



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**COLAPSO Y ACRECIÓN EN NÚCLEOS DE
NUBES MOLECULARES ROTANTES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

J. MIGUEL ZAVALA AKÉ

DIRECTOR DE TESIS: DR. JAIME KLAPP

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. DAVID SANDERS

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DRA. MARGARITA ROSADO



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mis padres, **Alejandra Aké** y **Moises Zavala**, por darme la vida y por haberme dado una *licencia para soñar*.

A mi director de tesis, el **Dr. Jaime Klapp**, por darme la oportunidad de trabajar con él durante poco más de dos años, y al **Dr. David Sanders**, por el valioso apoyo recibido de él.

A la **Dra. Margarita Rosado**, por sus recomendaciones; al **Dr. Fernando Magaña**, por haberme enseñado el camino; al **Dr. Xim Bokhimi**, por su confianza; al **Dr. Alejandro Crespo** y al **Dr. Moncho Gomez**, por la oportunidad; al **Dr. Pablo de la Mora**, por su amistad; a mis amigos **José Olivos**, **Rosa Mariscal**, **Lilia Margarita**, **Francisco Te**, **Arely Castro**, **Eduardo Madrid**, y compañeros, **Jesus Pelayo**, **Leopoldo Carbajal**, **Ivonne Medina**, **Azucena Domínguez** y **Karla Palma**. Una mención muy especial a **Nelly Catzin**, por acompañarme y apoyarme en todo momento.

Este trabajo se desarrolló con el apoyo técnico y financiero del **Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares**, de la **Universidad Nacional Autónoma de México**, y del **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología**.

Abstract

Observational results have shown that the stellar formation process occurs in high density molecular clouds called prestellar cores [Harwit, 2006]. The collapse and fragmentation of such clouds lead to protostar formation that with time evolves into stars. The mechanism by which the protostars grow accumulating more mass during this process is called accretion. Protostars have a peculiar mass and by accretion increases its mass until the process is stopped by the radiation generated from the various atomic processes and the gravitational energy released from the contraction of the protostar.

In this dissertation, a numerical model consisting of a prestellar core in the initial phase of collapse is proposed. This model is based on observational results, mainly for the L1544 nucleus and its analytical and numerical study made by Ward-Thompson *et al.* [Ward-Thompson, 1999], Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004a], Attwood *et al.* [Attwood, 2009] and Arreaga *et al.* [Arreaga, 2010]. The aim of this work is to model the prestellar core using a linear $m = 2$ perturbation imposed in a spherical configuration with rigid body rotation, instead of a turbulent model as used by other others, e.g., Klessen *et al.* [Klessen, 2000]. For turbulent models the energy is quickly dissipated, requiring additional energy at some velocity and wave number k .

The results from this study show that this model reproduce: (i) the observed lifetimes of the class 0 protostars; (ii) the observed accretion rate in the class 0 and class I; (iii) the analytical and numerical results obtained by other authors, e.g., the relationship between the average mass of the formed protostars and the critical density at which the system changes from isothermal to adiabatic [Jappsen, 2004]. The temporal evolution of the system is calculated using the numerical method called Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH), which allows to model the proto-stars as accretion centers interacting gravitationally with the media surrounding them.

Resumen

Resultados observacionales han mostrado que la formación estelar se da en el interior de nubes moleculares de alta densidad, denominadas núcleos preestelares [Harwit, 2006]. El colapso y la fragmentación de estas nubes dará como resultado la formación de protoestrellas, las cuales, al evolucionar, se convertirán en estrellas. Al nacer, estos objetos tienen una cierta masa, la cual, con el paso del tiempo, se incrementará hasta alcanzar el valor con el cual entrarán en secuencia la principal. El mecanismo mediante el cual las protoestrellas crecen en masa se denomina acreción.

En este trabajo de tesis se propone un modelo numérico que consiste de un núcleo preestelar que se encuentra en la fase inicial del colapso. Dicho modelo está basado en resultados observacionales, principalmente del núcleo L1544, y en modelos analíticos y numéricos del mismo presentados por Ward-Thompson *et al.* [Ward-Thompson, 1999], Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004a], Attwood *et al.* [Attwood, 2009] y Arreaga *et al.* [Arreaga, 2010]. El núcleo es simulado como una nube con simetría esférica, rotación rígida y una perturbación lineal en la masa; en lugar de utilizar un campo de velocidades turbulento, como lo han propuesto otros autores, e.g., [Klessen, 2000].

Los resultados encontrados muestran que este modelo reproduce: (i) los tiempos de vida observados de la fase clase 0 de las protoestrellas; (ii) las tasas de acreción observadas en las fases clase 0 y clase I; (iii) los resultados analíticos y numéricos encontrados por otros autores, e.g., la relación entre la masa promedio de las protoestrellas formadas y la densidad crítica en la cual el sistema cambia de ser puramente isotérmico a adiabático [Jappsen, 2004]. La evolución temporal del sistema es encontrada utilizando el método numérico denominado Hidrodinámica de Partículas Suavizadas (SPH, por sus siglas en inglés), el cual permite modelar a las protoestrellas como centros de acreción que interactúan gravitacionalmente con el medio que los rodea.

En el capítulo 1, se muestran algunos resultados observacionales que caracterizan a los núcleos protoestelares, también, se discuten los valores físicos característicos que presenta, i.e., perfiles de densidad, momento angular y velocidad angular, rangos en la masa, tiempos de vida, etcétera; ver las secciones 1.1 y 1.2. En la sección 1.3, se da una introducción a la teoría utilizada a lo largo de este trabajo de tesis, i.e., equilibrio hidrostático, teorema del virial, criterio de Jeans, colapso y fragmentación, etcétera.

En el capítulo 2, se introducen los parámetros numéricos que caracterizan a las simulaciones aquí realizadas. En primer lugar, sección 2.1, los parámetros iniciales α , razón de energía térmica a energía potencial, y β , razón de energía cinética a energía potencial. La fragmentación del sistema está numéricamente relacionada con la condición de estabilidad de Jeans, descrita en la sección 2.4. La evolución de las ecuaciones que gobiernan la física del sistema, i.e., las ecuaciones de la hidrodinámica y la ecuación de Poisson, se resuelve mediante el método denominado Hidrodinámica de Partículas Suavizada (SPH), ver sección 2.3, tal y como se encuentra implementado en el código GADGET2 [Springel, 2005, Springel, 2002]. El SPH es un método libre de malla que descompone el sistema estudiado en un ensamble de partículas, el cual permite modelar a las protoestrellas como centros de acreción que interactúan gravitacionalmente con el medio que los rodea, ver sección 2.5.

En el capítulo 3 se propone el modelo numérico de un núcleo protoestelar que se encuentra colapsando. En la sección 3.2, se describen las condiciones iniciales que constituyen la física del modelo propuesto, así como también, los parámetros numéricos utilizados. En la sección 3.3, se discute acerca del perfil de densidad y se compara su evolución con resultados analíticos y observacionales. En la sección 3.4 se presentan los tiempos de vida de la fase de contracción del núcleo protoestelar, de las fases Clase 0 y Clase I de las protoestrellas. También se discute acerca de las magnitudes en las tasas de acreción. Por último, se presentan algunos factores que afectan el número total de protoestrellas que se forman, e.g., la densidad crítica en la cual el sistema cambia de ser puramente isotérmico a adiabático. Estos resultados son comparados con otros resultados obtenidos numéricamente, así como también con resultados encontrados por observaciones.

Finalmente, se presentan las conclusiones, capítulo 4.

Índice general

Índice general	7
1. Introducción	9
1.1. Evolución temprana de estrellas de baja masa	9
1.2. Observaciones y modelos numéricos	13
1.3. Marco Teórico	19
1.3.1. Equilibrio	19
1.3.2. Colapso	25
2. Simulación	29
2.1. Condiciones iniciales	29
2.2. Escalamiento	31
2.3. Hidrodinámica de partículas suavizadas	32
2.4. Criterio para resolver la estabilidad de Jeans	36
2.5. Centros de acreción	37
3. Resultados	41
3.1. Introducción	41
3.2. Condiciones iniciales	42
3.3. Evolución temporal	44
3.4. Acreción	46
3.4.1. Protoestrellas	50
3.5. Discusión	61
4. Conclusiones	63
A. Dinámica de fluidos	65
Bibliografía	69

Introducción

1.1. Evolución temprana de estrellas de baja masa

Medio Interestelar. El Medio Interestelar (ISM, por sus siglas en inglés) es la materia que se encuentra entre las estrellas, el cual está formado principalmente por gas ($\sim 99\%$) y polvo ($\sim 1\%$). Gran parte de la masa del ISM se aglomera en cúmulos denominados *nubes moleculares*. Estos cúmulos de materia son más densos que el medio que los rodea ($\sim 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$), con densidades de entre 10^{-20} y $10^{-18} \text{ g cm}^{-3}$, y son lo suficientemente fríos como para contener hidrógeno molecular y pequeñas cantidades de otras moléculas, con temperaturas que oscilan entre los 10 y los 100 K. Estas condiciones de densidad y temperatura permiten que las partículas interactúen gravitacionalmente, ocasionando que la nube molecular se contraiga. Hay miles de nubes moleculares gigantes en la Vía Láctea. La más cercana es la Nebulosa de Orión, la cual se encuentra a ~ 450 pc de distancia.

La formación estelar ocurre en las regiones más densas dentro de una nube molecular, denominadas *núcleos preestelares* (molecular cloud cores o prestellar cores). Sólo una pequeña fracción de la materia está realmente involucrado en la creación de estrellas; mientras que, la mayor parte de la material permanece a bajas densidades.

Núcleo Protoestelar. La formación y temprana evolución de estrellas de baja masa es generalmente discutido en términos de procesos gravitatorios e hidrodinámicos. De manera general, cuando un núcleo preestelar colapsa, un *núcleo protoestelar* (protostellar core) emerge en su centro; mientras que, el material con alto momento angular forma un disco de acreción a su alrededor. Este proceso tiene lugar en regiones interiores a las nubes moleculares en donde la densidad ρ es alta y la temperatura T es baja [Harwit, 2006].

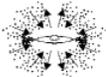
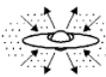
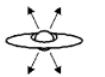
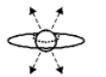
PROPERTIES	<i>Infalling Protostar</i>	<i>Evolved Protostar</i>	<i>Classical T Tauri Star</i>	<i>Weak-lined T Tauri Star</i>	<i>Main Sequence Star</i>
SKETCH					
AGE (YEARS)	10^4	10^5	$10^6 - 10^7$	$10^6 - 10^7$	$> 10^7$
mm/INFRARED CLASS	Class 0	Class I	Class II	Class III	(Class III)

Figura 1.1: Etapas de evolución estelar para estrellas de baja masa. En esta imagen, la clase III supone la falta de acreción. Figura tomada de [Feigelson, 1999].

Los núcleos protoestelares son los precursores directos de las estrellas. La transformación de un núcleo preestelar en estrellas puede ser convenientemente dividido en cuatro fases [Shu, 1987, André, 2000], ver Fig. 1.1:

1. La fase *preestelar* describe la contracción gravitacional isotérmica de núcleos preestelares antes de la formación del núcleo protoestelar. La fase de colapso isotérmico termina cuando las partes internas alcanzan densidades de $n(\text{H}_2) \approx 10^{10} \text{cm}^{-3}$.
2. El núcleo protoestelar entra en la fase denominada *clase 0* de la evolución, en la cual dicho núcleo crece en masa debido a la acreción de material que colapsa desde la nube. Al caer el material sobre núcleo, esta se vuelve más densa y por lo tanto más opaca, lo que ocasiona que la energía por fotón requiera más tiempo para escapar. Como resultado, la temperatura del núcleo protoestelar empieza a aumentar. Durante el inicio de esta fase, la temperatura inicial es de $\sim 10\text{K}$, posteriormente la temperatura del núcleo se eleva gradualmente, irradiando longitudes de onda en el infrarrojo lejano (longitudes de onda de entre 25-40 y 200-350 μm). La energía térmica se transporta desde el interior del núcleo protoestelar hacia el exterior por convección. La vida de esta fase es de $\sim 10^4$ hasta $\lesssim 10^5$ años.
3. Una vez que el núcleo protoestelar se vuelve opaco, ya no puede irradiar la energía producida por el material que cae en su interior. Esta energía es atrapada dentro del núcleo, lo que ocasiona que la temperatura se incremente. Por otro lado, la masa que cae hacia el interior aumenta la densidad, lo que, de la ley del gas ideal, resulta en un incremento en los gradientes de la presión (o simplemente, presión). Sin embargo, el aumento de la presión en el interior no es suficiente como para detener el colapso. La presión cada vez mayor se opone al abrumador aplastamiento de la gravedad, y el núcleo protoestelar, ahora más denso, se convierte en la semilla de la que nacerá una estrella. Esta es la fase denominada *clase I*, la cual va de entre $\sim 10^5$ a los $\lesssim 6 \times 10^5$ años de vida del núcleo protoestelar.

4. En la fase conocida como *clase II*, la acreción se detiene, y el núcleo protoestelar entra a la fase de contracción de la pre-secuencia principal. La presión y la temperatura continúan aumentando. Con el tiempo la fusión del hidrógeno comenzará, el núcleo protoestelar se moverá a la secuencia principal, y finalmente será una estrella. Sistemas protoestelares en esta etapa se denominan *estrellas T Tauri* [Bertout, 1989].

Birthline. Para estrellas de baja masa ($\lesssim 4 M_{\odot}$) el efecto retardador de la presión debida a la radiación en el medio es despreciable y, en ausencia de campos magnéticos, rotación y turbulencia, el entorno que rodea a la estrella, colapsará rápidamente sobre el núcleo. Una vez que la acreción se ha detenido por completo, la estrella en formación comenzará una contracción cuasi-estática a lo largo del camino convectivo de Hayashi¹ (convective Hayashi track).

Utilizando resultados de la teoría protoestelar, Stahler *et al.* [Stahler, 1983] ubica en el diagrama H-R, o diagrama Hertzsprung-Russell, el lugar en donde la pre-secuencia principal de estrellas de baja masa, puede primero aparecer como objetos visibles. Stahler despliega esta línea de nacimiento estelar explícitamente para estrellas con masas de entre 0.2 y $1.0 M_{\odot}$, ver Fig. 1.2.

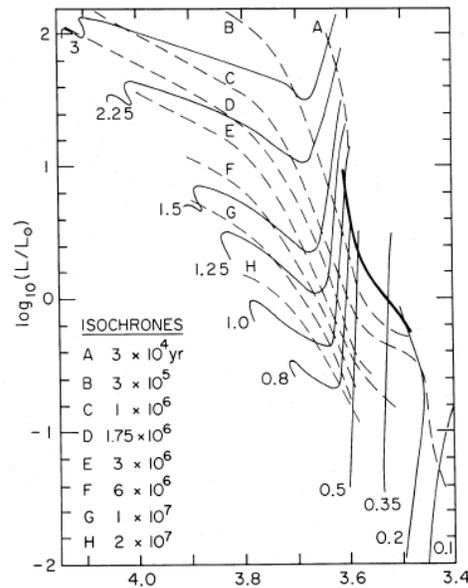


Figura 1.2: Línea de nacimiento estelar o birthline (curva sólida gruesa) en el diagrama H-R para masas de entre 0.2 y $1.0 M_{\odot}$. Las líneas sólidas delgadas representan el camino de Hayashi, para los valores indicados de masa. Las líneas punteadas son isócronas. Cada camino comienza en la línea de nacimiento estelar y termina en la secuencia principal de edad 0 o ZAMS (zero age main sequence). Figura tomada de [Stahler, 1983].

¹Trayectoria de la evolución estelar en el diagrama H-R, que sigue una estrella recién nacida al avanzar en su camino hacia la secuencia principal.

De manera similar, Palla & Stahler [Palla, 1993] realizan un trabajo semejante pero para masas de entre 1 y $6 M_{\odot}$, ver Fig. 1.2 y 1.3. Suponiendo que la tasa de acreción dM/dt es $\sim 10^{-5} M_{\odot} yr^{-1}$, se tiene entonces que estrellas con masas menores que $2.4 M_{\odot}$ son completamente convectivas, y evolucionarán sobre el camino de Hayashi que le corresponda hasta llegar a la secuencia principal, ver Fig. 1 de [Palla, 1993]. Tanto Stahler [Stahler, 1983] (aplicando una corrección), como Palla, ver Fig. 10 de [Palla, 1993], asignan a la línea de nacimiento estelar un tiempo de $\sim 10^5$ años, lo cual cae dentro de la fase clase I. Una posible explicación es que en los modelos utilizados para calcular la línea de nacimiento estelar, se han despreciado varios efectos que retrasan el colapso, i.e., rotación, magnetismo y turbulencia, por lo que sería de esperarse que la entrada a la pre-secuencia principal se dé más tarde que lo predicho por estos autores.

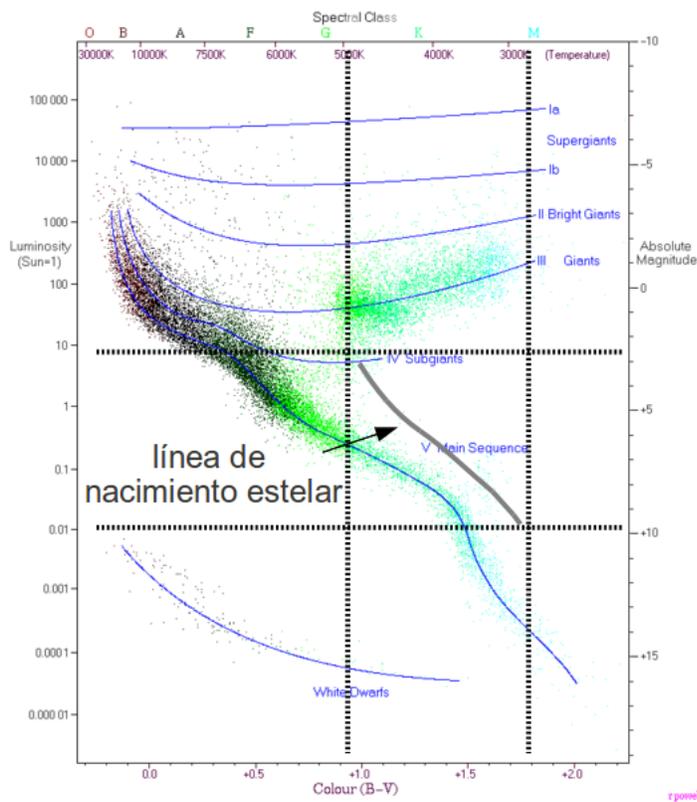


Figura 1.3: Diagrama H-R con la línea de nacimiento estelar sobre puesta para masas de entre 0.6 y $6.0 M_{\odot}$.

Fragmentación. En una nube molecular con una cierta densidad, temperatura y masa, el *criterio de Jeans* (ver sección 1.3.2) describe el tamaño de la nube más pequeña, así como la masa mínima correspondiente, para la cual la gravedad podría superar la presión térmica y así dar lugar al colapso. De lo dicho anteriormente, se puede observar que hay dos ingredientes clave que hacen más probable el colapso de una nube molecular: 1) la nube tiene que ser fría (~ 10 K) y 2) la nube tiene que ser bastante densa ($\lesssim 10^{-17} \text{ g cm}^{-3}$).

Algunas nubes densas incluso tienen dentro de ellas zonas más densas (núcleos preestelares) las cuales pueden satisfacer el criterio de Jeans por sí mismas. Ahora, imagínese una enorme nube molecular que inicialmente no cumple con el criterio de Jeans; sin embargo, en algún momento, algo hace que la nube comience a colapsar. Zonas dentro de esta gran nube de gas y polvo pueden ahora satisfacer el criterio de Jeans, de modo que dichas zonas de alta densidad comienzan a contraerse. En una nube de varios cientos o miles de masas solares, puede haber varios núcleos preestelares que se encuentran colapsando, y esta *fragmentación*, como se le denomina, podría eventualmente dar lugar a un cúmulo de estrellas. Así, se tiene la situación de una gran nube molecular que colapsa, mientras que dentro de ella, hay zonas de alta densidad que también se encuentran colapsando.

Enanas marrones. Hay un amplio rango en la masa de las estrellas. Las más pequeñas tienen masas de alrededor de $\sim 0.08 M_{\odot}$. Las estrellas más masivas conocidas (por ejemplo, Eta Carinae) son tan grandes como $150 M_{\odot}$. Objetos justo por debajo de $\sim 0.08 M_{\odot}$ se llaman enanas marrones (brown dwarfs). Estos objetos irradian en el infrarrojo, por lo que son difíciles de detectar. Las enanas marrones son objetos sub-estelares, su masa es inferior a la necesaria para mantener las reacciones nucleares de fusión de hidrógeno en su núcleo. Las enanas marrones se encuentran en el límite entre los planetas gaseosos gigantes y las estrellas de menor masa, este límite superior está entre 75 y 80 masas de Júpiter ($M_{\text{JUP}} = 1.8986 \times 10^{29} \text{ gr} \approx 10^{-3} M_{\odot}$).

1.2. Observaciones y modelos numéricos

Goodwin et. al. [Goodwin, 2004a] sugiere que hay dos mecanismos que producen fragmentación en la mayoría de los núcleos con formación estelar. La primera posibilidad es que la fragmentación de un núcleo es causada por su rotación a gran escala. La rotación a gran escala puede ser parametrizada por la razón β entre la energía rotacional y la energía gravitacional. Estudios numéricos y semi-analíticos han tratado de identificar las condiciones necesarias para que ocurra la fragmentación de un núcleo preestelar, en términos de la razón α entre la energía térmica y la energía gravitacional, de la razón β , y de otras condiciones iniciales, tales como la forma geométrica de la nube, su perfil de densidad, y de su física constitutiva, en particular, la ecuación de estado, e.g., [Arreaga, 2010]. Estimaciones observacionales de β en los núcleos preestelares van desde 10^{-4} a 0.07 [Caselli, 2002], *siendo los valores más altos los que parecen favorecer la fragmentación*. Sin embargo, muchos núcleos preestelares no muestran ninguna evidencia apreciable de rotación [Jessop, 2001], lo que sugiere que la rotación a gran escala no es la única causa de la fragmentación. Observaciones de núcleos preestelares han mostrado complejos movimientos en su interior, los cuales sugieren la existencia de turbulencia [Caselli, 2002]. La segunda posibilidad es que la fragmentación de un núcleo es causada por turbulencia, es decir, campos de velocidad desordenados a pequeña escala, los cuales pueden crear momento angular localizado, pero que no constituyen un campo de velocidad rotatorio a gran escala, ver [Jappsen, 2004] para una discusión del efecto que el momento angular de las protoestrellas tiene sobre el

sistema global. La distribución y características de los núcleos que se forman, depende de la escala de longitud k (driven scale) utilizada para impulsar el campo de velocidades turbulento [Klessen, 2003]. Sin embargo, muchos de estos núcleos son estructuras transitorias, y sólo un pequeño subconjunto de ellos llegan a ser lo suficientemente densos como para condensarse en estrellas. El parámetro que caracteriza el nivel de turbulencia en un núcleo α_{turb} es la razón entre la energía generada por la turbulencia y la energía gravitacional. En promedio α_{turb} es baja; casi todos los núcleos densos observados tienen $\alpha_{\text{turb}} < 0.5$, y en la mayoría de los casos se tiene que $0.0 < \alpha_{\text{turb}} < 0.3$, ver [Jijina, 1999].

