



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

Sincronización en Redes Complejas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

P R E S E N T A :

ARTURO LEOS ZAMORATEGUI



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. EDUARDO NAHMAD ACHAR
2011**

Datos del alumno	
Apellido paterno	Leos
Apellido materno	Zamorategui
Nombre	Arturo
Teléfono	47562990
Institución	Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México
Carrera	Física
Número de cuenta	40602968-3
Datos del tutor	
Grado	Dr.
Nombre	Eduardo
Apellido paterno	Nahmad
Apellido materno	Achar
Datos del sinodal 1	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Rafael Ángel
Apellido paterno	Barrio
Apellido materno	Paredes
Datos del sinodal 2	
Grado	Dr.
Nombre	David Philip
Apellido paterno	Sanders
Datos del sinodal 3	
Grado	Dr.
Nombre	Maximino
Apellido paterno	Aldana
Apellido materno	González
Datos del sinodal 4	
Grado	Dr.
Nombre	Denis
Apellido paterno	Boyer
Datos del trabajo escrito	
Título	Sincronización en redes complejas
Número de páginas	129
Año	2011

Índice general

1. Introducción	3
2. Marco teórico	9
2.1. Teoría de gráficas	10
2.1.1. Conceptos básicos	10
2.1.2. Matrices asociadas a redes	13
2.1.3. Propiedades de las redes	15
2.2. Tipos de redes	18
2.2.1. Redes $2k$ -regulares	19
2.2.2. Redes aleatorias	20
2.2.3. Redes de mundo pequeño	22
2.2.4. Redes libres de escala	26
2.3. Sincronización	27
2.3.1. Sincronización de osciladores acoplados	29
2.3.2. Sincronización en sistemas caóticos acoplados	31
2.3.3. Estabilidad del estado sincronizado	37
3. Sincronización en redes complejas	43
3.1. Redes $2k$ -regulares	44
3.2. Redes aleatorias	57
3.3. Redes de mundo pequeño	67
3.4. Redes libres de escala	75
4. Conclusiones	85
A. Resultados en teoría de gráficas	89
A.1. Ciclos	90
A.2. Funciones generadoras	92
B. Sistemas Dinámicos y Caos	97
B.1. Sistemas dinámicos	98
B.2. Atractores	100
B.3. Mapeos unidimensionales	104
B.4. Propiedades dinámicas de sistemas caóticos	107
B.4.1. Estabilidad lineal de estados estacionarios y órbitas periódicas	107
B.4.2. Exponentes de Lyapunov	110

C. Diseño de Redes	113
C.1. Redes $2k$ -regulares	114
C.2. Redes con distribución de probabilidad arbitraria	114
C.3. Redes de mundo pequeño	118
D. Cálculos numéricos	121
D.1. Desviación estándar	122
D.2. Función Maestra de Estabilidad (FME)	125

Agradecimientos

Quiero expresar mi total agradecimiento al Dr. Eduardo Nahmad Achar a quien respeto y admiro profundamente. No sólo es un investigador y profesor notable, sino también una persona ejemplar. Sin él, este trabajo no hubiera sido concluído en el tiempo y forma en que se realizó.

Agradezco también a todos aquellos profesores que durante la carrera me inspiraron, a ellos quienes a diario se esforzaron por compartir experiencias y conocimientos, que no temieron en romper esquemas y crear nuevos horizontes. A todos ellos les debo mi sincero agradecimiento y admiración.

Con especial cariño, agradezco a mi madre Martha Lilia y a mi hermano Carlos quienes, en un esfuerzo diario por hacer de cada día uno mejor que el anterior, tuvieron la paciencia para comprenderme y apoyarme cuando lo necesité. A toda la familia que me apoya incondicionalmente.

A mis amigos, con quienes crecí y compartí grandes experiencias de vida durante el largo e intrincado trayecto que representó la carrera. A todos ellos con quienes comparto sueños y metas en común, con quienes también comparto experiencias divertidas, los recordaré siempre.

A Eliza, quien en un momento difícil apareció en mi vida, quien con una sonrisa es capaz de reconfortarme y darme fuerzas para continuar. A ella, con quien me permito soñar.

Quiero expresar mi gratitud a los sinodales, cuyos valiosos comentarios y observaciones fueron fundamentales en la conclusión del presente trabajo. Con especial reconocimiento, agradezco al Dr. David P. Sanders por su apoyo y entusiasmo mostrado como profesor e investigador.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años se ha acuñado el término “complejo” para referirse a un sistema en el cual surgen propiedades *emergentes* a partir de la interacción de componentes, hasta cierto punto, simples. Es decir, aunque conozcamos la dinámica de las partes que componen al sistema, es difícil predecir la dinámica que se observará debido a la interacción entre sus componentes. Comúnmente se refiere uno a dichos sistemas como *complejos*, entre los cuales podemos mencionar *sistemas sociales* que involucran interacciones humanas como la segregación social en términos raciales o religiosos, la toma de decisiones (teoría de juegos), la evolución de las interacciones humanas de conductas competitivas dadas por las reglas de selección de Darwin a formas de altruismo, y la propagación de información y rumores; *sistemas biológicos* como los ecosistemas, las cadenas alimenticias, redes genéticas y redes neuronales; o *sistemas creados por el hombre* como el Internet y la World Wide Web (WWW), las redes de transporte terrestre y aéreo, o bien, el mercado bursátil. Todos ellos son sistemas complejos, pues presentan emergencia, adaptabilidad y hasta una forma de “inteligencia” en su dinámica mediante fenómenos de auto-organización.

De los ejemplos mencionados antes, muchos de ellos se pueden representar mediante una *red*; en pleno siglo XXI el término, aunque sea de manera intuitiva, nos sugiere una estructura u organización en el sistema. Quizá los ejemplos que más información nos pueden aportar acerca de lo que es una red es el internet, la WWW o las redes sociales como Facebook y Twitter. Para tener una red necesitamos de los elementos que la conforman representados por vértices o nodos y conexiones entre ellos, dadas por las interacciones. Pero, ¿qué hace a una red, compleja? ¿Es el número de nodos o el número de aristas?, ¿o la forma en que se conectan los nodos? Ciertamente todas ellas, en conjunto, pueden generar una red compleja. Con la llegada de las supercomputadoras se estuvo en condiciones de analizar redes con una gran cantidad de nodos. Sorprendentemente, muchas de ellas resultaron tener propiedades similares aunque representaban sistemas completamente diferentes; por ejemplo, una red neuronal “se parece” a una red social en el sentido de que comparten ciertas propiedades estadísticas, esto es, existe un fenómeno común en ambas que produce que las conexiones sean similares; pero entonces, ¿qué produce que se forme ésta y no otra estructura? O planteada de otro modo, ¿Existe un mecanismo universal que propicia la formación de una topología común en redes completamente distintas?

El intento de responder estas y otras preguntas dio origen a la teoría de redes complejas y al formalismo matemático llamado teoría de gráficas cuyo origen se remonta quizá al año 1736 cuando Leonhard Euler, siendo profesor de matemáticas en San Petesburgo, se encontró con el problema de los siete puentes en la antigua ciudad prusiana de Königsberg. Se preguntaba si era posible recorrer todos los puentes sin cruzar dos veces por alguno. Otro problema relacionado redes, en apariencia sencillo, es el llamado *problema del agente viajero*, que consiste en encontrar la trayectoria “óptima” que debe recorrer un transportista entre N distintas ciudades separadas una distancia w_{ij} de manera que todas sean visitadas una sola vez; en términos de costos dicha trayectoria representa la más rápida utilizando el menor combustible posible. Curiosamente un problema que a simple vista parece sencillo resulta ser mucho más complejo y su solución resulta en nuestros días de gran importancia en planeación de rutas de transporte. Tan sólo en el 2015 se prevee que la población en la ciudad de México sea de aproximadamente 21.6 millones de habitantes¹ que representará el 20 % de la población total

¹<http://www.unpopulation.org>

del país, por lo que una adecuada planeación debería ya estar en la conciencia colectiva.

Muchos de los fenómenos *dinámicos* presentes en las redes son altamente dependientes de las propiedades descritas antes, por ejemplo la búsqueda de información dentro de la WWW o la propagación de epidemias en una red de individuos; cuando se habla de la dinámica en la red se refiere a una dinámica presente en los nodos, de manera local, y no globalmente en toda la red. Entonces al estudiar cierta dinámica en una red con N nodos se define una variable de estado $\dot{\mathbf{x}}^i(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^i(t))$ con $i = 1, 2, \dots, N$ a cada nodo de manera tal que al tiempo t la red se encuentra en el estado $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \dots, \mathbf{x}^N(t))$ que es llamado el estado microscópico o *microestado* de la red. El proceso dinámico está dado por la evolución de $\mathbf{x}(t)$ en el espacio fase.

Otros procesos altamente dependientes de la topología de la red son la vulnerabilidad de una red a ataques y la *sincronización*, cuyos resultados tienen gran relevancia práctica y conceptual. En este trabajo nos concentraremos en la sincronización, en particular aquella encontrada en sistemas cuyos elementos están conectados mediante una red compleja. Como una primer idea, llamamos **sincronización** al mecanismo mediante el cual objetos oscilantes ajustan sus ritmos mediante un proceso de interacción entre ellos.

El concepto de sincronización quizás apareció desde el siglo XVII con las observaciones de Christiaan Huygens, quien es principalmente reconocido por sus estudios en óptica y por la precisión con la que elaboró relojes, especialmente aquellos destinados a utilizarse en expediciones marítimas. Huygens se percató que dos relojes de péndulo, unidos a una misma barra, se balanceaban exactamente en direcciones opuestas [1]. Huygens mencionaría por primera vez dicho fenómeno en una carta enviada a su padre en Febrero de 1665 [2]. La “simpatía entre dos relojes”, como lo llamaría el propio Huygens, se explicaría en términos modernos como la *sincronización en antifase* debido al acoplamiento mutuo de los relojes mediante la barra que los une.

A mediados del siglo XIX, en su famoso tratado *La Teoría del Sonido* [3], William Strutt (Lord Rayleigh) describió el fenómeno de sincronización en sistemas acústicos. En 1920, con el desarrollo de dispositivos eléctricos, W. H. Eccles y J. H. Vincent confirmaron el descubrimiento de la propiedad de sincronización en un triodo - un dispositivo eléctrico dentro de un tubo de vacío que produce una corriente eléctrica alterna en forma periódica. En sus experimentos, Eccles y Vincent acoplaron dos generadores cuyas frecuencias diferían ligeramente y demostraron que el acoplamiento forzaba al sistema a vibrar con la misma frecuencia [4]. Más tarde, E. Appleton y B. van der Pol estudiarían este efecto de forma teórica. Sus resultados fueron de gran importancia práctica pues los generadores de triodos serían elementos básicos en los sistemas de radiocomunicación [5, 6].

La sincronización también ha sido observada en sistemas vivos. En 1729, el astrónomo y matemático francés Jean-Jacques Dortous de Mairan, observó que las hojas de una planta de alubias se movían hacia arriba y hacia abajo en perfecta sincronía con los cambios entre el día y la noche. Ahora es bien conocido que todos los sistemas biológicos cuentan con relojes internos que regulan dichos cambios. Grupos de luciérnagas se sincronizan para emitir luz con la misma fase y frecuencia al igual que la gente aplaude, en ocasiones, en sincronía con el resto. Un proceso similar se observa en los grillos. El estudio de la sincronización en los aplausos ha sido estudiado recientemente por Néda *et al.* [7] quien realizó experimentos en diferentes salas de conciertos en Rumania y Hungría. Se grabó tanto la intensidad del ruido global mediante un micrófono colocado en el piso, así como los aplausos individuales mediante micrófonos

ocultos cerca de cada espectador. Néda *et al.* enfatizaron que la aparición de sincronización se ve precedida por un doblamiento de periodo. La explicación es que a velocidades bajas, los individuos son capaces de mantener un ritmo estable por si solos y además, se reduce la dispersión en las frecuencias. Ambos factores producen la transición al estado sincronizado. Ellos notaron que la reducción en la frecuencia, que induce sincronización, es más común en países del este de Europa, donde la audiencia es más homogénea que en países multiculturales del oeste de Europa y Estados Unidos.

El estudio de redes de neuronas es otro ejemplo de gran trascendencia en neurociencia donde la sincronización parece ser el mecanismo central para el procesamiento de información en un área específica del cerebro así como la comunicación entre diversas áreas [8, 9, 10, 11, 12]. Evidencia reciente indica que la sincronización en la corteza sensoriomotora puede servir para integrar y coordinar información relacionada con el control motor [13]. La sincronización es el mecanismo encargado de mantener los ritmos vitales como la respiración. Koshiya y Smith demostraron que estos ritmos son generados por redes de neuronas localizadas en el tallo cerebral las cuales simulan la función de un marcapasos [14]. En contraste, la sincronización es responsable también de diversas convulsiones como las observadas en personas que padecen epilepsia [15]. Estructuralmente, las redes corticales² se pueden estudiar en base a los diferentes niveles jerárquicos de organización [16]: el nivel microscópico de interacción entre neuronas, el nivel mesoscópico de circuitos neuronales locales, y el nivel macroscópico de organización entre diferentes áreas en el cerebro. Aunque todavía se desconoce gran parte de los primeros dos niveles, mucha información ha sido recavada de cerebros de animales en el último nivel, lo cual ha permitido comparar los datos experimentales obtenidos por resonancia magnética con los resultados numéricos de distintos modelos de *subredes de neuronas* [10].

La sincronización en una red se presenta cuando todos los nodos evolucionan de la misma forma, i.e. $\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{x}^2(t) = \dots = \mathbf{x}^N(t) = \mathbf{s}(t)$ donde los nodos tienen el mismo estado $\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{s}(t))$ para todo tiempo t , conocido como *sincronización completa*. El presente trabajo se concentra en el análisis numérico de la sincronización en redes complejas cuya dinámica en los nodos está dada por *sistemas dinámicos caóticos*. Aunque parece paradójico, algunos sistemas como los láseres o las redes neuronales presentan este comportamiento. Estas últimas son la motivación principal de este trabajo, donde la sincronización se presenta a diferentes escalas y resulta un mecanismo esencial en el procesamiento de la información. En el Apéndice B, el lector no familiarizado con el tema encontrará un breve resumen de la teoría de sistemas dinámicos y caos, donde se expone la teoría general, así como las principales propiedades de los sistemas continuos y discretos. Asimismo, se da una breve introducción a la teoría de estabilidad donde también se incluye el método de los exponentes de Lyapunov para distinguir entre sistemas estables y caóticos, caracterizados estos últimos principalmente por su alta dependencia en las condiciones iniciales.

La estructura del presente trabajo es como sigue: La terminología relacionada con redes se introduce en el Capítulo 2. El formalismo matemático que estudia las redes es llamado *teoría de gráficas* y el Capítulo 2 inicia con la principal notación y terminología utilizada, complementada con algunos resultados incluidos en el Apéndice A.1. También se introducen

²Las áreas corticales en la corteza cerebral se refieren a todas las zonas del cerebro asociadas a funciones específicas, es decir, zonas donde las neuronas comparten propiedades funcionales distinguibles de otras áreas.

algunos conceptos en *teoría algebraica* de gráficas, en la cual se asocian algunas matrices con la topología de la red; de dichas matrices se obtiene información fundamental en términos de su espectro de eigenvalores.

El Capítulo 2 continúa presentando algunas de las propiedades estadísticas fundamentales para clasificar y diferenciar entre distintos tipos de redes. Algunas de aquellas propiedades son la distribución del número de vecinos de los nodos, conocida como *distribución del grado en los nodos*³; la *intermediación* que mide la importancia de un nodo medida, por ejemplo, por el número de trayectorias que pasan por él; el *coeficiente de agrupamiento* que mide que tan conectados están entre sí los vecinos de un cierto nodo; la *trayectoria mínima* que equivale al menor número de conexiones posibles entre un par de nodos arbitrario; y la *longitud de la trayectoria característica* que es el promedio de las trayectorias mínimas sobre todos los pares de nodos, por mencionar algunas. Al final del Capítulo 2 se utilizan dichas propiedades estadísticas para distinguir entre diferentes tipos de gráficas, a saber: *redes regulares* cuya principal característica es que los nodos tienen el mismo número de vecinos, las *redes aleatorias* generadas con una función de distribución binomial, las *redes de mundo pequeño* caracterizadas por tener de manera simultánea un coeficiente de agrupamiento grande y una longitud corta de su trayectoria característica, y finalmente, las *redes libres de escala* con distribución de ley de potencias en sus grados. Tanto las redes aleatorias como las redes libres de escala pueden ser estudiadas con el formalismo de las *funciones generadoras* mediante el cual se pueden analizar, a partir de una función de distribución arbitraria, las principales propiedades de la red. Dicho formalismo se incluye en el Apéndice A.1.

Se concluye el Capítulo 2 con los principales conceptos en la teoría de sincronización; se incluyen dos modelos que se consideran importantes para entender la sincronización en sistemas de muchos elementos: primero, se estudia la sincronización de poblaciones de osciladores, y a continuación, la sincronización de sistemas caóticos. En este último se analiza la estabilidad del estado sincronizado de dos mapeos acoplados, que es el caso más simple, y se generaliza a sistemas de N elementos caóticos cuyo acoplamiento se representa mediante un operador lineal. La estabilidad del estado sincronizado se estudia a detalle en la última sección, en donde se incluye el formalismo de las ecuaciones maestras de estabilidad (EME) y su función maestra de estabilidad asociada (FME), tanto para sistemas dinámicos continuos como discretos.

Lo estudiado al final del Capítulo 2, sirve como preámbulo a los resultados numéricos de sincronización en redes complejas expuestos en el Capítulo 3. Aquí se exponen los resultados numéricos obtenidos con el formalismo de las FME donde se incluyen los tipos de redes expuestas en el Capítulo 2: redes regulares, redes aleatorias con distribución binomial, redes de mundo pequeño y redes libre de escala. En los Apéndices C y D se incluye el código de algunos programas utilizados en este último capítulo.

³El *grado* de un nodo es el número de conexiones (también llamadas aristas) de ese nodo, que equivale al número de vecinos o nodos conectado a él.

Capítulo 2

Marco teórico

En el presente capítulo se introducen los conceptos y la terminología utilizada en el presente trabajo en relación con la teoría de gráficas. Se incluye también un breve resumen de la teoría algebraica de gráficas en donde se enumeran las principales matrices asociadas a la topología de las gráficas así como las propiedades de su espectro de eigenvalores. Más adelante, se describen algunas de las principales propiedades estadísticas de las redes tales como la distribución del grado de los nodos, el diámetro, la centralidad, el coeficiente de agrupamiento y la longitud de la trayectoria característica. De acuerdo a dichas propiedades se pueden clasificar las redes en diferentes tipos tales como: redes regulares, aleatorias, de mundo pequeño y libres de escala; al final del capítulo se describen sus principales características.

Al final del capítulo, se introduce la notación relacionada con sincronización mediante dos ejemplos: sincronización en poblaciones de osciladores y en sistemas caóticos. Con los cuales se entenderá el mecanismo que produce que sistemas de muchos osciladores ajusten sus fases produciendo el fenómeno de *sincronización en fase* y aquel que produce que sistemas caóticos igualen sus estados produciéndose la llamada *sincronización completa*.

2.1. Teoría de gráficas

Formalmente, la *teoría de gráficas* estudia la topología y propiedades de las redes; la topología se refiere a la forma en que se conectan los elementos de la red y dicha estructura determina en gran medida las propiedades de la red.

Se inicia el capítulo definiendo algunos conceptos básicos en teoría de gráficas, los cuales serán útiles, primero, para tener una noción clara de lo que es una gráfica, y segundo, para introducir la terminología y notación utilizada a lo largo de este trabajo en donde se utilizan los términos *redes* y *gráficas* como sinónimos.

2.1.1. Conceptos básicos

Una gráfica se forma por elementos y conexiones entre ellos dadas por las interacciones. Formalmente una gráfica G es un par ordenado de conjuntos disjuntos (V, E) , donde E (o $E(G)$) es un subconjunto del conjunto $V^{(2)}$ de pares no ordenados de V (o $V(G)$). El conjunto V es el conjunto de **vértices** (o *nodos*) y E es el conjunto de **aristas** (*edges*, en inglés). Una arista $\{x, y\}$ une a los vértices x y y con $x \neq y$, y se denota por xy . Así xy y yx son la misma arista. Por definición una gráfica no contiene “*loops*” (una arista que une un nodo consigo mismo) ni tampoco *múltiples aristas*, esto es, varias aristas uniendo los mismos dos nodos¹ [17]. Dos aristas son **adyacentes** si tienen exactamente un vértice en común. El modo más fácil de describir una gráfica (si la cantidad de nodos es pequeña) es dibujando sus nodos y aristas. La gráfica con nodos $1, 2, \dots, 5$ y aristas $12, 23, 34, 45, 51, 24, 25, 35$ es comprendida de inmediato al ver la Fig. 2.1.

El **orden** de G es el número de vértices en G ; se denota por $|G|$. El **tamaño** de G es el número de aristas en G ; se denota por $|E|$ (ver Fig. 2.2).

El tamaño de una gráfica de orden n es como mínimo 0 y como máximo $n(n-1)/2$, i.e. el coeficiente binomial $\binom{n}{2}$. Una gráfica de orden n y tamaño $\binom{n}{2}$ es llamada **n-gráfica**

¹Formalmente, una gráfica con “*loops*” y múltiples aristas entre los mismos pares de nodos se llama *multigráfica*. Sin embargo en este trabajo seguirán siendo llamadas gráficas.

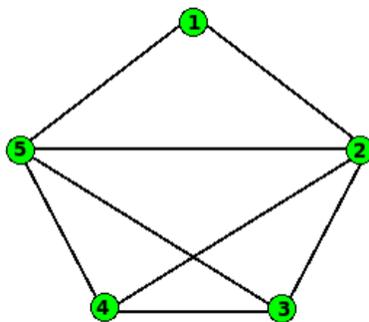


Figura 2.1: Una gráfica con 5 vértices y 8 aristas.

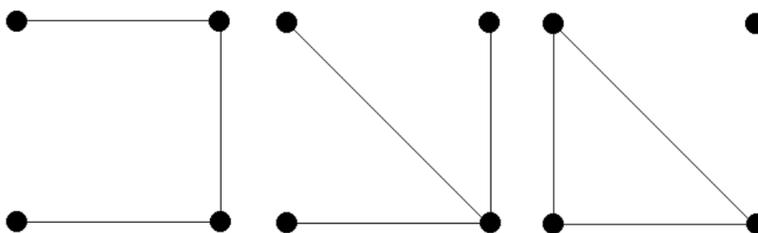


Figura 2.2: Gráficas de orden 4 y tamaño 3.

completa y se denota por K_n . En K_n todos los vértices son adyacentes.

El conjunto de nodos adyacentes al vértice $x \in G$, la **vecindad** de x , se denota por $\Gamma(x)$. Así, $y \in \Gamma(x)$ implica que xy es una arista. El **grado nodal** de x es $k_x = |\Gamma(x)|$, lo cual indica el número de vértices adyacentes a x . El *grado mínimo* de los vértices de una gráfica G se denota por $\kappa(G)$ y el grado máximo por $\mathcal{K}(G)$. Un vértice de grado 0 es un vértice *aislado*. Si $\kappa(G) = \mathcal{K}(G) = k$, esto es, todos los nodos de G tienen grado k , entonces se dice que G es **k -regular** o **regular de grado k** .

Considere una gráfica G con n nodos. Puesto que cada arista tiene dos nodos en sus extremos, la suma de los grados de los nodos en G es exactamente el doble del número de aristas:

$$\sum_{i=1}^n k_i = 2|E|. \quad (2.1)$$

En particular, la suma de los grados es par:

$$\sum_{i=1}^n k_i \equiv 0 \pmod{2} \quad (2.2)$$

Equivalentemente, (2.2) establece que hay un número par de vértices de grado impar. Este resultado es conocido como “el lema del movimiento de manos” (*handshaking lemma*, en inglés) puesto que es equivalente a decir que en una fiesta el número de manos agitadas es par.

Una **trayectoria** es una gráfica T de la forma

$$V(T) = \{x_0, x_1, \dots, x_l\}, \quad E(T) = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{l-1}x_l\} \quad (2.3)$$

Esta trayectoria es usualmente denotada por $x_0x_1 \cdots x_l$. Los vértices x_0 y x_l son los extremos de T y $l = |E(T)|$ es la longitud de T . Un camino W en una gráfica es una secuencia alternante de nodos y aristas (secuencia de nodos adyacentes), por ejemplo, $x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, e_l, x_l$ donde $e_i = x_{i-1}x_i$, $0 < i \leq l$, la longitud de W es l . Nótese que una trayectoria es un camino con distintos vértices. Si un camino $W = x_0e_1x_1e_2 \cdots e_lx_l$ es tal que $l \geq 3$, $x_0 = x_l$ y los vértices x_i , $0 < i < l$ son distintos uno del otro, entonces se dice que W es un **ciclo**. Un ciclo no tiene un vértice inicial ni una dirección específica. Se denota por C_l a un ciclo de longitud l . Así llamamos a C_3 un *triángulo*, C_4 un *cuadrado*, C_5 un pentágono, y así sucesivamente. Algunos resultados relacionados con ciclos se incluyen en el Apéndice A.1.

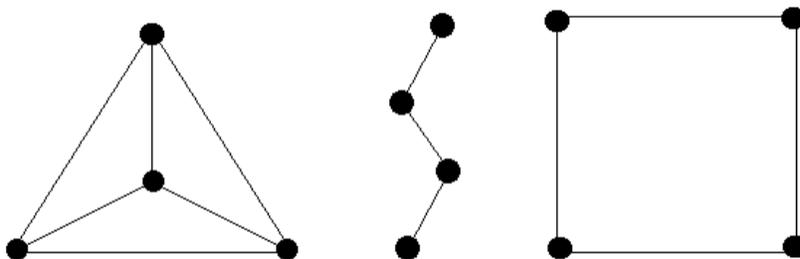


Figura 2.3: Gráficas K_4 , P_3 y C_4

Dado los nodos x y y , su **distancia** $d(x, y)$ es la longitud mínima de las trayectorias de x a y . Si no existe tal trayectoria se dice entonces que $d(x, y) = \infty$.

Una gráfica es **conexa** si para todo par $\{x, y\}$ de vértices distintos existe una trayectoria de x a y . Una subgráfica $G' = (V', E')$ de $G = (V, E)$ es una gráfica tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Una *subgráfica conexa maximal* es una **componente** de la gráfica G . Un **punte** es una arista cuya eliminación incrementa el número de componentes. Así, la arista de una gráfica conexa es un puente si su eliminación desconecta a la gráfica.

Una gráfica sin ciclos es un **bosque**, o una gráfica *acíclica*; un **árbol** es un bosque conexo. Es decir, un bosque es la unión disjunta de árboles o bien, un bosque es una gráfica cuyas componentes son árboles. (Ver Fig. 2.4.)

Si las aristas son pares *ordenados* de vértices, entonces aparece el concepto de **gráfica dirigida** (ver Fig. 2.5b). Un par ordenado (x, y) se dice que es una arista dirigida de x a y o bien, una arista que inicia en x y termina en y , se denota por \vec{xy} o simplemente xy . Un vértice en una gráfica dirigida tiene *grado entrante* y *grado saliente*: el *grado entrante* (*indegree*, en inglés) k_x^- es el número de aristas que terminan en x y el *grado saliente* (*outdegree*, en inglés) k_x^+ es el número de aristas que inician en x .

De manera más general, se pueden definir pesos a las aristas (ver Fig. 2.5c) de la siguiente manera: Dada una gráfica $G(V, E)$, la función $\mathcal{W} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ define los pesos w_{ij} entre los nodos i y j , además \mathcal{W} es simétrica i.e., $w_{ij} = w_{ji} \forall i, j \in V(G)$. Las gráficas consideradas

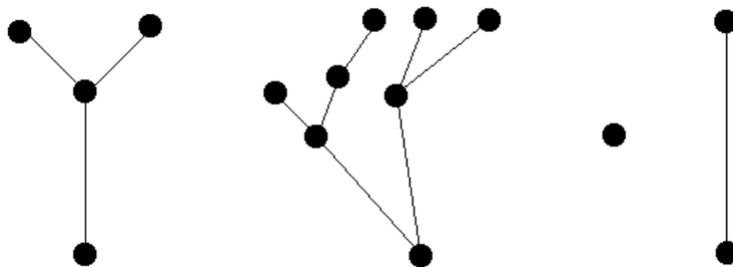


Figura 2.4: Bosque

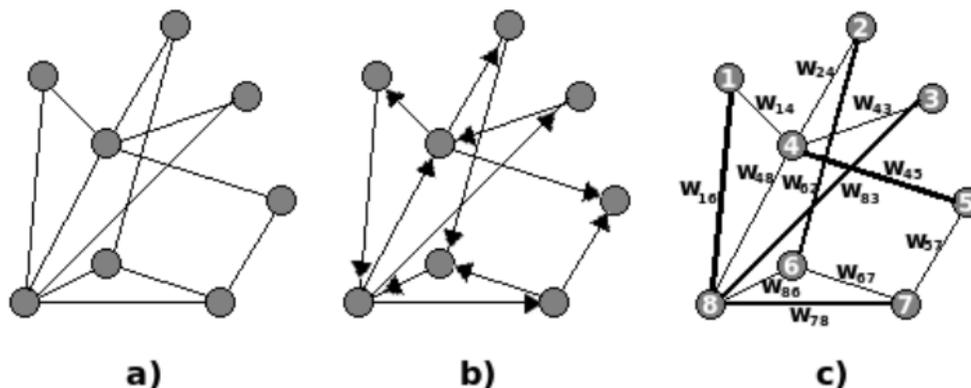


Figura 2.5: (a) Gráfica no dirigida, (b) dirigida y (c) con pesos. En la gráfica dirigida, las aristas son representadas por flechas las cuales indican de forma clara el vértice inicial y el final. Una gráfica con pesos asigna diferentes valores a las aristas, digamos entre 0 y 1, representado en la figura con líneas de diferentes grosores.

hasta ahora corresponden a la elección

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j \text{ son vecinos} \\ 0 & \text{si no son vecinos} \end{cases} \quad (2.4)$$

De manera natural surgen redes en donde es necesario definir la dirección y el peso entre pares de nodos; en una red de amigos, por ejemplo, en la cual se pregunta a cada individuo quiénes son sus amigos, podría darse el caso de que i considere a j su amigo pero que este último no considere a i entre sus amistades, en este caso sólo hay una arista dirigida de i a j . Por otro lado, el tráfico de información entre diversos nodos puede ser mejor modelado si se pesa más a las aristas que conectan aquellos nodos con mayor interacción [18]. En el presente trabajo sólo se trabajará con redes no dirigidas.

2.1.2. Matrices asociadas a redes

Una forma clara de visualizar y comprender una gráfica es mediante algunas matrices asociadas a dicha gráfica, tales como la matriz de adyacencia, la matriz de incidencia y

el Laplaciano. Un área importante dentro de la teoría de gráficas es la *teoría algebraica de gráficas*, enfocada en determinar la forma en que las propiedades de las gráficas son reflejadas en las propiedades algebraicas de las matrices, estos es, a partir de su espectro de eigenvalores.

Matriz de adyacencia

La **matriz de adyacencia** $\mathbf{A}(G) = (a_{ij})$ de una gráfica G de orden n es la matriz entera de $n \times n$ con renglones y columnas asociados a los vértices de G de forma tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E(G), \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Nótese que \mathbf{A} es simétrica si G es *no dirigida* pues, en caso de serlo, puede existir la arista $e_i e_j$ y no la $e_j e_i$. Debido a que no hay “loops”, los elementos de la diagonal son cero.

