



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA CUÁNTICO
DE MUCHOS CUERPOS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
F Í S I C A
P R E S E N T A :
DIANA IVETT ROJAS CASTILLO

TUTOR: DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH



2006



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Rojas Castillo Diana Ivett
56 10 52 93
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
2. Dr. Jorge Gustavo Hirsch Ganievich
3. Dr. Octavio Héctor Castaños Garza
4. Dr. Carlos Villareal Luján
5. Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar
6. Dr. Chumin Wang Chen
7. El problema cuántico de muchos cuerpos
31p.
2006

Agradezco el apoyo otorgado por el CONACYT, al Instituto de Ciencias Nucleares, al Dr. Jorge Hirsch, y al proyecto 41478-F, por el apoyo, económico y moral sin el cual no hubiera sido posible la realización de este trabajo.

Para Libertad y Luis,
que llenan mi cenicero de suspiros.

Para vos, tengo un mensaje
... del más allá

Gracias a Sara y Manuel
por su tierra y eterna presencia.
Gracias Oly, Claus, Erick
por su amor y ayuda.

Índice general

1. Resumen	2
2. Introducción	3
3. Capítulo 1	5
4. Capítulo 2	11
5. Conclusiones	20
6. Apéndice I	21
7. Apéndice II	24
8. Apéndice III	28

Resumen

El modelo de Lipkin representa un sistema simple de espines interactuantes. Ha sido ampliamente empleado para verificar la validez de varias técnicas y formalismos desarrollados al analizar sistemas de muchas partículas; el modelo es lo suficientemente simple para resolverse de manera exacta en algunos casos, lo cual no implica que sea trivial. El hamiltoniano del sistema está construido en base a los operadores de ascenso y descenso del álgebra del momento angular. En una realización simple, el sistema consiste de N fermiones con sólo dos estados accesibles a cada uno.

El modelo de Lipkin aparece como un hamiltoniano efectivo que nos conduce a un estado enredado de multipartículas y, en algunos casos, como la superposición de dos estados mesoscópicos distinguibles.

En el siguiente trabajo se muestra que el hamiltoniano para este sistema es fácilmente expresable en términos de operadores de cuasi-espín de los que se obtienen eigenvalores exactos. Se estudian valores para el número de partículas y magnitud de la interacción en un rango de interés para problemas reales. En los apéndices se presenta una revisión general de la matemática usada para la teoría del momento angular en la mecánica cuántica; esto con el objetivo de introducirnos en este campo y desarrollar un estudio sobre el modelo de Lipkin para el caso diagonal. Se presentan algunos conceptos importantes así como algunas demostraciones que considero esenciales en esta revisión.

Introducción

Las ecuaciones que tienen soluciones analíticas en la mecánica cuántica se encuentran raramente. Sólo algunas interacciones, como por ejemplo el oscilador armónico o un potencial del tipo coulombiano, dan paso a cierta clase de ecuaciones conocidas como *exactamente solubles*.

En ocasiones, podemos disminuir el número o rigidez de las condiciones del problema para hallar la solución exacta y entonces preguntarnos por solamente un número finito de soluciones conocidas. Esto se conoce como una solución cuasi-exacta. Modelos cuasi-exactamente solubles han sido desarrollados principalmente en un contexto no relativista. Tales modelos son caracterizados por el hecho de que, con un cambio adecuado de variables, sus hamiltonianos pueden expresarse como generadores de álgebras de Lie.

Estos generadores estabilizan un espacio de dimensión finita y entonces los hamiltonianos pueden ser fácilmente diagonalizables dentro de este espacio.

En ejemplos físicos, la descripción de un problema a partir de generadores de álgebras de Lie es consecuencia de suponer interacciones de dos cuerpos entre partículas.

Hacia mediados del siglo pasado diversas técnicas y formalismos se desarrollaron con el fin de tratar el problema de muchos cuerpos, sin embargo, resultó difícil comprobar la validez de estos como función de parámetros característicos presentes en el sistema físico. En particular, podía cuestionarse la aplicación de métodos de aproximación en la física nuclear, los cuales habían sido desarrollados en la física de teoría de campos y de estado sólido donde el número de grados de libertad en el sistema es muy grande.

En ejemplos físicos, la descripción de un problema a partir de generadores de álgebras de Lie es consecuencia de suponer interacciones de dos cuerpos entre partículas. Un método para construir modelos solubles es incorporar alguna simetría en el sistema, lo cual produciría integrales de movimiento adicionales y entonces podría reducirse drásticamente el tamaño de la matriz del hamiltoniano a diagonalizar. Las simetrías pueden introducirse al hamiltoniano escritas en términos de operadores de creación y aniquilación notando que los productos bilineales de estos operadores podían considerarse como generadores de grupos de Lie. El conmutador de dos productos bilineales de operadores de creación y aniquilación es una combinación lineal de tales productos bilineales. Entonces, el conjunto de todos los posibles productos bilineales formados a partir de un conjunto finito de estos operadores constituyen un álgebra de Lie. El hamiltoniano para un sistema de muchas partículas interactuando mediante fuerzas entre dos cuerpos es una suma de términos lineales y cuadráticos de esos productos bilineales y es, entonces, expresable como una función de operadores de un álgebra de Lie o generadores de un grupo de Lie. Las invariantes u operadores de Casimir del grupo conmutan con el hamiltoniano y proveen constantes de movimiento además de los provistos por las leyes de conservación usuales.

El álgebra de Lie más simple es la del momento angular. Existen numerosas formas de construir productos bilineales de los operadores de creación y aniquilación que satisfagan reglas de conmutación como las del momento angular. Tales operadores son frecuentemente llamados cuasi-espín pues resultan parecerse al momento angular.

Uno de los modelos más conocidos con soluciones cuasi-exactas es el propuesto por Lipkin-Meshkov-Glick, y fue desarrollado para el tratamiento de

sistemas de muchas partículas. En este trabajo consideraremos un modelo que puede describirse en términos de cuasi-espines y para el cual es posible hallar soluciones exactas en muchos casos. El modelo también posee estados de excitación colectiva en física nuclear parecidas a las resonancias gigantes observadas y estudiadas usando a aproximación RPA. Cabe mencionar que la versión simplificada del hamiltoniano de Lipkin-Meshkov-Glick, que consideraremos, contiene sólo términos que mezclan configuraciones de partículas-agujeros.

Capítulo 1.