Momento angular. El momento angular específico j , razón entre el momento angular J y la masa M del sistema, que se encuentra típicamente en una nube molecular es del orden de $10^{21} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, mientras que en estrellas T Tauri cercas al birthline se encuentra que $j \approx 5 \times 10^{17} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$. El momento angular se conserva durante el colapso de una nube protoestelar; sin embargo, se ha sugerido que el momento angular puede convertirse en momento angular orbital a través de la fragmentación [Louis, 2000]. Por otro lado, Crapsi *et al.* [Crapsi, 2007], utilizando datos interferométricos, obtuvo mapas de densidad para el núcleo preestelar L1544 con gradientes de velocidad $\sim 9 \text{ km s}^{-1} \text{ pc}^{-1}$, sobre una escala de 0.04 pc , lo que equivale a un momento angular específico de $0.015 \text{ pc km s}^{-1} = 5 \times 10^{21} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$. Goodman *et al.* [Goodman, 1993] presenta un análisis de movimiento consistente con rotación uniforme en 43 núcleos densos (con densidades de $\sim 10^4 \text{ cm}^{-3}$ y tamaños de $\sim 0.1 \text{ pc}$). En su tabla 2, Goodman muestra los valores encontrados para la razón entre la energía cinética y la energía rotacional, y el momento angular específico. En dicha tabla se puede observar que el rango de valores de j se encuentra entre $\sim 6 \times 10^{20} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, para el núcleo B217, y $\sim 4 \times 10^{22} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, para el núcleo L1082A, con $\beta = 9.8 \times 10^{-3}$ y 8.5×10^{-2} , respectivamente. De lo anterior, Goodman concluye que su valor de momento angular específico más pequeño, $6 \times 10^{20} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, es ligeramente menor que el típicamente encontrado en una nube molecular.

Usando simulaciones hidrodinámicas, Jappsen *et al.* [Jappsen, 2004] investiga las propiedades de rotación y la evolución del momento angular de núcleos preestelares y núcleos protoestelares, formados a partir de fragmentación gravoturbulenta² de nubes de gas interestelar. Jappsen encuentra que: (i) el momento angular específico de núcleos preestelares tiene valores entre $10^{20} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ y $5 \times 10^{21} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, con un valor medio de aproximadamente $5 \times 10^{20} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, lo que está en buen acuerdo con las observaciones realizadas por Caselli *et al.* [Caselli, 2002], quien encuentra que $j \approx 7 \times 10^{20} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ para nubes con masas de $\sim 6 M_{\odot}$; (ii) una fracción de estos núcleos serán gravitacionalmente inestables y en algún momento colapsarán, lo que a su vez dará origen a protoestrellas y sistemas protoestelares múltiples que luego tendrán valores de momento angular específico de $\sim 8 \times 10^{19} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, el cual es un orden de magnitud inferior al de los núcleos preestelares que los originaron; (iii) la razón de energía rotacional a energía gravitacional β en los núcleos que se encuentran en colapso gravitacional, resulta ser similar a los valores observados, cuyo valor promedio es de ~ 0.05 ; (iv) un valor alto, $\beta > 0.01$, da lugar a fragmentación; mientras

²Interacción entre la turbulencia supersónica y la autogravedad del gas interestelar.

que, para $\beta < 0.01$ resulta en discos de acreción estables; (v) β se encuentra en el intervalo $[0, 0.3]$ y permanece aproximadamente constante durante la fase temprana del colapso; (vi) que el momento angular específico se incrementa en promedio, cuando la masa del núcleo aumenta, ver la sección 4.2; (vii) turbulencia con pequeños números de Mach resulta en valores mayores en el momento angular específico, esto se debe a que *la energía turbulenta se puede convertir en energía rotacional si las velocidades turbulentas no son demasiado altas*; (viii) desde el punto de vista estadístico, la evolución del momento angular de núcleos que se encuentran colapsando, puede ser aproximadamente descrito como la contracción de esferas de densidad uniforme que se encuentran bajo rotación rígida y velocidad angular uniforme, ver su sección 4.2.

Turbulencia. Datos experimentales indican que un fluido es estable para números de Reynolds³, Re , suficientemente pequeños. Cuando Re aumenta, finalmente se alcanza un valor crítico, Re_c , más allá del cual el flujo es inestable respecto a perturbaciones infinitesimales. Para $Re > Re_c$, el flujo se hace rápidamente complicado y confuso. Dicho flujo se dice que es *turbulento*, y está caracterizado por una rápida variación de la presión, de la densidad y de la velocidad, tanto en el espacio como en el tiempo.

La interacción entre el movimiento turbulento y la gravedad dentro de una nube de gas conduce a procesos denominados *fragmentación gravoturbulenta* (gravoturbulent fragmentation): turbulencia supersónica⁴ genera fuertes fluctuaciones en la densidad, permitiendo que la gravedad tome el control de las regiones con más alta densidad y mayor masa. Una vez que los cúmulos de gas llegan a ser gravitacionalmente inestables, estos colapsarán. Ahora, la primera consideración es la cuestión de como mantener los movimientos supersónicos observados, pues se pensaba que ondas magnetohidrodinámicas eran las que proporcionaban los medios para evitar la disipación de la turbulencia interestelar; sin embargo, Stone *et al.* [Stone, 1998] y Mac-Low [Mac-Low, 1999] demostraron que, bajo condiciones de nube molecular, la turbulencia supersónica decae en menos de un tiempo de caída libre, independientemente de si el medio está magnetizado o no.

Detalladas simulaciones de formación estelar se realizan mediante la técnica denominada Hidrodinámica de Partículas Suavizadas (SPH, Smoothed Particle Hydrodynamic) [Chabier, 2009] la cual, por lo general, no incluye campos magnéticos, ver sección 2.3.

³Relaciona la densidad ρ , viscosidad μ , velocidad v_s y la dimensión típica de un flujo D en una expresión adimensional, $\rho v_s D / \mu$.

⁴La turbulencia es llamada supersónica si el valor cuadrático medio (rms, root mean square) del número de Mach excede la unidad.

Estas simulaciones son adecuadas para el estudio de la interacción entre la turbulencia, el colapso gravitacional y la acreción de masa sobre objetos colapsados. Hay dos categorías, ya sea con un decaimiento libre de la turbulencia (decaying turbulence) [Bate, 2003] y [Bonnell, 2003], o con turbulencia constantemente impulsada (driven turbulence) [Klessen, 2001]. Un problema con el decaimiento libre de la turbulencia es que la formación estelar puede ser demasiado rápida. Según Klessen *et al.* [Klessen, 2001], entre un 20 y un 30 % de la masa de la nube es acreta en tan solo un tiempo de caída libre t_{ff} . Por otra parte, la tasa de formación estelar se puede reducir significativamente si la turbulencia es constantemente impulsada a escalas suficientemente pequeñas, $k \approx 8$, [Klessen, 2001]. Klessen *et al.* [Klessen, 2001] y Vázquez-Semadeni *et al.* [Vazquez, 2003] sugirieron que la turbulencia impulsada a pequeña escala puede corresponder a estrellas que se encuentran espacialmente distribuidas; mientras que, a gran escala se favorece la formación de cúmulos de estrellas.

La escala de tiempo y la eficiencia en la formación de núcleos protoestelares depende en gran medida de la longitud de onda y la fuerza impulsora de la turbulencia. Los modelos de decaimiento libre turbulento realizados por Klessen *et al.* [Klessen, 2000] muestran que el colapso local se produce incluso cuando el campo de velocidades turbulento transporta energía suficiente como para contrarrestar la contracción gravitacional a escala global. El soporte global dado por la turbulencia supersónica tiende a producir colapso local y baja tasa de formación estelar. Dos criterios deben cumplirse: (1) la velocidad cuadrática media debe ser lo suficientemente alta, y (2) la longitud de onda que impulsa el sistema global λ_d debe de ser suficientemente pequeño comparado con la longitud de Jeans λ_J , ver sección 1.3.2. Si estos dos criterios *no* se cumplen, las regiones de alta densidad colapsaran, aunque el flujo turbulento que rodea sigue siendo turbulentamente soportado. El colapso local en nubes soportadas globalmente no fue predicho por ningún modelo analítico de gravoturbulencia. Por otro lado, la falta de soporte turbulento da como resultado regiones que colapsan rápidamente. En simulaciones de dinámica de gases que colapsan libremente se forman redes de densidad en las cuales la formación estelar se produce de manera eficiente. Así, la tasa de formación estelar está determinada por el equilibrio entre el impulso turbulento y las densidades de locales.

Los cálculos numéricos discutidos aquí fueron realizados utilizando condiciones periódicas y con una ecuación de estado isotérmica, ver [Mac-Low, 1999], [Klessen, 2000], [Klessen, 2001], [Jappsen, 2004], [Goodwin, 2004a] y [Goodwin, 2004b]. Para generar un campo de velocidades turbulento, se utiliza una técnica denominada random gaussian field, la cual introduce fluctuaciones en la velocidad en intervalos $k - 1 < |\vec{k}| < k$, donde $k = L/\lambda_d = 1, \dots, 8$, corresponde a impulsos de longitudes de onda λ_d dentro de un cubo de tamaño L [Mac-Low, 1998].

Núcleo Preestelar L1544. Los núcleos de nubes moleculares densas (molecular cloud cores) pueden ser divididos en:

1. los que parecen tener formados *protoestrellas* (protostars)⁵, y
2. los que no, conocidos como núcleos sin estrellas (starless cores) [Beichman, 1986].

Estos últimos suelen tener unas pocas masas solares, densidades de entre 10^3 y 10^4 cm^{-3} , radios de ~ 0.1 pc y con temperaturas de ~ 10 K [Jijina, 1999]. Estos núcleos sin estrellas, que están centralmente condensados, y por lo tanto, presumiblemente más cerca del colapso, se conocen como *núcleos preestelares* (prestellar cores).

Tafalla *et al.* [Tafalla, 1998] presenta un estudio de la nube molecular L1544, la cual se encuentra en el complejo molecular Taurus. En dicho trabajo, se muestran que esta nube es *casi* isotérmica, que la densidad debe disminuir rápidamente hacia el exterior, siguiendo aproximadamente una ley de potencias⁶ $\rho(r) \propto r^{-1.5}$ y que hay un patrón de movimiento hacia su interior, i.e., esta colapsando. La nube L1544 completa contiene cerca de $30 M_{\odot}$, de los cuales, la tercera parte se encuentra en tres cúmulos de materia. El más masivo y opaco de ellos, el *núcleo preestelar L1544*, tiene $\sim 8 M_{\odot}$, y esta colapsando.

Ward-Thompson *et al.* [Ward-Thompson, 1999] presenta las observaciones de ocho núcleos preestelares, entre ellos el L1544, utilizando el telescopio IRAM (Institute for Radio Astronomy in the Millimeter Range) de 30 metros. Dicho estudio apoya la conclusión de que la mayoría de los núcleos preestelares tienen gradientes de presión los cuales favorecen a que la densidad se aproxime a una ley de potencias y que, al menos para los ocho núcleos estudiados por Ward-Thompson, parecen tener una densidad central de entre $10^5 < n_c < 10^6$ cm^{-3} .

Whitworth *et al.* [Whitworth, 2001] propone un modelo analítico para las condiciones iniciales de un núcleo preestelar que se encuentra colapsando en alguna región aislada de formación estelar. Whitworth elige modelar la evolución del núcleo preestelar L1544, ya que es uno de los núcleos más cuidadosamente observados. Su modelo es no-magnético y está basado en el perfil de densidad tipo Plummer, ec. (2.1.4), con los parámetros $\eta = 4$, $\rho_0 = 3 \times 10^{-18}$ g cm^{-3} , $R_0 = 5350$ au, y $M_0 = 8 M_{\odot}$. Este modelo se ajusta a: (1) los perfiles de densidad observados para núcleos preestelares y protoestrellas clase 0, (2) el tiempo de contracción de núcleos preestelares de entre 3×10^4 y 4×10^4 yr, y (3) al tiempo de vida y (4) las tasas de acreción para las protoestrellas en las fases clase 0 y clase I. El tiempo de vida encontrado por Whitworth *et al.* para la fase clase 0 es de $\sim 8 \times 10^4$ yr y tiene una tasa de acreción máxima de $\sim 8 \times 10^{-5} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, la cual es mayor que el de la clase I.

⁵Etapa en la evolución de una estrella justo después de haber fragmentado a partir de una nube de gas interestelar, pero antes de que la fusión nuclear comience.

⁶Comparese este resultado con el cálculo teórico mostrado en la sección 1.3.1

Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004b] estudia cómo el nivel de turbulencia ($\alpha_{\text{turb}} = 0, 0.01, 0.025, 0.05, 0.10, 0.25$) afecta el colapso y la fragmentación del mismo núcleo preestelar, concluyendo que:

1. un bajo nivel de turbulencia ($\alpha_{\text{turb}} \approx 0.05$) es suficiente para producir sistemas múltiples,
2. si α_{turb} se incrementa, entonces el número de centros de acreción formados también se incrementa, pero con masas finales cada vez menores,
3. alrededor de un 20 % de los objetos formados son enanas marrones ($M < 0.08 M_{\odot}$) y cerca de un 50 % son protoestrellas de baja masa ($0.08 M_{\odot} < M < 0.5 M_{\odot}$).

Tanto en [Goodwin, 2004a] como en [Goodwin, 2004b], las condiciones iniciales del modelo intenta modelar las observaciones del núcleo protoestelar L1544 y son similares a las utilizadas por Whitworth *et al.* [Whitworth, 2001]. El modelo consiste en una esfera con una masa de $\sim 5.4 M_{\odot}$, con un perfil de densidad tipo Plummer y un campo de velocidades turbulentas con espectro de potencia $P(k) \propto k^{-4}$.

1.3. Marco Teórico

El ISM contiene una gran cantidad de nubes moleculares, con masas de entre 10^4 y $10^6 M_{\odot}$, y temperaturas que se encuentran alrededor de los ~ 10 K, ver tabla 1.1. Para formar una estrella mediante colapso, tales nubes de gas requieren incrementar su densidad por un factor de $\sim 10^{20}$ y aumentar su temperatura $\sim 10^4$ veces [Padmanbhan, 2001], ver Fig. 1.4.

	Tamaño [pc]	Densidad [$n(\text{H}_2)/\text{cm}^3$]	masa [M_{\odot}]	Temperatura [T]	Ejemplo
Nube Molecular Gigante	10-20	100 – 500	$10^4 – 10^6$	7 – 15	Comp. Tauro-Auriga-Perseus
Nube Molecular	2-20	$10^2 – 10^4$	$10^2 – 10^4$	10 – 30	L1495, L1641
Cumulo de Formación Estelar	0.1-2	$10^3 – 10^5$	$10 – 10^3$	10 – 30	
Núcleo Protoestelar ⁸	$\lesssim 0.1$	$> 10^5$	0.1 – 10	7 – 15	

⁸antes de la formación de la *protoestrella*, fase *preestelar*.

Tabla 1.1: Propiedades físicas de nubes moleculares en el ISM. Tabla tomada de [Mac-Low, 2004].

Considérese un caso ideal, en el cual una nube de baja densidad ρ y temperatura uniforme T se encuentra en equilibrio hidrostático. Si en alguna región una perturbación produce una región de alta densidad, entonces, la atracción gravitacional se incrementará en dicha región. De igual forma, la presión del gas se incrementará pero no lo suficiente como para mantener el equilibrio hidrostático. Las condiciones de estabilidad para una región de volumen V (la cual, por simplicidad, se asumirá esférica), que contiene una masa total M , pueden ser encontradas a partir del teorema del virial.

1.3.1. Equilibrio

Ecuación de estado isotérmico. Considérese al gas dentro de la nube molecular compuesto de partículas y fotones. Si ambos componentes del gas se encuentran en equilibrio, entonces se puede esperar que la distribución de fotones esté dada por la ley de Planck⁷ y la distribución de energías de las partículas esté dada por la estadística de Maxwell-Boltzmann⁸. Cuando los fotones y las partículas están en equilibrio estadístico uno con el otro, se dice que el gas está en *equilibrio termodinámico estricto* [Collins, 2003].

⁷Intensidad de la radiación emitida por un cuerpo negro con una temperatura T

⁸Describe la distribución estadística de las partículas en equilibrio térmico.

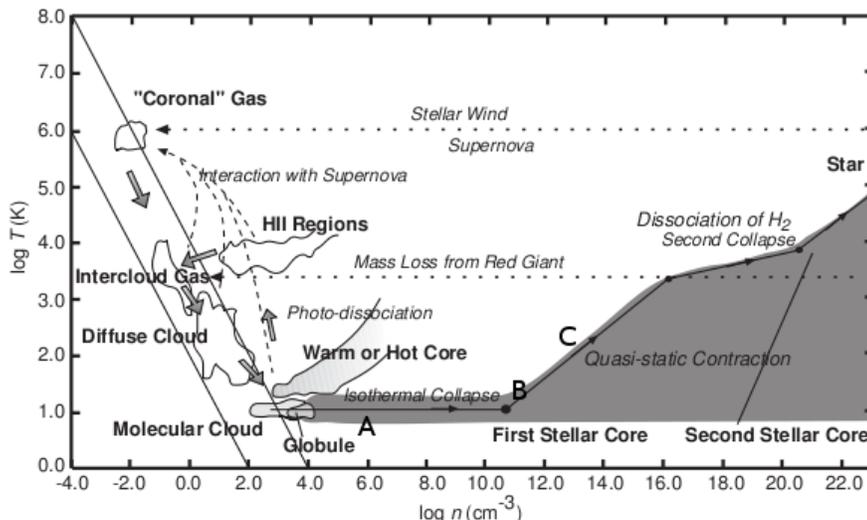


Figura 1.4: Temperatura y densidad de objetos gaseosos del medio interestelar en nuestra galaxia. Una **A** hace referencia al punto correspondiente a las condiciones utilizadas en este trabajo, $n_0 \approx 10^6 \text{ cm}^{-3}$ y $T = 10 \text{ K}$; **B** y **C** muestran, respectivamente, los puntos en los cuales el sistema pasara de isotérmico a adiabático y, la densidad en la que comenzaran a formarse los centros de acreción. Figura tomada de [Tomisaka, 2007].

Así, al considerar el sistema como un gas ideal, la presión total P será la suma de las contribuciones de la presión cinética del gas y de la presión debida a la radiación

$$P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T + \frac{1}{3} \sigma T^4, \quad (1.3.1)$$

donde μ es el peso molecular medio, $k (= 1.3807 \times 10^{-16} \text{ J/K})$ es la constante de Boltzmann, $m_H (= 1.6733 \times 10^{-27} \text{ Kg})$ es la masa de la partícula y $\sigma (= 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4})$ es la constante de Stefan-Boltzmann [Chandrasekha, 1961].

Campo gravitacional. El campo gravitacional \vec{g} puede ser descrito por un potencial gravitacional U , el cual es la solución de la *ecuación de Poisson*

$$\nabla^2 U = 4\pi G \rho, \quad (1.3.2)$$

donde ∇^2 representa el operador de Laplace y $G = 6.67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Por lo tanto, el campo gravitacional puede ser obtenido del potencial U mediante la relación

$$\vec{g} = -\nabla U. \quad (1.3.3)$$

Para una simetría esférica la relación anterior está dada por

$$\vec{g} = \frac{Gm}{r^2} \hat{r} \quad (1.3.4)$$

donde m es la masa contenida en el radio r .

Equilibrio hidrostático. Considérese un cuerpo de masa M y volumen V cuyas partes se mantienen unidas por medio de atracción gravitacional. Por simplicidad los efectos de la rotación serán despreciados, lo que implica que la distribución de la densidad debe de ser simétrica alrededor del centro. De igual forma, los efectos del campo magnético serán ignorados. Ahora, tómesese un elemento de volumen cilíndrico de sección transversal dS , con el eje dr entre r y $r + dr$, y en la dirección radial \vec{r} . Si la densidad dentro del elemento es $\rho(r)$ (aproximadamente uniforme), entonces la masa estará dada por

$$\Delta m \approx \rho dV = \rho dr dS.$$

La fuerza radial que actúa sobre este elemento es de dos tipos: la gravedad y la presión.

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} \Delta m = - \underbrace{\frac{Gm(r)\Delta m}{r^2}}_{\text{grav.}} + \underbrace{P(r)dS - P(r+dr)dS}_{\text{pres.}}$$

de modo que

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (1.3.5)$$

o bien

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{Gm}{r^2}. \quad (1.3.6)$$

Ahora, tomando $dm \equiv \rho dr dS = \rho dr (4\pi r^2)$ en (1.3.5), se tiene entonces que

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial m}. \quad (1.3.7)$$

Si la fuerza gravitacional y las fuerzas debidas a la presión sobre el sistema se encuentran balanceadas, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{Gm\rho}{r^2}, \quad (1.3.8)$$

o bien

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}, \quad (1.3.9)$$

la cual describe el estado de equilibrio hidrostático del sistema. El lado derecho de (1.3.8) y (1.3.9) es siempre negativo, lo que implica que la presión decrece hacia a fuera.

Teorema virial. Una consecuencia importante del equilibrio hidrostático, ec. (1.3.9), es que establece una relación entre la energía potencial U y la energía cinética del sistema K . Multiplicando (1.3.9) por el volumen contenido dentro del radio r , $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, e integrando se tiene que

$$\int_{P=0}^{P(R)} V dP = PV|_0^{P(R)} - \int_0^{P(R)} P dV = -\frac{1}{3} \int_{M=0}^{M(R)} \frac{Gm dm}{r} = \frac{1}{3} U, \quad (1.3.10)$$

donde $P(R)$ y $M(R)$ son la presión y la masa de la nube de radio R , respectivamente. La integral del lado derecho de (1.3.10) es el negativo del potencial gravitacional de la nube, ec. (1.3.4); mientras que, el termino $PV|_0^P$ desaparece, ya que en el centro de la nube $V(r=0) = 0$ y, en la superficie $P(r=R) \approx 0$, pues la presión en la superficie es varios ordenes de magnitud más pequeña que el centro. Dado que $dm = \rho dV$, entonces

$$3 \int \frac{P}{\rho} dm + U = 0, \quad (1.3.11)$$

el cual recibe el nombre de *Teorema del virial*. Ahora, si la presión debida a la radiación es despreciable en (1.3.1), i.e., $P/\rho \approx kT/(\mu m_H)$, entonces, la energía cinética para un gas ideal estará dada por

$$u = \frac{3}{2} kT \approx \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} \mu m_H, \quad (1.3.12)$$

el cual, al sustituir en (1.3.11), se obtiene que

$$2 \int \frac{u}{\mu m_H} dm + U = 0,$$

o bien, tomando $\bar{K} \equiv \int (u/(\mu m_H)) dm$, entonces

$$2\bar{K} + U = 0 \rightarrow \frac{\bar{K}}{|U|} = \frac{1}{2}, \quad (1.3.13)$$

lo que muestra que, para el caso de un gas ideal, *una nube molecular está en equilibrio hidrostático si la energía potencial es el doble de la energía cinética*. Por otro lado, la energía total del sistema está dada por

$$E = \bar{K} + U = -\bar{K} = U/2,$$

lo que muestra que si la energía total decrece, $dE/dt < 0$, entonces, la temperatura tiende a incrementarse y, al mismo tiempo, el sistema se contrae. A medida que un gas se contrae, este se hará más caliente, por lo que comenzará a irradiar, lo que a su vez ocasiona una pérdida de energía.

Otra forma de deducir la ec.(1.3.13) es considerar un sistema general de partículas puntuales con masa m_i , posición \vec{r}_i y momento \vec{p}_i , bajo la influencia de una fuerza \vec{F}_i . De modo que, la ecuación de movimiento es

$$\vec{F}_i = \frac{d}{dt} \vec{p}_i. \quad (1.3.14)$$

Ahora, multiplicando (1.3.14) por r_i , se tiene que

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i = \frac{d}{dt} (\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i) - \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \vec{p}_i,$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \vec{p}_i &= m\vec{v}_i^2 = 2K, \\ &= \frac{d}{dt}(\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i) = \frac{d}{dt}(m_i\vec{r}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}(m_i r_i^2) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} I \end{aligned}$$

y

$$\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_j = \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j),$$

de modo que, sustituyendo en (1.3.14) y reacomodando términos, se tiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + \sum_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (1.3.15)$$

donde $I (= \sum m_i r_i^2)$ es el momento de inercia del sistema de partículas. Ahora, si consideramos un gas ideal bajo la sola acción de la fuerza de gravedad

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij},$$

y si dicho gas se encuentra en equilibrio, entonces

$$K = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}},$$

lo cual es equivalente a la ec.(1.3.13).

