UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNTORES DE MACKEY

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTORA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

NADIA ROMERO ROMERO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALBERTO GERARDO RAGGI CÁRDENAS
2011

Datos del jurado.

Alumna: Romero Romero Nadia.
Teléfono: 55 58 10 63 53.
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Doctorado en Ciencias Matemáticas
No. de cuenta: 096224140.

Tutor: Dr. Alberto Gerardo Raggi Cárdenas.

Sinodal. Dr. Raymundo Bautista Ramos.

Sinodal. Dr. Serge Bouc.

Sinodal. Dr. Florian Luca.

Sinodal. Dr. Alberto Gerardo Raggi Cárdenas.

Sinodal. Dr. Luis Valero Elizondo.

Trabajo escrito: Funtores de Mackey, 118 p, 2011.

FUNTORES DE MACKEY

Nadia Romero

I was just guessing at numbers and figures,
pulling your puzzles apart...

Contenido

Agradecimientos

A la UNAM, por la excelente formación académica, científica y humana que recibí desde el bachillerato.

Al CONACyT, por los apoyos económicos de los que fui beneficiaria: Becas de Maestría y Doctorado, proyecto B0291 (Funtores de tipo Burnside) y proyecto ANUIES-ECOS M10-M01 (Biconjuntos y funtores asociados).

A mi familia, especialmente a Nanditos, Nidia, Feriiquiita Ma y Pelón, por ser y estar. Y a todos los buenos amigos, donde quiera que estén...

A los miembros de mi comité tutor y a los sinodales, por la revisión de este trabajo y sus valiosos comentarios y correcciones, así como por su ayuda en el proceso administrativo.

A Gerardo Raggi: Muchas gracias por las fantásticas matemáticas que me enseñaste desde la maestría, este trabajo es una pequeña muestra del invaluable conocimiento que compartiste conmigo. A Serge Bouc: Merci beaucoup d'avoir répondu à toutes mes questions et bien sûr, merci pour les foncteurs d'ensembles munis d'une double action. To both of you: Thanks a lot for your guidance.

Introducción

Los funtores de Mackey fueron introducidos a principios de la década de 1970 por Green [14] y Dress [12] como una generalización de los procesos de inducción y restricción, presentes en la teoría de representaciones de grupos finitos. Existen varias definiciones equivalentes, como puede verse por ejemplo en Bouc [6] y Webb [21]. La idea central en todas ellas es que dado un grupo finito G y un anillo conmutativo R, un funtor de Mackey M para G sobre R es una función que asigna a cada H en la familia de subgrupos de G un R-módulo $M(H)$, y que satisface ciertos axiomas. Estos axiomas se refieren a la existencia de morfismos $M(H) \to M(K)$ y $M(K) \to M(H)$ si $K \leqslant H$, que se comportan como la restricción y la inducción. Entre otras cosas, deben satisfacer la fórmula de Mackey, que relaciona estos dos morfismos.

En diferentes áreas de las matemáticas es posible encontrar ejemplos de funtores de Mackey. Es por eso que al estudiarlos como una estructura independiente, se espera obtener resultados generales, que nos provean de nueva información al aplicarlos a dichos ejemplos. En este sentido podemos mencionar la clasificación de los funtores de Mackey simples, que tiene aplicaciones a la cohomología de grupos, véase por ejemplo Webb [20]. Otras áreas donde pueden encontrarse aplicaciones son: Homología equivariante, en topología algebraica (Aguilar y Prieto [1]); categorías monoidales (Panchadcharam [16]); y mayormente en la teoría de inducción (Boltje [4], Coşkun [10]).

Nuestros objetos de estudio tienen su origen en los funtores de biconjuntos, introducidos en la década antepasada por Serge Bouc [7]. Estos funtores pueden verse como una generalización de los funtores de Mackey mencionados arriba, ya que la mayoría de los funtores de Mackey conocidos pueden definirse como funtores de biconjutos. Por este motivo, en este trabajo continuamos llamándolos funtores de Mackey, sin embargo, esta nueva definición ofrece varias ventajas sobre su antecesora, algunas de ellas son: Estos funtores están definidos para familias de grupos más grandes, no sólo para los subgrupos de un grupo G; pueden definirse flechas asociadas a otros morfismos de grupos, no sólo a la inclusión de subgrupos, algo que se había observado ya en varios funtores de Mackey. Además, los axiomas que satisfacían en la antigua definición son el resultado de la estructura intrínseca que provee la categoría de biconjuntos. Esta última característica permite simplificar algunas pruebas de resultados conocidos, y permite expresar con sencillez varios conceptos.

Aunque nuestra definición de funtor de Mackey es esencialmente la de funtor de biconjuntos dada por Bouc, existe una diferencia importante entre ellas, además del nombre. Los funtores de biconjuntos están definidos en subcategorías plenas de la categoría de biconjuntos (Definición 3.1.1 en Bouc [9]), la cual tiene por objetos grupos finitos, y por morfismos de G a H el grupo de Grothendieck de (H, G)-biconjuntos finitos. En nuestra definición los morfismos de G a H están en un subgrupo del grupo de Grothendieck de (G, H)-biconjuntos finitos, en el cual imponemos ciertas restricciones a los estabilizadores con respecto a G y a H de los biconjuntos transitivos. La intención de estas restricciones es incluir algunos casos de funtores de Mackey cuya definición no se extiende a la categoría de biconjuntos. Una segunda diferencia se deriva de la inversión en los morfismos, los funtores de biconjuntos son covariantes y nuestros funtores son contravariantes. Sin embargo, en muchos casos estaremos trabajando en la categoría de biconjuntos, así que, salvo esta segunda diferencia, estos funtores de Mackey coinciden con los funtores de biconjuntos.

Este trabajo está dividido en tres partes. En la primera describimos la clasificación de los funtores de Mackey simples con respecto a dos parámetros, un grupo H y un $ROut(H)$-módulo simple V, y damos una descripción muy sencilla de cada funtor simple en términos de V. La segunda parte trata sobre la Teoría de Inducción. Definimos la restricción, la inducción y la coinducción de funtores de Mackey y probamos que la inducción y la coinducción son adjuntos, izquierdo y derecho respectivamente, de la restricción. Esto nos lleva al estudio de los teoremas de inducción, y de los funtores de Green. Probamos entonces el Teorema de Dress para el anillo de Burnside y para funtores de Mackey, y finalmente, la última sección está dedicada a la inducción en el anillo de Green. El último capítulo continúa el estudio de los funtores de Green que Bouc comienza en el capítulo 8 de [9]. En este capítulo estaremos trabajando siempre sobre la categoría de biconjuntos. Los resultados más importantes son sobre tres ejemplos de funtores de Green para los cuales podemos parametrizar sus módulos simples de una manera similar a como lo hicimos con los funtores de Mackey simples. Estos casos son: El funtor de Burnside trasladado por un grupo C, para ciertos casos de C; el funtor de representaciones complejas con coeficientes en $\mathbb{C}$ y el funtor de representaciones racionales con coeficientes en un campo de característica 0.

Capítulo 1

Biconjuntos y funtores de Mackey

Comenzamos estudiando algunas propiedades de los biconjuntos que nos permitirán dar la definición de funtor de Mackey.

Definición 1.1. Dados G y H dos grupos, un $(G,\, H)$-biconjunto es un conjunto X con una acción de G por la izquierda y una acción de H por la derecha de tal forma que las acciones conmutan, es decir $g(xh) = (gx)h$ para todas $g \in G$, $h \in H$ y $x \in X$. Lo denotaremos por ${}_GX_H$.

Decimos que el biconjunto ${}_GX_H$ es transitivo si dado $x \in X$, todo elemento en X puede escribirse como gxh para algunos $g \in G$ y $h \in H$.

Dado un $(G,\, H)$-biconjunto ${}_GX_H$, el conjunto X tiene una estructura de $G\times H$-conjunto dada por $(g,\, h)x = gxh^{-1}$ para todas $g \in G$, $h \in H$ y $x \in X$. Así que, si ${}_GX_H$ es transitivo, entonces es isomorfo (como $G\times H$-conjunto) a $(G\times H)/D$ para algún D subgrupo de $G\times H$. Bajo este isomorfismo consideraremos a los biconjuntos transitivos en el futuro.

Ejemplo 1.2. Dado $\alpha : G \to H$ morfismo de grupos, H es un $(G,\, H)$-biconjunto con la acción $\alpha(g)xh$ y un $(H,\, G)$-biconjunto con $hx\alpha(g)$ si $x, h \in H$ y $g \in G$. Los denotamos por ${}_{G^\alpha}H_H$ y ${}_HH_{{}^\alpha G}$ respectivamente, aunque frecuentemente, si es claro a través de que morfismo está dada la acción, no escribiremos la letra α.

Si K es otro grupo, podemos definir una multiplicación entre los biconjuntos ${}_GX_H$ y ${}_HY_K$:

$$ {}_GX_H \circ {}_HY_K := \frac{X \times Y}{\sim} $$

donde $(x,\, y) \sim (xh, h^{-1}y)$ para toda $h \in H$. Si $[x,\, y]$ es una clase de equivalencia, las acciones de G y K

$$ g[x,\, y] := [gx,\, y] \quad \text{y} \quad [x,\, y]k := [x,\, yk], \quad \forall g \in G \text{ y } \forall k \in K, $$

hacen a ${}_GX_H \circ {}_HY_K$ un $(G,\, K)$-biconjunto.

Lema 1.3. *Sean G, H, K y L grupos, tenemos un isomorfismo de (G, L)-biconjuntos*

$$\big({}_GX_H \circ {}_HY_K\big) \circ {}_KZ_L \;\cong\; {}_GX_H \circ \big({}_HY_K \circ {}_KZ_L\big),$$

para todos ${}_GX_H$, ${}_HY_K$ y ${}_KZ_L$ biconjuntos. Ambos son isomorfos a $X \times Y \times Z/\sim$ donde $(x, y, z) \sim (xh, h^{-1}yk, k^{-1}z)$ para todas $h \in H$ y $k \in K$.

Prueba. El isomorfismo está dado por

$$\begin{aligned} \varphi :\; \big({}_GX_H \circ {}_HY_K\big) \circ {}_KZ_L &\longrightarrow {}_GX_H \circ \big({}_HY_K \circ {}_KZ_L\big) \\ [\,[x, y], z] &\longmapsto [x, [y, z]\,]. \end{aligned}$$

□

Lema 1.4. *Sean $f : G \to H$ un morfismo de grupos y ${}_GH_H$ y ${}_HH_G$ los biconjuntos definidos en el primer ejemplo. Sea ${}_GH_G$ el (G, G)-biconjunto obtenido al multiplicar por la imagen de f en ambos lados, entonces ${}_GH_H \circ {}_HH_G \cong {}_GH_G$.*

Prueba. El isomorfismo es

$$\begin{aligned} \phi : {}_GH_H \circ {}_HH_G &\longrightarrow {}_GH_G \\ [a, b] &\longmapsto ab. \end{aligned}$$

□

Notación 1.5. Sea $X \cong (G \times H)/D$ un (G, H)-biconjunto transitivo. Si p_G y p_H son las proyecciones de $G \times H$ en G y H respectivamente, definimos entonces

$$A = p_G(D) \leqslant G, \quad C = p_H(D) \leqslant H;$$

$$A_1 = \{g \in G \mid (g, 1) \in D\} \trianglelefteq A, \quad C_1 = \{h \in H \mid (1, h) \in D\} \trianglelefteq C.$$

Lema 1.6. *Con esta notación tenemos $A/A_1 \cong C/C_1$.*

Prueba. Dado a en A, existe algún c en H tal que (a, c) está en D, luego c está en C. Definimos entonces $f : A/A_1 \to C/C_1$ como $f(aA_1) = cC_1$, veamos que f está bien definida.

Si $aA_1 = a'A_1$, entonces $f(aA_1) = cC_1$ y $f(a'A_1) = c'C_1$, donde $(a, c) \in D$ y $(a', c') \in D$. Ahora, $a^{-1}a' \in A_1$, así que $(a^{-1}a', 1) \in D$ luego,

$$(1, cc'^{-1}) = (a, c)(a^{-1}a', 1)(a'^{-1}, c^{-1}) \in D.$$

Por lo tanto, $cC_1 = c'C_1$.

Si tomamos $a = a'$, esto prueba que la definición de f no depende de c y por tanto, que f está bien definida.

Un argumento similar prueba que f es inyectiva y claramente es suprayectiva.

Para ver que es un morfismo de grupos, sean aA_1, $a'A_1 \in A/A_1$, entonces existen c y c' en C tales que (a, c) y (a', c') están en D, luego $(aa', cc') \in D$, así que $f(aA_1 \cdot a'A_1) = f(aA_1)f(a'A_1)$. □

Denotemos por B a C/C_1, tenemos entonces morfismos suprayectivos $\pi : C \to B$ y $\rho : A \to B$, donde ρ es la proyección $A \to A/A_1$ compuesta con la función f definida en el lema anterior.

Lema 1.7 (3 en Bouc [7])**.** *Sean H y G grupos y D subgrupo de $G \times H$. Con la notación anterior tenemos el siguiente isomorfismo de (G, H)-biconjuntos*

$$(G \times H)/D \cong {}_G G_A \circ {}_{A^\rho} B_B \circ {}_B B_{^\pi C} \circ {}_C H_H.$$

Prueba. Definimos

$$\varphi : (G \times H)/D \longrightarrow {}_G G_A \circ {}_{A^\rho} B_B \circ {}_B B_{^\pi C} \circ {}_C H_H$$
$$(g,\, h)D \longmapsto [g,\, 1,\, 1,\, h^{-1}]$$

veamos que está bien definida.

Supongamos $(g,\, h)D = (g_1,\, h_1)D$, entonces $(g,\, h) = (g_1,\, h_1)(a,\, c)$ para alguna pareja $(a,\, c)$ en D, así que $g = g_1 a$ y $h = h_1 c$, luego $\varphi((g,\, h)D) = [g_1 a,\, 1,\, 1,\, c^{-1}h_1^{-1}]$ y tenemos

$$\begin{aligned} [g_1 a,\, 1,\, 1,\, c^{-1}h_1^{-1}] &= [g_1,\, a \cdot 1_{C/C_1},\, 1_{C/C_1} \cdot c^{-1},\, h_1^{-1}] \\ &= [g_1,\, f(aA_1),\, c^{-1}C_1,\, h_1^{-1}]. \end{aligned}$$

Como vimos en la demostración del lema anterior, $f(aA_1) = cC_1$, ya que $(a,\, c)$ pertenece a D, así que esta clase es igual a $[g_1,\, 1,\, 1,\, h_1^{-1}]$. Por lo tanto, φ está bien definida.

Veamos que φ es de $G \times H$-conjuntos. Sean $(a,\, b) \in G \times H$ y $(g,\, h)D \in (G \times H)/D$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi((a,\, b) \cdot (g,\, h)D) &= [ag,\, 1,\, 1,\, h^{-1}b^{-1}] \\ &= a[g,\, 1,\, 1,\, h^{-1}]b^{-1} = (a,\, b) \cdot [g,\, 1,\, 1,\, h^{-1}] \end{aligned}$$

y esto es igual a $(a,\, b) \cdot \varphi((g,\, h)D)$.

Ahora φ es suprayectiva, sea $[g,\, xC_1,\, yC_1,\, h]$ en ${}_G G_A \circ {}_{A^\rho} B_B \circ {}_B B_{^\pi C} \circ {}_C H_H$, como f es suprayectiva, tenemos:

$$\begin{aligned} [g,\, xC_1,\, yC_1,\, h] &= [g,\, f(aA_1),\, yC_1,\, h] \\ &= [g,\, a \cdot 1,\, 1 \cdot y,\, h] = [ga,\, 1,\, 1,\, yh], \end{aligned}$$

para alguna $a \in A$, luego esta clase es la imagen de $(ga,\, h^{-1}y^{-1})D$.

Finalmente, si $\varphi((g,\, h)D) = \varphi((g_1,\, h_1)D)$, entonces

$$(g_1,\, 1,\, 1,\, h_1^{-1}) = (ga,\, a^{-1} \cdot xC_1,\, x^{-1}C_1 \cdot c,\, c^{-1}h^{-1})$$

para algunos $a \in A$, y $x,\ c \in C$, Entonces $g_1 = ga$, $h_1 = hc$ y si $f(aA_1) = wC_1$, entonces $(a,\, w) \in D$. De la igualdad de arriba tenemos que $w^{-1}x$ y $x^{-1}c$ pertenecen a C_1, luego $(1,\, w^{-1}x)$ y $(1,\, x^{-1}c)$ pertenecen a D, de aquí obtenemos $(a,\, c) \in D$. Por lo tanto, $(g,\, h)D = (g_1,\, h_1)D$, es decir φ es inyectiva. □

Si $A \leqslant G$ y $C \leqslant H$, a los biconjuntos ${}_G G_A$ y ${}_C H_H$ los llamamos de tipo de inducción y restricción respectivamente. Análogamente ${}_{A^\rho} B_B$ y ${}_B B_{\pi_C}$ son de tipo de inflación y deflación.

Para biconjuntos tenemos propiedades análogas a las que tienen la inducción y la restricción en la teoría de representaciones, como la transitividad y la fórmula de Mackey.

Lema 1.8. *Sean G, H y K grupos y $f : H \to G$ y $g : K \to H$ morfismos de grupos, entonces*

a) ${}_G G_{f_H} \circ {}_H H_{g_K} \cong {}_G G_{f \circ g_K}$,

b) ${}_{K^g} H_H \circ {}_{H^f} G_G \cong {}_{K^{f \circ g}} G_G$.

c) (Mackey) Si H y K son subgrupos de G y $c_g : K \to {}^g K$ es la conjugación por g, entonces

$$ {}_H G_G \circ {}_G G_K \cong \dot{\bigcup_{g \in [H \backslash G / K]}} HgK \cong \dot{\bigcup_{g \in [H \backslash G / K]}} {}_H H_{H \cap {}^g K} \circ {}_{H \cap {}^g K} {}^g K_{c_g K}, $$

donde $[H \setminus G / K]$ es un sistema de representantes de las clases dobles de H y K en G.

Prueba. Las pruebas de los incisos a y b son similares a la del Lema 1.4. De la misma forma, para c tenemos ${}_H G_G \circ {}_G G_K \cong {}_H G_K$ y claramente

$$ {}_H G_K \cong \dot{\bigcup_{g \in [H \backslash G / K]}} HgK. $$

Por otro lado, si g es un representante de las clases dobles de H y K en G, entonces

$$ HgK \cong {}_H H_{H \cap {}^g K} \circ {}_{H \cap {}^g K} {}^g K_{c_g K}. $$

bajo el morfismo

$$ f : {}_H H_{H \cap {}^g K} \circ {}_{H \cap {}^g K} {}^g K_{c_g K} \longrightarrow HgK \quad \text{tal que} \quad [h,\, gkg^{-1}] \longmapsto hgk. $$

$\square$

Observemos que de c) obtenemos, para cualesquiera morfismos $f : H \to G$ y $t : K \to G$,

$$ {}_{H^f} G_G \circ {}_G G_{t_K} \cong \dot{\bigcup_{x \in [f(H) \backslash G / t(K)]}} {}_H f(H)_{f(H) \cap {}^x t(K)} \circ {}_{f(H) \cap {}^x t(K)} {}^x t(K)_{c_x t K} $$

ya que ${}_{H^f}G_G \cong {}_H f(H)_{f(H)} \circ {}_{f(H)}G_G$, así como ${}_G G_{{}^t K} \cong {}_G G_{t(K)} \circ {}_{t(K)} t(K)_K$, por lo que ${}_{H^f}G_G \circ {}_G G_{{}^t K}$ es isomorfo a

$$\dot{\bigcup_{x\in[f(H)\backslash G/t(K)]}} {}_H f(H)_{f(H)} \circ {}_{f(H)} f(H)_{f(H)\cap {}^x t(K)} \circ {}_{f(H)\cap {}^x t(K)} {}^x t(K)_{c_x t(K)} \circ {}_{t(K)} t(K)_K,$$

que es isomorfo a lo de arriba.

Como resultado de los dos lemas anteriores, tenemos la siguiente formula para la composición de dos biconjuntos transitivos.

Proposición 1.9 (1 en Bouc [7]). *Sean L subgrupo de $G\times H$ y M subgrupo de $H\times K$, entonces*

$$(G\times H)/L \circ (H\times K)/M \cong \dot{\bigcup_{h\in[p_H(L)\backslash H/p_H(M)]}} (G\times K)/L * {}^{(h,\,1)}M$$

donde $p_H(L)$ es la proyección de L en H, $p_H(M)$ es la proyección de M en H y $L * {}^{(h,\,1)}M$ es el conjunto $\{(g,\,k)\in G\times K \mid \exists t\in H$ t. q. $(g,\,t)\in L,\ (t,\,k)\in {}^{(h,\,1)}M\}$

Prueba. Sean $X = (G\times H)/L$ y $Y = (H\times K)/M$. Del Lema 1.7, tenemos la siguiente descomposición para X

$${}_G G_{A_1} \circ {}_{A_1} B_{1B_1} \circ {}_{B_1} B_{1C_1} \circ {}_{C_1} H_H$$

con B_1 un cociente de C_1, isomorfo a un cociente de A_1. También tenemos la de Y

$${}_H H_{A_2} \circ {}_{A_2} B_{2B_2} \circ {}_{B_2} B_{2C_2} \circ {}_{C_2} K_K$$

con B_2 un cociente de C_2, isomorfo a un cociente de A_2. Obsérvese que $C_1 = p_H(L)$ y $A_2 = p_H(M)$.

Aplicando el inciso c del lema anterior a ${}_{C_1}H_H \circ {}_H H_{A_2}$, tenemos entonces que $X\circ Y$ es isomorfo a

$$\dot{\bigcup_{h\in[C_1\backslash H/A_2]}} {}_G G_{A_1} \circ {}_{A_1} B_{1C_1\cap {}^h A_2} \circ {}_{C_1\cap {}^h A_2} B_{2C_2} \circ {}_{C_2} K_K.$$

Cada uno de los biconjuntos de esta unión es transitivo, ya que si $[g,\,b_1,\,b_2,\,k]$ es un elemento en alguno de ellos, entonces $b_1 = f_1(a_1)$ con $f_1 : A_1 \twoheadrightarrow B_1$ y $b_2 = f(c_2)$ con $f_2 : C_2 \twoheadrightarrow B_2$, así que

$$[g,\,b_1,\,b_2,\,k] = g a_1 [1,\,1,\,1,\,1] c_2 k.$$

No es difícil observar que el estabilizador de $[1,\,1,\,1,\,1]$ es precisamente $L * {}^{(h,\,1)}M$.

$\square$

Definición 1.10. Denotaremos por $A(G,\, H)$ al grupo de Grothendieck de los (G, H)-biconjuntos finitos. Es decir, las sumas algebraicas finitas de $(G,\ H)$-biconjuntos finitos donde la unión disjunta de dos de ellos $X \cup Y$ se identifica con $X + Y$. Escribiremos $A_R(G,\, H)$ para $R \otimes A(G,\, H)$, si R es un anillo conmutativo.

Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ dos clases de grupos finitos no vacías y cerradas bajo subgrupos, cocientes y extensiones. Definimos $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(G,\, H)$ como el subgrupo de $A_R(G,\, H)$ generado por los biconjuntos ${}_GX_H$ tales que para toda a en X se tiene $Stab_G(a) \in \mathcal{X}$ y $Stab_H(a) \in \mathcal{Y}$.

Nótese que todo elemento en $A(G,\, H)$ es una combinación lineal de biconjuntos transitivos.

Lema 1.11. *Si ${}_GX_H$ pertenece a $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(G,H)$ y ${}_HY_K$ pertenece a $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(H,K)$, entonces ${}_GX_H \circ {}_HY_K$ pertenece a $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(G,K)$.*

Prueba. Sea $[x,\, y] \in {}_GX_H \circ {}_HY_K$,

$$Stab_G([x,\, y]) = \{g \in G \mid g[x,\, y] = [x,\, y]\}.$$

Luego, $g \in Stab_G([x,\, y])$ si y sólo si existe h en H tal que $(gx,\ y) = (xh^{-1},\, hy)$, es decir:

$$Stab_G([x,\, y]) = \{g \in G \mid \text{existe } h \in Stab_H(y) \text{ t.q. } gxh = x\}$$

Es fácil observar que $Stab_G(x)$ es un subgrupo normal de $Stab_G([x,\, y])$ y el primero está en $\mathcal{X}$, luego tenemos la sucesión exacta

$$1 \longrightarrow Stab_G(x) \longrightarrow Stab_G([x,\, y]) \longrightarrow Stab_G([x,\, y])/Stab_G(x) \longrightarrow 1$$

por lo que basta probar $Stab_G([x,\, y])/Stab_G(x) \in \mathcal{X}$ y tendremos $Stab_G([x,\, y]) \in \mathcal{X}$.

Sean

$$L = Stab_H(y) \cap Stab_H(x) \leqslant Stab_H(y) \quad \text{y} \quad N = N_{Stab_H(y)}(L) \leqslant Stab_H(y),$$

como $Stab_H(y) \in \mathcal{X}$, entonces L y N pertenecen también a $\mathcal{X}$.

Ahora definimos $\varphi : Stab_G([x,\, y]) \to N/L$. Dada $g \in Stab_G([x,\, y])$, existe h en $Stab_H(y)$ tal que $gxh = x$, veamos que $h \in N$. Si $l \in L$,entonces

$$xhlh^{-1} = g^{-1}xlh^{-1} = g^{-1}xh^{-1} = x,$$

así que $hlh^{-1} \in Stab_H(x)$ y claramente $hlh^{-1} \in Stab_H(y)$, luego $hlh^{-1} \in L$ y $h \in N$.

Definimos $\varphi(g) = hL$.

Veamos que está bien definida, supongamos que existen h y h' en $Stab_H(y)$ tales que $gxh = x = gxh'$, entonces $xh = xh'$, así que $xh'h^{-1} = x$ y por lo tanto, $h'h^{-1}$ está en L. Para ver que φ es un morfismo de grupos, sean g y g' en $Stab_H[(x,\, y])$ y supongamos $gxh = x$, $g'xh = x'$ con h y h' en $Stab_H(y)$, entonces $gg'xhh' = x$ y por lo tanto $\varphi(gg') = hh'L$.

Finalmente, determinaremos el núcleo de este morfismo. Si $\varphi(g) = L$, entonces existe $h \in L$ tal que $gxh = x$, así que $gx = x$ y por lo tanto, $g \in Stab_G(x)$. Entonces el núcleo es $Stab_G(x)$.

Esto prueba que $Stab_G([x, y])/Stab_G(x)$ es isomorfo a un subgrupo de N/L y por lo tanto, $Stab_G([x, y])/Stab_G(x) \in \mathcal{X}$.

Con una prueba análoga obtenemos $Stab_H([x, y]) \in \mathcal{Y}$. □

Lema 1.12.

1. *Sean $\alpha : G \to K$ y $\beta : H \to K$ dos morfismos de grupos, entonces ${}_{G^\alpha}K_{\beta_H}$ pertenece a $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(G, H)$ si y sólo si $Ker\alpha \in \mathcal{X}$ y $Ker\beta \in \mathcal{Y}$.*

2. *Sea $(G \times H)/D$ biconjunto transitivo, sabemos que $(G \times H)/D$ es isomorfo a ${}_GG_A \circ {}_AB_B \circ {}_BB_C \circ {}_CH_H$ donde $B = C/C_1$ es isomorfo a A/A_1, entonces $(G\times H)/D$ está en $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(G, H)$ si y sólo si $A_1 \in \mathcal{X}$ y $C_1 \in \mathcal{Y}$.*

Prueba. 1. Si $x \in K$, entonces $Stab_G(x) = Ker\alpha$ y $Stab_H(x) = Ker\beta$.

La prueba de 2 se sigue de 1 y del lema anterior. □

Definición 1.13. Dadas $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de grupos como las anteriores, el Lema 1.11 nos permite construir una categoría $\Omega_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ cuyos objetos son los grupos finitos y las flechas entre G y H es el grupo aditivo $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(G, H)$.

En cada $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(G, G)$ la identidad es el biconjunto ${}_GG_G$.

Esta nueva categoría no es esencialmente más o menos complicada que la categoría Grp de grupos finitos con los morfismos conocidos, es decir:

Lema 1.14. *Dos grupos finitos G y H son isomorfos en Grp si y sólo si lo son en $\Omega_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$.*

Prueba. Si tenemos un isomorfismo de grupos $\varsigma : H \to G$, podemos obtener los biconjuntos

$$ {}_GG_{\varsigma^{-1}H} \circ {}_{H^\varsigma}G_G \cong {}_GG_G \quad \text{y} \quad {}_{H^\varsigma}G_G \circ {}_GG_{\varsigma^{-1}H} \cong {}_HH_H. $$

Ahora supongamos que existen $X \in A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(G, H)$ y $Y \in A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(H, G)$ tales que

$$ X \circ Y \cong {}_GG_G \quad \text{y} \quad Y \circ X \cong {}_HH_H. $$

Si $X = \sum_i m_i \frac{G\times H}{D_i}$ y $Y = \sum_j n_j \frac{H\times G}{E_j}$, entonces por la Proposición 1.9

$$ X \circ Y = \sum_{i,j} m_i n_j \sum_{x\in[p_H(D_i)\backslash H/p_H(E_j)]} \frac{G \times G}{D_i *^{(x,1)} E_j} $$

donde $D_i *^{(x,1)} E_j = \{(a, b) \in G \times G \mid \exists h \in H \text{ con } (a, h) \in D_i \text{ y } (x^{-1}hx, b) \in E_j\}$, y

$$Y \circ X = \sum_{i,j} m_i n_j \sum_{y \in [p_G(E_j) \backslash G / p_G(D_i)]} \frac{H \times H}{E_j *^{(y,1)} D_i}$$

donde $E_j *^{(y,1)} D_i = \{(a, b) \in H \times H \mid \exists g \in G \text{ con } (a, g) \in E_j \text{ y } (y^{-1}gy, b) \in D_i\}$. Esto implica la existencia de grupos $A \leqslant G \times H$, $B \leqslant H \times G$ tales que $A * B = \Delta(G)$ y $U \leqslant H \times G$, $V \leqslant G \times H$ tales que $U * V = \Delta(H)$. Luego, para todo g en G, existe h en H tal que $(g, h) \in A$ y $(h, g) \in B$, en particular $p_G(A) = G$. Ahora consideremos

$$k_G(A) = \{g \in G \mid (g, 1) \in A\}.$$

Dado que $(1, 1) \in B$, entonces $(g, 1) \in A$ implica $(g, 1) \in A * B$, luego $g = 1$, es decir $k_G(A) = 1$. Pero recordemos del Lema 1.6 que $p_G(A)/k_G(A)$ es isomorfo a un subcociente de H. Así que G es isomorfo a un subcociente de H. Análogamente, utilizando $U*V = \Delta(H)$, obtenemos que H es isomorfo a un subcociente de G. Luego G y H son isomorfos. $\square$

Para muchos aspectos del estudio de los funtores de Mackey resulta útil considerar una subcategoría de $\Omega_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$: Sea $\mathcal{Z}$ una familia de grupos cerrada bajo subgrupos y cocientes, definimos $\Omega_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ como la subcategoría plena de $\Omega_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ cuyos objetos son los grupos de $\mathcal{Z}$.

Obsérvese que, si $G, H \in \mathcal{Z}$ y X es un (G, H)-biconjunto transitivo en $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(G, H)$, entonces todos los grupos involucrados en la descomposición de Bouc (Lema 1.7) de X pertenecen a $\mathcal{Z}$.

Definición 1.15. Sea R un anillo conmutativo. La categoría de funtores de Mackey para $\mathcal{Z}$ sobre R tiene por objetos los funtores aditivos contravariantes de $\Omega_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ a $R-Mod$ y por flechas las transformaciones naturales entre ellos. La denotaremos por $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$. Si $\mathcal{Z}$ es la clase de todos los grupos finitos, escribiremos simplemente $Mac_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$.

No es difícil probar que la categoría $\Omega_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ es aditiva y que $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ es abeliana.

El motivo por el cual debemos restringir los grupos en $\mathcal{Z}$ con $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ es el hecho de que no todos los funtores de Mackey pueden definirse para todos los morfismos de grupos. Un caso en el que se puede es el funtor que a cada grupo G asocia su anillo de Burnside $B(G)$.

Para cada grupo G, $B(G)$ se define como el $\mathbb{Z}$-módulo con generadores las clases de isomorfismo $[X]$ de G-conjuntos izquierdos transitivos con relaciones $[X] + [Y] = [X \dot{\cup} Y]$ y $[X][Y] = [X \times Y]$. El elemento identidad es el conjunto con un punto. Si R es un anillo conmutativo, denotaremos por RB al funtor que asigna $R \otimes B(G)$ a G.

Sean G y H son dos grupos en $\mathcal{Z}$ y ${}_HU_G$ un biconjunto. Para X un G-conjunto, definimos $RB({}_HU_G)(X)$ como ${}_HU_G \circ {}_GX$, que es un H-conjunto. Esto induce un homomorfismo de grupos

$$RB({}_HU_G) : RB(G) \to RB(H).$$

De esta forma, RB puede definirse en $\Omega_{\mathbb{Z},\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ para $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ cualesquiera clases de grupos que satisfagan las hipótesis.

Otro ejemplo que puede definirse para cualquier $\Omega_{\mathbb{Z},\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ es el anillo de Green $a(k\,\_)$. Si k es un campo, el anillo de Green de la categoría de kG-módulos finitamente generados, denotado por $a(kG)$ es, por definición, generado sobre $\mathbb{Z}$ por elementos $[M]$, uno por cada clase de isomorfismo de kG-módulos y con estructuras dadas por $[M]+[N]=[M\oplus N]$ y $[M][N]=[M\otimes_k N]$. Para un $(G,\,H)$-biconjunto ${}_GX_H$ definimos

$$a({}_GX_H): a(kH)\longrightarrow a(kG)$$
$$[M]\longmapsto [kX\otimes_{kH} M],$$

y extendemos linealmente para definirlo en cualquier flecha.

Como veremos en el capítulo 3, estos dos funtores son también funtores de Green.

Nuestro siguiente ejemplo son los grupos de cohomología. Si R es un anillo conmutativo, para $G\in\mathcal{Z}$ queremos asociar $M(G)=H^n(G,\,R)$ a G. Entonces, de acuerdo al Lema 1.7, basta definir los siguientes morfismos

- $M({}_GG_A)$ para $A\leqslant G$, que definimos como el transfer, es decir

$$M({}_GG_A): H^n(A,\,R)\to H^n(G,\,R)\quad \overline{f}\mapsto \overline{\sum_{g\in[G/A]} g\cdot f}$$

  donde $g\cdot f(x)=gf(g^{-1}x)$ para f representante de una sucesión de longitud n.

- $M({}_CH_H)$ para $C\leqslant H$ como la restricción.

- $M({}_AB_B)$ para $\alpha: A\to B$ morfismo suprayectivo con $Ker\alpha\in\mathcal{X}$, que definimos como la inflación, es decir, consideramos a $H^n(B,\,R)$ como A-módulo en el que $Ker\alpha$ actúa trivialmente.

- $M({}_BB_C)$ para $\beta: C\to B$ morfismo suprayectivo con $Ker\beta\in\mathcal{Y}$ que discutimos a continuación.

Para definir $M({}_BB_C)$, observemos el caso $n=0$. Los primeros tres morfismos quedan de la siguiente manera:

$$M({}_GG_A)=\frac{|G|}{|A|}1_R,\qquad M({}_CH_H)=1_R\quad\text{y}\quad M({}_AB_B)=1_R.$$

Tomemos $A=B=1$ y $C=H=G$, trataremos de definir $M({}_11_G)$. Ahora, ${}_11_G\circ{}_GG_1\cong{}_11_1$ ya que cualquier elemento del lado izquierdo es igual a $[1,\,1]$, así que $|G|M({}_11_G)=1_R$. Aún si $1/|G|\in R$, claramente ${}_11_G\circ{}_G1_1\cong{}_11_1$, así que $M({}_11_G)=1_R$, por lo que debemos tener

$|G| = 1$. De aquí concluimos que este morfismo sólo se puede definir para $\mathcal{Y} = 1$. Por lo tanto los grupos de cohomología se definen en $\Omega^{\mathcal{X},\,1}_{\mathbb{Z},\,\mathcal{Z}}$.

Continuamos con $\mathbb{G}_0(k\,\_)$, que asocia el grupo de Grothendieck de la categoría de kG-módulos finitamente generados con k un campo. Tenemos dos posibilidades, si k es un campo de característica 0, entonces $\mathbb{G}_0(kG)$ coincide con el anillo de Green $a(kG)$. Por otro lado, observemos que si k es un campo de característica p distinta de cero, entonces en general deberemos tomar $\mathcal{Y} = 1$. Sea $M = \mathbb{G}_0(k\,\_)$. Consideremos H un grupo de orden divisible por p y tratemos de definir $M({}_GG_H)$. El campo k no es un kH-módulo proyectivo; de serlo, el morfismo aumentación

$$\begin{aligned} \varepsilon : kH &\longrightarrow k \\ \sum_{h\in H} \alpha_h h &\longmapsto \sum_{h\in H} \alpha_h \end{aligned}$$

se dividiría. Luego, dado $r \in k$, un elemento $\sum_{h\in H} \alpha_h h$ en la preimagen de r tendría que satisfacer $\alpha_g = \alpha_h$ para todos g, h en H, pero entonces su imagen bajo ε es $|H|\alpha$ para algún $\alpha \in k$, y esto es igual a 0 en k. Luego, como k es finitamente generado como kH-módulo, entonces no es plano. Así, el producto tensorial sobre kH no puede extenderse al grupo de Grothendieck. Es por esto que en general, el grupo de Grothendieck estará definido en $\Omega^{\mathcal{X},\,1}_{\mathbb{Z},\,\mathcal{X}}$. El resto de los morfismos pueden definirse de la misma forma que en el anillo de Green.

Los funtores definidos en $\Omega^{\mathcal{X},\,1}_{R,\,\mathcal{Z}}$, es decir con $\mathcal{Y} = 1$, serán llamados funtores de Mackey con inflación.

Otros ejemplos de funtores de Mackey con inflación son: $K_1(\mathbb{Z}\,\_)$ que asigna a cada grupo G la K-teoría $K_1(\mathbb{Z}G)$ y Wh que asigna el grupo de Whitehead de G, denotado por $\mathrm{Wh}(G)$.

Mencionamos otros ejemplos que aparecerán a lo largo de este trabajo.

El funtor representable $A_R(\,\_\,,\,L)$ con L en $\mathcal{Z}$. Se define para cada H en $\mathcal{Z}$ como $A^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}_R(H,\,L)$, y en flechas

$$A_R({}_AX_B,\,L) : A^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}_R(B,\,L) \to A^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}_R(A,\,L) \quad \text{como} \quad {}_BY_L \mapsto {}_AX_B \circ {}_BY_L.$$

Por el Lema 1.11, éste es un funtor de Mackey que puede definirse en cualquier $\Omega^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}_{R,\,\mathcal{Z}}$.

Capítulo 2

Funtores de Mackey simples

2.1. Clasificación

En este capítulo $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ serán clases de grupos cerradas bajo subcocientes y extensiones, y $\mathcal{Z}$ será una clase de grupos cerrada bajo subcocientes.

Definición 2.1.1. Decimos que un funtor S distinto de 0 en $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ es simple si para todo T subfuntor de S se tiene $T = 0$ ó $T = S$.

Lema 2.1.2. *Sea M en $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$. Si H está en $\mathcal{Z}$, entonces $M(H)$ es un $ROut(H)$-módulo, donde $Out(H) = Aut(H)/Inn(H)$ e $Inn(H)$ son los automorfismos interiores de H.*

Prueba. Sea α un automorfismo de H, escribiremos $X_\alpha := {}_H H_{\alpha H}$. Si $m \in M(H)$, definimos $\alpha \cdot m := M(X_\alpha)(m)$. Como $X_\alpha \in A_R^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}(H,H)$, entonces $M(X_\alpha)$ es un endomorfismo de módulos de $M(H)$.

Si α y β pertenecen a $Aut(H)$ y $m \in M(H)$, entonces

$$\beta(\alpha m) = M(X_\beta)(M(X_\alpha)(m)) = M(X_\beta \circ X_\alpha)(m),$$

ya que M es un funtor contravariante. Por otro lado $(\beta\alpha)m = M(X_{\beta\alpha})(m)$. Pero no es difícil observar que $X_\beta \circ X_\alpha \cong X_{\beta\alpha}$, bajo el morfismo que manda $[a,\ b]$ en $a\beta(b)$. Así que $M(H)$ es un $RAut(H)$-módulo.