La matemática del modelo de Lipkin

Considérese un sistema de N fermiones distribuidos en dos niveles, cada uno con cierta degeneración (esto significa que el eigenestado correspondiente a cada nivel puede tener dos o más eigenvalores) y separados por una energía ϵ . Cada estado es descrito por el número cuántico σ el cual tiene el valor 1 en la capa superior y -1 en la capa inferior, y un número cuántico p especificando el estado degenerado particular dentro de la capa. Para cada valor de p hay dos correspondientes estados, uno en la capa superior y otro en la capa inferior. Si los niveles son *acoplamientos jj* ¹, el número cuántico p es el número cuántico m que especifica la componente z del momento angular, una interacción de dos cuerpos es asumida, para la cual pares de partículas se dispersan entre los dos niveles sin cambiar el valor de p . Una interpretación de este modelo pueden ser dos osciladores armónicos de la misma paridad, conteniendo varios acoplamientos jj de subcapas con partículas dispersadas por interacción de monopolos entre las capas sin cambiar los números cuánticos del momento angular. Existen interacciones residuales que dispersan pares de partículas entre los dos niveles sin cambiar el número total de partículas ocupando las celdas.

Sean $a_{p\sigma}^\dagger$ y $a_{p\sigma}$ los operadores fermiónicos de creación y aniquilación para una partícula en el estado p del nivel σ . El índice $\sigma = \pm 1$ denota los niveles superior e inferior de las partículas solas, con energías $\epsilon_\pm = \pm\omega$, siendo la energía entre los dos niveles $\epsilon = 2\omega$. Usando estos operadores y de acuerdo al proceso descrito por la segunda cuantización podemos reescribir el hamiltoniano para este sistema como

$$H = \frac{1}{2}\epsilon \sum_{p\sigma} \sigma a_{p\sigma}^\dagger a_{p\sigma} + \frac{1}{2}\lambda \sum_{pp'\sigma} a_{p\sigma}^\dagger a_{p'\sigma}^\dagger a_{p'-\sigma} a_{p-\sigma} + \frac{1}{2}\gamma \sum_{pp'\sigma} a_{p\sigma}^\dagger a_{p'-\sigma}^\dagger a_{p'\sigma} a_{p-\sigma} \quad (1)$$

donde λ y γ son parámetros que especifican las magnitudes de las interacciones consideradas en este caso del modelo. El término proporcional a λ

¹Cuando en un sistema cuántico el acoplamiento LS falla, como en el caso de átomos pesados, los momentos angulares totales J_i de los electrones individuales se suman directamente para formar el momento angular J del átomo completo. Dicha situación es conocida como el *acoplamiento jj* , ya que cada J_i está definido por un número cuántico j

dispersa pares de partículas en el mismo nivel a otro nivel. El término proporcional a γ dispersa una partícula hacia arriba mientras otra es dispersada hacia abajo.

El estado base sin perturbar para el sistema (si $\lambda = \gamma = 0$) tiene todas las partículas en el nivel más bajo, teniendo cada partícula un valor diferente para el número cuántico p . La interacción no cambia el valor de p y sólo mezcla el estado base sin perturbar con aquellos estados en los que cada partícula tiene un diferente valor del número cuántico p pero pueden estar cualquiera de las dos en el estado superior o inferior. Entonces hay un total de 2^N estados de este tipo. La diagonalización del hamiltoniano involucra una matriz de orden 2^N . La simetría del problema conduce a una reducción considerable en el tamaño de la matriz a diagonalizar.

Que cada partícula tenga sólo dos posibles estados, sugiere el uso de una formulación de cuasi-espín. La especificación de dos valores del estado de una partícula dada puede representarse por un espinor de Pauli, donde operadores describiendo una transición de una partícula de un estado a otro puede representarse por las matrices de espín de Pauli. El total de operadores de cuasi-espín del sistema puede entonces definirse mediante las relaciones

$$J_+ = \sum_p a_{p+1}^\dagger a_{p-1} \quad (2)$$

$$J_- = \sum_p a_{p-1}^\dagger a_{p+1} \quad (3)$$

$$J_z = \frac{1}{2} \sum_{p\sigma} \sigma a_{p\sigma}^\dagger a_{p\sigma} \quad (4)$$

Puede verificarse que estos operadores satisfacen las reglas de conmutación del momento angular y que, además, estos operadores son los generadores del álgebra del grupo $SU(2)$. El hamiltoniano se puede escribir fácilmente en términos de estos operadores como

$$H = \epsilon J_z + \frac{1}{2} \lambda (J_+^2 + J_-^2) + \frac{1}{2} \gamma (J_+ J_- + J_- J_+) \quad (5)$$

el operador $J^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+)$ conmuta con este hamiltoniano. Entonces la matriz del hamiltoniano se rompe en submatrices, cada una asociada con un diferente valor de J y de orden $2J + 1$. El operador J_z es sólo la mitad de la diferencia entre el número de partículas en el estado superior y el número

de partículas en el estado inferior. Así, el máximo valor posible para J_z y por lo tanto para J es $\frac{1}{2}N$. La simetría ha reducido el tamaño de la matriz más grande a diagonalizar de 2^N a $N + 1$.

Consideremos las propiedades del multiplete de estados correspondientes a una submatriz particular con eigenvalor J . El operador J_z también puede escribirse como

$$J_z = n_{ph} - \frac{1}{2}N \quad (6)$$

donde n_{ph} es el número de estados excitados partícula-agujero. En un multiplete dado, donde cada valor de J_z se da sólo una vez, sólo hay un estado que tenga el número dado de pares excitados en cada multiplete.

El multiplete que contiene al estado base sin perturbar tiene el valor máximo de J , llamado, $J = \frac{1}{2}N$, donde el estado base sin perturbar tiene $J_z = -\frac{1}{2}N$. El multiplete contiene un estado con un par partícula-agujero excitado, un estado con dos pares excitados, etc. La interacción mezcla los estados dentro del mismo multiplete J . Para ver el significado de la simetría de cuasi-espín, consideremos el caso de un núcleo típico de doble capa cerrada como el O^{16} tratado según el modelo de capas. El primer paso considera todos los posibles estados formados por la excitación de un sólo par partícula-agujero del estado base y diagonaliza la interacción en este subespacio. El siguiente paso, comúnmente llamado la inclusión de correlaciones del estado base, consiste en tomar en cuenta de algún modo la contribución en el estado base, de estados con muchos pares excitados. En el modelo de Lipkin, la simetría de cuasi-espín automáticamente transforma la diagonalización del modelo estandar de capas. Si consideramos, por ejemplo, los estados que involucran un par excitado, estos están distribuidos a lo largo de multipletes de manera tal que sólo hay un estado con un par excitado en cada multiplete. La interacción residual no mezcla esos estados de *una partícula-un agujero* con otro. Esta sólo mezcla cada estado *una partícula-un agujero* con otros miembros del mismo multiplete que contengan diferente número de pares partícula-agujero excitados. La diagonalización del modelo de capas, entonces, es trivial en el modelo que aquí se estudia, lo cual es de suma importancia para el estudio del tratamiento de correlaciones de estado base.