En general, al referirnos a una gráfica G arbitraria se entenderá que es no dirigida. La matriz \mathbf{A} asociada a una gráfica es real y simétrica, por lo tanto es *hermitiana*, esto es, $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle$. En consecuencia, los eigenvalores de \mathbf{A} son *reales*, digamos $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n$ (La notación utilizada frecuentemente es $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, sin embargo la reservamos para los eigenvalores de la matriz Laplaciana \mathbf{L} , definida más adelante). Se puede demostrar que en una gráfica conexa de orden n los eigenvalores μ satisfacen que $|\mu| \leq \mathcal{K} = \mathcal{K}(G)$, y que además el grado máximo \mathcal{K} es un eigenvalor de \mathbf{A} si y sólo si G es regular² [17].

Matriz de incidencia

Considere una gráfica dirigida G . La **matriz de incidencia** $\mathbf{B}(G) = (b_{ij})$ de $n \times m$ está definida por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es el vértice inicial de la arista } e_j, \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es el vértice final de la arista } e_j, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Hay una conexión importante entre las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} . Denotaremos a la transpuesta de una matriz \mathbf{M} por \mathbf{M}^T .

Teorema 1. Sea $\mathbf{D} = (D_{ij})$ la matriz diagonal de $n \times n$ con $D_{ii} = k_i$, el grado del i -ésimo vértice en G . Entonces

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{D} - \mathbf{A}.$$

Demostración. $(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)_{ij}$ es $\sum_{k=1}^m b_{ik} b_{jk}$, lo cual es k_i si $i = j$, -1 si $v_i v_j$ es una arista (si $e_k = v_i v_j$ es dirigida de v_i a v_j , entonces $b_{ik} b_{jk} = 1(-1) = -1$ y los demás productos son 0), y 0 si $v_i v_j$ no es una arista y $i \neq j$. \square

²Si \mathcal{K} es un eigenvalor de \mathbf{A} su multiplicidad es 1.

Matriz laplaciana

La matriz $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$ con la suma de sus renglones igual a 0 es llamada **el Laplaciano combinatorio, matriz de Kirchhoff o matriz Laplaciana**. \mathbf{L} es de gran importancia en la teoría espectral de gráficas. Sea $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n$ la secuencia de eigenvalores de \mathbf{L} dada por .

Por el Teorema 1 sabemos que $\mathbf{L} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$, donde \mathbf{B} es la matriz de incidencia de G . En consecuencia \mathbf{L} es positiva semidefinida, esto es $\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} \geq 0$ para todo vector \mathbf{x} distinto de $\mathbf{0}$. Puesto que $\mathbf{L}\mathbf{j} = \mathbf{0}$, con \mathbf{j} el vector con todas sus entradas igual a 1, entonces el menor eigenvalor es $\gamma_1 = 0$. El segundo menor eigenvalor $\gamma_2(G)$ de \mathbf{L} es mucho menos trivial. Para ilustrar su importancia, entre más grande es $\gamma_2(G)$, es más difícil cortar a G en pedazos, por ello se le llama a dicho eigenvalor la **conectividad algebraica**. Para mostrar dicha aseveración, se define en [17] a $\gamma_2(G)$ como sigue: dada una forma cuadrática $q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{L}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ y teniendo en cuenta que $\mathbf{L}\mathbf{j} = (\mathbf{D} - \mathbf{A})\mathbf{j} = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} \gamma_2(G) &= \min \left\{ \frac{q(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{j} \rangle = 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\langle (\mathbf{D} - \mathbf{A})\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{j} \rangle = 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si $G = K_n$ entonces $\mathbf{L} = (n - 1)\mathbf{I} - \mathbf{A} = n\mathbf{I} - \mathbf{J}$, con \mathbf{J} la matriz de $n \times n$ con todas sus entradas igual a 1. Entonces $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_n = n$. La multiplicidad del cero como eigenvalor de \mathbf{L} es igual al número de componentes de G , en particular si G es n -regular, como en este caso, se tiene una componente *gigante* (toda la gráfica) y por lo tanto únicamente $\gamma_1 = 0$, además $\gamma_2 = n - \mu_2 > 0$; el hecho de tener una sola componente hace imposible separar a G . Además, si G es una gráfica r -regular de orden n , se puede demostrar que $\gamma_1 = r - \mu_1, \gamma_2 = r - \mu_2, \dots, \gamma_n = r - \mu_n$ son los eigenvalores del Laplaciano \mathbf{L} , con μ los eigenvalores de la matriz de adyacencia \mathbf{A} . Entonces en este caso el espectro de \mathbf{L} es únicamente el espectro de \mathbf{A} “trasladado y en reversa”³. En general, la relación entre \mathbf{A} y \mathbf{L} no es tan directa como en estos casos.

2.1.3. Propiedades de las redes

El estudio de diversos tipos de redes complejas, ya sean tecnológicas, biológicas, sociales o de información, ha revelado una forma simple de clasificarlas en base a sus propiedades estadísticas. La más representativa es quizás la *distribución de grados* $P(k)$, que indica la probabilidad de que un nodo en la red tenga grado k , dicha propiedad permite la mayor diferenciación posible entre las gráficas, por lo cual suele considerarse como la “huella dactilar” de la red. Sin embargo, otras propiedades refuerzan dicha categorización, tal es el caso del promedio sobre todos los pares de nodos de la *longitud de la trayectoria característica* entre cada par i, j en una gráfica con N nodos expresada por $\ell = \sum_{i,j \in V, i \neq j} d(i, j) / N(N - 1)$. Relacionada con la distancia entre los nodos, existen muchas medidas que proveen información acerca de la *centralidad* del nodo; algunas de las medidas más comunes son la *centralidad de*

³A esto se debe que se hayan ordenado en orden descendente los eigenvalores de \mathbf{A} ($\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n$). El orden de los eigenvalores asociados a \mathbf{L} es $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n$

grado, y en textos de física, la *intermediación* que cuenta el número de trayectoria mínimas entre cualquier par de nodos que pasan a través de un vértice o arista en particular.

En lo relativo a las redes estudiadas en el presente trabajo, nos enfocaremos en calcular sólo algunas de sus propiedades estadísticas, con la finalidad de tener una idea más clara acerca de sus principales características y diferencias. Veamos pues con mayor detalle dichas propiedades.

Grado nodal, distribuciones de grados y correlaciones

El grado nodal se definió arriba como $k_i = |\Gamma(x_i)|$, en donde $\Gamma(x_i)$ es la vecindad del vértice (o nodo) x_i . Otra manera de definirlo es mediante la matriz de adyacencia A :

$$k_i = \sum_{j \in V(G)} a_{ij}. \quad (2.6)$$

Como se dijo antes, si la gráfica es dirigida se tienen aristas “saliendo” del nodo i y aristas “entrando” a i . Entonces, el grado saliente es $k_i^+ = \sum_{j \in V(G)} a_{ij}$ y el grado entrante es $k_i^- = \sum_{j \in V(G)} a_{ji}$. Por lo tanto el grado total del nodo es $k_i = k_i^+ + k_i^-$. Una lista de todos los grados de una gráfica es llamada *secuencia de grados*.

Una forma sencilla de caracterizar topológicamente a una gráfica G es mediante la **distribución de grados** $P(k)$, definida como la probabilidad de que un nodo elegido de forma arbitraria tenga grado k o, equivalentemente, como la fracción de nodos de grado k en la gráfica. Para obtener información de cómo están distribuidos los grados de los nodos en G , se puede calcular directamente la distribución $P(k)$ o bien se calculan los momentos de la distribución en donde el n -ésimo momento está dado por

$$\langle k^n \rangle = \sum_k k^n P(k). \quad (2.7)$$

El primer momento $\langle k \rangle$ es el grado promedio de G . Otra cantidad importante es

$$\sigma^2 = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2, \quad (2.8)$$

llamada **varianza** o **dispersión**, la cual es el cuadrado de la *desviación estándar*.

La distribución de grados determina completamente las propiedades estadísticas en gráficas *descorrelacionadas*. Sin embargo, muchas gráficas reales están *correlacionadas* en el sentido de que la probabilidad de que un nodo de grado k esté conectado a otro de grado k' , depende de k . En estos casos se define una **probabilidad condicional** $P(k'|k)$, la cual indica la probabilidad de que un nodo de grado k se encuentre conectado a otro de grado k' . $P(k'|k)$ satisface la normalización $\sum_{k'} P(k'|k) = 1$ y la condición de balance detallado para los grados $kP(k'|k)P(k) = k'P(k|k')P(k')$ [19, 20]. Para gráficas descorrelacionadas, donde $P(k'|k)$ no depende de k , la condición anterior se lee $P(k'|k) = k'P(k|k')P(k')/\langle k \rangle$.

Aunque las correlaciones en los grados están formalmente representadas por $P(k'|k)$, su evaluación directa en gráficas reales produce ruido en los resultados [19], debido a que la cantidad de nodos es finita. Para evitar dicho inconveniente, se define el *grado promedio de los primeros vecinos* del nodo i como

$$k_i^{(1)} = \frac{1}{k_i} \sum_{j \in \Gamma(i)} k_j = \frac{1}{k_i} \sum_j a_{ij} k_j = \frac{\sum_{j,k} a_{ij} a_{jk}}{\sum_j a_{ij}}, \quad (2.9)$$

donde la primera suma corre sobre los nodos j en la vecindad de i . Usando la definición en (2.9), se puede calcular el grado promedio de los primeros vecinos de los nodos con grado k , denotado por $k^{(1)}$, obteniendo una expresión que incorpora de forma implícita la dependencia de k . Dicha cantidad puede ser expresada en términos de la probabilidad condicional como

$$k^{(1)}(k) = \sum_{k'} k' P(k'|k). \quad (2.10)$$

Sin correlaciones en los grados, la Ec. (2.10) queda como $k^{(1)}(k) = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$, que es independiente de k . Por otro lado, una gráfica correlacionada se dice que es **asortativa** (*assortative*, en inglés) si $k^{(1)}$ es una función creciente de k y **disasortativa** (*disassortative*, en inglés) si $k^{(1)}$ es una función decreciente de k [20]. En otras palabras, la asortatividad indica que nodos de cierto grado tienden a conectarse con otros de grado similar mientras que la disasortatividad indica que nodos con, por ejemplo, grado bajo, tienden a conectarse con nodos de grado alto, o viceversa. En ausencia de correlaciones, se observaría un comportamiento plano.

Diámetro e intermediación

En análisis de redes de comunicaciones y transportes resulta indispensable conocer la trayectoria mínima $d(i, j)$ entre dos nodos i y j , con la finalidad de reducir costos. En teoría de gráficas dicha trayectoria, conocida también como *geodésica*, juega un papel trascendental en la caracterización de la estructura interna de la gráfica. Si se mide la distancia entre todos los pares de nodos de una gráfica G , suponiendo que existe una trayectoria para cada par, entonces la trayectoria máxima corresponde al **diámetro** de G , indicado por $\text{Diam}(G)$. Por ejemplo, las *redes aleatorias* tienden a tener diámetros pequeños, lo cual influye en la velocidad con la que se transmite la información en la red.

La distancia entre dos nodos no adyacentes depende de los nodos que forman parte de las trayectorias que los unen, un concepto importante en teoría de gráficas es la *centralidad* de un nodo dentro de la gráfica, lo cual indica la relevancia del mismo. Una medida de dicha centralidad es conocida como **centralidad de grado** c_i (*degree centrality*, en inglés), que indica la proporción de nodos en la red conectados a un cierto nodo i y está dada por $c_i = \frac{k_i}{N-1}$, donde N es el número de nodos. Otra medida de la centralidad de un nodo i se conoce como **intermediación** b_i (*betweenness*, en inglés), la cual mide la proporción de trayectorias mínimas que pasan por dicho nodo. Está dada por

$$b_i = \sum_{j,k \in V(G), j \neq k} \frac{n_{jk}(i)}{n_{jk}}, \quad (2.11)$$

donde n_{jk} es el número de trayectorias mínimas conectando los vértices j y k , mientras que $n_{jk}(i)$ es el número de trayectoria mínimas entre j y k que pasan por el nodo i . Las propiedades de centralidad adquirirán especial relevancia en el capítulo 3 donde serán calculadas en algunos tipos de redes.

Agrupamiento y trayectoria característica

El **coeficiente de agrupamiento** \mathcal{C}_i (*clustering*, en inglés) del nodo i -ésimo es una propiedad fundamental en redes sociales: supongamos que el individuo A_0 tiene dos amigos

A_1 y A_2 , entonces \mathcal{C}_{A_0} indica la probabilidad de que A_1 sea amigo de A_2 . Esto sugiere que hay una relación directa entre \mathcal{C}_{A_0} y los triángulos que forma A_0 con sus vecinos. De hecho, el coeficiente de agrupamiento se puede definir globalmente como la proporción de triángulos existentes en la red en relación con la cantidad total de tercias que se pueden formar, como sigue [21]:

$$\mathcal{C} = \frac{3 \times \text{número de triángulos}}{\text{número de tripletes conectados}}. \quad (2.12)$$

El factor de 3 se introduce debido a que se cuenta cada triángulo tres veces (una por cada vértice). Recordamos que un triángulo es un grupo de tres vértices en el que cada uno está conectado al resto; un triplete es un grupo de tres nodos en el que al menos uno está conectado al resto. Otra forma de definir \mathcal{C} en términos de las conexiones de los vecinos de un nodo, cuya información está contenida en la matriz de adyacencia, es como sigue [22]: considere el nodo i con k vecinos, entonces a lo más existen $k(k-1)/2$ aristas entre los vecinos (esto ocurre cuando cada vecino de i está conectado a todos los demás). Por lo tanto \mathcal{C}_i define la fracción de estas aristas presentes:

$$\mathcal{C}_i = \frac{\sum_{jk} a_{ij} a_{jk} a_{ki}}{k(k-1)} = \frac{\sum_{jk} a_{ij} a_{jk} a_{ki}}{\sum_{jk} a_{ij} a_{ki}}, \quad (2.13)$$

y \mathcal{C} es el promedio sobre todos los vértices en G :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{N} \sum_{i \in V(G)} \mathcal{C}_i. \quad (2.14)$$

Dada un red con N nodos, la longitud de la trayectoria característica ℓ se define como el número de aristas en la trayectoria mínima $d(i, j)$ de todos los pares de vértices i, j promediada sobre todas las aristas posibles en la red [23], esto es

$$\ell = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j} d(i, j). \quad (2.15)$$

El coeficiente de agrupamiento es una propiedad *local* de la topología de la red debido a que indica la probabilidad de que 2 vecinos de un nodo i , digamos j y k , sean vecinos entre ellos, i.e., $a_{jk} = 1$ en la matriz de adyacencia. En contraste, la longitud de la trayectoria característica es una propiedad *global* que indica que tan “compacta” es la red; si $\ell = 1$ entonces se tiene una N -gráfica completa, esto es, con acoplamiento global. Si ℓ es grande indica que los nodos se encuentran muy separados entre si, esto es, para llegar de un nodo a otro hay que atravesar muchos nodos antes. Las propiedades expuestas en esta sección son fundamentales en el reconocimiento de redes de mundo pequeño, como se verá más adelante.

2.2. Tipos de redes

El análisis de diversas redes ha llevado a clasificarlas de manera tal que algunas, aunque provienen de diversos campos, comparten ciertas propiedades. Como se dijo en la sección 2.1.3, la distribución en los grados puede ser considerada como el primer criterio para clasificarlas con lo cual se puede diferenciar fácilmente una red regular de una aleatoria [21, 24];

si dicha red tiene una distribución que satisface una ley de potencias ($P(k) \sim k^{-\tau}$) entonces es llamada red libre de escala. Sin embargo, otras tienen propiedades compartidas con diferentes y hasta opuestos tipos de redes; tal es el caso de las redes de mundo pequeño las cuales aunque presentan agrupamiento alto como se observa en las redes regulares, tienen diámetros tan pequeños como el encontrado en redes aleatorias [23]. Otras, llamadas redes libres de escala, son aquellas en las cuales nodos nuevos se conectan preferentemente con aquellos cuyo grado es alto [25, 26], lo cual sugiere que la topología de este tipo de redes emerge a partir de cierta dinámica en sus componentes.

2.2.1. Redes $2k$ -regulares

Recordamos de la sección 2.1 que una gráfica $2k$ -regular G_{2k} ($k \in \mathbb{N}$) es aquella donde el grado de todos los nodos es igual a una constante $2k$ ⁴. Debido a dicha regularidad, es el caso más sencillo de analizar. Podemos acomodar a los nodos en un anillo y acoplarlos con sus $2k$ primeros vecinos como se muestra en la figura 2.6. Dada una gráfica $2k$ -regular con N vértices y kN aristas, la matriz Laplaciana L está dada por la matriz *circulante*:

$$L = \begin{pmatrix} 2k & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 2k & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & & & & \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & 2k \end{pmatrix}$$

El término circulante se refiere a que un vector renglón arbitrario en la matriz es el renglón anterior recorrido un lugar hacia la derecha. Los eigenvalores $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ de dicha matriz son [27]:

$$\gamma_m = 2k - 2 \sum_{l=1}^k \cos\left(\frac{2\pi(m-1)l}{N}\right) \quad m = 1, \dots, N.$$

Nótese que $\gamma_1 = 0$. En particular, si $2k = N - 1$ entonces cada nodo está conectado al resto de manera que se tiene *acoplamiento global*, esto es, N -gráficas completas (Sección 2.1).

Dicho tipo de redes se encuentran en sistemas donde la configuración espacial de los nodos es trascendental y la interacción de cada nodo con sus vecinos está restringida por un cierto radio. Entre las principales propiedades de este tipo de de redes se encuentra que el coeficiente de agrupamiento es alto debido a la alta conectividad de los nodos, i.e. es muy probable que los vecinos de un nodo sean vecinos entre sí. La Ec. (2.13) puede ser expresada en términos del parámetro k como sigue: el número de aristas presentes entre los vecinos de cada nodo es $3k(k-1)/2$ y el número total de aristas posibles entre los $2k$ vecinos de ese nodo es $2k(2k-1)/2$. Por lo tanto el coeficiente de agrupamiento se lee como

$$\mathcal{C} = \frac{3(k-1)}{2(2k-1)} = \frac{3(k-1)}{4(k-\frac{1}{2})}. \quad (2.16)$$

Nótese que el límite con $k \rightarrow \infty$, y por ende $N \rightarrow \infty$, resulta en $\mathcal{C} = 3/4$. Por otro lado, el diámetro de la gráfica crece linealmente con la cantidad de nodos debido a la regularidad en

⁴La razón de escribir $2k$, y no k , se debe a que deseamos que cada nodo tenga el mismo número de vecinos a su derecha y a su izquierda (acomodados como en la Fig. 2.6) de modo tal que el grado de cada nodo es $k' = 2k$, lo cual facilita su análisis posterior. Esto también implica que el número de nodos N debe ser impar.



Figura 2.6: Gráfica de 21 nodos 4-regular, i.e., acoplamiento a segundos vecinos. El coeficiente de agrupamiento en este caso es $\mathcal{C} = 1/2$.

las conexiones; de este modo $\text{Diam}(G_{2k}) = \lceil N/2k \rceil$. La trayectoria característica ℓ no tiene una expresión simple; sin embargo, también escala con N , i.e. $\ell \sim N$ [26]. Estos resultados serán retomados más adelante en la sección 2.2.3, donde se estudian algunas propiedades de las redes de mundo pequeño construidas a partir de redes $2k$ -regulares.

2.2.2. Redes aleatorias

El primer intento serio para construir un modelo de redes con una gran cantidad de nodos y en apariencia aleatorias, se debe al trabajo realizado por Solomonoff y Rapoport donde se modela una red neuronal [28], siendo uno de los primeros trabajos que intentaron modelar redes reales. Una década después resurgen dichas redes o *gráficas aleatorias*, como las llamarían sus autores, con los trabajos de Erdős y Rényi [29], quienes las estudiarían de manera rigurosa. Su modelo propuesto toma N nodos y conecta (o no) cada par con probabilidad p ($1-p$). Esto define el modelo que Erdős y Rényi llamarían $G(N, p)$. De hecho, éste representa el *ensamble* de todas las gráficas para las cuales una con m aristas aparece con probabilidad $p^m(1-p)^{M-m}$, donde $M = \binom{N}{2} = \frac{1}{2}N(N-1)$ es el máximo número de aristas que pueden existir entre aquellos N nodos. Erdős y Rényi también definieron otro modelo relacionado que nombraron $G(N, m)$, el cual representa el ensamble de todas las gráficas con N nodos y exactamente m aristas, donde cada gráfica aparece con la misma probabilidad.⁵

Muchas de las propiedades en las redes aleatorias son solubles de forma exacta en el límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$), como se demostró en los años 60's por Erdős y Renyi [29].

⁵Estos dos modelos son análogos a los ensambles *canónico* y *gran canónico*. Del mismo modo se pueden definir funciones equivalentes a la energía libre de Gibbs y Helmholtz, las cuales son funciones generadoras de los momentos de las propiedades de las gráficas sobre la distribución de todas las gráficas, y las cuales están relacionadas por una transformada de Lagrange con respecto a p y el parámetro de orden m [24]. El formalismo de las funciones generadoras se incluye en el Apéndice A.2.

Partiendo de la *distribución binomial*, que da la probabilidad de que un nodo tenga grado k

$$p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad (2.17)$$

y sustituyendo el grado promedio $z = Np$, se obtiene

$$p_k = \frac{N!}{k!(N-k)!} \left(\frac{z}{N}\right)^k \left(1 - \frac{z}{N}\right)^{N-k}. \quad (2.18)$$

Si se toma el límite para $N \gg 1$ se encuentra la distribución de Poisson:

$$p(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} p_k = \frac{z^k e^{-z}}{k!}, \quad (2.19)$$

donde se utiliza que $\lim_{N \rightarrow \infty} (1 - \frac{z}{N})^N = e^{-z}$.⁶

El valor de p determina la estructura de la red. Recordemos que una *componente* dentro de una gráfica representa un grupo de vértices conectados mediante aristas de forma tal que existe una trayectoria entre cada par de vértices dentro de esa componente. Uno de los resultados más importantes relacionados con gráficas aleatorias indica que existe una *probabilidad crítica* p_c en la cual se produce una *transición de fase* [24]. Si $p < p_c$, se observa que la red tiene pocas componentes y todas las componentes son pequeñas. Por el contrario, si $p > p_c$ la mayoría de los vértices (del orden de N) pertenecen a una misma *componente gigante*. El tamaño de dicha componente puede ser calculado mediante argumentos heurísticos [21]. Sea u la fracción de los nodos que no pertenecen a la componente gigante, o bien, la probabilidad de que al escoger un vértice de forma aleatoria, no pertenezca a dicha componente. Entonces la probabilidad de que ninguno de los vecinos de este vértice pertenezca a la componente es u^k si el vértice tiene grado k . Promediando dicha expresión sobre la distribución de probabilidad de los grados de los nodos se encuentra la siguiente relación en el límite donde $N \rightarrow \infty$:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k = e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zu)^k}{k!} = e^{z(u-1)}, \quad (2.20)$$

Debido a que la fracción de la red ocupada por la componente gigante es $S = 1 - u$ entonces

$$S = 1 - e^{-zS}. \quad (2.21)$$

Esta ecuación no tiene una solución cerrada. Sin embargo se observa que cuando $0 \leq z < 1$, la única solución no negativa es $S(z) = 0$, y cuando $z > 1$ la solución es $S(z) > 0$ y equivale al tamaño de la componente gigante. Entonces en $z = 1$ ocurre la transición de fase.

Aunque gran parte del conocimiento adquirido acerca de las redes reales proviene de redes aleatorias generadas a partir de la distribución de Poisson, este modelo no reproduce muchas propiedades observadas en aquellas. Gran parte de la teoría en redes complejas aleatorias se ha derivado del estudio de redes reales, por lo cual, si se quiere modelar de forma precisa el comportamiento de éstas, por ejemplo una red neuronal, es importante considerar otro tipo de funciones de distribución en los grados de los nodos.

⁶Esto es cierto pues $\lim_{N \rightarrow \infty} N \ln(1 - \frac{z}{N}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln(1 - \frac{z}{N})/N^{-1}$, derivando respecto a N tanto el numerador como el denominador (regla de L'Hôpital) se obtiene $\lim_{N \rightarrow \infty} -z/(1 - \frac{z}{N}) = -z$.

Un modelo generalizado de redes aleatorias que incorpora distribuciones no poissonianas es el llamado *modelo de configuraciones*. Si especificamos una distribución de probabilidad arbitraria p_k de los grados de los nodos, tal que p_k representa la fracción de los vértices en la red con grado k , entonces podemos crear una secuencia de N grados k_i , $i = 1, 2, \dots, N$ a partir de dicha distribución. Con esta secuencia se han repartido $\sum_i^N k_i$ extremos de aristas, con lo cual sólo resta elegir dos extremos aleatoriamente y unirlos para formar la arista y así sucesivamente hasta haber unido todos los extremos libres de los nodos⁷. En el Apéndice A.2 se explica el formalismo de las *funciones generadoras* a partir del cual se pueden calcular una gran variedad de propiedades, tanto locales como globales, en una red generada a partir de una secuencia obtenida de una distribución arbitraria de grados.

2.2.3. Redes de mundo pequeño

En la década de los 60's, múltiples experimentos a cargo del psicólogo social Stanley Milgram trataron de medir la forma en que está conectada una red de personas [30]. Aunque es frecuente encontrar gente que conoce a un amigo, o al amigo de un amigo, en realidad si esto sucede es debido al círculo social en el que nos desenvolvemos. Sin embargo, es cierto que vivimos en un mundo pequeño; si suponemos que cada individuo tiene 100 amigos (red con seres sociales), entonces tendremos 100 veces 100, esto es, 10000 personas como segundos vecinos. En el tercer paso conoceríamos a 1 millón de personas y en el cuarto a 100 millones. En el siguiente grado se conocen ya 10 mil millones de personas. La población mundial tiene alrededor de 7 mil millones por lo que aproximadamente 6 grados es lo que separa a un individuo de cualquier otro en el mundo. Dicho tipo de topologías también son observadas en otro tipo de sistemas: la red neuronal del gusano *Caenorhabditis Elegans* (Fig. 2.7), y la red eléctrica en Estados Unidos son algunos ejemplos de redes de mundo pequeño.

Las redes de mundo pequeño se encuentran entre las redes regulares y las aleatorias en el sentido de que comparten propiedades de ambas: tienen coeficiente de agrupamiento alto como las redes regulares y la longitud de la trayectoria característica es baja como en las redes aleatorias, debido a que hay conexiones de largo alcance con nodos que, de otro modo, estarían muy alejados.

Siguiendo el método propuesto por Watts y Strogatz, una gráfica de mundo pequeño puede ser generada a partir de una red $2k$ -regular reconectando una arista por nodo a la vez con probabilidad p con algún otro nodo escogido uniformemente al azar, empezando por los primeros vecinos. La única restricción es la de no repetir aristas por lo que si se escoge un nodo que ya tiene esa conexión la arista se deja en su lugar original. Cuando se haya concluido la primera arista de cada vértice (primer vuelta) se toma el siguiente vecino más cercano y se repite el proceso de reconexión; de este modo se habrán dado k vueltas al anillo unidimensional [23]. Sin embargo, este modelo, aunque numéricamente no causa conflicto, posee algunas inconsistencias: una es que la probabilidad de elegir los nodos en la red no está uniformemente distribuida, pues de inicio está prohibido escoger aquellos que ya han sido conectados previamente, y la más importante es que existe el riesgo de generar una red con nodos (o grupos de nodos) aislados para los cuales su distancia con el resto es considerada infinita y, por ende, la longitud de la trayectoria característica diverge (ver Sección 2.1.3). Para evitar

⁷El número de extremos repartidos debe ser par para que no quede al final ningún extremo libre.

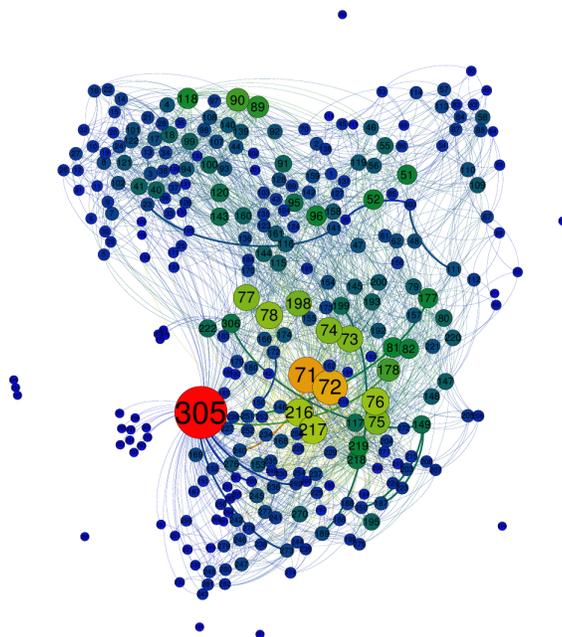


Figura 2.7: Red neuronal del gusano *C. Elegans* con topología de red de mundo pequeño con $N = 306$ nodos y 2345 aristas, el tamaño de los nodos es proporcional a su grado. El grado promedio es $\bar{k} = 15.327$ y el diámetro es $\text{Diam} = 14$. La longitud de la trayectoria característica es $\ell = 3.996$ mientras que el coeficiente de agrupamiento es $\mathcal{C} = 0.164$ con 10 componentes débilmente conexas y 66 fuertemente conexas, i.e., existe una trayectoria directa entre todos los nodos de la componente.

esto, Newman y Watts propusieron un modelo similar que corrige aquellos inconvenientes [31]. Su modelo añade aristas a la red $2k$ -regular, en vez de reconectarlas. Para obtener los mismos resultados obtenidos con el otro modelo, se define también una probabilidad p de añadir una nueva arista por cada una de las aristas ya existentes. En este caso se permite tener dos aristas conectando el mismo par de vértices así como nodos conectados con ellos mismos (“loops”). La probabilidad definida en el modelo de Newman y Watts (sin reconexión) conduce a los mismos resultados que el modelo de Watts y Strogatz (con reconexión) ya que en ambos el número de aristas añadidas o reconectadas, según sea el caso, es pNk .