Masa de Jeans. Considerado que la presión debida a la radiación en (1.3.1) es despreciable y sustituyendo en el Teorema del virial, ec.(1.3.11), entonces

$$\int_{M=0}^{M(R)} \left(\frac{kT}{\mu m_H} - \frac{GM}{3R} \right) dm = 0 \rightarrow \frac{kT}{\mu m_H} - \frac{GM}{3R} = 0.$$

Aproximando la densidad promedio $\bar{\rho}$ en la ecuación anterior por $\bar{\rho} \approx \frac{3M}{4\pi R^3}$, se tiene que

$$M \approx \frac{3}{G} \left(\frac{3M}{4\pi \bar{\rho}} \right)^{1/3} \left(\frac{kT}{\mu m_H} \right),$$

o bien

$$M_J \propto G^{-3/2} \bar{\rho}^{-1/2} c_s^3, \quad (1.3.16)$$

donde $c_s^2 = \frac{kT}{\mu m_H}$ representa la velocidad del sonido en un medio isotérmico. La ec.(1.3.16) constituye un límite para una región que contiene una masa M_J dentro de una nube de gas. La masa de Jeans M_J , representa la masa más grande que puede ser contenida en equilibrio hidrostático, dentro de una región de volumen dado. Ver sección 1.3.2.

Ecuación de Lane-Emden. De manera general, la densidad depende de la presión y de la temperatura, $\rho = \rho(P, T)$; sin embargo, existen casos en los cuales se puede asumir que la presión depende únicamente de la densidad (e.g. fluidos isotérmicos para los cuales $P \propto \rho$). Siendo este el caso se tiene que

$$P(\vec{r}) = A\rho(\vec{r})^\gamma \equiv A\rho(\vec{r})^{1+\frac{1}{n}}, \quad (1.3.17)$$

donde A , $\gamma (= 1 + 1/n)$ y n (índice politrópico) son constantes [Pringle, 2007]. Por ejemplo, la ecuación de estado para un un gas ideal de temperatura $T = T_0$ y peso molecular medio μ_0 , está dado por $P = R_{\text{cte}}T_0\rho/\mu_0$, de modo que $A = R_{\text{cte}}T_0/\mu_0$, $\gamma = 1$ y $n = \infty$, donde R_{cte} es la constante universal de los gases.

Ahora, para un fluido en equilibrio hidrostático con simetría esférica, ec. (1.3.8), se tiene que

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = -g,$$

lo que, al ser sustituido en la ecuación de Poisson, ec.(1.3.2), y eliminar P mediante (1.3.17) resulta en

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \hat{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A\gamma r^2}{\rho^{2-\gamma}} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = -4\pi G\rho,$$

o bien

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{Ar^2\gamma}{\rho^{1-\gamma}} \frac{d \log \rho}{dr} \right) = -4\pi r^2 G\rho. \quad (1.3.18)$$

Esta ecuación no-lineal de segundo orden denominada *ecuación de Lane-Emden*, está sujeta a las condiciones de frontera $\rho(0) = \rho_0$ y $\rho(R) = 0$, donde ρ_0 es la densidad central y R es el radio de la esfera. Ahora, para un gas ideal isotérmico y bajo las sustituciones

$$\rho = \rho_0 e^{-\psi}, \quad r = a\xi, \quad a^2 = \frac{A}{4\pi G\rho_0},$$

se tiene que

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = \xi^2 e^{-\psi}, \quad (1.3.19)$$

con las condiciones iniciales $\psi = 0$, $\xi = 0$ y $\frac{d\psi}{d\xi} = 0$. La estructura completa de la esfera de gas isotérmica puede ser determinada al encontrar una solución de (1.3.19); sin embargo, dicha ecuación no puede ser integrada de manera explícita, por lo que debe de ser resuelta utilizando métodos numéricos. En la Fig. 1.5 se puede observar el perfil de densidad obtenido al encontrar la solución de la ec.(1.3.19). Dicho perfil muestra la manera en como se distribuye el material dentro de una nube que se encuentra en equilibrio hidrostático, i.e., la nube se encuentra virializada, por lo cumple con el criterio dado por (1.3.13).

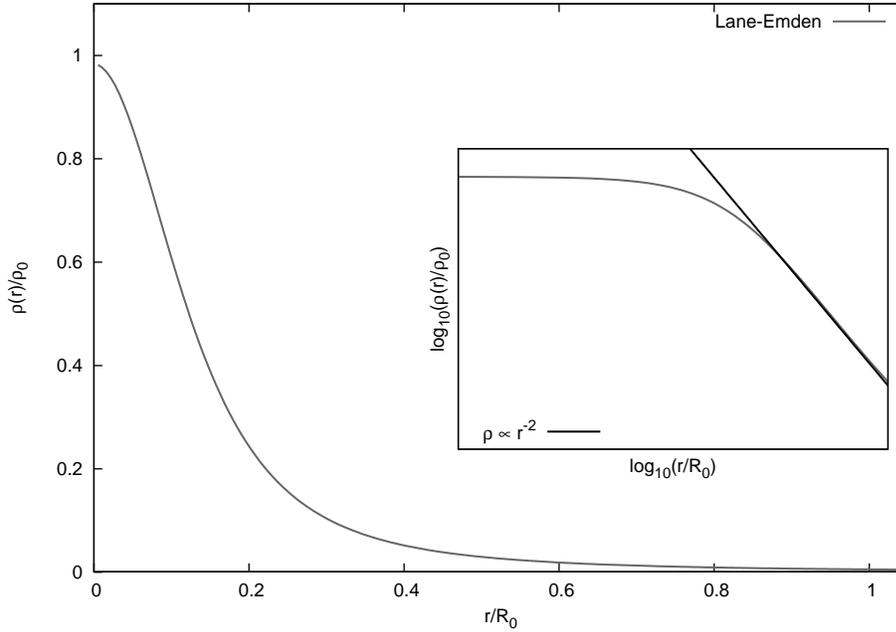


Figura 1.5: Solución numérica de la ecuación de Lane-Emden para una esfera isotérmica de gas ideal en equilibrio hidrostático. La densidad es uniforme cerca del centro de la esfera; mientras que, en la parte más exterior es proporcional a r^{-2} .

1.3.2. Colapso

Criterio de Jeans. Las evidencias observacionales sugieren que las estrellas se forman dentro de las nubes moleculares y, como ya se mencionó, una nube de gas puede llegar a ser gravitacionalmente inestable y colapsar. Ahora, supóngase un medio gaseoso infinito, homogéneo, con temperatura y densidad constantes. Bajo estas condiciones, el gas tiene que obedecer:

1. la ecuación de movimiento o ecuación de Euler

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla U, \quad (1.3.20)$$

2. la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0, \quad (1.3.21)$$

3. la ecuación de Poisson, ec. (1.3.2), y

4. la ecuación de estado de la forma dada en la ec.(1.3.1).

Ahora, supóngase que en el equilibrio $\rho = \rho_0 = \text{cte}$, $T = T_0 = \text{cte}$ y $\vec{v} = \vec{v}_0 = 0$; mientras que, U_0 puede ser determinado utilizando $\nabla^2 U_0 = 4\pi G\rho_0$ y condiciones de frontera en el infinito. Si ahora el sistema es perturbado, entonces

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad P = P_0 + \delta P, \quad U = U_0 + \delta U, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v}, \quad (1.3.22)$$

donde las funciones δf indican perturbaciones de pequeña amplitud que depende tanto del espacio como del tiempo. Si ahora, se sustituye (1.3.22) en (1.3.20), entonces

$$\frac{d(\vec{v}_0 + \delta\vec{v})}{dt} + (\vec{v}_0 + \delta\vec{v}) \cdot \nabla(\vec{v}_0 + \delta\vec{v}) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla(P_0 + \delta P) - \nabla(U_0 + \delta U).$$

Despreciando términos de segundo orden y reacomodando, se tiene que

$$\frac{d\delta\vec{v}}{dt} + \delta\vec{v} \cdot \nabla\delta\vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla\delta P - \nabla\delta U. \quad (1.3.23)$$

De manera análoga, se tiene que de la ecuación de continuidad

$$\frac{d\delta\rho}{dt} + \rho_0 \nabla \cdot \delta\vec{v} = 0, \quad (1.3.24)$$

y de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \delta U = 4\pi G\delta\rho. \quad (1.3.25)$$

Ahora, tomando la divergencia de (1.3.23)

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{d^2\delta\rho}{dt^2} + \nabla \cdot (\delta\vec{v} \cdot \delta\vec{v}) = -\nabla^2(c_s^2\delta\rho) - 4\pi G\delta\rho,$$

y despreciando términos de segundo orden, entonces

$$\frac{d^2\delta\rho}{dt^2} = 4\pi G\rho_0\delta\rho + c_s^2\nabla^2\delta\rho. \quad (1.3.26)$$

Asumiendo que (1.3.26) tiene soluciones del tipo $\delta\rho \propto \exp(i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}))$ entonces, después de sustituir y reducir términos semejantes se tiene la relación de dispersión

$$\omega^2 = -4\pi G\rho_0 + c_s^2 k^2, \quad (1.3.27)$$

la cual relaciona la frecuencia angular ω con el número de onda $k = 2\pi/\lambda$. En el límite $k \rightarrow \infty$, la ec.(1.3.27) tiende a $\omega^2 = k^2 c_s^2$, lo cual corresponde a ondas de sonido isotérmicas. Por otro lado, si $c^2 k^2 < 4\pi G\rho_0$, entonces, ω es de la forma $\pm i\xi$, donde ξ es real, así, las perturbaciones en el sistema serán del tipo $\sim \exp(\pm i\xi)$, los cuales crecerán con el tiempo, de manera que, el equilibrio será inestable. Si para el valor crítico $\omega = 0$ se define $k \equiv k_J$ o bien $\lambda \equiv \lambda_J$, entonces

$$\lambda_J^2 = \frac{\pi c^2}{G\rho_0} \rightarrow \lambda_J \propto \rho^{-1/2} c_s, \quad (1.3.28)$$

de modo que perturbaciones con longitud de onda $\lambda > \lambda_J$ serán inestables. La *longitud de onda de Jeans* como se le denomina a λ_J , tiene asociada una masa crítica, denominada *masa de Jeans* M_J , ver sección 1.3.1, la cual se define como la masa contenida dentro de una esfera de diámetro λ_J

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 = \frac{\pi^{5/2}c^3}{6G^{3/2}\rho_0^{1/2}} \propto G^{-3/2}\rho^{-1/2}c_s^3, \quad (1.3.29)$$

lo que está en completo acuerdo con la deducción realizada del teorema del virial, ver ec. 1.3.16. La masa de Jeans establece que, masas más grandes que M_J serán gravitacionalmente inestables y colapsarán. Por último, este resultado aplica también a ecuaciones de estado diferentes a la isotérmica.

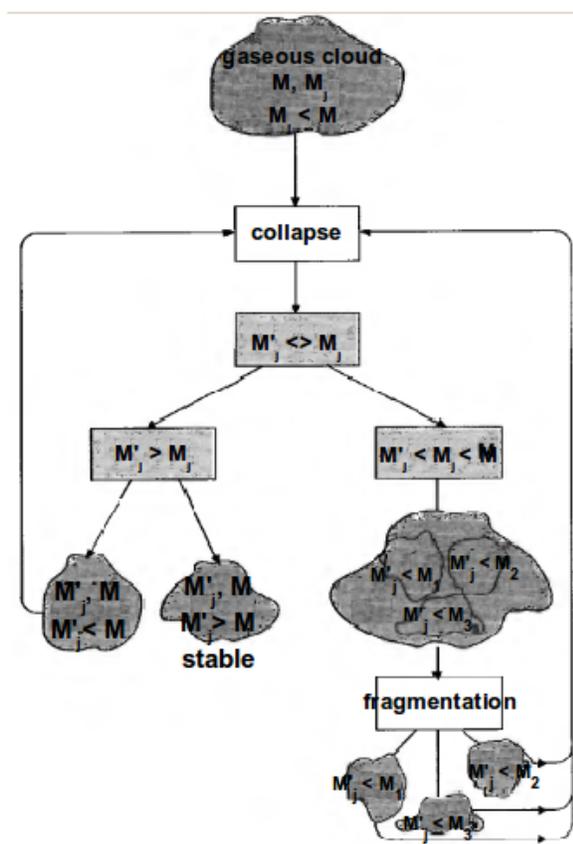


Figura 1.6: Colapso y fragmentación de una nube de gas de masa total M y masa de Jeans inicial M_J . Si $M_J < M$ entonces la nube colapsará. Ahora, mientras la nube permanezca isotérmica la masa de Jeans disminuirá $M_J \rightarrow M'_J (< M_J)$ durante el colapso, de modo que $M'_J < M_J < M$ lo que ocasionará la fragmentación de la nube, $M \rightarrow (M_i < M)$, con $\sum M_i \leq M$. Tanto el colapso como la fragmentación finalizarán en el momento en el que la masa de los fragmentos M_i sea menor o igual que la masa de Jeans actual. Figura tomada de [Prialnik, 2000].

Fragmentación. Solamente objetos con masas comparables a las masas de las nubes moleculares pueden llegar a ser gravitacionalmente inestables. Entonces, ¿Como se puede explicar que existen objetos, como las estrellas, con masas pequeñas formen parte del ISM? La explicación generalmente aceptada es que, una nube que excede la masa de Jeans colapsa y al mismo tiempo *fragmenta*, i.e., mientras la nube colapsa como un todo, fragmentos dentro de la nube llegan a ser inestables y colapsan más rápidamente que la nube.

Si una nube colapsa isotérmicamente, entonces de la ec.(1.3.29) la masa de Jeans decrecerá como $\rho^{-1/2}$; sin embargo, si el gas dentro de la nube se hace adiabático se puede demostrar que $M_J \propto \rho^{1/2}$ (ver seccion 2.1), de manera que, la masa de Jeans crecerá durante un colapso adiabático, haciéndose en algún punto más grande que la propia masa del fragmento, deteniéndose así su colapso, ver Fig. 1.6.

Tiempo de caída libre. Si en la ecuación de movimiento (1.3.20) se desprecia el término de presión, entonces

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2}. \quad (1.3.30)$$

Si se reemplaza m por $4\pi\rho_0 r_0^3/3$, donde el índice cero indica los valores al inicio del colapso, se multiplica (1.3.30) por \dot{r} , y se realiza la integral con las condiciones de frontera $\dot{r} = 0$ en $r = r_0$, entonces

$$\left(\frac{\dot{r}}{r_0}\right)^2 = \frac{8\pi\rho_0 G}{3} \left(\frac{r_0}{r} - 1\right). \quad (1.3.31)$$

Ahora, para solucionar (1.3.31) se introduce la variable ξ , definida por

$$\cos^2(\xi) = \frac{\dot{r}}{r},$$

de modo que al sustituir en (1.3.31) he integrar bajo las condiciones de frontera $\xi = 0$ en $t = 0$, se tiene que

$$\xi + \frac{1}{2} \sin(2\xi) = \left(\frac{8\pi\rho_0 G}{3}\right)^{1/2} t.$$

Así, el tiempo en alcanzar el centro de la nube ($r = 0$, $\xi = \pi/2$) se define como el *tiempo de caída libre*

$$t_{\text{ff}}^2 = \frac{3\pi}{32G\rho_0}. \quad (1.3.32)$$

Es claro que antes de alcanzar el centro de la nube, la presión aumentará y el gas comenzará a ser opaco a su propia radiación, de modo que la temperatura se incrementará y la aproximación de caída libre tendrá que ser abandonada.

Simulación

2.1. Condiciones iniciales

Energía. En todos los cálculos aquí realizados se consideró una esfera isotérmica de gas molecular, con un radio inicial R_0 y velocidad angular uniforme Ω_0 alrededor del eje z . El balance de energía inicial para todos los modelos fue determinado por dos parámetros adimensionales correspondientes a (1) la razón entre la energía térmica E_t y la energía gravitacional E_g

$$\alpha_0 = \frac{E_{t,0}}{|E_{g,0}|} = \frac{3}{2q_0} \frac{R_0 k T}{GM_0 \mu m_H}, \quad (2.1.1)$$

y (2) la razón entre la energía rotacional E_k y la energía gravitacional E_g

$$\beta_0 = \frac{E_{k,0}}{|E_{g,0}|} = \frac{1}{2q_0} \frac{R_0 I_0 \Omega_0^2}{GM_0^2}, \quad (2.1.2)$$

donde los valores dados de masa M_0 , radio R_0 y temperatura T_0 , fijan el valor del parámetro α_0 . El valor inicial de la velocidad angular depende no solo del parámetro β_0 , sino también de la inercia rotacional inicial I_0 y del valor del parámetro q_0 , los cuales, a su vez, dependen de la manera en la que está distribuida la materia dentro de la esfera. Los subíndices 0, indican los valores iniciales utilizados en la simulación.

Discretización. Para realizar la discretización del sistema, se define un cubo con lados $2R_0$, cuyo centro se encuentra en el origen del sistema de coordenadas. El cubo es entonces subdividido en celdas cúbicas regulares de volumen $\Delta = \Delta r_i^3$ cada uno. La nube esférica de puntos es formada dentro del cubo poniendo partículas SPH, ver sección 2.3, en el centro \vec{r}_i de cada celda que cumpla con el criterio $|r_i| < R_0$, de manera que la región fuera de la esfera se encuentre vacía. Una pequeña perturbación $\delta \vec{r}_i$ es adicionada a la distribución regular de partículas creada, $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \delta \vec{r}_i$. Dicha perturbación es tal que cada

partícula i es desplazada del centro de la celda. La longitud de desplazamiento es elegida aleatoriamente para cada uno de los ejes r_j y puede alcanzar una distancia máxima de $\Delta r_j/4$, donde $j = 1, 2, 3$. Una vez asignadas las posiciones de las partículas, se define la masa de la partícula i como

$$m_i = \rho(\vec{r}_i) \Delta^3 \vec{r},$$

donde ρ estará definido por el perfil de densidad utilizado. Finalmente, una pequeña perturbación es impuesta a la distribución de masa de cada partícula i

$$m_i \rightarrow m_i [1 + a \cos(m \phi_i)],$$

donde $\tan(\phi_i) = r_{2,i}/r_{1,i}$, $a = 0.1$ y $m = 2$.

La rotación rígida inicial del sistema se asigna a cada partícula i mediante la velocidad \vec{v}_i definida por

$$\vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{\Omega},$$

la cual depende completamente de la velocidad angular $|\vec{\Omega}| = \Omega_0$

Ecuación de estado. Para imitar el comportamiento térmico de un gas en formación estelar, se utilizó una ecuación de estado barotrópica [Bonnell, 1994]. Tohline *et al.* [Tohline, 1982] y Masunaga *et al.* [Masunaga, 2000] mostraron que un núcleo sigue una ecuación de estado barotrópica, dando una buena aproximación sin la necesidad de resolver la transferencia radiativa. Así,

$$c_s^2 \equiv \frac{p}{\rho} = c_0^2 \left[1 + \left(\frac{\rho}{\rho_b} \right)^{2/3} \right], \quad (2.1.3)$$

donde c_s representa la velocidad del sonido, c_0 es la velocidad del sonido inicialmente isotérmica y ρ_b corresponde a la densidad crítica barotrópica, en la cual el sistema cambiará del estado isotérmico al estado adiabático. A bajas densidades ($\rho < \rho_b$) el gas se puede considerar como isotérmico ($T \sim 10\text{K}$, $c_s \sim c_0$). Mientras que, a altas densidades ($\rho > \rho_b$) se asumirá que el gas llega a ser opaco a su propia radiación, lo que ocasiona un aumento adiabático de la temperatura, el cual estará caracterizado por un exponente polotrópico $\gamma = 5/3$, o bien, un índice politrópico $n = 2$. De lo anterior se puede concluir que, para densidades menores a la crítica ρ_b la masa de Jeans M_J , ec.(1.3.29), será proporcional a $\rho^{-1/2}$ ya que $c_s \approx c_0$; mientras que, para altas densidades $M_J \propto \rho^{1/2}$, debido a que, de la ec.(2.1.3), se tiene que $c_s \propto \rho^{1/3}$, con un intervalo de transición alrededor del mínimo valor de la masa de Jeans, i.e., $M_{J,\min} \propto 2^{3/2} \rho_c^{-1/2} c_0^3$.

Perfil de densidad. El perfil de densidad utilizado es el denominado Plummer [Plummer, 1911], ec.(2.1.4), Fig. 2.1, el cual contiene varias de las características descritas por las observaciones mencionadas en la sección 1.2, principalmente, el hecho de que nubes preestelares tienen una zona central de densidad aproximadamente constante es su región más interna y que, en las zonas más externas de la nube la densidad es proporcional a r^η

$$\rho(r) = \rho_0 \left[1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^{-\eta/2}. \quad (2.1.4)$$

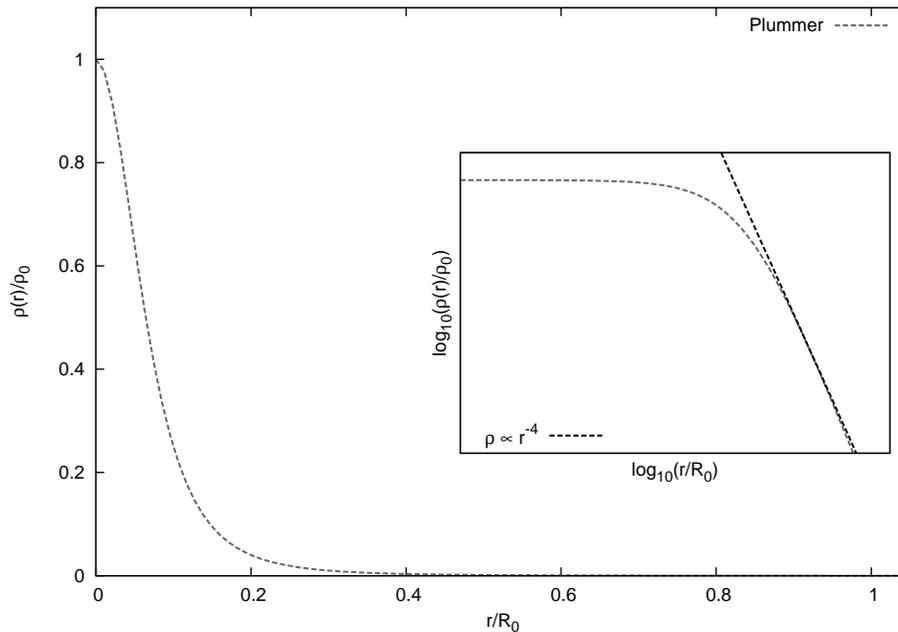


Figura 2.1: Perfil de densidad tipo Plummer, el cual, en su parte más exterior es proporcional a r^{-4} .