La estructura de los estados que aparecen en este modelo se puede examinar como sigue. Primero consideremos el sistema sin perturbar tomando la interacción $\lambda = \gamma = 0$. Encontramos que el estado base tiene $J_z = -J = -\frac{1}{2}N$. El primer estado excitado es degenerado, donde hay N posibles formas para

excitar un par partícula-agujero. Todos estos estados tienen $J_z = -\frac{1}{2}N + 1$, y son mezclas de eigenfunciones del operador J^2 con eigenvalores $-J$ y $-J + 1$. Una combinación lineal particular de estos estados *una partícula-un agujero* es una eigenfunción de J_z con eigenvalor $-J$. Este estado es obtenido haciendo operar J_+ sobre el estado base.

Tomemos ahora el parámetro de interacción γ finito pero manteniendo $\lambda = 0$ para remover algo de la degeneración sin mezclar estados con diferente número de pares partícula-agujero. El primer estado excitado se divide en dos niveles de energía, uno para cada valor de J . El estado que tiene $J = \frac{1}{2}N$ se separa del resto y puede considerarse como un estado *colectivo*, el cual es generado desde el estado base por acción del operador colectivo J_+ . Los $N - 1$ estados restantes con un par excitado pueden considerarse como estados de una sola partícula. Todas esas excitaciones de una partícula son degeneradas en este modelo, aún cuando la interacción es grande. Elegimos un estado *colectivo* donde el operador que tenemos, dado por $\frac{1}{N} \sum_i a_{p\sigma}^\dagger a_{\sigma n}$, es el promedio de las excitaciones de las N partículas; éste operador es un operador *monopolo*.

Consideremos el caso donde la interacción λ es finita y produce mezcla de configuraciones, es decir, mezclas de estados con diferente número de pares excitados. Donde no pueda mezclarse estados con diferentes eigenvalores de J^2 , el estado particular *una partícula-un agujero*, el cual habíamos designado como colectivo, no puede mezclarse con otros estados *una partícula-un agujero* pero es mezclado con estados con diferente número de partículas y de agujeros. Otra característica de los resultados de las mezclas de la particular forma de interacción que puede excitar o desexcitar pares *dos partículas-agujero*. Entonces, estados con número par o impar de pares no se mezclan mediante esta interacción. Esta propiedad se expresa en el lenguaje de cuasi-espín notando que la interacción sólo puede cambiar el eigenvalor de J_z por dos unidades. Entonces, para valores enteros de J , los estados con eigenvalores pares e impares de J_z no se mezclan. Para eigenvalores semienteros de J (números pares de partículas) los estados con eigenvalores $\dots -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \dots$ no se mezclan con los estados de eigenvalores $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \dots$. El hecho que la interacción no pueda excitar un par *un sola partícula-agujero* indica que la base de partículas escogida para el modelo satisface las ecuaciones de Hartree-Fock para la interacción.

El término de interacción proporcional a γ no mezcla las configuraciones y es exactamente diagonalizable mediante la representación de cuasi-espín. El término de interacción proporcional a λ contribuye a las correlaciones del

estado base y mezcla configuraciones. Entonces el propósito principal de este modelo es probar el tratamiento de las correlaciones del estado base en la aproximación RPA, el hamiltoniano que estamos estudiando puede simplificarse poniendo $\gamma = 0$. El hamiltoniano resultante es

$$H = \epsilon J_z + \frac{1}{2} \lambda (J_+^2 + J_-^2) = \epsilon J_z + \lambda (J_x^2 - J_y^2) \quad (7)$$

teniendo ahora una simetría adicional.

Las eigenfunciones exactas de este hamiltoniano son eigenfunciones de J^2 y combinaciones lineales de las $2J + 1$ eigenfunciones correspondientes a J_z . Para un sistema con un número dado de partículas, sea N , la matriz del hamiltoniano se rompe en dos submatrices que corresponden a $J = \frac{1}{2}N$ e incluye el estado base y el colectivo de estado excitados. Notemos que el hamiltoniano depende sólo de las variables de cuasi-espín y no explícitamente del número de partículas. Entonces, una solución para un valor dado de J no solamente aplica para el multiplete del estado base para $N = 2J$ sino también para todos los multipletes de números más grandes de partículas con el mismo valor de J .

Las dos simetrías adicionales simplifican aún más la diagonalización. Los $2J + 1$ estados son divididos en dos grupos, cada uno conteniendo eigenfunciones de J_z con eigenvalores separados por un número par. El grado de cada ecuación que le sigue es reducido por un factor de 2 porque los eigenvalores de la energía vienen en pares iguales y opuestos.

Los niveles de energía del sistema son caracterizados por dos parámetros: el número de partículas N y la magnitud de la interacción $\frac{\lambda}{\epsilon}$.

Como ya se mencionó, por simplicidad, sólo se considera el caso con máxima simetría en la proyección del momento angular, reduciendo así el tamaño de la matriz a diagonalizar a $N + 1$. En este caso el eigenvalor mínimo del operador J_0 es la mitad de la diferencia entre el número de partículas en el nivel superior y el inferior, y entonces el mínimo valor de J es $\frac{N}{2}$.

La base $|Nn\rangle$ es explícitamente construída como

$$|Nn\rangle = \sqrt{\frac{(N-n)!}{N!n!}} J_+^n |N0\rangle \quad (8)$$

donde $n = J + m$ toma los valores entre 0 y N . El estado $|N0\rangle$ es el estado base no perturbado, es decir, el estado base cuando $\lambda = \gamma = 0$, donde todas las partículas ocupan el nivel de energía más bajo.

Capítulo 2.

El caso diagonal: $\lambda = 0$

Calculemos el espectro de energías para el caso diagonal, $\lambda = 0$. El hamiltoniano toma la forma

$$H = \epsilon J_0 + \frac{\gamma}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) \quad (1)$$

donde el elemento de matriz es

$$\langle N n' | H | N n \rangle = E_n \delta_{nn'} \quad (2)$$

ahora, usemos las expresiones para la acción de los operadores J_+ y J_- sobre los estados $|N n\rangle$ y $\langle N n|$ respectivamente (Ver Apéndice III); los términos del hamiltoniano pueden expresarse como

$$\epsilon \langle N n | J_0 | N n \rangle = \epsilon \left(n - \frac{N}{2} \right) \langle N n | N n \rangle \quad (3)$$

$$\langle N n | J_- J_+ | N n \rangle = (N - n)(n + 1) \langle N n + 1 | N n + 1 \rangle \quad (4)$$

$$\langle N n | J_+ J_- | N n \rangle = 2 \langle N n | J_0 | N n \rangle + \langle N n | J_- J_+ | N n \rangle \quad (5)$$

de donde los valores esperados para el hamiltoniano son

$$\begin{aligned} \langle N n | H | N n \rangle &= \epsilon \left(n - \frac{N}{2} \right) + \frac{\gamma}{2} \left[2 \left(n - \frac{N}{2} \right) + (N - n)(n + 1) \right] + \frac{\gamma}{2} (N - n)(n + 1) \\ &= \epsilon \left(n - \frac{N}{2} \right) + \gamma \left\{ \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) - \left(n - \frac{N}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

y obtenemos los valores de la energía correspondiente a este hamiltoniano

$$E_n(N) = \epsilon \left(n - \frac{N}{2} \right) + \gamma \left\{ \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) - \left(n - \frac{N}{2} \right)^2 \right\} \quad (7)$$