La expresión para la distribución del grado de los nodos en el modelo sin reconexiones se simplifica en relación con la obtenida para el modelo de Watts y Strogatz (ver Fig. 2.8); para aquel los nodos tienen al menos grado $2k$ y la distribución de las aristas añadidas sigue una distribución binomial. Entonces la probabilidad $p_{k'}$ de que un nodo tenga grado k' es

$$p_{k'} = \begin{cases} 0 & \text{si } k' < 2k \\ \binom{N}{k' - 2k} \left(\frac{2kp}{N}\right)^{k' - 2k} \left(1 - \frac{2kp}{N}\right)^{N - k' + 2k} & \text{de otro modo.} \end{cases} \quad (2.22)$$

Esta distribución, aunque es aleatoria, conserva el hecho de que la red fue construida a partir de una red regular por lo que difiere ligeramente de la distribución observada en las redes aleatorias generadas con una distribución binomial. La distribución en el modelo con

reconexión es un poco más complicada que la expresión (2.22), debido a que se compone por el producto de la distribución de las aristas $P_1(n_i^1)$ del nodo i que no son reconectadas y la distribución de las aristas $P_2(n_i^2)$ que son conectadas a i , donde el grado del nodo $k' = k + n_i$ es al menos k más las nuevas reconexiones n_i , con $n_i = n_i^1 + n_i^2$ dividido en los nodos que no se reconectaron $n_i^1 \leq k$ y los que se reconectaron al nodo i , n_i^2 .⁸

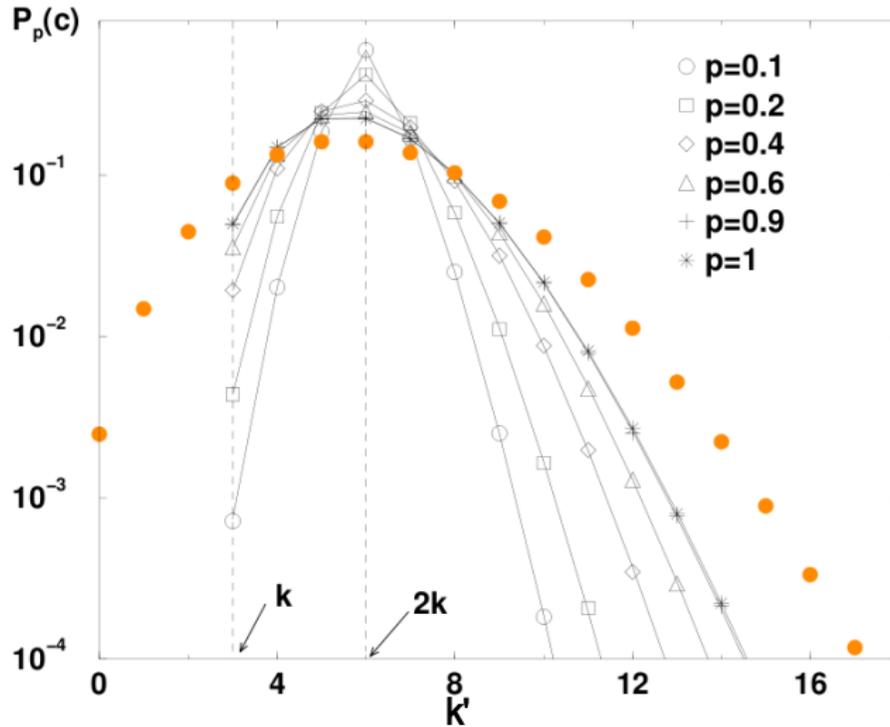


Figura 2.8: Las redes de mundo pequeño si bien son generadas utilizando métodos aleatorios, la distribución del grado de los nodos difiere de aquella obtenida para redes aleatorias. En la gráfica se compara la distribución para redes donde las aristas son reconectadas con probabilidad p (modelo de Watts y Strogatz) con $k = 3$ y $N = 1000$ nodos. Los círculos rellenos representan la distribución de la red aleatoria con grado promedio $\bar{k}' = 2k$. Figura tomada de la Ref. [22].

Generar las redes de mundo pequeño mediante los procesos antes mencionados permite controlar la regularidad o aleatoriedad de las mismas dependiendo si el parámetro p se acerca a $p = 0$ o a $p = 1$; en total el número de aristas, como se mencionó antes, es pNk en ambos casos. El método usado para generar redes de mundo pequeño conserva las propiedades de las redes sociales en las cuales fueron inspiradas: por un lado los nodos tienen aristas de corto alcance conectadas con sus vecinos más cercanos, esto es, con la gente que se convive a diario (vecinos, compañeros de escuela, etc.); por otro lado, cuentan con conexiones de largo alcance, como amigos o familiares que viven en el extranjero, que permiten conocer gente que, de otro modo, sería improbable conocer. Como se dijo antes, dichas características producen que en un rango amplio de p tanto la longitud de la trayectoria característica ℓ como el coeficiente

⁸Se remite al lector a la Ref. [22] para ver a detalle dicha distribución

de agrupamiento \mathcal{C} se comporten de una manera inusual: el primero es similar al observado en redes aleatorias, i.e., $\ell(p) = \ell(1)$, sin embargo el segundo es tal que $\mathcal{C}(p) \gg \mathcal{C}(1)$.

La longitud de la trayectoria característica ℓ decae drásticamente añadiendo unas pocas aristas a la red $2k$ -regular. Aunque no se ha encontrado una expresión exacta, dicha transición se sabe que depende del número de nodos N más que del propio parámetro p [22]; manteniendo este último constante se observa que ℓ escala linealmente con el tamaño del sistema para el cual el número promedio de nuevas aristas pkN es menor que 1. Mas allá de cierto valor en el tamaño del sistema se produce una transición de fase después de la cual ℓ escala como $\ln(N)$ y el número promedio de nuevas aristas añadidas es mayor que 1. Similar al comportamiento de la *longitud de correlación* ξ en física estadística, se encuentra que en la transición de fase $N = \xi$ y $pk\xi \simeq 1$, i.e. $\xi \sim 1/pk$, por lo que la longitud de correlación para redes de mundo pequeño diverge conforme $p \rightarrow 0$ [31, 32], límite en el que ℓ escala como

$$\ell = \frac{N}{k} f(pkN), \quad (2.23)$$

donde la función de escalamiento $f(x)$ toma la forma

$$f(x) \sim \begin{cases} c = \text{cte} & \text{si } x \ll 1 \\ \frac{\ln(x)}{x} & \text{si } x \gg 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

Finalmente, el coeficiente de agrupamiento \mathcal{C} puede ser expresado en términos de aquel obtenido en redes $2k$ -regulares; en el modelo con reconexiones cada arista es reconectada con probabilidad p , y por lo tanto no es reconectada con probabilidad $(1-p)$. Si $p = 0$ se tiene una red regular, para la cual $\mathcal{C}(0) = 3(k-1)/2(2k-1)$ (Ec. (2.16)), por lo tanto para $p > 0$ dos nodos que fueron vecinos de i con $p = 0$, siguen siendo vecinos de i y siguen conectados entre ellos con probabilidad $(1-p)^3$, debido a que cada arista en este triángulo que permanece en su lugar colabora con un factor de $(1-p)$. Entonces $\mathcal{C}(p)$ puede ser expresado de manera aproximada como

$$\mathcal{C}(p) \approx \mathcal{C}(0)(1-p)^3 = \frac{3(k-1)}{2(2k-1)}(1-p)^3, \quad (2.25)$$

con correcciones del orden $1/N$. El coeficiente de agrupamiento en el caso de la versión sin reconexiones suma a las posibles conexiones entre los $2k$ vecinos de un nodo i aquellas nuevas conexiones que pueden aparecer por el hecho de añadir nuevas aristas a i [24],

$$\mathcal{C} = \frac{\frac{3k(k-1)}{2}}{\frac{2k(2k-1)}{2} + 2pk^2(p+2)} = \frac{3(k-1)}{2(2k-1) + 4kp(p+2)}. \quad (2.26)$$

Como se puede observar, en ambos modelos el coeficiente de agrupamiento \mathcal{C} aumenta en relación con el obtenido para la red $2k$ -regular. Conforme aumenta p , el número de vecinos de un nodo i aumenta y por ende, el número de posibles conexiones entre sus vecinos también.

2.2.4. Redes libres de escala

El formalismo de las funciones generadoras incluido en el Apéndice A.2 permite extender los resultados a un tipo de gráficas cuya distribución está dada por una ley de potencias conocidas como *redes libres de escala*⁹. Sin embargo, como es señalado por Barabási [25], “este mecanismo [mediante funciones generadoras] pospone una importante respuesta a cuál es el proceso responsable de la emergencia de una red libre de escala”; puesto que el propósito de este trabajo no es responder aquella pregunta¹⁰, bastará con crear redes cuya distribución en los grados obedezca una ley de potencias. La importancia de dicho tipo de redes se debe a que muchas redes reales presentan una distribución con ley de potencias en los grados de los nodos, uno de los ejemplos más representativos de estas redes es la *World Wide Web* (WWW) en donde los nodos representan las páginas en la red y las aristas entre cada par de nodos representa la existencia de hipervínculos entre ellos [18]. Algunos otros ejemplos pueden presentar características que no corresponden a una ley de potencias, tal es el caso de una red de colaboraciones entre actores que presenta una ley de potencias mas un corte exponencial [21].

Como se verá a continuación, una red de potencias pura puede ser considerada un caso particular de una ley de potencias con corte exponencial, la función de distribución en este caso se escribe como

$$p_k = Ck^{-\tau}e^{-k/\kappa} \quad \text{para } k \geq 1, \quad (2.27)$$

donde τ , κ y C son constantes. El corte exponencial hace que la distribución sea normalizable para todos los valores de τ y no sólo para $\tau \geq 2$, como es el caso de una distribución de ley de potencias pura. La constante de normalización está dada en términos de la función polilogarítmica o función de Jonquière $C = [\text{Li}_\tau(e^{-1/\kappa})]^{-1}$ definida como

$$\text{Li}_\tau(z) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\tau}. \quad (2.28)$$

La forma usual de encontrar la distribución con ley de potencias es sin el corte exponencial, esto es, tomando el límite $\kappa \rightarrow \infty$ en la Ec. (2.27). En este caso, la distribución de ley de potencias pura tiene la siguiente forma:

$$p_k = \begin{cases} 0 & \text{para } k = 0 \\ k^{-\tau}/\zeta(\tau) & \text{para } k \geq 1, \end{cases} \quad (2.29)$$

donde $\zeta(\tau)$ es la función ζ de Riemann.¹¹

⁹El término “libre de escala” se refiere a cualquier función $f(x)$ que permanece sin alteraciones ante un reescalamiento de la variable independiente x . Ciertamente $f(x)$ es una función con ley de potencias, ya que es la única solución de $f(ax) = bf(x)$ y por lo tanto “libre de escala” y “ley de potencia” se consideran sinónimos.

¹⁰Vagamente hablando, Barabási propone que el mecanismo responsable de una red libre de escala se debe a que si se añaden nuevos nodos, estos se conectan de manera preferencial con nodos de mayor grado; aquel mecanismo es llamado “enlazamiento preferencial” (*preferential attachment*, en inglés).

¹¹La función ζ de Riemann se define como sigue

$$\zeta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\tau}, \quad (2.30)$$

Como se verá en el capítulo 3 las redes de ley de potencias se analizan por separado de las redes aleatorias; sin embargo, las primeras son también redes aleatorias.

2.3. Sincronización

Puesto que en el presente trabajo se quiere analizar el fenómeno de sincronización en redes complejas, es importante entender lo que es la *sincronización*; en la presente sección se desarrollan los conceptos más importantes de sincronización y dos ejemplos que ayudarán a comprender la sincronización en sistemas conformados por muchos elementos. El primer ejemplo se concentra en una población de osciladores, analizado a partir del modelo de Kuramoto; el segundo estudia la sincronización en sistemas caóticos, partiendo del caso más simple de dos osciladores acoplados y continuando con la generalización al problema de sistemas de N osciladores acoplados. Otros ejemplos pueden ser consultados a detalle en [33].

Típicamente la oscilación de un sistema es representada mediante una variable $x(t)$ que describe cómo cambia el sistema. Si se trata de un péndulo, el ángulo respecto a la vertical es lo que cambia. Si es un sistema electrónico, $x(t)$ es la corriente a través de una resistencia o bien, podría tratarse de la intensidad en un láser. Sin embargo, para describir a dicho oscilador en un instante de tiempo, no es suficiente conocer $x(t)$. En el caso de los relojes de péndulo, se necesita conocer también la *velocidad angular*. En general, el comportamiento del sistema puede ser descrito por un par de coordenadas (x, y) en el **espacio fase**. Cuando la oscilación es periódica, se repetirá el estado del sistema después de un tiempo T , llamado **periodo**, lo cual implica que se tiene una curva cerrada en el plano $x - y$, llamada **ciclo límite**. Ante cualquier perturbación, si el sistema es estable regresará eventualmente a dicho ciclo. En algunas ocasiones es conveniente caracterizar el número de oscilaciones por unidad de tiempo mediante la **frecuencia cíclica** $f = 1/T$, sin embargo, en el estudio de la sincronización, la **frecuencia angular** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ resulta más conveniente.

Comparando el estado sincronizado de diversos sistemas oscilantes, como es el caso de los dos relojes de péndulo acoplados, revela que la sincronización se puede dar de dos formas: podría pasar que los péndulos se balanceen en la misma dirección, esto es, ambos a la izquierda alcanzan su amplitud máxima y regresan a la derecha de manera casi simultánea (Fig. 2.9a); o bien, ambos alcanzan su amplitud máxima pero del lado opuesto, y cuando se cruzan en el punto más bajo se mueven en sentidos opuestos (Fig. 2.9b). Para describir estas dos distintas dinámicas, se introduce un concepto clave en teoría de sincronización: la **fase** ϕ del oscilador.

Entonces la oscilación de dichos péndulos puede ser descrita, en el caso más simple, por una onda sinusoidal $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$, donde ω_0 denota la frecuencia angular relacionada con el periodo de oscilación por $\omega_0 = 2\pi/T$. La intensidad de la oscilación es descrita por la **amplitud** A (asociada al ángulo máximo φ_{\max} respecto a la vertical, en los péndulos). La cantidad $\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$ es la fase de oscilación, con ϕ_0 la fase inicial. En la Fig. 2.9, podemos observar dos ondas sinusoidales; en (a) la fase difiere muy poco mientras que en (b), la diferencia es casi π . De hecho, la fase continúa creciendo indefinidamente pero, debido a que la función seno es periódica, $\sin(\phi) = \sin(\phi + 2\pi)$, dos fases que difieren por 2π representan

la cual converge cuando $\text{Re}(\tau) > 1$. Nótese que, por ejemplo, $\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ es la serie armónica.

Como es de suponerse, la función polilogarítmica y la función ζ de Riemann están relacionadas por $\text{Li}_\tau(1) = \zeta(\tau)$.

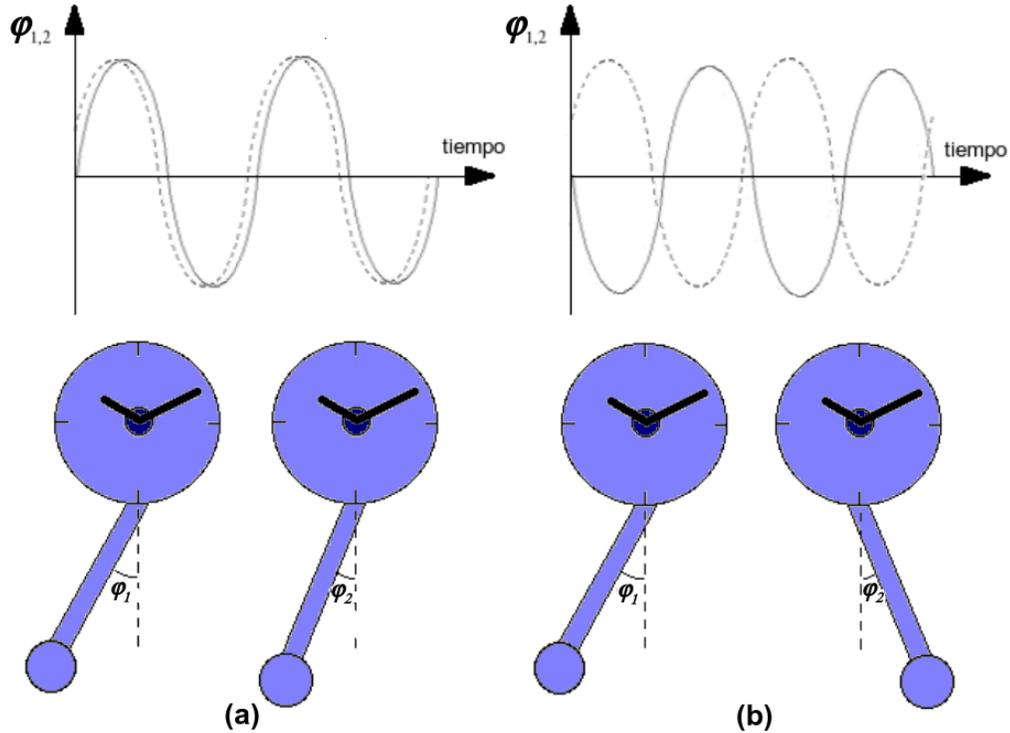


Figura 2.9: Posible formas de sincronización: los relojes de péndulo se sincronizan en fase **(a)** i.e., con la diferencia de fases $\phi_1 - \phi_2 \approx 0$, o en antifase **(b)**, con $\phi_1 - \phi_2 \approx \pi$

el mismo estado en el espacio fase.

Consideremos un sistema disipativo N -dimensional ($N \geq 2$) de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \quad (2.31)$$

y supongamos que el sistema tiene una solución periódica estable (de periodo T_0) $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(t + T_0)$. En el espacio fase (el espacio construido con todas las variables de \mathbf{x}), la solución es el *ciclo límite*.

Nuestro propósito es describir dicho sistema en términos de la fase. Para ello, introducimos la fase ϕ como la coordenada a lo largo del ciclo límite, la cual incrementa 2π en cada rotación. Adicionalmente, pedimos que la fase aumente uniformemente con el tiempo

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0, \quad (2.32)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T_0$ es la frecuencia de las oscilaciones autosostenidas. Llamaremos a dicha frecuencia la *frecuencia natural*, indicando que es aquella que el sistema tiene antes de ser influenciado por el acoplamiento o por una fuerza externa.

Las variables \mathbf{x} del sistema en el ciclo son funciones 2π -periódicas de la fase. Además es importante resaltar que una perturbación de la fase permanece constante: no crece ni decae. En términos de estabilidad significa que el ciclo límite tiene un exponente de Lyapunov igual

a cero en la dirección longitudinal a la trayectoria. Esto refleja también la propiedad de los sistemas dinámicos autónomos de ser invariantes ante traslaciones en el tiempo: si $\mathbf{x}(t)$ es solución, entonces $\mathbf{x}(t + \Delta t)$ es también solución. Además, el incremento en t de Δt es equivalente a un incremento en la fase $\Delta\phi = \omega_0\Delta t$

2.3.1. Sincronización de osciladores acoplados

El caso de dos osciladores acoplados, como el par de péndulos descritos anteriormente, así como otros problemas simples se exponen formalmente en [33]. En esta sección únicamente se menciona el formalismo utilizado para analizar poblaciones de N osciladores acoplados de forma global, es decir, en donde cada oscilador es influenciado con la misma intensidad por el resto. Generalmente los sistemas de osciladores no forman una red regular¹², por el contrario, se encuentran espacialmente desordenados; se puede uno referir a dichos sistemas como ensambles o poblaciones de osciladores acoplados. En estos sistemas, es común estudiar el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$, con lo cual se heredan conceptos utilizados en mecánica estadística; existe una analogía entre las transiciones de fase fuera de equilibrio y la transición a la sincronización en ensambles de osciladores.

El modelo de Kuramoto

Se analiza en esta sección un modelo de N osciladores acoplados globalmente con diferentes frecuencias naturales ω_k , introducido por Kuramoto [35]. El acoplamiento más simple está dado por una función periódica cuyo argumento es la diferencia de fase de los osciladores:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \text{sen}(\phi_j - \phi_k). \quad (2.33)$$

El primer término es la frecuencia natural del k -ésimo oscilador (ver la Ecuación 2.32), mientras que el segundo término es el acoplamiento entre cada par de osciladores y, en este caso, es proporcional a $1/N$; la intensidad de dicho acoplamiento es determinada por el parámetro ε : sólo en este caso se obtiene un resultado independiente de N en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$. Si el acoplamiento entre cada par de osciladores fuese independiente de N (sin normalizar la intensidad del acoplamiento ε), entonces la fuerza ejercida sobre cada uno crecería con el tamaño del sistema por lo que en el límite $N \rightarrow \infty$ la fuerza sobre cada nodo es infinita y, obviamente, habría sincronización. Las frecuencias naturales de los osciladores deben estar distribuidas en algún rango, cuando $N \rightarrow \infty$ podemos escribir dicha distribución mediante una densidad simétrica $g(\bar{\omega})$, donde $\bar{\omega}$ representa la frecuencia promedio.

Para analizar el presente problema, introducimos el **campo medio** de la población de

¹²En sistemas ordenados en un arreglo regular (*lattice*, en inglés), se estudia el acoplamiento a k -vecinos, es decir, los osciladores interactúan únicamente con sus $2dk$ primeros vecinos, donde d es la dimensión del arreglo [34].

osciladores como sigue:

$$\begin{aligned}
Z = X + iY &= K e^{i\Theta} = K (\cos(\Theta) + i \operatorname{sen}(\Theta)) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\phi_k} \\
&= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \cos(\phi_k) + i \sum_{k=1}^N \operatorname{sen}(\phi_k) \right).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

El campo medio tiene amplitud K y fase Θ .

La sincronización del sistema indica coherencia en las frecuencias de los osciladores. De hecho, si las frecuencias son diferentes, en algún momento las fases ϕ_k están uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 2\pi)$ y el campo medio desaparece. En contraste, si las frecuencias de algunos osciladores coinciden, entonces sus campos se suman coherentemente y el campo medio es distinto de cero. En analogía con la transición de fase ferromagnética, el campo medio magnético aparece debido a las correlaciones entre las direcciones de los momentos magnéticos elementales (spines). Entonces, la amplitud del campo medio en (2.34) puede ser tomada como parámetro de orden natural para la transición al estado sincronizado.

Regresando a la Ec. (2.33), podemos escribirla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_k}{dt} &= \omega_k + \frac{\varepsilon}{N} \left(\sum_{j=1}^N \operatorname{sen}(\phi_j) \cos(\phi_k) - \cos(\phi_j) \operatorname{sen}(\phi_k) \right) \\
&= \omega_k + \frac{\varepsilon}{N} \left(\cos(\phi_k) \sum_{j=1}^N \operatorname{sen}(\phi_j) - \operatorname{sen}(\phi_k) \sum_{j=1}^N \cos(\phi_j) \right) \\
[\text{por (2.34)}] &= \omega_k + \varepsilon K (\cos(\phi_k) \operatorname{sen}(\Theta) - \operatorname{sen}(\phi_k) \cos(\Theta)) \\
&= \omega_k + \varepsilon K \operatorname{sen}(\Theta - \phi_k).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Por lo encontrado en (2.35), la Ec. (2.33) puede ser reescrita como un sistema de osciladores forzados por el campo medio

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon K \operatorname{sen}(\Theta - \phi_k). \tag{2.36}$$

El forzamiento desaparece cuando el campo medio es nulo; dicho estado no coherente, es siempre solución del sistema (2.33). Como se dijo antes, esto se debe a que cada elemento del ensamble oscila con su propia frecuencia lo cual implica que las fases están uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 2\pi)$. Si por el contrario, el campo medio es distinto de cero, se debe a que dicho forzamiento sincroniza a algunos osciladores coherentemente lo cual contribuye al propio campo medio. Analicemos dicho argumento de forma analítica: Suponemos que el campo medio oscila con la frecuencia central $\bar{\omega}$ asociada a la distribución $g(\bar{\omega})$, que es simétrica. En analogía con la teoría del campo medio en transiciones de fase de segundo orden, se derivarán condiciones de autoconsistencia. Entonces, sea

$$\Theta = \bar{\omega}t, \quad K = \text{constante}, \quad \psi_k = \phi_k - \bar{\omega}t.$$

Se obtiene a partir de la Ec. (2.36) que [33]:

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \omega_k - \bar{\omega} - \varepsilon K \sin \psi_k, \quad (2.37)$$

donde ψ_k es la diferencia entre la fase del k -ésimo oscilador y la fase del campo medio. La Ec. (2.37) tiene solución síncrona y asíncrona:

(a) La solución síncrona,

$$\psi_k = \sin^{-1} \frac{\omega_k - \bar{\omega}}{\varepsilon K}, \quad (2.38)$$

corresponde a aquellos osciladores que se sincronizan con el campo medio. La solución existe si la frecuencia natural del oscilador k -ésimo está cercana a $\bar{\omega}$: $|\bar{\omega} - \omega_k| \leq \varepsilon K$. El estado sincronizado en el cual todos los osciladores del sistema presentan la misma fase se conoce como **sincronización en fase**.

(b) La solución asíncrona corresponde a los osciladores cuyas frecuencias naturales cumplen que $\bar{\omega}$: $|\bar{\omega} - \omega_k| > \varepsilon K$. En este caso las fases ϕ_k no se encuentran uniformemente distribuidas.

Las contribuciones al campo medio de los grupos de osciladores sincronizados y de los no sincronizados son calculadas en [33]. Para ello se necesita conocer la distribución de la diferencia de fase $n(\psi)$ para calcular las Ecs. (2.34) en el límite $N \rightarrow \infty$. Debido a que se tienen dos tipos de soluciones, se descompone aquella distribución en dos partes: la asociada a la solución síncrona $n_s(\psi)$ y a la solución asíncrona $n_{as}(\psi)$.

2.3.2. Sincronización en sistemas caóticos acoplados

En la presente sección se describen algunas propiedades de la sincronización en sistemas caóticos acoplados. La presencia de *caos* en sistemas dinámicos se relaciona con la *impredecibilidad* del propio sistema y por ende, con la complejidad del atractor asociado a su espacio fase. Se inicia con la construcción de un modelo simple basado en mapeos unidimensionales donde se analizará la transición al estado sincronizado. Más adelante, se describe un modelo con N osciladores caóticos. Como se comenta en el Apéndice B.3, los mapeos unidimensionales son el ejemplo más simple donde puede presentarse caos¹³.

Sincronización completa. Dos mapeos acoplados

Un mapeo unidimensional de la forma

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (2.39)$$

representa un sistema dinámico donde cada iteración es un paso de tiempo, i.e. el tiempo es discreto $n = 1, 2, \dots$, sin embargo, la variable de estado x es continua.¹⁴

¹³Se remite también al lector a la Ref. [36] donde se encontrará un análisis detallado de la teoría del caos así como algunos métodos para cuantificarlo.

¹⁴El lector no familiarizado con el tema, puede encontrar un análisis detallado de los mapeos en el Apéndice B.3.

Consideremos dos sistemas x y y

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= F_1(x_n), \\y_{n+1} &= F_2(y_n),\end{aligned}\tag{2.40}$$

donde $F_1 = F_2 = F$ es un mapeo caótico unidimensional (por ejemplo, un mapeo logístico) descrito a detalle en el Apéndice B.3. En el caso de dos sistemas independientes (sin interacción) se observan dos procesos caóticos sin ninguna correlación. Acoplemos ahora los dos sistemas; esto se puede hacer de muchas formas y cualquier término del lado derecho de la ecuación que contenga un término del tipo xy añade acoplamiento, sin embargo nos interesa acoplarlos de un modo tal que se tengan propiedades físicas relevantes: (a) que el acoplamiento tienda a acercar los estados x y y y, (b) que no se altere el estado síncrono $x = y$, el cual es simétrico.

Una forma sencilla de expresar el acoplamiento es mediante un operador lineal \hat{L}

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix},\tag{2.41}$$

donde $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. El caso más simple se tiene cuando $\alpha = \beta = \varepsilon$, con lo cual se obtiene

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{pmatrix}.\tag{2.42}$$

Al combinar el acoplamiento (2.42) con los mapeos no lineales (2.40) se obtiene

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x_n) \\ F(y_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon)F(x_n) + \varepsilon F(y_n) \\ \varepsilon F(x_n) + (1 - \varepsilon)F(y_n) \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.43}$$

Es importante notar que el sistema (2.43) es simétrico ante el intercambio de variable $x \leftrightarrow y$, debido a la elección del acoplamiento.

Se observan diferentes dinámicas en (2.43) dependiendo del valor del parámetro de acoplamiento ε : cuando $\varepsilon = 0$, las variables x y y son completamente independientes. Si $\varepsilon = 1/2$, en pocas iteraciones las dos variables x y y se vuelven idénticas y se observa el estado $x_n = y_n$ para todo tiempo n posterior. Puesto que el acoplamiento ya no afecta este estado, la dinámica de ambos sistemas es caótica. Dicho régimen, en el cual cada sistema presenta caos y son idénticos en el tiempo, es llamado **sincronización completa**, en contraste con la sincronización en fase definida en la sección anterior. Si el parámetro de acoplamiento ε es visto como un parámetro de bifurcación que se incrementa gradualmente desde cero, se puede observar que existe un valor crítico ε_c a partir del cual se alcanza el estado síncrono $x = y$.

Para caracterizar de mejor manera la transición al estado sincronizado con $\varepsilon = \varepsilon_c$, es conveniente introducir nuevas variables

$$U = \frac{x + y}{2}, \quad V = \frac{x - y}{2}.\tag{2.44}$$

En el estado sincronizado, la variable V desaparece y $U = x = y$. Si se grafican los valores de x y y en el plano $(x - y)$, los estados sincronizados caen sobre la identidad y los no

sincronizados fuera de ella. Entonces, podemos ver a la variable U dirigida a lo largo de la recta $x = y$, mientras que la variable V corresponde a la dirección transversal a dicha recta.

Debido a que V es la variable transversal, la condición de sincronización corresponde al estado $V = 0$ que, como ya se dijo, corresponde a la diagonal $x = y$, la cual es un *atractor*. De dicha condición de estabilidad debe obtenerse el valor de ε_c . Entonces, la estabilidad del estado síncrono puede ser descrita como la estabilidad transversal del atractor simétrico. (Para el lector no familiarizado con el tema, se incluye en el Apéndice B.2 un breve resumen sobre atractores.)

Reescribiendo el sistema (2.40) en términos de las variables U y V , se tiene

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{1}{2} [F(U_n + V_n) + F(U_n - V_n)], \\ V_{n+1} &= \frac{1 - 2\varepsilon}{2} [F(U_n + V_n) - F(U_n - V_n)]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

A continuación, linealizamos este sistema cerca del estado completamente sincronizado U_n , $V = 0$ y obtenemos mapeos lineales para las pequeñas perturbaciones u y v

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= F'(U_n)u_n, \\ v_{n+1} &= (1 - 2\varepsilon)F'(U_n)v_n. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Dicho sistema debería de resolverse junto con el mapeo no lineal que gobierna la dinámica caótica

$$U_{n+1} = F(U_n). \quad (2.47)$$

Debido a que en la aproximación lineal la perturbación longitudinal (u) y transversal (v) no interactúan, pueden ser tratadas por separado. Las ecuaciones linealizadas (2.46) describen el crecimiento o decaimiento de las perturbaciones del estado caótico, y aquéllos son descritos cuantitativamente por los exponentes de Lyapunov del sistema (en el Apéndice B.4.2 se puede encontrar la definición formal de los exponentes de Lyapunov), los cuales pueden ser simplemente definidos por el promedio logarítmico del crecimiento de u y v :

$$\lambda_u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_n| - \ln |u_0|}{n} = \langle \ln |F'(U)| \rangle \quad (2.48)$$

$$\lambda_v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |v_n| - \ln |v_0|}{n} = \ln |1 - 2\varepsilon| + \langle \ln |F'(U)| \rangle. \quad (2.49)$$

En donde se reemplaza el promedio en el tiempo con el promedio respecto a la medida invariante, denotada por los signos $\langle \cdot \rangle$. De (2.46) se observa que la perturbación u es sólo la perturbación del mapeo (2.47), por lo tanto el exponente de Lyapunov longitudinal λ_u es el exponente de Lyapunov λ del sistema caótico desacoplado. El exponente de Lyapunov transversal λ_{\perp} se relaciona con λ como

$$\lambda_{\perp} = \ln |1 - 2\varepsilon| + \lambda. \quad (2.50)$$

Por lo tanto, el criterio de estabilidad puede ser formulado como sigue:

- $\lambda_{\perp} > 0$: el estado sincronizado es inestable,
- $\lambda_{\perp} < 0$: el estado sincronizado es estable.

