UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE PSICOLOGÍA
MAESTRÍA EN PSICOLOGÍA EDUCATIVA

"ESTRATEGIAS QUE EMPLEAN PREESCOLARES PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS QUE IMPLICAN SUMA O RESTA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN PSICOLOGÍA EDUCATIVA
P R E S E N T A
SANDRA MARGARITA MONTIEL GARCÍA

DIRECTORA DE TESIS: DRA. ROSA DEL CARMEN FLORES MACÍAS
COMITÉ DE TESIS: DRA. IRENE D. MURIA VILA
DRA. SUSANA ORTEGA PIERRES
DRA. YOLANDA GUEVARA BENÍTEZ
DRA. ILEANA SEDA SANTANA

México, D.F. 2011

DEDICATORIA

A mi familia, especialmente a mis padres y hermanos,
quienes continuamente me brindan su apoyo en una diversidad de formas y estilos que se complementan entre sí.

A mi madre, por su cariño, dedicación y fortaleza,
por su ejemplo de vida.

A mi padre, ejemplo de perseverancia, entusiasmo y compromiso en la empresa de nuevos planes.

A mi hermano y colega Lupín por su legado de enseñanza
en la ayuda al prójimo.

A mis sobrinos, entusiastas compañeros de
múltiples experiencias.

A mis amigos y compañeros, cuyas aportaciones y escucha están
presentes en los diferentes momentos de mi trayectoria
personal y profesional

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México

A los miembros del honorable jurado y a mis maestros, quienes me han brindado conocimientos y apoyo, además de ser ejemplo de compromiso y perseverancia

A cada uno de los niños que participaron en esta investigación compartiendo conmigo su entusiasmo, su saber, y su actuar.

A los directivos y maestros de los centros escolares que proporcionaron las facilidades para llevar a cabo este trabajo.

A Delfi, por su valiosa e incansable participación como correctora de estilo.

ÍNDICE

Resumen

Tomando en cuenta la importancia de rescatar los conocimientos matemáticos que poseen los niños pequeños, para continuar su aprendizaje en el ámbito de las matemáticas, se planteó la necesidad de indagar las estrategias empleadas por niños preescolares para resolver problemas que implican suma o resta, esto fue explorado a través del método de la entrevista clínica. En este estudio de corte cualitativo se entrevistó a 20 niños de 4 años 6 meses a 6 años 10 meses de edad, que cursaban preescolar. Se les plantearon problemas de adición y sustracción y se identificaron las estrategias que emplearon para resolverlos. Estas estrategias fueron analizadas y organizadas en cuatro niveles de complejidad: (I) Representación concreta, (II) Conteo a partir de, (III) Estrategia mental a partir de la representación concreta, y (IV) Estrategia mental directa; esta organización tomó como base los planteamientos de Moser (1989), quien sugirió la existencia de tres niveles de estrategias. También se observó que el problema de comparación resultó ser el de mayor dificultad, encontrando además que quienes tenían un mayor manejo de las invariantes y de los principios de conteo, empleaban una mayor variedad de estrategias y de mayor complejidad en comparación con quienes poseían un menor dominio de aquellos; además se observó que los de mayor edad y los varones solían emplear estrategias más complejas, que las empleadas por las niñas o por los de menor edad.

Palabras clave: preescolar, matemáticas, suma, resta, estrategias.

Abstract

Given the importance of rescuing the mathematical knowledge by young children to help them continue their learning in the field, was the reason why it was neccesary to investigate the strategies used by preschool children to solve problems involving addition or subtraction, this was explored through clinical interview method. In a qualitative study, 20 children from 4 years 6 months to 6 years 10 months of age, who were in preschool, were interviewed. They were asked to resolve addition and subtraction operations, as well as identify the strategies they used to solve them. These strategies were analyzed and organized into four complexity levels: (I) Concrete representation, (II) Count from (III) Mental strategy from concrete representations, and (IV) Direct mental strategy. This organization used the bases of Moser (1989) who suggested three levels of strategies. It was also acknowledge that the comparison problems were the most difficult ones and that those students with greater use of invariants and principles of counting, employed a wider variety of complex strategies than those who had less proficiency of them. It was also observed that older students and boys often employ more complex strategies than those used by girls or younger students.

Keywords: preschool, math, addition, subtraction, strategies.

INTRODUCCIÓN

Es común encontrar en todos los grados escolares alumnos que presentan constantes fracasos en el aprendizaje de las matemáticas, y otros a pesar de que cumplen con los objetivos del programa pareciera que sólo han logrado un aprendizaje mecánico, puesto que, aún contando con ciertos conocimientos acerca de las matemáticas, les resulta sumamente difícil aplicarlos cuando se trata de resolver algún problema para el cual esos conocimientos serían útiles. Algo preocupante es además la gran cantidad de alumnos que pudieran encontrarse en esta situación.

Esto conduce a pensar en los posibles aspectos que pudieran contribuir a crear y/o agravar esta situación, por ejemplo el contenido curricular, el método de enseñaza, las dificultades propias del niño, o la concepción que tienen alumnos y maestros respecto a las matemáticas. Todos estos aspectos pueden ejercer algún efecto sobre el aprendizaje de matemáticas, y por supuesto, sobre la facilidad o dificultad para emplear los conocimientos en la solución de problemas aritméticos dentro o fuera de la escuela.

Ante esta problemática surge el interés por profundizar en el estudio del aprendizaje de las matemáticas y en particular de la solución de problemas, para tratar de entender qué estrategias emplean los niños y cómo pudieran ser aprovechadas para evitar dificultades al momento que necesiten solucionar problemas aritméticos que se presentan como parte de las situaciones cotidianas.

Si bien las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se extienden a todos los niveles de escolaridad, el interés particular por trabajar a nivel de prevención, conduce a centrar este proyecto de investigación en niños preescolares, considerando que el aprendizaje de las matemáticas inicia mucho antes de ingresar a la primaria.

Por otra parte se intenta resaltar la riqueza de conocimientos y estrategias que poseen los niños pequeños y que desafortunadamente en ocasiones, lejos de ser retomados para apoyarlos en la evolución de su aprendizaje, son ignorados, pareciera que la idea es impulsar su aprendizaje únicamente empleando situaciones planeadas formalmente, bajo un plan predeterminado.

En torno a este tema se han conducido diversas investigaciones enfocadas al estudio del conocimiento matemático que poseen los preescolares acerca de la adición y sustracción. Al respecto Carpenter y Moser (1982) realizaron un estudio longitudinal con niños pequeños, indagaron acerca de sus habilidades para resolver problemas de suma y resta, encontrando que desde antes de recibir instrucción formal, los niños podían resolver estos problemas mediante diversas estrategias. Durante el primer año de investigación trabajaron con 150 niños de primer grado a los cuales entrevistaron de manera individual; les presentaron problemas de reunión y de parte-todo bajo cuatro diferentes condiciones (cruzaron dos variables: tamaño del número y posibilidad de manipular objetos); a partir de estas situaciones observaron tres niveles de abstracción expresados a través de la utilización de tres niveles básicos de estrategias: 1) Estrategias basadas en el modelaje directo con objetos físicos o con los dedos. 2) Estrategias basadas en el uso de conteo de series. 3) Estrategias basadas en la evocación de hechos numéricos.

Por su parte, en un trabajo presentado por Armenta y Rangel (1990) abocado al estudio de la enseñaza y el aprendizaje de la matemática en el nivel preescolar, se encontró que los niños no sólo resolvían sino que también creaban problemas matemáticos, además se comprobó que aun cuando los niños no conozcan o no estén familiarizados con el lenguaje y grafías convencionales, sí poseen conocimiento matemático, lo cual corresponde con las afirmaciones de Baroody (1994) y de Bryant (en Nunes y Bryant, 1998).

Armenta y Rangel (1990) trabajaron durante nueve sesiones con un grupo de nueve niños que asistían al segundo grado de preescolar (sus edades fluctuaban entre 5 años 5 meses y 6 años 2 meses). El objetivo de su investigación fue comprobar: 1) que el conocimiento matemático existe aunque se desconozca el lenguaje y las grafías convencionales, 2) que los niños preescolares pueden inventar y resolver problemas de suma y resta. Los hallazgos de la investigación se refieren a cinco aspectos: I) Recursos de conteo.- los niños utilizaron el conteo uno a uno y el conteo global. II) Utilización del material.- los niños emplearon distintos tipos de materiales para contar, y poco a poco empezaron a emplear sólo sus dedos o bien, realizar operaciones mentales. III) El lenguaje matemático.- algunos niños emplearon el lenguaje matemático convencional; solían usar la pregunta "¿cuántos quedan?" en los problemas de suma y en los de resta. IV) Estructura de los problemas inventados.- los niños lograron identificar el tipo de acción (suma o resta) y los momentos de la operación (estado inicial, operación, estado final). V) Relación entre lo gráfico y lo conceptual.- observaron que ambos conocimientos no se desarrollan a la par.

Más recientemente, Miranda condujo en 2003 una investigación enfocada a conocer y describir las estrategias que emplean niños preescolares para resolver situaciones aditivas. Trabajó con 20 niños que cursaban tercer grado de preescolar, presentándoles problemas de adición y sustracción, usando para ello dados con puntos. Se centró principalmente en analizar las estrategias de cuantificación que emplearon los niños para solucionar estos problemas y encontró que los niños emplean dos tipos de estrategias: “sumar contando” y “sumar primero por grupos y después sumar el gran total”. Mediante esta investigación confirma el papel activo del niño en este tipo de tareas y la posibilidad de los menores para el desarrollo de estrategias propias para la resolución de problemas matemáticos.

La importancia que tiene el aprendizaje de matemáticas en el nivel preescolar es enfatizada nuevamente en una segunda investigación conducida por Ríos (1991) acerca de la enseñanza de las matemáticas, donde encontró entre otras cosas, que existe la necesidad de revisar los errores conceptuales del propio maestro. En esta investigación uno de los aspectos a analizar fue el de las conceptualizaciones de las educadoras con relación a la matemática. En 96 jardines federales de niños observó y entrevistó a las maestras en su mayoría de tercer grado; observó que sólo una minoría de las educadoras trataron de indagar en el pensamiento de los alumnos, acerca de la correspondencia 1 - 1; igualmente observó que aún existía, en aquel entonces, la idea de que las actividades de conteo tienen por objetivo que el niño aprenda de la serie numérica el orden convencional, limitando así sus oportunidades para descubrir hechos. Con esta investigación Ríos trata de subrayar la influencia que puede ejercer el aprendizaje a nivel preescolar sobre el aprendizaje a niveles posteriores.

Por tal motivo se plantea como objetivo del presente proyecto de investigación, profundizar en el conocimiento acerca de las estrategias que emplean los niños pequeños para tratar de resolver problemas que implican adición o sustracción. Para tal efecto se retoma en este estudio de corte cualitativo, el método de entrevista clínica empleado por Piaget (citado en Delval, 2001).

La revisión teórica aborda en un primer apartado los diferentes tipos de conocimiento planteados por Kamii (1982, 1985) y en especial del conocimiento lógico matemático de los niños pequeños. En un segundo apartado se analizan los conceptos matemáticos tales como número, conteo, principios de conteo, así como los elementos que participan para la formación de los mismos. En el tercer apartado se aborda el tema de los problemas aditivos, considerando dentro de estos los de suma y resta; además se revisa la categorización de los tipos de problemas: problemas de comparación, combinación, cambio, y de igualación. En el apartado cuatro se revisa la teoría respecto a los conocimientos que poseen los niños pequeños acerca de la suma y la resta, considerando que poseen un conocimiento intuitivo mismo que no implica un manejo de signos y símbolos. Finalmente se describen los tres niveles de estrategias planteadas por Moser en 1989.

Cabe aclarar que, si bien en el presente trabajo la tendencia fue analizar los procesos cognitivos, eso no significa que se reste importancia a los componentes afectivos que influyen para el aprendizaje, ni a la relación que existe entre el conocimiento lógico matemático y el contexto social en el que ocurre, ya que tanto la motivación como la relación social son elementos que apoyan el aprendizaje del niño.

1. CONOCIMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

En las situaciones que surgen como parte de las experiencias cotidianas y que pueden ser resueltas mediante el uso de operaciones matemáticas, se hace presente la relación que existe entre los diferentes tipos de conocimiento que postula la teoría psicogenética. En este sentido, Kamii (1982, 1985) propone la existencia de tres tipos de conocimiento: físico, lógico - matemático y social.

Para aclarar de qué manera se da esta relación entre los tres tipos de conocimiento dentro de las situaciones problemáticas de adición y sustracción en este caso, es importante analizar con detalle en qué consisten, ya que cada uno de ellos tiene características particulares (Contreras, Espinoza, Helguera, Linares y Ordoñez, 1990; Kamii, 1982; 1985).

1.1. TIPOS DE CONOCIMIENTO

El conocimiento físico se refiere al conocimiento de propiedades físicas en los objetos de la realidad externa, y es posible conocerlos a través de la observación (peso o color, por ejemplo), por lo tanto, la fuente del conocimiento físico es externa.

El conocimiento lógico matemático consiste en las relaciones que el sujeto crea mentalmente entre los objetos, no hay nada "arbitrario" porque las matemáticas son un sistema de relaciones. Se refiere a relaciones tales como diferencia, semejanza, dos, etc. Estas relaciones que el sujeto establece dependen de él mismo, es decir, que la fuente de conocimiento es interna, es la reflexión interiorizada.

El conocimiento social resulta de la adquisición de información del medio ambiente, se refiere más bien a un conocimiento convencional que es arbitrario por naturaleza, son convencionalismos creados por la gente.

Igualmente, cuando un niño hace uso de los vocablos “más”, “dos”, “agregar”, para referirse a cantidades de objetos, está aplicando su conocimiento social para expresar algo acerca de su conocimiento lógico-matemático.

De este modo, independientemente de que la fuente de conocimiento sea externa o interna o que se trate de un conocimiento convencional (como los nombres de los objetos) o no arbitrario (como las relaciones de diferencia entre dos objetos), el individuo siempre realiza construcciones internas dada su participación activa (en cuanto a procesos mentales) en la construcción del conocimiento.

Puesto que los tres tipos de conocimiento se interrelacionan, es importante analizar dicha relación, en torno al conocimiento lógico matemático.

Conocimiento lógico matemático y conocimiento físico

Kamii (1982), basándose en la teoría de Piaget, afirma que en el conocimiento lógico matemático se trata de coordinar las relaciones simples que el niño crea previamente entre los objetos.

Es decir que el conocimiento físico de los objetos implica que el niño logra conocer el mundo externo a través de los sentidos, y a partir del conocimiento de las características de los objetos o situaciones, construirá relaciones que formarán parte del conocimiento lógico - matemático.

Cabe mencionar que es un error tratar de que los niños aprendan conceptos numéricos igual que como aprenden las propiedades físicas de los objetos, es decir que para ello no podemos apoyarnos solamente en la utilización de sus sentidos y de su capacidad para construir (abstracción empírica o simple). Como lo afirma Piaget en el siguiente ejemplo: el niño no aprende el número 1000, partiendo de la abstracción empírica de conjuntos de 1000 ya formados, y visibles o palpables, aquí más bien empleará su capacidad de abstracción reflexiva, puesto que en cada uno de estos dos tipos de conocimiento (físico o lógico-matemático) se realizan abstracciones diferentes (Piaget, citado en Kamii, 1982).

Conocimiento social y conocimiento lógico - matemático

De acuerdo con Kamii (1982a), las palabras habladas (que forman parte del conocimiento social), se usan para referirse a los diversos conceptos lógico matemáticos construidos por el niño y es precisamente por transmisión social como se dan a conocer.

En este sentido, se entiende que el conocimiento lógico matemático requiere del conocimiento social debido a que es dentro de la sociedad donde se han creado las formas convencionales de nombrar a un objeto en forma particular para referirse a él, por ejemplo: se puede nombrar un objeto llamándolo "pelota" y sin que ese objeto esté presente sabemos a qué se refiere la palabra "pelota" porque sabemos que así se le llama al objeto que cumple ciertas características.

De igual manera, se entiende que otros conceptos que no se refieren precisamente a objetos sino a relaciones e ideas (conocimiento lógico matemático) pueden mencionarse mediante la palabra, la cual al ser enseñada implica la transmisión de un conocimiento social. Por ejemplo, cuando el niño se ha formado la idea de *4*, aprenderá por transmisión social que puede usar la palabra "cuatro" para referirse a esa idea, de la misma forma cuando crea la relación de diferencia entre dos objetos, aprende a referirse a esa relación con la palabra "diferente". O cuando emplea la palabra "suma" o "más" para referirse a la idea que ya tiene acerca de esos conceptos.

En este sentido, Kamii (1982, 1982a) resalta la importancia que tiene para la enseñanza el no confundir lo que el niño aprende mediante la transmisión social con lo que el niño construye. Por ejemplo, cuando se les enseña a los niños a dar la respuesta a una suma (usando palabras o signos convencionales), no se les está enseñando directamente la relación que subyace a esta suma, ya que la relación es algo que el niño construye, más bien se le está presentando un vocablo o un signo que puede emplear para referirse al resultado que obtuvo de tal manera que las demás personas comprendan a qué se refiere.

Asimismo, cuando emplea palabras como “más, menos, muchos, pocos, sumar, restar”, o los nombres de los números, claramente esto no indica que posea el concepto, más bien indica que conoce los vocablos.

Por otra parte, el conocimiento social es un conocimiento de contenidos y requiere de un marco lógico matemático para ser asimilado y organizado (Kamii, 1982).

Por ejemplo, para afirmar mediante la palabra que “el gato es blanco”, el niño tuvo que realizar antes un proceso de abstracción, análisis, comparación y generalización para formarse el concepto de “gato” (no el nombre de gato, puesto que éste más bien lo adquiere por transmisión social) lo mismo que al formarse el concepto de “blanco”.

Incluso para emplear palabras que implican valores sociales tales como “difícil” o “bonito” por ejemplo, también necesita atravesar por ese proceso mental.

Así es que cuando al observar que aumenta la cantidad de elementos en un conjunto y expresa acertadamente “más”, esta palabra es parte del conocimiento social que ha aprendido a utilizar para expresar una idea que posee, misma que ha construido a través de actividades de observación y comparación.

Todo esto indica que es necesario ver el desarrollo de los conceptos matemáticos como una cuestión que no es meramente cognitiva, puesto que existen diversos elementos sociales que influyen de manera importante sobre el desarrollo del conocimiento matemático (De Abreu, en Nunes y Bryant, 1998).

Por ahora, para el objetivo planteado, el presente trabajo se centra en el análisis de los conceptos de adición y sustracción.

2. CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Las situaciones que requieren de suma y resta incluyen diferentes elementos y diferentes conceptos matemáticos que pueden estar involucrados en estos problemas aditivos, y que son empleados al momento de buscar una solución a las mismas.

2.1. ELEMENTOS QUE INTERVIENEN EN LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

De acuerdo con Vergnaud (en Nunes y Bryant, 1997) el entendimiento matemático del niño comprende tanto el aprendizaje de invariantes operacionales como el aprendizaje de aquellos aspectos creados por una cultura, incluyendo la manera en que él representa esos conocimientos. Por tanto, considera que para estudiar el desarrollo de los conceptos matemáticos en los niños deben tomarse en cuenta:

- las invariantes que emplea el niño en estas situaciones
- las representaciones
- las situaciones involucradas

2.1.1. Invariantes o principios lógicos del conocimiento matemático. Se consideran como invariantes tanto los requerimientos lógicos planteados por Piaget (conservación, transitividad, y composición aditiva) como aquellas relaciones que se incorporan mediante convencionalismos y que al incorporarse deben mantenerse constantes, como en el caso del Sistema de Numeración Decimal en nuestra cultura, o de las unidades de medición (Nunes y Bryant, 1997).

Conservación.- Cualquier cambio que se realice en un conjunto de objetos no altera el número de elementos a menos que ese cambio sea sumar o restar (Nunes y Bryant (1998).

Piaget y Szeminska (1987) plantean la existencia de tres etapas de conservación:

> 1ª *Etapa. Ausencia de conservación*.
> Se trata de una no-conservación matemática. El niño evalúa las cantidades a partir de las relaciones perceptivas, la cuantificación está poco desarrollada y domina sobre ésta la percepción espacial. La enumeración y la correspondencia biunívoca no le parecen seguras al niño.
>
> 2ª *Etapa. Comienzo de constitución de los conjuntos permanentes.*
> "La tendencia a la conservación entra en conflicto con la apariencia" (pág.46) es decir, el niño recurre a la correspondencia biunívoca para afirmar o no si hay igualdad entre dos conjuntos, y entonces pierde fuerza la apariencia física, pero al observar los conjuntos ya formados, se basa más bien en lo perceptual y no se apoya en la correspondencia uno a uno; esto significa que emplea "soluciones intermedias", es decir, ya no considera solamente "la cantidad bruta" de los conjuntos, pero tampoco emplea la cuantificación en sí.
>
> 3ª *Etapa. Se completa el proceso de cuantificación*.
> El niño ya no se basa en simples relaciones perceptivas, sino que da un carácter "operatorio" a las "transformaciones", la equivalencia término a término toma mayor importancia que la apariencia. Puede expresar reversibilidad propia de toda operación lógica y matemática.

Transitividad.- Es una regla lógica, los niños al comprender el concepto de transitividad, son capaces de comparar dos números aun cuando no sean contiguos, es decir que pueden hacer deducciones acerca de la relación de esos dos números, por ejemplo, comprenderán que si A es mayor que B y B es mayor que C entonces A es mayor que C (Nunes y Bryant, 1998).

Composición aditiva del número.- Poseer este concepto implica que un número X puede descomponerse en dos números más pequeños, y así mismo al combinar dos números se obtiene un número más grande (Nunes y Bryan, 1988). De acuerdo con Piaget y Szeminska (1987) hay tres diferentes etapas de composición aditiva:

> 1ª Etapa. *Ausencia de composición aditiva.* Existe dificultad para "comprender la relación de inclusión" "es en realidad una dificultad para concebir el todo como resultado de una composición aditiva de las partes (B=A+A´). También puede darse el caso contrario en que el niño no logra desprender una parte de ese todo. Es la "no-conservación de las totalidades como tales".
>
> 2ª Etapa. Al inicio se da una situación como la de la primera etapa, luego el niño duda para finalmente aceptar que B=A+A´. "Hay descubrimiento intuitivo –no deductivo- de la respuesta correcta... hay ensayos antes de la construcción correcta, y no composición inmediata" (pág.207).
>
> 3ª Etapa. El niño descubre desde el inicio, y en forma espontánea la composición aditiva y la inclusión correctas, debido a que "puede pensar en la clase total al mismo tiempo que en las clases parciales… es el camino que conduce lentamente a estos niños al descubrimiento de la composición aditiva y la inclusión correctas" (pág.208). Emplea un "mecanismo operatorio reversible".

A partir de estas invariantes, el niño construye conceptos de adición y sustracción. Otros conceptos que pueden relacionarse de manera cercana con la adición y sustracción son: número y conteo.

2.1.2. Representaciones (simbólicas, lingüísticas, gráficas o gestuales) que pueden usarse para representar esas invariantes, situaciones y procedimientos.

Los conceptos que va formando el niño los representa de diversas maneras. De hecho, existe toda una serie de convencionalismos transmitidos dentro de una cultura y que proporcionan maneras de representar objetos para pensar en ellos y hablar de ellos.

El aprendizaje de esos convencionalismos creados en una cultura, puede ayudar a que el niño mejore su capacidad para "respetar principios lógicos" (como ocurre con el conteo). Por ejemplo, el sistema de numeración es una "herramienta del pensamiento, un medio para resolver problemas que no podrían resolverse sin ese sistema de numeración"; para calcular la suma de dos conjuntos no es suficiente entender que la suma es el producto de juntar dos juegos de objetos, ya que se requiere del sistema de numeración para hacer la cuenta (Nunes y Bryant, 1997, pág.29).

Así, la construcción de nociones aritméticas y conceptos se lleva a cabo al relacionar los objetos y reflexionar acerca de esas relaciones. En tanto que las representaciones gráficas más bien las adquieren por transmisión social, por ende, la reproducción y memorización de signos gráficos convencionales no implica exactamente que el niño posea el concepto de número u otras nociones matemáticas.

2.1.3. Situaciones que dan utilidad y significado al concepto. El aprendizaje de las matemáticas se torna significativo al emplearlo para resolver situaciones cotidianas, por lo cual la resolución de problemas es fundamental para promover el desarrollo y apropiación de conceptos matemáticos. Es por ello que actualmente la educación preescolar no se limita a actividades de seriación, clasificación y correspondencia, sino que enfatiza la resolución de problemas como el contexto en el que se desarrollarán los diferentes aprendizajes matemáticos (PEP 2002).

Este planteamiento se lee claramente en dos de las competencias de la currícula para preescolar que corresponden al Campo Formativo “Pensamiento matemático” (SEP, 2004):

> Utiliza los números en situaciones variadas que implican poner en juego los principios del conteo. Plantea y resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos (SEP, 2004, pág. 75).

2.2. NÚMERO Y CONTEO

Piaget afirma que “*el número* es la síntesis de dos tipos de relaciones que establece el niño entre los objetos: orden e inclusión jerárquica” (en Kamii, 1978, pág.6).

De acuerdo con Vergnaud (1991), la noción de número está estrechamente relacionada con la “noción de medida". En el caso del conteo, se emplea como medida el sistema de numeración, al igual que como cuando se trata de medir longitudes se tiene como instrumento de medida una regla (Nunes y Bryant 1998).

De hecho, se afirma que “son las experiencias de conteo en el contexto de resolución de problemas las que apoyan la construcción de la noción de número”, y es que aun cuando la clasificación y seriación están relacionadas con el concepto de número, la clasificación más bien define la cardinalidad y la seriación la ordinalidad (SEP, 2002, pág. 49).

Al establecer las diferentes relaciones entre los objetos, el niño va construyendo el concepto de número. Al contar y señalar el último objeto al que se le asignó un número o etiqueta, esa etiqueta es más que tan solo una palabra, es una idea, un concepto, es una "red de conocimientos” (Ginsburg, 1977). Por ello se afirma que poseer el concepto de número no es lo mismo que saber recitarlos.

En este sentido Vergnaud (1991) distingue dos niveles diferentes en los cuales puede ubicarse el niño cuando dice la serie numérica:

1. Nivel de recitación. Cuando solamente se "recitan" las palabras que sabe que corresponden a una serie, pero sin hacerlas corresponder a un conjunto explorado.

2. Nivel de conteo. El niño establece una relación entre la serie de palabras numéricas y el conjunto de objetos.

De acuerdo con Fuson (en Nunes y Bryant, 1997), bien puede afirmarse que a los tres años los niños empiezan a contar, ya que aplican el conteo a objetos o acciones, lo cual no es una “simple rutina verbal”.

2.3. PRINCIPIOS DE CONTEO

En el conteo se involucran cinco principios: de correspondencia biunívoca, de orden constante, de cardinalidad, de abstracción, y de orden irrelevancia (Gelman y Gallistel, 1978).

Principio de correspondencia biunívoca.- cada objeto es contado sólo una vez; a cada uno se le va asignando un número y para cumplir este principio, al contar el niño tiene que coordinar dos componentes: repartición y etiquetación, es decir, que debe tomar en cuenta cuáles ítems u objetos van pasando a la categoría de los ya etiquetados.

Al respecto, Piaget y Szeminska (1987) encontraron la presencia de tres etapas de correspondencia biunívoca:

1ª. ***Ni correspondencia exacta ni equivalencia.-*** Se trata de una correspondencia intuitiva debido a que se basa en las percepciones (longitud de las hileras).

2ª. ***Correspondencia término a término pero sin equivalencia durable entre las colecciones en correspondencia.-*** Hay correspondencia término a término no durable, es decir, sin conservación; si se cambia el acomodo dejan de creer en la equivalencia, recurren a la etapa anterior.

3ª. ***La correspondencia término a término y equivalencia durable de las colecciones en correspondencia.-*** Es una correspondencia operatoria (numérica). "…queda constituida la correspondencia biunívoca y recíproca, más allá de la simple operación intuitiva u óptica" (pág.66).

En un estudio realizado por Bryan y Frydman encontraron que los niños de 4 años pueden comprender la correspondencia 1-1 al haber comprendido por qué repartir 1-1 permite igualar cantidades (en Nunes y Bryant, 1997).

Los niños de 5 años y medio y 6 años tienen en cuenta que es importante respetar este principio de biunivocidad y por ello recurren incluso a la estrategia de ir moviendo los objetos ya contados (Nunes y Bryant, 1998).

Principio de orden constante.- al contar no se asignan arbitrariamente las etiquetas, sino que las palabras numéricas se van pronunciando siempre en el mismo orden, cada vez que se cuente serán pronunciadas las mismas palabras numéricas y en la misma secuencia.

Los niños de 2 años 8 meses pueden guiarse por el principio de orden constante al contar pequeñas agrupaciones de tres elementos, por ejemplo (Gelman y Gallistel, 1978).

Principio de cardinalidad.- La etiqueta final de la serie contada, representa una propiedad del conjunto, no una propiedad del último elemento contado.

El niño puede afirmar que la última etiqueta mencionada representa la numerosidad del conjunto; niños de 2 años 8 meses de edad aplican este principio al contar conjuntos de dos objetos (Gelman y Gallistel, 1978).

Piaget y Szeminska (1987) distinguen tres etapas de cardinalidad:

> 1ª. ***Comparación cualitativa global***. No hay noción exacta del número cardinal. El niño realiza una comparación cualitativa en forma global, sin intentar conteo.
>
> 2ª. ***Correspondencia cualitativa de orden intuitivo***. No hay relaciones, sólo comparaciones. Corresponde término a término y reproduce cantidades analizando con exactitud las figuras pero no hay equivalencia durable.
>
> 3ª. ***Correspondencia operatoria.*** La operación predomina sobre la intuición.

Principio de abstracción.- El conteo puede ser aplicado a conjuntos de objetos de distinta naturaleza, el uso de la serie de números es independiente de las cualidades de los objetos que se cuentan. Establece que los principios de correspondencia, orden y cardinalidad pueden ser aplicados a cualquier colección.

Los niños de 3 y 4 años logran aplicarlo a conjuntos con diferentes tipos de objetos pero equivalentes en tamaño (Gelman y Gallistel, 1978).

Principio de irrelevancia del orden.- El orden en que los ítems son etiquetados es irrelevante, no importa cuál etiqueta recibe cada ítem.

Los niños de 4 años comprenden este principio, pero debe observarse que aun cuando los niños logran realizar un conteo adecuado, no siempre hay irrelevancia de orden (Gelman y Gallistel, 1978).

En general los niños de 5 años logran mejor desempeño que los de 4 años en las tareas de conteo, aún sin apoyo del adulto (Nunes y Bryant, 1998).

Finalmente, el hecho de que un niño pequeño cuente, no significa que siga los mismos patrones que el adulto, aún más: a veces se puede usar un conteo no verbal o bien, el niño a veces usa una secuencia de denominaciones no convencionales cuando cuenta (Gelman y Gallistel, 1978).

La capacidad de contar es un antecedente importante para que preescolares puedan resolver problemas.

3. PROBLEMAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Aquellos problemas cuya solución requiere ya sea de una adición o una sustracción, son problemas aditivos (Vergnaud, 1991).

En una definición dada por Schwartz (en English y Halford, 1995) se considera a la adición y sustracción como referentes a la conservación de composiciones, porque dos cantidades producen una tercera. Es decir que al conocer dos cantidades dadas, es posible llegar a conocer otra, tomando en cuenta la relación que guardan éstas en la situación planteada, a partir de lo cual se produce un resultado.

Por su parte Puig y Cerdán (1988) plantean como características de la suma y la resta, dentro del contexto escolar, las siguientes: SUMAR es seguir contando, significa añadir, refleja la operación de unión aún sin que los conjuntos implicados puedan ser unidos físicamente. RESTAR significa quitar, es contar hacia atrás; en el caso de la resta hay ambigüedad en cuanto a qué se quita, qué se queda, cuál es el total, cuál es la pregunta del problema. A su vez aclaran que estas concepciones son limitadas, ya que se trata de una "visión conjuntista" de la suma y la resta, y lo explican aclarando que, debido a que la suma no siempre se trata de una unión, es decir que debe pensarse en la suma como algo más que la unión de conjuntos, debe pensarse en una "adición de magnitudes y números naturales"; de hecho afirman que cuando se tiene una limitada concepción acerca de la suma, al encontrarse con sumas en las que no está presente una unión, se dificulta el entendimiento de la suma. Para el caso de la resta ocurre una situación semejante, ya que una resta no siempre implica "quitar".

Como afirma Vergnaud (1982), la sustracción tiene una significación propia, no necesita definirse como la inversa de la adición; dar, perder, bajar, disminuir, son transformaciones que tienen significado por sí mismas.

Si bien la adición y la sustracción son opuestas o recíprocas, una no depende de la otra, cada una tiene su significado.

Por otro lado y de acuerdo con Vergnaud (en Nunes y Bryant, 1998), dado que en diversas situaciones es necesario emplear la adición y sustracción para resolverlas, aquí las actividades cognitivas que se realizan dependen del tipo de relación involucrada en la situación y del tipo de incógnita que tiene que calcularse.

Para la formación del concepto de suma y resta es necesario que exista un contexto en el cual se requiera de ellas, y ese contexto lo conforman las diferentes situaciones problemáticas que puedan plantearse y que implican sumar o restar.

