UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APROXIMACION DE FUNCIONES Y POLINOMIOS DE TAYLOR

Reporte de Seminario de Titulación

PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

P R E S E N T A

JOSE PAREDES LOPEZ

TUTOR

M.EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Enero de 2008

Datos del alumno:	**Paredes López José**
	57454185
	Universidad Nacional Autónoma de México
	Facultad de Ciencias
	Matemáticas
	083516270

Jurado Asignado

Datos del sinodal 1	**M en C José Antonio Gómez Ortega**
Datos del sinodal 2	**M en C Agustín Ontiveros Pineda**
Datos del sinodal 3	**M en C Francisco Struck Chávez**
Datos del sinodal 4	**Mat. Luis Alberto Briseño Aguirre**

TUTOR DE TESIS:

M en C Alejandro Bravo Mojica

Firma

A mis padres y hermanos

AMPARO LOPEZ TLAPANCO

GENARO PAREDES ZANE

JOSE, FRANCISCO, ROMULO, FERMINA, GEORGINA

ALFONSO, ANA, LUZ MARIA Y EDGAR

ME COMPLACE LA OPORTUNIDAD DE MENCIONAR A LA PERSONA A QUIEN DEBO MI AGRADECIMIENTO. AL MAESTRO EN CIENCIAS ALEJANDRO BRAVO MOJICA POR SU VALIOSO APOYO Y CONSEJOS QUE HICIERON POSIBLE LA REALIZACION DE ESTE TRABAJO

A mis compañeros y amigos

JESUS, JOSE, PEDRO, IBER, BEATRIZ, JOAQUIN, MARTHA, CLAUDIA, SAMANTA, ANA, SERGIO, JOCABET MARILYN, TERESA, LUCIA, MAGDALENA, VERONICA, SANDRA, ROSA, PILAR, SUSANA, VIVIANA, ISABEL, ALEJANDRA, NANCY, DIANA, BELEN Y ROCIO.

Indice

INTRODUCCIÓN

El cálculo con series empezó a florecer hacia fines del siglo XVll, con el desarrollo del cálculo. A principios del siglo XVlll Jacob Stirling y Brook Taylor sentaron los fundamentos del cálculo de diferencias finitas, que ahora desempeña un papel central en el análisis númerico. El arte de calcular da gran importancia a la elaboración minuciosa del plan que se necesita en un determinado cálculo. También trata cuestiones tales como, la precisión y exactitud, los errores, y la comprobación.

La idea central que ha estado presente en la elaboración de cada uno de los detalles de este reporte de aproximación de funciones y polinomio de Taylor, es la de presentar a los estudiantes como un apoyo más para el estudio de aproximación de funciones mediante polinomios.

Además de fomentar la intuición de los estudiantes de algunos conceptos del cálculo, es desde luego igualmente importante convencerlos de que la precisión y el rigor no constituyen ni obstáculos para la intuición ni tampoco fines en si mismos, sino simplemente el medio natural para formular y tratar las cuestiones matemáticas.

En nuestras consideraciones sobre funciones elementales hemos estudiado las propiedades de muchas de estas, pero a continuación se dará un método para calcular sus valores y poder contestar las siguientes preguntas. Por ejemplo, ¿a qué es igual sen (1/2) 0 exp (1)? Realmente lo que queremos conocer es: ¿cúal es una aproximación decimal de sen (1/2) y de exp (1)?.

Como los valores de una función polinomial son fáciles de calcular basta tan solo efectuar un número finito de multiplicaciones y adiciones si pudiéramos aproximar estas funciones elementales por funciones polinomiales, entonces tendríamos un método sencillo para determinar valores aproximados de estas funciones.

Un método tal es exactamente el de aproximación por el uso de diferenciales. Si f es diferenciable sobre un intervalo $\mathcal{F}$ y $x_0 \in \mathcal{F}$, entonces, para cualquier punto $x \in \mathcal{F}$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \Psi(x_0;x)\,(x - x_0)$$

donde $\lim\limits_{x \to x_0} \Psi(x_0;x) = 0$. La fórmula anterior nos dice que el valor de f en cualquier punto $x \in \mathcal{F}$ es igual al valor del polinomio de primer grado $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ en x más un término (el término del error) que es pequeño cuando x está proximo a x_0.

Es deseable extender este metódo de aproximación, ya que por lo anterior no tenemos ninguna forma de estimar la magnitud del error y el uso de un polinomio de primer grado puede que no nos dé una precisión suficiente en un problema dado. En este tema desarrollamos una fórmula para aproximar funciones por polinomios de grado arbitrario con una expresión para el término del error que nos permitirá estimar hasta qué punto es buena nuestra aproximación.

El polinomio de aproximación f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0) usado en el método de la diferencial es un polinomio cuyo valor en x_0 es f(x_0) y cuya derivada en x_0 es f'(x_0). Esto nos sugiere que podríamos aproximar a f por un polinomio P de grado n que tuviera la propiedad de que los valores de P y sus primeras n derivadas coincidieran con los de f en x_0; P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), . . . , $P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$. Desde luego, para tener una aproximación tal para f, f debe ser diferenciable n veces en x_0, y en este caso, hay solamente un polinomio tal. Sus coeficientes pueden determinarse como sigue.

Sea $$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

un polinomio. Entonces

$$f(x_0) = P(x_0) = a_0$$

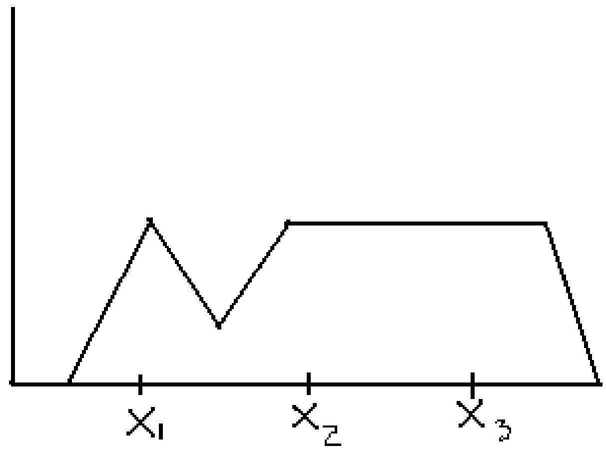
y, como

$P^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} \frac{k!}{(k - m)!} a_k (x - x_0)^{k-m}$, m = 1, . . . , n, $f^{(m)}(x_0) = P^{(m)}(x_0) = m!\ a_m$.

De donde $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, donde $f^{(0)} = f$.

Una expresión útil para el término del error cuando aproximamos una función f por P es

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$, donde $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\ (x - t)\ dt$.



I PRELIMINARES

LA DERIVADA

Uno de los objetivos de este tema será justificar el tiempo invertido aprendiendo a hallar la derivada de una función. Como veremos, el saber algo acerca de f' nos informa mucho acerca de f. Sin embargo, para obtener información sobre f' hace falta algún trabajo dificultoso. Empezaremos con un teorema fácil.

Este teorema hace referencia al valor máximo de una función en un intervalo. Aunque hemos utilizado este término de una manera informal en temas anteriores, vale la pena precisar y también generalizar.

DEFINICIÓN

Sea f una función y A un conjunto de números contenidos en el dominio de f. Un punto x de A se dice que es un punto máximo de f sobre A si

$$f(x) \geq f(y) \text{ para todo } y \text{ de } A.$$

El número f(x) mismo recibe el nombre de valor máximo de f sobre A (y decimos también que f "alcanza en x" su valor máximo sobre A).

Obsérvese que el valor máximo de f sobre A puede ser f(x) para varios x distintos (siguiente figura); en otras palabras, una función f puede tener distintos puntos máximos sobre A, aunque puede tener a lo sumo un valor máximo. Nos interesa por lo general el caso en que A es un intervalo cerrado [a , b]: si f es continua entonces f tiene efectivamente un valor máximo sobre [a , b].

Sea f una función y A un conjunto de números contenidos en el dominio de f. Un punto x de A se dice que es un punto mínimo de f sobre A si

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{para todo y de A.}$$

El número f(x) mismo recibe el nombre de valor mínimo de f sobre A (y decimos también que f "alcanza en x" su valor mínimo sobre A).

Teorema 1

Sea f una función definida sobre (a , b). Si x es un máximo (o un mínimo) para f sobre (a , b), y es derivable en x, entonces f'(x) = 0. (Obsérvese que no suponemos la derivabilidad, ni siquiera la continuidad de f en otros puntos).

DEMOSTRACIÓN

Consideremos el caso en que f tiene un máximo en x. Analíticamente, el razonamiento es como sigue. Si h es un número cualquiera tal que x + h está en (a , b), entonces

$$f(x) \geq f(x+h),$$

puesto que f tiene un máximo sobre (a , b) en x. Esto significa que

$$f(x+h) - f(x) \leq 0.$$

Así, pues si h > 0 tenemos $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0,$

y en consecuencia $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0.$

Por otra parte, si h < 0 tenemos $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0,$

de modo que $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$

Por hipótesis, f es deivable en x, de modo que estos dos límites deben ser iguales entre sí e iguales a f'(x). Esto significa que f'(x) ≤ 0 y f'(x) ≥ 0, de lo cual se sigue que f'(x) = 0.

El caso en que f tiene un mínimo en x se puede copiar lo anterior lo anterior usando la función -f.

Puesto que f'(x) depende solamente de los valores de f cerca de x, resulta casi evidente cómo obtener una versión más fuerte del teorema 1. Empezamos con una definición.

DEFINICIÓN

Sea f una función, y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto x de A es un punto máximo (mínimo) local de f sobre A si existe algún $\delta > 0$ tal que x es un punto máximo [mínimo] de f sobre A $\cap$ (x - δ , x + δ).

Teorema 2

Si f está definida sobre (a,b) y tiene un máximo (o mínimo) local en x, y f es derivable en x, entonces f'(x) = 0.

DEMOSTRACIÓN

Es una aplicación fácil del teorema 1.

El reciproco del teorema 2 decididamente no es cierto; es posible que f'(x) sea 0 aunque x no sea un punto máximo o mínimo local de f. El ejemplo más sencillo nos lo da la función f(x) = x^3; en este caso f'(0) = 0, pero f no tiene máximo ni mínimo local en ningún punto.

Probablemente los conceptos erróneos mayormente extendidos en relación con el cálculo infinitesimal se refiere al comportamiento de una función f cerca de x cuando f'(x) = 0. La observación hecha en el párrafo anterior es olvidada tan fácilmente por aquellos que quieren que el mundo sea más sencillo de lo que es.

DEFINICIÓN

Se llama punto singular o crítico de una funciòn f a todo número x tal que f'(x) = 0. El número f(x) mismo recibe el nombre de valor singular de f.

Los valores singulares de f, junto con algunos otros números, resultan ser los que deben tomarse en consideración para hallar el máximo y el mínimo de una función dada f. Para los no iniciados, el hallar el valor máximo y mínimo de una función representa uno de los aspectos más intrigantes del cálculo infinitesimal y no se puede negar que los problemas de este tipo son divertidos (Hasta que se han hecho los 100 primeros).

Consideremos en primer lugar el problema de hallar el máximo o el mínimo de f en un intervalo cerrado [a,b]. (Entonces, si f es continua, podemos por lo menos estar seguros de que existe un máximo y un mínimo). Para localizar el máximo y el mínimo de f deben considerarse tres clases de puntos:

1) Los puntos singulares de f en [a , b].
2) Los extremos a y b.
3) Los puntos x de [a , b] tales que f no es derivable en x.

Si x es un punto máximo o un punto mínimo de f sobre [a , b], entonces f debe estar en una de las tres clases arriba enumeradas: pues si x no está en el segundo o tercer grupo, entonces x está en (a , b) y f es derivable en x ; en consecuencia f'(x) = 0, por el teorema 1, y esto significa que x pertenece al primer grupo.

Si hay muchos puntos en estas tres categorías, puede todavía no ser fácil hallar el máximo y el mínimo de f, pero cuando existe solamente unos pocos puntos singulares, y solamente unos pocos puntos en los cuales f no es derivable, el procedimiento es bastante directo: Se halla simplemente f(x) para cada x que satisface f'(x) = 0, y f(x) para cada x tal que f no es derivable en x y, finalmente, f(a) y f(b). El mayor de todos éstos será el valor máximo de f y el menor será el mínimo. Damos a continuación un ejemplo sencillo.

Supongamos que se desea hallar el máximo y el mínimo de la función

$$f(x) = x^3 - x ,$$

sobre el intervalo [-1 , 2]. Para empezar, tenemos $f'(x) = 3x^2 -1$,

de modo que f'(x) = 0 cuando $3x^2 -1 = 0$, es decir, cuando $x = \sqrt[2]{1/3}$ o $x = -\sqrt[2]{1/3}$.

Los números $\sqrt[2]{1/3}$ y $-\sqrt[2]{1/3}$ están ambos en [-1, 2], de modo que el primer grupo de candidatos para el máximo y el mínimo es

$$1)\ \sqrt[2]{1/3}\ , -\sqrt[2]{1/3}.$$

El segundo grupo contiene los extremos del intervalo 2) -1 , 2.

El tercer grupo es vacío, puesto que f es derivable en todas partes. La fase final consiste en calcular

$$f(\ \sqrt[2]{1/3}\ ) = \left(\sqrt[2]{1/3}\right)^3 - \left(\sqrt[2]{1/3}\right) = \tfrac{1}{3}\ \sqrt[2]{1/3} - \sqrt[2]{1/3} = -\tfrac{2}{3}\ \sqrt[2]{1/3},$$

$$f(\ -\sqrt[2]{1/3}\ ) = \left(-\sqrt[2]{1/3}\right)^3 - \left(-\sqrt[2]{1/3}\right) = -\tfrac{1}{3}\sqrt[2]{1/3} + \sqrt[2]{1/3} = \tfrac{2}{3}\ \sqrt[2]{1/3},$$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 +1 = 0,$$

$$f(2) = (2)^3 - (2) = 8 - 2 = 6.$$

Evidentemente el valor mínimo es $-\frac{2}{3}\ \sqrt[2]{1/3}$, que se presenta en $\sqrt[2]{1/3}$ y el valor máximo es 6, que se presenta en 2.

Con este modo de proceder, si es factible, se localizarán siempre los valores máximo y mínimo de una función continua en un intervalo cerrado. Si la función que estamos tratando no es continua, o si estamos buscando el máximo o mínimo sobre un intervalo abierto o sobre toda la recta, entonces no podemos ni si quiera estar seguros de antemano de que existan los valores máximo o mínimo, de modo que toda la información obtenida por este procedimiento puede no decirnos nada. Sin embargo, un poco de ingenio podrá revelar muchas veces la naturaleza de las cosas.

Un ejemplo más puede ser útil. Supongamos que se desea hallar el máximo y el mínimo, si existen, de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2},$$

sobre el intervalo abierto (-1 , 1). Se tiene $f'(x) = \dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$,

de modo que $f'(x) = 0$ solamente para $x = 0$. Podemos ver inmediatamente que para x proximos a 1 o -1 los valores de $f(x)$ se hacen arbitrarimente grandes, de modo que f carece de máximo. Esta observación hace fácil también demostrar que f tiene un mínimo en 0. Basta observar que habrá números a y b tales que $f(x) > f(0)$ para $-1 < x \leq a$ y $b \leq x < 1$.

Al resolver estos problemas, intencionalmente no hemos dibujado las gráficas de $f(x) = x^3 - x$ y $f(x) = 1/(1 - x^2)$, pero no será mal dibujar la gráfica siempre que no se confíe exclusivamente en el dibujo para demostrar algo. Efectivamente, vamos a presentar ahora un método de esbozar la gráfica de una función que verdaderamente da información suficiente para ser utilizada en la discusión de máximos y mínimos; de hecho podremos encontrar incluso los máximos y los mínimos locales. Este teorema supone la consideación del signo de $f'(x)$ y se basa en algunos teoremas profundos.

Los teoremas acerca de derivadas demostrados hasta ahora proporcionan siempre información acerca de f' en términos de información sobre f. Esto es verdad incluso en teorema 1, aunque este teorema puede algunas veces aplicarse para determinar cierta información acerca de f, a saber, la localización de máximos y mínimos. Al introducir por primera vez la derivada, destacamos el hecho de que $f'(x)$ no es $[f(x + h) - f(x) / h]$ para ningún h particular, sino solamente el límite de estos números cuando h tiende hacia 0; se tropieza con este hecho al tratar de extraer información acerca de f a partir de información acerca de f'. La ilustración más sencilla de las dificultades que se encuentran nos la suministra la siguiente cuestión: S i $f'(x) = 0$ para todo x, ¿ debe ser f una función constante ?. Es imposible imaginar de qué modo f podría ser ota cosa, esta convicción es reforzada al considerar la interpretación física; si la velocidad de una partícula es constantemente 0, evidentemente la partícula debe estar en reposo. Sin embargo, es difícil iniciar siquiera una demostración de que solamente las funciónes constantes satisfacen $f'(x) = 0$ para toda x. La hipótesis $f'(x) = 0$ significa solamente que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 0,$$

y no está claro en absoluto de qué modo se pude utilizar la información acerca del límite para obtener iformación acerca de la función.

El hecho que f es una función constante si $f'(x) = 0$ para todo x, muchos otros hechos de este mismo tipo, pueden obtenerse todos a partir de un teorema fundamental, llamado teorema del valor medio, que establece resultados mucho más fuertes. La gráfica hace ver que si f es derivable sobre [a , b], entonces existe algún x en (a , b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geométricamente esto significa que alguna tangente es paralela a la recta que une (a, f(a)) con (b, f(b)). El teorema del valor medio afirma que esto es así ; existe algún x en (a, b) tal que f'(x), la tasa instantánea de variación de f sobre x, es exactamente igual a la variación media de f sobre [a,b] siendo esta variación media [f(b) - f(a)]/[b - a]. Por ejemplo, si recorremos 60 millas en una hora, entonces en algún momento habremos estado viajando exactamente a 60 millas por hora. Este teorema es uno de los instrumentos teóricos más importantes del cálculo infinitesimal; probablemente el resultado más profundo acerca de derivadas. Esta afirmación podría quizá deducir que la demostración es difícil, pero en esto se equivocaría; los teoremas difíciles ya los hemos pasado. Bien es verdad que si se intenta demostrar por sí mismo el teorema de valor medio probablemente fracasará, pero esto no quiere decir que el teorema sea difícil, ni tampoco es algo por lo que deba avergonzarse. La demostración del teorema por primera vez constituyó una hazaña, pero hoy día podemos presentar una demostración muy sencilla. Será útil empezar con un caso especial.

Teorema 3

(TEOREMA DE ROLLE)

Si f es continua sobre [a , b] y derivable sobre (a , b), y f(a) = f(b), entonces existe un número x en (a , b) tal que f'(x) = 0.

DEMOSTRACIÓN

De la continuidad de f sobre [a, b] se deduce que f tiene un valor máximo y uno mínimo sobre [a , b]. Supongamos en primer lugar que el valor máximo se presenta en un punto de (a , b). Entonces, según el teorema 1, f'(x) = 0, y la demostración esta hecha.

Supongamos ahora que el valor mínimo de f se presenta en algún punto x de (a , b). Entonces, otra vez f'(x) = 0 según el teorema 1. Supongamos finalmente, que los valores máximo y mínimo se presentan ambos en los extremos. Puesto que f(a) = f (b), los valores máximo y mínimo de f son iguales, de modo que f es una función constante, y para una función constante se puede elegir cualquier x de (a , b), pués para las constantes f'(x) = 0.

Observemos que para aplicar el teorema 1 fue verdaderamente necesaria la hipótesis de que f fuese derivable en todo punto de (a , b). Sin esa suposición, el teorema es falso.

Puede resultar sorprendente que se dé un nombre especial a un teorema tan fácil como el teorema de Rolle. La razón está en que, aunque el teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio, suministra también una demostración sencilla de este último teorema. Para demostrar el teorema del valor medio aplicaremos el teorema de Rolle a la función que da la longitud del segmento vertical ; ésta es la diferencia entre f(x), y la altura en x de la recta $\mathcal{L}$ entre (a , f(a)) y (b , f(b)). Puesto que $\mathcal{L}$ es la gráfica de

$$g(x) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] (x - a) + f(a),$$

nos conviene considerar $f(x) - \left[\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] (x - a) - f(a).$

La constante f(a) resulta ser irrelevante.

Teorema 4
(TEOREMA DEL VALOR MEDIO)
Si f es continua en [a , b] y derivable en (a , b), entonces existe un número x en (a , b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $h(x) = f(x) - \left[\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] (x - a).$

Evidentemente, h es continua en [a , b] y derivable en (a , b), y

$$h(a) = f(a),$$

$$h(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] (b -a)$$

$$= f(a).$$

En consecuencia, podemos aplicar el teorema de Rolle a h y deducir que existe algún x en (a , b) tal que

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De modo que $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}.$

Observemos que el teorema del valor medio es todavía de aquellos teoremas en los que se obtiene información acerca de f' a partir de f. Esta información es, sin embargo, tan fuerte que podemos ir ahora en dirección opuesta.

COROLARIO 1
Si se define f sobre un intervalo y $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo, entonces f es constante en el intervalo.
DEMOSTRACIÓN
Sean a y b dos puntos cualesquiera del intervalo con $a \neq b$. Entonces existe algún x en (a , b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo, de modo que $0 = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a},$

y en consecuencia f(a) = f(b). Así, pues, el valor de f en dos puntos cualesquiera del intervalo es el mismo, es decir, f es constante en el intervalo.

Naturalmente, el corolario 1 no se cumple para funciones definidas en dos o más intervalos. A continuación daremos unos ejemplos

1) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{array} \right\}$,

2) $g(x) = \left\{ \begin{array}{l} x^2,\ x < 0 \\ x,\ x > 0 \end{array} \right\}$,

3) $h(x) = \left\{ \begin{array}{l} -x,\ x < 0 \\ x/2,\ x > 0 \end{array} \right\}$.

COROLARIO 2

Si f y g están definidas en el mismo intervalo y f'(x) = g'(x) para todo x del intervalo, entonces existe algún número c tal que f - g = c.

DEMOSTRACIÓN

Para todo x del intervalo se tiene (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0, de modo que según el corolario 1, existe un número c tal que f - g = c.

La proposición del corolario siguiente exige alguna terminología que es la siguiente.

DEFINICIÓN

Se dice que una función f es creciente sobre un intervalo si f(a) < f(b) siempre que a y b sean dos puntos del intervalo con a < b. La función f es decreciente sobre un intervalo si f(a) > f(b) para todos los a y b del intervalo con a < b. Muchas veces decimos simplemente que f es creciente o decreciente, en cuyo caso se sobreentiende que el intervalo es el dominio de f.