Entonces el umbral de estabilidad está definido por la condición $\lambda_{\perp} = 0$ en donde

$$\ln |1 - 2\varepsilon_c| = -\lambda \Rightarrow \varepsilon_c = \frac{1 - e^{-\lambda}}{2}. \quad (2.51)$$

Por ejemplo, para el mapeo logístico, el exponente de Lyapunov es $\lambda = \ln 2$ y $\varepsilon_c = 1/4$.

N mapeos idénticos

La generalización del caso analizado en la sección anterior es estudiar la sincronización completa en ensambles de osciladores de osciladores caóticos. Consideremos N mapeos caóticos idénticos acoplados linealmente. Representamos el acoplamiento mediante el operador lineal \hat{L} dado por una matriz de $N \times N$, entonces tenemos

$$x_{n+1}^k = \sum_{j=1}^N L_{kj} F(x_n^j). \quad (2.52)$$

La condición del acoplamiento, nuevamente, debe acercar a los estados, lo cual se relaciona con que sea disipativo. En este caso, dicha condición debe satisfacer que (a) el sistema posee una solución simétrica completamente sincronizada donde los estados de todos los subsistemas son idénticos: $x_n^1 = x_n^2 = \dots = x_n^N = U_n$. Este caso se asocia al eigenvector $\mathbf{v}_1 = (1, \dots, 1)$ y eigenvalor $\sigma_1 = 1$ de la matriz \hat{L} . La otra condición debe satisfacer que los demás eigenvalores de \hat{L} , en valor absoluto, son menores que 1. Esto provoca el amortiguamiento de perturbaciones inhomogéneas debido al acoplamiento.

La estabilidad del estado sincronizado puede ser determinada linealizando la Ec. (2.52). En este caso, a diferencia de lo visto en la sección anterior, hay muchos modos transversales, y el máximo exponente de Lyapunov da la condición de estabilidad.

Cuando los osciladores están acoplados globalmente, cada elemento interactúa con todos los demás, por lo que es conveniente normalizar la constante de acoplamiento por N . Las ecuaciones resultantes son

$$x_{n+1}^k = (1 - \varepsilon)F(x_n^k) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N F(x_n^j), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.53)$$

El sistema (2.53) es comúnmente llamado sistema de mapeos globalmente acoplados [34], o sistema con acoplamiento de campo medio, debido a que el segundo término del lado derecho es el promedio sobre todos los elementos del ensamble.

La matriz de interacción \hat{L} puede ser representada en la forma

$$\hat{L} = (1 - \varepsilon)\hat{I} + \frac{\varepsilon}{N}\hat{J},$$

donde \hat{I} representa la matriz identidad y \hat{J} aquella con todos sus elementos igual a 1. En este caso los eigenvalores pueden ser calculados directamente: un eigenvalor es 1 y el resto es $1 - \varepsilon$, $N - 1$ degenerado. Entonces, la condición de estabilidad es

$$\lambda + \ln |1 - \varepsilon| < 0, \quad (2.54)$$

donde λ es el exponente de Lyapunov del mapeo local.

Ejemplo

El primer problema que uno se encuentra para extender las ideas expuestas en la teoría de sincronización a sistemas de osciladores caóticos es el problema de definir la fase. Se había definido antes como una variable para parametrizar las oscilaciones periódicas a lo largo del ciclo límite, creciendo con el tiempo como $\phi(t) = \phi_0 + \omega t$, donde ω es la frecuencia angular definida en términos del periodo de oscilación como $\omega = 2\pi/T$. De esta forma la fase gira uniformemente a lo largo de la dirección neutralmente estable (i.e., con exponente de Lyapunov igual a cero) en el espacio fase. Para extender la fase a este caso se debe, por un lado, describir correctamente la fase en una órbita periódica (de periodo 1), pero también producir resultados razonables en órbitas con múltiples periodos comunes en atractores caóticos; de igual forma es importante que tenga un significado físico claro.

Si se construye una **sección de Poincaré** para un sistema caótico continuo, i.e. una superficie transversal a las trayectorias dibujadas por el atractor caótico extraño, entonces para cada punto que cruza la sección transversal se define la fase como una función lineal del tiempo de modo tal que cada nuevo punto en la superficie gana una fase de 2π :

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (2.55)$$

donde t_n es el tiempo que toma a una trayectoria cruzar por n -ésima vez la sección de Poincaré¹⁵. La fase definida de este modo es equivalente a aquella en la Ec. (2.32) para trayectorias de periodo 1, las cuales cruzan en un sólo punto la sección transversal. Para una órbita con periodo T (equivalente a decir que la sección de Poincaré es atravesada T veces por el atractor), el incremento de la fase de acuerdo a la Ec. (2.55) es $\phi(T) - \phi(0) = 2\pi\mathcal{N}$, donde \mathcal{N} es el número de veces que es cruzada la superficie por la órbita; por lo tanto, la definición de la fase definida arriba provee del valor correcto de la frecuencia. Nótese que \mathcal{N} es también el periodo de la órbita asociada al mapeo de Poincaré; a veces es llamado **periodo topológico**.

Debido a que la fase en (2.55) es localmente proporcional al tiempo, una perturbación no crece ni decrece. Por lo tanto corresponde al exponente de Lyapunov cero. Además, dicha fase cuenta el número de “vueltas” del oscilador caótico, donde cada vuelta es definida en términos del mapeo de Poincaré elegido, esto es, cada iteración del mapeo equivale a un ciclo del sistema dinámico continuo. En términos del mapeo, la frecuencia promedio asociada es entonces el número de veces que la sección de Poincaré es atravesada (número de ciclos) por unidad de tiempo.

La fase definida de este modo resulta muy importante cuando se reduce un sistema continuo a un mapeo de Poincaré discreto. Para ilustrar su importancia veamos un ejemplo concreto con un sistema dinámico continuo dado por las ecuaciones de Rössler tridimensio-

¹⁵Para ver a detalle la superficie de Poincaré se remite al lector a la Ref. [37].

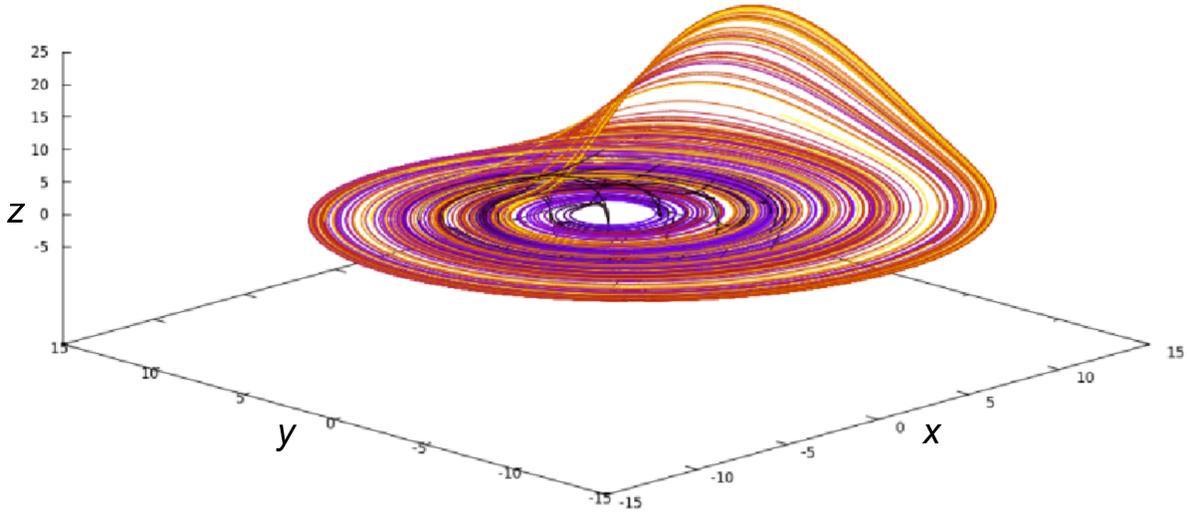


Figura 2.10: Conjunto atractor obtenido de las ecuaciones de Rossler. En este sistema se encuentra un punto fijo en $(0, 0, 0)$. Gráfica generada en *Gnuplot*.

nales:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z, \quad (2.56a)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay, \quad (2.56b)$$

$$\frac{dz}{dt} = b + xz + cz, \quad (2.56c)$$

donde los parámetros usualmente se eligen como $a = 0.17$, $b = 0.4$ y $c = -8.5$. El atractor extraño producido por dichas ecuaciones se muestra en la Fig. 2.10. Una elección adecuada de la superficie de Poincaré para el cálculo de la fase de acuerdo a la Ec. (2.55) puede ser el medio plano $y = 0$, $x < 0$. Es fácil ver que una proyección del atractor sobre el plano (x, y) dibuja un ciclo límite con rotaciones bien definidas alrededor del punto fijo $(0, 0, 0)$. En este y otros casos similares se puede definir el ángulo θ mediante la transformación a coordenadas polares (con el origen coincidiendo con el centro de rotación) como:

$$\theta = \arctan(y/x). \quad (2.57)$$

La variable θ puede ser considerada como un estimado de la fase ϕ . Si bien ϕ y θ no coinciden microscópicamente (en una escala de tiempo menor que un periodo característico de oscilación), proveen las mismas frecuencias promedio: la frecuencia promedio definida por el promedio temporal $\langle d\theta/dt \rangle$, coincide con la frecuencia determinada a partir del número promedio de veces que la sección de Poincaré es atravesada por unidad de tiempo.

Para concluir, es importante recordar que la fase en sistemas caóticos se asocia, como se dijo antes, al exponente de Lyapunov cero del sistema. Los exponentes cero existen únicamente en sistemas dinámicos continuos autónomos, esto es, si el atractor no es un punto fijo, y en todos estos sistemas es posible producir una perturbación pequeña o grande a lo

largo de la trayectoria de modo que no crezca ni decrezca. Esta propiedad es fundamental en sincronización, pues hace posible que las fases de dos osciladores (o un oscilador acoplado a una fuerza externa) se ajusten. Otro ejemplos pueden encontrarse en [33]. Por otro lado, los sistemas dinámicos discretos generalmente no tienen exponente de Lyapunov cero, sin importar el tipo de atractor (periódico o caótico); por lo tanto la noción de fase no es aplicable en estos casos.

2.3.3. Estabilidad del estado sincronizado

El análisis de estabilidad del estado sincronizado, similar al mostrado en la Sección 2.3.2, considera una perturbación lineal al estado completamente sincronizado, dicho formalismo se inició con el trabajo de Barahona y Pecora [38] al analizar la estabilidad de la sincronización en redes de mundo pequeño utilizando la ecuación maestra de estabilidad (*master stability equation*, en inglés), aunque la teoría había sido desarrollada años antes para el estudio de la sincronización en redes regulares o en configuraciones más simples [39].

Cuando los elementos de un sistema presentan *sincronización completa*, visitan todos el mismo estado al mismo tiempo. La pregunta que se hace uno es si este estado es *estable* ante pequeñas perturbaciones y, si lo es, cuál es su relación con la intensidad del acoplamiento. De manera general se obtiene la llamada ecuación maestra de estabilidad que permite calcular la estabilidad (asociada a una medida de estabilidad, como los exponentes de Lyapunov) para una elección particular de la dinámica de los osciladores (por ejemplo, las ecuaciones de Lorenz) y una elección particular de la(s) variable(s) de acoplamiento. Con ello se genera el diagrama de estabilidad con el cual se pueden predecir cambios en la dinámica [39]. Dicho diagrama también hace evidente por qué para ciertas topologías se tiene un límite superior en el número de nodos que puede alcanzar un estado sincronizado estable. Las suposiciones que se hacen en dicho análisis son:

- (1) La dinámica de los osciladores es idéntica en el sentido que todos los nodos se rigen por el mismo sistema dinámico.
- (2) Se utiliza la misma función de las componentes para acoplar a un nodo con los demás.
- (3) La variedad de sincronización es una variedad invariante.
- (4) El acoplamiento arbitrario entre los nodos es aproximado de buena forma cerca del estado sincronizado por un operador lineal.

Las suposiciones (1) y (3) garantizan la existencia del hiperplano de sincronización en el espacio fase. (2) hace único el diagrama de estabilidad dada la elección del sistema dinámico y la(s) componente(s) de acoplamiento, y (4), se elige así puesto que es la forma más simple y ha resultado ser una buena aproximación en el estudio de muchos sistemas acoplados [39].

Consideremos N osciladores acoplados en una red con matriz de adyacencia $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Sea \mathbf{x}^i el vector m -dimensional de variables dinámicas del nodo i -ésimo regido por la ecuación sin el acoplamiento

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{F}(\mathbf{x}^i). \quad (2.58)$$

Sea $\mathbf{H} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función arbitraria de las variables de cada nodo usadas en el acoplamiento. Entonces la ecuación que gobierna la dinámica del i -ésimo nodo, expresada en

términos de la matriz de adyacencia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y la matriz diagonal $\mathbf{D} = (D_{ij})$ (ver Sección 2.1.2) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^i &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^i) + \varepsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} w_{ij} [\mathbf{H}(\mathbf{x}^j) - \mathbf{H}(\mathbf{x}^i)] \\ \left[\sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{j=1}^N D_{ij} \right] &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^i) + \varepsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} w_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}^j) - \varepsilon \sum_{j=1}^N D_{ij} w_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}^i) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^i) - \varepsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}^j), \end{aligned} \quad (2.59)$$

donde ε es la intensidad del acoplamiento y \mathbf{G} es la matriz de acoplamiento con $G_{ij} = -a_{ij}w_{ij}$ si $i \neq j$ y $G_{ii} = \sum_j a_{ij}w_{ij} = \sum_j D_{ij}w_{ij}$ donde $w_{ij} \geq 0$. En particular, si la red no tiene pesos (ó $w_{ij} = 1 \forall i, j$), la matriz \mathbf{G} es la matriz laplaciana \mathbf{L} y por lo tanto es fácil ver que $L_{ij} = -a_{ij}$ y $L_{ii} = \sum_j a_{ij} = \sum_j D_{ij} = D_{ii}$, que es la definición de \mathbf{L} (ver Sección 2.1.2). El estado *completamente sincronizado* $\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{x}^2(t) = \dots = \mathbf{x}^N(t) = \mathbf{s}(t)$, es solución de la ecuación (2.59). En este estado sincronizado, $\mathbf{s}(t)$ también es solución de la ecuación (2.58), i.e., $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{F}(\mathbf{s})$. Este subespacio en el espacio fase de la Ec. (2.59) es llamado la **variedad de sincronización**.

Para probar la estabilidad de la variedad de sincronización ante ligeras perturbaciones $\delta\mathbf{x}^i$ necesitamos ver si éstas crecen o decaen en el tiempo. La evolución lineal de dichas perturbaciones puede ser obtenida si se redefine \mathbf{x}^i en (2.59) como $\mathbf{x}^i(t) = \mathbf{s}(t) + \delta\mathbf{x}^i$ y se expande a \mathbf{F} y \mathbf{H} a primer orden en series de Taylor, i.e., $\mathbf{F}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{F}(\mathbf{s}) + D\mathbf{F}(\mathbf{s})\delta\mathbf{x}^i$ y $\mathbf{H}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{H}(\mathbf{s}) + D\mathbf{H}(\mathbf{s})\delta\mathbf{x}^i$. Esta expansión resulta en las siguientes ecuaciones variacionales para $\delta\mathbf{x}^i$:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}^i = D\mathbf{F}(\mathbf{s})\delta\mathbf{x}^i - \varepsilon D\mathbf{H}(\mathbf{s}) \sum_{j=1}^N G_{ij} \delta\mathbf{x}^j \quad (2.60)$$

Como $\mathbf{H} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, observamos que las ecuaciones (2.60) presentan una estructura en bloques, donde cada bloque tiene m componentes. Debido a que nos interesa conocer la estabilidad del estado sincronizado nos concentraremos en las perturbaciones transversales a la variedad de sincronización, si decaen en el tiempo es un indicativo de estabilidad. Para separar las perturbaciones transversales de la longitudinal, proyectamos el estado $\delta\mathbf{x} = (\delta\mathbf{x}^1, \delta\mathbf{x}^2, \dots, \delta\mathbf{x}^N)$ sobre el espacio generado por los eigenvectores de la matriz \mathbf{G} . Dicha proyección no altera la estructura dentro de los bloques. De este modo, la ecuación (2.60) puede ser diagonalizada en N eigenmodos independientes

$$\dot{\xi}_{(k)} = [D\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \varepsilon\gamma_k D\mathbf{H}(\mathbf{s})]\xi_{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.61)$$

donde γ_k son los eigenvalores de \mathbf{G} . En periodos cortos de tiempo, se supone que \mathbf{s} casi no varía, por lo que las soluciones de las ecuaciones desacopladas están dadas por

$$\xi_{(k)}(t) = \xi_{(k)}(0) \exp([D\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \varepsilon\gamma_k D\mathbf{H}(\mathbf{s})]t), \quad (2.62)$$

donde $\xi_{(k)}(0)$ es la perturbación inicial. Dependiendo del signo de la parte real de la cantidad $\lambda_{(k)} = D\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \varepsilon\gamma_k D\mathbf{H}(\mathbf{s})$, se observará si la perturbación, en la dirección del eigenvector

asociado, crece o decrece en el tiempo. La ecuación variacional asociada a $k = 1$ corresponde a la variedad de sincronización, para la cual $\lambda_{(1)} = D\mathbf{F}(\mathbf{s})$ se asocia a la evolución de cada nodo sin acoplamiento¹⁶. De este modo ha sido posible separar las direcciones transversales a la variedad de sincronización correspondientes a los demás valores de $k = 2, \dots, N$. Para que el estado sincronizado sea *estable*, todas estas componentes deben decrecer, i.e., $\lambda_{(k)} < 0$, $k = 2, \dots, N$, para todos los valores del estado sincronizado \mathbf{s} tomados durante su evolución.

Los jacobianos $D\mathbf{F}$ y $D\mathbf{H}$ son los mismos para todos los bloques debido a que son evaluados en el estado sincronizado, por lo cual lo único en que difieren las k ecuaciones en (2.61) es en el valor de $\varepsilon\gamma_k$. Esto lleva a la siguiente formulación de la *ecuación maestra de estabilidad* (EME) genérica

$$\dot{\xi} = [D\mathbf{F}(\mathbf{s}) - (\alpha + i\beta)D\mathbf{H}(\mathbf{s})]\xi \quad (2.63)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se plantea así debido a que \mathbf{G} puede tener eigenvalores complejos en los casos donde el acoplamiento entre nodos no es simétrico, esto es, en gráficas dirigidas. Considerando una matriz de acoplamiento simétrica ($\beta = 0$), se calcula su respectiva *función maestra de estabilidad* (FME) como sigue,

$$\lambda_{\max}(\alpha) = \max(D\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \alpha D\mathbf{H}(\mathbf{s})), \quad (2.64)$$

donde el máximo es tomado sobre la trayectoria definida por $d\mathbf{s}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{s}(t))$ en la dirección de máximo crecimiento. La condición de estabilidad del estado sincronizado se traduce a tener a todos los $\varepsilon\gamma_k$, $k = 2, \dots, N$ en la región negativa de la FME, i.e. $\lambda_{\max}(\varepsilon\gamma_k) \leq 0$. En la literatura se consideran dos casos de estabilidad tratados de diferente manera: el primero corresponde al caso donde la FME está acotada, es decir $\lambda_{\max}(\alpha) < 0$ con $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, i.e. $\alpha_1 < \varepsilon\gamma_2 \leq \varepsilon\gamma_3 \leq \dots \leq \varepsilon\gamma_N < \alpha_2$. Esto se escribe también mediante una condición algebraica para la cual $\gamma_N/\gamma_2 < \alpha_2/\alpha_1$, donde γ_2 es el menor eigenvalor distinto de cero, ya que $\gamma_1 = 0$ debido a la condición $\sum_j G_{ij} = 0$ [38]. Es importante notar que esta condición no involucra la intensidad de acoplamiento ε , por lo tanto existen redes que *nunca* se sincronizan sin importar qué tan grande es ε ; este caso lo llamaremos de *Tipo 1*. El segundo caso es aquel donde la FME *no* está acotada, y $\lambda_{\max}(\alpha) < 0$ para $\alpha_1 < \alpha$. Este caso implica que la variedad de sincronización es estable si ε es lo suficientemente grande ($\varepsilon > \alpha_1/\gamma_2$); este caso es llamado de *Tipo 2*.

Para mapeos discretos unidimensionales el análisis es similar con un cambio obvio en la notación. La dinámica del i -ésimo nodo (similar a la Ec. (2.59)) está dada por:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^i &= F(x_n^i) + \varepsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} w_{ij} [F(x_n^j) - F(x_n^i)] \\ &= F(x_n^i) - \varepsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} F(x_n^j), \end{aligned} \quad (2.65)$$

Consideremos la solución del estado sincronizado $x_n^1 = x_n^2 = \dots = x_n^N = s_n$ y el estado perturbado

$$x_n^i = s_n + \delta x_n \quad (2.66)$$

¹⁶Si $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ es caótica, $\lambda_{(1)} > 0$.

para una δ suficientemente pequeña. Nos interesa saber si x_n^i , expresado de esta manera, es solución de (2.65). Consideramos también la expansión de F alrededor de $\delta = 0$ dada por $F(x_n^i) = F(s_n) + DF(s_n)\delta x_n^i$ y sustituimos ambas en (2.65). A continuación se proyecta el estado $\delta x_n = (\delta x_n^1, \delta x_n^2, \dots, \delta x_n^N)$ sobre el k -ésimo eigenvector de \mathbf{G} obteniendo

$$\begin{aligned}\xi_{n+1,(k)} &= [DF(s_n) - \varepsilon\gamma_k DF(s_n)]\xi_{n,(k)} \\ &= (1 - \varepsilon\gamma_k)DF(s_n)\xi_{n,(k)},\end{aligned}\tag{2.67}$$

de esta manera se obtienen N modos asociados a cada valor de k ($k = 1, 2, \dots, N$). Las ecuaciones en (2.67) difieren sólo por el factor $\varepsilon\gamma_k$ por lo que se puede plantear la EME genérica para el caso discreto como

$$\xi_{n+1} = (1 - \alpha)DF(s_n)\xi_n = J(\alpha, s_n)\xi_n = J^n\xi_0,\tag{2.68}$$

donde n es la iteración y $J^n = \prod_{l=0}^{n-1} J(\alpha, s_l)$. Se ha supuesto que la matriz Laplaciana es simétrica de modo que $\alpha \in \mathbb{R}$. Como se dijo antes, si todos los eigenmodos son menores que cero, entonces la variedad de sincronización es estable. Dicha condición de estabilidad asociada a los exponentes de Lyapunov es

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \frac{\xi_{T,(k)}}{\xi_{0,(k)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \prod_{n=0}^{T-1} \frac{\xi_{n+1,(k)}}{\xi_{n,(k)}} < 0,$$

y sustituyendo (2.67) se obtiene

$$\ln |1 - \varepsilon\gamma_k| + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \ln |DF(s_n)| < 0,\tag{2.69}$$

donde

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \ln |DF(s_n)|$$

es el exponente de Lyapunov del mapeo aislado F . Por lo tanto la condición de estabilidad (Ec. (B.18)) es [40]:

$$|e^\lambda(1 - \varepsilon\gamma_k)| < 1.\tag{2.70}$$

Si se considera un mapeo caótico (como el mapeo logístico) entonces $\lambda > 0$. Asumiendo esto último, la ecuación (2.70) se satisface para todo $k \geq 2$ si

$$\frac{1 - e^{-\lambda}}{\gamma_2} < \varepsilon < \frac{1 + e^{-\lambda}}{\gamma_N}.\tag{2.71}$$

Para satisfacer la ecuación (2.71), necesitamos que

$$\frac{\gamma_N}{\gamma_2} < \frac{e^\lambda + 1}{e^\lambda - 1}.\tag{2.72}$$

La condición en la Ec. (2.71) muestra que la intensidad de acoplamiento está acotada entre dos valores, por lo tanto presenta estabilidad de *Tipo 1*. En general, las FME están siempre acotadas en mapeos discretos.

La ventaja principal del análisis mediante las FME es que ofrece un criterio objetivo de sincronización a partir de propiedades topológicas de la red (γ_2 y γ_N) sin hacer referencia a propiedades específicas de los osciladores. Permite también comprender la relación estrecha que existe entre dichas propiedades topológicas de la red con la dinámica observada en ella, dada por el sistema dinámico que rige el estado de los nodos. La principal desventaja es que sólo ofrece información de la sincronización a partir de pequeñas perturbaciones a la variedad de sincronización (estabilidad lineal).

Capítulo 3

Sincronización en redes complejas

En esta sección se ofrece un breve análisis de la sincronización de sistemas caóticos en redes complejas, por lo que el acoplamiento entre nodos está dado por la topología de la red. Se pretende comparar dicha propiedad de sincronización en diversos tipos de redes y su relación con la cantidad de nodos y la intensidad de acoplamiento. Se analizan casos donde la dinámica de los nodos se rige por sistemas dinámicos tanto discretos como continuos, estos últimos sólo se mencionan con la finalidad de ilustrar el caso continuo sin profundizar demasiado en su análisis.

El tipo de redes que se analizarán en el presente capítulo son aquellas introducidas en el capítulo 2 por lo que constantemente haremos referencia a la sección 2.2. La dinámica de los nodos estará regida por un sistema dinámico que se especificará en cada caso.

3.1. Redes $2k$ -regulares

Las redes analizadas a continuación se consideran no dirigidas y sin pesos. Recordamos que en las redes no dirigidas el acoplamiento es simétrico y por lo tanto los eigenvalores de la matriz de acoplamiento son reales. Como se pudo ver en la Sección 2.2.1, las propiedades topológicas de las redes regulares se representan fácilmente en términos del número de vecinos k ; en el Cuadro 3.1 se comparan cuatro gráficas $2k$ -regulares con diferente número de vecinos y nodos. También se incluye en el Apéndice C.1 el código con el cual se generan las gráficas $2k$ -regulares.

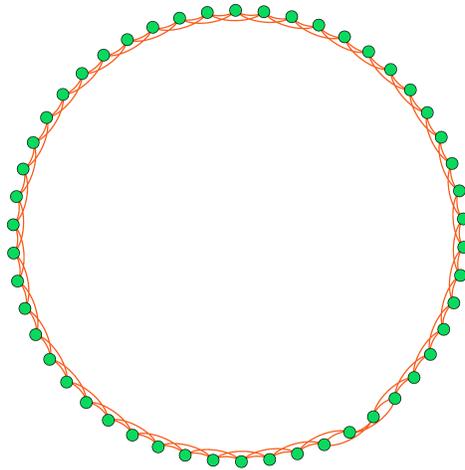


Figura 3.1: Red 4-regula con 50 nodos acoplados a segundos vecinos. Sus principales propiedades se enlistan en la Cuadro 3.1.

En lo relativo a la sincronización en este tipo de redes, consideraremos primero el caso donde la dinámica de los nodos en la red está dada por el mapeo logístico $F(x_n) = x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ para el cual se analizarán dos casos: $r = 4$ y $r = 3.8$ ¹. Dada una red $2k$ -regular con N nodos, la evolución del i -ésimo nodo de la red está dada por la siguiente ecuación (ver

¹En el Apéndice B.3 se incluye un resumen detallado de los mapeos unidimensionales y en particular del mapeo logístico; también se muestra el diagrama de bifurcaciones para el parámetro r en la Fig. B.9.

Propiedades	Red 1 (Fig. 3.1)	Red 2	Red 3	Red 4
Número de nodos	50	50	100	100
Vecinos por nodo ($2k$)	4	8	4	8
Aristas	100	200	200	400
Grado promedio (k)	4	8	4	8
Diámetro (Diam)	13	7	25	13
Componentes	1	1	1	1
Coefficiente de agrupamiento promedio (\mathcal{C})	0.5	0.643	0.5	0.643
Triángulos	50	300	100	600
Longitud de trayectoria característica (ℓ)	6.633	3.571	12.879	6.697

Cuadro 3.1: Propiedades topológicas de cuatro redes $2k$ -regulares.

Ec. 2.65):

$$x_{n+1}^i = F(x_n^i) - \frac{\varepsilon}{2k} \sum_{j=1}^N L_{ij} F(x_n^j). \quad (3.1)$$

Es importante notar que en este caso, a diferencia de la ecuación (2.65), se normaliza la intensidad de acoplamiento ε por el número de vecinos $2k$. En muchos trabajos se hace esto para evitar la divergencia del término de la derecha en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$, en este caso se debe principalmente a que los valores del mapeo logístico deben permanecer en el intervalo $[0, 1]$.

Como se explicó en la Sección 2.2, el primer eigenvalor de la matriz laplaciana en redes $2k$ -regulares es $\gamma_1 = 0$, el menor eigenvalor distinto de cero es entonces $\gamma_2 = 2(1 - \cos(2\pi/N))$ y el máximo es γ_N después de ordenarlos² ($\gamma_0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_N$). Con ello se puede calcular el máximo valor de N y el correspondiente intervalo de la intensidad de acoplamiento ε para el cual existe una condición de sincronización estable mediante el análisis de estabilidad lineal. La condición de estabilidad del estado sincronizado está dada por la Ec. (2.71) con la intensidad de acoplamiento $\varepsilon/2k$, i.e.,

$$\frac{2k(1 - e^{-\lambda})}{\gamma_2} < \varepsilon < \frac{2k(1 + e^{-\lambda})}{\gamma_N}. \quad (3.2)$$

El exponente de Lyapunov del mapeo logístico con el parámetro no-lineal $r = 4$ es $\lambda = \ln 2$, por lo tanto la condición (3.2) queda como

$$\frac{k}{\gamma_2} < \varepsilon < \frac{3k}{\gamma_N}. \quad (3.3)$$

Acoplamiento a primeros vecinos ($k = 1$)

Con acoplamiento a primeros vecinos ($k = 1$) y parámetro $r = 4$, el máximo número de nodos para el cual la red se sincroniza es $N = 5$. Veamos por qué esta afirmación es

²En la ecuación obtenida en la Sección 2.2 los eigenvalores no están ordenados, su distribución es en forma de pirámide donde los máximos eigenvalores son $\gamma_{\frac{N+1}{2}}$ y $\gamma_{\frac{N+1}{2}+1}$ si N es impar y $\gamma_{\frac{N}{2}+1}$ si N es par.