Ahora sea C_a la conjugación por $a \in H$, es decir un automorfismo interior de H. En este caso tenemos $X_{C_a} \cong {}_H H_H$ bajo el morfismo que manda $b \in X_{C_a}$ en ba, luego $C_a m = M(X_{C_a})(m) = m$.

Por lo tanto, $M(H)$ es un $ROut(H)$-módulo. $\square$

Definición 2.1.3. Dado M en $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$, decimos que $H \in \mathcal{Z}$ es un grupo minimal para M si $M(H) \neq 0$ y H satisface:

- Para todo K subgrupo propio de H se tiene $M(K) = 0$.
- Para todo morfismo suprayectivo $\alpha : H \to K$ tal que $\{1\} \neq Ker\alpha \in \mathcal{X}$, se tiene $M(K) = 0$.

Teorema 2.1.4. *Sea S en $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ simple. Si H es un grupo minimal para S, entonces $S(H)$ es un $ROut(H)$-módulo simple. Además H es único salvo isomorfismo y puede escogerse como un grupo de orden mínimo en $\mathcal{Z}$ tal que $S(H) \neq 0$.*

Prueba. Como $S \neq 0$, existe $H \in \mathcal{Z}$ de orden mínimo con $S(H) \neq 0$ y claramente H es un grupo minimal para S. Probemos que $S(H)$ es un $ROut(H)$-módulo simple.

Sea W un $ROut(H)$-submódulo de $S(H)$. Dado G un grupo en $\mathcal{Z}$, definimos

$$T(G) = \{m \in S(K) \mid \forall X \in A_R^{\mathcal{X},\ \mathcal{Y}}(H,\ G),\ S(X)(m) \in W\},$$

recordemos que S es un funtor contravariante, así que $S(X) : S(G) \to S(H)$. Probemos que T es un subfuntor de S.

(i) Claramente $T(G)$ es un R-submódulo de $S(G)$.

(ii) Sea $Y \in A_R^{\mathcal{X},\ \mathcal{Y}}(G,\ Z)$ y tomemos $t \in T(Z)$, veamos $S(Y)(t) \in T(G)$. Sea $X \in A_R^{\mathcal{X},\ \mathcal{Y}}(H,\ G)$, entonces $S(X)(S(Y)(t)) = S(YX)(t)$. Como YX está en $A_R^{\mathcal{X},\ \mathcal{Y}}(H,\ Z)$ y $t \in T(Z)$, entonces $S(YX)(t) \in W$, es decir $S(Y)(t)$ está en $T(G)$.

Así que tenemos $T = 0$ ó $T = S$. Probaremos que $T(H) = W$. Luego si $T = 0$, entonces $W = 0$ y si $T = S$, tendremos $W = S(H)$.

Veamos que $T(H) \subseteq W$. Si $X = {}_HH_H$, entonces $X \in A_R^{\mathcal{X},\ \mathcal{Y}}(H,\ H)$, así que si $t \in T(H)$, tenemos $t = S(X)(t) \in W$.

Ahora $W \subseteq T(H)$; sean $w \in W$ y $X \in A_R^{\mathcal{X},\ \mathcal{Y}}(H,\ H)$, basta tomar X transitivo, es decir $X = (H \times H)/D$. Por el Lema 1.7 tenemos

$$X = {}_HH_A \circ {}_AB_B \circ {}_BB_C \circ {}_CH_H$$

y existen morfismos suprayectivos $\alpha : A \to B$, $\beta : C \to B$, así que

$$S(X) = S({}_HH_A) \circ S({}_AB_B) \circ S({}_BB_C) \circ S({}_CH_H).$$

Si $A \subsetneq H$, entonces $S(A) = 0$, así que $S({}_HH_A) = 0$. Análogamente, si $C \subsetneq H$ entonces $S({}_CH_H) = 0$ luego, $A = C = H$. Por otro lado, $\alpha : H \to B$ es suprayectivo y por el Lema 1.12, $Ker\alpha \in \mathcal{X}$, así que debemos tener $Ker\alpha = \{1\}$, esto implica $Ker\beta = 1$. Así que α y β son automorfismos de H, además es fácil observar que para cualquier automorfismo de H, γ, se tiene ${}_HH_{\gamma H} \cong {}_{H^{\gamma^{-1}}}H_H$ bajo el morfismo que manda a en $\gamma^{-1}(a)$, luego

$$X = {}_{H^\alpha}H_H \circ {}_HH_{\beta H} = {}_HH_{\alpha^{-1}H} \circ {}_HH_{\beta H} = {}_HH_{\alpha^{-1}\beta H}$$

en el grupo de Grothendieck. Así que $S(X)(w) = S(X_{\alpha^{-1}\beta})(w) = \alpha^{-1}\beta \cdot w$, que pertenece a W ya que éste es un submódulo de $S(H)$, es decir $W \subseteq T(H)$.

Probemos que H es único salvo isomorfismo. Sea $K \in \mathcal{Z}$ minimal para S y supongamos que $K \ncong H$, probaremos que para todo $X \in A_R^{\mathcal{X},\ \mathcal{Y}}(K,\ H)$ se tiene $S(X) = 0$. Sea X en $A_R^{\mathcal{X},\ \mathcal{Y}}(K,\ H)$, supongamos $X = (K \times H)/D$, y $S(X) \neq 0$. Nuevamente, por el Lema de Bouc tenemos

$$X = {}_K K_A \circ {}_A B_B \circ {}_B B_C \circ {}_C H_H,$$

con morfismos suprayectivos $\alpha : A \to B$ y $\beta : C \to B$, luego

$$S(X) = S({}_K K_A) \circ S({}_A B_B) \circ S({}_B B_C) \circ S({}_C H_H).$$

Como $S(X) \neq 0$, tenemos como antes $A = K$, $C = H$, y $Ker\alpha = 1$, así que $B \cong K$ y podemos suponer que α es un automorfismo de K, luego tenemos $\beta : H \to K$ suprayectivo. Ahora, como K no es isomorfo a H, tenemos $Ker\beta \neq \{1\}$, luego el orden de K es estrictamente menor que el de H, pero esto implicaría $S(K) = 0$, una contradicción, así que $S(X) = 0$.

Ahora consideremos el subfuntor Q construido como el funtor T, pero esta vez para K y con $W = 0$, es decir:

$$Q(G) = \{m \in S(G) \mid \forall X \in A_R^{\mathcal{X},\ \mathcal{Y}}(K,\ G),\ S(X)(m) = 0\}.$$

Sabemos que $Q(K) = W = 0$, así que $S = Q$ implicaría $S(K) = 0$, lo que no ocurre, luego debemos tener $Q = 0$. Por otro lado, como $S(X) = 0$ para todo $X \in A_R^{\mathcal{X},\ \mathcal{Y}}(K,\ H)$, entonces $S(H) = Q(H)$, así que $S(H) = 0$ lo que contradice la minimalidad de H. Por lo tanto concluimos $K \cong H$. $\square$

Ahora probaremos que si S es un funtor de Mackey simple y H es un grupo minimal para S, entonces S es isomorfo a un funtor que se puede obtener a partir del $ROut(H)$-módulo $S(H)$, de esta forma obtendremos una clasificación de los funtores de Mackey simples. Para este fin, dado $H \in \mathcal{Z}$ un grupo fijo construiremos dos funtores: F de $ROut(H) - Mod$ en $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ y G de $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ en $ROut(H) - Mod$ que serán adjuntos.

A continuación construiremos el funtor G.

Si H es un grupo en $\mathcal{Z}$ y $M \in Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$, sea $\overline{M(H)}$ el R-módulo $M(H)/M'(H)$ donde

$$M'(H) = \sum_{K \lneqq H} M({}_H H_K)(M(K)) + \sum_{\substack{\alpha : H \twoheadrightarrow K \\ 1 \neq Ker\alpha \in \mathcal{X}}} M({}_{H^\alpha} K_K)(M(K)).$$

Este cociente puede considerarse como una generalización del cociente de Brauer. Veamos que es un $ROut(H)$-módulo. Sabemos que $M(H)$ es un $ROut(H)$-módulo, ahora sea β

un automorfismo de H y verifiquemos que β fija a $M'(H)$; sea $a \in M(K)$ y supongamos $K \lneqq H$, entonces

$$\beta \cdot M({}_HH_K)(a) = M({}_HH_{\beta_H})M({}_HH_K)(a) = M({}_HH_{\beta_H} \circ {}_HH_K)(a).$$

Ahora, ${}_HH_{\beta_H} \circ {}_HH_K \cong {}_HH_{\beta_K}$, donde en este último en realidad tenemos la restricción de β a K. El morfismo es el que manda $[a, b]$ en $a\beta(b)$, así que $\beta \cdot M({}_HH_K)(M(K))$ vuelve a estar en el primer sumando.

Si tenemos $\alpha : H \to K$ suprayectivo con $1 \neq Ker\alpha \in \mathcal{X}$, entonces

$$\beta \cdot M({}_{H^\alpha}K_K)(a) = M({}_HH_{\beta_H})M({}_{H^\alpha}K_K)(a) = M({}_HH_{\beta_H} \circ {}_{H^\alpha}K_K)(a),$$

pero en este caso tenemos ${}_HH_{\beta_H} \circ {}_{H^\alpha}K_K \cong {}_{H^{\alpha\beta^{-1}}}K_K$ bajo el morfismo que manda $[a, b]$ en $\alpha\beta^{-1}(a)b$, además $Ker\alpha\beta^{-1} = \beta Ker\alpha \in \mathcal{X}$, así que $M({}_HH_{\beta_H} \circ {}_{H^\alpha}K_K)M(K)$ está en el segundo sumando. Esto prueba que $\overline{M(H)}$ es un $RAut(H)$-módulo y vimos en la prueba del último teorema que $Inn(H)$ actúa trivialmente en $M(H)$ así que $\overline{M(H)}$ es un $ROut(H)$-módulo.

Observemos que si H es minimal para M, entonces $\overline{M(H)} = M(H)$.

Por otro lado, si M y N están en $Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}}$ y $f : M \to N$ es una transformación natural, tenemos $f_H : M(H) \to N(H)$ morfismo de R-módulos, veamos que es de $ROut(H)$-módulos. Sean $a \in M(H)$ y $\alpha \in Aut(H)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M(H) \arrow[r, "M({}_HH_{\alpha_H})"] \arrow[d, "f_H"'] & M(H) \arrow[d, "f_H"] \\ N(H) \arrow[r, "N({}_HH_{\alpha_H})"] & N(H) \end{tikzcd}$$

es decir

$$f_H(\alpha \cdot a) = f_H(M({}_HH_{\alpha_H})(a)) = N({}_HH_{\alpha_H})(f_H(a)) = \alpha \cdot (f_H(a)),$$

así que f_H es un morfismo de $ROut(H)$-módulos. Finalmente, probemos que puede extenderse al cociente $\overline{M(H)}$.

Dado $K \lneqq H$, tenemos f_H y f_K morfismos de módulos con el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M(K) \arrow[r, "M({}_HH_K)"] \arrow[d, "f_K"'] & M(H) \arrow[d, "f_H"] \\ N(K) \arrow[r, "N({}_HH_K)"] & N(H) \end{tikzcd}$$

así que

$$f_H(M({}_HH_K))(M(K)) = N({}_HH_K)f_K(M(H)) \subseteq N({}_HH_K)N(K).$$

Análogamente, si $\alpha : H \to K$ es un morfismo suprayectivo con $1 \neq Ker\alpha \in \mathcal{X}$ tenemos conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M(K) & \xrightarrow{M({}_{H^\alpha}K_K)} & M(H) \\ {\scriptstyle f_K}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_H} \\ N(K) & \xrightarrow{N({}_{H^\alpha}K_K)} & N(H) \end{array}$$

así que $f_H(M({}_{H^\alpha}K_K))(M(K)) \subseteq N({}_{H^\alpha}K_K)N(K)$.

Entonces $f_H(M'(H)) \subseteq N'(H)$, luego f_H puede extenderse a un morfismo de $ROut(H)$-módulos

$$\overline{f_H} : \overline{M(H)} \longrightarrow \overline{N(H)}$$

y tenemos el siguiente

Lema 2.1.5. *Dado H un grupo en $\mathcal{Z}$, si $M,\ N \in Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}}$ y $f : M \to N$ es una transformación natural, entonces las asignaciones anteriores $\overline{M(H)}$ y $\overline{f_H}$ definen un funtor covariante*

$$G : Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}} \longrightarrow ROut(H) - Mod.$$

Prueba. No es difícil ver que $G(fg) = G(f)G(g)$ si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son transformaciones naturales, ya que si $t = fg$, entonces $t_H = f_H g_H$, así que $\overline{t_H} = \overline{f_H}\,\overline{g_H}$. Claramente $G(1_M) = 1_{G(M)}$. □

Procedemos ahora a construir el funtor F.

Lema 2.1.6. *Sean H y L grupos en $\mathcal{Z}$ y $\overline{A}(H,\ L) = A^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_R(H,\ L)/A'(H,\ L)$, donde*

$$A'(H,\ L) = \sum_{K \lneqq H} {}_H H_K \circ A^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_R(K,\ L) \ + \sum_{\substack{\alpha : H \twoheadrightarrow K \\ 1 \neq Ker\alpha \in \mathcal{X}}} {}_{H^\alpha}K_K \circ A^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_R(K,\ L),$$

entonces $\overline{A}(H,\ L)$ es un $ROut(H)$-módulo.

Prueba. Como $A_R(\_,\ L)$ es un funtor de Mackey para $\mathcal{Z}$, entonces, por el Lema 2.1.2, para H en $\mathcal{Z}$, $A^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_R(H,\ L)$ es un $ROut(H)$-módulo.

Veamos que $Aut(H)$ fija a $A'(H,\ L)$. Sean $K \lneqq H$ y σ un automorfismo de H, sabemos que

$$\sigma \cdot {}_H H_K = {}_H H_{\sigma H} \circ {}_H H_K \cong {}_H H_{\sigma K} = {}_H H_{\sigma(K)}.$$

Por otro lado, si tenemos $\alpha : H \twoheadrightarrow K$ con $1 \neq Ker\alpha \in \mathcal{X}$, entonces

$${}_H H_{\sigma H} \circ {}_{H^\alpha}K_K \cong {}_{H^{\alpha\sigma^{-1}}}K_K$$

y $Ker\alpha\sigma^{-1} = \sigma Ker\alpha \in \mathcal{X}$.

Así que $\overline{A}(H,\ L)$ es un $ROut(H)$-módulo. □

Ahora, si H es un grupo fijo en $\mathcal{Z}$ y V es un $ROut(H)$-módulo, definimos $F_{H,V}$: $\Omega_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}} \longrightarrow R - Mod$ por

$$F_{H,V}(L) = Hom_{ROut(H)}(\overline{A}(H,\, L), V),$$

en objetos.

Notación 2.1.7. Para el resto del capítulo, si M y N son $ROut(H)$-módulos, abreviaremos $Hom_{ROut(H)}(M,\, N)$ por $(M,\, N)$.

Para las flechas, definimos $F_{H,V}$ en un biconjunto ${}_LX_K$ y extendemos linealmente a los morfismos de L en K. Tenemos

$$F_{H,V}({}_LX_K) : (\overline{A}(H,\, K), V) \longrightarrow (\overline{A}(H,\, L), V),$$

así que si $f \in (\overline{A}(H,\, K), V)$, entonces definimos

$$F_{H,V}({}_LX_K)(f)(\overline{{}_HY_L}) = f(\overline{{}_HY_L \circ {}_LX_K})$$

si ${}_HY_L$ es un biconjunto y extendemos linealmente.

Lema 2.1.8. *Si L y K son grupos en $\mathcal{Z}$ y ${}_LX_K$ es un $(L,\, K)$-biconjunto, entonces las asignaciones $F_{H,V}(L)$ y $F_{H,V}({}_LX_K)$ definen un funtor de Mackey.*

Prueba. Del Lema 1.3 obtenemos que $F_{H,V}$ abre la composición de flechas en $\Omega_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ y claramente $F_{H,V}(1_L) = 1_{F_{H,V}(L)}$ para todo grupo L. □

Con este lema podemos definir el funtor F en objetos ($F(V) = F_{H,V}$), para definirlo en flechas sean V y W $ROut(H)$-módulos y $\alpha \in (V,\, W)$. Sea L un grupo en $\Omega_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$, definimos

$$f_{\alpha,L} : F_{H,V}(L) \longrightarrow F_{H,W}(L)$$

$$a \longmapsto \alpha a.$$

Afirmamos que $f_\alpha = \{f_{\alpha,L} \mid L \in Ob(\Omega_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}})\}$ es una transformación natural de $F_{H,V}$ en $F_{H,W}$. Para cada L, claramente $f_{\alpha,L}$ es un morfismo de R-módulos, además, si K es otro grupo y ${}_LX_K$ es un biconjunto transitivo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\overline{A}(H,\, K),\, V) \arrow[r, "f_{\alpha,K}"] \arrow[d, "F_{H,V}({}_LX_K)"'] & (\overline{A}(H,\, K),\, W) \arrow[d, "F_{H,W}({}_LX_K)"] \\
(\overline{A}(H,\, L),\, V) \arrow[r, "f_{\alpha,L}"] & (\overline{A}(H,\, L),\, W)
\end{tikzcd}$$

ya que si $a \in (\overline{A}(H,\, K),\, V)$, entonces

$$f_{\alpha,\, L}(F_{H,\, V}({}_L X_K)(a)) : \overline{A}(H,\, L) \to W$$

es tal que si ${}_H Y_L$ es un $(H,\, L)$-biconjunto transitivo, entonces

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\, L}(F_{H,\, V}({}_L X_K)(a))(\overline{{}_H Y_L}) &= \alpha a(\overline{{}_H Y_L \circ {}_L X_K}) \\ &= F_{H,\, W}({}_L X_K)(f_{\alpha,\, K}(a))(\overline{{}_H Y_L}). \end{aligned}$$

Tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.1.9. *Dado un grupo H en $\mathcal{Z}$, si V y W son $ROut(H)$-módulos y $\alpha : V \to W$ es un morfismo de $ROut(H)$-módulos, entonces las asignaciones anteriores $F(V) = F_{H,V}$ y $F(\alpha) = f_\alpha$, definen un funtor covariante*

$$F : ROut(H) - Mod \longrightarrow Mac^{\mathcal{X},\, \mathcal{Y}}_{R,\, \mathcal{Z}}.$$

□

Antes de probar que G es adjunto izquierdo de F, probaremos algunos resultados sobre los cocientes $\overline{A}(H,\, L)$.

Cuatro lemas sobre $\overline{A}(H,\, L)$

Lema 2.1.10. *Para H un grupo, $\overline{A}(H,\, H) \cong ROut(H)$ como anillos.*

Prueba. Definimos

$$\varphi : ROut(H) \to \overline{A}(H,\, H) \;\; \text{por} \;\; \varphi(\overline{\sigma}) = \overline{{}_H H^{\sigma}{}_H},$$

está bien definida ya que si σ es un automorfismo interior, entonces ${}_H H^{\sigma}{}_H \cong {}_H H_H$.

Para ver que es inyectiva, supongamos que

$$\varphi\Big(\sum_{\sigma \in Out(H)} \lambda_\sigma \overline{\sigma}\Big) = \sum_{\sigma \in Out(H)} \lambda_\sigma \overline{{}_H H^{\sigma}{}_H} = 0,$$

entonces $\sum_\sigma \lambda_\sigma {}_H H^{\sigma}{}_H \in A'(H,\, H)$, es decir:

$$\sum_{\sigma \in Out(H)} \lambda_\sigma {}_H H^{\sigma}{}_H = \sum_{K \subsetneq H} a_i\big({}_H H_K \circ {}_K X_{i\,H}\big) \; + \sum_{\substack{\alpha : H \twoheadrightarrow K \\ 1 \neq Ker\alpha \in \mathcal{X}}} b_j\big({}_{H^\alpha} K_K \circ {}_K Y_{j\,H}\big).$$

En ambos sumandos podemos suponer ${}_K X_{i\,H}$ y ${}_K Y_{j\,H}$ transitivos, ya que cualquier $(K,\, H)$-biconjunto es suma de éstos. Fijaremos i y j y los omitiremos en lo que sigue. Observemos que si $K \lneqq H$ o existe $\alpha : H \twoheadrightarrow K$ con $Ker\alpha \neq 1$ y ${}_KX_H$ y ${}_KY_H$ son transitivos, entonces tanto ${}_HH_K \circ {}_KX_H$ como ${}_{H^\alpha}K_K \circ {}_KY_H$ son transitivos. En el primer caso, si $[h, x]$ y $[h_1, x_1]$ pertenecen a ${}_HH_K \circ {}_KX_H$, entonces

$$[h, x] = [h, kx_1h'] = [hk^{-1}, x_1h'] = hk^{-1}h_1^{-1}[h_1, x_1]h'.$$

para algunos $k \in K$ y $h' \in H$.

En el segundo caso, si $[k, y]$ y $[k_1, y_1]$ pertenecen a ${}_{H^\alpha}K_K \circ {}_KY_H$, entonces

$$[k, y] = [k, k'y_1h] = [kk'^{-1}, y_1h] = [kk'^{-1}k_1^{-1}k_1, y_1h] = \alpha(h')[k_1, y_1]h$$

para algunos $k' \in K$ y $h, h' \in H$ con $\alpha(h') = kk'^{-1}k_1^{-1}$.

Por otro lado, ${}_HH_{\sigma H}$ es transitivo, ya que si $x, y \in H$, entonces $x = \sigma(a)$ para algún $a \in H$, así que $x = y^{-1}y\sigma(a) = y^{-1} \cdot y \cdot a$. Los biconjuntos transitivos forman una base, así que debemos tener, para cada $\sigma \in Out(H)$, ${}_HH_{\sigma H}$ igual a alguno de los sumandos. Supongamos primero que para algún $K \lneqq H$ tenemos

$${}_HH_{\sigma H} \cong {}_HH_K \circ {}_KX_H.$$

Ahora, para ${}_HH_{\sigma H}$, sea $E = Stab_{H\times H}(1)$ y para ${}_HH_K \circ {}_KX_H$, sea $F = Stab_{H\times H}(1)$, entonces

$$\begin{aligned} E &= \{(a, b) \in H \times H \mid a\sigma(b) = 1\} \\ &= \{(\sigma(b)^{-1}, b) \in H \times H \mid b \in H\}. \end{aligned}$$

Por otro lado ${}_KX_H \cong (K \times H)/D$ para algún $D \leqslant K \times H$, así que

$$\begin{aligned} F &= Stab_{H\times H}([1, (1, 1)D]) \\ &= \{(a, b) \in H \times H \mid a \cdot [1, (1, 1)D] \cdot b = [1, (1, 1)D]\} \\ &= \{(a, b) \in H \times H \mid \exists c \in K \text{ t. q. } (ac^{-1}, (c, b^{-1})D) = (1, (1, 1)D)\} \\ &= \{(a, b) \in H \times H \mid a \in K \text{ y } (a, b^{-1}) \in D\}. \end{aligned}$$

Para que $(H \times H)/E$ y $(H \times H)/F$ sean isomorfos debemos tener E y F conjugados. En E, b recorre todos los elementos de H, por lo tanto $\sigma(b)^{-1}$ también. Sin embargo, en F los elementos de la primera coordenada están en K, así que esto implicaría uHu^{-1} contenido propiamente en H para algún $u \in H$, lo que no puede ocurrir.

Supongamos ahora que para algún $\alpha : H \twoheadrightarrow K$ con $1 \neq Ker\alpha \in \mathcal{X}$ tenemos

$${}_HH_{\sigma H} \cong {}_{H^\alpha}K_K \circ {}_KY_H.$$

Como ${}_KY_H \cong (K \times H)/G$ para algún $G \leqslant K \times H$, si $C = Stab_{H\times H}([1, (1, 1)G])$, entonces

$$\begin{aligned} C &= \{(a, b) \in H \times H \mid a \cdot [1, (1, 1)G] \cdot b = [1, (1, 1)G]\} \\ &= \{(a, b) \in H \times H \mid \exists k \in K \text{ t. q. } (\alpha(a)k^{-1}, (k, b^{-1})G) = (1, (1, 1)G)\} \\ &= \{(a, b) \in H \times H \mid (\alpha(a), b^{-1}) \in G\}. \end{aligned}$$

Como $(1,\,1) \in G$ y $Ker\alpha \neq 1$, podemos encontrar $a \neq 1$ tal que $(a,\,1) \in C$, esto prueba que C y E no pueden ser conjugados y por lo tanto, que φ es inyectiva.

Para la suprayectividad tomemos, sin pérdida de generalidad, $\overline{(H \times H)/D} \neq 0$ la clase de un biconjunto transitivo en $\overline{A}(H,\,H)$. Por el Lema 1.7 tenemos

$$(H \times H)/D \cong {}_H H_A \circ {}_A B_B \circ {}_B B_C \circ {}_C H_H,$$

donde $A,\,C \leqslant H$ y B es un cociente de C isomorfo a un cociente de A. Si A fuese un subgrupo propio de H o B fuese isomorfo a un subcociente propio de H tendríamos $(H \times H)/D \in A'(H,\,H)$ lo que no ocurre. Así que debemos tener $A = H$ y $H \cong B$, por lo tanto

$$(H \times H)/D \cong {}_H H_C \circ {}_C H_H.$$

Nuevamente, debemos tener $C = H$, así que $(H \times H)/D \cong {}_H H_{\pi H}$ con π un automorfismo de H.

Finalmente, hemos visto que si α y τ son automorfismos de H, entonces

$${}_H H_{\sigma H} \circ {}_H H_{\tau H} \cong {}_H H_{\sigma\tau H}$$

lo que prueba que el morfismo es de anillos. $\square$

Lema 2.1.11. *Sean H y L grupos, entonces $\overline{A}(H,\,L) \neq 0$ si y sólo si existen $C \leqslant L$ y $\alpha : C \to H$ morfismo suprayectivo tal que $Ker\alpha \in \mathcal{Y}$.*

Prueba. Supongamos que existen un grupo C y un morfismo α como los del enunciado, entonces ${}_H H_{\alpha C} \circ {}_C L_L \in A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(H,\,L)$ y es transitivo ya que si $[a,\,b] \in {}_H H_{\alpha C} \circ {}_C L_L$, entonces $[a,\,b] = a[1,\,1]b$. Ahora, si $E = Stab_{H \times H}([1,\,1])$, tenemos

$$\begin{aligned} E &= \{(a,\,b) \in H \times L \mid \exists c \in C \text{ t. q. } (a,\,b^{-1}) = (1 \cdot c,\,c^{-1} \cdot 1)\} \\ &= \{(\alpha(c),\,c) \in H \times L \mid c \in C\} \end{aligned}$$

y ${}_H H_{\alpha C} \circ {}_C L_L \cong (H \times L)/E$. Tomemos su clase en $\overline{A}(H,\,L)$ y supongamos que es igual a 0, entonces, tal como en la proposición anterior,

$$(H \times L)/E \cong {}_H H_K \circ {}_K X_L \quad \text{ó} \quad (H \times L)/E \cong {}_{H^\delta} K_K \circ {}_K Y_L$$

para algún $K \leqslant H$ o algún $\delta : H \twoheadrightarrow K$ con $1 \neq Ker\delta \in \mathcal{X}$. En el primer caso tenemos

$$F := Stab_{H,\,L}([1,\,(1,\,1)D]) = \{(a,\,b) \in H \times L \mid a \in K \text{ y } (a,\,b^{-1}) \in D\}$$

donde ${}_K X_L \cong (K \times L)/D$. Como α es suprayectiva, si F y E fueran conjugados H sería conjugado a un subgrupo propio, lo que no ocurre. Para el segundo caso, si ${}_K Y_H \cong (K \times H)/G$ y $C = Stab_{H \times L}([1,\,(1,\,1)G])$, entonces la prueba de que suponer C y E conjugados nos lleva a una contradicción es análoga a la de la proposición anterior.

Ahora supongamos $\overline{A}(H, L) \neq 0$. Como $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(H, L)$ está generado por biconjuntos transitivos, entonces existe uno cuya clase es distinta de 0, es decir, existe $D \leqslant H \times L$ tal que $\overline{(H \times L)/D} \neq 0$ y por el Lema 1.7 tenemos

$$(H \times L)/D \cong {}_H H_A \circ {}_A B_B \circ {}_B B_C \circ {}_C L_L.$$

Si A fuera un subgrupo propio de H, entonces ${}_A H_A \circ ({}_A B_B \circ {}_B B_C \circ {}_C L_L)$ estaría en $A'(H, L)$, una contradicción, así que $A = H$. Sabemos que B es isomorfo a un cociente de H, si este cociente fuese propio tendríamos ${}_H B_B \circ ({}_B B_C \circ {}_C L_L) \in A'(H, L)$ lo que no ocurre. Así que $H \cong B$ y tenemos

$$(H \times L)/D \cong {}_H H_C \circ {}_C L_L,$$

por el Lema 1.6 tenemos $C \leqslant L$ y $\pi : C \twoheadrightarrow H$, además por el Lema 1.12 $Ker\pi \in \mathcal{Y}$. $\square$

Lema 2.1.12. *Sean H y L grupos. Supongamos que existen $\varphi : C \twoheadrightarrow H$ y $\psi : D \twoheadrightarrow H$ con C, $D \leqslant L$ y $Ker\varphi$, $Ker\pi \in \mathcal{Y}$, entonces ${}_H H_C \circ {}_C L_L$ y ${}_H H_D \circ {}_D L_L$ son iguales en $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(H, L)$ si y sólo si existen $h \in H$ y $l \in L$ tales que $D = {}^l C$ y $c_h \varphi = \psi c_l$ donde c_x denota la conjugación por un elemento x.*

Prueba. Tenemos ${}_H H_C \circ {}_C L_L$ y ${}_H H_D \circ {}_D L_L$ transitivos. Sean E el estabilizador en $H \times L$ de $([1, 1])$ con respecto a la acción de φ y F con respecto a la acción de ψ, entonces

$$E = \{(\varphi(c), c) \in H \times L \mid c \in C\} \quad \text{y} \quad F = \{(\psi(d), d) \in H \times L \mid d \in D\}$$

y estos son conjugados si y sólo si existen $h \in H$ y $l \in L$ que satisfacen las condiciones del enunciado. $\square$

Para el siguiente lema, definimos

$$\mathcal{U} = \{(C, \varphi) \mid C \leqslant L \text{ y } \varphi : C \twoheadrightarrow H \text{ t. q. } Ker\varphi \in \mathcal{Y}\}$$

con H y L grupos.

Observemos que $H \times L$ actúa en $\mathcal{U}$ bajo

$$(h, l) \cdot (C, \varphi) = ({}^l C, c_h \varphi c_l^{-1}).$$

ya que $Ker c_h \varphi c_l^{-1} = {}^l Ker\varphi$ que está en $\mathcal{Y}$. Escribiremos $\mathcal{U}/\sim$ para las órbitas de esta actuación.

Lema 2.1.13. *Sean H y L grupos y V un $ROut(H)$-módulo, tenemos*

$$\overline{A}(H, L) = \bigoplus_{[(C,\varphi)] \in \mathcal{U}/\sim} R\overline{{}_H H_C \circ {}_C L_L}.$$

Prueba. De los lemas 2.1.11 y 2.1.12, tenemos que si $\overline{A}(H,\, L) \neq 0$, entonces $\mathcal{U} \neq \emptyset$ y

$$\overline{A}(H,\, L) = \sum_{[(C,\varphi)] \in \mathcal{U}/\sim} R\overline{_H H_C \circ {}_C L_L}.$$

Para ver que es suma directa supongamos

$$\sum_{[(C_i,\varphi_i)]} \lambda_i \overline{_H H_{C_i} \circ {}_{C_i} L_L} = 0,$$

es decir $\sum_i \lambda_i {}_H H_{C_i} \circ {}_{C_i} L_L \in A'(H,\, L)$. Cada sumando es un biconjunto transitivo, así que, como hemos visto anteriormente, esto implica que cada uno de ellos está en $A'(H,\, L)$, es decir $\overline{_H H_{C_i} \circ {}_{C_i} L_L} = 0$ para toda i. □

Proposición 2.1.14. *Sea $H \in \mathcal{Z}$. Para los funtores definidos anteriormente*

$$G : Mac_{R,\,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}} \to ROut(H) - Mod \quad y \quad F : ROut(H) - Mod \to Mac_{R,\,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}},$$

tenemos que G es adjunto izquierdo de F.

Prueba. Sean M un funtor de Mackey y V un $ROut(H)$-módulo, tenemos que probar la existencia de una biyección

$$\alpha : Hom_{Mac_{R,\,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}}(M,\ F(V)) \longrightarrow Hom_{ROut(H)}(G(M),\ V)$$

natural en V y M. Utilizaremos la abreviatura $Hom_{\mathcal{Z}}(M,\ F_{H,V})$ para las flechas entre M y $F_{H,V}$ y seguimos usando la de arriba para los morfismo de $ROut(H)$-módulos. Definimos

$$\alpha : Hom_{\mathcal{Z}}(M,\ F_{H,V}) \longrightarrow (\overline{M(H)},\ V),$$

para $f : M \to F_{H,V}$ una transformación natural, como

$$\alpha(f) : \overline{M(H)} \to V, \text{ tal que } \ \alpha(f)(\overline{a}) = f_H(a)(\overline{_H H_H})$$

para $\overline{a} \in \overline{M(H)}$, donde $f_H : M(H) \to F_{H,V}(H)$.

Probemos que $\alpha(f)$ está bien definida. Tenemos $F_{H,V}(H) = (\overline{A}(H,\, H),\, V)$, luego por el Lema 2.1.10 esto es isomorfo a V y como sabemos, el isomorfismo está dado por enviar $t : \overline{A}(H,\, H) \to V$ en $t(\overline{_H H_H})$ así que la composición con f_H

$$M(H) \longrightarrow F_{H,V}(H) \longrightarrow V$$

manda $a \in M(H)$ en $f_H(a)(\overline{_H H_H}) \in V$, observemos que anula a $M'(H)$.

Supongamos $a = M({}_H H_K)(c)$ para algún $c \in M(K)$ con K subgrupo propio de H, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M(K) \arrow[r, "M({}_HH_K)"] \arrow[d, "f_K"'] & M(H) \arrow[d, "f_H"] \\
F_{H,V}(K) \arrow[r, "F_{H,V}({}_HH_K)"] & F_{H,V}(H)
\end{tikzcd}$$

pero por el Lema 2.1.11, $\overline{A}(H, K) = 0$, luego $F_{H,V}(K) = 0$, así que $f_H(a) = 0$. Para el caso $a = M({}_HJ_J)(c)$, donde existe $\beta : H \twoheadrightarrow J$ con $0 \neq Ker\beta \in \mathcal{X}$, la prueba es análoga. Obtenemos así que $\alpha(f)$ está bien definida.

Ahora veamos que $\alpha(f)$ es un morfismo de $ROut(H)$-módulos. Sean $\overline{x} \in Out(H)$ y $\overline{a} \in \overline{M(H)}$, entonces

$$\overline{x} \cdot \overline{a} = \overline{x \cdot a} = \overline{M({}_HH_{^xH})(a)}$$

luego

$$\alpha(f)(\overline{x} \cdot \overline{a}) = f_H(M({}_HH_{^xH})(a))(\overline{{}_HH_H})$$

pero tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M(H) \arrow[r, "M({}_HH_{^xH})"] \arrow[d, "f_H"'] & M(H) \arrow[d, "f_H"] \\
F_{H,V}(H) \arrow[r, "F_{H,V}({}_HH_{^xH})"] & F_{H,V}(H)
\end{tikzcd}$$

así que

$$f_H(M({}_HH_{^xH})(a)) = F_{H,V}({}_HH_{^xH})(f_H(a))$$

y este último es $\overline{x} \cdot f_H(a)$ en $F_{H,V}(H)$. Ahora, el isomorfismo entre $F_{H,V}(H)$ y V es de $ROut(H)$-módulos, luego

$$(\overline{x} \cdot f_H(a))(\overline{{}_HH_H}) = \overline{x} \cdot (f_H(a)(\overline{{}_HH_H}))$$

así que

$$\alpha(f)(\overline{x} \cdot \overline{a}) = \overline{x} \cdot (f_H(a)(\overline{{}_HH_H})) = \overline{x} \cdot \alpha(f)(\overline{a}).$$

Por lo tanto, α está bien definida.

Ahora definiremos una función inversa

$$\beta : (\overline{M(H)}, V) \longrightarrow Hom_{\mathcal{Z}}(M, F_{H,V}).$$

Sea $h : \overline{M(H)} \to V$ un morfismo de $ROut(H)$-módulos y tomemos L un grupo en $\mathcal{Z}$, definimos $\beta(h)_L : M(L) \to (\overline{A}(H, L), V)$ para $b \in M(L)$ como

$$\beta(h)_L(b) : \overline{A}(H, L) \to V \quad \text{tal que} \quad \overline{{}_HX_L} \mapsto h(\overline{M({}_HX_L)(b)}).$$

Afirmamos que $\beta(h) = \{\beta(h)_L \mid L \in Ob(\Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}})\}$ es una transformación natural. Primero veamos que $\beta(h)_L(b)$ está bien definida. Supongamos ${}_HX_L = {}_HH_K \circ {}_KY_L$ para algún K subgrupo propio de H, entonces

$$M({}_HX_L)(b) = M({}_HH_K)M({}_KY_L)(b)$$

que se encuentra en el primer sumando de $M'(H)$ luego $\overline{M({}_HX_L)(b)} = 0$. El otro caso es análogo. Ahora probemos que $\beta(h)_L$ es de $ROut(H)$-módulos, sea $a \in Aut(H)$, entonces

$$\begin{aligned}
\beta(h)_L(b)(a \cdot {}_HX_L) &= h(\overline{M({}_HH_{^aH} \circ {}_HX_L)(b)}) \\
&= h(\overline{M({}_HH_{^aH})M({}_HY_L)(b)}) \\
&= h(\overline{a \cdot M({}_HY_L)(b)}) \\
&= a \cdot h(\overline{M({}_HY_L)(b)}) \quad \text{porque } h \text{ es de } ROut(H)\text{-módulos} \\
&= a \cdot \beta(h)_L(b)({}_HY_L).
\end{aligned}$$

Finalmente, veamos que $\beta(h)$ es natural. Sean L y K dos grupos en $\mathcal{Z}$ y ${}_LX_K$ un (L, K)-biconjunto en $\Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}}$, debemos probar la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M(K) \arrow[r, "\beta(h)_K"] \arrow[d, "M({}_LX_K)"'] & (\overline{A}(H, K), V) \arrow[d, "F_{H,V}({}_LX_K)"] \\
M(L) \arrow[r, "\beta(h)_L"] & (\overline{A}(H, L), V).
\end{tikzcd}$$

Sea $a \in M(K)$, veamos que $\beta(h)_L(M({}_LX_K)(a))$ y $F_{H,V}({}_LX_K)(\beta(h)_K(a))$ definen la misma función, Sea $\overline{{}_HY_L}$ la clase de un biconjunto en $\overline{A}(H, L)$ tenemos

$$\beta(h)_L(M({}_LX_K)(a))(\overline{{}_HY_L}) = h(\overline{M({}_HY_L)M({}_LX_K)(a)})$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
F_{H,V}({}_LX_K)(\beta(h)_K(a)) &= \beta(h)_K(a)(\overline{{}_HY_L \circ {}_LX_K}) \\
&= h(\overline{M({}_HY_L \circ {}_LX_K)(a)}).
\end{aligned}$$

Ahora veamos que β y α son inversas. Sea $h : \overline{M(H)} \to V$ un morfismo de $ROut(H)$-módulos y $\overline{a} \in \overline{M(H)}$ tenemos

$$\alpha(\beta(h))(\overline{a}) = \beta(h)_H(a)(\overline{{}_HH_H}) = h(\overline{M({}_HH_H)(a)}) = h(\overline{a}).$$

Por otro lado, si $f : M \to F_{H,V}$ es una transformación natural y L es un grupo en $\Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}}$, veamos que $\beta(\alpha(f))_L$ es igual a f_L; para esto tomemos $a \in M(L)$ y $\overline{{}_HX_L} \in \overline{A}(H, L)$, entonces

$$\begin{aligned}
\beta(\alpha(f))_L(a)(\overline{{}_HX_L}) &= \alpha(f)(\overline{M({}_HX_L)(a)}) \\
&= f_H(M({}_HX_L)(a))(\overline{{}_HH_H}) \\
&= (F_{H,V}({}_HX_L)f_L(a))(\overline{{}_HH_H}) \quad \text{porque } f \text{ es transformación natural} \\
&= f_L(a)(\overline{{}_HH_H \circ {}_HX_L}) = f_L(a)(\overline{{}_HX_L}).
\end{aligned}$$

Para terminar debemos probar que esta biyección es natural en M y en V.