2.2. Escalamiento

En las simulaciones realizadas en este trabajo de tesis se ha adoptado unidades normalizadas y adimensionales para todas las cantidades físicas, todas las masas se han escalado según la masa total del sistema M_0 y las longitudes se han escalado a las dimensiones del radio del sistema R_0 . Para la constante gravitacional se asume que $G \equiv 1$. Bajo estas condiciones, la simulación se encuentra entonces dentro de un cubo de volumen $[-R, R]^3 = [-1, 1]^3$. Así, al tomar las unidades normalizadas en la ec.(2.1.1) se tiene que

$$c_0 = \sqrt{\frac{2}{3}q_0\alpha_0}, \quad (2.2.1)$$

de manera que, conociendo el valor de q_0 , entonces el valor de la velocidad del sonido, se puede obtener al multiplicar el valor dado por la ec.(2.2.1) por la unidad de velocidad $(G M_0/R_0)^{1/2}$. Ahora, de manera similar, de la ec.(2.1.2) se tiene que

$$\Omega_0 = \sqrt{2\frac{q_0}{I_0}\beta_0}, \quad (2.2.2)$$

donde

$$q_0 = \frac{16}{3}\pi^2\rho_0^2 \int_{r=0}^1 \rho^2(r)r^4 dr, \quad (2.2.3)$$

y

$$I_0 = \frac{8}{3}\pi\rho_0 \int_{r=0}^1 \rho(r)r^4 dr, \quad (2.2.4)$$

con

$$\rho_0^{-1} = 4\pi \int_{r=0}^1 \rho(r)r^2 dr. \quad (2.2.5)$$

Las ecuaciones (2.2.3), (2.2.4) y (2.2.5) representan el potencial gravitacional, la inercia rotacional y al inverso del valor de la densidad inicial, respectivamente, despues de hacer la sustitución $\rho(r) \rightarrow \rho_0\rho(r)$ y $r \rightarrow rR_0$ y tomar las unidades normalizadas; por ejemplo, suponiendo un perfil inicialmente uniforme $\rho(r) \equiv \rho_0 = \text{cte} \rightarrow \rho(r) = 1$ en la ec.(2.2.5) he integrando, se tiene que $\rho_0 = 0.239$ en unidades normalizadas. Ahora, al sustituir dicho valor en la ec.(2.2.3) y en la ec.(2.2.4) he integrando de nuevo, se obtiene $q_0 = 0.6$ e $I_0 = 0.4$, lo cual corresponde al potencial gravitacional y a la inercia rotacional de una esfera uniformemente distribuida, respectivamente.

2.3. Hidrodinámica de partículas suavizadas

El método denominado Hidrodinámica de Partículas Suavizadas (SPH, Smoothed Particle Hydrodynamics) es un método Lagrangeano libre de malla utilizado en el modelado numérico de fluidos [Gingold, 1977, Lucy, 1977]. En dicho método, el fluido es representado por un conjunto discreto de i partículas, cada una de las cuales tiene asociada una masa m_i , un momento $m_i\vec{v}_i$ y propiedades hidrodinámicas (presión p_i , temperatura T_i , energía interna ϵ_i , etcétera). La evolución temporal del fluido es gobernada por las ecuaciones de la hidrodinámica (ver apéndice A), más un conjunto de ecuaciones adicionales que modifican las propiedades de las partículas, en este caso en particular la interacción gravitacional entre todas las partículas del sistema, ver seccion 1.3.2.

La formulación SPH es dividida en dos pasos:

1. La representación integral. Si en la representación integral de la función $f(\vec{x})$

$$f(\vec{x}) = \int_{\Omega'} f(\vec{x}')\delta(\vec{x} - \vec{x}')d\vec{x}'$$

la función delta $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ es remplazada por una *función de suavizado* (smoothing kernel function) $W(\vec{x} - \vec{x}', h)$ ¹, entonces

$$f(\vec{x}) \approx \int_{\Omega'} f(\vec{x}')W(\vec{x} - \vec{x}')d\vec{x}' \equiv \langle f(\vec{x}) \rangle \quad (2.3.1)$$

¹La función de suavizado W debe satisfacer las siguientes dos condiciones: (1) $\int_{\Omega} W(\vec{x} - \vec{x}', h)d\vec{x}' = 1$ y (2) $\langle f(\vec{x}) \rangle \rightarrow f(\vec{x})$ si $h \rightarrow 0$, i.e., W debe de cumplir las mismas condiciones que una delta de Dirac, $\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{x} - \vec{x}', h) = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$. La longitud de suavizado h controla el dominio de W .

donde $\langle f(\vec{x}) \rangle$ es una aproximación, en el dominio Ω' , a la función $f(\vec{x})$ denominada *kernel approximation*. La función de suavizado, también llamada kernel, comúnmente utilizado en SPH es el *cubic spline* [Monaghan, 1985]

$$W(r, h) = \frac{8}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{r}{h}\right)^2 + 6\left(\frac{r}{h}\right)^3 & 0 \leq \frac{r}{h} \leq \frac{1}{2} \\ 2\left(1 - \frac{r}{h}\right)^3 & \frac{1}{2} < \frac{r}{h} \leq 1 \\ 0 & 1 \leq \frac{r}{h} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

donde r es la distancia entre las partículas y h , la *longitud de suavizado* (smoothing length), controla la resolución espacial del cálculo numérico.

2. La aproximación por partículas. La representación integral de $f(\vec{x})$, ec. (2.3.1), puede ser discretizada como la suma sobre todas las partículas $j (= 1, 2, \dots, N)$, que cumplen con la condición $|\vec{x} - \vec{x}_j| \leq h_j$

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{x}) \rangle &= \int_{\Omega'} f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}' \\ &\approx \sum_{j=1}^N f(\vec{x}_j) W(\vec{x} - \vec{x}_j, h_j) \Delta V_j' \end{aligned}$$

o bien

$$\langle f(\vec{x}) \rangle \equiv \sum_{j=1}^N f(\vec{x}_j) W(\vec{x} - \vec{x}_j, h_j) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (2.3.3)$$

en donde el volumen infinitesimal $d\vec{x}'$ ha sido remplazada por el volumen finito ΔV_j , el cual está relacionado con la masa de la partícula por medio de

$$m_j = \rho_j \Delta V_j$$

siendo ρ_j la densidad de la partícula. La longitud de suavizado h_j controla, entre otras cosas, el número de partículas de interpolación N . Así, la ec. (2.3.3) muestra que $f(\vec{x})$ puede ser aproximada por una interpolación, o promedio local sobre las partículas que cumplan con la condición $|\vec{x} - \vec{x}_j| \leq h_j$.

Para lograr un uso óptimo de la naturaleza Lagrangeana del SPH se debe de permitir que la longitud de suavizado h_j varíe, i.e., $h_j = h_j(t, \vec{x}_j)$. En regiones de alta densidad h_j debe ser pequeño y en regiones de baja densidad debe ser más grande, esto con la finalidad de permitir que el número de partículas N , que se encuentren dentro de un radio $r < h_j$ alrededor de la partícula j , sea aproximadamente el mismo para todas las partículas i . Sin embargo, el permitir que h_j varíe introduce a la ecuación de movimiento términos proporcionales a ∇h_j y $\partial h_j / \partial t$, también se introducen términos proporcionales a ∇h_j en el gradiente del kernel. Sin embargo, en ambos casos los efectos pueden ser despreciados [Benz, 1990]. La ecuación de movimiento para h_i puede ser acoplada a la

densidad tomando $h_i = h_{i,0}(\rho_{0,i}/\rho_j)$ [Monaghan, 1985] y permitiendo que este evolucione temporalmente mediante

$$\frac{dh_i}{dt} = - \left(\frac{h_i}{3\rho_i} \right) \frac{d\rho_i}{dt} = \frac{1}{3} h_i \vec{\nabla}_i \cdot \vec{v}_i, \quad (2.3.4)$$

donde el gradiente $\vec{\nabla}_i$ es tomado con respecto a las coordenadas de la partícula i .

En la implementación frecuentemente utilizada de SPH [Monaghan, 1985], la densidad de las partículas es calculada por medio de

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W(x_{ij}, h_i), \quad (2.3.5)$$

donde $x_{ij} = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$ y $\rho_i = \rho(\vec{x}_i)$. Como se mencionó anteriormente, la longitud de suavizado variable $h_i = h_i(t, \vec{x}_i)$ es empleada de tal manera que el número de vecinos N de cada partícula i se mantenga constante. Springel & Hernquist [Springel, 2002] asignan el tamaño de h_i , para cada partícula, de tal manera que el volumen ocupado por el kernel contenga una cantidad constante de masa

$$\vec{m} N_{sph} = \left(\frac{4}{3} \pi h_i^3 \right) \rho_i, \quad (2.3.6)$$

donde \vec{m} es la masa promedio de las partículas, N_{sph} es el número de vecinos y ρ_i es la densidad de la partícula i . Utilizando (2.3.6) como restricción para los multiplicadores de Lagrange, Springel & Hernquist [Springel, 2002] derivaron una formulación SPH, la cual conserva la energía y la entropía, de modo que la ecuación de movimiento o ecuación de Navier-Stokes correspondiente a esta aproximación está dada por

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left[f_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + f_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right], \quad (2.3.7)$$

donde $f_j = (1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i})^{-1}$ y $W_{ij}(h_i) = W(r = |\vec{x}_{ij}|, h_i)$. Un término correspondiente a la *viscosidad artificial* debe de ser adicionado a (2.3.7)

$$\left(\frac{d\vec{v}_i}{dt} \right)_{visc} = - \sum_{j=1}^N m_j \Pi_{ij} \nabla_i \vec{W}_{ij}, \quad (2.3.8)$$

donde \vec{W}_{ij} es la media aritmética de dos kernels $W_{ij}(h_i)$ y $W_{ij}(h_j)$ y el *tensor de viscosidad* Π_{ij} esta dado por

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2} \frac{(c_i + c_j - 3w_{ij})w_{ij}}{\rho_{ij}} & \vec{v}_{ij} \cdot \vec{x}_{ij} \leq 0 \\ 0 & \vec{v}_{ij} \cdot \vec{x}_{ij} > 0, \end{cases} \quad (2.3.9)$$

con

$$w_{ij} = \frac{\vec{v}_{ij} \cdot \vec{x}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}.$$

Aquí, $\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j$, $\vec{x}_{ij} = \vec{x}_i - \vec{x}_j$, $\rho_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$ y c representa la velocidad del sonido. La magnitud de la viscosidad es controlado por el parámetro α , comúnmente elegido entre 0.5 y 1.0, ver [Springel, 2005]. Si, además de la viscosidad, la interacción gravitatoria entre las partículas (autogravedad) es tomada en cuenta, entonces el término

$$\vec{F}_G = -\nabla_i \phi_i = -G \sum_{j=1}^N \frac{m_j \hat{r}_i}{r_{ij}^2} r_i \quad (2.3.10)$$

debe ser adicionado a la ec.(2.3.7).

Ahora, para obtener la fuerza de gravedad actuando sobre la partícula i , la suma sobre (2.3.10) debe de tomar en consideración a *todas* las partículas. Una de las principales aproximaciones utilizadas para hacer frente a este problema es el denominado *hierarchical tree method*. En este método, partículas vecinas son sistemáticamente agrupadas en clusters, clusters son agrupados en clusters de clusters, y así sucesivamente, hasta tener un cluster principal o root que agrupa a todas las partículas. Esta jerarquía de clusters es organizado en forma de árbol (tree). El centro de masa (CM) y una expansión multipolar de (2.3.10) es calculada para cada cluster. Así, la fuerza sobre la partícula i se calculada de la siguiente manera. Comenzando con el cluster principal, se verifica que

$$\frac{S_k}{r_{jk}} \leq \theta, \quad (2.3.11)$$

donde S_k es el tamaño del cluster k , r_{ik} es la distancia de dicho cluster hasta la partícula j y θ determina el grado de aproximación del método. Valores pequeños de θ mejoran la aproximación, pero requieren de un tiempo de cómputo mayor. Si la ec.(2.3.11) se cumple, entonces, la fuerza que el cluster k ejerce sobre la partícula i es calculado utilizando una expansión multipolar. De lo contrario, el cluster es dividido en sub-clusters y el procedimiento anterior es repetido. En este método el tiempo de cómputo es proporcional a $N \log N$, donde N es el número total de partículas [Steinmetz, 1993]. El grado de aproximación del método anterior depende de: (1) la manera en que se agrupan las partículas, (2) el grado de la expansión multipolar y (3) del valor dado a θ en (2.3.11), *opening criterion*.

Por ultimo, la entropía específica s de un fluido elemental puede ser caracterizada por la función de entropía $A(s)$, la cual es definida por

$$P = A(s)\rho^\gamma, \quad (2.3.12)$$

siendo la energía del sistema

$$u = \frac{A(s)}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1}, \quad (2.3.13)$$

donde P es la presión, ρ la densidad y γ es el índice adiabático, ver [Springel, 2002]. Así, para este modelo SPH, en lugar de seguir la evolución temporal de la energía interna, la aproximación se formula en función de la entropía

$$\frac{dA_i}{dt} = -\frac{\gamma - 1}{\rho_i^\gamma} L(\rho_i, u_i) + \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\rho_i^{\gamma-1}} \sum_{j=1}^N m_j \Pi_{ij} \vec{v}_{ij} \cdot \nabla_i \vec{W}_{ij}, \quad (2.3.14)$$

donde $L(\rho_i, u_i)$ describe posibles reservorios o sumideros de energía debidos a fuentes de enfriamiento o calentamiento dentro del sistema.

2.4. Criterio para resolver la estabilidad de Jeans

Los cálculos realizados con SPH tienen un límite en la resolución de la masa, pues al utilizar una longitud de suavizado h variable, la cual contiene un número de partículas fijo N_{vec} dentro del volumen $V_h = 4\pi h^3/3$, también fija una cierta cantidad de masa $M_h = \rho V_h$ (asumiendo que todas las partículas tienen la misma masa \bar{m}). Bate & Burkert [Bate, 1997] fijaron la masa más pequeña M_{res} que se puede resolver en un cálculo SPH, como la masa que contienen $2N_{\text{vec}}$ partículas. Este límite en la resolución no afecta el resultado global de un cálculo SPH *a menos que* la masa de Jeans llegue a ser comparable a la masa de $2N_{\text{vec}}$ partículas. Así, el criterio que se debe de satisfacer es que la masa mínima que se puede resolver M_{res} debe ser siempre menor que la masa de Jeans

$$M_{\text{res}} < M_J.$$

Ahora, tomando la mínima masa que se puede resolver como la masa de $2N_{\text{vec}}$ partículas y, como antes, asumiendo que todas las partículas tienen aproximadamente la misma masa \bar{m} , entonces

$$\bar{m} = \frac{M_{\text{tot}}}{N_{\text{tot}}} = \frac{M_{\text{res}}}{2N_{\text{vec}}} < \frac{M_J}{2N_{\text{vec}}}. \quad (2.4.1)$$

De la ec.(2.4.1), se puede ver que el número total de partículas está determinado por la masa mínima de Jeans que se puede tener

$$N_{\text{tot}} > 2N_{\text{vec}} \left(\frac{M_{\text{tot}}}{M_J} \right), \quad (2.4.2)$$

donde $M_J \equiv 2\pi^{5/2} G^{-3/2} \rho^{-1/2} c_s^3 / 6$, $M_{\text{tot}} (= M_0)$ es la masa total del sistema y N_{tot} representa la cantidad mínima de partículas SPH necesarias para realizar un cálculo con fragmentación genuina [Hubbert, 2006]. En el caso supuesto, partículas de masa \bar{m} , el volumen V_h encierra una masa total fija $M_h = \bar{m} N_{\text{vec}}$. Ahora, en el caso de partículas con masas diferentes, dicha masa estará dada por $M_h = \sum_{i=1}^{N_{\text{vec}}} m_i$, la cual deberá ser menor o igual a $\bar{m} N_{\text{vec}}$, pues de la ec.(2.4.1) $2M_h \leq 2\bar{m} N_{\text{vec}} < M_J$. En caso contrario se tendría que la masa de $2N_{\text{vec}}$ partículas no siempre cumpliría con el criterio establecido por Bate & Burkert. De lo anterior se puede concluir que si $\sum_{i=1}^{N_{\text{vec}}} m_i \leq \bar{m} N_{\text{vec}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{vec}}} \bar{m}$, entonces $m_i \leq \bar{m}$, esto es, las partículas tienen un límite superior para el cual se cumple el criterio de Jeans.

Dado que la longitud de Jeans, ec.(1.3.28), y la masa de Jeans, ec.(1.3.29), son proporcionales a $c_s \rho^{-1/2}$ y $c_s^3 \rho^{-1/2}$, respectivamente, entonces, en ambos casos su comportamiento estará determinado por la velocidad del sonido c_s , la cual a su vez estará determinada por la ecuación de estado utilizada. En el caso isotérmico, la velocidad del sonido es una constante, por lo que la longitud y la masa de Jeans dependerán únicamente de $\rho^{-1/2}$. Por

otro lado, en el caso barotrópico, ec.(2.1.3) la velocidad del sonido está en función de la densidad, lo que lleva a un comportamiento que no depende solo de $\rho^{-1/2}$. En la Fig. 2.2 se muestra, arriba, al número de partículas N_{tot} y, abajo, la longitud de Jeans $\lambda_J/2$ como función de la densidad ρ/ρ_0 en el caso isotérmico (líneas punteadas negras) y en el caso barotrópico (líneas solidas negras). En el caso isotérmico, al incrementarse la densidad, el número total de partículas necesarias para cumplir el criterio de Jeans aumenta; mientras que, la longitud de Jeans disminuye, i.e, la masa de Jeans se hace más pequeña y se necesitan más partículas para poder satisfacer $m_i < \bar{m}$. Por otro lado, el comportamiento en el caso barotrópico es diferente, existe un máximo en el número de partículas necesarias para cumplir el criterio de Jeans, lo que corresponde a un mínimo valor en la masa de Jeans $\sim 2^{3/2}6G^{-3/2}\rho_b^{-1/2}c_0^3$. El valor en el que ocurre dicho máximo/mínimo coincide con el valor de la densidad fijado en la ecuación de estado, ec.(2.1.3), para que el sistema cambie de un estado isotérmico a un estado adiabático, $\rho = \rho_b$. El que N_{tot} alcance un máximo en ρ_b para el caso barotrópico tiene el efecto de que, al evolucionar el sistema e irse incrementando la densidad, no será necesario incrementar el número de partículas necesarias para satisfacer la condición de estabilidad de Jeans, contrario a lo que sucede en el caso isotérmico, en donde, si se desea alcanzar densidades de ~ 7 ordenes de magnitud más grandes que la densidad original (o más altas), sera necesario discretizar el sistema con al menos 10^6 partículas, ver líneas punteadas en la Fig. 2.2.

En conclusión, la masa de Jeans debe de contener un cierto número de partículas, esto con la finalidad de satisfacer la condición de estabilidad de Jeans. Al incrementarse la densidad del sistema, la masa de Jeans se hace cada vez más pequeña, por lo que es necesario incrementar el número de partículas utilizadas para discretizar el sistema, de tal manera que la condición dada por la ec.(2.4.1) siempre se cumpla. Sin embargo, en el caso barotrópico existe un límite en la masa de Jeans por encima del cual la condición de estabilidad de Jeans siempre se satisface, esto a pesar de que en el sistema la densidad siga aumentando con el paso del tiempo.

2.5. Centros de acreción

En simulaciones que utilizan SPH, la evolución temporal de las regiones que colapsan más rápidamente se hace cada vez más lento con el paso del tiempo. El rápido incremento de la densidad solo se da en algunas pequeñas regiones, dejando al resto del sistema prácticamente sin cambios significativos. El remplazar estos cúmulos de alta densidad por una sola partícula permite seguir la evolución del sistema por mucho más tiempo.

Una vez que que la densidad de una cierta región que se encuentra colapsando excede un valor umbral ρ_s , toda esta región es remplazada por una partícula no gaseosa y masiva, denominada *sink*, que combina la masa, el momento lineal y el momento angular (spin) de las partículas que remplaza. Este sink, o centro de acreción, acreta a las partículas vecinas que se encuentran en proceso de colapsar, lo que evita el problema de que regiones de alta densidad controlen el paso de tiempo requerido para la simulación [Bate, 1995].

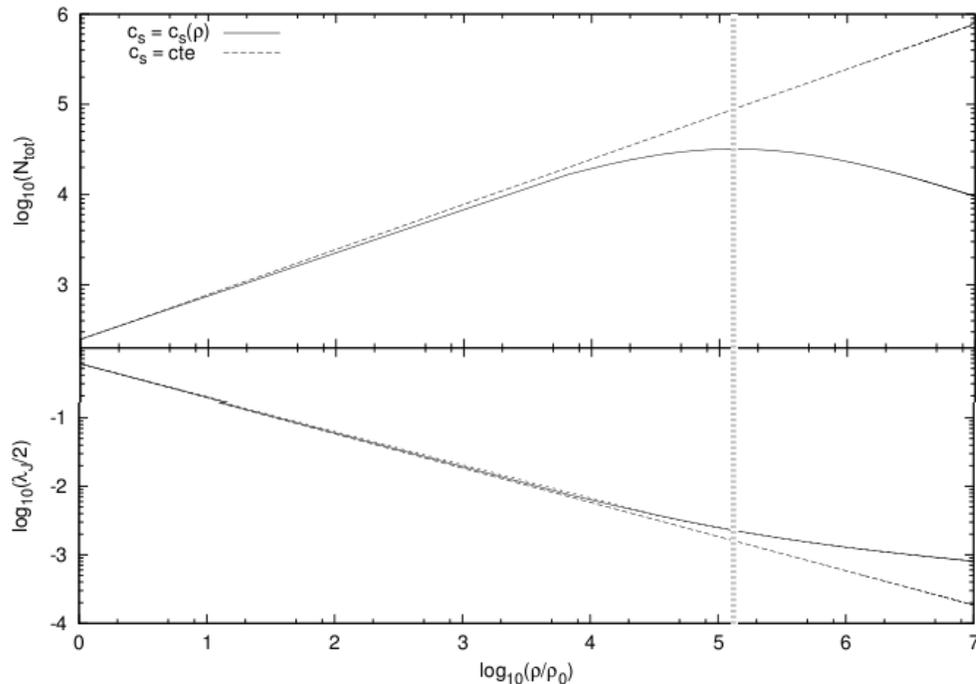


Figura 2.2: Arriba, número mínimo de partículas N_{tot} necesarias para resolver correctamente el criterio de Jeans. Abajo, longitud de onda de Jeans $\lambda_J/2$. Ambas gráficas están en función de la densidad ρ y los límites se encuentran dentro del rango de las simulaciones realizadas. Las líneas solidas de color negro corresponden a la ecuación de estado barotrópica, mientras que, las líneas punteadas negras corresponden a la ecuación de estado isotérmica. La línea vertical corresponde a $\rho = \rho_b$ y pasa por el máximo valor de N_{tot} , el cual corresponde al mínimo número de partículas N_p necesarias para tener genuina fragmentación en el caso barotrópico.

Un centro de acreción es, en sí mismo, una simple partícula con una masa mucho mayor que una partícula tipo gas (≈ 50 veces más masiva), la cual interacciona únicamente de manera gravitacional con partículas tipo gas. Partículas gaseosas que caen dentro de cierto radio alrededor del sink, el radio de acreción r_{acc} , serán acretadas. Dicho radio es elegido antes de comenzar los cálculos y permanecerá fija durante toda la evolución del sistema, su elección dependerá de la resolución que se desea tener cerca del sink, de manera que, por debajo de ρ_s , siempre se cumpla con la condición de estabilidad de Jeans.

Todas las partículas que se encuentren dentro del radio de acreción, deben de pasar varios criterios antes de ser acretados. Además del radio de acreción, un segundo radio interno es comúnmente utilizado. Todas las partículas que caen dentro de este radio interno serán siempre acretadas. Cuando una partícula es acretada:

1. su masa y su momento lineal son adicionadas al sink,
2. el spin del sink es modificado para tomar en cuenta el momento angular de la partícula, y

3. la posición ocupada por el sink corresponde al del centro de masa del sink y la partícula acretada.