COROLARIO 3

Si f'(x) > 0 para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en el intervalo; si f'(x) < 0 para todo x del intervalo, entonces f es decreciente en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos el caso f'(x) > 0. Sean a y b dos puntos del intervalo con a < b. Entonces existe algún x en (a , b) con

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pero f'(x) > 0 para todo x de (a , b), de modo que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$

Puesto que b - a > 0 se sigue que f(b) > f(a).

La demostración en el caso de f'(x) < 0 para todo x se deja de ejercicio.

Reglas

1) Si f' > 0 en algún intervalo de la forma (a , x) y f' < 0 en algún intervalo de la forma (x , b), entonces x es un máximo local.

2) Si f' < 0 en algún intervalo de la forma (a , x) y f' > 0 en algún intervalo de la forma (x , b) , entonces x es un mínimo local.

3) Si f' tiene el mismo signo en (a , x) que en (x , b), entonces x no es punto máximo ni mínimo local.

Las funciones polinómicas pueden analizarse todas de esta manera, y es incluso posible describir la forma general de la gráfica de tales funciones. para empezar, nos hace falta un resultado. Si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

entonces f tiene a lo sumo n "raíces", es decir, existen a lo más n números x tales que f(x) = 0. Aunque esto en realidad es un teorema algebraico, puede aplicarse el cálculo infinitesimal para obtener una demostración fácil. Obsérvese que x_1 y x_2 son raíces de f de modo que, f(x) = 0 entonces según el teorema de Rolle, existe un número x entre x_1 y x_2 tal que f'(x) = 0. Esto significa que si f tiene k raíces distintas $x_1 < x_2 < . . . < x_k$, f' tiene por lo menos k -1 raíces distintas: Una entre x_1 y x_2, una entre x_2 y x_3, etc. Es ahora fácil demostar por inducción que una función polinómica tiene a lo sumo n raíces.

DEMOSTRACIÖN

1) Si f(x) es de grado 1 f(x) = ax + b, con $a \neq 0$ y la única raíz es $-\frac{b}{a}$.

2) Suponemos que se cumple para f(x) de grado n tiene a lo más n raíces

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \cdot \cdot \cdot + b_n x^n$$

3) Demostraremos que $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdot \cdot \cdot + b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1}$,

tiene a lo más n + 1 raíces, no puede tener más de n + 1 raíces, pues si así fuera, g'(x) tendría más de n raíces.

Con esta información no es difícil describir la gráfica de

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

La derivada, al ser una función polinómica de grado n - 1, tiene a lo sumo n - 1 raíces. Por lo tanto, f tiene a lo sumo n -1 puntos singulares. Por supuesto, un punto singular no es necesariamente un punto máximo o mínimo local, pero de todos modos, si a y b son puntos singulares de f, entonces f' se conservará o bien positiva o bien negativa sobre (a , b), ya que f' es continua; en consecuencia f será o bien creciente o decreciente sobre (a , b). Así, pues, f tiene a lo sumo n regiones de crecimiento o decrecimiento.

Aunque la localización de los máximos y mínimos locales de una función queda revelada siempre mediante un dibujo detallado de su gráfica, por lo general no hace falta trabajar tanto. Existe un criterio para los máximos y mínimos locales que depende del comportamiento de la función solamente en sus puntos singulares.

Teorema 5

Supongamos f'(a) = 0. Si f''(a) $>$ 0, entonces f tiene un mínimo local en a; si f''(a) $<$ 0, entonces f tiene un máximo local en a.

DEMOSTRACIÓN

Por definición $\quad f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$

Puesto que f'(a) = 0, esto puede escribirse $\quad f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{h}.$

Supongamos ahora que f''(a) $>$ 0. Entonces f'(a + h) / h debe ser positivo para h suficientemente pequeño. Por lo tanto:

f'(a + h) debe ser positivo para h $>$ 0 suficientemente pequeño
y f'(a + h) debe ser negativo para h $<$ 0 suficientemente pequeño.

Esto significa que f crece a la derecha de a y f decrece a la izquierda de a. En consecuencia, f tiene un mínimo local en a.

La demostración para el caso f''(a) $<$ 0 es parecida.

Es interesante observar que el teorema 5 demuestra automáticamente un reciproco parcial de sí mismo.

Teorema 6

Supongamos que existe f''(a). Si f tiene un mínimo local en a, entonces f''(a) $\geq$ 0; si f tiene un máximo local en a, entonces f''(a) $\leq$ 0.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que f tiene un mínimo local en a. Si f''(a) $<$ 0, entonces f tendría también un máximo local en a, según el teorema 5. Así pues, f sería constante. de modo f''(a) = 0, lo cual es una contradicción. Se debe tener, por lo tanto, f''(a) $\geq$ 0.

El caso de un máximo local se trata de manera análoga.

En lo que queda de este tema no trataremos ya del trazado de gráficas, ni de máximos y mínimos, sino de tres consecuencias del teorema del valor medio. La primera de ellas es un teorema sencillo, pero muy elegante, que desempeña un papel importante.

Teorema 7

Supongamos que f es continua en a, y que existe f'(x) para todos los x de algún intervalo que contiene a, excepto posiblemente para x = a. Supongamos, además, que existen $\lim_{x \to a} f'(x)$. Entonces existe también f'(a), y

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x).$$

DEMOSTRACIÓN

Por definición $\quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$

Para $h > 0$ suficientemente pequeño, la función f será continua en $[a, a+h]$ y derivable en $(a, a+h)$ (un enunciado parecido se cumple para $h < 0$ suficientemente pequeño) . Según el teorema del valor medio, existe un número α_h en $(a, a+h)$ tal que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\alpha_h).$$

Ahora bien, α_h se aproxima a **a** cuando h se aproxima a 0, puesto que α_h está en $(a, a+h)$; de la existencia de $\lim_{x \to a} f'(x)$, se sigue que

$$f'(a) = \lim_{h \to o} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} f'(\alpha_h) = \lim_{x \to a} f'(x).$$

El próximo teorema, que es una generalización del teorema del valor medio, tiene interés principalmente por sus aplicaciones.

Teorema 8

(TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY)

Si f y g son continuas en [a , b] y derivables en (a , b), entonces existe un número x en (a , b) tal que

$$[f(b) - f(a)]\, g'(x) = [g(b) - g(a)]\, f'(x).$$

Si $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$, esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[Obsérvese que si $g(x) = x$ para todo x, entonces $g'(x) = 1$ y obtenemos el teorema del valor medio. Por otra parte, al aplicar el teorema del valor medio a f y a g por separado, se encuentra que existe x e y en (a , b) con

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(y)};$$

pero no existe ninguna garantía de que los x e y hallados de esta manera sean iguales, Estas observaciones pueden hacer creer que el teorema del valor medio de Cauchy ha de ser muy difícil de demostrar, pero en realidad será suficiente con el más sencillo de los artificios.]

DEMOSTRACIÓN

Sea $\quad h(x) = f(x)\,[\,g(b) - g(a)\,] - g(x)\,[\,f(b) - f(a)\,].$

Entonces h escontinua en [a , b], derivable en (a , b), y

$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$

Del teorema de Rolle se sigue que $h'(x) = 0$ para algún x de (a , b), lo cual significa que

$$0 = f'(x)\ [g(b) - g(a)] - g'(x)\ [f(b) - f(a)].$$

El teorema del valor medio de Cauchy es el instrumento básico que se necesita para demostrar un teorema que facilita el cálculo de límites de la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

cuando $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0.$

Toda derivada es un límite de esta forma y el cálculo de derivadas requiere con frecuencia bastante trabajo. Sin embargo, si ya se conocen algunas derivadas, se podrá con facilidad muchos límites de esta forma.

Teorema 9
(REGLA DE L'HOPITAL)
Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0,$

y supongamos también que existe $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x).$

Entonces existe $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$, y $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

(Obsérvese que el teorema 7 es un caso particular.)

DEMOSTRACIÓN
La hipótesis de que exisre $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ contiene implícitamente dos suposiciones:

1) Existe un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ tal que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen para todo x de $(a - \delta, a + \delta)$ excepto, posiblemente, para $x = a$.
2) En este intervalo $g'(x) \neq 0$ con, una vez más, la posible excepción de $x = a$.

Por otra parte, no se supone siquiera que f y g estén definidas en a. Si definimos $f(a) = g(a) = 0$ [cambiando si es preciso los valores anteriores de f(a) y g(a)], entonces f y g son continuas en a. Si $a < x < a + \delta$, entonces el teorema del valor medio y el teorema del valor medio de Cauchy son aplicables a f y g sobre el intervalo [a , x] (y una proposición análoga es válida para $a - \delta < x < a$). Aplicando primero el teorema del valor medio a g, vemos que $g(x) \neq 0$, pues si fuera $g(x) = 0$, entonces existiría algún x_1 en (a , x) con g'(x_1) = 0, en contradicción con 2). Aplicando ahora el teorema del valor medio de Cauchy a f y g, vemos que existe un número α_x en (a , x) tal que

$$[\, f(x) - 0\,]\, g'(\alpha_x) = [\, g(x) - 0\,]\, f'(\alpha_x) \quad \text{o} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

Ahora bien, α_x se aproxima a **a** cuando x se aproxima a **a**, puesto que α_x está en (a , x); de la existencia de $\lim_{y\to a} f'(y)/g'(y)$, se sigue que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

LA INTEGRAL

Teorema 1

(PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INFINITESIMAL)

Sea f integrable sobre [a , b] y definamos F sobre [a , b] por

$$F(x) = \int_a^b f(x)\ .$$

Si f es continua en c de [a , b], entonces F es derivable en c, y F'(c) = f(c).

(Si c = a o b, entonces F'(c) se entiende que representa la derivada por la derecha o por la izquierda de f .)

DEMOSTRACIÓN

Supondremos que c está en (a , b); el lector podrá suplir las fáciles modificaciones necesarias para c = a o b. Por definición.

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}.$$

Supongamos primero que h > 0. Entonces $F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$

Definamos m_h y M_h como sigue

$$m_h = \inf\{\, f(x)\colon\ c \le x \le c + h \,\},$$
$$M_h = \sup\{\, f(x)\colon\ c \le x \le c + h \,\}\ .$$

Del teorema que dice (Supóngamos f integrable sobre [a , b] y que $m \le f(x) \le M$ para todo x de [a , b], Entonces

$$m\,(b - a) \le \int_a^b f \le M\,(b - a)\ .)$$

se sigue que $m_h \cdot h \le \int_c^{c+h} f \le M_h \cdot h.$

Por lo tanto, $m_h \le \dfrac{F(c+h) - F(c)}{h} \le M_h.$

Si h $\leq$ 0, solamente habrá que cambiar unos pocos detalles del razonamiento. Sea

$$m_h = \inf \{ f(x)\colon c + h \leq x \leq c \},$$
$$M_h = \sup \{ f(x)\colon c + h \leq x \leq c \}.$$

Entonces $\quad m_h \cdot (-h) \leq \int_{c+h}^{c} f \leq M_h \cdot (-h)$.

Por ser $\quad F(c + h) - F(c) = \int_{c}^{c+h} f = - \int_{c+h}^{c} f.$

se obtiene $\quad m_h \cdot h \geq F(c + h) - F(c) \geq M_h \cdot h.$

Puesto que h < 0, la división por h invierte de nuevo la desigualdad, obteniéndose el mismo resultado que antes:

$$m_h \leq \frac{F(c + h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Esta igualdad se cumple para cualquier función integrable, sea o no continua. Sin embargo, puesto que f es continua en c.

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} M_h = f(c),$$

y esto demuestra que $\quad F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c + h) - F(c)}{h} = f(c).$

Aunque el teorema 1 trata solamente de la función obtenida al variar el límite suprior de integración, un sencillo artificio indica lo que ocure cuando se varía el límite infirior. Si se define G por

$$G(x) = \int_{x}^{b} f ,$$

entonces $\quad G(x) = \int_{a}^{b} f - \int_{a}^{x} f$.

En consecuencia, si f es continua en c, entonces $G'(c) = -f(c)$.

El signo menos que aparece aquí nos viene muy bien, permitiéndonos extender el teorema 1 en el caso en que la función

$$F(x) = \int_{a}^{x} f$$

esté definida incluso para x < a. En este caso podemos escribir $F(x) = - \int_{x}^{a} f,$

de modo que si c < a tenemos $F'(c) = - (- f(c)) = f(c),$

exactamente lo mismo que antes.

Obsérvese que en cualquier caso, la derivabilidad de F en c queda asegurada por la continuidad de f en c. Sin embargo, el teorema 1 es interesante en extremo cuando f es continua en todos los puntos de [a , b]. En este caso F es derivable en todos los puntos de [a , b] y F' = f.

En general, es extremadamente difícil decidir cuándo una función dada f es la derivada de alguna otra función; por esta razón son particularmente interesantes. Sin embargo, si f es continua no existe problema, ya que según el teorema 1, f es derivada de alguna función, a saber la función

$$F(x) = \int_a^x f.$$

El teorema 1 tiene un corolario sencillo que con frecuencia reduce los cálculos de integrales a una trivialidad.

COROLARIO 1

Si f es continua sobre [a,b] y f = g' para alguna función g, entonces $\int_a^b f = g(b) - g(a)$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\quad F(x) = \int_a^b f$.

Entonces F' = f = g' sobre [a , b]. En consecuencia, existe un número c tal que

$$F = g + c.$$

El número c pude calcularse fácilmente: obsérvese que $0 = F(a) = g(a) + c$,

de modo que $c = -g(a)$: así pues, $F(x) = g(x) - g(a)$.

Esto se cumple, en particular, para x = b. Así pues,

$$\int_a^b f = F(b) = g(b) - g(a) .$$

La demostración de este corolario tiende, a primera vista, a hacer que el corolario parezca inútil: después de todo, ¿ para qué hace falta saber que

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

si g es , por ejemplo, $g(x) = \int_a^x f$?. El caso es que por supuesto podría ser posible tener una función g completamente distinta con esta propiedad. Por ejemplo, si

$$g(x) = \frac{x^3}{3} \quad y \qquad f(x) = x^2,$$

entonces g'(x) = f(x), de modo que obtenemos, sin necesidad de calcular sumas inferiores y superiores:

$$\int_a^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Naturalmente no conocemos ninguna expresión sencilla para

$$\int_a^b \frac{1}{x} \, dx .$$

El problema de calcular esta integral lo estudiamos más adelante, pero esto nos da una buena oportunidad para advertir contra un serio error posible. La conclución del corolario 1 se confunde a menudo con la definición de integral, muchos estudiantes creen que $\int_a^b f$ se define por : "g(b) – g(a), donde g es una función cuya derivada es f ". Esta "definición" es no solamente equivocada, sino inútil. Una razón es que una funión puede ser integrable sin ser la derivada de otra función. Por ejemplo, si $f(x) = 0$ para $x \neq 1$ y $f(1) = 1$, entonces f es integrable, pero f no puede ser una derivada. (¿ Por qué no ?) Existe también otra razón mucho más importante: Si f es continua, entonces sabemos que f = g' para alguna función g; pero sabemos esto solamente por el teorema 1. La función $f(x) = 1/x$ proporciona un ejemplo excelente: si $x > 0$, entonces $f(x) = g'(x)$, donde

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt,$$

y no conocemos ninguna función g con esta propiedad.

El corolario del teorema 1 es tan útil que es llamado con frecuencia el segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal. En esta tema reservamos el nombre para un resultado algo más fuerte (que, sin embargo, en la práctica no es mucho más útil). Según acabamos de decir, una función f puede ser de la forma g' aunque no sea continua. Si f es integrable, entonces se cumple todavía que

$$\int_a^b f = g(b) - g(a) .$$

La demostración, si embargo, debe ser del todo diferente, no podemos aplicar el teorema 1, de modo que deberemos volver a la definición de integrales.

Teorema 2

(SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INFINITESIMAL)

Si f es integrable sobre [a , b] y f = g' para alguna función g, entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a) .$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $P = \{ t_0 , \; . \; . \; . \; t_n \}$ una partición cualquiera de $[a , b]$. Según el teorema del valor medio existe un punto x_i en $[t_{i-1} , t_i]$ tal que

$$\begin{aligned} g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(x_i) (t_i - t_{i-1}) \\ &= f(x_i) (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Si $m_i = \inf \{ f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i \}$,

$M_i = \sup \{ f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i \}$,

entonces evidentemente $m_i (t_i - t_{i-1}) \le f(x_i) (t_i - t_{i-1}) \le M_i (t_i - t_{i-1})$,

es decir, $m_i (t_i - t_{i-1}) \le g(t_i) - g(t_{i-1}) \le M_i (t_i - t_{i-1})$.

Sumando estas ecuaciones para $i = 1, 2, \; . \; . \; . \; ,n$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) \le g(b) - g(a) \le \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$$

de manera que $L(f, P) \le g(b) - g(a) \le U(f, P)$

para toda partición P. Pero esto significa que $g(b) - g(a) = \int_a^b f$.

Hemos utilizado ya el corolario del teorema 1 (o lo que equivale a lo mismo, el teorema 2) para encontrar las integrales de unas cuantas funciones elementales:

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1.$$

(a y b ambos positivos o negativos si $n < 0$.)

Teorema 3

(INTEGRACIÓN POR PARTES)

Si f y g son continuas, entonces

$$\int_a^b f(x) \, g'(x) \, dx = [f(x) \, g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \, g(x) \, dx.$$

DEMOSTRACIÓN

La fórmula $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$

puede escribirse $f\,g' = (f\,g)' - f'\,g$.

Ahora integramos ambos lados de **a** a b $\displaystyle\int_a^b f\,g' = \int_a^b (f\,g)' - \int_a^b f'\,g,$

Teorema 4
(FORMULA DE SUSTITUCIÓN)

Si f y g' son continuas, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g)\cdot g'$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN
Si Fes una primitiva de f, entonces el primer miembro es $F(\,g(\,b\,)\,) - F(\,g(\,a\,)\,)$. Por otra parte,

$$(\,F\circ g\,)' = (\,F\circ g\,)\cdot g' = (\,f\circ g\,)\cdot g',$$

de modo que $F\circ g$ es una primitiva de $(\,f\circ g\,)\cdot g'$ y el segundo miembro es

$$(\,F\circ g\,)(\,a\,) - (\,F\circ g\,)(\,b\,) = F(\,g(\,b\,)\,) - F(\,g(\,a\,)\,).$$

Las aplicaciones más sencillas de la fórmula de sustitución consiste en reconocer que una función dada es de la forma $(f\circ g)\cdot g'$. Por ejemplo, la integración de

$$\int_a^b \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx = \int_a^b (\operatorname{sen} x\,)^5 \cos x\,dx,$$

es facilitada por la aparición del factor $\cos x$, el cual será el factor $g'(\,x\,)$ para $f(\,x\,) = \operatorname{sen} x$; la expresión que queda, $(\operatorname{sen} x)^5$, puede escribirse como $(g(\,x\,)\,)^5 = f(g(\,x\,)\,)$, para $f(\,u\,) = u^5$.Así pues,

$$\int_a^b \operatorname{sen}^5 x\ \cos x\,dx \qquad \begin{bmatrix} g(x) = \operatorname{sen} x \\ f(u) = u^5 \end{bmatrix}$$

$$= \int_{a}^{b} f(g(x))\ g'(x)\ dx \ = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$$

$$\int_{\text{sen } a}^{\text{sen } b} u^5 du = \frac{\text{sen}^6 b}{6} - \frac{\text{sen}^6 a}{6}.$$

Es totalmente antieconómico obtener primitivas mediante la fórmula de sustitución hallando primero integrales definidas. En vez de esto, pueden combinarse las dos etapas, dando lugar al siguiete proceso:

1) Sea

$$u = g(\ x\ ) \ \ y \ \ du = g'(\ x\ )\ ;$$

(después de esta manipulación solamente debe apaecer la letra u, no la letra x).

2) Hallese una primitiva (como expresión en u).

3) Sustituyase u de nuevo por g(x).

La mayor parte de los problemas de sustitución resulta mucho más fáciles si se recurre a estos trucos de expresar x en función de u, y dx en función de du, en vez de hacer lo contrario. No es difícil ver por qué este truco da siempre buen resutado (siempre que la función que expresa u en términos de x sea uno a uno para todos los x que se consideren): Si aplicamos la sustitución

$$u = g(x), \qquad \begin{array}{c} x = g^{-1}(u) \\ dx = (g^{-1})'\ (u)\ du \end{array}$$

a la integral $\int f(g(x))\ dx$,

obtenemos 1) $\int f(u)\ (g^{-1})'(u)\ du$.

Por otra parte, si aplicamos la sustitución directa

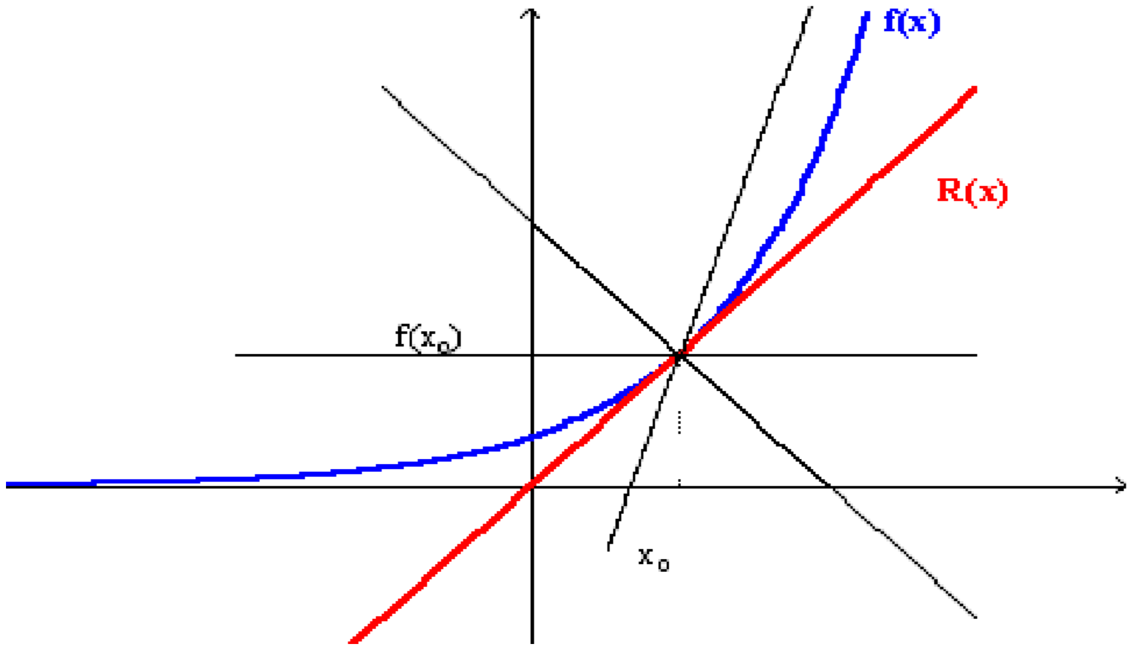
$$\begin{array}{c} u = g(x) \\ du = g'(x)\ dx \end{array}$$

a la misma integral $\int f(g(x))\ dx = \int f(g(x)) \cdot \frac{1}{g'(x)} \cdot g'(x)\ dx$,

obtenemos

$$2) \int f(u) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(u))}\ du.$$

Las integrales 1) y 2) son idénticas ya que (g^{-1})'(u) = 1/g'(g^{-1}(u)).