De esta última ecuación podemos observar el comportamiento del sistema de acuerdo a sus energías para una N dada, observando que existen cruces que encontraremos analíticamente. Estos cruces representan las degeneraciones entre las soluciones con diferente o igual paridad, y se dan bajo una de las dos condiciones siguientes

$$E_k(N) = E_{k+1}(N) \quad E_l(N) = E_{l+2}(N) \quad (8)$$

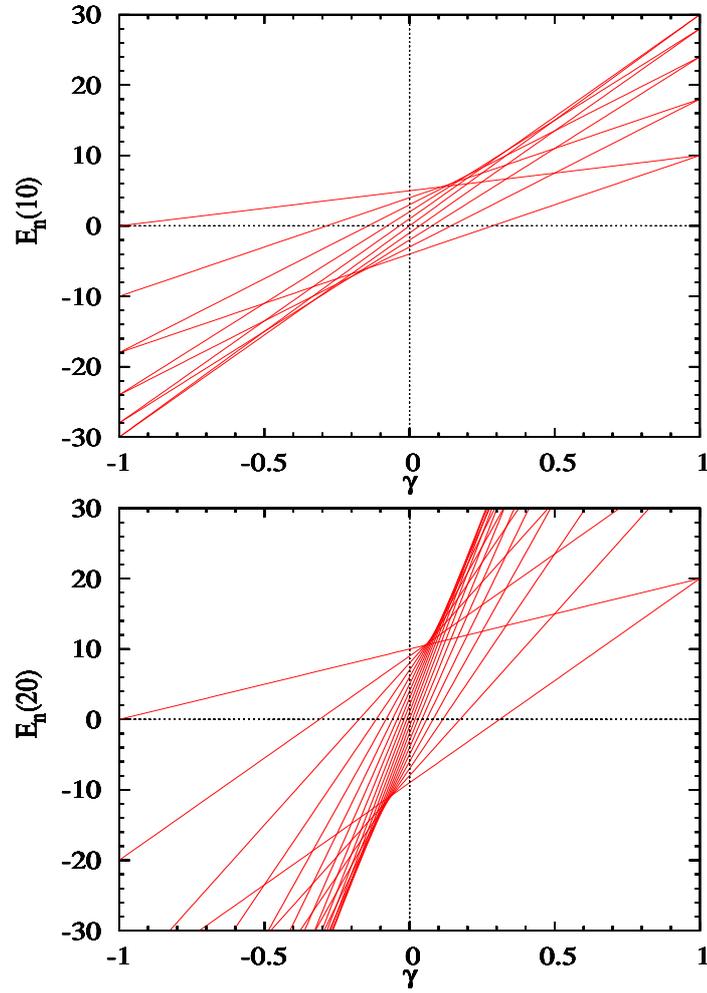


Figura 1: La gráfica muestra los valores de la energía según la variación de γ para el caso diagonal de un sistema con $N = 10$ (arriba) y $N = 20$ (abajo), ambos con $\epsilon = 1$

hallando que los cruces se dan donde γ toma los valores

$$\gamma_k^{(1)} = -\frac{\epsilon}{N - 2k - 1} \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (9)$$

$$\gamma_l^{(2)} = -\frac{\epsilon}{N - 2l - 2} \quad l = 0, 1, \dots, N - 2 \quad (10)$$

Observemos los valores extremos que puede tomar el subíndice k . El caso mínimo se tiene con $k = 0$, para el cual

$$\gamma_0 := \gamma_{k=0} = -\frac{\epsilon}{N-1} \quad (11)$$

análogamente se obtiene para el caso mínimo, $k = N - 1$

$$\gamma_{N-1} := \gamma_{k=N-1} = \frac{\epsilon}{N-1} \quad (12)$$

Tomando estos valores de γ obtenemos la región donde no existen cruces para la energía, esta región está definida por $(\gamma_0, \gamma_{N-1}) = (-\frac{\epsilon}{N-1}, \frac{\epsilon}{N-1})$. Esto quiere decir que no hay estados excitados en esta región, $n = 0$.

De manera similar podemos obtener la región donde sí existen cruces. Busquemos el menor valor de γ ; sabemos que el mínimo de partículas excitadas son N , de manera que el mínimo número de cruces que puede existir es N , como el sistema es simétrico se tiene el mismo número de cruces en la región positiva que en la negativa: hay $\frac{N}{2}$ cruces en cada región.

$$k_{min} = \frac{N}{2} - 1 \quad (13)$$

$$\Rightarrow \gamma_{\frac{N}{2}} = -\epsilon \quad (14)$$

Podemos entonces definir tres regiones para γ : la primera $(-\epsilon, -\frac{\epsilon}{N-1})$ en la que existen cruces, la segunda $(-\frac{\epsilon}{N-1}, \frac{\epsilon}{N-1})$ en la que no existen cruces y finalmente la región $(\frac{\epsilon}{N-1}, \epsilon)$ donde nuevamente existen cruces.

Analicemos el comportamiento del sistema al fijar N , que define k y γ , para N par