Sean M, N funtores de Mackey y $f : M \to N$ una transformación natural, recordemos que $G(f) = \overline{f_H} : \overline{M(H)} \to \overline{N(H)}$, tenemos que probar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{Z}}(N,\, F_{H,V}) \arrow[r, "\alpha_N"] \arrow[d, "f^*"'] & (\overline{N(H)},\, V) \arrow[d, "\overline{f_H}^*"] \\
Hom_{\mathcal{Z}}(M,\, F_{H,V}) \arrow[r, "\alpha_M"] & (\overline{M(H)},\, V).
\end{tikzcd}$$

Sean $a \in (N,\, F_{H,V})$ y $\overline{m} \in \overline{M(H)}$ tenemos

$$\alpha_N(a)\overline{f_H} : \overline{M(H)} \to \overline{N(H)} \to V \quad \text{tal que} \quad \overline{m} \mapsto \overline{f_H(m)} \mapsto a_H(f_H(m))(\overline{{}_HH_H}),$$

por otro lado $\alpha_M(af)$ manda $\overline{m}$ en $(af)_H(m)(\overline{{}_HH_H})$, pero $(af)_H(m) = a_H f_H(m)$.

La prueba de la naturalidad en V es análoga. □

Continuando con H un grupo fijo, consideremos ahora el funtor

$$E : Mac_{R,\,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}} \longrightarrow A_R^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}(H,\, H) - Mod \qquad M \longmapsto M(H).$$

E tiene un adjunto izquierdo

$$L : A_R^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}(H,\, H) - Mod \longrightarrow Mac_{R,\,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}} \qquad V \longmapsto L_{H,V}$$

donde $L_{H,V}(G) = A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(G,\, H) \otimes_H V$ y $\otimes_H$ es el producto tensorial sobre $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(H,\, H)$. En flechas se define de manera obvia.

El Lema 1 en Bouc [7] dice que dados H un grupo y V un $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(H,\, H)$-módulo simple, $L_{H,V}$ tiene un único cociente simple, denotado por $S_{H,V}$. De hecho, este cociente satisface $S_{H,V}(H) = V$ y para cualquier grupo G es igual a $L_{H,V}(G)/J_{H,V}(G)$ donde

$$J_{H,V}(G) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes n_i \in L_{H,V}(G) \mid \sum_{i=1}^{n} (\psi \circ \varphi_i) \cdot n_i = 0 \ \forall \psi \in A_R(H,\, G) \Big\}.$$

Observación 2.1.15. Sean S un funtor de Mackey simple y H un grupo tal que $S(H) \neq 0$. Si $V = S(H)$, entonces S es isomorfo a $S_{H,V}$ ya que

$$Hom_{\mathcal{Z}}(L_{H,V},\, S) \cong Hom_H(V,\, V).$$

Además, si H es minimal para S, entonces $S \cong S_{H,V}$ es un subfuntor simple de $F_{H,V}$. Esto gracias a que V es un $ROut(H)$-módulo simple y $\overline{S(H)} = S(H)$, luego

$$Hom_{\mathcal{Z}}(S_{H,V},\, F_{H,V}) \cong (V,\, V).$$

Veamos que $S_{H,V}$ es precisamente el soclo de $F_{H,V}$.

Definición 2.1.16. Sean $M \in Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ y $X(H)$ un subconjunto de $M(H)$ para cada $H \in \mathcal{Z}$. El subfuntor de M generado por X es la intersección de todos los subfuntores F de M tales que $X(H) \subseteq F(H)$. Lo denotaremos por $< X >$.

Lema 2.1.17. *Sean H un grupo en $\mathcal{Z}$ y V un $ROut(H)$-módulo simple. El subfuntor de $F_{H,V}$ generado por V es isomorfo a $S_{H,V}$.*

Prueba. Sea $0 \neq N \leqslant F_{H,V}$ subfuntor, entonces

$$0 \neq Hom_{\mathcal{Z}}(N,\, F_{H,V}) \cong (\overline{N(H)},\, V).$$

Luego, existe $\alpha : \overline{N(H)} \to V$ un morfismo de $ROut(H)$-módulos distinto de 0. Como V es simple, entonces α es suprayectiva, por lo tanto $N(H) \neq 0$, pero $N(H) \subseteq F_{H,V}(H) = V$. Así que $N(H) = V$.

Por lo tanto $< V > \leqslant N$, así que $< V >$ es simple e isomorfo a $S_{H,V}$. □

Si H_1 y H_2 son dos grupos, V es un $ROut(H_2)$-módulo y $\varphi : H_1 \to H_2$ es un isomorfismo, denotamos por ${}^{\varphi}V$ al $ROut(H_1)$-módulo que tiene por conjunto subyacente el de V y la multiplicación por $\overline{\alpha} \in Out(H_1)$ se define a través del isomorfismo entre $Out(H_1)$ y $Out(H_2)$, es decir

$$\overline{\alpha} \cdot m = (\overline{\varphi\alpha\varphi^{-1}}) \cdot m$$

para todo $m \in V$.

Proposición 2.1.18. *Sean S_1 y S_2 dos funtores de Mackey simples, H_1 y H_2 grupos minimales para S_1 y S_2 respectivamente, $V_1 = S_1(H_1)$ y $V_2 = S_2(H_2)$. Entonces, $S_1 \cong S_2$, si y sólo si existe un isomorfismo φ entre H_1 y H_2 tal que $V_1 \cong {}^{\varphi}V_2$.*

Prueba. Supongamos $S_1 \cong S_2$. Tenemos que H_i es un grupo de orden mínimo tal que $S_i(H_i) \neq 0$ para $i = 1, 2$ pero por otro lado, $S_1(H_1) \cong S_2(H_1)$ y $S_1(H_2) \cong S_2(H_2)$. Luego, $| H_1 | = | H_2 |$, pero los grupos minimales son únicos hasta isomorfismo, entonces tenemos $H_1 \cong H_2$ bajo algún isomorfismo $\varphi : H_1 \to H_2$, luego $V_1 \cong {}^{\varphi}V_2$.

Ahora supongamos que existe un isomorfismo $\varphi : H_1 \to H_2$ tal que $V_1 \cong {}^{\varphi}V_2$. Dado que V_1 y ${}^{\varphi}V_2$ son isomorfos como $ROut(H_1)$, entonces

$$(\overline{A}(H_1,\, L),\, V_1) \cong (\overline{A}(H_1,\, L),\, {}^{\varphi}V_2),$$

para todo grupo L en $\mathcal{Z}$ y es un isomorfismo natural, es decir $F_{H_1,\, V_1} \cong F_{H_1,\, {}^{\varphi}V_2}$. Veamos ahora que $F_{H_1,\, {}^{\varphi}V_2} \cong F_{H_2,\, V_2}$. Sea $L \in \mathcal{Z}$, definimos

$$\mu_L : (\overline{A}(H_1,\, L),\, {}^{\varphi}V_2) \longrightarrow (\overline{A}(H_2,\, L),\, V_2),$$

si $f \in (\overline{A}(H_1,\, L),\, {}^{\varphi}V_2)$, entonces definimos $\mu_L(f) : \overline{A}(H_2,\, L) \to V_2$ en la clase de un $(H_2,\, L)$-biconjunto $\overline{{}_{H_2}X_L}$ y extendemos linealmente

$$\mu_L(f)(\overline{{}_{H_2}X_L}) = f(\overline{{}_{H_1}H_{1_{\varphi^{-1}}}{}_{H_2} \circ {}_{H_2}X_L}).$$

Como φ es un isomorfismo, no es difícil ver que $\mu_L(f)$ está bien definida.

Ahora veamos que es de $ROut(H_2)$-módulos, sea $\overline{\alpha} \in Out(H_2)$ la clase de un automorfismo α, tenemos

$$\mu_L(f)(\overline{\alpha} \cdot \overline{{}_{H_2}X_L}) = f(\overline{{}_{H_1}H_{1_{\varphi^{-1}}}{}_{H_2} \circ {}_{H_2}H_{2_{\alpha}}{}_{H_2} \circ {}_{H_2}X_L})$$

por otro lado ${}_{H_2}H_{2_{\varphi}}{}_{H_1} \circ {}_{H_1}H_{1_{\varphi^{-1}}}{}_{H_2}$ es isomorfo a ${}_{H_2}H_{2}{}_{H_2}$, así que la igualdad de arriba es igual a

$$f(\overline{{}_{H_1}H_{1_{\varphi^{-1}}}{}_{H_2} \circ {}_{H_2}H_{2_{\alpha}}{}_{H_2} \circ ({}_{H_2}H_{2_{\varphi}}{}_{H_1} \circ {}_{H_1}H_{1_{\varphi^{-1}}}{}_{H_2}) \circ {}_{H_2}X_L})$$

luego

$$\begin{aligned}
\mu_L(f)(\overline{\alpha} \cdot \overline{{}_{H_2}X_L}) &= f(\overline{\varphi^{-1}\alpha\varphi} \cdot \overline{{}_{H_1}H_{1_{\varphi^{-1}}}{}_{H_2} \circ {}_{H_2}X_L}) \\
&= \overline{\varphi^{-1}\alpha\varphi} \cdot f(\overline{{}_{H_1}H_{1_{\varphi^{-1}}}{}_{H_2} \circ {}_{H_2}X_L}) \quad f \text{ es de } ROut(H_1)\text{-módulos} \\
&= \overline{\alpha} f(\overline{{}_{H_1}H_{1_{\varphi^{-1}}}{}_{H_2} \circ {}_{H_2}X_L}) \\
&= \overline{\alpha}\mu_L(f)(\overline{{}_{H_2}X_L}).
\end{aligned}$$

Definimos $\mu = \{\mu_L \mid L \in Ob(\Omega_{R,\,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}})\}$ y afirmamos que es una transformación natural. Sean K y L grupos en $\mathcal{Z}$, ${}_K X_L$ un $(K,\, L)$-biconjunto y $f \in (\overline{A}(H_1,\, L),\, {}^{\varphi}V_2)$, tenemos que probar la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\overline{A}(H_1,\, L),\, {}^{\varphi}V_2) \arrow[r, "\mu_L"] \arrow[d, "F_{H_1,\, {}^{\varphi}V_2}({}_K X_L)"'] & (\overline{A}(H_2,\, L),\, V_2) \arrow[d, "F_{H_2,\, V_2}({}_K X_L)"] \\
(\overline{A}(H_1,\, K),\, {}^{\varphi}V_2) \arrow[r, "\mu_K"] & (\overline{A}(H_2,\, K),\, V_2).
\end{tikzcd}$$

Tomamos $\overline{{}_{H_2}Y_K} \in \overline{A}(H_2,\, K)$, por definición de $F_{H_1,\,{}^{\varphi}V_2}$ tenemos

$$\mu_K(F_{H_1,\,{}^{\varphi}V_2}({}_KX_L)(f))(\overline{{}_{H_2}Y_K}) = f(\overline{{}_{H_1}H_1{}_{\varphi^{-1}}{}_{H_2} \circ {}_{H_2}Y_K \circ {}_KX_L}),$$

que es precisamente $F_{H_2,\,V_2}({}_KX_L)(\mu_L(f))(\overline{{}_{H_2}Y_K})$.

Finalmente, es claro que cada μ_L es biyectiva y por lo tanto tenemos $F_{H_1,\,V_1} \cong F_{H_2,\,V_2}$, así que sus soclos son isomorfos, de donde obtenemos el resultado. □

2.2. Descripción

En esta sección supondremos que $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{W}$ son clases de grupos cerradas bajo subcocientes de tal forma que $\mathcal{W}$ sea subclase de $\mathcal{Z}$.

Lema 2.2.1. *Sean $M \in Mac^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}_{R,\,\mathcal{Z}}$ y $N \in Mac^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}_{R,\,\mathcal{W}}$ tal que N es subfuntor de $M|_{\mathcal{W}}$, entonces el funtor en $Mac^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}_{R,\,\mathcal{Z}}$ generado por N es*

$$< N > (H) = \sum_{\substack{\alpha: A \twoheadrightarrow B,\, A \leqslant H \\ Ker\alpha \in \mathcal{X},\, B \in \mathcal{W}}} M({}_HH_A \circ {}_{A^{\alpha}}B_B)N(B)$$

para H un grupo en $\mathcal{Z}$.

Prueba. Veamos que T definido por

$$T(H) = \sum_{\substack{\alpha: A \twoheadrightarrow B,\, A \leqslant H \\ Ker\alpha \in \mathcal{X},\, B \in \mathcal{W}}} M({}_HH_A \circ {}_{A^{\alpha}}B_B)N(B)$$

para H en $\mathcal{Z}$, es un subfuntor de M.

Si H es un grupo en $\mathcal{Z}$, claramente $T(H) \subseteq M(H)$.

Ahora sean H y L dos grupos en $\mathcal{Z}$ y $X \in A^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}_R(H,\, L)$. Dado a en $T(L)$ debemos demostrar que $M(X)a$ está en $T(H)$. Ahora, $a = M({}_LL_E \circ {}_{E^{\alpha}}F_F)m$ con $m \in N(F)$ para algún $E \leqslant L$ y $\alpha : E \to F$ suprayectiva con $F \in \mathcal{W}$ y $Ker\alpha \in \mathcal{X}$, así que si suponemos X transitivo, entonces

$$X \cong {}_HH_A \circ {}_AB_B \circ {}_BB_C \circ {}_CL_L,$$

por lo que $M(X)a$ es igual a

$$M({}_HH_A \circ {}_AB_B \circ {}_BB_C \circ {}_CL_L \circ {}_LL_E \circ {}_{E^{\alpha}}F_F)m.$$

Iremos obteniendo el resultado para cada uno de los términos en la descomposición de Bouc de X. Para ${}_CL_L$, usando la fórmula de Mackey en ${}_CL_L \circ {}_LL_E$, obtenemos

$$M({}_CL_L \circ {}_LL_E \circ {}_{E^{\alpha}}F_F)m = \sum_{g \in [\frac{C}{L}|E]} M({}_CC_{C\cap {}^gE} \circ {}_{C\cap {}^gE}{}^gE_E \circ {}_EF_F)m,$$

demostraremos que cada sumando es isomorfo a $M({}_CC_D \circ {}_{D^\beta}Q_Q)n$, donde $Q \in \mathcal{W}$, $n \in N(Q)$, $D \leqslant C$ y existe $\beta : D \to Q$ suprayectivo con $Ker\beta \in \mathcal{X}$, con esto obtendremos que cada sumando está en $T(C)$. Basta tomar $D = C \cap {}^gE$ y $Q = \alpha(D^g)$, ya que entonces $Q \leqslant F$, así que $Q \in \mathcal{W}$. Además el núcleo del morfismo suprayectivo $\beta = \alpha c_g : D \to Q$ es $Ker\alpha^g \cap D$, que es isomorfo a un subgrupo de $Ker\alpha$ y, por lo tanto, está en $\mathcal{X}$. Por otro lado

$$ {}_{C\cap^g E}Q_Q \circ {}_QF_F \cong {}_{C\cap^g E}{}^gE_E \circ {}_EF_F $$

por medio del morfismo que manda $[q,\, f]$ en $[1, qf]$, luego, si $n = M({}_QQ_F)m$, entonces cada sumando es de la forma deseada.

Ahora consideremos ${}_BB_C$ para el cual existe $\pi : C \to B$ con π suprayectivo y $Ker\pi \in \mathcal{Y}$, demostraremos

$$ M({}_BB_{{}^\pi C} \circ {}_CC_D \circ {}_{D^\beta}Q_Q)n \cong M({}_BB_R \circ {}_{R^\rho}P_P)l $$

para algún $l \in N(P)$, $P \in \mathcal{W}$, $R \leqslant B$ y $\rho : R \twoheadrightarrow P$ con $Ker\rho \in \mathcal{X}$. Tomamos $R = \pi(D)$ y $P = \beta(D)/\beta(D \cap C_1)$ donde C_1 es el núcleo de π. Observemos que P es isomorfo a

$$ \frac{D/Ker\beta}{((D \cap C_1)Ker\beta)/Ker\beta} \cong \frac{D/D \cap C_1}{((D \cap C_1)Ker\beta)/D \cap C_1} $$

por lo que P es un cociente tanto de Q como de R. Como cociente de Q, el núcleo es $(D \cap C_1)/(Ker\beta \cap C_1)$ que, por ser cociente de un subgrupo de C_1, está en $\mathcal{Y}$ y por lo tanto P está en $\mathcal{W}$. Como cociente de R, el núcleo es $Ker\beta/(Ker\beta \cap C_1)$ que es cociente de $Ker\beta$, así que está en $\mathcal{X}$. Además, observemos que ${}_BB_C \circ {}_CC_D \cong {}_BB_D$ y

$$ {}_BB_D \circ {}_DQ_Q \cong {}_BB_R \circ {}_RP_P \circ {}_PP_Q $$

por medio del morfismo que manda $[b,\, q]$ en $[b,\, 1,\, \mu(q)]$, donde μ es el paso al cociente de Q a P. Por lo que si $l = M({}_PP_Q)n$ y ρ es el paso al cociente de R a P, obtenemos el resultado.

Continuamos con ${}_AB_B$ con $\varphi : A \to B$ suprayectivo y $Ker\varphi \in \mathcal{X}$. Como $R \leqslant B$, entonces se corresponde con un subgrupo $A_1 \trianglelefteq L \leqslant A$ donde A_1 es el núcleo de φ, igualmente $Ker\rho$ se corresponde con $A_1 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq L$. Tomaremos $L \leqslant A$, observemos que $L/H_1 \cong P$ y como H_1 es una extensión de $Ker\rho$, entonces H_1 está en $\mathcal{X}$. Ahora ${}_AB_B \circ {}_BB_R \cong {}_AB_R$ y

$$ {}_AA_L \circ {}_LP_P \cong {}_AB_R \circ {}_RP_P $$

bajo el morfismo que manda $[a,\, p]$ en $[\varphi(a),\, p]$, así obtenemos la forma deseada.

Finalmente tomemos ${}_HH_A$ para $A \leqslant H$, este caso es el más sencillo, ya que L es subgrupo de H y ${}_HH_A \circ {}_AA_L \cong {}_HH_L$, por lo que podemos tomar ${}_HH_L \circ {}_LP_P$. Así obtenemos que $M(X)a$ está en $T(H)$.

Ahora, si $H \in \mathcal{W}$, entonces $N(H)$ es un sumando de $T(H)$, tomando $A = H = B$, así que tenemos $< N > \leqslant T$. Por otro lado para $H \in \mathcal{W}$ tenemos $T(H) \subseteq < N > (H)$ ya que para cualquier $\alpha : A \to B$ con $B \in \mathcal{W}$ y $Ker\alpha \in \mathcal{X}$ tenemos

$$ M({}_HH_A \circ {}_{A^\alpha}B_B) < N > (B) \subseteq < N > (H) $$

pero si $B \in \mathcal{W}$, entonces $N(B) =< N > (B)$. Luego $T =< N >$. □

Corolario 2.2.2. *Sean $\mathcal{W}$ y $\mathcal{Z}$ como en el lema anterior. Si $S \in Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ es simple, entonces $S|_{\mathcal{W}} = 0$ ó $S|_{\mathcal{W}}$ es simple.*

Prueba. Si $S|_{\mathcal{W}} \neq 0$, entonces para cualquier $N \neq 0$ subfuntor de $S|_{\mathcal{W}}$, tenemos $0 \neq < N > \leqslant S$, entonces $< N >= S$. Así que $S|_{\mathcal{W}} =< N > |_{\mathcal{W}} = N$. □

Recordemos del Lema 2.1.13 que para H y L grupos, definimos

$$\mathcal{U} = \{(C, \varphi) \mid C \leqslant L \text{ y } \varphi : C \twoheadrightarrow H \text{ t. q. } Ker\varphi \in \mathcal{Y}\}.$$

y $H \times L$ actúa en $\mathcal{U}$ bajo

$$(h, l) \cdot (C, \varphi) = ({}^{l}C, c_h \varphi c_l^{-1}).$$

Además, si $\mathcal{W} := \mathcal{U}/\sim$ es el conjunto de órbitas de $\mathcal{U}$ bajo esta acción, entonces $Out(H)$ actúa en él. Sean $[C, \varphi] \in \mathcal{W}$ la órbita de (C, φ) y $\beta \in Aut(H)$, entonces $[C, \beta\varphi]$ define una acción de $Aut(H)$ en $\mathcal{W}$, ya que si $({}^{l}C, c_h \varphi c_l^{-1})$ es otro representante de la órbita, entonces $\beta c_h \varphi c_l^{-1} = c_{\beta(h)} \beta \varphi c_l^{-1}$, así que

$$[C, \beta\varphi] = [{}^{l}C, \beta c_h \varphi c_l^{-1}].$$

Ahora, si $\alpha \in Inn(H)$ entonces (C, φ) y $(C, \alpha\varphi)$ pertenecen a la misma órbita en $\mathcal{U}$, por lo que tenemos una acción de $Out(H)$ en $\mathcal{W}$.

Continuamos trabajando con $\mathcal{Z}$ familia de grupos cerrada bajo subgrupos y cocientes y para un grupo $H \in \mathcal{Z}$ tomamos $\mathcal{W}$ la clase de grupos isomorfos a subgrupos o cocientes de H, que es una subclase de $\mathcal{Z}$. Observemos que, si V es un $ROut(H)$-módulo simple, entonces por el Teorema 2.1.4 $S_{H,V}|_{\mathcal{W}}(K) = 0$ para todo $K \in \mathcal{W}$ no isomorfo a H, donde $S_{H,V}$ como subfuntor de $F_{H,V}$ está definido en todo $\mathcal{Z}$.

Proposición 2.2.3. *Sean $H \in \mathcal{Z}$ y V un $ROut(H)$-módulo simple, entonces para cualquier grupo $L \in \mathcal{Z}$*

i)

$$F_{H,V}(L) \cong \bigoplus_{[[C,\varphi]] \in \mathcal{W}/\sim} V^{S_{[C,\varphi]}}$$

donde $\mathcal{W}/\sim$ son las órbitas de $\mathcal{W}$ bajo la acción de $Out(H)$ y

$$S_{[C,\varphi]} = Stab_{Out(H)}([C, \varphi]) = \{\overline{\sigma} \in Out(H) \mid \overline{\sigma}[C, \varphi] = [C, \varphi]\}.$$

ii)

$$S_{H,V}(L) = \sum_{\substack{\beta:A\twoheadrightarrow H,\, A\leqslant L\\ Ker\beta\in\mathcal{X}}} F_{H,V}({}_LL_A \circ {}_{A^\beta}H_H)V.$$

y para v en V, $F_{H,V}({}_LL_A \circ {}_{A^\beta}H_H)v$ se puede escribir en términos de $i)$ de la siguiente forma: Si para $x \in [C \setminus L/A]$, definimos $\varphi_x = \varphi|_{C\cap^x A}$ y $\beta_x = \beta|_{C^x\cap A}$, entonces

$$F_{H,V}({}_LL_A \circ {}_{A^\beta}H_H)v = \sum_{[[C,\varphi]]\in\mathcal{W}/\sim} f_{\beta,\,\varphi}(v) \quad con \quad f_{\beta,\,\varphi}(v) = \sum_{x\in T(\varphi,\,\beta)} \bar{t}_{x,\,\varphi,\,\beta}\cdot v$$

donde

$$T(\varphi,\,\beta) = \{x \in [C \setminus L/A] \mid \varphi_x\ \beta_x \text{ son epimorfismos y } Ker\varphi_x = {}^xKer\beta_x\}$$

y $t_{x,\,\varphi,\,\beta} : H \to H$, $t_{x,\,\varphi,\,\beta}(h) = \varphi({}^xa)$ para a alguna preimagen de h bajo β.

Prueba. Para $i)$ tenemos, por el Lema 2.1.13

$$\overline{A}(H,\,L) = \bigoplus_{[[(C,\varphi)]]\in\mathcal{W}/\sim}\Big(\sum_{\overline{\alpha}\in[\frac{Out(H)}{S_{[C,\,\varphi]}}]} R\overline{{}_HH_{\alpha\varphi C}\circ {}_CL_L}\Big),$$

descomponiendo en las órbitas de $U/\sim$ bajo $Out(H)$.

Ahora

$$\overline{{}_HH_{\alpha\varphi C}\circ {}_CL_L} = \overline{\alpha}\cdot\overline{{}_HH_{\varphi C}\circ {}_CL_L}$$

y $R\overline{{}_HH_{\varphi C}\circ {}_CL_L}$ es un $RS_{[C,\,\varphi]}$-módulo isomorfo a R, así que

$$\overline{A}(H,\,L) \cong \bigoplus_{[[(C,\varphi)]]\in\mathcal{W}/\sim} R\uparrow_{S_{[C,\,\varphi]}}^{Out(H)}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} Hom_{ROut(H)}(R\uparrow_{S_{[C,\,\varphi]}}^{Out(H)},\,V) &\cong Hom_{RS_{[C,\,\varphi]}}(R, V\downarrow_{S_{[C,\,\varphi]}}^{Out(H)}) \\ &\cong Hom_R(R,\,V\downarrow_{S_{[C,\,\varphi]}}^{Out(H)})^{S_{[C,\,\varphi]}} \end{aligned}$$

y este último es isomorfo a $V^{S_{[C,\,\varphi]}}$.

Para $ii)$, por el Lema 2.2.1, tenemos

$$S_{H,V}(L) = \sum_{\substack{\beta:A\twoheadrightarrow K,\, A\leqslant L\\ K\in\mathcal{W},\, Ker\beta\in\mathcal{X}}} F_{H,V}({}_LL_A \circ {}_{A^\beta}K_K)S_{H,V}(K),$$

pero $S_{H,V}(K)=0$ si $K\not\cong H$. Ahora, si $v\in V$, entonces $F_{H,V}({}_LL_A\circ{}_{A^\beta}H_H)v$ es una función en $S_{H,V}(L)\subseteq(\overline{A}(H,L),V)$ que en un básico $\overline{{}_HH_{\varphi C}\circ{}_CL_L}$ con $[C,\varphi]\in\mathcal{U}$ está dada por

$$\overline{{}_HH_{\varphi C}\circ{}_CL_L\circ{}_LL_A\circ{}_{A^\beta}H_H}\cdot v,$$

utilizando la fórmula de Mackey obtenemos ${}_HH_{\varphi C}\circ{}_CL_L\circ{}_LL_A\circ{}_{A^\beta}H_H$ igual a

$$\sum_{x\in[\frac{L}{C}|A]}{}_HH_{\varphi C}\circ{}_CC_{C\cap{}^xA}\circ{}_{C\cap{}^xA}{}^xA_A\circ{}_{A^\beta}H_H.$$

Cada sumando es transitivo y si $D=Stab_{H\times H}([1,1,1,1])$, entonces

$$\begin{aligned}D&=\{(a,b)\in H\times H\mid(a,1,1,b^{-1})=(1\cdot c,c^{-1}\cdot1\cdot d,d^{-1}\cdot1\cdot f,f^{-1}\cdot1)\}\\&=\{(a,b)\in H\times H\mid(a,1,1,b^{-1})=(\varphi(c),c^{-1}d,d^{-1}({}^xf),\beta(f)^{-1})\}\\&=\{(\varphi(c),\beta(c^x))\in H\times H\mid c\in C\cap{}^xA\}\end{aligned}$$

y por el Lema 1.7 tenemos

$$\frac{H\times H}{D}={}_HH_{A'}\circ{}_{A'}B_B\circ{}_BB_{C'}\circ{}_{C'}H_H$$

donde $A'=\varphi(C\cap{}^xA)$, $C'=\beta(C^x\cap A)$ y B es isomorfo a

$$\frac{\varphi(C\cap{}^xA)}{\varphi(C\cap{}^xKer\beta)}\cong\frac{\beta(C^x\cap A)}{\beta(Ker\varphi^x\cap A)}.$$

Para que algún sumando tenga clase distinta de 0 en $\overline{A}(H,H)$, es decir, no esté en $A'(H,H)$, necesitamos $A'=H$, por lo que la descomposición de Bouc queda ${}_HB_B\circ{}_BB_{C'}\circ{}_{C'}H_H$. Nuevamente debemos tener $B\cong H$, obteniendo ${}_HH_{C'}\circ{}_{C'}H_H$ por lo que $H=C'$, sin embargo, el resultado final no es necesariamente la identidad, observemos cual fue el automorfismo que obtuvimos; como x debe satisfacer $H=\varphi(C\cap{}^xA)$ y $H=\beta(C^x\cap A)$, entonces tenemos los isomorfismos usuales de H en $(C\cap{}^xA)/(C\cap{}^xA\cap Ker\varphi)$ y de H en $(C^x\cap A)/(C^x\cap A\cap Ker\beta)$. Por otro lado, $B\cong H$, así que $\varphi(C\cap{}^xKer\beta)=1=\beta(Ker\varphi^x\cap A)$, por lo que

$${}^x(C^x\cap Ker\beta)=Ker\varphi\cap{}^xKer\beta={}^xA\cap Ker\varphi,$$

así que el automorfismo de H es

$$H\longrightarrow\frac{C\cap{}^xA}{Ker\varphi\cap{}^xKer\beta}\longrightarrow\frac{C^x\cap A}{Ker\varphi^x\cap Ker\beta}\longrightarrow H$$

$$h\longmapsto c(Ker\varphi\cap{}^xKer\beta)\longmapsto c^x(Ker\varphi^x\cap Ker\beta)\longmapsto\beta(c^x)$$

para c alguna preimagen de h bajo φ.

Es decir

$$\overline{{}_H H_{\varphi C} \circ {}_C L_L} \longmapsto \sum_{x \in T(\varphi,\, \beta)} \overline{{}_H {}^{t^{-1}_{x,\,\varphi,\,\beta}} H_H} \cdot v = \sum_{x \in T(\varphi,\, \beta)} \bar{t}_{x,\,\varphi,\,\beta} \cdot v.$$

Para terminar la prueba, siguiendo los isomorfismo de i), observamos que el sumando $f_{\beta,\,\varphi}(v)$ correspondiente a $[[C,\, \varphi]] \in \mathcal{W}/\sim$ es precisamente la imagen de $\overline{{}_H H_{\varphi C} \circ {}_C L_L}$ bajo $F_{H,\,V}({}_L L_A \circ {}_{A^\beta} H_H)v$. $\square$

Con esta proposición podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 2.2.4 (2.6 en Webb [20]). *Sean H, L en $\mathcal{Z}$ y V un $ROut(H)$-módulo simple.*

i) Si $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = 1$, entonces

$$S_{H,\,V}(L) = \bigoplus_{\substack{\varphi: C \cong H,\, C \leqslant L \\ C mod.L}} tr_C^{N_L(C)}({}^{\varphi}V),$$

donde $C mod.L$ significa C hasta L-conjugación.

Si $\mathcal{Y} = 1$ y $\mathcal{X}$ es la clase de todos los grupos finitos:

ii)

$$F_{H,\,V}(L) = \bigoplus_{\substack{\varphi: C \cong H,\, C \leqslant L \\ C mod.L}} ({}^{\varphi}V)^{N_L(C)}$$

iii)

$$S_{H,\,V}(L) = \sum_{\substack{\beta: A \twoheadrightarrow H,\, A \leqslant L \\ \beta \ escindible}} F_{H,\,V}({}_L L_A \circ {}_{A^\beta} H_H) V$$

y $F_{H,\,V}({}_L L_A \circ {}_{A^\beta} H_H)(v)$ en términos de la descomposición en ii) se ve como

$$F_{H,\,V}({}_L L_A \circ {}_{A^\beta} H_H)(v) = \sum_{\substack{\varphi: C \cong H,\, C \leqslant L \\ C mod.L}} f_{\beta,\,\varphi}(v) \quad y \quad f_{\beta,\,\varphi}(v) = \sum_{\substack{x \in [A \backslash T(C,\, A)] \\ Ker\beta \cap C^x = 1}} \overline{\theta_x^{-1}} \cdot v,$$

donde $T(C,\, A) = \{x \in L \mid C^x \subseteq A\}$, y θ_x es la composición

$$H \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{c_x} C^x \hookrightarrow A \xrightarrow{\beta} H.$$

Prueba. i) Tenemos

$$S_{H,V}(L) = \sum_{C \leqslant L,\ \varphi : C \cong H} F_{H,V}({}_L L_C \circ {}_{C^{\varphi}} H_H)V.$$

Observemos primero que $F_{H,V}({}_L L_C \circ {}_{C^{\varphi}} H_H)v$ según la descripción de i) del lema anterior, está contenido en el sumando correspondiente a $[[C, \varphi]]$, es decir en $V^{S_{[C,\varphi]}}$; ya que de la prueba de ii) obtenemos, para otra pareja $A \leqslant L$, $\beta : A \cong H$, que el sumando $f_{\varphi,\beta}(v)$ es distinto de 0 si para algún $x \in T(\varphi, \beta)$ tenemos $C = C \cap A^x$ y $A = A \cap {}^xC$, así que $A = {}^xC$ y

$$[[C, \varphi]] = [[{}^xC, (\beta c_x \varphi^{-1})\varphi c_x^{-1})]] = [[A, \beta]]$$

ya que $\beta c_x \varphi^{-1}$ es un automorfismo de H.

Tomando entonces el sumando correspondiente a $[[C, \varphi]]$, los $x \in [C \setminus L/C]$ que hacen el sumando distinto de 0 son aquellos en $N_L(C)$, así que el conjunto $T(\varphi, \varphi)$ es igual a $[N_L(C)/C]$ y el automorfismo de H, $t_{x,\varphi,\varphi} = \varphi c_x \varphi^{-1}$, es decir

$$F_{H,V}({}_L L_C \circ {}_{C^{\varphi}} H_H)V = tr_C^{N_L(C)}({}^{\varphi}V).$$

Finalmente, si ${}^lC = C_1$ con $l \in L$, podemos tomar $\varphi_1 = \varphi c_l^{-1}$ como isomorfismo de C_1 en H y entonces $F_{H,V}({}_L L_C \circ {}_{C^{\varphi}} H_H)V$ es igual a $F_{H,V}({}_L L_{C_1} \circ {}_{C_1^{\varphi_1}} H_H)V$. Por otro lado, si no son conjugados y ambos son isomorfos a H, entonces por el primer párrafo, están contenidos en sumandos diferentes, lo que prueba que la suma es directa si se hace $C mod.L$.

ii)Como hicimos arriba, si ${}^lC = C_1$ para $l \in L$ y tenemos φ y φ_1 isomorfismos de C y C_1 respectivamente en H, entonces $[[C, \varphi]] = [[C_1, \varphi_1]]$, así que

$$F_{H,V}(L) = \bigoplus_{\substack{\varphi : C \cong H,\, C \leqslant L, \\ C mod.L}} V^{S_{[L,\varphi]}}.$$

Bastará probar entonces $S_{[(L,\varphi)]} = \{\overline{\varphi c_x \varphi^{-1}} \mid x \in N_L(C)\}$.

Dado $x \in N_L(C)$, tenemos $\varphi c_x \varphi^{-1} \varphi = \varphi c_x$ y $[C, \varphi] = [C, \varphi c_x]$, así que $\overline{\varphi c_x \varphi^{-1}} \in S_{[L,\varphi]}$. Por otro lado, si $\overline{\sigma} \in S_{[C,\varphi]}$, entonces $\sigma\varphi = c_h \varphi c_x$ para algunos $h \in H$ y $x \in N_L(C)$, luego $c_h^{-1}\sigma = \varphi c_x \varphi^{-1}$. Así que $\overline{\sigma} = \overline{\varphi c_x \varphi^{-1}}$.

iii) Tenemos

$$S_{H,V}(L) = \sum_{A \leqslant L,\ \beta : A \to H} F_{H,V}({}_L L_A \circ {}_{A^{\beta}} H_H)V.$$

y tomando $F_{H,V}(L)$ como arriba, para $C \leqslant L$, $\varphi : C \cong H$ y $x \in [C \setminus L/A]$, definimos $\varphi_x = \varphi|_{C \cap {}^xA}$ y $\beta_x = \beta|_{C^x \cap A}$, luego $F_{H,V}({}_L L_A \circ {}_{A^{\beta}} H_H)v$ se puede escribir como

$$\sum_{C \leqslant L,\, \varphi : C \cong H} f_{\beta,\,\varphi}(v) \quad \text{con} \quad f_{\beta,\,\varphi}(v) = \sum_{x \in T(\varphi,\beta)} \bar{t}_{x,\varphi,\beta} \cdot v$$

donde

$$T(\varphi,\,\beta) = \{x \in [C \setminus L/A] \mid \varphi_x\ \beta_x \text{ son isomorfismos}\}$$

y $t_{x,\,\varphi,\,\beta} : H \to H$, $t_{x,\,\varphi,\,\beta}(h) = \varphi({}^x a)$ para a alguna preimagen de h bajo β.

Observemos que esta descripción de $T(\varphi,\,\beta)$ se da si $\mathcal{X} = 1$ o $\mathcal{Y} = 1$.

Ahora, si $A \cap C^x$ es isomorfo a H bajo β, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta que se divide

$$1 \longrightarrow Ker\beta \longrightarrow A \longrightarrow A \cap C^x \longrightarrow 1$$

y por lo tanto β se escinde.

Por otro lado, $x \in [C \setminus L/A]$ pertenece a $T(\varphi,\,\beta)$ si y sólo si $C^x \subseteq A$ y $Ker\beta \cap C^x = Ker\beta_x = 1$, además, $C^x \subseteq A$ si sólo si $Cx^{-1}A = x^{-1}A$, por lo que

$$T(\varphi,\,\beta) = \{x \in [A \setminus T(C,\,A)] \mid Ker\beta \cap C^x = 1\}.$$

Finalmente, es claro que $\theta_x^{-1} = t_{x,\,\varphi,\,\beta}$ y con esto obtenemos el resultado. $\square$

Capítulo 3

Teoría de inducción

3.1. Inducción y restricción de funtores de Mackey

En este capítulo supondremos que $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{Z}'$ son dos clases de grupos cerradas bajo subgrupos y cocientes. Los resultados de esta sección son una generalización del Capítulo 1 en Bouc [8].

Si $\mathcal{Z}$ es subclase de $\mathcal{Z}'$ y M es un funtor de Mackey en $\mathcal{Z}'$, podemos hablar de la restricción de M a $\mathcal{Z}$, simplemente restringiendo la evaluación de M a grupos en $\mathcal{Z}$. Fue introducida en el capítulo anterior con la notación $M|_{\mathcal{Z}}$, pero utilizaremos $M\downarrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}}$ para especificar ambas clases.

A continuación definiremos la inducción y la coinducción de funtores de Mackey. Para comenzar, consideraremos la categoría de funtores aditivos contravariantes de $\Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}\times\Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}o}_{R,\mathcal{Z}}$ en $R-mod$, la o superior denota la categoría opuesta. Denotaremos esta categoría por $Fun_R(\mathcal{Z}',\mathcal{Z})$. Para la inducción pediremos que $\mathcal{Z}$ sea subclase de $\mathcal{Z}'$ y el elemento de $Fun_R(\mathcal{Z}',\mathcal{Z})$ que nos será de mayor interés es ${}_{\mathcal{Z}'}A_{\mathcal{Z}}$, que a cada pareja de grupos (G,H) asigna $A^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_R(G,H)$ y a cada pareja de biconjuntos $({}_KY_G,{}_HX_L)$ el morfismo

$$A^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_R(G,H)\to A^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_R(K,L)\qquad {}_GW_H\mapsto {}_KY_G\circ{}_GW_H\circ{}_HX_L.$$

Si $T\in Fun_R(\mathcal{Z}',\mathcal{Z})$ y K es fijo en $\mathcal{Z}$, entonces podemos definir un funtor $T(\_,K)$ en $\Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}$ que manda a cada grupo G a $T(G,K)$. Éste es un funtor de Mackey para $\mathcal{Z}'$. Así, si $M\in Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}$, tenemos otro funtor de Mackey

$$(T,M):\Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}}\to R-mod\qquad K\mapsto Hom_{\mathcal{Z}'}(T(\_,K),M),$$

donde $Hom_{\mathcal{Z}'}$ es una abreviatura para $Hom_{Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}}$. Para una flecha ${}_HX_K$ y un elemento f en $Hom_{\mathcal{Z}'}(T(\_,K),M)$, definimos la transformación natural $(T,M)({}_HX_K)(f)=t$ por

$$t_L:T(L,H)\to M(L)\qquad a\mapsto f_L(T(id_L,{}_HX_K)(a)).$$

Para la naturalidad de t, debemos probar que para todo ${}_AX_C$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T(C,\, H) \arrow[r, "t_C"] \arrow[d, "T({}_AX_C,\, id_H)"'] & M(C) \arrow[d, "M({}_AX_C)"] \\ T(A,\, H) \arrow[r, "t_A"] & M(A) \end{tikzcd}$$

pero éste se obtiene de la siguiente composición

$$\begin{tikzcd} T(C,\, H) \arrow[r, "T(id_C,\, {}_HX_K)"] \arrow[d, "T({}_AX_C,\, id_H)"'] & T(C,\, K) \arrow[r, "f_C"] \arrow[d, "T({}_AX_C,\, id_K)"'] & M(C) \arrow[d, "M({}_AX_C)"'] \\ T(A,\, H) \arrow[r, "T(id_A,\, {}_HX_K)"'] & T(A,\, K) \arrow[r, "f_A"'] & M(A). \end{tikzcd}$$

Como los dos cuadrados internos conmutan, el exterior también. Por otro lado, no es difícil probar que $(T,\, M)$ abre la composición de flechas, esto se obtiene de que T lo hace. Así, tenemos que $(T,\, M)$ es un funtor de Mackey para $\mathcal{Z}$.

