden expresar los términos de interacción en función del campo eléctrico.

2.4 Hamiltoniano de la Interacción

2.4.1. Aproximación Dipolar

Si la longitud de onda asociada a la transición atómica $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ está en la región del visible, al compararla con los valores típicos de los valores medios de la distancia electrón-núcleo $\langle \mathbf{r}_{ep} \rangle$, resulta $\langle \mathbf{r}_{ep} \rangle \ll \lambda_0$. Esto permite considerar válida la llamada aproximación dipolar, en la que el operador relevante en una transición es el operador dipolar:

$$\mathbf{d} = q\mathbf{r}_{ep}. \quad (2.55)$$

Ante la presencia de un campo electromagnético externo, existirá un acoplamiento entre el dipolo y el campo eléctrico, que proviene del acoplamiento de la carga y el potencial vectorial \mathbf{A} . Expresamos el término de la interacción dipolar como

$$H_{int} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -q\mathbf{r}_{ep} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.56)$$

donde H_{int} representa el Hamiltoniano referente a la interacción entre átomo y campo. Nótese que el campo eléctrico está evaluado en la posición del centro de masa del núcleo. La aproximación dipolar está basada en el hecho de que la longitud de onda del campo electromagnético es mucho más grande que el tamaño del propio átomo y que en consecuencia el campo eléctrico no cambia de manera sustancial entre la posición del núcleo y la del electrón:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}_e, t) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}_p, t). \quad (2.57)$$

Si trabajásemos con un sistema de varios electrones, el modelo de partícula independiente permite describir al estado interno del átomo como el producto antisimetrizado de estados atribuibles a cada uno de los electrones. Por ejemplo, si trabajásemos con átomos alcalinos neutros con Z electrones, podríamos asumir que los $Z - 1$ electrones localizados en las capas cerradas forman un carozo de carga efectiva $+e$ que interactúa con el electrón de valencia. Las transiciones atómicas más frecuentes en condiciones convencionales involucran el cambio de estado de un sólo electrón en el modelo de partícula independiente, que en el caso de los átomos alcalinos resulta ser el electrón de valencia.

Bajo las consideraciones anteriores, el Hamiltoniano de interacción toma la siguiente forma

$$H_{int} = -q\mathbf{r}_{ep} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.58)$$

siendo éste el responsable de muchos de los fenómenos referentes a la interacción entre la materia y radiación.

Capítulo 3

Electrodinámica Cuántica en Cavidades

La electrodinámica cuántica describe la forma en que interactúan las partes más fundamentales de la materia y los campos electromagnéticos cuánticos. En el campo de la física atómica, la QED puede usarse como herramienta para describir desde la dinámica de una pequeña cantidad de fotones de una cierta frecuencia que interactúan con algunos átomos, hasta la generalización de la interacción de campos clásicos con gases moleculares.

En la actualidad, en el área de QED en cavidades existen dos tipos de realizaciones experimentales, microondas y ópticas. Aunque ambas comparten propiedades físicas generales, presentan diferentes características específicas [42].

En la región de las microondas, átomos altamente excitados, llamados *átomos Rydberg* [66], interactúan con cavidades superconductoras que permiten modos con longitud de onda milimétrica. La disipación en estos procesos es extremadamente baja.

Mientras que en las cavidades ópticas, los estados de excitación atómica son más bajos. Los átomos interactúan con cavidades que tienen tamaños inferiores a milímetros y se encuentran a temperatura ambiente. Esta interacción es mucho más rápida y en general los efectos de disipación son importantes.

El sistema que se quiere estudiar presenta ciertos fenómenos óptico-cuánticos interesantes, dicho sistema consta de un átomo con dos niveles que interactúa con un campo electromagnético cuantizado en una cavidad con alta calidad $Q = \omega_0 T_r$, donde T_r es el tiempo de relajación. Los átomos que generalmente se utilizan de manera experimental, son átomos alcalinos, pues éstos están conformados por un carozo compacto, formado de capas electrónicas internas completas y un único electrón en una órbita poco ligada. Para algunos experimentos y modelos, algunos átomos alcalinos se acercan a la descripción de átomo de dos niveles. De acuerdo a nuestros objetivos, nuestro sistema puede ser modelado considerando los átomos de rubidio y cesio como átomos de dos niveles.

Los átomos considerados dentro de nuestro sistema pueden encontrarse en cualquiera de los dos estados $|g\rangle$ o $|e\rangle$ y se desplazan a bajas velocidades a lo largo del eje z hasta encontrarse con una cavidad de longitud L que contiene un solo modo de campo electromagnético con frecuencia ω .

El modo de la cavidad y la frecuencia de transición del átomo no necesariamente están en

3.1 Cavidades

resonancia, pero son suficientemente cercanos como para que el campo sea capaz de inducir una transición atómica del estado $|g\rangle$ al estado $|e\rangle$, el campo pierde un fotón en el proceso y el átomo lo gana en forma de energía. El sistema resonante que se describe recibe el nombre de *microwave amplification via z-motion-induced emission of radiation (mazer)*.

El efecto del desentonamiento se ha estudiado en [28] donde se muestra un interés centrado en los efectos en presencia de una cavidad con potencial mesa.

3.1. Cavidades

En general las cavidades reales constan de espejos que funcionan como resonadores y están finamente pulidos con el objetivo de incrementar el valor de Q de la cavidad. Por otra parte, necesitan ser enfriadas a temperaturas de unas cuantas décimas de Kelvin para reducir la intervención de radiación térmica.

Experimentalmente, la configuración más utilizada es *Fabry-Perot*. Por ejemplo, los grupos de Kimble, Rempe y Haroche utilizan esta geometría en la mayoría de sus experimentos, mientras que el grupo de Walther utiliza una cavidad cilíndrica cerrada.

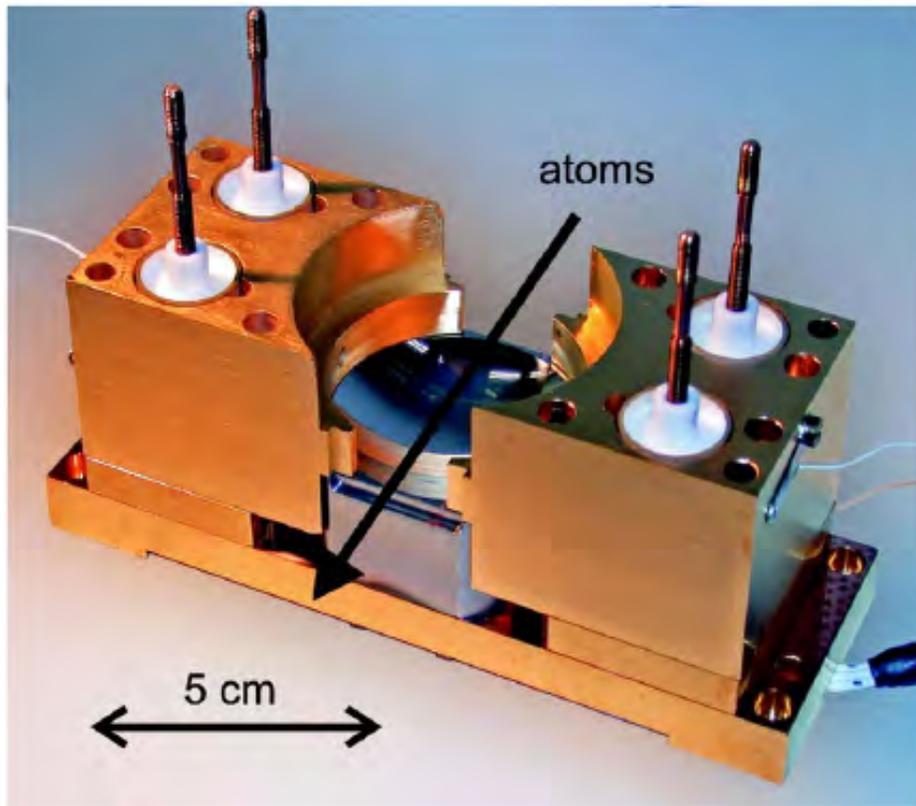


Figura 3.1: Cavidad experimental real construida por el grupo de Haroche, con valor de $Q = 4.2 \times 10^{10}$ y finesa de $4,6 \times 10^9$ [42].

Régimen de baja Q

En este régimen los fotones emitidos por los átomos son rápidamente disipados y de manera irreversible por las paredes de la cavidad. Purcell predijo que las tasas de emisión atómicas se modificarían al cambiar la geometría en la cual está contenido el átomo. Sistemas con baja Q se utilizan actualmente para estudiar las propiedades atómicas modificando las tasas de emisión en microcavidades de estado sólido.

Régimen de alta Q

En estos sistemas, la interacción entre el átomo y la radiación se da de manera coherente y permite la observación de evolución reversible de la interacción átomo-campo.

3.2. Átomos de Rydberg

Los átomos de Rydberg son átomos altamente excitados, lo que significa que tienen un número cuántico principal grande. Los posibles niveles de energía del átomo son fácilmente descritos por la fórmula de Rydberg y debido a ello reciben este nombre.

En 1983, se realizaron experimentos utilizando átomos de Rydberg circulares y cavidades superconductoras de microondas [66]. Estos componentes son ideales para producir un acoplamiento intenso átomo-campo y así minimizar las causas de relajación, las cuales tienden a destruir la coherencia en el sistema.

Para los átomos de Rydberg con $n = 50$, las dimensiones lineales de un átomo con este grado de excitación es comparable con la longitud de onda de la luz en la región del visible. Dichos átomos combinan un alto número cuántico principal n con un número cuántico orbital y magnético máximo de $\ell = |m| = n - 1$. Dicho de una manera clásica, la órbita del electrón alrededor del núcleo forma un círculo que, aunado a la posibilidad de tener número máximo angular y magnético, tiene como solución a la función de onda, un toro muy delgado alrededor de la órbita del modelo de Bohr.

El electrón está confinado a lo largo un círculo de radio $r_{pe} = a_0 n^2$ que rodea al núcleo atómico, con a_0 el Radio de Bohr. El tiempo de vida media de esos niveles es relativamente largo: de alrededor de $30ms$ para un átomo con $n = 50$.

El elemento de matriz dipolar es $d = a_0 n^2 / 2 = 1250 a_0$ para la transición $\omega_0 / 2\pi = 50.099GHz$ entre los estados $n = 50$ y $n = 51$, que funcionan como los estados g y e , respectivamente.

El acoplamiento entre un átomo de Rydberg y el campo funciona de tal manera que el sistema ideal de dos niveles acoplado a un sólo modo de radiación son una muy buena aproximación.

3.3. Sistema Átomo-Cavidad

La interacción entre los átomos de Rydberg circulares y las cavidades milimétricas superconductoras con alta Q muestra la manera en que ocurre el acoplamiento entre materia y radiación.

3.4 Dispositivos Experimentales

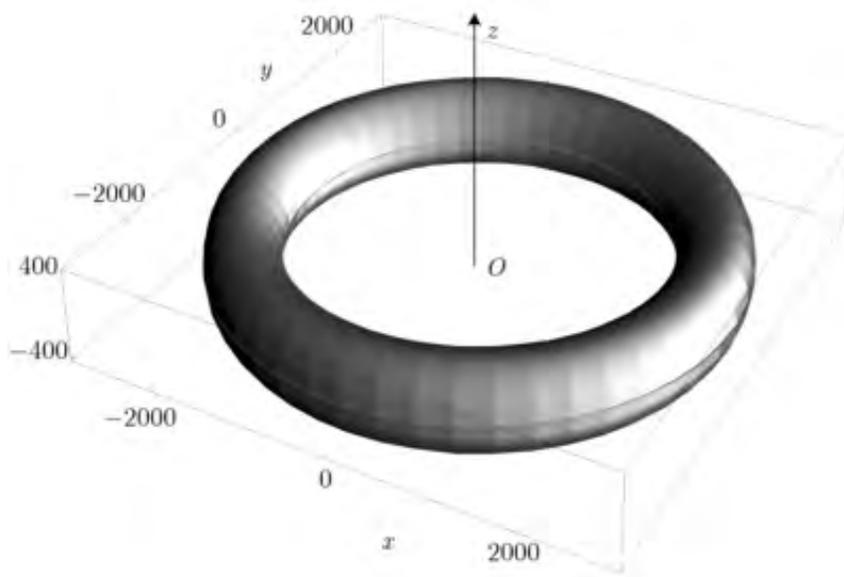


Figura 3.2: Átomo de Rydberg con $n = 50$, en a_0

Los átomos de Rydberg pueden ser preparados de manera eficaz desde niveles de Rydberg con momento angular bajo por medio de transiciones de multifotones de radiofrecuencia. Los niveles circulares pueden ser detectados eficaz y selectivamente por campos de ionización.

El grupo de Haroche utiliza cavidades basadas en resonadores de Fabry-Perot fabricados con dos espejos semiesféricos colocados uno frente a otro separados por 2.7cm . Este grupo es líder en la fabricación de dichos dispositivos, ya que en la fabricación de las cavidades consiguen valores de Q , del orden de 10^{10} a 10^{12} [42].

Algo importante de remarcar es que en estos experimentos, los modos del campo tienen tiempos de vida media más largos que el tiempo de interacción entre éstos.

Las paredes de la cavidad son enfriadas hasta alcanzar una temperatura de 0.6K para eliminar los efectos térmicos sobre el sistema y para optimizar la reflectividad intrínseca de los espejos superconductores.

El volumen efectivo V de la cavidad es pequeño, alrededor de $V = 0.7\text{cm}^3$, el campo producido por un sólo fotón es $E_0 = \sqrt{\hbar\omega/2\epsilon_0 V}$.

3.4. Dispositivos Experimentales

Los dispositivos experimentales en general constan de átomos de rubidio o cesio, que salen a través de un orificio provenientes de un horno O (Ver figura 3.3); después, el átomo toma un estado inicial en B por medio de un conjunto de láseres que funcionan como selectores de velocidad en V permitiendo al paso a átomos con velocidades cercanas a la velocidad deseada.

Después del proceso anterior, el átomo entra en la cavidad y el tiempo de interacción es determinado por la velocidad atómica. Los átomos con velocidad aún muy diferente a la velocidad deseada nunca son excitados y cruzan la cavidad sin afectar el campo.

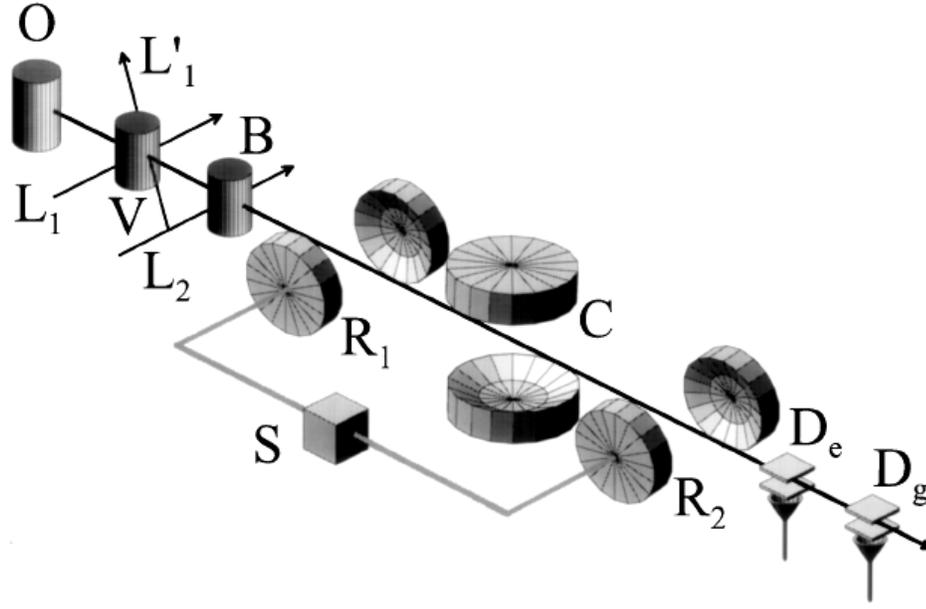


Figura 3.3: Diagrama de una cavidad experimental del grupo de Haroche que utiliza átomos de ^{87}Rb . La cavidad consta de un horno O emisor de átomos, un selector de velocidad V y una caja B donde se prepara el estado deseado. Los átomos que tienen las características deseadas pasan a la cavidad C, el campo de la cavidad es excitado ya sea por los átomos o por una fuente clásica de radiación S acoplado a C por medio de una guía de onda; los átomos son contados por dos detectores de ionización de campo D_e y D_g , que son sensibles a los átomos en estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$.

La geometría de las cavidades determinará los modos permitidos, por lo que la fabricación de una cavidad estará directamente relacionada con el átomo que se desee utilizar. En los casos que se estudiarán, el acoplamiento entre el átomo y el campo g_0 es de una escala de tiempo aproximada al tiempo de relajación de la cavidad κ^{-1} y Γ^{-1} es el tiempo de relajación del átomo. Debido a que se desean estudiar átomos fríos, la relación entre estos parámetros es

$$\kappa, \Gamma \approx g_0. \quad (3.1)$$

En la tabla 3.1 se presentan algunos parámetros generalmente utilizados por cuatro grupos de investigación: dos en la región de cavidades ópticas (Kimble y Rempe) y dos en la región de las microondas (Walther y Haroche), con τ el tiempo de permanencia promedio del átomo en la cavidad.

Además de los valores de las frecuencias, es necesario conocer algunos de los parámetros de las cavidades que se utilizan de manera experimental, los cuales deben ser considerados por ser los que limitan nuestro modelo bajo una restricción experimental, algunos de estos parámetros se muestran en la tabla 3.1.

Parte de la descripción de este trabajo estará enfocado a la interacción de átomos fríos, lo cual se revisa en la siguiente sección.

3.5 Átomos Fríos

Grupo	$\omega_0/2\pi$	$g_0/2\pi$	$\kappa/2\pi$	$\Gamma/2\pi$	τ
Kimble <i>et al.</i>	352THz	120MHz	40MHz	2.6MHz	0.05 μ s
Rempe <i>et al.</i>	385THz	16 MHz	1.4MHz	3.0MHz	3.0 μ s
Walther <i>et al.</i>	21GHz	7 kHz	0.4Hz	500 Hz	80 μ s
Haroche <i>et al.</i>	51GHz	48 kHz	400Hz	5Hz	30 μ s

Tabla 3.1: Valores experimentales para diversas frecuencias de diferentes grupos de investigación. Las cantidades son: ω_0 la frecuencia de transición atómica, g_0 la frecuencia del acoplamiento entre campo y átomo, Γ la frecuencia relacionada con el tiempo de relajación del átomo, κ la frecuencia asociada al tiempo de relajación de la cavidad y τ el tiempo típico de interacción entre la cavidad y el átomo.

Grupo	L	Q	Átomo
Kimble <i>et al.</i>	40 μ m	5.0×10^4	Cesio
Rempe <i>et al.</i>	116 μ m	4.3×10^5	Rubidio
Walther <i>et al.</i>	2.5cm		Rubidio
Haroche <i>et al.</i>	6mm	3×10^8	Rubidio

Tabla 3.2: Parámetros experimentales para cavidades utilizadas por diferentes grupos de investigación [62, 14]

3.5. Átomos Fríos

El concepto de átomos fríos se refiere a átomos neutros con energía cinética muy baja, formando un gas con unos cuantos átomos y una temperatura $T \approx mK$. La temperatura de un gas se interpreta como la energía cinética promedio de los átomos que lo conforman.

Para disminuir la temperatura de un gas, es necesario reducir la energía cinética de los átomos en cada uno de sus grados de libertad, ya que de acuerdo con el teorema de equipartición de la energía, cada uno de ellos contribuye con $\frac{1}{2}k_B T$.

Para reducir la energía cinética de los átomos, es necesario manipularlos; sin embargo, mecánicamente es muy complicado a escalas atómicas, por lo que se debe dar paso a una manipulación mucho más refinada y precisa. La manipulación electromagnética puede ayudar a reducir la energía cinética de los átomos, tanto que en las últimas décadas se han desarrollado técnicas dedicadas a enfriamiento de átomos con láser.

El control de las velocidades y el enfriamiento, tuvieron un gran éxito a los largo de la década de los 80, con el desarrollo de técnicas de enfriamiento por medio de láser, sugerencias realizadas de manera independiente por Theodor Hänsch y Arthur Schawlow para átomos neutros, y por David Wineland y Hans Dehmelt para iones.

Wineland y Wayne Itano presentaron el principio de enfriamiento por láser y su potencial aplicación en algunos campos de la física, tales como: espectroscopía de alta resolución, relojes atómicos, física de superficies y algunos efectos colectivos cuánticos.

La investigación y el desarrollo de técnicas de enfriamiento desencadenaron trabajos sumamente destacados y con la entrega de varios premios Nobel en esta área.

La realización y comprensión del trabajo relacionado con mecanismos de enfriamiento para gases de átomos neutros fue galardonado con el premio Nobel de Física en 1997¹.

A lo largo de los años siguientes, comenzó una carrera incesante por desarrollar nuevas técnicas, que impusieran nuevos récords por alcanzar las temperaturas más bajas. Lo anterior dio como resultado, la aplicación de los desarrollos que ya habían sido efectuados como una herramienta en la investigación básica. El condensado de Bose-Einstein y los gases degenerados de Fermi son sólo algunas consecuencias de la aplicación de las novedosas técnicas de enfriamiento.

3.5.1. Enfriamiento Doppler

Uno de los fenómenos que se puede observar durante la interacción átomo-láser es la transición electrónica, que puede ocurrir si la frecuencia de transición del átomo ω_0 es suficientemente cercana a la frecuencia ω del láser. Existe una probabilidad de que la radiación del láser induzca una transición electrónica en el átomo. La probabilidad de transición dependiente de las frecuencias es de la siguiente forma

$$P_{12} = \frac{|\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0|_{12}}{\hbar} \frac{\sin^2\left(\frac{\delta t}{2}\right)}{\delta^2} \quad (3.2)$$

con $\delta = \omega_0 - \omega$.

Tiene la forma de una función sinc(x) con un máximo central simétrico y un mínimo próximo al máximo en cada lado. La diferencia de energía entre los dos mínimos es Γ .

El átomo necesita absorber un fotón para pasar del estado $|g\rangle$ al estado $|e\rangle$; al hacerlo, dicho átomo modifica su momento en una cantidad $-\hbar\vec{k}$.

Una vez que el átomo se encuentra en el estado excitado, decaerá eventualmente del estado $|e\rangle$ al estado $|g\rangle$ liberando un fotón en el proceso. Si la transición es espontánea, la dirección de emisión del fotón es completamente aleatoria. Si es inducida por el láser, se emitirá en la misma dirección que lleva el fotón incidente. La diferencia entre la dirección de absorción y la dirección de emisión produce una modificación en el momento del átomo. La variación constante del momento produce un efecto similar a una fuerza de fricción.

Si se hace incidir un fotón con frecuencia ω diferente pero suficientemente cercana a ω_0 sobre un átomo moviéndose con velocidad v , por efecto Doppler, el átomo observa una frecuencia ω'

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{v}{c}\right), \quad (3.3)$$

para la cual $\delta = \omega_0 - \omega'$.

¹En 1997, H. D. Phillips, Cohen-Tannoudji y Paul Chu compartieron el Premio Nobel de Física por sus trabajos relacionados con el desarrollo de técnicas de enfriamiento con láser [19, 20, 21].

3.5 Átomos Fríos

Existen 2 posibles casos, $\delta < 0$ y $\delta > 0$, descartando por ahora el caso resonante $\delta = 0$.

- Si $\delta > 0$ y el átomo se mueve en dirección opuesta a $\vec{\mathbf{k}}$ del láser, la frecuencia que observa es más cercana a ω_0 , por lo que la probabilidad de inducir una transición en el átomo crece. Eventualmente, el átomo emitirá el fotón de nuevo pero con frecuencia $\omega_0 > \omega$, habiendo perdido energía y reduciendo su momento.
- Si $\delta < 0$ y el átomo se mueve en dirección opuesta a $\vec{\mathbf{k}}$, la probabilidad de absorción disminuye, pero es diferente de cero. Si este evento ocurre, el átomo absorbe un fotón con frecuencia $\omega > \omega_0$. Asimismo, emitirá nuevamente un fotón en un tiempo aleatorio, pero con frecuencia ω_0 , habiendo ganado energía en el proceso.

En general este proceso no se desarrolla con un sólo átomo, en realidad ocurre en un gas de átomos que se mueven en todas direcciones. Si se desea enfriar más de 1 átomo, es necesario cubrir las posibilidades de movimiento de todos los átomos. Para cubrir cada posibilidad de movimiento, se utilizan dispositivos a base de láseres dispuestos en cada uno de los grados de libertad traslacionales de los átomos. Para 1D se utilizan 2 láseres, para 2D se utilizan 4 y para 3D se utilizan 6, cubriendo así cada eje dependiendo de las dimensiones.

Según el signo de δ , podemos observar diferentes efectos. Si $\delta < 0$, la técnica Doppler funciona para calentar átomos, pero si $\delta > 0$, ésta funciona para enfriarlos. La probabilidad aumenta en un caso y disminuye en otro, de aquí que Cohen-Tannoudji haya indicado que el proceso Doppler es más eficiente para enfriar que para calentar.

El enfriamiento Doppler tiene un límite natural aún cuando es sumamente eficaz, el cual es determinado por el propio fenómeno. Por medio de este proceso no se pueden alcanzar temperaturas por debajo de

$$k_B T_D = \frac{h}{2} \Gamma. \quad (3.4)$$

Para que el enfriamiento Doppler pueda llevarse a cabo, los átomos deben estar suficientemente fríos, con una temperatura correspondiente a energías promedio de los átomos en el rango de

$$\Delta v \sim \frac{\Gamma}{\mathbf{k}}, \quad (3.5)$$

con $\mathbf{k} = |\vec{\mathbf{k}}| = 2\pi/\lambda$ número de onda del láser, λ la longitud de onda del láser y v la velocidad del centro de masa del átomo. En el gas de átomos que han estado bajo este proceso, se observa una disminución en la energía cinética producida por una difusión del momento que Ashkin y Gordon detallan como D [23]. A consecuencia de este efecto, el gas manifiesta una disminución de la temperatura. Las velocidades de los átomos bajan en magnitud y entonces alcanzan el orden de

$$kv \gtrsim \Gamma. \quad (3.6)$$

Actualmente, el enfriamiento Doppler es realizado de manera experimental por varios grupos de investigación, debido a que el procedimiento se ha hecho más accesible y sus aplicaciones en la investigación básica son más necesarias para desarrollos de punta.

Los átomos provenientes de O en la figura 3.3 salen con una velocidad $v = 503\text{m/s}$ [24], al llegar a B se desaceleran por medio de un corrimiento Doppler. Este proceso es sumamente eficaz, ya que puede disminuir la velocidad de los átomos en muy poco tiempo, la desaceleración máxima del haz de átomos tiene la siguiente expresión

$$a_{max} = \frac{\hbar k}{2m} \frac{1}{2\tau}, \quad (3.7)$$

en este caso el de la cavidad y $\tau = 1/\Gamma$

$$\begin{aligned} a_{max} &= \frac{v_{rec}}{2\tau} \\ &= \frac{\hbar \omega_0}{m c} \frac{1}{2\tau} \\ &= 3,678167 \times 10^6 \text{m/s}^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Las velocidades térmicas de los átomos incidentes es de cientos de metros por segundo; el tiempo necesario para frenarlos es de unos milisegundos, y las velocidades resultantes son aproximadamente las velocidades Doppler,

$$v_{Dop} = \frac{\Gamma}{k}, \quad (3.9)$$

para el caso de los experimentos del grupo de Haroche y en resonancia resulta ser $v_{Dop} \approx 0.3\text{m/s}$.

Las temperaturas alcanzadas por el límite Doppler no son lo suficientemente bajas como para que el tratamiento del desplazamiento de los átomos sea considerado completamente cuántico. Existe un método de enfriamiento que puede bajar la temperatura del gas atómico aún por debajo del límite Doppler: el enfriamiento Sisyphus.

3.5.2. Enfriamiento Sisyphus

El mecanismo de enfriamiento *Sisyphus* reduce la energía cinética de los átomos atacando otro grado de libertad, el momento angular. La radiación también puede transmitir momento angular por medio de polarización, o más específicamente por gradientes de polarización.

Algunos átomos (en particular los alcalinos) tienen una estructura Zeeman en el estado base, dicha estructura permite la existencia de 2 *subniveles* que resultan en un desdoblamiento al interactuar con radiación electromagnética como se muestra a continuación

$$|g\rangle \rightarrow \begin{cases} |g_{-1/2}\rangle \\ |g_{1/2}\rangle \end{cases} \quad (3.10)$$

3.5 Átomos Fríos

y del estado $|e\rangle$

$$|e\rangle \rightarrow \begin{cases} |e_{-3/2}\rangle \\ |e_{-1/2}\rangle \\ |e_{1/2}\rangle \\ |e_{3/2}\rangle \end{cases}. \quad (3.11)$$

Que las transiciones de la ecuación (3.10) sean más o menos probables, depende de la polarización en el punto donde se encuentran los átomos.

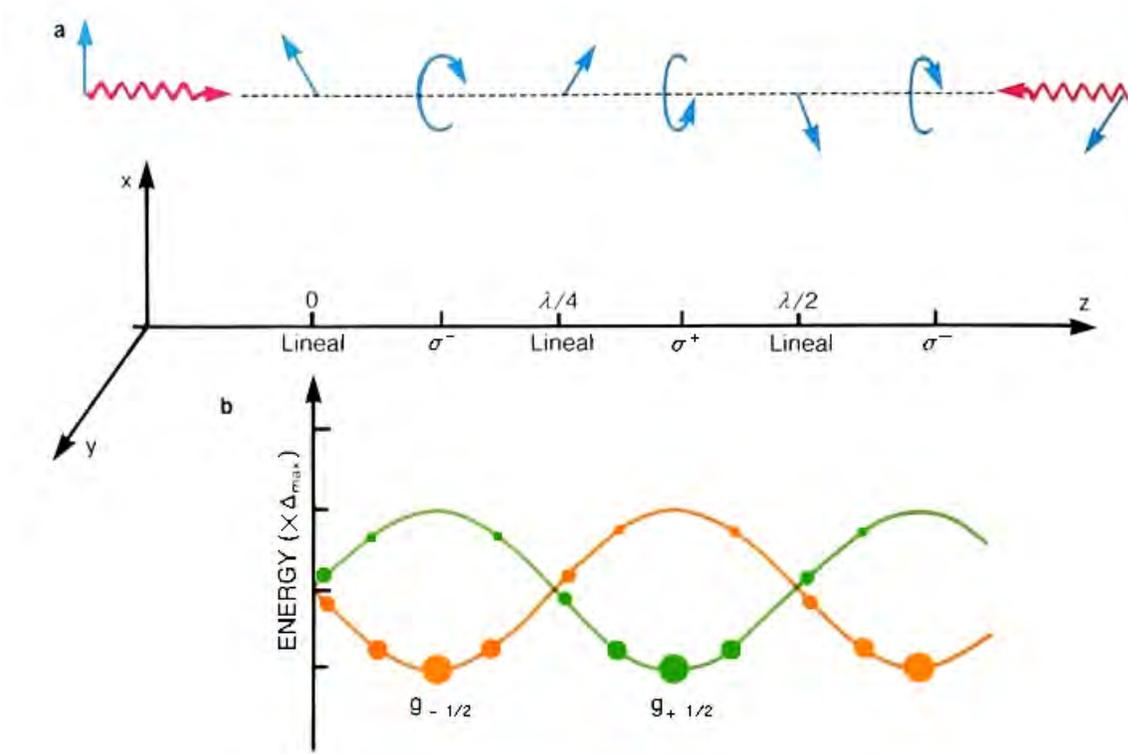


Figura 3.4: a) Diagrama de la configuración de los dos láseres contrapropagantes, lineal y perpendicularmente polarizados. b) Diagrama del desdoblamiento de los niveles energéticos del átomo, con las poblaciones relativas de la población de los átomos en cada subnivel ($|g_{-1/2}\rangle$ en color anaranjado y $|g_{+1/2}\rangle$ en color verde) representado por el tamaño de los círculos en color.