$N \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
2	$-\epsilon$	ϵ							
4	$-\frac{\epsilon}{3}$	$-\epsilon$	ϵ	$\frac{\epsilon}{3}$					
6	$-\frac{\epsilon}{5}$	$-\frac{\epsilon}{3}$	$-\epsilon$	ϵ	$\frac{\epsilon}{3}$	$\frac{\epsilon}{5}$			
8	$-\frac{\epsilon}{7}$	$-\frac{\epsilon}{5}$	$-\frac{\epsilon}{3}$	$-\epsilon$	ϵ	$\frac{\epsilon}{3}$	$\frac{\epsilon}{5}$	$\frac{\epsilon}{7}$	
\vdots									

para N impar

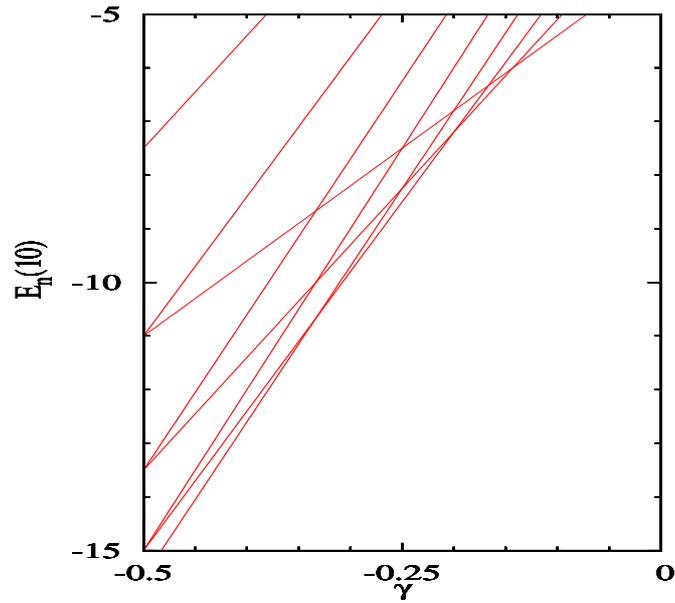


Figura 2: Amplificación del espectro de energías para $N = 10, \epsilon = 1$. Claramente podemos observar los puntos de degeneración de sistema, que son los puntos de cruce.

$N \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
3	$-\frac{\epsilon}{2}$	∞	$\frac{\epsilon}{2}$							
5	$-\frac{\epsilon}{4}$	$-\frac{\epsilon}{2}$	∞	$\frac{\epsilon}{2}$	$\frac{\epsilon}{4}$					
7	$-\frac{\epsilon}{6}$	$-\frac{\epsilon}{4}$	$-\frac{\epsilon}{2}$	∞	$\frac{\epsilon}{2}$	$\frac{\epsilon}{4}$	$\frac{\epsilon}{6}$			
9	$-\frac{\epsilon}{8}$	$-\frac{\epsilon}{6}$	$-\frac{\epsilon}{4}$	$-\frac{\epsilon}{2}$	∞	$\frac{\epsilon}{2}$	$\frac{\epsilon}{4}$	$\frac{\epsilon}{6}$	$\frac{\epsilon}{8}$	
\vdots										

Vamos a usar las dos tablas anteriores para discutir que sucede dada una N fija.

Tomemos el caso en que $N = 2$ y $\epsilon = 1$, entonces k puede tomar dos valores $k = 0, 1$ y tenemos dos γ , esto es, dos puntos de cruce como se observa en la gráfica

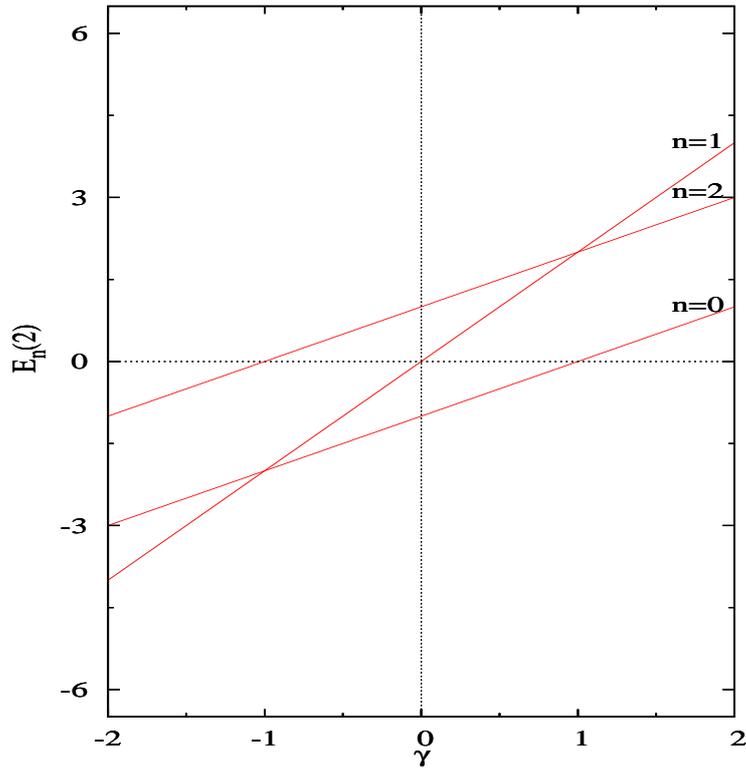


Figura 3: Espectro de energías para $N = 2$, cada línea indica el estado en el que se encuentra el sistema y los puntos de cambio de estado.

Observamos tres rectas que corresponden a cada combinación de estados de las partículas: las dos abajo, las dos arriba y una partícula abajo y la otra arriba. Los dos primeros casos corresponden a las rectas que van paralelas, mientras que el tercer caso corresponde a la recta de mayor pendiente. El punto de cruce se tiene en $\gamma = -\epsilon, \epsilon$ como tomamos $\epsilon = 1$ entonces se cruzan en $\gamma = -1, 1$.

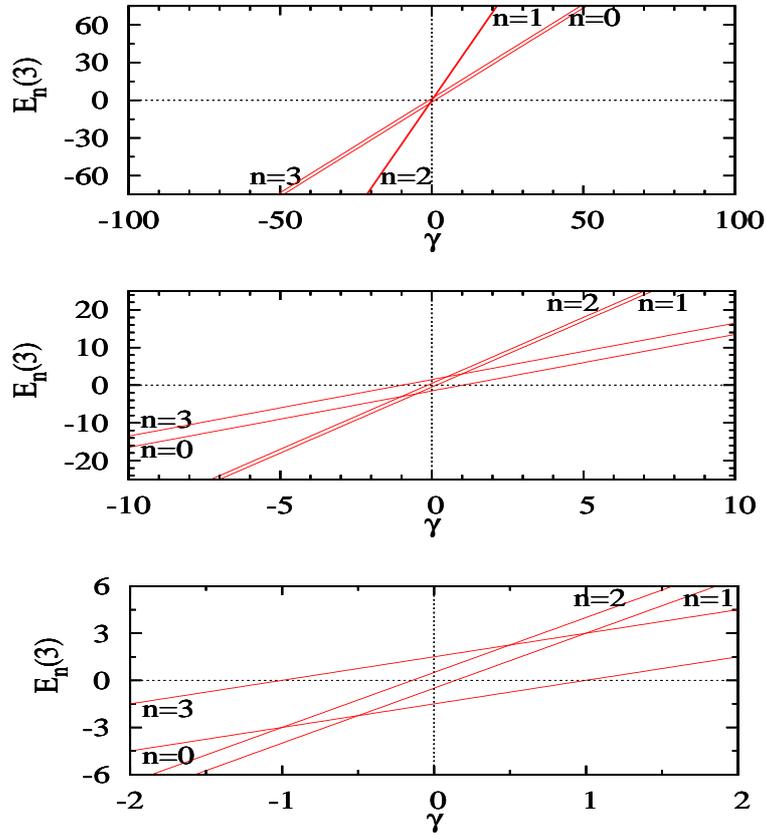


Figura 4: Espectro de energías para $N = 3, \epsilon = 1$ en tres distintas escalas. En la parte superior se observa como dos estados se cruzan asintóticamente en ∞ . En la gráfica central se observa como los estados van dos a dos y finalmente en la gráfica inferior se distinguen los cruces correspondientes a $N = 3$, que son los puntos de cruce con el estado base o de mínima energía.