Definición 3.1.1. Supongamos $\mathcal{Z}$ subclase de $\mathcal{Z}'$. Si M es un funtor de Mackey para $\mathcal{Z}$, entonces $M \Uparrow_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}'} := ({}_{\mathcal{Z}}A_{\mathcal{Z}'},\, M)$ será llamada la coinducción de M a $\mathcal{Z}'$.

Observemos que en este caso ${}_{\mathcal{Z}}A_{\mathcal{Z}'}$ está en $Fun_R(\mathcal{Z},\, \mathcal{Z}')$.

Para un T fijo, $(T,\, \_)$ es un funtor de $Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}$ en $Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}}$: A una flecha $f : M \to N$ de funtores de Mackey en $\mathcal{Z}'$ y un elemento α en $(T,\, M)(H)$ asigna la transformación $f\alpha$ que está en $(T,\, N)(H)$. Este funtor tiene adjunto izquierdo, esto puede probarse usando el Teorema de la Adjunción (ver Borceux [5] o Freyd [13]), ya que, tanto las categorías de funtores de Mackey como este funtor, satisfacen las hipótesis necesarias. A este adjunto podemos llamarlo el producto tensorial con T, más allá del nombre, construiremos este funtor como cociente de un producto tensorial sobre R. Primero introducimos el concepto de transformación bilineal y balanceada.

Observemos que si $T \in Fun_R(\mathcal{Z}',\, \mathcal{Z})$, $N \in Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}}$ y $H \in \mathcal{Z}$, entonces podemos definir el funtor $T(\_\,, H) \times N(H)$, que a cada grupo $K \in \mathcal{Z}'$ asigna el R-módulo $T(K,\, H) \times N(H)$ y en flechas actúa a través de $T(\_\,, H)$. Dado que este último es un funtor de Mackey, entonces el primero lo es también. Luego, podemos tomar la suma

$$\bigoplus_{H \in \overline{\mathcal{Z}}} T(\_\,, H) \times N(H)$$

donde $\overline{\mathcal{Z}}$ es el conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de objetos en $\Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}}$. Es claro que éste es también un funtor de Mackey, que denotaremos por $T \times N$.

Definición 3.1.2. Sean $T \in Fun_R(\mathcal{Z}', \mathcal{Z})$, $N \in Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}}$ y $M \in Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}$. Diremos que

$$r : \bigoplus_{H \in \overline{\mathcal{Z}}} T(\_, H) \times N(H) \longrightarrow M$$

es una transformación bilineal y balanceada de $T \times N$ en M, si es un morfismo de funtores de Mackey tal que para $K \in \mathcal{Z}'$ y $H \in \overline{\mathcal{Z}}$

$$r_{K,H} : T(K, H) \times N(H) \to M(K)$$

es un morfismo de R-módulos bilineal, y balanceado en el siguiente sentido: Para toda L en $\overline{\mathcal{Z}}$ y todo biconjunto ${}_HX_L$ en $\Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}}$ se tiene

$$r_{K,H}(a, N({}_HX_L)(b)) = r_{K,L}(T(id_K, {}_HX_L)(a), b)$$

para todos $a \in T(K, H)$, $b \in N(L)$.

Denotaremos por $Bil(T \times N, M)$ a la colección de dichas transformaciones.

Nótese que $Bil(T \times N, M)$ es un R-submódulo de $Hom_{\mathcal{Z}}(T \times N, M)$.

Definimos ahora $T \hat{\otimes} N$ para $K \in \mathcal{Z}'$ como

$$\Big(\bigoplus_{H \in \overline{\mathcal{Z}}} T(K, H) \otimes_R N(H) \Big) / \mathcal{I}$$

donde $\mathcal{I}$ es el submódulo generado por los elementos de la forma

$$m \otimes_R N({}_HX_L)(n) - T(id_K, {}_HX_L)(m) \otimes_R n$$

con $m \in T(K, H)$, $n \in N(L)$ y ${}_HX_L$ en $\Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}}$. En flechas se define a través de $T(\_, H)$, es decir, si ${}_GY_K \in \Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}$ entonces

$$\big(\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes_R n_i \big) + \mathcal{I} \longmapsto \big(\sum_{i=1}^{n} T({}_GY_K, id_{H_i})(m_i) \otimes_R n_i \big) + \mathcal{J}$$

si $m_i \in T(K, H_i)$, $n_i \in N(H_i)$ y

$$T \hat{\otimes} N(G) = \Big(\bigoplus_{H \in \overline{\mathcal{Z}}} T(G, H) \otimes_R N(H) \Big) / \mathcal{J}.$$

Para probar que está bien definida, sea $m \otimes_R N({}_HX_L)(n) - T(id_K, {}_HX_L)(m) \otimes_R n$ un elemento generador de $\mathcal{I}$, su imagen es

$$T({}_GY_K, id_H)(m) \otimes_R N({}_HX_L)(n) - T({}_GY_K, id_L) T(id_K, {}_HX_L)(m) \otimes_R n + \mathcal{I}$$

pero

$$\begin{aligned} T({}_GY_K,\, id_L)T(id_K,\, {}_HX_L) &= T({}_GY_K,\, {}_HX_L) \\ &= T(id_G,\, {}_HX_L)T({}_GY_K,\, id_H). \end{aligned}$$

Así, este representante está en $\mathcal{J}$.

Probar que es un funtor, se obtiene nuevamente de que $T(\_\,, H)$ lo es.

$T\hat{\otimes}\_$ satisface la siguiente propiedad universal.

Lema 3.1.3. *Existe un elemento r en $Bil(T \times N, T\hat{\otimes}N)$ tal que si M es un funtor de Mackey para $\mathcal{Z}'$ y f está en $Bil(T \times N, M)$, entonces existe un único morfismo de funtores de Mackey $\hat{f}$ de $T\hat{\otimes}N$ en M tal que $f = \hat{f}r$. Inversamente, si $\hat{f}$ es un morfismo de funtores de Mackey de $T\hat{\otimes}N$ en M, entonces esta fórmula define un elemento en $Bil(T \times N, M)$ y esta correspondencia induce un isomorfismo de R-módulos*

$$Bil(T \times N,\, M) \cong Hom_{\mathcal{Z}'}(T\hat{\otimes}N,\, M)$$

que es natural en N y M.

Prueba. Definimos r en un sumando, correspondiente a H, y extendemos

$$r_{K,\,H} : T(K,\, H) \to T\hat{\otimes}N(K) \quad \text{como} \quad (m,\, n) \mapsto (m \otimes_R n) + \mathcal{I}$$

Claramente, r está en $Bil(T \times N,\, T\hat{\otimes}N)$. Ahora sean M funtor de Mackey para $\mathcal{Z}'$ y f en $Bil(T \times N,\, M)$. Veamos que $\hat{f}$ de $T\hat{\otimes}N$ en M definida en $K \in \mathcal{Z}'$ como

$$\big(\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes_R n_i\big) + \mathcal{I} \mapsto f\big(\sum_{i=1}^{n}(m_i,\, n_i)\big)$$

para $m_i \in T(K,\, H_i)$ y $n_i \in N(H_i)$, es un morfismo de funtores de Mackey. Como f es bilineal y balanceada, está claramente bien definida. Para ver que es natural, sea ${}_KX_G$, veamos que conmuta

$$\begin{array}{ccc} T\hat{\otimes}N(G) & \xrightarrow{\hat{f}_G} & M(G) \\ {\scriptstyle T\hat{\otimes}N({}_KY_G)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle M({}_KY_G)} \\ T\hat{\otimes}N(K) & \xrightarrow{\hat{f}_K} & M(K). \end{array}$$

La conmutatividad de este diagrama se obtiene de la definición de $T\hat{\otimes}N({}_KY_G)$ y de que f es natural.

Estas asignaciones inducen un isomorfismo de R-módulos. Dada $f \in Bil(T \times N,\, M)$, claramente, $\hat{f}$ satisface $f = \hat{f}r$, y si existe $\hat{g} \in Hom_{\mathcal{Z}'}(T\hat{\otimes}N,\, M)$ tal que $\hat{g}r = \hat{f}r$, entonces, como r es epimorfismo, $\hat{g}$ debe estar definida como $\hat{f}$. Además esta biyección es de R-módulos.

Finalmente, veamos que es natural en M y N. Sea $f : N_1 \to N_2$ morfismo de funtores de Mackey para $\mathcal{Z}$. Para ver que

$$\begin{tikzcd} Bil(T \times N_2,\, M) \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & Hom_{\mathcal{Z}'}(T\hat{\otimes}N_2,\, M) \arrow[d, "G"] \\ Bil(T \times N_1,\, M) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{Z}'}(T\hat{\otimes}N_1,\, M) \end{tikzcd}$$

conmuta, sea $t \in Bil(T \times N_2,\, M)$. La imagen de t bajo el isomorfismo es la transformación natural que en K se define por

$$\big(\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes_R n_i\big) + \mathcal{I} \mapsto t\big(\sum_{i=1}^{n}(m_i,\, n_i)\big)$$

si $m_i \in T(K,\, H_i)$ y $n_i \in N_2(H_i)$, y al aplicarle G, obtenemos una transformación que manda $\big(\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes_R n_i\big) + \mathcal{I}$ en $t\big(\sum_{i=1}^{n}(m_i,\, f_{H_i}(n_i))\big)$. Ésta es justamente la imagen de Ft bajo el isomorfismo, por lo tanto, el diagrama conmuta.

La prueba de la naturalidad de M es bastante sencilla y la omitiremos. $\square$

Ahora, $T\hat{\otimes}\_$ es un funtor de $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ en $Mac_{R,\mathcal{Z}'}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$, ya que para una flecha $f : N_1 \to N_2$ en $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$, podemos definir para $K \in \mathcal{Z}'$,

$$\big(\bigoplus_{H\in\overline{\mathcal{Z}}} T(K,\, H) \times N_1(H)\big) \longrightarrow \big(\bigoplus_{H\in\overline{\mathcal{Z}}} T(K,\, H) \otimes_R N_2(H)\big)/\mathcal{J}$$

como

$$\big(\sum_{i=1}^{n}(m_i,\, n_i)\big) \longmapsto \big(\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes_R f_H(n_i)\big) + \mathcal{J}.$$

No es difícil observar que esta asignación está en $Bil(T \times N_1,\, T\hat{\otimes}N_2)$.

Proposición 3.1.4. *Sean $T \in Fun_R(\mathcal{Z}',\, \mathcal{Z})$, $M \in Mac_{R,\mathcal{Z}'}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ y $N \in Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$, entonces existe un isomorfismo de R-módulos*

$$Bil(T \times N,\, M) \cong Hom_{\mathcal{Z}}(N,\, (T,\, M))$$

natural en M y N.

Prueba. Sea $f \in Bil(T \times N,\, M)$, definimos ζ de N en $(T,\, M)$ como

$$\begin{array}{rcl} \zeta_H : N(H) & \to & Hom_{\mathcal{Z}'}(T(\_\,, H),\, M) \\ m & \mapsto & \zeta^m_{K,\,H} : T(K,\, H) \to M(K) \text{ con } a \mapsto f_{K,\,H}(a,\, m) \end{array}$$

para $H \in \mathcal{Z}$, $K \in \mathcal{Z}'$ y $a \in T(K,\, H)$. Para ver que ζ^m_H es una transformación natural, sea ${}_KY_G$ un biconjunto en $\Omega^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}_{R,\,\mathcal{Z}'}$, debemos probar que conmuta

$$\begin{tikzcd} T(G,\, H) \arrow[r, "\zeta^m_{G,\,H}"] \arrow[d, "T({}_KY_G,\, id_H)"'] & M(G) \arrow[d, "M({}_KY_G)"] \\ T(K,\, H) \arrow[r, "\zeta^m_{K,\,H}"] & M(K). \end{tikzcd}$$

Es decir, debemos probar

$$f_{K,\,H}(T({}_KY_G,\, id_H)(a), m) = M({}_KY_G)(f_{G,\,H}(a,\, m)),$$

pero f es una transformación natural de $T \times N$ en M, por lo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} T(G,\, H) \times N(H) \arrow[r, "f_{G,\,H}"] \arrow[d, "T({}_KY_G,\, id_H)"'] & M(G) \arrow[d, "M({}_KY_G)"] \\ T(K,\, H) \times N(H) \arrow[r, "f_{K,\,H}"] & M(K) \end{tikzcd}$$

así obtenemos el resultado. Ahora veamos que ζ es transformación natural, sea ${}_HX_L$ un biconjunto en $\Omega^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}_{R,\,\mathcal{Z}}$, debemos probar que conmuta

$$\begin{tikzcd} N(L) \arrow[r, "\zeta_L"] \arrow[d, "N({}_HX_L)"'] & Hom_{\mathcal{Z}}(T(\_\,, L), M) \arrow[d, "(T,\, M)({}_HX_L)"] \\ N(H) \arrow[r, "\zeta_H"] & Hom_{\mathcal{Z}}(T(\_\,, H), M). \end{tikzcd}$$

Es decir, que la transformación natural

$$\theta^m_L := (T,\, M)({}_HX_L)(\zeta^m_L)$$

es igual a ζ^n_H con $n = N({}_HX_L)(m)$ y $m \in N(L)$. Por definición, para $a \in T(K,\, H)$, tenemos que $\theta^m_{K,\,L}(a)$ es

$$\zeta^m_{K,\,L}(T(id_K,\, {}_HX_L)(a)) = f_{K,\,L}(T(id_K,\, {}_HX_L)(a),\, m)$$

y $\zeta^n_{K,\,H}(a)$ es

$$f_{K,\,H}(a,\,n) = f_{K,\,H}(a,\,N({}_HX_L)(m)).$$

Como f es balanceada, tenemos la igualdad.

Ahora sea $\zeta \in Hom_{\mathcal{Z}}(N,\,(T,\,M))$, definimos f de $T \times N$ en M en un sumando, correspondiente a H,

$$\begin{array}{rcl} f_{K,\,H} : T(K,\,H) \times N(H) & \longrightarrow & M(K) \\ (a,\,m) & \longmapsto & \zeta^m_{K,H}(a) \end{array}$$

donde ζ^m_H es la transformación natural correspondiente a m. Como ζ y ζ^m_H son morfismos de funtores de Mackey, entonces $f_{K,\,H}$ es un morfismo de R-módulos bilineal. Probar que es balanceada se obtiene de que ζ es transformación natural, regresando sobre la prueba del recíproco en los párrafos de arriba. De la misma forma, probar que f es natural se obtiene de que ζ^m_H lo es.

Por la manera en que se definieron ζ y f, es fácil probar que tenemos una biyección que es un morfismo de R-módulos.

Finalmente, veamos que es natural en M y N. Sea $f : N_1 \to N_2$ en $Mac^{\mathcal{X},\,\mathcal{Y}}_{R,\,\mathcal{Z}}$, veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Bil(T \times N_2,\,M) \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & Hom_{\mathcal{Z}}(N_2,\,(T,\,M)) \arrow[d, "G"] \\ Bil(T \times N_1,\,M) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{Z}}(N_1,\,(T,\,M)) \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $t \in Bil(T \times N_2,\,M)$, y ζ_2 su imagen bajo el isomorfismo, entonces $G\zeta_2 = \zeta_2 f$ y tenemos

$$\begin{array}{rcl} (\zeta_2 f)_H : N_1(H) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{Z}'}(T(\_,\,H),\,M) \\ n & \longmapsto & (\zeta_2)^{f_H(n)}_{K,\,H} : T(K,\,H) \to M(K) \text{ con } a \mapsto t_{K,\,H}(a,\,f_H(n)). \end{array}$$

Por otro lado, si ζ_1 es la imagen de Ft bajo el isomorfismo, entonces

$$\begin{array}{rcl} (\zeta_1)_H : N_1(H) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{Z}'}(T(\_,\,H),\,M) \\ n & \longmapsto & (\zeta_1)^n_{K,\,H} : T(K,\,H) \to M(K) \text{ con } a \mapsto (Ft)_{K,\,H}(a,\,n), \end{array}$$

pero $(Ft)_{K,\,H}(a,\,n)$ es justamente $t_{K,\,H}(a,\,f_H(n))$.

La prueba de la naturalidad en M es análoga. □

Los últimos dos resultados prueban que $T\hat{\otimes}\_$ es adjunto izquierdo de $(T,\,\_)$.

Definición 3.1.5. Supongamos $\mathcal{Z}$ subclase de $\mathcal{Z}'$. Si M es un funtor de Mackey para $\mathcal{Z}$, definimos la inducción de M a $\mathcal{Z}'$ como $M\uparrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}} := {}_{\mathcal{Z}'}A_{\mathcal{Z}}\hat{\otimes}M$.

Corolario 3.1.6. *La restricción de funtores de Mackey tiene adjuntos izquierdo y derecho: El primero es la inducción y el segundo es la coinducción.*

Prueba. Sean $\mathcal{Z}$ subclase de $\mathcal{Z}'$, $N \in Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}}$ y $M \in Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}$. Veamos que existen biyecciones naturales

$$Hom_{\mathcal{Z}'}({}_{\mathcal{Z}'}A_{\mathcal{Z}}\hat{\otimes}N,\, M) \longleftrightarrow Hom_{\mathcal{Z}}(N,\, M{\downarrow}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}})$$

y

$$Hom_{\mathcal{Z}'}(M,\, ({}_{\mathcal{Z}}A_{\mathcal{Z}'},\, N)) \longleftrightarrow Hom_{\mathcal{Z}}(M{\downarrow}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}},\, N).$$

Para la adjunción izquierda tenemos las siguientes biyecciones naturales

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{Z}'}({}_{\mathcal{Z}'}A_{\mathcal{Z}}\hat{\otimes}N,\, M) &\longleftrightarrow Hom_{\mathcal{Z}}(N,\, ({}_{\mathcal{Z}'}A_{\mathcal{Z}},\, M)) \\ &\longleftrightarrow Hom_{\mathcal{Z}}(N, M{\downarrow}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}}). \end{aligned}$$

La última biyección se obtienen del lema de Yoneda, ya que para todo grupo G en $\mathcal{Z}'$, tenemos

$$Hom_{\mathcal{Z}'}(A_R(\_,\, G),\, M) \cong M(G),$$

isomorfismo de R-módulos natural en G. Así que los funtores $({}_{\mathcal{Z}'}A_{\mathcal{Z}'},\, M)$ y M son isomorfos, en particular $({}_{\mathcal{Z}'}A_{\mathcal{Z}},\, M) \cong M{\downarrow}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}}$.

Igualmente, para la adjunción derecha tenemos

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{Z}'}(M,\, ({}_{\mathcal{Z}}A_{\mathcal{Z}'},\, N)) &\longleftrightarrow Hom_{\mathcal{Z}}({}_{\mathcal{Z}}A_{\mathcal{Z}'}\hat{\otimes}M,\, N)) \\ &\longleftrightarrow Hom_{\mathcal{Z}}(M{\downarrow}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}},\, N). \end{aligned}$$

No es difícil ver que para cualquier G en $\mathcal{Z}'$, existe un isomorfismo natural en G

$$\Big(\bigoplus_{H\in\overline{\mathcal{Z}'}} A_R(G,\, H) \otimes_R M(H)\Big) + \mathcal{I} \cong M(G)$$

definido en $A(G,\, H) \times M(H)$ a través de

$$({}_GX_H, m) \longmapsto M({}_GX_H)m.$$

Por lo tanto, ${}_{\mathcal{Z}'}A_{\mathcal{Z}'}\hat{\otimes}M \cong M$ y en particular ${}_{\mathcal{Z}}A_{\mathcal{Z}'}\hat{\otimes}M \cong M{\downarrow}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}}$. □

Si $\mathcal{Z}$ es subclase de $\mathcal{Z}'$ y M está en $Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}$, de lo anterior, obtenemos dos morfismos de funtores de Mackey:

$$\zeta_{\mathcal{Z}} : M \longrightarrow M{\downarrow}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}}{\Uparrow}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}} \quad \text{y} \quad \xi_{\mathcal{Z}} : M{\downarrow}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}}{\uparrow}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}} \longrightarrow M.$$

El primero se define para K en $\mathcal{Z}'$ como

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathcal{Z}} : M(K) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{Z}}(A^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_R(\_,\, K),\, M) \\ m &\longmapsto \zeta^m_{H,K} : A^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_R(H,\, K) \to M(H) \end{aligned}$$

donde $\zeta^m_{H,K}$ manda ${}_HX_K$ en $M({}_HX_K)m$.

El segundo, en $K \in \mathcal{Z}'$ se define por

$$\begin{array}{rcl} \Big(\bigoplus_{H\in\overline{\mathcal{Z}}} A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(K,\, H)\times M(H)\Big) & \longrightarrow & M(K) \\ \big(\sum_{i=0}^{n}({}_KX_{iH_i},\, m_i)\big) & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} M({}_KX_{iH_i})m_i \end{array}$$

para ${}_KX_{iH_i}$ biconjunto transitivo y extendemos por linealidad. Llamaremos $\xi_{\mathcal{Z}}$ al morfismo que induce éste de ${}_{\mathcal{Z}'}A_{\mathcal{Z}}\hat{\otimes}M$ en M.

Este último morfismo nos será de utilidad en la teoría de inducción.

3.2. Teoremas de Inducción

Lema 3.2.1. *Sea M en $Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}$. Denotemos por $\mathcal{P}(M)$ a la cerradura bajo subgrupos y cocientes de $T = \{H \in \mathcal{Z}' \mid M(H)/M'(H) \neq 0\}$, donde*

$$M'(H) = \sum_{\substack{K\hookrightarrow H\\ K\ncong H}} M({}_HH_K)(M(K)) + \sum_{\substack{\alpha:H\twoheadrightarrow K\\ 1\neq Ker\alpha\in\mathcal{X}}} M({}_HK_K)(M(K)).$$

Entonces $\xi_{\mathcal{P}(M)}$ es un epimorfismo en $Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}$. De hecho, para cualquier clase $\mathcal{Z}$ cerrada bajo subcocientes, $\xi_{\mathcal{Z}}$ es un epimorfismo si y sólo si $\mathcal{P}(M)$ es subclase de $\mathcal{Z}$.

Prueba. Durante la prueba, escribiremos sólo ξ, en lugar de $\xi_{\mathcal{P}(M)}$. Como ξ es una transformación natural, basta ver que el subfuntor imagen $Im\xi \leqslant M$ es igual a M. Es decir, basta ver que para todo grupo G en $\mathcal{Z}'$ tenemos $M(G) \subseteq Im\xi_G$.

Si G está en T, entonces existe algún representante de él en $\overline{\mathcal{P}(M)}$, digamos F. Luego, existe un isomorfismo ${}_GX_F$ en $A^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_R(G,\, F)$, y por lo tanto $M(G) \subseteq Im\xi_G$.

Supongamos ahora que G no está en T. Entonces para todo m en $M(G)$ tenemos

$$m = \sum_{\substack{K_i\hookrightarrow G\\ K_i\ncong G}} M({}_GG_{K_i})(x_i) + \sum_{\substack{\alpha:G\twoheadrightarrow K_j\\ 1\neq Ker\alpha\in\mathcal{X}}} M({}_GK_{j_{K_j}})(y_j).$$

con x_i en $M(K_i)$ y y_j en $M(K_j)$. Como los órdenes de K_j y K_i son estrictamente menores que el de G, entonces, utilizando inducción en el orden del grupo, podemos suponer que para todos j e i

$$x_i = \sum_{r=0}^{n} M({}_{K_i}X_{rH_r})m_r \quad \text{y} \quad y_j \sum_{s=0}^{n} M({}_{K_j}X_{sH_s})n_s$$

para algunos H_r y H_s en $\overline{\mathcal{P}(M)}$, con m_r en $M(H_r)$ y n_s en $M(H_s)$. Componiendo con la igualdad anterior, obtenemos que m está en $Im\xi_G$.

Si $\mathcal{P}(M)$ es subclase de $\mathcal{Z}$, entonces de la definición de $\xi_{\mathcal{Z}}$ es claro que éste es un epimorfismo.

Ahora supongamos que $\mathcal{Z}$ es una clase que hace a $\xi_{\mathcal{Z}}$ un epimorfismo. Probemos que T es subclase de $\mathcal{Z}$. Sea H en T, entonces para todo m en $M(H)$ tenemos

$$m = \sum_{i=0}^{n} M({}_H X_{i H_i}) m_i,$$

para algunos H_i en $\overline{\mathcal{Z}}$. Podemos suponer que los biconjuntos ${}_H X_{i H_i}$ son transitivos no necesariamente distintos, y tenemos m_i en $M(H_i)$. De acuerdo a la descomposición de Bouc tenemos

$${}_H X_{i H_i} \cong {}_H H_{A_i} \circ {}_{A_i} B_{i B_i} \circ {}_{B_i} B_{i C_i} \circ {}_{C_i} H_{i H_i}$$

donde A_i es un subgrupo de H, C_i es un subgrupo de H_i, y B_i es una imagen homomórfica tanto de C_i como de A_i. Como H está en T, en alguno de estos biconjuntos debemos tener $A_i = H$. Así que podemos separar la suma de arriba como

$$m = \sum_{A_i < H_i} M({}_H H_{A_i} \circ {}_{A_i} W_{i H_i})(m_i) + \sum_{A_i = H} M({}_H B_{i B_i} \circ {}_{B_i} T_{i H_i})(m_i).$$

Nuevamente, como H está en T, en alguno de los sumandos de la derecha debemos tener $B_i \cong H$. Como B_i es un subcociente de H_i, entonces H está en $\mathcal{Z}$. $\square$

De hecho, si para todo G en $\mathcal{Z}'$ tomamos los subcocientes $H \leqslant G$, $\alpha : H \twoheadrightarrow B$ tales que $Ker\alpha \in \mathcal{X}$ y $B \in \mathcal{P}(M)$, entonces

$$M(G) = \sum_{B} M({}_G G_H \circ {}_H B_B)(m).$$

La prueba es similar a la de arriba. Si G está en T, el resultado es obvio, si no, entonces $M(G)/M'(G) = 0$ y podemos suponer que para todo subgrupo propio K y todo cociente propio L con núcleo G_1 en $\mathcal{X}$ se satisface el resultado. Observemos que en el primer caso

$${}_G G_K \circ {}_K K_H \circ {}_H B_B \cong {}_G G_H \circ {}_H B_B$$

si H es un subgrupo de K con cociente B como arriba. Para el segundo caso, si H es un subgrupo de L con cociente B como arriba, entonces H es isomorfo a H_1/G_1 para algún H_1 subgrupo de G, y tenemos

$${}_G L_L \circ {}_L L_H \circ {}_H B_B \cong {}_G G_{H_1} \circ {}_{H_1} H_H \circ {}_H B_B \cong {}_G G_{H_1} \circ {}_{H_1} B_B.$$

La prueba de que ésta es la clase más chica cerrada bajo subcocientes que satisface esta condición es igual a la del lema.

Definición 3.2.2. Un grupo H en $\mathcal{Z}'$ se llama primordial para el funtor de Mackey M en $Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}$ si el cociente de Brauer $M(H)/M'(H)$ es distinto de 0, donde

$$M'(H) = \sum_{\substack{K \leqslant H \\ K \neq H}} M({}_H H_K) M(K).$$

La clase de grupos primordiales para M será denotada por $\mathrm{Prim}(M)$.

Escribiremos $\mathscr{P}(M)$ para la cerradura bajo subgrupos y cocientes de $\mathrm{Prim}(M)$.

Observación 3.2.3. Sobre $\mathscr{P}(M)$ tenemos las siguientes observaciones:

i) Si para un grupo H el cociente de Brauer es 0, entonces el cociente definido en el lema anterior es 0. Así que $\mathcal{P}(M)$ es subclase de $\mathscr{P}(M)$ y $\xi_{\mathscr{P}(M)}$ es un epimorfismo.

ii) Si $\mathcal{X} = 1$, entonces $\mathcal{P}(M) = \mathscr{P}(M)$.

Lema 3.2.4. *Sean M en $Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}$ y $\mathcal{Z}$ una subclase de $\mathcal{Z}'$ cerrada bajo subcocientes. En $Mac^{1,1}_{R,\mathcal{Z}'}$ consideremos los morfismos*

$$M \downarrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}} \uparrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}} \xrightarrow{\xi_{\mathcal{Z}}} M \xrightarrow{\zeta_{\mathcal{Z}}} M \downarrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}} \Uparrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}} .$$

Entonces para todo $K \in \mathcal{Z}'$ tenemos

$$Im\xi_{\mathcal{Z}}(K) = \sum_{G \leqslant K,\, G \in \mathcal{Z}} Im M({}_K K_G) \quad y \quad Ker\zeta_{\mathcal{Z}}(K) = \bigcap_{G \leqslant K,\, G \in \mathcal{Z}} Ker M({}_G K_K).$$

Prueba. Sean $\{H_1, \ldots, H_n\}$ representantes de las clases de isomorfismo de subgrupos de K que están en $\mathcal{Z}$. Entonces los biconjuntos

$${}_G H_{i H_i} \circ {}_{H_i} H_{i G} \quad \text{y} \quad {}_G G_G$$

son isomorfos si $G \leqslant K$ y $G \cong H_i$. Luego,

$$\sum_{G \leqslant K,\, G \in \mathcal{Z}} M({}_K K_G) m_G = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{G \leqslant K, \\ G \cong H_i}} M({}_K K_G \circ {}_G H_{i H_i})(M({}_{H_i} H_{i G}) m_G),$$

que se encuentra en $Im\xi_{\mathcal{Z}}(K)$. Por otro lado, un elemento en $Im\xi_{\mathcal{Z}}(K)$ se ve de la forma

$$\sum_{j=0}^{r} M({}_K K_{A_j} \circ {}_{A_j} H_{j H_j}) m_j = \sum_{\substack{j=0, \\ K_j \leqslant K}}^{r} M({}_K K_{K_j}) n_j$$

donde $A_j \hookrightarrow K$, H_j con H_j en $\overline{\mathcal{Z}}$. Si A_j es isomorfo a un subgrupo K_j de K, entonces K_j está en $\mathcal{Z}$ por ser isomorfo a un subgrupo de H_j y los biconjuntos ${}_KK_{A_j}$ y ${}_KK_{K_j}$ son isomorfos. Luego, si escribimos $M({}_{K_j}H_{j\,H_j})m_j$ como n_j, tenemos la igualdad deseada. Por lo tanto, $M_1(K) = Im\xi_{\mathcal{Z}}(K)$.

Probemos ahora que $y \in \bigcap_{\substack{G \leqslant K,\\ H \in \mathcal{Z}}} KerM({}_GK_K)$ implica $y \in Ker\zeta_{\mathcal{Z}}(K)$.

Esto significa probar que para todo H en $\mathcal{Z}$, la función $\zeta^y_{H,\,K}$ es cero, es decir que si A es un subgrupo tanto de H como de K, entonces

$$M({}_HH_A \circ {}_AK_K)(y) = 0.$$

Pero esto es claro, ya que H en $\mathcal{Z}$ implica A en $\mathcal{Z}$ y por lo tanto $M({}_AG_G)(y) = 0$

Por otro lado, si m está en $Ker\zeta_{\mathcal{Z}}(K)$, entonces para todo $H \in \mathcal{Z}$ y para todo $(H,\,K)$-biconjunto ${}_HY_K$, se tiene $M(Y)(m) = 0$. En particular, para todo $G \leqslant K$ que pertenezca a $\mathcal{Z}$, se tiene $M({}_GK_K)(m) = 0$. □

3.2.1. Inducción en el anillo de Burnside

Enunciamos el Teorema de Inducción de Dress para el funtor de Mackey B_π. Recordemos que si π es un conjunto de números primos, denotamos por $\mathbb{Z}_\pi$ al conjunto

$$\left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid b \text{ es un } \pi'\text{-número}\right\}.$$

Podemos tomar $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{Z}'$ como la clase de todos los grupos finitos y definir B_π en $Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{\pi,\,\mathcal{Z}} := Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{\mathbb{Z}_\pi,\,\mathcal{Z}'}$ para un grupo G por $\mathbb{Z}_\pi \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$. Escribiremos $B_{\mathbb{Q}}$ si π es el conjunto vacío.

Recordemos también que $O^\pi(G)$ se define como el más pequeño subgrupo normal N de G tal que G/N es un π-grupo soluble. En particular, si π consta de un solo primo p, $O^p(G)$ es el menor grupo normal N tal que G/N es un p-grupo.

Definición 3.2.5. Para cualesquiera $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}'$ con las hipótesis usuales, $\mathcal{Z}$ una subclase de $\mathcal{Z}'$ y π un conjunto de primos, definimos la siguiente subclase de grupos

$$\mathcal{H}_\pi(\mathcal{Z}) = \{H \in \mathcal{Z}' \mid \exists p \in \pi \text{ t. q. } O^p(H) \in \mathcal{Z}\}.$$

Si π es el conjunto de todos los primos, escribiremos $\mathcal{H}(\mathcal{Z})$.

Observemos que si $H \in \mathcal{H}_\pi(\mathcal{Z})$ y K es un subgrupo de H, entonces $K \in \mathcal{H}_\pi(\mathcal{Z})$ ya que $O^p(K)$ es un subgrupo de $O^p(H)$ y $\mathcal{Z}$ es cerrada bajo subgrupos. Igualmente, para un cociente H/T, tenemos que $O^p(H/T)$ es isomorfo a $O^p(H)/(T \cap O^p(H))$, por lo tanto $O^p(H/T)$ está en $\mathcal{Z}$. De hecho, si T está en $\mathcal{X}$ ó en $\mathcal{Y}$, entonces $T \cap O^p(H)$ también lo está.

Así que, si M es un funtor de Mackey definido en $\Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\,\mathcal{Z}'}$, entonces también está definido en $\Omega^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\,\mathcal{H}_\pi(\mathcal{Z})}$.

Lema 3.2.6 (Dress). *Sean $\mathcal{Z}$ una clase de grupos cerrada bajo subgrupos y cocientes, $\mathcal{Z}'$ la clase de todos los grupos finitos y π un conjunto de primos. Si en la categoría $Mac_{\pi,\mathcal{Z}'}^{1,1}$ consideramos los morfismos*

$$B_\pi \downarrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{H}_\pi(\mathcal{Z})} \uparrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{H}_\pi(\mathcal{Z})} \xrightarrow{\xi_{\mathcal{H}_\pi(\mathcal{Z})}} B_\pi \xrightarrow{\zeta_{\mathcal{Z}}} B_\pi \downarrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}} \Uparrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}}$$

entonces

$$B_\pi = Im\xi_{H_\pi(\mathcal{Z})} + Ker\zeta_{\mathcal{Z}}.$$

Prueba. Para G un grupo finito, el Teorema de Inducción de Dress, tomado por ejemplo de Yoshida [22], dice lo siguiente

$$B_\pi(G) = \sum_{\substack{H\leqslant G,\\ H\in\mathcal{H}_\pi(\mathcal{Z})}} B_\pi({}_GG_H)B_\pi(H) + \bigcap_{\substack{H\leqslant G,\\ H\in\mathcal{Z}}} KerB_\pi({}_HG_G).$$

□

Funtores de Green e inducción

En el siguiente capítulo estudiaremos los funtores de Green con la definición que introduce Bouc en [9]. Como veremos, bajo las hipótesis adecuadas en las clases $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$, esta definición es equivalente a la siguiente.

Definición 3.2.7. Un funtor de Mackey $A : \Omega_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}} \to R-mod$ es un funtor de Green si $A(H)$ es una R-álgebra para todo $H \in \mathcal{Z}$, el morfismo $A({}_KL_L)$ es de anillos para todo $f : K \to L$ morfismo de grupos con $Kerf \in \mathcal{X}$ y para todo morfismo $\alpha : H \to G$ con $Ker\alpha \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ se satisfacen las relaciones de Frobenius:

$$A({}_GG_H)(a)\cdot b = A({}_GG_H)(a\cdot A({}_HG_G)(b)) \quad \text{y}$$

$$b\cdot A({}_GG_H(a)) = A({}_GG_H)(A({}_HG_G)(b)\cdot a)$$

para todos $b \in A(G)$ y $a \in A(H)$.

Definición 3.2.8. Sean A y C funtores de Green. Un morfismo de funtores de Green $f : A \to C$ es un morfismo de funtores de Mackey tal que $f_H : A(H) \to C(H)$ es un morfismo de R-álgebras unitarias para todo $H \in \mathcal{Z}$.

Como ejemplo, tomemos $\Omega_R = \Omega_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ con $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ iguales a la clase de todos los grupos finitos y $RB : \Omega_R \to R-mod$ el funtor que asigna a cada grupo G su anillo de Burnside con coeficientes en R, $RB(G)$. En el capítulo 1 definimos RB en las flechas de Ω_R para hacer de éste un funtor de Mackey, veamos que es también un funtor de Green.

Para $f : K \to L$, claramente $RB({}_K L_L)$ es de anillos.

Tomemos $\alpha : H \to G$, probaremos la segunda relación de Frobenius, la prueba de la primera es análoga. Sean $b \in RB(G)$ y $a \in RB(H)$, entonces

$$b \cdot RB({}_G G_H(a)) = b \times ({}_G G_H \circ a)$$

$$RB({}_G G_H)(RB({}_H G_G)(b) \cdot a) = {}_G G_H \circ (b \times a)$$

donde $b \times a$ es un H-conjunto con la acción en b a través de α, es decir $h \cdot (r,\, t) = (\alpha(h)r, ht)$. para $h \in H$ y $(r,\, t) \in b \times a$. El isomorfismo de G-conjuntos es

$$b \times ({}_G G_H \circ a) \to {}_G G_H \circ (b \times a) \quad (r, [s,\, t]) \mapsto [s,\, (s^{-1}r,\, t)].$$

Está bien definido, ya que si $[s\alpha(h),\, h^{-1}t]$ es otro representante de $[s,\, t]$ entonces la imagen de $(r,\, [s\alpha(h),\, h^{-1}t])$ es

$$\begin{aligned} [s\alpha(h),\, ((s\alpha(h))^{-1}r,\, h^{-1}t)] &= [s\alpha(h),\, (\alpha(h^{-1})s^{-1}r,\, h^{-1}t)] \\ &= [s \cdot h,\, h^{-1} \cdot (s^{-1}r,\, t)] \\ &= [s,\, (s^{-1}r,\, t)]. \end{aligned}$$

Claramente es suprayectiva. Para ver que es inyectiva, supongamos $[s,\, (s^{-1}r,\, t)] = [s_0,\, (s_0 r_0,\, t_0)]$, entonces existe $h \in H$ tal que $s_0 = s\alpha(h)$ y $(s_0^{-1}r_0,\, t_0) = (\alpha(h^{-1})s^{-1}r,\, h^{-1}t)$, así que $r = r_0$ y $[s,\, t] = [s_0,\, t_0]$.

Otros ejemplos de funtores de Green son el grupo de Grothendieck y el anillo de Green de la categoría de kG-módulos finitamente generados, para k un campo. En ambos, el producto está dado por el producto tensorial sobre k.