Los átomos que recorren la onda estacionaria y se encuentran en el estado $|g\rangle$, se distribuyen en poblaciones iguales de los estados $|g_{-1/2}\rangle$ y $|g_{+1/2}\rangle$ en los puntos donde la polarización del láser es lineal (establecemos el origen de nuestro sistema de referencia en uno de ellos $z = 0$), en ese punto, las transiciones más probables son $|g_{-1/2}\rangle \rightarrow |e_{-1/2}\rangle$ y $|g_{+1/2}\rangle \rightarrow |e_{+1/2}\rangle$. Al acercarse a la región con polarización circular σ^- ($z = \lambda/8$) los átomos en el estado $|g_{+1/2}\rangle$ perciben una subida de potencial y la población de dicho estado

$P(|g_{+1/2}\rangle)$ se reduce debido a que el láser induce una transición en los átomos de la siguiente forma $|g_{+1/2}\rangle \rightarrow |e_{-1/2}\rangle$ que al decaer, lo hacen emitiendo un fotón,² la transición más favorecida es $|e_{-1/2}\rangle \rightarrow |g_{-1/2}\rangle$ y la población $P(|g_{-1/2}\rangle)$ aumenta hasta ser máxima en $z = \lambda/8$.

Los átomos en el estado $|g_{-1/2}\rangle$ que se encuentran en la región de polarización circular σ^- nuevamente están en el mínimo de la onda estacionaria y continúan el recorrido subiendo nuevamente el potencial, al acercarse a la región con polarización lineal ($z = \lambda/4$) $P(|g_{+1/2}\rangle) = P(|g_{-1/2}\rangle)$. Conforme se acercan los átomos a la región con polarización σ^+ , se favorece la transición $|g_{-1/2}\rangle \rightarrow |e_{+1/2}\rangle$, que de nuevo, al decaer, la mayoría de los átomos sufren la siguiente transición $|e_{+1/2}\rangle \rightarrow |g_{+1/2}\rangle$ por lo que $P(|g_{+1/2}\rangle)$ aumenta, alcanzando el máximo en $z = 3\lambda/8$.

Este proceso se repite varias ocasiones y a lo largo de la onda estacionaria los átomos recorren en promedio más subidas de potencial que bajadas. Este efecto es conocido como *Efecto Sisyphus* y es la base de la técnica de enfriamiento del mismo nombre. Por medio del cual, la energía cinética se reduce y se logran alcanzar temperaturas por debajo del límite Doppler.

En 1988, el grupo de Phillips reportó que había conseguido temperaturas por debajo del límite Doppler, una temperatura cercana a la de *recoil* o retroceso,

$$k_B T_R = \frac{(\hbar k)^2}{2M}, \quad (3.12)$$

que corresponde a velocidades de algunas decenas de micrómetros por segundo para el átomo de rubidio. Las energías involucradas en nuestro estudio serán de algunos miles de veces la energía de retroceso.

²La proporción de átomos que emiten un fotón con cada polarización está dado por los coeficientes de Clebsch-Gordan [12]

Capítulo 4

Modelo de Jaynes-Cummings

El *Modelo de Jaynes-Cummings* (JC) es un modelo fundamental que ha sido ampliamente utilizado en el campo de la óptica cuántica y es la herramienta básica al estudiar un sistema atómico con dos niveles [27]. Planteado en 1963, el modelo de JC se sigue utilizando al día de hoy para describir múltiples fenómenos asociados a sistemas basados en esta estructura teórica. En un inicio, el modelo de JC fue estudiado con la intención de comparar las teorías semi-clásicas y las completamente cuánticas referentes a la interacción entre átomos y radiación electromagnética.

El modelo de JC se obtiene a partir del *Modelo de Rabi*, ambos relacionados por medio de la *Aproximación de Onda Rotante* (RWA). Parte de la importancia del modelo de JC proviene de ser el primero planteado en una forma totalmente cuántica para un sistema de dos niveles y un campo electromagnético cuántico y monocromático.

Actualmente, en sistemas como cavidades de microondas o en ciertos casos cavidades ópticas, se puede reducir la densidad de modos del campo electromagnético en el espacio libre y dentro de la cavidad, incluso hasta lograr un sólo modo.

En este sistema simplificado, los estados del átomo están separados por una energía de $\hbar\omega_0$. Se asume que los dos estados en los que puede estar el átomo son ortogonales y pueden ser utilizados como una base.

4.1. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

El Hamiltoniano para el sistema queda descrito en términos de los Hamiltonianos individuales de los elementos participantes que son: un átomo con dos niveles H_A , un modo de radiación en la cavidad H_F y la interacción entre ellos H_{int} .

$$\tilde{H}_{JC} = H_A + H_{int} + H_F. \quad (4.1)$$

Es conocido como Hamiltoniano de Jaynes Cummings.

4.1 Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

Como ya se establecieron en el capítulo 2 cada uno está definido como

$$\begin{aligned}
 H_A &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3, \\
 H_{int} &= -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \\
 H_F &= \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right),
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

con $p = -i\hbar(\partial/\partial z)$ el operador de momento del centro de masa del átomo a lo largo del eje z , m la masa atómica, ω_0 la frecuencia de transición atómica, ω la frecuencia del modo de la cavidad y $\delta = \omega_0 - \omega$ el desintonamiento entre ellas.

Además de definir el operador de inversión σ_3 como sigue

$$\sigma_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

es conveniente introducir los operadores σ y σ^\dagger , que se definen a continuación como los operadores de transición atómica de una forma similar a las matrices de Pauli

$$\begin{aligned}
 \sigma^\dagger &= |e\rangle\langle g| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \sigma &= |g\rangle\langle e| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

y que cumplen con las siguientes propiedades algebraicas

$$\begin{aligned}
 [\sigma, \sigma^\dagger] &= \sigma_3, \\
 [\sigma_3, \sigma] &= 2\sigma, \\
 [\sigma_3, \sigma^\dagger] &= 2\sigma^\dagger.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Con esta información escribiremos al operador de momento dipolar eléctrico en términos de los operadores $\sigma(t)$, $\sigma^\dagger(t)$ y $\sigma_3(t)$.

Tomando en cuenta que los eigenestados de la función de onda tienen propiedades de paridad bien definidas, los elementos que están en la diagonal son los únicos iguales a cero

$$\begin{aligned}
 \langle e|\mathbf{d}|e\rangle &= 0 \\
 \langle g|\mathbf{d}|g\rangle &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Las propiedades radiativas se dan entre estados con paridad opuesta de acuerdo con la regla de Laporte,¹ de esta manera, el momento dipolar eléctrico queda como

¹Posteriormente Wigner mostró que la regla de Laporte es una consecuencia de la regla de selección de paridad

$$\mathbf{d} = \langle e|\mathbf{d}|g\rangle|e\rangle\langle g| + \langle g|\mathbf{d}|e\rangle|g\rangle\langle e|, \quad (4.7)$$

y en términos de los operadores de transición atómica queda descrito como

$$\mathbf{d} = \langle e|\mathbf{d}|g\rangle\sigma^\dagger + \langle g|\mathbf{d}|e\rangle\sigma. \quad (4.8)$$

Para describir la interacción dipolar, es necesario describir la manera en que se relacionan los operadores que la conforman

$$H_{int} = d\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L}}u(z) (\sigma^\dagger + \sigma) (a^\dagger + a). \quad (4.9)$$

El H_{int} que se encuentra en la representación de Schrödinger, lo trasladamos a la representación de interacción como $H_I(t)$, para lo cual es necesario describir la evolución de los operadores involucrados.

En el caso de evolución libre, los operadores a y a^\dagger se escriben de la siguiente manera

$$a(t) = U_F(t)aU_F^\dagger(t) = a(0)\exp(-i\omega t), \quad a^\dagger(t) = U_F(t)a^\dagger U_F^\dagger(t) = a^\dagger(0)\exp(i\omega t), \quad (4.10)$$

donde $U_F(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_F t}$ y $U_F^\dagger(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_F t}$. Mientras que en el caso de evolución atómica libre

$$\sigma(t) = U_a\sigma U_a^\dagger = \sigma(0)\exp(-i\omega_0 t), \quad \sigma^\dagger(t) = U_a\sigma^\dagger U_a^\dagger = \sigma^\dagger(0)\exp(i\omega_0 t), \quad (4.11)$$

donde, de manera análoga $U_a(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_a t}$ y $U_a^\dagger(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_a t}$.

El término de interacción correspondiente es

$$H_I(t) = d\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L}} (\sigma^\dagger(t) + \sigma(t)) (a^\dagger(t) + a(t)) u(z). \quad (4.12)$$

Los términos $\sigma^\dagger a$ y σa^\dagger oscilan con una frecuencia $\delta = \omega_0 - \omega$, mientras que los términos σa y $\sigma^\dagger a^\dagger$ oscilan con una frecuencia $\omega + \omega_0$. Considerando que se trata de un caso cercano a la resonancia $\omega \approx \omega_0$ y $\omega + \omega_0 \gg |\delta|$. En promedio, los términos que oscilan muy rápidamente pueden ser ignorados; esta aproximación es conocida como *Aproximación de Onda Rotante* (RWA)² y en ella la interacción se escribe de la siguiente manera

$$H_{IR}(t) = d\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L}} (\sigma^\dagger a e^{i\delta t} + \sigma a^\dagger e^{-i\delta t}) u(z). \quad (4.13)$$

Volviendo a la representación de Schrödinger podemos escribir entonces el Hamiltoniano de JC bajo las consideraciones anteriores en la forma

²La RWA es en la mayoría de los casos una buena aproximación aunque existen casos para los cuales no es la mejor. Por ejemplo, para un átomo inmerso en un campo externo la RWA ignora el llamado desplazamiento de Bloch-Siegert.

4.2 Estados Vestidos

$$H_{JC} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3 + \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar g_0 u(z)(a^\dagger\sigma + a\sigma^\dagger), \quad (4.14)$$

donde $g_0 = d \cdot \sqrt{\omega/2\hbar\epsilon_0 L}$ es la frecuencia de Rabi normalizada. En la literatura se conoce a este Hamiltoniano como de Jaynes-Cummings [27]. Bajo la RWA el número de excitaciones $N = a^\dagger a + 1/2 + (1/2)\sigma_3$ permanece constante en el sistema y por lo tanto la dinámica se separa en dos subsistemas para cada valor de excitación N ³.

El Hamiltoniano libre $H_0 = \hbar\omega (\sigma_3/2 + a^\dagger a + 1/2)$ nos permite plantear al sistema de Jaynes Cummings H_{JC} en el esquema de interacción, que coincide con un sistema que oscila a una frecuencia ω :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar\delta\sigma_3 + \hbar g_0 u(z)(a^\dagger\sigma + a\sigma^\dagger). \quad (4.15)$$

Este Hamiltoniano contiene toda la física necesaria para describir al sistema y es el mismo Hamiltoniano H_{JC} observado desde la perspectiva de interacción.

4.2. Estados Vestidos

La ecuación (4.16) representa el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings desde el esquema de interacción y es a través de los eigenestados estacionarios, conocidos como *Estados Vestidos* (DS, Dressed States) que el modelo puede ser resuelto.

Este Hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar\delta\sigma_3 + \hbar g_0 u(z)(a^\dagger\sigma + a\sigma^\dagger), \quad (4.16)$$

donde analizamos el término correspondiente a la interacción del átomo con el modo de la cavidad, dependiente de la posición, el cual nos indica la existencia de posibles transiciones atómicas que involucran la absorción o emisión de un fotón si es una absorción (emisión) el átomo pasa del estado $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ ($|e\rangle \rightarrow |g\rangle$) y el campo electromagnético pasa de $|n\rangle \rightarrow |n-1\rangle$ ($|n\rangle \rightarrow |n+1\rangle$). Modificamos la notación de modo que podamos escribir el estado del sistema de forma más simple. Las transiciones anteriores pueden ocurrir solo de la siguiente manera

$$|e, n\rangle \longleftrightarrow |g, n+1\rangle, \quad (4.17)$$

ya que las transiciones $|e, n-1\rangle \longleftrightarrow |g, n\rangle$, no son permitidas, pues no conservan energía [49].⁴

Definimos los estados

$$|\psi_{1n}\rangle = |e, n\rangle, \quad (4.18)$$

$$|\psi_{2n}\rangle = |g, n+1\rangle$$

³Un desarrollo y justificación mas detallados pueden ser revisados en [1] página 3.

⁴Ver página 407

los cuales son conocidos como los estados “*desnudos*” y son eigenestados del sistema sólo en ausencia de la interacción átomo-radiación electromagnética. Se encuentran inmersos en un subespacio de 2×2 , debido a que la radiación acopla sólo estos estados para cada n . Dicho de otra manera, $g_0(a^\dagger\sigma + a\sigma^\dagger a)$ acopla los estados $|\psi_{1n}\rangle$ y $|\psi_{2n}\rangle$ para cada n , pero no acopla los estados $|g, n\rangle$ y $|e, n-1\rangle$ (los operadores $a\sigma$ y $a^\dagger\sigma$ lo harían, pero se omitieron con la aproximación RWA).

Introducimos la base ortonormal

$$|\Gamma_n^+(\theta)\rangle = \cos\theta|\psi_{1n}\rangle + \sin\theta|\psi_{2n}\rangle, \quad (4.19)$$

$$|\Gamma_{n+1}^-(\theta)\rangle = -\sin\theta|\psi_{1n}\rangle + \cos\theta|\psi_{2n}\rangle,$$

la cual coincide con los estados (4.18) cuando $\theta = 0$.

De manera simple, sustituimos el Hamiltoniano total del sistema H separado en la parte cinética del átomo y el resto como un potencial, además de que los estados son ortogonales y podemos utilizarlos como base para obtener los elementos de la matriz H , $H_{ij}^{(n)} = \langle\psi_{in}|H|\psi_{jn}\rangle$, como

$$H_{11}^{(n)} = \frac{\hbar\delta}{2}, \quad (4.20)$$

$$H_{22}^{(n)} = -\frac{\hbar\delta}{2},$$

en ambos casos

$$H_{12}^{(n)} = \hbar G(z) = H_{21}^{(n)}, \quad (4.21)$$

donde $G(z) = \sqrt{n+1}g_0u(z)$. En un subespacio de 2×2 se obtiene la representación de la matriz H ,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \begin{bmatrix} H_{11}^{(n)} & \hbar G(z) \\ \hbar G(z) & H_{22}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

identificamos

$$V(z) = \begin{bmatrix} H_{11}^{(n)} & \hbar G(z) \\ \hbar G(z) & H_{22}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

como la parte potencial.

Es muy importante resaltar que el Hamiltoniano de JC no mezcla subespacios con diferente valor de n y más adelante no habrá necesidad de escribirla en la notación. Los estados $|\Gamma_n^\pm(\theta)\rangle$ pueden elegirse de diferentes formas como veremos en el capítulo siguiente. En la nomenclatura usual, si θ se escoge de tal manera que diagonalice al potencial efectivo $V(z)$, se llamarán a los estados $|\Gamma_n^\pm(\theta(z))\rangle$ estados vestidos (DS).

4.2 Estados Vestidos

Un estado expresado en términos de la base ortonormal (4.19) se ve de la siguiente manera

$$|\Psi_n(z, t)\rangle = \langle z, \Gamma_n^\pm(\theta(z)) | \Psi_n(t) \rangle, \quad (4.24)$$

para el cual, utilizaremos la siguiente expresión para el estado general

$$|\Psi_n(z, t)\rangle = \begin{bmatrix} \psi_n^+(z, t) \\ \psi_n^-(z, t) \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

mientras que el mismo estado, representado en el espacio del momento p , se obtiene a partir de una transformada de Fourier, obteniéndose de la siguiente forma

$$\phi_n^\pm(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^\pm(z, t) e^{-i(p/\hbar)z} dz \quad (4.26)$$

y el estado general en la representación del momento p , queda como

$$|\Phi_n(z, t)\rangle = \begin{bmatrix} \phi_n^+(p, t) \\ \phi_n^-(p, t) \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Considerando el caso en el que no existe acoplamiento entre el átomo y el campo electromagnético, el término de interacción se hace cero y tenemos una matriz diagonal, todas con las siguientes propiedades de densidad de probabilidad

$$P(z, t) = |\psi_n^+(z, t)|^2 + |\psi_n^-(z, t)|^2, \quad (4.28)$$

mientras que en el espacio del momento

$$P(p, t) = |\phi_n^+(p, t)|^2 + |\phi_n^-(p, t)|^2, \quad (4.29)$$

y en ambos casos debe cumplirse

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(p, t) dp = \int_{-\infty}^{\infty} P(z, t) dz = 1 \quad (4.30)$$

lo que muestra la equivalencia de los planteamientos.

Capítulo 5

Aproximación Adiabática

La esencia de la aproximación adiabática proviene del llamado *Teorema Adiabático*, que fue resultado de los estudios de Erhenfest en procesos cuánticos adiabáticos.

Partiendo de un sistema en el cual el Hamiltoniano inicial H_i cambia gradualmente hasta llegar a un Hamiltoniano final H_f , el teorema adiabático indica que si la partícula que inicialmente se encontraba en el eigenestado n del Hamiltoniano H_i^n , será llevada al eigenestado n final del Hamiltoniano H_f^n [11, 13].

La aproximación adiabática utilizada en este trabajo está basada en algunos artículos publicados por Jonas Larson en años recientes [4, 5, 6].

Larson plantea un Hamiltoniano diagonal en la base de los estados vestidos obteniendo un término adiabático y una corrección al operador de momento [6].

En este trabajo, se utilizará únicamente el término adiabático del Hamiltoniano y se considerarán los límites en los cuales dicha aproximación es válida.

5.1. Aproximación Adiabática Aplicada Sobre el Hamiltoniano de JC

El sistema de nuestro interés está descrito por el estado $|\psi\rangle$, que al interactuar con radiación electromagnética sufre un desdoblamiento de los eigenvalores del Hamiltoniano, el estado pasa de $|\psi(z, t)\rangle \rightarrow |\Psi(z, t)\rangle$.

La ecuación de Schrödinger (5.1) se escribe de manera matricial como sigue

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{bmatrix} = \frac{p^2}{2m} \begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_+ & G \\ G & \varepsilon_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Por simplicidad, se ha modificado la notación y se han renombrado los términos $H_{11}^{(n)} = \varepsilon_+$ y $H_{22}^{(n)} = \varepsilon_-$ además se considerará implícito a partir de este punto que $G = G(z)$.

Una vez aplicado el Hamiltoniano H , nos interesará expresarlo en la base de los estados vestidos de tal forma que en esa base, la parte potencial $V(z)$ sea un término diagonal.

Para diagonalizar la expresión del potencial, se realiza un cambio de base a la de los estados vestidos, por lo que es necesario introducir una transformación unitaria

5.1 Aproximación Adiabática Aplicada Sobre el Hamiltoniano de JC

$$U = \begin{bmatrix} \cos \theta(z) & \text{sen } \theta(z) \\ -\text{sen } \theta(z) & \cos \theta(z) \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Una vez determinada la transformación unitaria, se aplica sobre el Hamiltoniano y se obtiene $\hat{H} = UHU^\dagger$, que de manera explícita se escribe como

$$\hat{H} = UKU^\dagger + UVU^\dagger \quad (5.3)$$

donde $K = p^2/2m$ y al cambiar de base se obtiene $UKU^\dagger = K + H_{corr}$, con

$$H_{corr} = \frac{\hbar^2}{2m} \begin{bmatrix} \left(\frac{d\theta(z)}{dz}\right)^2 & 2i \left(\frac{d\theta(z)}{dz}\right) p + \frac{d^2\theta(z)}{dz^2} \\ -2i \left(\frac{d\theta(z)}{dz}\right) p - \frac{d^2\theta(z)}{dz^2} & \left(\frac{d\theta(z)}{dz}\right)^2 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

y calculando la derivada, obtenemos

$$\frac{d\theta(z)}{dz} = \frac{\delta}{\Omega(z)^2} \frac{dG(z)}{dz}. \quad (5.5)$$

El cambio de base para la parte potencial $V(z)$ deberá cumplir con algunas características; la principal es que los términos fuera de la diagonal sean cero

$$UVU^\dagger = W = \begin{bmatrix} \Delta_+ & 0 \\ 0 & \Delta_- \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

donde llamaremos a Δ los términos de la diagonal. El Hamiltoniano transformado se separará en una parte adiabática y una corrección; explícitamente lo obtenemos como

$$\hat{H} = H_{ad} + H_{corr}. \quad (5.7)$$

Obtenemos la expresión completa para la matriz transformada W que está definida como

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\hbar\delta}{2} \cos 2\theta + \hbar G \text{sen } 2\theta & \hbar G \cos 2\theta - \frac{\hbar\delta}{2} \text{sen } 2\theta \\ \hbar G \cos 2\theta - \frac{\hbar\delta}{2} \text{sen } 2\theta & -\frac{\hbar\delta}{2} \cos 2\theta - \hbar G \text{sen } 2\theta \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Habiendo obtenido de manera explícita cada término de la matriz, imponemos la condición necesaria para diagonalizar la matriz, que es

$$\frac{\delta}{2} \text{sen } 2\theta - G \cos 2\theta = 0. \quad (5.9)$$

A partir de la expresión anterior se obtiene la dependencia de $\theta(z)$

$$\tan 2\theta(z) = \frac{2G(z)}{\delta}, \quad (5.10)$$

y calculamos la expresión para

$$\sin 2\theta(z) = \frac{2G(z)}{\Omega(z)}, \quad \cos 2\theta(z) = \frac{\delta}{\Omega(z)}, \quad (5.11)$$

donde $\Omega(z) = \sqrt{4G(z)^2 + \delta^2}$ es la frecuencia de Rabi generalizada.

Escribimos el potencial adiabático en términos de z y no de θ , y obtenemos

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2}\Omega(z) & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2}\Omega(z) \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

De esta manera, el Hamiltoniano adiabático está determinado por

$$H_{ad} = \frac{p^2}{2m} + \begin{bmatrix} \Delta_+ & 0 \\ 0 & \Delta_- \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_+ &= \frac{\hbar\Omega(z)}{2}, \\ \Delta_- &= -\frac{\hbar\Omega(z)}{2}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Calcular la magnitud del término de corrección nos muestra que tan factible es realizar la aproximación adiabática.

5.2. Adiabaticidad

Se observa que el estado de la función de onda está descrito por las variables \pm , z , t , n y θ . Un estado completo del sistema está denotado como $|\psi_{n,\theta}^\pm(z,t)\rangle$, tiene la siguiente dependencia temporal

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_n(z,t)\rangle = \hat{H} |\Psi_n(z,t)\rangle, \quad (5.15)$$

que al descomponerlo, obtenemos

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_n(z,t)\rangle = (H_{ad} + H_{corr}) |\Psi_n(z,t)\rangle, \quad (5.16)$$

5.2 Adiabaticidad

y al realizar la aproximación adiabática

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_n(z, t)\rangle \approx H_{ad} |\Psi_n(z, t)\rangle, \quad (5.17)$$

obtenemos las ecuaciones que deberá cumplir la función de onda. Desglosamos el sistema y en forma matricial la ecuación de Schrödinger se lee como sigue

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_n^+ \\ \psi_n^- \end{bmatrix} \approx \frac{p^2}{2m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n^+ \\ \psi_n^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_+ & 0 \\ 0 & \Delta_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n^+ \\ \psi_n^- \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

obteniendo

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_n(z, t)\rangle \approx \left[\frac{p^2}{2m} \pm \frac{\hbar\Omega(z)}{2} \right] |\Psi_n(z, t)\rangle. \quad (5.19)$$

Una vez explicada la manera en que se obtiene la aproximación adiabática, es necesario describir las condiciones bajo las cuales dicha aproximación es válida.

La aproximación adiabática funciona cuando el término H_{ad} domina la evolución frente a H_{corr} . Esto ocurre cuando la diferencia entre los eigenvalores adiabáticos es mucho más grande que el término fuera de la diagonal. De esta manera, llamamos a la siguiente expresión la condición de adiabaticidad

$$|\langle \Delta_+ \rangle_i - \langle \Delta_- \rangle_i| \gg \frac{1}{2m} \left| \left\langle 2i \left(\frac{d\theta}{dz} \right) p \right\rangle_i + \left\langle \frac{d^2\theta}{dz^2} \right\rangle_i \right|, \quad (5.20)$$

que nos permitirá determinar cuándo la aproximación adiabática es suficientemente válida. En los casos específicos que se manejarán en este trabajo, se cumple debido a que el término $\Omega(z) \gg \delta$, que es la proporción que se obtiene al realizar los cálculos.

La condición de adiabaticidad debe satisfacerse para que nuestra aproximación sea considerada como válida. Se determinará si las energías del átomo que nos interesan cumplen dicha condición.

Existen varios rangos de energías para los cuales se pueden utilizar diferentes descripciones. El régimen en el cual está inmersa la interacción está determinado por la comparación entre la energía cinética $p^2/2m$ en relación con la energía del potencial $\hbar\sqrt{n+1}g_0$, existiendo tres casos generales:

- Régimen de Rabi: $p^2/2m \gg \hbar\sqrt{n+1}g_0$
- Régimen intermedio: $p^2/2m \approx \hbar\sqrt{n+1}g_0$
- Régimen mazer: $p^2/2m \ll \hbar\sqrt{n+1}g_0$

Nuestro estudio deberá cumplir con los parámetros del régimen mazer, pues es el rango en el que los efectos cuánticos son notorios.

Capítulo 6

Ecuación de Schrödinger Propuesta Bajo la Aproximación Adiabática

En el capítulo anterior se estableció el ket $|\Psi_n(z, t)\rangle$ como el estado general del átomo durante la interacción con el campo electromagnético de una cavidad, sin proponer una expresión explícita para la función de onda. En este capítulo se propone una función de onda que toma el papel de solución aproximada a la ecuación de Schrödinger bajo el régimen adiabático.

La propuesta de solución a la ecuación de Schrödinger debe describir la dinámica del paquete de onda de un átomo que cruzará una cavidad que contiene un modo de radiación. Sin embargo, la evolución temporal de la función de onda no se determinará a partir del operador de evolución temporal \mathcal{T} , sino que se propondrá un paquete gaussiano con parámetros temporales que se determinarán numéricamente mas adelante.

La evolución temporal de cada una de las funciones se determinará a través de teoremas fundamentales como el de Erhenfest y el del Virial Cuántico, que contemplan la dependencia temporal de cada uno de los valores esperados de los operadores involucrados.

Las propuestas hechas en este capítulo son específicamente enfocadas para resolver el modelo que describe al sistema planteado a inicios de la tesis, pero sin duda pueden aplicarse a diferentes sistemas con características semejantes.

6.1. Solución a la Ecuación de Schrödinger Propuesta con Perfil Gaussiano

La función de onda que se propone como solución aproximada a la ecuación de Schrödinger presenta un perfil gaussiano con fase compleja y consta de 5 funciones dependientes del tiempo que toman el papel de parámetros. Cada una de estas funciones necesita de una dependencia temporal explícita y será determinada de manera numérica, la propuesta debe considerar la condición de normalización.

La función de onda propuesta como solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo contiene cinco funciones temporales $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$, $\gamma_{\pm}(t)$, $\sigma_{\pm}(t)$ y $z_{0\pm}(t)$, la composición de dichas funciones provee una función con perfil gaussiano, dicha función es

6.1 Solución a la Ecuación de Schrödinger Propuesta con Perfil Gaussiano

$$|\Psi_n(z, t)\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{8\pi\sigma_{\pm}(t)^2}} e^{i(\alpha_{\pm}(t)+\beta_{\pm}(t)z+\gamma_{\pm}(t)z^2)} e^{-[(z-z_{0\pm}(t))/(4\sigma_{\pm}(t))]^2}, \quad (6.1)$$

la dependencia explícita de cada una de las funciones será determinada de manera numérica en el capítulo 8.

Considerando la ecuación de Schrödinger, aplicamos el Hamiltoniano adiabático a la función de onda propuesta

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_n(z, t)\rangle \approx H_{ad} |\Psi_n(z, t)\rangle, \quad (6.2)$$

que de manera explícita se escribe como

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_n(z, t)\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \pm \frac{\hbar\Omega(z)}{2} \right] |\Psi_n(z, t)\rangle, \quad (6.3)$$

se puede observar que existe la necesidad de calcular la derivada temporal de $|\Psi\rangle$, la cual explícitamente es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_n(z, t)\rangle = & \left[\frac{\dot{\sigma}_{\pm}(t)}{\sigma_{\pm}(t)} \left(\frac{(z-z_{0\pm}(t))^2}{8\sigma_{\pm}(t)^2} - \frac{1}{2} \right) + \dot{z}_{0\pm}(t) \left(\frac{z-z_{0\pm}(t)}{8\sigma_{\pm}(t)^2} \right) \right] |\Psi_n(z, t)\rangle \\ & + i \left[\left(\dot{\alpha}_{\pm}(t) + \dot{\beta}_{\pm}(t)z + \dot{\gamma}_{\pm}(t)z^2 \right) \right] |\Psi_n(z, t)\rangle, \end{aligned} \quad (6.4)$$

mientras que el cálculo de la derivada parcial con respecto a z es

$$\frac{\partial}{\partial z} |\Psi_n(z, t)\rangle = \left[i(\beta_{\pm}(t) + 2\gamma_{\pm}(t)z) - \frac{z - z_{0\pm}(t)}{8\sigma_{\pm}(t)^2} \right] |\Psi_n(z, t)\rangle, \quad (6.5)$$

por último, el cálculo de la segunda derivada con respecto a z queda como

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} |\Psi_n(z, t)\rangle = \left[2i\gamma_{\pm}(t) - \frac{1}{8\sigma_{\pm}(t)^2} + \left(i(\beta_{\pm}(t) + 2\gamma_{\pm}(t)z) - \frac{1}{8\sigma_{\pm}(t)^2} \right)^2 \right] |\Psi_n(z, t)\rangle, \quad (6.6)$$

habiendo calculado cada uno de los términos, las ecuaciones (6.4) y (6.6) se sustituyen en (6.3) para obtener la dependencia temporal de H_{ad}

$$\begin{aligned} i\hbar \left[\frac{\dot{\sigma}_{\pm}(t)}{\sigma_{\pm}(t)} \left(\frac{(z-z_{0\pm}(t))^2}{8\sigma_{\pm}(t)^2} - \frac{1}{2} \right) + \dot{z}_{0\pm}(t) \left(\frac{z-z_{0\pm}(t)}{8\sigma_{\pm}(t)^2} \right) + i \left(\dot{\alpha}_{\pm}(t) + \dot{\beta}_{\pm}(t)z + \dot{\gamma}_{\pm}(t)z^2 \right) \right] |\Psi_n(z, t)\rangle \approx \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[2i\gamma_{\pm}(t) - \frac{1}{8\sigma_{\pm}(t)^2} + \left(i(\beta_{\pm}(t) + 2\gamma_{\pm}(t)z) - \frac{1}{8\sigma_{\pm}(t)^2} \right)^2 \right] |\Psi_n(z, t)\rangle \pm \frac{\hbar\Omega(z)}{2} |\Psi_n(z, t)\rangle. \end{aligned} \quad (6.7)$$

6.2 Evolución Temporal de las Funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$, $\gamma_{\pm}(t)$, $\sigma_{\pm}(t)$ y $z_{0\pm}(t)$

La ecuación de Schrödinger nos proveerá de toda la información necesaria para describir el sistema completo, una vez que se haya determinado la dependencia temporal de cada parámetro.