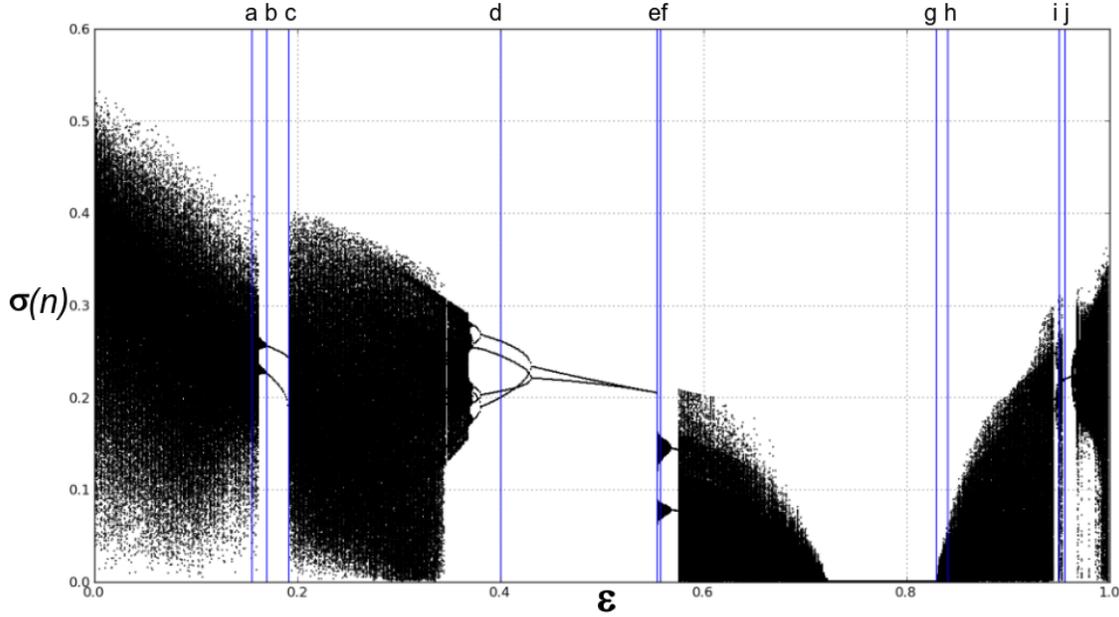


Figura 3.2: Cálculo numérico de la desviación estándar $\sigma(n) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (x_n^i - \frac{1}{N} \sum_j x_n^j)^2}$ contra la intensidad de acoplamiento ε con $r = 4$ y 5 nodos. Para cada valor de ε se inicia el estado de los nodos con una distribución aleatoria y uniforme, y se itera el sistema 5000 veces. A continuación se grafica $\sigma(n)$ en las siguientes 1000 iteraciones encimadas. El intervalo $[0, 1]$ se divide a su vez en 1000 partes. Se observan bifurcaciones de periodo en σ conforme se disminuye el parámetro ε , por ejemplo, en (d) $\varepsilon = 0.4$ y (e) $\varepsilon = 0.554$ se observan órbitas de periodo 4 y 1, respectivamente. Las líneas verticales corresponden a los siguientes valores de ε : (a) 0.155, (b) 0.169, (c) 0.191, (d) 0.4, (e) 0.554, (f) 0.556, (g) 0.829, (h) 0.840, (i) 0.950 y (j) 0.956, los cuales son discutidos en el texto. La zona de sincronización corresponde a $\sigma(n) = 0$, en este caso se encuentra en el intervalo $0.7236 < \varepsilon < 0.8292$.

cierta: la condición de estabilidad (3.3) del estado sincronizado para dicho número de nodos corresponde a una intensidad de acoplamiento acotada entre los valores $0.7236 < \varepsilon < 0.8292$ (ver Fig. 3.2), lo cual se comprueba numéricamente al calcular la desviación estándar σ del estado de los nodos para cada valor de ε en el intervalo $[0, 1]$. Físicamente, la desviación estándar indica cuánto difieren los valores de los nodos respecto al promedio; la expresión para σ es

$$\sigma(n) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(x_n^i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_n^j \right)^2}, \quad (3.4)$$

con n la iteración y x_n^i el estado del nodo i -ésimo al tiempo n . En el Apéndice D.1 se incluye el código utilizado para generar las gráficas que muestran la desviación estándar $\sigma(n)$. En la Figura 3.3 se muestra cómo aumenta el intervalo de estabilidad cambiando el parámetro del mapeo logístico a $r = 3.8$; la condición de estabilidad en este caso, teniendo en cuenta que el exponente de Lyapunov del mapeo logístico es $\lambda \approx 0.4320$, es $0.5077 < \varepsilon < 0.9117$. A partir de 6 vecinos el estado sincronizado ya no es estable; por ejemplo con 6 nodos el segundo eigenmodo, asociado a λ_2 , se vuelve estable en $\varepsilon = 1.0$ lo cual implica que $1/\gamma_2 > \varepsilon$ en la condición (3.3) con $\varepsilon \in [0, 1]$ (ver Fig. 3.4).

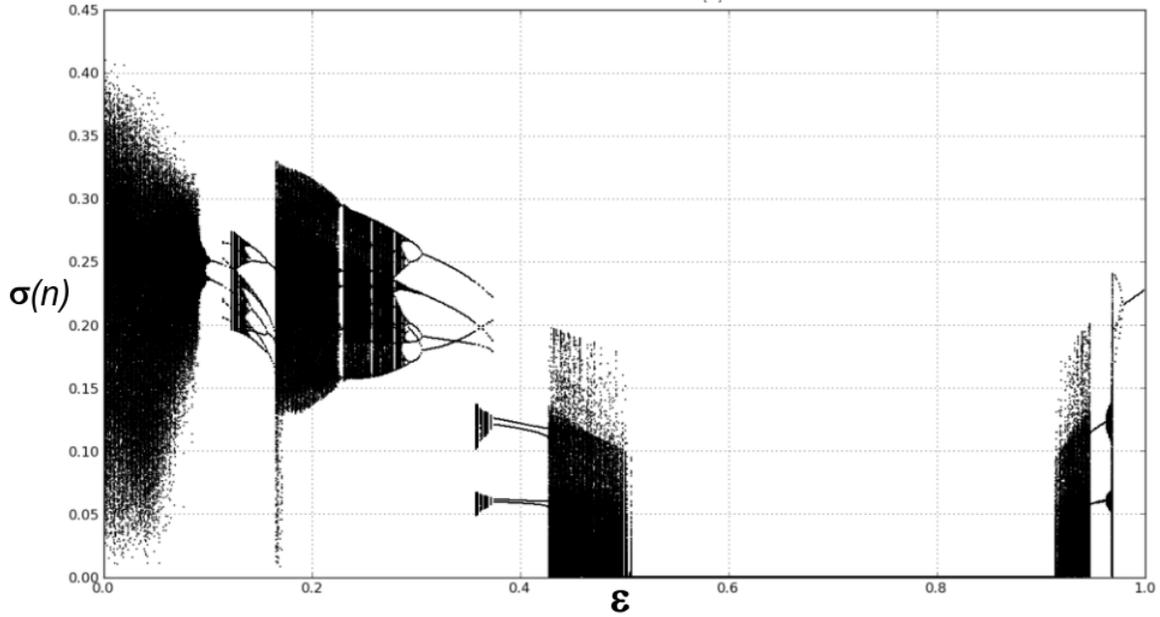


Figura 3.3: Desviación estándar de los valores de los nodos en una red con $N = 5$ y $r = 3.8$. Para cada valor de ε en el intervalo $[0, 1]$ se grafican 1000 iteraciones. Se observa que el intervalo de sincronización se hace más ancho comparado con el caso donde $r = 4$, en este caso la zona de sincronización (con $\sigma(n) = 0$) se encuentra en el intervalo $0.5077 < \varepsilon < 0.9117$.

Antes de continuar el análisis de estabilidad para condiciones de acoplamiento con más vecinos ($k > 1$) veremos las diferentes dinámicas en la red con $N = 5$ nodos con acoplamiento a primeros vecinos ($k = 1$) y parámetro $r = 4$. En la Figura 3.2 se pueden observar 10 líneas verticales que corresponden a diferentes valores de ε con diversas dinámicas; a continuación se analiza por separado cada una³:

- Para el primer valor (a) $\varepsilon = 0.155$ se observa que la desviación estándar visita un intervalo amplio de valores debido a que la intensidad del acoplamiento es débil y predomina la dinámica caótica del mapeo logístico, lo cual se puede observar en la Figura 3.5 donde se observan las últimas 20 iteraciones de los 5 nodos en la red después de un tiempo de 5000 iteraciones del tiempo transitorio.
- El siguiente valor corresponde a (b) $\varepsilon = 0.169$ en donde la desviación estándar comienza a formar dos grupos bien definidos con lo cual se comienza a *suprimir el caos*. En la Figura 3.6 se observa que cada dos iteraciones se repite el mismo patrón (con ligeras variaciones) aunque con diferentes nodos, y cada cuatro iteraciones se repite (casi) el mismo estado en la red, i.e. dado $x_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3, x_n^4, x_n^5)$, $x_n \approx x_{n+4}$. Se dice “casi” porque, ciertamente, la desviación estándar visita dos valores con ligeras fluctuaciones, podemos ver en la Figura 3.2 que con ε ligeramente mayor, digamos $\varepsilon = 0.171$ y hasta

³El programa que genera las gráficas $2k$ -regulares, cuya dinámica se expone en las Figs. 3.5–3.14, se encuentra en el Apéndice C.1.

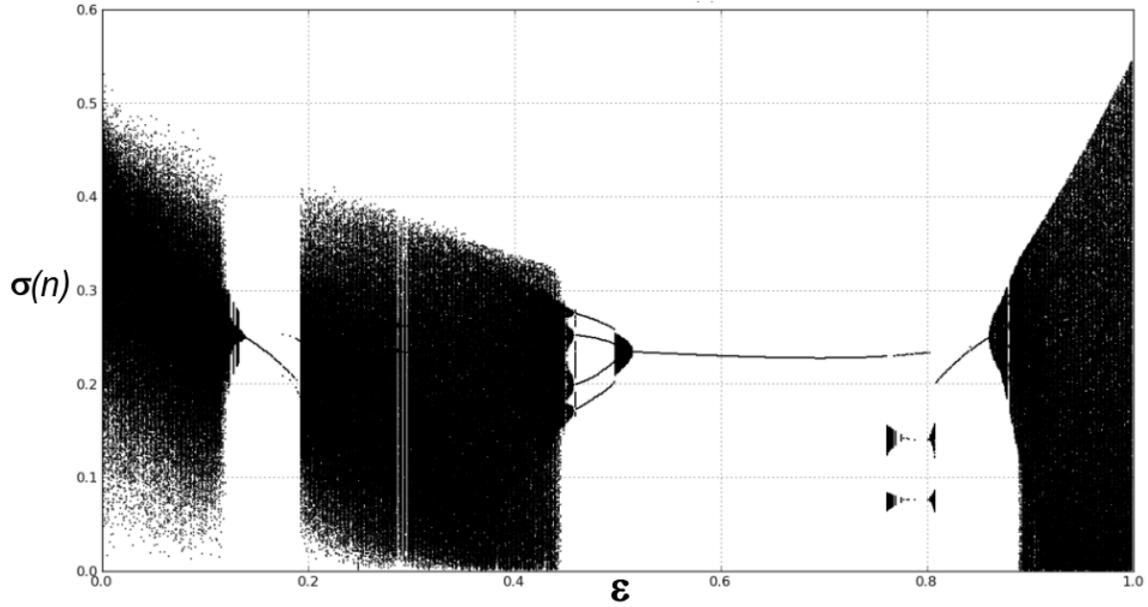


Figura 3.4: Fluctuaciones de la desviación estándar $\sigma(n)$ en una red 2-regular con 6 nodos y $r = 4$. Para cada valor de la intensidad de acoplamiento ε , se superponen 1000 iteraciones después del tiempo transitorio de 5000 iteraciones.

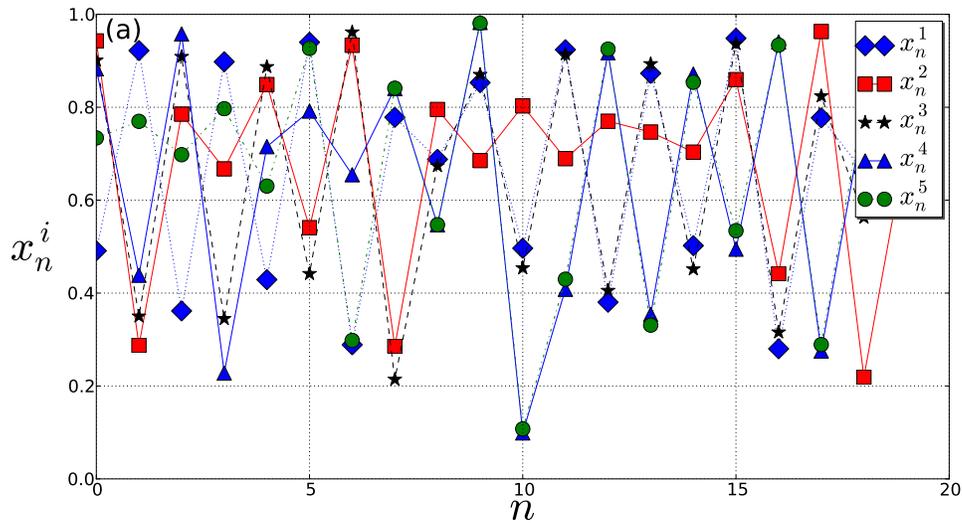


Figura 3.5: (a) Valores de los nodos x_n^i en una red con $N = 5$ acoplados a primeros vecinos ($k = 1$). Se muestran 20 iteraciones después del tiempo transitorio. Para un acoplamiento $\varepsilon = 0.155$ los estados de los nodos permanecen descorrelacionados y predomina la dinámica caótica del mapeo logístico.

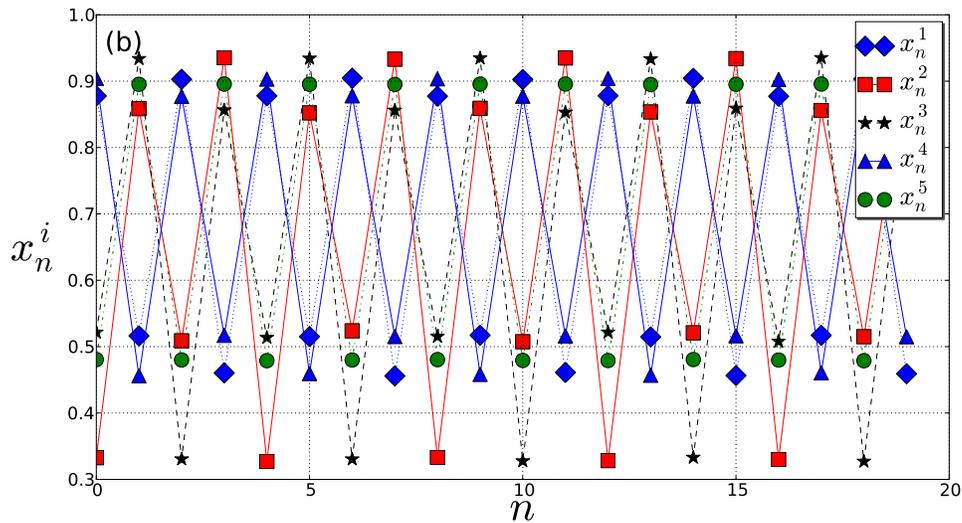


Figura 3.6: (b) Valores de los nodos x_n^i en una red con $N = 5$ nodos acoplados a primeros vecinos ($k = 1$). Cuando $\varepsilon = 0.169$ se comienza a suprimir el caos y los nodos comienzan a organizarse de modo tal que cada dos iteraciones se tiene una valor en la desviación estándar similar y cada cuatro se tiene casi el mismo estado de la red.

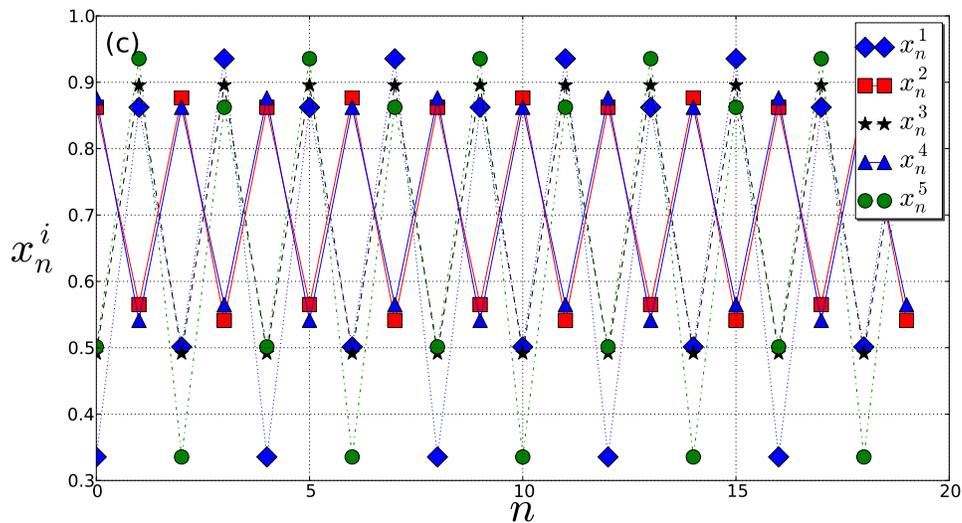


Figura 3.7: (c) Valores de los nodos x_n^i en una red con $N = 5$ acoplados a primeros vecinos ($k = 1$) durante las últimas 20 iteraciones después del tiempo transitorio. Cuando $\varepsilon = 0.191$, aunque los nodos se encuentran en una órbita de periodo 4 de modo que cada cuatro iteraciones visitan el mismo estado $x_n^i = x_{n+4}^i$, cada dos iteraciones se tiene el mismo valor en la desviación estándar, i.e. $\sigma(n) = \sigma(n + 2)$.

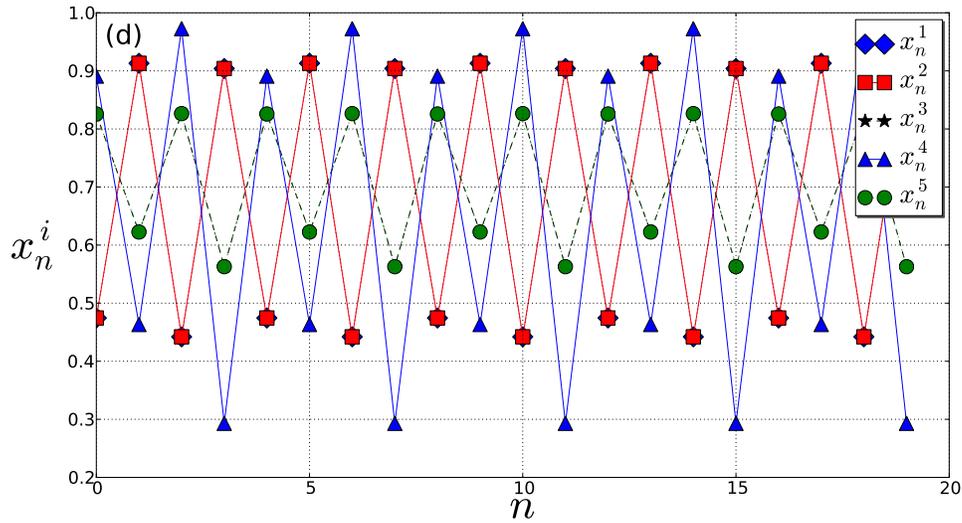


Figura 3.8: (d) Valores de los nodos x_n^i en una red con $N = 5$ acoplados a primeros vecinos ($k = 1$). Con un acoplamiento $\varepsilon = 0.4$ los estados de los nodos caen en una órbita de periodo 4 por lo que cada cuatro iteraciones se repite el mismo estado en la red $x_n^i = x_{n+4}^i$ para todo i y también la desviación estándar es tal que $\sigma(n) = \sigma(n + 4)$. Los nodos 1 y 2 están sincronizados pues $x_n^1 = x_n^2$ para todo paso discreto de tiempo n .

$\varepsilon = 0.191$, podríamos asegurar que cada cuatro iteraciones se repite exactamente el mismo estado $x_n = x_{n+4}$.

- Se observa en el caso (c) con $\varepsilon = 0.191$, que se repite cada dos pasos el mismo patrón, aunque con diferentes nodos (ver la Fig. 3.7); en este último caso se tienen dos dominios bien definidos cuyas fases difieren en π ; sin embargo, debido a que se encuentran cerca de órbitas inestables, un aumento ligero en la intensidad de acoplamiento ε producirá nuevamente un comportamiento caótico similar al caso (a).
- Con el valor de (d) $\varepsilon = 0.4$ se observa una órbita de periodo 4 (ver Fig. 3.2) lo cual se comprueba al ver los valores de los nodos en la Fig. 3.8, donde cada 4 iteraciones se repite el mismo estado. Alrededor de dicho estado se observan múltiples *bifurcaciones de periodo* que llegan a formar órbitas de periodo 4, 3, 2 y 1 conforme aumenta la intensidad de acoplamiento ε .
- En (e) $\varepsilon = 0.554$ se encuentra una órbita de periodo 1 y se esperaría ver los mismos valores en cada paso. Este último es el caso encontrado en la Fig. 3.9, donde se puede demostrar que la desviación estándar en una iteración es igual a la calculada en la siguiente, i.e. $\sigma(n) = \sigma(n + 1)$, sin embargo se puede notar que, de hecho, los valores del paso n son aquellos del paso $n - 1$ reflejados respecto a un valor central $x_n^i = 0.7$, lo cual demuestra que aunque $\bar{x}_n \neq \bar{x}_{n+1}$, con $\bar{x}_n = (\sum_i x_n^i)/5$, se cumple que la desviación estándar es la misma en cada iteración.

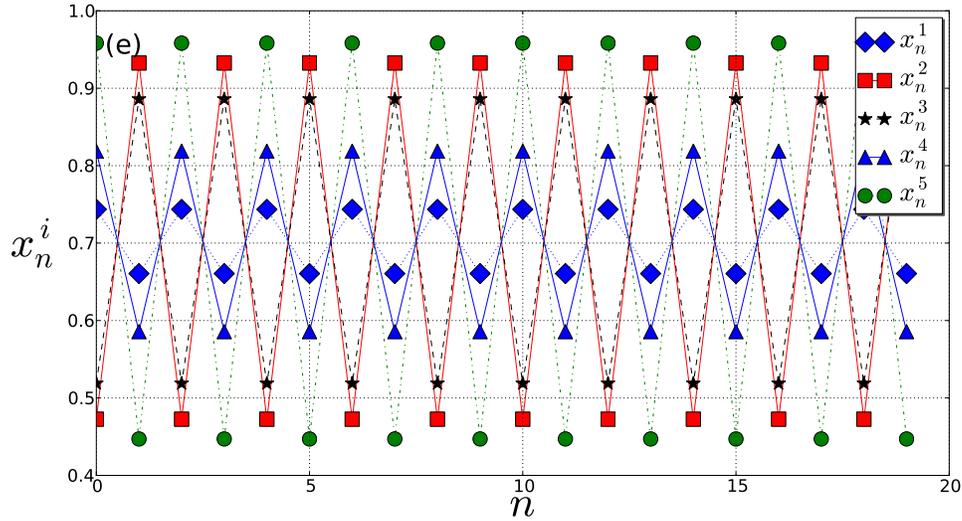


Figura 3.9: (e) Valores de los nodos x_n^i en una red con $N = 5$ acoplados a primeros vecinos ($k = 1$) con intensidad de acoplamiento $\varepsilon = 0.554$. Se observa que el estado de los nodos se repite cada dos iteraciones de modo que se encuentran en una órbita de periodo 2, sin embargo la desviación estándar es tal que $\sigma(n) = \sigma(n + 1)$, como se puede comprobar en la Fig. 3.2, debido a que los valores de los nodos en cada iteración se alejan lo mismo respecto al promedio.

- Para el siguiente valor (f) $\varepsilon = 0.556$ notamos que, a diferencia del anterior, se forman dos grupos bien diferenciados de valores en la desviación estándar; sin embargo, como se puede ver en la Fig. 3.10, su comportamiento no es completamente periódico por lo que este caso es comparable con aquel analizado en el caso (b).
- Tomando el valor (g) $\varepsilon = 0.829$ dentro de la zona de estabilidad comprobamos que, aunque la dinámica de los nodos sigue dada por el mapeo caótico, todos los nodos tienen exactamente el mismo estado en el tiempo, i.e. presentan *sincronización completa* (cf. Fig. 3.11).
- Con (h) $\varepsilon = 0.840$ ligeramente mayor y fuera de la zona de estabilidad se observa que los estados comienzan a separarse y a perder estabilidad (ver Fig. 3.12).
- El caso con (i) $\varepsilon = 0.95$ es completamente caóticos como se observa en la Fig. 3.13, este caso es interesante porque los nodos 1 y 2 se encuentran mutuamente sincronizados y los nodos 3 y 5 también, sin embargo no hay correlación entre el estado de los nodos 1, 3 y 4, por ejemplo.
- Finalmente, como se puede ver en la Fig. 3.2, para el valor (j) $\varepsilon = 0.956$ se encuentra otra órbita de periodo 1 con la cual se espera que el mismo patrón se repita en cada iteración, lo cual se comprueba en la Fig. 3.14 donde el nodo 1 se encuentra sincronizado con el 2 y el nodo 3 con el 5, en este caso, debido a que la intensidad de acoplamiento es muy grande, se suprime el caos por completo.

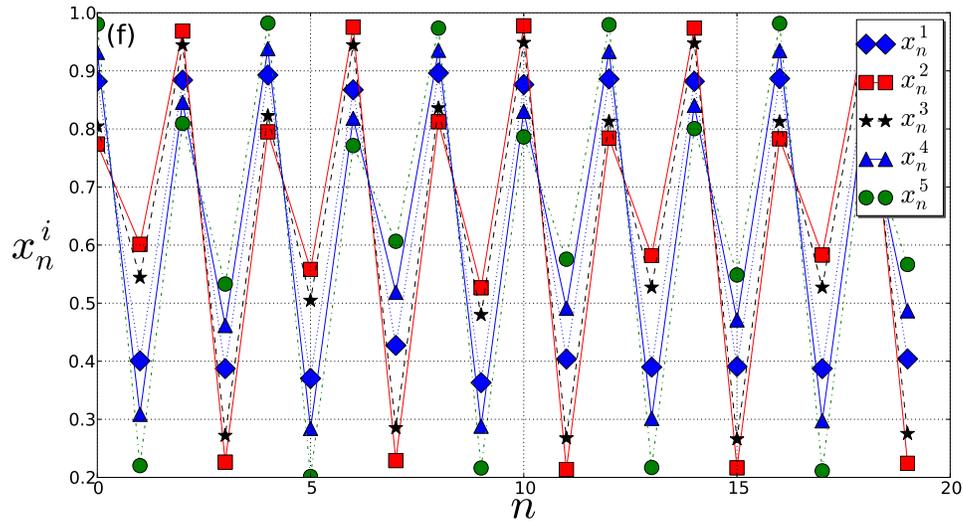


Figura 3.10: (f) Valores de los nodos x_n^i en una red con $N = 5$ acoplados a primeros vecinos ($k = 1$) con $\varepsilon = 0.556$. El valor de la desviación estándar oscila entre dos grupos bien definidos (ver la Fig. 3.2) lo cual se puede comprobar al observar que cada dos iteraciones los nodos visitan casi los mismos estados y cada cuatro iteraciones se repite casi el mismo estado $x_n^i \approx x_{n+4}^i$. Este caso es comparable al caso (b) en la Fig. 3.6.

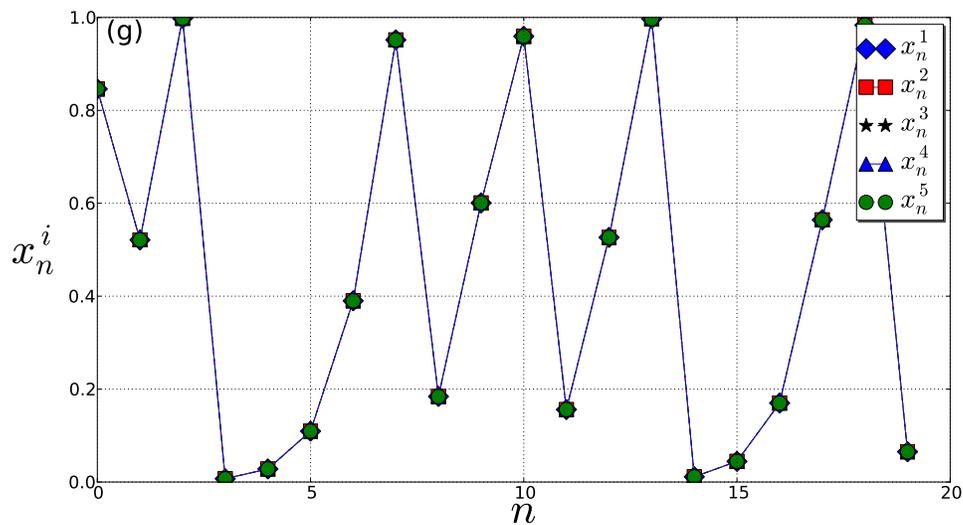


Figura 3.11: (g) Valores de los nodos x_n^i en una red con $N = 5$ acoplados a primeros vecinos ($k = 1$) con $\varepsilon = 0.829$ en la zona de estabilidad. La red en este caso presenta *sincronización completa* debido a que los nodos tienen, en cada iteración, exactamente el mismo estado, i.e. $x_n^1 = x_n^2 = x_n^3 = x_n^4 = x_n^5 = s_n$, con $s_{n+1} = F(s_n)$ satisface el mapeo logístico.

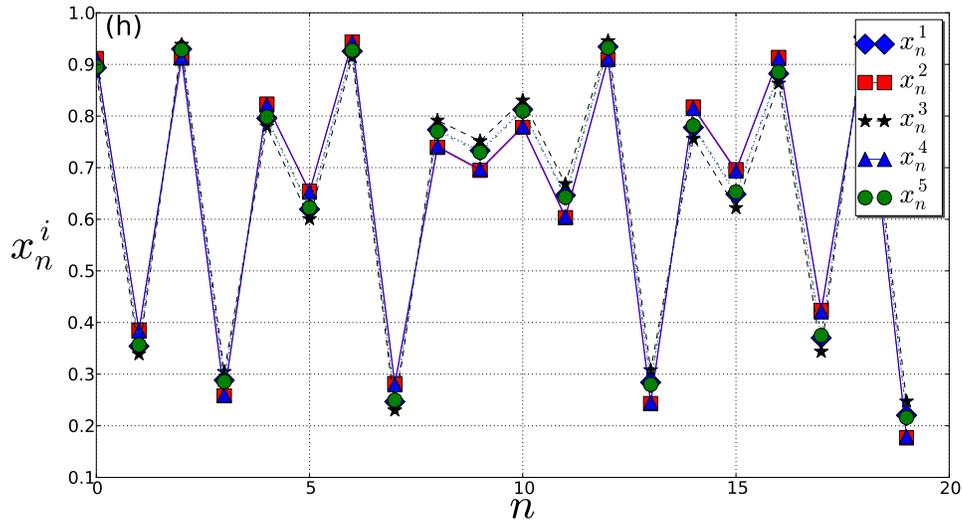


Figura 3.12: (h) Valores de los nodos x_n^i en una red con $N = 5$ acoplados a primeros vecinos ($k = 1$) con intensidad de acoplamiento $\varepsilon = 0.840$. Un valor apenas fuera de la zona de estabilidad produce que el estado de los nodos se separe ligeramente.

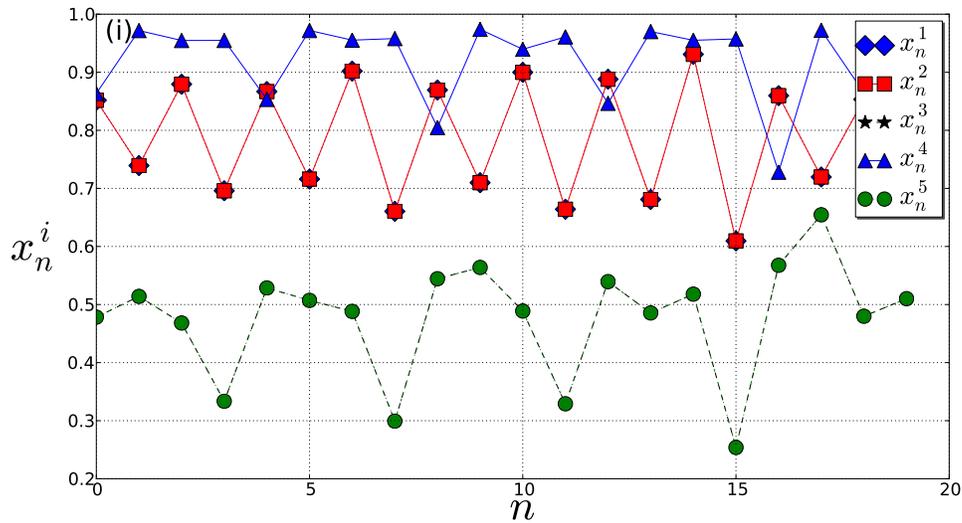


Figura 3.13: (i) Valores de los nodos x_n^i en una red con $N = 5$ acoplados a primeros vecinos ($k = 1$). Cuando $\varepsilon = 0.950$, aunque el acoplamiento entre los nodos es fuerte, su dinámica es caótica. Se observa a los nodos 1 y 2 sincronizados entre sí.