Definición 3.2.9. Sean M un funtor de Mackey y A un funtor de Green. Decimos que M es un módulo sobre A si $M(H)$ es un $A(H)$-módulo para todo $H \in \mathcal{Z}$, y satisface

- Para todo $f : H \to G$ con $Kerf \in \mathcal{X}$, $m \in M(G)$ y $a \in A(G)$, se tiene

$$M({}_H G_G)(a \cdot m) = A({}_H G_G)(a) \cdot M({}_H G_G)(m).$$

- (Frobenius) Para todo $\alpha : H \to G$ con $Ker\alpha \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, $m \in M(G)$, $n \in M(H)$, $a \in A(H)$ y $b \in A(G)$ se tiene

$$A({}_G G_H)(a) \cdot m = M({}_G G_H)(a \cdot M({}_H G_G)m)$$

$$b \cdot M({}_G G_H)(n) = M({}_G G_H)(A({}_H G_G)b \cdot n).$$

Naturalmente, si M es un funtor de Mackey y G está en $\mathcal{Z}$, entonces $M(G)$ es un módulo sobre $A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(G, G)$ con la multiplicación $\alpha \cdot m = M(\alpha)m$. Veremos a continuación que existe un morfismo de anillos $\widetilde{\ }: RB(G) \to A_R^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(G, G)$ que hace a $M(G)$ un $RB(G)$-módulo y más aún, hace a M un RB-módulo. Esta función fue introducida por Bouc en [7] y se define de la siguiente forma: Si X es un G-conjunto izquierdo, denotamos por $\widetilde{X}$ al conjunto $X \times G$, que es un (G, G)-biconjunto con la siguiente acción

$$g_1 \cdot (x, g) \cdot g_2 = (g_1 x, g_1 g g_2),$$

con (x, g) en $X \times G$ y g_1, g_2 en G. Para definir la función, extendemos linealmente sobre R.

Lema 3.2.10 (13 en Bouc [7])**.** *La aplicación* $\widetilde{\ }$ *es un morfismo de R-álgebras.*

Prueba. Basta demostrar que si X y Y son G-conjuntos, entonces

$$\widetilde{X} \circ \widetilde{Y} = \widetilde{X \times Y}.$$

Definimos la función

$$\begin{aligned} \widetilde{X} \circ \widetilde{Y} &\longrightarrow \widetilde{X \times Y} \\ [(x, g)\,(y, h)] &\longmapsto (x, gy, gh). \end{aligned}$$

No es difícil verificar que está bien definida y es un morfismo de (G, G)-biconjuntos. Igualmente

$$\begin{aligned} \widetilde{X \times Y} &\longrightarrow \widetilde{X} \circ \widetilde{Y} \\ (x, y, g) &\longmapsto [(x, 1), (y, g)]. \end{aligned}$$

También es fácil probar que ésta es inversa de la primera. □

Nótese que si $X = G/U$, entonces $\widetilde{X}$ es igual a ${}_G G_U \circ {}_U G_G$, así que si X es G-transitivo, entonces, $\widetilde{X}$ es $G \times G$-transitivo.

Lema 3.2.11. *Todo funtor de Mackey M en $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ es un módulo sobre RB.*

Prueba. Para la primera condición, sean $f : H \to G$ con $Kerf \in \mathcal{X}$, $m \in M(G)$ y $a \in RB(G)$. Supongamos $a = G/K$, tenemos

$$\begin{aligned} M({}_H G_G)(a \cdot m) &= M({}_H G_G) M({}_G G_K \circ {}_K G_G)(m) \\ &= M({}_H G_G \circ {}_G G_K \circ {}_K G_G)(m) \end{aligned}$$

utilizando la observación al Lema 1.8, tenemos

$${}_H G_G \circ {}_G G_K = \sum_{g \in [f(H) \backslash G/K]} {}_H f(H)_{f(H)\cap^g K} \circ {}_{f(H)\cap^g K}{}^g K_K$$

por lo que

$$\begin{aligned} M({}_HG_G)(a\cdot m) &= \sum_{g\in[f(H)\backslash G/K]} M({}_Hf(H)_{f(H)\cap {}^gK}\circ {}_{f(H)\cap {}^gK}{}^gK_K\circ {}_KG_G)(m)\\ &= \sum_{g\in[f(H)\backslash G/K]} M({}_Hf(H)_{f(H)\cap {}^gK}\circ {}_{f(H)\cap {}^gK}G_G)(m). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$RB({}_HG_G)(a) = \sum_{g\in[f(H)\backslash G/K]} \frac{H}{f^{-1}({}^gK)}$$

ya que ${}_HG_G \cong {}_Hf(H)_{f(H)}\circ {}_{f(H)}G_G$ y $RB({}_{f(H)}G_G)(a)$ es la restricción de G a $f(H)$ en a, así que

$$\begin{aligned} RB({}_HG_G)(a) &= \sum_{g\in[f(H)\backslash G/K]} RB({}_Hf(H)_{f(H)})\frac{f(H)}{f(H)\cap {}^gK}\\ &= \sum_{g\in[f(H)\backslash G/K]} \frac{f(H)}{f(H)\cap {}^gK}, \end{aligned}$$

con la acción de H a través de f, ahora si $L = f(H)\cap {}^gK$, entonces $L = f(f^{-1}({}^gK))$ por lo que

$$\frac{f(H)}{L}\longrightarrow \frac{H}{f^{-1}({}^gK)} \quad f(h)L\longmapsto hf^{-1}({}^gK)$$

es un isomorfismo de H-conjuntos. Así que

$$\begin{aligned} RB({}_HG_G)(a)\cdot M({}_HG_G)(m) &= \sum_{g\in[f(H)\backslash G/K]} M({}_HH_{f^{-1}({}^gK)}\circ {}_{f^{-1}({}^gK)}H_H\circ {}_HG_G)(m)\\ &= \sum_{g\in[f(H)\backslash G/K]} M({}_HH_{f^{-1}({}^gK)}\circ {}_{f^{-1}({}^gK)}G_G)(m) \end{aligned}$$

pero la función que manda $[h, g]$ en $[f(h), g]$ es un isomorfismo entre

$${}_HH_{f^{-1}({}^gK)}\circ {}_{f^{-1}({}^gK)}G_G \longrightarrow {}_Hf(H)_{f(H)\cap {}^gK}\circ {}_{f(H)\cap {}^gK}G_G.$$

Para la segunda condición demostraremos sólo la primera igualdad, la otra tiene una prueba análoga. Sean $\alpha : H\to G$ con $Ker\alpha \in \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$, $b\in RB(G)$ y $n\in M(H)$, demostraremos

$$b\cdot M({}_GG_H)(n) = M({}_GG_H)(RB({}_HG_G)(b)\cdot n).$$

Supongamos $b = G/K$, entonces por el Lema 1.8

$$\begin{aligned} b \cdot M({}_G G_H)(n) &= M({}_G G_K \circ {}_K G_G \circ {}_G G_H)(n) \\ &= \sum_{g \in [K \backslash G/f(H)]} M({}_G G_K \circ {}_K K_{K \cap {}^g f(H)} \circ {}_{K \cap {}^g f(H)} {}^g f(H)_H)(n) \\ &= \sum_{g \in [K \backslash G/f(H)]} M({}_G G_{K \cap {}^g f(H)} \circ {}_{K \cap {}^g f(H)} {}^g f(H)_H)(n). \end{aligned}$$

Ahora,

$$RB({}_H G_G)(b) = \sum_{g \in [K \backslash G/f(H)]} \frac{H}{f^{-1}({}^{g^{-1}}K)},$$

así que

$$\begin{aligned} M({}_G G_H)(RB({}_H G_G)(b) \cdot n) &= \sum_{g \in [K \backslash G/f(H)]} M({}_G G_H \circ {}_H H_{f^{-1}({}^{g^{-1}}K)} \circ {}_{f^{-1}({}^{g^{-1}}K)} H_H)(n) \\ &= \sum_{g \in [K \backslash G/f(H)]} M({}_G G_{f^{-1}({}^{g^{-1}}K)} \circ {}_{f^{-1}({}^{g^{-1}}K)} H_H)(n), \end{aligned}$$

y tenemos un isomorfismo

$${}_G G_{f^{-1}({}^{g^{-1}}K)} \circ {}_{f^{-1}({}^{g^{-1}}K)} H_H \longrightarrow_G G_{K \cap {}^g f(H)} \circ {}_{K \cap {}^g f(H)} {}^g f(H)_H$$

$$[x, h] \longmapsto [{}^g x, {}^g f(h)].$$

$\square$

También podemos encontrar módulos sobre funtores con inflación. El grupo de Whitehead Wh y la K-teoría $K_1(\mathbb{Z}\,\_)$ son funtores de Mackey sobre el funtor de Green $\mathbb{G}_0(\mathbb{Z}\,\_)$.

Una consecuencia de este lema y del Lema 3.2.6 es la siguiente fórmula de inducción para funtores de Mackey.

Lema 3.2.12 (Dress)**.** *Sean $\mathcal{Z}'$ y $\mathcal{Z}$ clases de grupos cerradas bajo subgrupos y cocientes y $M \in Mac^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}_{R,\mathcal{Z}'}$. Supongamos que $\mathcal{Z}$ es subclase de $\mathcal{Z}'$. En $Mac^{1,1}_{R,\mathcal{Z}'}$ consideremos los morfismos*

$$M \downarrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{H}(\mathcal{Z})} \uparrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{H}(\mathcal{Z})} \xrightarrow{\xi_{\mathcal{H}(\mathcal{Z})}} M \xrightarrow{\zeta_{\mathcal{Z}}} M \downarrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}} \Uparrow^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{Z}} .$$

Entonces $M = Im\xi_{\mathcal{H}(\mathcal{Z})} + Ker\zeta_{\mathcal{Z}}$.

Prueba. Sea m en $M(G)$. Por el Lema 3.2.6 tenemos que $1_{RB(G)}$ se puede escribir como $\sum_{i=0}^{n} RB({}_GG_{K_i})x_i + y$ donde $K_i \leqslant G$ está en $\mathcal{H}(\mathcal{Z})$ y y en $\bigcap_{\substack{L\leqslant G\\ L\in\mathcal{Z}}} KerB({}_LG_G)$. Luego

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=0}^{n} RB({}_GG_{K_i})x_i \cdot m + y\cdot m \\ &= \sum_{i=0}^{n} M({}_GG_{K_i})(x_i \cdot M({}_{K_i}G_G)m) + y\cdot m \ , \end{aligned}$$

la última igualdad se debe a las relaciones de Frobenius. Ahora, como $M({}_LG_G)$ conmuta con la acción de RB, entonces $y\cdot m$ pertenece a $\bigcap_{\substack{L\leqslant G\\ L\in\mathcal{Z}}} KerM({}_LG_G)$. $\square$

A continuación probamos algunas propiedades de los primordiales para funtores de Green.

Lema 3.2.13. *Sean M y N funtores de Green en $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$, tenemos:*

i) Si $f: M \to N$ es un morfismo de funtores de Green, entonces

$$Prim(N) \subseteq Prim(M).$$

ii) Si N es subfuntor de M, entonces

$$\mathscr{P}(M) \subseteq \mathscr{P}(N) \subseteq \mathcal{H}(\mathscr{P}(M)).$$

Prueba. i) Sea H primordial para N y supongamos que $1_{M(H)} \in M(H)$ puede ser escrito como una combinación lineal de elementos de la forma $M({}_HH_K)m$ con K un subgrupo propio de H y $m \in M(K)$. Como $f_H : M(H) \to N(H)$ es un morfismo de R-álgebras unitarias que conmuta con biconjuntos, entonces $f_H(1_{M(H)}) = 1_{N(H)}$ también puede ser escrito de esta forma en $N(H)$, una contradicción. Por lo tanto, H es primordial para M.

ii) Siendo N subfuntor de M, por i) tenemos $\mathscr{P}(M) \subseteq \mathscr{P}(N)$.

Por otro lado, por el Lema 3.2.12, en $Mac_{R,\mathcal{Z}}^{1,1}$ tenemos $N = Im\xi_{\mathcal{H}(\mathscr{P}(M))} + Ker\zeta_{\mathscr{P}(M)}$. Probaremos que $Ker\zeta_{\mathscr{P}(M)} = 0$. Esto, de acuerdo al Lema 3.2.1 y a la Observación 3.2.3, implicará $\mathscr{P}(N) \subseteq \mathcal{H}(\mathscr{P}(M))$.

Nuevamente por el Lema 3.2.1 y la Observación 3.2.3, para cualquier $G \in \mathcal{Z}$ tenemos

$$1_{M(G)} = 1_{N(G)} = \sum_{\substack{K\leq G\\ K\in\mathscr{P}(M)}} M({}_GG_K)m_k$$

donde $1_{M(G)}$ representa la unidad de $M(G)$ y m_K es un elemento de $M(K)$. Ahora, si m es un elemento de $Ker\zeta_{\mathscr{P}(M)}(G)$, entonces

$$\begin{aligned}
m = 1_{M(G)} \cdot m &= \sum_{\substack{K \leqslant G \\ K \in \mathscr{P}(M)}} M({}_GG_K)(m_K) \cdot m \\
&= \sum_{\substack{K \leqslant G \\ K \in \mathscr{P}(M)}} M({}_GG_K)(m_K \cdot M({}_KG_G)m) \\
&= \sum_{\substack{K \leqslant G \\ K \in \mathscr{P}(M)}} M({}_GG_K)(m_K \cdot N({}_KG_G)m) \\
&= \sum_{\substack{K \leqslant G \\ K \in \mathscr{P}(M)}} M({}_GG_K)(m_K \cdot 0) = 0.
\end{aligned}$$

□

3.2.2. Inducción en el anillo de Green

A partir de ahora supondremos que k es un campo de característica $p > 0$. Todos los módulos que utilicemos serán finitamente generados.

Si G es un grupo y r es un primo, el subgrupo $O^r(G)$ de G se definió al principio de la sección 3.2.1, es el subgrupo normal de G más chico tal que $G/O^r(G)$ es un r-grupo. Por otro lado $O_r(G)$ es el r-subgrupo normal más grande de G.

Definición 3.2.14. Si q y r son primos, un grupo H se llama *q-hiperelemental* si $O^q(H)$ es cíclico, y *r-hipoelemental* si $H/O_r(H)$ es cíclico.

Nótese que H es q-hiperelemental si y sólo si $H = C \rtimes Q$ con Q un q-grupo y C un grupo cíclico de orden primo a q, y es r-hipoelemental si y sólo si $H = D \rtimes C$ donde D es un r-grupo y C es cíclico de orden primo a r. No es difícil probar que las clases de grupos q-hiperelementales y r-hipoelementales son cerradas bajo subgrupos y cocientes.

Notación 3.2.15. Escribiremos $\mathbb{Z}_m^*$ para los representantes no negativos más pequeños del grupo multiplicativo de unidades módulo m (el cual denotamos por $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$).

Definición 3.2.16. Sea $H = C \rtimes Q$ un grupo q-hiperelemental con $C =< x >$ de orden m primo a p. El grupo H es llamado *k-elemental* si la acción de cada $y \in Q$ en x está dada por $yxy^{-1} = x^a$ con $a \in I_m(k)$, donde $I_m(k) \subseteq \mathbb{Z}_m^*$ es el conjunto de representantes no negativos más pequeños de la imagen de $\mathcal{G}al(k(\omega)/k)$ bajo el morfismo inyectivo

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}al(k(\omega)/k) &\longrightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \\
\sigma &\longmapsto \overline{a}
\end{aligned}$$

si $\sigma(\omega) = \omega^a$ con $1 \leq a \leq m-1$, $(a, m) = 1$ y ω una raíz m-ésima primitiva de la unidad.

Escribimos $\mathcal{E}_k$ para la clase de grupos k-elementales.

En esta definición, podemos remplazar $I_m(k)$ por $I_n(k)$ con n cualquier múltiplo de m.

Definición 3.2.17. Para un primo q, un grupo H se llama *q-Dress* si $O^q(H)$ es p-hipoelemental.

No es difícil observar que $O^q(H)$ es p-hipoelemental si y sólo si $H/O_p(H)$ es q-hiperelemental. Si además de ser q-Dress, $H/O_p(H)$ es k-elemental, entonces H se llama *k-Dress* para q.

La clase de grupos q-Dress es cerrada bajo subgrupos y cocientes, la denotaremos por Dr_q. Análogamente, la clase de grupos k-Dress para algún primo será denotada por Dr_k. Finalmente, escribiremos Dr_p^* para la clase de grupos k-Dress tales que p divide al orden de $H/O_p(H)$; es decir, aquellos para los que $H/O_p(H) = C \rtimes D$ es k-elemental con D un p-grupo no trivial.

El Teorema de Inducción de Conlon (81.41 en Curtis y Reiner [11]) establece que $\mathrm{Prim}(\mathbb{Q} \otimes a(k\,\_))$ está contenida en la clase de grupos p-hipoelementales. En 1988, Jaques Thévenaz prueba en [19] que la contención inversa es también cierta. En este mismo artículo, Thévenaz conjetura que para $a(k\,\_)$ algo similar al Teorema de Witt-Berman debe ocurrir. Esta conjetura fue traducida por Raggi de la siguiente forma:

Conjetura 3.2.18. *Prim*$(a(k\,\_))$ *es la clase* Dr_k.

En las Proposicióntes 3.2.25 y 3.2.27 probamos resultados muy cercanos a esta conjetura.

Los siguientes resultados sobre módulos de fuente trivial pueden encontrarse en Benson [3] y en Curtis y Reiner [11].

Recordemos que para un kG-módulo es equivalente ser (G, H)-proyectivo y ser un sumando directo de $L\uparrow_H^G$ para algún kH-módulo L. Si M es un kG-módulo inescindible, entonces existe un subgrupo D para el cual M es (G, D)-proyectivo y $D \leqslant_G H$ para cualquier subgrupo H para el cual M sea (G, H)-proyectivo, dicho grupo D es llamado un *vértice* de M. En este caso, si L es un kD-módulo inescindible tal que M es un sumando directo de $L\uparrow_D^G$, entonces L es llamado una *fuente* de M.

Definición 3.2.19. Se dice que un módulo M tiene *fuente trivial* si el campo k es una fuente de M.

No es difícil probar que M tiene fuente trivial si y sólo si M es un sumando directo de un módulo de permutaciones.

Puede probarse que cualesquiera dos vértices de M son conjugados en G, y que cualesquiera dos fuentes de M son conjugadas por un elemento en $N_G(D)$. Como estamos suponiendo que k es un campo de característica p, un vértice de M es un p-subgrupo de G.

Probamos la siguiente propiedad de los módulos de fuente trivial, la cual será usada después.

Lema 3.2.20. *La inducción tensorial de un módulo de fuente trivial es nuevamente un módulo de fuente trivial.*

Prueba. Denotaremos la inducción tensorial de H a G por $\uparrow_H^{G^{\otimes}}$. Si B es un kH-módulo de fuente trivial, entonces es un sumando directo de un módulo de permutaciones, digamos $\oplus_{a\in[H/K]} k = B \oplus A$. En la prueba de la Proposición 3.15.2 *iii*) en Benson [3], es fácil observar que la inducción tensorial de un módulo de permutaciones es un módulo de permutaciones. Por esta misma proposición, en el lado derecho de la igualdad anterior tenemos $B\uparrow_H^{G^{\otimes}} \oplus A\uparrow_H^{G^{\otimes}} \oplus X$, donde X es suma de módulos inducidos desde subgrupos propios de G. $\square$

El siguiente corolario al Teorema de Inescindibilidad de Green, 19.22 en Curtis y Reiner [11], será utilizado en lo sucesivo, así como el siguiente lema.

Corolario 3.2.21 (19.23 in Curtis y Reiner [11])**.** *Supongamos que G es un p-grupo y H es un subgrupo arbitrario. Si L es un kH-módulo absolutamente inescindible (es decir $k' \otimes L$ es inscindible para toda k' extensión de campos de k), entonces $L\uparrow_H^G$ es un kG-módulo absolutamente inescindible.*

Lema 3.2.22. *Sean H un grupo y M un kG-módulo inescindible para $G \leqslant H$. Supongamos que existe un kH-módulo inescindible de fuente trivial U que es sumando directo de $M\uparrow_G^H$. Supongamos también que si $|H/O_p(H)|$ es divisible por p, entonces M es de fuente trivial. Entonces*

i) $O_p(H)$ está contenido en un vértice de M y actúa trivialmente en M.

ii) Cualquier sumando inescindible V de $M\uparrow_G^H$ es de fuente trivial, $O_p(H)$ está contenido en un vértice de V y actúa trivialmente en V.

Prueba. Sea D un vértice de U que contiene $O_p(H)$. Si D_1 y S son un vértice y una fuente de M, respectivamente, entonces $O_p(H) \subseteq D_1 \subseteq G$ (ya que U es un sumando directo de $S\uparrow_{D_1}^H$). Si $|H/O_p(H)|$ es un p'-número, entonces $O_p(H) = U = D_1$, ya que U y D_1 son p-grupos. Esto implica que S es una fuente de U y por lo tanto, que M tiene fuente trivial. De esto obtenemos que V tiene fuente trivial.

Como M es un sumando de $k\uparrow_{D_1}^G$, entonces $M\downarrow_{O_p(H)}^G$ es un sumando de $k\uparrow_{D_1}^G\downarrow_{O_p(H)}^G$. Por la fórmula de Mackey, este último es isomorfo a $\bigoplus_a k$, con $a \in [G/D_1]$, luego $M\downarrow_{O_p(H)}^G$ es isomorfo a una suma de k. Con esto hemos probado i), y por el mismo argumento tenemos que $O_p(H)$ actúa trivialmente en V.

Finalmente, si A es un vértice de V, entonces $V\downarrow_{O_p(H)}^H \cong \bigoplus k$ es un sumando de $k\uparrow_A^H\downarrow_{O_p(H)}^H$, que es isomorfo a $\bigoplus_b k\uparrow_{O_p(H)\cap A}^{O_p(H)}$. Pero por el Corolario 3.2.21, tenemos que $k\uparrow_{O_p(H)\cap A}^{O_p(H)}$ es inescindible, luego para algún b debemos tener $k \cong k\uparrow_{O_p(H)\cap A}^{O_p(H)}$, así que $O_p(H)$ está contenido en A. $\square$

No es difícil probar que si consideramos el grupo abeliano libre con base las clases de isomorfismo de kG-módulos inescindibles de fuente trivial, éste es un subanillo del anillo de Green $a(kG)$. Denotaremos a este subanillo por $a(kG, \text{triv})$. De hecho $a(k\,\_, \text{triv})$ es un funtor de Green y un subfuntor de $a(k\,\_)$.

Lema 3.2.23.

i) *$Prim(a(k\,\_))$ y $Prim(a(k\,\_, triv))$ son clases de grupos cerradas bajo subcocientes.*

ii) $\mathcal{E}_k \subseteq Prim(a(k\,\_)) \subseteq Prim(a(k\,\_, triv)) \subseteq \bigcup_q Dr_q$.

Prueba. i) La prueba es la misma para ambos funtores, así que A representará cualquiera de los dos.

Primero, sean G un grupo primordial para A y H un subgrupo de G. Por el Lema 3.2.20, la inducción tensorial es un morfismo de R-módulos de $M(H)$ a $M(G)$, y claramente manda la clase del campo k en sí misma. Supongamos que k puede escribirse como combinación lineal de módulos inducidos desde subgrupos propios de H, entonces, por iii) y iv) de la Proposición 3.15.2 en Benson [3], su imagen es también una combinación lineal de módulos inducidos desde subgrupos propios de G. Esto contradice que G sea primordial para M.

Ahora tomemos G/K, un cociente G, y consideremos el morfismo inflación que va de $M(G/K)$ a $M(G)$. Nuevamente, la clase del campo k es invariante bajo la inflación, así que si puede escribirse como una combinación lineal de módulos inducidos desde subgrupos propios de G/K, entonces, estos pueden verse como módulos inducidos desde subgrupos propios de G, lo que es una contradicción.

ii)En la categoría $Mac^{1,1}_{R,\mathcal{Z}}$ tenemos los morfismos

$$a(k\,\_) \to G_0(k\,\_) \quad \text{y} \quad a(k\,\_, \text{triv}) \hookrightarrow a(k\,\_),$$

el primero manda la clase $[T]$ en $a(kH)$ a la clase de T en $G_0(kH)$. Son morfismos en esta categoría ya que conmutan con la inducción y la restricción de módulos. Así que, por el Lema 3.2.13, tenemos

$$\text{Prim}(G_0(k\,\_)) \subseteq \text{Prim}(a(k\,\_)) \subseteq \text{Prim}(a(k\,\_, \text{triv}))$$

y de acuerdo al artículo de Raggi [17], $\text{Prim}(G_0(k\,\_)) = \mathcal{E}_k$.

Por otro lado, también tenemos un morfismo $a(k\,\_, \text{triv}) \hookrightarrow \mathbb{Q} \otimes a(k\,\_)$. Ahora, de acuerdo a la Sección 10 en Thévenaz [19], tenemos que $\text{Prim}(\mathbb{Q} \otimes a(k\,\_))$ es la clase p-Hypo. Luego, por el Lema 3.2.13, tenemos

$$\text{Prim}(a(k\,\_, \text{triv})) \subseteq \mathcal{H}(p\text{-Hypo})$$

y no es difícil probar que $\mathcal{H}(p\text{-Hypo}) = \bigcup_q Dr_q$. $\square$

Teorema 3.2.24 (3.2 en [18])**.** *$Prim(a(k\_,\ triv)) = Dr_k$.*

La prueba está dada por las Proposiciones 3.2.25 y 3.2.27.

Con la Proposición 3.2.27 concluiremos que todo grupo primordial para $a(k\_)$ es k-Dress para algún primo. Por otro lado, la siguiente proposición muestra que todo grupo k-Dress para algún primo distinto de p es primordial para $a(k\_)$. Con respecto al caso general, la dificultad radica en que si p divide a $[H : O_p(H)]$, entonces las técnicas que utilizamos (específicamente el Lema 3.2.22) no son efectivas para módulos que no sean de fuente trivial.

Proposición 3.2.25.

i) $Dr_k \setminus Dr_p^* \subseteq Prim(a(k\_))$.

ii) $Dr_p^* \subseteq Prim(a(k\_,\ triv))$.

Prueba. Probaremos ambos enunciados simultáneamente por contradicción. Sea H un grupo k-Dress. Tenemos dos casos:

- $H/O_p(H)$ no es divisible por p: En este caso suponemos que H no es primordial para $a(k\_)$, para probar i).
- $H/O_p(H)$ es divisible por p: Suponemos que H no es primordial para $a(k\_,\ \mathrm{triv})$, para probar ii).

En ambos casos, k puede escribirse como combinación lineal de módulos inducidos desde subgrupos propios de H

$$k \oplus \Big(\bigoplus_i M_i {\uparrow}_{L_i}^H \Big) \cong \bigoplus_j N_j {\uparrow}_{T_j}^H .$$

Como el k es un módulo de fuente trivial y vértice conteniendo $O_p(H)$, buscamos en este isomorfismo aquellos sumandos inescindibles que sean de esta forma. En el primer caso, por el Lema 3.2.22, la existencia de un sumando de este tipo en $M_i \uparrow_{L_i}^H$ (o $N_j \uparrow_{T_j}^H$) nos asegura que M_i (o N_j) tiene fuente trivial. Como en el segundo caso estamos suponiendo ya que son módulos de fuente trivial, los argumentos siguiente son válidos para ambos casos. Nuevamente, por el Lema 3.2.22, la existencia de un sumando de esta forma en $M_i \uparrow_{L_i}^H$ (o $N_j \uparrow_{T_j}^H$), implica que todos sus sumandos inescindibles tienen fuente trivial y vértice conteniendo $O_p(H)$. Luego, por el Teorema de Krull-Schmidt, podemos cancelar todos aquellos sumandos que no satisfagan esta hipótesis, y suponer finalmente que todo M_i y N_j tiene fuente trivial, vértice conteniendo a $O_p(H)$ y que éste actúa trivialmente en M_i y N_j. Tomamos entonces los cocientes

$$k \oplus \Big(\bigoplus_i M_i {\uparrow}_{L_i/O_p(H)}^{H/O_p(H)} \Big) \cong \bigoplus_j N_j {\uparrow}_{T_j/O_p(H)}^{H/O_p(H)} .$$

Pero este isomorfismo es un igualdad en $a(k(H/O_p(H)), \mathrm{triv})$, el cual está contenido en $a(k(H/O_p(H)))$. Como $H/O_p(H)$ es k-elemental, el Lema 3.2.23 nos da una contradicción. $\square$

Lema 3.2.26. *Si H es un grupo de orden mínimo que es q-Dress y no es k-Dress, entonces H es de la forma*

$$H =< x > \rtimes < y > \ \textit{where} \ \ | < x > | = r, \quad | < y > | = q^n$$

con r y q primos diferentes y $yxy^{-1} = x^a$ con $a \in \mathbb{Z}_r^* \setminus I_r(k)$.

Prueba. Como H es q-Dress, entonces $H/O_p(H)$ es q-Dress, pero como no es k-elemental y $O_p(H/O_p(H)) = 1$, entonces $H/O_p(H)$ no es k-Dress. Luego, la minimalidad en el orden implica $O_p(H) = 1$. Así que $H = C \rtimes Q$ con $C =< s >$ cíclico de orden m y Q un q-grupo tal que m no es divisible por p ni por q. Ahora, como H no es k-elemental, existe $y \in Q$ tal que $ysy^{-1} = s^a$ con $a \in \mathbb{Z}_m^* \setminus I_m(k)$, así que $H = C \rtimes C_{q^n}$, con C_{q^n} cíclico de orden q^n y generado por y.

Ahora, $C = \prod_i C_{r_i}$, donde C_{r_i} es el r_i-Sylow subgrupo de C y los r_i son los primos divisores de m, así que

$$C \rtimes C_{q^n} = \prod_i (C_{r_i} \rtimes C_{q^n}).$$

Además, si ω es una raíz m-ésima primitiva de la unidad, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}al(k(\omega)/k) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] & (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \arrow[d, "\cong"] \\ \prod_i \mathcal{G}al(k(\omega^{m/r_i^{\alpha_i}})/k) \arrow[r, hook] & \prod_i (\mathbb{Z}/r_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^* \end{tikzcd}$$

donde α_i es el entero positivo más grande tal que $r_i^{\alpha_i}$ divide a m. Luego, existe i tal que $C_{r_i} \rtimes C_{q^n}$ no es k-elemental. Escribimos ahora $C_{r_i} = C_{r^\alpha}$, y tenemos $H = C_{r^\alpha} \rtimes C_{q^n}$, donde $C_{r^\alpha} =< x_o >$, $C_{q^n} =< y >$ y $yx_oy^{-1} = x_o^a$ con $a \in \mathbb{Z}_{r^\alpha}^* \setminus I_{r^\alpha}(k)$.

Finalmente, tomamos ζ una r^α-ésima raíz primitiva de la unidad. Tenemos entonces

$$\mathcal{G}al(k(\zeta)/k) \cong \mathcal{G}al(k(\zeta)/k(\zeta^{r^{\alpha-1}})) \times \mathcal{G}al(k(\zeta^{r^{\alpha-1}})/k)$$

y $(\mathbb{Z}/r^\alpha\mathbb{Z})^* \cong A_{r^{\alpha-1}} \times A_{r-1}$, estos grupos tienen órdenes $r^{\alpha-1}$ y $r-1$ respectivamente. El morfismo

$$\mathcal{G}al(k(\zeta)/k) \hookrightarrow (\mathbb{Z}/r^\alpha\mathbb{Z})^*$$

manda $\mathcal{G}al(k(\zeta)/k(\zeta^{r^{\alpha-1}}))$ en $A_{r^{\alpha-1}}$ y $\mathcal{G}al(k(\zeta^{r^{\alpha-1}})/k)$ en A_{r-1}, que es isomorfo a $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^*$, así que tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}al(k(\zeta)/k) \arrow[r, hook] \arrow[d] & (\mathbb{Z}/r^\alpha\mathbb{Z})^* \arrow[d] \\ \mathcal{G}al(k(\zeta^{r^{\alpha-1}})/k) \arrow[r, hook] & (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^*. \end{tikzcd}$$

Ahora, tenemos $a^{q^n} \equiv 1 \bmod r^\alpha$, así que r no divide al orden de a módulo r^α, y por lo tanto $a \in \mathbb{Z}_r^*$. Como a no está en $I_{r^\alpha}(k)$, tenemos $a \in \mathbb{Z}_r^* \setminus I_r(k)$. Tomando $x = x_o^{r^{\alpha-1}}$ obtenemos el resultado.

$\square$

Proposición 3.2.27. *Prim*$(a(k\,\_, \text{triv})) \subseteq Dr_k$.

Prueba. Procedemos por contradicción. Sea H en $\text{Prim}(a(k\,\_, \text{triv}))$ que no sea k-Dress de orden mínimo. Nótese que el lema anterior es también válido si H satisface una propiedad que se preserva bajo subgrupos y cocientes y que implica ser q-Dress. Como esto ocurre para los primordiales de $a(k\,\_, \text{triv})$, del lema anterior obtenemos $H = C \rtimes Q$ con $C =< x >$ de orden r y $Q =< y >$ de orden q^n con r y q primos distintos y $yxy^{-1} = x^a$ con $a \in \mathbb{Z}_r^* \setminus I_r(k)$.

Escribiremos 1_H para identificar el campo k como kH-módulo. Probaremos que 1_H es suma de módulos inducidos desde subgrupos propios de H, contradiciendo la hipótesis de primordialidad.

La imagen de 1_Q bajo el morfismo de inducción $1_Q{\uparrow}_Q^H$ es isomorfa, como espacio vectorial, a $\bigoplus_{i=0}^{r-1} kx^i \otimes_Q 1_Q$. Si ω es una raíz r-ésima primitiva de la unidad, entonces el $k(\omega)H$-módulo $k(w) \otimes 1_Q{\uparrow}_Q^H$ como $k(w)$-espacio vectorial tiene la siguiente base

$$\{x^i \otimes_Q 1_Q \mid i = 0, \ldots, r-1\}.$$

Podemos definir otra base $y_t := \sum_{i=0}^{r-1} \omega^{-ti}(x^i \otimes_Q 1_Q)$ para $t = 0, \ldots, r-1$. Para probar que es base, observemos que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \ldots & \omega^{-j} & \ldots & \omega^{-(r-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(r-1)} & \ldots & \omega^{-j(r-1)} & \ldots & \omega^{-(r-1)^2} \end{pmatrix}$$

tiene determinante igual a $\prod_{i \neq j}(\omega^{-i} - \omega^{-j})$, el cual es distinto de 0 ya que ω es una raíz r-ésima primitiva de la unidad.

H actúa en esta base de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
xy_t &= \sum_{i=0}^{r-1} \omega^{-ti}(x^{i+1} \otimes_Q 1_Q) \quad \text{si } j = i+1, \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \omega^{-t(j-1)}(x^{j} \otimes_Q 1_Q) = \omega^t y_t \\
yy_t &= \sum_{i=0}^{r-1} \omega^{-ti}(yx^{i} \otimes_Q 1_Q) = \sum_{i=0}^{r-1} \omega^{-ti}(x^{ai} \otimes_Q 1_Q) \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} \omega^{-tbi}(x^{i} \otimes_Q 1_Q) = y_{t'}
\end{aligned}$$

donde $b \in \mathbb{Z}_r^*$ es tal que $\overline{b}\overline{a} = 1$ en $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^*$, y $0 \leq t' \leq r-1$ satisface $t' \equiv tb \bmod r$. De estas relaciones vemos que y_0 queda fijo bajo la acción de H, así que $k(\omega)y_0$ es $k(\omega)H$-isomorfo a $k(\omega)$ y tenemos

$$k(\omega) \otimes 1_Q {\uparrow}_Q^H \cong k(\omega) \oplus \left(\sum_{t=1}^{r-1} k(\omega) y_t \right).$$

Es claro que $\mathcal{G} = \mathcal{G}al(k(\omega)/k)$ actúa en $k(\omega) \otimes 1_Q {\uparrow}_Q^H$. Tomando los puntos fijos de esta acción en el isomorfismo de arriba obtenemos

$$1_Q {\uparrow}_Q^H \cong 1_H \oplus \left(\sum_{t=1}^{r-1} k(\omega) y_t \right)^{\mathcal{G}}.$$

Sea σ en $\mathcal{G}$, escribimos $b_\sigma \in I_r(k)$ para el entero a través del cual σ está definido. Tenemos

$$\sigma y_t = \sum_{i=0}^{r-1} \sigma(\omega^{-ti})(x^i \otimes 1) = \sum_{i=0}^{r-1} \omega^{-tb_\sigma i}(x^i \otimes 1) = y_s$$

donde $0 \leq s \leq r-1$ y $s \equiv tb_\sigma \bmod r$. Si $u = \sum_{t=1}^{r-1} \lambda_t y_t$ está en $(\sum_{t=1}^{r-1} k(\omega)y_t)^{\mathcal{G}}$, entonces para cada $t \in \mathbb{Z}_r^*$ debemos tener $\sigma(\lambda_t) = \lambda_s$, donde $s \in \mathbb{Z}_r^*$ y $s \equiv tb_\sigma \bmod r$. De aquí definimos los espacios vectoriales

$$M_l := \left\{ \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \sigma(\lambda_l) y_s \,\middle|\, s \equiv lb_\sigma \bmod r,\ \lambda_l \in k(\omega) \right\}$$

para cada $l \in \mathbb{Z}_r^*$. Claramente $M_{l_1} = M_{l_2}$ si y sólo si $l_1 \equiv l_2 b_\sigma \bmod r$ para algún $\sigma \in \mathcal{G}$, esto implica que

$$\left(\sum_{t=1}^{r-1} k(\omega) y_t \right)^{\mathcal{G}} = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}_r^*/I_r(k)} M_l.$$

Probaremos ahora que el lado derecho de esta igualdad es suma de módulos inducidos desde subgrupos propios de H. Tenemos $xM_l = M_l$ y $yM_l = M_{l'}$ con $l' \in \mathbb{Z}_r^*$ y $l' \equiv lb \mod r$. Como a no pertenece a $I_r(k)$, entonces b tampoco, así que M_l nunca queda fijo bajo la acción de y. Es decir M_l no es un kH-módulo. Tomando las órbitas bajo la acción de y tenemos

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{t=1}^{r-1} k(\omega)y_t\right)^{\mathcal{G}} &= \bigoplus_{l \in \frac{\mathbb{Z}_r^*/I_r(k)}{\sim}} \Big(\bigoplus_{z \in [H/A]} zM_l \Big) \\
&= \bigoplus_{l \in \frac{\mathbb{Z}_r^*/I_r(k)}{\sim}} \big(M_l \uparrow_A^H \big)
\end{aligned}
$$

donde $A = Stab_H(M_l)$, y $\sim$ representa la acción de y. Es claro que A es un subgrupo propio H. Finalmente, notemos que M_l es un kA-módulo de fuente trivial. Si $A = C_r \rtimes < y^d >$, entonces M_l es un sumando directo de $\big(\sum_{\sigma \in \mathcal{G}} ky_s\big) \uparrow_{<y^d>}^A$, donde $s \in \mathbb{Z}_r^*$ y $s \equiv lb_\sigma \mod r$. Como $ky_s \cong k$, entonces M_l tiene fuente trivial. $\square$

Capítulo 4

Funtores de Green

En este capítulo supondremos que $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son iguales a la clase de todos los grupos finitos. Además, supondremos que $\mathcal{Z}$ es una clase cerrada bajo subcocientes y bajo productos directos, es decir, si H y K están en $\mathcal{Z}$, entonces $H \times K$ también está en $\mathcal{Z}$. Escribiremos $\Omega_{R,\mathcal{Z}}$ para $\Omega_{R,\mathcal{Z}}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ y $Mac_{R,\mathcal{Z}}$ para los funtores de Mackey definidos en $\Omega_{R,\mathcal{Z}}$.

Si U es un (H, G)-biconjunto finito y U' es un (H', G')-biconjunto finito, entonces el producto cartesiano $U \times U'$ tiene una estructura natural de $(H \times H', G \times G')$-biconjunto finito, dada por

$$(h, h')(u, u')(g, g') = (hug, h'u'g').$$

Por linealidad, esta construcción nos da una función

$$A_R(H, G) \times A_R(H', G') \to A_R(H \times H', G \times G')$$

denotada igualmente por $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \times \beta$.

Si H está en $\mathcal{Z}$ y M está definido en $\Omega_{R,\mathcal{Z}}$, entonces podemos definir el funtor M_H que a cada grupo G asigna $M(G \times H)$. En flechas se define de la siguiente forma: Si Y es un elemento en $A_R(K, G)$, entonces $Y \times H$ pertenece a $A_R(K \times H, G \times H)$, luego

$$M_H(Y) : M(G \times H) \longrightarrow M(K \times H) \quad m \mapsto M(Y \times H)(m).$$

Veamos que es un funtor de Mackey, esto significa probar que preserva la composición. Supongamos que $Y \in A_R(K, G)$ y $X \in A_R(D, K)$ son biconjuntos, hay que probar

$$M(X \times H)(M(Y \times H)(m)) = M((X \circ Y) \times H)(m)$$

para toda m en $M(K \times G \times H)$. Bastará entonces probar que

$${}_{D\times H}X \times H_{K\times H} \circ {}_{K\times H}Y \times H_{G\times H} \cong ({}_D X_K \circ {}_K Y_G) \times {}_H H_H,$$

son isomorfos como $(D \times H,\, K \times H)$-biconjuntos, pero es claro que la función

$$[(x,\, h_1),\, (y,\, h_2)] \longmapsto ([x,\, y],\, h_1 h_2)$$

nos da el isomorfismo requerido.