La corrección introducida a causa de la aproximación adiabática proviene de la transformación de la energía cinética debido a la diagonalización del operador dependiente de la posición.

6.2. Evolución Temporal de las Funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$, $\gamma_{\pm}(t)$, $\sigma_{\pm}(t)$ y $z_{0\pm}(t)$

Las funciones paramétricas dependientes del tiempo involucradas en la función de onda están relacionadas entre sí. Se planteará un sistema de ecuaciones diferenciales para determinar la manera en que se relacionan.

Será de gran utilidad calcular los valores esperados de algunos operadores, debido a que se elimina la dependencia espacial y podremos enfocarnos sólo en la dependencia temporal, que por ahora es en la que está centrado nuestro interés.

6.2.1. Valores Esperados

Nos interesa conocer de manera explícita la forma en que se comportan las funciones dependientes del tiempo que se involucran en la descripción del estado del sistema, para lo cual se calcula el valor esperado de algunos operadores que sean combinación de z y de p , en las cuales, por simplicidad introducimos la siguiente notación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \mathcal{G} \Psi dz = \langle \Psi | \mathcal{G} | \Psi \rangle = \langle \mathcal{G} \rangle ; \quad (6.8)$$

los valores esperados proveerán información a cada tiempo t .

El primer valor esperado que se calcula es el del operador de posición z , que de antemano conocíamos

$$\langle z \rangle = z_{0\pm}(t). \quad (6.9)$$

ya que así se propuso inicialmente.

Un segundo operador es z^2 el valor esperado es

$$\langle z^2 \rangle = z_{0\pm}^2(t) + 4\sigma_{\pm}^2(t) \quad (6.10)$$

el operador de momento cuyo valor esperado es

$$\langle p \rangle = \hbar\beta_{\pm}(t) + 2\hbar\gamma_{\pm}(t)z_{0\pm}(t), \quad (6.11)$$

y por último,

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{16\sigma_{\pm}^2(t)} + \hbar^2 (16\gamma_{\pm}^2(t)\sigma_{\pm}^2(t) + [\beta_{\pm}(t) + 2\gamma_{\pm}(t)z_{0\pm}(t)]^2). \quad (6.12)$$

6.2 Evolución Temporal de las Funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$, $\gamma_{\pm}(t)$, $\sigma_{\pm}(t)$ y $z_{0\pm}(t)$

Una vez determinados los valores esperados de algunos operadores, se aplicará el teorema de Ehrenfest (Apéndice B) para obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales que describirá la dinámica de la función de onda.

6.2.2. Ecuación Diferencial de la Función $z_{0\pm}(t)$

En esta sección se determina la dependencia temporal de la función $z_{0\pm}(t)$ se obtendrá una ecuación diferencial que la relacione con el resto de las variables. La búsqueda de la ecuación diferencial se obtiene a partir de la expresión dada por el teorema de Ehrenfest

$$\frac{d\langle z \rangle}{dt} \approx \frac{i}{\hbar} \langle [H_{ad}, z] \rangle + \left\langle \frac{\partial z}{\partial t} \right\rangle. \quad (6.13)$$

El término de corrección es muy pequeño, por lo tanto, puede ser omitido. Establecemos esta igualdad siempre tomando en cuenta que se trata de una aproximación

$$\frac{d\langle z \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H_{ad}, z] \rangle + \left\langle \frac{\partial z}{\partial t} \right\rangle. \quad (6.14)$$

Para el lado izquierdo utilizamos el valor que previamente se calculó $\langle z \rangle = z_{0\pm}(t)$, y para el lado derecho, se observa que z es una variable independiente del tiempo, por lo que $\left\langle \frac{\partial z}{\partial t} \right\rangle = 0$, resultando la ecuación

$$\frac{dz_{0\pm}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H_{ad}, z] \rangle, \quad (6.15)$$

que fácilmente se puede expresar como sigue

$$\frac{dz_{0\pm}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\frac{p^2}{2m} + W(z), z \right] \right\rangle. \quad (6.16)$$

El operador z conmuta con cualquier función de z , entonces $[W(z), z] = 0$, por lo ahora sólo hace falta calcular $[p^2, z]$, que de acuerdo con las reglas de conmutación canónica $[p^2, z] = -2i\hbar p$, resultando de esta ecuación

$$\frac{dz_{0\pm}(t)}{dt} = \left\langle \frac{p}{m} \right\rangle. \quad (6.17)$$

Observamos que existe una relación entre la posición $z_{0\pm}(t)$ y el momento calculado en la ecuación (6.11), obteniéndose la primera ecuación diferencial

$$\dot{z}_{0\pm}(t) = \frac{\hbar}{m} \beta_{\pm}(t) + \frac{2\hbar}{m} \gamma_{\pm}(t) z_{0\pm}(t), \quad (6.18)$$

a partir de los cual podemos interpretar la función del número de onda como

$$k_{\pm}(t) = \beta_{\pm}(t) + 2\gamma_{\pm}(t) z_{0\pm}(t), \quad (6.19)$$

que describirá la velocidad del paquete de onda, con la relación $v = \hbar k_{\pm}(t)/m$.

6.2.3. Dependencia Temporal de $\langle z^2 \rangle$

Como parte del sistema de ecuaciones en construcción, buscamos la obtención de una ecuación para $\sigma_{\pm}(t)$. Calculamos de una forma alternativa el siguiente término bajo la aproximación adiabática,

$$\frac{d\langle z^2 \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H_{ad}, z^2] \rangle + \left\langle \frac{\partial z^2}{\partial t} \right\rangle, \quad (6.20)$$

debido a que está dentro de la aproximación adiabática, utilizaremos igualdades a partir de este punto. Se puede observar que el operador z^2 es independiente del tiempo y por la ecuación (6.10) se obtiene la siguiente

$$\frac{dz_{0\pm}(t)^2}{dt} + 4\frac{d\sigma_{\pm}(t)^2}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\frac{p^2}{2m} + W(z), z^2 \right] \right\rangle, \quad (6.21)$$

para la cual, es necesario calcular el término correspondiente al conmutador, al desarrollarlo se obtiene

$$\frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\frac{p^2}{2m}, z^2 \right] \right\rangle = \frac{1}{m} \langle \{p, z\} \rangle, \quad (6.22)$$

donde $\{p, z\} = pz + zp$, es el anticonmutador de p y z , y utilizandolo en la expresión anterior obtenemos

$$4\frac{d\sigma_{\pm}(t)^2}{dt} \approx \frac{1}{m} \langle \{p, z\} \rangle - \frac{dz_{0\pm}(t)^2}{dt}, \quad (6.23)$$

el cálculo del anticonmutador nos da la siguiente expresión

$$\langle \{p, z\} \rangle = 2\hbar z_{0\pm}(t)\beta_{\pm}(t) + 4\hbar\gamma_{\pm}(t) (4\sigma_{\pm}^2(t) + z_{0\pm}^2(t)), \quad (6.24)$$

y al sustituir los componentes de la ecuación (6.23) resulta

$$\frac{d(\sigma_{\pm}(t))^2}{dt} = \frac{\hbar}{2m} z_{0\pm}(t)\beta_{\pm}(t) + \frac{\hbar}{m} \gamma_{\pm}(t) (4\sigma_{\pm}^2(t) + z_{0\pm}^2(t)) - \frac{1}{2} z_{0\pm}(t) \frac{dz_{0\pm}(t)}{dt}, \quad (6.25)$$

finalmente, al utilizar la ecuación (6.18) se obtiene la segunda ecuación del sistema que se está construyendo,

$$\dot{\sigma}_{\pm}^2(t) = \frac{4\hbar}{m} \gamma_{\pm}(t) \sigma_{\pm}^2(t). \quad (6.26)$$

6.2 Evolución Temporal de las Funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$, $\gamma_{\pm}(t)$, $\sigma_{\pm}(t)$ y $z_{0\pm}(t)$

6.2.4. Dependencia Temporal de $\langle p \rangle$

De acuerdo con el teorema de Ehrenfest, la dependencia temporal del operador de momento está dada por

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H_{ad}, p] \rangle + \left\langle \frac{\partial p}{\partial t} \right\rangle, \quad (6.27)$$

debido a que el operador $p \neq p(t)$ y a las reglas de conmutación canónicas, la ecuación anterior se simplifica de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = - \left\langle \frac{dW(z)}{dz} \right\rangle. \quad (6.28)$$

Una vez establecida la relación anterior, el potencial puede ser escrito en forma matricial como se muestra a continuación

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \left\langle \frac{d}{dz} \Omega(z) \right\rangle & 0 \\ 0 & \left\langle \frac{d}{dz} \Omega(z) \right\rangle \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

de aquí se obtiene la tercera ecuación diferencial para el sistema que estamos construyendo,

$$\hbar \dot{\beta}_{\pm}(t) + 2\hbar \dot{\gamma}_{\pm}(t) z_{0\pm}(t) = - \left\langle \frac{\partial W(z)}{\partial z} \right\rangle - \frac{2\hbar^2}{m} (\beta_{\pm}(t) \gamma_{\pm}(t) + 2\gamma_{\pm}^2(t) z_{0\pm}(t)). \quad (6.30)$$

El momento del átomo es único, pero debido a que nuestro estado es una combinación lineal de estados, será conveniente definirlo para cada uno de ellos de la siguiente manera

$$\langle p_{\pm} \rangle = \pm \langle p \rangle = \hbar k_{\pm}(t), \quad (6.31)$$

ya que nos ayudará a referirnos específicamente al estado que se esté tratando.

6.2.5. Dependencia Temporal de $\langle zp \rangle$

En esta ocasión se utiliza un caso que resulta ser particular del Teorema de Ehrenfest, el llamado *Teorema del Virial Cuántico* (TVC) (Apéndice B).

El TVC establece que

$$\frac{d}{dt} \langle zp \rangle = \left\langle \frac{p^2}{m} \right\rangle - \left\langle z \frac{\partial W(z)}{\partial z} \right\rangle \quad (6.32)$$

para poder utilizarlo, es necesario calcular el siguiente término

$$\langle zp \rangle = \frac{i\hbar}{2} + \hbar\beta_{\pm}(t)z_{0\pm}(t) + 2\hbar\gamma_{\pm}(t) (z_{0\pm}^2(t) + 4\sigma_{\pm}^2(t)), \quad (6.33)$$

ahora, derivando y sustituyendo (6.12) y utilizando las ecuaciones que se han establecido previamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \hbar\dot{\beta}_{\pm}(t)z_{0\pm}(t) + \hbar\dot{\gamma}_{\pm}(t) (z_{0\pm}^2(t) + 4\sigma_{\pm}^2(t)) = & -\frac{4\hbar^2}{m}\gamma_{\pm}^2(t) (z_{0\pm}^2(t) + 4\sigma_{\pm}^2(t)) - \left\langle z \frac{\partial W(z)}{\partial z} \right\rangle \\ & - \frac{\hbar^2}{16m\sigma_{\pm}^2(t)} - \frac{2\hbar^2}{m}\beta_{\pm}(t)\gamma_{\pm}(t)z_{0\pm}(t). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Esta es la cuarta ecuación diferencial.

6.2.6. Dependencia Temporal del Hamiltoniano

Para obtener la última ecuación diferencial, es necesario calcular el valor esperado de la energía, dicho de otra manera, se calcula $\langle H_{ad} \rangle$

$$i\hbar \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \langle H_{ad} \rangle \quad (6.35)$$

donde se utilizan (6.18) y (6.20) para obtener la quinta ecuación del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{\pm}(t) + \dot{\beta}_{\pm}(t)z_{0\pm}(t) + \dot{\gamma}_{\pm}(t) (4\sigma_{\pm}^2(t) + z_{0\pm}^2(t)) = & -\frac{\hbar}{32m\sigma_{\pm}^2(t)} - \frac{\hbar}{m}\beta_{\pm}\gamma_{\pm}(t)z_{0\pm}(t) + \langle W(z) \rangle \\ & - \frac{2\hbar}{m}\gamma_{\pm}^2(t) (4\sigma_{\pm}^2(t) + z_{0\pm}^2(t)). \end{aligned} \quad (6.36)$$

6.3. Sistema de Ecuaciones Diferenciales

Una vez determinado el conjunto de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, podemos plantear el sistema de ecuaciones diferenciales, que resultó de planteamientos verdaderos para cada tiempo t . Este planteamiento genera un camino alternativo al seguido por el operador de evolución, pero de acuerdo con la formulación son equivalentes.

6.3 Sistema de Ecuaciones Diferenciales

El sistema de ecuaciones obtenido es el siguiente

$$\dot{\sigma}_{\pm}^2(t) = \frac{4\hbar}{m}\gamma_{\pm}(t)\sigma_{\pm}^2(t),$$

$$\dot{z}_{0\pm}(t) = \frac{\hbar}{m}\beta_{\pm}(t) + \frac{2\hbar}{m}\gamma_{\pm}(t)z_{0\pm}(t),$$

(6.37)

$$\dot{\gamma}_{\pm}(t) = \frac{\hbar}{8m16\sigma_{\pm}^4(t)} - \frac{2\hbar}{m}\gamma_{\pm}^2(t) \pm \frac{z_{0\pm}(t)}{16\sigma_{\pm}^2(t)} \left\langle \frac{\partial\Omega(z)}{\partial z} \right\rangle \mp \frac{1}{16\sigma_{\pm}^2(t)} \left\langle z \frac{\partial\Omega(z)}{\partial z} \right\rangle,$$

$$\dot{\beta}_{\pm}(t) = -\frac{\hbar}{8^2m} \frac{z_{0\pm}(t)}{\sigma_{\pm}^4(t)} - \frac{2\hbar}{m}\beta_{\pm}(t)\gamma_{\pm}(t) \mp \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z_{0\pm}^2(t)}{4\sigma_{\pm}^2(t)} \right) \left\langle \frac{\partial\Omega(z)}{\partial z} \right\rangle \pm \frac{z_{0\pm}(t)}{8\sigma_{\pm}^2(t)} \left\langle z \frac{\partial\Omega(z)}{\partial z} \right\rangle,$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{\pm}(t) = \frac{\hbar}{m}\beta_{\pm}(t)\gamma_{\pm}(t)z_{0\pm}(t) - \frac{3\hbar}{8m} \frac{z_{0\pm}^2(t)}{16\sigma_{\pm}^4(t)} - \frac{\hbar}{16m\sigma_{\pm}^2(t)} \pm \frac{1}{2} \langle \Omega(z) \rangle \pm \frac{z_{0\pm}(t)}{4} \left(1 + \frac{z_{0\pm}^2(t)}{4\sigma_{\pm}^2(t)} \right) \left\langle \frac{\partial\Omega(z)}{\partial z} \right\rangle \\ \pm \frac{1}{4} \left(1 - \frac{z_{0\pm}^2(t)}{4\sigma_{\pm}^2(t)} \right) \left\langle z \frac{\partial\Omega(z)}{\partial z} \right\rangle. \end{aligned}$$

Principio de Incertidumbre de Heisenberg

El sistema planteado debe cumplir con el *Principio de Incertidumbre de Heisenberg*. Es necesario determinar cuáles son los parámetros que debe cumplir nuestro sistema de ecuaciones para posteriormente corroborar si el planteamiento es físicamente correcto

$$(\Delta p)^2 (\Delta z)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (6.38)$$

Previamente calculamos la variación de la posición, obteniendo

$$(\Delta z)^2 = 4\sigma_{\pm}^2(t), \quad (6.39)$$

mientras que la variación del momento es

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{16\sigma_{\pm}^2(t)} + 16\hbar^2\gamma_{\pm}^2(t)\sigma_{\pm}^2(t). \quad (6.40)$$

La relación resultante es

$$\frac{\hbar^2}{4} + 64\hbar^2\gamma_{\pm}^2(t)\sigma_{\pm}^4(t) \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (6.41)$$

y debido a que $\sigma_{\pm}^2(t) > 0$ y $\gamma_{\pm}(t) \in \mathbb{R}$ entonces

$$\gamma_{\pm}^2(t) \geq 0 \quad \forall t, \quad (6.42)$$

y por lo tanto el planteamiento cumple con el principio de incertidumbre.

Capítulo 7

Modo del Campo en la Cavidad

El sistema que se desea estudiar consta de un átomo y radiación electromagnética en una cavidad. A diferencia del caso libre, la cavidad limita los modos del campo; la interacción con los estados internos del átomo selecciona un subconjunto de estos modos como los más relevantes para describir al sistema. Los modos del campo pueden representarse por funciones que describen al potencial electromagnético dentro de la cavidad.

La solución propuesta a la ecuación de Schrödinger que describe la evolución del centro de masa atómico depende de la función del modo del campo en la cavidad, del número de fotones, de la intensidad de acoplamiento entre la radiación electromagnética y el átomo, y del desintonamiento entre la frecuencia de transición del átomo y la frecuencia del modo de la cavidad.

7.1. Potenciales

La función del modo de la radiación electromagnética puede variar de acuerdo con la longitud de la cavidad, el material y el tipo de arreglo. Teóricamente se puede proponer cualquier tipo de potencial, aunque experimentalmente la radiación sólo presenta ciertos tipos de modos en una cavidad. Para nuestro estudio se propondrán los siguientes potenciales:

- Potencial mesa. Matemáticamente está descrito por la función unitaria de Heaviside, cuyas propiedades están descritas en el apéndice A.1. Se utiliza el caso simétrico de dicha función

$$u(z) = \text{H}(z) - \text{H}(z - L). \quad (7.1)$$

Este potencial presenta características interesantes en las fronteras, dependiendo del estado interno del sistema.

- Potencial Gaussiano. Este potencial está presente en todo el espacio, pero a distancias donde $z \rightarrow \pm\infty$ la intensidad es muy baja. Incluso experimentalmente se podría definir una frontera donde la resolución de los instrumentos de medición fuera incapaz de medir la intensidad del campo. El caso con potencial gaussiano es un caso que puede

7.1 Potenciales

manejarse bien numéricamente debido a la continuidad de la función y de su derivada. La expresión matemática para el potencial gaussiano es

$$u(z) = e^{-(z^2/w_0^2)}.$$

Este caso no es muy lejano a un caso experimental real, sobre todo en el grupo de Rempe, donde los arreglos de las cavidades facilitan esta configuración.

Para poder hacer una comparación entre los resultados que se obtengan para cada uno de los potenciales, es necesario visualizar las funciones que representa cada uno y procurar que el volumen efectivo de cada modo sea equivalente. Nuestro problema está restringido al movimiento del átomo a lo largo de una sola dirección por lo que podemos calcular el "área" efectiva del modo. A continuación se muestran los dos potenciales con iguales áreas bajo la curva. El área efectiva del potencial mesa es

$$A_m = g_0 \int_{-\infty}^{\infty} u(z) dz = g_0 L \quad (7.2)$$

mientras que para el potencial gaussiano el área efectiva es

$$A_g = (4/\sqrt{\pi})g_0 \int_{-\infty}^{\infty} u(z) dz = g_0 L. \quad (7.3)$$

Los potenciales se muestran en la figura 7.1 y se utilizará esta diferencia entre dichos potenciales, ya que el el volumen efectivo del modo es el parámetro que determina la intensidad de la interacción.

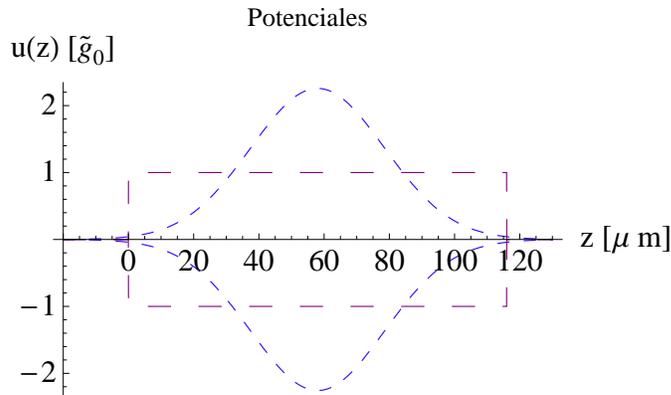


Figura 7.1: Gráficas de los potenciales a comparar. Las alturas radican en la diferencia de regiones efectivas de interacción, en esta grafica se muestran dos potenciales con igual área bajo la curva .

El caso de potencial nulo se estudiará para compararlo con resultados analíticos es $u(z) = 0$, que nos lleva al caso ya conocido como partícula libre.

De acuerdo al sistema de ecuaciones diferenciales obtenido en el capítulo anterior, es necesario calcular el valor esperado del potencial presente en la cavidad; si $\Omega(z) = \sqrt{4G(z)^2 + \delta^2} = \sqrt{4(n+1)g_0^2 u(z)^2 + \delta^2}$, entonces el valor esperado queda como

$$\langle \Omega(z) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^\pm(z, t)^* \Omega(z) \psi_n^\pm(z, t) dz. \quad (7.4)$$

La expresión para la integral anterior dependerá de la forma del potencial, se ha hecho hasta el momento un tratamiento teórico general. Un término que aparece con regularidad es el término $\sqrt{(n+1)g_0^2}$, por lo que es conveniente definirlo como $\tilde{g}_0 = \sqrt{(n+1)g_0}$ adicionalmente necesitamos calcular la derivada

$$\frac{d\Omega(z)}{dz} = \frac{4\tilde{g}_0^2 u(z)}{\sqrt{4\tilde{g}_0^2 u(z)^2 + \delta^2}} \frac{du(z)}{dz}, \quad (7.5)$$

que se utilizará posteriormente en las ecuaciones obtenidas en capítulos anteriores, junto con un término adicional que se involucra en las ecuaciones

$$z \frac{d\Omega(z)}{dz} = \frac{4\tilde{g}_0^2 z u(z)}{\sqrt{4\tilde{g}_0^2 u(z)^2 + \delta^2}} \frac{du(z)}{dz}. \quad (7.6)$$

Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

El sistema de ecuaciones que será resuelto particularmente para cada potencial se presenta nuevamente a continuación, se presentó con anterioridad en la sección 6.3

$$\dot{\sigma}_\pm^2(t) = \frac{4\hbar}{m} \gamma_\pm(t) \sigma_\pm^2(t),$$

$$\dot{z}_{0\pm}(t) = \frac{\hbar}{m} \beta_\pm(t) + \frac{2\hbar}{m} \gamma_\pm(t) z_{0\pm}(t),$$

(7.7)

$$\dot{\gamma}_\pm(t) = \frac{\hbar}{8m16\sigma_\pm^4(t)} - \frac{2\hbar}{m} \gamma_\pm^2(t) \pm \frac{z_{0\pm}(t)}{16\sigma_\pm^2(t)} \left\langle \frac{\partial \Omega(z)}{\partial z} \right\rangle \mp \frac{1}{16\sigma_\pm^2(t)} \left\langle z \frac{\partial \Omega(z)}{\partial z} \right\rangle,$$

$$\dot{\beta}_\pm(t) = -\frac{\hbar}{8^2 m} \frac{z_{0\pm}(t)}{\sigma_\pm^4(t)} - \frac{2\hbar}{m} \beta_\pm(t) \gamma_\pm(t) \mp \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z_{0\pm}^2(t)}{4\sigma_\pm^2(t)} \right) \left\langle \frac{\partial \Omega(z)}{\partial z} \right\rangle \pm \frac{z_{0\pm}(t)}{8\sigma_\pm^2(t)} \left\langle z \frac{\partial \Omega(z)}{\partial z} \right\rangle,$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_\pm(t) = \frac{\hbar}{m} \beta_\pm(t) \gamma_\pm(t) z_{0\pm}(t) - \frac{3\hbar}{8m} \frac{z_{0\pm}^2(t)}{16\sigma_\pm^4(t)} - \frac{\hbar}{16m\sigma_\pm^2(t)} \pm \frac{1}{2} \langle \Omega(z) \rangle \pm \frac{z_{0\pm}(t)}{4} \left(1 + \frac{z_{0\pm}^2(t)}{4\sigma_\pm^2(t)} \right) \left\langle \frac{\partial \Omega(z)}{\partial z} \right\rangle \\ \pm \frac{1}{4} \left(1 - \frac{z_{0\pm}^2(t)}{4\sigma_\pm^2(t)} \right) \left\langle z \frac{\partial \Omega(z)}{\partial z} \right\rangle. \end{aligned}$$

7.2. Potencial Nulo

Comenzaremos planteando el sistema en el caso mas simple: el potencial nulo $u(z) = 0$. La simplificación del sistema completo a causa de este caso particular, da como resultado el caso de partícula libre, por lo que nuestra propuesta debe reproducir los resultados analíticos que ya se han determinado en varios textos para una partícula libre cuyo estado inicial es un paquete de onda gaussiano.

La posibilidad de simplificar el modelo nos permite comparar los resultados numéricos que resulten de este planteamiento con las soluciones analíticas ya conocidas, de manera que los resultados obtenidos hasta el momento puedan aceptarse o descartarse si cumplen o no con la descripción del sistema simple.

Debido a que para una partícula libre no hay presencia de potencial externo, no existe acoplamiento de las ecuaciones. Se dice que los eigenvalores de los estados ψ^\pm colapsan a un mismo valor, obteniendo estados simplemente ψ por lo que ambas ecuaciones se reducen a una sola.

7.2.1. Sistema de ecuaciones para el potencial nulo

De acuerdo con el sistema de ecuaciones planteado, desarrollamos el caso particular del potencial nulo $u(z) = 0$, la simplificación en la mayoría de los casos

$$\dot{\sigma}^2(t) = \frac{4\hbar}{m}\gamma(t)\sigma^2(t),$$

$$\dot{z}_0(t) = \frac{\hbar}{m}\beta(t) + \frac{2\hbar}{m}\gamma(t)z_0(t),$$

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{\hbar}{8m16\sigma^4(t)} - \frac{2\hbar}{m}\gamma^2(t), \quad (7.8)$$

$$\dot{\beta}(t) = -\frac{\hbar}{8^2m}\frac{z_0(t)}{\sigma^4(t)} - \frac{2\hbar}{m}\beta(t)\gamma(t),$$

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\hbar}{m}\beta(t)\gamma(t)z_0(t) - \frac{3\hbar}{8m}\frac{z_0^2(t)}{16\sigma^4(t)} - \frac{\hbar}{16m\sigma^2(t)},$$

que será resuelto y se comparará la dependencia temporal obtenida numéricamente con la dependencia temporal obtenida analíticamente.

7.3. Potencial Mesa

El potencial de la función mesa está descrito en la ecuación (7.1). Calcularemos los valores esperados necesarios para posteriormente utilizarlos en los sistemas de ecuaciones (7.7). El primer valor esperado que debemos calcular con este potencial es $\Omega(z)$, que de acuerdo a la definición

$$\langle \Omega(z) \rangle = \int_{-\infty}^0 \psi_n^\pm(z, t)^* \Omega(z) \psi_n^\pm(z, t) dz + \int_0^L \psi_n^\pm(z, t)^* \Omega(z) \psi_n^\pm(z, t) dz + \int_L^\infty \psi_n^\pm(z, t)^* \Omega(z) \psi_n^\pm(z, t) dz, \quad (7.9)$$

para el primer y último término se tiene que $u(z) = 0$, por lo que $\Omega(z) = \delta$ nos quedan las siguientes integrales

$$\delta \int_{-\infty}^0 e^{-2\left(\frac{z-z_\pm(t)}{4\sigma_\pm(t)}\right)^2} dz = \delta \sqrt{2\pi\sigma_\pm^2(t)} \operatorname{erfc}\left(\frac{z_{0\pm}(t)}{2\sqrt{2\sigma_\pm^2(t)}}\right), \quad (7.10)$$

$$\delta \int_L^\infty e^{-2\left(\frac{z-z_\pm(t)}{4\sigma_\pm(t)}\right)^2} dz = \delta \sqrt{2\pi\sigma_\pm^2(t)} \operatorname{erfc}\left(\frac{L-z_{0\pm}(t)}{2\sqrt{2\sigma_\pm^2(t)}}\right).$$

En estas ecuaciones erfc representa al complemento de la función de error, cuyas propiedades básicas se mencionan en el apéndice A.2 junto con las propiedades de la propia función de error erf .

Es importante recordar la expresión para el acoplamiento $G(z) = \tilde{g}_0 u(z)$, donde $\tilde{g}_0 = \sqrt{n+1}g_0$, y para este caso dentro de la cavidad $u(z) = 1$, por lo que el valor $G(z) = \tilde{g}_0$ y a partir de este resultado, obtenemos $\Omega(z) = \sqrt{4\tilde{g}_0^2 + \delta^2}$. De esta manera, se simplifican algunos términos y la integral que se necesita calcular queda como

$$\int_0^L \Omega(z) e^{-2\left(\frac{z-z_\pm(t)}{4\sigma_\pm(t)}\right)^2} dz = \sigma_\pm(t) \sqrt{2\pi(4\tilde{g}_0^2 + \delta^2)} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{L-z_{0\pm}(t)}{2\sqrt{2\sigma_\pm^2(t)}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{z_{0\pm}(t)}{2\sqrt{2\sigma_\pm^2(t)}}\right) \right]. \quad (7.11)$$

Una vez obtenidos estos valores, podemos agruparlos y obtener el valor medio de la función $\Omega(z)$ sobre todo el espacio, cuya expresión de acuerdo con la definición queda como

$$\langle \Omega(z) \rangle = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma_\pm^2(t)}} \int_{-\infty}^\infty \Omega(z) e^{-2\left(\frac{z-z_\pm(t)}{4\sigma_\pm(t)}\right)^2} dz. \quad (7.12)$$

La función $\langle \Omega(z) \rangle$ consta de términos semejantes en la expresión dentro y fuera de la cavidad y al factorizar, la expresión resultante es

7.3 Potencial Mesa

$$\langle \Omega(z) \rangle = \delta + \frac{1}{2} \left(\sqrt{4\tilde{g}_0^2 + \delta^2} - \delta \right) \left[\operatorname{erf} \left(\frac{L - z_{0\pm}(t)}{2\sqrt{2\sigma_{\pm}^2(t)}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{z_{0\pm}(t)}{2\sqrt{2\sigma_{\pm}^2(t)}} \right) \right] \quad (7.13)$$

que es el valor esperado en todo el espacio.