3.1. CATEGORIZACIÓN DE PROBLEMAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

De acuerdo con Armenta y Rangel (1990), se entiende que un problema es "una historia breve" en la que se proporciona información que indica tanto cantidades como la relación que se da entre los datos proporcionados. Aunque también podría decirse que pueden plantearse problemas sin mencionar cantidades, por ejemplo, decir "si tienes algunos dulces y te doy más ¿tendrás igual que al principio?" en este caso se está planteando un problema sin mencionar cantidades, pero se entiende cuál es la relación que hay entre los datos, es claro que se trata de una relación de adición y en el resultado tampoco se mencionaron las cantidades pero sí se puede distinguir que el resultado representa un incremento en la cantidad inicial. Es decir que independientemente del conocimiento de cantidades precisas se puede afirmar que la cantidad resultante será mayor al valor de cada uno de los elementos mencionados en este problema.

Las situaciones problemáticas han sido categorizadas de acuerdo con diversos criterios tales como la sintaxis o el grado de dificultad. Para fines de este estudio se retoma la clasificación realizada en función del tipo de relación lógica que se plantea en el problema.

Riley, Greeno y Héller (1983) plantean la existencia de cuatro situaciones básicas de adición y sustracción (cada una plantea un tipo diferente de relación lógica):

- Comparación (operación binaria)
- Combinación (operación binaria)
- Cambio agregando (operación unaria)
- Cambio quitando (operación unaria)

Se denomina binarias a las operaciones donde hay dos cantidades, a las cuales se les puede comparar o combinar. En tanto que las operaciones unarias, tienen sólo una cantidad sobre la que se opera, ya sea agregándole o quitándole.

Por otra parte, Carpenter y Moser (1982), así como Fuson (1992), han planteado variantes de esta clasificación:

A) Comparación
B) Combinación
C) Cambio agregando y cambio quitando
D) Igualación

A) Comparación. Implica la comparación de conjuntos. Son problemas en los cuales se busca la diferencia entre dos cantidades, o bien, si la diferencia está dada, se busca el valor de una de las cantidades (Carpenter y Moser, 1982). Cabe mencionar que en especial los problemas de comparación resultan ser más difíciles de resolver (Fuson, 1992; Díaz y Bermejo, 2004).

B) Combinación. Este tipo de problemas aditivos implican acciones en dos cantidades distintas. Son modelados usando una aproximación parte parte todo, donde el todo es la unión de las partes. Dos cantidades son un subconjunto de la tercera (Carpenter y Moser, 1982) "Para resolverlos el niño puede determinar la cantidad total contando todos los ítems empezando con el valor cardinal de una de las partes originales" (English y Halford, 1995, pág152). Implican una relación estática entre las cantidades.

C) Cambio agregando y cambio quitando. Se tiene una cantidad inicial, sobre la cual se opera para disminuir o aumentar la cantidad dada. Implican una relación activa entre las cantidades (Carpenter y Moser, 1982).

D) Igualación. Los problemas de igualación son combinación de los problemas de comparación y cambio en los cuales la diferencia entre dos cantidades es expresada como acciones de cambio agregando o cambio quitando en vez de presentarse como un estado estático tal como ocurre en los problemas de comparación (Fuson, 1992). En los problemas de igualación, una de las dos cantidades cambia de tal manera que una llegue a ser igual a la otra; si se trata de la cantidad más pequeña se le agregará y si es la más grande, se le quitará (Carpenter y Moser, 1982).

Por otra parte, puesto que adición es una operación que hace una suma de dos sumandos conocidos, y sustracción es una operación que coloca a un sumando fuera de una situación conocida y un sumando conocido, entonces dos de las cuatro situaciones mencionadas son situaciones de adición (combinación y cambio agregando) y dos son situaciones de sustracción (comparación/igualación y cambio quitando) (Fuson, 1992) (Figura1).

Además cada tipo de adición o sustracción puede tener variaciones dependiendo del lugar en el que se presente la incógnita, ya que ésta puede ser cualquiera de las tres cantidades es que se involucren en el problema. Por lo tanto, son tres subtipos de problemas contenidos en cada uno de los tipos ya mencionados.

4. CONOCIMIENTO DE SUMA Y RESTA EN LOS NIÑOS PEQUEÑOS

A través de diversos estudios se ha comprobado que los niños poseen todo un bagaje de conocimientos matemáticos desde antes de ingresar a la escuela primaria y de entrar en contacto con la enseñanza formal de las matemáticas.

Esos conocimientos adquiridos por los niños de manera informal son fundamentales para el entendimiento posterior de las matemáticas en la escuela (Baroody, 1994;

Brissiaud, 1989), o bien, para el aprendizaje de aquellas situaciones que forman parte de un conocimiento matemático más complejo.

SITUACIONES DE SUMA	SITUACIONES DE SUSTRACCIÓN
Cambio agregando	**Cambio quitando**
Combinación físicamente la combinación es explícita, al usar términos de inclusión de clase	**Igualación** - cambio quitando - cambio agregando
Combinación conceptualmente La combinación es implícita en el empleo de palabras como “todos juntos”	**Comparación** - ¿cuánto más que? - ¿cuánto menos que?

En el caso de los problemas de igualación (los cuales son combinación de problemas de comparación/cambio), la diferencia entre las dos cantidades que se comparan para ser igualadas, puede ser expresada ya sea mediante un cambio agregando o un cambio quitando.

Figura 1. Situaciones aditivas, de acuerdo con información presentada por Fuson (1992).

Por lo pronto, en lo que respecta al conocimiento matemático en los niños pequeños, y específicamente en relación con las operaciones de suma y resta, se reconoce la existencia de un importante cuerpo de conocimientos por parte de los niños y que a continuación se analizan.

4.1. CONOCIMIENTO INTUITIVO

El conocimiento matemático de los niños pequeños es intuitivo, se da de manera informal e implícita y es no verbal, dado que no pueden explicarlo (Ginsburg, 1977). Parte de esto son los conocimientos que poseen respecto al número y a los procesos de cómputo, además de sus intentos por solucionar problemas aritméticos simples de adición, sustracción, multiplicación (English y Halford, 1995; Ginsburg, 1977), e incluso de división (Baroody, 1994, Brissiaud, 1989).

Con relación a esto Carpenter y Moser (1982) han encontrado que los niños son capaces de resolver problemas verbales de suma y resta, aún antes de recibir instrucción formal, y antes de saber sumar y restar (ejemplo de ello es que los niños pequeños pueden resolver problemas sin realizar operaciones aritméticas).

Esto significa que no es preciso esperar a que el niño ingrese al sistema de educación formal para poder apoyarlo en el aprendizaje inicial de las operaciones de adición y sustracción, ya que dicho aprendizaje inicia desde edades tempranas, sólo que no lo expresan verbalmente ni emplean todavía los signos al igual que lo hacen los adultos.

Se afirma que los niños de 4 y 5 años tienen plena intuición de la suma y la resta elementales (Ginsburg, 1977), y que dada esta "base intuitiva”, los niños preescolares reconocen que añadir un objeto a una colección hace que sea más y que quitar un objeto hace que sea menos. No obstante, esta aritmética es considerada imprecisa debido a que el niño se basa en cambios evidentes (Baroody, 1994).

Por ejemplo, saben que si se tienen dos conjuntos, al agregar algo a uno éste tiene más que antes pero no necesariamente más que el otro conjunto, los niños más pequeños aún se confunden en cuanto al concepto de adición y podrían pensar que al agregar algo a un conjunto éste siempre tendrá más que el otro conjunto, por el simple hecho de haberle agregado algo, independientemente de las cantidades de que se trate (Ginsburg, 1977).

Por supuesto, este aprendizaje se va dando en la medida en que el niño tenga la oportunidad de experimentar situaciones reales que impliquen agregar o quitar (Ginsburg, 1977).

Siendo así, la posibilidad de que un niño logre resolver exitosamente las situaciones de adición o sustracción que se le presenten depende más de sus experiencias que de la enseñanza formal que pudiera recibir.

4.2. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y CONOCIMIENTO DE SIGNOS Y SÍMBOLOS

Es claro que el conocimiento matemático de los niños no se construye a partir del manejo de convencionalismos por parte de ellos, tales como los nombres de números, las grafías para representarlos, o los símbolos aritméticos, por ejemplo, ya que estos más bien forman parte del conocimiento social relacionado con las matemáticas.

El niño puede poseer un entendimiento matemático sin necesidad de emplear "palabras numéricas", por ejemplo cuando comprenden que dos cantidades son iguales debido a que cada uno de los elementos de un conjunto tiene en el otro conjunto un elemento que le equivale (Bryant en Nunes y Bryant, 1997).

En este sentido, los niños poseen conocimientos matemáticos aun cuando no conozcan un lenguaje matemático y grafías convencionales (Baroody, 1994). Y es que el conocimiento de los signos y del lenguaje matemático convencional no garantiza que el niño posea el concepto.

Por lo tanto, los niños pequeños también conocen ciertas relaciones entre números antes de aprender los símbolos aritméticos (+, -, =), y esas relaciones las expresan usando el lenguaje común “4 y 2 son 6", sin necesidad de usar el más, menos o igual. Cuando los niños pequeños encuentran la solución mentalmente, y se les pregunta cómo lo hicieron, no pueden explicarlo claramente, sólo responden "porque lo sé” "lo he encontrado en la cabeza", pero llega el momento en que también afirman "porque 4 y 2 son 6" o "porque si a 6 le quito 2 son 4" (Brissiaud, 1989, pág.86).

Esto significa que los niños pequeños hacen uso de sus conocimientos intuitivos para resolver situaciones problemáticas que implican suma o resta, y que obtienen resultados exitosos.

Así que fuera de las situaciones escolares los niños emplean su propia lógica para resolver problemas matemáticos simples como los de suma y resta aún sin saber representarlas usando las grafías convencionales (Rios, 1990), incluso, para los niños resulta más fácil calcular con los dedos o mentalmente, que en el papel.

Las estructuras conceptuales del niño para la adición y sustracción, progresan hacia formas más complejas, abstractas, eficientes y generales (Fuson, 1992).

El dominio de los convencionalismos puede resultar difícil puesto que esto implica una doble tarea. La representación mental de la operación y la codificación/decodificación de grafías para representar aquello que se tiene en mente. Por otra parte, es evidente que para desarrollar técnicas prácticas para la adición, los niños necesitan estar en un ambiente donde la suma es apropiada, útil en la medida en que obtienen algo con ella. (Ginsburg, 1977).

En algún momento Piaget planteó que los errores cometidos en varias tareas parten del hecho de que no hay entendimiento de conceptos que serían fundamentales (refiriéndose a conservación de número, seriación). Por otra parte Greeno y Riley plantean la hipótesis de que la dificultad que algunos individuos tienen para resolver problemas verbales radica en su habilidad para describir el cuestionamiento planteado, y no la carencia de conocimiento de los conceptos matemáticos necesarios para completar el problema (Greeno y Riley, 1987 en Seastone, 1995).

Los planteamientos acerca de la presencia de un conocimiento matemático en los niños pequeños, y que pueden emplearlo sin necesidad del uso de convencionalismos, apoyan la idea de que el aprendizaje de los niños en el ámbito de las matemáticas al igual que en otros ámbitos es más firme y fructífero en la medida que toma significado para el niño conforme es parte de su realidad misma.

4.3. PRECURSORES DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Fuson (1992) plantea como precursores de la adición y sustracción lo que llama Cuantificación perceptual y Cuantificación de conteo. La primera se refiere a que la habilidad del niño para diferenciar perceptualmente entre conjuntos de 1, 2 y hasta 3 objetos, proporciona las bases tempranas para la adición, y continúa siendo empleada aún en niveles conceptuales más avanzados de adición y sustracción; en tanto que la cuantificación de conteo es descrita como el método que se emplea para diferenciar y describir cantidades que no pueden diferenciarse de manera tan fácil o exacta perceptualmente.

De acuerdo con Resnick et al. (en English y Halford, 1995) el niño desarrolla esquemas en los cuales se apoya para resolver diversos tipos de situaciones de suma y resta que se encuentran en la vida cotidiana y que posteriormente le serán presentados en la escuela como problemas verbales:

Esquema de incremento/decremento.- Es la base para un entendimiento de la adición y sustracción, y consiste en un razonamiento acerca de la cantidad, sin medición, ni cuantificación numérica exacta.

Esquema de comparación.- Permite al niño hacer juicios comparativos de cantidades dadas, inicialmente el niño hace esto de una forma perceptual (mayor que/menor que, *más grande que /más pequeño que),* posteriormente usará comparaciones numéricas.

Esquema parte/todo.- Con este esquema los niños pueden razonar acerca de las formas en que materiales familiares se unen y se separan, elaboran juicios acerca de las diferentes relaciones entre las partes y los todos, y por tanto les provee la base para la resta y la suma binaria(s), así como importantes conceptos matemáticos (como la conmutatividad)” (Resnik et al. en English y Halford, 1995).

Lo anterior nuevamente hace alusión a !a existencia de conocimientos previos que no son precisamente número y conteo, y que son empleados por los niños para el entendimiento y la solución de situaciones que implican adición y sustracción, conocimientos que aún no han sido ampliamente explorados.

Asimismo, Bryan (en Nunes y Bryant, 1998) menciona que uno de los requerimientos para la adición y sustracción es “comprender su relación inversa”, el cómo se cancelan mutuamente, además que el mismo Piaget también lo mencionaba. En un estudio realizado por Starkey y Gelman (en Nunes y Bryant, 1998), realizado con niños de 3, 4, y 5 años, los niños resolvieron exitosamente tareas de suma y resta, desafortunadamente las cantidades usadas eran tan pequeñas que bien pudieron haberlos resuelto sin usar el algoritmo de inversión (+1 –1 = 0).

Por su parte, tanto Moser (1989) como Fuson (1992) describen tres niveles de desarrollo de las estructuras conceptuales y de estrategias de solución para los problemas verbales (los cuales se describen en el siguiente apartado). Ambos coinciden en que las estructuras conceptuales del niño para la adición y sustracción van progresando hacia formas "más complejas”, por lo que en cada nivel sucesivo habrá avances cognitivos y nuevos entendimientos conceptuales, de tal manera que en cada nivel los niños son capaces de resolver problemas verbales cada vez más complejos; a la vez aclaran la existencia de algunas cuestiones que deben considerarse al hablar de niveles, por ejemplo: la diversidad de estrategias que emplean para resolver un mismo tipo de problema, las variaciones al plantear el problema, la posibilidad de que varíen las estrategias de solución de acuerdo a las cantidades incluidas en el problema, o bien, la influencia que puede tener la enseñanza sobre la utilización de una determinada estrategia de solución para ciertos tipos de problemas.

5. ESTRATEGIAS QUE EMPLEAN LOS NIÑOS PEQUEÑOS PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA

De acuerdo con Siegler y Jenkins (1989) una estrategia siempre va dirigida hacia una meta, es planeada para llegar a un objetivo planteado. La construcción de estrategias nuevas se da en respuesta a la necesidad de buscar formas de enfrentar las nuevas situaciones, así, se construyen a partir de otras estrategias que ya se poseen, rescatando los elementos pertinentes y combinándolos con otros nuevos, de hecho, comúnmente se construyen otras estrategias debido a que las anteriores fracasan en las situaciones que se van presentando.

En este sentido, cuando se trata de resolver una situación aditiva, los niños pequeños emplean sus propias estrategias para resolverlos, y si piensan que no les funcionan, construirán otras nuevas, por lo cual es importante permitirles enfrentar este tipo de situaciones constantemente, con el fin de propiciar la construcción de nuevas estrategias para la solución de problemas de suma y resta.

Como ya se ha mencionado, los niños pequeños logran resolver problemas de aritmética que se le presentan cotidianamente, sin que para ello requieran de las operaciones de suma o resta tal como lo hacen los adultos (Ginsburg, 1977; Steffe, 2000).

De acuerdo con Ginsburg (1977), estas estrategias de solución empleadas por los niños incluyen al menos dos pasos:

1. Los niños interpretan el problema, deciden qué tipo de problema es y cuál de sus intuiciones aplicar al problema, si es necesario unir o retirar cosas.

2. Deben implementar lo que han decidido hacer, dependiendo de lo que piensan que involucra el problema, unen cosas para sumar o deciden quitar y ver cuántos quedan.

Por su parte, Brissiaud (1989) afirma que los niños emplean dos tipos de estrategias para resolver problemas que implican operaciones de adición o sustracción antes de aprender los símbolos aritméticos (signos de +,-, =), los nombra "procedimientos para contar" y "procedimientos de cálculo".

* **Procedimientos para contar.-** El niño emplea objetos con los cuales "imita las transformaciones" que se le mencionan. Existen diversos procedimientos para contar.

Los niños descubren que pueden utilizar el conteo como un instrumento para definir con mayor precisión y fiabilidad "los efectos de añadir o sustraer cantidades" de un conjunto, al menos si se trata de cantidades pequeñas (Baroody, 1994; Ginsburg, 1977).

* **Procedimientos de cálculo**.- Se considera que calcular "es establecer una relación directa entre cantidades a partir de sus representaciones numéricas, sin pasar por la construcción física de una o varias colecciones cuyos elementos se cuentan" (Brissiaud, 1989, pág.83). De hecho "Casi todos los niños al final de la escuela infantil, suelen resolver mediante el cálculo mental problemas numéricos en los que intervienen cantidades pequeñas" (Brissiaud, 1989, pág.84).

Para encontrar el resultado de añadir o quitar una cantidad, los niños utilizan estrategias en las que interviene la acción de contar, y si las cantidades son lo suficientemente pequeñas, calculan (Brissiaud, 1989).

Aquí, se considera que la tarea del maestro sería impulsar al niño a que amplíe su aplicación de cálculo para que así al final abarque el campo en el que se cuenta, es decir, que no necesariamente tendrá que esperarse a que el niño pueda calcular con los primeros “n” números y hasta después introducir el número “n+1” (Fuson, 1992).

En un estudio Carpenter y Moser (1982) encontraron que en general, los niños “tienen un razonamiento conceptual común respecto a la adición, esto es, que coinciden en la utilización de una estrategia básica en la que realizan acciones directas. Esto coincide con las afirmaciones de English y Halford (1995) y Fuson (en Grows, 1992).

Moser (1989) menciona una categorización que incluye tres diferentes tipos de estrategias: modelaje directo con objetos concretos, conteo verbal, y estrategias mentales. Incluso sugiere que estas categorías puedan considerarse como "etapas de desarrollo en el proceso de niveles de abstracción". Esta categorización guarda enorme semejanza con la de Fuson (1992) quien distingue tres niveles en las estrategias que emplean los niños para solucionar problemas que implican operaciones de adición o sustracción. A continuación se describen estos tres niveles de estrategias, siguiendo los planteamientos de Moser básicamente.

5.1. NIVELES DE ESTRATEGIAS:

I. Modelaje directo
II. Conteo verbal
III. Estrategias mentales

NIVEL I. MODELAJE DIRECTO

El niño inicia construyendo uno o más conjuntos observables (incluso marcas escritas), y estos conjuntos son usados como “representaciones directas” de las partes contenidas en el problema, mientras que al actuar sobre los objetos es como “representar” las relaciones que implica el problema planteado (Moser, 1989; English y Halford , 1995).

En la estrategia de modelaje directo los niños emplean objetos para representar con ellos la operación de adición o sustracción que se plantea en la situación problemática. Si bien se tiene menos información acerca de procedimientos de sustracción que de adición empleados por niños pequeños, es claro que los niños de preescolar y primer grado pueden comprender el significado de la sustracción; pero si en el contexto educativo no se generan experiencias significativas que propicien esta comprensión, se limita la posibilidad de que inventen procedimientos de un mayor nivel de complejidad para la solución de problemas aditivos (Fuson, 1992).

En este primer nivel de estrategias los niños inician representando para sí mismos la situación problemática, y después de esto deciden un procedimiento de solución (agregar o sustraer) finalizando con la aplicación del procedimiento. En sí modelan con objetos el significado de la adición o sustracción al representar el procedimiento de solución en forma interrelacionada con la situación y con las cantidades. Además de esto, se ha observado que pueden emplear “patrones perceptuales” cuando se trata de cantidades pequeñas, es decir, no más de cinco elementos (Fuson, 1992).

Dentro de este nivel Carpenter y Moser (1982, 1989) observaron estrategias diversas empleadas por los niños en momentos diferentes (Anexo 1).

NIVEL II. CONTEO VERBAL

El procedimiento de esta estrategia es explicado por Moser al mencionar que “…se introduce la serie numérica verbal en un punto diferente al uno, contando en forma ascendente o descendente que termina cuando se aplica alguna regla”. Para esto, es necesario realizar “un doble conteo (usualmente simultáneo) como el conteo de las palabras mismas (etiquetas de los números)”. El niño a veces se apoya “usando objetos o sus dedos, pero aquí éstos no representan las entidades del problema, más bien representan “el conteo de las palabras” (Moser, 1989, pág. 85).

Fuson (1992) describe como “conteo secuencial abreviado”, cuando el primer sumando se abrevia y es representado por un cardinal realizando el conteo ya sea: desde, hacia delante hasta, hacia atrás, hacia atrás hasta. En cuanto al segundo sumando, están presentes los objetos que lo representan y pueden ser contados.

No hay claridad acerca de cómo ocurre la transición de *conteo total a conteo desde*, cómo es que los niños pasan espontáneamente de una a otra forma de conteo, sin embargo, se han encontrado dos estrategias que pueden considerarse como transicionales: “los niños dicen los nombres de los números para el primer sumando muy rápidamente y después dicen los nombres de los números del segundo sumando de la forma en que siempre lo hacen. En este procedimiento los niños parecen necesitar representar el primer sumando para sí mismos de alguna forma, como si aún no confiaran en la transición de cardinal a contar, a significado de las palabras empleadas, principalmente cuando el primer sumando es grande” (Fuson, 1992, pág.256).

Se menciona como un subtipo de este nivel II cuando algunas situaciones aditivas no pueden ser resueltas empleando únicamente modelaje directo, sino que deben ser manejadas conceptualmente.

Dentro de esta categoría pueden incluirse diversas estrategias que en muchas ocasiones no pueden ser detectadas mediante la observación al momento en que el niño lo realiza (Fuson, 1992).

NIVEL III. ESTRATEGIAS MENTALES

El niño realiza un nuevo acomodo de los números mencionados en el problema, de manera que la suma o la diferencia de éstos es una cantidad que él ya conocía. Cabe mencionar que las estrategias de hechos derivados son mucho más difíciles para la adición que para la sustracción (Fuson, 1992).

Estas estrategias se organizan en dos categorías: “Evocación de hechos básicos relacionados con la adición y la sustracción, y evocación de hechos derivados o heurísticos”, (Carraher, Carraher y Schliemann, 1987, en Moser, 1989, pág 86). Cada una de estas categorías incluye a su vez diversas estrategias (Anexo 1).

Los hechos básicos incluyen aquellas combinaciones numéricas que suelen ser conocidas y empleadas para la solución de problemas numéricos, en tanto que los hechos derivados se refieren a combinaciones elaboradas por el propio sujeto y que le son útiles al momento de tratar de resolver una situación numérica.

Se ha encontrado que el empleo de modelaje directo a veces se combina con hechos derivados, aunque no se conoce si esto es porque los niños prefieren algún tipo de estrategia o es debido a ciertas limitantes en su habilidad para solucionar algunos tipos de problemas. De acuerdo con Siegler y Jenkins (en Fuson, 1992), en un primer momento el niño intenta obtener de memoria una respuesta para una combinación dada, y si no acierta empleará entonces un procedimiento de solución de nivel I (Fuson, 1992).

En sí, conforme vaya experimentando, el niño irá conformando su propio repertorio de hechos numéricos correctos, lo cual depende de la precisión de los procedimientos de solución empleados, así como de la exactitud y certeza al hacer cualquier representación del problema (Fuson, 1992).

A partir de la información teórica hasta aquí presentada, se pretende indagar en el conocimiento de las estrategias empleadas por niños preescolares para solucionar situaciones que implican adición y sustracción. Para fundamentar la metodología empleada en este estudio, enseguida se revisan aspectos relevantes acerca de la entrevista clínica.

6. EL MÉTODO DE LA ENTREVISTA CLÍNICA

Antecedentes

El término “clínico” empleado en el área de la medicina, fue tomado por el psicólogo L. Witmer en 1986, para ser utilizado en psicología por primera vez, nombrando como método clínico a aquel que se empleaba para trabajar algún déficit o desorden mental con personas de diferentes edades, mismas a quienes se les aplicaban pruebas y se les realizaba un diagnóstico. Más tarde fue utilizado dentro de la psiquiatría para realizar estudios que ayudaban a generalizar algunas situaciones encontradas (Delval, 2001).

Piaget en 1921, utilizó por primera vez el método clínico para el estudio acerca del pensamiento de los niños, su objetivo era “indagar sobre las justificaciones que daban los propios niños de sus contestaciones”, al respecto se amplía en el siguiente párrafo (Delval, 2001):

> “... el método clínico es un procedimiento para investigar cómo piensan, actúan, perciben y sienten los niños, que trata de descubrir aquello que no resulta evidente en lo que los sujetos hacen o dicen, lo que está por debajo de la apariencia de su conducta, ya sea en acciones o con palabras...” “... la esencia del método no está en la conversación, sino en el tipo de actividad del experimentador y de interacción con el sujeto” (Delval, pág. 69).

El investigador interviene constantemente, de acuerdo con las acciones y explicaciones del sujeto, para así indagar “cuál es el sentido de lo que está haciendo el sujeto”. “Esto supone que el investigador se tiene que plantear en cada momento cuál es el significado de la conducta del sujeto y la relación con sus capacidades mentales” (Delval, 2001, pág.69).

Vinh–Bang (en Delval, 2001) sugiere la existencia de cuatro etapas en la evolución del método clínico:

PERÍODO	CARACTERÍSTICA	AÑO	DESCRIPCIÓN
Primer Período	Elaboración del Método	1920 – 1930	Investigación sobre la representación del mundo en el niño (noción de parte, multiplicación lógica, inicios del pensamiento formal, causalidad, realismo, animismo, ideas morales).
Segundo período	Observación crítica (el método no verbal)	1930 – 1940	Estudios sobre el período sensorio motor, los orígenes de la inteligencia. La entrevista verbal resulta insuficiente; plantea situaciones problemáticas y detalladas observaciones.
Tercer período	Método clínico y formalización (manipulación y formalización)	1940 – 1955	Estudio de las operaciones mentales en la etapa concreta y la formal. El sujeto realiza alguna tarea con materiales comunes para él, así, en su

			actuar el niño expresa operaciones lógicas.
Cuarto período	Estudios recientes	1955 en adelante	Utilización de datos estadísticos.

En los trabajos realizados por Piaget empleando el método clínico, el foco de estudio no es precisamente el individuo, sino la forma en que ese individuo resuelve alguna situación. Para conocer aquellas concepciones de las que el mismo sujeto no es consciente, se trata de conocer cuál es su estructura mental, y para adentrarse en ella, el investigador debe abandonar su propia forma de pensar (Delval, 2001).

Se mencionan tres tipos de utilización del método clínico:

- Entrevista libre.- conversación abierta, sin uso de material.
- Explicación sobre una situación.- se atienden tanto sus acciones como sus explicaciones.
- Método no verbal.- una situación planteada se va modificando y se observan las acciones del sujeto.

A diferencia del método experimental en el que se plantea de inicio una hipótesis que tratará de comprobarse en el experimento, en el método clínico se inicia sin conocer las explicaciones que dará el niño, así que se plantean hipótesis durante la entrevista, es decir que el investigador se preguntará por qué se dio esa respuesta y tratará de hipotetizar y replantear las preguntas e incluso la situación misma (Delval, 2001).

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Ginsburg (1997) proporciona algunos lineamientos a seguir para conducir la entrevista clínica: prepararse para la entrevista, grabarla, establecer y monitorear la motivación del niño, evaluar el pensar, establecer la competencia, determinar el potencial de aprendizaje:

- El entrevistador como participante activo, probará y explorará hipótesis concernientes al pensamiento del niño, debe ser sensible ante la personalidad y afectos del entrevistado, monitorear constantemente la situación afectiva del niño (ansiedad, aburrimiento o interés), tener noción acerca del proceso de desarrollo cognitivo y conocer normas; debe contar con algunas ideas de qué es lo que está buscando, acerca de las formas que puede tomar el pensamiento del niño. Y al menos de manera provisional, contar con un marco teórico para poder interpretar lo que observa. Tal como se maneja en el constructivismo, debe tenerse siempre en mente que el niño participa activamente y de manera autónoma en la construcción de su conocimiento.

- Es necesario alentar al niño a dar su mejor esfuerzo, evitar forzarlo a responder de forma determinada, ayudarlo en su introspección y a expresar en palabras lo que se observa; aún el niño más cooperativo puede tener dificultades para hacerlo y puede resultar difícil si está acostumbrado a que en la escuela el maestro no se interese en sus pensamientos. Debe aclarársele que no se centrarán en ver las respuestas correctas, sino en ver cómo el niño resolvería esos problemas o cómo piensa acerca de las cosas.

- El objetivo de la entrevista es aprender cómo piensa el niño y cómo construye un mundo personal. Para esto es necesario contemplar el protocolo de entrevista y las tareas a emplear:

- El *protocolo* refleja las dimensiones del interés en este tópico, y describe métodos para involucrar al niño en el tópico que desea investigarse. Puede ser similar al de una prueba estandarizada, pero recordando la flexibilidad que puede haber en los cuestionamientos.

- *Las tareas* deben ser significativas teóricamente. Es necesario tener disponibles algunas tareas con las cuales iniciar la entrevista y conforme se vea, decidir continuar usándolas o cambiarlas. Serán tareas específicas y bien enfocadas, así la situación es algo concreto con lo que el niño puede tratar.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Son considerables los conocimientos matemáticos que poseen los niños de preescolar, ya que son la base que deberá retomarse para introducir el aprendizaje formal de las matemáticas en niveles posteriores, y más específicamente, para que el niño desarrolle las estrategias requeridas para la solución de problemas aritméticos cada vez más complejos, ante los cuales podría encontrarse durante su vida cotidiana.

Es por eso que se plantea la necesidad de profundizar en el conocimiento de las estrategias de solución de problemas que emplean los niños pequeños para resolver problemas aritméticos que implican adición y sustracción.

OBJETIVO

Indagar cuáles son los conocimientos y las estrategias empleadas por los niños en edad preescolar para solucionar diferentes situaciones problema que impliquen suma y resta, profundizando así en el conocimiento de las mismas.

MÉTODO

DISEÑO

Se realizó un estudio descriptivo cualitativo, se entrevistó de manera individual a cada niño, empleando para ello el método de entrevista clínica utilizado por Piaget. Se plantearon preguntas a partir de las cuales se realizaba una indagación más profunda del pensamiento del niño.

PARTICIPANTES

Participaron un total de 20 niños, de entre 4 años 6 meses y 6 años 10 meses de edad; 10 cursaban segundo grado de preescolar (5 varones y 5 mujeres) y 10 cursaban tercer grado de preescolar (5 varones y 5 mujeres) en un plantel de educación pública ubicado en el oriente de la ciudad de México. Los niños entrevistados fueron elegidos por su disponibilidad para participar en la entrevista y considerando las características mencionadas.

GRADO	SEXO	PARTICIPANTE Y EDAD	
2°	Mujeres	1. An (5,4) 2. Ev (5,5) 3. Lo (4,10)	4. Pa (4,6) 5. Ka (5,3)
2°	Varones	6. Da (5,4) 7. Ví (5,6) 8. Os (4,11)	9. Ha (4,11) 10. Ed (5,8)
3°	Mujeres	11. Da (6,4) 12. Zi (6,6) 13. Br (6,7)	14. Ka (6,1) 15. Li (6,7)
3°	Varones	16. Pa (6,8) 17. Jo (6,4) 18. Ro (6,10)	19. Fe (6,3) 20. Ed (6,4)

INSTRUMENTOS

1. Lista de tareas de conteo e invariantes. El objetivo de estas tareas fue identificar las invariantes operacionales (conservación y composición aditiva) y los principios de conteo que posee el niño.

TAREAS DE CONTEO E INVARIANTES (CONSERVACIÓN Y COMPOSICIÓN ADITIVA*)

TIPO DE TAREA	*DESCRIPCIÓN DE LA TAREA*
1)Conservación	*De dos hileras de objetos, una más espaciada que la otra, preguntar si tienen igual cantidad de objetos.*
2)Conteo 1	*De un recipiente con 20 objetos pedir al niño que nos dé 10.*
3)Conteo 2	*De un conjunto de 8 objetos, preguntar al niño cuántos hay.*
4)Conteo 3	*De un conjunto de 9 objetos colocados en hilera preguntar al niño cuántos hay.*
**Composición aditiva del número*	*La invariante comoposición aditiva fue explorada a través de los problemas 3 y 4 de suma.*

2. Lista de tareas de adición y sustracción.- Estas tareas se plantearon con el objetivo de identificar las estrategias que emplea el niño para resolver problemas que implican suma o resta. Los problemas aquí presentados fueron diseñados con base en los planteamientos de Carpenter y Moser (1983) y de Fuson (1992). Todos los problemas tienen un nivel de dificultad semejante, utilizando hasta 10 elementos en los datos.

TAREAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

TIPO DE PROBLEMA	*DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA*
1.Comparación – resta	*Peces. “Luis tiene 5 peces y Mari tiene 8 ¿quién gana de peces? ¿Por cuántos peces gana?”.*

2.Combinación – suma	*Animales. “Si se salen del corral 3 gallinas y 4 patos ¿cuántos animalitos van a estar fuera?”.*
3.Combinación – suma	*Flores. “Hay 6 flores verdes y 4 rojas ¿cuántas son todas las que hay en la tienda?”.*
4.Cambio o transformación – suma	*Platos. “Si colocamos 7 platos y después otros 2 ¿cuántos platos tendrá la mesa?”.*
5.Cambio o transformación – resta	*Galleta. “Si en esta galleta ponemos 9 dulces y nos comemos 3 ¿cuántos dulces va a tener la galleta?”.*
6.Igualación – resta	*Tornillos. “Este señor tiene 8 tornillos y este otro tiene 6 tornillos ¿cómo le hacemos para que los dos señores tengan igual de tornillos que él (señalar al que tenía 8)?”.*
7.Igualación – resta	*Dulces. “El niño tiene 7 dulces y la niña tiene 5 ¿cómo le hacemos para que los dos tengan igual de dulces que ella?”*

3. Protocolo de entrevista
4. Videocámara
5. Mesa
6. Dos sillas

7. Materiales que se requirieron para cada una de las actividades (descritos en el protocolo de entrevista).

ESCENARIO

Se trabajó en un plantel de educación preescolar, perteneciente al sector público, ubicado al sur oriente del Distrito Federal, a dicho plantel asiste una población de nivel socioeconómico bajo.

Los currículos manejados por las docentes de grupo incluyen el área de matemáticas, misma que se trabaja de acuerdo con la organización propuesta por la Secretaría de Educación Pública en 2002 (Anexo 2).

Las sesiones de entrevista se llevaron a cabo en los espacios proporcionados para ello dentro del plantel escolar.

PROCEDIMIENTO

Se estableció contacto con la escuela planteando que se trataba de una investigación cuyo objetivo era conocer el pensamiento matemático de los niños. Asimismo se explicó de manera general el procedimiento que se llevaría a cabo para realizar esta investigación.

1. Previamente se diseñaron las actividades y guión de la entrevista. A todos los niños se les presentaron once problemas en total: cuatro tareas de conservación, conteo e invariantes, y siete problemas de adición o sustracción.

2. Se realizaron sesiones de entrevista individuales (una sesión por niño); cada una tuvo una duración aproximada de 20 minutos. Antes del inicio de cada sesión fue instalado el equipo de filmación de manera que pudieran ser captadas las acciones del niño y del entrevistador. El mobiliario también tuvo que ser ubicado, de forma que el niño quedara sentado al lado del entrevistador.

3. La estructura general de cada entrevista fue la siguiente:

Al inicio de la sesión se estableció el raport y se dio al niño una breve introducción correspondiente a las actividades "Te invité a venir porque vamos a hacer unos juegos y te voy a decir unas historias".

Se procedió a trabajar con las actividades diseñadas para esta investigación. Los materiales se fueron presentados conforme era necesario para cada tarea siguiendo el protocolo de entrevista en el orden que se presenta a continuación. La primera parte de cada entrevista se enfocó a actividades de conservación y conteo, la segunda parte se centró en situaciones de adición y sustracción:

PROTOCOLO DE ENTREVISTA

TAREAS DE CONTEO E INVARIANTES

Tipo de problema	*Material*	*Descripción del problema*
1.Conservación	*16 dulces*	*Colocar frente al niño una fila de 8 dulces; enseguida colocar arriba de esa otra fila de 8 dulces pero ahora más separados entre sí, de modo que se vea más larga que la primera fila. Enseguida decir al niño: “unos dulces son para ti y otros son para mi ¿cuáles quieres? ¿éstos o éstos? señalar cada fila respectivamente. Después de que el niño ha elegido, preguntarle “¿hay igual de dulces aquí y aquí? ¿cómo sabes?” “¿por qué?”*

2.Conteo	*Recipiente con 20 palitos*	*Colocar sobre la mesa el recipiente que contiene palitos y decir al niño "dame 10 palitos de esa bolsa".*
3.Conteo	*8 fichas de un mismo color*	*Colocar sobre la mesa frente al niño un puñado de 8 fichas, quedando estas en desorden sobre la mesa, y decir "¿sabes cuántas fichas hay aquí?".*
4.Conteo	*9 figuras de muñecas Iguales*	*Colocar sobre la mesa 9 figuras dispuestas en una sola fila sobre la mesa y preguntarle "¿cuántas muñecas son?"*

TAREAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Problema 1. COMPARACIÓN - RESTA (Peces)	*20 figuras de peces, todas iguales* *2 dibujos (niño, niña)*	*El investigador narra al niño lo siguiente:* *"Te voy a platicar algo, se trata de unos peces (colocar el recipiente con figuras de peces) y dos niños a los que les gustan los peces (colocar frente al niño los dibujos de las caritas) este es Luis (señalar el dibujo del niño) y tiene 5 peces, esta es Mari (señalar el dibujo de la niña) y tiene 8 peces ¿quién gana de peces? ¿por cuántos peces gana?"*
Problema 4. CAMBIO O TRANSFORMACIÓN – SUMA	*20 fichas iguales* *Una figura que simule una*	*El investigador dice al niño: "ahora vamos a ver algo que sucede con unos platitos. Estos son los platitos (acercarle al niño el recipiente con fichas) y aquí está la mesa*

(Platos)	*mesa*	*(colocar frente al niño la figura de una mesa) si en esa mesa ponemos 7 platos y después ponemos otros 2 ¿cuántos platos tendrá la mesa?”*
Problema 2. COMBINACIÓN (parte-parte-todo) - SUMA (Animales)	*10 figuras de gallinas 10 figuras de patos cuerda (que simule el corral)*	*El investigador coloca en medio de la mesa una cuerda que simula un corral, y dentro del corral coloca todas las figuras de animales, y dice “este es un corral de animalitos, aquí hay gallinas (le muestra al niño una gallina) y patos (mostrarle al niño un pato), si se salen del corral 3 gallinas y 4 patos ¿cuántos animalitos van a estar afuera?”*
Problema 6. IGUALACIÓN - RESTA (Tornillos)	*20 tornillos 2 figuras de señores*	*El investigador menciona: “ahora se trata de dos señores que usan tornillos para arreglar coches. Estos son los señores (colocar frente al niño las figuras de las dos personas) y aquí están los tornillos (acercar al niño el recipiente con tornillos); este señor tiene 8 tornillos para arreglar un coche (señalar la figura que está a la izquierda del niño) y este otro tiene 6 tornillos (señalar la otra figura) ¿cómo le hacemos para que los dos señores tengan igual de tornillos que él? (señalar al que tenía 8)”.*
Problema 3.	*20 flores (10*	*“Ahora vamos a ver esto que es una*

COMBINACIÓN – SUMA (parte-parte-todo) (Flores)	*rojas y 10 verdes) dibujo de una tiendita*	*tiendita (colocar frente al niño el dibujo de la tienda) En esta tienda venden flores (acercar al lado del niño el recipiente con flores), en la tienda hay 6 flores verdes y 4 rojas ¿cuántas son todas las que hay en la tienda?"*
Problema 7. IGUALACIÓN - RESTA (Dulces)	*15 dulces 2 dibujos (niño, niña)*	*"Esta vez nos toca ver a una niña y un niño que les gusta comer dulces (colocar el recipiente con dulces cerca del niño), aquí están los niños (colocar las ilustraciones de niños frente a él), el niño tiene 7 dulces (señalar el dibujo del niño) y la niña tiene 5 señalar el dibujo de la niña ¿cómo le hacemos para que él tenga igual de dulces que ella?" En este problema se enfatizaba que la cantidad mayor se debía igualar a la menor.*
Problema 5. CAMBIO O TRANSFORMACIÓN - RESTA (Galleta)	*1 galleta 15 lunetas*	*Colocar sobre la mesa un recipiente con lunetas y frente al niño una galleta. "Si en esta galleta ponemos 9 dulces y nos comemos 3 ¿cuántos dulces va a tener la galleta?"*

Durante las sesiones los problemas fueron planteados conforme a las instrucciones, cuidando de no mencionar al niño la posibilidad de realizar una operación para resolver cada situación. Los problemas se presentaban de forma oral y acompañándolos de ilustraciones o miniaturas, de manera que el niño tuviera la posibilidad de manipularlos si así lo deseaba y usarlos como referente (Anexo 3).

Se permitió un diálogo abierto, de acuerdo a las respuestas que iba dando el niño, lo cual significa que las preguntas y/o comentarios del investigador se fueron adaptando a partir de las acciones y discurso del niño encaminándolas hacia el objetivo de la tarea.

Las características de las preguntas y de cada sesión variaron, cuidando de no desviar el objetivo de la misma, siguiendo el protocolo.

Al finalizar la entrevista se le preguntó al niño qué opinaba acerca de las actividades realizadas, y se le agradeció su participación.

Las actividades mencionadas y la entrevista fueron piloteadas con niños de características semejantes a la población estudiada. A partir de esto se modificaron algunas actividades e instrucciones.

4. Organización de la información obtenida.- Después de cada sesión fue transcrita y analizada la video grabación, se identificaron todas aquellas respuestas (discurso y acciones) correspondientes a las invariantes, principios de conteo y principalmente a las estrategias seguidas por cada niño para solucionar cada uno de los problemas aditivos planteados.

RESULTADOS

A partir de las diversas actividades diseñadas para esta investigación, fue posible observar las estrategias que emplean niños preescolares para resolver algunos problemas aditivos; estas estrategias fueron organizadas según el tipo de acciones que utilizaron para cada una de las situaciones presentadas. También se observó el manejo de los niños respecto a algunas invariantes operacionales (conservación y composición aditiva) y principios de conteo.

Se realizó el análisis de resultados considerando tres rubros organizados de la siguiente manera:

1. Invariantes operacionales (conservación y composición aditiva).
2. Principios de conteo (correspondencia, orden, cardinalidad, abstracción, irrelevancia de orden).
3. Problemas de suma y resta (comparación, combinación, cambio o transfotmación e igualación).
    - 3.1. Estrategias de solución para los problemas de suma y resta.
    - 3.2. Organización de las estrategias de solución por niveles.
    - 3.3. Estrategias empleadas para cada tipo de problema, y sus implicaciones.
    - 3.4. Relación entre el nivel de estrategia, principios de conteo e invariantes.
    - 3.5. Relación entre nivel de estrategia y edad.
    - 3.6. Relación entre nivel de estrategia y sexo.
    - 3.7. Errores observados durante los problemas de suma y resta.

Se procedió primeramente a analizar y organizar, según el nivel de complejidad, las respuestas de los entrevistados frente a las situaciones de conteo y respecto a las invariantes, y fueron ubicados los diferentes niveles de respuesta dados por los niños, retomando para ello los planteamientos de Piaget y Szeminska (1987). Esto con la finalidad de poder analizar la relación entre las estrategias empleadas por los niños y los principios de conteo e invariantes (conservación y composición aditiva) que manejan.

Posteriormente se procedió a categorizar las diferentes respuestas de los niños, considerando las acciones y el discurso que emplearon durante el proceso de solución de cada problema. A partir de esto se analizó cada categoría encontrada, para ubicar el nivel de las estrategias que utilizaron. Cabe mencionar que para realizar este análisis se retomó la propuesta de Moser (1989), quien sugiere la existencia de tres diferentes niveles de estrategias que emplean los niños.

Se revisó también la relación entre nivel de estrategia empleada y la edad de los niños, organizándolos por grupos de edad, así como la relación entre nivel de estrategia y sexo.

Además, durante el proceso de solución de las situaciones aditivas planteadas se observó que los niños cometían algunos errores, los cuales son descritos más adelante en un apartado final, estos hechos se revisaron para tratar de identificar qué tipo de errores ocurrían, qué tan frecuentes, en qué tipo de tarea, y si pudieran estar relacionados con alguna estrategia o acción específica al momento de resolver las situaciones aditivas.

1. INVARIANTES OPERACIONALES (CONSERVACIÓN Y COMPOSICIÓN ADITIVA)

Siguiendo los planteamientos de Piaget y Szeminska (1987) respecto a las tres diferentes etapas de invariantes operacionales (específicamente de conservación y de composición aditiva del número), se describen aquí los respectivos datos y ejemplos encontrados en este estudio y que para su análisis han sido organizados de la siguiente manera:

1.1. Conservación

Etapa 1. Ausencia de conservación.

Etapa 2. Conflicto entre correspondencia uno a uno y lo perceptual.

Etapa 3. Empleo de la cuantificación.

1.2. Composición aditiva del número

Etapa 1. Dificultad para comprender el todo como una composición aditiva de las partes.

Etapa 2. Dificultad para comprender la relación de inclusión.

Etapa 3. Descubrimiento espontaneo de la composición aditiva y la inclusión.

Debe aclararse, por una parte, que la invariante transitividad no fue explorada, dado que por el nivel de dificultad de los problemas planteados no se consideró relevante para esta investigación, y por otra parte, la composición aditiva de número fue detectada a través de las situaciones aditivas.

1.1. CONSERVACIÓN

Ejemplos de cada una de las etapas de conservación:

Etapa 1. Ausencia de conservación.- La percepción espacial está por sobre la cuantificación.

En el siguiente ejemplo Lo (4,10) basa su comparación en la información perceptual únicamente, sin intentar la cuantificación. Incluso no menciona datos numéricos, limitándose a manejar únicamente los conceptos "muchos" "pocos".

(Lo. 4,10):

E- ¿Tú crees que hay igual de dulces aquí y allá? (señalo cada una de las dos hileras)

L– *(asiente con la cabeza)*

E– *¿sí?,* entonces ¿los dos tienen igual de dulces?

L– *(asiente con la cabeza)*

E - ¿por qué?

L– *porque acá hay poquitos (señala la hilera de abajo) y acá hay muchos (señala la otra hilera)*

E- ¿acá hay pocos y acá hay muchos? (señala cada hilera respectivamente) ¿por qué dices que hay muchos acá? (indico la hilera de arriba)

L– *(en silencio observa los dulces)*

E- ¿tú sabes por qué? A ver, por qué

L– *los formaste todos los dulces y son muchos*

E– los forme y son muchos *(asiente con la cabeza) ..*

Etapa 2. Conflicto entre correspondencia uno a uno y lo perceptual.- El niño duda entre recurrir al uso de la correspondencia y al uso de la información perceptual.

En el siguiente ejemplo Ev (5,5) inicia empleando conteo para comparar los conjuntos, pero no mantiene esta estrategia, ya que su respuesta final más bien se basa en la información perceptual.

(Ev. 5,5):

E- ... ¿tú sabes cuántos son?

EV– *1,2,3,4,5,6,7,8 (señala cada chocolate conforme dice un número)*

E– 8 dulces. Oye y tú sabes acá cuantos hay? (indico la otra fila)

EV– *1,2,3,4,5,6,7,8 (señala cada chocolate de esta otra fila)*

E- ¿tú crees que hay igual de dulces aquí que allá? (señala cada una de las dos filas)

EV– *(niega con la cabeza)*

E- ¿no? *...*

Etapa 3. Emplea la cuantificación.- Deja de lado la información perceptual y emplea la cuantificación para conocer el tamaño del conjunto.

Pa (4,6) inicia la comparación basándose en la información perceptual, solo que al tratar de explicar su respuesta recurre al conteo y es mediante este como resuelve la tarea planteada.

(Pa. 4,6):

E- ... ¿ tú crees que tú y yo vamos a tener igual de dulces?

P– *niega con la cabeza*

E – ¿no? por qué?

P– *porque este*

E - ¿cómo le hacemos para saber?

P– *(silencio)*

E– o sea que esos van a ser para ti y estos para mi (señala cada hilera)

P– *(asiente con la cabeza)*

E– y ¿tú crees que alguien tenga más?

P– *(asiente con la cabeza)*

E- ¿por qué?

P– *porque 1,2,3,4,5,6,7,8 (dice un número conforme señala cada dulce de la hilera de arriba), 1,2,3,4,5,6,7,8 (señala cada dulce de la otra hilera) ¡ah no! ¡son iguales!*

E- ¿son iguales?

P– *(sonríe)...*

A través de la tarea diseñada para explorar este aspecto, se observó que tres de los entrevistados (15% del total) se encuentra en la etapa 1 de conservación (sus edades oscilan entre 4,10 y 5,4), cinco niños (el 25%) en la etapa 2 (con edades de 5,3 a 6,6) y doce (el 60%) en la etapa 3 (con edades de 4,6 a 6,10) (Tabla 1).

1.2. COMPOSICIÓN ADITIVA DEL NÚMERO

Fue explorada a través de las situaciones aditivas.

Descripción y ejemplos para cada etapa de composición aditiva del número:

Etapa 1. Dificultad para comprender el todo como una composición aditiva de las partes.

Zi (6,6) menciona una y otra vez la cantidad del subconjunto, sin llegar a considerar ambos como un todo, ya que una y otra vez cuenta por separado cada pequeño conjunto.

(Zi. 6,6):

E- ... se salieron del corral 3 gallos y 4 patos

Z– *(saca del corral 3 gallos) 1,2,3 (enseguida saca 3 patos) 1, (repite) 1,2,3, ya*

E- ¿cuántos son los que están afuera?

Z- *¿están afuera? 1,2,3,1,2,3. 3*

E- ¿3? Ah, oye y entonces ¿cuántos animales tengo que buscar para regresar al corral?

Z– *3 y 3*

E- ......

Z– *(regresa al corral todos los animales que había sacado)*

E- *.............*

Z- se salieron ... 4 patos y 3 gallinas. *4 patos 1,2,3,4 (dice un número cada que coloca un pato fuera del corral, en fila) y 4,3 gallinas*

E- ¿cuántas gallinas se salieron? ¿te acuerdas?

Z– *sí*

E- ¿cuántas?

Z– *mmm (silencio)*

E- 3 gallinas se salieron

Z– *(saca del corral 3 gallinas colocándolas en una fila continua a la de patos) 1,2,3, 3 gallinas*

E– oye, entonces ahora ¿cuántos son todos los animales que están fuera?

Z– *1,2,3 (señala una por una las 3 gallinas que sacó), 1,2,3,4,5 (cada vez señala un pato, aunque solo son 4)*

E – ¿5?

Z– *(asiente con la cabeza)*

E– son todos los que están afuera?

Z– *sí ...*

E- bueno, entonces los que están afuera los vamos a meter aquí (acerco el recipiente)

Z– *(asiente con la cabeza)*

Etapa 2. Dificultad para comprender la relación de inclusión. Descubre la repuesta en forma intuitiva, no deductiva.

Os (4,11) menciona una respuesta, pero al tratar de explicarla pierde consistencia, debido a que forma dos conjuntos, cuenta el total, pero para mantener su respuesta acerca de la cantidad total no se apoya en las cantidades manejadas.

(Os. 4,11):

E- ... son 6 verdes y 4 rojas ¿cuántas son todas las que tiene la tienda?

O– *doce*

E- ¿doce?

O– *(asiente con la cabeza)*

E– a ver ¿cómo supiste que eran 12?

O– *porque las conté (va sacando todas las flores del recipiente una por una y las coloca sobre la mesa) 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21*

E- ¿21 flores? - ... ¿te digo en el cuento como dice? ... la tienda tiene 6 flores verde y 4 rojas

O– *como este color verde (señala una flor verde)*

E– ajá. ¿quieres poner las flores que hay en la tienda?

O- *¿6?*

E- ... 6 verdes y 4 rojas

O– *(coloca 3 flores verdes, 2 rojas y otra verde, una por una) 1,2,3,4,5 (cada vez señala una de las flores que colocó, quedando sin señalar una) (coloca otra flor roja) ...seis*

E– 6 ¿ya está como dice aquí?

O- *(me mira)*

E- 6 verdes y 4 rojas

O– *(observa las flores que colocó) son 4 verdes y esta 6 (coloca otra verde) son 1,2,3,4,5 (coloca otra verde) 6 y esta (toca las flores rojas) 7,8,9*

E– ah ¿9? ¿cuántas son todas las flores que hay en la tienda?

O– *(las observa) mmm 7*

E- ¿cómo supiste?

O– *porque yo las conté; las fui contando (señala cada flor conforme dice un número, quedando una sin señalar) 1,2,3,4,5,6,7,8 son como unas florecitas ¿no?...*

Etapa 3. Descubrimiento espontáneo de la composición aditiva y la inclusión.

Edu (5,8) desde un inicio al conformar los conjuntos considera que juntos forman parte de un todo.

(Edu. 5,8):

E - ¿cuántos animalitos van a estar afuera?

ED– *¿3 patos?*

E – 3 gallinas y 4 patos

ED– *(uno por uno saca del corral 4 patos y enseguida 3 gallinas; conforme los saca los va colocando en fila) 1,2,3,4,5,6,7 ...*

TABLA 1. Etapa de invariantes que maneja cada participante.

Participante	GRADO	SEXO	EDAD	INVARIANTES						
		M / H	Años, Meses	Conservación (etapa)			Transitividad	Composición aditiva del número (etapa)		
				1	2	3		1	2	3
4.Pa	2°	M	4,6			X	---			X
3.Lo	2°	M	4,10	X			---			X
9.Ha	2°	H	4,11			X	---			X
8.Os	2°	H	4,11			X	---		X	
5.Kari	2°	M	5,3		X		---		X	
6.Da	2°	H	5,4	X			---		X	
1.An	2°	M	5,4	X			---		X	
2.Ev	2°	M	5,5		X		---			X
7.Vi	2°	H	5,6		X		---			X
10.Ed	2°	H	5,8			X	---			X
14.Ka.	3°	M	6,1			X	---			X
19.Fe	3°	H	6,3			X	---			X
20.Ed	3°	H	6,4			X	---			X
11.Dana	3°	M	6,4		X		---			X
17.Jo	3°	H	6,4			X	---			X
12.Zi	3°	M	6,6		X		---	X		
13.Br	3°	M	6,7			X	---			X
15.Li	3°	M	6,7			X	---			X
16.Pau	3°	H	6,8			X	---			X
18.Ro	3°	H	6,10			X	---			X
% TOTAL				15	25	60	0	5	20	75

2. PRINCIPIOS DE CONTEO

De acuerdo con la propuesta de Piaget y Szeminska (1987), se registró para cada uno de los principios de conteo si se encontraban presentes o no; y en el caso de los principios de correspondencia y cardinalidad, se ubicó además la etapa correspondiente de acuerdo a las respuestas (discurso y acciones) de los niños. A continuación se ilustran y describen los resultados encontrados para los siguientes cinco principios de conteo:

- 2.1. Correspondencia
  - 1ª. Etapa. No hay correspondencia
  - 2ª. Etapa. Correspondencia sin equivalencia durable
  - 3ª. Etapa. Correspondencia numérica
- 2.2. Orden
- 2.3. Cardinalidad
- 2.4. Abstracción
- 2.5. Irrelevancia de orden

2.1. PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

Ejemplos encontrados para cada etapa:

1ª Etapa. No hay correspondencia ni equivalencia. El niño se basa en la información perceptual para determinar si hay correspondencia.

No se presentaron ejemplos de esta etapa.

2ª Etapa. Correspondencia sin equivalencia durable. Considera la correspondencia uno a uno, pero si se cambia la distribución física el niño no mantiene su idea de correspondencia.

Lo (4,10) toca las fichas una por una, pero no corresponde una etiqueta para cada una, aunque la distribución física siga siendo la misma.

(Lo. 4,10):

E- ... (esparcidas 8 fichas sobre la mesa) ¿sabes cuantas fichas hay?

L– *(asiente con la cabeza) 1,2,3,cua-tro,5 (toca una por una conforme dice los nombres de los números; al tocar la 4ª y 5ª vez dice cua-tro, una sílaba con cada ficha, y cuando dice 5 toca las tres fichas restantes una por una)*

E- ¿cuántas dijiste?

L– *1,2,3,cua-tro,5,6,sie-te (señala una ficha conforme dice cada número; cuando dice siete toca dos fichas, una con cada sílaba)...*

3ª Etapa. Correspondencia numérica. Se mantiene la correspondencia 1-1 y la equivalencia.

Zi (6,6) mantiene la correspondencia uno a uno durante el conteo que realiza, aun cuando hace una breve pausa.

(Zi. 6,6) :

E- (Coloco frente a ella una hilera de 9 muñecas) ¿sabes cuántas muñecas hay?

Z– *1,2,3,4,5,6 (pausa, suspira y vuelve a iniciar donde pausó) 6,7,8,9 (señala una por una conforme dice algún número) Nueve.*

Se observó que ni uno de los niños entrevistados dio respuestas correspondientes a la primera etapa. En la segunda etapa se ubican tres niños (15% del total), pertenecen al grupo de segundo grado y sus edades corresponden a 4,10, 4,11 y 5,4. En el caso de la etapa 3 fue observada en el 85% de los niños entrevistados (de estos el 50% corresponde al grupo de tercer grado) y 35% al de segundo grado (sus edades fluctúan entre 4 años 6 meses y 6 años con 10 meses). Cabe mencionar que algunos niños que logran correspondencia en la etapa 2 o 3 presentan inconsistencias, ya que en ocasiones durante el procedimiento para resolver situaciones aditivas aún muestran un nivel menor (tal es el caso de dos sujetos: 3.Lo, 9.Ha) (Tabla 2).

2.2. PRINCIPIO DE ORDEN

Ausencia de orden.

No se presentaron ejemplos de ausencia de orden.

Presencia de orden.

En el siguiente ejemplo es claro que Ro (6,10) mantiene el orden al realizar el conteo de uno al diez.

(Ro. 6,10):

E- de estos palitos te voy a pedir que me des 10

R- *1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 (cada vez que dice el nombre de un número toma del recipiente un palito y lo coloca en la mesa)...*

Se observó presente este principio en el 100% de los entrevistados (tabla 9). No obstante, en uno de los participantes (varón, 4 años 11 meses) se observó inconsistencia al respecto.

2.3. PRINCIPIO DE CARDINALIDAD

Ausencia de cardinalidad

No se presentaron ejemplos.

Presencia de cardinalidad

Liz (6,7) realiza conteo y al concluirlo menciona de nuevo la última etiqueta confirmando así la cardinalidad.

(Liz. 6,7):

E- ... aquí tengo unas fichas... (vacío 8 fichas sobre la mesa) ¿tú sabes cuántas son?

L– *(con el dedo señala las fichas una por una conforme dice un número) 1,2,3,4,5,6,7,8. 8*

E- ocho, vamos a guardar...

El 100% de los entrevistados mostró poseer este principio, ubicándose en la tercera etapa de cardinalidad (Tabla 2). No obstante, en uno de los participantes (varón, 4 años 11 meses) se observó inconsistencia al respecto.

2.4. PRINCIPIO DE ABSTRACCIÓN

Ausencia de abstracción

En el ejemplo Lo manipula los objetos pero no considera la posibilidad de contarlos para asegurar que toma la cantidad solicitada.

(Lo. 4,10):

E- ... de estos palitos que tengo (acerco el recipiente con palitos) te voy a pedir que me des 10 palitos

L– *(saca dos puñados de palitos) ¿así? (me los muestra)*

E- 10 palitos

L- *(uno por uno saca 3 palitos y me observa mientras los sostiene en la mano)*

E– entonces estos son los palitos que me diste (son 8) ...

Presencia de abstracción

Al solicitarle a Ha (4,11) una cantidad de objetos enseguida recurre al conteo para reunir la cantidad exacta.

(Ha. 4,11) :

E- ... acá tengo unos palitos (coloque el recipiente con palitos)

H– *de paleta*

E– a ver, de estos palitos te voy a pedir que me des 10

H– *1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 (cada vez sacan un palito y lo coloca sobre la mesa)*

E– 10 palitos, entonces estos 10 palitos son para mi ...

El 95% de los participantes aplicó este principio en las situaciones propuestas. Un niño no lo aplica (cursa 2° grado y su edad corresponde a 4años 10meses), no siempre recurrió al conteo para determinar una cantidad de objetos, simplemente mencionó “muchos” o “pocos” o no mencionó nada (Tabla 2).

2.5. PRINCIPIO DE IRRELEVANCIA DE ORDEN

Ausente la irrelevancia de orden

No se encontraron ejemplos.

Presente la Irrelevancia de orden

Jo (6,4) realiza el conteo, sin necesidad de arreglar de alguna forma específica el conjunto de objetos, ya que lo hace conforme va tomando objetos para obtener la cantidad solicitada.

(Jo. 6,4):

E- ... de estos palitos yo te voy a pedir que me des 10

J– *(toma del recipiente un puñado, los pasa de una mano a otra) son 3 (hace lo mismo con otros puñados; al final pasa uno por uno de una mano a otra y me los entrega) (Son 10)...*

El 100% de los entrevistados aplicó este principio durante las tareas presentadas (Tabla 2).

TABLA 2. Principios de conteo que manejan los niños.

PARTICIPANTE	GRADO	SEXO M / H	EDAD Años,meses	PRINCIPIOS DE CONTEO: Correspondencia (etapas) 1	2	3	Orden	Cardinalidad	Abstracción	Irrelevancia del orden
4. Pa	2°	M	4,6			X	SI	SI	SI	SI
3.Lo	2°	M	4,10		X		SI	SI	NO	SI
9.Ha	2°	H	4,11		X***		SI***	SI***	SI***	SI
8.Os	2°	H	4,11			X	SI	SI	SI	SI
5.Ka	2°	M	5,3			X	SI	SI	SI	SI
6.Da	2°	H	5,4		X		SI	SI	SI	SI
1.An	2°	M	5,4			X	SI	SI	SI	SI
2.Ev	2°	M	5,5			X	SI	SI	SI	SI
7.Vi	2°	H	5,6			X	SI	SI	SI	SI
10.Ed	2°	H	5,8			X	SI	SI	SI	SI
14.Ka.	3°	M	6,1			X	SI	SI	SI	SI
19.Fe	3°	H	6,3			X	SI	SI	SI	SI
20.Ed	3°	H	6,4			X	SI	SI	SI	SI
11.Da	3°	M	6,4			X	SI	SI	SI	SI
17.Jo	3°	H	6,4			X	SI	SI	SI	SI
12.Zi	3°	M	6,6			X	SI	SI	SI	SI
13.Br	3°	M	6,7			X	SI	SI	SI	SI
15.Li	3°	M	6,7			X	SI	SI	SI	SI
16.Pa	3°	H	6,8			X	SI	SI	SI	SI
18.Ro	3°	H	6,10			X	SI	SI	SI	SI
% TOTAL				0	15	85	100	100	95	100

(***) En algunas situaciones se observa claramente este principio, y en otras está ausente.

3. PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA (COMPARACIÓN, COMBINACIÓN, CAMBIO O TRANSFORMACIÓN E IGUALACIÓN)

3.1. ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN PARA LOS PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA

Para cada uno de los siguientes siete problemas planteados se encontraron diversas estrategias, mismas que fueron categorizadas y organizadas de mayor a menor nivel de complejidad, con base a las respuestas de los niños.

3.1.1. Comparación	3.1.1.1.RESTA. Problema 1. Peces
3.1.2. Combinación parte-parte-todo	3.1.2.1. SUMA. Problema 2. Animales 3.1.2.2. SUMA. Problema 3. Flores
3.1.3. Cambio o Transformación	3.1.3.1. SUMA. Problema 4. Platos 3.1.3.2. RESTA. Problema 5. Galleta
3.1.4. Igualación	3.1.4.1. RESTA. Problema 6. Tornillos 3.1.4.2. RESTA. Problema 7. Dulces

A continuación se describen las diferentes categorías de estrategias encontradas para cada problema planteado, presentando el nombre de la estrategia, la descripción y un ejemplo de cada una. En las tablas correspondientes se pueden apreciar las características (edad, sexo) de los sujetos que emplearon cada estrategia.

3.1.1. ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN PARA EL PROBLEMA DE COMPARACIÓN

3.1.1.1. COMPARACIÓN RESTA. PROBLEMA 1. PECES.

"Luis tiene 5 peces, Mari tiene 8 peces ¿quién gana de peces? ¿por cuántos peces gana?". El problema se presenta con material gráfico y miniaturas.

Se encontraron las siguientes tres categorías considerando el conocimiento de los niños y sus estrategias (Tabla 3), mismas que a continuación se describen y ejemplifican:

Estrategia 1 para el problema de comparación resta (problema 1, peces): Formación de dos conjuntos identificando el conjunto mayor y la diferencia.

Descripción: Formar dos conjuntos iniciales y mencionar como respuesta al problema un hecho numérico conocido.

En el siguiente ejemplo Ka (5,3) inicia mencionado el conjunto mayor, y al replantearle la pregunta forma dos conjuntos físicamente, uno de nueve y el otro de cinco elementos; y sin atender a las cantidades que ha colocado, menciona un hecho numérico que corresponde con los datos proporcionados ("si tengo cinco para tener ocho tengo que tener otros tres").

(Ka, 5,3):

K- *... (señala a la niña) ... por 8 ... (forma el conjunto de la niña y enseguida el del niño con 9 y 5 peces, respectivamente)*

E- ¿y cuantos peces hacen que ella gane?

K- *... 8*

E– *ocho,* ¿tú sabes cuantos peces más que él tiene la niña?

K- *otros 3*

E- ¿otros 3? A ver ¿cómo supiste eso?

K- *porque si tengo 5, para hacer 8 tengo que tener otros 3*

E- ah, si tienes 5 para tener 8 tienes que tener otros 3

Estrategia 2 para el problema de comparación resta (problema 1, peces): Formación de dos conjuntos identificando el conjunto mayor sin establecer la diferencia.