De hecho, si $f : M \to N$ es una transformación natural entre dos funtores de Mackey, entonces ésta induce una transformación natural $f_H : M_H \to N_H$. Si G es un grupo, claramente

$$f_{G\times H} : M(G \times H) \to N(G \times H)$$

es natural en G.

Ahora, si M y N son objetos en $Mac_{R,\,\mathcal{Z}}$, denotaremos por $\mathcal{H}(M,\, N)$ al siguiente funtor: En un grupo $H \in \mathcal{Z}$ se define como $\mathcal{H}(M,\, N)(H) = Hom_{\mathcal{Z}}(M,\, N_H)$. Si $\alpha \in A_R(K,\, H)$, entonces

$$\mathcal{H}(M,\, N)(\alpha) : Hom_{\mathcal{Z}}(M,\, N_H) \longrightarrow Hom_{\mathcal{Z}}(M,\, N_K)$$

en un elemento $f \in Hom_{\mathcal{Z}}(M,\, N_H)$ y en un grupo $G \in \mathcal{Z}$ se define como $N(G \times \alpha) \circ f_G$.

Para ver que $\mathcal{H}(M,\, N)$ es un funtor de Mackey, basta probar que preserva la composición. Sean $X \in A_R(K,\, H)$, $Y \in A_R(H,\, D)$ y supongamos que son biconjuntos. Entonces $\mathcal{H}(M,\, N)(X \circ Y)$ manda $f \in Hom_{\mathcal{Z}}(M,\, N_D)$ en el morfismo

$$G \longmapsto M(G \times (X \circ Y)) \circ f_G.$$

Por otro lado, $\mathcal{H}(M,\, N)(X) \circ \mathcal{H}(M,\, N)(Y)$ manda f en

$$G \longmapsto M(G \times X) \circ (M(G \times Y) \circ f_G).$$

De manera análoga a como hicimos arriba, tenemos

$$G \times (X \circ Y) \cong (G \times X) \circ (G \times Y),$$

lo que prueba que $\mathcal{H}(M,\, N)$ es un funtor de Mackey.

El producto tensorial de funtores de Mackey, que definimos a continuación, será adjunto izquierdo de $\mathcal{H}(M,\, N)$.

Un estudio más detallado sobre M_H y $\mathcal{H}(M,\, N)$ puede encontrarse en el Capítulo 8 de Bouc [9].

4.1. Producto tensorial

Definición 4.1.1. Sean L y T dos grupos en $\mathcal{Z}$, definimos

$$A_R(\_,\, L) \otimes A_R(\_,\, T) := A_R(\_,\, L \times T).$$

Lema 4.1.2. *Para cualquier funtor P en $Mac_{R,\mathcal{Z}}$, tenemos*

$$Hom_{\mathcal{Z}}(A_R(\_,T),\,\mathcal{H}(A_R(\_,L),\,P)) \cong Hom_{\mathcal{Z}}(A_R(\_,L)\otimes A_R(\_,T),P)$$

como R-módulos. Este isomorfismo es natural en P.

Prueba. Dado un grupo H en $\mathcal{Z}$ tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(A_R(\_,L),\,P)(H) &:= Hom_{\mathcal{Z}}(A_R(\_,L),\,P_H)\\ &\cong P_H(L) = P(L\times H),\end{aligned}$$

por el Lema de Yoneda. De aquí obtenemos

$$\begin{aligned}Hom_{\mathcal{Z}}(A_R(\_,T),\,\mathcal{H}(A_R(\_,L),\,P)) &\cong \mathcal{H}(A_R(\_,L),\,P)(T)\\ &\cong P(L\times T).\end{aligned}$$

Por otro lado, $P(L\times T)$ es isomorfo a $Hom_{\mathcal{Z}}(A_R(\_,L)\otimes A_R(\_,T),P)$.

Como todos los isomorfismos están dados por el Lema de Yoneda, este isomorfismo es natural in P. □

Ahora consideremos el álgebra de Mackey definida por Webb en [20]:

$$\mu_{\mathcal{Z}} = \bigoplus_{G,\,H\in\overline{\mathcal{Z}}} A_R(G,\,H).$$

Si para cada funtor de Mackey M, definimos $\widetilde{M}$ como $\bigoplus_{H\in\overline{\mathcal{Z}}} M(H)$, entonces $\widetilde{M}$ es un $\mu_{\mathcal{Z}}$-modulo.

Los siguientes definición y lema siguen las ideas del Capítulo 1 en Bouc [8].

Definición 4.1.3. Sea H un grupo en $\mathcal{Z}$. Si M y N son funtores de Mackey, entonces $M\otimes_1 N$ se define en H como $\widetilde{M}\otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}}\widetilde{N_H}$.

Como $\mu_{\mathcal{Z}}$ es isomorfa a $\mu_{\mathcal{Z}}^{op}$, está definición tiene sentido. No es difícil verificar que esta asignación en $\mathcal{Z}$ define un funtor: Si ${}_GX_H$ es un biconjunto en $\Omega_{R,\mathcal{Z}}$, entonces $M\otimes_1 N(X)$ se define a través de N_H.

Lema 4.1.4.

a) Para cualquier par de funtores de Mackey M y N tenemos

$$\widetilde{M}\otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}}\widetilde{N} \cong \Big(\bigoplus_{K\in\overline{\mathcal{Z}}} M(K)\otimes_R N(K)\Big)/\mathcal{I}$$

donde $\mathcal{I}$ es el R-submódulo generado por elementos de la forma

$$M({}_GX^o{}_K)(m)\otimes_R n - m\otimes_R N({}_KX_G)(n)$$

donde m está en $M(K)$, n está en $N(G)$ y X^o denota el $(G,\,K)$-biconjunto X con la acción opuesta de $(K,\,G)$.

b) En el caso de $M \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} N_H$, el isomorfismo anterior es natural en H.

Prueba. a) Denotemos por P al lado derecho del isomorfismo y por π a la proyección de $\bigoplus_{K\in\overline{\mathcal{Z}}} M(K) \otimes_R N(K)$ en P. Como $M(K) \subseteq \widetilde{M}$ y $N(K) \subseteq \widetilde{N}$, podemos definir θ de $\bigoplus_{K\in\overline{\mathcal{Z}}} M(K) \otimes_R N(K)$ en $\widetilde{M} \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} \widetilde{N}$ que manda $m \otimes_R n$ en $m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n$. Este morfismo se extiende a P ya que $\theta(M({}_GX^o{}_K)(m) \otimes_R n - m \otimes_R N({}_KX_G)(n))$ es igual a

$$\begin{aligned} M({}_GX^o{}_K)(m) \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n - m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} N({}_KX_G)(n) &= m \cdot {}_KX_G \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n - m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} {}_KX_G \cdot n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora definimos θ' de $\widetilde{M} \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} \widetilde{N}$ en P. Sean m en $\widetilde{M}$ y n en $\widetilde{N}$, entonces $m = \sum_{j=1}^{t} {}_{K_j}{K_j}_{K_j} \cdot m$ y $n = \sum_{i=1}^{r} {}_{L_i}{L_i}_{L_i} \cdot n$ con $K_j,\, L_i \in \overline{\mathcal{Z}}$, así que

$$\begin{aligned} m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n &= \sum_{i,j} {}_{K_j}{K_j}_{K_j} \cdot m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} {}_{L_i}{L_i}_{L_i} \cdot n \\ &= \sum_{i,j} m \cdot {}_{K_j}{K_j}_{K_j} \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} {}_{L_i}{L_i}_{L_i} \cdot n \\ &= \sum_{\substack{i,j \ t.q. \\ K_j = L_i}} m \cdot {}_{K_j}{K_j}_{K_j} \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} {}_{L_i}{L_i}_{L_i} \cdot n \end{aligned}$$

luego, utilizando esta expresión, θ' manda $m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n$ en $\pi(\sum_{\substack{i,j \ t.q. \\ K_j = L_i}} {}_{K_j}{K_j}_{K_j} \cdot m \otimes_R {}_{L_i}{L_i}_{L_i} \cdot n)$. Este morfismo está bien definido ya que

$$\begin{aligned} \theta'(m \cdot {}_GX_L \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n) &= \theta'({}_LX^o{}_G \cdot m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n) \\ &= \pi({}_LL_L \circ {}_LX^o{}_G \cdot m \otimes_R {}_LL_L \cdot n) \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\theta'(m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} {}_GX_L \cdot n) = \pi({}_GG_G \cdot m \otimes_R {}_GG_G \circ {}_GX_L \cdot n).$$

Ahora,

$${}_LL_L \circ {}_LX^o{}_G \cdot m \otimes_R {}_LL_L \cdot n - {}_GG_G \cdot m \otimes_R {}_GG_G \circ {}_GX_L \cdot n$$

es igual a

$$M({}_LX^o{}_G)(m_1) \otimes_R n_1 - m_1 \otimes_R N({}_GX_L)(n_1)$$

donde $m_1 = {}_GG_G \cdot m$ y $n_1 = {}_LL_L \cdot n$, y esta diferencia está en $\mathcal{I}$ por lo que

$$\theta'(m \cdot {}_GX_L \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n) = \theta'(m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} {}_GX_L \cdot n).$$

Para verificar que θ y θ' son inversas, sean m en $M(H)$ y n en $N(H)$

$$\begin{aligned}\theta'\theta(\pi(m \otimes_R n)) &= \pi({}_H H_H \cdot m \otimes_R {}_H H_H \cdot n) \\ &= \pi(m \otimes_R n)\end{aligned}$$

Por otro lado, sean m en $\widetilde{M}$ y n en $\widetilde{N}$, entonces

$$\begin{aligned}\theta\theta'(m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n) &= \theta\theta'\Big(\sum_{i=1}^{r} {}_{L_i}L_{iL_i} \cdot m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} {}_{L_i}L_{iL_i} \cdot n\Big) \\ &= \theta\pi\Big(\sum_{i=1}^{r} {}_{L_i}L_{iL_i} \cdot m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} {}_{L_i}L_{iL_i} \cdot n\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{r} {}_{L_i}L_{iL_i} \cdot m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} {}_{L_i}L_{iL_i} \cdot n \\ &= m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n.\end{aligned}$$

b) Definimos el funtor T como

$$T(H) = \Big(\bigoplus_{K \in \overline{\mathcal{Z}}} M(K) \otimes_R N(K \times H)\Big)/\mathcal{I}$$

$$\mathcal{I} = \langle M({}_G X^o{}_K)(m) \otimes_R n - m \otimes_R N({}_{K\times H}X \times H_{G\times H})(n)\rangle$$

donde m está en $M(K)$, n está en $N(G \times H)$ y ${}_K X_G$ es un biconjunto. En flechas se define a través de N_H, es decir dado ${}_L Y_H$, se define extendiendo la función que manda $m \otimes_R n$ en $m \otimes_R (N({}_{K\times L}K \times Y_{K\times H})(n))$, si m está en $M(K)$ y n está en $N(K \times H)$.

Debemos probar la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} \widetilde{N_H} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\widetilde{M}\otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} Y"'] & T(H) \arrow[d, "T(Y)"] \\ \widetilde{M} \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} \widetilde{N_L} \arrow[r, "\cong"'] & T(L). \end{tikzcd}$$

Sea $m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n$ en $\widetilde{M} \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} \widetilde{N_H}$, entonces

$$m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n = \sum_{i=1}^{r} {}_{K_i}K_{iK_i} \cdot m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} {}_{K_i}K_{iK_i} \cdot n$$

así que $\theta'(m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n) = \pi\Big(\sum_{i=1}^{r} {}_{K_i}K_{iK_i} \cdot m \otimes_R {}_{K_i}K_{iK_i} \cdot n\Big)$. Aplicar $T(Y)$ a esto nos da

$$\pi\Big(\sum_{i=1}^{r} {}_{K_i}K_{iK_i} \cdot m \otimes_R ({}_{K_i\times L}K_i \times Y_{K_i\times H} \circ {}_{K_i\times H}K_i \times H_{K_i\times H} \cdot n)\Big).$$

Por otro lado, $(\widetilde{M} \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} Y)(m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n)$ es igual a

$$\sum_{i=1}^{r} {}_{K_i}K_{i K_i} \cdot m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} ({}_{K_i \times L}K_i \times Y_{K_i \times H} \circ {}_{K_i \times H}K_i \times H_{K_i \times H} \cdot n).$$

Así que claramente θ' es natural en H.

Ahora sea $m \otimes_R n$ en $M(K) \otimes_R N(K \times H)$, entonces $\theta(m \otimes_R n) = m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} n$ y aplicar $\widetilde{M} \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} Y$ a esto nos da

$$m \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} (N({}_{K \times L}K \times Y_{K \times H})(n)).$$

Por otro lado

$$T(Y)(m \otimes_R n) = m \otimes_R (N({}_{K \times L}K \times Y_{K \times H})(n)).$$

Luego, θ es natural en H. □

Lema 4.1.5. $A_R(\_, L) \otimes A_R(\_, T) \cong A_R(\_, L) \otimes_1 A_R(\_, T)$.

Prueba. Del lema anterior tenemos que $(A_R(\_, L) \otimes_1 A_R(\_, T))(H)$ es isomorfo a

$$\Big(\bigoplus_{K \in \overline{\mathcal{Z}}} A_R(K, L) \otimes_R A_R(K \times H, T) \Big) / \mathcal{I}$$

donde $\mathcal{I}$ está generado por elementos de la forma

$${}_GY_K \circ {}_KX_L \otimes_R {}_{G \times H}Z_T - {}_KX_L \otimes_R {}_{K \times H}(Y^o \times H)_{G \times H} \circ {}_{G \times H}Z_T$$

con X en $A_R(K, L)$, Z en $A_R(G \times H, T)$ y ${}_GY_K$ un biconjunto. Ahora, dado cualquier grupo K y cualquier elemento en el producto tensorial, ${}_KW_L \otimes_R {}_{K \times H}S_T$, podemos obtener un elemento

$${}_KW_L \circ {}_LL_L \otimes_R {}_{K \times H}S_T - {}_LL_L \otimes_R {}_{L \times H}(W^o \times H)_{K \times H} \circ {}_{K \times H}S_T$$

que está en $\mathcal{I}$. Así que este cociente es igual a $R_L L_L \otimes_R A_R(L \times H, T)$, suponiendo que L está en $\overline{\mathcal{Z}}$. Ahora,

$$A_R(L \times H, T) \cong A_R(H \times L, T) \cong A_R(H, L \times T)$$

como R-módulos.

Claramente, esto define un isomorfismo de funtores de Mackey. □

Ahora sustituimos el símbolo $\otimes_1$ por $\otimes$.

Proposición 4.1.6. *Para cualesquiera funtores de Mackey M, N y P, tenemos*

$$Hom_{\mathcal{Z}}(M \otimes N, P) \cong Hom_{\mathcal{Z}}(N, \mathcal{H}(M, P))$$

como R-módulos.

Prueba. Si M es un funtor de Mackey y L es un grupo en $\mathcal{Z}$, entonces por el Lema de Yoneda, para cada m en $M(L)$ existe una transformación natural f^m de $A_R(\_,\, L)$ en M. Esto permite definir una transformación natural

$$f : \bigoplus_{m \in M(L)} A_R(\_,\, L) \longrightarrow M$$

que en cada sumando se define a través de f^m. Claramente f_L es un morfismo suprayectivo de R-módulos, por lo tanto existe un epimorfismo

$$\bigoplus_{L \in \overline{\mathcal{Z}}} \bigoplus_{m \in M(L)} A_R(\_,\, L) \longrightarrow M$$

donde $\overline{\mathcal{Z}}$ es un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de grupos en $\mathcal{Z}$. Nótese que el módulo de la izquierda es proyectivo, por el Lema de Yoneda. Si para el núcleo de este morfismo hacemos lo mismo, entonces tenemos una sucesión exacta de la forma

$$\bigoplus_{j \in J} A_R(\_,\, T_j) \to \bigoplus_{i \in I} A_R(\_,\, L_i) \to M \to 0$$

donde I y J son conjuntos de índices. Luego

$$\bigoplus_{j \in J} \widetilde{A_R(\_,\, T_j)} \to \bigoplus_{i \in I} \widetilde{A_R(\_,\, L_i)} \to \widetilde{M} \to 0$$

es también exacta. Así que, para cualquier pareja de grupos B y H

$$\bigoplus_{j \in J} \widetilde{A_R(\_,\, T_j)} \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} \widetilde{A_R(\_,\, B)}_H \to \bigoplus_{i \in I} \widetilde{A_R(\_,\, L_i)} \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} \widetilde{A_R(\_,\, B)}_H \to \widetilde{M} \otimes_{\mu_{\mathcal{Z}}} \widetilde{A_R(\_,\, B)}_H \to 0$$

es exacta. Con esto obtenemos la exactitud de

$$\bigoplus_{i \in J} A_R(\_,\, T_j) \otimes A_R(\_,\, B) \to \bigoplus_{i \in I} A_R(\_,\, L_i) \otimes A_R(\_,\, B) \to M \otimes A_R(\_,\, B) \to 0.$$

Así que, para cualquier funtor P, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to Hom_{\mathcal{Z}}(M \otimes A_R(\_,\, B),\, P) \to \prod_{i \in I} Hom_{\mathcal{Z}}(A_R(\_,\, L_i) \otimes A_R(\_,\, B),\, P) \to$$

$$\prod_{j \in J} Hom_{\mathcal{Z}}(A_R(\_,\, T_j) \otimes A_R(\_,\, B),\, P).$$

Aplicando los funtores $\mathcal{H}(\,\_\,, P)$ y luego $Hom_{\mathcal{Z}}(A_R(\_, B), \_)$ a la primera sucesión, obtenemos

$$0 \to Hom_{\mathcal{Z}}(A_R(\_, B), \mathcal{H}(M, P)) \to \prod_{i\in I} Hom_{\mathcal{Z}}(A_R(\_, B), \mathcal{H}(A_R(\_, L_i), P)) \to$$

$$\prod_{j\in J} Hom_{\mathcal{Z}}(A_R(\_, B), \mathcal{H}(A_R(\_, T_j), P)).$$

Por lo tanto

$$Hom_{\mathcal{Z}}(M \otimes A_R(\_, B), P) \cong Hom_{\mathcal{Z}}(A_R(\_, B), \mathcal{H}(M, P)).$$

Con este isomorfismo, aplicamos un argumento similar para N y obtenemos el resultado. $\square$

4.2. Los funtores de Green como monoides

La similitud entre la construcción del producto tensorial y la inducción de funtores de Mackey, introducida en el capítulo anterior, se debe a que ambos pueden definirse en términos de un objeto categórico conocido como *cofin* (Mac Lane [15]). Es a través de este objeto que son definidos por Bouc en [9], la expresión para el producto tensorial que damos en el Lema 4.1.4 puede encontrarse en la Notación 8.4.9. En el mismo capítulo, Bouc prueba que el producto tensorial da a la categoría de funtores de Mackey $Mac_{R,\mathcal{Z}}$ una estructura monoidal simétrica, concretamente:

Proposición 4.2.1 (8.4.6 en [9])**.**

1. *El funtor $M \mapsto RB \otimes M$ es isomorfo al funtor identidad en $Mac_{R,\mathcal{Z}}$.*
2. *Los funtores $(M, N) \mapsto M \otimes N$ y $(N, M) \mapsto N \otimes M$ definidos de $Mac_{R,\mathcal{Z}} \times Mac_{R,\mathcal{Z}}$ en $Mac_{R,\mathcal{Z}}$ son isomorfos.*
3. *Los funtores $(M, N, P) \mapsto (M \otimes N) \otimes P$ y $(M, N, P) \mapsto M \otimes (N \otimes P)$ definidos de $Mac_{R,\mathcal{Z}} \times Mac_{R,\mathcal{Z}} \times Mac_{R,\mathcal{Z}}$ en $Mac_{R,\mathcal{Z}}$ son isomorfos.*

Un funtor de Green se define entonces como un monoide en la categoría $Mac_{R,\mathcal{Z}}$. Es decir, es un objeto A en $Mac_{R,\mathcal{Z}}$ junto con morfismos

$$\mu : A \otimes A \to A, \quad \text{y} \quad e : RB \to A$$

tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "Id\otimes\mu"] \arrow[d, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\ & & A \\ (A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "\mu\otimes Id"] & A \otimes A \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} RB \otimes A \arrow[r, "e\otimes Id"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes RB \arrow[l, "Id\otimes e"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Una manera equivalente de expresar esto es la siguiente.

Definición 4.2.2. Sea $A : \Omega_{R,\mathcal{Z}} \to R-mod$ un funtor de Mackey. A es un funtor de Green si para toda pareja G, H de grupos en $\mathcal{Z}$, existe una función R-bilineal $A(G) \times A(H) \to A(G \times H)$, denotada por $(a, b) \mapsto a \times b$ que satisface:

Asociatividad. Si G, H y K están en $\mathcal{Z}$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A(G) \times A(H) \times A(K) \arrow[r, "(id_G, \times)"] \arrow[d, "(\times, id_K)"'] & A(G) \times A(H \times K) \arrow[d, "\times"] \\
A(G \times H) \times A(K) \arrow[r, "\alpha \circ \times"'] & A(G \times (H \times K))
\end{tikzcd}$$

donde α es un isomorfismo entre $A((G\times H)\times K)$ y $A(G\times(H\times K))$ dado por el isomorfismo natural entre $G \times (H \times K)$ y $(G \times H) \times K$.

Es unitaria. Existe un elemento ε_A en $A(1)$ tal que

$$A({}_G G \times 1_{G\times 1})(a \times \varepsilon_A) = a = A({}_G 1 \times G_{1\times G})(\varepsilon_A \times a).$$

para todo $G \in \mathcal{Z}$.

Es natural con respecto a biconjuntos. Sean G, H, K y L grupos en $\mathcal{Z}$. Si X es un (L, G)-biconjunto y Y es un (K, H)-biconjunto, entonces

$$\begin{tikzcd}
A(G) \times A(H) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "(A({}_L X_G),\ A({}_K Y_H))"'] & A(G \times H) \arrow[d, "A({}_{L\times K} X \times Y_{G\times H})"] \\
A(L) \times A(K) \arrow[r, "\times"'] & A(L \times K)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Lema 4.2.3. *Supongamos que $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son iguales a la clase de todos los grupos finitos y que $\mathcal{Z}$ es una clase cerrada bajo subcocientes y productos cartesianos. Entonces la definición anterior es equivalente a la Definición 3.2.7.*

Prueba. Para probar que 4.2.2 implica 3.2.7 tenemos que definir una multiplicación en cada $A(G)$ y verificar que los morfismos cumplan las propiedades indicadas.

Para a, b en $A(G)$, definimos $a \cdot b$ a través de la composición

$$A(G) \times A(G) \xrightarrow{\ \times\ } A(G \times G) \xrightarrow{A({}_{G^d} G \times G_{G\times G})} A(G)$$

donde $d : G \to G\times G$ es $d(a) = (a, a)$. Para el resto de la prueba, abreviaremos el biconjunto ${}_{G^d} G \times G_{G\times G}$ con ${}_d G \times G$.

Veamos que debe cumplir este producto.

- Asociatividad. Es decir, que

$$(a\cdot b)\cdot c = A({}_dG\times G)\big((A({}_dG\times G)(a\times b))\times c\big) \quad \text{y}$$
$$a\cdot(b\cdot c) = A({}_dG\times G)\big(a\times(A({}_dG\times G)(b\times c))\big)$$

son iguales.

De la funtorialidad de $\times$ tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} A(G\times G)\times A(G) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "(A({}_dG\times G),\ id_G)"'] & A((G\times G)\times G) \arrow[d, "A({}_dG\times G\times id_G)"] \\ A(G)\times A(G) \arrow[r, "\times"'] & A(G\times G) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A(G)\times A(G\times G) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "(id_G,\ A({}_dG\times G))"'] & A(G\times(G\times G)) \arrow[d, "A(id_G\times{}_dG\times G)"] \\ A(G)\times A(G) \arrow[r, "\times"'] & A(G\times G). \end{tikzcd}$$

De donde obtenemos

$$(a\cdot b)\cdot c = A({}_dG\times G)A({}_dG\times G\times id_G)((a\times b)\times c) \quad \text{y}$$
$$a\cdot(b\cdot c) = A({}_dG\times G)A(id_G\times{}_dG\times G)(a\times(b\times c)).$$

De la asociatividad de $\times$ tenemos

$$\alpha((a\times b)\times c) = a\times(b\times c).$$

donde $\alpha = A(f)$ y f se obtiene del isomorfismo natural entre $(G\times G)\times G$ y $G\times(G\times G)$. Además, es fácil observar que los biconjuntos

$${}_dG\times G\circ({}_dG\times G\times id_G) \quad \text{y} \quad {}_dG\times G\circ(id_G\times{}_dG\times G)\circ f$$

son isomorfos a ${}_{G^d}G\times G\times G_{G\times G\times G}$ donde $d: G\to G\times G\times G$ es $d(a)=(a,\,a,\,a)$.

- $A(G)$ tiene un elemento unidad.

Sea $e_G = A({}_G1_1)\varepsilon_A$, entonces

$$\begin{aligned} a\cdot e_G &= A({}_dG\times G)(a\times A({}_G1_1)\varepsilon_A) \\ &= A({}_dG\times G\circ(id_G\times{}_G1_1))(a\times\varepsilon_A) \quad \text{por la naturalidad de } \times \\ &= A({}_dG\times G\circ{}_{G\times G}G\times 1_{G\times 1})(a\times\varepsilon_A) \\ &= A({}_GG\times 1_{G\times 1})(a\times\varepsilon_A) = a. \end{aligned}$$

Análogamente se tiene $e_G\cdot a = a$.

- $A({}_HG_G)$ es de anillos para cualquier morfismo $\alpha : H \to G$.

Primero veamos que

$$A({}_HG_G)(a\cdot b) = A({}_HG_G \circ {}_dG\times G)(a\times b) \quad \text{y}$$
$$A({}_HG_G)(a)\cdot A({}_HG_G)(b) = A({}_dH\times H)(A({}_HG_G)(a)\times A({}_HG_G)(b))$$

son iguales. Como d es la diagonal, utilizando la naturalidad de $\times$, obtenemos los siguiente dos diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
A(G)\times A(G) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "(A({}_HG_G),\ A({}_HG_G))"] & A(G\times G) \arrow[r, "A({}_dG\times G)"] \arrow[d, "A({}_{H\times H}G\times G_{G\times G})"] & A(G) \arrow[d, "A({}_HG_G)"] \\
A(H)\times A(H) \arrow[r, "\times"'] & A(H\times H) \arrow[r, "A({}_dH\times H)"'] & A(H),
\end{tikzcd}$$

de donde concluimos el resultado.

Ahora veamos $A({}_HG_G)(e_G) = e_H$.

$$\begin{aligned} A({}_HG_G)(e_G) &= A({}_HG_G \circ {}_G1_1)(\varepsilon_A) \\ &= A({}_H1_1)(\varepsilon_A) = e_H. \end{aligned}$$

- Igualdades de Frobenius.

Demostraremos solamente

$$A({}_GG_H)(a)\cdot b = A({}_GG_H)(a\cdot A({}_HG_G)(b))$$

para $\alpha : H \to G$ morfismo de grupos, a en $A(H)$ y b en $A(G)$. Tenemos

$$A({}_GG_H)(a)\cdot b = A({}_dG\times G)(A({}_GG_H)(a)\times b) \quad \text{y}$$
$$A({}_GG_H)(a\cdot A({}_HG_G)(b)) = A({}_GG_H)\big(A({}_dH\times H)(a\times A({}_HG_G)(b))\big).$$

De la funtorialidad de $\times$, tenemos la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
A(G)\times A(G) \arrow[r, "\times"] & A(G\times G) \\
A(H)\times A(G) \arrow[r, "\times"] \arrow[u, "(A({}_GG_H), id_G)"] \arrow[d, "(id_H, A({}_HG_G))"'] & A(H\times G) \arrow[u, "A({}_GG_H\times id_G)"'] \arrow[d, "A(id_H\times {}_HG_G)"] \\
A(H)\times A(H) \arrow[r, "\times"] & A(H\times H),
\end{tikzcd}$$

luego

$$\begin{aligned} A({}_G G_H)(a)\cdot b &= A({}_d G\times G\circ({}_G G_H\times id_G))(a\times b) \quad \text{y} \\ A({}_G G_H)(a\cdot A({}_H G_G)(b)) &= A({}_G G_H\circ {}_d H\times H\circ(id_H\times {}_H G_G))(a\times b). \end{aligned}$$

Como d es la diagonal, veamos que los siguientes biconjuntos son isomorfos

$${}_d G\times G\circ({}_G G_H\times id_G) \quad \text{y}$$

$${}_G G_H\circ {}_d H\times H\circ(id_H\times {}_H G_G).$$

El segundo biconjunto es transitivo e isomorfo a ${}_G G_H \circ {}_{H^f} H\times G_{H\times G}$, donde $f(h) = (h,\, \alpha(h))$ para h en H. Pero, por la formula de Mackey, el primer biconjunto es precisamente isomorfo a éste.

Ahora veamos que la Definición 3.2.7 implica la Definición 4.2.2.

Para cada G y H en $\mathcal{Z}$, definimos

$$\begin{aligned} \times : A(G)\times A(H) &\longrightarrow A(G\times H) \\ (a,\, b) &\longmapsto A({}_{G\times H^{p_1}} G_G)(a)\cdot A({}_{G\times H^{p_2}} H_H)(b). \end{aligned}$$

Donde p_1 y p_2 son las proyecciones de $G\times H$ en G y H respectivamente. Por simplicidad, en lo que resta de la prueba omitiremos p_1 y p_2.

- Bilineal

Sabemos que tanto $A({}_{G\times H} G_G)$ como $A({}_{G\times H} H_H)$ son morfismos de R-módulos.

- Asociativa

Debemos demostrar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A(G)\times A(H)\times A(K) \arrow[r, "(id_G,\times)"] \arrow[d, "(\times, id_K)"'] & A(G)\times A(H\times K) \arrow[d, "\times"] \\ A(G\times H)\times A(K) \arrow[r, "\alpha\circ\times"'] & A(G\times(H\times K)). \end{tikzcd}$$

Ahora

$$(a\times b,\, c) = (A({}_{G\times H} G_G)(a)\cdot A({}_{G\times H} H_H)(b),\, c),$$

así que

$$(a\times b)\times c = A({}_{G\times H\times K} G\times H_{G\times H})(a\times b)\cdot A({}_{G\times H\times K} K_K)(c).$$

Por otro lado
$$(a,\, b \times c) = (a,\, A({}_{H\times K}H_H)(b) \cdot A({}_{H\times K}K_K)(c)),$$
luego
$$a \times (b \times c) = A({}_{G\times H\times K}G_G)(a) \cdot A({}_{G\times H\times K}H \times K_{H\times K})(b \times c).$$
Observemos que tanto $A({}_{G\times H\times K}G \times H_{G\times H})$ como $A({}_{G\times H\times K}H \times K_{H\times K})$ son morfismos de anillos, así que $(a \times b) \times c$ es igual a
$$\big(A({}_{G\times H\times K}G_G)(a) \cdot A({}_{G\times H\times K}H_H)(b)\big) \cdot A({}_{G\times H\times K}K_K)(c).$$
y $a \times (b \times c)$ es igual a
$$A({}_{G\times H\times K}G_G)(a) \cdot \big(A({}_{G\times H\times K}H_H)(b) \cdot A({}_{G\times H\times K}K_K)(c)\big).$$
Lo que nos da el resultado.

- Unitaria

Definimos ε_A como el elemento identidad bajo $\cdot$ de $A(1)$. Si $G \in \mathcal{Z}$ y $a \in A(G)$, entonces
$$\begin{aligned} A({}_GG \times 1_{G\times 1})(a \times \varepsilon_A) &= A({}_GG \times 1_{G\times 1})\big(A({}_{G\times 1}G_G)a \cdot A({}_{G\times 1}1_1)\varepsilon_A\big) \\ &= A({}_GG \times 1_{G\times 1} \circ {}_{G\times 1}G_G)a \cdot e_G = a, \end{aligned}$$
la penúltima igualdad se debe a que tanto $A({}_GG \times 1_{G\times 1})$ como $A({}_{G\times 1}1_1)$ son morfismos de anillos.

- Naturalidad con respecto a biconjuntos.

Sean X un $(L,\, G)$-biconjunto y Y un $(K,\, H)$-biconjunto, debemos probar la conmutatividad de
$$\begin{tikzcd} A(G) \times A(H) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "{(A({}_LX_G),\, A({}_KY_H))}"'] & A(G \times H) \arrow[d, "A({}_{L\times K}X \times Y_{G\times H})"] \\ A(L) \times A(K) \arrow[r, "\times"'] & A(L \times K), \end{tikzcd}$$
donde $G \times H$ y $L \times K$ actúan en $X \times Y$ de la siguiente manera: $(l,\, k)(x,\, y) = (lx,\, ky)$ y $(x,\, y)(g,\, h) = (xg,\, yh)$.

Es claro que podemos hacer esto en dos pasos: En el primero podemos suponer que Y es la identidad en H y en el segundo que X es la identidad en G. Probaremos entonces que
$$A({}_{L\times H}L_L \circ {}_LX_G)(a) \cdot A({}_{L\times H}H_H)(b)$$

es igual a

$$A({}_{L\times H}X \times H_{G\times H})(A({}_{G\times H}G_G)(a) \cdot A({}_{G\times H}H_H)(b)).$$

Ahora notemos que si hemos probado esta igualdad para ${}_LX_G$ y para ${}_GW_N$, entonces se obtiene para la composición ${}_LX_G \circ {}_GW_N$. No es difícil probar que

$$\big({}_LX_G \circ {}_GW_N\big) \times {}_HH_H \quad \text{y} \quad {}_{L\times H}X \times H_{G\times H} \circ {}_{G\times H}W \times H_{N\times H}$$

son biconjuntos isomorfos. Luego

$$A({}_{L\times H}X \times H_{G\times H} \circ {}_{G\times H}W \times H_{N\times H})(A({}_{N\times H}N_N)(a) \cdot A({}_{N\times H}H_H)(b))$$

es igual a

$$A({}_{L\times H}X \times H_{G\times H})(A({}_{G\times H}G_G \circ {}_GW_N)(a) \cdot A({}_{G\times H}H_H)(b))$$

pues el resultado es cierto para ${}_GW_N$. Finalmente, esto es igual a

$$A({}_{L\times H}L_L \circ {}_LX_G \circ {}_GW_N)(a) \cdot A({}_{L\times H}H_H)(b).$$

Con esto y la descomposición de Bouc, podemos probar la igualdad en dos casos: El primer caso es para biconjuntos de la forma ${}_LG_G$ con $f : L \to G$ un morfismo de grupos, y el segundo para biconjuntos del tipo ${}_LL_G$ con $t : G \to L$ un morfismo de grupos. En el primer caso $A({}_{L\times H}G \times H_{G\times H})$ es un morfismo de anillos y la igualdad es clara. En el segundo caso $A({}_{L\times H}L \times H_{G\times H})$ satisface las igualdades de Frobenius, además ${}_{G\times H}H_H$ es isomorfo a

$${}_{G\times H}L \times H_{L\times H} \circ {}_{L\times H}H_H.$$

Así que

$$A({}_{L\times H}L \times H_{G\times H})(A({}_{G\times H}G_G)(a) \cdot A({}_{G\times H}H_H)(b))$$

es igual a

$$A({}_{L\times H}L \times H_{G\times H} \circ {}_{G\times H}G_G)(a) \cdot A({}_{L\times H}H_H)(b)$$

y no es difícil observar que

$${}_{L\times H}L \times H_{G\times H} \circ {}_{G\times H}G_G \quad \text{y} \quad {}_{L\times H}L_L \circ {}_LL_G$$

son biconjuntos isomorfos. $\square$

Definición 4.2.4. Sean $(A,\, \mu,\, e)$ y $(A',\, \mu',\, e')$ funtores de Green en $Mac_{R,\mathcal{Z}}$. Un morfismo de funtores de Green de A en A' es un morfismo $f : A \to A'$ en $Mac_{R,\mathcal{Z}}$ tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f\otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A' \otimes A' \arrow[r, "\mu'"'] & A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ RB \arrow[ur, "e"] \arrow[r, "e'"'] & A' \end{tikzcd}$$

son conmutativos.

En términos de la definición 4.2.2, esto es equivalente a que f satisfaga

$$f_{G\times H}(a\times b)=f_G(a)\times f_H(b)$$

para cualesquiera $G,\, H\in\mathcal{Z}$, $a\in A(G)$ y $b\in A(H)$.

Los morfismos de funtores de Green pueden componerse, así que los funtores de Green en $Mac_{R,\,\mathcal{Z}}$ forman una categoría. Es natural preguntarse entonces cuales son los objetos simples en esta categoría. Como veremos más adelante, un funtor de Green A es simple si es un $A\otimes A^o$-módulo simple. Aquí A^o es el funtor de Mackey A con producto:

$$A^o(G)\times A^o(H)\to A^o(G\times H)\quad (a,\, b)\mapsto A({}_{G\times H}H\times G_{H\times G})(b\times a).$$

Por otro lado, si A y C son funtores de Green en $Mac_{R,\,\mathcal{Z}}$, entonces $A\otimes C\in Mac_{R,\,\mathcal{Z}}$ es un funtor de Green. En general puede probarse que si A y C son monoides en una categoría monoidal simétrica, entonces su producto es un monoide también. En este caso, si tenemos $(A,\, \mu_A,\, e_A)$ y $(C,\, \mu_C,\, e_C)$ dos funtores de Green, definimos μ como

$$(A\otimes C)\otimes(A\otimes C)\xrightarrow{t}(A\otimes A)\otimes(C\otimes C)\xrightarrow{\mu_A\otimes\mu_C}A\otimes C$$

donde t es el isomorfismo que existe gracias a la asociatividad y simetría de $\otimes$ en $Mac_{R,\,\mathcal{Z}}$.

El morfismo e se define como

$$RB\xrightarrow{\cong}RB\otimes RB\xrightarrow{e_A\otimes e_C}A\otimes C.$$

En la siguiente sección estudiaremos los módulos sobre funtores de Green y daremos algunos ejemplos para los cuales podemos parametrizar sus módulos simples.

4.3. Módulos sobre funtores de Green

Definición 4.3.1. Sean A y M objetos en $Mac_{R,\,\mathcal{Z}}$ tales que A es un funtor de Green. Decimos que M es un A-módulo (izquierdo) si para cualesquiera grupos $G,\, H\in\mathcal{Z}$ existe una función producto

$$A(G)\times M(H)\longrightarrow M(G\times H)$$

denotada por $(a,\, m)\mapsto a\times m$ que satisface

Asociatividad. Si G, H y K están en $\mathcal{Z}$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A(G)\times A(H)\times M(K) \arrow[r, "{(id_G,\,\times)}"] \arrow[d, "{(\times,\,id_K)}"'] & A(G)\times M(H\times K) \arrow[d, "\times"] \\
A(G\times H)\times M(K) \arrow[r, "\alpha\circ\times"'] & M(G\times(H\times K))
\end{tikzcd}$$

donde α es un isomorfismo entre $M((G\times H)\times K)$ y $M(G\times(H\times K))$ dado por el isomorfismo natural entre $G\times(H\times K)$ y $(G\times H)\times K$.

Es unitaria. Para todos $G\in\mathcal{Z}$ y m en $M(G)$

$$M({}_GG\times 1_{G\times 1})(m\times\varepsilon_A)=m=M({}_G1\times G_{1\times G})(\varepsilon_A\times m).$$

Es natural con respecto a biconjuntos. Sean G, H, K y L grupos en $\mathcal{Z}$. Si X es un $(L,\,G)$-biconjunto y Y es un $(K,\,H)$-biconjunto, entonces

$$\begin{tikzcd} A(G)\times M(H) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "{(A({}_LX_G),\ M({}_KY_H))}"'] & M(G\times H) \arrow[d, "M({}_{L\times K}X\times Y_{G\times H})"] \\ A(L)\times M(K) \arrow[r, "\times"'] & M(L\times K) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Esta definición es equivalente a la existencia de un morfismo de funtores de Mackey $\mu_M : A\otimes M\to M$ que satisface diagramas conmutativos similares a los de la definición de funtor de Green dada al principio de la sección anterior. Tal como en el último lema, puede probarse que bajo las hipótesis de este capítulo, esta definición es equivalente a la Definición 3.2.9.