Una de las expresiones necesarias para plantear el sistema de ecuaciones diferenciales es el siguiente

$$\left\langle \frac{d\Omega(z)}{dz} \right\rangle = \left\langle \frac{4G(z)}{\Omega(z)} \frac{dG(z)}{dz} \right\rangle = 4\tilde{g}_0^2 \left\langle \frac{u(z)}{\Omega(z)} \frac{du(z)}{dz} \right\rangle, \quad (7.14)$$

que está involucrada con el momento de la partícula.

La función mesa, la cual se expresa como $u(z) = \mathbf{H}(z) - \mathbf{H}(z - L)$, tiene como derivada la llamada función $\delta(z)$ de Dirac en un par de puntos y queda expresada como sigue

$$\frac{du(z)}{dz} = \delta(z) - \delta(z - L), \quad (7.15)$$

de la cual también es necesario calcular el valor medio, el cual tiene la siguiente expresión

$$\left\langle \frac{d\Omega(z)}{dz} \right\rangle = 4\tilde{g}_0^2 \langle (\Omega(z))^{-1} (\delta(z) - \delta(z - L)) \rangle. \quad (7.16)$$

Utilizando la definición para el cálculo del valor medio de la función $\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad (7.17)$$

obtenemos la siguiente ecuación

$$\left\langle \frac{d\Omega(z)}{dz} \right\rangle = 4\tilde{g}_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{\pm}(z, t)^* \frac{u(z)}{\sqrt{4\tilde{g}_0^2 u(z)^2 + \delta^2}} (\delta(z) - \delta(z - L)) \psi_n^{\pm}(z, t) dz. \quad (7.18)$$

En ambos casos $u(0) = 1/2 = u(L)$, de acuerdo con las propiedades de la función de Heaviside descritas en el apéndice A.1; de esta forma obtenemos como resultado para cada una de las siguientes integrales los siguientes términos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{\pm}(z, t)^* \frac{u(z)}{\sqrt{4\tilde{g}_0^2 u(z)^2 + \delta^2}} \delta(z) \psi_n^{\pm}(z, t) dz = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{g}_0^2 + \delta^2}} \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma_{\pm}^2(t)}} e^{-2\left(\frac{z_{0\pm}(t)}{4\sigma_{\pm}(t)}\right)^2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{\pm}(z, t)^* \frac{u(z)}{\sqrt{4\tilde{g}_0^2 u(z)^2 + \delta^2}} \delta(z - L) \psi_n^{\pm}(z, t) dz = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{g}_0^2 + \delta^2}} \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma_{\pm}^2(t)}} e^{-2\left(\frac{L - z_{0\pm}(t)}{4\sigma_{\pm}(t)}\right)^2}. \quad (7.19)$$

Una vez realizados los cálculos para estas integrales sustituimos la expresión explícita en la ecuación (7.18) para obtener el término completo de $\left\langle \frac{d\Omega(z)}{dz} \right\rangle$, que es

$$\left\langle \frac{d\Omega(z)}{dz} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{8\pi\sigma_{\pm}^2(t)}} \frac{\tilde{g}_0^2}{\sqrt{\tilde{g}_0^2 + \delta^2}} \left(e^{-2\left(\frac{z_{0\pm}(t)}{4\sigma_{\pm}(t)}\right)^2} - e^{-2\left(\frac{L-z_{0\pm}(t)}{4\sigma_{\pm}(t)}\right)^2} \right). \quad (7.20)$$

El último término necesario en el cálculo de valores esperados es $z \frac{d\Omega(z)}{dz}$, para el cual, será necesario calcular el valor $\left\langle z \frac{d\Omega(z)}{dz} \right\rangle$, que está determinado de la siguiente manera

$$\left\langle z \frac{d\Omega(z)}{dz} \right\rangle = 4\tilde{g}_0^2 \left\langle z \frac{u(z)}{\Omega(z)} (\delta(z) - \delta(z-L)) \right\rangle, \quad (7.21)$$

para el cual habrá que hacer uso de la definición del valor esperado de la función $\delta(z)$ que está en la ecuación (7.17) y al aplicarlo a $z(d\Omega(z)/dz)$ se obtiene que

$$\left\langle z \frac{u(z)}{\Omega(z)} \delta(z) \right\rangle = 0. \quad (7.22)$$

Mientras para el otro punto con singularidad con que cuenta el potencial, el valor esperado estará dado por

$$\left\langle z \frac{u(z)}{\Omega(z)} \delta(z-L) \right\rangle = \frac{L}{2\sqrt{\tilde{g}_0^2 + \delta^2}} \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma_{\pm}^2(t)}} e^{-2\left(\frac{L-z_{0\pm}(t)}{4\sigma_{\pm}(t)}\right)^2}; \quad (7.23)$$

por lo tanto, el valor calculado para todo el espacio está dado por la siguiente expresión

$$\left\langle z \frac{d\Omega(z)}{dz} \right\rangle = -\frac{2\tilde{g}_0^2 L}{\sqrt{\tilde{g}_0^2 + \delta^2}} \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma_{\pm}^2(t)}} e^{-2\left(\frac{L-z_{0\pm}(t)}{4\sigma_{\pm}(t)}\right)^2}. \quad (7.24)$$

De esta manera, se han calculado los valores esperados necesarios para concretar de manera explícita el sistema de ecuaciones diferenciales que determinará el comportamiento temporal de cada uno de los parámetros en el caso del potencial mesa.

7.3.1. Sistema de ecuaciones para el potencial mesa

En la sección anterior se realizaron los cálculos de valores esperados necesarios para concluir la expresión de cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema que se presenta para el caso de potencial mesa. En esta sección los valores esperados se sustituirán en (7.7) y de manera explícita se determinará el sistema de ecuaciones diferenciales que deberá resolverse numéricamente para este caso.

7.3 Potencial Mesa

El sistema de ecuaciones diferenciales completo para las funciones que determinan $\psi_n^\pm(z, t)$ frente al potencial $u(z) = \mathbb{H}(z) - \mathbb{H}(z - L)$ es

$$\dot{\sigma}_\pm^2(t) = \frac{4\hbar}{m}\gamma_\pm(t)\sigma_\pm^2(t),$$

$$\dot{z}_{0\pm}(t) = \frac{\hbar}{m}\beta_\pm(t) + \frac{2\hbar}{m}\gamma_\pm(t)z_{0\pm}(t),$$

$$\dot{\gamma}_\pm(t) = \frac{\hbar}{8m16\sigma_\pm^4(t)} - \frac{\hbar}{m}\gamma_\pm^2(t) \pm \frac{1}{8\sigma_\pm^2(t)\sqrt{8\pi\sigma_\pm^2(t)}} \frac{\tilde{g}_0^2}{\sqrt{\tilde{g}_0^2 + \delta^2}} \left[z_{0\pm}(t)e^{-\mathcal{A}_\pm(t)} + (L - z_{0\pm}(t))e^{-\mathcal{B}_\pm(t)} \right], \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_\pm(t) = & -\frac{\hbar}{8^2m} \frac{z_{0\pm}(t)}{\sigma_\pm^4(t)} - \frac{2\hbar}{m}\beta_\pm(t)\gamma_\pm(t) \pm \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma_\pm^2(t)}} \frac{\tilde{g}_0^2}{\sqrt{\tilde{g}_0^2 + \delta^2}} \\ & \times \left[\left(1 + \frac{z_{0\pm}^2(t) - z_{0\pm}(t)L}{4\sigma_\pm^2(t)}\right) e^{-\mathcal{B}_\pm(t)} - \left(1 + \frac{z_{0\pm}^2(t)}{4\sigma_\pm^2(t)}\right) e^{-\mathcal{A}_\pm(t)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_\pm(t) = & \frac{\hbar}{m}\beta_\pm(t)\gamma_\pm(t)z_{0\pm}(t) - \frac{3\hbar}{8m} \frac{z_{0\pm}^2(t)}{16\sigma_\pm^4(t)} - \frac{\hbar}{16m\sigma_\pm^2(t)} \pm \frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{8\pi\sigma_\pm^2(t)}} \frac{\tilde{g}_0^2}{\sqrt{\tilde{g}_0^2 + \delta^2}} \eta_\pm(t) \\ & \pm \frac{1}{4} \left(\sqrt{4\tilde{g}_0^2 + \delta^2} - \delta \right) \left[\operatorname{erf} \left(\frac{L - z_{0\pm}(t)}{\sqrt{2\sigma_\pm^2(t)}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{z_{0\pm}(t)}{\sqrt{2\sigma_\pm^2(t)}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Donde las funciones $\mathcal{A}_\pm(t)$ y $\mathcal{B}_\pm(t)$ están definidas como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\pm(t) &= 2 \left(\frac{z_{0\pm}(t)}{4\sigma_\pm(t)} \right)^2 \\ \mathcal{B}_\pm(t) &= 2 \left(\frac{L - z_{0\pm}(t)}{4\sigma_\pm(t)} \right)^2 \end{aligned} \quad (7.26)$$

y la función $\eta_\pm(t)$ es

$$\eta_\pm(t) = \left[\left(1 + \frac{z_{0\pm}^2(t)}{4\sigma_\pm^2(t)}\right) z_{0\pm}(t)e^{-\mathcal{A}_\pm(t)} + \left(z_{0\pm}(t) - L + \frac{z_{0\pm}^2(t)(z_{0\pm}(t) + L)}{4\sigma_\pm^2(t)}\right) e^{-\mathcal{B}_\pm(t)} \right]. \quad (7.27)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales, será resuelto de manera numérica en el siguiente capítulo.

7.4. Potencial Gaussiano

Un caso con propiedades muy particulares es el caso del potencial Gaussiano (se presenta un trabajo muy detallado de éste en [45]). Se utilizará este método aplicado a dicho potencial, utilizando el caso en resonancia y se observará que de manera sustancial cumple con las características físicas de la evolución del sistema.

Una particularidad del potencial gaussiano es que no es nulo en ningún punto del espacio, aunque sí puede ser suficientemente pequeño como para que ningún dispositivo lo pueda medir. Es por esto que definimos la longitud de la cavidad L relacionada con la varianza w_0 como $L = 4w_0$.

De nuevo los parámetros a calcular son $\langle \Omega(z) \rangle$, $\langle d\Omega(z)/dz \rangle$ y $\langle z(d\Omega(z)/dz) \rangle$, que para el caso de resonancia se escriben como sigue

$$\Omega(z) = 2\tilde{g}_0 e^{-\left(\frac{z-L/2}{w_0}\right)^2}, \quad (7.28)$$

mientras que el valor esperado queda como

$$\langle \Omega(z) \rangle = \frac{2\tilde{g}_0^2}{\sqrt{8\pi\sigma_{\pm}^2(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\left(\frac{z-z_{0\pm}(t)}{4\sigma_{\pm}(t)}\right)^2} e^{-\left(\frac{z-L/2}{w_0}\right)^2} dz, \quad (7.29)$$

obteniéndose

$$\langle \Omega(z) \rangle = \frac{2\tilde{g}_0 w_0 e^{-\frac{(L-2z_{0\pm}(t))^2}{4(w_0^2+8\sigma_{\pm}^2(t))}}}{\sqrt{w_0^2+8\sigma_{\pm}^2(t)}}. \quad (7.30)$$

El siguiente término necesario es la derivada del potencial, la cual queda como

$$\frac{d\Omega(z)}{dz} = \frac{2\tilde{g}_0 (L-2z)}{w_0^2} e^{-\left(\frac{z-L/2}{w_0}\right)^2} dz; \quad (7.31)$$

para la expresión del valor esperado, necesitamos calcular el siguiente término

$$\left\langle \frac{d\Omega(z)}{dz} \right\rangle = \frac{2\tilde{g}_0}{w_0^2 \sqrt{8\pi\sigma_{\pm}^2(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} (L-2z) e^{-2\left(\frac{z-z_{0\pm}(t)}{4\sigma_{\pm}(t)}\right)^2} e^{-\left(\frac{z-L/2}{w_0}\right)^2} dz, \quad (7.32)$$

finalmente, el valor esperado nos da como resultado

$$\left\langle \frac{d\Omega(z)}{dz} \right\rangle = \frac{2\tilde{g}_0 w_0 (L-2z_{0\pm}(t)) e^{-\frac{(L-2z_{0\pm}(t))^2}{4(w_0^2+8\sigma_{\pm}^2(t))}}}{(w_0^2+8\sigma_{\pm}^2(t))^{3/2}}. \quad (7.33)$$

El último término necesario, del cual se calculará el valor esperado es

$$z \frac{d\Omega(z)}{dz} = \frac{2\tilde{g}_0 (Lz-2z^2)}{w_0^2} e^{-\left(\frac{z-L/2}{w_0}\right)^2} dz. \quad (7.34)$$

7.4 Potencial Gaussiano

La expresión que se necesita calcular para obtener el valor esperado, es la siguiente integral

$$\left\langle z \frac{d\Omega(z)}{dz} \right\rangle = \frac{2\tilde{g}_0}{w_0^2 \sqrt{8\pi\sigma_{\pm}^2(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} (Lz - 2z^2) e^{-2\left(\frac{z-z_{0\pm}(t)}{4\sigma_{\pm}(t)}\right)^2} e^{-\left(\frac{z-L/2}{w_0}\right)^2} dz, \quad (7.35)$$

que finalmente es la expresión buscada

$$\left\langle z \frac{d\Omega(z)}{dz} \right\rangle = \frac{2\tilde{g}_0 w_0 (-64\sigma_{\pm}^4(t) + w_0^2(Lz_{0\pm}(t) - 2z_{0\pm}^2(t)) + 4\sigma_{\pm}^2(t)(L^2 - 2w_0^2 - 2Lz_{0\pm}(t)))}{(w_0^2 + 8\sigma_{\pm}^2(t))^{5/2}} e^{-\frac{(L-2z_{0\pm}(t))^2}{4(w_0^2 + 8\sigma_{\pm}^2(t))}}. \quad (7.36)$$

7.4.1. Sistema de ecuaciones para el potencial gaussiano

Sustituimos las ecuaciones (7.30), (7.33) y (7.36) en (7.7), y obtenemos el sistema de ecuaciones completo para el átomo con estado ψ_{\pm} que interactúa con un potencial $u(z) = e^{-(z^2/w_0^2)}$ como sigue

$$\dot{\sigma}_{\pm}^2(t) = \frac{4\hbar}{m} \gamma_{\pm}(t) \sigma_{\pm}^2(t),$$

$$\dot{z}_{0\pm}(t) = \frac{\hbar}{m} \beta_{\pm}(t) + \frac{2\hbar}{m} \gamma_{\pm}(t) z_{0\pm}(t),$$

(7.37)

$$\dot{\gamma}_{\pm}(t) = \frac{\hbar}{8m16\sigma_{\pm}^4(t)} - \frac{2\hbar}{m} \gamma_{\pm}^2(t) \pm \frac{\tilde{g}_0 w_0 (3Lz_{0\pm}(t) - 4z_{0\pm}^2(t) + 16\sigma_{\pm}^2(t) - L^2 + 2w_0^2)}{2(w_0^2 + 8\sigma_{\pm}^2(t))^{5/2}} e^{-C_{\pm}(t)},$$

$$\dot{\beta}_{\pm}(t) = -\frac{\hbar}{8^2 m} \frac{z_{0\pm}(t)}{\sigma_{\pm}^4(t)} - \frac{2\hbar}{m} \beta_{\pm}(t) \gamma_{\pm}(t) \pm \frac{\tilde{g}_0 w_0 (L^2 z_{0\pm}(t) - 2z_{0\pm}(t) w_0^2 - 2Lz_{0\pm}^2(t) - 8L\sigma_{\pm}^2(t))}{(w_0^2 + 8\sigma_{\pm}^2(t))^{5/2}} e^{-C_{\pm}(t)},$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{\pm}(t) &= \frac{\hbar}{m} \beta_{\pm}(t) \gamma_{\pm}(t) z_{0\pm}(t) - \frac{3\hbar}{8m} \frac{z_{0\pm}^2(t)}{16\sigma_{\pm}^4(t)} - \frac{\hbar}{16m\sigma_{\pm}^2(t)} \\ &\quad \pm \frac{\tilde{g}_0 w_0 (2w_0^4 + 16w_0^2\sigma_{\pm}^2(t) + Lw_0^2 z_{0\pm}(t) + 4L^2\sigma_{\pm}^2(t) - 0,5L^2 z_{0\pm}^2(t) - w_0^2 z_{0\pm}^2(t) + Lz_{0\pm}^2(t) - 4Lz_{0\pm}(t)\sigma_{\pm}^2(t))}{(w_0^2 + 8\sigma_{\pm}^2(t))^{5/2}} e^{-C_{\pm}(t)}. \end{aligned}$$

Donde

$$C_{\pm}(t) = \frac{(L - 2z_{0\pm}(t))^2}{4(w_0^2 + 8\sigma_{\pm}^2(t))}. \quad (7.38)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales se resolverá de manera numérica para 2 casos en específico, $L = 4\mu\text{m}$ y $L = 116\mu\text{m}$, el primero para compararlo con los resultados obtenidos en [45] y el segundo utilizando la longitud de la cavidad experimental del grupo de Rempe.

Capítulo 8

Resultados Numéricos

En este capítulo se presentan los resultados que se obtienen para la descripción de la dinámica de un átomo cruzando una cavidad, resolviendo de forma numérica las ecuaciones que se dedujeron en el capítulo 6 en tres casos específicos, cada uno con variaciones en las condiciones en las que se puede encontrar el sistema.

Los resultados que se presentan son referentes a:

- **Potencial Nulo.** Se obtiene como simplificación de nuestro sistema, que además se utilizará para comparar los resultados que se obtienen de manera numérica con resultados ya conocidos para la partícula libre.
- **Potencial Mesa.** Se obtiene de un caso simple pero difícilmente apegado a un caso físico real. Se utiliza este potencial debido a que provee información valiosa referente a la interacción del átomo con los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$ y la radiación, mostrando la dinámica de la función de onda en la base de los estados vestidos.
- **Potencial Gaussiano.** Es un caso más realista: la intensidad del potencial tiene el máximo en el centro de la cavidad y se desvanece conforme nos alejamos de la cavidad.

De manera gradual, se buscará variar algunos parámetros físicos; sin embargo, algunos otros permanecerán constantes, como el desentonamiento, que aún cuando hemos calculado las ecuaciones involucrándolo, el objetivo de este trabajo no está centrado en conocer la variación de la dinámica dependiente de este parámetro, por lo que *los casos aquí expuestos se harán siempre en casos resonantes*. Bajo estos criterios se procurará que el modelo no salga de los límites impuestos por la realidad experimental.

Es necesario, por razones de simplicidad en los cálculos numéricos, parametrizar los valores y las variables involucrados en el sistema, por lo que las unidades naturales de tiempo serán $\tilde{g}_0^{-1} = [(n+1)g_0]^2)^{-1/2} = 10 \times 10^{-9}$ s, incluso en el caso en que no existe potencial, por lo que no hay acoplamiento. Utilizamos esta escala de tiempo, pues es útil al comparar los resultados; por otro lado, para la escala de longitud, la unidad que se utilizará será $1\mu\text{m}$.¹

¹En algunos casos debido al tamaño de las gráficas y a la dificultad que pueda representar leer los datos, se utilizarán múltiplos de la forma 10^n de estas unidades, con $n = 1, 2, 3, \dots$

8.1 Método Numérico

Un término que toma gran importancia es \hat{g}_0 , debido a que es la referencia respecto a la cual observamos el régimen en el cual se encuentra nuestro sistema

$$\hat{g}_0 = \frac{\hbar\sqrt{n+1}g_0}{m}, \quad (8.1)$$

cuyo valor numérico es $\hat{g}_0 = (8.74\text{m/s})^2$ en unidades SI. A partir de este valor, se considerará el régimen en el cual se encuentra la interacción, como se observó en las condiciones de adiabaticidad del capítulo 5.2. El régimen mazer, que es el de nuestro interés, corresponde a velocidades del centro de masa atómico $v \ll 8.74\text{m/s}$.

Los resultados numéricos que se obtengan serán basados en los parámetros del grupo de Rempe [62] que se muestran en la tabla 3.1.

8.1. Método Numérico

El método numérico es una parte muy importante en el desarrollo de este trabajo, pues necesitamos un método numérico poderoso y preciso.

Se utilizarán dos maneras de resolver los sistemas de ecuaciones:

- Un método numérico bastante conocido y estudiado, *Runge Kutta 4*, un método iterativo para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. El algoritmo para la aproximación de soluciones se escribió en lenguaje de programación *C* y se interpretó con compiladores que se obtienen de forma libre para el sistema operativo *Linux*.
- Software especializado *Mathematica*, a través del cual se obtuvieron gráficas más estéticas debido a que es un software visualmente más amistoso que lleva consigo un gran poderío numérico.

Los métodos anteriores se utilizaron de manera intercalada e indistinta. Resultan ser una gran herramienta al usarse de manera simultánea, complementando uno al otro.

Los cálculos numéricos necesitan valores de los coeficientes de las variables involucradas en los sistemas. En la tabla 8.1 se muestran algunas de las constantes que aparecen de manera frecuente en las ecuaciones. Aun cuando se parametrizarán los valores para poder realizar el cálculo numérico, es importante tener en cuenta el valor en el SI de cada constante.

8.2. Potencial Nulo

El caso más simple que se estudiará es aquel en el cual el átomo es una partícula libre que se desplaza a lo largo del eje z , sin observar potencial alguno con el cual interactúe.

Las ecuaciones del capítulo 6 se simplifican y se observa que al no haber interacción con un potencial, no existe desdoblamiento de los eigenvalores, por lo que las ecuaciones correspondientes a los estados \pm se colapsan a una sola ecuación.

Para comprobar que las ecuaciones resuelven de forma satisfactoria el sistema, se comparará la solución numérica con alguna solución analítica que sea conocida.

	Constante	Valor Numérico
m	Masa del átomo de Rubidio	$1.443160 \times 10^{-25} Kg$
m	Masa del átomo de Cesio	$2.2006946296 \times 10^{-25} Kg$
\hbar	Constante de Planck Reducida	$1.054571628 \times 10^{-31} Js$
$\frac{\hbar}{m}$	Para rubidio	$7.307378447 \times 10^{-7} m^2/s$
$\frac{\hbar}{m}$	Para cesio	$4.778419983 \times 10^{-7} m^2/s$
k_B	Constante de Boltzmann	$1.3806504 \times 10^{-23} J/K$

Tabla 8.1: Tabla de valores numéricos para algunas constantes que aparecen de manera frecuente en las ecuaciones.

Sistema de ecuaciones para el potencial nulo

El sistema de ecuaciones resultante en el caso en que $W(z) = 0$ es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^2(t) &= \frac{4\hbar}{m}\gamma(t)\sigma^2(t), \\ \dot{z}_0(t) &= \frac{\hbar}{m}\beta(t) + \frac{2\hbar}{m}\gamma(t)z_0(t), \\ \dot{\gamma}(t) &= \frac{\hbar}{8m16\sigma^4(t)} - \frac{2\hbar}{m}\gamma^2(t), \\ \dot{\beta}(t) &= -\frac{\hbar}{8^2m}\frac{z_0(t)}{\sigma^4(t)} - \frac{2\hbar}{m}\beta(t)\gamma(t), \\ \dot{\alpha}(t) &= \frac{\hbar}{m}\beta(t)\gamma(t)z_0(t) - \frac{3\hbar}{8m}\frac{z_0^2(t)}{16\sigma^4(t)} - \frac{\hbar}{16m\sigma^2(t)}, \end{aligned} \tag{8.2}$$

el cual se resolverá para algunas condiciones iniciales, procurando que se encuentre dentro del régimen mazer que es el de nuestro interés. Los resultados se compararán en su caso con la solución analítica.

8.2.1. Resultados numéricos para las funciones $\sigma^2(t)$, $z_0(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\gamma(t)$ en el caso de $W(z) = 0$

Soluciones analíticas

En este caso conocemos soluciones analíticas para dos de las funciones involucradas, $\sigma^2(t)$ y $z_0(t)$, que se encuentran en [43]². A diferencia del resultado de Merzbacher

²Ejercicio 15.9, ecuación (15.51), de la página 351

8.2 Potencial Nulo

$$(\Delta z)_t^2 = (\Delta z)_0^2 \left(1 + \frac{i\hbar t}{2m(\Delta z)_0^2} \right)^2, \quad (8.3)$$

el nuestro está separado en partes reales e imaginarias, las segundas están distribuidas en las funciones que representan las fases, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\gamma(t)$, mientras que la parte real está representada por $\sigma^2(t)$ y $z_0(t)$, de tal manera que la función $4\sigma^2(t) = |(\Delta z)_t|^2$ de [43]. Con la intención de describir y comparar los resultados numéricos y analíticos, observamos

$$\frac{|(\Delta z)_t|^2}{4} = \sigma^2(t) = \sigma^2(0) + \frac{\hbar^2}{4m^2} \frac{t^2}{16\sigma^2(0)}, \quad (8.4)$$

$$z_0(t) = p_0 t + z_0(0),$$

donde $p_0/m = (\hbar/m)k(0) = (\hbar/m)\beta(0) + (2\hbar/m)\gamma(0)z_0(0)$, que puede simplificarse debido a que nuestra función de onda con un perfil gaussiano muestra que $\gamma(0) = 0$ y como deseamos ajustar el marco de referencia de tal manera que $z_0(0) = 0$, entonces $p_0/m = k(0)/m = (\hbar/m)\beta(0)$.

En la solución analítica, la evolución temporal de $\sigma_{\pm}(t)^2$ sólo depende de las condiciones iniciales de la misma variable. En este caso se encuentra inmersa en un sistema dinámico y dependerá también de las condiciones iniciales de las demás variables.

El primer caso que se resolverá de manera numérica es el ya mencionado caso de la partícula libre.

Partícula libre

En la tabla 8.2 se muestra un conjunto de condiciones iniciales bajo las cuales se resuelve de manera numérica el caso de la partícula libre.

Condición Inicial	Valor Numérico
$z_0(0)$	$0.00\mu m$
$\sigma^2(0)$	$0.4\mu m^2$
$\alpha(0)$	0.00
$\beta(0)$	$0.08\mu m^{-1}$
$\gamma(0)$	$0.00\mu m^{-2}$

Tabla 8.2: Tabla de condiciones iniciales para la partícula libre.

El valor $\beta(0) = 0.08\mu m^{-1}$ corresponde a una velocidad de $v_i = 5.84\text{cm/s}$. Estas condiciones iniciales corresponden a una temperatura de un gas atómico de $T = 1.09\text{mK}$. La velocidad v_i es una velocidad típica de átomos fríos, por lo que la descripción está dentro del régimen mazer.

Aun cuando no hay potencial en este caso, se utilizan escalas referentes a la frecuencia de acoplamiento $\tilde{g}_0^{-1} = 10 \times 10^{-9}$ s. Esta escala se utiliza para homogeneizar con los resultados presentados posteriormente.

Al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que se obtiene para el caso de la partícula libre, resultan las gráficas 8.1 y 8.2.

Los resultados numéricos obtenidos para las funciones $z_0(t)$ y $\sigma^2(t)$ muestran que el caso de partícula libre es claramente aceptable. Este caso no presenta nada nuevo, simplemente corrobora la validez del modelo al llevarlo al caso simple y ya conocido.

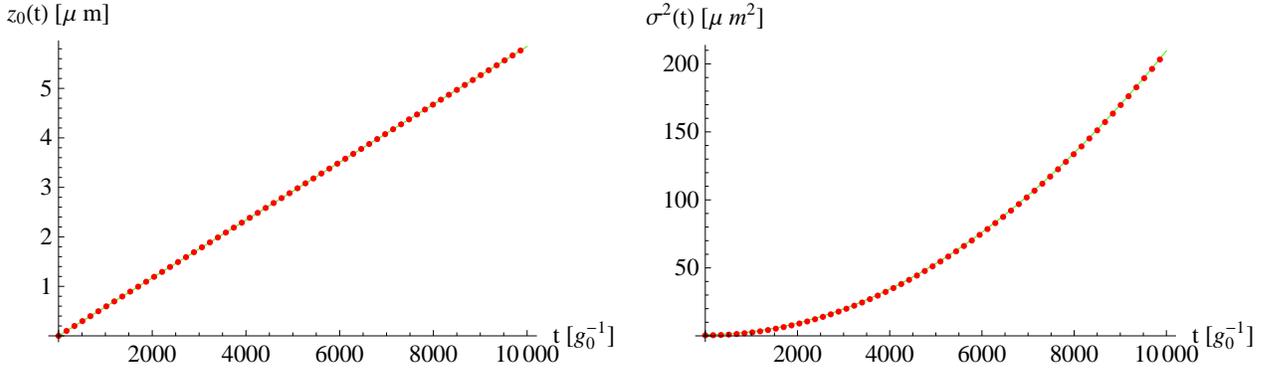


Figura 8.1: Gráficas comparativas de los resultados analíticos (línea verde) y numéricos (puntos rojos) obtenidos para el caso de potencial nulo y con una velocidad inicial $v_i = 5.84\text{cm/s}$ para el átomo de ^{87}Rb

En la solución de Merzbacher se puede observar la relación que existe con la fase del término z^2 , el cual es de la forma $\gamma_z \sim t/(at^4 - bt^2 - 1)$, que coincide con la estructura de la fase obtenida de manera numérica. Es la primera muestra de que el modelo planteado tiene una extrapolación acertada. La función de onda sufre ensanchamiento, tal y como es descrito por la teoría y para lo cual se tiene una solución analítica. Se resolvieron más casos para la partícula libre; sin embargo, no se muestran debido a que no se presenta nada nuevo. Es suficiente un sólo caso.

8.3. Potencial Mesa

El segundo caso que se estudia en este trabajo es la interacción con el conocido *Potencial Mesa*. Este tipo de interacción se ha discutido anteriormente [28, 29], aunque no de la manera abordada aquí. El interés en el estudio de este potencial en CQED radica en la simplicidad del potencial y en que nos ayuda a comprender en un primer acercamiento, la interacción con potenciales con $u(z) \neq 0$.

La aportación de esta tesis está orientada a la descripción cualitativa y cuantitativa de cada uno de los parámetros involucrados en la evolución de la función de onda, de manera que la visualización de las variables temporales sea comprensible de manera simple al introducir esa dependencia en la función de onda.