Para llevar a cabo la creación dinámica de sinks, es necesario realizar una serie de pruebas, esto con el objetivo de evitar la creación espuria de sinks en regiones que no se encuentren en colapso local [Federrath, 2010].

1. La idea básica consiste en primero observar si la densidad de una partícula i dentro de una cierta región supera una densidad umbral ρ_s . Si este es el caso, entonces una región esférica de radio r_{acc} centrada en i es temporalmente creada, dicha región recibe el nombre de volumen de control V_i .
2. Las partículas que se encuentran dentro del volumen V_i solamente pueden formar un sink si ellas continuaran colapsando. Para asegurar esto, dentro de la región ocupada por las partículas se debe cumplir que:
 - $\alpha \leq \frac{1}{2}$ (el gas centro de V_i excede la masa de Jeans);
 - $\alpha + \beta \leq 1$ (el gas centro de V_i está colapsando); y
 - $E_{\text{tot}} = E_g + E_t + E_k < 0$ (estado ligado), donde $E_g \propto \sum_i m_i \phi_i$, $E_t \propto \sum_i m_i p_i / \rho_i$, $E_k \propto \sum_i m_i |\bar{v}_i - v_{\text{cm}}|$, siendo ϕ_i el potencial gravitacional debido a la masa del gas de la región de prueba y $\bar{v}_{\text{cm}} = \sum_i (m_i \bar{v}_i) / \sum_i m_i$.

Si todas las pruebas son pasadas, entonces un sink es creado de la combinación de todas las partículas que se encuentran dentro del volumen V_i .

Resultados

3.1. Introducción

En este capítulo se propone un modelo numérico para simular la evolución de un núcleo preestelar que se encuentra colapsando. Dicho modelo está basado en resultados observacionales, principalmente del núcleo L1544, y en modelos analíticos y numéricos del mismo propuestos por Ward-Thompson *et al.* [Ward-Thompson, 1999], Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004a], Attwood *et al.* [Attwood, 2009] y Arreaga *et al.* [Arreaga, 2010].

A diferencia de modelos propuestos por otros autores, e.g., Klessen *et al.* [Klessen, 2000] y Jappsen *et al.* [Jappsen, 2004] (quienes suponen un medio infinito de densidad uniforme y condiciones iniciales que simulan turbulencia, las cuales introducen al sistema perturbaciones tanto en la velocidad como en la densidad); Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004a] y Attwood *et al.* [Attwood, 2009] (quienes plantean un núcleo preestelar con simetría esférica, densidad tipo plummer y campo de velocidad turbulento); y Arreaga *et al.* [Arreaga, 2010] (quien modela el núcleo preestelar L1544 como una esfera inicialmente con rotación rígida y perturbación en la masa de tipo $m_i = m_i [1 + 0.1 \cos(2\phi)]$). En este trabajo de tesis, se propone modelar al núcleo preestelar L1544 como una nube con simetría esférica y rotación rígida, tal y como lo hace Arreaga *et al.* [Arreaga, 2010], en lugar de utilizar un campo de velocidades turbulento, como lo propuesto por Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004a] y Attwood *et al.* [Attwood, 2009]. Para esto los valores en el parámetro inicial α_{turb} propuestos por Goodwin y Attwood son asignados al parámetro β del modelo aquí propuesto, esto es equivalente a sustituir la energía inicial turbulenta (la cual se disipa rápidamente, por lo que es necesario insertar energía a una cierta velocidad y a una cierta escala k) por energía cinética rotacional. Además, como se describe a continuación, el modelo supone velocidad angular uniforme, perfil de densidad tipo Plummer y ecuación de estado barotrópica.

3.2. Condiciones iniciales

En el modelo aquí propuesto se utilizan las mismas condiciones iniciales utilizadas por Attwood *et al.* [Attwood, 2009] y Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004a]. Goodwin se basó en el modelo analítico propuesto por Whitworth *et al.* [Whitworth, 2001], quien intento ajustarse a las propiedades observadas del núcleo preestelar L1544 dadas por Ward-Thompson *et al.* [Ward-Thompson, 1994].

El modelo utiliza un perfil de densidad inicial tipo Plummer, ec.(2.1.4), con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 3.0 \times 10^{-18} \text{ g cm}^{-3} \approx 9.0 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}, \\ R_0 &= 5.0 \times 10^4 \text{ au} \approx 7.5 \times 10^{17} \text{ cm}, \\ r_0 &= 0.1 R_0.\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

Dichos parámetros fijan la masa total en $M_0 = 5.4M_\odot \approx 1.0 \times 10^{34}$ g, con un tiempo de caída libre de $t_{\text{ff}} = 1.21 \times 10^{12}$ s $\approx 38,479$ yr. El gas es inicialmente isotérmico, con una temperatura de $T = 10$ K, de modo que la razón entre la energía térmica y la energía gravitacional es $\alpha_0 = 0.3$. La ecuación de estado utilizada es la barotrópica, ec.(2.1.3), con un valor de densidad crítica (la densidad a la cual el núcleo pasara de ser isotérmico a adiabático) de $\rho_b = 1.0 \times 10^{-13}$ g cm $^{-3}$; mientras que, la densidad mínima en la cual comenzará la formación de los centros de acreción es $\rho_s = 1.0 \times 10^{-11}$ g cm $^{-3}$, con una resolución lineal de $r_{\text{acc}} \approx 4$ au y una masa de Jeans mínima de $\sim 0.002M_\odot$, lo que resulta en un número mínimo de partículas de $\sim 2.5 \times 10^5$, al tomar el número de vecinos para cada partícula SPH igual a 50. Cabe mencionar que con los mismos valores iniciales Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004a, Goodwin, 2004b] y Attwood *et al.* [Attwood, 2009], utilizan $\sim 2.5 \times 10^4$ partículas, un orden de magnitud menor que el utilizado en este trabajo de tesis.

Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004a, Goodwin, 2004b] y Attwood *et al.* [Attwood, 2009] impusieron al campo de velocidades, el cual tomaron libre de divergencia con un espectro de potencias tal que $P_k dk \propto k^{-4} dk$. Dicho espectro simula la ley de escalas que se ha observado en algunas nubes moleculares [Larson, 1981, Burkert, 2000]. Tal descripción para el campo inicial de velocidades es denominado *turbulencia* [Bate, 2002a, Bate, 2002b, Bate, 2003, Goodwin, 2004a, Goodwin, 2004b]. El nivel de turbulencia considerado por Goodwin y Attwood fue de

$$\alpha_{\text{turb}} = \frac{E_{\text{turb}}}{|E_g|} = 0.05, 0.10, 0.25,\tag{3.2.2}$$

donde E_{turb} y E_g son la energía debida a la turbulencia y la energía potencial, respectivamente. De lo anterior, ellos encontraron, entre otras cosas, que incrementando el nivel de la turbulencia se incrementa el número de centros de acreción o sinks formados.

Como se mencionó anteriormente, a diferencia de lo realizado por Goodwin *et al.* y Attwood *et al.*, en el modelo aquí propuesto se reemplazó la energía inicial dada por E_{turb} por la energía cinética rotacional E_k , de forma que

$$\beta_0 = \frac{E_k}{|E_g|} = 0.05, 0.10, 0.25. \quad (3.2.3)$$

Estos valores de β_0 fijan el momento angular específico como $1.6 \times 10^{21} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, $2.2 \times 10^{21} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ y $3.5 \times 10^{21} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, respectivamente. Dichos valores del momento angular específico caen en el rango de las observaciones dadas por Crapsi *et al.* [Crapsi, 2007] y se ajustan a los resultados obtenidos numéricamente por Jappsen *et al.* [Jappsen, 2004].

Los parámetros dados anteriormente pueden ser comparados con otros resultados numéricos si se aplica el escalamiento descrito en la sección 2.2, e.g., de la ec.(2.2.4) se tiene que el momento de inercia en unidades normalizadas es $I_0 = 0.07$, mucho menor que el momento correspondiente a una esfera con densidad uniforme, $I_0 = 0.4$, lo que, de la ec.(2.2.2), se ve reflejado en el hecho de que, si se fija el valor inicial de β_0 , la velocidad angular Ω_0 tiene que ser mayor en una esfera con perfil uniforme vs. una esfera de perfil tipo Plummer. Véase Arreaga *et al.* [Arreaga, 2007] quien utiliza el denominado caso estándar de Burkert & Bodenheimer [Burkert, 1993] con $\beta_0 \approx 0.16$, lo que resulta en una velocidad angular de $\Omega_0 = 7.2 \times 10^{-13} \text{ s}^{-1}$, mayor que cualquiera de los valores aquí utilizados, ver tabla 3.1. En dicha tabla también se muestra los diferentes parámetros utilizados en cada uno de los modelos, así como algunas de las propiedades obtenidas durante la evolución temporal de cada sistema. La nomenclatura está formada por la letra A , seguida del valor del parámetro inicial $\beta_0 (= \alpha_{\text{turb}})$, y de la letra N , seguida del número de partículas utilizadas en el modelo N_p , dividido por 10^5 .

Modelo	β_0	$\Omega_0 \times 10^{-14}$ [s^{-1}]	$N_p \times 10^5$	$M_{\text{s,prom}}$ [M_\odot]	N_s	M/M_0 [%]	t [t_{ff}][kyr]
A0.05N5	0.05	3.68	5.0	0.108	34	68.03	6.00 231.00
A0.10N5	0.10	5.21	5.0	0.079	48	70.17	6.00
A0.25N5	0.25	8.23	5.0	0.069	39	50.00	3.48 133.98
				0.064	56	66.05	6.00
A0.25N10			10.0	0.040	68	50.00	3.46 133.21
				0.031	112	64.28	6.00
A0.25N20			20.0	0.032	84	50.00	3.31 127.43
				0.031	115	65.73	6.00

Tabla 3.1: Nombre del modelo, cociente inicial de la energía cinética rotacional y la energía potencial β_0 , velocidad angular inicial Ω_0 , número de partículas utilizadas en la simulación N_p , masa promedio de los centros de acreción formados $M_{\text{s,prom}}$, número de centros de acreción o sinks formados N_s , porcentaje de masa total acretada M_s , y tiempo t al que corresponde cada propiedad.

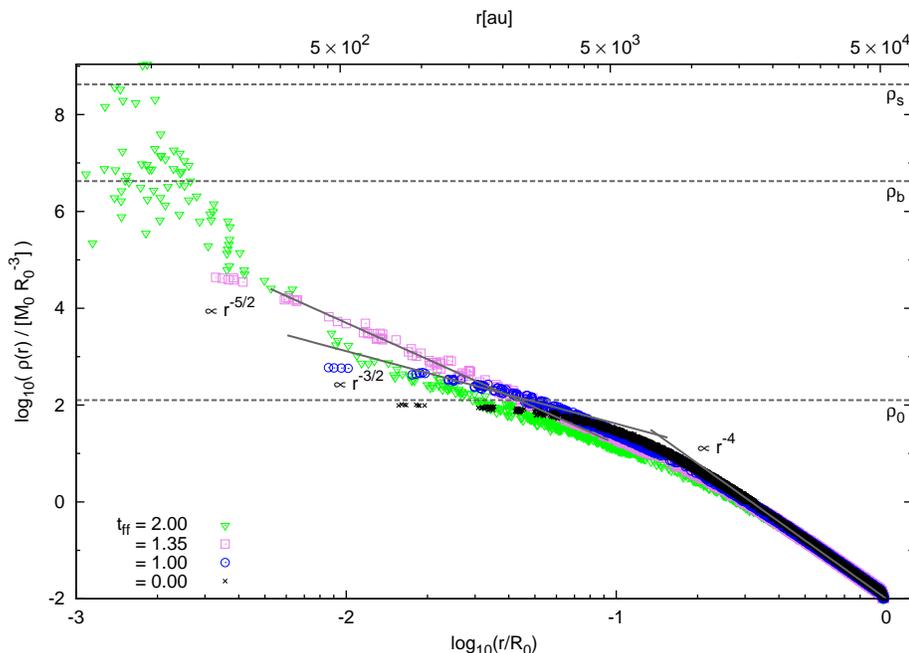


Figura 3.1: Evolución de los perfiles de densidad para el modelo *A0.25N5*. El perfil inicial ($t_{\text{ff}} = 0$) se caracteriza por una región interna plana (core); mientras que, cerca del límite exterior del núcleo preestelar el perfil es proporcional a r^{-4} . Al tiempo $t_{\text{ff}} = 1.0$, el perfil ha evolucionado de tal forma que el core ha adoptado un perfil $\propto r^{-3/2}$. En $t_{\text{ff}} = 1.35$ el perfil de densidad del núcleo es ahora proporcional a $r^{-5/2}$. Para $t_{\text{ff}} = 2$ se ha ya superado el valor mínimo de densidad para la formación de los centros de acreción. Nótese que a pesar de que el perfil de densidad del core cambia a medida que el sistema evoluciona, las regiones más exteriores al núcleo permanecen con un perfil proporcional a r^{-4} . Compárese con la Fig. 1 de [Whitworth, 2001].

3.3. Evolución temporal

Perfil de densidad. En la Fig. 3.1 se muestra el perfil de densidad inicial propuesto para el núcleo preestelar L1544, así como también su evolución temporal para $\beta_0 = 0.25$ y $N_p = 5 \times 10^5$, modelo *A0.25N5*. Como se mencionó anteriormente, ver sección 1.2, diferentes observaciones sugieren que los núcleos sin estrellas, o núcleos preestelares, tienen perfiles de densidad los cuales pueden ajustarse a perfiles tipo Plummer, caracterizados por ser aproximadamente constantes en el centro, $\rho(r) \approx \rho_0$, y disminuir rápidamente hasta que en las partes más exteriores al núcleo se sigue una ley de potencias, $\rho(r) \propto r^{-\eta}$, ver $t_{\text{ff}} = 0$ en la Fig. 3.1. Conforme el modelo evoluciona, la región central se hace cada vez más pronunciada, acercándose asintóticamente a $\rho(r) \propto r^{-3/2}$ en $t \approx 1.0 t_{\text{ff}} \approx 39$ kyr. Por otro lado, el perfil exterior permanece prácticamente sin cambios, manteniéndose cerca de $\rho(r) \propto r^{-4}$.

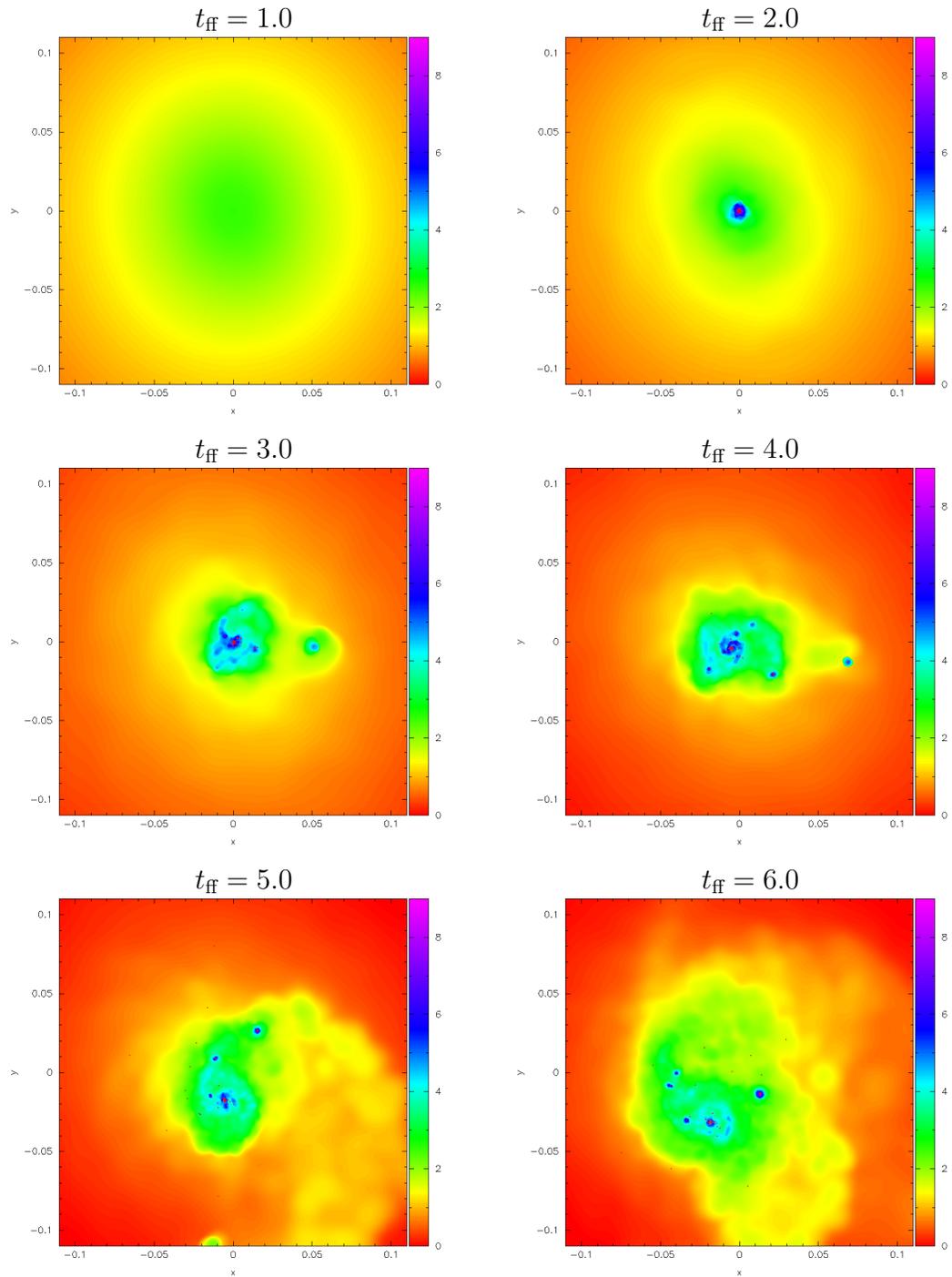


Figura 3.2: Mapas de densidad para el modelo $A0.25N5$ en diferentes tiempos de su evolución. Ver Fig. 1 de [Attwood, 2009].

Lo anterior coincide con lo predicho por Whitworth *et al.* [Whitworth, 2001], ver seccion 1.2, en el sentido de que en $t \approx 1.0t_{\text{ff}}$ el perfil de densidad tiende a $r^{-3/2}$; sin embargo, Whitworth designa a este punto como el final de la fase preestelar y el comienzo de la fase clase 0, lo que en el presente trabajo se ve retrasado por la rotación dada al sistema. Continuando con la evolución, la formación de centros de acreción o, de ahora en adelante protoestrellas¹, comenzará en el momento en el cual la densidad supere la densidad crítica ρ_s , lo que ocurre después de $t = 1.35t_{\text{ff}} \approx 52\text{kyr}$, ver Fig. 3.4. En este punto el perfil de densidad en la parte más interna del núcleo preestelar es ahora proporcional a $r^{-5/2}$; mientras que, el exterior se mantiene la tendencia dada por el perfil original. Cuando el sistema ha alcanzado dos tiempos de caída libre, $t = 2.0t_{\text{ff}} \approx 77\text{ kyr}$, se ha ya acretado aproximadamente un 24% de la masa total, y se cuenta con 19 protoestrellas formadas, las cuales se encuentran ubicadas muy cerca del centro del recién nombrado núcleo protoestelar. De las Figuras 3.1 y 3.2 se puede observar que la región que ha superado la densidad crítica ρ_s está centralizada, con $r \lesssim 0.01$. Con el paso del tiempo, cada vez más regiones del sistema colapsan las cuales, en su mayoría, se encuentran por debajo de $r \lesssim 0.1 = 5 \times 10^3\text{ au}$.

3.4. Acreción

Tasas de acreción. Como se mencionó anteriormente, en el modelo más simplificado las estrellas se forman por colapso de una esfera isotérmica, la cual se encuentra inicialmente en equilibrio cuasi-estático oponiéndose a la gravedad por medio del gradientes de presión térmica y magnética, o simplemente presión térmica y presión magnética. Dicho modelo predice que las *tasas de acreción de masa protoestelar* $\dot{M} (\equiv dM/dt)$, o simplemente tasas de acreción, es constante en el tiempo y que depende únicamente de la velocidad del sonido [Shu, 1977]. Una simple aproximación a la tasa de acreción puede ser dada por el cociente de la masa local de Jeans, ec.(1.3.29), y el tiempo de caída libre ec.(1.3.32)

$$\dot{M} \approx M_J/t_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{32}{3}} \frac{\pi^2 c_s^3}{6 G} \approx 5.4 \frac{c_s^3}{G}, \quad (3.4.1)$$

dependiendo así únicamente de la velocidad del sonido [Schmeja, 2004]. Con $c_s = 0.2\text{kms}^{-1}$ se tiene que $\dot{M} = 10^{-5}M_{\odot}\text{ yr}^{-1}$, la cual es más alta que la tasa de acreción de una esfera isotérmica $\dot{M} \approx 1.0c_s^3/G$ [Shu, 1977]. Por otro lado, utilizando un modelo gravoturbulento, Schmeja *et al.* [Schmeja, 2004] obtiene tasas de acreción que dependen del tiempo, con picos de acreción \dot{M}_{max} que se encuentran entre 3 y $50c_s^3/G$ lo que equivale a $(0.05 - 1.0) \times 10^{-4}M_{\odot}\text{ yr}^{-1}$. Lo anterior está en acuerdo con otros modelos, en los cuales se pueden observar rangos en las tasas de acreción de entre $4c_s^3/G$ y $230c_s^3/G$ [Tomisaka, 1996, Motoyama, 2003, Ogino, 1999].

¹Attwood *et al.* denomina a los centros de acreción como estrellas, independientemente de su masa [Attwood, 2009]. Cabe recordar que objetos con masas menores a $\sim 0.08M_{\odot}$ no pueden mantener la fusión de hidrógeno y que la formación de planetas está en el orden de los 10^6 años.

Observaciones de objetos Clase 0 sugieren que sus tasas de acreción se encuentran en un rango que va de 10^{-5} hasta $10^{-4}M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$; mientras que, para objetos Clase I se han observado valores de entre 10^{-7} y $5 \times 10^{-6}M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ [Narayanan, 1998, Ceccarelli, 2000, Francesco, 2001, Beuther, 2002, Brown, 1999, Boogert, 2002, Young, 2003]. Observaciones llevadas a cabo por Bontemps *et al.* [Bontemps, 1996] estiman que la tasa de acreción decrece de $\sim 10^{-5}M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, para las protoestrellas Clase 0 más jóvenes, a $\sim 10^{-7}M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, para los objetos Clase I más evolucionados.

Modelo analítico. Como ya se había mencionado, Whitworth *et al.* [Whitworth, 2001] proponen un modelo analítico para las condiciones iniciales de un núcleo preestelar que se encuentra colapsando en alguna región aislada de formación estelar. El modelo es no magnético y está basado en el perfil de densidad tipo Plummer, con parámetros iniciales elegidos de tal forma que intentan modelar las propiedades observadas en el núcleo preestelar L1544, ver la sección 1.2. De este modo, Whitworth analizó la evolución del modelo, bajo la suposición de que la presión en el interior de la esfera es despreciable, y que, por lo tanto, el colapso inicia en $t = 0$. Ahora, él plantea que, dado el perfil de densidad inicial $\rho(r) = \rho(r, t = 0)$ se puede obtener el perfil de masa inicial como

$$M(r, t = 0) = \int_{r'=0}^{r'=r} \rho(r', t = 0) 4\pi r'^2 dr', \quad (3.4.2)$$

la cual puede ser invertida para obtener $r(M, t = 0)$, de modo que, el tiempo de caída libre este dado por

$$t_{\text{ff}}(M) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{r^3(M, 0)}{2GM} \right)^{1/2}, \quad (3.4.3)$$

en donde se ha hecho la suposición de que $\bar{\rho} = M/(4\pi r(M, 0)^3/3)$, la cual representa la densidad promedio dentro del radio $r = r(M, 0)$. De modo que, para cada instante la tasa de acreción correspondiente estará dada por

$$\dot{M}(M) = \frac{dM}{dt} = \frac{64GM^2\rho(M, 0)t_{\text{ff}}(M)}{\pi(3M - 4\pi r^3(M, 0)\rho(M, 0))}, \quad (3.4.4)$$

mientras que, la masa acretada como función del tiempo se puede obtener por integración

$$M(t) = \int \dot{M} dt, \quad (3.4.5)$$

en donde, los límites de integración serán evaluados desde el momento que inicia la acreción, hasta el momento en el que toda la masa haya sido acretada. La solución de las ecuaciones (3.4.4) y (3.4.5), bajo las condiciones iniciales dadas en la sección 3.2 y $\beta_0 = 0$, se muestran en la Fig. 3.3.