Un análisis similar al realizado aquí fue efectuado por K. Kaneko [34] en su estudio de redes de mapeos acoplados, en donde muestra el espacio de parámetros de r y ε dividido en zonas relacionadas con diferentes dinámicas en los nodos. Una pregunta interesante es si en

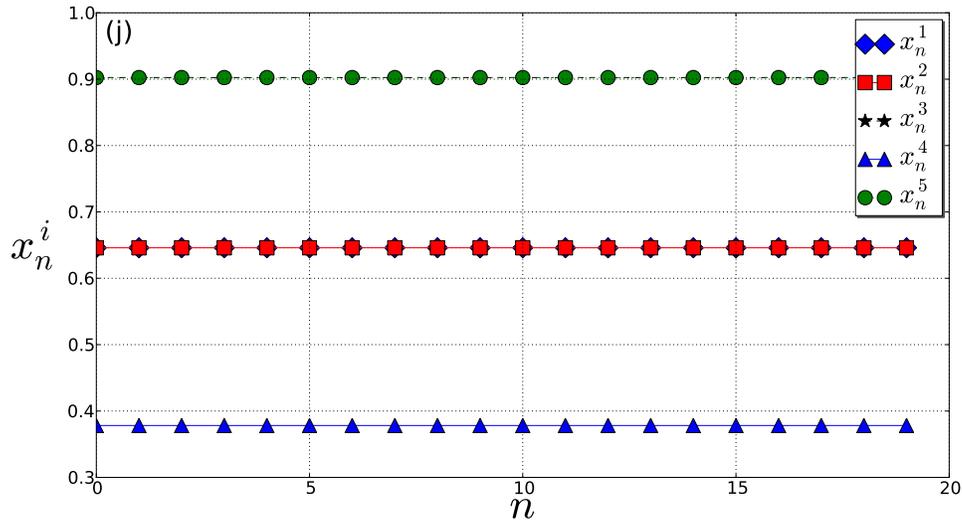


Figura 3.14: (j) Valores de los nodos x_n^i en una red con $N = 5$ acoplados a primeros vecinos ($k = 1$). Con un acoplamiento $\varepsilon = 0.956$ se observa que los nodos caen en una órbita de periodo 1 de modo que en cada paso se repite la iteración anterior. Además se suprime por completo el caos y los nodos siempre convergen a los mismos valores $x_n^i \approx 0.90$, $x_n^i \approx 0.64$ y $x_n^i \approx 0.37$.

los casos estables, los nodos siempre convergen al mismo estado o, como en el caso (j), si siempre se sincronizan mutuamente los mismos pares de nodos. Aunque siempre se obtiene la misma gráfica 3.2, la primera no siempre es cierta ya que, por ejemplo, en el caso (e) analizado en la Fig. 3.9, aunque siempre se obtiene la misma dinámica en donde los estados de los nodos oscilan respecto al valor central $x_n^i = 0.7$, con condiciones iniciales diferentes el estado de la red converge a un estado diferente $x_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3, x_n^4, x_n^5)$ aunque $\sigma(n)$ siempre es igual, lo cual implica que el sistema hereda la dinámica caótica del mapeo logístico que es altamente dependiente a las condiciones iniciales. La segunda, si fuese afirmativa, implicaría que existe un mecanismo en la gráfica que produce que siempre se sincronicen esos mismos pares de nodos; curiosamente, en el caso (j), los nodos siempre convergen a los mismos estados: $x_n^i \approx 0.90$, $x_n^i \approx 0.64$ y $x_n^i \approx 0.37$ pero no siempre lo hacen los mismos nodos, dos casos fueron observados: (1) El nodo que permanece aislado es el nodo 2 y $x_n^2 \approx 0.37$, el nodo 1 se sincroniza con el 3 y $x_n^1 = x_n^3 \approx 0.90$, y el nodo 4 se sincroniza con el 5 y $x_n^4 = x_n^5 \approx 0.64$; y (2) El nodo que permanece aislado es el nodo 4 y $x_n^4 \approx 0.37$, el nodo 3 se sincroniza con el 5 y $x_n^3 = x_n^5 \approx 0.90$, y el nodo 1 se sincroniza con el 2 y $x_n^1 = x_n^2 \approx 0.64$ (ver la Fig. 3.14 con este último caso). Ambos casos coinciden en que los vecinos del nodo que permanece aislado se sincronizan mutuamente aunque no están conectados entre sí y convergen al mismo valor de 0.90 y el otro par, siendo vecinos mutuos, se sincroniza con el estado 0.64.

Acoplamiento con mayor número de vecinos ($k > 1$)

Considerando acoplamiento a segundos vecinos ($k = 2$) y el parámetro $r = 4$, el máximo número de nodos para el cual el estado sincronizado es estable es $N = 9$, ya que para

$N = 10$ el segundo modo se vuelve inestable. El intervalo de estabilidad en aquel caso es $0.9431 < \varepsilon < 1.0$ (ver la Fig. 3.15). Con $k = 3$ el máximo número de nodos es $N = 12$ donde el intervalo de estabilidad es $0.9180 < \varepsilon < 1.0$. Para $k = 4$ es $N = 15$ con $0.9038 < \varepsilon < 1.0$.

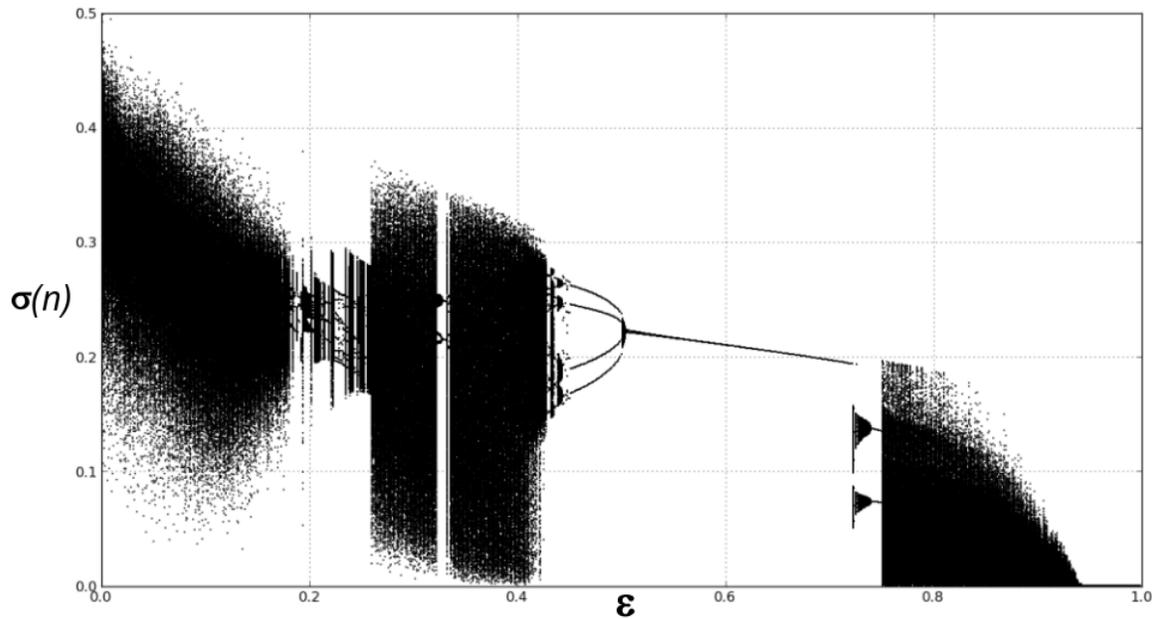


Figura 3.15: Fluctuaciones en la desviación estándar en una red con 9 nodos y acoplamiento a segundos vecinos ($k = 2$). El parámetro no lineal se fija en $r = 4$. La zona de sincronización se localiza en el intervalo $0.9180 < \varepsilon < 1.0$.

Cuando se tiene acoplamiento global⁴ $2k = N - 1$, los eigenvalores asociados a la matriz Laplaciana son $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_N = N$. Por ejemplo, con $N = 5$ se encuentra que el intervalo de estabilidad es $0.4 < \varepsilon < 1.0$ (ver Fig. 3.16). La sincronización con $N = 11$ nodos es estable en el intervalo $0.4545 < \varepsilon < 1.0$ (ver Fig. 3.17). Con $N = 21$ y $N = 31$ los intervalos de estabilidad correspondientes son $0.4762 < \varepsilon < 1.0$ y $0.4839 < \varepsilon < 1.0$, respectivamente.

El límite inferior para $N \gg 1$ de la intensidad de acoplamiento es $\varepsilon_{\min} = 0.5$, ya que $\lim_{N \rightarrow \infty} 2k(1 - e^{-\lambda})/\gamma_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (N - 1)/2N = 1/2$, a partir de este valor cualquier red con acoplamiento global se sincroniza. En términos de *costos*, si bien una red con acoplamiento global *siempre* se sincroniza, es “caro” construirla debido a que se deben tener $N - 1$ aristas por nodo, lo cual resulta ineficiente. Como se verá más adelante, existen redes sincronizables con la misma cantidad de nodos pero una cantidad muy pequeña de aristas en comparación con una red con acoplamiento global.

⁴ N tiene que ser impar para tener fronteras periódicas.

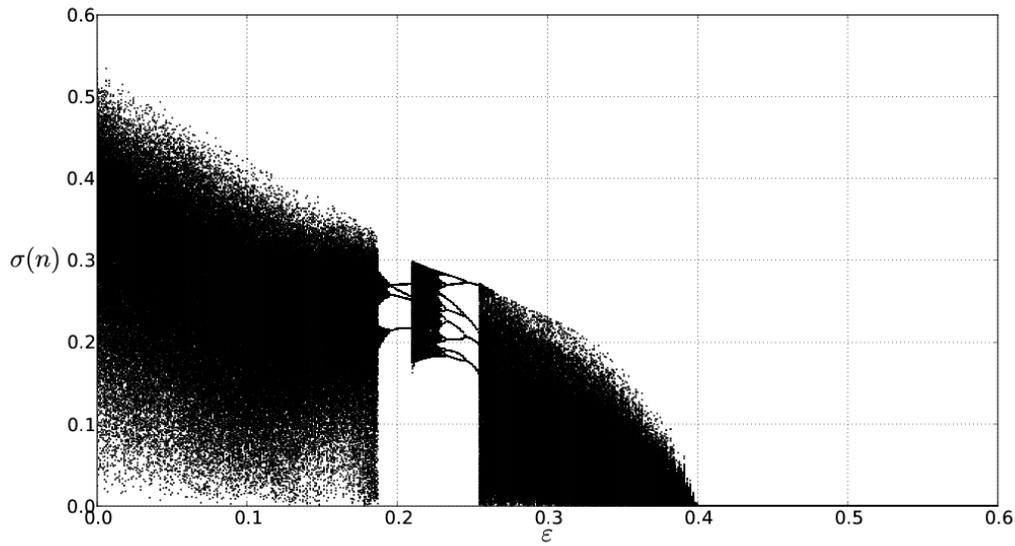


Figura 3.16: Fluctuaciones de la desviación estándar del estado de los nodos en una red de 5 nodos con acoplamiento global, esto es $2k = 4$. La zona de sincronización corresponde al intervalo $0.4 < \epsilon < 1.0$ de la intensidad de acoplamiento.

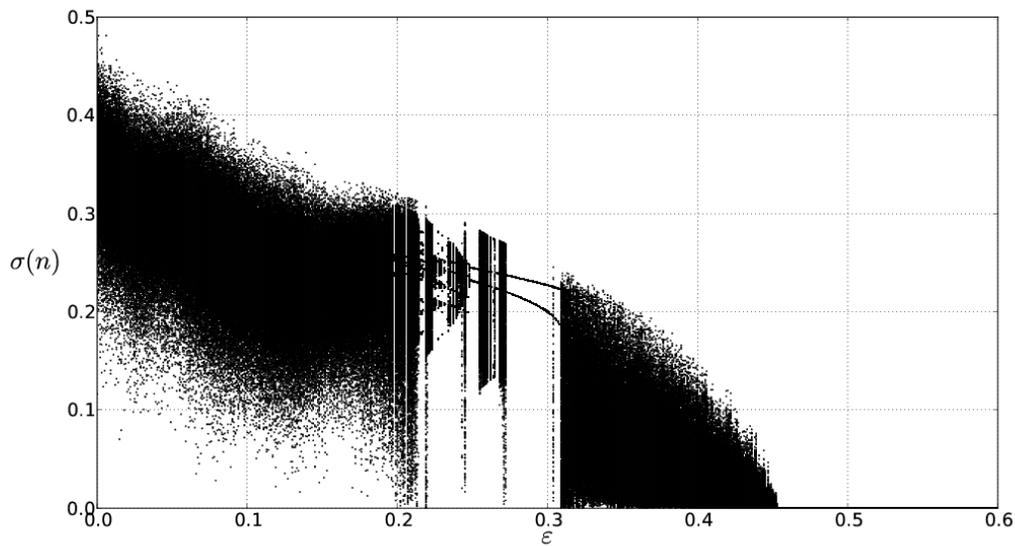


Figura 3.17: Fluctuaciones de la desviación estándar en una red de 11 nodos con acoplamiento global. Conforme el número de nodos crece, el extremo izquierdo de la zona de sincronización tiende a $\epsilon = 0.5$. El intervalo de sincronización, asociado a $\sigma(n) = 0$, se encuentra en $0.4545 < \epsilon < 1.0$.

3.2. Redes aleatorias

En esta sección se muestran algunos resultados obtenidos con redes generadas con la distribución binomial las cuales, recordamos, son llamadas de Erdős y Renyi, pues fueron los primeros en estudiarlas [29]. Dichas gráficas son el modelo por excelencia para estudiar redes aleatorias en las cuales se varía la probabilidad p ó $(1 - p)$ de que una arista esté presente o no esté presente [17]: un valor de p cercano a 0 puede producir gráficas desconexas, mientras que p cercano a 1 puede generar gráficas completas (como se vio en la Sección 2.1), esto es, con acoplamiento global. Por la forma en que se definió la red aleatoria en el capítulo 2, se debe tener en cuenta que la probabilidad de que existan nodos conectados con ellos mismos (*loops*) es distinta de cero y, en general, es proporcional a $1/N$. En el apéndice C.2 se muestra el código con el cual se generan estas gráficas. En la Fig. 3.18 se muestra un ejemplo de este tipo de redes con probabilidad $p = 0.2$ y nodos $N = 50$ ⁵. En el Cuadro 3.2 se incluyen las principales propiedades topológicas de cuatro gráficas generadas con distribución binomial centrada en el valor $\bar{k} = Np$, lo cual es importante tener en cuenta pues la sincronización de las redes depende en gran medida del grado promedio de los nodos.

Propiedades	Red 1 (Fig. 3.18)	Red 2	Red 3	Red 4
Número de nodos	50	50	100	100
Probabilidad (p)	0.2	0.5	0.2	0.5
Aristas	245	641	1000	2543
Grado promedio (k)	9.80	25.64	20.00	50.86
Diámetro (Diam)	3	2	3	2
Componentes	1	1	1	1
Coefficiente de agrupamiento promedio (\mathcal{C})	0.180	0.519	0.199	0.516
Triángulos	130	2781	1282	21796
Longitud de trayectoria característica (ℓ)	1.899	1.476	1.806	1.486

Cuadro 3.2: Propiedades topológicas de cuatro redes aleatorias con distribución binomial.

El análisis de estabilidad estudiado al inicio de este capítulo adquiere especial importancia en redes donde los eigenvalores asociados a la matriz de acoplamiento \mathbf{G} no tienen una expresión analítica. Sin embargo, para las redes aleatorias generadas con distribución binomial sí se conocen expresiones aproximadas para calcular γ_2 y γ_N , o bien cotas inferiores y superiores [41]. Dicho análisis nos proveerá con la información necesaria para saber si una red es o no sincronizable. Primero se analizan redes cuyos nodos se rigen por mapeos logísticos;

⁵Todas las figuras de este tipo son generadas en **Gephi** versión 0.7 Beta, que es un software de análisis y visualización de redes (<http://gephi.org/>).

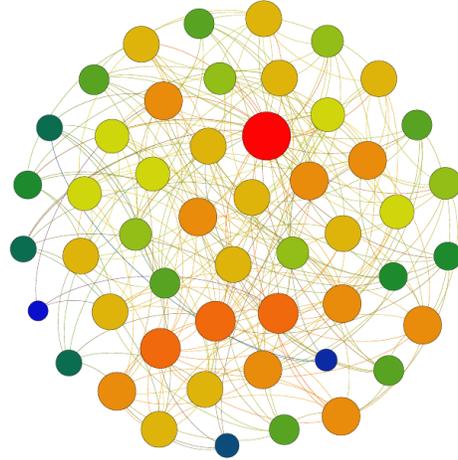


Figura 3.18: Red aleatoria con 50 nodos con distribución binomial con $p = 0.2$. El tamaño del nodo es proporcional al grado del mismo. El grado varía desde 3 (azul, en la versión a color) hasta 17 (rojo, en la versión a color).

en este caso la ecuación que describe la dinámica es

$$x_{n+1}^i = F(x_n^i) - \frac{\varepsilon}{D_{ii}} \sum_{j=1}^N L_{ij} F(x_n^j) \quad (3.5)$$

$$= F(x_n^i) - \varepsilon \sum_{j=1}^N R_{ij} F(x_n^j), \quad (3.6)$$

donde la matriz de acoplamiento $\mathbf{R} = (R_{ij})$ se define como $R_{ij} = L_{ij}/D_{ii}$ si $D_{ii} \neq 0$ y $R_{ij} = 0$ de otro modo. La introducción de dicha matriz se justifica debido a que el mapeo logístico se limita a tomar valores en el intervalo $[0, 1]$, por lo que es necesario normalizar el término de acoplamiento pues, de otro modo, el análisis quedaría restringido a valores muy pequeños en la intensidad de acoplamiento $\varepsilon \ll 1$ para asegurar que la “fuerza” aplicada al nodo i no diverge cuando $N \gg 1$. Aunque se gana en generalidad, se pierden las propiedades de la matriz Laplaciana que simplificaban el análisis: (a) $\sum_j R_{ij} \neq 0$; (b) la matriz \mathbf{R} no es simétrica y por lo tanto los eigenvalores, que denotaremos por ρ_k , pueden ser complejos. Además, el menor eigenvalor distinto de cero puede ser ρ_1 por lo que la condición de estabilidad variará en cada caso. Teniendo esto en cuenta, las EME asociadas a los eigenvectores de \mathbf{R} se expresan como

$$\xi_{n+1,(k)} = (1 - \varepsilon \rho_k) DF(s_n) \xi_{n,(k)}. \quad (3.7)$$

Nuevamente se espera que los nodos transversales a la variedad de sincronización decrezcan, por lo que la condición de estabilidad se expresa como

$$\lambda(\varepsilon \rho_k) = \ln |1 - \varepsilon \rho_k| + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \ln |DF(s_n)| < 0, \quad (3.8)$$

donde el segundo término es el exponente de Lyapunov λ del mapeo logístico. Como se vio antes, debido a que las expresiones anteriores difieren únicamente en el término $\varepsilon\rho_k$, la condición (3.8) se puede expresar de forma genérica como

$$\lambda(\alpha) = \ln|1 - \alpha| + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \ln|DF(s_n)| < 0, \quad (3.9)$$

la cual corresponde a la Función Maestra de Estabilidad (FME) para el caso discreto.

Se inicia el análisis de sincronización con el cálculo de la desviación estándar σ de los estados de los nodos para 10000 redes con 50 nodos para diferentes combinaciones de la intensidad de acoplamiento ε y la probabilidad p asociada a la distribución binomial de los grados. De este modo, se tiene una idea global de los parámetros para los cuales dichas redes se sincronizan, dados por aquellos en los cuales $\sigma = 0$ (ver la Fig. 3.19).

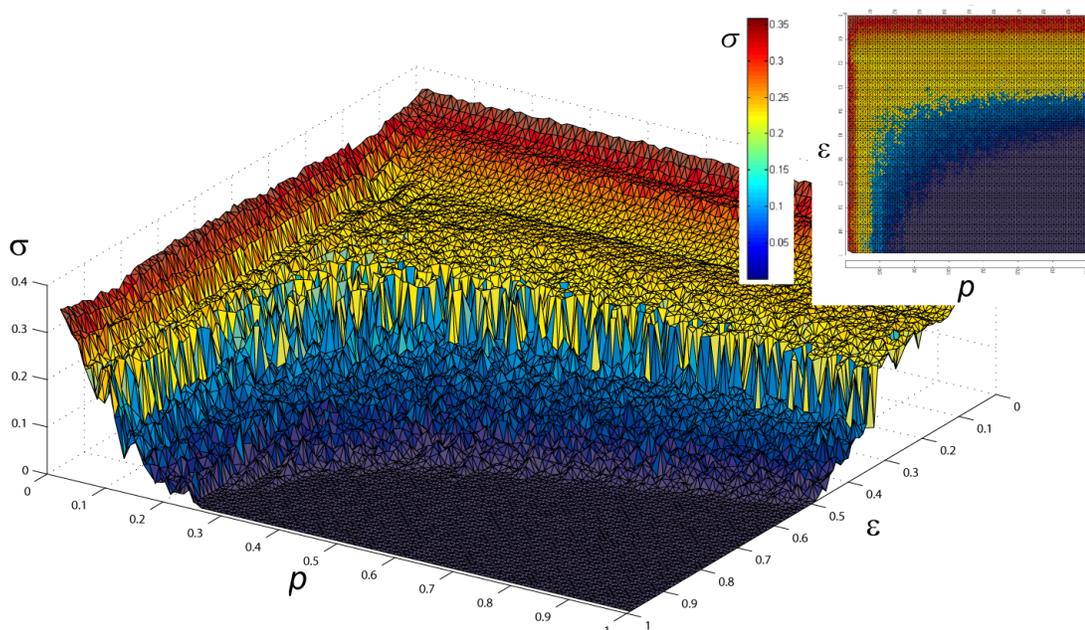


Figura 3.19: Redes aleatorias con $N = 50$ nodos generadas con distribución binomial. Se calcula la desviación estándar σ para cada par de parámetros p y ε . La zona de sincronización es aquella con $\sigma = 0$, la cual muestra las parejas de parámetros (p, ε) con las que se pueden producir gráficas aleatorias capaces de sincronizarse.

En general, la sincronización en el tipo de redes analizadas en este trabajo corresponden a la condición de estabilidad de *Tipo 1* para la cual $\alpha_1 < \varepsilon\rho_k < \alpha_2$ se satisface para todos los eigenvalores de la matriz de acoplamiento distintos de cero. Como se vio al inicio del capítulo, dicha condición se expresa mediante la condición⁶ $\rho_N/\rho_2 < \alpha_2/\alpha_1$, lo cual implica

⁶Debido a que la matriz de acoplamiento \mathbf{R} en este caso no es simétrica, puede darse el caso de que el menor eigenvalor sea ρ_1 , con lo cual sólo hay que cambiar la condición algebraica por $\rho_N/\rho_1 < \alpha_2/\alpha_1$.

que si $\alpha_1 < \varepsilon \rho_2$ y $\varepsilon \rho_N < \alpha_2$ entonces cualquier otro eigenvalor estará dentro de la zona de estabilidad. De esta manera basta con analizar la relación entre el mayor y menor eigenvalor distinto de cero para saber si una red es o no sincronizable; en la Figura 3.20 se muestra dicha relación comparada con distintos valores de la probabilidad p en redes aleatorias con distribución binomial para redes con diferente número de nodos. Si bien lo anterior *no* muestra para qué valores en la intensidad de acoplamiento ε una red se sincroniza, sí resulta una *condición necesaria* para ello. Se adelanta al lector, esperando que se convenza de ello al final de esta sección, que $\alpha_2/\alpha_1 = 3.0$ para cualquier red cuyos nodos se rigen por la dinámica de un mapeo logístico con parámetro no lineal $r = 4$.

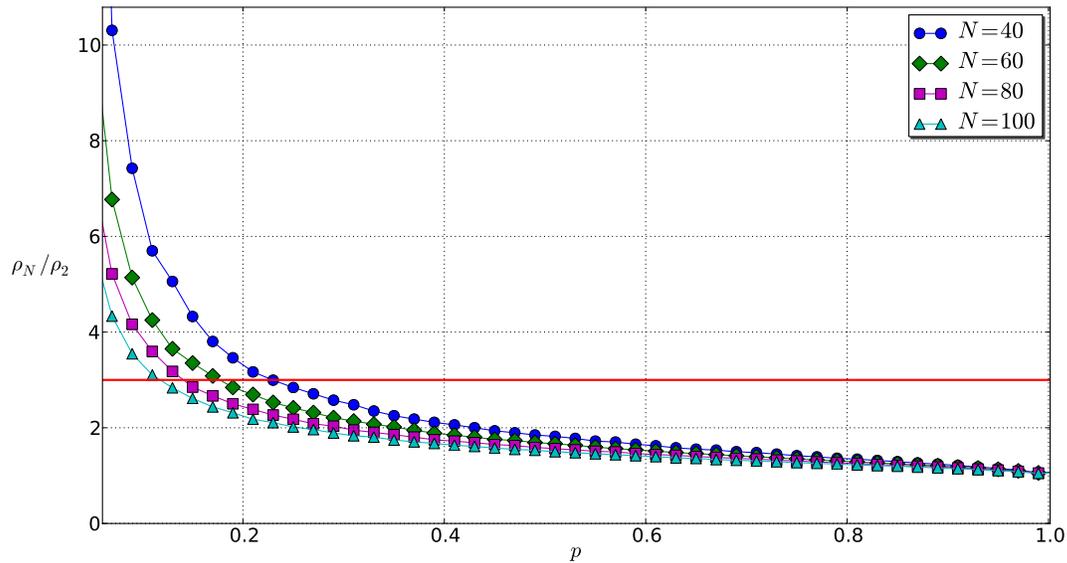


Figura 3.20: ρ_N/ρ_2 contra p para gráficas aleatorias con distribución binomial con $N = 40, 60, 80$ y 100 nodos. Se observa que conforme aumenta el número de nodos en una red aleatoria, es más probable que sus nodos se sincronicen. Asimismo se comprueba que una red, independientemente del número de nodos que tenga, se sincronizará para algún valor ε si $p = 1$ pues se tiene en este caso una red con acoplamiento global.

Similar al análisis realizado en la Sección 3.1, se muestra la dinámica de los nodos en la **Red 1**, **Red 3** y **Red 4** del Cuadro 3.2: En las Figs. 3.21, 3.22 y 3.23 se muestra la desviación estándar de los estados de los nodos comparada con diferentes valores en la intensidad de acoplamiento ε . Para cada valor de ε se itera el sistema 1000 veces; dichas iteraciones se asocian al tiempo transitorio en el cual se busca que el sistema se estabilice y “olvide” las condiciones iniciales aleatorias, después de este tiempo se grafican 100 iteraciones; como se verá más adelante, únicamente la **Red 1** (mostrada en la Fig. 3.18) del Cuadro 3.2, no se sincroniza debido a que los primeros dos eigenmodos asociados a ρ_2 y ρ_3 no cumplen la condición de estabilidad (3.9) lo cual se comprueba en la Figura 3.24(a) donde se calculan los eigenvalores de la matriz de acoplamiento \mathbf{R} de forma numérica. En este caso se demuestra que disminuyendo el parámetro no lineal del mapeo logístico a $r = 3.8$ es posible que una red

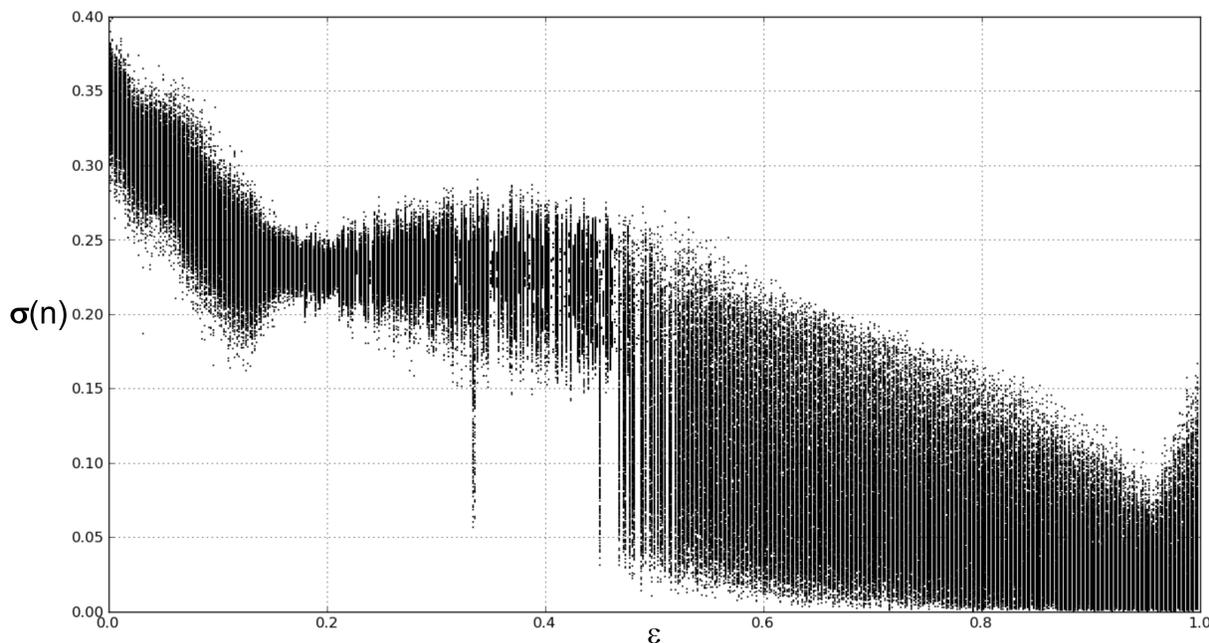


Figura 3.21: Fluctuaciones de la desviación estándar σ de los valores de los nodos en la **Red 1** del Cuadro 3.2. Para cada valor de la intensidad de acoplamiento ε , se superponen 1000 valores de σ calculados después del tiempo transitorio. No hay sincronización para ningún valor en la intensidad de acoplamiento ε .

con 50 nodos se sincronice, debido a que se satisface la condición algebraica de *Tipo 1* (ver Fig. 3.24(b)).