Descripción: Formar dos conjuntos diferentes, y como respuesta al problema mencionar el cardinal del conjunto mayor.

En este ejemplo Jo (6,4) dice una respuesta inmediata aunque errónea, y al replantearle la pregunta identifica quién tiene más ("ella gana"), dando como respuesta el cardinal mayor (ocho).

(Jo. 6,4):

J- *(señala a la niña)*

E- ¿ella? ¿tú sabes por cuantos peces gana?

J- *¿por 8?*

E- ¿por 8? ¿sabes cuántos más que él tiene ella?

J- *(afirma con la cabeza) él tiene 5 y ella tiene 8 (señala a cada uno respectivamente); ella gana*

E- ... ¿por cuantos gana ella?

J- *por 8*

Estrategia 3 para el problema de comparación resta (problema 1, peces): Referencia a un cardinal diferente y formación de un conjunto.

Descripción: Mencionar un cardinal diferente a los que contiene el problema y posteriormente formar un conjunto. La respuesta al problema es el cardinal mencionado.

En el ejemplo Lo (4,10) forma un conjunto y responde mencionando un cardinal (cuatro) que únicamente ubica como el tamaño de uno de los conjuntos.

(Lo. 4,10):

E- ...¿quién gana de peces?

L- *(señala con el índice a Mari)*

E- ¿tú sabes por cuántos peces gana?

L- 4 ... *(coloca en fila 7 peces cerca del niño)*

E- a ver, platícame qué hiciste

L- (talla su dedo sobre la mesa dibujando círculos alrededor de la niña) 4 peces

E- ¿de quién?

L- *de la niña*

TABLA 3. Estrategias encontradas para el problema de COMPARACIÓN - RESTA (problema 1, peces) y niños que las emplean.

ESTRATEGIA	PARTICIPANTES	EDAD
1. Formación de dos conjuntos. Identificación del conjunto mayor y la diferencia.	5.Ka	5,3
2. Formación de dos conjuntos, identificando el conjunto mayor sin establecer la diferencia.	1.An 2.Ev 4.Pa 6.Da 7.Vi 8.Os 9.Ha 10.Ed 11.Da 12.Zi 13.Br 14.Ka 15.Li 16.Pa 17.Jo 18.Ro 19.Fe 20.Ed	5,4 5,5 4,6 5,4 5,6 4,11 4,11 5,8 6,4 6,6 6,7 6,1 6,7 6,8 6,4 6,10 6,3 6,4
3. Referencia a un cardinal diferente y formación de un conjunto.	3.Lo	4,10

3.1.2. ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN PARA LOS PROBLEMAS DE COMBINACIÓN (PARTE-PARTE-TODO)

3.1.2.1. COMBINACIÓN SUMA. PROBLEMA 2. ANIMALES.

"Si se salen del corral 3 gallinas y 4 patos ¿cuántos animalitos van a estar afuera?". El problema se presenta con objetos en miniatura.

Se encontraron 7 categorías de estrategias (Tabla 4).

Estrategia 1 para el problema de combinación suma (problema 2, animales): Identificación de las partes y del todo mediante conteo mental.

Descripción: Mencionar el resultado de unir las dos cantidades dadas.

Jo. (6,4) menciona una cantidad (siete), y al mostrar su estrategia forma dos conjuntos (de tres y cuatro elementos) y señala cada elemento sin mencionar los nombres de los números para explicar cómo encontró el resultado.

(Jo. 6,4):

J-... (en silencio mira hacia el frente y con los brazos recargados en la mesa con la cabeza) 7

E- *¿7? A ver ¿me enseñas cómo le hiciste para saber que son siete?*

J- (sin quitar las manos de su mejilla) pensando

E- *¿Pensado? Me puedes enseñar usando los animalitos qué fue lo que ibas pensando*

J- (saca los animalitos del corral, 4 patos y 3 gallinas, en ese orden)... 3 gallinas (voz muy baja)

E- Aha

J- *(*saca del corral tres gallinas y cuatro patos y los coloca parados)

E- *¿Y luego? (se escuchan voces de niños, gritan y se acercan a la ventana*)

J- *(m*ira hacia la ventana*)*

E- *Fueron los que se salieron ¿verdad? Y luego yo pregunté ¿cuántos son todos los que andan afuera?*

J- 7

E- A*h, a ver y ¿cómo hiciste para saber que eran siete? A ver me enseñas con los animalitos?*

J- (señala con el dedo cada uno; ve hacia la ventana, donde se escuchan algunos niños)

Estrategia 2 para el problema de combinación suma (problema 2, animales): Formación de las partes e identificación mental del todo.

Descripción: Formar dos conjuntos, unirlos físicamente alineando los objetos y mencionar un hecho numérico.

El siguiente niño (Ro. 6,10) forma dos conjuntos empleando sus dedos, nuevamente lo hace pero con otros objetos que coloca juntos y menciona un hecho numérico ("tres gallinas y cuatro patos serían ocho").

(Ro. 6,10)

R-*... (observa los animales) 3 gallinas y 4 patos (muestra 4 dedos de una mano y 3 de la otra al decir esto) ¿cuántos van a estar afuera?*

E- sí

R- *(dobla sus dedos... vuelve a extender los mismos dedos en silencio) Ocho*

E- ¿8? A ver ¿cómo le hiciste para saber?

R- *porque me dijo 3 gallinas (muestra 3 dedos) y ... 4 patos (muestra de la otra mano 4 dedos) serían, 1,2 (cada vez señala con el índice uno de los 4 dedos) 1,2,3,4 (reinició señalando cada uno, se detiene...*

E- *...*

R- *porque me dijo (saca 2 patos) 3 gallinas, se escapan del corral (saca 3 gallinas) y 4 patos (saca 2 patos a la vez y los coloca junto a los otros 2) serían y así se juntarían (coloca las gallinas junto a los patos, alineados) serían... son 8...*

E -*...*

R- *4 patos y 3 gallinas son 8...*

Estrategia 3 para el problema de combinación suma (problema 2, animales): Formación mental de las partes y conteo a partir de, para identificar el todo.

Descripción: Formar dos conjuntos sin separarlos físicamente del conjunto inicial, y contar iniciando desde el segundo conjunto en un número diferente de uno, para conocer el total.

Aquí se le replantea a Ed (6,4) el problema después de que había mencionado como respuesta “todos”, entonces él señala tres objetos de uno en uno y enseguida dice un total (ocho) sin formar otro conjunto.

(Ed. 6,4):

Ed-.. (me mira) Todos

E- ¿Todos?, a ver cómo

Ed- sí porque (saca algunos animales y levanta el corral)

E- *Aha, ¿qué más?*

*Ed- (*va sacando los demás animales) van saliendo todos y dejan el corral solo (retira el corral y lo coloca en otro lugar)

E- A*h, bueno eso, eso sería si el corral se puede levantar (le ayudo a acomodar el corral) y si se fueran todos de repente*

Ed- *(*coloca un pato dentro del corral)

E- *pero ¿qué crees? mira aquí esta*

Ed- (toma otro animal)

E- a*quí están todos (tomo todos los animales y los coloco dentro del corral) aquí estaban todos*

Ed- (también coloca dentro el animal que sostenía en sus manos)

E- *y entonces el dueño estaba, estaba de lejitos así viendo y entonces veía "ya se salieron 3 gallinas y 4 patos"*

Ed- *(*toca los animales y mirándolos los mueve un poco) y que cierra la puerta (acerco mis manos al corral) (me mira nuevamente)

E- *Ya no se salieron los demás ¿Cuántos fueron todos los animales que se salieron?*

Ed- (los observa, y señala con el dedo 3 animales de dentro del corral), 8

Estrategia 4 para el problema de combinación suma (problema 2, animales): Formación de un conjunto y conteo a partir de.

Descripción: Formar un primer conjunto y contar a partir de, hasta haber agregado una cantidad específica; el último número mencionado es el resultado.

Edu (5,8) forma un primer conjunto de cuatro objetos y le va agregando objetos de otro tipo, hasta haber agregado una cantidad del tamaño del segundo conjunto (tres), en tanto va contando desde uno y se detiene cuando termina de colocarlos.

(Edu. 5,8)

Ed-*... ¿3 patos?*

E- *3 gallinas y 4 patos*

Ed- *(saca animales del corral y cada vez dice un número; uno por uno primero saca 4 patos y enseguida 3 gallinas; los coloca en fila conforme los saca) 1,2,3,4,5,6,7*

Estrategia 5 para el problema de combinación suma (problema 2, animales): Formación de dos conjuntos (con los dedos) y conteo del total.

Descripción: Formar dos conjuntos con los dedos y contar el total de objetos.

Pa (6,8) forma un primer conjunto de dos, usando sus dedos, autocorrigiendo, y vuelve a formar ese conjunto ahora con los objetos miniatura (gallinas), después forma con sus dedos uno de cuatro objetos, vuelve a formarlo con las miniaturas, y procede a contar todo desde uno.

(Pa. 6,8)

P- *... (mira hacia el techo, silencio) ¿cuántos?*

E- se salen 3 gallinas y 4 patos

P– *(extiende 2 dedos y con ellos señala algunas gallinas) ¿4 patos? (extiende 4 dedos, enseguida señala con el índice derecho 4 patos, uno por uno... señala 4 patos y enseguida 3 gallinas, diciendo los números en voz baja) 1,2,3,4,5 (señala alguno, sacude la cabeza y continúa) 6,7. Siete.*

Estrategia 6 para el problema de combinación suma (problema 2, animales): Formación de un conjunto inventando los elementales y conteo total.

Descripción: Forma un solo conjunto con dos tipos de elementos, sin considerar las cantidades dadas y cuenta el total de objetos.

Al inicio (Lo. 4, 10) dice una respuesta (cuatro), y para explicar su estrategia forma un solo conjunto con dos tipos de objetos (tres gallinas y un pato); al repetir la estrategia vuelve a colocar los dos tipos de elementos (dos de cada uno) y cuenta el total. Casi todas las veces usa cantidades diferentes a las del problema.

(Lo. 4, 10):

L- *... cuatro*

E- a ver, ¿cómo le haces para saber?

L- (señala uno por uno tres gallinas y un pato, aún dentro del corral)

E- ¿cuántos son los que están afuera?

L- *este y este y este (señala con el índice tres animales dentro del corral. Uno por uno, sin que se distinga a cuales).... (saca del corral 2 patos y 2 gallinas uno por uno, colocándolos sobre la mesa)*

E- ¿ya están afuera tres gallinas y cuatro patos?

L- *(asiente con la cabeza)*

E- y ahora ¿cuántos son todos los que están afuera?

L- *estos (señala las gallinas fuera del corral) y estos (señala los patos fuera del corral)*

E- ¿y cuantos son?

L- *señala uno por uno conforme dice un número cada vez) 1,2,3,4.*

Estrategia 7 para el problema de combinación suma (problema 2, animales): Formación de dos conjuntos elementales e identificación del todo con ayuda.

Descripción: Formar dos conjuntos, mencionar como respuesta el cardinal de cada uno. Si se cambia la cualidad de los conjuntos, contar el total de objetos.

Os (4,11) dice como respuesta el cardinal de cada conjunto (tres y cuatro), aún cuando se le pregunta nuevamente y se le menciona por segunda vez un solo tipo de objetos (¿cuántos animales…? ¿cuántas figuritas…?), cuenta el total de objetos desde uno.

(Os. 4,11):

E-...¿cuántos son los que andan afuera?

O- *(observa) 4 patos y 3 gallinas*

E- 4 patos y 3 gallinas, oye, y entonces ¿cuántos son todos los animales que se salieron?

O- *(en silencio observa) 4 patos y 3 gallinas*

E- ah, 4 patos y 3 gallinas; ¿me los enseñas?

O- *(saca 4 patos y 3 gallinas) ...*

E- ... voy a ver cuántos tengo que ir a buscar

O- *a 3 gallinas y 4 patos*

E- ... aquí los puedo meter (muestro un recipiente) ¿cuántos animales voy a meter?

O- *a 4 y a 3 (uno por uno coloca dentro del recipiente los animales que sacó del corral...)*

E- ¿cuántos animales colocaste aquí? ¿cuántas figuritas?

O- *(observa al interior del recipiente, y señalando desde afuera de este, dice un número cada vez que señala hacia adentro del recipiente) 1,2,3,4,5,6,7 (me mira)*

TABLA 4. Estrategias encontradas para el problema de COMBINACIÓN (PARTE - PARTE – TODO) - SUMA (problema 2, animales), y niños que las emplean.

ESTRATEGIA	PARTICIPANTES	EDAD
1. Identificación de las partes y el todo mediante conteo mental.	17.Jo	6,4
2. Formación de las partes e identificación mental del todo.	18.Ro	6,10
3. Formación mental de las partes y conteo a partir de, para identificar el todo.	20.Ed	6,4
4. Formación de un conjunto y conteo a partir de.	2.Ev 5.Ka 10.Ed 14.Ka	5,5 5,3 5,8 6,1
5. Formación de dos conjuntos (con los dedos) y conteo del total.	4.Pa 6.Da 7.Ví 9.Ha 11.Da 13.Br 15.Li 16.Pa 19.Fe	4,6 5,4 5,6 4,11 6,4 6,7 6,7 6,8 6,3
6. Formación de un conjunto inventando los elementales y conteo total.	3.Lo	4,10
7. Formación de dos conjuntos elementales e identificación del todo con ayuda.	1.An 8.Os 12.Zi	5,4 5,0 6,6

3.1.2.2. COMBINACIÓN SUMA. PROBLEMA 3. FLORES.

"Hay 6 flores verdes y 4 rojas ¿cuántas son todas las que hay en la tienda?". El problema se presenta con miniaturas.

Se encontraron cuatro categorías de estrategias (Tabla 5).

Estrategia 1 para el problema de combinación suma (problema 3, flores): Formación de las partes y conteo total para identificar el todo.

Descripción: Formar dos conjuntos y contar el total de objetos desde uno.

Al principio Vi (5,6) solamente ve un todo ("todas estas"), toma todo el material que hay en la caja, pero al replantearle el problema forma dos conjuntos (de seis y de cuatro) dice un número, después dá una respuesta más precisa y realiza conteo en silencio desde "uno".

(Ví. 5,6):

V- *… todas estas (toma las de la caja)*

E- no, esas son las que hay en la fábrica, pero en la tienda nada más hay 6 rojas y 4 verdes

V- *6 rojas y 4 verdes (mientras toca las flores dentro de la caja)*

E- ¿y cuántas son todas?

V- *(observa en silencio el material, y juguetea)*

E- ¿quieres usar esas flores para averiguarlo?

V- *(me observa en silencio)*

E– úsalas

V- *(saca y coloca flores rojas sobre el dibujo de la tienda, en línea de derecha a izquierda) 1, 2,3,4,5,6 (empieza a colocar una por una las flores verdes en hilera arriba de las rojas) 1,2,3,4 (las observa y me mira) (silencio)*

E- ¿cuántas son todas las flores de la tienda?

V- *8 (responde de inmediato)*

E- …

V- *(señala cada una de las 10 flores, iniciando por las rojas de derecha a izquierda y las verdes de izquierda a derecha) 1,2,3,4,5,6,7,8,9, (me mira)*

E - ¿cuántas?

V- *10*

E- 10

Estrategia 2 para el problema de combinación suma (problema 3, flores): Identificación de las partes y conteo total para identificar el todo con ayuda.

Descripción: Formar dos conjuntos y mencionar como respuesta el cardinal de cada uno de éstos. Ante cuestionamiento contar el total de objetos.

Al inicio Da (5,4) menciona como respuesta los cardinales de cada conjunto, pero al volver a formularle el problema y después de varios intentos cuenta todas.

(Da. 5,4):

D-*... mmm (extiende los dedos de sus manos) 6 verdes y 4 rojas*

E- aja, ¿cuántas son todas?

D- *(observa todos sus dedos extendidos, toma 1 flor verde) ¿aquí 6?*

E- Tiene 6 verdes y 4 rojas

D- *(coloca la flor, y continúa colocando hasta 7 flores verdes, una por una sobre la tiendita, en fila) (cuando está colocando la 5a flor alguien interrumpe)… 6*

E- tiene 6 verdes y 4 rojas

D- *apenas voy a poner rojas*

E- ¡ah! Apenas vas a poner las rojas

D- *(coloca 4 flores rojas una por una)*

E- entonces … ¿ya sabes cuántas son todas las que tiene?

D- *(Muestra 3 dedos y luego 1) 6 y 4*

E- … yo te digo, a ver, tú eres el que vende. Señor, ¿cuántas flores tiene en su tienda para vender?

D- *aquí tengo 4 (señala las rojas) y aquí tengo 6 (señala las verdes)*

E– ... ¿cuántas flores me va a dar si le compro todas?

D- *5 (muestra 5 dedos de una mano)*

E- ¿5? Yo quiero todas

D– *(afirma con la cabeza)*

E- ¿sí? A ver, deme esas que dijo

D- *(acerca a mí 2 flores rojas) ¿rojas o verdes?*

E- yo quiero todas, necesito todas las flores que tiene en su tienda

D- *(coloca una por una en fila de arriba abajo, primero las 4 rojas y después 4 verdes)*

E- ¿son todas las que tiene?

D- *(asiente con la cabeza)*

E- ... ¿cuántas flores son todas las flores que me va a dar ?

D- *5*

E- a ver (extiendo mi mano para que ahí las coloque)

D- *(me entrega todas las flores verdes que había sacado, ¿6?)*

E- Pero no son todas, yo quiero todas

D- *(me da en un puñado las 4 rojas). Señor, ¿me ayuda a saber cuántas flores le llevo ..*

E- (coloco en la mesa las flores que me dio)

D- *1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 (aparta una por una conforme menciona cada numero: intercalando verdes y rojas; a una la menciona dos veces); quedaron separadas 3 rojas del resto)*

E- ¿11? Bueno, entonces me voy a llevar 11 flores, 6 verdes y 4 rojas. ... ¿Cuántas me dijo que son todas?

D- *mmm, 6*

E- Todas. ¿Quieres revisar? (coloco las flores sobre la mesa)

D- *1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 (primero cuenta las rojas y después verdes)*

Estrategia 3 para el problema de combinación suma (problema 3, flores): Formación de las partes y referencia a uno de ellos como el todo.

Descripción: Formar dos conjuntos, mantenerlos separados físicamente y mencionar el cardinal de alguno de ellos como respuesta.

(Ka. 5,3) forma un conjunto de nueve flores verdes, dice que son once y luego que son doce. Vuelve a formar un solo conjunto ahora de diez flores verdes, forma también un conjunto de cuatro flores rojas; al replantearle le pregunta ("señora dame…") menciona como respuesta el cardinal del conjunto de flores verdes.

(Ka. 5,3):

K-… *¿todas las…? (coloca una por una hasta 5 flores verdes) ¿todas? (señala las flores)*

E- tiene 6 flores verdes y 4 rojas

K- *(coloca otras 4 flores verdes)*

E - ...

K- *(observa las flores) de este son (pausa y observa las flores) once*

E- no pero ellos nada mas tiene 6, las otras no son de ellos, las otras son de otra tienda

K- *(observa las flores)*

E- tiene nada mas 6 verdes

K- *(observa las flores) 12*

E- ¿m?

K- *12*

E- ¿son 12?

K- *(asiente con la cabeza)*

E- pero ¿dónde están las 12? Todas las que tienes ahí son 12 ..., entonces son 6 flores verdes, vamos a ponérselas a la tiendita

K- *(coloca 10 flores verdes en la tienda, una por una) son 10 (se lleva las manos a la cabeza)*

E- ¿10 flores?

K- *si por que las conté*

E- oye también tiene 4 rojas

K- *(coloca fuera del recipiente 4 flores rojas) (me mira)*

E- entonces ahora ... ¿cuántas son todas las que tiene? Todas, todas la que tiene la tiendita?

K- *(manipula las flores) 4*

E- ¿4? ¿y cuales son? ... si yo te digo "señora, véndame todas las flores que tiene... "

K- *(coloca arriba de la tienda todas las flores verdes)*

E- ¿nada mas esas tiene? Yo quiero todas no importa cualquier color; ¿entonces?, ¿cuales son las que me vas a vender? ...

K- *(coloca las flores verdes sobre la palma de mi mano una por una)*

E - ¿ya?

K- *(asiente con la cabeza)*

E- ¿cuántas son todas las que me vendes?

K- 11

Estrategia 4 para el problema de combinación suma (problema 3, flores): No identifica las partes y se enfoca en un todo inventado.

Descripción: Formar un solo conjunto con dos tipos de elementos indistintamente, y contar el total de objetos.

(Ha. 4,11) forma un conjunto intercalando los dos tipos de elementos, mencionando diferentes cardinales. Se le pregunta de nuevo “cuántas son todas…” y cuenta todos los objetos que ha colocado.

(Ha. 4,11):

H*... 6 flores verdes (coloca sobre la tienda 3 flores verdes), y otra roja (coloca 2 rojas una por una), y otras 6 verdes (coloca otra roja) otra roja, y otra verde (coloca otra verde), y otra roja (coloca otra roja), listo (observa lo que colocó)*

E- listo, estas son las que tienen ahí, oye

H- (*me mira)*

E- ¿cuántas son todas las que tienen?

H- *muchos, muchos, muchos (extiende los brazos hacia afuera)*

E- ¿quieres revisar cuántas son?

H- *... todas (vacía sobre la tienda todas las flores del recipiente)*

E- ¿quieres saber, quieres revisar cuántas son?

H- tengo una idea

E- a ver ¿cuál?

H- *me llevo la que está en la casita (levanta la tienda y suelta sobre la mesa las flores) y tú vendes flores*

E- bueno, yo vendo flores (reúno las flores en un montón) ¿y tú vas a comprarlas?

H- *sí, tututu (canturrea)*

E- entonces yo vendo flores (coloco todas dentro del recipiente)...

H- *(me muestra una roja, tiene la tiendita en la otra mano) roja*

E- ¿roja?

H- *... (toma del recipiente otras flores)*

E- a ver, ¿cuántas flores tomó usted?

H- *(muestra las flores sosteniéndolas con ambas manos)*

E- a ver, ponlas aquí para verlas bien

H- *(deja el montoncito sobre la mesa) (son 4 rojas y 1 verde)*

E- ah tomó flores verdes y rojas

H– *uno*

E- ¿cómo?

H- *uno ...*

E- ¿una verde?

H- *(asiente con la cabeza)*

E- yyyy ... rojas?

H- *mjm (asiente con la cabeza)*

E- a ver y ¿cuántas son todas las que tomó?

H- *1,2,3,4,5,6 (señala cada vez una flor, algunas las señala dos veces)*

TABLA 5 . Estrategias encontradas para el problema de COMBINACIÓN (PARTE-PARTE-TODO) - SUMA (problema 3, flores) y niños que las emplean.

ESTRATEGIA	PARTICIPANTES	EDAD
1. Formación de las partes y conteo total para identificar el todo.	2.Ev 3.Lo 4.Pa 7.Ví 10.Ed 13.Br 14.Ka 15.Li 16.Pa 17.Jo 18.Ro	5,5 4,10 4,6 5,6 5,8 6,7 6,1 6,7 6,8 6,4 6,10

	19.Fe 20.Ed	6,3 6,4
2. Identificación de las partes y conteo total para identificar el todo con ayuda.	1.An 6.Dani 11.Da 12.Zi	5,4 5,4 6,4 6,6
3. Formación de las partes y referencia a una de ellas como el todo.	5.Ka	5,3
4. No identifica las partes y se enfoca en un todo inventado.	8.Os 9.Ha	5,0 4,11

3.1.3. ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN PARA LOS PROBLEMAS DE CAMBIO O TRANSFORMACIÓN

3.1.3.1. CAMBIO SUMA. PROBLEMA 4. PLATOS.

“Si ponemos 7 platos y después le ponemos otros 2 ¿cuántos platos tendrá?”. El problema se presenta con miniaturas.

Se encontraron 4 categorías de estrategias (Tabla 6).

Estrategia 1 para el problema de cambio suma (problema 4, platos): Cálculo mental del resultado del cambio.

Descripción: Como respuesta al problema menciona una cantidad igual o semejante a la suma de ambos conjuntos.

Antes de responder Pau (6,8) confirma los datos, menciona un total (nueve), y al pedirle una demostración de cómo obtuvo este resultado, cuenta objetos de un primer conjunto y concluye el conteo hasta haber agregado dos.

(Pau. 6,8):

P- *... ¿8 platos? ¿primero?*

E- primero le ponemos siete platos y después le ponemos otros dos ¿cuántos tendrá?

P- *9 (responde de inmediato)*

E- ¿9? A ver ¿me enseñas cómo le hiciste para saber que 9?

P- *porque 1,2,3,4,5,6, después del 7 sigue el 8 , después del 8 sigue el 9 (cada vez extiende uno de sus dedos y dice los números en voz alta)*

Estrategia 2 para el problema de cambio suma (problema 4, platos): Formación del conjunto inicial y agrega el cambio para conocer el conjunto final.

Descripción: Después de haber formado un primer conjunto aplica el cálculo mental para obtener el resultado.

An. (5,4) dice una respuesta ("siete"), al solicitarle explicar forma un conjunto de siete, entonces se le plantea de nuevo la pregunta del problema y agrega una ficha diciendo "ocho" (mencionando que esto es si le agrega uno), y responde al preguntarle qué pasaría si le agrega dos: "nueve".

(An. 5,4):

A-*... 7 (mueve sobre la mesa sus manos)*

E- ¿7? A ver ¿me quieres enseñar cómo es eso que va pasando? Todo lo que te platiqué

A- *(conforme saca los platitos del bote uno por uno va diciendo un número), 1,2,3,4,5,6,7*

E- oye ¿y si ponemos otros 2 cuántos va a tener la mesa?

A- *(saca otras 2 fichas del bote) mmm uno (señala la última que colocó) es que ya no (observa hacia la mesita con fichas) 8 (me mira) (levanta y sostiene en su mano una de las que recién colocó)*

E- ¿y cómo supiste que 8?

A- *le pongo uno más y es ocho*

E- ¿Le pones uno y es 8?

A- *(asiente con la cabeza)*

E- ¿y si le pones dos?

A– 9

E- oye ¿Cómo le haces para sabe eso he?

A- *Es que ya me enseñaron a contar (junta sus manos en el aire)*

E- ¿y cómo le hiciste entonces ahorita?

A- *(Lleva sus manos juntas a la cabeza) es que como yo ya cuento, como luego jugamos a las escondidillas y me dicen que cuente hasta ¿qué? (baja sus manos de la cabeza)*

E- uy hasta cuantos, oye y ¿me puedes enseñar cómo contaste ahorita? Para saber que son 9

A- *(asiente con la cabeza y con su dedo recorre el filo del bote)*

E- A ver enséñame

A- *Primero los cuento así (señala al aire el espacio de la mesita; enseguida señala cada una con su dedo conforme va diciendo un número) 1,2,3,4,5,6,7,8,9.*

Estrategia 3 para el problema de cambio suma (problema 4 platos): Identificación del conjunto inicial, le agrega el cambio y conteo total.

Descripción: A un conjunto inicial agregar objetos uno por uno, conforme va contando a partir de.

Ev. (5,5) menciona un total (ocho) y al explicar su procedimiento forma un conjunto a la vez que va realizando el conteo, dejando de colocarle objetos cuando ya agregó los dos que se le mencionaron ("tenía siete y luego los otros dos").

(Ev. 5,5):

E-... ¿cuántos platos tendrá?

Ev- *mmm (pausa, me mira) 8*

E- ¿8? A ver ¿cómo le haces tú para saber eso?

Ev- *coloca fichas sobre la mesita una por una conforme dice un número) 1,2,3,4,5,6,7,8,9....*

E- - ¿cómo supiste que hasta ahí?

Ev- *por este que los iba contando (señala las fichas que están sobre la mesa)....*

E- ¿y hasta cuánto pensaste que ibas a contar?

Ev- hasta el 7

E- hasta el 7?

Ev- *(asiente con la cabeza)*

E- ¿y después?

Ev - ponerle otros 2..

E - ¿y luego?

Ev- *luego aquí ya no.*

Estrategia 4 para el problema de cambio suma (problema 4, platos): Identificación del conjunto inicial y el cambio y conteo total.

Descripción: A un conjunto inicial agregar una cantidad específica (un segundo conjunto) y contar el total de objetos.

Fe. (6,3) después de haber formado un conjunto de siete con sus dedos, y agregarle menciona la respuesta (nueve) y muestra el proceso formando un primer conjunto de siete y enseguida le agrega dos.

(Fe. 6,3):

F- *(en silencio extiende los dedos de una mano, los dobla, me mira)*

E- ... se vale todo ¿eh?

F- *(baja sus manos, las recarga sobre sus muslos y extiende algunos dedos; coloca las manos casi bajo la mesa y observa sus dedos que mueve) 9 (...)*

E- 9 platos vamos a ver; oye, a ver, enséñame ¿cómo es eso? ¿cómo le haces tú para saber eh? A ver enséñame

F- *(muestra sus dedos extendiéndolos, primero 7 y enseguida extiende otros 2 a la vez) así pongo.*

TABLA 6. Estrategias encontradas para el problema de CAMBIO – SUMA (problema 4, platos) y niños que las emplean.

ESTRATEGIA	PARTICIPANTES	EDAD
1. Cálculo mental del resultado del cambio.	6.Da 15. Liz 16.Pau 18.Ro 20.Ed	5,4 6,7 6,8 6,10 6,4
2. Formación del conjunto inicial y agrega el cambio para conocer el conjunto final.	1.An 12.Zi	5,4 6,6

3. Identificación del conjunto inicial, agrega el cambio y conteo total.	2.Ev 5. ka 8.Os 13.Br 17.Jo	5,5 5,3 5,0 6,7 6,4
4. Identificación del conjunto inicial y el cambio y conteo total.	3.Lo 4.Pa 7.Vi 9.Ha 10.Ed 11.Da 14.Ka 19.Fe	4,10 4,6 5,6 4,11 5,8 6,4 6,1 6,3

3.1.3.2. CAMBIO RESTA. PROBLEMA 5. GALLETA.

“Si en esta galleta ponemos 9 dulces y nos comemos 3 ¿cuántos dulces va a tener la galleta?”. El problema se presenta con objetos.

Se encontraron seis categorías de estrategias (Tabla 7).

Estrategia 1 para el problema de cambio resta (problema 5, galleta): Hecho numérico.

Descripción: Mencionar un hecho numérico como respuesta al problema.

Ví. (5,6) de inmediato menciona como respuesta un hecho numérico (seis), y al preguntarle lo explica (“si le quitas dos quedan seis”), también hace una demostración con objetos.

(Ví. 5,6):

V- *... 6*

E - oye, ¿cómo le hiciste para saber si es 6?

V– *pensé*

E- a ver, me enseñas como es eso que pensaste

V- *si le quitas 2 quedan 6 (toca la galleta)*

E- ¿ y tu ¿cómo supiste eso?

V– *pensé*

E- pensaste, ¿me lo enseñas con las lunetas cómo fue eso?

V- *(toma de la caja 2 lunetas y la acomoda alrededor de la galleta, las regresa a la caja) si le quitamos dos quedan 6*

E - a ver

V- *mira (toma de nuevo las lunetas de la caja y las acomoda alrededor de la galleta, acomoda 8 y luego quita 2), quedan 6*

E- ha quedan 6 ...

Estrategia 2 para el problema de cambio resta (problema 5, galleta): Identificación del todo y las partes, y conteo mental.

Descripción: Mencionar un número de tamaño menor al del conjunto inicial, y diferente al de los mencionados en los datos.

Li. (6,7) menciona su respuesta (cinco) imprecisa, y al pedirle mostrar su estrategia primero forma el todo (coloca nueve dulces) y sin usar objetos responde a la pregunta del problema mencionando “cuatro”, refiriéndose a la parte que queda si quitamos tres. Nuevamente se le pide mostrar el procedimiento y lo hace usando objetos.

(Li. 6,7):

L-... mm va a tener 5

E- ¿5? a ver quieres hacerlo todo lo que te platique?

L– (toma un dulce y asiente con la cabeza) ¿Usando los dulces?

E- *sí*

L- *(saca uno por uno 9 dulces y los va colocando alrededor de la galleta diciendo cada vez un número) 1,2,3,4,5,6,7,8,9 nueve y quedan 1,2,3,4,5 (numera los dulces que quedan dentro de la caja, señalando uno a la vez)*

E - mjm, oye y si de esos que tiene la galleta nos comemos 3 dulces ¿cuántos va a tener entonces?

L- mmm, 4

E- a ver enséñame cómo …

L- 1,2,3,4,5,6,7,8 (numera los dulces de la galleta en voz baja, pausa) ¿cuántos quedan? (observa la galleta y dulces y sostiene la galleta) quedannn 5

E- ¿5? ¿Cómo le hiciste para saber que quedan 5?

L- porque yo pensé

E- a ver ¿me enseñas con los dulces todo lo que pensaste?

L- (numera los dulces de la galleta tocando cada uno) 1,2,3,4,5,6,7,8,9, nueve, nueve dulcecitos

E- 9 dulcecitos., y cuando, y si yo me como 3 ¿cuántos va a tener?

L- va a tener, (pausa) tenía 7

E- *a ver cómo va a ser eso ¿me enseñas?*

L- (quita 3 dulces de la galleta, uno por uno) 3 dulces, aquí están los 3 dulces (me los entrega)

E- *¿y luego*? - (numera los dulces que quedan en la galleta, tocando cada uno) 1,2,3,4,5. Cinco.