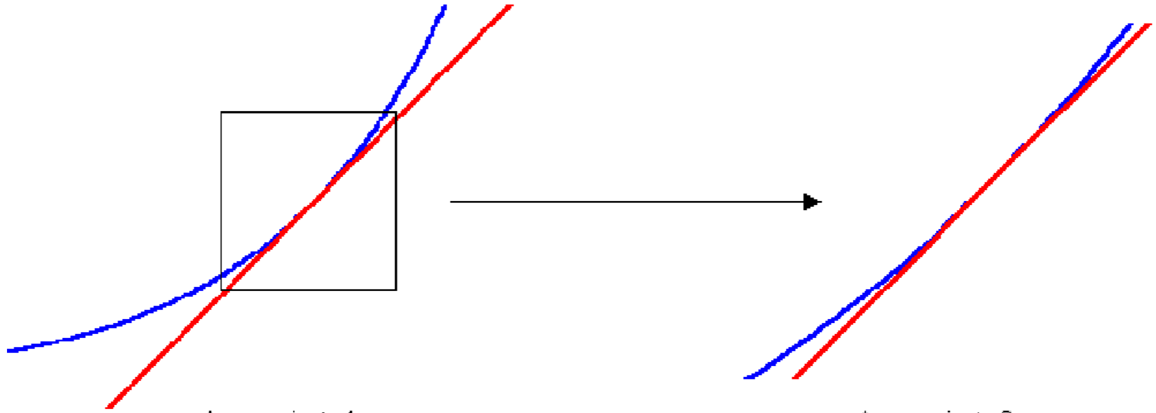
II APROXIMACION DE FUNCIONES Y EL TEOREMA DE TAYLOR

Sabemos que la recta tangente, como la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en las cercanías del punto de tangencia $p_0 = (x_0, f(x_0))$, es aquella recta que pasa por el punto mencionado y tiene la misma pendiente que la curva en p_0 (primera derivada en el punto), lo que hace que la recta tangente y la curva sean prácticamente indistinguibles en las cercanías del punto de tangencia.

Gráficamente podemos observar que la curva se pega "suavemente" a la recta en este entorno, de tal manera que "de todas las rectas que pasan por el punto, es esta recta la que más se parece a la curva cerca del punto".

Nótese que cerca del punto de tangencia, la curva se comporta casi linealmente, como se puede apreciar si hacemos acercamientos a la gráfica anterior.

Como observamos en los problemas de cálculo diferencial, si x se encuentra "lejos" de x_0, la recta tangente ya no funciona como aproximador. Parece pues natural preguntarnos por otra función (no lineal) que sirva a nuestros propósitos. La recta tangente es un polinomio de grado 1, el tipo más sencillo de función que podemos encontrar, por lo que podemos tratar de ver si es posible encontrar un polinomio de grado dos que nos sirva para aproximar nuestra función en un rango más grande que la recta tangente.



Acercamiento 1 Acercamiento 2

Veamos que sucede si en lugar de aproximarnos con una recta tratamos de hacerlo con una parábola, es decir tratemos de encontrar de todas las parábolas que pasan por (x_0, f(x_0)), la que mejor aproxima a la curva, es decir tratamos de encontrar "la parábola tangente" . (Nota: La parábola tangente a una curva no es única).

Naturalmente a esta parábola $P(x) = a + b(x - x_o) + c(x - x_0)^2$ debemos pedirle que pase por el punto, que tenga la misma inclinación (primera derivada) y la misma concavidad que la parábola (segunda derivada), es decir debemos pedirle:

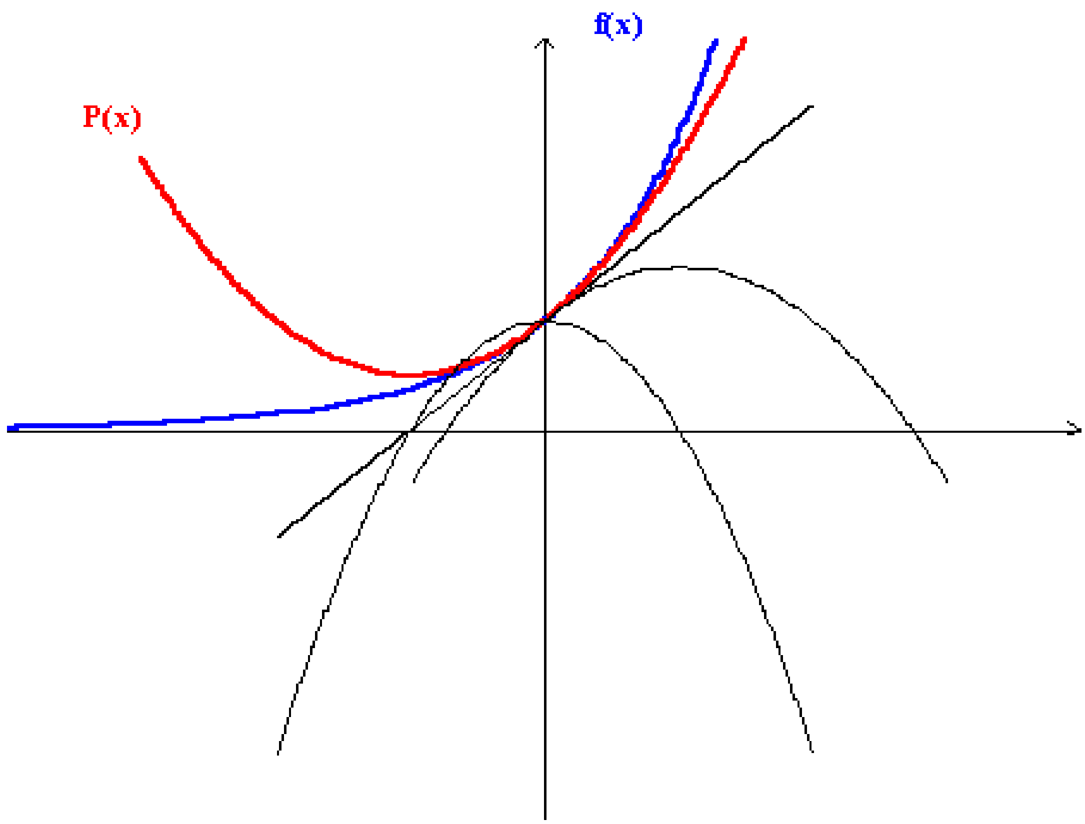
a) $P(x_0) = f(x_0)$
b) $P'(x_0) = f'(x_0)$
c) $P''(x_0) = f''(x_0)$
Como $P(x_0) = a$, $P'(x_0) = b$ y $P''(x_0) = 2c$,

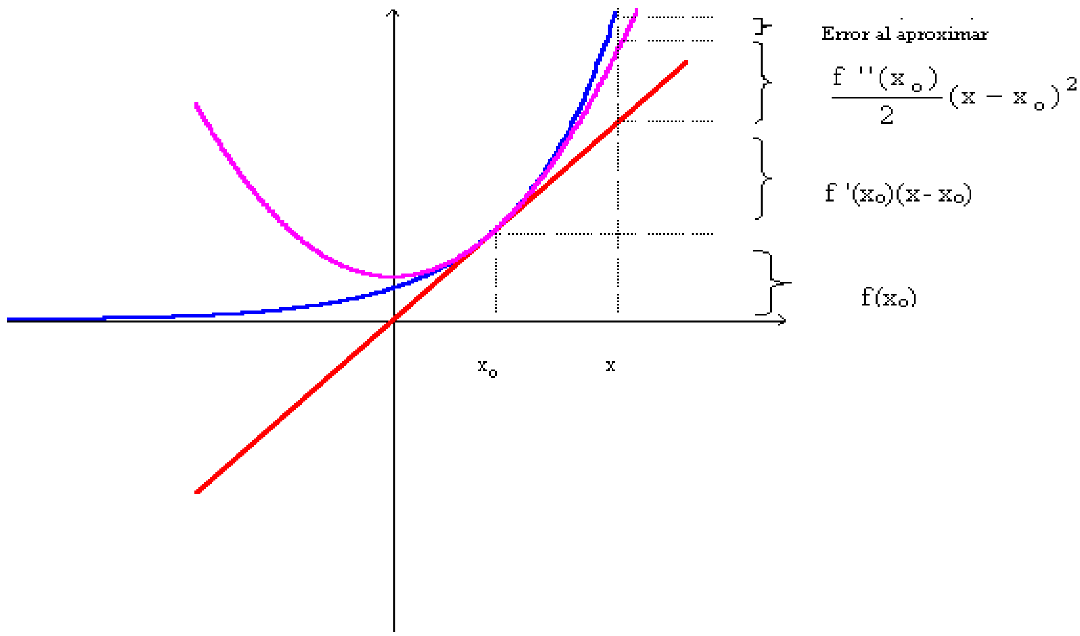
concluimos que $a = f(x_0)$, $b = f'(x_0)$ y $c = (1/2)f''(x_0)$,

quedando la ecuación de la parábola que mejor aproxima a la curva en las cercanías de $(x_0,f(x_0))$, como:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0).$$

En la figura que sigue, observamos gráficamente los tres sumandos de la expresión de la parábola tangente. Los dos primeros nos dan la altura sobre la recta tangente y añadiéndole el tercero nos da la altura sobre la parábola tangente


f(x)
P(x)



Verificamos lo anterior en el caso particular de la función $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$,
y valores de x cercanos a 0

En la tabla que sigue observamos que la parábola tangente a la gráfica de f en (0,1) efectivamente es una mejor aproximación para f que la recta tangente, para valores cercanos a 0.

LOS COEFICIENTES DE UN POLINOMIO, EN TERMINOS DE SUS DERIVADAS

Un polinomio de grado n está completamente determinado por sus (n +1) coeficientes.

$$P(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + a_n (x - x_0)^n$$

En lo sucesivo, expresaremos al polinomio en potencias de $(x - x_0)$ y encontraremos sus coeficientes en términos de las derivadas evaluadas en x_0.

$$P'(x) = a_1 + 2 a_2 (x - x_0) + 3a_3 (x - x_0)^2 + 4a_4 (x - x_0)^3 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + na_n (x - x_0)^{n-1}$$

x	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}$	e^x
1	2	2.5	2.718281828
0.5	1.5	1.625	1.6487212707
0.3	1.3	1.345	1.34985880757
0.1	1.1	1.105	1.10517091807
0.01	1.01	1.01005	1.010050167
0.001	1.001	1.0010005	1.00100050016

$P^{(2)}(x) = 2\ a_2 + (2)(3)a_3\ (x - x_0) + (3)(4)a_4\ (x - x_0)^2 + \cdot\ \cdot\ \cdot + n(n\text{-}1)a_n\ (x - x_0)^{n-2}$

.
.
.

$P^{(n)}(x) = (1)(2)...(n)\ a_n = n!\ a_n$.

De donde, evaluando cada una de estas derivadas en x_0, obtenemos los coeficientes del polinomio:

$$a_0 = P(x_0),\ a_1 = P'(x_0),\ a_2 = \frac{P_2(x_0)}{2!},\ .\ .\ .\ ,\ a_n = \frac{P_n(x_0)}{n!},$$

y en consecuencia la expresión del polinomio será:

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)\ (x - x_0) + \frac{P^{(2)}(x_0)}{2!}\ (x - x_0) + \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}\ (x - x_0)^n \quad ....(\ I\ )$$

Observación: En base a lo anterior, podemos afirmar que, dado un polinomio cualquiera podemos expresarlo en potencias de $(x - x_0)$ para cualquier x_0. Asimismo si conocemos las derivadas en un punto x_0, podemos encontrar el polinomio, como se verá en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Encuentre el polinomio de grado 4 que satisface:

$$P(2) = 3,\ P'(2) = 5,\ P^{(2)}(2) = 4,\ P^{(3)}(2) = 24 \text{ y } P^{(4)}(2) = 48$$

Solución: Para encontrar la expresión del polinomio en términos de (x -2), simplemente sustituimos $x_0 = 2$ y $n = 4$ en la expresión (I), obteniendo:

$$P(x) = P(2) + P'(2)\ (x - 2) + \frac{P^{(2)}(2)}{2!}\ (x - 2)^2 + \frac{P^{(3)}(2)}{3!}\ (x - 2)^3 + \frac{P_4(2)}{4!}\ (x - 2)^4,$$

y por lo tanto el polinomio buscado es:

$$P(x) = 3 + 5(x - 2) + 2(x - 2)^2 + 4(x - 2)^3 + 2(x - 2)^4.$$

Ejemplo 2. Exprese al polinomio $P(x) = 7x^3 + x^2 + 8$ en potencias de (x - 1).

Solución: Evaluemos al polinomio y a sus 3 primeras derivadas en $x_0 = 1$.

$P(x) = 7x^3 + x^2 +8,\ P(1) = 16$
$P'(x) = 21x^2 + 2x,\ P'(1) = 23$
$P^{(2)}(x) = 42x + 2,\ P^{(2)}(1) = 44$
$P^{(3)}(x) = 42,\ P^{(3)}(1) = 42$

Sustituimos en (I) con $x_0 =1$ y $n = 3$, obteniendo la expresión buscada:

$$P(x) = 16 + 23(x - 1) + (44/2)(x - 1)2 + (42/6)(x - 1)3$$

Es decir:

$$P(x) = 16 + 23(x - 1) + 22(x - 1)^2 + 7(x - 1)^3.$$

Que puede comprobarse fácilmente efectuando las operaciones, para concluir que:

$$7x^3 + x^2 +8 = 16 + 23(x - 1) + 22(x - 1)^2 + 7(x - 1)^3.$$

Volviendo a la representación (I), si f no es un polinomio, obviamente no podrá representarse de la misma manera sin embargo en vista de que para, la recta tangente, que es un polinomio de grado 1, se cumple que para x cercano a x_0:

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)$$

y gráficamente observamos que para x cercano a x_0, la función es muy parecida a su "parábola tangente", es decir:

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\ (x - x_0)^2$$

X	1+x	$1+x+\frac{x^2}{2}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$	e^x
1	2	2.5	2.666666	2.7083333	2.718281828
0.5	1.5	1.625	1.645833	1.6484375	1.6487212707
0.3	1.3	1.345	1.3495	1.3498375	1.34985880757
0.1	1.1	1.105	1.10516667	1.10517083	1.10517091807
0.01	1.01	1.01005	1.01005017	1.01005017	1.010050167
0.001	1.001	1.0010005	1.00100050000	1.00100050017	1.00100050016

surge de manera natural preguntarnos si para valores cercanos a x_0, se cumplirá:

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\ (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

y podríamos intentar verlo en algunos casos particulares. Al polinomio:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\ (x - x_0)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

le llamaremos el POLINOMIO DE TAYLOR de grado n para f, en el punto x_0.

En estos términos, la recta tangente y la parábola tangente, vienen siendo los polinomios de Taylor para f de grados 1 y 2 respectivamente.

En la siguiente tabla compararemos a la función exponencial $f(x) = e^x$ (última columna) con los polinomios de Taylor correspondientes de grados 1 hasta 4. Observamos que la segunda columna corresponde a la recta tangente y la tercera columna a la parábola tangente.

Si analizamos con detenimiento la información proporcionada por esta tabla, veremos lo siguiente:

1. En cada columna, vemos que la aproximación del correspondiente polinomio de Taylor es mejor cuanto más cercano se encuentre x a 0.

2. En cada renglón, vemos que para cada valor fijo de x, no importa si está cerca o no de 0, la aproximación va mejorando conforme aumentamos el grado del polinomio de Taylor.

El Teorema de Taylor que a continuación enunciaremos sin demostración, nos dice que bajo ciertas condiciones, una función puede expresarse como un polinomio de Taylor más un cierto error, es decir

$$f(x) = P_n(x) + E_n$$

y además nos dirá como estimar este error.

TEOREMA DE TAYLOR.

Sea f continua en $[a, b]$ y con derivadas hasta de orden n continúas también en este intervalo cerrado; supóngase que $f^{(n+1)}(x)$ existe en (a,b), entonces para x y x_0 en (a,b) se tiene:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + E_n,$$

donde $E_n = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ y c es un punto que se encuentra entre x y x_0.

Observación: El Teorema del valor medio es un caso particular del Teorema de Taylor, ya que para n = 0 en éste último, tenemos:

$$f(x) = f(x_0) + E_0 \quad \text{con } E_0 = \frac{f'(c)}{1!}(x - x_0)^1 \quad \text{para c entre x y } x_0,$$

es decir, $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$ con c entre x y x_0,

o bien la conocida expresión para el Teorema del Valor Medio:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

LA FORMULA DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

A la Expresión:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + E_n$$

le llamaremos FORMULA DE TAYLOR de f en x_0, y en el caso particular de $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + E_n$$

le llamaremos FORMULA DE MACLAURIN de f.

Ejemplo 3. Encuentre la fórmula de Maclaurin para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen} x$
b) $f(x) = \cos x$
c) $f(x) = e^x$

Solución: Encontremos primero la fórmula de Maclaurin para $f(x) = \text{sen} x$.

$f(x) = \text{sen} x, \quad f(0) = 0$
$f'(x) = \cos(x), \quad f'(0) = 1$
$f^{(2)}(x) = -\text{sen} x, \quad f^{(2)}(0) = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos(x), \quad f^{(3)}(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \text{sen}(x), \quad f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos(x), \quad f^{(5)}(0) = 1$
.
.
.

En general observamos que las derivadas de orden par, evaluados en cero se anulan y las impares valen alternadamente 1 y -1.

En consecuencia la Fórmula de Maclaurin para $f(x) = \text{sen}\ x$ es:

$$\text{sen}\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + E_{2n-1},$$

quede expresada en notación sumatoria nos queda como:

$$\text{sen}\ x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + E_{2n-1}.$$

Análogamente podemos encontrar que:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + E_{2n},$$

o bien $\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + E_{2n}$.

De igual manera para e^x es $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + E_n,$

o bien $\quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n.$

CALCULO DE APROXIMACIONES Y ESTIMACION DEL ERROR

A continuación se presentan algunos ejemplos para aproximar una función utilizando la fórmula de Taylor con residuo.

Ejemplo 4. Encuentre un valor aproximado para sen (35^o) utilizando un polinomio de Taylor de grado 3 y estime el error.

Solución. Al igual que cuando utilizamos la recta tangente para efectuar aproximaciones, queremos aproximar a la función sen (x) en el valor de 35^o, para lo cual debemos conocer a f y sus derivadas en un punto x_0 cercano a éste el cual es $x_0 = \pi/6$ (30^o expresados en radianes), es decir:

a) f(x) = sen(x)
b) $x_0 = \pi/6$, 30^o en radianes
f (x) = sen(x), $f(\pi/6) = 0.5$
f'(x) = cos(x), $f'(\pi/6) = 0.8660254$
f"(x) = -sen(x), $f''(\pi/6) = -0.5$
$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$, $f^{(3)}(\pi/6) = -0.8660254$
$f^{(4)}(x) = \text{sen}(x)$, $f^{(4)}(\pi/6) = 0.5$

En este caso particular la fórmula de Taylor nos quedaría:

$$f(x) = f(\pi/6) + f'(\pi/6)(x - \pi/6) + \frac{f^{(2)}(\pi/6)}{2!}(x - \pi/6)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi/6)}{3!}(x - \pi/6)^3 + E_3$$

Que sustituyendo, nos da la fórmula de Taylor de f(x) = sen(x) en $x_0 = \pi/6$.

$$\text{sen } x = 0.5 + 0.8660254\,(x - \pi/6) - 0.25\,(x - \pi/6)^2 - 0.14433756\,(x - \pi/6)^3 + E_3.$$

Esta expresión nos servirá para estimar valores de sen(x) para x cercanos a $\pi/6$.

En particular para $x = \pi/6 + 5\pi/180$

$$\text{sen }(35^o) = 0.5 + 0.8660254\left(\frac{5\pi}{180}\right) - 0.25\left(\frac{5\pi}{180}\right)^2 - 0.14433756\left(\frac{5\pi}{180}\right)^3 + E_3$$

$\text{sen}(35^o) = 0.5 + 0.0755749 - 0.001903858 - 0.000095922 + E3$
$\text{sen}(35^o) = 0.57357512 + E3$

En la expresión para el error al aproximar con un polinomio de grado 3

$$E_3 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^4 = (0.00000241)\,\text{sen}(c)$$

El error siempre lo obtendremos en términos de un valor c entre x y x_0, sin embargo como esta indeterminada c aparece en sen(c), la cual se encuentra acotada entre -1 y 1, es decir

$|\text{sen c}| \leq 1$

entonces podremos tener una cota para el error, es decir,

$$|E_3| = |(0.00000241) \text{ sen c}| = (0.00000241)|\text{sen c}| \leq 0.0000241$$

y en consecuencia la aproximación se obtuvo con un error que no excede de 0.00000241

Observación: En general si la (n+1) derivada de f está acotada por una constante M en el intervalo (a,b) que se menciona en el Teorema de Taylor, es decir, si

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M \text{ , para x en el intervalo (a , b)}$$

entonces

$$|E_n| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (x - x_0)\right| = \left|f^{(n+1)}(c)\right| \left|\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}\right| \leq M \left|\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}\right| .$$

Así pues, si al aproximar por un polinomio de grado n, la siguiente derivada está acotada por $M > 0$, entonces podemos estimar de la siguiente manera el error.

$$|E_n| \leq M \left|\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}\right|$$

Claramente vemos que si $| x - x_0 | \leq 1$, cuando n crece indefinidamente el numerador de la fracción anterior se acerca a cero y el denominador tiende a infinito, por lo que la fracción tenderá a cero, es decir, $E_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Con un poco más de análisis, podemos ver que en general

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0 \text{ para todo valor real de k,}$$

por lo que si $| x - x_0 | > 1$ también se cumplirá que $E_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Puede observarse en casos particulares que si x está alejada de x_0, para lograr una aproximación prefijada muy pequeña, debemos tomar un polinomio de Taylor con grado muy grande.