De manera similar se definen los A-módulos derechos. Si A y C son funtores de Green, un $(A,\,C)$-bimódulo es un funtor de Mackey que es un A-módulo izquierdo y un C-módulo derecho. Si M es un C-módulo derecho, entonces no es difícil ver que es también un C^o-módulo izquierdo con la multiplicación

$$C^o(G)\times M(H)\to M(G\times H)\qquad (c,\,m)\mapsto M({}_{G\times H}H\times G_{H\times G})(m\times c).$$

Esto permite establecer una equivalencia entre los $(A,\,C)$-bimódulos y los $A\otimes C^o$-módulos.

Si $A\in Mac_{R,\,\mathcal{Z}}$ es un funtor de Green, un ideal izquierdo de A se define entonces como un A-submódulo del A-módulo izquierdo A. Dicho de otra forma, I es un subfuntor de A tal que

$$A(G)\times I(H)\subseteq I(G\times H)$$

para cualesquiera grupos G, H en $\mathcal{Z}$.

Análogamente se define un ideal derecho de A. Un ideal bilateral de A es entonces un $(A,\,A)$-submódulo de A.

Definición 4.3.2. Decimos que un funtor de Green A es simple si sus únicos ideales bilaterales son $\{0\}$ y A.

Esta definición es equivalente a que A sea un $A\otimes A^o$-módulo simple.

Ejemplo 4.3.3. $\mathbb{C}R_{\mathbb{Q}}$ es un funtor de Green simple, pues es un funtor de Mackey simple.

La siguiente proposición es el inciso 5 de la Proposición 8.6.1 en Bouc [9]. Sin embargo, como se dijo en la Introducción, hay una diferencia entre los funtores de biconjuntos y los funtores que consideramos aquí, ésta se traduce en que $Hom_{\mathcal{P}_A}(G, H)$ en [9] es $A(H \times G)$ y aquí es $A(G \times H)$. Lo que finalmente implica que nuestros funtores son contravariantes y los de [9] son covariantes.

Notación 4.3.4. Si G es un grupo finito, $\overrightarrow{G}$ denotará al $(G \times G, 1)$-biconjunto G, con acción

$$(x, y) \cdot g = xgy^{-1}$$

para todos x, y, g en G. Denotaremos por $\overleftarrow{G}$ al $(1, G \times G)$-biconjunto $(\overrightarrow{G})^{op}$.

Proposición 4.3.5. *Si A es un funtor de Green, sea $\mathcal{P}_A$ la siguiente categoría:*

- *Los objetos de $\mathcal{P}_A$ son los grupos en $\mathcal{Z}$.*
- *Si G y H pertenecen a $\mathcal{Z}$, entonces $Hom_{\mathcal{P}_A}(G, H) = A(G \times H)$.*
- *Sean H, G y K grupos en $\mathcal{Z}$. La composición de $\beta \in A(H \times G)$ y $\alpha \in A(G \times K)$ en $\mathcal{P}_A$ se define como*
$$\beta \circ \alpha = A(H \times \overleftarrow{G} \times K)(\beta \times \alpha).$$
- *Si G pertenece a $\mathcal{Z}$, entonces el morfismo identidad de G en $\mathcal{P}_A$ es $A(\overrightarrow{G})(\varepsilon_A)$.*

Entonces $\mathcal{P}_A$ es una categoría R-lineal y A-Mod es equivalente a la categoría de funtores R-lineales contravariantes de $\mathcal{P}_A$ en R-Mod.

Antes de probar esta proposición, observemos que en el caso $A = RB$, la composición en $\mathcal{P}_A$ coincide con la ya conocida para biconjuntos. Es decir, si β es un (H, G)-biconjunto y α es un (G, K)-biconjunto, tenemos un isomorfismo de (H, K)-biconjuntos entre

$$RB(H \times \overleftarrow{G} \times K)(\beta \times \alpha) \quad \text{y} \quad \beta \circ \alpha$$

donde $\beta \circ \alpha$ es la composición en $\Omega_{R,\mathcal{Z}}$.

La descomposición de Bouc para $\overleftarrow{G}$ es

$${}_1 1_{\Delta(G)} \circ {}_{\Delta(G)} G \times G_{G \times G}.$$

Así que $RB(H \times \overleftarrow{G} \times K)(\beta \times \alpha)$ es la deflación de $H \times \Delta(G) \times K$ a $H \times K$ de $\alpha \times \beta$. Ahora, la acción de $H \times \Delta(G) \times K$ en $\alpha \times \beta$ está dada por

$$(h, g, g, k) \cdot (x, y) = (hxg^{-1}, gyk^{-1}),$$

luego, el cociente más grande de $\alpha \times \beta$ en el que $1 \times \Delta(G) \times 1$ actúa trivialmente es precisamente $\alpha \circ \beta$.

Así, la categoría $\mathcal{P}_{RB}$ es equivalente a la categoría $\Omega_{R,\mathcal{Z}}$, y la notación $\circ$ en la composición de biconjuntos no es confusa con la introducida en esta proposición.

En la prueba de la proposición, utilizaremos el siguiente lema.

Lema 4.3.6. *Sean A y C funtores de Green, y $f : C \to A$ un morfismo de funtores de Green. Si $\beta \in C(H \times G)$ y $\alpha \in C(G \times K)$, entonces*

$$f(\beta \circ \alpha) = f(\beta) \circ f(\alpha).$$

Prueba. El lema quedará probado una vez que demostremos la conmutatividad del cuadrado exterior en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C(H \times G) \times C(G \times K) \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\times"'] & A(H \times G) \times A(G \times K) \arrow[d, "\times"] \\
C(H \times G \times G \times K) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "C(H \times \overleftarrow{G} \times K)"'] & A(H \times G \times G \times K) \arrow[d, "A(H \times \overleftarrow{G} \times K)"] \\
C(H \times 1 \times K) \arrow[r, "f"] & A(H \times 1 \times K).
\end{tikzcd}$$

Como f es un morfismo de funtores de Mackey, el diagrama inferior conmuta. La conmutatividad del diagrama superior se obtiene de que f es morfismo de funtores de Green. $\square$

Volvamos a la Proposición 4.3.5.

Prueba. Sea M un A-módulo, definimos $F_M : \mathcal{P}_A \to R$-Mod en un grupo G como $M(G)$. Para un morfismo $\alpha \in A(G \times H)$, definimos

$$F_M(\alpha) : M(H) \to M(G) \quad m \mapsto M(G \times \overleftarrow{H})(\alpha \times m).$$

Veamos que F_M es un funtor.

Sean $\alpha \in A(H \times G)$ y $\beta \in A(G \times K)$. Para m en $M(K)$ tenemos

$$F_M(\alpha \circ \beta)(m) = M(H \times \overleftarrow{K})((\alpha \circ \beta) \times m) \quad \text{y}$$

$$F_M(\alpha)F_M(\beta)(m) = M(H \times \overleftarrow{G})\big(\alpha \times M(G \times \overleftarrow{K})(\beta \times m)\big).$$

Como M es un A-módulo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A(H \times G \times G \times K) \times M(K) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "(A(H \times \overleftarrow{G} \times K),\ id)"'] & M(H \times G \times G \times K \times K) \arrow[d, "M(H \times \overleftarrow{G} \times K \times K)"] \\
A(H \times 1 \times K) \times M(K) \arrow[r, "\times"'] & M(H \times 1 \times K \times K).
\end{tikzcd}$$

De donde obtenemos

$$(\alpha \circ \beta) \times m = M(H \times \overleftarrow{G} \times K \times K)(\alpha \times \beta \times m), \quad \text{luego}$$

$$F_M(\alpha \circ \beta)(m) = M\big((H \times \overleftarrow{K}) \circ (H \times \overleftarrow{G} \times K \times K)\big)(\alpha \times \beta \times m).$$

También tenemos la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
A(H \times G) \times M(G \times K \times K) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "(id,\ M(G \times \overleftarrow{K}))"'] & M(H \times G \times G \times K \times K) \arrow[d, "M(H \times G \times G \times \overleftarrow{K})"] \\
A(H \times G) \times M(G \times 1) \arrow[r, "\times"'] & M(H \times G \times G \times 1).
\end{tikzcd}$$

Así que

$$\alpha \times M(G \times \overleftarrow{K})(\beta \times m) = M(H \times G \times G \times \overleftarrow{K})(\alpha \times \beta \times m), \quad \text{y}$$

$$F_M(\alpha)F_M(\beta)(m) = M\big((H \times \overleftarrow{G}) \circ (H \times G \times G \times \overleftarrow{K})\big)(\alpha \times \beta \times m).$$

Pero no es difícil observar que

$$(H \times \overleftarrow{K}) \circ (H \times \overleftarrow{G} \times K \times K) \quad \text{y} \quad (H \times \overleftarrow{G}) \circ (H \times G \times G \times \overleftarrow{K})$$

son isomorfos a

$$\frac{H \times H \times G \times G \times K \times K}{\Delta(H) \times \Delta(G) \times \Delta(K)}.$$

Ahora, para $\alpha = A(\overrightarrow{G})e_A$ y m en $M(G)$ tenemos

$$\begin{aligned}
F_M(\alpha)(m) &= M(G \times \overleftarrow{G})(A(\overrightarrow{G})e_A \times m) \\
&= M((G \times \overleftarrow{G}) \circ (\overrightarrow{G} \times G))(e_A \times m).
\end{aligned}$$

Observación 4.3.7.

$$(G \times \overleftarrow{G}) \circ (\overrightarrow{G} \times G) \cong {}_{G\times 1}G_{1\times G}.$$

El biconjunto de la izquierda es transitivo, ya que si a, b, c y d están en G, entonces

$$[(a,\ b,\ c,\ d)] = ac[(1,\ 1,\ 1,\ 1)]bd.$$

Esto se debe a que

$$\begin{aligned}
(1,\ 1,\ 1,\ 1) &\sim ((1,\ 1) \cdot (c^{-1},\ 1,\ b),\ (c^{-1},\ 1,\ b)^{-1} \cdot (1,\ 1)) \\
&= (c^{-1},\ b,\ c,\ b^{-1}), \quad \text{y}
\end{aligned}$$

$$(a,\ b,\ c,\ d) = ac(c^{-1},\ b,\ c,\ b^{-1})bd.$$

Finalmente, no es difícil observar que el estabilizador de $[(1,\ 1,\ 1,\ 1)]$ es el conjunto de los cuartetos $(g,\ 1,\ 1,\ g)$ con g en G.

Definimos entonces

$$S : A\text{-Mod} \longrightarrow \mathrm{Fun}^{op}(\mathcal{P}_A \to R\text{-Mod}) \quad M \longmapsto F_M$$

en objetos. Ahora sean $f : M \to N$ una flecha de A-módulos y $\alpha \in A(G \times H)$. Como f es un morfismo de A-módulos y por lo tanto, de funtores de Mackey, tenemos

$$\begin{aligned} N(G \times \overleftarrow{H})(\alpha \times f_H(m)) &= N(G \times \overleftarrow{H})(f_{G\times H\times H}(\alpha \times m)) \\ &= f_G(M(G \times \overleftarrow{H})(\alpha \times m)). \end{aligned}$$

para cualquier grupo H y cualquier m en $M(H)$. Lo que prueba la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} M(H) \arrow[r, "f_H"] \arrow[d, "F_M(\alpha)"'] & N(H) \arrow[d, "F_N(\alpha)"] \\ M(G) \arrow[r, "f_G"'] & N(G). \end{tikzcd}$$

Ahora, si F es un funtor de $\mathcal{P}_A$ en R-Mod, entonces es un funtor de Mackey a través del morfismo $e : RB \to A$. Es decir, si α es un $G \times H$-conjunto, entonces $F(e(\alpha))$ es un morfismo de R-módulos de $F(H)$ en $F(G)$. Más aún, e es un morfismo de funtores de Green, así que esta asignación es funtorial en $\Omega_{R,\mathcal{Z}}$, gracias al Lema 4.3.6. Además $F({}_H H_H)(m) = F(A(\overrightarrow{H})(\varepsilon_A))(m) = m$.

Veamos que F es un A-módulo. Definimos

$$A(G) \times F(H) \to F(G \times H) \quad (a,\ m) \mapsto F(A(G \times \overrightarrow{H})(a))(m).$$

Durante la prueba de que F es un A-módulo, usaremos el siguiente resultado, fácil de probar:

Observación 4.3.8. Si X es un $(G,\ H)$-biconjunto y K es cualquier grupo entonces

$$(\overrightarrow{K} \times G) \circ X \cong \overrightarrow{K} \times X.$$

son isomorfos como $(K \times K \times G,\ H)$-biconjuntos.

Asociatividad: Sean a en $A(G)$, b en $A(H)$ y K un grupo. Tenemos por demostrar que las siguientes funciones, definidas en $F(K)$ y con imagen en $F(G \times H \times K)$, son iguales:

$$F(A(G \times H \times \overrightarrow{K})(a \times b)) \quad \text{y} \quad F(A(G \times \overrightarrow{H \times K})a) \circ F(A(H \times \overrightarrow{K})b).$$

Como F es un funtor en $\mathcal{P}_A$, basta demostrar que $A(G \times H \times \overrightarrow{K})(a \times b)$ es igual a

$$A(G \times H \times K \times \overleftarrow{H \times K} \times K)\big(A(G \times \overrightarrow{H \times K})(a) \times A(H \times \overrightarrow{K})(b)\big).$$

Para esto, es suficiente probar que los biconjuntos $G \times H \times \overrightarrow{K}$ y

$$(G \times H \times K \times \overleftarrow{H \times K} \times K) \circ (G \times \overrightarrow{H \times K} \times H \times \overrightarrow{K})$$

son isomorfos.

De la observación 4.3.8, tenemos que $G \times \overrightarrow{H \times K} \times H \times \overrightarrow{K}$ es isomorfo a

$$G \times \big((\overrightarrow{H \times K} \times H \times K \times K) \circ (H \times \overrightarrow{K})\big),$$

y éste es isomorfo a

$$(G \times \overrightarrow{H \times K} \times H \times K \times K) \circ (G \times H \times \overrightarrow{K}).$$

Pero, de la observación 4.3.7, obtenemos que

$$(G \times H \times K \times \overleftarrow{H \times K} \times K) \circ (G \times \overrightarrow{H \times K} \times H \times K \times K)$$

es isomorfo al biconjunto identidad $G \times H \times K \times K$. Esto nos da el resultado.

Elemento neutro: Veamos que para cualquier m en $F(H)$

$$m = F({}_H H_{1\times H})(\varepsilon_A \times m).$$

Tenemos $\varepsilon_A \times m = F(A({}_{1\times H\times H}H_1)(\varepsilon_A))(m)$. Ahora, por definición

$$F({}_H H_{1\times H}) = F(A({}_{H\times 1\times H}H_1)(\varepsilon_A)),$$

así que

$$\begin{aligned} F({}_H H_{1\times H})(\varepsilon_A \times m) &= F\big(A({}_{H\times 1\times H}H_1)(\varepsilon_A) \circ A({}_{1\times H\times H}H_1)(\varepsilon_A)\big)(m) \\ &= F\big(e({}_H H_{1\times H} \circ {}_{1\times H}H_H)\big)(m) \\ &= F(A(\overrightarrow{H})(\varepsilon_A))(m). \end{aligned}$$

Naturalidad con respecto a biconjuntos: Sean ${}_K X_G$ y ${}_L Y_H$ biconjuntos. Demostrar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} A(G) \times F(H) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "{(A(X), F(Y))}"'] & F(G \times H) \arrow[d, "F(X\times Y)"] \\ A(K) \times F(L) \arrow[r, "\times"'] & F(K \times L), \end{tikzcd}$$

significa probar la igualdad entre

$$F\big({}_{K\times L}X\times Y_{G\times H}\big)\big(F(A(G\times \overrightarrow{H})(a))(m)\big) \quad \text{y}$$

$$F\big(A(K\times \overrightarrow{L})(A({}_KX_G)(a))\big)(F({}_LY_H)(m))$$

para cualesquiera $a\in A(G)$ y $m\in F(H)$. Por la funtorialidad de F, basta probar

$$A({}_{K\times L\times G\times H}X\times Y_1)(\varepsilon_A)\circ A(G\times \overrightarrow{H})(a) = A(K\times \overrightarrow{L}\circ {}_KX_G)(a)\circ A({}_{L\times H}Y_1)(\varepsilon_A).$$

Si S es un $(P,\,Q)$-biconjunto, escribiremos S^* para el $(P\times Q,1)$-biconjunto S. Con esta notación, basta probar que los biconjuntos

$$(K\times L\times \overleftarrow{G\times H}\times H)\circ((X\times Y)^*\times G\times \overrightarrow{H}) \quad \text{y}$$

$$(K\times L\times \overleftarrow{L}\times H)\circ((K\times \overrightarrow{L}\circ X)\times Y^*)$$

son isomorfos. Veamos que son isomorfos al $(K\times L\times H,\ G)$-biconjunto $X\times Y^*$.

Para el primer biconjunto, bastará probar la siguiente afirmación: Sean X' un G-conjunto y Y un H-conjunto, entonces

$$(\overleftarrow{G\times H}\times H)\circ(X'\times Y\times G\times \overrightarrow{H})\cong X'^{op}\times Y.$$

Observemos que para cualquier elemento tenemos

$$\begin{aligned}
[((g,\ h,\ h_1),\ (a,\ b,\ g',\ h'))] &= [((g,\ h,\ 1)\cdot(1,\ 1,\ g',\ h',\ h_1),\ (a,\ b,\ 1,\ 1))]\\
&= [((gg',\ hh'h_1^{-1},\ 1),\ (a,b,\ 1,\ 1))]\\
&= [((1,\ 1,\ 1),\ ((gg')^{-1}a,\ (h_1(hh')^{-1}b,\ 1,\ 1)))],
\end{aligned}$$

y que esto es también igual a

$$h_1(hh')^{-1}[((1,\ 1,\ 1),\ (a,\ b,\ 1,\ 1))]gg'.$$

De estas observaciones, no es difícil concluir que la función

$$[((g,\ h,\ h_1),\ (a,\ b,\ g',\ h'))]\mapsto(a\cdot(gg'),\ h_1(hh')^{-1}\cdot b)$$

nos da el isomorfismo requerido.

Para el segundo biconjunto, un argumento análogo al de la observación 4.3.8, prueba que $(K\times \overrightarrow{L})\circ X$ es isomorfo a $X\times \overrightarrow{L}$. Así $((K\times \overrightarrow{L})\circ X)\times Y^*$ es isomorfo a $X\times \overrightarrow{L}\times Y^*$. Una combinación de la penúltima oración y la observación 4.3.8, nos permite probar que

$$(K\times \overrightarrow{L}\times L\times H)\circ X\times Y^*$$

es isomorfo a $X \times \overrightarrow{L} \times Y^*$. Finalmente, por la observación 4.3.7,

$$(K \times L \times \overleftarrow{L} \times H) \circ (K \times \overrightarrow{L} \times L \times H)$$

es isomorfo al biconjunto identidad $K \times L \times H$.

Definimos entonces

$$T : \mathrm{Fun}^{op}(\mathcal{P}_A \to R\text{-Mod}) \longrightarrow A\text{-Mod} \quad F \longmapsto F.$$

Sea $t : F \to E$ una flecha en la categoría de la izquierda. Por la forma en que se definió F en biconjuntos, es claro que esta flecha es también de funtores de Mackey. Por otro lado, t conmuta con los morfismos de $\mathcal{P}_A$, en particular

$$t_{G\times H}\big(F(A(G \times \overrightarrow{H})(a))(m)\big) = E(A(G \times \overrightarrow{H})(a))(t_H(m)).$$

para cualesquiera a en $A(G)$ y m en $F(H)$. Por lo tanto tenemos

$$t_{G\times H}(a \times m) = a \times t_H(m).$$

Resta entonces probar que las asignaciones S y T definen una equivalencia de categorías.

Sea M un A-módulo. Veamos que F_M es isomorfo a M como A-módulos. Si α es un (G, H)-biconjunto, entonces como funtores de Mackey tenemos

$$\begin{aligned} F_M(\alpha)(m) &= F_M(e(\alpha))(m) = M(G \times \overleftarrow{H})(e(\alpha) \times m) \\ &= M(G \times \overleftarrow{H})(A(\alpha^*)(\varepsilon_A) \times m) \\ &= M(G \times \overleftarrow{H})(M(\alpha^* \times H)(\varepsilon_A \times m)) \end{aligned}$$

Procediendo como antes, no es difícil observar que $(G \times \overleftarrow{H}) \circ (\alpha^* \times H)$ es isomorfo a α. Así que lo de arriba es isomorfo a $M(\alpha)(m)$.

Ahora sean $a \in A(G)$ y $m \in M(H)$. La acción de A en F_M se definió como

$$\begin{aligned} F_M(A(G \times \overrightarrow{H})(a))(m) &= M(G \times H \times \overleftarrow{H})(A(G \times \overrightarrow{H})(a) \times m) \\ &= M(G \times H \times \overleftarrow{H})M(G \times \overrightarrow{H} \times H)(a \times m). \end{aligned}$$

Por la observación 4.3.7, $(G \times H \times \overleftarrow{H}) \circ (G \times \overrightarrow{H} \times H)$ es isomorfo al biconjunto identidad $G \times H$, así que arriba obtenemos $a \times m$.

Ahora sea E un funtor de $\mathcal{P}_A$ en R-Mod. Veamos que F_E es isomorfo a E. Sea α en $A(G \times H)$, entonces

$$\begin{aligned} F_E(\alpha)(m) &= E(G \times \overleftarrow{H})(\alpha \times m) = E\big(A(G \times \overleftarrow{H})^*(\varepsilon_A)\big)(\alpha \times m) \\ &= E(A(G \times \overleftarrow{H})^*(\varepsilon_A))E(A(G \times H \times \overrightarrow{H})(\alpha))(m) \\ &= E(A(G \times \overleftarrow{H})^*(\varepsilon_A) \circ A(G \times H \times \overrightarrow{H})(\alpha))(m). \end{aligned}$$

Para probar que esto es isomorfo a $E(\alpha)(m)$, basta probar que

$$(G \times \overleftarrow{G \times H \times H} \times H) \circ ((G \times \overleftarrow{H})^* \times G \times H \times \overrightarrow{H})$$

es isomorfo al biconjunto identidad $G \times H$. Lo cual se obtiene tal como en la prueba de la naturalidad con respecto a biconjuntos, en la definición de T.

Finalmente, no es difícil probar que estos isomorfismos son naturales. $\square$

Observación 4.3.9. Si G y H son isomorfos en la categoría de grupos finitos Grp, entonces lo son también en $\mathcal{P}_A$.

Supongamos que existen $f_1 : G \to H$ y $f_2 : H \to G$ en Grp tales que $f_1 f_2 = id_H$ y $f_2 f_1 = id_G$. Definimos $\alpha_1 = A({}_{G\times H}G_1)(\varepsilon_A)$ y $\alpha_2 = A({}_{H\times G}H_1)(\varepsilon_A)$. Las acciones en los biconjuntos ${}_{G\times H}G_1$ y ${}_{H\times G}H_1$ son las siguientes

$$(g,\, h)\cdot g' = gg' f_2(h^{-1}) \quad \text{y} \quad (h,\, g)h' = hh' f_1(g^{-1}).$$

para $(g,\, h)$ en $G \times H$, g' en G y h' en H. Tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 \circ \alpha_2 &= A(G \times \overleftarrow{H} \times G)(\alpha_1 \times \alpha_2) \\ &= A(G \times \overleftarrow{H} \times G \circ {}_{G\times H\times H\times G}G \times H_1)(\varepsilon_A), \end{aligned}$$

y no es difícil ver que el $(G \times G, 1)$-biconjunto en el que se evalúa A es isomorfo a $\overrightarrow{G}$.

Un argumento análogo prueba que $\alpha_2 \circ \alpha_1 = A(\overrightarrow{H})(\varepsilon_A)$.

4.3.1. Módulos simples

A lo largo de esta sección, A es un funtor de Green. Escribiremos Fun_R^A para la categoría de funtores R-aditivos contravariantes de $\mathcal{P}_A$ en R-Mod.

Definición 4.3.10. Denotaremos por $\hat{A}(H)$ al cociente

$$A(H \times H) / \sum_{\substack{K \in \mathcal{Z} \\ |K|<|H|}} A(H \times K) \circ A(K \times H).$$

Observación 4.3.11. Si $A = RB$, entonces este R-módulo es siempre distinto de 0. De hecho, para cualquier grupo H tenemos isomorfismos de R-álgebras

$$\hat{RB}(H) \cong \overline{A}_R(H,\, H) \cong ROut(H).$$

Recordemos que $\overline{A}_R(H,\, H)$ se define como el cociente de $A_R(H,\, H)$ entre

$$\sum_{\substack{K \hookrightarrow H, \\ K \ncong H}} {}_H H_K \circ A_R(K,\, H) + \sum_{\substack{H \twoheadrightarrow K, \\ K \ncong H}} {}_H K_K \circ A_R(K,\, H).$$

Así que tenemos claramente un morfismo suprayectivo de anillos de $\overline{A}_R(H, H)$ en $\hat{RB}(H)$. Ahora tomemos $\alpha \circ \beta$ en $RB(H \times G) \circ RB(G \times H)$ para algún $|G| < |H|$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que α y β son transitivos. Como G es de orden menor que H, entonces de la descomposición de Bouc para α obtenemos que $\alpha \circ \beta$ proviene de un elemento en alguno de los dos sumandos de arriba.

Sin embargo, veremos ahora que este anillo no es siempre distinto de 0.

En el capítulo anterior, dado un funtor de Mackey M, definimos la familia de grupos primordiales de M, denotada por $\mathrm{Prim}(M)$ como los H tales que el cociente $M(H)/M'(H)$ es distinto de 0, donde

$$M'(H) = \sum_{K \leqslant H,\, K \neq H} M({}_H H_K) M(K).$$

Denotamos por $\mathscr{P}(M)$ a la cerradura bajo subcocientes de $\mathrm{Prim}(M)$.

Lema 4.3.12. *Sea A un funtor de Green. Si H no está en $\mathscr{P}(A)$, entonces $\hat{A}(H) = 0$.*

Prueba. Sea m en $A(H \times H)$. Como sabemos

$$m = \sum_{i=1}^{r} A({}_{H\times H} H \times H_{K_i}) n_i$$

donde $K_i \leqslant H \times H$ está en $\mathscr{P}(A)$ y n_i está en $A(K_i)$. Fijemos una i y consideremos $X = (H \times H \times K)/\Delta(K)$ como un $(H, H \times K)$-biconjunto. Aplicando la descomposición de Bouc a X tenemos ${}_H H_D \circ {}_D Y_{H\times K}$ donde D es la primera proyección de $\Delta(K)$ y por lo tanto es isomorfo a un subgrupo de K (en particular, pertenece a $\mathscr{P}(A)$), y Y es un $(D, H \times K)$-biconjunto. Como H no pertenece a $\mathscr{P}(A)$, entonces D es de orden menor a $|H|$.

Por otro lado, observemos que si α es un (G, C)-biconjunto cualquiera y n está en $A(C)$, entonces

$$A(\alpha)(n) = (A(\alpha^*)\varepsilon_A) \circ n,$$

considerando a n como un elemento de $A(C \times 1)$. Esto se debe a que, Por la Proposición 4.3.5, $(A(\alpha^*)\varepsilon_A) \circ n$ es igual a

$$A(G \times \overleftarrow{C})\big((A(\alpha^*)\varepsilon_A) \times n\big)$$

que es igual a $A\big((G \times \overleftarrow{C}) \circ (\alpha^* \times C)\big)(\varepsilon_A \times n)$. Pero no es difícil probar que $(G \times \overleftarrow{C}) \circ (\alpha^* \times C)$ es isomorfo a α. Ahora recordemos que $A(\alpha^*)(\varepsilon_A) = e_{G\times C}(\alpha)$, así que tenemos

$$\begin{aligned} A({}_{H\times H} H \times H_K)(n) &= e_{H\times H\times K}(X) \circ n \\ &= e_{H\times H\times K}({}_H H_D \circ {}_D Y_{H\times K}) \circ n \\ &= e_{H\times D}({}_H H_D) \circ e_{D\times H\times K}({}_D Y_{H\times K}) \circ n \quad \text{por el Lema 4.3.6} \end{aligned}$$

que es un elemento en $A(H \times D) \circ A(D \times H)$. Esto prueba la afirmación. $\square$

Corolario 4.3.13. *Sea k un campo de característica 0. Si H no es un grupo cíclico, entonces $k\hat{R}_{\mathbb{Q}}(H) = 0$.*

Recordemos que si S es un funtor de Mackey simple, entonces un grupo H en $\mathcal{Z}$ es minimal para S si y sólo si H es orden mínimo tal que $S(H) \neq 0$. Si A es un funtor de Green y M es un A-módulo, diremos que H es minimal para M si es de orden mínimo tal que $M(H) \neq 0$.

Lema 4.3.14. *Si S es un objeto simple en Fun_R^A, entonces S tiene un grupo minimal H. Además $\hat{A}(H) \neq 0$ y $S(H)$ es un $\hat{A}(H)$-módulo simple.*

Prueba. Como $S \neq 0$, entonces existe un grupo H tal que $S(H) \neq 0$.

Sea H cualquier grupo minimal para S. Si $\hat{A}(H)$ fuese igual a 0, entonces en particular $A(\overrightarrow{H})(\varepsilon_A) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \circ \beta_i$ donde $\alpha_i \in A(H \times K_i)$ y $\beta_i \in A(K_i \times H)$ con K_i un grupo de orden menor al de H. Pero $S(\alpha_i \circ \beta_i) = 0$ por la minimalidad de H, luego $S(A(\overrightarrow{H})(\varepsilon_A)) = 0$, una contradicción.

Es claro que $S(H)$ es un $\hat{A}(H)$-módulo. Veamos que es un $A(H \times H)$-módulo simple. Sea W un $A(H \times H)$-submódulo, para cada G en $\mathcal{Z}$, definimos

$$T(G) = \{m \in S(G) \mid \forall X \in A(H \times G),\ S(X)(m) \in W\}.$$

Claramente T es un subfuntor de S. Además $T(H) = W$. Si t está en $T(H)$, entonces en particular para $X = A(\overrightarrow{H})(\varepsilon_A)$ debemos tener $T(X)(t) \in W$, luego $T(H) \subseteq W$. Por otro lado, como W es un $A(H \times H)$-submódulo, entonces $S(X)(w)$ está en W para todo w en W y X en $A(H \times H)$, por lo tanto $W \subseteq T(H)$.

Luego, si $T = 0$ tenemos $W = 0$, y si $T = S$ entonces $W = S(H)$. □

Notación 4.3.15. Sea W un $A(G\times G)$-módulo. Si $\varphi : H \to G$ es un isomorfismo de grupos, denotamos por ${}^{\varphi}W$ al $A(H \times H)$-módulo W con la acción de $a \in A(H \times H)$ en $w \in W$ dada por

$$a \cdot w := (A({}_{G\times H}G_1)(\varepsilon_A) \circ a \circ A({}_{H\times G}H_1)(\varepsilon_A))w.$$

Las acciones en los biconjuntos ${}_{G\times H}G_1$ y ${}_{H\times G}H_1$ son

$$(g,\, h) \cdot g' = gg'\varphi(h^{-1}) \quad \text{y} \quad (h,\, g)h' = hh'\varphi^{-1}(g^{-1})$$

para $(g,\, h)$ en $G \times H$, g' en G y h' en H.

Proposición 4.3.16. *Supongamos que A es un funtor de Green para el que los grupos minimales de cada módulo simple forman una sola clase de isomorfismo. Sea $\mathcal{S}_A$ el conjunto de clases de equivalencia de parejas $(H,\, V)$ donde $\hat{A}(H) \neq 0$, V es un $\hat{A}(H)$-módulo simple y $(H,\, V) \sim (G,\, W)$ si existe un isomorfismo de grupos $\varphi : H \to G$ tal que $V \cong {}^{\varphi}W$. Entonces las clases de isomorfismo de A-módulos simples están en correspondencia biyectiva con los elementos de $\mathcal{S}_A$. Esta correspondencia asigna a la clase de isomorfismo de un A-módulo simple S, la clase de pareja $(H,\, S(H))$ donde H es un grupo minimal para S.*

Prueba. Si S es un A-módulo simple y H es un grupo minimal para S, entonces lo es para cualquier A-módulo isomorfo a él. Además, como hemos visto, en este caso $\hat{A}(H) \neq 0$ y $S(H)$ es un $\hat{A}(H)$-módulo simple. La hipótesis sobre la clase de isomorfismo de H, justifica que esta elección esté bien definida. Por otro lado, si tenemos una pareja (H, V) que satisfaga las hipótesis, entonces le asignaremos el módulo $S^A_{H,V}$ que se define como el cociente $L_{H,V}/J_{H,V}$, donde

$$L_{H,V}(K) = A(K \times H) \otimes_{A(H\times H)} V, \quad L_{H,V}(a)(x \otimes v) = ax \otimes v$$

si a está en $A(G \times K)$, y

$$J_{H,V}(K) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes n_i \mid \sum_{i=1}^{n} (y \circ x_i) \cdot n_i = 0 \ \forall y \in A(H \times K) \Big\}.$$

Como V es un $A(H \times H)$-módulo simple, entonces por el Lema 1 en Bouc [9], $L_{H,V}$ tiene un único cociente simple, éste es $S^A_{H,V}$. Este cociente satisface $S^A_{H,V}(H) = V$.

Observemos que si $(H, V) \sim (G, W)$, entonces $S^A_{H,V} \cong S^A_{G,W}$. Sea $\varphi : H \to G$ el isomorfismo de grupos que hace a V y ${}^{\varphi}W$ isomorfos como $A(H \times H)$-módulos, entonces $L_{H,V} \cong L_{H,{}^{\varphi}W}$. Veamos ahora que $L_{H,{}^{\varphi}W} \cong L_{G,W}$.

Sea $K \in \mathcal{Z}$, definimos

$$\mu_K : A(K \times G) \times W \longrightarrow A(K \times H) \otimes_{A(H\times H)} {}^{\varphi}W,$$

$\mu_K(a, v) = a \circ \alpha_1 \otimes_{A(H\times H)} v$, donde $\alpha_1 = A({}_{G\times H}G_1)(\varepsilon_A)$ es el definido en la Observación 4.3.9. Observemos que μ_K se puede extender a $A(K \times G) \otimes_{A(G\times G)} W$. Si b está en $A(G \times G)$, entonces

$$\begin{aligned} \mu_K(a, bv) &= a \circ \alpha_1 \otimes_{A(H\times H)} bv \\ &= a \circ \alpha_1 \otimes_{A(H\times H)} (\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ b \circ \alpha_1 \circ \alpha_2)v \end{aligned}$$

donde $\alpha_2 = A({}_{H\times G}H_1)(\varepsilon)$ es el definido en la Observación 4.3.9. De esta misma observación tenemos que $\alpha_1 \circ \alpha_2 = A(\overrightarrow{G})(\varepsilon_A)$. Luego

$$\begin{aligned} \mu_K(a, bv) &= a \circ \alpha_1 \otimes_{A(H\times H)} (\alpha_2 \circ b \circ \alpha_1) \cdot v \\ &= a \circ (\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ b \circ \alpha_1) \otimes_{A(H\times H)} v \\ &= a \circ b \circ \alpha_1 \otimes_{A(H\times H)} v = \mu_K(a \circ b, v). \end{aligned}$$

Es claro que μ_K es natural en K. La inversa de μ se define de manera análoga. Así que $L_{H,V}$ es isomorfo a $L_{G,W}$ y por lo tanto, los cocientes $S^A_{H,V}$ y $S^A_{G,W}$ son isomorfos.

Veamos que esto define una correspondencia entre las clases de equivalencia y las clases de isomorfismo.

La asignación $L_H : A(H\times H)$-mod$\to Fun_R^A$ que manda a V en $L_{H,V}$ es adjunto izquierdo de la evaluación $E_H : Fun_R^A \to A(H \times H)$-mod que manda cada funtor M en $M(H)$. Esto permite probar que si S es un A-módulo simple y $S(H) \neq 0$, entonces S es isomorfo a $S_{H,V}^A$ con $V = S(H)$, ya que V es un $A(H \times H)$-módulo simple y

$$Hom_{Fun_R^A}(L_{H,V}, S) \cong Hom_{A(H\times H)}(V, S(H)).$$

Luego, S es un cociente de $L_{H,V}$ y por lo tanto es isomorfo a $S_{H,V}^A$.

Ahora tomemos una pareja (H, V) con $\hat{A}(H) \neq 0$ y V un $\hat{A}(H)$-módulo simple. Veamos que H es minimal para $S_{H,V}^A$. Sea K de orden menor a H. Como V es un $\hat{A}(H)$-módulo, entonces de la definición de $S_{H,V}^A$, obtenemos que $S_{H,V}^A(K) = 0$. $\square$

Lema 4.3.17. *Sean A y C funtores de Green, $f : A \to C$ un morfismo de funtores de Green y M un C-módulo. Entonces, M es un A-módulo a través de la composición*

$$A \otimes M \xrightarrow{f\otimes id_M} C \otimes M \xrightarrow{\ {}_C\mu\ } M,$$

que denotaremos por ${}_A\mu$.

Si M es un A-módulo simple, entonces es un C-módulo simple. Por otro lado, si f es un epimorfismo y M es un C-módulo simple, entonces es un A-módulo simple.

Prueba. La primera parte del enunciado es clara, ya que todo C-submódulo de M es también un A-submódulo.

Ahora, si N es un A-submódulo de M, entonces ${}_A\mu$ se restringe a N con los correspondientes diagramas conmutativos. Luego, si f es un epimorfismo, entonces ${}_C\mu$ también puede restringirse a N con los respectivos diagramas conmutativos. $\square$

En particular, para un epimorfismo $f : A \twoheadrightarrow C$, los C-módulos simples son aquellos A-módulos simples en los que $Ker f$ actúa trivialmente.

Lema 4.3.18. *Supongamos que A es un funtor de Green que satisface la hipótesis de la Proposición 4.3.16. Si $f : A \to C$ es un epimorfismo de funtores de Green, entonces los C-módulos simples son los A-módulos simples $S_{H,V}^A$ tales que $\hat{C}(H) \neq 0$ y V es un $\hat{C}(H)$-módulo simple.*

Prueba. Sea S un C-módulo simple. Por el lema anterior, existe una pareja (H, V) en $\mathcal{S}_A$ tal que S es un A-módulo simple $S_{H,V}^A$ en el que $Ker f$ actúa trivialmente. Como H es un grupo minimal para S, entonces por el Lema 4.3.14, $\hat{C}(H) \neq 0$ y V es un $\hat{C}(H)$-módulo simple.

Ahora sea $S^A_{H,V}$ un A-módulo simple tal que $\hat{C}(H)$ es distinto de 0 y V es un $\hat{C}(H)$-módulo. Tomemos K y G grupos arbitrarios. Entonces $S^A_{H,V}(G)$ es el cociente entre $L_{H,V}(G)$ y su único subfuntor maximal

$$J_{H,V}(G) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes n_i \in L_{H,V}(G) \mid \sum_{i=1}^{n} (\psi \circ \varphi_i) \cdot n_i = 0 \ \forall \psi \in A(H \times G) \Big\}.$$

Sea a en $Ker(f_K)$, probaremos que a actúa trivialmente en $S^A_{H,V}(G)$. Si $m = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes n_i$ es un elemento en $L_{H,V}(G)$, esto significa probar que $a \times m$ pertenece a $J_{H,V}(K \times G)$. Por la Proposición 4.3.5, el producto $a \times m$ está dado por $S^A_{H,V}(A(K \times \overrightarrow{G})a)(m)$, pero $Ker(f_K)$ es un subfuntor de A, así que $A(K \times \overrightarrow{G})a$ está en $Ker(f_{K\times G\times G})$. Luego, si ψ es cualquier elemento en $A(H \times K \times G)$, entonces por el Lema 4.3.6, la composición

$$x_i = \psi \circ (A(K \times \overrightarrow{G})a) \circ \varphi_i$$

pertenece a $Ker(f_{H\times H})$. Como V es un $A(H \times H)$-módulo que es también un $C(H \times H)$-módulo, entonces tenemos $x_i \cdot n_i = 0$ y por lo tanto $a \times m$ está en $J_{H,V}(K \times G)$.

Esto prueba que $Ker(e)$ actúa trivialmente en $S^A_{H,V}$ y que por lo tanto, éste es un C-módulo. □

Corolario 4.3.19. *Supongamos que A es un funtor de Green tal que $e : RB \to A$ es un epimorfismo. Entonces, los A-módulos simples son los funtores de Mackey simples $S_{H,V}$ donde H es un grupo para el cual el álgebra $\hat{A}(H)$ es distinta de 0 y V es un $\hat{A}(H)$-módulo simple.*

Como primera aplicación de la proposición anterior, estudiaremos los RB_C-módulos simples para algunos casos de C.