Estrategia 3 para el problema de cambio resta (problema 5, galleta): Formación del todo y de las partes y conteo mental.

Descripción: Formar un conjunto inicial, retirar un subconjunto de tamaño específico y calcular.

Ro. (6,10) usa sus dedos para formar el conjunto de nueve, le quita un conjunto de tres y dice su respuesta (ocho). Al explicar su estrategia repite esas acciones y autocorrige su respuesta ("que diga son seis").

(Ro. 6,10):

R-*... (a punto de tomar los dulces del recipiente, pero los deja) 9 dulces (muestra 5dedos) y nos comemos 3 dulces de la galleta (muestra 3 dedos de la otra mano) 9 (extiende 10 dedos), 3 (dobla un dedo, luego dobla otros 3 de la misma mano) 8*

E -¿cómo*?*

R- *sí porque 9 (muestra 9 dedos) le quitamos 3 (dobla 3 de los 9 dedos extendidos) que diga son seis*

Estrategia 4 para el problema de cambio resta (problema 5, galleta): Formación del todo y las partes y conteo con apoyo visual.

Descripción: Formar un conjunto inicial, separar visualmente un subconjunto de ese total y contar los objetos que quedan.

Ka. (5,3) forma un conjunto de nueve y sin manipular más los objetos dice como respuesta una cantidad menor (seis). Cuando explica su estrategia señala cada una de las dos partes diferenciandolas (“estos no y estos sí”) e identifica la cantidad que se retira (“eran tres”).

(Ka. 5,3):

E-... ¿no sabes?

K- *(niega con la cabeza)*

E- ¿quieres hacerlo? ¿hacer lo que yo voy platicando?

K- *bueno*

E- a ver entonces primero tiene 9 ...

K- *(en silencio empieza a colocar dulces uno por uno sobre la servilleta)*

E- primero tiene 9

K- *(coloca hasta 9 dulces sobre la mesa uno por uno, en silencio)*

E- oye y si te comes tres ¿cuántos va a tener?

K- *(observa los dulces en silencio) 6*

E- ah ¿sí? A ver, ¿cómo sabes que 6?

K- *porque conté, estos no los conté (señala algunos dulces del lado derecho) y estos sí (señala dulces del lado izquierdo)*

E- ha porque estos no los contaste y estos sí (señalo algunos de su derecha y luego de su izquierda) ¿cuántos son los que si contaste? ¿Me dijiste 6?

K- *(asiente con la cabeza)*

E- ¿y los que no contaste?

K- *son 3 (mira hacia la ventana)*

E- y ¿cómo sabias que estos no tenias que contarlos?

K- *por que supe que eran 3*

Estrategia 5 para el problema de cambio resta (problema 5, galleta): Formación del todo y de las partes y conteo total.

Descripción: Formar un conjunto inicial, retirar objetos hasta haber quitado una cantidad específica, o bien retira un subconjunto, y contar el total de objetos que quedan .

Fe. (6,3) manipula objetos y menciona un resultado (siete). Al mostrar su estrategia detenidamente, forma un conjunto de siete y le retira dos.

(Fe. 6,3):

F – *7 (mirando sus manos bajo la mesa a la vez que mueve sus dedos)*

E - 7 , a ver, ¿cómo le hiciste, haces para saber?

F– *así (muestra 7 dedos y enseguida dobla algunos de una sola vez)*

E - ¿cuánto tienes primero? (interrumpo su acción)

F– *9 (muestra 9 dedos)*

E- ¿y luego?

F– *7 (muestra 7 dedos)*

E- ¿y cuántos doblaste?

F– *dos (observa su mano derecha)*

E – mmm ¿son los que nos comimos?

F– *(asiente con la cabeza y sin bajar sus manos)...*

Estrategia 6 para el problema de cambio resta (problema 5, galleta): Formación del todo, conteo total, retirar y agregar partes.

Descripción: Formar un conjunto inicial, contar el total de objetos, retirar una cantidad específica de objetos y agregar otra cantidad de objetos a ese conjunto inicial.

Lo. (4,10) responde mencionando una cantidad que no corresponde con los datos del problema (diez), y al explicar la estrategia forma primero un conjunto de siete diciendo “ocho”, se le replantea el problema y responde “cuatro” le retira cuatro objetos dejando tres y enseguida le agrega dos, aunque al final no menciona un resultado exacto (“…quedaron esos”).

(Lo. 4,10):

E-... ¿cuántos dulces va a tener?

L- *10*

E- ¿10? A ver ¿cómo es eso?

L– *(en silencio coloca dulces en la galleta uno por uno)*

E- ¿cuántos tiene?

L– *(señala cada uno, conforme dice los números, sin que se logre observar exactamente cuales señala) 1,2,3,4,5,6,7*

E – 7 oye ¿qué pasaría si nos comemos 3? ¿cuántos va a tener?

L- *(señala algunos dulces uno por uno murmurando)... 8*

E- *¿8? A ver ¿qué tal si lo hacemos?* - ... ¿qué pasa entonces cuando nos comamos 3 dulces de la galleta? ¿cuántos va a tener?

L– *4*

E– a ver ¿cómo es eso?

L– *(retira algunos dulces y los sostiene, quedando 3 dulces en la galleta) va a tener así*

E- ¿va a tener así? ¿y cuanto es así?

L– *le ponemos otro (coloca 2 de los dulces que sostiene en la mano)*

E – a ver ¿cómo?

L– *porque nos comemos uno y se quedaron esos...*

TABLA 7. Estrategias encontradas para el problema de CAMBIO – RESTA (problema 5, galleta), y niños que las emplean.

ESTRATEGIA	PARTICIPANTES	EDAD
1. Hecho numérico.	7.Vi	5,6
2. Identificación del todo y las partes, y conteo mental.	6.Da 12.Zi 14.Ka	5,4 6,6 6,1

	15.Li 17.Jo 20.Ed	6,7 6,4 6,4
3. Formación del todo y de las partes y conteo mental.	18.Ro	6,10
4. Formación del todo y las partes y conteo con apoyo visual.	2.Ev 5.Kar 8.Os 11.Da	5,5 5,3 5,0 6,4
5. Formación del todo y de las partes y conteo total.	1.An 4.Pa 9.Ha 10.Ed 13.Br 16.Pa 19.Fe	5,4 4,6 4,11 5,8 6,7 6,8 6,3
6. Formación del todo, conteo total, retirar y agregar partes.	3.Lo	4,10

3.1.4. ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN PARA LOS PROBLEMAS DE IGUALACIÓN

3.1.4.1. IGUALACIÓN RESTA AGREGANDO. PROBLEMA 6. TORNILLOS.

¿Cómo le hacemos para que este señor (6) tenga igual de tornillos que él (8)?". El problema se presenta con objetos, algunos en miniatura.

Se encontraron cuatro categorías de estrategias (Tabla 8).

Estrategia 1 para el problema de igualación resta agregando (problema 6, tornillos): Identificación del todo y de las partes, y conteo mental.

Descripción: Proponer agregar al conjunto menor una cantidad específica. Incluso para demostrarlo representa el resultado final formando uno o ambos conjuntos con la cantidad dada e incluir la cantidad que se propone agregar.

Ka. (5,3) sugiere agregar tres al conjunto de seis (que es el menor). Explica que eso lo sabe por que los contó, así que se le pregunta para indagar más de su procedimiento, hace la demostración colocando nueve objetos al que antes tenía seis, y diciendo los números hasta el nueve.

(Ka. 5,3):

K- *... ¿cuántos son? No seríannn 11 (dice en voz muy baja)*

E- *...*

K - *(toma un tornillo) ¿cómo dijiste que tienen?*

E- te lo voy a platicar otra vez...

K- *poniendo otros 3 (...)*

E- ¿poniendo otros 3? ¿dónde? A quién?

K- *(señala al hombre que tendría 6)*

E- ¿a este? ¿cómo le hiciste para saber que aquí tenías que poner otros 3?

K- *porque también los conté*

E- ¿también los contaste? ¿me puedes enseñar cómo?

K- *1,2,3,4,5,6,7,8,9 (saca 9 tornillos uno por uno y los va colocando al sr. "D")*

Estrategia 2 para el problema de igualación resta agregando (problema 6, tornillos): Formación de dos conjuntos identificando las partes, y conteo mental.

Descripción: Formar dos conjuntos, contar cada uno y agregar al menor una cantidad específica, quedando ambos del mismo tamaño.

Os. (4, 11) confirma que se trata de que los dos conjuntos tengan igual cantidad (ocho y ocho). Forma dos conjuntos, diciendo que tienen ocho y seis, aunque las cantidades no coinciden con los objetos que coloca, enseguida le agrega dos al que tiene menos (al de seis) y cuenta el total de ese conjunto desde uno hasta el ocho.

(Oscar. 4,11):

O- *... le deben de poner 8 (señala a 6) y 8 a él (señala a 8)*

E - ah ¿sí? ¿le deben de poner 8 y 8 a él? Oye, y ¿cómo sabemos cómo hacerle? él primero tenia 6 (señalo a 6)

O- *y él después 8 (señala a 8)*

E - y él tenía 8

O- ...

E- oye y si lo vamos haciendo, ¿me enseñas como? con los tornillos... primero tenía 6 y él 8 (señalo a 6 y a 8 respectivamente) a ver ponles sus tornillos que compraron (le acerco el recipiente con tornillos)

O- *(saca 7 tornillos y los coloca junto al señor de 8, toma algunos tornillos) este tiene 8 (uno por uno coloca 7 tornillos al señor de 8) 8 tornillos y él tiene 6 (señala al señor de 6; toma tornillos del recipiente, uno por uno y los va colocando en su mano, al tener 5 los coloca junto al señor de 6) 6 tornillos*

E- 6 tornillos, y ahora ¿que hay que hacer para que tenga igual que él? (señalo al señor de 8)

O- *debemos de sacar más (sostiene el recipiente)*

E- a ver ¿como?

O- *(saca otros 2 tornillos y los coloca al señor que tiene menos)*

E- ¿cuántos sacaste?

O- (*señala cada tornillo conforme dice un número) 1,2,3,4,5,6,7,8*

E- y ahoritita ¿cuántos sacaste?

O- *8 tornillos (sostiene el recipiente)...*

Estrategia 3 para el problema de igualación resta agregando (problema 6, tornillos): Formación de dos conjuntos, identificando las partes y agregar una.

Descripción: Formar dos conjuntos y agregar objetos uno por uno al conjunto menor hasta llegar a una cantidad específica.

Pam. (4,6) forma un conjunto revisando y agregándole hasta que son ocho, después forma un segundo conjunto de seis, (así ya tiene uno de ocho y uno de seis), le agrega un objeto al de seis y cuenta el total (llega a siete), agrega un objeto más y vuelve a contar el total confirmando “ya son ocho”.

(Pam. 4,6):

P- *... (saca los tornillos uno por uno y conforme dice un número los coloca al sr. "D") 1,2,3,4,5 (...) señala cada uno diciendo cada vez un número) 1,2,3,4,5. Falta uno más por que hay 5, y 6 (coloca otro a la derecha de la fila) … ya puse otro 6*

E - ¿otro tornillo?

P- *... 1,2,3,4,5,6 (señala cada vez un tornillo)*

E - ¿te digo cómo dice el cuento?

P- *(asiente)*

E - dice el cuento que él tenia 8 y él 6 (...)

P- *este necesita otros mas (señala al "D")*

E- necesita otros más

P- *porque tiene 1,2,3,4,5,6 (señala nuevamente los tornillos, uno cada vez), tiene 6, necesita 8 (coloca otro tornillo y repasa señalando cada uno) 1,2,3,4,5,6,7 (coloca otro tornillo y vuelve a señalar cada uno diciendo un número) 1,2,3,4,5,6,7,8, ya son 8*

E - ya son 8

P- (*coloca tornillos debajo del señor "Y", y va diciendo números) 1,2,3,4,5,6 son 6*

E- oye, el tiene 6, y el tiene 8

P- *creo que alguien va a ganar*

E- ¿cómo pasa? ¿crees que alguien va a ganar?...

P- (señala al señor "D") él

E- ... como le hacemos para que él tenga igual de tornillos que él (...)

P- *necesita otros más*

E- ¿necesita otros mas?, a ver

P- *(toma otro tornillo, y señala cada uno de los que tiene el sr. "Y", y diciendo cada vez un número) 1,2,3,4,5,6 (coloca otros 2) 7,8, son 8 (observa los que ha colocado) como que no se ven iguales (están más separados los del sr. "Y")*

Estrategia 4 para el problema de igualación resta agregando (problema 6, tornillos): Formación de dos conjuntos y agregar una parte de tamaño inespecífico**.**

Descripción: Formar dos conjuntos y agregar al conjunto menor una cantidad inespecífica.

Lo. (4,10) forma un conjunto de ocho objetos, después forma otro de seis, y agrega cuatro objetos al conjunto menor, sin contar y sin decir algún cardinal, solamente dice que son iguales.

(Lo. 4,10):

L- *...(asiente con la cabeza, y en silencio coloca 8 tornillos a los pies del sr. "D")*

E- ¿esos son sus tornillos?

L- asiente con la cabeza

E- y él tenía tres

L- *(va colocando 5 tornillos)*

E- ¿cuántos tenía? (mientras ella coloca el 3er. Y 4° tornillo)

L- *(no contesta, continúa colocando tornillos)*

E- ¿cuántos son?

L- *(señala 5 tornillos uno por uno conforme va diciendo un número) 1,2,3,4,5,6*

E - ¿y que tal si él nada mas tenia tres? (señalo al "Y")

L- porque … y él poquito

E- ¿el tiene poquitos? (señalo al "Y")

L- (asiente)

E- ¿cómo hacemos para que él tenga igual que él?

L- le ponemos más

E- a ver ¿cómo?

L- (coloca otros 4 tornillos al sr. "Y")

E - ¿así le ponemos más?

L- (asiente con la cabeza) y son iguales

E- y ahora son iguales, aja. Bueno a ver, entonces vamos a guardarlos para ver otra cosa

L- *(guarda los tornillos en la caja tomándolos con sus puños)*

TABLA 8 . Estrategias encontradas para el problema de IGUALACIÓN RESTA AGREGANDO (problema 6, tornillos), y niños que las emplean.

ESTRATEGIA	PARTICIPANTES	EDAD
1. Identificación del todo y de las partes, y conteo mental..	5.Ka 17.Jo 18.Ro 20.Ed	5,3 6,4 6,10 6,4
2. Formación de dos conjuntos identificando las partes y conteo mental.	2.Ev 6.Da 8.Os 14.Ka 19.Fe	5,5 5,4 5,0 6,1 6,3
3. Formación de dos conjuntos, identificando las partes y agregar una.	1.An 4.Pa 7.Ví 10.Ed 11.Da 12.Zi 13.Br 15.Li 16.Pa	5,4 4,6 5,6 5,8 6,4 6,6 6,7 6,7 6,8
4. Formación de dos conjuntos y agregar una parte de tamaño inespecífico.	3.Lo 9.Ha	4,10 4,11

3.1.4.2. IGUALACIÓN RESTA QUITANDO. PROBLEMA 7. DULCES.

“El niño tiene 7 dulces y la niña tiene 5 ¿cómo le hacemos para que ella tenga igual de dulces que él?”. El problema se presenta con material gráfico y objetos.

Se encontraron cinco categorías de estrategias (Tabla 9).

Estrategia 1 para el problema de igualación resta quitando (problema 7, dulces): Identificación del todo y las partes y conteo mental.

Descripción: Proponer que sea retirada una cantidad específica.

Ed. (5,8) sin manipular los objetos menciona las partes y hace una comparación no numérica ("él tiene más y ella menos"). Al preguntarle cómo igualar propone retirarle uno al conjunto mayor "ella tiene cinco y él seis, le quitamos uno" señala al conjunto mayor".

(Ed. 5,8):

Ed- *... él tiene más y ella menos (señala a cada uno)...*

E- entonces ¿cómo le hacemos?

Ed- *¿para que tengan igual?*

E- para que él (señalo al niño) tenga igual que ella (señalo a la niña)

Ed- *le quitamos. Ella tiene 5 (me mira y señala a la niña)*

E– sí

Ed- *y él 6. Le quitamos1. (señala al niño) ...*

Estrategia 2 para el problema de igualación resta quitando (problema 7, dulces): Formación de dos conjuntos, identificar el todo y sus partes y retirar.

Descripción: Formar dos conjuntos y retirar del conjunto mayor una cantidad específica.

Ed. (6,4) forma con objetos un conjunto de siete y otro de cinco, y para igualar sugiere agregar al conjunto menor otro conjunto que también forma ("poniéndole dos"). Al cerrarle la posibilidad de agregar vuelve a hacer la misma propuesta, solo hasta la segunda vez que no se permite agregar entonces le quita al conjunto mayor (quita dos dulces al que tenía siete).

(Ed. 6,4):

Ed-*... 8 (sostiene algunos dulces)*

E - 7 dulces

Ed- *¿Seis? (señala al niño)*

E- A él le dio 5 y a ella 7 (señalo a cada niño)

Ed - *(coloca en su mano un puñado de dulces, uno mas, se cae uno, señala cada uno de los 3 que sostiene, recupera el que se cayó y lo coloca en su mano, coloca otro mas con estos; va a colocarlos al niño, pero antes toma otros dulces y los coloca uno por uno con los que ya tiene, coloca el montón de 7 a la niña, y uno por uno coloca 5 en su mano y los vacía al niño, observa)*

E- ...¿como le podemos hacer para que los dos tengan igual de dulces que él (señalo al niño)?

Ed– *(muestra 2 dedos) Poniéndole 2*

E - ¿A quien?

Ed- *A él (señala al niño)*

E- pero a él le dijeron que ya no coma más

Ed- *(observa)*

E- Solamente...

Ed- *Entonces que se los cambie a ella (señala los dulces a la niña)*

E- ¿Que se los cambie a ella?

Ed- *Aha, para que ya tengan igual (acerca los dulces del niño a la niña)*

E- A ver ¿como?

Ed- *No, no ya, namas que le pongan otros 2*

E - ¿Que le pongan otros 2?. A ver

Ed- *(toma 2 dulces del recipiente y los coloca al niño)*

E- ... les decía, su tía: "no ya no se vale que tomes más dulces, regresa los que sacaste ahorita, ya no te voy a dar más por que esos se los voy a llevar a otros niños, entonces ya no saques más ya no, (señalo los dulces del recipiente) ya no te puedes comer más dulces, sobrino"

Ed- (*toca los dulces del niño y me mira)*

E- "tienes que regresa esos a la tiendita"

Ed- *(regresa los dulces que recién sacó)*

E- Entonces él dice "pero no es justo ¿por qué mi hermana tiene más dulces?, ella debe tener igual de dulces que yo" y le decía "tía, ella debe tener igual de dulces que yo"

Ed- *(observa los dulces del niño; me mira)*

E - Como le hacen, y decía la tía "... ella debe tener igual pero ya no más dulces si por que ..."

Ed- *(a punto de tomar otro dulce)*

E - *(*alejo el recipiente con dulces) a ver ustedes cómo le hacen para que tengan igual que él (señalo al niño)

Ed- *... quitarle 2 (quita 2 dulces a la niña)*

E - Ah, ¿quitarle 2?

Ed- (*los guarda en el recipiente)*

E- Aha, ahora

Ed- *Y ya tienen iguales*

E- Y ya tienen iguales, oye ¿como sabias que tenias que dejar 2?

Ed- *(acerca las caritas entre sí) Porque no, este, luego no sabia que tenia que dejar 2 y no sabia (junta los dulces de ambos niños)*

Estrategia 3 para el problema de igualación resta quitando (problema 7, dulces): Formación de uno o dos conjuntos, identificar solamente una de las partes y la sustrae.

Descripción: Formar uno o dos conjuntos y tomar del conjunto mayor una cantidad específica con la que forma un nuevo conjunto.

Br. (6,7) forma un conjunto de 6, al revisar los datos corrige y forma un conjunto de 7, del cual separa por partes un total de 5 objetos, e identifica el conjunto de 2 que queda, como el que debe quitarse para igualar este conjunto con el de 5.

(Br. 6,7):

B- *... a ver el niño tiene 6 (coloca sobre la mesa un puñado de dulces)*

E- *...el niño tiene 7 (lo señalo)*

B – 7

E- *y la niña tiene 5*

B- *¿ah! Ya sé el niño tiene ¿cuántas?*

E- 7

B- *7 (coloca 7 dulces al niño, uno por uno) Siete. 3,4,5,6,7.. ¡ah! Enton´s le quitamos (retira 2 dulces del niño, uno por uno) también la niña, dijo que tenía 5*

E- 5, la niña tiene 5

B - *(retira otros 2 dulces del niño; toca uno por uno los 4 que ha retirado, y quita otro) enton´s le quitamos, le quitamos 5 y él, él guarda estos 2 dulces en su casa y estos (retira los 2 que tenía el niño, los coloca detrás del recipiente, y le acerca el grupo de 5) la niña y él ya tienen 5 (le acerca a la niña un montoncito que sobró del puñado de dulces que sacó del recipiente al inicio)*

Estrategia 4 para el problema de igualación resta quitando (problema 7, dulces): Formación de dos conjuntos, retirar hasta y conteo.

Descripción: Formar dos conjuntos, retirar del conjunto mayor hasta dejar una cantidad específica y contar los objetos del conjunto al que se le retiró.

Pa. (6,8) forma dos conjuntos, uno de cinco y otro de siete, verifica la cantidad del conjunto menor y retira del mayor uno por uno contando cada vez el total de este conjunto y deja de quitar hasta que el total son cinco.

(Pa. 6,8):

P- *... ¿Ella cuántos tiene?*

E- *5*

P- *¿Cinco? 1,2,3,4,5 (toma uno por uno 5 dulces del recipiente, y los coloca en montoncito a la niña)*

E- Mjm y él tiene 7

P- *1,2,3,4,5,6, ¿Seis? (toma uno por uno y los coloca en su palma de la mano)*

E– 7

P- *(coloca otro) 7 (coloca el montoncito al niño)*

E- ahora ¿cómo le podemos hacer para que tenga él tenga igual de dulces que ella? (señalo a cada niño)

P- *(señala cada dulce de la niña, me mira). Cinco (retira uno del niño y señala uno por uno los que quedan al niño) 1,2,3,4,5, (retira uno que quedó sin señalar, y vuelve a señalar los que quedan) 1,2,3,4,5*

E- Aja, ¿ahora ya tienen igual?

P- ajá

Estrategia 5 para el problema de igualación resta quitando (problema 7, dulces): Formación de dos conjuntos y traspasar.

Descripción: Formar dos conjuntos diferentes y pasar objetos de uno a otro.

Fe. (6,3) forma un conjunto de cinco y otro de siete, sugiere agregar al conjunto menor, pero al cerrrarle en dos ocasiones la posibilidad de agregar para igualar ("pero su mamá le dice…" "es que por qué…") pasa dos objetos del conjunto mayor al conjunto menor (al de cinco). Se le replantea el problema y de nuevo pasa objetos del conjunto mayor al menor ("le damos" –pasa cinco dulces del conjunto mayor al menor-) .

(Fe. 6,3):

F- *... (coloca a la niña 2 dulces, mientras voy preguntando) ...*

E.- ... A ver él tiene 7 y ella 5

F- *(asiente con la cabeza y uno por uno toma dulces, coloca otros 3 a la niña; me mira), él (voz sumamente baja*

E- El 7

F- *(toma dulces uno por uno y los va colocando al niño hasta 7)*

E- mjm,, oye ¿y ahora que hacemos para que los dos tengan igual que ella? (señalo a la niña)

F- *Le ponemos*

E-¿A quien?

F- *(señala a la niña)*

E- ah pero su mamá le dice "ya no puedes comer más ... estos van a ser para otro día" (alejo y cubro el recipiente con dulces) y que los guarda..." , ... si ella tiene 5 y él 7 (señalo a los niños), ... ¿Cómo le hacemos para que tenga igual que ella?

F- *Le ponemos*

E - ¿a quien?

F- *(señala a la niña)*

E - a ver tu hazle

F- *(a punto de tomar los dulces)*

E- Ya cerraron la caja de los dulces ...

F- *No*

E- ... “es que por qué mi hermano tiene 7 y yo 5, los dos debemos tener igual que yo, así como los que yo tengo”, ¿como le hacemos para que no se enoje?

F- *Le damos*

E- a ver, a ver, tú hazle cuantos, ¿como le damos?... a ver tu dale

F- *(... quita al niño 2 dulces y se los coloca a la niña)*

E- ... y ahora ¿Cuántos le diste?

F– *2*

E - Le diste 2 mjm, y entonces ahora ¿cuantos tiene ella?

F- (mira los dulces de la niña detenidamente) 7

E - 7¿y él? ...

F- ¿Este? (señala y observa los dulces del niño) 5

E - Tiene 5, ahora se va a enojar él y dice “no, no, no porque nada más me dieron 5 y a ella 7” y dice la mamá “... no puedes comer más ¿eh?”. ¿Cómo le hacemos para que no se enoje ahora el niño? ......su mamá le dice, “yo nada más dije que comieras 5, no puedes comer más” (en voz baja), ... “nada más puedes comer 5 dulces niña, no comas más, el doctor te dijo que solamente 5”. ¿Que hacemos?... ¿No?, oye van a regañar a la niña eh, porque mira, cuántos dulces tiene, y la mamá le dijo “nada más 5, nada más”

F- *Le damos (señala al niño)*

E - ¿Le damos?, a ver

F- *(pasa 5 dulces de la niña al niño, uno por uno) ...*

TABLA 9. Estrategias encontradas para el problema de IGUALACIÓN – RESTA (problema 7, dulces) y niños que las emplean.

ESTRATEGIA	PARTICIPANTES	EDAD
1. Identifi cación del todo y las partes y conteo mental.	6.Dani 10.Edu	5,4 5,8
2. Formación de dos conjuntos, identificar el todo y sus partes y retirar.	2.Ev 7.Víc 9.Ha 20.Edg	5,5 5,6 4,11 6,4
3. Formación de uno o dos conjuntos y tomar cantidad específica.	5.Kar 13.Bre 17.Jo	5,3 6,7 6,4

4.	Formación de dos conjuntos, identificar solamente una de las partes y la sustrae.	1.And 3.Lo 4.Pam 11Dana 12Zi 14Kar 15.Liz 16.Pau 18.Ro	5,4 4,10 4,6 6,4 6,6 6,1 6,7 6,8 6,10
5.	Formación de dos conjuntos y traspasar.	8.Os 19.Fe	5,0 6,3

3.2. ORGANIZACIÓN DE ESTRATEGIAS POR NIVELES

Las diferentes estrategias empleadas por los niños fueron revisadas, retomando los planteamientos de Moser (1989) acerca de los niveles de estrategias, y se organizaron en cuatro niveles, de acuerdo a las características de los procesos observados (Tabla 10):

I. Representación concreta.
II. Conteo a partir de.
III. Estrategia mental a partir de la representación concreta.
IV. Estrategia mental directa.

Cada uno de estos niveles es descrito a continuación:

I. Representación concreta.- Consiste en la formación inicial de uno o más conjuntos, empleándolos para representar las situaciones planteadas, es decir, realizando acciones sobre los objetos concretos. Para obtener el resultado, puede o no realizar conteo iniciando en 1.

a) Representación simple.- No realiza conteo, solamente menciona algún(os) cardinal(es).
b) Representación y conteo.- Después de formar la representación, realiza conteo total desde 1.

II. Conteo a partir de.- El niño inicia el conteo en un punto diferente a 1. En ocasiones puede hacer uso de objetos concretos para realizar este conteo.

III. Estrategia mental a partir de representación concreta.- Emplea objetos para formar uno o más conjuntos iniciales y a partir de esto evoca un hecho numérico o emplea el cálculo, para dar respuesta al problema.

IV. Estrategia mental directa.- Evoca un hecho numérico básico, o bien, emplea el cálculo sin necesidad de utilizar objetos:

a) comparación mental
b) conteo perceptual
c) hecho numérico
d) cálculo- no requiere de la construcción física de los conjuntos para realizar la operación.

TABLA 10. Organización por niveles, de las categorías de estrategias empleadas para la solución de cada situación aditiva.

PROBLEMA	**NIVEL IV Estrategia mental.**	**NIVEL III Estrategia mental basada en representación concreta.**	**NIVEL II Conteo a partir de.**	**NIVEL I Representación Concreta.**
1. Compara-ción resta. PECES		1.Formación de dos conjuntos identificando el conjunto mayor y la diferencia		2. Formación de dos conjuntos identificando el conjunto mayor sin establecer la diferencia. 3.Referencia a un cardinal diferente y la formación de un conjunto.
2. Combina-ción suma. ANIMALES	1. identificación de las partes y del todo mediante conteo mental.	2.Formación de las partes e identificación mental del todo.	3.Formación mental de las partes y conteo a partir de, para identificar el todo.	5.Formación de dos conjuntos (con los dedos) y conteo del total.

			4.Formación de un conjunto y conteo a partir de.	6.Formación de un conjunto inventando los elementales y conteo total. 7.Formación de dos conjuntos elementales e identificación del todo con ayuda.
3. Combina-ción suma. FLORES				1.Formación de las partes y conteo total para identificar el todo. 2.Identificación de las partes y conteo total para identificar el todo con ayuda. 3.Formación de las partes y referencia a una de ellas como el todo. 4.No identifica las partes y se enfoca en un todo inventado.
4. Cambio Suma. PLATOS	1.Calculo mental del resultado del cambio.	2.Formación del conjunto inicial y agrega el cambio para conocer el conjunto final.		3.Identificación del conjunto inicial, le agrega el cambio y conteo total. 4.Identificación del conjunto inicial y el cambio, y conteo total.
5. Cambio Resta. GALLETA	1.Hecho numérico. 2.Identificación del todo y las partes, y conteo mental.	3.Formación del todo y de las partes y conteo mental.		4.Formación del todo y las partes y conteo total con apoyo visual. 5.Formación del todo y de las partes, y conteo total. 6.Formación del todo, conteo total, retirar y

				agregar partes.
6. Igualación Resta. TORNILLOS	1.Identificación del todo y de las partes, y conteo mental.	2.Formación de dos conjuntos identificando las partes y agregar una de las partes.	3.Formación de dos conjuntos, identificando las partes y agregar una de las partes.	4.Formación de dos conjuntos y agregar una parte de tamaño inespecífico.
7. Igualación Resta. DULCES	1.Identificación del todo y las partes y conteo mental.	2.Formación de dos conjuntos, identificar el todo y sus partes y retirar.		3.Formación de uno o dos conjuntos, identificar el todo y sus partes y retirar. 4.Formación de dos conjuntos, retirar hasta y conteo. 5.Formación de dos conjuntos y traspasar.

3.3. ESTRATEGIAS EMPLEADAS PARA CADA TIPO DE PROBLEMA, Y SUS IMPLICACIONES

Después de haber organizado en categorías las estrategias observadas en cada problema aditivo, se analizó cada una de ellas para identificar las implicaciones de estas en relación con el pensamiento matemático de los niños, tal como se describe en las tablas 11 a la 17.

Se inicia con las estrategias de mayor nivel de complejidad, hasta llegar a las más sencillas, de tal manera que se toma en cuenta también en cuál de los cuatro niveles de estrategias planteados están ubicadas.

3.3.1. PROBLEMA DE COMPARACIÓN

3.3.1.1. Tipo de problema: comparación resta.

Problema 1. Peces. *“Luis tiene 5 peces, Mari tiene 8, ¿Quién gana de peces? ¿Por cuántos peces gana?”.*

TABLA 11. Implicaciones de cada estrategia, relacionadas con el pensamiento matemático, para el problema de comparación resta.

NIVEL	ESTRATEGIA	IMPLICACIONES relacionadas con el pensamiento matemático
III. ESTRATEGIA MENTAL A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN CONCRETA	**1. Formación de dos conjuntos identificando el conjunto mayor y la diferencia.** Formar dos conjuntos iniciales y mencionar como respuesta al problema un hecho numérico conocido.	Aunque recurre a la representación física de los dos conjuntos, resuelve mencionando un hecho numérico; compara y menciona el tamaño de la diferencia entre ambas cantidades (3), incluso menciona la inversa de la relación (8-5=3), cinco para ocho igual a tres).
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	***2.* Formación de dos conjuntos, identificando el conjunto mayor sin establecer la diferencia.** Formar dos conjuntos diferentes y como respuesta al problema mencionar el cardinal del conjunto mayor.	Necesita manipular directamente los objetos para representar y comparar los conjuntos; No intenta la relación que se plantea en la pregunta, sólo realiza la comparación de los dos conjuntos (8 mayor que 5), logrando ubicar al de mayor tamaño, sin considerar el tamaño de la diferencia entre uno y otro, por lo que como respuesta al problema se limita a mencionar el cardinal mayor.
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	**3. Referencia a un cardinal diferente y formación de un conjunto.** Mencionar un cardinal diferente a los que contiene el problema y posteriormente formar un conjunto. La respuesta al problema es el cardinal mencionado.	No comprende la relación planteada en la pregunta, solamente puede representar un conjunto con objetos, o bien, no representa ninguno, mencionando como respuesta una cantidad al azar (en el ejemplo, más que tratarse de un hecho numérico, retoma los datos del problema pero hay confusión respecto a las cantidades).