Ejemplo 5. Encuentre un valor aproximado para $\sqrt[3]{28}$ utilizando un polinomio de grado dos y estime el error.

Solución. Los datos a considerar en la fórmula de Taylor son:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$x_0 = 27$

$f(x) = \sqrt[3]{28}, \quad f(27) = 3$

$f'(x) = \frac{1}{3}\ x^{-\frac{2}{3}}$, $f'(27) = \dfrac{1}{3\ \left(\sqrt[3]{27}\right)^2} = \dfrac{1}{27} = 0.037037037$

$f''(x) = -\ \dfrac{2}{9}\ x^{-\ \frac{5}{3}}$, $f''(27) = -\ \dfrac{2}{9\ \left(\sqrt[3]{27}\right)^5} = -\ \dfrac{2}{(9)\ (247)} = 0.000914494$.

La fórmula de Taylor, es este caso nos queda:

$$f(x) = f(27) + f'(27)\ (\ x - 27\ ) + \frac{f^{(2)}(27)}{2!}\ (\ x - 27\ )^2 + E_2$$

$$\sqrt[3]{x} = 3 + \frac{1}{27}\ (\ x - 27\ ) + \frac{2}{(2)(9)(243)}\ (\ x - 27\ )^2,$$

y al sustituir x =28, obtenemos:

$$\sqrt[3]{28} \approx 3 + \frac{1}{27} + \frac{2}{4374} = 3 + \frac{162}{4374} + \frac{2}{4374} = 3 + \frac{164}{4374} = 3.036579789$$

En la expresión para el error al aproximar con un polinomio de grado 2

$$E_2 = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}\ (1)^3 = \frac{10}{27\ \left(\sqrt[3]{c}\right)^8}.$$

El error siempre lo obtendremos en términos de un valor c entre 27 y 28, sin embargo como esta indeterminada c aparece en la fracción de la derecha, el error será lo más grande posible cuando el denominador sea lo más pequeño posible, lográndose esto en c = 27, es decir:

$$|E_2| = \left|\frac{10}{27\ \left(\sqrt[3]{c}\right)^8}\right| \leq \frac{10}{(27)\ (3)^8} = 0.000056\ ,$$

y en consecuencia la aproximación se obtuvo con un error que no excede de 0.000056

Ejemplo 6. Encuentre un valor aproximado para $\sqrt[2]{e}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 3 y estime el error.

Solución. Obsérvese que $\sqrt[2]{e} = e^{0.5}$, es decir se nos pide evaluar a la función exponencial en 0.5, el cual es un valor cercano a $x_0 = 0$, punto en que conocemos a la función exponencial y a sus derivadas.

Así pues encontremos la fórmula de Taylor

$$f(x) = f(0) + f'(0)\ (\ x - 0\ ) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\ (\ x - 0\ )^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\ (\ x - 0\ )^3 + E_3$$

para $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ y posteriormente evaluaremos en $x = 0.5$

Como la función exponencial y todas sus derivadas son iguales, $f^{(n)}(0) = 1$, la fórmula nos queda:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + E_3,$$

evaluando en $x = 0.5$, tenemos:

$$e^{0.5} = 1 + 0.5 + \frac{(0.5)^2}{2!} + \frac{(0.5)^3}{3!} + E_3$$

$$e^{0.5} = 1.64583333 + E3$$

$$E_3 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \, (0.5)^4.$$

Como $f^{(4)}(x) = e^x$, para $x \in [0 , 1]$, es decir la derivada está acotada por 3 y en consecuencia

$$|E_3| \leq 3 \left| \frac{(0.5)^4}{4!} \right| = 0.0078125.$$

En base a todo lo anterior, podemos afirmar que:

$\sqrt[2]{e} = 1.645833333$ con un error que no excede de 8 milésimas.

Observación: Nótese que la estimación del error puede hacerse independientemente del cálculo de la aproximación, es decir, antes de calcular ésta podemos preguntarnos por el grado del polinomio de Taylor que nos dé la precisión deseada.

Ejemplo 7. ¿ De que grado hay que tomar el polinomio de Taylor para encontrar una aproximación a $\sqrt[2]{e}$ con un error que no exceda de una diezmilésima.?

Solución. En referencia al ejemplo anterior, el error que se comete al utilizar un polinomio de Taylor de grado n es:

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} \, (0.5)^{n+1}.$$

De nuevo la (n+1)-ésima derivada está acotada por 3, obteniendo:

$$|E_n| \leq 3 \left| \frac{(0.5)^{n+1}}{(n + 1)!} \right|$$

Para $n = 4$,

$|E_4| \leq 3 \left| \frac{(0.5)^5}{5!} \right| = 0.00078$, es decir el error no excede de 7 diezmilésimas.

Para $n = 5$,

$|E_5| \le \left| \frac{(0.5)^6}{6!} \right| = 0.000065$, es decir el error no excede de 6 cienmilésimas,

Por lo tanto debe tomarse un polinomio de grado 5.

La fórmula de Taylor para $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ para $n = 5$ es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + E_5,$$

y evaluando en $x = 0.5$, obtenemos:

$$e^{0.5} \approx 1 + 0.5 + \frac{(0.5)^2}{2!} + \frac{(0.5)^3}{3!} + \frac{(0.5)^4}{4!} + \frac{(0.5)^5}{5!} = 1.648697917$$

Ejemplo 8. ¿ De que grado hay que tomar el polinomio de Taylor para encontrar una aproximación al número e de Euler con un error que no exceda de una millonésima ?

Solución. Nótese que tomaremos $f(x) = e^x$ con $x_0 = 0$ y $x = 1$, y aunque 1 esté "alejado" del 0, como las derivadas están acotadas, podemos encontrar la aproximación con el grado de precisión que se desee con tal de tomar un polinomio de Taylor de grado "suficientemente grande".

Veamos pues de que grado tendremos que tomar el polinomio.

El error que se comete al utilizar un polinomio de Taylor de grado n es:

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (1)^{n+1}.$$

De nuevo la (n+1)-ésima derivada está acotada por 3, obteniendo:

$$|E_n| \le 3 \left| \frac{1}{(n+1)!} \right| = \frac{3}{(n+1)!}$$

Para $n = 5$,

$|E_5| \le \frac{3}{6!} = 0.0039$, es decir el error no excede de 3 milésimas.

Para $n = 8$,

$|E_8| \le \frac{3}{9!} = 0.000008$, es decir el error no excede de 8 millonésimas.

Para $n = 9$,

$|E_9| \le \frac{3}{10\,!} = 0.0000008$, es decir el error no excede de 8 diezmillonésimas.

Por lo tanto debe tomarse un polinomio de grado 9.

La fórmula de Taylor para $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ para $n = 9$ es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + E_9,$$

expresado en notación sumatoria:

$$e^x = \sum_{n=0}^{9} \frac{x^n}{n!} + E_9$$

y evaluando en x = 1, obtenemos:

$$e^1 \cong \sum_{n=0}^{9} \frac{1}{n!} = 2.718281526.$$

CRITERIO DE MAXIMOS Y MINIMOS UTILIZANDO DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

El criterio de la segunda derivada para encontrar valores extremos para una función de una variable, funciona cuando para un punto crítico x_0, la segunda derivada evaluada en x_0 es diferente de cero, siendo un valor máximo si $f''(x_0) < 0$ y un valor mínimo si $f''(x_0) > 0$.

Sin embargo hay funciones con valores extremos en un punto crítico x_0 en las que también se anula la segunda derivada, como se muestra en el siguiente ejemplo sencillo:

Ejemplo 9. Utilice el criterio de la segunda derivada para encontrar los valores extremos de la función $f(x) = x^4$.

Solución: Los puntos críticos satisfacen $f'(x) = 4x^3 = 0$

Lo cual se satisface únicamente para $x_0 = 0$.

Como $f''(x) = 12x^2$, entonces $f''(0) = 0$, fallando el criterio de la segunda derivada. Si utilizamos el criterio de la primera derivada (Si $f'(x) > 0$ para $x < x_0$ y $f'(x) < 0$ para $x < x_0$), vemos fácilmente que esta función tiene un valor mínimo en $x_0 = 0$.

A continuación demostraremos, utilizando el Teorema de Taylor, un criterio para detectar valores extremos relativos, cuando el de la segunda derivada falla.

Teorema : Sea f con n derivadas continuas en un intervalo (a,b) que contiene a x_0 y supóngase que

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \ldots = f^{n-1}(x_0) = 0 \text{ y } f^n(x_0) \neq 0$$

1. Si n es par:

a) $f^{(n)}(x_0) < 0$, entonces f toma un máximo relativo en x_0.

b) $f^{(n)}(x_0) > 0$, entonces f toma un mínimo relativo en x_0.

2. Si n es impar, la función no alcanza un valor extremo en x_0.

Demostración: 1. Supongamos primero que n es par.

Como $f^{(n)}(x)$ es continua en un intervalo (a, b) que contiene a x_0 y $f^{(n)}(x_0) < 0$, podemos encontrar un subintervalo $(xo - \delta, xo + \delta) \subset (a, b)$ de tal manera $f^{(n)}(x)$ sea negativa en este subintervalo.

Consideremos x en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, por el Teorema de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdot \cdot \cdot + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)}(x - x_0)^{n-1} + E_n$$

con $\quad E_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$ y c entre x y x_0,

como las primeras (n-1) derivadas se anulan en x_0, se tiene:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n + E_{n+1},$$

$f^{(n)}(c) < 0$ por estar c entre x y x_0 y a su vez estos puntos en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ donde la n-ésima derivada es negativa.

Al ser $f^{(n)}(c) < 0$ y n par, la expresión $(x - x_0)^n < 0$ y por lo tanto $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$ $(x - x_0) < 0$ y en consecuencia $f(x) < f(x_0)$ para toda x en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, lo cual significa que $f(x_0)$ es el mayor de los valores de f en dicho intervalo, es decir f alcanza un máximo relativo en x_0.

La demostración de b) y 2) se darán más adelante.

Ejemplo 10. Encuentre los valores extremos de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$

Solución: Encontremos primero los puntos críticos:

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4 = 0$$
$$f'(x) = 4(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 4(x+1)^3 = 0 \text{ , obtenemos } x = -1$$

Por lo tanto el único punto crítico es $x_0 = -1$

Tratemos ahora de determinar su naturaleza:

$$f''(x) = 12x^2 + 24x + 12, \quad f''(-1) = 0$$
$$f^{(3)}(x) = 24x + 24, \quad f^{(3)}(-1) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = 24, \quad f^{(4)}(-1) = 24$$

Como la primera derivada diferente de cero en -1 es la de grado 4 y 4 es par, el signo positivo de esta cuarta derivada nos dice que f alcanza un mínimo en $x_0 = -1$.

APROXIMACIÓN MEDIANTE FUNCIONES POLINOMIALES

En este tema obtendremos importantes resultados teóricos que reducirán el cálculo de f(x), para muchas funciones f, al cálculo de funciones polinómicas. El método consiste en hallar funciones polinómicas que se aproximen estrechamente a f. Para encontrar un polinomio apropiado, conviene antes examinar las mismas funciones polinómicas con más detenimiento.

Supongamos que $\quad p(x) = a_0 + a_1 x + \cdot \cdot \cdot + a_n x^n$.

Es interesante, y para nuestros fines muy importante, observar que los coeficientes a_i pueden expresarse en términos del valor de p y de sus distintas derivadas en 0. Para empezar observemos que $\quad p(0) = a_0$.

Al derivar la expresión original de p(x) se obtiene

$$p'(x) = a_1 + 2a_2\, x + \cdot \cdot \cdot + na_n x^{n-1}.$$

Por lo tanto, $p'(0) = p^{(1)}(0) = a_1$.

Al derivar de nuevo obtenemos $p''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2\, a_3 x + \cdot \cdot \cdot + n \cdot (n-1) \cdot a_n\, x^{n-2}$.

Por lo tanto, $p''(0) = p^{(2)}(0) = 2a_2$
.

En general, tendremos $p^{(k)}(0) = k!\cdot a_k$ o $a_k = \dfrac{p^{(k)}(0)}{k!}$.

Si convenimos en definir $0! = 1$, y recordamos la notación $p^{(0)} = p$, entonces esta fórmula se también para $k = 0$.
Si hubiésemos empezado con una función p escrita como un "polinomio en (x - a) ",

$$p(x) = a_0 + a_1(x - a) + \cdot \cdot \cdot + a_n\,(x - a)^n,$$

entonces un razonamiento parecido demostraría que

$$a_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}.$$

Supongamos ahora que f es una función (no necesariamente un polinomio) tal que

$$f^{(1)}(a)\,,\, f^{(2)}(a),\quad . \quad . \quad . \quad , f^{(n)}(a)$$

existen todas. Sea

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

y definamos

$$P_{n,a}(x) = a_0 + a_1\,(x - a) + \cdot \cdot \cdot + a_n\,(x - a)^n.$$

El polinomio $P_{n,a}$ recibe el nombre de **polinomio de Taylor de grado n para f en a.** (En rigor, deberíamos usar una expresión todavía más complicada, tal como $P_{n,a,f}$, para indicar la dependencia de f; habrá ocasiones en que será conveniente utilizar esta notación más precisa.) Se ha definido el polinomio de Taylor de modo que

$$P_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ para } 0 \leq k \leq n;$$

de hecho, es evidentemente el único polinomio de grado $\leq n$ con esta propiedad. Aunque los coeficientes de $P_{n,a,f}$ parecen depender de f de manera bastante complicada, las funciones elementales más importantes tienen polinomios de Taylor muy sencillos.

Teorema 1

Supongamos que f es una función para la cual

$$f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{n}(a)$$

existen todas. Sea

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad 0 \le k \le n,$$

y definamos

$$P_{n,a}(x) = a_0 + a_1 (x - a) + \cdots + a_n (x - a)^n .$$

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN

Al escribir $P_{n,a}(x)$ explícitamente, obtenemos

$$\frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i}{(x - a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} .$$

Será conveniente introducir las nuevas funciones

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i \quad \text{y} \quad g(x) = (x - a)^n;$$

demostraremos ahora que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - Q(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Obsérvese que

$$Q^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) , \qquad k \le n - 1,$$
$$g^{(k)}(x) = n! \ (x - a)^{n-k}/(n - k)!.$$

Así obtenemos que

$$\lim_{x \to a} [f(x) - Q(x)] = f(a) - Q(a) = 0,$$
$$\lim_{x \to a} [f'(x) - Q'(x)] = f'(a) - Q'(a) = 0,$$
$$\vdots$$
$$\lim_{x \to a} [f^{(n-2)}(x) - Q^{(n-2)}] = f^{(n-2)}(a) - Q^{(n-2)}(a) = 0,$$

y

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} g'(x) = \cdots = \lim_{x \to a} g^{(n-2)}(x) = 0.$$

Podemos aplicar, por lo tanto, la regla de L'Hôpital n -1 veces para obtener

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - Q(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - Q^{(n-1)}(x)}{n!\ (x - a)}.$$

Puesto que Q es un polinomio de grado n -1, su derivada de orden n -1 es una constante; en efecto, $Q^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a)$. Así pues,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - Q(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!\ (x - a)},$$

y esté ultimo límite es $f^{(n)}(a)/n!$ según la definición de $f^{(n)}(a)$.

Una sencilla consecuencia del teorema 1 nos permite perfeccionar la prueba de los máximos y mínimos locales. Si a es un punto singular de f, entonces, según el teorema 5 de preliminares, la función f tiene un mínimo local en a si $f''(a) > 0$, y un máximo local en a si $f''(a) < 0$. Si $f''(a) = 0$ no es posible obtener ninguna conclusión, pero se puede pensar que el signo de $f'''(a)$ podría dar mayor información; y si $f'''(a) = 0$, entonces el signo de $f^{(4)}(a)$ podría ser significativo. Con más generalidad aún podemos preguntarnos qué ocurre cuando

$$(\mu) \qquad f'(a) = f''(a) = \cdot \cdot \cdot = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

La situación en este caso puede adivinarse examinando las funciónes

$$f(x) = (x - a)^n,$$
$$g(x) = -(x - a)^n,$$

que satisfacen (μ). Obsérvese que si n es impar, entonces a no es ni máximo local ni mínimo local para f o g. Por otra parte, si n es par, entonces f, con una derivada n-ésima positiva, tiene un mínimo local en a, mientras que g, con una derivada n-ésima negativa, tiene un máximo local en a. Entre todas las funciones que satisfacen (μ), éstas son las más sencillas disponibles ; no obstante, indican exactamente la situación general. De hecho, el meollo de toda demostración que sigue consiste en que cualquier función que satisface (μ) se parece mucho a una de estas funciones, en un sentido precisado por el teorema 1.

Teorema 2

Supongamos que

$$f'(\mathbf{a}) = f''(\mathbf{a}) = \cdot \cdot \cdot = f^{(n-1)}(\mathbf{a}) = 0, \quad f^{(n)}(\mathbf{a}) \neq 0.$$

1) Si n es par y $f^{(n)}(\mathbf{a}) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en **a**.
2) Si n es par y $f^{(n)}(\mathbf{a}) < 0$, entonces f tiene un máximo local en **a**.
3) Si n es impar, entonces f no tiene ni máximo ni mínimo local en **a**.

DEMOSTRACIÓN

Evidentemente no se restringe la generalidad al suponer f($\mathbf{a}$) = 0, ya que ni la hipótesis ni la conclusión son afectadas al sustituir f por f - f($\mathbf{a}$). Entonces, puesto que las primeras n - 1 derivadas de f en $\mathbf{a}$ son 0, el polinomio de Taylor $P_{n,\mathbf{a}}$ de f es

$$P_{n,\mathbf{a}}(x) = f(\mathbf{a}) + \frac{f'(\mathbf{a})}{1!}\,(x - \mathbf{a}) + \cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{f^{(n)}(\mathbf{a})}{n!}\,(x - \mathbf{a})^n$$

$$= \frac{f^{(n)}(\mathbf{a})}{n!}\,(x - \mathbf{a})^n.$$

Así pues, el teorema 1 afirma que

$$0 = \lim_{x\to\mathbf{a}} \frac{f(x) - P_{n,\mathbf{a}}(x)}{(x - \mathbf{a})^n} = \lim_{x\to\mathbf{a}} \left[\frac{f(x)}{(x - \mathbf{a})^n} - \frac{f^{(n)}(\mathbf{a})}{n!}\right].$$

En consecuencia, si x está suficientemente próximo a $\mathbf{a}$, entonces

$$\frac{f(x)}{(x - \mathbf{a})^n} \quad \text{tiene el mismo signo que} \quad \frac{f^{(n)}(\mathbf{a})}{n!}.$$

Supongamos ahora que n es par. En este caso $(x - \mathbf{a})^n > 0$ para todo $x \neq a$. Puesto que $f(x)/(x - \mathbf{a})^n$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(\mathbf{a})\,/\,n!$ para x suficientemente próximo a $\mathbf{a}$, se sigue que f(x) tiene el mismo signo que $f^{(n)}(\mathbf{a})/n!$ cuando x está suficientemente proximo a $\mathbf{a}$. Si $f^{(n)}(\mathbf{a}) > 0$, esto significa que

$$f(x) > 0 = f(\mathbf{a})$$

para x próximo a $\mathbf{a}$. En consecuencia, f tiene un mínimo local en $\mathbf{a}$. Una demostración parecida vale para el caso $f^{(n)}(a) < 0$.

Supongamos ahora que n es impar. El mismo razonamiento de antes hace ver que si x está suficientemente próximo a $\mathbf{a}$, entonces

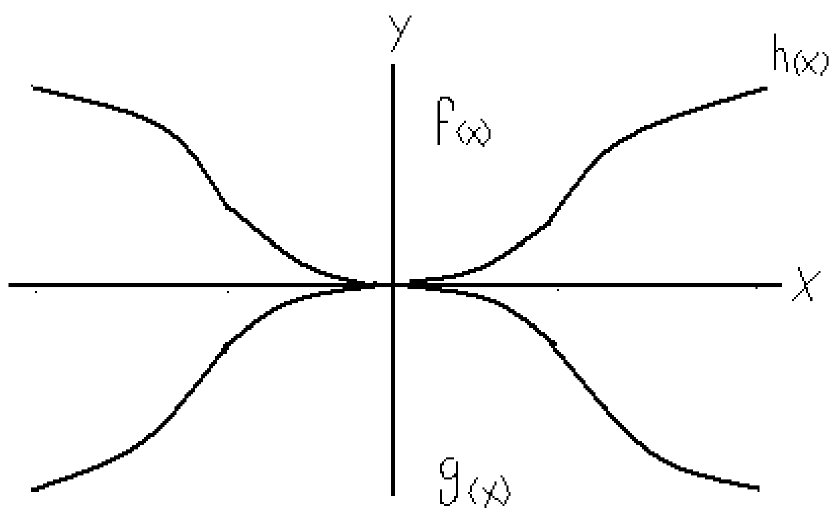
$$\frac{f(x)}{(x - \mathbf{a})^n} \quad \text{tiene siempre el mismo signo.}$$

Pero $(x - \mathbf{a})^n > 0$ para $x > \mathbf{a}$ y $(x - \mathbf{a})^n < 0$ para $x < \mathbf{a}$. Por lo tanto f(x) tiene signos diferentes para $x > \mathbf{a}$ y $x < \mathbf{a}$. Esto demuestra que f no tiene ni máximo ni mínimo local en $\mathbf{a}$.

Aunque el teorema 2 resuelve la cuestión de los máximos y mínimos locales para cualquiera de las funciones que se presentan en la práctica, tiene algunas limitaciones teóricas, puesto que $f^{(n)}(a)$ puede ser 0 para toda k.