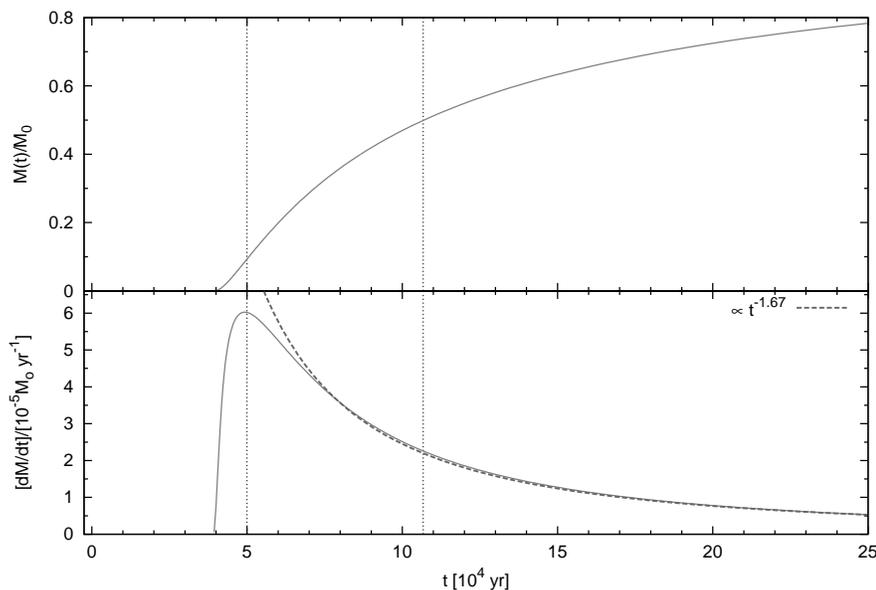


Figura 3.3: Evolución temporal de (a), arriba, fracción de la masa total acretaada $M(t)/M_0$ (b), abajo, la tasa de acreción $\dot{M} = dM/dt$, dadas por la solución de las ecuaciones (3.4.4) y (3.4.5), bajo las condiciones iniciales dadas en la sección 3.2 pero sin rotación ($\beta_0 = 0$), las cuales intentan reproducir las observaciones realizadas en el núcleo preestelar L1544. Las líneas verticales marcan el punto en el cual se alcanza el máximo de la tasa de acreción $\sim 5 \times 10^4$ yr y el momento en el cual el sistema ha acretaado un 50% de su masa total $\sim 11 \times 10^4$ yr, momento en el cual el sistema pasa de la fase Clase 0 a la fase Clase I. La línea punteada en (b) muestra la tendencia a ley de potencias al que tiende la tasa de acreción al continuar evolucionando. Ver Fig. 3 de [Whitworth, 2001]

En la Fig. 3.3, el punto $t = 0$ marca el inicio del colapso del núcleo preestelar, la cual se extiende hasta el momento en el que la acreción comienza, $t \approx t_{\text{ff}} = 3.85 \times 10^4$ yr, momento en el cual $M(t)/M_0 \neq 0$. Lo anterior encaja bien en las observaciones realizadas por Lee *et al.* [Lee, 1994], de las cuales se puede concluir que la fase de contracción preestelar es de $\sim (3 - 10) \times 10^4$ yr.

Inmediatamente después de la fase de contracción un punto central de masa se forma y la tasa de acreción aumenta rápidamente hasta llegar a un punto máximo $\dot{M}_{\text{max}} \approx 6 \times 10^{-5} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$ en $t \approx 5 \times 10^4$ yr con un porcentaje de masa acretaada de $\sim 10\%$. André *et al.* [André, 1993] definen el límite entre la fase Clase 0 y la fase Clase I como el punto en el cual el centro de acreción ha alcanzado el 50% de la masa final que tendrá al llegar a la secuencia principal. Para nuestro modelo, este límite se alcanza en $t \approx 11 \times 10^4$ yr, por lo que el tiempo de vida de la fase de contracción es de $\sim 7 \times 10^4$ yr, lo cual está en acuerdo con los tiempo de vida observados, ver Fig. 1.1.

Modelo numérico. En la Fig. 3.4 se muestran los resultados correspondientes a la evolución temporal del modelo descrito en la sección 3.2 con los parámetros dados en la tabla 3.1 (líneas grises sólidas). También se muestra la solución de la evolución temporal de la masa total acretada y de la tasa de acreción descritas en la Fig. 3.3, pero desplazadas hasta $t = 5 \times 10^4$ yr (líneas negras punteadas).

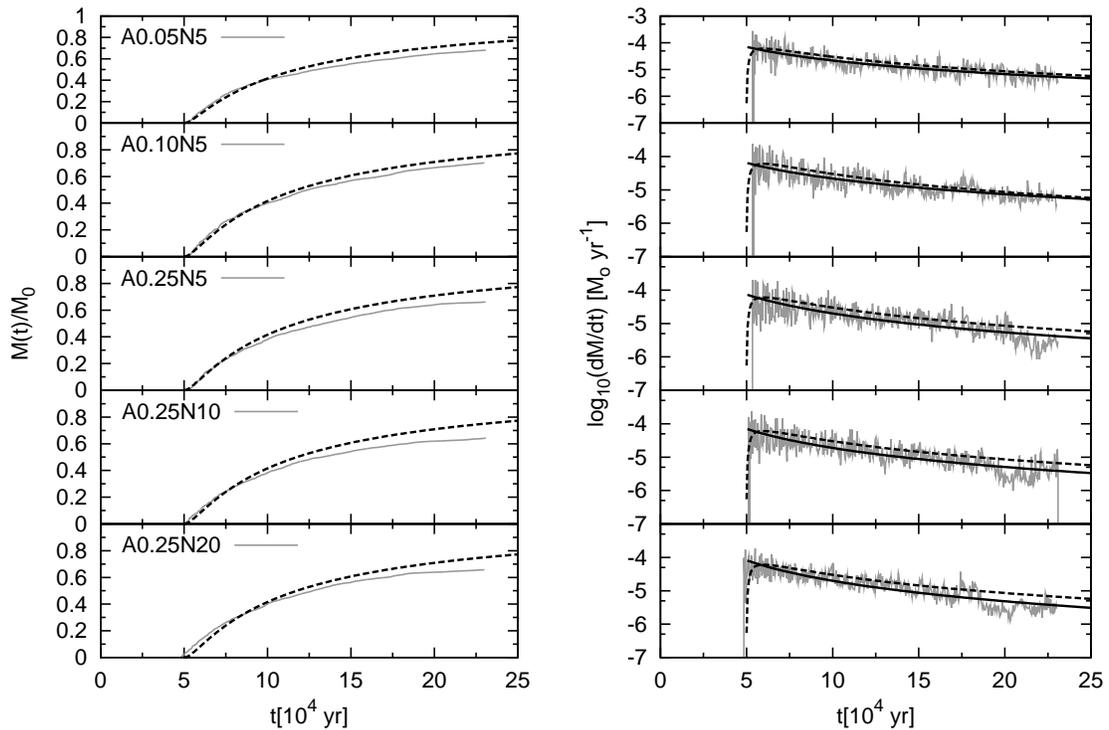


Figura 3.4: Evolución temporal de la fracción de masa acretada $M(t)/M_0$ (columna de la izquierda) y la tasa de acreción $\dot{M} = dM/dt$ (columna de la derecha) para los modelos de la tabla 3.1 (de arriba hacia abajo). Las líneas punteadas negras muestran la solución analítica dada por las ecuaciones (3.4.4) y (3.4.5). La línea sólida negra corresponde al ajuste realizado a la evolución temporal de la tasa de acreción y es de la forma $\dot{M} \propto t^n$, con $n \approx 2$. Con la finalidad de comparar los resultados, en todos los casos la solución analítica de $M(t)$ y de \dot{M} fue desplazada hasta $t = 5 \times 10^4$ yr. Comparece con la Fig. 4 de [Goodwin, 2004a]

La diferencia entre el inicio de la acreción dada por la solución analítica y la que se tiene en las simulaciones se debe a que la solución analítica desprecia los efectos de la rotación, campo magnético y/o turbulencia, por lo que el soporte en contra de la gravedad es únicamente dado por la presión del gas interior a la esfera. En la Fig. 3.3 se muestra el ajuste realizado a la evolución temporal de la tasa de acreción para $t > 5 \times 10^4$ yr, dicho ajuste muestra que \dot{M} tiende a una ley de potencias para valores grandes de t en la evolución. Este mismo ajuste es muestra en la Fig. 3.4 (líneas negras sólidas).

De la tabla 3.1 se puede ver que la masa total acretada M/M_0 es muy similar en todos los casos, siendo en promedio $\sim 67\%$; el cual está apenas por debajo de lo predicho por la solución analítica $\sim 70\%$. De igual forma, en dicha tabla se puede ver que, en promedio, la cantidad de masa acretada alcanza un 50% en, aproximadamente, 3.5 tiempos de caída libre, o lo que es lo mismo, en $\sim 13 \times 10^4$ yr, de modo que, la fase Clase 0 tiene una duración de $\sim 8 \times 10^4$ yr, ya que el final del colapso de la nube proto-estelar se da a los $\sim 5 \times 10^4$ yr. Todo lo anterior entra en los rangos, tanto de observaciones como de modelos numéricos, tal y como fue comentado anteriormente. Sin embargo, hay una gran diferencia entre lo realizado por Whitworth *et al.* [Whitworth, 2001] y lo que se estudia en este trabajo de tesis. Dicha diferencia se encuentra en el hecho de que el modelo analítico de Whitworth no se considera el fenómeno de fragmentación que ocurre dentro del núcleo preestelar, lo cual es presentado aquí mediante la formación de centros de acreción, los cuales, como se mencionó anteriormente, serán denominados protoestrellas. Esta diferencia es fundamental, ya que nuestro modelo, con rotación y ecuación de estado barotrópico, además de formación de centros de acreción, encaja bien con los *resultados* encontrados por Whitworth en su modelo analítico.

3.4.1. Protoestrellas

Número de protoestrellas. El número de protoestrellas formados en las simulaciones está relacionado con la cantidad de energía cinética inicial; de la tabla 3.1 se puede observar dicho incremento. En $t = 6t_{\text{ff}} \approx 24 \times 10^4$ yr se tienen 34, 48 y 56 protoestrellas para $A0.05N5.0$, $A0.01N5.0$ y $A0.25N5.0$, respectivamente. Lo anterior puede estar relacionado con el momento angular ya que, si materia con bajo momento angular es acretado, el disco de acreción es estable y mucha de la materia finalizará en el centro de acreción. En este caso, el disco de acreción simplemente actúa como un amortiguador que suaviza los picos de acreción. Sin embargo, esto no detiene el crecimiento de la masa dentro del radio de acreción. Por otro lado, si la materia que cae tiene un momento angular grande, entonces la masa que cae dentro del radio de acreción probablemente permanezca más tiempo en el disco, lo que puede favorecer el rápido crecimiento del disco, favorecer la inestabilidad gravitacional y con el tiempo fragmentar. De lo anterior, es claro que al aumentar la magnitud de la energía cinética, i.e., al incrementar el valor inicial del parámetro β_0 , el número de protoestrellas aumenta, resultado que está en completo acuerdo con lo obtenido por Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004a] y Attwood *et al.* [Attwood, 2009] quienes encuentran que el número de protoestrellas se incrementa al aumentar el nivel de energía turbulenta inicial α_{turb} . De modo que, ya que los parámetros elegidos para las simulaciones aquí presentadas fueron elegidos de manera que el soporte dado originalmente por la turbulencia, fuera reemplazado por la energía rotacional. Entonces, se puede concluir que, al menos para este rango de parámetros, la energía cinética rotacional tiene efectos similares a la energía turbulenta, en lo que a cantidad de protoestrellas formadas se refiere.

Masa de las protoestrellas. En la Fig. 3.5 se muestra la evolución temporal de la masa individual M_s para cada conjunto de protoestrellas formadas en cada uno de los modelos de la tabla 3.1.

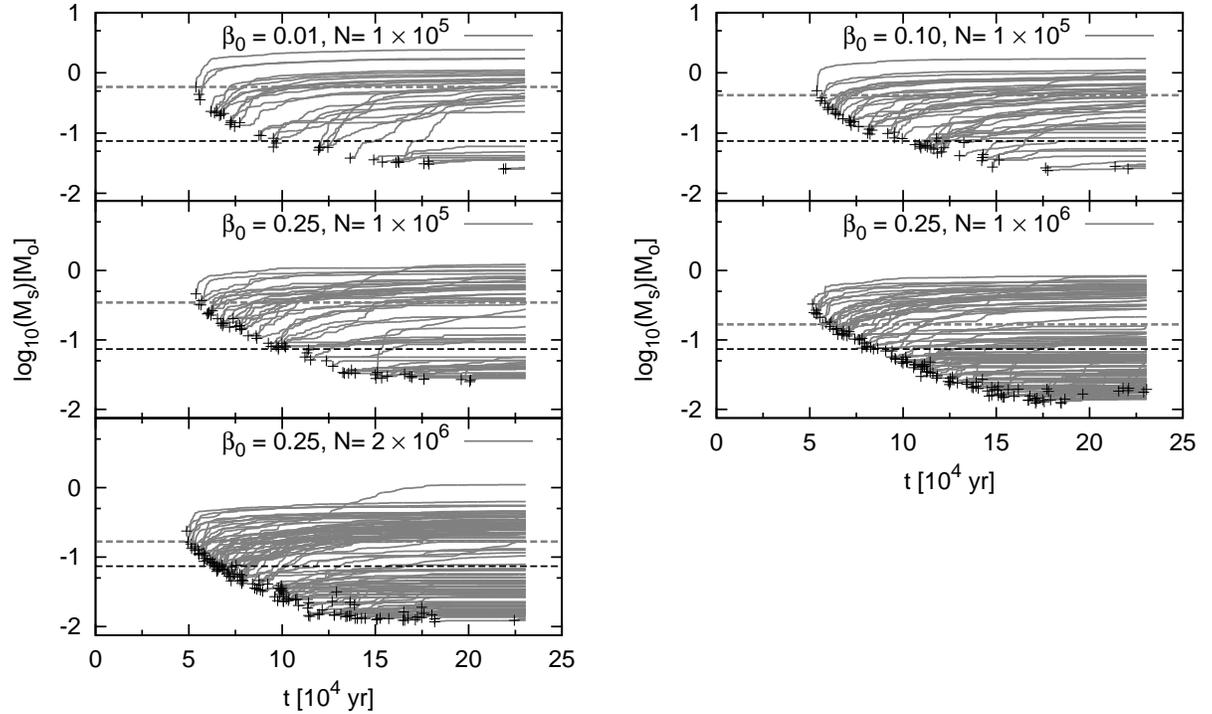


Figura 3.5: Evolución temporal de la masa acretada M_s para cada conjunto de protoestrellas que se forman en cada uno de los modelos de la tabla 3.1. Los puntos en forma de cruz muestran el momento en el cual se forma cada una de las protoestrellas. La primera línea horizontal (línea punteada gris) corresponde al valor promedio de la masa alcanzada por las protoestrellas. La línea horizontal punteada negra corresponde a la masa en la cual se forman las enanas marrones.

Como se puede ver de la Fig. 3.5, las primeras protoestrellas en formarse serán las más masivas, no sólo por que tienen más tiempo de estar acretando materia sino también, porque son las más masivas al nacer, véase también la Fig. 3.6. Al continuar evolucionando el sistema y crearse nuevas protoestrellas, éstas son cada vez menos masivas que sus predecesores y, en su mayoría, con cada vez menos eficiencia en la acreción, i.e., cada vez acretan menos masa, hasta el punto en el que algunas de ellas permanecen prácticamente con la misma masa con la que nacieron. Esto está representando en la gráfica por las líneas horizontales que se forman al final de la evolución (líneas sólidas grises).

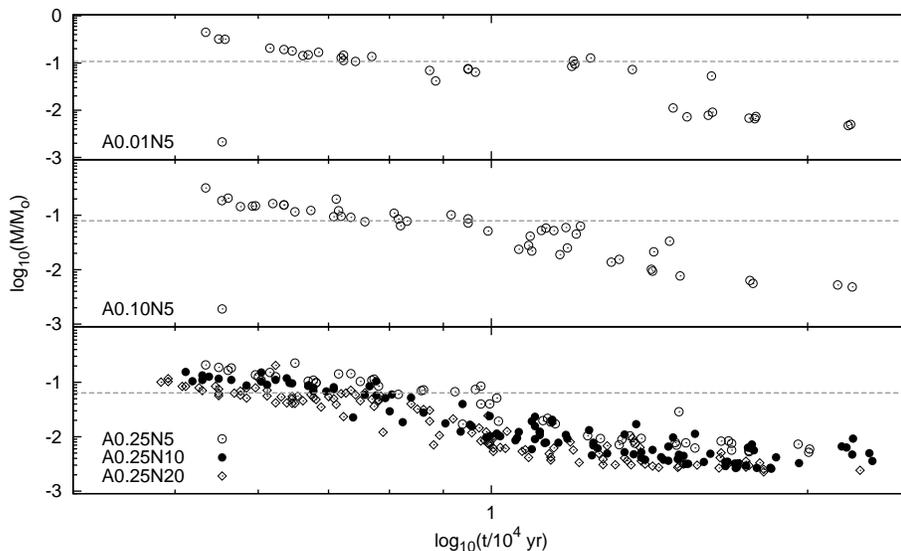


Figura 3.6: Masa final para cada protoestrella en función del momento de su formación.

Ahora, de la tabla 3.1 se puede ver que el número de protoestrellas aumenta con el parámetro inicial β_0 y, que también aumenta al incrementarse el número de partículas utilizadas para discretizar el sistema N_p . Independientemente de cual sea la razón por la cual se incrementa el número de protoestrellas, al aumentar este número y al tener en casi todos los sistemas un porcentaje de masa acretaada prácticamente igual, entonces, se tiene como resultado que la masa promedio de las protoestrellas formadas \bar{M}_s (línea gris punteada horizontal) disminuye al aumentar el número de centros de acreción. Lo anterior puede verse claramente en la Fig. 3.5, al incrementarse el número de protoestrellas (1) las líneas que siguen su evolución temporal se hacen más densas, (2) el conjunto completo de líneas de evolución se acerca cada vez más a la línea que marca el nacimiento de enanas marrones $\sim 0.08M_\odot$ (líneas negras punteadas).

Tasa de acreción. De manera análoga a como se discutió la masa acretaada $M(t)$ y la tasa de acreción \dot{M} "global" del sistema, ver sección 3.4, se muestra ahora la evolución temporal de la masa acretaada $M_s(t)$ y la tasa de acreción \dot{M}_s correspondiente a las protoestrellas formadas en cada modelo, ver Figs. 3.7 y 3.8. En la Fig. 3.7 se muestra un análogo de la Fig. 3.3, para la primera protoestrella formada en el modelo A0.25N10. Como se puede ver en la Fig. 3.7(b), la tasa de acreción al principio de la evolución está por arriba del límite inferior $\dot{M} = 5 \times 10^{-6}M_\odot \text{ yr}^{-1}$ dado por [André, 2000], mientras que, cerca del final de la evolución la tasa de acreción se encuentra muy cerca de $\dot{M} = 10^{-7}M_\odot \text{ yr}^{-1}$.

En ambos casos, este objeto protoestelar se encuentra dentro de los límites establecidos para la tasa de acreción para los objetos en fase Clase 0 y en fase Clase I, ver sección 3.4.

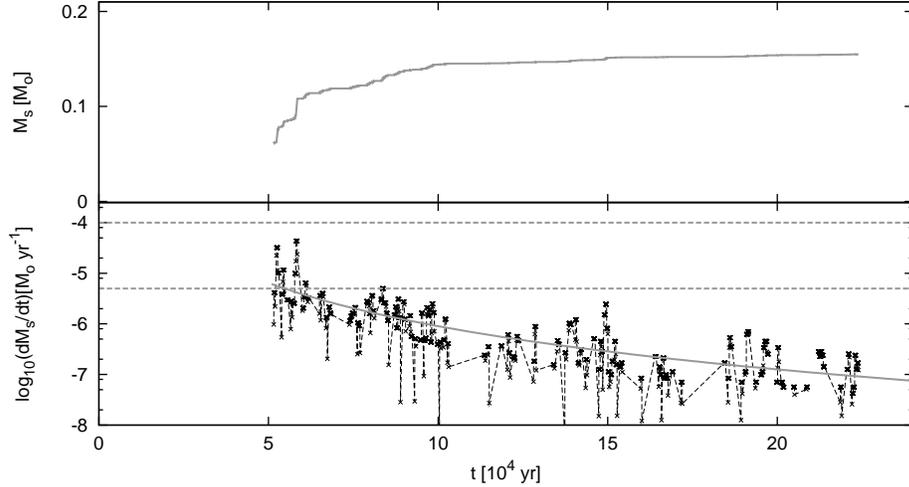


Figura 3.7: Evolución temporal de (a), arriba, la masa acretada M_s (b), abajo, la tasa de acreción $\dot{M}_s = dM_s/dt$ para la primera proto-estrella que se forma en el modelo A0.25N10. La línea gris sólida en (b) muestra el ajuste de la función tipo $\dot{M}_s \propto t^n$, con $n \approx 2$, a la tasa de acreción. Las líneas punteadas grises muestran el rango observado en el cual se encuentra el punto máximo de la tasa de acreción $\dot{M}_{s,max}$.

Por otro lado, como se mencionó anteriormente, la tasa de acreción se acerca a una ley de potencias al final de la evolución, esto se puede observar tanto en la tasa de acreción "global", Figs. 3.3 y 3.4, así como también en la tasa de acreción individual de las protoestrellas, Figs. 3.7 y 3.8. Lo anterior está en acuerdo con Henriksen *et al.* [Henriksen, 1997], quien describe la tasa de acreción por medio de una ecuación que tiende asintóticamente a una ley de potencias para valores grandes de su parámetro $\tau = (t - t_0)/t_{ff}$, donde $t_0 = -t_{ff}$ y $\tau = 1$ marca el inicio de la fase de acreción, ver Fig. 3 y ec.(11) de [Henriksen, 1997]. Sin embargo, lo anterior difiere de lo mostrado por Schmeja *et al.* [Schmeja, 2004], quienes proponen que los procesos de acreción para sus modelos preestelares pueden ser ajustados por medio de la función empírica

$$\log(\dot{M}) = \log(\dot{M}_0) \frac{e}{\tau} t e^{-t/\tau},$$

siendo $\log(\dot{M}_0)$ y τ los parámetros de ajuste de la función.