8.3 Potencial Mesa

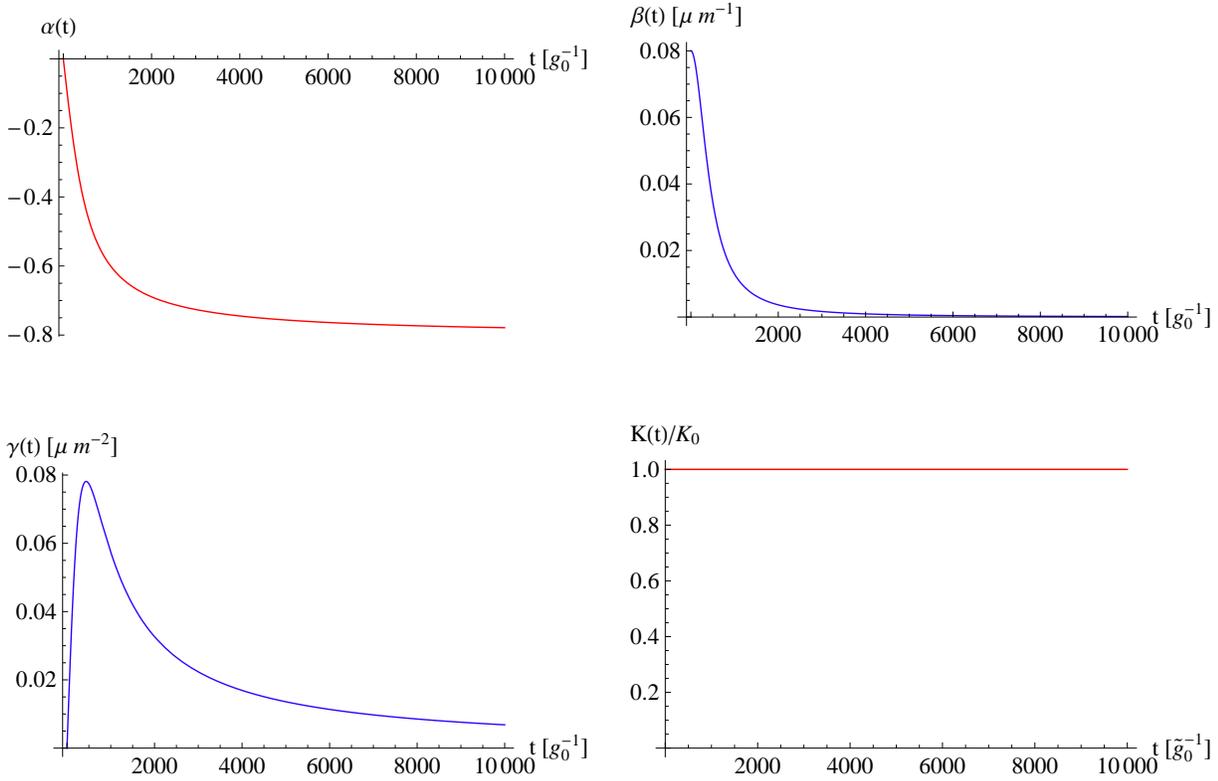


Figura 8.2: Gráficas de las soluciones numéricas de las funciones correspondientes a la fase en la ecuación de onda $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\gamma(t)$ para el átomo de ^{87}Rb frente a un potencial nulo, con una velocidad inicial $v_i = 5.84\text{cm/s}$, además de la energía cinética $K(t)$ normalizada con K_0 del mismo caso libre. K_0 es la energía correspondiente a una temperatura $T = 1.09\text{mK}$.

Como se ha mencionado con anterioridad, sólo se estudiarán los casos en resonancia. El estudio de sistemas no resonantes se propone para estudios posteriores.

8.3.1. Potencial *mesa* con $L = 116\mu\text{m}$

En el caso resonante, los sistemas de ecuaciones (7.25) se simplifican; además, se considerará que la escala natural de tiempo para este sistema es $\tilde{g}_0^{-1} = \sqrt{(n+1)g_0^2}^{-1}$, lo cual tomaremos como unidad, y el término correspondiente al número n de fotones no se observará posteriormente.

Las condiciones iniciales juegan un papel muy importante en los resultados numéricos obtenidos, pues modifican la dinámica del sistema. Algunas de ellas son las mismas en todos los casos.

Para este caso se utiliza una cavidad de longitud $L = 116\mu\text{m}$, de acuerdo con los parámetros reportados por el grupo de *Rempe et al.* [62], mostrados en la tabla 3.1, la cavidad está ubicada en $0.0\mu\text{m} \leq z \leq 116\mu\text{m}$.

En la tabla 8.3 se puede observar un conjunto de condiciones iniciales bajo las cuales se

resolvieron los sistemas de ecuaciones 7.25. Observese que la condición $\gamma_{\pm}(0) = 0$ determina que el paquete es inicialmente de mínima incertidumbre.

Condición Inicial	Valor Numérico
$z_{0\pm}(0)$	$-10\mu m$
$\sigma_{\pm}^2(0)$	$0.4\mu m^2$
$\alpha_{\pm}(0)$	0.0
$\beta_{\pm}(0)$	$0.08\mu m^{-1}$
$\gamma_{\pm}(0)$	$0.0\mu m^{-2}$

Tabla 8.3: Tabla de condiciones iniciales para el caso de con el potencial mesa con $\delta = 0$. La cavidad está ubicada en $0.0\mu m \leq z \leq 116\mu m$

El valor dado para la condición $\beta_{\pm}(0) = 0.08\mu m^{-1}$ y las condiciones de la tabla 8.3 corresponde a una velocidad inicial de $v_i = 5.84\text{cm/s}$ y una energía cinética $K_0 = 1.09\text{mK}$, que claramente está inmersa en el régimen *mazer*. La dependencia temporal de los parámetros obtenidos se observa en las gráficas comparativas 8.3, donde se muestra el caso con potencial nulo (verde) y los resultados obtenidos para las funciones de cada subestado.

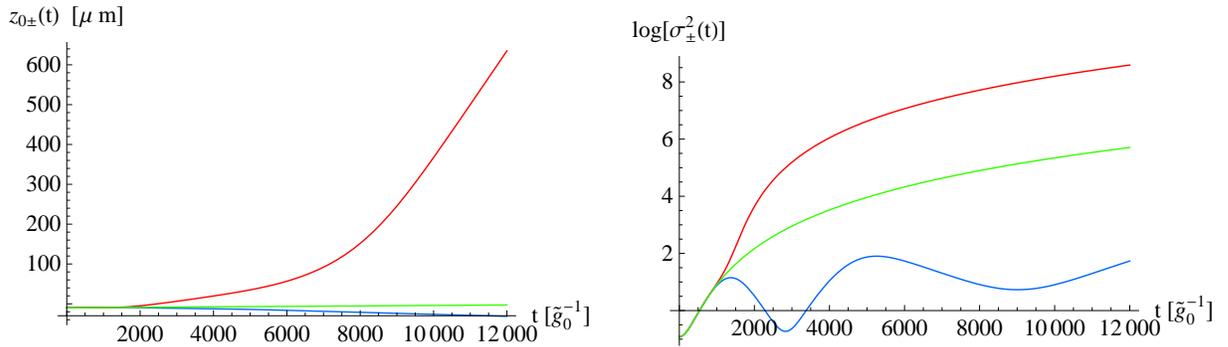


Figura 8.3: Solución numérica de las funciones $z_{0\pm}(t)$ (izquierda) y $\log(\sigma_{\pm}^2(t))$ (derecha), ambas comparadas con el caso de potencial nulo (color verde) con las mismas condiciones iniciales. Las funciones $z_{0+}(t)$ y $\log(\sigma_{+}^2(t))$ se muestran en color azul, mientras que las funciones $z_{0-}(t)$ y $\log(\sigma_{-}^2(t))$ se muestran en color rojo. Ocurre un desdoblamiento en las funciones debido a la interacción con el potencial mesa de una cavidad localizada en $0.0\mu m \leq z \leq 116\mu m$.

En las gráficas 8.3 se observan ciertos comportamientos interesantes: la parte correspondiente al estado ψ_- gana velocidad al entrar en la región de interacción con la cavidad; al llegar al límite derecho de la cavidad la abandona con una velocidad mayor. Mientras que la parte correspondiente al estado ψ_+ se acerca a la región de interacción, el potencial repulsivo le impide transmitirse dentro de la cavidad incluso antes de que el centro de masa llegue a la cavidad. Otro resultado interesante es que la función ψ_- al ganar velocidad, también sufre un ensanchamiento del paquete gaussiano más drástico que antes de llegar a la región

8.3 Potencial Mesa

de interacción y aun más al abandonar la región de la cavidad, mientras la función ψ_+ se ensancha como en el caso libre hasta llegar a la cavidad. Ahí sufre una contracción durante el periodo de interacción y una vez reflejado vuelve a expandirse.

Las fases $\alpha_{\pm}(t)$ y $\beta_{\pm}(t)$ se muestran en la figura 8.4; puede observarse que dichas funciones presentan un desdoblamiento suave que presentan un comportamiento asintótico.

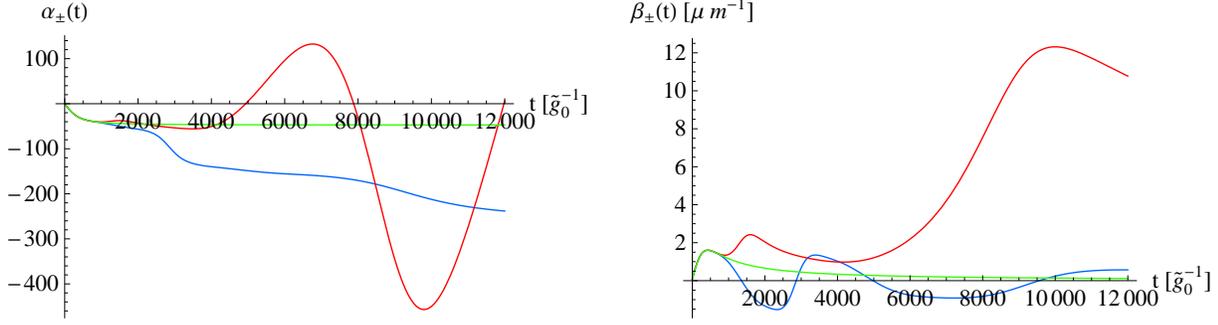


Figura 8.4: Las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ (en color verde), correspondientes al caso de potencial nulo, son comparadas en cada caso con las funciones $\alpha_{\pm}(t)$ y $\beta_{\pm}(t)$ (en color rojo las funciones $-$ y en color azul las funciones $+$), que presentan un desdoblamiento debido a la presencia del potencial. Las soluciones numéricas se obtuvieron a partir de las condiciones iniciales de la tabla 8.3, que interactúan con el potencial mesa de una cavidad localizada en $0,0\mu m \leq z \leq 116\mu m$.

En la evolución temporal de las funciones $\gamma_{\pm}(t)$, se observa un desdoblamiento drástico cuando el paquete gaussiano llega a la región de interacción con el potencial. Posteriormente presenta un comportamiento asintótico que podemos entender debido a que estas funciones forman parte de la descripción temporal del momento p .

Un término adicional es el de la energía cinética que ha tenido que ser graficado en escala logarítmica, pues el paquete ψ_- gana mucha más energía de lo que gana o pierde el paquete ψ_+ . La ganancia de ψ_- es alrededor de $2000K_0$, mientras que la profundidad del potencial es $\tilde{g}_0 \approx 1 \times 10^5 K_0$. Aun cuando $2000K_0 > \tilde{g}_0$, éste no es un término despreciable. La interacción del paquete ψ_- con la cavidad produce una disminución súbita de la energía cinética, pero posterior a la interacción el paquete queda esencialmente con la misma energía cinética.

Evolución temporal de la función de onda

Graficar la evolución temporal resulta útil para comprender la interacción entre el átomo con dos posibles estados y el potencial. Debido a esto, se evalúa la parte imaginaria de la función de onda con los resultados numéricos obtenidos a partir de la solución del sistema de ecuaciones.³

³El potencial que se muestra en las graficas 8.6 y 8.7 se ha establecido únicamente de manera gráfica con un valor de 0.1, con el único objetivo de mostrar de manera gráfica la localización de dicho potencial. Los resultados numéricos utilizan el valor de \tilde{g}_0 como la intensidad del potencial.

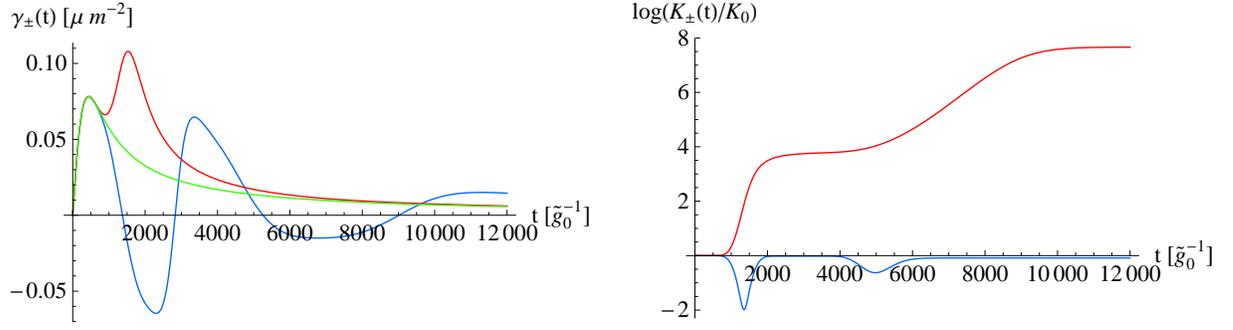


Figura 8.5: Solución numérica de la función $\gamma_{\pm}(t)$ y de la energía cinética $K_{\pm}(t)/K_0$, donde K_0 es la energía cinética del caso libre que corresponde a una temperatura $T = 1.09\text{mK}$. La energía cinética normalizada al caso libre $K_{\pm}(t)/K_0$ es graficada en escala logarítmica y se muestra la comparación entre $K_+(t)$ (azul) y $K_-(t)$ (rojo). Las soluciones numéricas son obtenidas a partir de las condiciones iniciales de la tabla 8.3, interactuando con el potencial mesa de una cavidad localizada en $0,0\mu m \leq z \leq 116\mu m$.

Se evalúan las funciones $Im[\psi_0^{\pm}(z, t)]$, $Re[\psi_0^{\pm}(z, t)]$ y $\rho(z)$ en diferentes tiempos, algunos de ellos se observan en las gráficas 8.6, donde se observa que al ingresar a la cavidad, el paquete ψ_- gana energía cinética. Podemos observar que se expande y el número de oscilaciones de $Im[\psi_0^{\pm}(z, t)]$ aumenta dentro de la cavidad.

8.3 Potencial Mesa

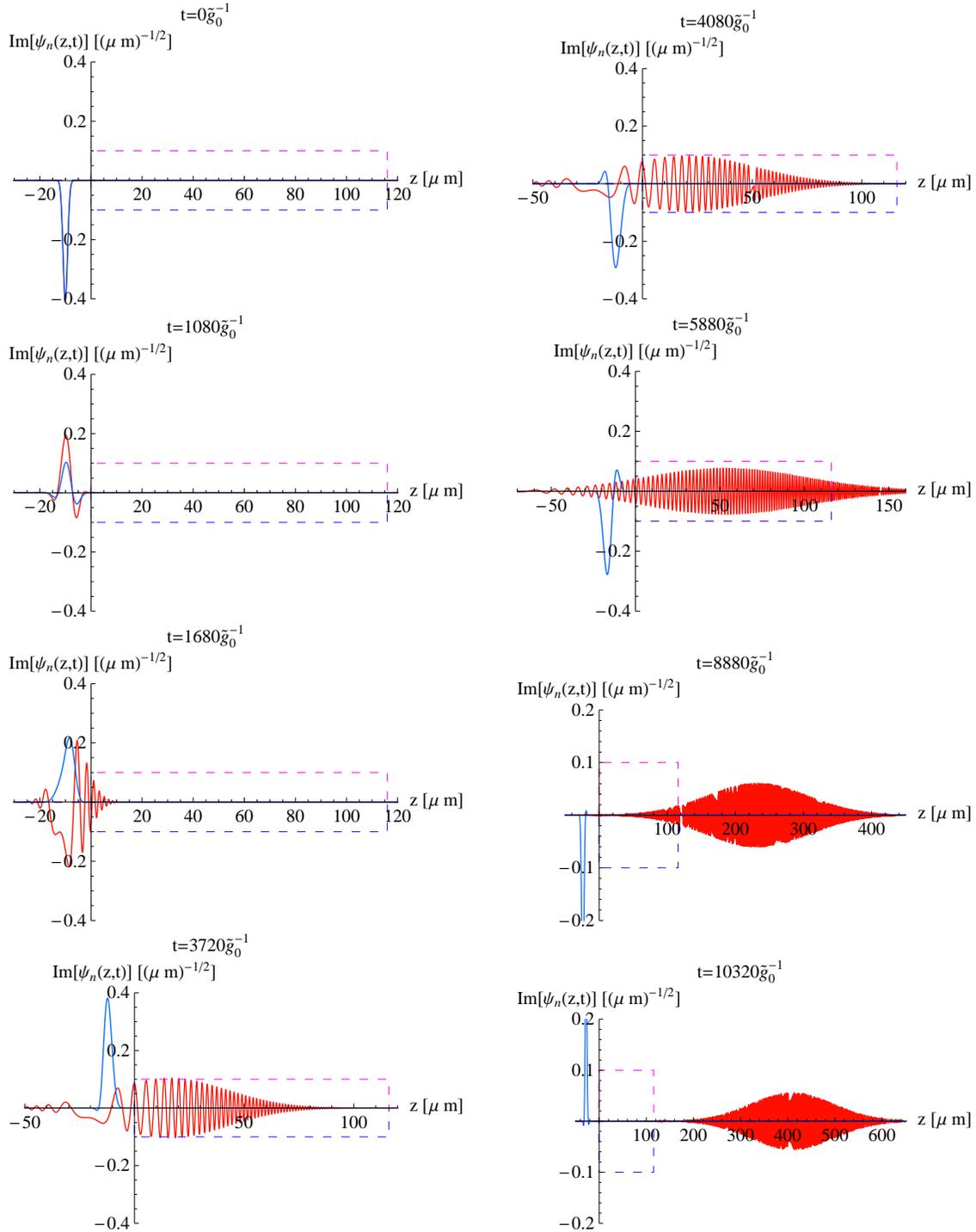


Figura 8.6: Evolución temporal de $Im[\psi_0^\pm(z, t)]$ a lo largo de la interacción con el potencial mesa de la cavidad. En color rojo $Im[\psi_0^-(z, t)]$, mientras que en color azul $Im[\psi_0^+(z, t)]$ de un átomo de ^{87}Rb con velocidad inicial $v_i = 5.84 \text{ cm/s}$, que interactúa con el potencial mesa de la cavidad situada en $0.0 \mu\text{m} \leq z \leq 116 \mu\text{m}$. En la gráfica se muestra el potencial $0.1\tilde{g}_0$ aunque el valor real es \tilde{g}_0 , lo cual se hace simplemente para poder observar el potencial a lo largo de toda la cavidad.

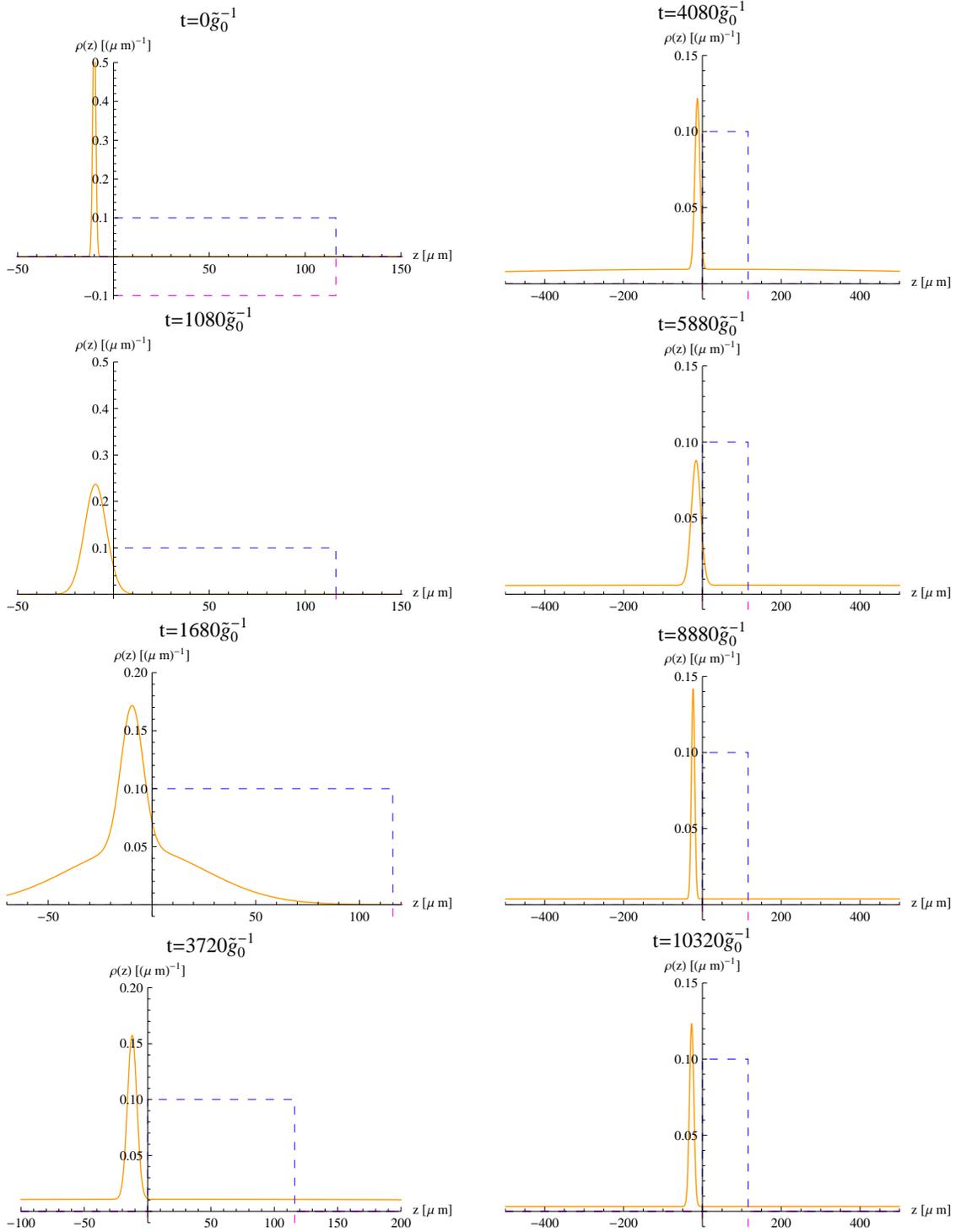


Figura 8.7: Evolución temporal de la función $\rho(z)$ de un átomo de ^{87}Rb con velocidad inicial $v_i = 5,84\text{cm/s}$, que interactúa con el potencial mesa de la cavidad situada en $0.0\mu\text{m} \leq z \leq 116\mu\text{m}$. En la gráfica se muestra el potencial $0,1g_0$ aunque el valor real es g_0 , lo cual se hace simplemente para poder observar el potencial a lo largo de toda la cavidad.

8.3 Potencial Mesa

8.3.2. Dependencia de la velocidad para el caso con potencial mesa

Se ha realizado la descripción de la dinámica de un átomo de ^{87}Rb que interactúa con el campo electromagnético de una cavidad con potencial mesa. Ahora nos interesa observar la dependencia de los parámetros temporales $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$, $\gamma_{\pm}(t)$, $\sigma_{\pm}(t)$ y $z_{0\pm}(t)$ en función de la velocidad inicial del átomo, por lo tanto de la energía cinética.

Se resolvió el sistema con diferentes condiciones iniciales de $\beta(0)$ y se planteron los resultados de las funciones obtenidas en las gráficas 8.9 y 8.10. Las velocidades iniciales fueron $v_i = 5.84\text{cm/s}$, $v_i = 10.95\text{cm/s}$, $v_i = 25.55\text{cm/s}$ y $v_i = 43.8\text{cm/s}$, todas con las mismas condiciones iniciales restantes.

Condición Inicial	Valor Numérico
$z_{0\pm}(0)$	$-10\mu\text{m}$
$\sigma_{\pm}^2(0)$	$0.4\mu\text{m}^2$
$\alpha_{\pm}(0)$	0.0
$\gamma_{\pm}(0)$	$0.0\mu\text{m}^{-2}$

Tabla 8.4: Condiciones iniciales iguales para todos los casos en que se modifica la velocidad inicial para los sistemas de la cavidad con potencial mesa ubicada en $0.0\mu\text{m} \leq z \leq 116\mu\text{m}$.

En los resultados de la energía cinética observamos que en ambos casos la dependencia de la velocidad no es monótonica y el comportamiento es asintótico. La función K_+ presenta dos altibajos súbitos durante el tiempo de interacción, pero al alcanzar el tiempo de relajación alcanza una energía de saturación.

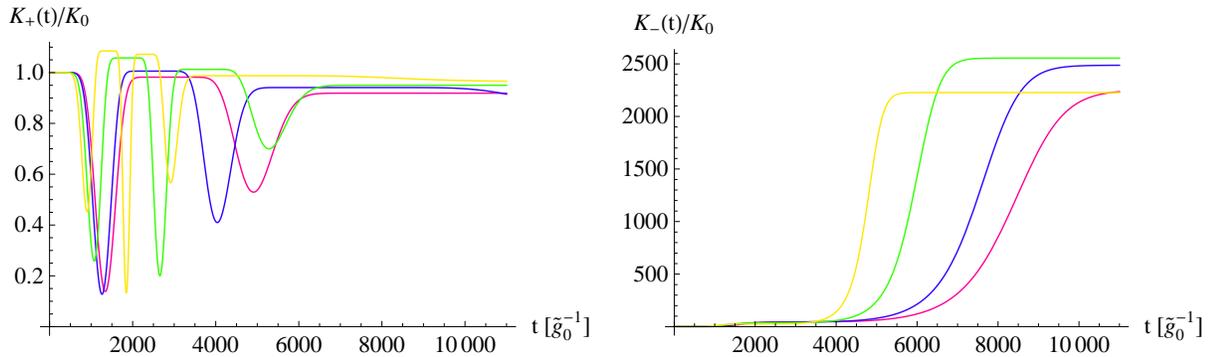


Figura 8.8: Gráficas de la energía cinética normalizada $K_{\pm}(t)/K_0$, donde K_0 corresponde a la energía cinética del caso donde el potencial es nulo. En el lado izquierdo se muestra la energía cinética normalizada para el paquete ψ_+ , mientras que del lado derecho la energía cinética normalizada del paquete ψ_- . Se muestran varias gráficas correspondientes a diferentes velocidades iniciales, $v_i = 5.84\text{cm/s}$ (color rosa), $v_i = 10.95\text{cm/s}$ (color azul), $v_i = 25.55\text{cm/s}$ (color verde) y $v_i = 43.8\text{cm/s}$ (color amarillo). La cavidad se encuentra localizada en $0.0\mu\text{m} \leq z \leq 116\mu\text{m}$.

Velocidad Inicial	Temperatura
$v_i = 5.84 \text{cm/s}$	1.09mK
$v_i = 10.95 \text{cm/s}$	1.15mK
$v_i = 25.55 \text{cm/s}$	1.42mK
$v_i = 43.8 \text{cm/s}$	2.09mK

Tabla 8.5: Diferentes velocidades iniciales y correspondientes temperaturas para un átomo de ^{87}Rb , con el resto de las condiciones iniciales idénticas que se muestran en la tabla 8.4. El sistema se compone además de una cavidad que se localiza en $0.0\mu\text{m} \leq z \leq 116\mu\text{m}$.

En las gráficas 8.9 se observa que los paquetes ψ_+ penetran más en la cavidad mientras son más veloces inicialmente. Sin embargo, todos son reflejados pues la energía cinética no es suficiente para transmitirse dentro de la cavidad. Se observa también que estos paquetes sufren dos contracciones durante el tiempo de interacción y posteriormente se expanden. Los paquetes ψ_- ganan energía durante su cruce por la cavidad y salen con una velocidad mayor a la inicial. El ensanchamiento de estos paquetes es monotónico y el ensanchamiento $\sigma_-(t) \propto \beta(0)$.

Las fases de la función de onda tienen comportamientos similares para potenciales similares, además de ser monotónicas.

8.3 Potencial Mesa

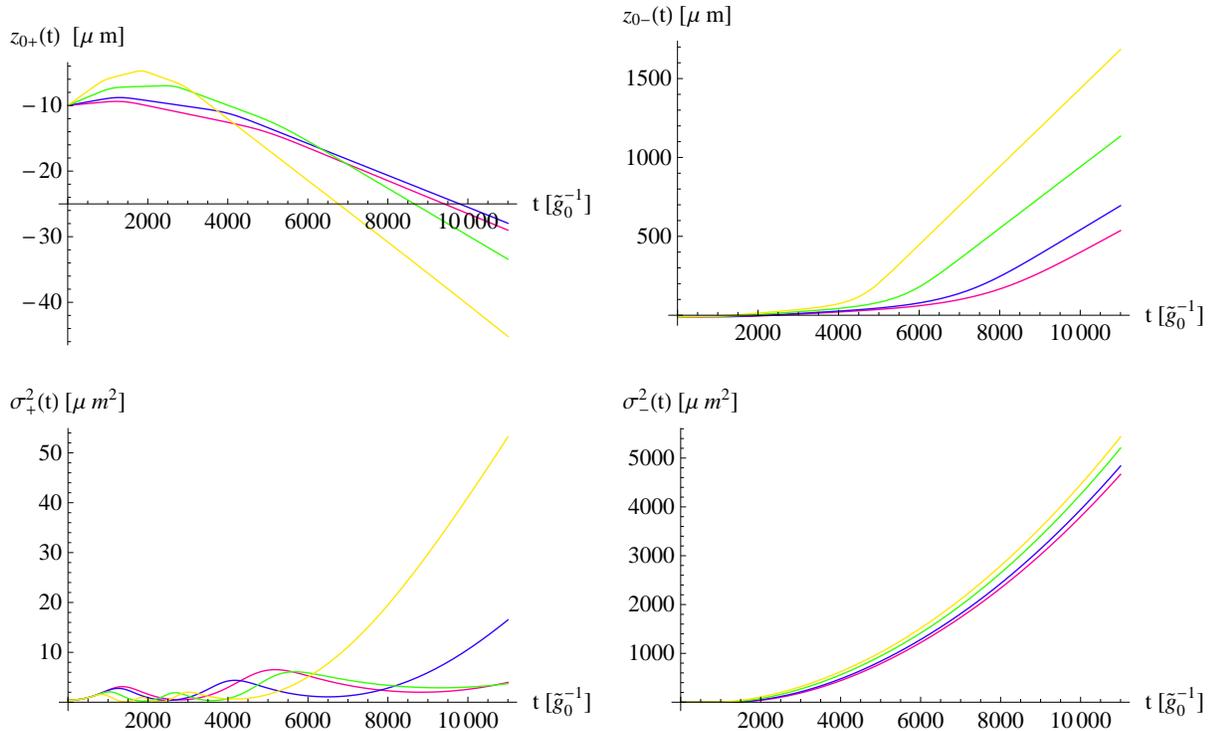


Figura 8.9: Se muestran los resultados numéricos para las funciones $z_{0\pm}(t)$ y $\sigma_{\pm}(t)$ con diferentes valores para la condición inicial $\beta_{\pm}(0)$, del lado izquierdo las funciones referentes al estado ψ_+ , mientras que las funciones del lado derecho corresponden al estado ψ_- . Se muestran varias gráficas que corresponden a diferentes velocidades iniciales, $v_i = 5.84\text{cm/s}$ (color rosa), $v_i = 10.95\text{cm/s}$ (color azul), $v_i = 25.55\text{cm/s}$ (color verde) y $v_i = 43.8\text{cm/s}$ (color amarillo). La cavidad se encuentra localizada en $0.0\mu m \leq z \leq 116\mu m$.