3.3.2. PROBLEMAS DE COMBINACIÓN (PARTE-PARTE-TODO)

3.3.2.1. Tipo de problema: combinación suma (parte – parte – todo).

Problema 2. Animales. *"Si se salen del corral 3 gallinas y cuatro patos ¿cuántos animalitos van a estar afuera?"*

TABLA 12. Implicaciones de cada estrategia, relacionadas con el pensamiento matemático, para el problema de combinación suma.

NIVEL	ESTRATEGIA	IMPLICACIONES relacionadas con el pensamiento matemático
IV.ESTRATEGIA MENTAL	**1. Identificación de las partes y del todo mediante conteo mental.** Mencionar el resultado de unir las dos cantidades dadas.	Comprende la relación planteada, une mentalmente las cantidades proporcionadas, para obtener el total (3+4=7).
III. ESTRATEGIA MENTAL A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN CONCRETA	**2. Formación de las partes e identificación mental del todo.** Formar dos conjuntos, unirlos físicamente alineando los objetos y mencionar un hecho numérico.	Considera que se trata de dos subconjuntos y que puede combinarlos, pero para ello requiere primero manipular cada conjunto y enseguida, para visualizarlos como un conjunto único, procede a arreglar los objetos realizando la combinación físicamente; es entonces cuando intenta recurrir a un hecho numérico (si bien este hecho puede resultar erróneo).
II. CONTEO A PARTIR DE	**3. Formación mental de las partes y conteo a partir de, para identificar el todo.** Formar dos conjuntos sin separarlos físicamente del conjunto inicial, y contar iniciando desde el segundo conjunto en un número	Comprende que se trata de una relación de combinación. Aunque los dos conjuntos estén dentro del gran total, mantiene la idea clara de cada uno y logra combinarlos sin necesidad de separarlos físicamente de ese gran total, si bien se apoya señalando cada elemento del segundo conjunto únicamente, lo cual indica que aún no maneja del todo las cantidades mentalmente.

	diferente de uno para conocer el total.	
II. CONTEO A PARTIR DE	**4. Formación de un conjunto y conteo a partir de.** Formar un primer conjunto y contar a partir de, hasta haber agregado una cantidad específica; el último número mencionado es el resultado.	Sabe que se trata de combinar los conjuntos, y para ello mantiene el esquema mental de cada uno, lo que le permite contar a partir de, y obtener el resultado sin tener que formar físicamente cada conjunto por separado.
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	**5. Formación de dos conjuntos (con los dedos) y conteo del total.** Formar dos conjuntos físicamente y contar el total de objetos.	Requiere de la representación física de cada subconjunto, y posteriormente los combina contando desde uno debido a que considera que esta combinación implica la formación de un conjunto totalmente nuevo.
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	**6. Formación de un conjunto inventando los elementales y conteo total.** Formar un solo conjunto con dos tipos de elementos, sin considerar la cantidad de cada conjunto, y contar el total de objetos.	Comprende que se trata de una combinación, ubica dentro del gran total los conjuntos a combinar sin necesidad de apartarlos físicamente: Cuenta el total de objetos y hay inconsistencia en las cantidades que maneja, excepto en el total, lo cual muestra que aún sin manejar cantidades exactas (tamaños de las partes), sabe que combinará dos tipos de elementos; y siempre mantiene un mismo total de elementos combinados.
I. REPRESENTACION CONCRETA	**7. Formación de dos conjuntos elementales e identificación del todo con ayuda.** Formar dos conjuntos, mencionar como respuesta el cardinal de cada uno. Si se cambia la cualidad de los conjuntos, contar el total de objetos.	No considera la posibilidad de que ambos subconjuntos puedan integrarse y formar un solo conjunto mayor. No puede abandonar la etiqueta de cada subconjunto y tomar en cuenta la cualidad que tienen en común; siempre son dos partes del conjunto “animales” y no un gran conjunto, (un todo) . Cuando se le plantean como elementos solos de un gran conjunto (figuritas) y no como 2 partes (patos y gallinas), entonces logra integrarlos como un gran

		conjunto, realizando el conteo total de objetos.

3.3.2.2. Tipo de problema: combinación suma (parte – parte – todo).

Problema 3. Flores. *“Hay 6 flores verdes y 4 rojas ¿cuántas son todas las que hay en la tienda?”*

TABLA 13. Implicaciones de cada estrategia, relacionadas con el pensamiento matemático, para el problema de combinación suma.

NIVEL	ESTRATEGIA	IMPLICACIONES relacionadas con el pensamiento matemático
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	**1. Formación de las partes y conteo total para identificar el todo.** Formar dos conjuntos y contar el total de objetos desde uno.	Comprende que se trata de una relación de combinación. Requiere representar físicamente los elementos mencionados (utiliza los objetos) , colocando unos cerca de otros. Finalmente, al considerar que la combinación de estos dos conjuntos formará el conjunto final, cuenta el total de objetos .
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	**2. Formación de las partes y referencia a una de ellas como el todo.** Formar dos conjuntos, mantenerlos separados físicamente y mencionar el cardinal de alguno de ellos como respuesta.	No capta la relación de combinación. Hay dificultad para integrar los dos subconjuntos en uno solo; tiende a dividir mentalmente en subconjuntos, y cuando se le hace referencia al todo, se centra más bien en el último subconjunto que ha manipulado o mencionado.
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	**3. Identificación de las partes y conteo total para identificar el todo con ayuda**. Formar dos conjuntos y mencionar como respuesta el cardinal	Aunque representa físicamente los conjuntos, se le dificulta la idea de que puedan combinarse para formar un solo conjunto que sería “todo”;es decir, aún cuando se encuentran mezclados los elementos, sigue teniendo prioridad la cualidad del conjunto inicial (color) y no la característica general (flores). Cuando

	de cada uno de estos. Ante cuestionamiento contar el total de objetos.	combina ambos conjuntos para formar uno solo, el nombre "todos" lo aplica a cada subconjunto y no al conjunto en el que ambos se combinan, solo cuando deja de mencionársele la cualidad de cada subconjunto y se menciona únicamente la cualidad general, entonces sí considera el total de esa combinación.
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	**4. No identifica las partes y se enfoca en un todo inventado.** Formar un solo conjunto con dos tipos de elementos indistintamente, y contar el total de objetos.	Comprende que los dos diferentes tipos de elementos se pueden combinar para formar un nuevo conjunto y obtener la respuesta al problema, aunque al representarlo físicamente no considere las cantidades dadas (incluso al inicio uno de los niños no realiza conteo alguno, solo forma el conjunto que incluye los elementos mencionados en la situación, sin tomar en cuenta que no corresponden las cantidades que menciona, con las cantidades que utiliza). No combina dos partes, mas bien combina diversos elementos.

3.3.3. PROBLEMAS DE CAMBIO O TRANSFORMACIÓN

3.3.3.1. Tipo de problema: cambio o transformación suma.

Problema 4. Platos. *"Si ponemos 7 platos y después le ponemos otros 2 ¿cuántos platos tendrá la mesa?*

TABLA 14. Implicaciones de cada estrategia, relacionadas con el pensamiento matemático, para el problema de cambio o transformación suma.

NIVEL	**ESTRATEGIA**	**IMPLICACIONES relacionadas con el pensamiento matemático**
IV.ESTRATEGIA MENTAL	**1. Cálculo mental del resultado del cambio.**	Comprende la relación planteada y sabe que el resultado debe ser mayor a cualquiera de los dos

	Como respuesta al problema menciona una cantidad igual o semejante a la suma de ambos conjuntos.	conjuntos, si bien en ocasiones el calculo que hace es impreciso.
III. ESTRATEGIA MENTAL A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN CONCRETA	**2. Formación del conjunto inicial y agrega el cambio para conocer el conjunto final.** Después de haber formado un primer conjunto aplica el calculo mental para obtener el resultado.	Comprende la relación planteada. Necesita representar físicamente la primera parte del problema, para de ahí pasar a la utilización de una estrategia mental como el cálculo.
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	**3. Identificación del conjunto inicial, le agrega el cambio y conteo total.** A un conjunto inicial agregar objetos uno por uno, conforme va contando a partir de.	Capta y representa físicamente la relación planteada, ejemplifica la transformación conforme se va dando, tomando en cuenta que el conjunto inicial solo cambia en la medida que se le agrega, por lo que no reinicia el conteo desde uno sino a partir de la cantidad que ya tiene. Al mismo tiempo considera que esa transformación depende de la cantidad que se le agrega.
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	**4. Identificación del conjunto inicial y el cambio, y conteo total.** A un conjunto inicial agregar una cantidad específica (un segundo conjunto) y contar el total de objetos.	Comprende la situación de cambio agregando y requiere representar en forma concreta los elementos del problema para relacionarlos agregando un conjunto al otro, ese cambio implica para el niño la formación de un conjunto totalmente nuevo, por lo que necesita contar todo desde uno para dar una respuesta a la situación planteada.

3.3.3.2. Tipo de problema: cambio o transformación resta.

Problema 5. Galleta. "Si en esta galleta ponemos 9 dulces y nos comemos 3 ¿cuántos dulces va a tener la galleta?"

TABLA 15. Implicaciones de cada estrategia, relacionadas con el pensamiento matemático, para el problema de cambio o transformación resta.

NIVEL	ESTRATEGIA	IMPLICACIONES relacionadas con el pensamiento matemático
IV. ESTRATEGIA MENTAL	**1. Hecho numérico.** Mencionar un hecho numérico como respuesta al problema.	Comprende que deberá transformar el conjunto inicial decrementando, lo cual lleva a cabo aplicando un hecho numérico para dar el resultado (aunque maneja cantidades diferentes a las que se le proporcionan).
IV. ESTRATEGIA MENTAL	**2. Identificación del todo y las partes, y conteo mental.** Mencionar un número de tamaño m,enor al del conjunto inicial, y diferente al de los mencionados en los datos.	Capta la relación y sabe que implica una disminución en el tamaño del conjunto inicial. Incluso puede hacer una demostración clara del proceso que sigue para llegar a la solución del problema.
III. ESTRATEGIA MENTAL A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN CONCRETA	**3. Formación del todo y de las partes y conteo mental.** Formar un conjunto inicial, retirar un subconjunto de tamaño específico y calcular.	Detecta la situación de cambio, por lo que considera que debe retirar objetos al conjunto inicial. En forma mental realiza la sustracción de elementos y mediante el calculo llega a conocer la respuesta a la situación.
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	**4. Formación del todo y las partes y conteo con apoyo visual.** Formar un conjuinto inicial, separar visualmente un subconjunto de ese total y contar los objetos que quedan.	Ubica la situación de cambio. No requiere manipular los objetos pero sí que estén presentes para realizar conteo perceptual y así ubicar los elementos a retirar del conjunto inicial, lo que implicará un cambio para dicho conjunto. Procede a contar visualmente los objetos que permanecerán en el conjunto que ya ha cambiado, para así dar respuesta al problema planteado.
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	**5. Formación del todo y de las partes, y conteo total.** Formar un conjunto inicial,	Capta la situación de cambio, por lo que considera que debe retirar objetos al conjunto inicial, realiza la sustracción de elementos y cuenta físicamente

	retirar objetos hasta haber quitado una cantidad específica, o bien retirar un subconjunto y contar el total de objetos que quedan.	los objetos que permanecen en el conjunto inicial.
I. REPRESENTACIÓN CONCRETA	**6. Formación del todo, conteo total, retirar y agregar partes.** Formar un conjunto inicial, contar objetos, retirar una cantidad específica de objetos y agregar otra cantidad de objetos a ese conjuinto inicial.	Comprende la situación planteada, necesita representar físicamente el conjunto inicial y al considerar claramente que debe retirar de este mismo una cantidad, forma un subconjunto con elementos del conjunto inicial, mismos que elimina físicamente, y necesita revisar el tamaño del conjunto después de que ha sido transformado, por lo que procede a contar los elementos que permanecen.

3.3.4. PROBLEMAS DE IGUALACIÓN

3.3.4.1. Tipo de problema: igualación resta agregando.

Problema 6. Tornillos. "Este señor tiene 8 tornillos, y este otro tiene 6 tornillos ¿cómo le hacemos para que los dos señores tengan igual de tornillos que él (el que tenía 8)?".

TABLA 16. Implicaciones de cada estrategia, relacionadas con el pensamiento matemático, para el problema de igualación resta.

NIVEL	ESTRATEGIA	IMPLICACIONES relacionadas con el pensamiento matemático
IV.ESTRATEGIA MENTAL	**1. Identificación del todo y de las partes, y conteo mental.** Proponer agregar al conjunto menor una cantidad específica.	Comprende que se trata de igualar conjuntos agregando. Lleva a cabo la representación mental de los conjuntos, sabe que necesita agregar para igualarlos y realiza calculo mental para averiguar la

	Incluso para demostrarlo representa el resultado final formando uno o ambos conjuntos con la cantidad dada e incluir la cantidad que se propone agregar.	cantidad a agregar.
III.ESTRATEGIA MENTAL A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN CONCRETA	**2. Formación de dos conjuntos identificando las partes y conteo mental.** Formar dos conjuntos, contar cada uno y agregar al menor una cantidad específica, quedando ambos del mismo tamaño.	Capta que se trata de una situación de igualación, le es claro que necesita agregar para igualar con el conjunto mayor, y se apoya en un hecho numérico conocido para dar respuesta al problema, si bien necesita representar físicamente la situación planteada y el hecho numérico.
II. CONTEO A PARTIR DE	**3. Formación de dos conjuntos, identificando las partes y agregar una de las partes.** Formar dos conjuntos y agregar objetos uno por uno al conjunto menor hasta llegar a una cantidad específica.	Sabe que se trata de igualar los conjuntos agregando, pero necesita representar físicamente los elementos y representar también los cambios que van ocurriendo en el conjunto al que le va agregando, aún sin tener una idea clara de cuantos agregará en total, toma en cuenta la cantidad límite a la que debe llegar para lograr la igualación.
I.REPRESENTACIÓN CONCRETA	**4. Formación de dos conjuntos y agregar una parte de tamaño inespecífico.** Formar dos conjuntos y agregar al conjunto menor una cantidad inespecífica.	No ha captado claramente de qué se trata la situación de igualación, mas bien la entiende como una situación de cambio agregando para el conjunto menor, así que identifica qué conjunto es menor, sabe que debe agregarle pero no intenta indagar qué cantidad debe agregar específicamente, para realmente igualar los conjuntos. No concibe que "igual" se refiere a tener la misma cantidad en ambos conjuntos.

3.3.4.2. Tipo de problema: igualación resta quitando.

Problema 7. Dulces. *"El niño tiene 7 dulces y la niña tiene 5 ¿cómo le hacemos para que los dos tengan igual de dulces que ella?"*

TABLA 17. Implicaciones de cada estrategia, relacionadas con el pensamiento matemático, para el problema de igualación resta.

NIVEL	ESTRATEGIA	IMPLICACIONES relacionadas con el pensamiento matemático
IV.ESTRATEGIA MENTAL	**1. Identificación del todo y las partes, y conteo mental.** Proponer que sea retirada una cantidad específica.	Capta la situación de igualación - decremento. Compara y diferencia el tamaño de los conjuntos mentalmente; se apoya en el calculo para proponer la acción de decremento y la cantidad a decrementar (no obstante que no recuerde las cantidades exactas planteadas al inicio) sin tener que manipular físicamente los objetos.
III. ESTRATEGIA MENTAL A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN CONCRETA	**2.Formación de dos conjuntos, identificar el todo y sus partes, y retirar.** Formar dos conjuntos y retirar del conjunto mayor una cantidad específica.	Comprende que es un problema de igualación – decremento, solo que necesita representar físicamente la situación inicial para analizarla. Al ubicar el conjunto mayor decide decrementar este, y para conocer la cantidad a retirar, realiza cálculo mental, a partir de lo cual concluye en una cantidad específica a retirar del conjunto mayor para igualarlo al menor, acción que también necesita representar manipulando los objetos.
I.REPRESENTACIÓN CONCRETA	**3. Formación de uno o dos conjuntos, identificar solamente una de las partes y la sustrae.** Formar uno o dos conjuntos y tomar del conjunto mayor una cantidad específica para formar uno	Se da cuenta de que se trata de una situación de igualación – decremento. Necesita representar físicamente la situación. Considera al conjunto mayor como un gran total del cual puede retirar elementos para formar con ellos un nuevo conjunto del mismo tamaño que el menor (es decir que recopila los elementos que conforman un conjunto

	nuevo.	igual al menor y que son los que permanecerán). Algunos sujetos dan a conocer la cantidad que será eliminada, basándose para ello en el conteo perceptual.
I.REPRESENTACIÓN CONCRETA	**4. Formación de dos conjuntos, retirar hasta y conteo.** Formar dos conjuntos, retirar del conjunto mayor hasta dejar una cantidad específica y contar los objetos del conjunto al que se le retiró.	Capta que se trata de una situación de igualación – decremento, y requiere representarla físicamente. Primero ubica el conjunto de mayor tamaño y decrementa la cantidad de este para igualarlo al menor, esto sin conocimiento de la cantidad exacta que deberá retirar, elimina objetos del conjunto mayor, verificando mediante el conteo total de este conjunto la igualación de ambos, aproximándose así por ensayo y error a la igualación; algunos niños de este grupo creen inicialmente que para igualar deben tomar como referencia el conjunto mayor y por lo tanto debe incrementar el conjunto menor; solamente al cerrarles la posibilidad de incrementar, consideran la opción de decrementar para igualar.
I.REPRESENTACIÓN CONCRETA	**5. Formación de dos conjuntos y traspasar.** Formar dos conjuntos diferentes y pasar objetos de uno a otro.	No comprende la relación de igualación resta, solo capta que debe cambiar algún conjunto. Primeramente considera que el conjunto menor debe ser igualado al mayor, y para esto es necesario agregar al menor. Al cerrarle la posibilidad de utilizar mas elementos de los ya mencionados, (agregar), decide traspasar del conjunto mayor al menor, asegurando que ya aumentó un conjunto, pero sin considerar que el otro ha decrementado, y que por lo tanto aún con las estrategias aplicadas no están igualados los conjuntos. Esta acción refleja el pensamiento de que cuando los mismos objetos pasan al otro

	conjunto, esto hace que ya sean iguales, lo que significa que no toma en cuenta la igualación de cantidades, solo el cambio de las mismas.

3.4. RELACIÓN ENTRE NIVEL DE ESTRATEGIA, PRINCIPIOS DE CONTEO E INVARIANTES

Los niños fueron organizados en las siguientes cuatro categorías, definidas en función del dominio que tuvieron de los principios de conteo en primer lugar, y en segundo lugar del nivel de dominio en las dos invariantes exploradas:

A. Niños que presentaron dificultades con dos o más principios de conteo.
B. Niños que presentaron dificultad con un principio de conteo y con las dos invariantes.
C. Niños que aplicaron los cinco principios de conteo pero que tienen dificultad con una o dos invariantes.
D. Niños que aplicaron los cinco principios de conteo y las invariantes exploradas.

3.4.1. Grupo A. Niños que presentaron dificultades con dos o más principios de conteo.

Los dos niños (10% de los participantes: Lo y Ha) que presentan mayores dificultades con los principios de conteo (con dos o hasta con cuatro de ellos - excepto irrelevancia de orden), emplearon estrategias correspondientes al nivel I (representación concreta) para resolver todas las situaciones, con excepción de un caso donde el niño emplea una estrategia de nivel III (estrategia mental basada en representación concreta) para el problema de igualación resta (dulces) (tablas 18 y 19):

Tabla 18. Relación entre invariantes, principios de conteo presentes, y niveles de estrategias empleadas para solucionar las situaciones aditivas.

TIPO DE DOMINIO DE LAS INVARIANTES	PARTICIPANTE	INVARIANTES Y ETAPAS DE DESARROLLO			PRECENCIA DE PRINCIPIOS DE CONTEO					COMPARACIÓN	COMBINACIÓN PARTE-PARTE TODO		CAMBIO O TRANSFORMACIÓN		IGUALACIÓN	
		Conservación	Tansitividad	Composición Aditiva	Correspondencia	Orden	Cardinalidad	Abstraccion	Irrelevancia de Orden	RESTA 1.Peces	SUMA 2.Animales	SUMA 3.Flores	SUMA 4.Platos	RESTA 5. Galleta	RESTA 6.Torni-llos	RESTA 7.Dulces
										NIVEL DE LA ESTRATEGIA						
A	Lo	No 1	--	Si	Etapa 2	Si	Si	No	Si	I *	I	I	I	I	I	I
	Ha	Si 3	--	Si	Etapa 2 ***	Si ***	Si ***	Si ***	Si	I *	I	I	I	I	I	III
B	Da	No 1	--	No 2	Etapa 2	SI	Si	Si	Si	I *	I	I	IV	IV	III	IV
C	Os	Si 3	--	No 2	Si	SI	Si	Si	Si	I *	I*	I	I	I	III	I *
	Ka	No 2	--	No 2	Si	SI	Si	Si	Si	III	II	I *	I	I	IV	I
	Da	No 2	--	Si	Si	SI	Si	Si	Si	I *	I	I	I	I	II	I
	An	No 1	--	No 2	Si	SI	Si	Si	Si	I *	I *	I	III	I	II	I
	Ev	No 2	--	Si	Si	SI	Si	Si	Si	I *	II	I	I	I	III	III
	Vi	No 2	--	Si	Si	SI	Si	Si	Si	I *	I	I	I	IV	II	III
	Zi	No 2	--	No 1	Si	SI	Si	Si	Si	I *	I *	I	III	IV	II	I
D	Pa	Si 3	--	Si	Si	Si	Si	Si	Si	I *	I	I	I	I	II	I
	Ed	Si 3	--	Si	Si	SI	Si	Si	Si	I *	II	I	I	I	II	IV
	Ka	Si 3	--	Si	Si	SI	Si	Si	Si	I *	II	I	I	IV	III	I
	Fe	Si 3	--	Si	Si	SI	Si	Si	Si	I *	I	I	I	I	III	I *
	Ed	Si 3	--	Si	Si	SI	Si	Si	Si	I *	II	I	IV	IV	IV	III
	Jo	Si 3	--	Si	Si	SI	Si	Si	Si	I *	IV	I	I	IV	IV	I
	Br	Si 3	--	Si	Si	SI	Si	Si	Si	I *	I	I	I	I	II	I
	Li	Si 3	--	Si	Si	SI	Si	Si	Si	I *	I	I	IV	IV	II	I
	Pa	Si 3	--	Si	Si	SI	Si	Si	Si	I *	I	I	IV	I	II	I
	Ro	Si 3	--	Si	Si	SI	Si	Si	Si	I *	III	I	IV	III	IV	I

(*) No fue resueltO el problema / (***) El niño no siempre aplica este principio.

Tabla 19. Porcentaje de niños que emplean cada nivel de estrategia dentro del Grupo A, integrado por 2 participantes (2 = 100%).

PROBLEMA	NIVEL DE LA ESTRATEGIA			
	I	II	III	IV
Comparación resta (peces)	100	--	--	--
Combinación suma (animales)	100	--	--	--
Combinación suma (flores)	100	--	--	--
Cambio suma (platos)	100	--	--	--
Cambio resta (galleta)	100	--	--	--
Igualación resta (tornillos)	100	--	--	--
Igualación resta (dulces)	50	--	50	--

3.4.2. Grupo B. Niños que presentaron dificultad con un principio de conteo y con las dos invariantes.

El único niño (5% de la población) que muestra dificultad en las dos invariantes revisadas (etapa 1 de conservación y etapa 2 de composición aditiva) y con el principio de correspondencia (nivel 2), emplea estrategias de diferentes niveles para las situaciones planteadas, pero principalmente de nivel I y IV (tablas 18 y 20):

Tabla 20. Porcentaje de niños que emplean cada nivel de estrategia dentro del grupo B integrado por un sujeto (1=100%).

PROBLEMA	NIVEL DE LA ESTRATEGIA			
	I	II	III	IV
Comparación resta (peces)	100	--	--	--
Combinación suma (animales)	100	--	--	--
Combinación suma (flores)	100	--	--	--
Cambio suma (platos)	--	--	--	100
Cambio resta (galleta)	--	--	--	100
Igualación resta (tornillos)	--	--	100	--
Igualación resta (dulces)	--	--	--	100

3.4.3. Grupo C. Niños que aplicaron los cinco principios de conteo pero que tienen dificultad con una o dos invariantes.

Los siete participantes (35% de la población) que manejan los cinco principios de conteo y cuyas dificultades se relacionan más bien con una o dos invariantes (conservación y composición aditiva), emplean estrategias de diferentes niveles de dificultad para las situaciones aditivas planteadas (tablas 18 y 21):

Tabla 21. Porcentaje de niños que emplean cada nivel de estrategia dentro del Grupo C, integrado por 7 niños en total (7=100%).

PROBLEMA	NIVEL DE LA ESTRATEGIA			
	I	II	III	IV
Comparación resta (peces)	86	--	14	--
Combinación suma (animales)	71	29	--	--
Combinación suma (flores)	100	--	--	--
Cambio suma (platos)	71	--	29	--
Cambio resta (galleta)	71	--	--	29
Igualación resta (tornillos)	--	57	29	14
Igualación resta (dulces)	71	--	29	--

3.4.4. Grupo D. Niños que aplicaron los cinco principios de conteo y las invariantes exploradas.

Los diez niños que se encuentran en la etapa 3 de invariantes y que manejan los cinco principios de conteo, emplean estrategias de diversos niveles para resolver las situaciones aditivas (tablas 18 y 22):

Tabla 22. Porcentaje de niños que emplean cada nivel de estrategia dentro del grupo D, integrado por diez participantes en total (10 = 100%).

PROBLEMA	NIVEL DE ESTRATEGIA			
	I	II	III	IV
Comparación resta (peces)	100	--	--	--
Combinación suma (animales)	50	30	10	10
Combinación suma (flores)	100	--	--	--
Cambio suma (platos)	60	--	--	40
Cambio resta (galleta)	50	--	10	40
Igualación resta (tornillos)	--	50	20	30
Igualación resta (dulces)	80	--	10	10

Al analizar cada uno de los tipos de problemas se observan las siguientes cuestiones:

Comparación- resta (peces). El grupo A (dificultades con los principios de conteo) y el B (dificultades con un principio de conteo e invariantes) emplean únicamente estrategias del nivel I (representación concreta). Así como el grupo D (que maneja todos los principios e invariantes).

Los 19 niños que emplean estrategia del nivel I para el problema peces (comparación resta) se encuentran en diferentes etapas de invariantes y de principios de conteo (3 de ellos no presentan todos los principios de conteo, y la mayoría está en la etapa 3). Cuatro niños que emplean estrategias de nivel I se encuentran en la etapa 3 de invariantes y poseen los cinco principios de conteo; aunque resulta inconcluso su intento y no resuelven el problema.

El único que emplea estrategia del nivel III (estrategia mental a partir de la representación concreta) maneja todos los principios de conteo y se encuentra en la etapa 2 de conservación y de composición aditiva. Además es el único que resuelve el problema de peces.

En breve se observa que conforme avanzan en el manejo de principios de conteo, aunque no de invariantes, pueden emplear más las estrategias mentales. No obstante esto no se cumple solamente en un caso del grupo B.

Combinación suma (animales).- al igual que en el problema peces, los niños de los grupos A y B emplean únicamente estrategias de representación concreta (nivel I); del grupo C algunos emplean estrategias de conteo a partir de (nivel II), y en el grupo D uno logra usar estrategias mentales a partir de la representación concreta (nivel III) mientras que otro emplea una estrategia mental (nivel IV).

Combinación suma (flores).- En este problema no hay diferencia alguna entre las cuatro categorías, ya que todos emplean estrategias de representación concreta (nivel I).

Cambio suma (platos).- No se observa relación directa entre la categoría y el nivel de estrategia, ya que el niño del grupo B utiliza estrategia mental (nivel IV), y el grupo C no conserva esta característica, ya que la mayoría (cinco de siete) emplea la representación concreta (nivel I) y dos utilizan estrategias mentales a partir de la representación concreta (nivel III), además se observa que los dos niños que emplean estrategias de nivel III (estrategia mental a partir de la representación concreta), coinciden en que ambos se encuentran en etapas 1 o 2 de conservación y de composición aditiva. Por otra parte el grupo D utiliza tanto estrategias de nivel I (representación concreta) como de nivel IV (estrategia mental).

Cambio resta (galleta).- No hay relación directa entre invariante o principios de conteo y el nivel de estrategia, ya que el grupo B utiliza únicamente estrategia mental, y en el grupo C no se conserva esta característica, ya que la mayoría (cinco de siete) emplea la representación concreta (nivel I), en tanto que el grupo D utiliza tanto estrategias de nivel I (representación concreta) como de nivel IV (estrategia mental).

Igualación resta (tornillos).- Los grupos A y B van avanzando en el nivel de estrategia, aunque esto no sucede con los otros dos grupos, además de que casi no hay diferencia entre las categorías C y D.

Igualación resta (dulces).- Al igual que en problema anterior, los grupos A y B van avanzando en el nivel de estrategia, pero no así las otras dos categorías, además de que casi no hay diferencia entre las categorías C y D ya que en ambas predomina el nivel I (representación concreta) y solo dos veces en cada grupo usan estrategias de otro nivel.

3.5. RELACIÓN ENTRE NIVEL DE ESTRATEGIA Y EDAD.

Se organizaron cinco intervalos de edad con rangos de 6 meses. En cada intervalo de edad puede haber tres, cuatro o cinco participantes (Tabla 23).

a) 4,6 a 4,11 (4 participantes)
b) 5,0 a 5,5 (4 participantes)
c) 5,6 a 5,11 (3 participantes)
d) 6,0 a 6,5 (4 participantes)
e) 6,6 a 6,11 (5 participantes)

A continuación se revisa el porcentaje de veces que los participantes por grupo de edad, emplea cada nivel de estrategias para solucionar cada tipo de situación aditiva.

Tabla 23. Relación entre edad y niveles de estrategias empleadas para solucionar las situaciones aditivas.

SUB GRUPO	INTERVALO DE EDAD	PARTICIPANTE	EDAD	COMPARACIÓN	COMBINACIÓN PARTE-PARTE TODO		CAMBIO O TRANSFORMA-CIÓN		IGUALACIÓN	
			Años, mese	RESTA 1.Peces	SUMA 2.Animales	SUMA 3.Flores	SUMA 4.Platos	RESTA 5. Galleta	RESTA 6.Tornillos	RESTA 7.Dulces
A	4,6 a 4,11	Pa	4,6	..I *	I	I	I	I	II	I
		Lo	4,10	..I *	I	I	I	I	I	I
		Ha	4,11	..I *	I	I	I	I	I	III
		Os	4,11	I *	I *	I	I	I	III	I *
B	5,0 a 5,5	Ka	5,3	III	II	I *	I	I	IV	I
		Da	5,4	..I *	I	I	IV	IV	III	IV
		An	5,4	..I *	I *	I	III	I	II	I
		Ev	5,5	I *	II	I	I	I	III	III
C	5,6 a 5,11	Vi	5,6	..I *	I	I	I	IV	II	III
		Ed	5,8	..I *	II	I	I	I	II	IV
		Ka	6,1	..I *	II	I	I	IV	III	I
D	6,0 a 6,5	Fe	6,3	..I *	I	I	I	I	III	I *
		Ed	6,4	I *	II	I	IV	IV	IV	III
		Da	6,4	I *	I	I	I	I	II	I
		Jo	6,4	I *	IV	I	I	IV	IV	I
E	6,6, a 6,11	Zi	6,6	I *	I *	I	III	IV	II	I
		Br	6,7	I *	I	I	I	I	II	I
		Li	6,7	I *	I	I	IV	IV	II	I
		Pa	6,8	I *	I	I	IV	I	II	I
		Ro	6,10	I *	III	I	IV	III	IV	I

(*) No resolvió la situación (el resultado no corresponde con la relación planteada)..

(***) El participante no siempre aplica este principio.

3.5.1. Grupo a. INTERVALO DE EDAD 4,6 A 4,11.

En el grupo a predominan las estrategias de nivel I, empleándola el 89% de las veces y esporádicamente emplean los niveles II y III (3.5 y 7.1% respectivamente) (Tablas 23 y 24, y Figura 2).

Tabla 24. Porcentaje de veces que emplean cada nivel de estrategia dentro de este intervalo de edad.

PROBLEMA	NIVEL DE ESTRATEGIAS			
	I	II	III	IV
Comparación resta (peces)	100	--	--	--
Combinación suma (animales)	100	--	--	--
Combinación suma (flores)	100	--	--	--
Cambio suma (platos)	100	--	--	--
Cambio resta (galleta)	100	--	--	--
Igualación resta (tornillos)	50	25	25	--
Igualación resta (dulces)	75	--	25	--
TOTAL	625	25	50	0
% PROMEDIO	89.2	3.5	7.1	0

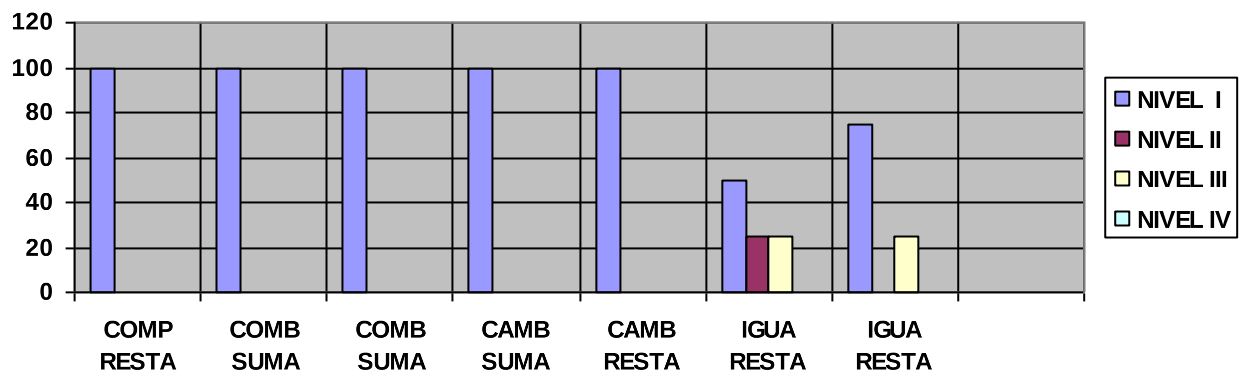

Figura 2. Compara el porcentaje de veces que los niños de 4,6 a 4,11 emplean cada nivel de estrategia para las diferentes situaciones aditivas.