Esto ocurre (figura anterior) para la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} e^{\frac{-1}{x^2}} & , & x \neq 0 \\ 0 & , & x = 0 \end{array}\right\}$$


y
h(x)
f(x)
x
g(x)

la cual tiene un mínimo en 0, y también para la función negativa de ésta (figura anterior) que es la siguiente

$$g(x)=\left\{\begin{array}{ll} -e^{\frac{-1}{x^2}} , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{array}\right\},$$

la cual tiene un máximo en 0. Además (figura anterior) si

$$h(x) = \left\{\begin{array}{ll} e^{\frac{-1}{x^2}} , & x > 0 \\ 0 , & x = 0 \\ - e^{\frac{-1}{x^2}} , & x < 0 \end{array}\right\},$$

entonces $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k, pero f no tiene ni máximo ni mínimo local en 0. La conclusión del teorema 1 se expresa a veces en términos de un concepto importante de "orden de igualdad". Dos funciónes f y g se dice que son iguales hasta el orden n en a si

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^n} = 0$$

En el lenguaje de esta definición, el teorema 1 dice que el polinomio de Taylor $P_n(x)$ es igual a f hasta el orden n en a. El polinomio de Taylor podría muy bien haberse definido como aquel que hace que este hecho se cumpla, puesto que existe a lo sumo un polinomio de grado $\leq$ n con esta propiedad. Esta afirmación es consecuencia del siguiente teorema

Teorema 3

Sean P y Q dos polinomios en (x - a), de grado $\leqslant$ n, y supongamos que P y Q son iguales hasta el orden n en a. Entonces P = Q.

DEMOSTRACIÓN

Sea R = P-Q. Puesto que R es un polinomio de grado $\leqslant$ n, basta solamente demostrar

que si

$$R(x) = b_0 + b_1 (x - a) + \ldots + b_n (x - a)^n$$

satisface $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R(x)}{(x - a)^n} = 0$

entonces R = 0. Ahora bien, la hipótesis para R con seguridad implica que

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x - a)^i} = 0, \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq n.$$

Para i = 0 esta condición resulta simplemente $\lim\limits_{x\to a} R(x) = 0$; por otra parte,

$$\lim_{x\to a} R(x) = \lim_{x\to a} [b_0 + b_1 (x - a) + \ . \ . \ . \ + b_n (x - a)^n] = b_0.$$

Obtenemos $b_0 = 0$ y $R(x) = b_1 (x - a) + \ . \ . \ . \ + b_n (x - a)^n$.

Por lo tanto $\dfrac{R(x)}{x - a} = b_1 + b_2 (x - a) + \ . \ . \ . \ + b_n(x - a)^{n-1}$ y $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R(x)}{x - a} = b_1$

Así pues, $b_1= 0$ y $R(x) = b_2(x - a)^2 + \ . \ . \ . \ + b_n (x - a)^n$.

Continuando de esta manera encontramos que $b_0 = b_1= \ . \ . \ . \ = b_n = 0$.

COROLARIO

Sea f derivable n veces en a, y supongamos que P es un polinomio en (x - a) de grado $\leqslant$ n, igual a f hasta el orden n en a. Entonces $P = P_{n,a}$.

DEMOSTRACIÓN

Puesto que P y $P_{n,a}$ son ambos iguales a f hasta el orden n en a, es fácil ver que P es igual a $P_{n,a}$ hasta el orden n en a. En consecuencia, $P= P_{n,a}$ según el teorema anterior.

A primera vista parece que este corolario tenga una hipótesis innecesariamente complicadas; podría parecer que la existencia del polinomio P implicaría que f fuera suficientemente derivable para que existiera $P_{n,a}$. Pero de hecho no es así. Por ejemplo, supongamos que

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} x^{n+1}, & x \quad \text{irracional} \\ 0 \quad , & x \quad \text{racional} \end{matrix} \right\}$$

Si $P(x) = 0$, entonces P es un polinomio de grado $\leq$ n que es igual a f hasta el orden n en 0. Por otra parte, f'(a) no existe para ningún $a \neq 0$, de modo que f''(0) no esta definida.

Cuando f tiene n derivadas en a, el corolario puede ofrecer, sin embargo, un método útil para hallar el polinomio de Taylor de f. En particular, recuérdese que en nuestro primer intento de hallar el polinomio de Taylor de arctg terminó en fracaso. Los cálculos de las primeras derivadas empiezan como sigue

$$\text{arctg}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\text{arctg}''(x) = \frac{-2x}{\left(1 + x^2\right)^2}$$

$$\text{arctg}'''(x) = \frac{\left(1 + x^2\right)^2 (-2) \ + \ 2x \cdot 2\left(1 + x^2\right) \cdot 2x}{\left(1 + x^2\right)^4}$$

Es evidente que este cálculo a base de emplear la fuerza bruta no puede dar buen resultado. Sin embargo, los polinomios de Taylor de arctg serán fáciles de hallar una vez que hayamos examinado más detenidamente las propiedades de los polinomios de Taylor. La ecuación

$$\text{arctg } x = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} \ dt, \quad t \in [\, 0 \,,\, x \,] \,,$$

sugiere un método prometedor de hallar un polinomio que se aproxime a arctg divídase 1 por $1 + t^2$, para obtener un polinomio más un resto :

$$\frac{1}{1 + t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ . \ . \ . \ + (-1)^n \ t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} \ t^{2n+2}}{1 + t^2}.$$

Esta fórmula, que puede comprobarse fácilmente multiplicando ambos miembros por $1 + t^2$, demuestra que

$$\text{arctg } x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \ . \ . \ . \ + (-1)^n \ t^{2n}) \ dt + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} \ dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ . \ . \ . \ + (-1)^n \ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} \ dt$$

Demostración

$$\text{arctg } x = \int_0^x 1 \ dt - \int_0^x t^2 \ dt + \int_0^x t^4 \ dt - \ . \ . \ . \ + (-1)^n \int_0^x t^{2n} \ dt + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} \ dt$$

$$= [t\,]_0^x - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x + \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^x - \ . \ . \ . \ + (-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} \ dt$$

$$= [x - 0] - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{0}{3}\right] + \left[\frac{x^5}{5} - \frac{0}{5}\right] - \ . \ . \ . \ .$$

$$+ (-1)^n \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{0}{2n+1} \right] + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt .$$

Según el corolario, el polinomio que aquí aparece será el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ para arctg en 0, siempre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt}{x^{2n+1}} = 0 .$$

Puesto que $\left| \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \leq \left| \displaystyle\int_0^x t^{2n+2}\, dt \right| = \dfrac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$,

esto se cumple claramente. Por lo tanto, hemos hallado que el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ para arctg en 0 es

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} .$$

Digamos de paso que, ahora que hemos descubierto los polinomios de Taylor para arctg, es posible proceder a la inversa y hallar $\operatorname{arctg}^k(0)$ para todo k : Puesto que

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

y como este polinomio es, por definición,

$$\operatorname{arctg}^0(0) + \operatorname{arctg}^1(0)\, x + \frac{\operatorname{arctg}^2(0)\, x^2}{2!} + \ldots + \frac{\operatorname{arctg}^{2n+1}(0)\, x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

podemos hallar $\operatorname{arctg}^k(0)$ igualando simplemente los coeficientes de x^k en estos dos polinomios :

$$\frac{\operatorname{arctg}^k(0)}{k!} = 0 \qquad \text{si } k \text{ es par},$$

$$\frac{\operatorname{arctg}^{2m+1}(0)}{(2m+1)!} = \frac{(-1)^m}{2m+1} \qquad \text{o}$$

$$\operatorname{arctg}^{2m+1}(0) = \frac{(-1)^m\ (2m+1)!}{2m+1} = \frac{(-1)^m (2m+1)\ (2m)!}{2m+1}$$
$$= (-1)^m\ (2m)!$$

obtenemos $\operatorname{arctg}^{2m+1}(0) = (-1)^m\ (2m)!$.

Un hecho más interesante surge si volvemos a la ecuación original

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ .\ .\ .\ +(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{1+t^2}\, dt,$$

y recordamos la estimación $\left| \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{1+t^2}\, dt \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

Cuando $|x| \leq 1$, esta expresión es a lo sumo $1 / (2n+3)$ y podemos hacer esto tan pequeño como se quiera eligiendo simplemente n suficientemente grande. En otras palabras, para $|x| \leq 1$ podemos utilizar los polinomios de Taylor para calcular arctg con una aproximación como se quiera. Los teoremas más importantes acerca de los polinomios de Taylor extienden este resultado aislado a otras funciones, los polinomios de Taylor desempeñarán pronto un papel completamente nuevo. Los teoremas hasta aquí demostrados han examinado siempre el comportamiento de polinomio de Taylor $P_{n,a}(x)$ para n fijo, cuando x tiende hacia a. En adelante vamos a comparar los polinomios de Taylor $P_{n,a}(x)$ para x fijo, y distintos de n. Anticipándonos al próximo teorema introducimos una nueva notación .

Si f es una función para la cual existe $P_{n,a}(x)$, definimos el resto $R_{n,a}(x)$ por

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ .\ .\ .\ + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x) .$$

Sería deseable disponer de una expresión para $R_{n,a}(x)$ que permitiera estimar fácilmente su magnitud. Tal expresión existe y encierra una integral, lo mismo que en el caso de arctg . Una manera de llegar a esta expresión es empezar por el caso $n = 0$:

$$f(x) = f(a) + R_{0,a}(x) .$$

El teorema fundamental del cálculo infinitesimal nos permite escribir

$$f(x) = f(a) + \int_0^x f'(t)\,dt ,$$

De manera $\quad R_{0,a}(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$.

Se puede obtener una expresión análoga para $R_{1,a}(x)$ a partir de esta fórmula utilizando la integración por partes de una manera bastante artificiosa : Sea

$$u(t) = f'(t) \qquad y \qquad v(t) = t - x$$

(Obsérvese que x representa cierto número fijo en la expresión para v(t), de modo que v'(t) =1) ; entonces

$$\int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x f'(t) \cdot 1\,dt = [\,u(t)\,v(t)\,]_a^x - \int_a^x f''(t)\,(t - x)\,dt .$$

u(t) = f'(t) y v'(t) = 1 dt $\qquad$ u'(t) = f''(t) y v(t) = (t -x) dt

Por ser v (x) = 0, obtenemos

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = f(a) - u(a)\,v(a) + \int_a^x f''(t)\,(x - t)\,dt$$

$$= f(a) + u(a)\,[-(a - x)] + \int_a^x f''(t)\,(x - t)\,dt = f(a) + u(a)\,(x - a) + \int_a^x f''(t)\,(x - t)\,dt .$$

Así pues $\quad R_{1,a} = \int_a^x f''(t)\,(x - t)\,dt$.

Es difícil explicar motivadamente la elección de v(t) = t - x, en vez de v(t) = t. Lo que pasa es que está es la elección que da resultado, conclusión a la que podría haberse llegado después de suficientes intentos parecidos pero inútiles. Sin embargo, resulta ahora fácil llegar a la fórmula para $R_{2,a}(x)$.

Integrando por partes si

$$u(t) = f''(t) \qquad \text{y} \qquad v(t) = \frac{-(x-t)^2}{2},$$

entonces v' (t) = (x - t), de modo que

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^x - \int_a^x f'''(t)\,.\frac{-(x-t)^2}{2}\,dt$$

$$= \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \int \frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2\,dt.$$

Esto demuestra que $R_{2,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2\,dt.$

El lector debería poder dar ahora sin dificultad una demostración rigurosa, por inducción, de que si $f^{(n+1)}(t)$ es continua sobre [a , x], entonces

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

DEMOSTRACIÖN

a) Se prueba para $n = 1$

$$R_{1,a}(x) = \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

b) Se supone cierto para $n = k$

$$R_{k,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\,dt$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\,dt$$

c) Se demuestra para $n = k + 1$

$$R_{k+1,a} = \int_a^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1}\,dt$$

sea $\quad u(t) = \dfrac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \qquad$ y $\qquad v'(t) = (x-t)^{k+1}dt$

$$u'(t) = \frac{f^{(K+2)}(t)}{k!}\,dt \qquad\qquad v(t) = \frac{-(x-t)^{k+1}}{k+1}$$

$$\int_a^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\,dt = \left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\cdot\frac{-(x-t)^{k+1}}{k+1}\right]_a^x - \int_a^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{k!}\,\frac{-(x-t)^{k+1}}{k+1}\,dt$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \int_a^x \frac{f^{(k+2)}}{(k+1)!}(x-t)^{k+1}\,dt$$

Por lo tanto obtenemos

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ . \ . \ . + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$+ \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt.$$

A partir de esta fórmula $R_{n,a}(x)$, llamada forma integral del resto, es posible obtener otras dos importantes expresiones para $R_{n,a}(x)$: la forma de Cauchy del resto.

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a) \quad \text{para algún t de } (a, x),$$

y la forma de Lagrange del resto ,

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{para algún t de } (a, x).$$

En la demostración del teorema de Taylor deduciremos las tres formas del resto de una forma totalmente distinta. Una ventaja de esta demostración es el hecho de que las formas de Cauchy y de Lagrange del resto se demostrarán sin suponer la hipótesis adicional de que $f^{(n+1)}(t)$ es continua. De esta manera el teorema de Taylor aparece como una generalización del teorema del valor medio, al cual se reduce para $n = 0$, y el cual constituye el instrumento crucial utilizado en la demostración.

Estas observaciones sugieren una estrategia para la demostración del teorema de Taylor. Al ser $R_{n,a}(a) = 0$, podemos intentar aplicar el teorema del valor medio a la expresión

$$\frac{R_{n,a}(x)}{x - a} = \frac{R_{n,a}(x) - R_{n,a}(a)}{x - a}.$$

Pensándolo bien, sin embargo, esta idea no parece muy prometedora, puesto que no está claro en absoluto de qué manera va a entrar, $f^{(n+1)}(t)$ en la solución. En efecto, si tomamos el camino más directo, y derivamos ambos miembros de la ecuación que define $R_{n,a}$, obtenemos

$$f(x) = f'(a) + f''(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + R'_{n,a}(x),$$

lo cual no nos sirve. La aplicación adecuada del teorema del valor medio tiene mucho en común con la demostración mediante integración por partes esbozada antes. Esta demostración hacía intervenir la derivada de una función en la cual x representaba un número fijo. Así será como va a ser tratado x en la demostración siguiente.

Teorema 4

TEOREMA DE TAYLOR

Supongamos que $f', f'', \dots, f^{(n+1)}$ están definidas sobre $[a, x]$, y que $R_{n,a}(x)$ está definido por

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_{n,a}(x).$$

Entonces

a) $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n (x - a)$ para algún t de (a, x).

b) $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$ para algún t de (a, x).

Además, si $f^{(n+1)}(t)$ es integrable sobre $[a, x]$, entonces

c) $R_{n,a}(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \, dt.$

Si $x < a$, entonces la hipótesis debería decir que f es derivable $(n + 1)$ veces sobre $[x, a]$; el número t en a) y b) estará entonces en $(x,$

a), mientras que c) seguirá cumpliéndose tal como está , siempre que $f^{(n+1)}(t)$ sea integrable sobre [x , a].

DEMOSTRACIÓN

Para todos los números t de [a , x] tenemos

$$f (x) = f(t) + f'(t) (x - t) + \ . \ . \ . \ + \frac{f^{(n)} (t)}{n\,!} (x - t)^n + R_{n,t} (x) .$$

Designemos el número $R_{n,t} (x)$ por S(t) está definida sobre [a , x] , y tenemos

$$f(x) = f(t) + f'(t) (x - t) + \ . \ . \ . \ + \frac{f^{(n)} (t)}{n\,!}(x - t)^n + S(t),$$ para todo t de [a , x]. (∗)

Ahora vamos a derivar ambos miembros de esta ecuación, la cual nos dice que la función cuyo valor en t es f (x), es igual a la función cuyo valor en t es

$$f (t) + f'(t) (x - t) + \ . \ . \ . \ + \frac{f^{(n)} (t)}{n\,!} (x - t)^n + S(t).$$

(Estamos considerando ambos miembros de (∗) como una función de t.) Sólo para asegurarnos de que la letra x no causa confusión, observemos que si

$$g (t) = f (x) \qquad \text{para todo} \quad t,$$

entonces $g' (t) = 0$ para todo t ;

y si $g(t) = \dfrac{f^{(k)}(t)}{k\,!} (x - t)^k$

$$\text{entonces } g' (t) = \frac{f^{(k)}(t)}{k\,!} \frac{d \left[(x - t)^k\right]}{dt} + \frac{d\left[\dfrac{f^{(k)}(t)}{k\,!}\right]}{dt} (x - t)^k$$

$$= \frac{f^{(k)}(t)}{K\,!} k (x - t)^{k-1} (-1) + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k\,!} (x - t)^k$$

$$= - \frac{f^{(k)}(t)}{(k - 1)\,!} (x - t)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k\,!} (x - t)^k.$$

Aplicando estas fórmulas a cada uno de los términos de (∗) , obtenemos

$$0 = f'(t) + \left[-f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) \right] + \left[\frac{-f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 \right]$$

$$+ \ . \ . \ . \ + \left[\frac{-f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \right]$$

$+ S'(t)$.

En esta fórmula se cancela prácticamente todo lo que está a la vista y obtenemos

$$S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Ahora podemos aplicarel teorema del valor medio a la función S sobre $[a,x]$: existe un t en (a,x) tal que

$$\frac{S(x) - S(a)}{x-a} = S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Recuérdese que $S(t) = R_{n,t}(x)$;

esto significa en particular que $S(x) = R_{n,x}(x) = 0,$
$S(a) = R_{n,a}(x).$

Así obtenemos $$\frac{0 - R_{n,a}(x)}{x-a} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

o $$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a);$$

ésta es la forma de Cauchy del resto .

Para deducir la forma de Lagrange aplicamos el teorema del valor medio de Cauchy a las funciones $S(t)$ y $g(t) = (x-t)^{n+1}$: existe algún t en (a,x) tal que

$$\frac{S(x) - S(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{S'(t)}{g'(t)} = \frac{-\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n}{-(n+1)(x-t)^n}.$$

$$\frac{S(x) - S(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}}{(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!\,(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

$$\frac{R_{n,x}(x) - R_{n,a}(x)}{(x-x)^{n+1} - (x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

Así obtenemos $\dfrac{0 - R_{n,a}(x)}{0 - (x - a)^{n+1}} = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{(n +1) !}$

o $$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n + 1) !} (x - a)^{n+1} ,$$

la cual es la forma de Lagrange.

Finalmente, si $f^{(n+1)}$ es integrable sobre $[a , x]$, entonces

$$S(x) - S(a) = \int_a^x S'(t) = - \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n !} (x - t)^n dt$$

o

$$R_{n,x}(x) - R_{n,a}(x) = - \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n !} (x - t)^n dt .$$

$$R_{n,x}(x) - R_{n,a}(x) = 0 - R_{n,a}(x) = - \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n !} (x - t)^n dt$$

$$R_{n,a} (x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n !} (x - t)^n dt .$$

Aunque las formas de Lagrange y de Cauchy del resto son algo más curiosidades teóricas, la forma integral del resto será, por lo general, muy adecuada. Si se aplica esta forma a las funciones sen(x), cos(x) y exp(x), con a = 0, el teorema de Taylor proporciona las siguientes fórmulas :

$$\text{sen} (x) = x - \frac{x^3}{3 !} + \frac{x^5}{5 !} - \ . \ . \ . \ . + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1) !} + \int_0^x \frac{\text{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n + 1) !} (x - t)^{2n+1} dt,$$

$$\cos (x) = 1 - \frac{x^2}{2 !} + \frac{x^4}{4 !} - \ . \ . \ . \ . + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n) !} + \int_0^x \frac{\cos^{(2n+1)} (t)}{(2n) !} (x - t)^{2n} dt ,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2 !} + \ . \ . \ . + \frac{x^n}{n !} + \int_0^x \frac{e^t}{n !} (x - t)^n dt .$$

Calcular explícitamente cualquiera de estas integrales sería una locura; por supuesto, la solución será exactamente la diferencia entre el primer miembro y todos los restantes términos del segundo miembro. Sin embargo, estimar estas integrales es fácil y al mismo tiempo vale la pena .

Las dos integrales primeras son particularmente fáciles. Al ser

$$\left|\mathrm{sen}^{(2n+2)}(t)\right| \leq 1 \quad \text{para todo} \quad t ,$$

tenemos $$\left| \int_0^x \frac{\mathrm{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1}\, dt \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \left| \int_0^x (x-t)^{2n+1}\, dt \right|$$
.

Puesto que
$$\int_0^x (x-t)^{2n+1}\, dt = \left[\frac{-(x-t)^{2n+2}}{2n+2} \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{-(x-x)^{2n+2}}{2n+2} - \left(\frac{-(x-0)^{2n+2}}{2n+2} \right)$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2n+2},$$
deducimos que

$$\left| \int_0^x \frac{\mathrm{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1}\, dt \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!\,(2n+2)} = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Análogamente podemos demostrar que

$$\left| \int_0^x \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n)!} (x-t)^{2n}\, dt \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Por que $\left|\cos^{(2n+1)}(t)\right| \leq 1$ para todo t ,
y $$\int_0^x (x-t)^{2n}\, dt = \left[\frac{-(x-t)^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x = \frac{-(x-x)^{2n+1}}{2n+1} - \left(\frac{-(x-0)^{2n+1}}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\left| \int \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n)!} (x-t) \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n)!\,(2n+1)} = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Estas estimaciones son particularmente interesantes, ya que para todo $\epsilon > 0$ podemos hacer

$$\frac{x^n}{n\,!} < \epsilon$$

eligiendo n suficiente mente grande (lo grande que sea n dependerá de x).

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar esto, obsérvese que si $2x \le n$ entonces

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!} = \frac{x}{n+1}\frac{x^n}{n\,!} = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n+1}{1}}\frac{x^n}{n\,!} = \frac{n}{2(n+1)}\frac{x^n}{n\,!}$$

$$= \frac{n}{2n+2}\frac{x^n}{n\,!} < \frac{n}{2n}\frac{x^n}{n\,!} = \frac{1}{2}\frac{x^n}{n\,!}\,.$$

Sea ahora n_0 un número natural cualquiera con $2x \le n_0$. Entonces, cualquiera que sea el valor de

$$\frac{x^{n_0}}{(n_0)\,!}$$

los valores sucesivos satisfacen $\dfrac{x^{(n_0+1)}}{(n_0+1)} < \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^{n_0}}{(n_0)\,!}$

$$\frac{x^{(n_0+2)}}{(n_0+2)\,!} < \frac{1}{2}\frac{x^{(n_0+1)}}{(n_0+1)\,!} < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{n_0}}{(n_0)\,!}$$

$$\frac{x^{(n_0+3)}}{(n_0+3)\,!} < \frac{1}{2}\frac{x^{(n_0+2)}}{(n_0+2)\,!} < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{n_0}}{(n_0)\,!}$$

$$\vdots$$

$$\frac{x^{(n_0+k)}}{(n_0+k)\,!} < \frac{1}{2^k}\cdot\frac{x^{n_0}}{(n_0)\,!}\,.$$

Si k es tan grande que $\dfrac{x^{n_0}}{(n_0)\,!\,\epsilon} < 2^k$,

entonces $\dfrac{x^{(n_0+k)}}{(n_0+k)\,!} < \epsilon$,

lo cual es el resultado deseado.