Lema 4.3.20. *Si A es un funtor de Green, y C está en $\mathcal{Z}$, entonces A_C es un funtor de Green. El producto en A_C está dado por componer la multiplicación de A*

$$A(K \times C) \times A(G \times C) \longrightarrow A(K \times C \times G \times C),$$

con $A(X)$, donde X es el biconjunto

$${}_{K\times G\times C}K \times C \times G \times C_{K\times C\times G\times C}$$

en el que la acción de (k_1, g_1, c_1) en (k, c, g, c') es $(k_1k, c_1c, g_1g, c_1c')$. El elemento identidad de A_C es $\varepsilon_{A_C} = A({}_{1\times C}1_1)(\varepsilon_A) \in A_C(1)$.

Prueba. Veamos que esta composición

$$A_C(K) \times A_C(G) \longrightarrow A_C(K \times C \times G) \longrightarrow A_C(K \times G)$$

define una multiplicación en A_C.

Asociatividad:

Debemos probar que el cuadrado exterior en el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
A_C(K) \times A_C(G) \times A_C(L) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "a"] & A_C(K \times C \times G) \times A_C(L) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "b"] & A_C(K \times G) \times A_C(L) \arrow[d] \\
A_C(K) \times A_C(G \times C \times L) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "c"] & A_C(K \times C \times G \times C \times L) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "d"] & A_C(K \times G \times C \times L) \arrow[d] \\
A_C(K) \times A_C(G \times L) \arrow[r] & A_C(K \times C \times G \times L) \arrow[r] & A_C(K \times G \times L)
\end{tikzcd}$$

El cuadrado a conmuta ya que la multiplicación de A es asociativa. Los cuadrados b y c conmutan porque la multiplicación de A es natural con respecto a biconjuntos. Finalmente, consideremos $T = K \times G \times L \times C$, $W = K \times G \times C \times L \times C$, $Z = K \times C \times G \times C \times L \times C$, $W' = K \times C \times G \times L \times C$ y los biconjuntos

$$X = {}_T W_W \circ {}_W Z_Z \quad \text{y} \quad X' = {}_T W'_{W'} \circ {}_{W'} Z_Z$$

definidos como en el enunciado del lema. Entonces el cuadrado d conmuta gracias a que X y X' son claramente isomorfos.

Elemento identidad:

Si a está en $A_C(G)$, entonces $A_C({}_G G_{1\times G})(\varepsilon_{A_C} \times a)$ es igual a aplicar

$$A({}_{G\times C} G \times C_{1\times G\times C} \circ {}_{1\times G\times C} 1 \times C \times G \times C_{1\times C\times G\times C} \circ {}_{1\times C\times G\times C} 1 \times G \times C_{1\times G\times C})$$

a $\varepsilon_A \times a$, donde este producto es el de A. Pero la composición de los dos biconjuntos de la derecha es isomorfa al biconjunto identidad $1 \times G \times C$. Luego, esto es igual a

$$A({}_{G\times C} G \times C_{1\times G\times C})(\varepsilon_A \times a),$$

que es igual a a, ya que ε_A es el elemento identidad de A. La otra igualdad se prueba análogamente.

Naturalidad con respecto a biconjuntos:

Sean ${}_G X_L$ y ${}_K Y_D$ biconjuntos. Debemos probar la conmutatividad del cuadrado exterior en

$$\begin{tikzcd}
A_C(L) \times A_C(D) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & A_C(L \times C \times D) \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & A_C(L \times D) \arrow[d, "f_3"'] \\
A_C(G) \times A_C(K) \arrow[r] & A_C(G \times C \times K) \arrow[r] & A_C(G \times K)
\end{tikzcd}$$

donde $f_1 = (A_C(X),\, A_C(Y))$,

$$f_2 = A({}_{G\times C\times K\times C}X \times C \times Y \times C_{L\times C\times D\times C})$$

y $f_3 = A_C({}_{G\times K}X \times Y_{L\times D})$. El cuadrado de la izquierda conmuta pues la multiplicación de A es natural con respecto a biconjuntos. Para ver la conmutatividad del cuadrado a la derecha, sean

$$X = {}_{G\times K\times C}X \times Y \times C_{L\times D\times C} \circ {}_{L\times D\times C}L \times C \times D \times C_{L\times C\times D\times C}$$

$$X' = {}_{G\times K\times C}G \times C \times K \times C_{G\times C\times K\times C} \circ {}_{G\times C\times K\times C}X \times C \times Y \times C_{L\times C\times D\times C}.$$

Claramente, X' es isomorfo a

$${}_{G\times K\times C}X \times C \times Y \times C_{L\times C\times D\times C},$$

donde, del lado izquierdo, C actúa diagonalmente. Por otro lado, no es difícil ver que si $[(x,\, y,\, c_1),\, (l,\, c_2,\, d,\, c_3)]$ es un elemento en X, entonces, asignarle $(xl,\, c_1c_2,\, yd,\, c_1c_3)$, define un isomorfismo entre X y este último biconjunto. □

Si $X \in RB_C(G)$ es un $(G \times C)$-conjunto y $Y \in RB_C(K)$ es un $(K \times C)$-conjunto, escribiremos $\times_d$ para el producto de X con Y en $R_C(G \times K)$. Es decir

$$X \times_d Y = RB(T)(X \times Y) \quad \text{con} \quad T = {}_{G\times K\times C}G \times C \times K \times C_{G\times C\times K\times C}.$$

con C actuando por la izquierda diagonalmente. Luego, $X \times_d Y$ es el $G \times K \times C$-conjunto $X \times Y$ con la siguiente actuación

$$(g,\, k,\, c)(x,\, y) = ((g,\, c)x,\, (k,\, c)y).$$

Con esta multiplicación, la composición en la categoría $\mathcal{P}_{RB_C}$, para C un grupo en $\mathcal{Z}$, se ve de la siguiente forma:

Sean X un $(K \times G \times C)$-conjunto en $RB_H(K \times G)$ y Y un $(G \times L \times C)$-conjunto en $RB_C(G \times L)$, denotaremos por $\circ_d$ a la composición de X con Y en $\mathcal{P}_{RB_C}$, es decir

$$X \circ_d Y = RB_C(K \times \overleftarrow{G} \times L)(X \times_d Y).$$

Tal como observamos antes de probar la Proposición 4.3.5, al aplicar $RB(K \times \overleftarrow{G} \times L \times C)$ a $X \times_d Y$, obtenemos el $(K \times L \times C)$-conjunto

$$X \times Y/\sim \ \text{ donde } (x,\, y) \sim ((1,\, g,\, 1)x,\, (g,\, 1,\, 1)y)\ \forall g \in G$$

en el que K y L actúan como antes y C actúa diagonalmente, es decir

$$(k,\, l,\, c)[x,\, y] = [(k,\, 1,\, c)x,\, (1,\, l,\, c)y].$$

Otra forma de ver esto, es considerar a X como un (K, G)-biconjunto con una acción de C, que supondremos por la derecha, y que conmuta con las de K y G. Igualmente, podemos ver a Y como un (G, L)-biconjunto también con una acción de C que conmuta con las de G y L. Luego $X \circ_d Y$ es el (K, L)- biconjunto $X \circ Y$ con una acción diagonal de C

$$[x, y]c = [xc, yc].$$

que conmuta con las de K y L.

La identidad en $RB_C(G\times G)$ es $RB_C(\overrightarrow{G})(\{\bullet\})$, que por la descomposición de Bouc para $\overrightarrow{G}$ es igual a

$$\frac{G \times G \times C}{\Delta(G) \times C}.$$

Es decir, es el $(G, G \times C)$-biconjunto G con acción trivial de C.

Abusando un poco de la notación introducida en el Lema 1.9, si $E \leqslant G \times L \times C$ y $D \leqslant L \times K \times C$, escribiremos $E * D$ para

$$\{(g, k, c) \in G \times K \times C \mid \exists l \in L \text{ t. q. } (g, l, c) \in E \text{ y } (l, k, h) \in D\}.$$

Lema 4.3.21. *Sean $(G\times L\times C)/E$ en $B_C(G\times L)$ y $(L\times K\times C)/D$ en $B_C(L\times K)$, entonces tenemos un isomorfismo de $G \times K \times C$-conjuntos*

$$(G \times L \times C)/E \circ_d (L \times K \times C)/D \cong \bigsqcup_{\substack{(l,c)\ en \\ [p_{L\times C}(E)\backslash L\times C/p_{L\times C}(D)]}} (G \times K \times C)/(E *^{(l,1,h)} D)$$

donde $p_{L\times C}(E)$ y $p_{L\times C}(D)$ son las proyecciones en $L \times C$ de E y D respectivamente.

Prueba. Si $[(g, l, c)E, (l', k, c')D]$ es un elemento de $(G \times L \times C)/E \circ_d (L \times K \times C)/D$, entonces es fácil observar que su órbita bajo la acción de $G \times K \times C$ es igual a la de $[(1, 1, 1)E, (l^{-1}l', 1, h^{-1}h')D]$. Con esta observación, la prueba de que hay una biyección entre la órbitas de $(G \times L \times C)/E \circ_d (L \times K \times C)/D$ bajo la acción de $G \times K \times C$ y $p_{L\times C}(E) \backslash L \times C \,/\, p_{L\times C}(D)$, es completamente análoga a la de la Proposición 1 en Bouc [9].

Asimismo, el estabilizador de $[(1, 1, 1)E, (l, 1, c)D]$ es igual $E *^{(l,1,c)} D$. □

A continuación probamos un resultado similar al Lema 1.7.

Notación 4.3.22. Sea M un subgrupo de $G \times K \times C$. Escribiremos $p_1(M)$, $p_2(M)$ y $p_3(M)$ para las proyecciones de M en G, K y C respectivamente; $p_{1,2}(M)$ denotará la proyección sobre $G \times K$ y análogamente se definen las demás posibles combinaciones de índices. Denotaremos por $k_1(M)$ a $\{g \in p_1(M) \mid (g, 1, 1) \in M\}$ que es un subgrupo normal de $p_1(M)$, análogamente se definen $k_2(M)$, $k_3(M)$ y $k_{i,j}(M)$ para las posibles combinaciones de i y j.

Observación 4.3.23. Una prueba análoga a la del Lema 1.6 nos da los siguientes isomorfismos de grupos

$$\frac{p_1(M)}{k_1(M)} \cong \frac{p_{2,3}(M)}{k_{2,3}(M)} \quad \text{y} \quad \frac{p_2(M)}{k_2(M)} \cong \frac{p_{1,3}(M)}{k_{1,3}(M)},$$

el primero manda $ak_1(M)$ en $(b, c)k_{2,3}(M)$ si (a, b, c) está en M, y el segundo manda $bk_2(M)$ en $(a, c)k_{2,3}(M)$.

Lema 4.3.24. *Sea M un subgrupo de $G \times K \times C$. Entonces $(G \times K \times C)/M \in RB_C(G \times K)$ puede descomponerse como $X_1 \circ_d Y_1$ donde*

$$X_1 \in RB_C\big(G \times (p_1(M)/k_1(M))\big) \quad y \quad Y_1 \in RB_C\big((p_1(M)/k_1(M)) \times K\big)$$

y también como $X_2 \circ_d Y_2$ donde

$$X_2 \in RB_C\big(G \times (p_2(M)/k_2(M))\big) \quad y \quad Y_2 \in RB_C\big((p_2(M)/k_2(M)) \times K\big)$$

Prueba. Sean $t_1(M) = p_1(M)/k_1(M)$ y $X_1 = (G \times t_1(M) \times C)/U$ donde

$$U = \{(g, \alpha(g)) \mid g \in p_1(M),\ \alpha : p_1(M) \twoheadrightarrow t_1(M)\} \times C.$$

Por la observación anterior, existe un isomorfismo σ de $t_{2,3}(M) := p_{2,3}(M)/k_{2,3}(M)$ en $t_1(M)$, así que definimos $Y_1 = (t_1(M) \times K \times C)/V$ con

$$V = \{(\sigma(\beta(k, c)), k, c) \mid (k, c) \in p_{2,3}(M),\ \beta : p_{2,3}(M) \twoheadrightarrow t_{2,3}(M)\}.$$

Por el Lema 4.3.21 tenemos

$$X_1 \circ_d Y_1 \cong \bigsqcup_{\substack{(t,c) \text{ en} \\ [p_{2,3}(U)\backslash t_1(M)\times C/p_{1\times 3}(V)]}} (G \times K \times C)/(U *^{(t,1,c)} V),$$

como $p_{2,3}(U) = t_1(M) \times C$, este isomorfismo se reduce al elemento $(G \times K \times C)/U * V$. Ahora, $U * V$ es por definición

$$\{(g, k, c) \mid \exists t \in t_1(M) \text{ t. q. } (g, t, c) \in U,\ (t, k, c) \in V\},$$

así que (g, k, c) está en $U * V$ si y sólo si $\alpha(g) = \sigma(\beta(k, c))$ y esto pasa si y sólo si (g, k, c) está en M.

La segunda descomposición se obtiene de manera análoga. □

Observación 4.3.25. Si G y K son grupos de orden n y $(G \times K \times C)/M$ no se factoriza bajo $\circ_d$ a través de un grupo de orden menor a n, entonces M debe satisfacer

i) $p_1(M) = G$, $p_2(M) = K$, $k_1(M) = 1$ y $k_2(M) = 1$.

ii) De estas igualdades y de la Observación 4.3.23, tenemos que existen morfismos suprayectivos $\alpha : p_{2,3}(M) \to G$ y $\beta : p_{1,3}(M) \to K$ tales que

$$M = \{(\alpha(k, c), k, c) \mid (k, c) \in p_{2,3}(M)\} = \{(g, \beta(g, c), c) \mid (g, c) \in p_{1,3}(M)\}$$

Estos morfismos definen un isomorfismo entre $p_{1,3}(M)$ y $p_{2,3}(M)$ de la siguiente forma

$$f : p_{1,3}(M) \to p_{2,3}(M) \quad (g, c) \mapsto (\beta(g, c), c)$$

$$f^{-1} : p_{2,3}(M) \to p_{1,3}(M) \quad (k, c) \mapsto (\alpha(k, c), c),$$

f es inyectiva ya que $f(g, c) = (1, 1)$ implica $(g, 1, 1) \in M$, por lo tanto $g = 1$. Como β es suprayectiva, entonces f lo es también, y es claramente un morfismo de grupos.

Con estas observaciones podemos encontrar algunos casos de C para los que los grupos minimales de un RB_C-módulo simple forman una sola clase de isomorfismo.

Supongamos que S es un RB_C-módulo simple y que H y K son grupos minimales para S de orden n, entonces $S \cong S^A_{H,V}$ con $A = RB_C$ y $V = S(H)$. Además $S(K) \neq 0$, luego existe un elemento transitivo X en $RB_C(H \times K)$ tal que $S(X) \neq 0$. Como X no se factoriza bajo $\circ_d$ a través de un grupo de orden menor a n, entonces satisface i) y ii).

Si $p_{1,3}(M) = H \times C_1$ para algún $C_1 \leqslant C$, entonces $\beta(h, c) = \beta_1(h)\beta_2(c)$, donde β_1 es un morfismo de H en K. Luego, β_1 es un morfismo inyectivo ya que si $h \in ker\beta_1$, entonces $\beta(h, 1) = 1$, y por lo tanto $h \in k_1(M) = 1$. Tenemos entonces que H es isomorfo a K. Si $p_{1,3}(M) = \{(h, t(h)) \mid t : H \to C_1\}$, entonces a través de β podemos definir un homomorfismo suprayectivo de H en K y por lo tanto son isomorfos. Así, por ejemplo si C es un grupo de orden p ó es de orden primo a n, entonces tenemos que H y K son siempre isomorfos.

Lema 4.3.26. *Para cualesquiera G y C en $\mathcal{Z}$ se tiene $R\hat{B}_C(G) \neq 0$.*

Prueba. Sean θ un automorfismo de G, $\zeta : C \to Z(G)$ y $\eta : G \to C$ morfismos de grupos. Definimos

$$M_{\theta,\zeta} = \{(\theta(g)\zeta(c), g, c) \mid (g, c) \in G \times C\} \quad \text{y}$$

$$N_{\theta,\eta} = \{(\theta(g), g, \eta(g)) \mid g \in G\}.$$

Probaremos que los siguientes elementos son siempre distintos de 0 en el cociente $R\hat{B}_C(G)$:

$$X_{\theta,\zeta} = (G \times G \times C)/M_{\theta,\zeta} \quad \text{y} \quad Y_{\theta,\eta} = (G \times G \times C)/N_{\theta,\eta}.$$

Nótese que $X_{\theta,\zeta}$ y $Y_{\theta,\eta}$ satisfacen i) y ii).

Como $X_{\theta,\zeta}$ es transitivo, si es 0 en el cociente, entonces existe un grupo K de orden menor a $|G|$ tal que $M_{\theta,\zeta} = A * B$ donde $A \leqslant G \times K \times C$ y $B \leqslant K \times G \times C$.

Para $A * B$ podemos definir un morfismo

$$A * B \to (p_2(A) \cap p_1(B))/(k_2(A) \cap k_1(B)) \quad (a,\, b,\, c) \mapsto t(k_2(A) \cap k_1(B))$$

ya que $(a,\, b,\, c)$ está en $A * B$ si y sólo si existe t en K tal que $(a,\, t,\, c) \in A$ y $(t,\, b,\, c) \in B$, además claramente t es único módulo $k_2(A) \cap k_1(B)$. El núcleo de este morfismo es el conjunto

$$\{(a,\, b,\, c) \in G \times G \times C \mid (a,\, 1,\, c) \in A,\, (1,\, b,\, c) \in B\}.$$

Si $A * B = M_{\theta,\,\zeta}$, entonces este núcleo es isomorfo a

$$D = \{c \in C \mid \exists g \in G \text{ t. q. } (\theta(g)\zeta(c),\, 1,\, c) \in A,\ (1,\, g,\, c) \in B\} \leqslant C$$

ya que si $(\theta(g)\zeta(c),\, g,\, c)$ está en el núcleo, entonces claramente c está en D. Además está g es única, ya que si existe otra b tal que $(\theta(b)\zeta(c),\, 1,\, c) \in A$ y $(1,\, b,\, c) \in B$, entonces $(1,\, bg^{-1},\, 1) \in B$. Pero tomando $(1,\, 1,\, 1) \in A$ tenemos $(1,\, bg^{-1},\, 1) \in M_{\theta,\,\zeta}$, luego $b = g$. Así que cada elemento en D determina un único elemento en el núcleo y por lo tanto son isomorfos.

Ahora, $M_{\theta,\,\zeta}$ es isomorfo a $G \times C$, luego $(G \times C)/D$ es isomorfo a un subcociente de K, lo cual es una contradicción pues entonces $|G|[C : D]$ sería menor que $|K|$.

Procediendo de la misma forma para $Y_{\theta,\,\eta}$, si éste fuera 0 en el cociente, entonces existe un grupo K de orden a $|G|$ y subgrupos $A \leqslant G \times K \times C$ y $B \leqslant K \times G \times C$ tales que $N_{\theta,\eta} = A * B$. Consideramos nuevamente

$$N_{\theta,\,\eta} \to (p_2(A) \cap p_1(B))/(k_2(A) \cap k_1(B)) \quad (a,\, b,\, c) \mapsto t(k_2(A) \cap k_1(B)).$$

En este caso, si $(\theta(g),\, g,\, \eta(g))$ está en el núcleo de este morfismo, entonces nuevamente $(\theta(g),\, 1,\, f(g)) \in A$ y $(1,\, g,\, \eta(g)) \in B$. Tomando $(1,\, 1,\, 1) \in A$ tenemos $(1,\, g,\, \eta(g)) \in N_{\theta,\,\eta}$ por lo tanto $g = 1$. Esto implica que G es isomorfo a un subcociente de K, lo que es una contradicción.

$\square$

Módulos sobre funtores de representaciones

En el siguiente lema supondremos que $\mathbb{J}$ es un campo y que A es alguno de los funtores de Green que a cada grupo G asignan un R-módulo de clases de isomorfismo de $\mathbb{J}G$-módulos finitamente generados (por ejemplo, el grupo de Grothendieck o el anillo de Green con coeficientes en R de la categoría de $\mathbb{J}G$-módulos finitamente generados).

Lema 4.3.27. *Si $[M] \in A(H \times G)$ y $[N] \in A(G \times K)$, entonces*

$$A(H \times \overleftarrow{G} \times K)([M] \times [N]) = [M \otimes_{\mathbb{J}G} N].$$

Prueba. Recordemos que el producto $[M]\times[N]$ se define como la clase del $\mathbb{J}(H\times G\times G\times K)$-módulo $M\otimes_{\mathbb{J}} N$, donde $G\times K$ actúa trivialmente en M y $H\times G$ lo hace en N.

De la descomposición de Bouc para $\overleftarrow{G}$, obtenemos que aplicar $A(H\times\overleftarrow{G}\times K)$ al módulo anterior, es la deflación de $H\times\Delta(G)\times K$ a $H\times K$ del módulo $M\otimes_{\mathbb{J}} N$ restringido a $H\times\Delta(G)\times K$. Pero esta deflación es el cociente más grande de $M\otimes_{\mathbb{J}} N$ en el que $1\times\Delta(G)\times 1$ actúa trivialmente, es decir $M\otimes_{\mathbb{J}G} N$. □

Proposición 4.3.28. *$\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$ es el único $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$-módulo simple. En particular, es un funtor de Green simple.*

Prueba. Por el Teorema 10.33 en Curtis y Reiner [11], para cualesquiera G y K grupos

$$\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G\times K)\cong\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(K)$$

lo que, de acuerdo al lema anterior, es equivalente a

$$\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G\times K)\cong\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G\times 1)\circ\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(1\times K).$$

Esto implica que si M es un $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$-módulo distinto de 0, entonces $M(1)\neq 0$. Así, por la Proposición 4.3.16, el único módulo simple es el correspondiente a $(1,\mathbb{C})$. Ahora, si $V\leqslant\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$ es un ideal izquierdo distinto de 0, como $V(1)\neq 0$, entonces $\varepsilon_{\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}}=\mathbb{C}\in V(1)$. Luego $V\cong\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$. □

En el Capítulo 7 de [9], Bouc prueba que $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$ es semisimple como funtor de Mackey. Sus componentes son los funtores de Mackey simples indexados por parejas $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, V)$ donde $m\neq 0$ es un natural y V es un $\mathbb{C}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$-módulo primitivo (ver definición más adelante). Sabemos que $\mathbb{C}R_{\mathbb{Q}}\cong S_{1,\mathbb{C}}$ no es un $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$-módulo. Esta proposición nos dice que de hecho, ninguna de las componentes simples es un $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$-módulo. Sin embargo, veremos en la próxima sección que estos sumandos son todos los $\mathbb{C}R_{\mathbb{Q}}$-módulos simples.

4.3.2. $\mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}$-módulos o funtores de Mackey retóricos

En esta sección $\mathbb{K}$ y $\mathbb{J}$ serán campos de característica 0.

La definición de funtor de Mackey retórico proviene de Barker [2]. Se define $\hat{\Omega}_{\mathbb{K}}$ como la categoría que tiene por objetos a los grupos finitos, y por morfismos de H a G el cociente $\mathbb{K}B(H\times G)/Ker(\mathbb{K}\mathrm{lin}_{\mathbb{J}\,H\times G})$, donde

$$\mathbb{K}\mathrm{lin}_{\mathbb{J}}:\mathbb{K}B\to\mathbb{K}R_{\mathbb{J}}$$

es el morfismo de linealización. Por el Lema 4.3.6, la composición $\circ$ puede extenderse a este cociente. De acuerdo a la sección tres en [2], un funtor de Mackey retórico puede definirse como un funtor $\mathbb{K}$-lineal contravariante de $\hat{\Omega}_{\mathbb{K}}$ en $\mathbb{K}$-Mod.

Observación 4.3.29. Supongamos que $\mathbb{J} = \mathbb{Q}$. Como el morfismo de linealización en este caso es suprayectivo, entonces por el Lema 4.3.17 y la Proposición 4.3.5, los funtores de Mackey retóricos son los $\mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}$-módulos. Por otro lado, por el Teorema de Ritter-Segal, (9.2.1 en [9]), esto también es cierto si los grupos en $\Omega_{\mathbb{K}}$ son p-grupos para algún primo p, aún si $\mathbb{K}$ no es un campo de característica 0.

Esta observación es equivalente a la Proposición 3.1 en [2], en vista del Lema 4.3.27.

Si $\mathbb{J} = \mathbb{Q}$, entonces por el Corolario 4.3.19, los funtores de Mackey retóricos simples son los funtores de Mackey simples $S_{H,V}$ para los que $\mathbb{K}\hat{R}_{\mathbb{Q}}(H)$ es distinto de 0 y V es un $\mathbb{K}\hat{R}_{\mathbb{Q}}(H)$-módulo simple. Como hemos visto, si H no es un grupo cíclico, entonces $\mathbb{K}\hat{R}_{\mathbb{Q}}(H) = 0$.

Lema 4.3.30. *Para cualquier grupo H no trivial, el submódulo de $\mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}(H \times H)$*

$$\sum_{\substack{K \text{ grupo} \\ |K|<|H|}} \mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}(H \times K) \circ \mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}(K \times H)$$

es igual a

$$\sum_{\substack{K \text{ cíclico} \\ |K| \text{ divisor propio de } |H|}} \mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}(H \times K) \circ \mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}(K \times H).$$

Prueba. Supongamos que M y N son módulos tales que $[M] \circ [N]$ está en $\mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}(H \times G) \circ \mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}(G \times H)$, donde G es un grupo de orden menor al de H.

Por el Teorema de Inducción de Artin, M es isomorfo a

$$\sum_{\substack{C \leqslant H\times G \\ C \text{ cíclico}}} a_C 1_C {\uparrow}_C^{H\times G}$$

con $a_C \in \mathbb{Q}$. Ahora, en la descomposición de Bouc para $(H \times G)/C$

$${}_H H_A \circ {}_A B_B \circ {}_B B_D \circ {}_D G_G$$

tenemos que B es un grupo cíclico de orden un divisor propio de H. Además, como el morfismo de linealización es un morfismo de funtores de Green, del Lema 4.3.6 obtenemos

$$[1_C {\uparrow}_C^{H\times G}] = [1_X {\uparrow}_X^{H\times B}] \circ [1_Y {\uparrow}_Y^{B\times G}]$$

si ${}_H H_A \circ {}_A B_B \cong (H \times B)/X$ y ${}_B B_D \circ {}_D G_G \cong (B \times G)/Y$.

Si para esta descomposición denotamos por B_C a B y por $[N]_C = [1_Y {\uparrow}_Y^{B_C\times G}] \circ [N]$, entonces $[M] \circ [N]$ es igual a

$$\sum_{\substack{C \leqslant H\times G \\ C \text{ cíclico}}} a_C [1_X {\uparrow}_X^{H\times B_C}] \circ [N]_C,$$

que pertenece a $\sum_K \mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}(H \times K) \circ \mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}(K \times H)$ con K cíclico de orden un divisor propio de $|H|$. $\square$

Como sabemos, $\hat{\mathbb{K}B}(H)$ es isomorfo a $\mathbb{K}Out(H)$. Este isomorfismo está dado por asociar a cada automorfismo σ de H, el $H \times H$-conjunto $X_\sigma = (H \times H)/\Delta_\sigma(H)$, donde

$$\Delta_\sigma(H) = \{(a, \sigma(a)) \mid a \in H\}.$$

Los automorfismos interiores se identifican todos con X_{id}. Observemos que si H es cíclico, entonces $\mathrm{Out}(H) = \mathrm{Aut}(H)$ y $\Delta_\sigma(H)$ es cíclico.

Recordemos que para un grupo abeliano G, la dimensión de $\mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}(G)$ sobre $\mathbb{K}$ es el número de subgrupos cíclicos de G. Además, los elementos de la forma $[1_C\!\uparrow_C^G]$ con C cíclico son generadores, y por lo tanto forman un base para $\mathbb{K}R_{\mathbb{Q}}(G)$ sobre $\mathbb{K}$. Llamaremos $\beta(G)$ a esta base.

Lema 4.3.31. *Sean H y K grupos cíclicos con $|K|$ un divisor propio de $|H|$. Sea σ un automorfismo de H. Consideremos un $\mathbb{Q}(H \times H)$-módulo T de la forma*

$$1_C\!\uparrow_C^{H\times K} \otimes_{\mathbb{Q}K} 1_D\!\uparrow_D^{K\times H}$$

con $C \leqslant H \times K$ y $D \leqslant K \times H$ subgrupos cíclicos. Entonces el coeficiente de $[1_{\Delta_\sigma(H)}\!\uparrow_{\Delta_\sigma(H)}^{H\times H}]$ para $[T]$ en términos de la base $\beta(H \times H)$ es distinto de 0 si y sólo si se satisfacen

i) $\pi_H(C) = H = \pi_H(D)$

ii) $C =< (h, k) > \iff D =< (k, \sigma(h)) >$.

En este caso, dicho coeficiente es $|K|/|H|$.

Prueba. Sea τ el carácter asociado a T. Por el Teorema 15.4 en Curtis y Reinter [11], los coeficientes de τ en términos de la base $\beta(H \times H)$ están dados de la siguiente forma: Para $G \leqslant H \times H$ cíclico, tenemos

$$q_G = \frac{1}{[H \times H : G]} \sum_{G \leqslant G^*} \mu([G^* : G])\tau(z^*)$$

donde $\{G^*\}$ corre sobre todos los subgrupos cíclicos que contienen a G, μ es la función de Möbius y z^* es un generador de G^*.

Como $\exp(H \times H) = |H|$, entonces $\Delta_\sigma(H)$ es un subgrupo cíclico maximal, es decir, no está contenido propiamente en ningún otro subgrupo cíclico. Luego, si $q_\sigma = q_{\Delta_\sigma(H)}$, entonces $q_\sigma = (1/|H|)\tau(z)$ para z un generador de $\Delta_\sigma(H)$.

Supongamos que $H =< a >$. Sean τ_C y τ_D los caracteres de $1_C \uparrow_C^{H\times K}$ y $1_D \uparrow_D^{K\times H}$, respectivamente, por el Lema 7.1.3 en Bouc [9], tenemos

$$\tau(a,\, \sigma(a)) = \frac{1}{|K|} \sum_{k\in K} \tau_C(a,\, k)\tau_D(k,\, \sigma(a)).$$

Así que, q_σ es distinto de 0 si y sólo si existe $k \in K$ tal que $(a,\, k)$ pertenece a C y $(k,\, \sigma(a))$ pertenece a D, y en este caso

$$\tau_C(a,\, k) = [H \times K : C] \quad \text{y} \quad \tau_D(k,\, \sigma(a)) = [K \times H : D].$$

Ahora, como $|K|$ es un divisor propio de $|H|$, entonces $(a,\, k)$ y $(k,\, \sigma(a))$ son elementos de orden $|H|$, y debemos tener $< (a,\, k) >= C$ y $< (k,\, \sigma(a)) >= D$. Por la misma razón, k es el único elemento de K tal que $(a,\, k)$ está en C (respectivamente $(k,\, \sigma(a))$ está en D). De esto obtenemos $q_\sigma = |K|/|H|$. □

En adelante, H será un grupo cíclico de orden $m > 1$.

Si n es un divisor de m, sea $\pi_{m,\,n}$ la proyección natural

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times.$$

Tomamos los representantes positivos más pequeños para $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ y denotamos por σ_t al automorfismo de H correspondiente a la clase de t en $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

Si σ es un automorfismo de H, escribiremos 1_σ en lugar de $1_{\Delta_\sigma(H)}$. Componiendo con el isomorfismo entre $\mathbb{K}\hat{B}(H)$ y $\mathbb{K}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$, podemos considerar la extensión del morfismo de linealización de la siguiente forma

$$\ell_H : \mathbb{K}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{K}\hat{R}_\mathbb{Q}(H),$$

que manda $[t]$ en la clase de $[1_{\sigma_t} \uparrow_{\Delta_{\sigma_t}(H)}^{H\times H}]$.

Proposición 4.3.32. *Sea*

$$x_n = \sum_{[t]\in Ker\pi_{m,\,n}} [t].$$

El núcleo de ℓ_H es el ideal generado por $\{x_n \mid n$ divisor propio de $m\}$.

Prueba. Si n es un divisor propio de m, veamos que x_n está en el núcleo de ℓ_H. Sea K un grupo cíclico de orden n y supongamos que $H =< a >$ y $K =< k >$. Sean $C =< (a,\, k) >$ y $D =< (k,\, a) >$. Si $[t]$ está en el núcleo de $\pi_{m,\,n}$, entonces

$$< (k,\, a) >=< (k,\, a)^t >=< (k,\, \sigma_t(a)) > .$$

Así que por el lema anterior, la clase de isomorfismo de

$$\sum_{[t]\in Ker\pi_{m,\,n}} 1_{\sigma_t}\!\uparrow^{H\times H}_{\Delta_{\sigma_t}(H)}$$

aparece con coeficiente $|K|/|H|$ en la descomposición de

$$[1_C\!\uparrow^{H\times K}_C \otimes_{\mathbb{Q}K} 1_D\!\uparrow^{K\times H}_D]$$

en términos de $\beta(H\times H)$. Claramente, este elemento es 0 en $\mathbb{K}\hat{R}_{\mathbb{Q}}(H)$. Además, si algún otro básico de la forma $[1_{\sigma_r}\uparrow^{H\times H}_{\Delta_{\sigma_r}(H)}]$ aparece en su descomposición, entonces existe un entero d tal que $(k,\,\sigma_r(a))^d=(k,\,a)$, pero es fácil ver que esto implica $[r]\in Ker\pi_{m,\,n}$. Esto quiere decir que el resto de los elementos que aparecen en dicha descomposición provienen de $(H\times H)$-conjuntos que son 0 en $\mathbb{K}\hat{B}(H)$. Por lo tanto, $\ell_H(x_n)$ es 0 en $\mathbb{K}\hat{R}_{\mathbb{Q}}(H)$.

Supongamos ahora que

$$\sum_{i=1}^{d} a_i[s_i]$$

con $[s_i]$ en $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ y a_i en $\mathbb{K}$, está en el núcleo de ℓ_H. Utilizando el Lema 4.3.30 y el Teorema de Inducción de Artin, esto implica que

$$\sum_{i=1}^{d} a_i[1_{\sigma_{s_i}}\uparrow^{H\times H}_{\Delta_{\sigma_{s_i}}(H)}] \tag{4.1}$$

puede escribirse como

$$\sum_{j=1}^{e} b_j[1_{C_j}\uparrow^{H\times K_j}_{C_j}]\circ[1_{D_j}\uparrow^{K_j\times H}_{D_j}], \tag{4.2}$$

con C_j, D_j y K_j grupos cíclicos y $|K_j|$ un divisor propio de $|H|$. Por el Lema 4.3.31, si algún $[1_{\sigma_{s_i}}\uparrow^{H\times H}_{\Delta_{\sigma_{s_i}}(H)}]$ aparece en la descomposición de $[1_{C_j}\uparrow^{H\times K_j}_{C_j}]\circ[1_{D_j}\uparrow^{K_j\times H}_{D_j}]$, debemos tener $C_j=<(a,\,k)>$ y $D_j=<(k,\,\sigma_{s_i}(a))>$ para algún $k\in K_j$. Si n_j es el orden de k, entonces, tal como arriba, la clase de isomorfismo de

$$\sum_{[t]\in Ker\pi_{m,\,n_j}} 1_{\sigma_t\sigma_{s_i}}\uparrow^{H\times H}_{\Delta_{\sigma_t\sigma_{s_i}}(H)} \tag{4.3}$$

aparece con coeficiente $|K_j|/|H|$ en esta descomposición. Esto quiere decir que si algún elemento de esta suma tiene coeficiente distinto de 0 en (4.2), entonces toda la suma tiene ése mismo coeficiente. Como todos los elementos en (4.1) y (4.3) son básicos, entonces todos los elementos de (4.1) deben ser de la forma descrita en (4.3), lo que prueba el resultado. □

Observemos que si $Ker\pi_{m,n} = 1$ para n divisor propio de m, entonces $[1_{\Delta(H)}\uparrow_{\Delta(H)}^{H\times H}]$ es 0 en $\mathbb{K}\hat{R}_{\mathbb{Q}}(H)$, y por lo tanto $\mathbb{K}\hat{R}_{\mathbb{Q}}(H) = 0$.

Definición 4.3.33. Sean m en $\mathbb{N}-\{0\}$. Un $\mathbb{K}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$-módulo simple V se llama primitivo si para n divisor de m

$$x \cdot 1 = 1 \; \forall x \in Ker\pi_{m,n} \Longrightarrow n = m.$$

Corolario 4.3.34. *Sean H un grupo tal que $\mathbb{K}\hat{R}_{\mathbb{Q}}(H) \neq 0$, y V un $\mathbb{K}Out(H)$-módulo simple. Entonces V es un $\mathbb{K}\hat{R}_{\mathbb{Q}}(H)$-módulo si y sólo si V es primitivo.*

Prueba. Sabemos que H debe ser cíclico. Supongamos que es de orden $m > 1$, y sea n un divisor propio de m.

Supongamos que V es un $\mathbb{K}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$-módulo simple que es también un $\mathbb{K}\hat{R}_{\mathbb{Q}}(H)$-módulo. Si $x \cdot 1 = 1$ para todo $x \in Ker\,\pi_{m,n}$ y $1 \in V$, entonces $x_n \cdot 1 \neq 0$, una contradicción.

Ahora supongamos que V es un $\mathbb{K}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$-módulo simple primitivo. Si $x_n \cdot 1 = c$ con $c \neq 0$, entonces para todo $x \in Ker\pi_{m,n}$ tenemos

$$x \cdot c = x \cdot (x_n \cdot 1) = xx_n \cdot 1 = x_n \cdot 1 = c$$

ya que $xx_n = x_n$. Pero esto es una contradicción. □

Bibliografía

[1] Marcelo Aguilar, Carlos Prieto. Equivariant homotopical homology with coefficients in a Mackey functor. *Topology and its applications*, 154:2826–2848, 2007.

[2] Laurence Barker. Rhetorical biset functors, rational p-biset functors and their semisimplicity in characteristic zero. *Journal of Algebra*, 319:3810–3853, 2008.

[3] D. J. Benson. *Representations and cohomology I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras.* Cambridge University Press, United Kingdom, 1995.

[4] Robert Boltje. Explicit and canonical Dress induction. *Algebr. Represent. Theory*, 8:731–746, 2005.

[5] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra 2: Categories and structures.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[6] Serge Bouc. Mackey functors. *Disponible en http://www.lamfa.u-picardie.fr/bouc/.*

[7] Serge Bouc. Foncteurs d'ensembles munis d'une double action. *Journal of Algebra*, 183:664–736, 1996.

[8] Serge Bouc. *Green functors and G-sets.* Springer, Berlin, 1997.

[9] Serge Bouc. *Biset functors for finite groups.* Springer, Berlin, 2010.

[10] Olcay Coşkun. Mackey functors, induction from restriction functors and coinduction from transfer functors. *Journal of Algebra*, 315:224–248, 2007.

[11] C. W. Curtis, I. Reiner. *Methods of representation theory with applications to finite groups and orders.* Volumen 1. John Wiley and sons, U.S.A, 1981.

[12] Andreas Dress. Contributions to the theory of induced representations. *Lecture Notes in Math. Algebraic K-theory (Springer-Verlag)*, 342:183–240, 1973.

[13] Peter J. Freyd. *Abelian Categories: An introduction to the theory of functors.* Harper and Row, New York, 1964.

[14] J. Green. Axiomatic representation theory for finite groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1:41–77, 1971.

[15] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Springer, Berlin, 1971.

[16] Elango Panchadcharam, Ross Street. Mackey functors on compact closed categories. *Journal of Homotopy and related structures*, 2:261–293, 2007.

[17] Alberto Raggi-Cárdenas. Primordial subgroups for mod(kG). *Journal of Algebra*, 139:155–158, 1991.

[18] Alberto Raggi-Cárdenas, Nadia Romero. On primordial groups for the Green ring. *Por aparecer en Proceedings of the 2009 Skye Conference on Algebraic Topology, Group Theory and Representation Theory (0902.3169 en arxiv.org).*

[19] Jacques Thévenaz. Some remarks on G-functors and the Brauer morphism. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 384:24–56, 1988.

[20] Peter Webb. Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and the decomposition of classifying spaces. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 88:265–304, 1993.

[21] Peter Webb. A guide to Mackey functors. *Handbook of algebra v. 2 (North-Holland)*, pages 805–835, 2000.

[22] Tomoyuki Yoshida. Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem. *Journal of Algebra*, 80:90–105, 1983.

Índice