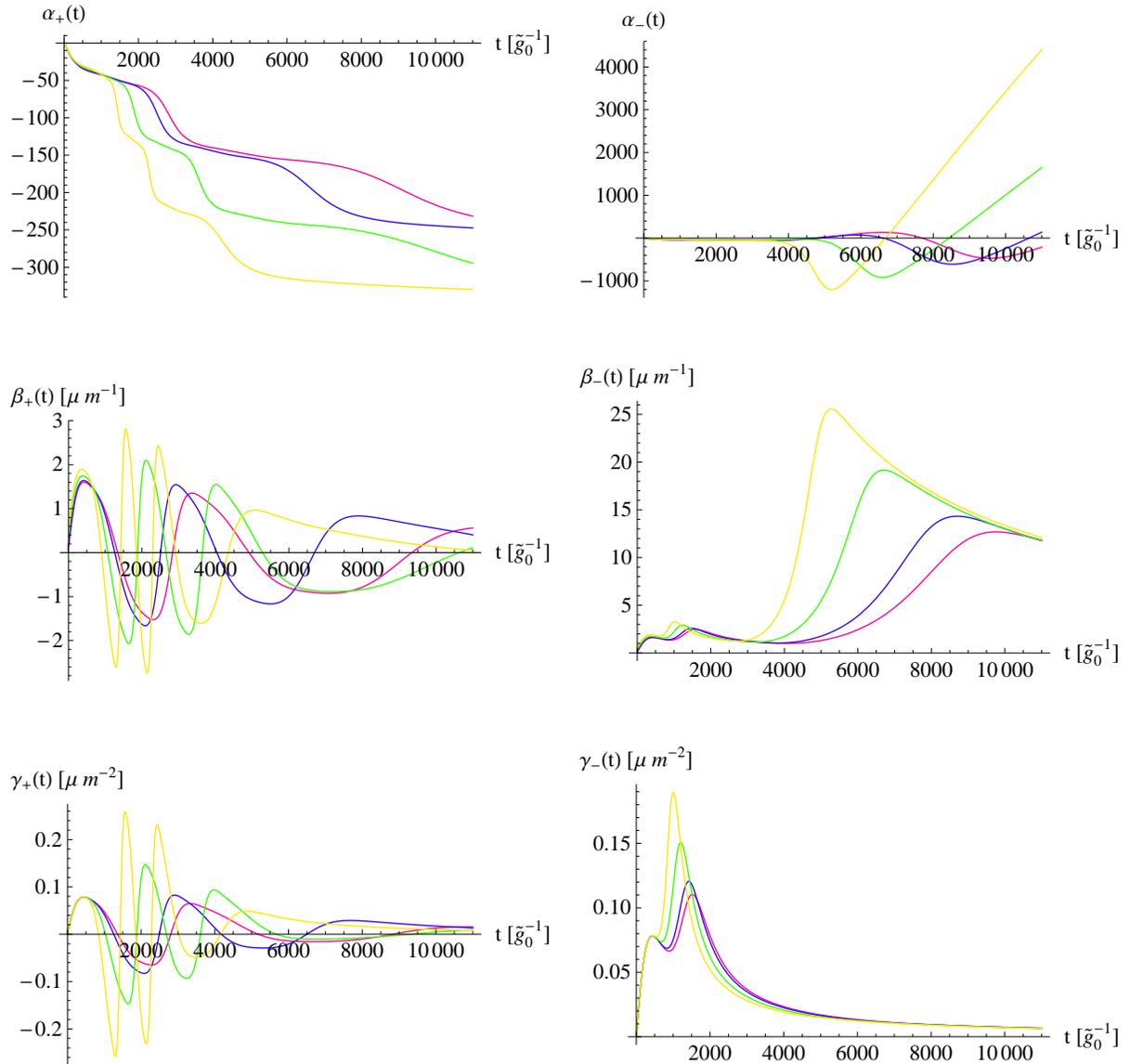


Figura 8.10: Se muestran los resultados numéricos para las funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$ y $\gamma_{\pm}(t)$ con diferentes valores para la condición inicial $\beta_{\pm}(0)$, del lado izquierdo las funciones referentes al estado ψ_+ , mientras que las funciones del lado derecho corresponden al estado ψ_- . Se muestran varias gráficas que corresponden a diferentes velocidades iniciales, $v_i = 5.84\text{cm/s}$ (color rosa), $v_i = 10.95\text{cm/s}$ (color azul), $v_i = 25.55\text{cm/s}$ (color verde) y $v_i = 43.8\text{cm/s}$ (color amarillo). La cavidad se encuentra localizada en $0.0\mu m \leq z \leq 116\mu m$.

8.4. Potencial Gaussiano

El tercer caso que se estudia es el potencial gaussiano, con función $u(z) = e^{-((z-L/2)^2/w_0^2)}$, del cual obtuvimos resultados numéricos para describir la dinámica del átomo cruzando una cavidad. Definimos la longitud de la cavidad en el caso del potencial gaussiano como $L = 4w_0$. El potencial no es nulo en ninguna parte del espacio, pero en esta región es donde ocurre la mayor parte de la interacción, por eso es necesario hacer esta aclaración y multiplicar el término \tilde{g}_0 por un factor de equivalencia entre este potencial y el potencial mesa. En las ecuaciones obtenidas para el potencial gaussiano, multiplicamos $\tilde{g}_0 \rightarrow (4/\sqrt{\pi})\tilde{g}_0$, como se explicó con anterioridad.

Se realizará un estudio para dos posibles valores de L , $L = 4\mu m$ y $L = 116\mu m$, el primer caso se utiliza para comparar los resultados con los que se observan en la dinámica descrita en [45], mientras que el segundo se utiliza de acuerdo a la longitud de la cavidad utilizada por el grupo de *Rempe et.al.* con la intención de vincular la parte teórica con los reportes experimentales.

8.4.1. Potencial gaussiano con $L = 4\mu m$

Comenzamos con la cavidad de $L = 4\mu m$ con forma gaussiana. Observamos el comportamiento de las funciones $z_{0\pm}(t)$ y $\sigma_{\pm}^2(t)$ cuando se hace incidir un átomo con velocidad inicial de $v_i = 5.84\text{cm/s}$.

Condición Inicial	Valor Numérico
$z_{0\pm}(0)$	$-10\mu m$
$\sigma_{\pm}^2(0)$	$0.4\mu m^2$
$\alpha_{\pm}(0)$	0.0
$\beta_{\pm}(0)$	$0.08\mu m^{-1}$
$\gamma_{\pm}(0)$	$0.0\mu m^{-2}$

Tabla 8.6: Tabla de condiciones iniciales para el primer caso de con el potencial gaussiano con $L = 4\mu m$ y con $v_i = 5.84\text{cm/s}$

En la gráfica 8.16 observamos que el paquete ψ_- se transmite y se ensancha, mientras que el paquete ψ_+ se refleja y la incertidumbre del momento oscila durante el tiempo de interacción, para posteriormente expandirse.

Las fases $\beta_{\pm}(t)$ y $\gamma_{\pm}(t)$ tienen comportamientos diferentes durante la región de interacción, pero una vez alcanzado el tiempo de relajación, los comportamientos de ambas funciones son similares al del caso libre.

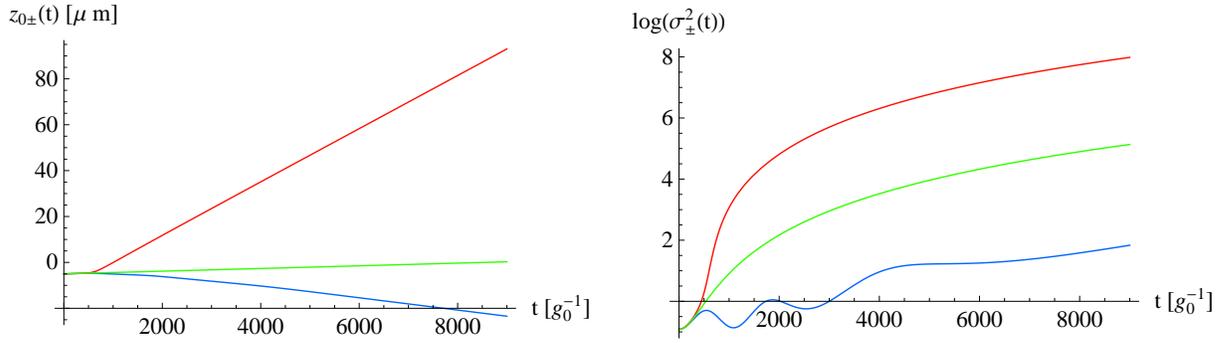
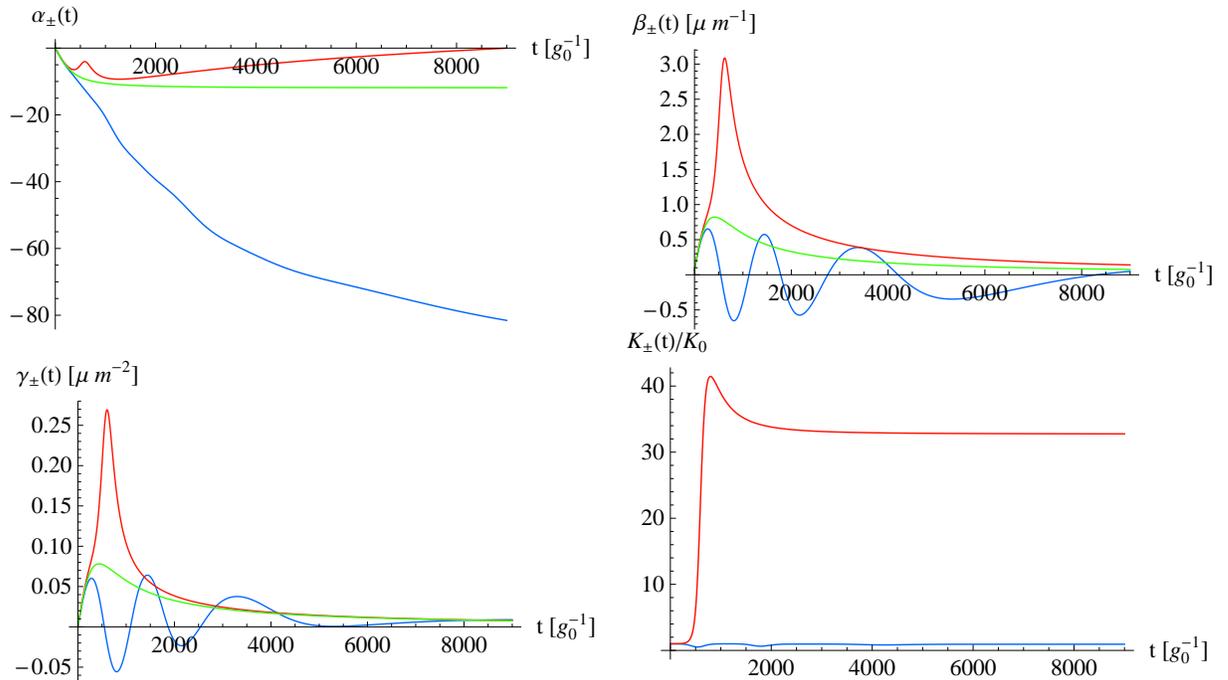


Figura 8.11: Solución numérica de las funciones $z_{0\pm}(t)$ y $\log(\sigma_{\pm}^2(t))$. Las funciones correspondientes al estado ψ_+ (azul) y al estado ψ_- (rojo) son comparadas con las funciones correspondientes al potencial nulo con las mismas características. Estas soluciones numéricas son obtenidas a partir de las condiciones iniciales de la tabla 8.6, que interactúan con el potencial gaussiano de una cavidad localizada en $0\mu\text{m} \leq z \leq 4\mu\text{m}$.



s

Figura 8.12: Solución numérica de las funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$ y $\gamma_{\pm}(t)$, además de la energía cinética normalizada $K_{\pm}(t)/K_0$. Se muestran las funciones correspondientes al estado ψ_+ (color azul). Estas soluciones numéricas son obtenidas a partir de las condiciones iniciales de la tabla 8.6, que interactúan con el potencial gaussiano de una cavidad localizada en $0\mu\text{m} \leq z \leq 4\mu\text{m}$.

8.4 Potencial Gaussiano

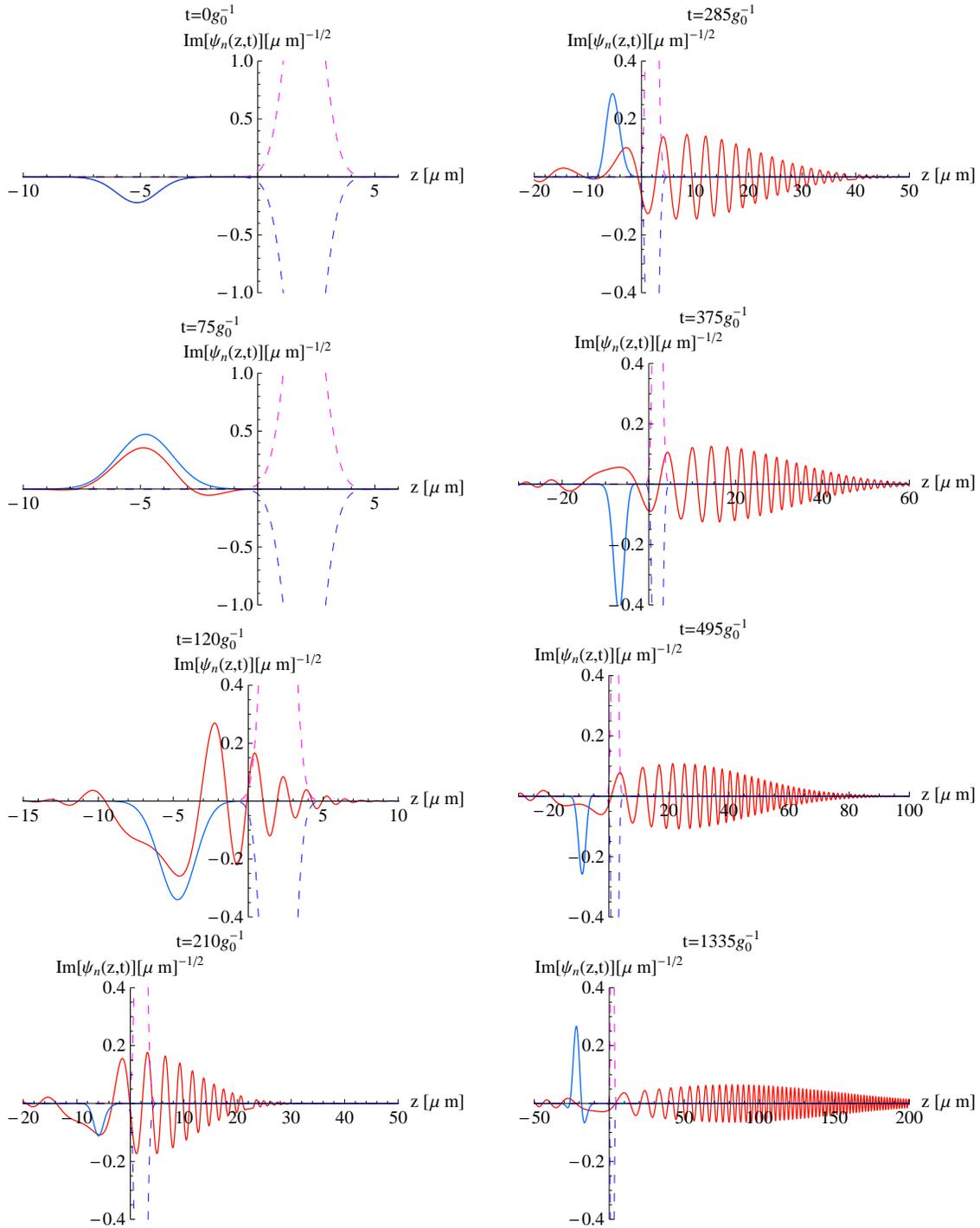


Figura 8.13: Evolución temporal de $Im[\psi_n^\pm(z, t)]$ durante la interacción con el potencial gaussiano de la cavidad. En color rojo $Im[\psi_n^-(z, t)]$ y en color azul $Im[\psi_n^+(z, t)]$. La cavidad se encuentra localizada en $0\mu m \leq z \leq 4\mu m$.

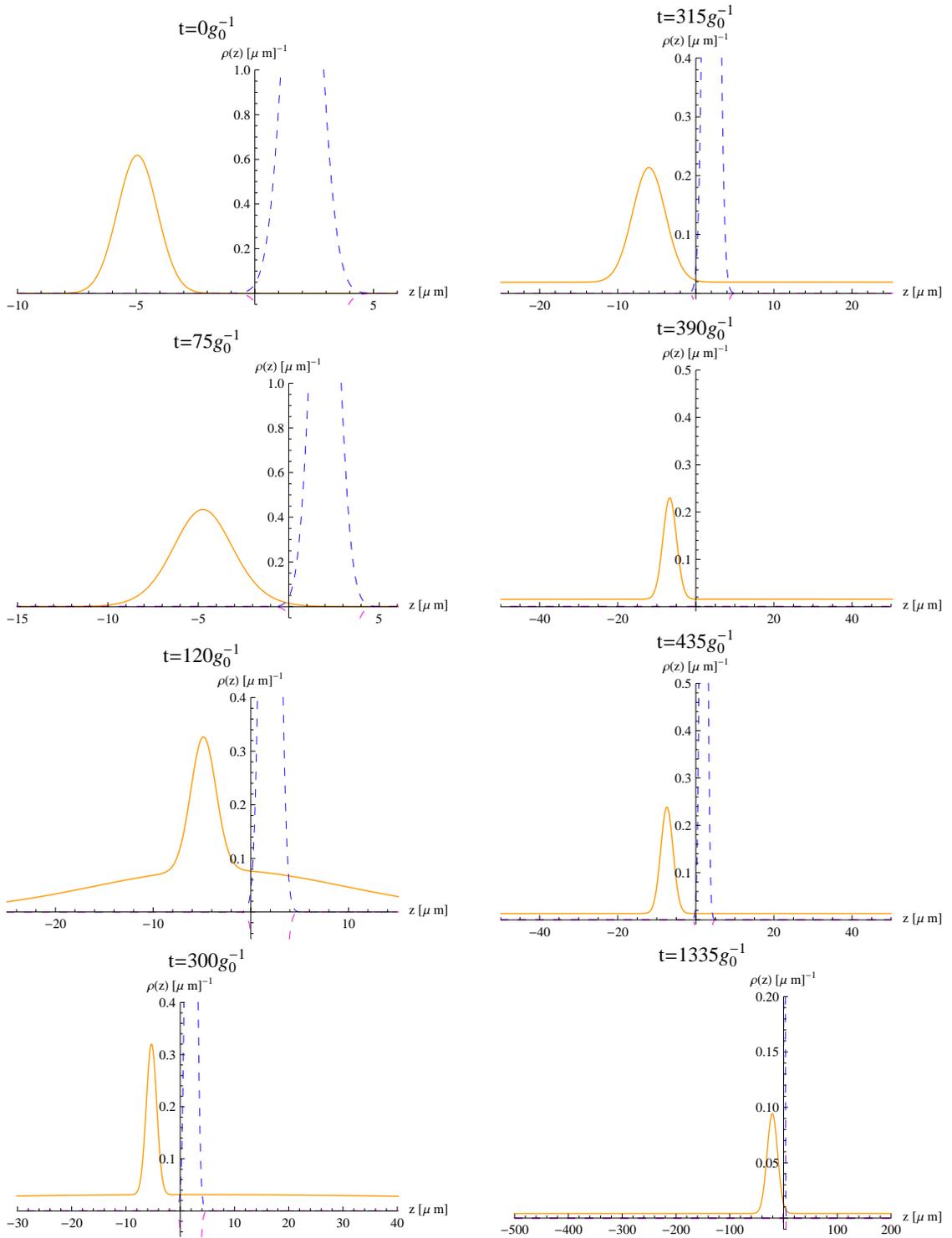


Figura 8.14: Evolución temporal de la función $\rho(z)$ del átomo que interactúa con el potencial gaussiano de la cavidad que está situada en $0\mu m \leq z \leq 4\mu m$.

8.4 Potencial Gaussiano

8.4.2. Potencial gaussiano con $L = 116\mu m$

En esta sección se muestran los resultados obtenidos para la dinámica en el caso con una cavidad de $L = 116\mu m$. Se utilizarán las mismas condiciones iniciales que en los casos anteriores y posteriormente se compararán las funciones involucradas.

Condición Inicial	Valor Numérico
$z_{0\pm}(0)$	$-10\mu m$
$\sigma_{\pm}^2(0)$	$0.4\mu m^2$
$\alpha_{\pm}(0)$	0.0
$\beta_{\pm}(0)$	$0.08\mu m^{-1}$
$\gamma_{\pm}(0)$	$0.0\mu m^{-2}$

Tabla 8.7: Tabla de condiciones iniciales para el segundo caso de con el potencial gaussiano con $L = 116\mu m$ y con $v_i = 5.84\text{cm/s}$

La velocidad inicial correspondiente a la condición inicial $\beta(0) = 0.08\mu m^{-1}$ es $v_i = 5.84\text{cm/s}$, mientras que $\gamma_{\pm}(0) = 0$ nos garantiza que el paquete es inicialmente de mínima incertidumbre.

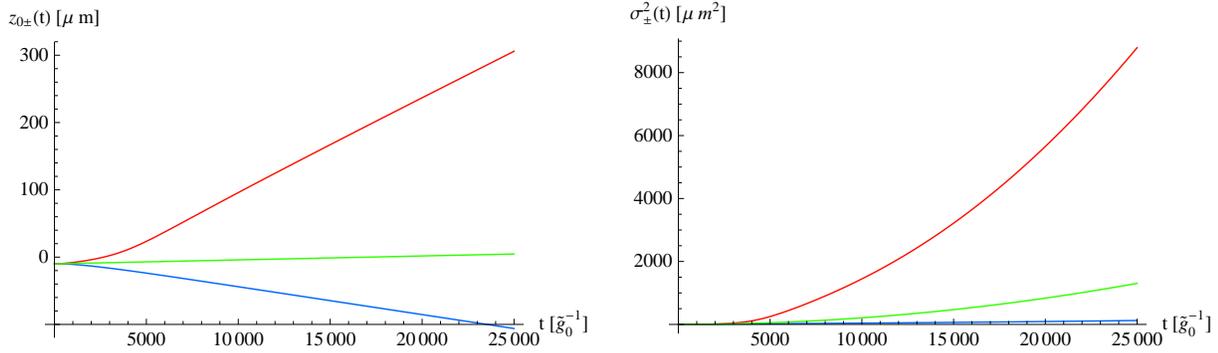


Figura 8.15: Solución numérica de las funciones $z_{0\pm}(t)$ y $\sigma_{\pm}^2(t)$. Las funciones correspondientes al estado ψ_+ (azul) y al estado ψ_- (rojo) son comparadas con las funciones correspondientes al potencial nulo (verde) con las mismas condiciones iniciales. Estas soluciones numéricas son obtenidas con los valores iniciales de la tabla 8.6 para el sistema atómico que interactúa con el potencial gaussiano de una cavidad localizada en $0\mu m \leq z \leq 116\mu m$.

Se puede observar que el paquete ψ_- se transmite dentro de la cavidad, ganando velocidad y sufriendo una expansión mayormente creciente que la del caso libre.

Las fases de la función de onda muestran un desdoblamiento en cada uno de los casos, pero las funciones no sufren cambios súbitos. La energía cinética del paquete ψ_- presenta una ganancia durante el periodo de interacción mucho mayor a la ganancia del paquete ψ_+ , pero ambas presentan un posterior comportamiento asintótico correspondiente a un valor de saturación.

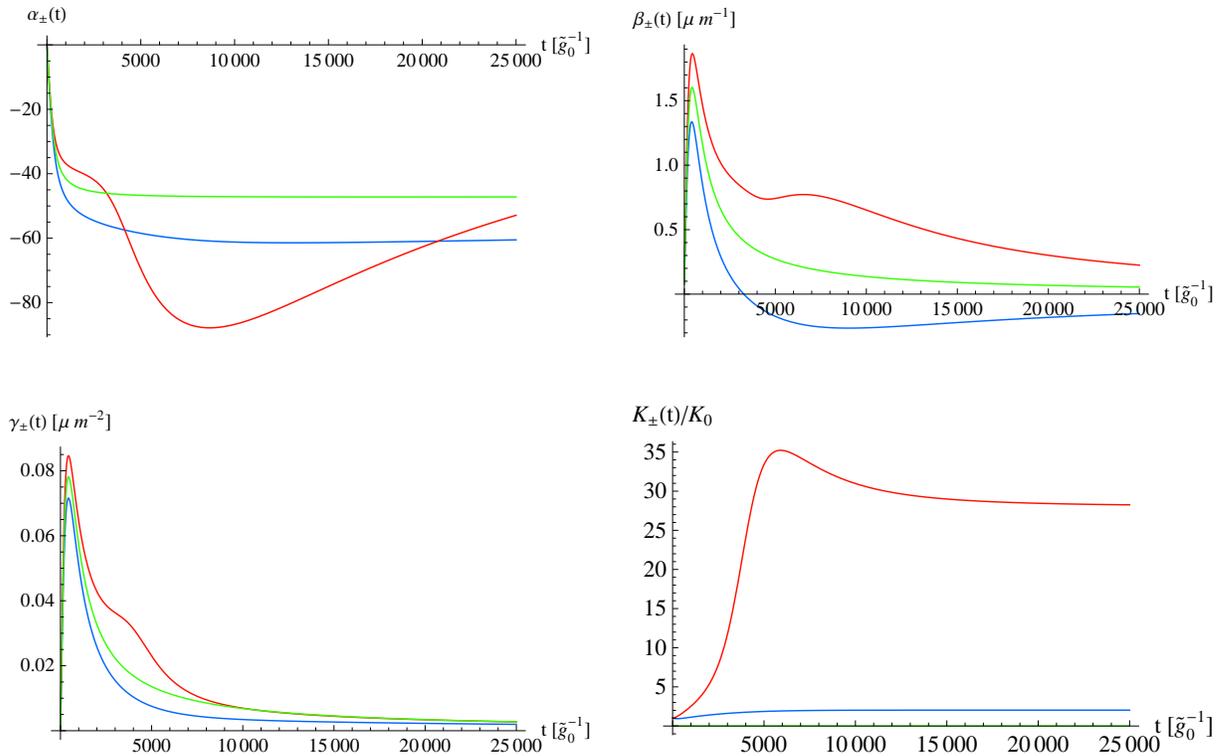


Figura 8.16: Solución numérica de las funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$ y $\gamma_{\pm}(t)$, además de la energía cinética normalizada $K_{\pm}(t)/K_0$. Las funciones correspondientes al estado ψ_+ (azul) y al estado ψ_- (rojo) son comparadas con las funciones correspondientes al potencial nulo (verde) con las mismas condiciones iniciales. Estas soluciones numéricas son obtenidas con los valores iniciales de la tabla 8.6 para el sistema atómico que interactúa con el potencial gaussiano de una cavidad localizada en $0\mu m \leq z \leq 116\mu m$.

8.4 Potencial Gaussiano

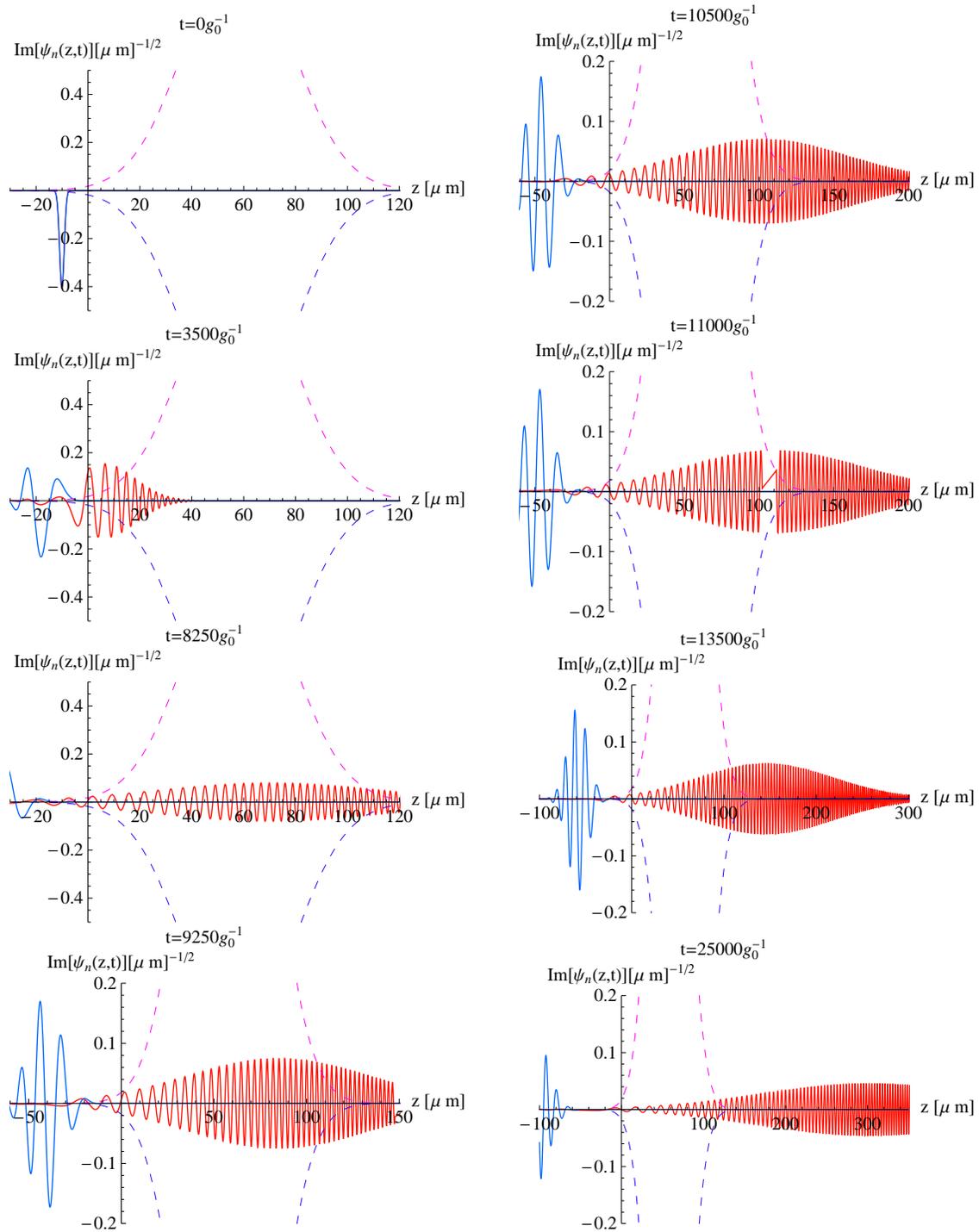


Figura 8.17: Evolución temporal de $\text{Im}[\psi_n^\pm(z, t)]$ a lo largo de la interacción con el potencial gaussiano de la cavidad que tiene como función $u(z) = \exp(-(z - L/2)^2/w_0^2)$. En color rojo $\text{Im}[\psi_n^-(z, t)]$, en color azul $\text{Im}[\psi_n^+(z, t)]$. La cavidad se encuentra localizada en $0\mu\text{m} \leq z \leq 116\mu\text{m}$.