Ahora hagamos $N = 3$ sin variar ϵ , lo cual deja valores a $k = 0, 1, 2$, tenemos tres puntos de cruce.

Observamos las rectas correspondientes a los cuatro posibles casos de

combinación de estados entre las partículas. Los puntos de cruce están dados por $\gamma = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ y $\gamma = \infty$. Este último caso indica que dos estados se cruzan asintóticamente conforme γ crece.

Ahora $N = 5, \epsilon = 1$ entonces $k = 0, 1, 2, 3, 4$ son los puntos de cruce.

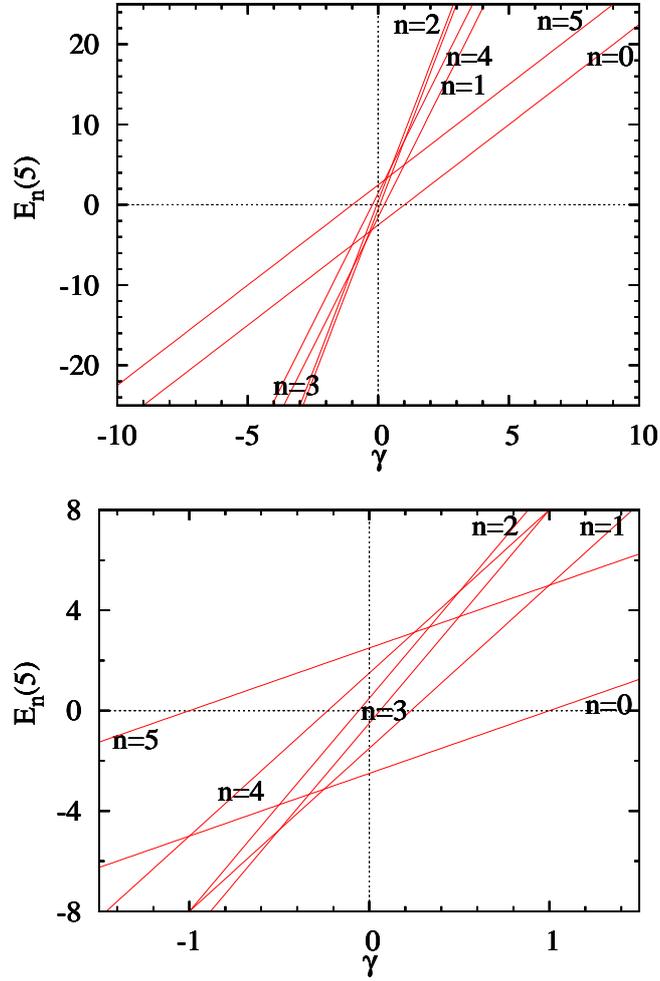


Figura 5: Sistema con $N = 5, \epsilon = 1$. En esta gráfica se puede observar que además de los cruces correspondientes al estado base, aparecen otros cruces que provienen de los casos con N más pequeña. Cuando el número de partículas aumenta algunos cruces ocurren exactamente en el mismo valor de γ donde ocurrieron en sistemas más pequeños, pero aparecen nuevos cruces en valores de γ más pequeños (en magnitud).

Conclusiones

Como se mencionó las soluciones exactas de este hamiltoniano muestran la existencia de cruces entre niveles con diferente paridad, mientras que los cruces que tienden asintóticamente a ∞ tienen la misma paridad; lo cual se observa claramente en las gráficas donde las líneas que corresponden a los estados van paralelas dos a dos.

El hamiltoniano modelado por Lipkin ha tenido mucho éxito en distintos campos de la física. En física nuclear este hamiltoniano puede representar un sistema de dos niveles de partículas idénticas interactuando a través de canales de partícula-partícula y partícula-agujero, donde las transiciones de fase de una sola partícula a un movimiento colectivo pueden visualizarse. También puede describir un sistema con cuasipartículas protón y neutrón en presencia de parejas neutrón-protón. En el campo de la óptica cuántica, este hamiltoniano ha conducido a producir los estados de espín comprimidos.

Finalmente, cabe mencionar que en este trabajo se reporta el análisis que se hizo sólo para el caso diagonal del modelo de Lipkin; pero se dejan claras las bases para continuar el estudio del caso general, donde $\lambda \neq 0$.

Apéndice I.

Espacios vectoriales en mecánica cuántica

Consideremos una función de onda Ψ que vive en el espacio de Hilbert, esta función de onda nos define el estado en el que se encuentra una partícula y las condiciones a las que está sujeta. Esta descripción se vale de los operadores para caracterizarlos. El operador es un mapeo mediante el cual el vector Ψ es asociado a un vector Ψ' en el espacio; Ψ' es una función de Ψ :

$$\Psi' = A(\Psi) \quad (1)$$

con A operador. Los operadores que nos interesan son los lineales que cumplen:

$$\begin{aligned} (A + B)\Psi &= A(\Psi) + B(\Psi) \\ (AB)\Psi &= A(B\Psi) \end{aligned} \quad (2)$$

Uno de estos operadores lineales interesantes es el operador de Proyección; tomemos la siguiente expresión

$$\Psi' = P_a(\Psi_a, \Psi) \quad (4)$$

con P_a el operador de proyección, este nos da Ψ' que es la proyección de Ψ en la dirección Ψ_a con norma (Ψ_a, Ψ) . Y al sumar todas las proyecciones de un vector estado obtengo el vector total

$$\sum_{i=1}^n P_i = \mathbf{1} \quad (5)$$

De aquí que podamos expresar funciones como la suma de sus proyecciones dado un conjunto de vectores base

$$A\Psi_j = \sum_{i=1}^n \Psi_i A_{ij} \quad (6)$$

donde los elementos de matriz A son

$$A_{ij} = (\Psi_i, A\Psi_j) \quad (7)$$

Sea un espacio de Hilbert y su espacio dual; en ellos se representan los vectores *bra* y *ket*: $\langle |, | \rangle$. La función de onda, en la notación de Dirac,

corresponde a las componentes de un vector de estado en la representación de coordenadas: $|\Psi\rangle$. La introducción de vectores de estado permite una generalización del formalismo matemático en la mecánica cuántica.