Para las redes con $N = 100$ nodos y parámetro $r = 4$, la condición de estabilidad asociada a sus respectivos eigenmodos muestra que tanto la **Red 3** como la **Red 4** se sincronizan para ciertos valores en la intensidad de acoplamiento ε ; en el primer caso la red se sincroniza a partir del valor $\varepsilon = 0.795$, y en el segundo caso a partir de $\varepsilon = 0.625$ (ver Figs. 3.22 y 3.23). Lo anterior se comprueba mediante el análisis de estabilidad mostrado en las Figuras 3.25(a) y 3.25(b) donde se intentaron mostrar los casos límites para los cuales $\varepsilon\rho_1 \approx \alpha_1$, debido a que *todos* los eigenmodos caen en la zona donde se cumple la condición impuesta por la FME (Ec. 3.9), i.e $\lambda(\varepsilon\rho_k) < 0$, $k = 1, \dots, N$. Como se adelantó en un principio, una red con dinámica en sus nodos dada por el mapeo logístico con parámetro no lineal $r = 4$ satisface la condición algebraica de *Tipo 1* tal que $\rho_N/\rho_2 < \alpha_2/\alpha_1 = 1.5/0.5 = 3.0$, lo cual implica que los valores $\varepsilon\rho_k$, con ρ_k los eigenvalores de \mathbf{R} distintos de cero, se encuentran acotados, dichos límites están dados por los valores donde $\lambda(\alpha) = \ln|1 - \alpha| + \lambda = 0$. Si se disminuye el parámetro no lineal a $r = 3.8$ los nuevos límites son $\alpha_1 = 0.35$ y $\alpha_2 = 1.65$.

Utilizando el mismo acoplamiento que el caso discreto, podemos imponer en los nodos una dinámica regida por un sistema dinámico continuo como en la Ec. (2.59); aunque no se incluye el análisis de sincronización, se considera importante mencionarlo como ejemplo. Considérese las ecuaciones de Lorenz y las ecuaciones de Rössler definidas en $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (Ecs. (B.10) y (2.56), respectivamente); entonces, en este caso la ecuación que describe la dinámica

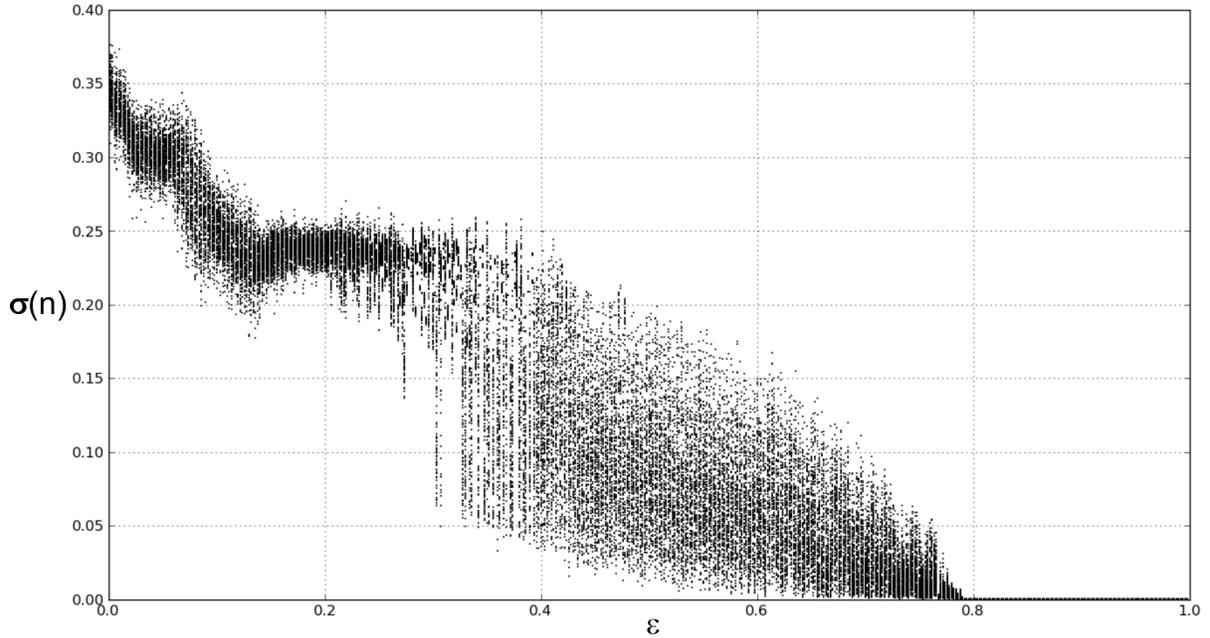


Figura 3.22: Fluctuaciones de la desviación estándar σ del estado de los nodos en la **Red 3** del Cuadro 3.2. La red se sincroniza a partir del valor $\varepsilon = 0.795$.

de los nodos está dada por

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{F}(\mathbf{x}^i) - \varepsilon \sum_{j=1}^N L_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}^j), \quad (3.10)$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{F}_1(\mathbf{x}), \mathbf{F}_2(\mathbf{x}), \mathbf{F}_3(\mathbf{x}))$ representa la dinámica de los nodos sin acoplamiento, $\mathbf{L} = (L_{ij})$ es la matriz Laplaciana y $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es la función de acoplamiento. Por ejemplo, si acoplamos los nodos mediante la variable x , entonces la función de acoplamiento se lee como

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Es importante notar que en este caso no se normaliza la intensidad de acoplamiento ε , debido a que tanto las ecuaciones de Lorenz como las de Rössler están definidas en todo \mathbb{R}^3 , a diferencia del mapeo logístico cuyo dominio es $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, por lo que el análisis de estabilidad es exactamente aquel estudiado al inicio de este capítulo. Sin embargo, debemos tener en cuenta que si ε es muy pequeño, el estado de los nodos permanece cerca del atractor asociado a \mathbf{F} aunque pueden no sincronizarse, como se muestra en la Fig. 3.26 donde se modelan tres nodos con dinámica dada por las ecuaciones de Lorenz (ver Ecs. (B.10) en el Apéndice B.2). Por el contrario, si ε es muy grande entonces la influencia de los nodos j sobre un cierto nodo i puede ser tal que \mathbf{x}^i es “expulsado” del atractor como se ilustra en la Fig. 3.27 donde se muestra la dinámica de tres nodos cuya dinámica está dada por las ecuaciones de Rössler (ver Ecs. (2.56)).

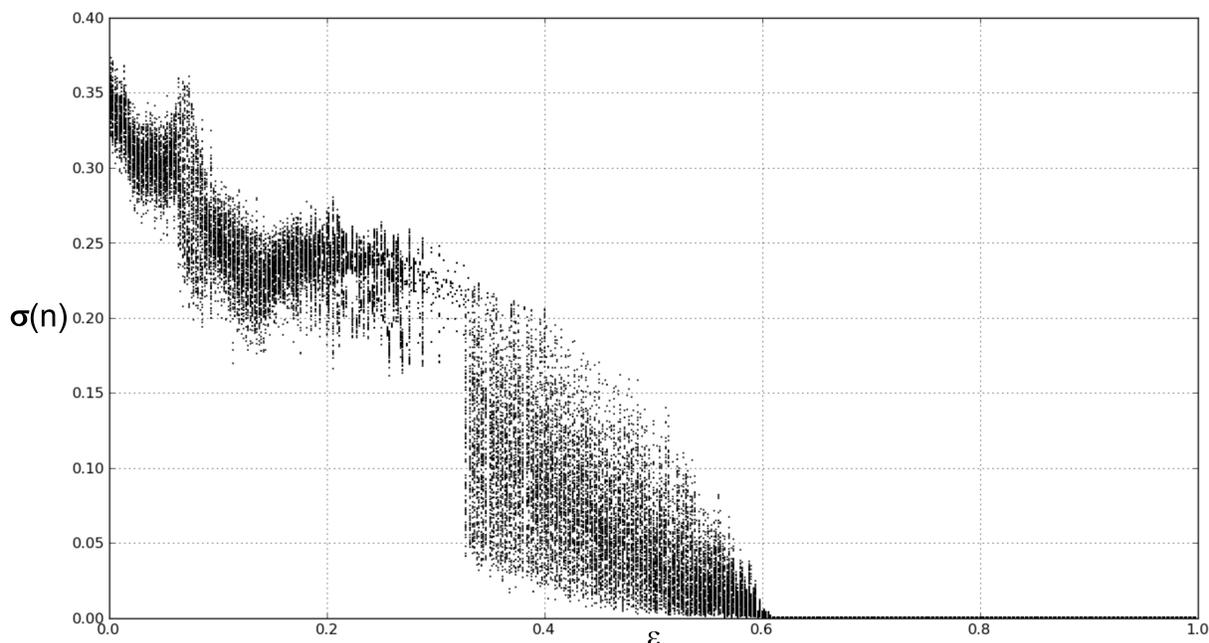


Figura 3.23: Fluctuaciones de la desviación estándar de los nodos en la **Red 4** del Cuadro 3.2. La red se sincroniza alrededor de $\varepsilon = 0.620$. Es fácil notar que una red aleatoria con $p = 1.0$ se acerca a una red con acoplamiento global en donde siempre hay sincronización cuando la intensidad de acoplamiento es $\varepsilon > 0.5$, como se vio en la Sección 3.1.

El tipo de redes estudiadas en esta sección representa el modelo más conocido de redes aleatorias para las cuales se conocen expresiones analíticas de las propiedades relacionadas con su topología. Sin embargo, se sabe menos acerca de la dinámica que puede generarse a partir de un acoplamiento dado por una distribución binomial en los grados de los nodos. En la figura 3.19 se observa que alrededor del valor $p = 0.26$, una red con 50 nodos se sincroniza aunque para valores muy grandes en la intensidad de acoplamiento ε . Lo anterior implica que una red con 50 nodos cuyo grado promedio es aproximadamente $\bar{k} = 13$ es capaz de sincronizarse. Del mismo modo, dada una red con N nodos se puede saber el grado promedio necesario para que se sincronice.

El análisis de estabilidad dado por la FME, en el caso donde la dinámica de los nodos está dada por el mapeo logístico, nos provee de información fundamental acerca de la posible sincronización en una red; el hecho de saber que $\rho_N/\rho_2 < \alpha_2/\alpha_1 = 3$ implica que *cualquier* red aleatoria con distribución binomial en el grado de sus nodos se sincroniza para un cierto valor $p \leq 1$ y algún $\varepsilon \leq 1$ lo cual es una afirmación muy fuerte. Esto es cierto debido a que en el límite $p \rightarrow 1$ una gráfica aleatoria con N nodos es una gráfica regular con acoplamiento global en cuyo caso la matriz de acoplamiento es $\mathbf{R} = (N - 1)^{-1}\mathbf{L}$ y por lo tanto se cumple que $\rho_k = (N - 1)^{-1}\gamma_k$ para todo $k = 1, \dots, N$. Como se vio en la Sección 3.1 los eigenvalores asociados a la matriz Laplaciana, en el caso de tener acoplamiento global, son tales que $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_2 = \dots = \gamma_N = N$, de aquí se sigue que $\rho_N = \rho_2 = (N - 1)^{-1}N$ y entonces $\rho_N/\rho_2 = 1 < 3$

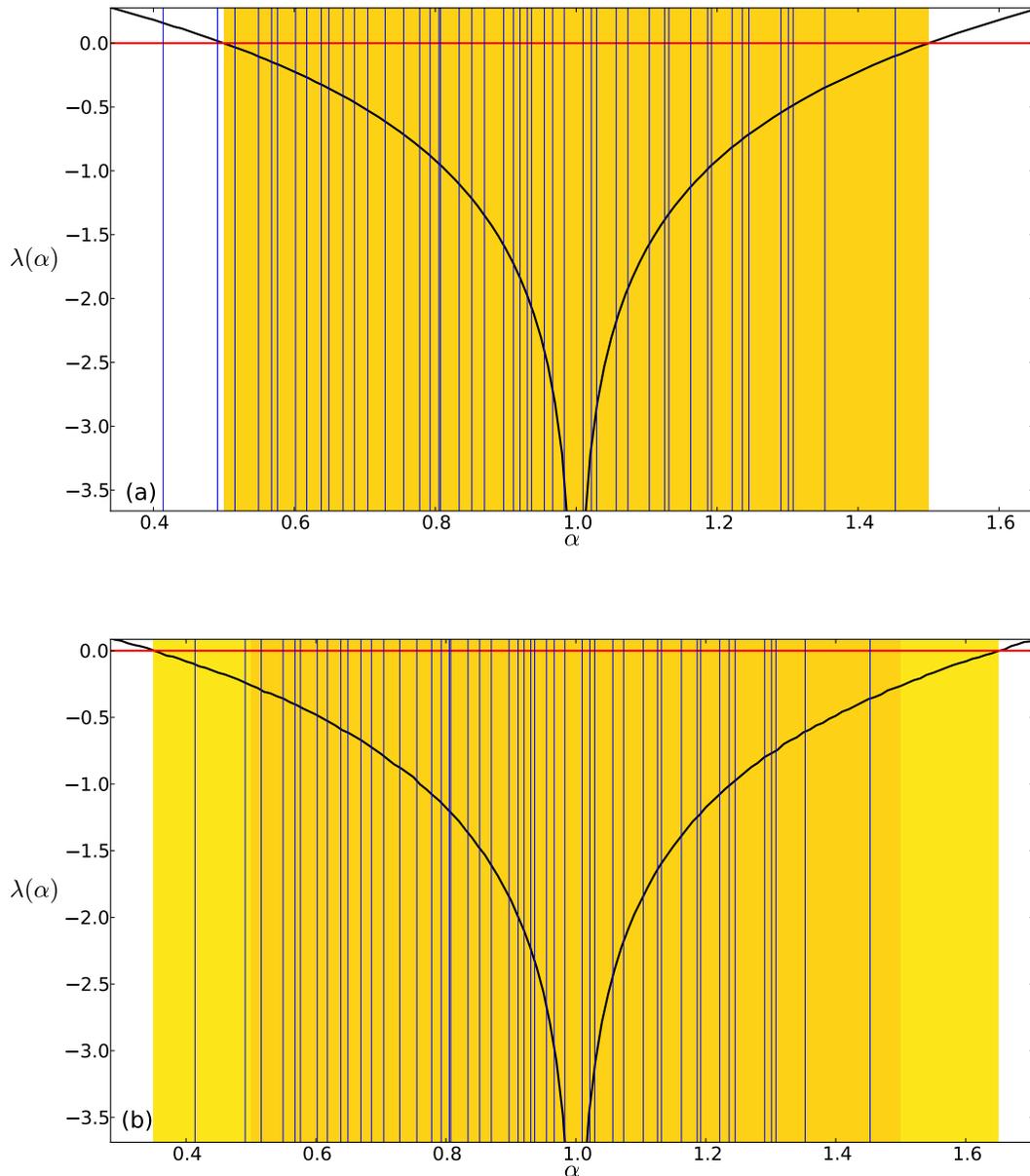


Figura 3.24: Función Maestra de Estabilidad $\lambda(\alpha)$ de la **Red 1** con 50 nodos y dinámica dada por el mapeo logístico. Las líneas verticales representan los valores $\varepsilon \rho_k$, $k = 2, \dots, 50$ y la franja vertical (amarilla en la versión en color) corresponde a los valores de α tales que $\lambda(\alpha) = \ln |1 - \alpha| + \lambda < 0$. En **(a)** se muestra el caso con el parámetro no lineal del mapeo $r = 4$ para el cual se observa que el segundo y tercer eigenmodo caen en la zona donde $\lambda(\alpha) > 0$ y por lo tanto no hay sincronización (ver también la Fig. 3.21). En **(b)** se muestra el caso con $r = 3.8$ con lo cual se ensancha la zona de estabilidad dada por las franjas claras a los costados, para esta nueva condición todos los eigenmodos son estables.

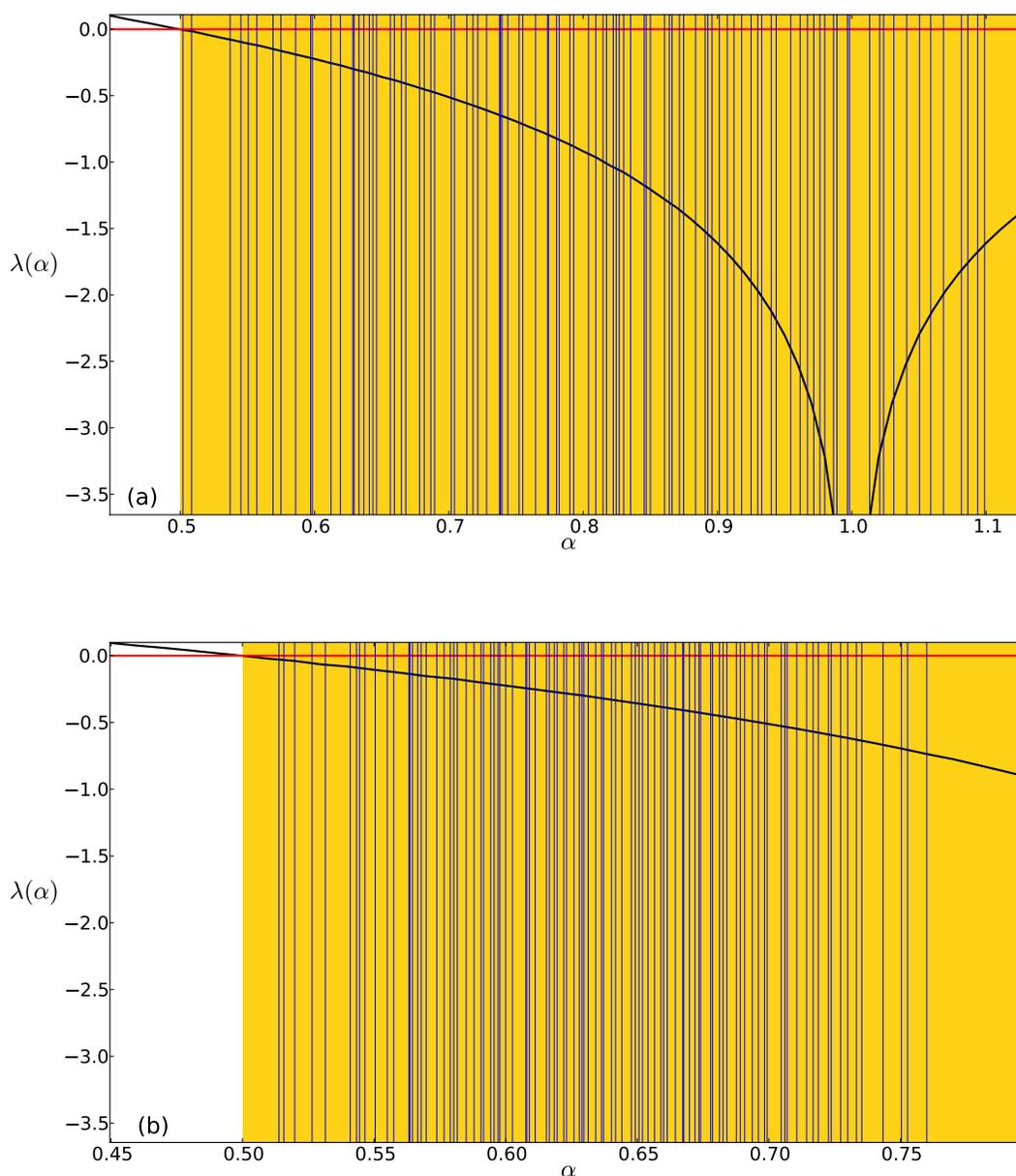


Figura 3.25: Función Maestra de Estabilidad de la (a) **Red 3** y (b) **Red 4**. Se observa que en ambos casos las líneas verticales correspondientes a los valores $\varepsilon\rho_k$, $k = 1, \dots, 100$ caen dentro de la franja vertical asociada a los valores de α tales que $\lambda(\alpha) < 0$ por lo tanto dichas redes se sincronizan: en (a) la intensidad de acoplamiento es $\varepsilon = 0.8$ y en (b) es $\varepsilon = 0.63$ (comparar con Figs. 3.22 y 3.23).

para cualquier valor de N .⁷

⁷En el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ se tiene que $\rho_N = \rho_2 = 1$.

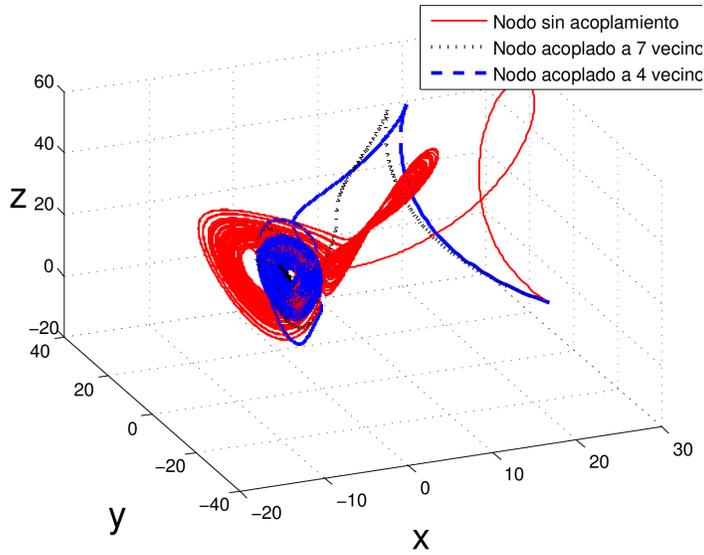


Figura 3.26: Se muestra la dinámica de tres nodos partiendo de la misma condición inicial. Dos de ellos pertenecen a una red aleatoria con 50 nodos con dinámica dada por las ecuaciones de Lorenz con acoplamiento en la variable x e intensidad de acoplamiento $\varepsilon = 0.002$: (a) El primer nodo no está acoplado por lo que dibuja el atractor de Lorenz, (b) el segundo nodo está acoplado con 8 vecinos y (c) el tercero a 5 vecinos. El segundo y tercer nodo no están acoplados entre si.

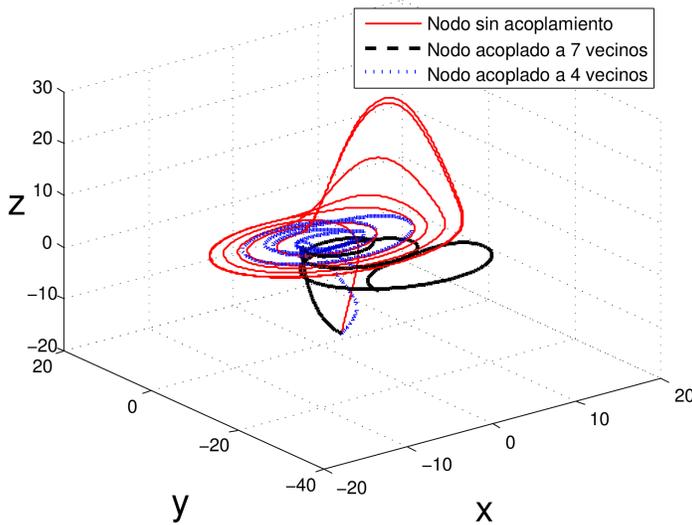
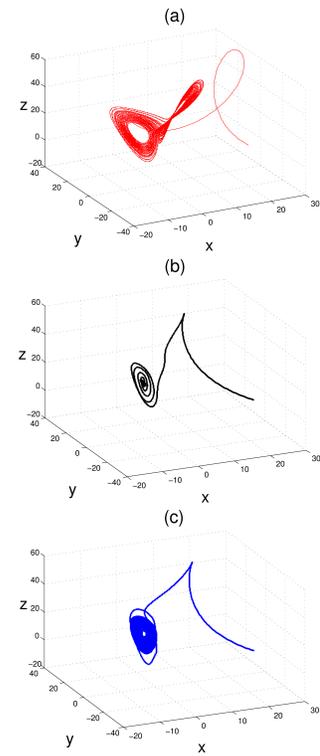
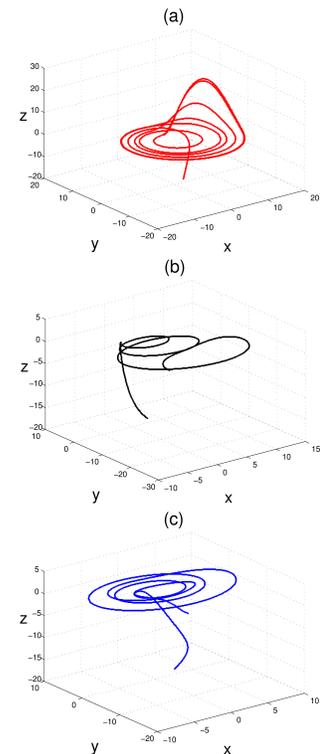


Figura 3.27: Se muestran tres nodos partiendo de la misma condición inicial. Dos de ellos pertenecen a una red aleatoria con 50 nodos cuyas dinámicas están regidas por las ecuaciones de Rössler acoplados mediante la variable x y $\varepsilon = 0.002$. (a) El primer nodo no está acoplado por lo que dibuja el atractor de Rössler, (b) el segundo se encuentra acoplado a 7 vecinos y (c) el tercero a 4 vecinos (ninguno de ellos es el nodo en (b)). Tanto el segundo como el tercer nodo son “expulsados” del atractor.



3.3. Redes de mundo pequeño

Las redes aleatorias estudiadas en la sección anterior no reproducen las propiedades topológicas encontradas en muchas de las redes reales. Tanto las redes de mundo pequeño como las redes libres de escala se ha visto que reproducen en buena medida las propiedades topológicas de la mayoría de las redes reales [26], sin embargo aún se sigue estudiando la dinámica en ellas. En la presente sección se estudia la sincronización en algunas redes de mundo pequeño con lo cual se espera tener una noción general de las propiedades que permiten que una red de este tipo se sincronice.

Propiedades	Red 1 (Fig. 3.28)	Red 2	Red 3	Red 4	Red 5	Red 6
Modelo	WS	WS	NW	WS	WS	NW
Número de nodos	50	50	50	100	100	100
Red regular inicial (k)	6	8	8	2	5	20
Probabilidad (p)	0.5	0.6	0.6	0.2	0.2	0.51
Aristas	300	400	513	200	500	2539
Grado promedio (k)	12	16	20.52	4	10	50.78
Diámetro (Diam)	3	3	3	7	4	2
Componentes	1	1	1	1	1	1
Coficiente de agrupamiento promedio (\mathcal{C})	0.229	0.316	0.565	0.225	0.379	0.619
Triángulos	258	642	1872	46	560	26082
Longitud de trayectoria característica (ℓ)	1.789	1.675	1.584	4.108	2.486	1.487

Cuadro 3.3: Propiedades topológicas de seis redes de mundo pequeño.

Como se mencionó en el capítulo 2, podemos generar gráficas de mundo pequeño reconectando o añadiendo aristas en o a una red $2k$ -regular; el primer método fue propuesto por Watts y Strogatz por lo cual llamaremos a este método WS y el segundo, propuesto por Newman y Watts, lo llamaremos método NW. Si bien ambos modelos son análogos en cuanto a las propiedades de las redes generadas, es obvio que no se tendrán las mismas propiedades dado el mismo conjunto de parámetros N , p y k como se observa en el Cuadro 3.3. El método WS nos permite controlar el número de aristas en la red por lo que este modelo es útil para comparar sus propiedades con la red regular en base a la cual son generadas. Por otro lado, el método NW asegura que la red estará conectada para cualquier probabilidad p lo cual puede no ocurrir en las primeras. Como se verá mas adelante, estas diferencias se ven reflejadas en los eigenvalores de la matriz de acoplamiento debido a que el método NW conserva la red regular con la cual es generada, y esto a su vez influye en la sincronización, como es de esperarse. Para ver a detalle el proceso descrito antes, se remite al lector al Apéndice C.3 donde se incluye el código en **Python** utilizado.

Comparando la **Red 1** (Fig. 3.28) del Cuadro 3.3 con una red 12-regular (con igual número de aristas) con diámetro $\text{Diam}(K_{12}) = 5$, coeficiente de agrupamiento $\mathcal{C}_K = 0.682$ (750 triángulos) y longitud de la trayectoria característica $\ell_K = 2.551$, nos percatamos de lo siguiente: el diámetro de la red de mundo pequeño es menor, lo que indica que los nodos están más cerca entre sí. Esto se debe a las conexiones de largo alcance que se generan, y se ve reflejado a su vez en la reducción de la longitud de la trayectoria característica ℓ . También es importante notar que el coeficiente de agrupamiento en las redes regulares analizadas hasta

ahora es tal que $\mathcal{C}_K \geq 0.5$ lo cual es una propiedad característica en ese tipo de redes. Las redes de mundo pequeño, por su parte, tienen un coeficiente de agrupamiento mayor al que poseen las gráficas aleatorias de Erdős y Renyi⁸ lo cual, junto con una longitud corta de la trayectoria característica, constituyen la propiedad de *mundo pequeño*. En términos más simples lo primero indica que la probabilidad de que un nodo C sea vecino simultáneo de A y B es mayor que en una red aleatoria, y lo segundo muestra que un nodo arbitrario, digamos A , está en promedio a $\ell = 1.789$ (2 pasos) de cualquier otro nodo en la red.

La **Red 2** y **Red 3** del Cuadro 3.3 comparan las propiedades entre una red generada con el modelo de WS y con el de NW, respectivamente, con los mismos parámetros N, p y k . En la **Red 4**, debido a que $p = 0.2$, se reconecta una arista por cada 5 nodos, lo cual suma un total de 20 aristas reconectadas de un total de 200; comparándola con la red regular **3** en el Cuadro 3.1 se observa que el hecho de reconectar unas cuantas aristas en la red de mundo pequeño produce una disminución casi a la tercera parte del diámetro y más de cuatro veces en la longitud de la trayectoria característica. También se puede comparar la **Red 6** con la red aleatoria **4** en el Cuadro 3.2 pues tienen un número similar de aristas y un grado promedio similar: se observa también que ℓ es similar en ambas, sin embargo el coeficiente de agrupamiento es mayor en la red de mundo pequeño, como es de esperarse.

Nuevamente la dinámica en las redes está dada por la ecuación (3.5)

$$x_{n+1}^i = F(x_n^i) - \varepsilon \sum_{j=1}^N R_{ij} F(x_n^j), \quad (3.12)$$

en la cual $\mathbf{R} = (R_{ij})$ representa la matriz de acoplamiento definida en términos de la matriz Laplaciana y la matriz diagonal como $R_{ij} = L_{ij}/D_{ij}$ si $D_{ij} \neq 0$ ó $R_{ij} = 0$ de otro modo. En general lo segundo se evita utilizando el método de NW con el cual no se pueden tener nodos aislados. Los eigenvalores de \mathbf{R} los denotamos por ρ_k .

Como descubrimos en la sección anterior, una condición *necesaria* en las redes que presenten la condición de estabilidad de *Tipo 1* es que $\rho_N/\rho_2 < \alpha_2/\alpha_1$, ó con ρ_1 en el denominador si es distinto de cero. Entonces lo primero que hay que revisar es que se cumpla dicha condición para las redes de mundo pequeño: en la Figura 3.29(c) se muestra aquel cociente y el comportamiento por separado del mayor y menor eigenvalor distinto de cero para una red generada con el modelo de WS, en la cual se observa que para valores de $k > 12$ el cociente cumple la condición de *Tipo 1* casi para cualquier valor en p . Lo mismo se ilustra en la Figura 3.30(c) para una gráfica de mundo pequeño de NW. Debido a que este tipo de redes son construídas a partir de redes regulares deberían heredar propiedades de éstas; una red $2k$ -regular con $N = 50$ nodos se puede demostrar que es estable a partir del valor $k = 15$ para el cual el estado sincronizado es estable para los valores del párametro ε tales que $0.926 < \varepsilon < 1.0$, por ello resulta natural que las redes de mundo pequeño satisfagan la condición de *Tipo 1* a partir de este valor. Del mismo modo se muestra en la Fig. 3.31 la dependencia de la relación ρ_N/ρ_2 con el número de nodos N en redes de mundo pequeño construídas con el modelo de NW a partir de una red regular con 4 vecinos por nodo; como también se puede observar, ninguna red de este tipo es sincronizable para ningún valor de p .