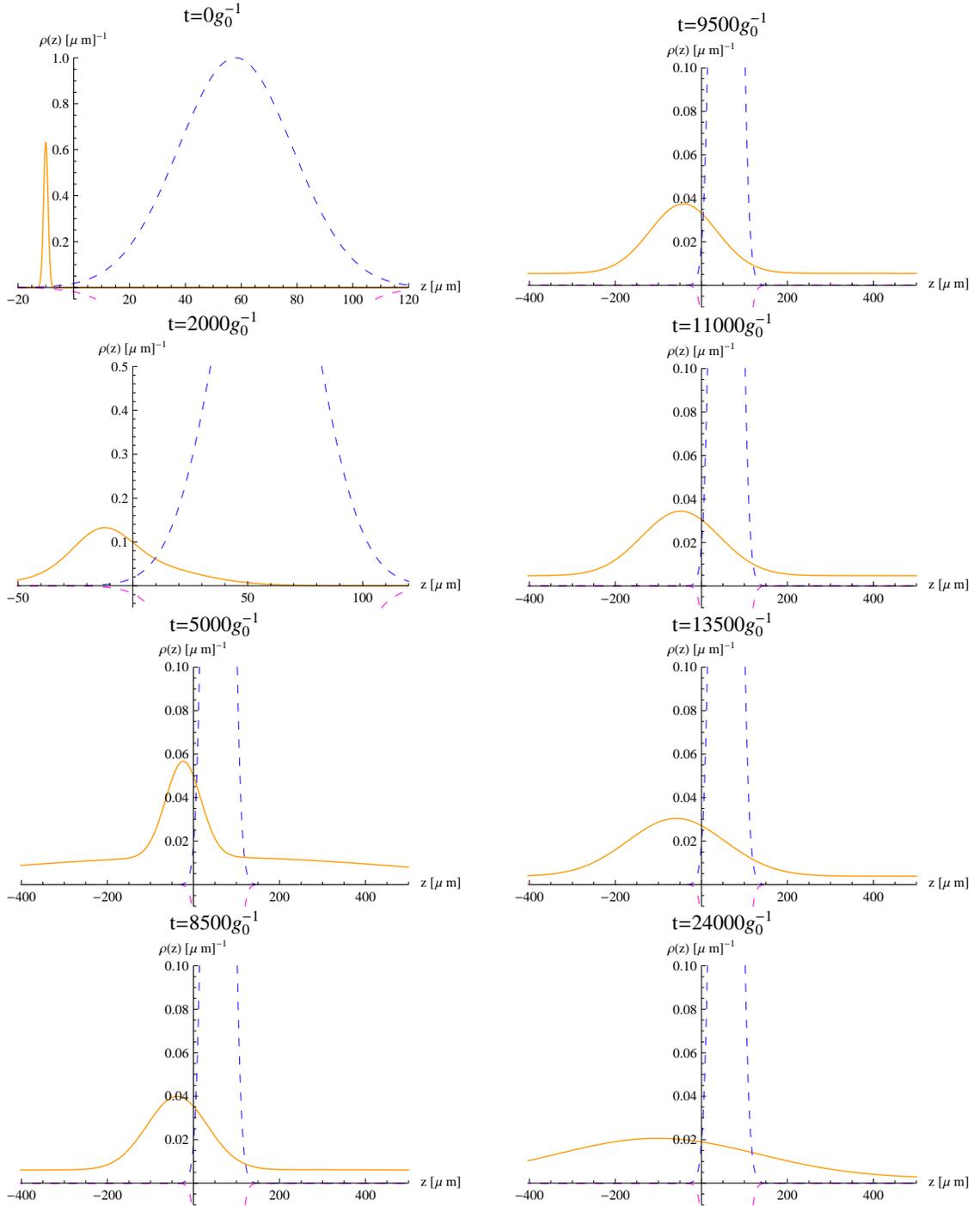


Figura 8.18: Evolución temporal de la función $\rho(z)$ del átomo que interactúa con el potencial gaussiano de la cavidad que tiene como función $u(z) = \exp((z - L/2)^2/w_0^2)$. La cavidad está situada en $0\mu\text{m} \leq z \leq 116\mu\text{m}$.

8.4 Potencial Gaussiano

8.4.3. Variación de la velocidad para el caso con potencial gaussiano

Se ha estudiado la dinámica para dos diferentes longitudes de la cavidad con un potencial gaussiano. Ahora se muestra la manera en que se modifica la dinámica y las funciones paramétricas variando las velocidades iniciales.

De manera similar al caso del potencial mesa, se modifica la velocidad manteniendo el resto de las condiciones iniciales intactas para todos los casos. Las condiciones iniciales constantes se muestran en la tabla 8.8 y todos los casos comienzan con un paquete de mínima incertidumbre.

Condición Inicial	Valor Numérico
$z_{0\pm}(0)$	$-10\mu m$
$\sigma_{\pm}^2(0)$	$0.4\mu m^2$
$\alpha_{\pm}(0)$	0.0
$\gamma_{\pm}(0)$	$0.0\mu m^{-2}$

Tabla 8.8: Tabla de condiciones iniciales con las cuales se estudia la dependencia de la velocidad para caso con potencial gaussiano de la cavidad con $L = 116\mu m$, ubicada en $0\mu m < z < 116\mu m$.

En las gráficas 8.19 se observa que los paquetes ψ_+ pierde energía mientras se acerca al potencial alcanzando un mínimo y gana energía cinética posteriormente. Después de ese periodo de interacción tiene un comportamiento asintótico y una relación $K_+/K_0 \propto 1/v_i$. Para el paquete ψ_- se observa una ganancia gradual y semejante en cada uno de los casos, presentando un máximo, y después K_- alcanza un valor de saturación. En este caso podemos observar que el comportamiento no es monotónico.

Velocidad Inicial	Temperatura
$v_i = 5.84\text{cm/s}$	1.09mK
$v_i = 10.95\text{cm/s}$	1.15mK
$v_i = 25.55\text{cm/s}$	1.42mK
$v_i = 43.8\text{cm/s}$	2.09mK

Tabla 8.9: Diferentes velocidades iniciales y temperaturas correspondientes para un átomo de ^{87}Rb , con el resto de las condiciones iniciales idénticas que se muestran en la tabla 8.8. El sistema se compone además de una cavidad que se localiza en $0.0\mu m \leq z \leq 116\mu m$.

En esta parte donde se describen los parámetros temporales dependientes de la velocidad, se observa que los paquetes ψ_+ presentan una reflexión al arribar a la región de interacción,

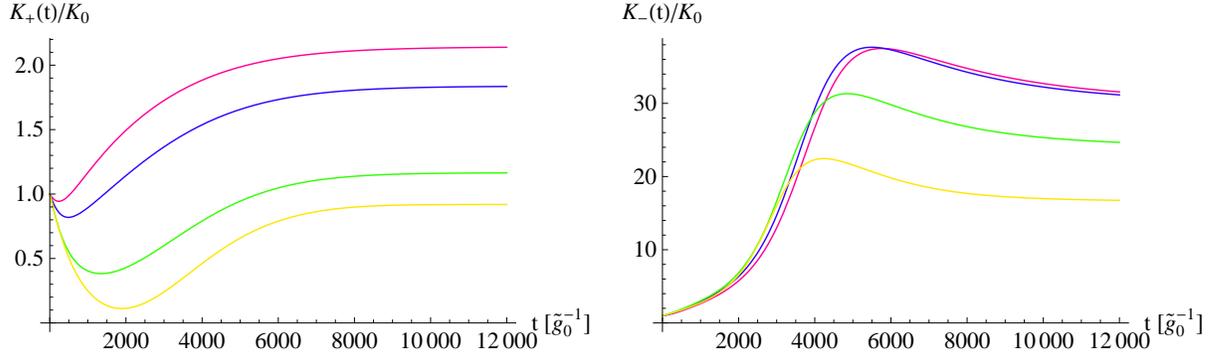


Figura 8.19: Gráficas de la energía cinética normalizada $K_{\pm}(t)/K_0$, donde K_0 corresponde a la energía cinética del caso donde el potencial es nulo. En el lado izquierdo se muestra la energía cinética normalizada para el paquete ψ_+ , en el lado derecho la energía cinética normalizada del paquete ψ_- . Se muestran varias gráficas correspondientes a diferentes velocidades iniciales, $v_i = 5.84\text{cm/s}$ (color rosa), $v_i = 10.95\text{cm/s}$ (color azul), $v_i = 25.55\text{cm/s}$ (color verde) y $v_i = 43.8\text{cm/s}$ (color amarillo). La cavidad se encuentra localizada en $0.0\mu\text{m} \leq z \leq 116\mu\text{m}$.

penetrando más el paquete más energético. Al suceder esto se observa que sufre una contracción y una posterior expansión.

Cabe mencionar la posible utilidad para controlar la dispersión de paquete ψ_+ , ya que para tiempos largos la dispersión en los paquetes más energéticos no ha crecido tanto como en los menos energéticos. Para los paquetes ψ_- observamos una inminente transmisión y cruce de la cavidad, el ensanchamiento corresponde a una dependencia proporcional con la ganancia de energía.

Todas las fases presentan desdoblamientos que obedecen a la interacción con el potencial. Los desdoblamientos más drásticos ocurren con los paquetes más energéticos.

8.4 Potencial Gaussiano

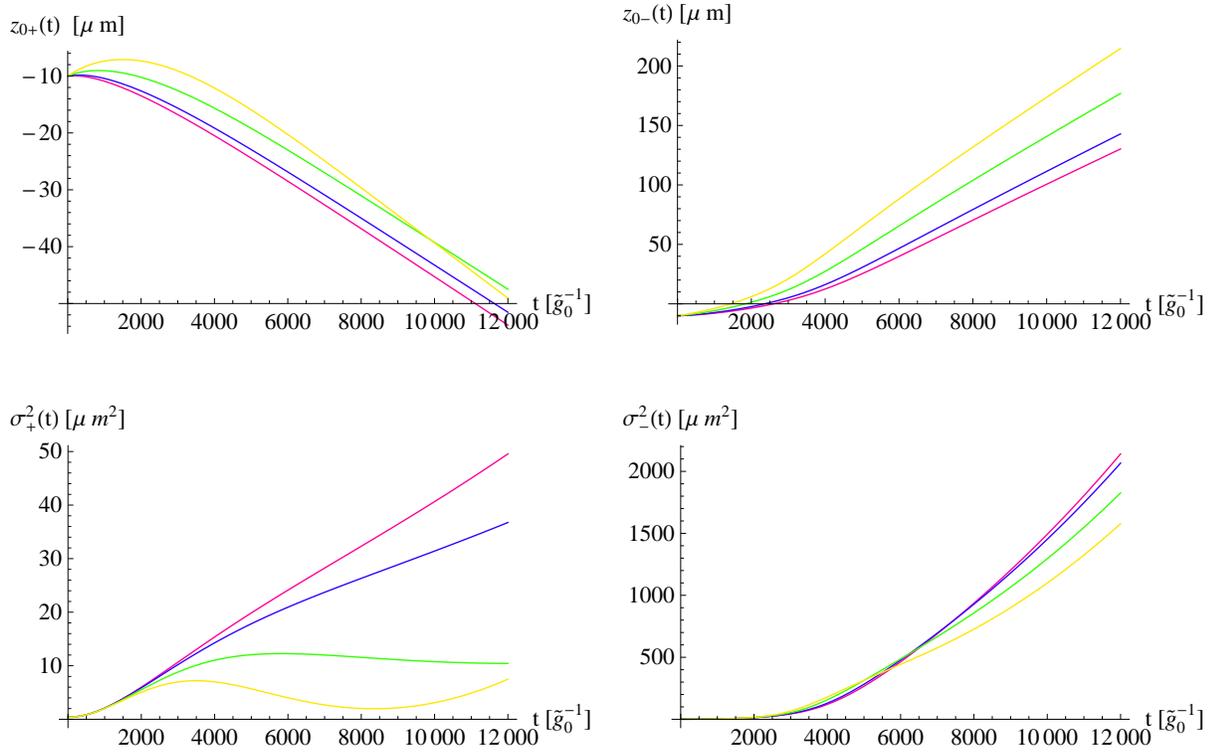


Figura 8.20: Se muestran los resultados numéricos para las funciones $z_{0\pm}(t)$ y $\sigma_{\pm}(t)$ con diferentes valores para la condición inicial $\beta_{\pm}(0)$. Del lado izquierdo las funciones referentes al estado ψ_+ ; del lado derecho corresponden al estado ψ_- . Se muestran varias gráficas que corresponden a diferentes velocidades iniciales, $v_i = 5.84\text{cm/s}$ (color rosa), $v_i = 10.95\text{cm/s}$ (color azul), $v_i = 25.55\text{cm/s}$ (color verde) y $v_i = 43.8\text{cm/s}$ (color amarillo). La cavidad se encuentra localizada en $0.0\mu\text{m} \leq z \leq 116\mu\text{m}$.

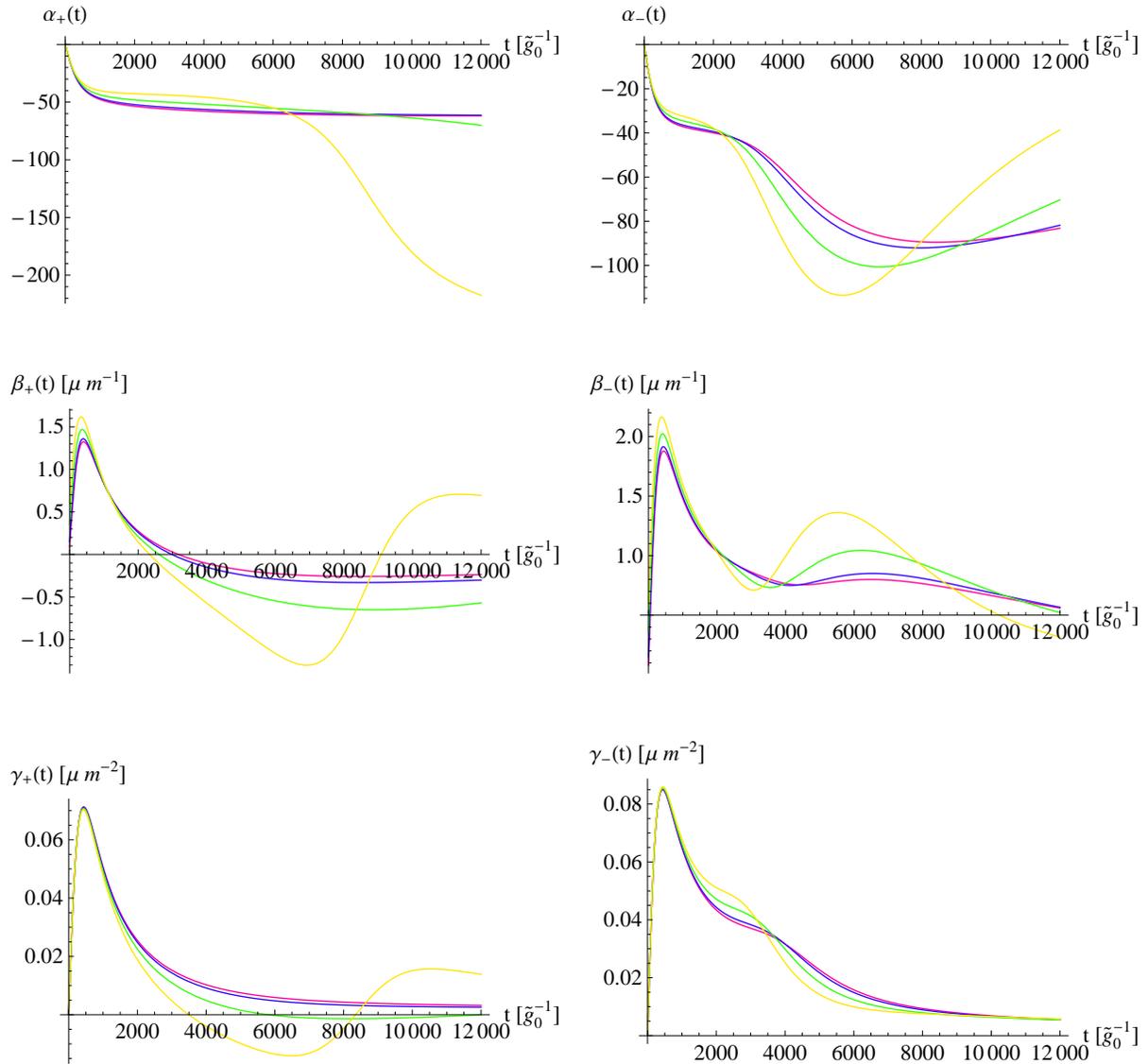


Figura 8.21: Se muestran los resultados numéricos para las funciones $\alpha_{\pm}(t)$, $\beta_{\pm}(t)$ y $\gamma_{\pm}(t)$ con diferentes valores para la condición inicial $\beta_{\pm}(0)$, del lado izquierdo las funciones referentes al estado ψ_+ ; del lado derecho corresponden al estado ψ_- . Se muestran varias gráficas que corresponden a diferentes velocidades iniciales, $v_i = 5.84$ cm/s (color rosa), $v_i = 10.95$ cm/s (color azul), $v_i = 25.55$ cm/s (color verde) y $v_i = 43.8$ cm/s (color amarillo). La cavidad se encuentra localizada en $0.0 \mu m \leq z \leq 116 \mu m$.

8.5. Comparación Entre los Distintos Potenciales

Los potenciales a comparar son el potencial gaussiano y el potencial mesa, ambos con $L = 116\mu\text{m}$. La dinámica se ve modificada debido a la estructura de cada potencial, mientras que el volumen efectivo se ha mantenido igual en ambos casos multiplicando la intensidad de acoplamiento en el caso del potencial gaussiano por un factor $4/\sqrt{\pi}$. De esta manera, tenemos el mismo volumen del modo en cada caso.

Condición Inicial	Valor Numérico
$z_{0\pm}(0)$	$-10\mu\text{m}$
$\sigma_{\pm}^2(0)$	$0.4\mu\text{m}^2$
$\alpha_{\pm}(0)$	0.0
$\beta_{\pm}(0)$	$0.08\mu\text{m}^{-1}$
$\gamma_{\pm}(0)$	$0.0\mu\text{m}^{-2}$

Tabla 8.10: Tabla de condiciones iniciales con las cuales se estudia la comparación de la dinámica para los potenciales mesa y gaussiano en una cavidad ubicada en $L = 116\mu\text{m}$, en $0\mu\text{m} < z < 116\mu\text{m}$.

De acuerdo con las gráficas 8.22, se observa que la geometría de los potenciales tiene un efecto considerable en la transmisión o reflexión de los paquetes. El potencial mesa actúa sobre el paquete ψ_+ de manera más brusca que el potencial gaussiano, mientras que el para el paquete ψ_- el potencial gaussiano produce un aumento de velocidad mayor que el que genera el potencial mesa.

De acuerdo con la interacción producida por diferentes potenciales, se observa que la ganancia de energía depende de la geometría del potencial. Al alcanzar el tiempo de relajación, el paquete ψ_+ duplica la energía inicial al interactuar con el potencial gaussiano y permanece casi sin cambios cuando interactúa con el potencial mesa. La ganancia del paquete ψ_- es mucho mayor para el potencial mesa que para el potencial gaussiano. La discontinuidad del potencial mesa genera un efecto de amplificación de la ganancia.

8.5 Comparación Entre los Distintos Potenciales

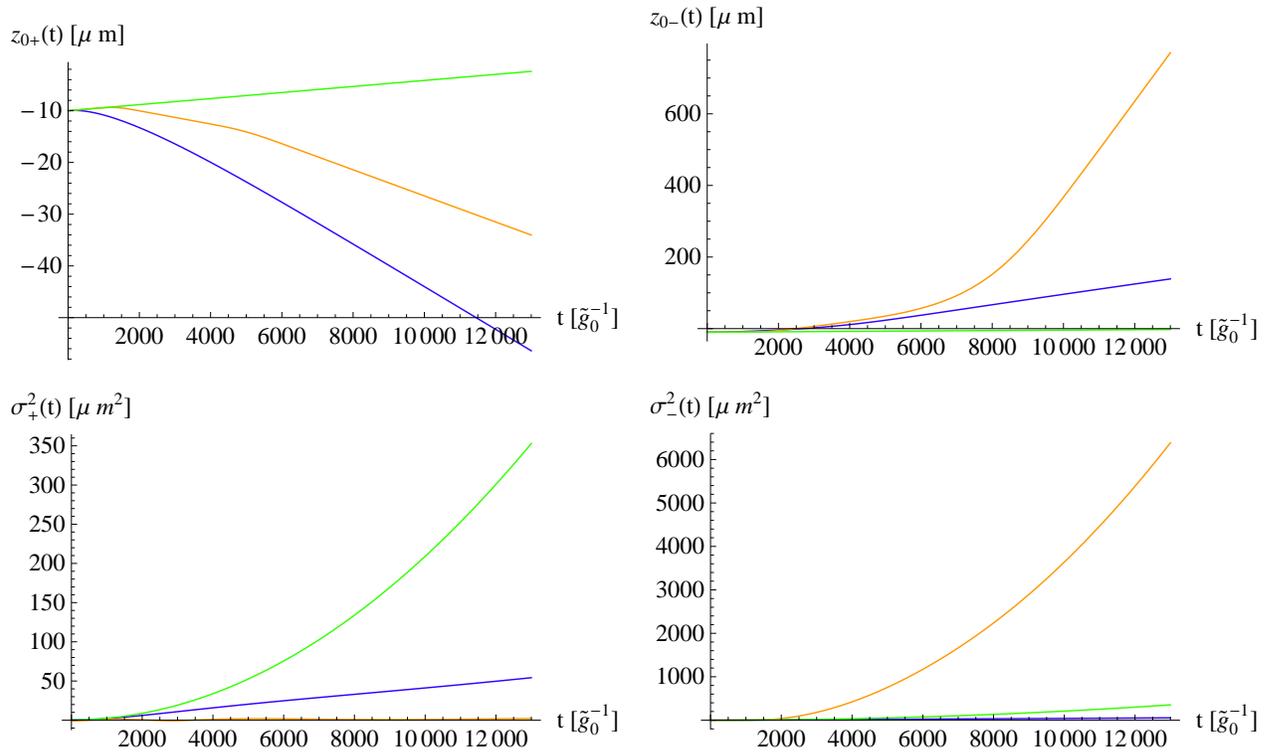


Figura 8.22: Diferencia en la dependencia temporal de las funciones $z_{0\pm}(t)$ y $\sigma_{\pm}(t)$, de acuerdo al potencial presente en la cavidad, gaussiano (azul) y mesa (amarillo), se comparan con el potencial nulo (verde), todos tienen las mismas condiciones iniciales de la tabla 8.10, en ambos casos la cavidad que está situada en $0\mu\text{m} \leq z \leq 116\mu\text{m}$.

8.5 Comparación Entre los Distintos Potenciales

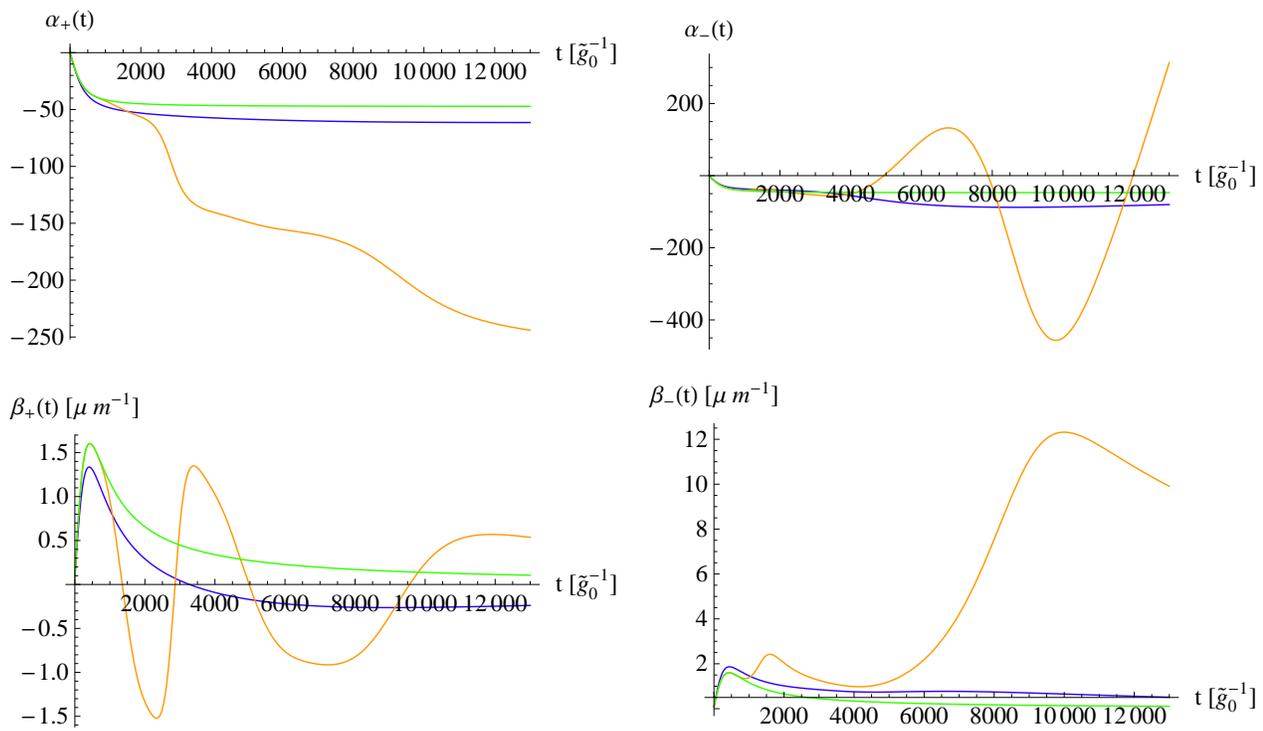


Figura 8.23: Diferencia en la dependencia temporal de las funciones $\alpha_{\pm}(t)$ y $\beta_{\pm}(t)$. De acuerdo con el potencial presente en la cavidad, gaussiano (azul) y mesa (amarillo) se comparan con el potencial nulo (verde). Todos tienen las mismas condiciones iniciales de la tabla 8.10. En ambos casos la cavidad que está situada en $0\mu m \leq z \leq 116\mu m$.

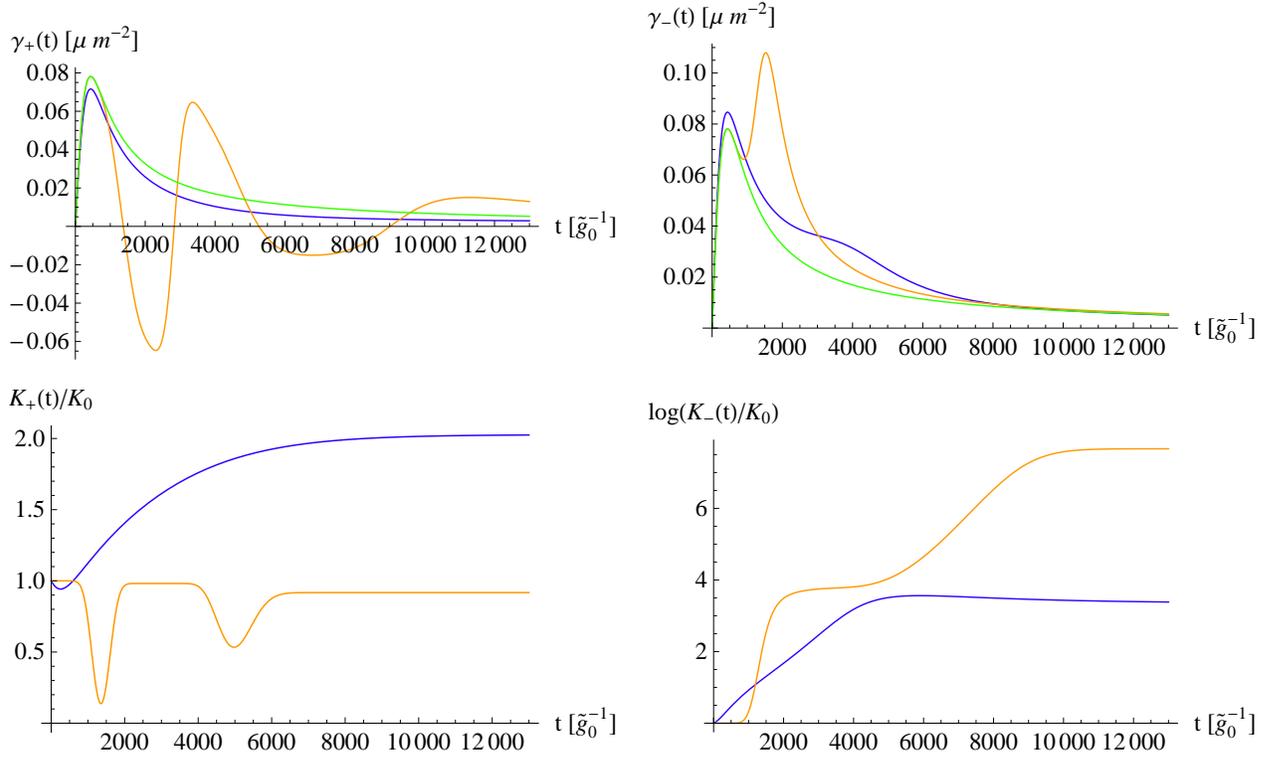


Figura 8.24: Diferencia en la dependencia temporal de las funciones $\gamma_{\pm}(t)$ y la energía cinética normalizada $K_{\pm}(t)/K_0$. De acuerdo con potencial presente en la cavidad, gaussiano (azul) y mesa (amarillo), ambas normalizadas a la energía cinética que presenta el caso de potencial nulo, todos tienen las mismas condiciones iniciales de la tabla 8.10, en ambos casos la cavidad está situada en $0\mu m \leq z \leq 116\mu m$.