Esto nos permite calcular sen (x) con tanta aproximación como queramos, calculando simplemente el polinomio de Taylor adecuado $P_{n,0}$ (x). Por ejemplo, supóngase que deseamos calcular sen (2) con un error menor que 10^{-4}. Puesto que

$$\text{sen}(2) = P_{2n+1,0}(2) + R,$$

donde

$$|R| \leq \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

podemos utilizar $P_{2n+1,0}(2)$ como solución, siempre que

$$\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-4}.$$

Se puede hallar un número n con esta propiedad mediante búsqueda directa; evidentemente, sirve de ayuda disponer de una tabla de valores de n! y de 2^n véase en la siguiente tabla. En este caso resulta ser adecuado $n = 5$, de modo que

$$\operatorname{sen}(2) = P_{11,0}(2) + R = 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} + R, \quad \text{donde}$$

$|R| < 10^{-4}$

Es todavía más fácil calcular aproximadamente sen (1), puesto que

$$\operatorname{sen}(1) = P_{2n+1,0}(1) + R, \quad \text{donde} \quad |R| < \frac{1}{(2n+2)!}.$$

Para obtener un error menor que ϵ necesitamos solamente hallar un n tal que

$$\frac{1}{(2n+2)!} < \epsilon,$$

y esto sólo requiere una breve ojeada a la tabla de factoriales. (Además, los términos de $P_{2n+1,0}(1)$ serán más fáciles de manejar).

Para x muy pequeños las estimaciones serán incluso más fáciles. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{10}\right) = P_{2n+1,0}\left(\tfrac{1}{10}\right) + R, \quad \text{donde} \ |R| < \frac{1}{10^{2n+2}(2n+2)!}$$

.

Para obtener $|R| < 10^{-10}$ podemos tomar evidentemente $n = 4$ (nos podríamos valer incluso de $n = 3$). Estos métodos son los que en realidad se utilizan para calcular tablas de sen(x) y de cos(x). Un calculador de gran velocidad puede calcular $P_{2n+1,0}(x)$ para muchas x distintas casi instantáneamente.

La estimación del resto para e^x es sólo ligeramente más difícil. Para mayor sencillez supongamos $x \geq 0$. Sobre el intervalo $[0, x]$ el valor máximo de e^t es e^x, puesto que la exponencial es creciente, de modo que

$$\int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n\,dt \leq \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n\,dt = \frac{e^x}{n!}\left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x$$

n	2^n	n!
1	2	1
2	4	2
3	8	6
4	16	24
5	32	120
6	64	720
7	128	5,040
8	256	40,320
9	512	362,880
10	1,024	3,628,800
11	2,048	39,916,800
12	4,096	479,001,600
13	8,192	6,227,020,800
14	16,384	87,178,291,200
15	32,768	1,307,674,368,000
16	65,536	20,922,789,888,000
17	131,072	355,687,428,096,000
18	262,144	6,402,373,705,728,000
19	524,288	121,645,100,408,832,000
20	1,048,576	2,432,902,008,176,640,000

$$= \frac{e^x}{n\,!}$$

$$\left[\frac{-\,(\,x - x\,)^{n+1}}{n + 1} - \frac{-\,(\,x - 0\,)^{n+1}}{n + 1} \right]$$

$$= \frac{e^x}{n\,!} \left(- \frac{-\,x^{n+1}}{n + 1} \right) =$$

$$\frac{e^x \; x^{n+1}}{(\,n + 1\,)\,!}.$$

Las estimaciones para $x \leq 0$. Sobre el intervalo $[\,x\,,\,0\,]$ el valor máximo de e^t es e^{-x}, puesto que la exponencial es decreciente de modo que

$$\left| \int_x^0 \frac{e^t}{n\,!} \,(\,x - t\,)^n \,dt \right| \leq \left| \int_x^0 \frac{(\,x - t\,)^n}{n\,!} \,dt \right| = \left[\frac{1}{n\,!} \left| \frac{(x - t\,)^{n+1}}{n + 1} \right| \right]$$

$$= \frac{1}{n\,!} \left[\left| \frac{(\,x - 0\,)^{n+1}}{n + 1} \right| - \left| \frac{(\,x - x\,)^{n+1}}{n + 1} \right| \right] = \frac{1}{n\,!} \left| \frac{(\,x - 0\,)^{n+1}}{n + 1} \right| = \frac{|\,x|^{n+1}}{(n + 1\,)\,!}$$

.

Puesto que sabemos ya que $e < 4$, tenemos $\frac{e^x \; x^{n+1}}{(\,n + 1\,)\,!} < \frac{4^x \; x^{n+1}}{(\,n + 1\,)\,!}$

,

lo cual puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo n suficientemente grande. Lo grande que tenga que ser n depende de x (y el factor 4^x hará las cosas más difíciles). Una vez más, las estimaciones son más fáciles para x pequeños. Sí $0 \leq x \leq 1$, entonces

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \;.\;\;.\;\;.\; + \frac{x^n}{n\,!} + R, \quad \text{donde } 0 < R < \frac{4}{(\,n + 1\,)\,!}.$$

(La desigualdad $0 < R$ se sigue inmediatamente de la forma integral de R). En particular, si $n = 4$, entonces

$$0 < R < \frac{4}{5\,!} < \frac{1}{10},$$

de modo que

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \frac{1}{4\,!} + R, \quad \text{donde } 0 < R < \frac{1}{10}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + R = 2 + \frac{12 + 4 + 1}{24} = 2 + \frac{17}{24} + R$$

$$= \frac{48 + 17}{24} + R = \frac{65}{24} + R,$$

lo cual demuestra que $2 < e < 3$.

Esto nos permite mejorar ligeramente nuestra estimación de R:

$$0 < R < \frac{3^x \, x^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Tomando $n = 7$ se puede calcular que los tres primeros decimales de e son

$$e = 2.718 \; . \; . \; .$$

(Comprobar que $n = 7$ da efectivamente este grado de aproximación pero sería una crueldad insistir en que se efectuaran los cálculos.)

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = 2 + \frac{17}{24} + \frac{42 + 7 + 1}{5040}$$

$$= 2 + 0.7083 + \frac{50}{5040} = 2 + 0.7083 + 0.009920 = 2 + 0.7182 = 2.7182.$$

La función arctg es también importante, pero, según puede recordarse, una expresión para $\operatorname{arctg}^{(k)}(x)$ es tremendamente complicada, de modo que la forma integral del resto no sirve. Por otra parte, nuestra deducción del polinomio de Taylor para arctg nos dio automáticamente una fórmula para el resto:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \; . \; . \; . \; + \frac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{2n + 1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} \, t^{2n+2}}{1 + t^2} \, dt.$$

Según hemos estimado ya, $\left| \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} \, t^{2n+2}}{1 + t^2} \, dt \right| \le \left| \int_0^x t^{2n+2} \, dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n + 3}.$

De momento vamos a considerar solamente números x con $|x| \le 1$. En este caso, el resto se puede hacer claramente tan pequeño como se desee eligiendo n suficientemente grande. En particular,

$$\operatorname{arctg}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + R, \quad \text{donde } |R| < \frac{1}{2n+3}.$$

Con esta estimación es fácil hallar un n que haga al resto menor que cualquier número prefijado: por otra parte, n será generalmente tan grande como para hacer los cálculos tremendamente largos. Para obtener un resto menor que 10^{-4}, por ejemplo, debemos tomar $n > (10^4 - 3)/2$. Esto es verdaderamente una lástima, ya que $\operatorname{arctg}(1) = \pi/4$, de modo que el polinomio de Taylor para arctg nos debería permitir el cálculo de π. Afortunadamente existen algunos ingeniosos artificios que nos permiten superar estas dificultades. Puesto que

$$|R_{2n+1,0}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

El polinomio de Taylor para la función $f(x) = \log(x+1)$ en $a = 1$ se trata de la misma manera que el polinomio de Taylor para arctg. Aunque la forma integral del resto para f no es difícil de escribir, es difícil de estimar. Por otra parte, obtenemos una fórmula sencilla si empezamos con la ecuación

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t};$$

esto implica que

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + (-1)\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt,$$

para todo $x > -1$. Si $x \geq 0$, entonces $\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$,

y la estimación es algo más complicada cuando $-1 < x < 0$, entonces

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}.$$

Para esta función el resto puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo n suficientemente grande, siempre que $-1 < x \leq 1$.

El comportamiento de los restos para arctg(x) y f (x) = log (x + 1) es ya otro asunto cuando $|x| > 1$. En este caso, las estimaciones

$$|R_{2n+1,\,0}(x)| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \quad \text{para arctg}$$

$$|R_{n,0}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (x > 0) \quad \text{para } \log(x+1),$$

no son útiles, porque cuando $|x| > 1$ las cotas x^m/m se hacen grandes cuando m es grande. Esto es inevitable y no es sólo un defecto de nuestras estimaciones. Es fácil obtener estimaciones en la otra dirección, las cuales demuestran que los restos en realidad siguen siendo grandes. Para obtener una de tales estimaciones para arctg, obsérvese que si t está en $[0, x]$ (o en $[x, 0]$ si $x < 0$), entonces

$$1 + t^2 \leq 1 + x^2 \leq 2x^2, \quad \text{si } |x| \geq 1,$$

de modo que $\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \geq \frac{1}{2x^2} \left| \int_0^x t^{2n+2}\, dt \right| = \frac{|x|^{2n+1}}{4n+6}$.

Análogamente, si $x > 0$, entonces para t en $[0, x]$ tenemos

$$1 + t \leq 1 + x \leq 2x, \quad \text{si } x \geq 1,$$

de modo que $\int_0^x \frac{t^n}{t+1}\, dt \geq \frac{1}{2x} \int_0^x t^n\, dt = \frac{x^n}{2n+2}$.

Estas estimaciones indican que si $|x| > 1$, entonces los restos se hacen grandes cuando n se hace grande. En otras palabras, para $|x| > 1$, los polinomios de Taylor para arctg(x) y log (x + 1) no son útiles en absoluto para calcular arctg (x) y log (x + 1). Esto no constituye ninguna tragedia, puesto que los valores de estas funciones pueden hallarse para x cualesquiera una vez que son conocidos para todas las x con $|x| < 1$.

Esta misma situación se presenta de modo espectacular para la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{array} \right\}.$$

Hemos visto ya que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo número natural k. Esto significa que el polinomio de Taylor $P_{n,0}(x)$ para f es

$$P_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0.$$

En otras palabras, el resto $R_{n,0}(x)$ es siempre igual a $f(x)$, y el polinomio de Taylor no es útil para el cálculo de $f(x)$, excepto para $x = 0$. Eventualmente podremos ofrecer una explicación del comportamiento de esta función, la cual constituye un ejemplo desconcertante de las limitaciones del teorema de Taylor.

La palabra " calcular " ha sido utilizada tantas veces en conexión con nuestras estimaciones del resto, que esto podría dar lugar a una mala interpretación del significado del teorema de Taylor. Es cierto que el teorema de Taylor constituye un instrumento casi ideal para el cálculo (a pesar de su ignominioso fracaso en el ejemplo anterior), pero tiene consecuencias teóricas igualmente importantes. La mayor parte de éstas serán desarrolladas en capítulos sucesivos, pero daremos ahora dos demostraciones para ilustrar algunas maneras en que puede usarse el teorema de Taylor. La primera ilustración será particularmente impresionante para aquellos que hayan asimilado la demostración de que π es irracional.

Teorema 5

e es irracional .

DEMOSTRACIÓN

Sabemos que, para toda n,

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{n!} + R_n, \quad \text{donde } 0 < R_n \ \frac{3}{(n+1)!}.$$

Supongamos que e fuese racional, por ejemplo $e = a / b$, donde a y b son enteros positivos. Elijamos $n > b$ y también $n > 3$. Entonces

$$\frac{a}{b} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{n!} + R_n\ ,$$

de modo que $$\frac{n! \cdot a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \ . \ . \ . \ + \frac{n!}{n!} + n!\,R_n\ .$$

Todos los términos de esta ecuación distintos de $n!{\cdot}R_n$ son enteros (el primer término es entero puesto que $n > b$). En consecuencia, $n!\cdot R_n$ debe ser también entero. Pero

$$0 < R_n \ \frac{3}{(n+1)!}\ ,$$

de modo que $$0 < n!\,R_n < \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1,$$

lo cual es imposible para un entero.

La segunda ilustración es una demostración directa de un hecho demostrado anteriormente: Si f tiene segunda derivada en todas partes y que

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0 \\ f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 . \end{aligned}$$

Entonces f = 0.

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar esto, observemos primero que $f^{(k)}$ existe para todo k ; en efecto,

$f'' + f = 0$, despejamos f''

$f'' = -f$, derivamos ambos miembros de la igualdad,

$f^{(3)} = (f'')' = -f'$, se hace lo mismo,

$f^{(4)} = (f^{(3)})' = (-f')' = -f'' = f$

$f^{(5)} = (f^{(4)})' = f'$,

etc.

Esto demuestra, no sólo que existen todos los $f^{(k)}$, sino también que existen a lo sumo cuatro diferentes f , f',-f , -f'. Puesto que $f(0) = f'(0) = 0$, todos los $f^{(k)}(0)$ son 0. Ahora bien, el teorema de Taylor afirma que, para cualquier n

$$f(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n \, dt .$$

Cada una de las funciones $f^{(n+1)}(t)$ es continua (ya que existe $f^{(n+2)}$) , de modo que para cualquier x particular existe un número M tal que

$$\left| f^{(n+1)}(t) \right| \leq M \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq x , \text{ y todo } n,$$

podemos añadir la frase " y todo n " puesto que existen solamente cuatro $f^{(k)}$ distintos. Así pues,

$$|f(x)| \leq M \left| \int_0^x \frac{(x - t)^n}{n!} \right| = \frac{M \, |x|^{n+2}}{(n+1)!} .$$

Puesto que esto se cumple para todo n, y puesto que $x^n / n!$ puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo n suficientemente grande, esto demuestra que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$; en consecuencia, $f(x) = 0$.

Las demás aplicaciones del teorema de Taylor que veremos en capítulos sucesivos están intimamente relacionadas con las consideraciones de tipo calculatorio que nos han ocupado en toda esta parte. Si el resto $R_{n,a}(x)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo n suficientemente grande, entonces se puede calcular f (x) con tanta aproximación como se desee mediante los polinomios $P_{n,a}(x)$. El número de términos que habrá que sumar será tanto mayor cuanto más grande sea la aproximación que se desee. Si estamos dispuestos a sumar infinidad de términos (por lo menos en teoría), entonces deberíamos poder prescindir por completo del resto. Deberían existir " sumas infinitas " tales como

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \;\ldots\ldots ,$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \;\ldots\ldots ,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \;\ldots\ldots ,$$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \;\ldots\ldots \qquad \text{si } |x| \leq 1 ,$$

$$\log(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \;\ldots\ldots \qquad \text{si } -1 < x \leq 1.$$

Estamos casi preparados para este paso. Solamente queda un obstáculo: las sumas infinitas ni siquiera han sido definidas. En temas posteriores se agregaran las definiciones necesarias.

III APLICACIONES DEL TEOREMA DE TAYLOR.

1) Verifique que $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ . \ . \ . \ + \frac{x^n}{n!}$,

es el polinomio de Taylor de grado n de $f(x) = e^x$ en $a = 0$.
Solución . En este caso

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$, . . . $f^{(n)}(x) = e^x$;
$f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 1$, . . . $f^{(n)}(0) = 1$.
Si sustituimos estos valores en $P_n(x)$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ . \ . \ . \ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n ,$$

$$P_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}(x - 0) + \frac{1}{2!}(x - 0)^2 + \frac{1}{3!}(x - 0)^3 + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{n!}(x - 0)^n$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ . \ . \ . \ + \frac{x^n}{n!}.$$

Así obtenemos el resultado deseado.

2) Encuentre el polinomio de Taylor de grado n de $f(x) = \text{sen}(x)$ en $a = \frac{\pi}{6}$.
Solución. En este caso

$f(x) = \text{sen}(x)$, $\qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;

$f'(x) = \cos(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt[2]{3}}{2}$;

$f''(x) = -\,\text{sen}(x) = \text{sen}(x + \pi)$, $\qquad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$;

$f'''(x) = -\cos(x) = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$, $\qquad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt[2]{3}}{2}$;

.
.
.

$f^{(n)}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, $\qquad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}\right)$;

Si aplicamos $P_n(x)$ de Taylor obtenemos

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

$$P_n(a) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt[2]{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{-1/2}{2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{-\sqrt[2]{3}/2}{3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n,$$

$$P_n(a) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt[2]{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2!\cdot 2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt[2]{3}}{3!\cdot 2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n,$$

$$P_n(a) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt[2]{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt[2]{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n.$$

3) Desarrolle $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en potencias de $(x - \pi/6)$ por la fórmula de Taylor con residuo.

Solución. En el ejemplo 2) encontramos la información necesaria para obtener el resultado pedido, excepto la expresión para $f^{(n+1)}(x)$. Como $f^{(n+1)}(x) = (f^n(x))'$, obtenemos

$$f^{(n+1)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n+1}{2}\pi\right), \quad y \quad f^{(n+1)}(t) = \operatorname{sen}\left(t + \frac{n+1}{2}\pi\right).$$

Al usar este resultado y los resultados del ejemplo 2), obtenemos

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt[2]{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt[2]{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + R_n(x).$$

(∂)

donde $\quad R_n (x) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(t + \dfrac{n+1}{2}\pi\right)}{(n + 1) !} \left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^{n+1}, \quad \dfrac{\pi}{6} < t < x .$
(∇)

El desarrollo (∂) es válido para $x \geq \pi/6$, ya que $f^{(n)}$ es continua en los números reales y $f^{(n+1)}(x)$ existe en los reales. [veremos más tarde que (∂) es válida cuando x pertenece a los reales].

Usemos la fórmula (∂) para aproximar sen (x) para x próximo a $\pi/6$, digamos $x = 31\pi/180$, esto es usemos (∂) para encontrar el valor aproximado de sen (31°). Por (∂) obtenemos

$$\operatorname{sen} (31°) = \operatorname{sen}\left(\frac{31 \pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt[2]{3}}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 - \frac{\sqrt[2]{3}}{12}\left(\frac{\pi}{180}\right) + \ldots$$

$$+\frac{\operatorname{sen} [(\pi/6) + n (\pi/2)]}{n !}\left(\frac{\pi}{180}\right)^n + R_n\left(\frac{31 \pi}{180}\right),$$

al usar (∇) tenemos

$$R_n\left(\frac{31\pi}{180}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(t + \dfrac{n+1}{2}\pi\right)}{(n + 1) !}\left(\frac{31 \pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right)^{n+1}, \qquad \frac{\pi}{6} < t < \frac{31\pi}{180} :$$

Como $| \operatorname{sen} u | \leq 1$, deducimos que $\left|R_n \left(\dfrac{31 \pi}{180}\right)\right| \leq \dfrac{|(31 \pi/ 180) - (\pi/ 6)|^{n+1}}{(n + 1) !}$.

Si tomamos $n = 4$, entonces $\left|R_n \left(\dfrac{31 \pi}{180}\right)\right| \leq 0.000\,000\,000\,01$,

sen (31°) = 0.515038075, este valor es correcto al menos hasta la novena cifra decimal.

El residuo $R_{n+1}(x)$ representa el error cometido cuando el polinomio $P_n(x)$ se usa para aproximar f (x) para cualquier valor permitido de x. En algunos casos es posible para un valor dado x_1 de x escoger a y n de tal manera que si $a < t < x_1$ entonces el valor absoluto de $R_{n+1}(x_1)$ es menor que un "error permitido" o un número positivo específicado ϵ. Supongamos que existe un número positivo M tal que $\left|f^{(n+1)} (t)\right| \leq M$. Entonces por el teorema de Taylor (2)

$$R_{n,a} (x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n + 1) !} (x - a)^{n+1} \quad \text{para algún } t \text{ en } (a , x),$$

$$|R_n\ (x_1)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x_1 - a|^{n+1}.$$

Si podemos escoger n de tal manera que $\dfrac{M}{(n+1)!} |x_1 - a| < \epsilon$,

entonces $P_n(x_1)$ aproxima $f(x_1)$ de tal manera que $|P_n(x_1) - f(x_1)| < \epsilon$,

es decir que $P_n(x_1)$ difiere de $f(x_1)$ por una cantidad menor que ϵ .

4) Desarrolle $f(x) = e^x$ en potencias de x por la fórmula de Maclaurin con residuo.

Solución. Por el ejemplo 1) y de hecho de que $f^{(n+1)}(x) = e^x$, y $f^{(n+1)}(t) = e^t$,

obtenemos $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ . \ . \ . + \dfrac{x^n}{n!} + R_n(x)$,

donde $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$, $0 < t < x$.

Si en la fórmula Taylor con residuo tomamos $a = 0$, obtenemos

$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \dfrac{f''(0)}{2!} x^2 + \ . \ . \ . + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x)$, (θ)

donde $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1!} x^{n+1}$, $0 < t < x$ y $R_n(x) = 0$ para $x = 0$.

La igualdad (θ) se llama fórmula de Maclaurin con residuo para $f(x)$, el residuo es el término $R_n(x)$ de (θ). Se supuso que $f^{(n)}$ es continua en el intervalo cerrado $[0, b]$, que $f^{(n+1)}(x)$ existe en el intervalo abierto $(0, b)$, y que $x \in [0, b]$. Decimos que $f(x)$ se ha desarrollado en potencias de x por la fórmula de Maclaurin cuando se ha calculado los coeficientes de lo términos de grado menor o igual que n, en la fórmula de Maclaurin y el coeficiente del residuo se ha expresado en términos de t.

5) Use los primeros cinco términos en el desarrollo de e^x del ejemplo 4), esto es use el polinomio

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} ,$$

para calcular $e^{0.2}$ y dé el error estimado en este cálculo.