Tomemos ahora una observable K con espectro de eigenvalores discreto, esta tiene asociado el vector de estado $\langle K_i|$; podemos calcular la amplitud de probabilidad de que la observable K se encuentre en el estado K_i como $|\langle K_i|\Psi\rangle|^2$; debe cumplirse que la suma sobre todo el espectro discreto debe ser igual a la unidad

$$\sum_{i=1}^n |\langle K_i|\Psi\rangle|^2 = 1 \quad (8)$$

que es justamente la condición de ortogonalidad de los estados asociados a tal observable.

Al vector de estado asociado a la función de onda lo puedo desarrollar como

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |K_i\rangle \quad (9)$$

con $c_i = \langle K_i|\Psi\rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_i |\langle K_i|\Psi\rangle|^2 &= \sum_i \langle K_i|\Psi\rangle^* \langle K_i|\Psi\rangle \\ &= \sum_i \langle \Psi|K_i\rangle \langle K_i|\Psi\rangle \\ &= \langle \Psi| \sum_i |K_i\rangle \langle K_i|\Psi\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

de donde

$$\sum_i |K_i\rangle \langle K_i| = \mathbf{1} \quad (10)$$

que resulta ser el postulado de completitud para operadores. Retomemos la Ec.(??), que podemos reescribir como

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |K_i\rangle \quad (11)$$

$$= \sum_i \langle K_i | \Psi \rangle |K_i\rangle \quad (12)$$

$$= \sum_i |K_i\rangle \langle K_i | \Psi \rangle \quad (13)$$

$$(14)$$

La sumatoria de kets y bras se asemejan a la matriz de cambio de base, y de hecho lo es; así obtuvimos la proyección. El vector Ψ es la suma de todas sus proyecciones y entonces puedo redefinir el operador de proyección como

$$P_i = |K_i\rangle \langle K_i| \quad (15)$$

$$\Rightarrow |\Psi\rangle = \sum_i P_i |\Psi\rangle$$

La segunda cuantización, también llamada la representación de la energía, no es más que una formulación alternativa de la mecánica cuántica, la cual es equivalente a la que normalmente se usa (representaciones de momentos y coordenadas); y consiste en expresar el hamiltoniano del sistema a estudiar en términos de los operadores de creación y aniquilación: a^\dagger, a . Sin embargo, la segunda cuantización provee una herramienta que permite la descripción de procesos de creación o aniquilación de partículas. Tales procesos no pueden discutirse desde la base de la ecuación de Schrödinger, pero sí con el desarrollo de la teoría cuántica de campos. De manera que esta nueva representación es el punto de contacto entre la teoría cuántica de campos y la formulación para muchos cuerpos.

Primera cuantización \leftrightarrow **Funciones de onda**

Segunda cuantización \leftrightarrow **Operadores**

Apéndice II.

Operadores en mecánica cuántica

Reescribamos la Ec.(??)

$$A|A'_i\rangle = A'_i|A'_i\rangle \quad (16)$$

donde el operador asignado a la observable A mide A'_i en el estado $|A'_i\rangle$, es decir, tengo un eigenvalor y su correspondiente eigenvector (eigenket). Si tenemos eigenvalores repetidos entonces nuestros eigenvalores de energía son *degenerados*.

Dado un eigenvalor puedo construir en un subespacio del espacio original un conjunto de eigenvectores ortogonales (que en el espacio original pudieron no ser ortogonales) vía la ortogonalización de Schmidt. Construyo los eigenvectores como uno menos la proyección de otro en el primero, y siguiendo este proceso llegamos a formar una base ortonormal para el subespacio de eigenvectores con eigenvalores repetidos.

Para operadores, en general, se cumple que

$$\begin{aligned} A|A'_i\rangle &= A'_i|A'_i\rangle & A^\dagger|A'_i\rangle &= A'^*_i|A'_i\rangle \\ \langle A'_i|A^\dagger &= A'^*_i\langle A'_i & \langle A'_i|A &= A'_i\langle A'_i \end{aligned} \quad (17)$$

Las observables las hemos caracterizado con una base de vectores correspondientes a los eigenvalores de éstas, pero a veces esos eigenvalores se repiten para una o más observables. Entonces se necesita algo más que los eigenvalores para caracterizarlos, lo que necesitamos son sus números cuánticos. Supongamos dos operadores A y B con eigenvectores comunes $|A'_iB'_i\rangle$ (pues este vector es común a ambos operadores). Estas dos observables se medirán simultáneamente si conmutan, es decir, si $[A, B] = 0$ y esto sucede sólo si todos los eigenvectores de A también lo son de B . Los eigenvectores de estas observables los puedo relacionar mediante una matriz de cambio de base. El proceso será el siguiente: supongamos que A tiene eigenvalores A'_i repetidos r veces, los eigenvectores asociados a estos eigenvalores los escribo como $|A'_i, K\rangle$ con $K = 1, 2, \dots, r$ y entonces

$$A|A'_i, K\rangle = A'_i|A'_i, K\rangle \quad (18)$$

si $[A, B] = 0$ entonces

$$AB|A'_i, K\rangle = BA'_i|A'_i, K\rangle \quad (19)$$

$$= A'_iB|A'_i, K\rangle \quad (20)$$

de donde $B|A'_i, K\rangle$ es eigenvector de A con eigenvalor A'_i , entonces los puedo escribir como una base

$$B|A'_i, K\rangle = \sum_{\lambda=1}^r |A'_i, \lambda\rangle \langle A'_i, \lambda|B|A'_i, K\rangle \quad (21)$$

ahora podemos construir un nuevo conjunto de eigenvectores de A que simultáneamente son eigenvectores de B , estos son

$$|A'_iB'_j\rangle = \sum_{K=1}^r |A'_i, K\rangle S_{Kj} \quad (22)$$

donde los coeficientes S_{Kj} me llevan de la base de vectores de la observable K a la base de vectores del operador B .