3.5.2. Grupo b. INTERVALO DE EDAD DE 5,0 A 5,5.

En el grupo b, integrado por cuatro niños, se observa que el nivel I es el que más emplean (57.1% de veces), el nivel III lo emplean 17.8%, el nivel IV el 4.2% y el II es el que menos emplean (10.7%) (Tabla 25, Figura 3).

Tabla 25. Porcentaje de veces que emplean cada nivel de estrategia dentro de este intervalo de edad.

PROBLEMA	NIVEL DE ESTRATEGIAS			
	I	II	III	IV
Comparación resta (peces)	75	--	25	--
Combinación suma (animales)	50	50	--	--
Combinación suma (flores)	100			
Cambio suma (platos)	50	--	25	25
Cambio resta (galleta)	75	--	--	25
Igualación resta (tornillos)	--	25	50	25
Igualación resta (dulces)	50	--	25	25
TOTAL	400	75	125	100
% PROMEDIO	57.1	10.7	17.8	14.2

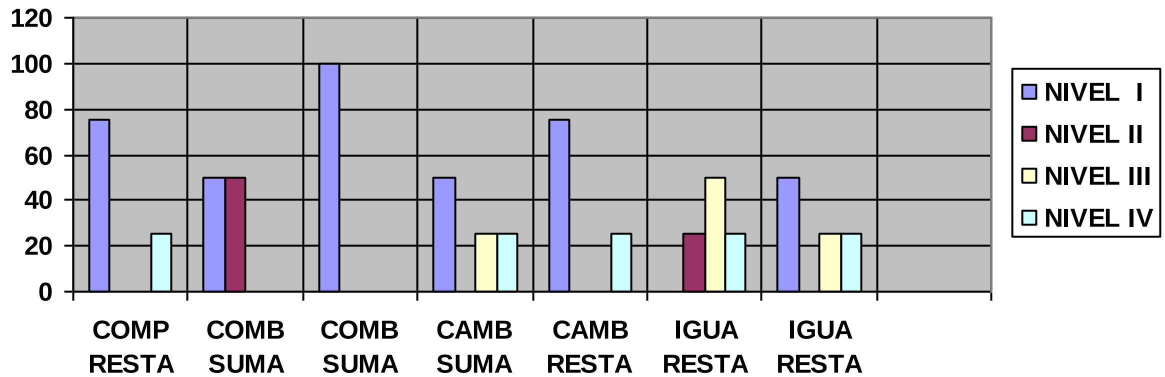

Figura 3. Compara el porcentaje de veces que los niños de 5,0 a 5,5 emplean cada nivel de estrategia para las diferentes situaciones aditivas.

3.5.3. Grupo c. INTERVALO DE EDAD DE 5,6 A 5,11.

En el grupo c conformado por tres participantes, predomina el uso del nivel I (57% de veces). En segundo lugar emplean el nivel II (18.8%), enseguida el nivel IV (14.1%) y en menor medida el nivel III (9.4) (Tabla 26 y Figura 4).

Tabla 26. Porcentaje de veces que emplean cada nivel de estrategia dentro de este intervalo de edad.

PROBLEMA	NIVEL DE ESTRATEGIAS			
	I	II	III	IV
Comparación resta (peces)	100			
Combinación suma (animales)	33	66	--	--
Combinación suma (flores)	100	--	--	--
Cambio suma (platos)	100	--	--	--
Cambio resta (galleta)	33	--	--	66
Igualación resta (tornillos)	--	66	33	--
Igualación resta (dulces)	33	--	33	33
TOTAL	339	132	66	99
% promedio	57	18.8	9.4	14.1

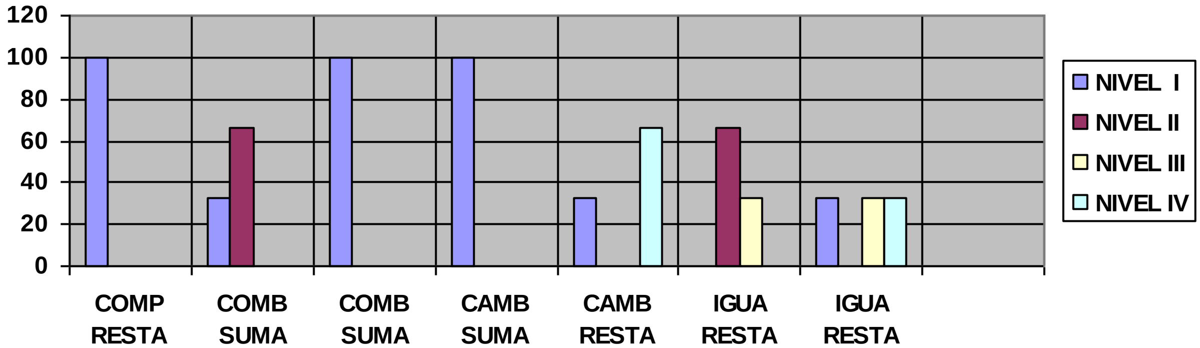

Figura 4. Compara el porcentaje de veces que los niños de 5,6 a 5,11 emplean cada nivel de estrategia para las diferentes situaciones aditivas.

3.5.4. Grupo d. INTERVALO DE EDAD DE 6,0 A 6,5.

En el grupo d integrado por cuatro niños, el nivel I es el que más emplean (64.2%), enseguida el nivel IV (21.4%), y en igual medida usan los niveles II y III (7.1% cada uno) (Tabla 27, Figura 5).

Tabla 27. Porcentaje de veces que emplean cada nivel de estrategia dentro de este intervalo de edad.

PROBLEMA	NIVEL DE ESTRATEGIAS			
	I	II	III	IV
Comparación resta (peces)	100	--	--	--
Combinación suma (animales)	50	25	--	25
Combinación suma (flores)	100	--	--	--
Cambio suma (platos)	75	--	--	25
Cambio resta (galleta)	50	--	--	50
Igualación resta (tornillos)	--	25	25	50
Igualación resta (dulces)	75	--	25	--
TOTAL	450	50	50	150
% PROMEDIO	64.2	7.1	7.1	21.4

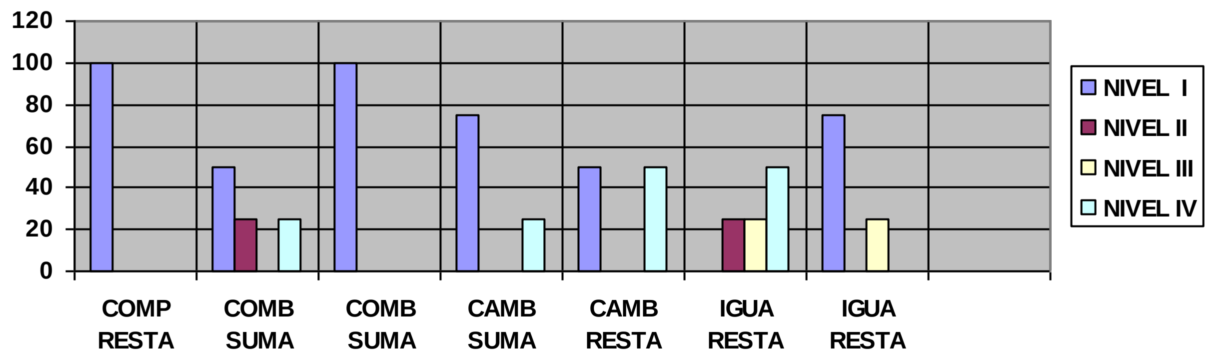

Figura 5. Compara el porcentaje veces que los niños de 6,0 a 6,5 emplean cada nivel de estrategia para las diferentes situaciones aditivas.

3.5.5. Grupo e. INTERVALO DE EDAD DE 6,6 A 6,11.

En el grupo e integrado por cinco sujetos, las estrategias de nivel I son las más empleadas (62.8%), enseguida las de nivel IV (17.1%) y de ahí en menos medida las de nivel II (11.8%) veces para el mismo problema) y finalmente las de nivel III (38.5%) (Tabla 28, Figura 6).

Tabla 28. Porcentaje de veces que emplean cada nivel de estrategia dentro de este rango de edad.

PROBLEMA	NIVEL DE ESTRATEGIAS			
	I	II	III	IV
Comparación resta (peces)	100	--	--	--
Combinación suma (animales)	80	--	20	--
Combinación suma (flores)	100	--	--	--
Cambio suma (platos)	20	--	20	60
Cambio resta (galleta)	40	--	20	40
Igualación resta (tornillos)	--	80	--	20
Igualación resta (dulces)	100	--	--	--
TOTAL	440	80	60	120
% PROMEDIO	62.8	11.4	8.5	17.1

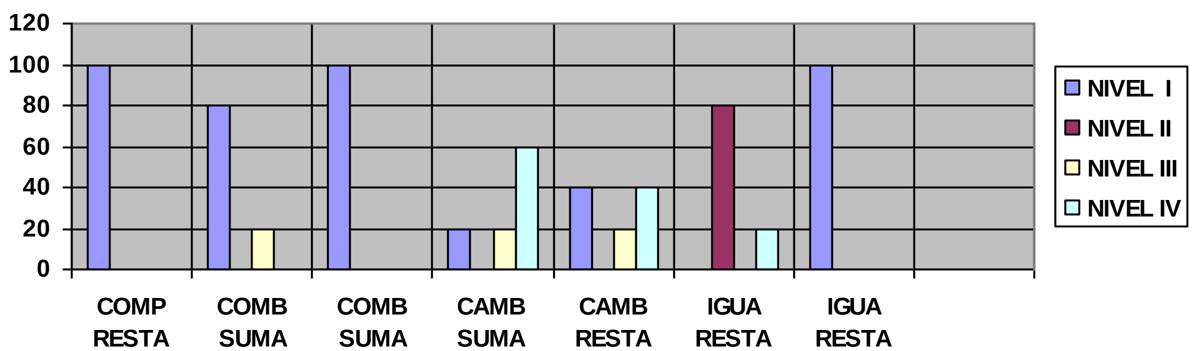

Figura 6. Compara el porcentaje de veces que los niños de 6,6 a 6,11 emplean cada nivel de estrategia para las diferentes situaciones aditivas.

Al analizar para cada tipo de problema los niveles de estrategia empleados por cada uno de los cinco grupos de edad, se puede observar lo siguiente:

Comparación resta (peces). Los grupos a, c, d y e emplean únicamente estrategias del nivel I, en tanto que el grupo b (5,0 a 5,5 de edad) emplea las del nivel IV. Los cinco grupos emplean el nivel I en forma más frecuente que cualquier otra estrategia.

Se observa que quien utiliza las estrategias de nivel IV es un niño de 5,0 a 5,5. Es claro que los niños de 4 años no son quienes más usan las estrategias del nivel I, ya que los de 5,6 hasta 6 1/2 años también las usan.

Combinación suma (animales). Los niños del grupo de menor edad emplean estrategias del nivel I únicamente; los del grupo b emplean por igual de nivel I y II; los de edad intermedia (grupo c) tienden a emplear el nivel II mas que del I. El grupo d emplea tres niveles diferentes: I, II y IV pero predomina el uso del nivel I. Los niños mayores utilizan en su mayoría (80%) estrategias del nivel I y solo a veces (20%) de nivel III.

De los tres primeros grupos se observa que a mayor edad hay también una tendencia a emplear estrategias cada vez más complejas. Pero con los niños del grupo d y e se rompe esto, ya que hay un predominio de estrategias de nivel I.

Combinación suma (flores). Los sujetos de todos los grupos de edad emplean únicamente estrategias del nivel I para este problema.

No hay diferencias entre los grupos de edades.

Cambio suma (platos). Los sujetos de los grupos a y c (menor edad y edad intermedia) optan por estrategias de nivel I en su totalidad. El grupo b emplea tanto de nivel I, III y IV pero no por igual ya que el 50% de las veces usan de nivel I. El grupo d emplea en su mayoría el nivel I y menos veces el IV. El grupo e emplea en su mayoría estrategias de nivel IV y las menos veces de nivel I y III.

En general quienes emplean mas el nivel IV son los de mayor edad, quienes emplean mas el nivel I son los de menor edad y de edades intermedias (todos menores de 6 años).

Cambio resta (galleta). El grupo b emplea estrategias del nivel I en un 75%. Los mas pequeños (grupo a) las usan el 100% de las veces. El grupo c en su mayoría se enfoca a las de nivel IV y ocasionalmente de nivel I. El grupo d emplea por igual el nivel I y el IV. El grupo e emplea de nivel I y IV por igual y un 20% el Nivel III; este es el único grupo que emplea de nivel III .

Se observa que a menor edad es mas frecuente el uso de la representación concreta; no obstante que los intermedios (de 5 1/2 años por ejemplo) y no los mayores son quienes emplean más las estrategias de nivel IV, si bien el nivel III (utilizado por el grupo de mayores implica también el uso de estrategias mentales. En este problema la estrategia II de conteo a partir de, no es utilizada.

Igualación resta (tornillos). El grupo a emplea estrategias de representación con objetos (50% de las veces) además de estrategias del nivel II y III. El b se centra en las de nivel III, pero también emplea de nivel II y IV, estas por igual. El c muestra tendencia a las de nivel II aunque también emplea de nivel III. El grupo d emplea por igual de nivel II y III, y con mayor frecuencia de nivel IV. El grupo e se centra en las de nivel II (80%) y con menor frecuencia emplea de nivel IV.

Los grupos c y d son los que emplean con mayor frecuencia las estrategias mentales, no son los de mayor edad. Los más pequeños son los únicos que recurren a la representación concreta (50% de veces) como estrategia para solucionar este problema.

Igualación resta (dulces). Los grupos a, d y e emplean con mayor frecuencia el nivel I. Todos excepto el e también usan el nivel III; el b y c usan además el IV. El grupo c emplea por igual el nivel I, III y IV. Es de llamar la atención que los niños mayores (grupo e) en este problema de igualación resta únicamente emplean la representación concreta (nivel I).

Tabla 29. Porcentaje de veces que emplean cada nivel de estrategia por grupo de edad.

GRUPO	NIVEL DE ESTRATEGIAS			
	I	II	III	IV
a	89.2	3.5	7.1	0
b	57.1	10.1	17.8	14.2
c	57	18.8	9.4	14.1
d	64.2	7.1	7.1	21.4
e	62.8	11.4	8.5	17.1
TOTAL	303.03	50.9	49.9	66.8
% PROMEDIO	66.06	10.18	9.98	13.36

3.6. RELACIÓN ENTRE EL NIVEL DE ESTRATEGIA Y SEXO

A continuación se revisa el porcentaje de hombres y de mujeres que emplea cada nivel de estrategia para solucionar los problemas. Cada uno de estos dos grupos está integrado por diez participantes (Tabla 30).

Las estrategias de **nivel I** (representación concreta) son empleadas por mujeres un mayor número de veces (el 71%) en comparación con los varones (61% de las veces); Esto en promedio, si bien para el problema flores en ambos casos emplearon solamente estrategias del nivel I (Tablas 31 y 32).

El **nivel II** (conteo a partir de) es empleado más frecuentemente por las mujeres (12% de veces) en comparación con los varones (7% de veces); esto únicamente en los de combinación suma (animales) e igualación suma (tornillos), ya que para los demás problemas no emplearon este nivel de estrategia (Tablas 31 y 32).

Tabla 30. Relación entre sexo y niveles de estrategias empleadas para solucionar las situaciones aditivas.

PARTICIPANTE	SEXO	COMPARACIÓN	COMBINACIÓN PARTE-PARTE TODO		CAMBIO O TRANSFORMACIÓN		IGUALACIÓN	
	M / H	RESTA 1.Peces	SUMA 2.Animales	SUMA 3.Flores	SUMA 4.Platos	RESTA 5. Galleta	RESTA 6.Tornillos	RESTA 7.Dulces
Pa	M	I *	I	I	I	I	II	I
Lo	M	I *	I	I	I	I	I	I
Ka	M	III	II	I *	I	I	IV	I
An	M	I *	I *	I	III	I	II	I
Ev	M	I *	II	I	I	I	III	III
Kar	M	I *	II	I	I	IV	III	I
Da	M	I *	I	I	I	I	II	I
Zi	M	I *	I *	I	III	IV	II	I
Br	M	I *	I	I	I	I	II	I
Liz	M	I *	I	I	IV	IV	II	I
Ha	H	I *	I	I	I	I	I	III
Os	H	I *	I *	I	I	I	III	I *
Dan	H	I *	I	I	IV	IV	III	IV
Vic	H	I *	I	I	I	IV	II	III
Ed	H	I *	II	I	I	I	II	IV
Fe	H	I *	I	I	I	I	III	I *
Edg	H	I *	II	I	IV	IV	IV	III
Jo	H	I *	IV	I	I	IV	IV	I
Pau	H	I *	I	I	IV	I	II	I
Ro	H	I *	III	I	IV	III	IV	I

(*) No fue resuelta la situación (el resultado no corresponde con la relación planteada).

(***) El niño no siempre emplea este principio.

En tanto que las estrategias de **nivel III** (estrategia metal a partir de la representación concreta) es mas empleada por varones (11% de veces) que por mujeres (8% de veces). Los hombres emplean más que la mujeres esta estrategias en los problemas de combinación suma (animales), cambio resta (galleta) y los de igualación suma y resta (tornillos, dulces), mientras que las mujeres los emplean más en los de comparación suma (peces) y de cambio suma (platos), siendo los varones quienes en general emplean mas estas estrategias, aunque por breve diferencia (Tablas 31 y 32).

En todos los problemas es notablemente mayor el porcentaje de varones 20% de veces) que emplea estrategias de **nivel IV** (estrategias mentales) en comparación con el grupo de mujeres quienes emplean estrategias de nivel IV solo el 7% de veces (Tablas 31 y 32).

Tabla 31. Porcentaje de mujeres que emplean cada nivel de estrategia.

PROBLEMA	NIVEL DE ESTRATEGIA I	II	III	IV
Comparación resta (peces)	90	0	10	0
Combinación suma (animales)	70	30	0	0
Combinación suma (flores)	100			
Cambio suma (platos)	70	0	20	10
Cambio resta (galleta)	70	0	0	30
Igualación resta (tornillos)	10	60	20	10
Igualación resta (dulces)	90	0	10	0
TOTAL	500	90	60	50
% PROMEDIO	71.4	12	8	7.1

Tabla 32. Porcentaje de varones que emplean cada nivel de estrategia.

PROBLEMA	NIVEL DE ESTRATEGIA I	II	III	IV
Comparación resta (peces)	100	0	0	0
Combinación suma (animales)	60	20	10	10
Combinación suma (flores)	100			
Cambio suma (platos)	60	0	0	40
Cambio resta (galleta)	50	0	10	40
Igualación resta (tornillos)	10	30	30	30
Igualación resta (dulces)	50	0	30	20
TOTAL	430	50	80	140
% PROMEDIO	61.4	7	11	20

3.7. ERRORES OBSERVADOS DURANTE LOS PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA

Durante la solución de las situaciones aditivas planteadas, algunos niños, aun cuando lograron resolverla, cometieron uno o varios errores durante el proceso, estos errores detectados podían ser:

a) modificar los datos (usar datos diferentes a los que se plantean).
b) fallar al realizar el conteo (específicamente se observaron fallas en el principio de correspondencia biunívoca y, sólo en un caso, en el principio de orden).
c) antes de intentar cualquier procedimiento, mencionar como respuesta inmediata cantidades que resultaron imprecisas (hechos erróneos), pero después de cuestionarles intentaron un procedimiento mediante el cual resolver la situación planteada.

Estos errores se observaron presentes en todas las situaciones excepto en la de comparación resta (Peces), donde no hubo errores.

Por otro lado, durante las tres diferentes tareas diseñadas para conteo específicamente, se observaron errores al aplicar los principios de conteo. Estas fallas ocurrieron básicamente con el principio de correspondencia biunívoca y sólo en un caso, con el principio de orden.

Tarea 1. Tomar una cantidad específica de objetos inmersos en un grupo:

Se encontraron diez errores (cinco en correspondencia, tres en orden y dos en cardinalidad).

Tarea 2. Contar una cantidad exacta de objetos en desorden:

Se encontraron cuatro errores (tres en correspondencia y uno en cardinalidad).

Tarea 3. Contar una cantidad exacta de objetos en desorden:

Se observaron tres errores (correspondencia).

Uno de los niños (Ha), mostró inconsistencia en su desempeño, ya que en algunas situaciones tales como las tareas de conteo, por ejemplo, aplicó adecuadamente los principios mencionados, mientras que en otras ocasiones como en diversas tareas de suma y resta estaban más bien ausentes dichos principios; este cambio se observó claramente al pasar de las actividades de conteo a las situaciones aditivas.

DISCUSIÓN

A continuación se presenta la discusión de este estudio abordando en primer lugar la organización de estrategias por niveles, que es el tema central en este trabajo, posteriormente se revisan las estrategias empleadas para cada tipo de problema y sus implicaciones en cuanto al pensamiento matemático, después abordamos la relación entre el nivel de estrategias, invariantes y principios de conteo, y en un momento final se revisa la relación entre nivel de estrategias y edad, así como el nivel de estrategias y sexo.

Organización de estrategias por niveles.

Como puede observarse en la organización de estrategias por niveles, el I, II y IV coinciden con los tres niveles de estrategias que proponen Carpenter y Moser (1989): modelaje directo, conteo verbal y estrategia mental. A la vez es identificado otro nivel más, es la estrategia de nivel III (Estrategia mental a partir de representación concreta) en la cual se combinan dos tipos: al inicio el niño usa una estrategia concreta y concluye usando una estrategia mental.

El nivel III se detectó al observar que cuando es utilizado, antes de emplear una estrategia mental, el niño necesita apoyarse en el manejo directo de los objetos, esto es, requiere un apoyo de tipo concreto para representar el estado inicial de la situación planteada y así lograr analizarlo, sólo entonces logra una representación mental tanto de la relación planteada como del estado final, lo que le permite plantear una solución al problema, sin tener que representarla físicamente en su totalidad.

Es así que este nivel III puede considerarse como de menor complejidad que el de Estrategia Mental pero superior a la estrategia de Conteo Verbal, dados sus alcances, debido a que no permanece en el mero uso de objetos concretos, es decir, aunque no aborda directamente una estrategia mental, tampoco requiere todo el tiempo del apoyo concreto para resolver el problema.

Al respecto Siegler y Jenkins (en Fuson, 1992) han planteado también la combinación de estrategias al afirmar que en ocasiones los niños emplean una estrategia compleja (estrategia mental) y si esta no les funciona, utilizan modelaje directo, que es una estrategia con objetos concretos.

Se observa entonces que mientras algunos preescolares necesitan visualizar los objetos y a partir de este apoyo manipulan los elementos del problema con mayor claridad, según la relación planteada, otros pequeños logran emplear estrategias mentales sin mayor apoyo. Debe preguntarse qué tanta influencia hay de las experiencias cotidianas dentro o fuera de la escuela, así como de manera formal o informal, sobre la elección de los niños para emplear una u otra estrategia.

En este estudio se encontró que los niños preescolares pueden emplear estrategias con diferentes niveles de complejidad y algunos logran utilizar incluso estrategias mentales sin necesidad de apoyarse en algún tipo de representación concreta. De hecho los cuatro niveles de estrategias encontrados, ilustran diferentes niveles de pensamiento en los niños y que van de lo concreto a lo abstracto.

Estos hallazgos muestran que los niños pequeños poseen conocimientos y capacidades para llevar a cabo los procesos de razonamiento que les permiten resolver problemas matemáticos de tipo aditivo (suma y resta), tal como lo han planteado diversos autores (Ginsburg, 1977; Carpenter y Moser, 1982; Baroody, 1994 y Bryan en Nunes y Bryan, 1997; Brissiaud, 1989) en sus investigaciones con niños pequeños. A partir de estos hechos puede afirmarse que el razonamiento lógico matemático que poseen los niños en edad preescolar les permite abordar y resolver situaciones matemáticas aditivas, y biceversa: al enfrentar continuamente la necesidad de resolver problemas matemáticos, se promueve la posibilidad de que desarrollen más su pensamiento matemático.

Estrategias empleadas para cada tipo de problema y sus implicaciones en cuanto al pensamiento matemático

Por otra parte, al analizar las implicaciones de cada una de las estrategias empleadas por los niños para cada problema, es posible ubicar diferentes formas y niveles de comprensión que logran los niños respecto a las situaciones planteadas, es decir que se trata de diversas características acerca del pensamiento matemático de los niños. A partir de esta información es posible describir para cada tipo de problema las cuestiones que a continuación se describen.

En el problema de comparación (peces) se observa que la gran mayoría emplean representación concreta, y una minoría emplea estrategia mental a partir de la representación concreta, esto es que la mayoría de los de los entrevistados no logra identificar el tamaño de la diferencia, no considera la posibilidad de que el conjunto total puede contener un subconjunto y que al retirar ese subconjunto se igualarían las dos colecciones. Es decir que únicamente recurren al esquema de comparación mencionado por Resnick et al. (en English y Halford, 1995) logrando realizar una comparación numérica, pero únicamente en términos de mayor que y menor que, sin determinar que esa diferencia tiene un tamaño específico, por lo cual no logran resolver la situación.

Esta dificultad guarda relación con la falta de comprensión del problema desde la estructura semántica del mismo, ya que la pregunta "¿por cuántos gana?" no les es muy clara, y al parecer la entienden como "¿cuántos tiene el que gana?". Solamente una niña (Ka, de 5 años 3 meses de edad y de segundo grado de preescolar) logra resolver el problema y lo hace empleando una estrategia del nivel III (estrategia mental a partir de la representación concreta), además menciona verbalmente la explicación de su respuesta, lo cual muestra claramente que hay comprensión de las relaciones planteadas, situación que la conduce a la resolución del problema al identificar el tamaño de la diferencia entre ambos conjuntos.

Debe señalarse que de todos los problemas presentados en este estudio, particularmente el problema de comparación, en el que se trata de encontrar la diferencia entre dos cantidades dadas, resulta ser el de mayor grado de dificultad para los preescolares entrevistados. Este hallazgo concuerda con la afirmación de Fuson (1992), quien menciona que se ha encontrado que los problemas de comparación resultan difíciles si bien es factible que los niños aprendan el significado de estos problemas, a partir de explicaciones basadas en problemas de igualación.

Acerca de los problemas de combinación suma (animales y flores), en todas las estrategias, excepto una de las que emplearon para el problema animales, se observó que los niños comprenden la relación de combinación planteada en el problema, y mantienen esta idea al manipular los datos, (aunque algunos niños emplean otras cantidades diferentes a las mencionadas). Esto muestra la claridad que pueden llegar a tener los pequeños para identificar y establecer la relación de combinación entre dos cantidades (esquema “parte – todo”), aunque algunos necesiten ayuda para focalizar su pensamiento hacia la posibilidad de que dos colecciones presentadas como diferentes puedan tener alguna característica en común, como ocurre en el problema de flores, para poder desprenderse de la idea de “flores verdes y flores rojas” y considerar la posibilidad de pensar en la idea de “flores”, es decir, para considerar la inclusión de clase.

Aquí surge una interrogante: ¿por qué para el segundo problema de combinación suma (flores) los niños entrevistados emplearon únicamente estrategias de representación concreta, mientras que en el primer problema de este tipo (animales) emplearon los cuatro niveles de estrategias? Existen dos diferencias importantes entre ambas situaciones de suma combinación: por una parte, en el primero de estos dos problemas (animales) los elementos que se emplearon eran diferentes en tipo, forma y color, y en la segunda situación (flores) eran diferentes únicamente en color. Por otro lado ambos problemas diferían en su estructura gramatical, resultando más sencilla en el primero, esto es, en el primer problema la forma en que estaba estructurada la pregunta "¿cuántos animalitos...?" podría haber facilitado el hecho de considerar la unificación de ambos subconjuntos ya que se les estaba anticipando que ambos subconjuntos pertenecían a la clase "animales". En cambio en el segundo problema no se mencionaba en la pregunta la característica que unificaba a ambos conjuntos (flores), únicamente se preguntó por el total, en forma general "¿cuántas son todas las que hay?".

Animales		Flores	
patos	gallinas	flores verdes	flores rojas

Esto indica que la dificultad para resolver el problema de combinación flores, surge de la complicación para considerar la inclusión de clase, lo cual es observado claramente al revisar la estrategia de representación concreta empleada por los niños para resolver este problema.

En los problemas de cambio o transformación (platos y galleta) se observa que los niños en su mayoría logran comprender fácilmente la relación planteada, tanto en el problema de cambio agregando como en el de cambio quitando, si bien los niveles de estrategias que emplean divergen ampliamente, y es que utilizaron desde estrategias de representación concreta (nivel I) hasta estrategias mentales (nivel IV), siempre llevando a cabo la transformación del conjunto inicial, ya sea incrementando o decrementando, según correspondía.

En los problemas de igualación (dulces, tornillos) se observó cierta dificultad para manejar la situación de igualación. Esto puede explicarse debido a que el proceso de solución comprende dos partes, primero tienen que realizar una comparación, con la cual no hubo dificultad alguna, y posteriormente tienen que realizar la igualación, siendo esta parte del proceso la que resultó de mayor complejidad. Cabe preguntarse ¿qué operaciones mentales implica este proceso de igualación? En el problema de igualación quitando (dulces) la dificultad fué todavía mayor que en el de igualación agregando (tornillos). Analicemos este hecho: los niños tienden a considerar de primera instancia el conjunto mayor como “guía” hacia donde deben dirigir la igualación, lo “común” es ir hacia adelante, agregar, pensar “faltan __ para __”, y les es difícil pensar en que para igualar pueden quitar, pensar en revertir, para plantear una igualación quitando.

Cuando no logran este entendimiento y en vez de igualar solamente asemejan los conjuntos, puede pensarse que esta es una idea que se aproxima, ya que realizan un cambio agregando, con el objetivo de “asemejar” conjuntos aunque sin igualar, por lo que la comparación no es precisa. Retomando las definiciones dadas por Resnick et al. (en English y Halford, 1995) acerca de los esquemas que emplan los niños ante situaciones de suma y resta, se puede plantear que los niños emplean el esquema de comparación (sin considerar las cantidades precisas, solamente mayor/menor) y el esquema de incremento/ decremento (mostrando que hay entendimiento de la adición y la sustracción pero sin cuantificación numérica exacta), y es que los problemas de igualación son una combinación de problemas de comparación y de cambio, como lo plantea Fuson (1992), lo cual puede observarse cuando al inicio los niños deben comparar el tamaño de los conjuntos para después plantear una estrategia mediante la que sea posible igualar ambos conjuntos, lo que implica transformar uno de los conjuntos.

Relación entre el nivel de estrategias, invariantes y principios de conteo

Acerca de la relación entre nivel de estrategia, invariantes y principios conteo, es claro que los niños con mayor dificultad para el manejo de principios de conteo e invariantes son quienes más recurrieron a apoyos concretos para analizar los problemas e intentar resolverlos, retoman la información perceptual y se basan en ella para hacer afirmaciones acerca de las relaciones entre las colecciones, es decir, sin emplear la “reflexión interiorizada” que menciona Kamii (1982) como fuente del conocimiento lógico matemático. No realizan un proceso de análisis para deducir la estrategia de solución, pero sí emplean el conocimiento intuitivo. Y es que el hecho de apoyarse en el conocimiento intuitivo no impide que resuelvan problemas matemáticos, ya que como puede observarse, aunque hay un menor dominio de los principios e invariantes, logran resolver el problema empleando estrategias del nivel I (representación concreta), es decir, que sus estrategias requieren de apoyos concretos y con estos apoyos logran encontrar solución al problema planteado. Lo anterior coincide con las afirmaciones de Ginsburg (1977) respecto al conocimiento intuitivo que los niños pequeños poseen acerca de la suma y resta, y mediante el cual, según afirma, algo que tienen claro es que al añadirle a un conjunto este tiene más, y al quitar habrá menos.

Por tanto, aunque los niños pequeños no logren dominar alguna de las invariantes o de los principios de conteo, esto no impide que lleven a cabo estrategias para la solución de los problemas que se plantean, ya que recurren al uso de precursores de la adición y la sustracción, es decir a los esquemas de incremento /decremento, y al esquema de comparación que plantea Resnick et al. (en English y Halford, 1995), para resolver los problemas, donde el esquema incremento/decremento implica razonamiento acerca de la cantidad pero sin realizar cuantificación numérica exacta, en tanto que el esquema de comparación se presenta cuando el niño compara cantidades aunque no de manera precisa, o incluso apoyándose en la información perceptual.