De igual forma, Bontemps *et al.* [Bontemps, 1996] proponen una dependencia exponencial de la tasa de acreción con el tiempo

$$\dot{M} = \frac{M_{\text{env}}^0}{\tau} e^{-t/\tau},$$

donde M_{env}^0 es la masa inicial de la nube y $\tau \approx 9 \times 10^4 \text{ yr}$. En todos los casos, estas funciones se caracterizan por caer rápidamente al final de la evolución, lo que se ve reflejado en que la masa final de las protoestrellas tienda a un "límite". Esto se puede ver claramente en las Figs. 3.5 y 3.7 las cuales muestran curvas horizontales al final de la evolución de cada protoestrella. Con base en lo anterior, se puede suponer que, al tiempo $t = 6t_{\text{ff}} \approx 24.5 \times 10^4 \text{ yr}$ y con cerca de un 70% de la masa total acretada, las protoestrellas han llegado a su masa final, o al menos están muy cerca de ella. Según el modelo analítico, para que las proto-estrellas acreten el 100% de la materia disponible, $5.4M_{\odot}$, se debe de seguir la evolución del sistema hasta cerca de $85 \times 10^4 \text{ yr}$, o lo que es lo mismo, por más de $20t_{\text{ff}}$.

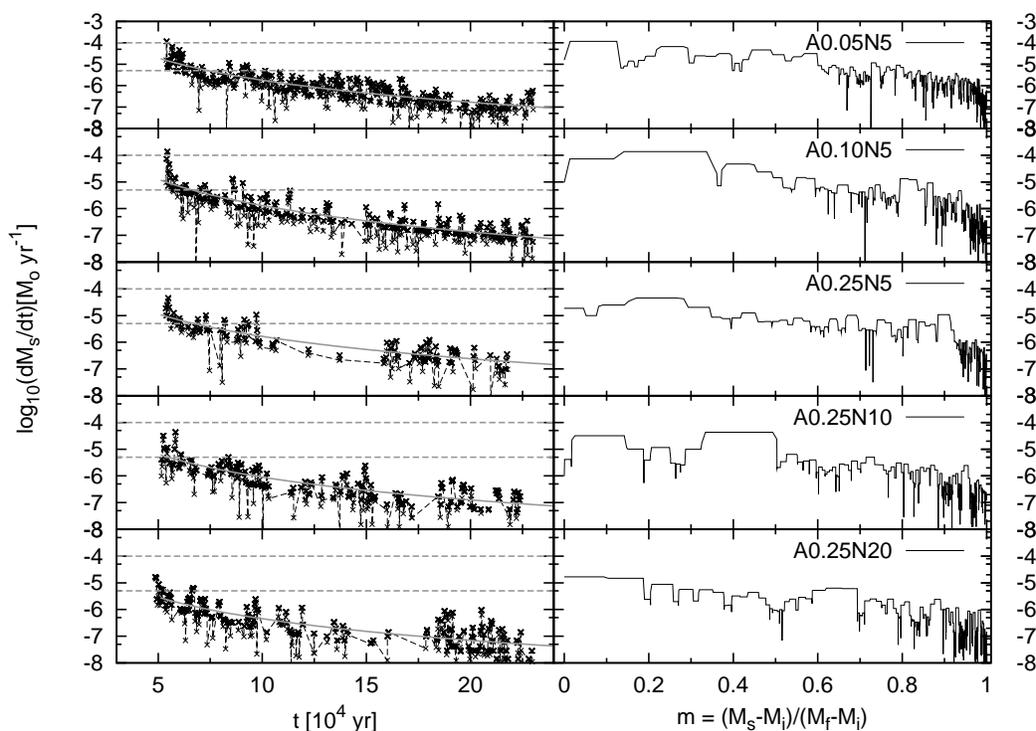


Figura 3.8: Tasa de acreción $\dot{M}_s = dM_s/dt$ como función del tiempo t (columna de la izquierda) y como función del parámetro $m = (M_s - M_i)/(M_f - M_i)$ (columna de la derecha), para la primera proto-estrella que se forma correspondientes a cada modelo de la tabla 3.1 (de arriba hacia abajo). Compárese con la Fig. 1 de Schmeja [Schmeja, 2004].

Por último, en la Fig. 3.8 se muestra la tasa de acreción como función del tiempo, análoga a la Fig. 3.7, y como función del parámetro $m = (M_s - M_i)/(M_i - M_f)$, para la primera protoestrella que se forma en los modelos de la tabla 3.1, donde M_i y M_f representan la masa inicial y final de cada protoestrella, respectivamente. Como se discutió anteriormente, se considera que la masa alcanzada por cada protoestrella es la masa final M_f con la cual la protoestrella se convertirá en estrella y que, con el tiempo, entrará a la secuencia principal, esto bajo la condición de que $M_f > 0.08M_\odot$. Así, de la Fig. 3.8 se puede ver que, en todos los casos, las protoestrellas se comportan de manera similar a lo discutido para el caso de la Fig. 3.7. También se puede observar que, la tasa de acreción permanece dentro de los límites dados por las observaciones de André *et al.* [André, 2000] de entre 5×10^{-6} y $1 \times 10^{-4} M_\odot \text{yr}^{-1}$ (líneas punteadas grises), hasta poco más de $m = 0.5$, o $M_s/M_i \approx 50\%$, lo que corresponde a la fase Clase 0, ver Fig. 3.9. Tiempo después, la tasa de acreción cae rápidamente al acercarse el final de la evolución, $m \approx 1$, llegando a valores por debajo de $\dot{M}_s = 1.0 \times 10^{-7} M_\odot \text{yr}^{-1}$.

Tiempos de vida de la fase Clase 0. La Fig. 3.9 muestra los tiempos de vida de la fase Clase 0 en función de su masa final M_f para cada uno de los modelos de la tabla 3.1. Las líneas horizontales (líneas punteadas grises) muestran el rango de valores de los tiempos de vida de la fase Clase 0 [André, 2000]. De la tabla 3.1 y de la Fig. 3.9 es claro que la masa de las protoestrellas disminuye conforme el parámetro β_0 se incrementa (los puntos dentro de cada figura se mueven hacia la izquierda). También se puede observar que los tiempos de vida de la fase Clase 0 se ven sobre estimados; sin embargo, al incrementarse el valor de β_0 los tiempos de vida se acerca cada vez más al rango de valores dado por André *et al.*. Esto mismo ocurre para los modelos presentados por Schmeja *et al.* [Schmeja, 2004], ver su Tabla 1 y su Fig. 5, siendo su modelo más exitoso el *M10k2*, el cual se asemeja mucho al modelo *A0.25Nn* ($n = 5, 10, 20$) con la diferencia de que sus puntos se encuentran, en su mayoría, entre $-1 < \log_{10}(M_f/M_{\odot}) < 0$, esto se debe a que en su modelo turbulento, Schmeja utiliza una masa total de $120M_{\odot}$, un orden de magnitud más grande que el utilizado en este trabajo de tesis.

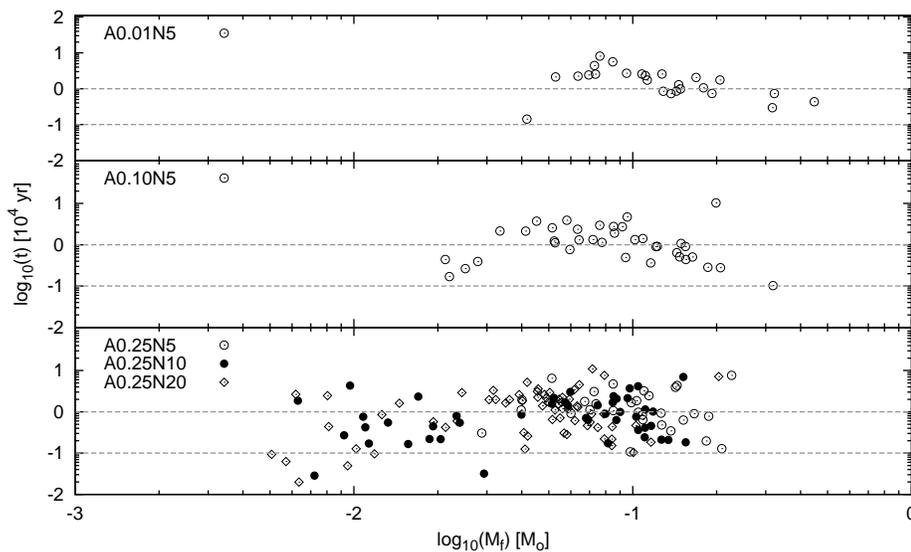


Figura 3.9: Duración de la fase Clase 0 en función de la masa final M_f para las protoestrellas correspondientes a los modelos de la tabla 3.1. Las líneas punteadas horizontales confinan el rango de este parámetro acorde a observaciones [André, 2000].

Máximos de las tasas de acreción. La Fig. 3.10 muestra el punto máximo de la tasa de acreción $\dot{M}_{s,\max}$ en función de la masa final M_f para las protoestrellas correspondientes a los modelos de la tabla 3.1. Como en el caso de la Fig. 3.9, el comportamiento mostrado en la Fig. 3.10 es semejante al encontrado por Schmeja *et al.* [Schmeja, 2004] en su Fig. 5. Al comparar ambas figuras, es claro que la tendencia es muy similar, la tasa de acreción se relaciona con la masa final de cada protoestrella mediante una ley de potencias. Los rangos son diferentes, pero las tendencias son análogas. Esto a pesar de la diferencia, no sólo en la masa inicial, sino en las condiciones iniciales dadas. Este mismo autor también utiliza una perfil Gaussiano como condición inicial. De todo lo anterior se puede suponer que esta tendencia, así como otras más presentadas a lo largo de este trabajo de tesis, son independientes de la escala utilizada, así como también, de las condiciones iniciales utilizadas, esto es, las tendencias son independientes de si se utilizan condiciones iniciales turbulentas o no.

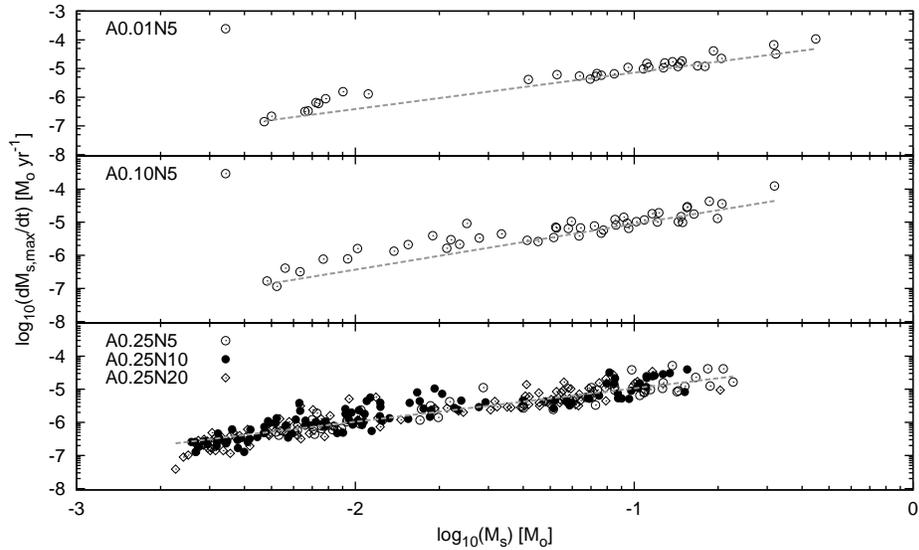


Figura 3.10: Máximo de la tasa de acreción $\dot{M}_{s,\max}$ en función de la masa final M_f para las protoestrellas correspondientes a los modelos de la tabla 3.1. La línea punteada gris muestra la tendencia de ley de potencias de los datos mostrados.

Efecto del número de partículas. De la tabla 3.1 y de la tabla 3.2, se puede observar que el número de protoestrellas que se forma se incrementa cuando (1) el parámetro β_0 crece, (2) cuando se incrementa el número de partículas totales N_p utilizadas para discretizar el sistema, Fig. 3.11, y (3) cuando se incrementa la densidad crítica ρ_b , Fig. 3.12. Resultados

modelo	$N_p \times 10^5$	$\rho_b/\rho_0 \times 10^{-13}$	$M_{s,prom}$ [M_\odot]	N_s	M/M_0 [%]
A0.25N2.5	2.5	1.0	0.496	38	64.35
A0.25N7.5	7.5	0.1	0.392	8	58.20
		0.5	0.069	52	67.29
		1.0	0.047	72	63.79
		5.0	0.021	169	65.64
		10.0	0.017	190	63.14

Tabla 3.2: Nombre del modelo, número de partículas utilizadas en la simulación N_p , densidad crítica barotrópica ρ_b , masa promedio de los centros de acreción formados $M_{s,prom}$, número de centros de acreción formados N_s y porcentaje de masa acretada al final de la simulación M/M_0 .

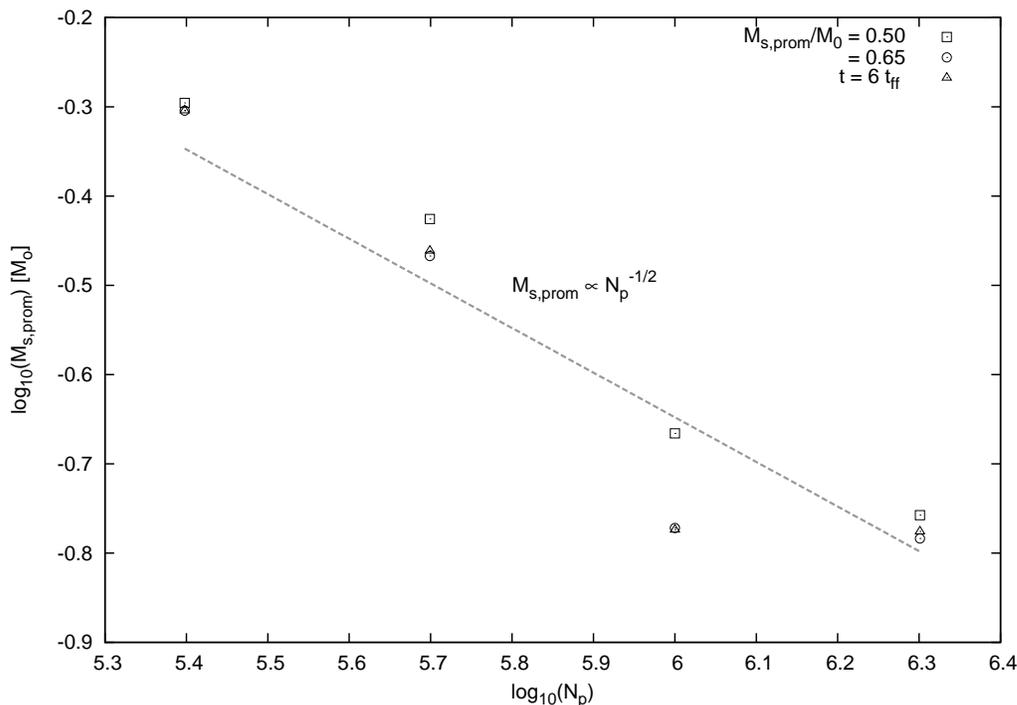


Figura 3.11: Masa acretada promedio $M_{s,prom}$ de las protoestrellas, para el modelo A0.25Nx x ($= 2.5, 5, 10, 20$) como función del número de partículas N_p utilizadas en la simulación.

similares fueron encontrados por Jappsen *et al.* [Jappsen, 2004]. En dicho caso se utilizaron modelos en los cuales se dejó fijo el nivel de turbulencia y se varió tanto la densidad crítica ρ_b , como el número de partículas N_p , ver su tabla 1. Por ejemplo, para el modelo *Rxk2*, con $\sim 2 \times 10^5$ partículas, en donde x ($= 5, 6, 7$ y 8) representa una de las densidad utilizadas ($4.3 \times 10^4 \text{ cm}^{-3} \leq n_b \leq 4.3 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$), se tienen 22, 64, 122 y 194 protoestrellas formadas, respectivamente. Por otro lado, incrementando el número de partículas en el modelo *R7k2* se forman 122, 131 y 143 protoestrellas, utilizando $\sim 2 \times 10^5$, $\sim 1.0 \times 10^6$ y $\sim 2.0 \times 10^6$ partículas, respectivamente.

Ahora, Jappsen *no* da una explicación del por qué el número de protoestrellas se incrementa al aumentar el número de partículas, mismo resultado encontrado por otros autores [Klessen, 2001, Klessen, 2003, Jappsen, 2005].

Efectos de la ecuación de estado. Como se había mencionado en la sección 2.4, la masa de Jeans depende en todo momento de la densidad y de la velocidad del sonido. Si la ecuación de estado utilizada es la barotrópica, entonces la masa de Jeans tiene un mínimo ($M_J \propto \rho_b^{-1/2} c_0^3$) que depende de (1) la velocidad del sonido inicial, la que a su vez depende del valor del parámetro inicial α_0 , ver ec.(2.2.1), y (2) de la densidad ρ_b en la cual el sistema cambia de isotérmico a adiabático. Ahora, si la velocidad del sonido se mantiene constante, entonces

$$M_J \propto \rho_b^{-1/2},$$

lo que muestra que al crecer la densidad crítica, la masa de Jeans se hace más pequeña, ocasionando un incremento en el número de regiones que podrían colapsar. Esto lleva a tener un número más grande de protoestrellas formadas, pero con masas cada vez más pequeñas, lo que disminuye la masa promedio $M_{s,\text{prom}}$ de las protoestrellas formadas. Lo anterior queda claramente mostrado en la Fig. 3.12, en la cual se muestra la masa promedio en función de la densidad crítica barotrópica para diferentes instantes de tiempo en la simulación. La línea, de pendiente $-1/2$, muestra la relación de ley de potencias entre $M_{s,\text{prom}}$ y ρ_b . Esta misma tendencia fue encontrada por Jappsen *et al.* [Jappsen, 2004] quien, utilizando dos ecuaciones politrópicas con exponentes $\gamma = 0.7$ y 1.1 , halló que

$$M_{\text{ch}} \propto \rho_c^{-0.95},$$

donde M_{ch} es la masa característica y ρ_c es equivalente a ρ_b , ver ec.(13) de [Jappsen, 2004]; sin embargo, sus resultados muestran que el exponente -0.95 difiere de la tendencia general dada por sus propias simulaciones, las cuales dan como resultado un exponente de modulo más pequeño, -0.5 , el cual está en completo acuerdo con lo encontrado en este trabajo de tesis.

Ahora, *incrementar el número de partículas N_p que discretizan el sistema puede tener un efecto similar al de incrementar la densidad crítica* en la ec.(2.1.3). De la ec.(2.4.1) se puede observar que al incrementar el número de partículas N_{tot} , la masa m_i de cada una de ellas puede ser cada vez menor, disminuyendo también la masa promedio del conjunto de partículas, lo que permite que más regiones del sistema puedan colapsar, ya que la masa de Jeans puede ser más pequeña.

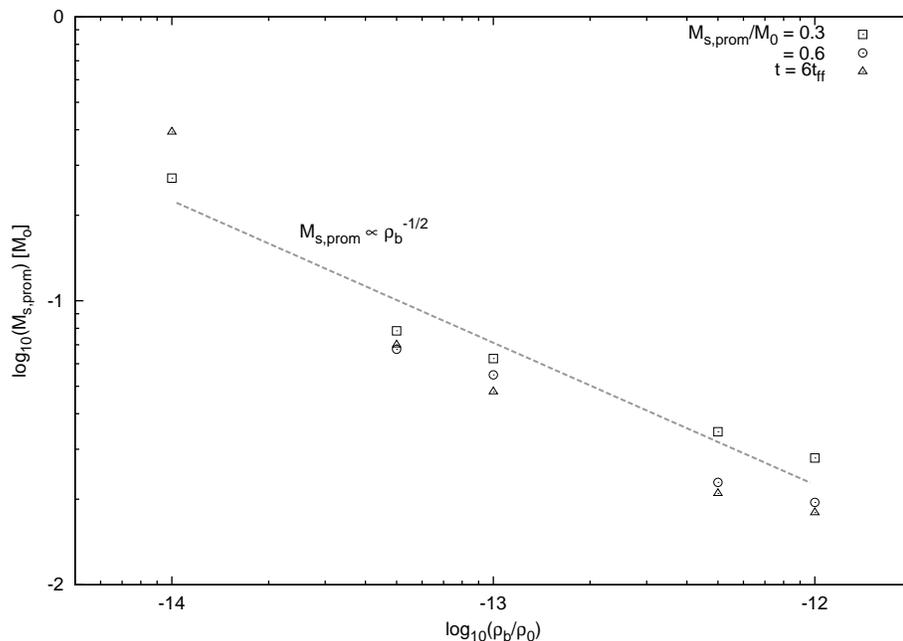


Figura 3.12: Masa acretaada promedio de las proto-estrellas $M_{s,prom}$ por cada modelo de la tabla 3.2 como función del número de la densidad barotrópica ρ_b/ρ_0 utilizada en la simulación, donde ρ_0 es la densidad inicial del modelo.

Lo anterior está en acuerdo con la tendencia mostrada en la Fig. 3.11. Dicha figura muestra que existe una relación lineal con pendiente ~ -0.5 , entre $\log_{10} M_{s,prom}$ y $\log_{10} N_p$ (ley de potencias), lo que indica que

$$N_p \propto M_{s,prom}^{-2}.$$

Todo esto implica que la masa de Jeans es la que controla el número de protoestrellas que se formarán en un sistema. Lo cual puede llevarse a cabo, ya sea incrementando el número de partículas totales que discretizan el sistema o disminuyendo la densidad a la cual el sistema cambia de isotérmico a adiabático. En ambos casos, el resultado es similar, *la masa promedio de las protoestrellas formadas disminuye al incrementarse el número de protoestrellas formadas, esto debido a que la masa de Jeans se hace cada vez más pequeña.*

3.5. Discusión

Recapitulando, en este trabajo de tesis se propone simular un núcleo preestelar como una nube con simetría esférica, ecuación de estado barotrópica (ec.(2.1.3)), perfil de densidad tipo Plummer (ec.(2.1.4)) y parámetros iniciales que intentan ajustarse a observaciones del núcleo L1544 (ver sección 3.2). Sin embargo, a diferencia de trabajos previos [Attwood, 2009; Goodwin, 2004a,b], los cuales utilizan condiciones iniciales turbulentas, en este trabajo de tesis se supone un campo de velocidades inicial con rotación rígida (ver sección 2.1). Esta misma aproximación es frecuentemente utilizada por otros autores, e.g., [Bate, 2011; Arreaga, 2010]. Cabe resaltar que, a pesar de la sencillez del modelo, este reproduce resultados observacionales y numéricos (ver secciones 1.2, 3.3 y 3.4).

En lo referente a lo numérico, se encontraron resultados similares a los reportados por Schmeja *et al.* [Schmeja, 2004] y Jappsen *et al.* [Jappsen, 2005]. Los modelos utilizados por estos autores fueron llevados a cabo en unidades normalizadas, los cuales, escalados a unidades físicas, equivale a tener una nube molecular con una densidad uniformemente distribuida de $\sim 10^5 \text{ cm}^{-3}$ y en donde se supone tener condiciones de frontera periódicas. A diferencia de Schmeja, quien utiliza una ecuación de estado isotérmica ($P \propto \rho$), Jappsen utiliza una ecuación de estado politrópica ($P \propto \rho^\gamma$), con un exponente politrópico γ que cambia al alcanzar una cierta densidad crítica ρ_c . Como resultado de lo anterior, Jappsen encuentra una relación de ley de potencias, $M_{med} \propto \rho_c^r$, entre la masa promedio M_{med} alcanzada por sus centros de acreción y la densidad crítica utilizada en cada modelo ρ_c^r , con r entre -0.4 y -0.6. Este mismo autor encuentra que el número de centros de acreción se incrementa al aumentar el número de partículas utilizadas para discretizar el sistema.