De la misma manera podemos construir, con otros operadores hermitianos que conmuten, nuevos eigenvectores $|A'_iB'_jC'_k\dots\rangle$ con sus eigenvectores correspondientes y tendrán una nueva base de n eigenvectores. Si los operadores hermitianos A, B, C, \dots tienen n eigenvectores comunes que se caractericen por sus eigenvalores A'_i, B'_j, C'_k (tales que no dos eigenvectores tengan exactamente el mismo eigenvalor), entonces decimos que el conjunto de estos operadores es *completo* :

$$\langle A'_iB'_jC'_k\dots|A'_pB'_qC'_s\dots\rangle = \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{ks}\dots \quad (23)$$

que es igual que escribir la condición de ortonormalidad

$$\langle K_\ell|K_m\rangle = \delta_{\ell m} \quad (24)$$

donde el operador K pertenece al conjunto completo de operadores A, B, C, \dots

Tenemos entonces, expresiones muy generalizadas; incluso la relación de completitud la podemos escribir en base a un conjunto de operadores (conjunto de estados)

$$\sum_{\ell} P_{\ell} = \sum_{\ell} |K_{\ell}\rangle \langle K_{\ell}| = \mathbf{1} \quad (25)$$

entonces la ecuación de eigenvalores queda

$$A = \sum_{\ell} A'_{\ell} |K_{\ell}\rangle \langle K_{\ell}| \quad (26)$$

En resumen, dado un operador hermitiano A podemos descomponer al espacio en un conjunto de vectores ortonormales $|K_{\ell}\rangle$ tales que A sea una combinación lineal de los operadores de proyección $|K_{\ell}\rangle \langle K_{\ell}|$, y los coeficientes en tal expansión son los eigenvalores de A .

Ya vimos como dados dos operadores que conmutan podemos medir simultáneamente y con precisión las observables que representan. Pero si los operadores no conmutan entonces no las podemos medir al mismo tiempo ni con exactitud, lo que da paso al concepto de incertidumbre.

$$[A, B] \neq 0 \Rightarrow AB - BA = iC \quad (27)$$

Esta última ecuación se retomará para el caso de las componentes del operador de momento angular. Definimos la incertidumbre de ΔA de una observable A como la raíz cuadrada positiva de la varianza

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \quad (28)$$

y análogamente para B , con estas definiciones podemos demostrar

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left(\frac{1}{2} \langle C \rangle\right)^2 \quad (29)$$

Tomemos como caso particular $A = x$ y $B = p_x$, de acuerdo a la Ec.(??)

$$xp_x - p_x x = i\hbar \mathbf{1} \Rightarrow C = \hbar \mathbf{1} \Rightarrow \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (30)$$

Entonces, el principio de incertidumbre de Heisenberg es consecuencia directa de la no conmutabilidad de los operadores de posición y momento.

Apéndice III.

Momento angular

Bohr encontró la clave para el desarrollo de la teoría del movimiento electrónico en el campo coulombiano del núcleo en la cuantización del momento angular. Más allá de su relevancia en la clasificación de los niveles de energía en sistemas de fuerza central, el estudio del momento angular orbital nos conduce a una exposición más detallada de la simetría en la mecánica cuántica.

Las fuerzas centrales son derivables de un potencial que depende solamente de la distancia r del movimiento de la partícula respecto a un punto fijo, generalmente la coordenada al origen. Como las fuerzas centrales no producen torca alrededor del origen, el momento angular orbital $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, se conserva. De acuerdo con el principio de correspondencia, debemos esperar que el momento angular juegue un papel esencial en la mecánica cuántica. El operador del momento angular en la representación de coordenadas se obtiene reemplazando \vec{p} por $\frac{\hbar}{i}\nabla$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i}\nabla \quad (31)$$

En vista de la gran importancia del momento angular como una cantidad física, se derivan algunas de las propiedades de este operador, usando las relaciones de conmutación básicas entre las componentes de \vec{r} y \vec{p} .

$$\begin{aligned} [L_x, x] &= 0, & [L_x, y] &= i\hbar z, & [L_x, z] &= -i\hbar y \\ [L_x, p_x] &= 0, & [L_x, p_y] &= i\hbar p_z, & [L_x, p_z] &= -i\hbar p_y \\ [L_x, L_y] &= i\hbar L_z, & [L_y, L_z] &= i\hbar L_x, & [L_z, L_x] &= i\hbar L_y \end{aligned}$$

Tomemos ahora tres operadores hermitianos J_x, J_y, J_z que asumimos satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y \quad (32)$$

tal como cumplen de manera equivalente las tres componentes cartesianas del momento angular orbital. Sólo reemplazamos \vec{L} por \vec{J} para hacer énfasis en el hecho de que el problema de eigenvalores tiene la capacidad de representarse en muchas clases de situaciones físicas además del momento angular orbital de una sola partícula.

Consideremos el problema de eigenvalores de una de las componentes de \bar{J} , digamos J_z . Se construyen los siguientes operadores

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad J_- = J_x - iJ_y \quad \bar{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \quad (33)$$

y con estos nuevos operadores podemos construir las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} [J_z, J_+] &= \hbar J_+ & [J_-, J_z] &= \hbar J_- & [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z \\ \bar{J}^2 - J_z^2 \pm \hbar J_z &= J_\pm J_\mp \\ [\bar{J}^2, J_i] &= 0, i = x, y, z \end{aligned}$$

Si denotamos los eigenvalores de J_z por $m\hbar$ y los de \bar{J}^2 por $\lambda\hbar^2$, el problema de eigenvalores puede escribirse como

$$\begin{aligned} J_z|\lambda m\rangle &= m\hbar|\lambda m\rangle \\ \bar{J}^2|\lambda m\rangle &= \lambda\hbar^2|\lambda m\rangle \end{aligned}$$

donde $|\lambda m\rangle$ es eigenvector simultáneo de J_z y \bar{J}^2 con los eigenvalores $\lambda = j(j+1)$ y m .

Podemos escribir las expresiones para la acción de los operadores J_+ y J_- sobre los estados $|N n\rangle$ y $\langle N n|$ respectivamente

$$\begin{aligned} J_+|\lambda m\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\hbar|\lambda m+1\rangle \\ J_-|\lambda m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\hbar|\lambda m-1\rangle \end{aligned}$$

donde los únicos valores posibles para j son $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ y para un valor dado de j los eigenvalores de J_z son $m\hbar = -j\hbar, -(j-1)\hbar, \dots, 0, \dots, (j-1)\hbar, j\hbar$

Bibliografía

- [1] O. Castaños, J. G. Hirsch, E. López-Moreno, R. López-Peña,
Phase transitions and accidental degeneracy in nonlinear spin systems
Physical Review B 72, 012406 (2005)
- [2] O. Castaños, J. G. Hirsch, E. López-Moreno, R. López-Peña,
Classical and quantum phase transitions in the Lipkin-Meshkov-Glick Model
Physical Review B- Enviado
- [3] H.J. Lipkin, N. Meshkov y A. J. Glick
Validity of many-body approximation methods for a solvable model
Nuclear Physics 62, 188-224 (1965)
- [4] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu y Frank Laloë
Quantum Mechanics
John Wiley Sons. USA, 1977.
- [5] Stephen Gasiorowicz
Quantum Physics 2a. Ed. John Wiley Sons. USA, 1995.
- [6] Eugen Merzbacher
Quantum Mechanics 3a. Ed.
John Wiley Sons. USA, 1998.