También hay niños que aun cuando sí manejan los principios de conteo e invariantes, eligen usar las estrategias de nivel I (representación concreta) para resover los problemas, es decir que recurren a la manipulación de objetos. Aquí debe considerarse la posible influencia de diversos factores tales como: variedad y tipo de experiencias, o factores emocionales, por ejemplo.

Por otra parte llama la atención el caso del grupo B (conformado por un niño) quien no tiene todavía un dominio en el manejo de las dos invariantes observadas y falla en uno de los principios de conteo, pero que al momento de emplear estrategias de solución a los problemas, en tres de los siete problemas utiliza estrategias del nivel IV (estrategia mental), lo cual significa que no siempre requiere de la manipulación concreta, sino que también puede recurrir al análisis reflexivo. También se observa en forma particular que Ha (del grupo A) pierde inconsistencia en su desempeño al cambiar de tareas de conteo hacia otras tareas menos estructuradas. Este caso debe analizarse con mayor profundidad, y en diferentes ámbitos, ya que sobresalen las dificultades para autorregularse y para mantenerse centrado en el tema.

Relación entre el nivel de estrategias y edad

Respecto a la relación entre el nivel de estrategia empleada y edad, a partir de los hallazgos de este trabajo se puede afirmar que no hay diferencias relevantes en la elección de estrategias según la edad, ya que no siempre son los niños mayores quienes emplean estrategias más complejas, en comparación con los menores.

Los niños entrevistados, cuyas edades coresponden a cuatro, cinco y seis años emplean básicamente estrategias de nivel I (representación concreta), es decir que recurren más a la manipulación de objetos, y con ayuda de esta representación emplean la acción de conteo para encontrar el resultado de quitar o añadir, que menciona Brissiaud (1989).

El hecho de que los participantes emplearan en su mayoría las estrategias de nivel I, coincide con la afirmación de Díaz y Bermejo (2004), a partir de un estudio que donde encontraron que los más pequeños (primer grado) emplean más estrategias de tipo concreto y conforme van avanzando en edad avanzan también en el uso de estrategias de conteo y posteriormente hacia el uso de hechos numéricos: "…los niños de Educación Infantil recurren preferentemente a las estrategias de modelado directo, por ejemplo contar todo; los niños de primer curso de Educación Primaria utilizan sobre todo las estrategias de conteo y en segundo [curso] siguen mencionando estas estrategias, pero también otras más sofisticadas como las memorísticas o el cálculo mental" (pág. 101).

La ejecución de los niños avanza en nivel de complejidad, lo que significa la presencia de niveles de pensamiento cada vez más reflexivos, es decir, los niños pequeños requieren de referentes concretos para analizar y comprender las relaciones contenidas en los problemas planteados y para poner en práctica una estrategia de solución acorde a su nivel de pensamiento, gradualmente elaboran deducciones, sin necesidad de manipular o tener presentes los objetos, sino que a partir del análisis de la solución matemática pueden identificar las relaciones matemáticas del problema (hacer comparaciones, transformaciones).

Relación entre el nivel de estrategias y sexo

Finalmente, al analizar la relación entre el nivel de estrategia y sexo, es relevante el hecho de que los varones entrevistados suelen emplear con mayor frecuencia las estrategias mentales (20% de veces), en comparación con las mujeres (7.1% de veces), quienes utilizan más bien la representación concreta, ya que en todos los tipos de problemas planteados (excepto el de peces, donde se presentó el caso en particular descrito en párrafos anteriores), se observó esta situación y con un margen de diferencia del 12.9%.

En contraste con estos hallazgos, en un estudio realizado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en 2008, compararon el rendimiento de niños y niñas que finalizan el tercer grado de preescolar, sin encontrar diferencias significativas entre uno y otro (Escudero et al., 2008).

Por su parte en un intento por explicar las posibles diferencias entre sexos, González (2004) plantea a partir de una investigación que realizó en México con estudiantes de secundaria, que si bien la investigación en torno al tema del género y las matemáticas no es muy amplia, ha logrado observar que cuando se trata de desempeño en matemáticas, las diferencias entre hombres y mujeres están fuertemente influidas por cuestiones de orden sociocultural.

Como puede apreciarse, existen puntos de vista divergentes en torno al tema de las diferencias en el nivel de desempeño de mujeres y varones. Y existen también algunas explicaciones acerca de estas diferencias, si bien este campo no ha sido muy estudiado y menos en niños pequeños. Sin embargo es plausible pensar que las diferencias observadas en el presente estudio puedan estar más vinculadas a las actividades de juego, las de los varones suelen emplear el conteo (en juegos de pelota, canicas, juegos de competencia), en tanto que las actividades que realizan las niñas se enfocan más bien a juegos de roles.

CONCLUSIONES

La presente investigación proporciona información que permite conocer más acerca de los recursos que emplean los niños pequeños cuando se enfrentan a situaciones que implican el uso de suma y/o resta. Conocer estos aspectos hará posible tenerlos en cuenta al momento de introducir nuevos conocimientos y apoyar a los niños en la evolución de su aprendizaje, en este caso, dentro del área de las matemáticas.

Una aportación de esta investigación es el haber trabajado con niños mexicanos, y de nivel preescolar, lo que implica que estos hallazgos corresponden a niños que se encuentran en un contexto social (cultural, económico, educativo) muy diferente al de aquellos con los que se han realizado gran parte de los estudios dentro del tema específico de estrategias para la solución de problemas aditivos, además de que son escasas las investigaciones con niños pequeños, debido a que la tendencia es más bien estudiar a niños de escolaridad más avanzada (primaria o secundaria).

Otra aportación de esta investigación es que permite adentrarse más en los conocimientos que poseen los niños pequeños en torno a las matemáticas, en este caso, ubicar qué aspectos de los problemas logran detectar y qué estrategias emplean para abordarlos y solucionarlos.

La utilización del método de entrevista clínica diseñado por Piaget, permitió lograr una exploración más profunda respecto a tales conocimientos; implicó cuidar que las preguntas fueran planteadas de manera clara y no directiva, no solo desde el diseño del protocolo de entrevista sino también durante la realización de la misma.

Debe reconocerse que al emplear en este estudio el método de entrevista clínica, esto dió la posibilidad de que los niños elaboraran más su pensamiento, avanzando más allá de una respuesta inmediata, lo que pudo observarse claramente en su discurso y acciones, ya que en ocasiones a partir de plantearles constantemente nuevos cuestionamientos los niños reelaboraban sus respuestas, lo cual implicaba que volvieran a analizar la información y reestructuran su pensamiento para llegar a la comprensión de las relaciones plantedas en los problemas.

Así, como afirma Delval (2001), a partir de las respuestas que va dando el niño y que el investigador retoma para elaborar contínuamente hipótesis durante la entrevista clínica, se le replanteaban preguntas a los niños con la finalidad de conocer su estructura mental.

Al retomar la propuesta de Piaget (en Delval, 2001), se logró conocer más sobre el pensamiento de los niños, conocimiento útil no sólo para cuestiones de investigación, sino también para mejorar el proceso de enseñanza, ya que no se trata de esperar respuestas correctas o incorrectas, porque finalmente ¿a partir de qué parámetros decidiríamos si sus acciones y discurso son adecuados? ¿para quién son adecuados y por qué? Se trata de conocer y respetar la lógica del niño, y para entender su lógica en este trabajo consideramos sus estrategias de solución, invariantes y principios de conteo, lo cual para un adulto puede no resultar tan fácil cuando se coloca en el rol del que "debe decidir por dónde, hacia dónde y cómo", es decir, en un rol directivo; cuando es así, el niño está enfrentando una doble tarea: resolver la situación matemática planteada y averiguar lo que el adulto espera de él. Así que, siguiendo esta idea, puede resultar que para el niño esté en primer lugar dar la respuesta que esperan de él y en segundo lugar seguir su propia lógica para resolver la tarea; y es que están en juego fuertes elementos de carácter social y afectivo, por lo que si el niño opta por responder lo que cree que esperan de él, ganará la aprobación del maestro a pesar de someter su propio pensar. En este sentido es fundamental que el adulto ayude a que el niño se dé cuenta de que si sigue su propia lógica continuará siendo aceptado.

Tal como lo afirma Thornton (en SEP 2004a) la tarea de resolver problemas implica un proceso social en el que el desarrollo de la confianza resulta básico, incluso plantea que "la confianza puede ser más importante que la destreza" (pág. 248).

Es entonces cuando debe ser analizada la actuación del docente como facilitador del aprendizaje y de los procesos de desarrollo, es decir, si favorece o no que los niños pongan en juego sus capacidades. Por ejemplo, si al dar las consignas se toma en cuenta que el niño además de conocimientos previos también tiene un proceso de pensamiento lógico y todo lo que esto conlleva. Se puede mencionar esto de manera breve, pero llevarlo a la práctica implica todo un proceso por parte del docente, quien en primer lugar necesitará observar, reconocer y analizar sus formas de intervención para de ahí poder modificar en la medida de lo necesario sus propias concepciones respecto a su rol como docente, y/o a lo que es el pensamiento matemático.

Otro aspecto relevante de esta investigación es aportar mayor información acerca del pensamiento matemático de los niños pequeños, que puede ser considerada para lograr mejores formas de intervención docente, por lo que se sugiere abrir una nueva línea de investigación encaminada a conocer y analizar la intervención docente teniendo como escenario la enseñanza de las matemáticas.

Resultan relevantes los hallazgos en el análisis de las entrevistas, donde se observaron diversas estrategias que los niños pequeños de 4 a 6 años de edad emplearon para resolver situaciones de adición y sustracción (cambio, combinación e igualación), sin que para ello requirieran de una enseñanza formal o de un amplio uso de convencionalismos.

Otra importante cuestión identificada mediante este estudio, es respecto al grado de dificultad que representó uno u otro tipo de problema para los niños al momento de intentar resolverlos. De todas las situaciones aditivas planteadas en este trabajo, particularmente el problema de comparación resta (peces), en el que se trataba de encontrar la diferencia entre dos cantidades dadas, resultó ser el de mayor grado de dificultad.

Por otra parte, acerca de la relación entre el nivel de estrategia empleada y la presencia de invariantes y principios de conteo, conforme los niños entrevistados mostraron mayor avance en el manejo de principios de conteo y de invariantes, hubo mayor uso de estrategias más complejas. Los niños que aún no consolidaban los principios de conteo ni las invariantes, solían emplear estrategias de menor nivel de complejidad para resolver las situaciones aditivas. Además se observó que los errores de conteo no afectaron el nivel de estrategia empleado por los niños.

Respecto a los niveles de estrategias que emplearon los niños a diferentes edades, predominó en todas edades el uso de estrategias concretas (nivel I).

Cabe preguntarse qué sucede para que en algunos casos los niños mayores emplearan estrategias más simples de las que empleaban los de menor edad que ellos. ¿Existe alguna cuestión propia o externa a ellos que los lleve a esta situación?, ¿qué tanto influyen el contexto aúlico y el sistema de enseñanza?

Es necesario investigar para conocer y analizar el desempeño de los mismos niños al inicio y al final del ciclo escolar; analizar las conceptualizaciones y las consignas dadas por la docente, así como las respuestas de los niños a partir de estas consignas; analizar también qué tanto la docente retoma los conocimientos previos de los niños, qué tanta posibilidad les da para el descubrimiento de nuevas estrategias, o para poner a prueba sus propias estrategias, sin preocuparse de los errores sino más bien aprendiendo de ellos; ¿qué hay acerca del andamiaje que como docente o entre pares se da o recibe al interior del grupo?¿el uso de estrategias propias es sustituido por el uso de aquellas que han sido indicadas por la docente?

Y es que, como afirma Fuenlabrada (2004 en SEP, 2004a), la enseñanza de las matemáticas no consiste en dar a los alumnos información específica para que estos la repitan sin elaborarla, sino en lograr que al aprender matemáticas las consideren como una herramienta que podrán utilizar para resolver los problemas.

Si al cuestionar a los niños respecto a las formas de resolver una situación aditiva se hace esperando obtener un esquema predeterminado de respuesta en particular, esto descarta de inicio la posibilidad de que los niños libremente pongan en juego sus habilidades de análisis y de pensamiento matemático, y de que planteen sus propias estrategias para la solución de problemas de adición y sustracción, en este caso. Además que también puede conducir a las respuestas estereotipadas a partir de que los alumnos esperan que sus respuestas sean "aprobadas" por el/la docente. En los niños preescolares esta forma de actuar es parte de los aprendizajes que adquieren acerca de cómo "debe" ser la dinámica en la escuela, cómo debe ser su participación, qué es lo que se espera de ellos. En este sentido, podría hablarse del currículum oculto y la manera en que influye en el aprendizaje y desempeño de los alumnos.

Por supuesto continuarán utilizando estos aprendizajes a lo largo de su vida escolar, e incluso en otros ámbitos sociales (si bien este no es tema del presente estudio, se considera que debe tenerse en cuenta) principalmente si la dinámica escolar va siempre en ese estilo.

Acerca de la diferencia encontrada entre el rendimiento de niñas y de niños, debe cuestionarse si esa diferencia se relaciona con las variaciones de estimulación que por cuestión cultural, han recibido en sus contextos familiares e incluso en la escuela a través del currículum oculto, o a diferencias en los procesos cerebrales de hombres y mujeres, o en el caso de que ambas cuestiones estén presentes, qué tanto influye cada una.

Actualmente es poco frecuente la realización de estudios al respecto, por lo que se sugiere investigar acerca del desempeño de niños en contraste con el de niñas específicamente, frente a la resolución de problemas aditivos, considerando un amplio número de sujetos dentro de los diferentes niveles educativos, para dar posibilidad de generalizar los datos que se obtengan. Esto tomando en cuenta diferentes perspectivas como la social, o la biológica, que tratan de explicar desde su punto de vista las diferencias entre ambos grupos.

Por otra parte, este trabajo no queda exento de limitaciones, dentro de las cuales identificamos que se dejó de lado la posibilidad de que los niños recurrieran al dibujo como apoyo para plantear y/o llevar a cabo sus estrategias de solución frente a los problemas planteados; únicamente se presentaron materiales concretos que podrían usar si así lo decidían, pero no se proporcionó material de escritura para quienes pudieran optar por dibujar, por lo tanto, no fue posible indagar al respecto.

También debe tenerse en cuenta el hecho de haber presentado en primer lugar el problema de comparación (peces), ya que este tipo de problema fue el más difícil de resolver. Tendríamos que indagar si hay algún cambio en la ejecución de los niños frente a este problema cuando se les presenta hasta el final, después de que ya se han familiarizado con la dinámica de la entrevista.

Otro aspecto a considerar es que faltó realizar un análisis más minucioso y comparaciones entre las estrategias empleadas específicamente para suma y las que emplean para resta y no únicamente por cada tipo de problema.

No obstante las dificultades señaladas, los hallazgos de esta investigación pueden retomarse para plantear diversas propuestas educativas, más específicamente respecto al ámbito de las matemáticas. Y es que si una de las tareas del contexto escolar es favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños, debe haber mayor claridad en cómo se logra esto, es decir, identificar y manejar los factores que intervienen para que los niños avancen hacia el uso de estrategias más complejas y que les resulten útiles al momento de enfrentar en su cotidianidad problemas que implican el uso del razonamiento lógico matemático.

Incluso en el Programa de Educación Preescolar (SEP 2004), se plantea que al enfrentarse continuamente a la resolución de problemas, los niños tienen la oportunidad de desarrollar su pensamiento matemático, por supuesto, en la medida que lo permita o favorezca la docente mediante una adecuada intervención educativa.

Al mencionar una “adecuada intervención educativa”, es claro que el docente debe regular su participación de tal forma que le permita al niño actuar de acuerdo a su propio entendimiento, y que le proporcione al niño el acompañamiento necesario para que avance hacia formas de pensamiento más complejas. La interrogante es ¿cómo lograrlo?, en este sentido se hace necesario retomar elementos de la entrevista clínica propuesta por Piaget empleados para indagar en el pensamiento del niño, ya que esta propuesta contiene elementos valiosos que el docente puede integrar a su práctica, por ejemplo: considerar que al centrarse en lo que los niños hacen y dicen, debe plantearse continuamente hipótesis acerca del significado (cognitivamente hablando) de esas acciones y discurso, para que a partir de ello plantee a su vez nuevos cuestionamientos que los conduzcan hacia niveles de pensamiento más complejos.

Esto significa que el docente debe tener suma claridad respecto a los conceptos que abordará con los alumnos, a los procesos que se dan en los niños y por supuesto, mantener una actitud abierta que les permita expresar su pensamiento reflexivo sin temor a censuras por los “errores” que pudiera cometer durante su actuar. Esto es, saber escuchar y saber acompañar a los niños en sus procesos. Por supuesto, también es respetable que cada docente varía en estilo, en cómo realiza la planeación y cómo selecciona los contenidos a trabajar en su grupo clase.

Para finalizar, a partir de este trabajo se plantean algunas líneas de investigación tales como extender este mismo estudio diseñando para ello situaciones con diferentes estructuras semánticas para cada tipo de problema, continuando sobre la línea de investigación con niños preescolares.

Otra propuesta es ampliar este estudio hacia otros niveles de educación básica, donde posiblemente empleen estrategias más complejas para la solución de problemas de adición y sustracción.

También se contempla la posibilidad de trabajar con alumnos de un mismo grupo clase, e identificar su desempeño al inicio y al final del ciclo escolar, esto es, después de haber participado bajo un mismo programa de enseñanza. Considerando, por supuesto, el diseño previo de un programa adecuado y de la correspondiente preparación del docente que lo aplique.

Se sugiere además la realización de un estudio detallado, con quienes muestran mayor nivel de desempeño frente a las tareas planteadas, así como con quienes presentan un menor nivel de desempeño. Se trata de conocer procesos al resolver los problemas, para dar lugar al diseño de adecuados programas de intervención, considerando diversos factores que participan (características del contexto escolar, familiar y del propio niño). Puede pensarse incluso en realizar un estudio longitudinal.

En general propongo abrir diversas líneas de investigación en torno al conocimiento matemático y para continuar profundizando en el tema, que en lo personal siempre he considerado como de vital importancia e interés, y más todavía tratándose de niños pequeños, ya que es la población para la cual trabajo actualmente como profesional de apoyo psicopedagógico por parte de la SEP, siendo esta misma labor la que me permite ver de manera cercana el placer e interés de los niños por el conocimiento lógico matemático, así como también me permite conocer las dificultades o los aciertos y desaciertos que pueden presentarse dentro del aula al abordar esta temática. Todos estos elementos se conjuntan y enfatizan lo enriquecedora y grata que es para mi, en lo profesional y en lo personal, la experiencia de haber realizado el presente trabajo.

REFERENCIAS

Armenta, M. y Rangel, M. (1990). Los niños de edad preescolar inventan y resuelven problemas matemáticos de suma y resta. Tesis. Escuela Normal de Ecatepec. Estado de México.

Baroody, A. (1994). *El pensamiento matemático de los niños un marco evolutivo maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. (2ª. edición). Madrid: Aprendizaje Visor.

Brissiaud, R. (1989). *El aprendizaie del cálculo: más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos.* Madrid: Aprendizaje Visor.

Bryant, P. (1997). Mathematical understanding in the nursery school years. En T. Nunes & P. Bryant (eds.) *Learning and teaching mathematics: an international perspective.* United Kingdom: Psychology Press.

Carpenter, T. y Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem - solving skills. T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.) *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, N. J.: Erlbaum Associates.

Carpenter, T. y Moser, J. (1983ª). The adquisition of addition and sustraction concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes.* En R. Lesh y M. Landau (Eds). Acquisition of mathematics Concepts and Processes (pp. 7-42). New York: Academic Press.

Contreras, D., Eloy, V., Espinoza, H., Helguera, R., Linares Ma. del C., Medina, I. Ordoñez, E. (1990). *Propuesta para el aprendizaje de la matemática. Primer grado, México*, SEP, Subsecretaría de educación Elemental, Dirección General de Educación Especial.

Delval, J. (2001). *Descubrir el pensamiento de los niños.* Paidós: España.

Díaz, J. y Bermejo, V. (2004). *El grado de abstracción en la resolución de problemas de cambio de suma y resta en contextos rural y urbano*. Universidad Complutense Madrid: España.

English L. y Halford, G. (1995). *Mathematics education: models and processes.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Escudero et al. (2008). *El aprendizaje en tercero de preescolar en México.* México: Instituto Nacional para la Educación en México.

Fuenlabrada, I. (2004). ¿Cómo desarrollar el pensamiento matemático en los niños de preescolar? La importancia de la presentación de una actividad. SEP: *Curso de formación y actualización profesional para el personal docente de educación preescolar. Volumen I.*

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. Grouws (Ed). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (Pp. 243-275). New York: MacMillan Publishing Company.

Gelman y Gallistel (1978). *The child's understanding of number.* U.S.A., Harvard University.

Ginsburg, H. (1977). *Children's arithmetic: the learning process.* New York: D. Van Nostrand Company.

González, G. (2004). *Género y matemáticas: balanceando la ecuación,* México: UPN-Porrúa.

Kamii,C. (1978). *Piaget, children, and number.* U.S.A.: National Association for the Education of Young Children.

Kamii,C. (1982). *El número en la educación preescolar.* España: Aprendizaje Visor.

Kamii, C. (1982a). La autonomía como objetivo de la educación: implicaciones de la teoría de Piaget, *Infancia y Aprendizaje,* 18 (3-32).

Kamii, C. (1985). *El niño reinventa la aritmética,* España: Aprendizaje Visor.

Miranda, J. (2003). Producción de estrategias de conteo en la solución de problemas de tipo aditivo (y sustractivo), mediante manipulación sin numerales, en alumnos de preescolar. *Revista Electrónica de Didáctica de la Matemática.* Año 3. Núm 3. Recuperado el 21 de marzo de 2010. http://www.uaq.mx/matematicas/redm/

Moser, J. (1989). Children's solution procedures. N. Hercovics y Bergeron (Eds). *Psychological aspects of learning arithmetic concepts.* Wisconsin: Manuscrito no publicado.

Nunes, T. y Bryant, P. (1998). *Las matemáticas y su aplicación, la perspectiva del niño*. México: Siglo XXI Editores.

Nunes, T. y Bryant, P. (1997). *Learning and teaching Mathematics: An International Perspective.* East Sussex, Uk: Psychology Press.

Piaget, J. Y Szeminska, A. (1987). *Génesis del número en el niño.* Buenos Aires: Editorial Guadalupe.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis, S.A.

Riley, M., Greeno, J. y Héller, J. (1983). Development of children´s problem – solving ability in arithmetic. H. Ginsburg (Eds). *The development of mathematical thingking.* Pp. 153-196. New York: Academic Press.

Ríos, R. (1991). *La enseñanza de la matemática en el nivel preescolar, Educación matemática* 3 (2).

Seastone, S. (1995). *Understanding – Greeno and Riley (1987).* Documento en línea. Recuperado el 21 de marzo de 2010. http://mathforum.org/sarah/Discussion.Seasons/Greeno.post.html

SEP (2002). *Orientaciones Pedagógicas para la Educación Preescolar de la Ciudad de México.* México: SEP

SEP (2004). *Curso de formación y actualización profesional para el personal docente de educación preescolar.* Volumen I. México: SEP.

SEP (2004a). *Programa de educación preescolar 2004.* México: SEP.

Smirnov, A., Rubinstein, S., Leontiev, A. y Tieplov, B. (1960). *Psicología.* México: Tratados y Manuales Grijalbo.

Stagler y Jenkins (1989). *Learning and mathematics.* Documento en línea. Recuperado el 20 de marzo de 2010. http:llforum.swarthmo…Sessions/Siegier.html

Steffe. (2000). *PSSM from a constructivist perspective*, Documento en línea. Recuperado el 20 de marzo de 2010. http:llwww. gse. buffalo. edulorglconferencepaper/Steffe. htm

Thornton. (1998). *Por qué es interesante la resolución infantil de problemas*. Fuente: SEP. Curso de formación y actualización profesional para el personal docente de educación preescolar.

Vergnaud, G. (199*1). El niño las matemáticas y la realidad.* México: Trillas

ANEXO 1

Estrategias incluidas en cada uno de los tres niveles, de acuerdo a la información presentada por Moser (1989).

I. MODELAJE DIRECTO.

1. Después de la construcción inicial de un conjunto.

a) Incrementando.- el conjunto inicial se incrementa agregando objetos de uno en uno. Finaliza esto cuando se ha agregado un número específico de objetos al primer conjunto. La solución del problema se obtiene contando el número de objetos de la colección total.

b) Agregando.- forma un conjunto inicial y le agrega objetos uno por uno, así hasta que el conjunto total alcance el tamaño especificado.

c) Separando de.- un subconjunto de un tamaño específico es separado del conjunto inicial. Solución al problema de sustracción: contando el número de objetos que se quitaron.

d) Separando hasta.- de un conjunto inicial se van quitando los objetos de uno en uno hasta obtener un conjunto de tamaño específico. Solución al problema de sustracción: contando el número de objetos que se separaron.

2. Después de la construcción inicial de dos conjuntos.

e) Conteo total.- une los dos conjuntos y cuenta todos los objetos para solucionar el problema aditivo. Puede formar la unión de diversas maneras:

f) Unaria.- uno de los dos conjuntos permanece en la posición original y el otro se mueve a una nueva posición.

g) Binaria .- ambos conjuntos se mueven al mismo tiempo para formar la unión.

h) Estacionaria o fija.- ninguno de los dos conjuntos se mueve, la unión se hace visual o mentalmente.

Apareamiento. Ambos conjuntos se ponen en correspondencia 1-1. Solución al problema de sustracción: determinando el exceso del conjunto más grande sobre el más pequeño.

i) Apareamiento Quitando.- La parte del conjunto más grande no apareada se separa física o visualmente del conjunto y entonces se cuenta.

j) Apareamiento Agregando.- Un tercer conjunto formado con objetos no utilizados previamente, se añade al más pequeño de los conjuntos originales hasta que sea igual al conjunto más grande. Solución: contando los objetos agregados.

3. Construcción inicial de tres conjuntos. Esta estrategia poco común fue observada por De Corte y Vershaffel en 1987 (en Moser, 1989), con niños que resolvían problemas de comparación, como el del ejemplo que presentan: “Paty tiene 5 manzanas, Ana tiene 8 más que Paty. ¿Cuántas manzanas tiene Ana?”. Aquí, el niño construye un conjunto inicial de 5, construye un segundo conjunto igual (5 objetos) y construye un tercer conjunto (de 8 objetos); solución: contar los objetos del 2° y 3er conjunto.

II. CONTEO VERBAL.

Conteo hacia delante a partir de.- Cuenta a partir del punto de entrada inicial. Termina cuando un número específico de conteos verbales ha sido pronunciado. Solución al problema aditivo: es la última palabra del conteo que se pronuncia. Es semejante al procedimiento de incrementar.

Conteo hacia delante.- A partir del punto de entrada inicial. Termina cuando el número especificado de palabras (etiquetas de los números) se ha pronunciado. Solución al problema de sustracción: contando el número de palabras dichas. Es semejante al procedimiento de agregar.

Conteo hacia atrás a partir de.- Conteo a partir del punto de entrada inicial. Termina cuando un número específico de conteos verbales ha sido pronunciado. El último conteo pronunciado (o el que le sucede en la serie) determina la solución del problema de sustracción.

Conteo hacia atrás.- A partir del punto de entrada inicial. Termina cuando un número especificado de palabras es pronunciado. La respuesta al problema de sustracción se determina contando el número de conteos verbales pronunciados.

III. ESTRATEGIAS MENTALES.

Evocación de hechos básicos.- Mediante su experiencia formal o informal, los niños conocen algunos hechos básicos que pueden mencionar sin tener que recurrir al conteo.

Hechos derivados o heurísticos.- Se descompone en partes a uno de los números dados, y se usa una de las partes con el otro número dado, como un hecho conocido.

- Combinación de dos números iguales. Para 6+7 combina 6+6, mas uno.
- Combinación de dos números cuya suma sea igual a 10. Por ejemplo, para sumar 7+5 podría decirse *"siete más tres son diez, y dos son doce".*
- Compensación. Un número que es 1 o 2 más grande o más pequeño que el número dado, se usa como parte de un hecho básico, a partir del cual se hace un ajuste a la respuesta final o al otro número. Por ejemplo, para sumar 6+8 diría “seis mas uno son 7, y ocho menos uno son 7, y yo sé que 7 y 7 son 14”. Esta estrategia es menos común que las otras dos de hechos.

ANEXO 2

PROPUESTA PARA EL TRABAJO DE MATEMÁTICAS EN PREESCOLAR – SEP (2002)

De acuerdo con los planteamientos de la SEP (2002), se espera que los niños en edad preescolar desarrollen competencias como: "Formular estrategias para resolver problemas numéricos de medición, espaciales y de representación", tal como lo menciona dentro del propósito relacionado con el "Lenguaje matemático". De hecho, para cada uno de los tres grados de educación preescolar se mencionan procedimientos específicos, relacionados con número, representación de cantidad, medición y geometría. Dentro de la temática de la presente investigación, se presenta a continuación la información correspondiente a los procedimientos relacionados con número, y que, de acuerdo con el programa SEP (2002), se espera logren los alumnos al finalizar cada uno de los tres grados de preescolar*:

LENGUAJE MATEMÁTICO. NÚMERO.		
PRIMER GADO	SEGUNDO GRADO	TERCER GRADO
PROCEDIMIENTOS ▪ Cuantificar objetos empleando la serie numérica hasta diez. ▪ Identificar la cantidad correcta de los números hasta diez. ▪ Resolver problemas que impliquen agregar y quitar, mas uno, menos uno.	PROCEDIMIENTOS ▪ Emplear la serie numérica para cuantificar hasta 29 elementos. ▪ Establecer relaciones numéricas –mayor qué, menor qué, igual qué- considerando 10 elementos. ▪ Resolver problemas que impliquen agregar, quitar, calcular, juntar, comparar, igualar y repartir, empleando 10 elementos.	PROCEDIMIENTOS ▪ Cuantificar hasta 100 elementos al reconocer la regularidad de la serie numérica. ▪ Resolver problemas que implican agregar, quitar, calcular, juntar, comparar, igualar y repartir empleando 30 elementos. ▪ Emplear diversas estrategias de conteo – diez en diez; cinco en cinco; - empleando la serie numérica en forma creciente.

(SEP, 2002, pág.11)

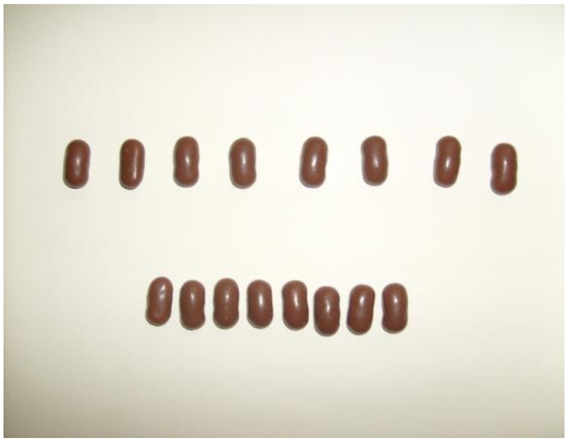

Figura 6. Material empleado para la tarea de conservación.

Figura 7. Material empleado para la tarea de conteo 1.

Figura 8. Material empleado para la tarea de conteo 2.

Figura 9. Material empleado para la tarea de conteo 3.

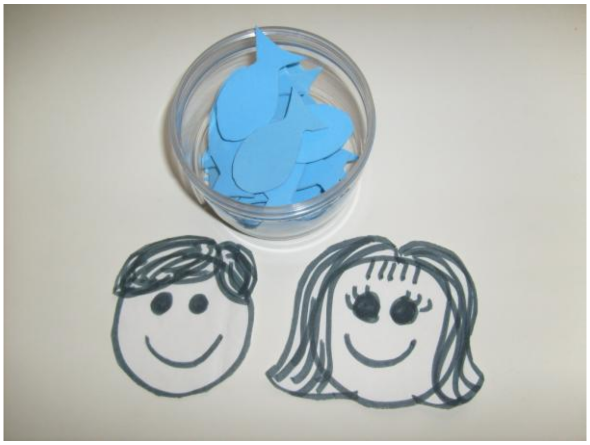

Figura 10. Material empleado para el problema 1 comparación resta (peces).

Figura 11. Material empleado para el problema 2 combinación suma (animales).


Figura 12. Material empleado para el problema 3 combinación suma (flores).

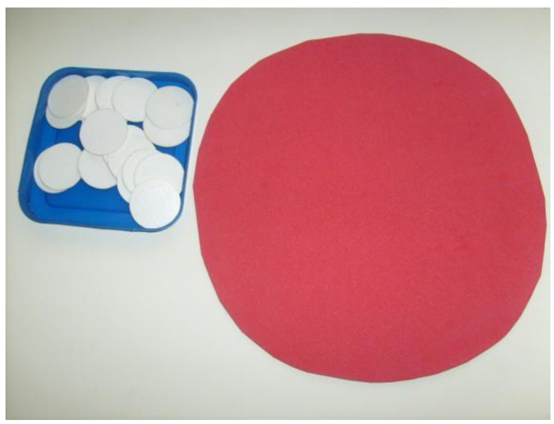
Figura 13. Material empleado para el problema 4 cambio suma (platos).


Figura 14. Material empleado para el problema 5 cambio resta (galleta).

Figura 15. Material empleado para el problema 6 igualación resta (tornillos).

Figura 16. Material empleado para el problema 7 igualación resta (dulces).