Solución. Por el ejemplo 4), tenemos $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + R_4(x)$,

donde $R_4(x) = \frac{x^5}{5\,!}\, e^x$, $0 < t < x$,

Para $x \in [0, 1]$ $1 \leq e^x \leq e$, $1 < e^x < e$,

y en consecuencia $\frac{x^5}{5\,!} < R_4(x) < e\,\frac{x^5}{5\,!}$; $x \in [0, 1]$.

En particular , $\frac{(0.2)^5}{120} < R_5(0.2) < e\,\frac{(0.2)^5}{120}$.

como $\frac{(0.2)^5}{120} = \frac{0.00032}{120} = \frac{0.00008}{3}$ y $e < 3$,

deducimos que $\frac{0.00008}{3} < R_5(0.2) < 0.00008$:

Sustituyendo tenemos $P_4(0.2) = 1 + 0.2 + \frac{0.04}{2} + \frac{0.008}{6} + \frac{0.0016}{24} = 1.2214$.

En conclusión, se tiene $e^{0.2} \cong 1.2214$,

con un error menor que 0.00008 y mayor que $\frac{0.00008}{3} = 0.000026666$.

6) Desarrolle $f(x) = \cos(x)$ en potencias de x por la fórmula de Maclaurin con residuo.

Solución. En este caso

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \cos(x) , & f(0) = 1 ; \\
f'(x) = -\mathrm{sen}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & f'(0) = 0 ; \\
f''(x) = -\cos(x) = \cos(x + \pi), & f''(0) = -1; \\
f'''(x) = \mathrm{sen}(x) = \cos\left(x + \frac{3}{2}\pi\right), & f'''(0) = 0; \\
\vdots & \\
f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n}{2}\,\pi\right) , & f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n}{2}\,\pi\right) \\
f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n+1}{2}\,\pi\right) , & f^{(n+1)}(t) = \cos\left(t + \frac{n+1}{2}\,\pi\right).
\end{array}
$$

Al sustituir esto valores en (θ) obtenemos

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{\cos[\ (n/2)\pi\ ]}{n!}$$
$x^n + R_n(x)$

$$\text{donde} \quad R_n(x) = \frac{\cos\left(t + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!} x^{n+1}; \ 0 < t < x.$$

7) Uno de los primeros siete términos [esto es, use $P_6(x)$] en el desarrollo de cos(x) en serie de potencias por la fórmula de Maclaurin con residuo para calcular cos (1/2) y de el error estimado en este cálculo.

Solución. Note que el séptimo término de la fórmula de Maclaurin es el cuarto término diferente de cero en el desarrollo de cos (x) ; entonces nos reduciremos a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + R_6(x)$$

$$\text{donde} \quad R_6(x) = \frac{\cos(t + 7/2\pi)}{7!} x^7 ; \qquad 0 < t < x.$$

Como $|\cos u| \le 1$, tenemos que $|R_6(x)| \le \frac{x^7}{7!}$.

Por lo tanto $\left|R_6\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7!} = \frac{1}{(128)(5040)} = \frac{1}{645120}$;

de modo que $\left|R_6\left(\frac{1}{2}\right)\right| < 0.000002.$

Si $P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$;

tenemos que

$$P_6\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!} = 1 - \frac{1}{2\ (4)} + \frac{1}{24\ (16)} - \frac{1}{720\ (64)}$$

$$= 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{384} - \frac{1}{46080} = 1 - 0.125 + 0.00264 - 0.0000217$$

$$= 0.8776183.$$

Concluimos que $\cos(1/2) = 0.877618$,

con un error menor que 0.000002 .

Al obtener la fórmula de Taylor supusimos que $F^{(n)}(x)$ es continua en [a , b] y que $F^{(n+1)}(x)$ existía en (a , b), bajo estas condiciones la fórmula para $F(x)$ es válida para $x \in [a, b]$, esto es cuando $a < x < b$. Si por el contrario, suponemos que $F^{(n)}$ es continua en (b, a), y que $F^{(n+1)}(x)$ existe en (b, a) un proceso similar demuestra que la fórmula ($*$) se verifica para $F(x)$ cuando $x \in [b, a]$ esto es cuando $b \le x \le a$, y la fórmula del residuo se verifica cuando $x < t < a$. En consecuencia se puede usar la fórmula de Taylor en potencias de x - a para $F(x)$ siendo $a \in [c, d]$, x elemento de cualquier intervalo [c , d] donde las hipótesis referentes a $F^{(n)}(x)$ y $F^{(n+1)}(x)$ se satisfagan y t un número real tal que $a < t < x$ ó $x < t < a$. Esto es, se puede usar la fórmula de Taylor si $x_1 \in [c,d]$ para aproximar $F(x_1)$; si $a = 0$ podemos usar la fórmula de Maclaurin para aproximar $F(x_1)$. Regresando a los ejemplos 3, 4 y 6 vemos que en cada ejemplo $F^{(n)}(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y $F^{(n+1)}(x)$ existe en $\mathbb{R}$, así que los desarrollos son válidos para x pertenece a $\mathbb{R}$ y t es un número tal que $a < t < x$.

8) Use los primeros cinco términos del desarrollo de e^x del ejemplo 4), para calcular $e^{-0.2}$ y dé una estimación del error en este cálculo.

Solución. En este caso $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x)$,

donde $R_4(x) = \frac{x^5}{5!} e^x$, $x < t < 0$.

Para $x \in [-1, 0]$, tenemos que $e^{-1} \le e^x \le 1$ y por lo tanto $e^{-1} \le e^t \le 1$. En consecuencia

$$\frac{1}{e}\frac{x^5}{5!} > R_4(x) > \frac{x^5}{5!}, \qquad x \in [-1, 0).$$

En particular $\frac{1}{e}\frac{(-0.2)^5}{5!} > R_4(-0.2) > \frac{(-0.2)^5}{5!}$.

Como $\frac{(-0.2)^5}{120} = -\frac{0.000008}{3} = 0.00000266$,

concluimos que $|R_4(-0.2)| < 0.00000266$.

Si $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$;

tenemos que

$$P_4(-0.2) = 1 - 0.2 + \frac{0.04}{2} - \frac{0.008}{6} + \frac{0.0016}{24} = 0.82 - \frac{0.0038}{3} \cong 0.81873.$$

Resumiendo tenemos que $e^{-0.2} \cong 0.81873$

es correcto hasta la quinta cifra decimal.

9) Obténgase un valor aproximado de $\sqrt[2]{265}$ por el método de la diferencial y determínese una cota para el error de truncamiento.

Solución. Sea $f = I^{1/2}$; entonces $f' = \frac{1}{2} I^{-1/2}$ y $f'' = \frac{-1}{2} I^{-3/2}$. Como f'' es continua sobre $(0, \infty)$ tenemos

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt[2]{x_0} + \frac{x - x_0}{2 \sqrt[2]{x_0}} - \frac{1}{4} \int_{x_0}^{x} t^{-3/2} (x - t) \, dt = \frac{x + x_0}{2 \sqrt[2]{x_0}} - \frac{1}{4} \int_{x_0}^{x} t^{-3/2} (x - t) \, dt .$$

El número x_0 debe tomarse cercano a $\sqrt[2]{265}$, pero, al mismo tiempo, debe escogerse de modo que $\sqrt[2]{x_0}$ sea fácil de calcular. Escogiendo $x_0 = 256$, obtenemos

$$\sqrt[2]{265} = \frac{265 + 256}{32} - \frac{1}{4} \int_{256}^{265} t^{-3/2} (265 - t) \, dt.$$

Así pues 521/32 es una aproximación para $\sqrt[2]{265}$, con un error de truncamiento

$$R_2 = \frac{1}{4} \int_{256}^{265} t^{-3/2} (265 - t) \, dt \leq \frac{1}{4 (256)^{3/2}} \int_{256}^{265} (265 - t) \, dt$$

$$= \frac{1}{16384} \cdot \frac{81}{2} = 0.0024719 < 0.003.$$

Como $-0.003 < R_2 < 0$ y $16.281 < 521/32 < 16.282$,

$$16.278 < \sqrt[2]{265} < 16.282.$$

Podemos decir que $\sqrt[2]{265} = 16.28$ tiene correctas dos cifras decimales. Decir que $\sqrt[2]{265} = 16.28$ con dos cifras decimales correctas significa que

$$16.275 \leq \sqrt[2]{265} \leq 16.285.$$

Si se desea una mejor aproximación para $\sqrt[2]{265}$, podemos escoger $x_0 = (16.28)^2$, el cuadrado de la anterior aproximación y proceder como anteriormente. Entonces

$$\sqrt[2]{265} = \frac{265 + 265.0384}{32.56} - \frac{1}{4} \int_{265.0384}^{265} t^{-3/2} (265 - t) \, dt .$$

Así pues 530.0384/32.56 es una aproximación a $\sqrt[2]{265}$ con un error de truncamiento

$$R_7 = \frac{1}{4} \int_{265.0384}^{265} t^{-3/2} \; (265 - t) \, dt \; \leq \; \frac{1}{4 (256)^{3/2}} \int_{265.0384}^{265} (265 - t) \, dt$$

$$= \frac{0.00147456}{32768} \; < \; 0.000\,000\,05.$$

Como $-0.000\,000\,05 \; < \; R_7 < 0$ y $16.278\,820\,63 \; < \frac{530.0384}{32.56} \; < \; 16.278\,820\,64$,

Obtenemos $16.278\,820\,63 < \sqrt[2]{265} < 16.278\,820\,64$.

Así pues $\sqrt[2]{265} = 16.278\,820\,6$ tiene siete cifras decimales correctas.

10) Hállese una aproximación a la función seno sobre el intervalo cerrado $[-\pi/4 , \pi/4]$ por un polinomio de forma tal que el error de truncamiento sea menor que 1×10^{-5}.

Solución. Como todas las derivadas del seno son continuas sobre los reales, que son $\pm$ sen o $\pm$ cos, el teorema de Taylor se verifica para cualquier valor de n y x_0. Usando la forma de Lagrange para el residuo, tenemos, para cualquier $x \in [-\pi/4 , \pi/4]$, que $R_n(x)$ es o

$\pm \; \frac{\text{sen } (c)}{(n + 1) !} \; x^{n+1}$ o $\pm \; \frac{\cos (c)}{(n + 1) !} \; x^{n+1}$ donde c está entre 0 y x. Así pues

$$R_n(x) \leq \frac{| x|^{n+1}}{(n+1) !} \; \leq \; \frac{(\pi/4)^{n+1}}{(n +1) !} \; < \frac{1}{(n+1) !}.$$

Consultando una tabla de recíprocos de los factoriales, encontramos que 1/9 es menor que 1×10^{-5}. Por tanto, si tomamos $n = 8$ en la fórmula de Taylor, tendremos una aproximación polinomial a la función seno con error de truncamiento menor que 1×10^{-5} sobre el intervalo $[-\pi/4 , \pi/4]$. Desarrollando la fórmula de Taylor con $n = 8$, tenemos

$$\text{sen } (x) = \text{sen } (0) + x \cos (0) - \frac{x^2}{2 !} \text{sen } (0) - \frac{x^3}{3 !} \cos (0) + \frac{x^4}{4 !} \text{sen } (0)$$

$$+ \frac{x^5}{5 !} \cos (0) - \frac{x^6}{6 !} \text{sen } (0) - \frac{x^7}{7 !} \cos (0) + \frac{x^8}{8 !} \text{sen } (0) - \frac{x^9}{9 !} \cos (c)$$

$$= x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \frac{x^9}{9\,!} \cos(c)\,.$$

El polinomio obtenido anteriormente es una aproximación de la función seno con error de truncamiento menor que 1×10^{-5} sobre el intervalo [$-\pi/4$, $\pi/4$]. Podemos usar la fórmula determinada en el ejemplo anterior para obtener una aproximación a sen (1/2).

$$\text{sen}(1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\,3\,!} + \frac{1}{2^5\,5\,!} - \frac{1}{2^7\,7\,!} + \frac{1}{2^9\,9\,!}\cos(c), \quad c \in (0, 1/2)$$

y, por tanto, sen (1/2) = 0.479 425 5 con siete cifras decimales correctas.

11) Determínese el valor de exp(1) = e con cinco cifras decimales exactas de aproximación

Solución. Como todas las derivadas de exp son continuas sobre los reales, el teorema de Taylor se verifica para valores cualquiera de n y x_0. Tomemos $x_0 = 0$. Usand la forma de Lagrange para el residuo, tenemos para cualquier $x \in \mathbf{R}$,

$$e^x = e^0 + x\,e^0 + \frac{x^2}{2\,!}e^0 + \ . \ . \ . \ + \frac{x^n}{n\,!}e^0 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \ . \ . \ . \ + \frac{x^n}{n\,!}e^c\,,$$

donde c está entre 0 y x. Así pues, $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$ donde $c \in (0, 1)$.

Como $e < 3$, $R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$ y $R_9(1) < 1 \times 10^{-6}$.

Tenemos pues que $e = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \frac{1}{4\,!} + \frac{1}{5\,!} + \frac{1}{6\,!} + \frac{1}{7\,!} + \frac{1}{8\,!} + \frac{1}{9\,!}$

con error de truncamiento menor que $1\text{x}10^{-6}$ y e = 2.718 28 tiene cinco cifras decimales exactas.

El teorema de Taylor puede usarse para establecer algunas desigualdades útiles. Por ejemplo, la fórmula para e^x obtenida anteriormente da lugar a las desigualdades

$$1 + x + \ . \ . \ . + \frac{x^n}{n\,!} \le e^x \le 1 + x + \ . \ . \ . + 3^x\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{para } x \ge 0.$$

De una manea análoga podemos usar el teorema de Taylor para determinar los valores extremos de una función cuya primera y segunda y posiblemente derivadas más altas son cero en un punto

12) ¿Tiene un valor extremo en 0 la función f definida por $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$?

Solución. Como para todo $x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} e^c$

donde c esta entre 0 y x, $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} = 1 + \frac{x^4}{24} e^c \geq 1.$

Así pues, $f(0) = 1$ es el valor mínimo de f en $\mathbb{R}$.

13) ¿Tiene un valor extremo en 0 la función f definida por

$f(x) = x^2 (1 - \cos(x)) + x^5 \cos(2x)$?

Solución. Investigando los valores de las derivadas de f en 0, tenemos:

$f'(x) = x^2 \operatorname{sen}(x) + 2x(1 - \cos(x)) - 2x^5 \operatorname{sen}(2x) + 5x^4 \cos(2x)$

$f'(0) = 0$

$f''(x) = x^2 \cos(x) + 4x \operatorname{sen}(x) + 2(1 - \cos(x)) - 20x^4 \operatorname{sen}(2x) - 4x^5 \cos(2x) + 20x^3 \cos(2x)$

$f''(0) = 0$

$f'''(x) = -x^2 \operatorname{sen}(x) + 6x \cos(x) + 6 \operatorname{sen}(x) - 120x^3 \operatorname{sen}(2x) - 60x^4 \cos(2x) + 8x^5 \operatorname{sen}(2x) + 60x^2 \cos(2x)$

$f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = -x^2 \cos(x) - 8x \operatorname{sen}(x) + 12 \cos(x) + 120x \cos(2x) - 480x^2 \operatorname{sen}(2x) - 480x^3 \cos(2x) + 160x^4 \operatorname{sen}(2x) + 16x^5 \cos(2x)$

$f^{(4)} = 12.$

Así pues, por el teorema 2, f tiene un mínimo relativo en 0.

14) Sea $f(x)$ tal que $f^{(4)}(x)$ existe en $a \leq x \leq b$, y supóngase que $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ donde $a \leq x_0 \leq b$. Pruebe que $f(x)$ tiene un máximo o mínimo en x_0 si $f^{(4)}(x_0) > 0$ o $f^{(4)} < 0$ respectivamente.

Solución.

Por el teorema de Taylor, si ξ esta entre x_0 y x, entonces

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!}$$

$$+ \quad \frac{f^{(4)}(\ x_0\ )\ (\ x - x_0\ )^4}{4\ !} \ = \ f(\ x_0\ )\ + \frac{f^{(4)}(\ x_0\ )\ (\ x - x_0\ )^4}{4\ !}\ .$$

Si $f^{(4)}(\ x_0\ ) > 0$, entonces para todo x en una vecindad de radio δ de x_0 tenemos que $f(\ x\ ) \geq f(\ x_0\ )$, por lo tanto $f(\ x\ )$ tiene un mínimo relativo en $x = x_0$. Similarmente si $f^{(4)}(\ x_0) < 0$, entonces para todo x en una vecindad de radio δ de x_0 tenemos que $f(\ x\ ) \leq f(\ x_0\ )$, por lo tanto $f(\ x\ )$ tiene un máximo relativo en $x = x_0$.

15) LA FÓRMULA DE TAYLOR Y LA INTEGRACIÓN NUMÉRICA

La fórmula de Taylor puede usarse para obtener valores aproximados para las integrales. Si la (n + 1)-ésima derivada de una función f existe y es continua sobre un intervalo [a , b], entonces, para cualquier $x \in [\ a\ ,\ b\ ]$, $f(\ x\ ) = P_n(\ x\ ) + R_n(\ x\ )$

donde $P_n(\ x\ )$ es el polinomio

$$P_n(\ x\ ) = f(\ a\ ) + f'(\ a\ )\ (\ x - a\ ) + \frac{f''(\ a\ )}{2\ !}\ (\ x - a\ )^2 \ + \ . \ . \ . \ + \frac{f^{(n)}(\ a\ )}{n\ !}\ (\ x - a\ )^n$$

$$\text{y} \quad R_n(\ x\ ) \ = \frac{f^{(n+1)}(\ t\ )}{(\ n + 1\ )\ !}\ (\ x - a\ )^{n+1} \quad \text{para algún } t\ \in (\ a\ ,\ x\ ).$$

De donde podemos aproximarnos a f por $P_n(\ x\ )$ con error $E_n(\ x\ ) = |\ R_n(\ x\ )\ |$.

Se sabe que $E_n(x) = |R_n(\ x\ )| \leq M$ para toda $x \in [\ a,b\ ]$, entonces podemos aproximar a

$$\int_a^b f \quad \text{por} \quad \int_a^b P_n \quad \text{con error} \quad \left| \int_a^b f - \int_a^b P_n \right| = \left| \int_a^b R_n \right| \leq \ (\ b - a\ )\ M_n .$$

Este método de aproximación de integrales requiere la determinación de las primeras (n+ 1) derivadas del integrando. Si estas derivadas son fácilmente obtenibles y si el residuo es suficientemente pequeño para n razonablemente pequeñas, entonces la aproximación de la integral por el uso de la fórmula de Taylor es un método práctico. A menudo sucede que las derivadas del integrando se hacen más y más complicadas cuando n aumenta y se hace difícil la obtención de la fórmula de Taylor para el integrando. Sin embargo, es a menudo posible, como se muestra en los siguientes ejemplos y problemas, reemplazar el integrando por una función que tenga una fórmula de Taylor fácilmente obtenible y luego mediante una sustitución adecuada obtener una aproximación del integrando original.

1) Obténgase una aproximación polinomial para la función error

$$R_n(x) = \frac{2}{\sqrt[2]{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

sobre el intervalo $[0, 1]$ con error menor que 10^{-3}.

Solución. Obtenemos un desarrollo para e^{-t^2} escribiendo la fórmula de Taylor para e^u y reemplazando u por $-t^2$:

$$f(u) = f'(u) = f''(u) = \ldots = f^{(n+1)}(u) = e^u$$

de modo que $f(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$
e^c

donde c es algún número entre 0 y u. De donde

$$e^{-t^2} = f(-t^2) = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \ldots + \frac{(-t^2)^n}{n!} + \frac{(-t^2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-c_1^2},$$

donde c_1 es algún número entre 0 y t. Tenemos

$$|R_n(t)| = \left| \frac{(-t^2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-c_1^2} \right| \leq \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}.$$

Ahora bien $t \in [0, x] \subset [0, 1]$, de modo que $|R_n(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!}$

y $|R_6(t)| \leq \frac{1}{7!} = 0.198\,41 \times 10^{-3}$

para $t \in [0, 1]$. De donde $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + \frac{t^{12}}{6!}$
$+ R_6(t)$

y $R_6(x) = \frac{2}{\sqrt[2]{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$

$$= \frac{2}{\sqrt[2]{\pi}} \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} \right]$$

para $x \in [0, 1]$ con error menor que $\frac{2x}{7!\ \sqrt[2]{\pi}} \leq 2 \times 10^{-4} < 10^{-3}$

La anterior fórmula es válida para todo el intervalo $[0, 1]$. Sin embargo la fórmula contiene más términos de los necesarios si x no se aproxima a 1. Por ejemplo, si $x \in [0, 1/2]$, entonces

$$| R_n(1) | = \left| \frac{(-t^2)^{n+1}}{(n + 1) !} e^{-c_1^2} \right| \leq \frac{t^{2n+2}}{(n + 1) !} \leq \frac{1}{2^{2n+2} (n +1) !}$$

y $\quad | R_3(t)| \leq \dfrac{1}{2^8 \cdot 4 !} = \dfrac{1}{6144}$

de modo que $R_3(x) = \dfrac{2}{\sqrt[2]{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt = \dfrac{2}{\sqrt[2]{\pi}} \left[x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5 \cdot 2 !} - \dfrac{x^7}{7 \cdot 3 !} \right]$

para $x \in [0 . 1/2]$ con error menor que $\dfrac{2x}{6144 \sqrt[2]{\pi}} \leq \dfrac{1}{6144 \sqrt[2]{\pi}} \leq 10^{-4}$.

En particular $R_3(1/2) = \dfrac{2}{\sqrt[2]{\pi}} \displaystyle\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$

$$= \frac{2}{\sqrt[2]{\pi}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2 ! \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 3 ! \cdot 2^7} \right] = 0.520\ 5$$

y $\quad R_3(0.1) = \dfrac{2}{\sqrt[2]{\pi}} \left[0.1 - \dfrac{0.001}{3} + \dfrac{0.00001}{10} - \dfrac{10^{-7}}{7 \cdot 3 !} \right] = 0.1125.$

2) La integral $\quad K(k) = \displaystyle\int_0^{\Pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(x)}}$, $k \in [0 , 1)$,

se llama integral elíptica completa de primer clase. Para $k \in [0,1/2]$, obténgase una aproximación $K(k)$ con un error menor que 10^{-3}

Solución. Sea $\quad f(u) = (1 - u)^{-1/2}$.