Conclusiones

Los objetivos de este trabajo han sido alcanzados de manera satisfactoria ya que se logró estudiar, en una primera aproximación, la estructura teórica de la dinámica de un átomo a muy bajas velocidades interactuando con la radiación electromagnética contenida en una cavidad. Esto se realizó en el contexto de la aproximación adiabática.

El planteamiento presentado en esta tesis asume la estabilidad estructural de un paquete gaussiano, lo que genera una descripción simple cuya validez requiere una comparación con resultados más precisos. Cabe resaltar que la descripción numérica detallada de la evolución de un paquete gaussiano es muy costosa computacionalmente hablando [45], mientras que la sencillez de nuestro planteamiento requiere un bajo costo numérico.

Las ecuaciones diferenciales obtenidas para los parámetros que especifican la evolución temporal del paquete gaussiano se obtuvieron a partir de cálculos provenientes de los valores esperados de algunos operadores. Este camino resultó ser útil y eficaz para obtener la dependencia temporal que nos interesaba, pues eliminaba la dependencia espacial que se recupera una vez determinada la primera.

A continuación presentaremos una breve comparación entre nuestra aproximación y la descripción exacta. En la figura 8.25 se muestran los resultados exactos para el caso de desintonamiento cero y una cavidad como la descrita en la sección 8.4.1. Podemos destacar que el comportamiento promedio de la parte transmitida ψ_- es similar en ambos casos, y de manera general nuestro modelo obedece la dinámica establecida por el caso exacto. Los tiempos de interacción con la cavidad son similares, considerando las diferencias entre cada uno de los casos específicos, como la posición inicial, la velocidad inicial y la dispersión en la posición. Por otro lado, en la parte reflejada correspondiente a ψ_+ no se observa ese grado de similitud. El caso exacto presenta un rompimiento drástico de la estructura gaussiana que en nuestro modelo es imposible reproducir ya que por la hipótesis inicial, nuestro paquete gaussiano permanece gaussiano. Sin embargo, los valores promedio de ambas descripciones son semejantes.

Los resultados obtenidos muestran el carácter cuántico de la interacción. Al aumentar la energía cinética, los efectos cuánticos resultado del Hamiltoniano de JC sobre el sistema son menos observables, el desdoblamiento de las funciones \pm es menos evidente y los estados ψ_+ y ψ_- alcanzan de nuevo las obtenidas de manera semi-clásica o para la partícula libre.

En los casos presentados, el paquete ψ_- gana energía al cruzar la región de interacción, de modo que al abandonar la cavidad la energía cinética alcanza un valor asintótico temporalmente. Podemos ver que la discontinuidad del potencial mesa produce un efecto amplificador en la ganancia de energía cinética sobre el paquete transmitido ψ_- , en comparación con el

8.5 Comparación Entre los Distintos Potenciales

caso gaussiano. Hasta el momento no es posible entender con claridad este incremento de energía cinética, que es, sin embargo, función no monotónica del tiempo de permanencia dentro de la cavidad. Sería también importante estudiar esta ganancia en términos de la profundidad del pozo. En nuestro caso las ganancias del orden de $10^3 K_0$, reportados en la sección ?? son un orden de magnitud menores a la profundidad del pozo de potencial. También observamos que la anchura de los paquetes transmitidos y reflejados pudiera ser manipulada controlando la velocidad inicial de los paquetes, además de la geometría del potencial.

Dentro de las limitantes del modelo planteado en este trabajo, se establece la imposibilidad de la transmisión parcial de ψ_+ y la reflexión parcial de ψ_- , como existe en [45], que tiene detrás un desarrollo numérico sofisticado. La posibilidad de obtener ciertos coeficientes de transmisión T_{\pm} y de reflexión R_{\pm} para cada estado se puede subsanar sin modificar el perfil gaussiano, simplemente proponiendo que el paquete tenga la posibilidad de desplazarse en 2 paquetes para cada estado \pm . De manera explícita, se sugiere que la propuesta de solución a la ecuación de Schrödinger sea de la siguiente manera

$$\Psi_{\pm}(z, t) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi\sigma_{\pm}^2(t)}} e^{-\left(\frac{z-z_{0\pm}(t)}{4\sigma_{\pm}(t)}\right)^2} e^{i(\alpha_{\pm}(t)+\beta_{\pm}(t)z+\gamma_{\pm}(t)z^2)} + \frac{1}{4\sqrt{2\pi\Sigma_{\pm}^2(t)}} e^{-\left(\frac{z-Z_{0\pm}(t)}{4\Sigma_{\pm}(t)}\right)^2} e^{i(\epsilon_{\pm}(t)+\zeta_{\pm}(t)z+\eta_{\pm}(t)z^2)}.$$

La posibilidad de separarse en dos paquetes gaussianos por estado permite la existencia de los coeficientes R_{\pm} y T_{\pm} . La función de onda propuesta deberá cumplir las siguientes condiciones iniciales

$$z_{\pm}(0) = Z_{\pm}(0)$$

$$\sigma_{\pm}^2(0) = \Sigma_{\pm}(0)$$

$$\alpha_{\pm}(0) = 0 = \epsilon_{\pm}(0)$$

$$\beta_{\pm}(0) = \zeta_{\pm}(0)$$

$$\gamma_{\pm}(0) = 0 = \eta_{\pm}(0)$$

Este planteamiento elimina la limitante presentada y permite la existencia de los coeficientes T_{\pm} y R_{\pm} . También surge la posibilidad de ampliar la función de prueba para incluir efectos no adiabáticos.

En lo personal, una de las principales virtudes de este trabajo es que el uso de parámetros experimentales utilizados por el grupo de Rempe nos permite vincular la parte teórica y la parte experimental de la CQED. Otro de los puntos resaltables de este estudio es la versatilidad de aplicarlo a cavidades con cualquier potencial, además de observar que este modelo funciona mejor para cavidades largas, donde T_+ y R_- toman menos importancia.

8.5 Comparación Entre los Distintos Potenciales

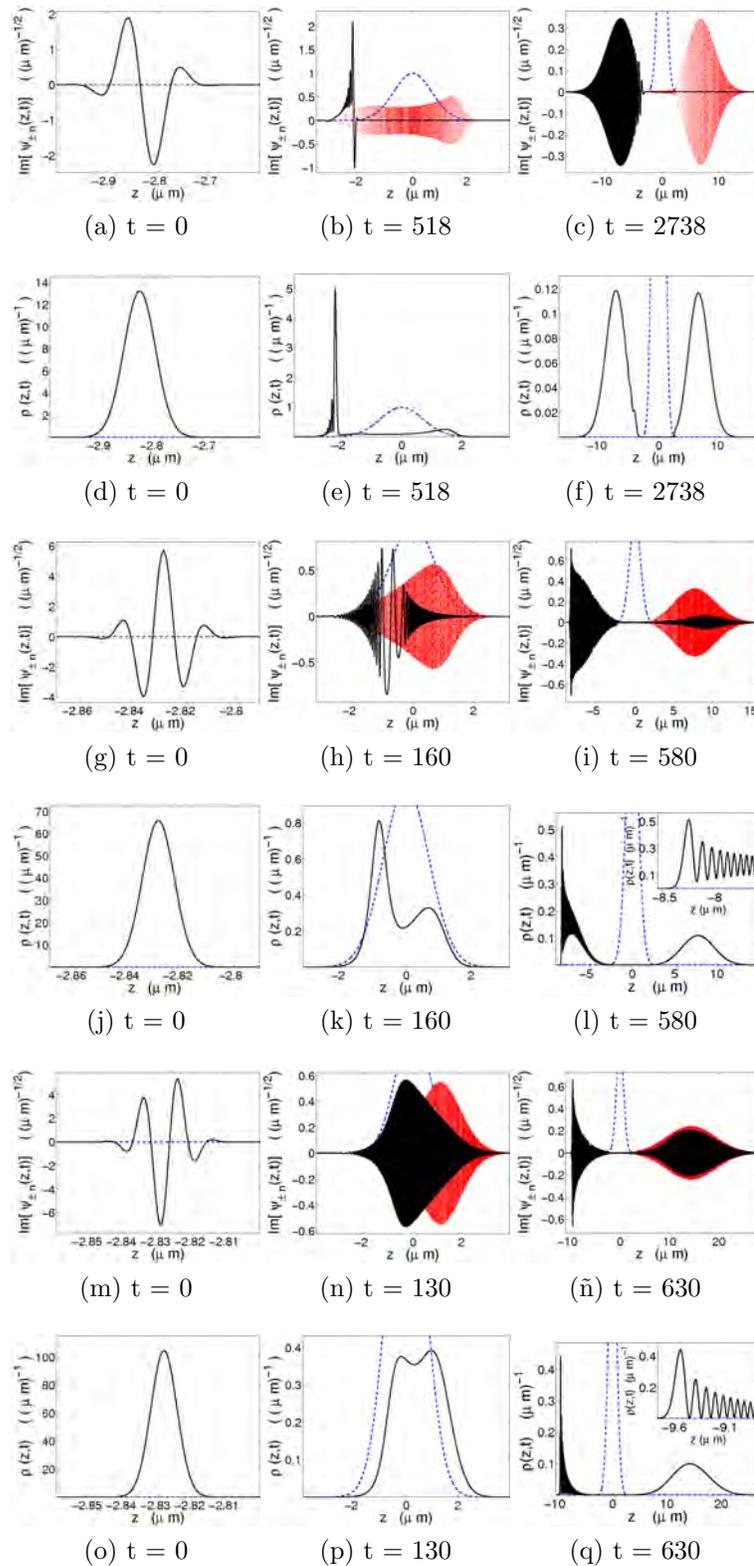


Figura 8.25: Evolución de $Im[\psi_{+0}(z,t)]$ (negro) e $Im[\psi_{-0}(z,t)]$ para casos en el mazer. Los primeros dos renglones corresponden a una velocidad inicial $v_0 = 3.9\text{cm/s}$; los renglones tercero y cuarto corresponden a una velocidad inicial $v_0 = 27\text{cm/s}$, mientras que los últimos dos renglones a una dinámica con $v_0 = 43\text{cm/s}$, el potencial en $u(z)$ (azul). [45]

8.5 Comparación Entre los Distintos Potenciales

Trabajos posteriores

Como extensión de este trabajo realizado se propone:

- Utilizar la doble gaussiana como solución a la función de onda, lo cual permitiría la posibilidad de la transmisión parcial de ψ_+ y la reflexión parcial de ψ_- .
- Realizar el cálculo de los coeficientes T_{\pm} y R_{\pm} .
- Explorar la dependencia de la evolución temporal en función del desentonamiento, trabajando más allá de la aproximación adiabática.
- Analizar correlaciones cuánticas como entrelazamiento.

Apéndice A

Funciones Especiales

A.1. Función Unitaria de Heaviside

La función unitaria de Heaviside en algunos casos es denotada como $H(x)$, $\theta(x)$ o $u(x)$, pero debido a la notación que se ha utilizado a lo largo de este trabajo, se denotará como $\mathbb{H}(x)$. La función de Heaviside debe su nombre al matemático inglés Oliver Heaviside y existe una discusión acerca de la definición específica en el punto de discontinuidad.

La función de Heaviside genera una discusión en $\mathbb{H}(0)$. Utilizaremos la definición acordada en varios textos con $\mathbb{H}(0) = 1/2$

$$\mathbb{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

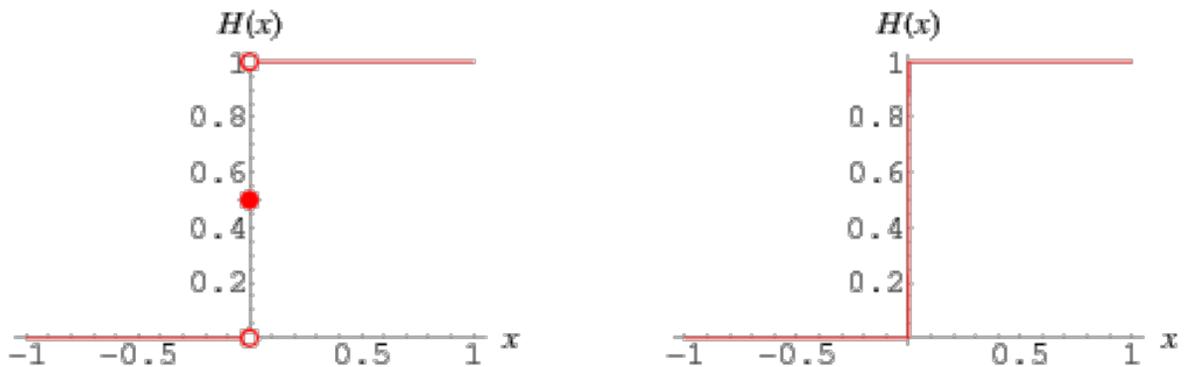


Figura A.1: Función de Heaviside

A.1 Función Unitaria de Heaviside

La función de Heaviside puede ser aproximada por diferentes caminos; uno muy conveniente es el siguiente:

$$H(-x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{\epsilon}{x}\right) \quad (\text{A.2})$$

con las gráficas que se muestran en la figura A.2

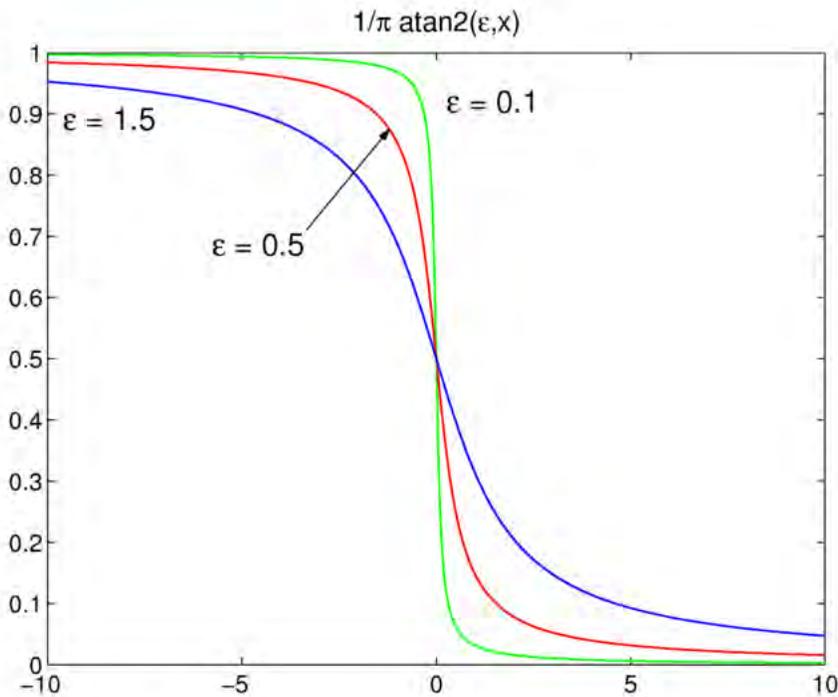


Figura A.2: Aproximación a la función de $H(-x)$ por medio de $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{\epsilon}{x}\right)$

La función de Heaviside cumple con el siguiente conjunto de propiedades:

$$\begin{aligned} H(-x) &= 1 - H(x), \\ \frac{d}{dx} H(x - a) &= \delta(x - a), \\ H(x) &= \int_{-\infty}^x \delta(t) dt, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

el cual fue de gran utilidad en el trabajo que se ha realizado.

A.2. Función Error

La función error es una función especial que ha demostrado tener una gran importancia en el área de la Estadística y la Probabilidad [53], aunque sus alcances recientes se involucran con importantes desarrollos tanto en matemáticas como en física. Es así como a la función error $\text{erf}(x)$ actualmente se le puede encontrar relacionada tanto con funciones de Kummer, así como con transformadas de Hankel, las cuales son una importante herramienta computacional en el campo de la óptica, acústica y geofísica [55].

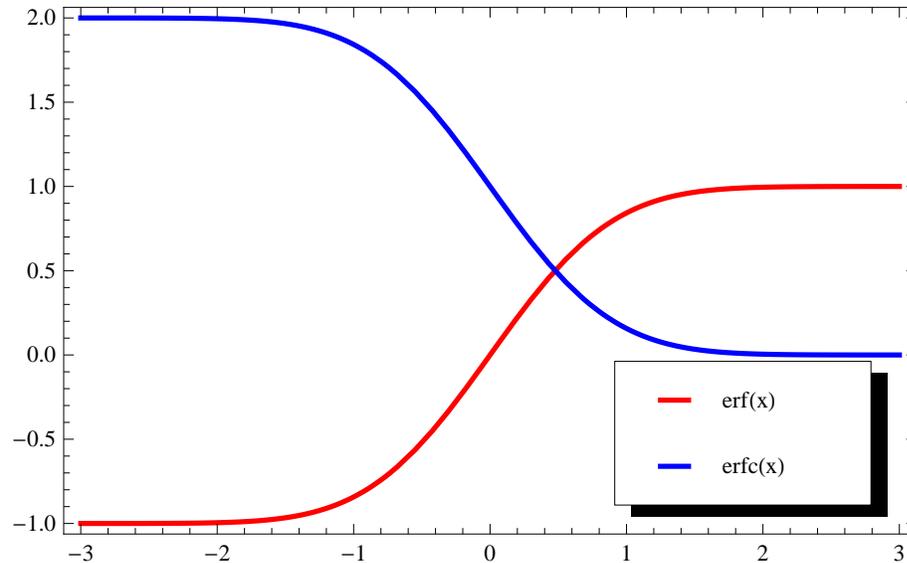


Figura A.3: Función error $\text{erf}(x)$

La función error se define como

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (\text{A.4})$$

De acuerdo con el hecho de que la integral en todo el espacio de una función gaussiana normalizada es 1, la función error complementaria se define como

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x). \quad (\text{A.5})$$

Algunas de las propiedades de simetría que cumple $\text{erf}(x)$ para un número complejo x son

$$\begin{aligned} \text{erf}(-x) &= -\text{erf}(x), \\ \text{erf}(\bar{x}) &= \overline{\text{erf}(x)}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{erfi}(x) = -i\text{erf}(ix).$$

A.2 Función Error

Además la función $\operatorname{erf}(x)$ puede en casos convenientes ser aproximada de la siguiente forma

$$\operatorname{erf}(x) \simeq \frac{x}{|x|} \sqrt{1 - \exp\left(-x^2 \frac{4/\pi + ax^2}{1 + ax^2}\right)}, \quad (\text{A.7})$$

con $a = \frac{8(\pi-3)}{3\pi(4-\pi)} \simeq 0,140012$. A este conjunto de funciones le aunamos otra función muy relacionada que definimos como la función Faddeeva

$$\mathcal{F}(x) = e^{-x^2} \operatorname{erfc}(-ix). \quad (\text{A.8})$$

La función error aparece en repetidas ocasiones a lo largo de este trabajo, por lo que es conveniente conocerla. En la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales que se presenten posteriormente se utiliza un compilador de programación de lenguaje *C* que contiene a $\operatorname{erf}(x)$ por lo que no será necesario aproximar de forma alterna dicha función.

Apéndice B

Teorema de Ehrenfest

El *Teorema de Ehrenfest* fue desarrollado por P. Ehrenfest en 1927 utilizando el formalismo de la mecánica cuántica ondulatoria. Debido a que se escribe en términos de los valores esperados, no importa si utilizamos la formulación de Schrödinger o la formulación de Heisenberg, pues los valores esperados son equivalentes en ambas formulaciones.

El teorema de Ehrenfest establece que el valor esperado de un operador explícitamente dependiente del tiempo debe ser también dependiente del tiempo, por lo tanto, para un operador $A(t)$

$$\frac{d\langle A(t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} | A(t) | \psi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \psi | A(t) | \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle. \quad (\text{B.1})$$

En esta parte utilizamos el hecho de que nuestros operadores para los diferentes H_j son Hermitianos y obtenemos que

$$\frac{d\langle A(t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle H\psi | A(t) | \psi \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | A(t) | H\psi \rangle, \quad (\text{B.2})$$

de donde se obtiene

$$\frac{d\langle A(t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \langle \psi | HA(t) | \psi \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \psi | A(t)H | \psi \rangle. \quad (\text{B.3})$$

Por lo tanto, de la definición de conmutador resulta

$$\frac{d\langle A(t) \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A(t)] \rangle + \left\langle \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\rangle, \quad (\text{B.4})$$

ecuación que será de gran importancia para los cálculos efectuados en la tesis.

Teorema del Virial Cuántico

El Teorema del Virial Cuántico establece que para cualquier sistema cuántico con un Hamiltoniano de la siguiente forma [54]

$$H = \frac{p^2}{2m} + W(z) \quad (\text{B.5})$$

se cumple que

$$\frac{d}{dt}\langle zp \rangle = \left\langle \frac{p^2}{m} \right\rangle - \left\langle z \frac{\partial W(z)}{\partial z} \right\rangle. \quad (\text{B.6})$$

El teorema del virial cuántico es un caso particular del teorema de Ehrenfest, por lo cual calculamos la dependencia temporal a partir de éste

$$\frac{d}{dt}\langle zp \rangle = -i\hbar \langle [zp, H] \rangle, \quad (\text{B.7})$$

sustituyendo el Hamiltoniano

$$\frac{d}{dt}\langle zp \rangle = -i\hbar \left\langle \left[zp, \frac{p^2}{2m} + W(z) \right] \right\rangle, \quad (\text{B.8})$$

separando los términos

$$\frac{d}{dt}\langle zp \rangle = -i\hbar \left\langle \left[zp, \frac{p^2}{2m} \right] \right\rangle - i\hbar \langle [zp, W(z)] \rangle, \quad (\text{B.9})$$

y por medio del álgebra de conmutadores obtenemos

$$\frac{d}{dt}\langle zp \rangle = \left\langle \frac{p^2}{m} \right\rangle - \left\langle z \frac{\partial W(z)}{\partial z} \right\rangle. \quad (\text{B.10})$$

Bibliografía

- [1] J. Larson, J. Salo and S. Stenholm, *Effective mass in cavity QED*. *Phys. Rev. A*, **72** 013814, 2005.
- [2] J. Larson, and M. Abdel-Aty, *Cavity QED nondemolition measurement scheme using quantized atomic motion*. *Phys. Rev. A*, **80** 053609, 2009.
- [3] J. Larson, *Quantum fluctuations in the mazer*. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **42** 044015, 2009.
- [4] J. Larson, *Dynamics of the Jaynes-Cummings and Rabi models: old wine in new bottles*. *Phys. Scr.*, **76** 146-160, 2007.
- [5] J. Larson and S. Stenholm, *Adiabatic state preparation in a cavity*. *J. Mod. Opt.*, **50** 11, 2003.
- [6] J. Larson and S. Stenholm, *Validity of adiabaticity in cavity QED*. *Phys. Rev. A*, **73** 033805, 2006.
- [7] W. Greiner, *Quantum Mechanics: An Introduction*. Springer. 4th Edition (2000).
- [8] W. Greiner, *Quantum Mechanics: Special Chapters*. Springer. 1st Edition (1998).
- [9] P. Meystre, *Atom Optics*. Springer Series on Atomic, Optical and Plasma Physics (2001).
- [10] P. Meystre, M. Sargent III, *Elements of Optics*. Springer, 4th Edition (2007).
- [11] A. Messiah, *Quantum Mechanics Vol. II*. North Holland (1962).
- [12] M. Fox, *Quantum Optics An Introduction*. Oxford Master Series In Atomic, Optical and Laser Physics (2006).
- [13] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall (1993).
- [14] S. Haroche, *Cavity Quantum Electrodynamics: a review of Rydberg atom-microwave experiments on entanglement and decoherence*. Latin-American School of Physics XXXI ELAF: New Perspectives on Quantum Mechanics, edited by S. Hacyan, R. Jáuregui, and R. López-Peña, AIP Conf. Proc. **464** (AIP, New York, 1999).

BIBLIOGRAFÍA

- [15] C. Foot, *Atomic Physics*. Oxford Master Series In Atomic, Optical and Laser Physics (2001).
- [16] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Quantum Mechanics Vol I*. John Wiley & Sons (1977).
- [17] J. Dalibard and Cohen-Tannoudji, *Dressed-atom approach to atomic motion in laser light: the dipole force revisited*. *J. Opt. Soc. Am. B*, **2** 11, 1985.
- [18] J. Dalibard and Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models*. *J. Opt. Soc. Am. B*, **6** 11, 1989.
- [19] C. N. Cohen-Tannoudji, *Manipulating atoms with photons*. *Rev. Mod. Phys.*, **70** 707, 1998.
- [20] W. D. Phillips, *Nobel Lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms*. *Rev. Mod. Phys.*, **70** 721, 1998.
- [21] S. Chu, *The manipulation of neutral particles*. *Rev. Mod. Phys.*, **70** 685, 1998.
- [22] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping: theoretical analysis*. *J. Opt. Soc. Am. B*, **6** 11, November 1989.
- [23] J. P. Gordon and A. Ashkin, *Motion of atoms in a radiation trap*. *Phys. Rev. A*, **21** 1606, 1980.
- [24] A. Rauschenbeutel, P. Bertet, S. Osnaghi, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Controlled entanglement of two field modes in a cavity quantum electrodynamics experiment*. *Phys. Rev. A*, **64** 050301, October 2001.
- [25] C. Gerry, P.L. Knight, *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press (2005).
- [26] P. Lambropoulos, D. Petrosyan, *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*. Springer-Verlag (2007).
- [27] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Application to Beam Maser*. *Proc. IEEE*, **51** 89, 1963.
- [28] T. Bastin and J. Martin, *Detuning effects in the one-photon maser*. *Phys. Rev. A*, **67** 053804, 2003.
- [29] G. M. Meyer, M. O. Scully and H. Walther, *Quantum theory of the maser. I. General theory*. *Phys. Rev. A*, **56** 5, 1997.
- [30] E. Zeidler, *Quantum Field Theory II: Quantum Electrodynamics. A Bridge Between Mathematicians and Physicists*. Springer (2009).

-
- [31] D. F. Styer, *The strange world of quantum mechanics*. Cambridge University Press, First Edition (2001).
- [32] H. Kragh, *Quantum generations: a history of physics in the twentieth century*. Princeton University Press, First Edition (1999).
- [33] S. D'Agostino, *A History of the Ideas of Theoretical Physics*. Kluwer Academic Publishers (1999).
- [34] D. R. Bes, *Quantum Mechanics: A Modern and Concise Introductory Course*. Springer, Second Edition (2007).
- [35] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*. John Wiley & Sons, Third Edition (2003).
- [36] L. C. Baird, *Moments of a Wave Packet*. *Am. J. Phys.*, **40** 329, 1972.
- [37] S. M. Dutra, *Cavity quantum electrodynamics: the strange theory of light in a box*. John Wiley & Sons (2005).
- [38] R. R. Puri, *Mathematical Methods in Quantum Optics*. Springer (2005).
- [39] A. Kumar Pan, *Understanding the spreading of a Gaussian wave packet using the Bohmian machinery*. *Pramana Journal of Physics*, **74** 6, 2010.
- [40] A. Brown and W. J. Meath. *Rotating-wave approximation for the interaction of a pulsed laser with a two-level system possessing permanent dipole moments*. *Phys. Rev. A*, **63** 013403.
- [41] J. H. Hubbard, B. H. West, *Differential Equations: A Dynamical System Approach, Higher-Dimensional Systems*. Springer Verlag (1990).
- [42] S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Hoff, S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, J.-M. Raimond, S. Haroche, E. Jacques, P. Bosland, and B. Visentin, *Ultra-high finesse Fabry-Pérot superconducting resonator*. *Appl. Phys. Lett.*, **90** 164101, 2007.
- [43] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons Inc. Third Edition (1998).
- [44] M. D. Crisp, *Jaynes-Cummings Model without rotating-wave approximation*. *Phys. Rev. A*, **43** 95, 1991.
- [45] L. O. Castaños, R. Jáuregui, *Entanglement properties of an ultracold atom interacting with a cavity quantized electromagnetic field*. *Phys. Rev. A*, **82** 053815, 2010.
- [46] L. A. Orozco, *Laser Cooling and Trapping of Neutral Atoms*. Latin-American School of Physics XXXI ELAF: New Perspectives on Quantum Mechanics, edited by S. Hacyan, R. Jáuregui, and R. López-Peña, AIP Conf. Proc. **464** (AIP, New York, 1999).

BIBLIOGRAFÍA

- [47] M. O. Scully, U. W. Rathe and G. M. Meyer, *PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL SCHOOL OF PHYSICS ENRICO FERMI "Course CXXXI Coherent and Collective Interactions Between Particles and Radiation Beams"*. Società Italiana De Fisica Bologna-Italy (1996).
- [48] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley. Revised Edition (1994).
- [49] W. P. Schleich, *Quantum Optics In Phase Space*. Wiley-VCH Verlag. 1st Edition (2001).
- [50] R. Miller, T. E. Northup, K. M. Birnbaum, A. Boca, A. D. Boozer and H. J. Kimble, *Trapped atoms in cavity QED: coupling quantized light and matter*. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **38** (2005) S551-S565.
- [51] H. J. Weber, J. B. Arfken, *Essential Mathematical Methods for Physicists*. Academica Press, Sixth Edition (2003).
- [52] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, First English Edition (2000).
- [53] N. M. Temme, *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*. John Wiley & Sons (1996).
- [54] B. R. Desai, *Quantum Mechanics with Basic Field Theory*. Cambridge University Press (2009)..
- [55] E. Hansen, *Fast Hankel transform algorithm*. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, **33** 3, 1985.
- [56] Z. Bialynicka-Birula, *Cavity QED*. *Acta Physica Polonica B*, **27** 10, 1996.
- [57] D. Bruss, G. Leuchs, *Lectures on quantum information*. Wiley-VCH Verlag (2007).
- [58] K. Ujihara, *Output Coupling in Optical Cavities and Lasers: A Quantum Theoretical Approach*. Wiley-VCH Verlag (2010).
- [59] R. H. Landau, M. J. Páez and C. C. Bordeianu *Computational Physics: Problem Solving with Computers*. Wiley-VCH Verlag. Second Edition (2007).
- [60] A. B. Klimov and S. M. Chumakov, *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics. Models of Atom-Fields Interactions*. Wiley-VCH Verlag. 1st Edition (2009).
- [61] <http://www.cqed.org/?lang=en>
- [62] P. Münstermann, T. Fischer, P. Maunz, P. W. H. Pinkse, and G. Rempe, *Dynamics of Single-Atom Motion Observed in a High-Finesse Cavity*. *Phys. Rev. Lett.*, **19** 82 1999.

- [63] M. Löffler, G. M. Meyer, M. Schröder, M. O. Scully and H. Walther, *Quantum Theory of Maser II. Extensions and Experimental Considerations*. *Phys. Rev. A*, **56** 4153, 1997.
- [64] G. Rempe, H. Walther und P. Döbisch, *The one-atom maser - A test system for simple quantumelectrodynamical effects*. Proceedings of the Sixth International School of Coherent Optics, Ustrond, Poland 1985.
- [65] H. Walther, B. Varcoe, B. Englert and T. Becker, *Cavity quantum electrodynamics*. *Rep. Prog. Phys.*, **66** 2006.
- [66] H. G. Hulet and D. Kleppner, *Rydberg Atoms in "Circular" States*. *Phys. Rev. Lett*, **51** 1430, 1983.