En las figuras 3.11 y 3.12 se puede observar que existe una relación entre la masa promedio de los centros de acreción $M_{s,prom}$ y el número de partículas N_p , así como también entre $M_{s,prom}$ y la densidad crítica barotrópica ρ_b . En ambos casos existe una ley de potencias con pendiente $-1/2$, la cual puede estar relacionada con el valor mínimo de la masa de Jeans ($M_{J,min} \propto \rho_b^{-1/2}$), ver sección 2.4. Cabe resaltar que este comportamiento de la masa de Jeans se debe a que la velocidad del sonido depende de la densidad en el caso barotrópico. Siendo este también el caso de Schmeja *et al.* [Schmeja, 2004] quien, como ya se mencionó, utilizó una ecuación de estado politrópica con dos exponentes diferentes.

El número de centros de acreción formados también está relacionado con la energía cinética dada inicialmente al sistema, i.e., el parámetro inicial β_0 (ver sección 2.1), el cual relaciona la energía cinética rotacional y la energía potencial. Cabe resaltar que este parámetro está directamente relacionado con la manera en la que la materia se distribuye dentro del sistema (ver sección 2.2), por lo que se espera que todos los sistemas con los mismos valores de los parámetros normalizados dados por las ecuaciones (2.2.3-5) se comporten de manera similar. Ahora, de la tabla 3.1 se puede observar que al incrementar el valor del parámetro β_0 el número de centros de acreción N_s aumenta, siendo cada vez menos masivos, i.e, la masa promedio $M_{s,prom}$ disminuye. Como se menciona en la sección 1.2, el momento angular total puede convertirse en momento angular local (momento angular orbital) a través de la fragmentación del sistema. Lo anterior indica que a mayor

momento angular total, i.e, valores más grandes de β_0 , mayor será la tendencia del sistema a fragmentar, esto es confirmado por Schmeja *et al.* [Schmeja, 2004] quien encuentra que la fragmentación se favorece para valores de β_0 mayores que 0.01. En este mismo trabajo, Jappsen concluye que, desde el punto de vista estadístico, la evolución del momento angular de núcleos preestelares puede ser descrito mediante la contracción de esferas con densidad inicial uniforme, rotación rígida y velocidad angular constante. Lo anterior se debe a que la energía inicialmente turbulenta se puede convertir en energía rotacional si las velocidades del campo turbulento no son demasiado altas, ver su tabla 1.

Por último, a lo largo de este trabajo de tesis se han encontrado tres parámetros que afectan el número de centros de acreción que se forman dentro del sistema modelado: (1) el número de partículas que discretizan el sistema, (2) la densidad crítica barotrópica, y (3) la energía cinética rotacional inicial. La primera de ellas es un factor totalmente numérico que está relacionada con la resolución utilizada en la simulación. La tercera está relacionada con que el momento angular total favorece la fragmentación dentro del sistema. La segunda entra en lo numérico, ya que se relaciona directamente con la masa de Jeans, y también dentro de lo físico, al afectar el momento en el cual el sistema pasa de ser isotérmico a adiabático.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se propone un modelo numérico para un núcleo preestelar que se encuentra en la fase inicial del colapso. Dicho modelo está basado en resultados observacionales, principalmente del núcleo L1544, y en modelos analíticos y numéricos del mismo propuestos por Ward-Thompson *et al.* [Ward-Thompson, 1999], Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004a], Attwood *et al.* [Attwood, 2009] y Arreaga *et al.* [Arreaga, 2010]. A diferencia de los modelos propuestos por otros autores, e.g., Klessen *et al.* [Klessen, 2000], Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004a], Jappsen *et al.* [Jappsen, 2004], y Attwood *et al.* [Attwood, 2009], en este trabajo de tesis, se propone un modelo numérico para un núcleo preestelar con rotación rígida, en lugar de utilizar turbulencia.

Los resultados encontrados muestran que:

- Este modelo reproduce el perfil de densidad predicho por Whitworth *et al.* [Whitworth, 2001], $\rho(r) \propto r^{-3/2}$ en $t \approx 38.5$ kyr.
- El final del colapso de la nube preestelar ocurre alrededor de los 5×10^4 yr, lo cual se ajusta a las observaciones realizadas por Lee *et al.* [Lee, 1994], quien concluye que la fase de contracción preestelar ocurre en $\sim (3 - 10) \times 10^4$ yr.
- El tiempo de vida de la fase Clase 0, $\sim 6 \times 10^4$ yr, está en completo acuerdo con los resultados encontrados con el modelo analítico de Whitworth *et al.* [Whitworth, 2001].
- Al aumentar la magnitud de la energía cinética rotacional, i.e., al incrementar el valor inicial del parámetro β_0 , el número de protoestrellas aumenta, resultado que está en completo acuerdo con lo obtenido por Goodwin *et al.* [Goodwin, 2004a] y Attwood *et al.* [Attwood, 2009], quienes encuentran que el número de protoestrellas se incrementa al aumentar el nivel de energía turbulenta inicial α_{turb} .

- Las razones de cambio, o tasas de acreción, encontradas numéricamente en la fase Clase 0 ($\dot{M} > 5 \times 10^{-6} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$) y en la fase Clase I ($\dot{M} \approx 1 \times 10^{-7} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$) caen en el rango de valores observados [Ceccarelli, 2000, Brown, 1999, Young, 2003].
- La tasa de acreción se relaciona con la masa final de cada protoestrella mediante una ley de potencias. Este mismo comportamiento fue encontrado por Schmeja *et al.* [Schmeja, 2004], esto a pesar de la diferencia no sólo en la masa inicial, sino también en las condiciones iniciales dadas. De lo anterior se puede suponer que esta tendencia, así como otras más presentadas a lo largo de este trabajo de tesis, son independientes de la escala utilizada, así como también, de las condiciones iniciales.
- El número de protoestrellas que se forman se incrementa cuando (1) el parámetro β_0 crece, (2) cuando se incrementa el número de partículas totales N_p utilizadas para discretizar el sistema y (3) cuando se incrementa la densidad crítica ρ_b . Resultados similares fueron encontrados por Jappsen *et al.* [Jappsen, 2004].
- Se encuentra la misma relación entre la masa promedio de los centros de acreción y la densidad crítica barotrópica reportada por Jappsen *et al.* [Jappsen, 2004], una ley de potencias entre $M_{s,\text{prom}}$ y ρ_b ; sin embargo, el calculo analítico realizado por Jappsen *et al.* arrojaron como resultado que el exponente es -0.95 , lo cual difiere de la tendencia general dada por sus *propias* simulaciones, las cuales dan como resultado un exponente más pequeño -0.5 , el cual está en completo acuerdo con lo encontrado en este trabajo de tesis.

Dinámica de fluidos

La física de cualquier fluido es gobernada por tres principios fundamentales: (1) conservación de la masa; (2) segunda ley de Newton; y (3) conservación de la Energía. Estos principios fundamentales pueden ser expresados en términos de ecuaciones matemáticas, las cuales, en su forma mas general, son ecuaciones diferenciales parciales.

Considérese un elemento de fluido infinitesimal dentro de un flujo. Dicho elemento es suficientemente grande como para contener un gran numero de moléculas, de manera que pueda ser visto como un medio continuo. Si tal elemento esta fijo en el espacio, entonces el fluido se moverá a través de él. Alternativamente, el elemento puede moverse dentro del fluido a lo largo de una linea de corriente, con un velocidad \bar{V} igual a la velocidad del fluido en cada punto. Esta aproximación da directamente las ecuaciones fundamentales en forma de ecuaciones diferenciales parciales. Las ecuaciones obtenidas cuando el elemento de fluido esta fijo en el espacio de dice que son la forma conservativa de las ecuaciones fundamentales, mientras que, al considerar el fluido en movimiento se obtiene la forma no-conservativa de las ecuaciones.

Ecuación de continuidad. La ecuación de continuidad se basa en el principio físico de la conservación de la masa. Considérese un elemento de fluido en movimiento, la masa de tal elemento esta fijo y esta dada por δm . Dado que la masa se conserva, se puede establecer que la velocidad de cambio de la masa del elemento de fluido es cero al moverse a través del fluido, de modo que

$$\frac{D(\delta m)}{Dt} = \frac{D(\rho \delta \tau)}{Dt}, \quad (\text{A.1})$$

donde ρ y τ representa la densidad y el volumen del elemento de fluido de masa δm , respectivamente. Así, de la ec. (A.1), se tiene que

$$\frac{D(\rho)}{Dt} + \rho \left[\frac{1}{\delta \tau} \frac{D(\delta \tau)}{Dt} \right] = 0. \quad (\text{A.2})$$

El termino entre corchetes en la ec. (A.2) es equivalente a $\nabla \cdot \bar{V}$. Físicamente representa la velocidad de cambio del volumen de un elemento de fluido en movimiento, por unidad de volumen. De lo anterior, la ecuación de continuidad es su forma no-conservativa esta dada por

$$\frac{D(\rho)}{Dt} + \rho \nabla \cdot \bar{V} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Otra método para obtener la ecuación de continuidad es utilizando un volumen de control fijo en el espacio; de esta manera, se encuentra la ecuación de continuidad en su forma conservativa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Las ecuaciones (A.3) y (A.4) están relacionadas por medio de la derivada sustancial (substantial derivative)

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla. \quad (\text{A.5})$$

Físicamente D/Dt representa la razón de cambio seguida por un elemento de fluido en movimiento; $\partial/\partial t$ representa la razón de cambio en un punto fijo; y $\bar{V} \cdot \nabla$, la derivada convectiva, representa la razón de cambio de un elemento de fluido en movimiento debido al cambio espacial de las propiedades del flujo. Así, sustituyendo (A.5) en (A.3) y la identidad $\nabla \cdot (\rho \bar{V}) = \rho \nabla \cdot \bar{V} + \bar{V} \cdot \nabla \rho$, se obtiene (A.4), lo que relaciona las formas conservativa y no-conservativa de la ecuación de continuidad.

Ecuación de momento De igual forma que la ecuación de continuidad, la ecuación de momento tiene un origen físico, la segunda ley de Newton ($\bar{F} = m\bar{a}$). Considérese la componente x de la segunda ley de Newton

$$\sum F_x = ma_x. \quad (\text{A.6})$$

Existen dos clases de fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido en movimiento: (1) las que actúan sobre el cuerpo, i.e., fuerzas que actúan a distancia; y (2) las que actúan en la superficie, i.e., presión

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \sum F_{\text{cuerpo},x} + F_{\text{superficie},x} = ma_x, \\ \rho \, dx dy dz \, f_x &- \left[-p + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz \\ &+ \left[-\tau_{xx} + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) \right] dy dz \\ &+ \left[-\tau_{yx} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \right] dx dz \\ &+ \left[-\tau_{zx} + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) \right] dy dx, \end{aligned}$$

donde f_x denota la fuerza por unidad de masa que actúa sobre el elemento de volumen en la dirección x , τ_{ij} denota el esfuerzo en la dirección j ejercida sobre al plano perpendicular al eje i , y p es la presión. Eliminando términos semejantes y, dado que se tiene un elemento de fluido que se encuentra en movimiento, entonces

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x = \rho \frac{Dv_x}{Dt} \quad (\text{A.7})$$

La ec. (A.7) es la forma escalar y no-conservativa de la ecuación de Navier-Stokes. La forma conservativa esta dada por

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_x \bar{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x. \quad (\text{A.8})$$

Ecuación de energía De la primera ley de la termodinámica se tiene que

$$\Delta U = Q - W, \quad (\text{A.9})$$

donde, U representa la energía interna del sistema, Q es la cantidad de calor aportado al sistema, y W es el trabajo realizado por el sistema. Procediendo de manera similar a como se encontró la ec. (A.7), se tiene que

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} &= \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &- \frac{\partial v_x p}{\partial x} + \frac{\partial (v_x \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (v_x \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (v_x \tau_{zx})}{\partial z} + \rho f_x v_x, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde e representa la energía por unidad de masa, q es el calor transferido por conducción, T es la temperatura, y k es el coeficiente de conducción de calor.

Comentarios

- Las ecuaciones fundamentales de dinámica de fluidos son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales
- El sistema total de ecuaciones contiene cinco ecuaciones en términos de seis variables desconocidas (ρ , p , \bar{V} y e), para cerrar el sistema de ecuaciones se utiliza una ecuación de estado del tipo

$$p = p(\rho, T).$$

Una séptima ecuación esta dada por la relación termodinámica

$$e = e(p, T)$$

- La ecuación de momento para fluidos viscosos es denominada la ecuación de Navier-Stokes; sin embargo, ahora esta terminología incluye al sistema entero de ecuaciones (continuidad, momento y energía). En este sentido, resolver las ecuaciones de Navier-Stokes significa encontrar las soluciones a las ecuaciones gobernantes para fluidos viscosos.

Bibliografía

- [André, 2000] André, P., D. Ward-Thompson, & M. Barsony 2000, en *Protostars and Planets IV*, editado por V. Mannings, A. P. Boss, and S. S. Russell (University of Arizona Press, Tucson)
- [Andre, 1993] André, P., Ward-Thompson, D., & Barsony, M. 1993, *ApJ*, 406, 122
- [Arreaga, 2010] Arreaga-García, G., Klapp, J. & Gómez-Ramírez, F. 2010, *A&A* 509, 96
- [Arreaga, 2007] Arreaga-García, G. Klapp, J., Sigalotti, L. G., & Gabbasov, R. 2007, *ApJ*, 666, 290
- [Attwood, 2009] Attwood, R. E., Goodwin, S. P., Stamatellos¹, D., & Whitworth, A. P. 2009, *A&A* 495, 201
- [Ballesteros, 2003] Ballesteros-Paredes, J., Klessen, R. S., & Vázquez-Semadeni, E. 2003, *ApJ*, 592, 188
- [Bate, 2011] Bate, M. R., 2011, *MNRAS*, in press (preprint from astro-ph/1108.0009)
- [Bate, 2002a] Bate, M. R., Bonnell, I. A. & Bromm, V. 2002a, *MNRAS*, 332, L65
- [Bate, 2002b] Bate, M. R., Bonnell, I. A. & Bromm, V. 2002b, *MNRAS*, 336, 705
- [Bate, 2003] Bate, M. R., Bonnell, I. A. & Bromm, V. 2003, *MNRAS*, 339, 577
- [Bate, 1995] Bate, M. R., Bonnell, I. A., & Price, N. M. 1995, *MNRAS*, 277, 362
- [Bate, 1997] Bate, M. R. & Burkert, A. 1997, *MNRAS*, 288, 1060
- [Beichman, 1986] Beichman, C. A., Myers, P. C., Emerson, J. P., Harris, S., Mathieu, R., Benson, P. J. & Jennings, R. E. 1986, *ApJ*, 307, 337
- [Bertout, 1989] Bertout, C., 1989, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 27, 351
- [Beuther, 2002] Beuther, H., Schilke, P., & Sridharan, T. K. 2002, *A&A*, 383, 892

- [Bodenheimer, 2000] Bodenheimer, P., Burkert, A., Klein, R. I., & Boss, A. P. 2000, *Protostars and Planets IV*, 675
- [Bonnell, 1994] Bonnell, I. A. 1994, *MNRAS*, 269, 837
- [Bonnell, 2003] Bonnell, I. A., Bate, M. R., and Vine, S. G. 2003, *MNRAS* 343, 413
- [Bontemps, 1996] Bontemps, S., Andre, P., Terebey, S., & Cabrit, S. 1996, *A&A*, 311, 858
- [Boogert, 2002] Boogert, A. C. A., Hogerheijde, M. R., & Blake, G. A. 2002, *ApJ*, 568, 761
- [Brown, 1999] Brown, D. W., & Chandler, C. J. 1999, *MNRAS*, 303, 855
- [Burkert, 1993] Burkert, A., & Bodenheimer, P. 1993, *MNRAS*, 264, 798
- [Burkert, 2000] Burkert, A. & Bodenheimer, P. 2000, *ApJ*, 543, 822
- [Caselli, 2002] Caselli, P., Benson, P. J., Myers, P. C., & Tafalla, M. 2002, *ApJ*, 572, 238
- [Ceccarelli, 2000] Ceccarelli, C., Castets, A., Caux, E., et al. 2000, *A&A*, 355, 1129
- [Chandrasekha, 1938] Chandrasekha, S., 1938, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, University Chicago Press,
- [Chandrasekha, 1961] Chandrasekha, S., 1961, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press
- [Choudhuri, 2010] Choudhuri, A. R., 2010, *Astrophysics for Physicists*, Cambridge University Press
- [Crapsi, 2007] Crapsi, A., Caselli, P., Walmsley, M. C., & Tafalla, M. 2007, *A&A* 470, 221
- [Francesco, 2001] Di Francesco, J., Myers, P. C., Wilner, D. J., Ohashi, N., & Mardones, D. 2001, *ApJ*, 562, 770
- [Duquennoy, 1991] Duquennoy, A. & Mayor, M. 1991, *A&A*, 248, 485
- [Federrath, 2010] Federrath, C., Banerjee, R., Clark, P.C., & Klessen, R.S. 2010, *ApJ*, 713, 269
- [Feigelson, 1999] Feigelson, 1999, *Annu. Rev. Astron. Astrophy.*, 37, 408
- [Gingold, 1977] Gingold, R. A. & Monaghan, J. J. 1977, *MNRAS*, 181, 375
- [Goodman, 1993] Goodman, A. A., Benson, P. J., Fuller, G. A., & Myers, P. C. 1993, *ApJ*, 406, 528

- [Goodwin, 2004a] Goodwin, S.P., Whitworth, A. P., & Ward-Thompson D. 2004, A&A 414, 633
- [Goodwin, 2004b] Goodwin, S. P.; Whitworth, A. P.; Ward-Thompson, D.2004, A&A, 423, 169
- [Harwit, 2006] Martin Harwit, Astrophysical Concepts Fourth Edition, Springer, 2006
- [Henriksen, 1997] Henriksen, R., Andre, P., & Bontemps, S. 1997, A&A, 323, 549
- [Hubbert, 2006] Hubber, D. A., Goodwin, S. P., & Whitworth, A. P. 2006, A&A, 450, 881
- [Collins, 2003] George W. Collins II, The Fundamentals of Stellar Astropysics, WEB Edition, 2003
- [Jappsen, 2004] Jappsen, A., & Klessen R. S. 2004, A&A, 423, 1
- [Jappsen, 2005] Jappsen, A., Klessen, R. S., Larson, R. B., Li, Y., & Mac Low, M.-M. 2005, AA 435, 611
- [Jessop, 2001] Jessop, N. E. & Ward-Thompson, D. 2001, MNRAS, 323, 1025
- [Jijina, 1999] Jijina, J., Myers, P.C. & Adams, F.C. 1999, ApJS, 125, 161
- [Klessen, 2003] Klessen, R.S. & Lin, D.N.C. 2003, Physical Review E, 67, 4
- [Klessen, 2001] Klessen, R. S. 2001, ApJL 550, L77
- [Klessen, 2000] Klessen, R. S. & Burkert, A. 2000, ApJ, 128, 287
- [Larson, 1981] Larson, R. B. 1981, MNRAS, 194, 809
- [Lee, 1994] Lee, C. W., Myers, P. C., & Tafalla M. 1999, ApJ, 526, 788
- [Louis, 2000] Jean Louis, 2000, Stellar Rotation, Cambridge University Press
- [Lucy, 1977] Lucy, L. B. 1997, Astron. J., 82, 1013
- [Mac-Low, 2004] Mac-Low, M. & Klessen, R. S. 2004, Reviews of Modern Physics, 76, 125
- [Mac-Low, 1999] Mac Low, M.-M., & A. Ferrara, 1999, Astrophys. J., 513, 142
- [Mac-Low, 1998] Mac Low, M.-M., R. S. Klessen, A. Burkert, & M. D. Smith, 1998, Phys. Rev. Lett., 80, 2754
- [Masunaga, 2000] Masunaga, H. & Inutsuka, S. -i. 2000, ApJ, 531, 350
- [Chabier, 2009] Megeath, S. T. , Li, Z.-Y., & Nordlund, A. 2009, en Structure Formation in Astrophysics, editado por Giller Chabrier (Cambridge University Press).

- [Monaghan, 1985] Monaghan, J. J. 1985, *Comput. Phys. Rep.*, 3, 71
- [Motoyama, 2003] Motoyama, K., & Yoshida, T. 2003, *MNRAS*, 344, 461
- [Narayanan, 1998] Narayanan, G., Walker, C. K., & Buckley, H. D. 1998, *ApJ*, 496, 292
- [Ogino, 1999] Ogino, S., Tomisaka, K., & Nakamura, F. 1999, *PASJ*, 51, 637
- [Whitworth, 2001] Whitworth A. P., & D. Ward-Thompson, D. 2001, *ApJ*, 547, 317
- [Padmanbhan, 2000] Padmanbhan, T., 2000, *Theoretical Astrophysics, Vol. I*, Cambridge University Press
- [Padmanbhan, 2001] Padmanbhan, T., 2001, *Theoretical Astrophysics, Vol. II*, Cambridge University Press
- [Stacey, 2002] Palen, S., 2002, *Theory and Problems of Astronomy*, McGraw-Hill
- [Palla, 1993] Palla, F., & Stahler, S. W. 1993, *ApJ*, 418, 414
- [Plummer, 1911] Plummer, H. C. 1911, *MNRAS*, 71, 460
- [Prialnik, 2000] Dina Prialnik, 2000, *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*, Cambridge University Press
- [Pringle, 2007] J. E. Pringle & A. R. King, 2007, *Astrophysical Flows*, Cambridge University Press
- [Schmeja, 2004] Schmeja S. & Klessen, R. S. 2004, *A&A* 419, 405
- [Shu, 1977] Shu, F. H. 1977, *ApJ*, 214, 488
- [Shu, 1987] Shu, F. H., & Z. Li 1997, *Astrophys. J.*, 475, 251
- [Spitzer, 1998] Spitzer, L., 2004, *Physical Processes in the Interstellar Medium*, Wiley-Vch
- [Springel, 2002] Springel, V. & Hernquist, L. 2002, *MNRAS*, 333, 649
- [Springel, 2005] Springel, V. 2005, *MNRAS*, 364, 1105
- [Stahler, 1983] Stahler, S. W. 1983, *ApJ*, 274, 822
- [Steinmetz, 1993] Steinmetz, M. & Muller, E., 1993. *A&A* 268, 391
- [Stone, 1998] Stone, J. M., E. C. Ostriker, & C. F. Gammie, 1998, *Astrophys. J.*, 508, L99
- [Tafalla, 1998] Tafalla, M, Mardone, D. & Myers, P.C. 1998, *ApJ*, 504, 900
- [Tohline, 1982] Tohline, J. E. 1982, *Fundamentals of Cosmic Physics*, 8, 1

- [Tomisaka, 1996] Tomisaka, K. 1996, PASJ, 48, L97
- [Tomisaka, 2007] Tomisaka, K., Star Formation, 2007
- [Vazquez, 2003] Vázquez-Semadeni, E., Ballesteros-Paredes, J., and Klessen, R. S. 2003, ApJL 585, L131
- [Benz, 1990] Benz, W. 1990, Advanced research workshop on the numerical modelling of nonlinear stellar pulsations: problems and prospects, 302, 269
- [Ward-Thompson, 1999] Ward-Thompson, D, Motte, F. & Andre P., 1999, Mon. Not. R. Astron. Soc. 305, 143
- [Ward-Thompson, 1994] Ward-Thompson, D., Scott, P. F., Hills, R. E. & André, P. 1994, MNRAS, 268, 276
- [Wendt, 2009] Wendt, J. F. , Computational Fluid Dynamics: An introduction Third Edition, 2009, Springer
- [Young, 2003] Young, C. H., Shirley, Y. L., Evans, N. J., II, & Rawlings, J. M. C. 2003, ApJS, 145, 111