Entonces
$$f'(u) = \frac{1}{2} (1 - u)^{-3/2}$$
$$f''(u) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} (1 - u)^{-5/2}$$
$$f'''(u) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} (1 - u)^{-7/2}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n+1)}(u) = \frac{(2n + 1)}{2^{n+1}} (1 - u)^{-(2n+3)/2}$$

donde $(2n + 1)!!$, que se lee " semifactorial de $2n + 1$ ", es el producto de los enteros impares desde 1 hasta $2n +1$; es decir, $(2n + 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ . \ . \ . \ (2n + 1)$.

Entonces $f(u) = f(0) + u f'(0) \ . \ . \ . + \dfrac{u^n}{n !} f^{(n)}(0) + R_n(u)$,

$$= 1 + \frac{1}{2} u + \frac{1 \cdot 3}{2 ! \cdot 2^2} u^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 ! \cdot 2^3} u^3 + \ . \ . \ . + \frac{(2n - 1)!!}{n ! \cdot 2^n}$$

$+ R_n(u)$,

donde $R_n(u) = \dfrac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\ u^{n+1}\ (1-c)^{-(2n+3)/2},\ c \in (0, u)$.

De donde $f(k^2 \operatorname{sen}^2(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(x)}}$

$= 1 + \dfrac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2(x) + \dfrac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2} k^4 \operatorname{sen}^4(x) + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}$

$k^6 \operatorname{sen}^6(x)$

$+ \ . \ . \ . + \dfrac{(2n+1)!!}{n!\cdot 2^n} k^{2n} \operatorname{sen}^{2n}(x) + R_n($

$u)$,

donde para $k \in [0, 1/2]$, $u = k^2 \operatorname{sen}^2(x) \in [0, 1/2]$ y

$$R_n(u) = \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!\ 2^{n+1}} u^{n+1} (1-c)^{-(2n+3)/2} \le \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!\ 2^{n+1}\ 4^{n+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{(2n+3)/2}}$$

$$= \frac{(2n+1)!!\ 2}{6^{n+1}\ \sqrt[2]{3}\ (n+1)}.$$

Ahora para $u \in [0, 1]$,

$$R_5(u) \le \frac{11!!\ 2}{6^6\ \sqrt[2]{3}\ 6!} = 3.57 \times 10^{-4} \qquad \text{o} \qquad \int_0^{\pi/2} R_5 \le \frac{\pi}{2}$$

3.57×10^{-4}.

Luego para $k \in [0, 1/2]$, $K(k) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(x)}}$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[1 + \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2(x) + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2} k^4 \operatorname{sen}^4(x) + \ldots + \frac{9!!}{5!\ 2^5} k^{10} \operatorname{sen}^{10}(x)\right]$$

dx,

con error menor que 5.61×10^{-4}. En el problema 4 vimos que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\ \frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{m!\cdot 2^m} \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto, para $k \in [0, 1/2]$,

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}\right)^2 k^4 + \ . \ . \ . + \left(\frac{9!!}{5!\cdot 2^2}\right) k^{10}\right]$$

con error menor que 5.61×10^{-4}.

La irracionalidad de e fue tan fácil de demostrar que en esta parte intentaremos una hazaña más difícil, y demostraremos que el número e no es sólo irracional, sino en realidad mucho peor. De qué manera un número puede ser peor que irracional, puede verse expresado de modo ligeramente distinto a las definiciones. Un número x es irracional si no es posible escribir $x = a/b$ para enteros cualesquiera a y b, con $b \neq 0$. Esto es lo mismo que decir que x no satisface ninguna ecuación $bx - a = 0$

para enteros a y b, excepto para $a = 0$. Examinada bajo este aspecto, la irracionalidad de $\sqrt[2]{2}$ no parece constituir una deficiencia demasiado terrible; parece más bien que $\sqrt[2]{2}$ es irracional pero por muy poco; aunque $\sqrt[2]{2}$ no es solución de una ecuación $ax_1 + a_0 = 0$

sí es solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$,

de grado superior en una unidad. El siguiente problema indica cómo fabricar muchos números irracionales x que satisfagan ecuaciones de grado superior

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_0 = 0,$$

para algunos enteros $a_{n-1}, \ . \ . \ . \ , a_0$ y $a_i \neq 0$ (esta condición excluye la posibilidad de que todos los a_i sean iguales a cero). Un número que satisface una ecuación "algebraica" de este tipo recibe el nombre de número algebraico, y prácticamente todos los números que hemos encontrado están definidos en términos de soluciones de ecuaciones algebraicas (π y e son las grandes excepciones de nuestra limitada experiencia matemática). Todas las raíces, tales como

$$\sqrt[2]{2}\ , \quad \sqrt[10]{3}\ , \ \sqrt[4]{7},$$

son claramente números algebraicos, e incluso combinaciones complicadas, tales como

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt[2]{5} + \sqrt[4]{1 + \sqrt[2]{2}}} + \sqrt[5]{6}$$

son números algebraicos (aunque no intentaremos demostrar esto). Los números que no pueden ser obtenidos mediante el proceso de resolver ecuaciónes algebraicas reciben el nombre trascendentes; el resultado principal de este capítulo establece que e es un número de este tipo anómalo.

La demostración de que e es trascendente está bien a nuestro alcance, y en teoría era posible incluso antes del inicio del teorema de Taylor. Sin embargo, con la inclusión de esta demostración, podemos considerarnos ya como algo más que novicios en el estudio de las matemáticas superiores; mientras que muchas demostraciones de irracionalidad depende solamente de propiedades elementales de números, la demostración de que un número es transcendente supone por lo general unas matemáticas verdaderamente fuertes. Incluso las fechas relacionadas con la transcendencia de e son impresionantemente recientes: la primera demostración de que e es transcendente, debido a Hermite, data de 1873. La demostración que vamos a dar es una simplificación debida a Hilbert. Antes de emprender la demostración misma, conviene planear la estrategia, la cual se basa en una idea usada incluso en la demostración de que e es irracional. Dos características de la expresión

$$e = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{n\,!} + R_n$$

fueron importantes para la demostración que e es irracional: Por una parte, el número

$$1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{n\,!}$$

puede escribirse como una fracción p/q con $q \leq n!$ (de manera que $n!(p/q)$ es entero); por otra parte, $0 < R_n < 3/(n+1)!$ (de modo que $n!\ R_n$ no es entero). Estos dos hechos demuestran que e puede ser aproximado particularmente bien mediante números racionales. Por supuesto todo número x puede ser aproximado tanto como se quiera mediante números racionales: si $\epsilon > 0$ existe un número racional r con $|x - r| < \epsilon$; el inconveniente está, sin embargo, en que puede ser necesario un denominador muy grande para r, tan grande quizá como $1/\epsilon$. Para e tenemos la seguridad de que éste no es el caso: Existe una fracción p/q que difiere de e en menos de $3/(n+1)!$, cuyo denominador q es a lo sumo $n\,!$. Si se observa cuidadosamente la demostración de que e es irracional, se verá que solamente se hace uso de esta propiedad de e. El número e no es en ningún modo único a este respecto: en términos generales, cuanto mejor puede ser aproximado un número mediante números racionales, tanto peor es este número. La demostración que e es trascendente depende de una extensión natural de esta idea: No solamente e, sino cualquier número finito de potencias e^1, e^2, e^3, ... , e^n, pueden ser aproximadas simultáneamente y particularmente bien mediante números racionales. En nuestra demostración empezaremos suponiendo que e es algebraico, de modo que

$$(\lambda) \quad a_n e^n + \ . \ . \ . \ + a_1 e + a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0$$

Para algunos enteros a_0, . . . ,a_n. Para obtener una contradicción hallaremos entonces ciertos enteros M, M_1, . . . , M_n y ciertos números " pequeños " $\in$, . . . , $\in_n$ tales que

$$e^1 = \frac{M_1 + \in_1}{M},$$

$$e^2 = \frac{M_2 + \in_2}{M},$$

$$\vdots$$

$$e^n = \frac{M_n + \in_n}{M}.$$

Lo pequeños que tengan que ser los $\in$ se verá cuando se sustituyan estas expresiones en la ecuación supuesta (λ). Después de multiplicar todo por M obtenemos

$[\ a_0 M + a_1 M_1 + \ . \ . \ . \ + a_n M_n\ ] + [\ \epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + \ . \ . \ . \ + \epsilon_n a_n\ ] = 0$.

El primer término entre corchetes es entero, y elegiremos los M de tal manera que sea necesariamente un entero no nulo. Nos arreglaremos para hallar los $\in$ de manera que

$$|\ \epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + \ . \ . \ . \ + \epsilon_n a_n| < \tfrac{1}{2};$$

esto nos llevará a la contradicción deseada: ¡ la suma de un entero no nulo y de un número de valor absoluto menor que $\frac{1}{2}$ no puede ser cero !.

Como estrategia básica todo esto es muy razonable y directo del todo. La parte destacable de la demostración será la manera en que se definan los M y los $\in$. Para leer la demostración será necesario saber algo acerca de la función gamma. (Esta función cumple con lo siguiente)

1) $\Gamma(\ x\ ) = \int_0^\infty e^{-t}\ t^{x-1} dt.$
2) $\Gamma(\ x\ )$ está definida si $x > 0$
3) $\Gamma(\ x\ ) = x\ \Gamma(\ x\ )$
4) $\Gamma(\ 1\ ) = 1$
5) $\Gamma(\ n\ ) = (\ n\ \text{-}1\ )!\quad ,\forall\ n \in \mathbb{N}.$

16) Teorema 6

e es trascendente.

DEMOSTRACIÓN

Supóngase que existen enteros $a_0, a_1, \ . \ . \ . \ , a_n$, con $a_0 \neq 0$ tales que

$$(\ \varnothing\ ) \quad a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_0 = 0.$$

Defínase los números $M, M_1, M_2, \ . \ . \ . \ , M_n$ y $\epsilon_1, \epsilon_2, \ . \ . \ . \ \epsilon_n$ como sigue

$$M = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ [\,(x-1)\cdots(x-n)\,]^p\ e^{-x}}{(p-1)!}\ dx,$$

$$M_k = e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}[\,(x-1)\cdots(x-n)\,]^p\ e^{-x}}{(p-1)!}\ dx,$$

$$\epsilon_k = e^k \int_0^k \frac{x^{p-1}[\,(x-1)\cdots(x-n)\,]^p\ e^{-x}}{(p-1)!}\ dx.$$

El número indeterminado **p** representa un número primo que elegiremos más adelante. A pesar del aspecto terrible de estas tres expresiones, con un poco de trabajo aparecerán mucho más razonables. Fijémonos primero en M. Si la expresión entre corchetes,

$$[\,(x-1)\cdots(x-n)\,],$$

se desarrolla, obtenemos un polinomio $x^n + \ldots \pm n!$

Así pues, M puede escribirse en la forma $M = \sum_{\alpha=0}^{np} \frac{1}{(p-1)} C\alpha \int_0^\infty$ $x^{p-1+\alpha} e^{-x} dx$,

donde los C son ciertos enteros, y $C_0 = \pm(n!)^p$. Pero $\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = k!$.

Así pues, $M = \sum_{\alpha=0}^{np} C_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!}$.

Ahora bien $\alpha = 0$ obtenemos el término $\pm(n!)^p \frac{(p-1)!}{(p-1)!} = \pm(n!)^p$.

Consideremos ahora solamente números primos $p > n$; entonces este término es un entero no divisible por p. Por otra parte, si $\alpha > 0$, entonces

$$C_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!} = C_\alpha\,(p+\alpha-1)\,(p+\alpha-2)\cdots p,$$

el cual es divisible por p. Por lo tanto, M mismo es un entero no divisible por p. Considerando ahora M_k. Tenemos

$$M_k = e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}\ [\,(x-1)\cdots(x-n)\,]^p\ e^{-x}}{(p-1)!}\ dx$$

$$= \int_k^\infty \frac{x^{p-1}`[(x - 1) \cdot \cdot \cdot (x - n)]^p e^{-(x - k)}}{(p - 1)!} dx.$$

Esto puede ser transformado en una expresión muy parecida a M mediante la sustitución

$$u = x - k, \qquad du = dx.$$

Los límites de integración pasan a ser 0 y ∞, y

$$M_k = \int_0^\infty \frac{(u + k)^{p-1}[(u + k - 1) \cdot \cdot \cdot u \cdot \cdot \cdot (u + k - n)]^p e^{-u}}{(p - 1) !}$$

du.

Existe una diferencia muy importante entre esta expresión y la de M. El término entre corchetes contiene el factor u en el lugar de k. Así pues, la potencia p - ésima contiene el factor u^p. Esto significa que la expresión entera

$(u + k)^{p-1}[(u + k - 1) \cdot \cdot \cdot u \cdot \cdot \cdot (u + k - n)]^p$

es un polinomio de coeficientes enteros, cada uno de cuyos términos es de grado no menor que p. Así pues

$$M_k = \sum_{\alpha = 0}^{np} \frac{1}{(p - 1)!} D_\alpha \int_0^\infty u^{p-1+ \alpha} e^{-u} du = \sum_{\alpha = 1}^{np} D_\alpha \frac{(p - 1 + \alpha)!}{(p - 1)!} ,$$

donde los D_α son ciertos enteros. Obsérvese que la suma empieza con $\alpha = 1$; en este caso cada uno de los términos de la suma es divisible por p. Así pues, cada M_k es un entero que es divisible por p.

Está claro ahora que $e^k = \dfrac{M_k + \epsilon_k}{M}$, $\quad k = 1, 2, \ . \ . \ . \ ,n.$

Sustituyendo en ($\varnothing$) y multiplicando por M obtenemos

$[a_0M + a_1M_1 + \cdot \cdot \cdot + a_nM_n] + [a_1\epsilon_1 + \cdot \cdot \cdot + a_n\epsilon_n] = 0.$

Además de exigir que sea $p > n$ supongamos también que $p >| a_0|$. Esto significa que tanto M como a_0 no son divisibles por p, de modo que a_0M tampoco es divisible por p. Al ser cada M_k divisible por p, se sigue que $a_0M + a_1M_1 + \cdot \cdot \cdot + a_nM_n$

no es divisible por p. En particular es un entero no nulo.

Para obtener una contradicción a la ecuación supuesta $(\varnothing)$, y demostrar así que e es transcendente, sólo hace falta demostrar que $| a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n\epsilon_n|$

puede hacerse tan pequeño como se quiera, eligiendo p suficientemente grande; basta evidentemente demostrar que cada $| \epsilon_k|$ puede hacerse tan pequeño como se quiera. Esto no exige más que algunas estimaciones sencillas; para el resto del razonamiento recuérdese que n es cierto número fijo [el grado de la supuesta ecuación polinómica $(\varnothing)$]. Para empezar, si $1\leq k \leq n$, entonces

$$| \epsilon_k| \leq e^k \int_0^k \frac{| x^{p-1} [(x - 1) \cdot \cdot \cdot (x - n)]^p| e^{-x}}{(p - 1)!} dx$$

$$\leq e^n \int_0^n \frac{n^{p-1} | [(x - 1) \cdot \cdot \cdot (x - n)]^p| e^{-x}}{(p - 1)!} dx.$$

Sea ahora A el máximo de $| (x - 1) \cdot \cdot \cdot (x - n)|$ para x en [0 , n]. Entonces

$$| \epsilon_k| \leq \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p - 1)!} \int_0^n e^{-x} dx \leq \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p - 1)!} \int_0^\infty e^{-x} dx = \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p - 1)!} \leq \frac{e^n n^p A^p}{(p - 1)!}$$
$$= \frac{e^n (nA)^p}{(p - 1)!}.$$

Pero n y A son fijos; así pues, $(nA)^p/(p -1)!$ puede hacerse tan pequeño como se quiera haciendo p suficientemente grande.

Esta demostración, lo mismo que la demostración de que π es irracional, merece algunas consideraciones filosóficas. A primera vista, el razonamiento parece muy "avanzado" ; después de todo, utilizamos integrales, y además integrales desde 0 a ∞. En realidad, como han observado muchos matemáticos, las integrales pueden ser eliminadas por completo del razonamiento; las únicas integrales esenciales para la demostración son de la forma

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} dx$$

para k entero, y estas integrales pueden ser sustituidas por k! siempre que se presenten. Así pues, M, por ejemplo, podría haber sido definido inicialmente como

$$M = \sum_{\alpha = 0}^{np} C_\alpha \frac{(p - 1 + \alpha)!}{(p - 1)!},$$

donde C_α son los coeficientes del polinomio $[(x - 1) \cdot \cdot \cdot (x -n)]^p$.

Aplicando repetidamente esta idea, se obtiene una demostración " completamente elemental " de que e es trascendente, demostración que se basa solamente en el hecho de que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Por desgracia, esta demostración "elemental" es más difícil de comprender que la original; ¡toda la estructura de la demostración debe quedar oculto sólo para eliminar unos pocos signos de integral! Esta situación no es en ningún modo particular de este teorema; los razonamientos "elementales" son con frecuencia más difíciles que los "avanzados". Nuestra demostración de que π es irracional constituye un ejemplo de ello. Es probable que el lector ya no recuerde nada acerca de esta demostración, salvo que encierra algunas funciones muy complicadas. Existe en realidad una demostración más avanzada, pero mucho más conceptual que demuestra que π es trascendente, hecho que es de gran interés tanto hitóricamente como es sí mismo. Uno de los problemas clásicos de la matemática griega era construir, sólo con regla y compás, un cuadrado cuya área fuese la del círculo de radio uno. Esto exige la construcción de un segmento de longitud $\sqrt[2]{\pi}$, lo cual se puede llevar a cabo si es construible un segmento de longitud π. Los griegos fueron totalmente incapaces de decidir si un tal segmento podía ser construido, e incluso todos los recursos de la matemática moderna fueron incapaces de dilucidar esta cuestión hasta 1882. En dicho año Lindemann demostró que π es trascendente: puesto que la longitud de cualquier segmento que puede ser construido con regla y compás puede escribirse en términos de $+$, $\times$,-,$\div$, y $\sqrt[2]{\ }$, y es por lo tanto algebraico, esto demuestra que es imposible construir un segmento de longitud π.

La demostración de que π es trascendente exige unos recursos matemáticos considerables, demasiado avanzados para alcanzarse en este tema. Sin embargo, la demostración no es mucho más difícil que la demostración de que e transcendente. De hecho, la demostración para π es prácticamente la misma que la demostración para e. Esta última afirmación quizá resulte sorprendente. La demostración de que e es trascendente parece depender enteramente de propiedades particulares de e que es casi imposible concebir cómo puede ser adaptada para π; después de todo, ¿qué tiene que ver e con π? ¡Pronto lo vera el lector!

17) DESARROLLOS ESPECIALES DE LA FORMULA DE TAYLOR

Para ciertas funciones puede obtenerse en forma directa una expresión coincidente con la fórmula de Taylor. Por ejemplo: si x es un real distinto de 1, se tiene si $n \in \mathbb{N}$ que

$$1 + x + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x}.$$

Multiplicamos $(1 - x)(1 + x + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + x^{n-1}) = 1 + x + \cdots + x^{n-1} - x - x^2 - \cdots - x^{n-1}$

se obtiene $1 - x^n$,

por lo tanto $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + x^{n-1} + \dfrac{x^n}{1-x}$. @

El polinomio $1 + x + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + x^{n-1}$ es el polinomio de Taylor de grado n-1, de 1/(1 - x) al rededor de 0.

Asi, para n-1, el residuo en la fórmula de Taylor para 1/(1 - x) alrededor de 0 es

$$R_{n-1}(x) = \frac{x^n}{1-x},$$

y se tiene $|R_{n-1}(x)| = \dfrac{|x|^n}{|1-x|}$.

Por consiguiente, para n suficientemente grande y $|x| < 1$, se tiene que $|x|^n$ es muy parecido a cero; así pues,

$$\frac{1}{1-x} \cong 1 + x + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + x^{n-1}.$$

Ahora, si se utiliza el desarrollo de $1/(1-x)$, se tiene

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Así mismo, a partir de @, se tiene que

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + (x^2)^2 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + (x^2)^{n-1} + \frac{(x^2)^n}{1-x^2}$$

$$= 1 + x^2 + x^4 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + x^{2(n-1)} + \frac{x^{2n}}{1-x^2},$$

donde $\dfrac{x^{2n}}{1-x^2} < \dfrac{1}{1-x^2}$ si $|x| < 1$.

Por último para la expresión $1/(a + tb)$, $a \neq 0$ se tiene

$$\frac{1}{a+tb} = \frac{1}{a\left(1 + t\frac{b}{a}\right)} = \frac{1}{a\left[1 - \left(-\frac{b}{a}t\right)\right]},$$

con lo cual obtenemos

$$\frac{1}{a+tb} = \frac{1}{a}\left(1 + \left(-\frac{b}{a}t\right) + \left(-\frac{b}{a}t\right)^2 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + \left(-\frac{b}{a}t\right)^{n-1} + \frac{\left(-\frac{b}{a}t\right)^n}{\left(1 + \frac{b}{a}t\right)}\right).$$

Al efectuar operaciones, resulta

$$\frac{1}{a + tb} = \frac{1}{a} - \frac{bt}{a^2} + \frac{b^2 t^2}{a^3} + \cdot \cdot \cdot + (-1)^{n-1} \frac{b^{n-1} t^{n-1}}{a^n} + \frac{(-1)^n b^n t^n}{a^n (a + bt)}.$$

Por lo tanto, si $\left| \frac{b}{a} t \right| < 1$

o, lo que es igual, si $| t| < \left| \frac{a}{b} \right|$, con $b \neq 0$,

entonces, para n grande $\frac{1}{a + tb} \cong \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} t + \frac{b^2 t^2}{a^3} + \cdot \cdot \cdot + (-1)^{n-1} \frac{b^{n-1} t^{n-1}}{a^n}$.

BIBLIOGRAFIA

HOWAR E.TAYLOR Y THOMAS L. WADE. Cálculo diferencial e integral. Limusa 1977.

MURRAY R. SPIEGEL. Variables reales. Schaum 1977.

I. S. SOMINSKII. El método da la inducción matemática. Limusa 1982.

FRANK S. BUDNICK. Matemáticas aplicadas para administración. McGraW - HILL 1990.

Norman B. Haaser. Análisis matemático trillas 1980

FRANK AYRES, JR. Theory and problems. Schaum publishing co. 1958.

N. PISKUNOV. Cálculo diferencial e integral. Mir Moscú.

Datos del alumno: Paredes López José

57454185

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

083516270

Datos del tutor: Bravo Mojica Alejandro

Gómez Ortega José Antonio

Datos de reporte del seminario

Aproximación de funciones y teorema de Taylor

102 p., año 2008