De este modo estamos en condiciones de calcular la desviación estándar en dos casos que cumplen la condición de *Tipo 1*, a saber: en la Figura 3.32 se descubre que una red del tipo

⁸Esto se hace evidente en redes con una gran cantidad de nodos.

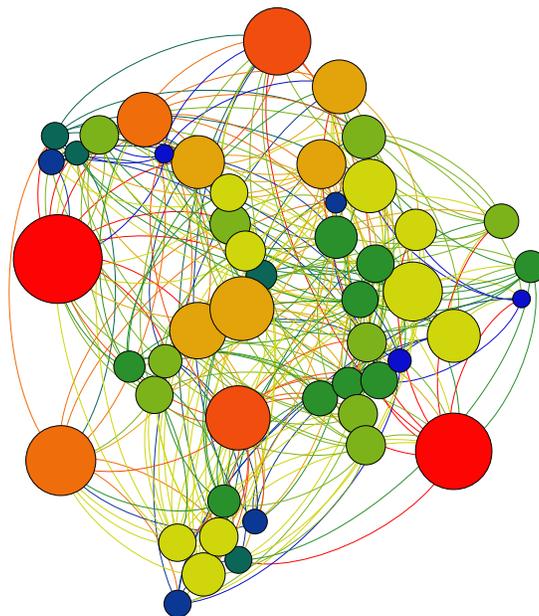


Figura 3.28: **Red 1** del Cuadro 3.3. El tamaño de los nodos es proporcional a la *intermediación* de los mismos, en este caso el número total de trayectorias mínimas es 2450. La intermediación del nodo más grande es $b_{max} = 45.9$ (rojo en la versión a color) y la del más pequeño es $b_{min} = 6.3$ (azul en la versión a color). En una red de contactos sexuales el nodo con mayor intermediación no es sólo aquel que se ha relacionado con mayor gente, sino que también puede representar un individuo en común en el 45.9% de las relaciones futuras. Llamemos a este nodo B, supongamos que se relacionó con A y C (A y C son vecinos de B), y que A no conoce a C, entonces es muy probable que A y C se relacionen en un futuro (por transitividad) pues el camino más corto entre ellos incluye a B.

WS con $N = 50$ nodos se sincroniza a partir de una intensidad de acoplamiento $\varepsilon = 0.8$. También se muestran en la Figura 3.33 las fluctuaciones de la desviación estándar para una red generada con el modelo NW para la cual sorpresivamente no existe sincronización para ningún valor del parámetro ε , contrario a lo que se esperaría. La justificación de este hecho proviene del análisis de estabilidad de los eigenmodos asociados a la matriz de acoplamiento \mathbf{R} , dado por la condición (3.9)

$$\lambda(\alpha) = \ln |1 - \alpha| + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \ln |DF(s_n)| < 0,$$

la cual hace evidente si una red se sincroniza, como en el caso de la red mostrada en la Fig. 3.32, o la razón por la cual no se sincroniza, como en la red de la Fig. 3.33. En la Figura 3.34 se observa que el espectro de eigenvalores de la matriz de acoplamiento \mathbf{R} permanece dentro

de la zona de estabilidad en la primera, i.e $\lambda(\varepsilon\rho_k) < 0$ con $k = 1, \dots, N$ y $\varepsilon > 0.8$. De hecho se observa que el primer eigenvalor ρ_2 se encuentra justo en el límite estable debido a que se eligió $\varepsilon = 0.81$. Por otro lado, en la Figura 3.35 se hace evidente la razón por la cual la segunda red no se sincroniza; si bien se cumple que $\rho_N/\rho_2 < 3.0$, tanto el primer eigenmodo como el segundo caen fuera de la zona de estabilidad, donde $\lambda(\alpha) > 0$, lo cual implica que las perturbaciones al estado sincronizado crecen exponencialmente en la dirección de los eigenvectores asociados. Una forma de hacer que esta red sea sincronizable es disminuyendo el parámetro no lineal a $r = 3.8$, para el cual se ensancha la zona de estabilidad iniciando en $\alpha_1 = 0.35$ y terminando en $\alpha_2 = 1.65$, como se vio en la Sección 3.2; únicamente de esta manera se lograría tener a todos los eigenvalores dentro de la zona de estabilidad de la FME.

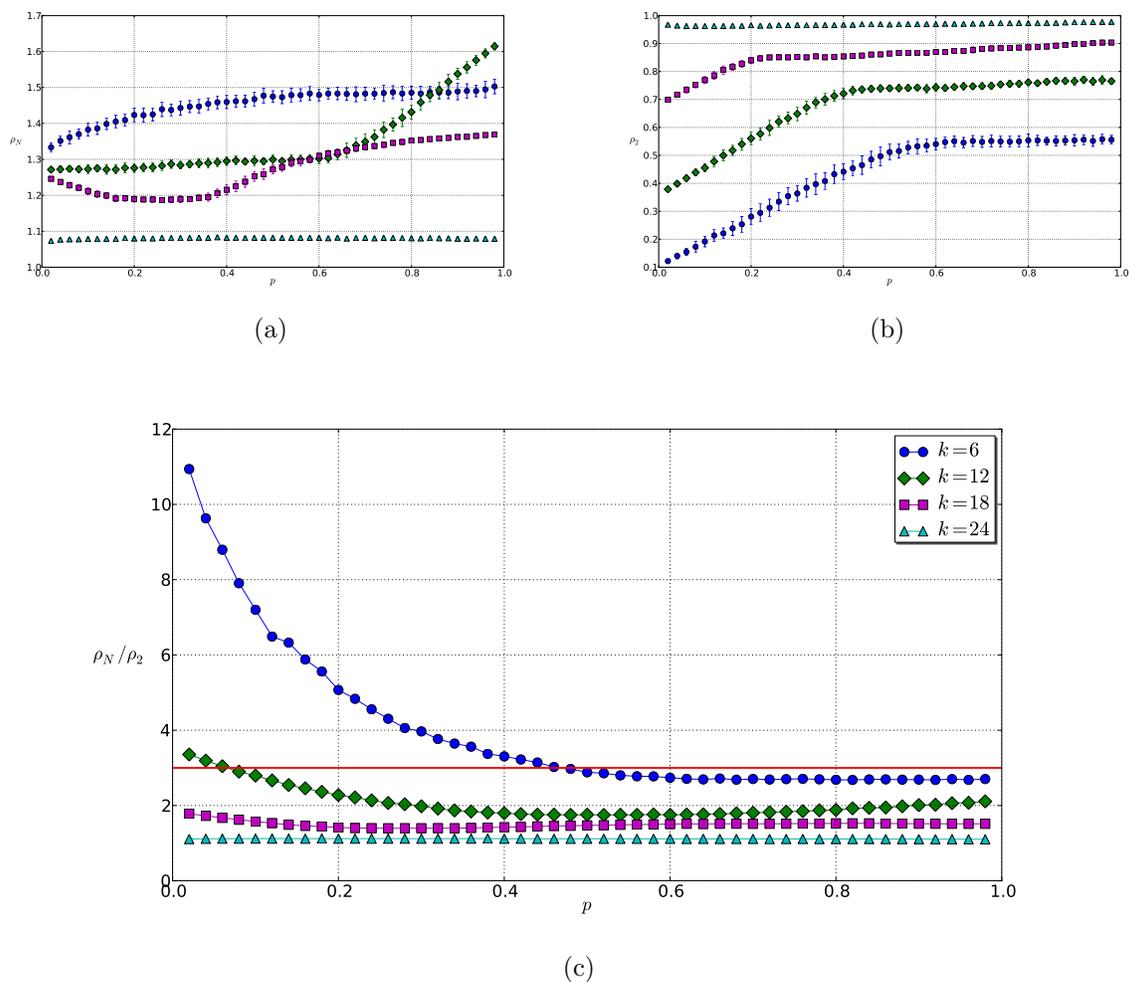


Figura 3.29: En (a) se muestra el eigenvalor de ρ_N asociado a la matriz de acoplamiento \mathbf{R} de cuatro casos de redes de mundo pequeño construidas con el modelo de WS para distintos valores de k en la red $2k$ -regular inicial con 51 nodos, comparado contra la probabilidad p de reconectar aristas. En (b) se muestra ρ_2 contra p , y en (c) se muestra el cociente ρ_N/ρ_2 contra la probabilidad p . Nótese que conforme k se acerca a $N - 1/2 = 25$, el cociente se acerca a 1 cuando p tiende a 1, i.e. se tiene una red regular con acoplamiento global. La leyenda mostrada en (c) es la misma para (a) y (b).

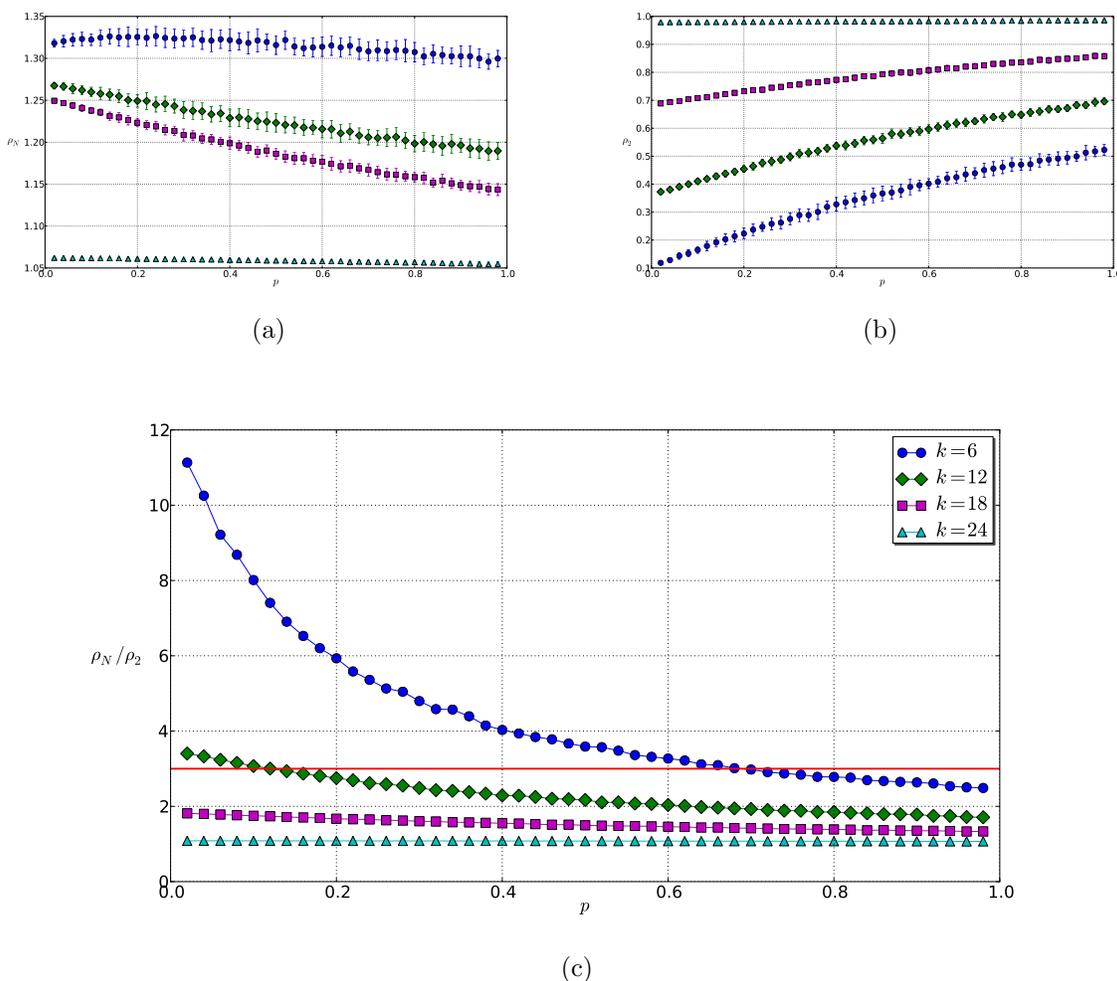


Figura 3.30: En (a) se muestra el eigenvalor de ρ_N asociado a la matriz de acoplamiento \mathbf{R} de cuatro casos de redes de mundo pequeño construídas con el modelo de NW para distintos valores de k en la red $2k$ -regular inicial con 51 nodos, comparado contra la probabilidad p de añadir aristas. En (b) se muestra ρ_2 contra p , y en (c) se muestra el cociente ρ_N/ρ_2 contra la probabilidad p . Nótese que conforme k se acerca a $N - 1/2 = 25$, el cociente se acerca a 1 cuando p tiende a 1, i.e. se tiene una red regular con acoplamiento global. Las redes de mundo pequeño construídas a partir de redes $2k$ -regulares con $k > 12$ muy probablemente se sincronizan. La leyenda mostrada en (c) es la misma para (a) y (b).

Es interesante notar que en las gráficas que muestran la desviación estándar σ para distintos valores de la intensidad de acoplamiento ε , se ha observado la misma evolución de la fluctuación en la desviación estándar conforme aumenta el parámetro ε ; con ε en el rango de valores $0 < \varepsilon < 0.2$ se repite siempre el patrón observado en las Figs. 3.32 y 3.33 para las cuales se observa que la desviación estandar promedio disminuye considerablemente, en $0.2 < \varepsilon \lesssim 0.4$ se observan zonas de relativa estabilidad en donde la desviación estándar promedio se mantiene casi constante, aunque los nodos siguen estando desincronizados y no caen en ningún patrón periódico. Con intensidades de acoplamiento mayor $\varepsilon > 0.4$ se observa que en general la desviación estándar promedio disminuye gradualmente con algunos valores

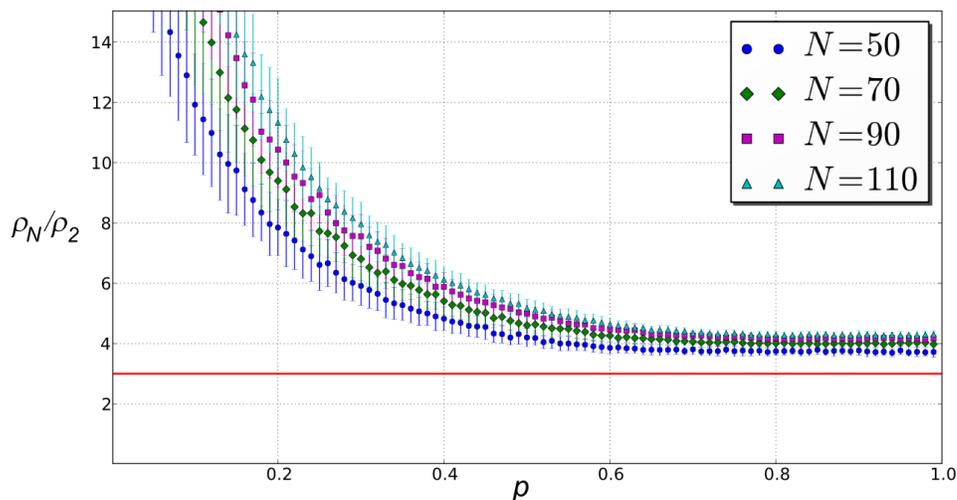


Figura 3.31: Dependencia de ρ_N/ρ_2 contra p comparando cuatro redes de mundo pequeño con diferente número de nodos generadas con el modelo de NW a partir de una red regular con $k = 4$. Conforme N aumenta ρ_N crece y el menor eigenvalor distinto de cero decrece.

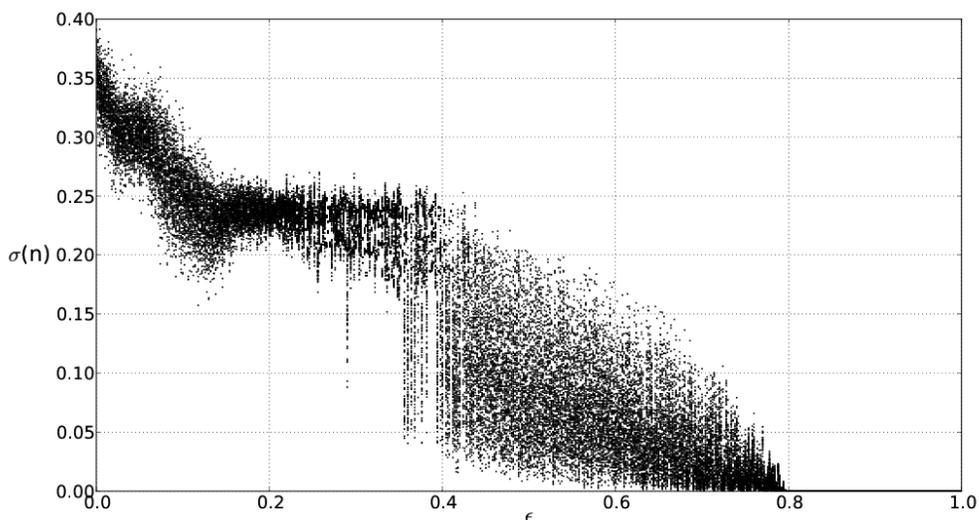


Figura 3.32: Fluctuaciones en la desviación estándar en el estado de los nodos en una red del mundo pequeño con $N = 50$ nodos generada con el modelo de WS. Se itera la red 1000 veces y se grafican las siguientes 100 para cada valor de ϵ con paso 0.01 en el intervalo $[0, 1)$. La red se sincroniza a partir de un valor en la intensidad de acoplamiento $\epsilon = 0.8$.

que comienzan a acercarse a cero, lo cual se logra en $\epsilon = 0.6$.

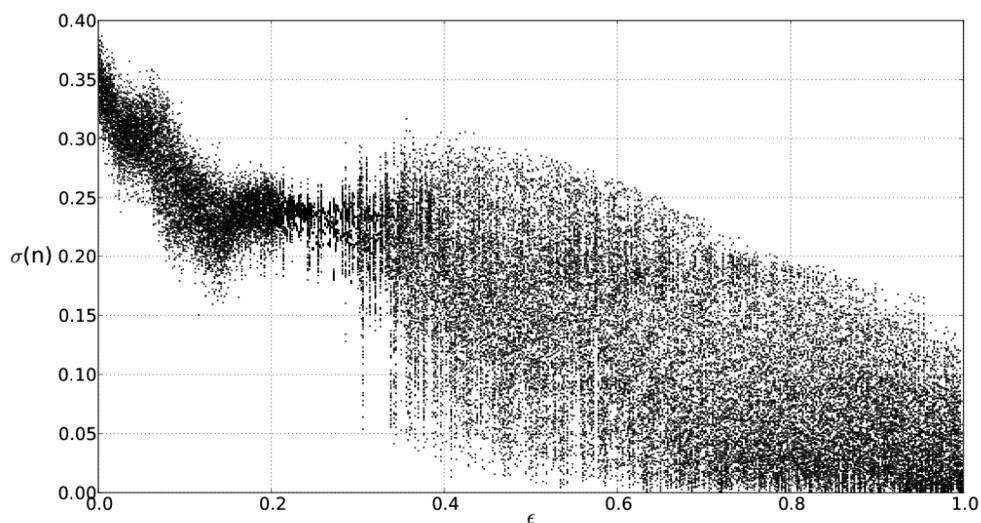


Figura 3.33: Fluctuaciones en la desviación estándar en el estado de los nodos en una red del mundo pequeño con $N = 50$ nodos generada con el modelo de NW. Se itera la red 1000 veces y se grafican las siguientes 100 para cada valor de ϵ con paso 0.01 en el intervalo $[0, 1)$.

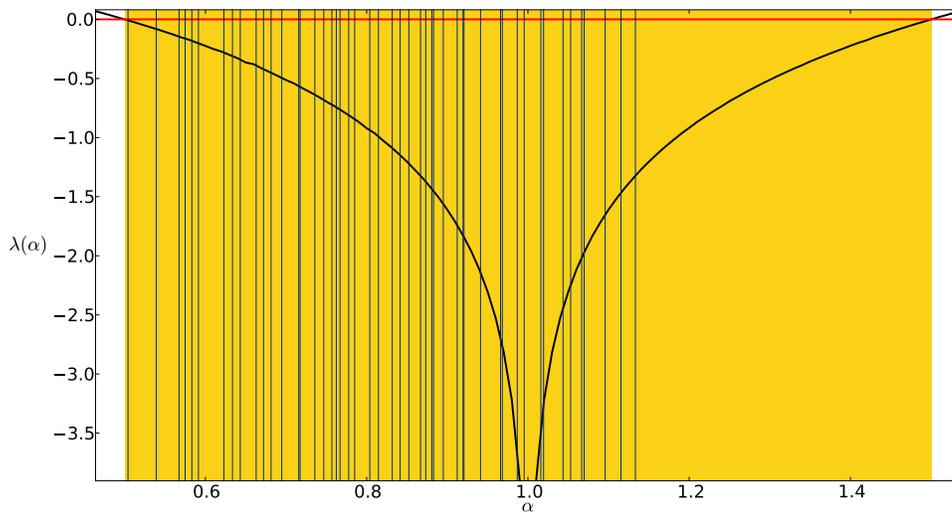


Figura 3.34: Función Maestra de Estabilidad $\lambda(\alpha)$ de una red de mundo pequeño con 50 nodos con dinámica dada por un mapeo logístico con parámetro $r = 4$ y $\epsilon = 0.81$. Las líneas verticales representan el espectro de eigenvalores de la matriz \mathbf{R} multiplicados por la intensidad de acoplamiento ϵ , y la franja vertical de color, aquellos valores de α para los cuales $\lambda(\alpha) < 0$. Todos los eigenmodos caen dentro de la zona de estabilidad.

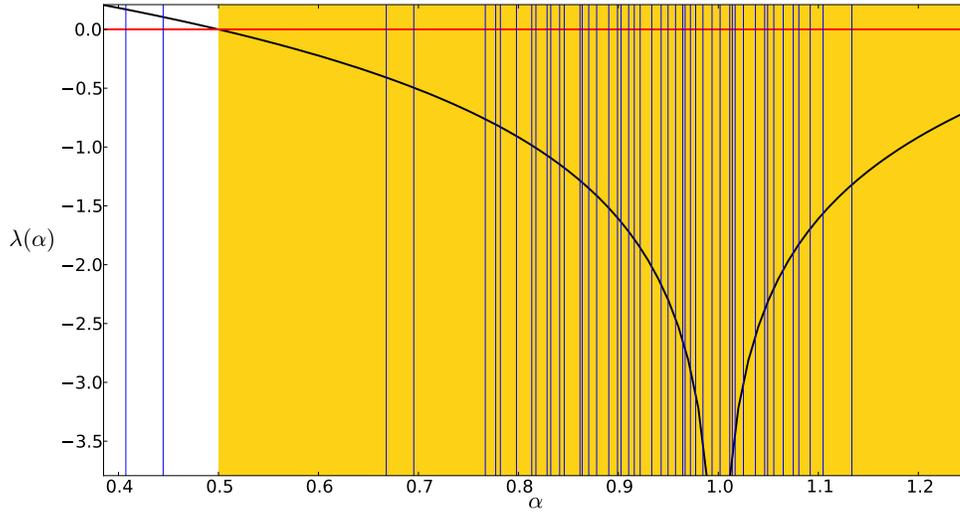


Figura 3.35: Función Maestra de Estabilidad $\lambda(\alpha)$ asociada con una red del mundo pequeño con 50 nodos con dinámica dada por un mapeo logístico con parámetros $r = 4$ y $\varepsilon = 0.9$. Las líneas verticales representan los valores $\varepsilon\rho_k$ con ρ_k los eigenvalores de \mathbf{R} , y la franja vertical son todos los valores de α para los cuales $\lambda(\alpha) < 0$. Los primeros dos eigenmodos son inestables.

En conclusión, el análisis de estabilidad lineal dado por la FME nos provee de información *suficiente* para saber si una red es sincronizable, además de que muestra de forma clara qué eigenmodos son inestables en el caso de que no sea sincronizable. En esta sección aprendimos que hay redes que no se sincronizan para ningún valor de p y ε , y un ejemplo interesante se muestra en la Fig. 3.36; como se observó en la Fig. 3.31 en la cual $\rho_N/\rho_2 > 3$ para todos los valores de p .

Un resultado también interesante, que quizá el lector habrá notado desde el principio, es que las redes WS se sincronizan antes, con un valor en p menor, pese a tener menor número de aristas, lo cual se puede observar en las Figs. 3.30 y 3.29 en las cuales $\rho_N/\rho_2 \approx 3$ cuando $p = 0.5$ y $p = 0.7$, respectivamente; esto sugiere que en la red NW influye la presencia de la red regular por lo que se podría analizar la matriz de acoplamiento separando la parte asociada con la red regular \mathbf{R}_{reg} más otra matriz con las aristas añadidas de forma aleatoria \mathbf{R}_{rand} , esto es $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{reg} + \mathbf{R}_{rand}$.

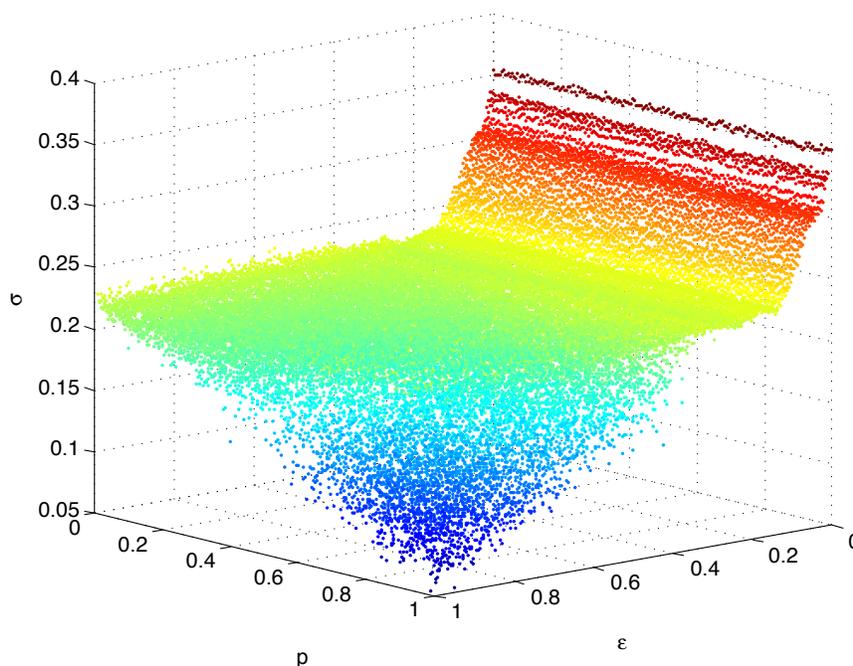


Figura 3.36: Desviación estándar promedio $\bar{\sigma}$ para 40000 redes de mundo pequeño generadas con el método NW con distintos valores de p y ϵ . Para cada pareja de parámetros p, ϵ se itera la red 1000 veces y se promedia σ durante las siguientes 200 iteraciones. Aunque para valores muy grandes en p y ϵ la desviación estándar disminuye, nunca alcanza el estado sincronizado. Entonces hay redes que no se sincronizan para ningún valor en la intensidad de acoplamiento entre sus nodos.

3.4. Redes libres de escala

El proceso de formación de muchas redes involucra un complejo proceso de autoorganización en el cual las interacciones de los elementos determinan la estructura final de la red. Como se comentó en la Sección 2.2.4, el proceso de formación de las redes libres de escala involucra tanto adición de nodos como enlazamiento preferencial, los cuales producen, como resultado, redes donde el “rico se vuelve más rico” [26]. La centralidad de grado c_i que indica la proporción de nodos en la red conectados al nodo i y la intermediación b_i que indica el número de trayectorias mínimas que pasan por un nodo dado así como el grado k_i son propiedades que indican la importancia de un nodo en la red, lo cual también puede ser indicio de debilidades estructurales. Esto último se refiere a que si uno de los nodos con mayor c_i , b_i o k_i es removido podría desconectar por completo la red o simplemente incrementar la longitud de la trayectoria característica, de modo tal que la comunicación entre nodos se ve afectada. Otra forma de ver esto es si imaginamos que la red modela la propagación de un proceso infeccioso, ciertamente para evitar una pandemia es necesario identificar aquellos nodos con mayor c_i , b_i o k_i para controlar la propagación del virus. En general, el riesgo de sufrir un ataque irreversible es mayor en redes heterogéneas, donde la diferencia entre el grado con mayor y menor grado es grande, que en redes homogéneas.

El análisis de extensas bases de datos [26] ha revelado que muchas redes reales presentan

una ley de potencias en la distribución de sus grados; tal es el caso de la WWW o la red de colaboraciones entre actores en los que la probabilidad $P(k)$ de que un nodo interactúe con otros k vértices decae como $P(k) \sim k^{-\tau}$. En el primer ejemplo la probabilidad de que una página tenga hipervínculos a otras k decae como $P(k) \sim k^{-2.1 \pm 0.1}$ mientras que en el segundo ejemplo lo hace como $P(k) \sim k^{-2.3 \pm 0.1}$; la mayoría de las redes reales que presentan una ley de potencias tienen un exponente tal que $2.0 \leq \tau \leq 3.0$, otras presentan una ley de potencias con un corte exponencial (ver Sección 2.2.4). Debido a que el objetivo del presente trabajo no es analizar la aparición de una ley de potencias en la distribución de los grados de los nodos, simplemente generaremos las redes del mismo modo que se hizo con las redes aleatorias: dada la distribución de probabilidad $P(k)$ se genera una lista con el grado de los nodos y se conectan las mitades de aristas hasta haber concluido con todos los nodos. El procedimiento y el código se incluyen en el Apéndice C.2. Esencialmente se analizarán en esta sección redes con ley de potencias con el exponente τ en el intervalo $[2.0, 3.0]$. En el Cuadro 3.4 se incluyen algunos ejemplos con diferentes parámetros en donde se comparan las principales propiedades topológicas.

Propiedades	Red 1	Red 2	Red 3	Red 4	Red 5 (Fig. 3.37)	Red 6 (Fig.3.38)
Número de nodos	50	50	50	100	100	200
Valor inicial de la distribución (k_0)	1	1	6	1	2	1
Exponente de la distribución (τ)	-2.0	-3.0	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0
Aristas	75	35	326	217	300	415
Grado promedio (\bar{k})	2.44	1.4	13.04	4.34	6	4.15
Diámetro (Diam)	4	-	2	3	4	3
Componentes	1	15	1	1	1	1
Coficiente de agrupamiento promedio (\mathcal{C})	0.193	0	0.612	0.370	0.279	0.339
Triángulos	27	0	754	268	192	571
Longitud de trayectoria característica (ℓ)	2.186	-	1.734	2.054	2.134	2.125

Cuadro 3.4: Propiedades topológicas de siete redes libre de escala (con distribución de ley de potencias).

Como se dijo antes, la homogeneidad (o heterogeneidad) en el grado de los nodos determina en gran medida la dinámica en la red; el exponente τ de la distribución de ley de potencias pura controla dicha homogeneidad: cuando $\tau = 2.0$ las redes son heterogéneas, en donde muy pocos nodos tienen un grado alto y la mayoría tiene grado bajo. Conforme se aumenta el parámetro τ el grado de los nodos se homogeneiza. En la **Red 1** del Cuadro 3.4, por ejemplo, el máximo grado es $k_{max} = 41$, el siguiente es $k = 11$ y el resto tiene grado menor que $k = 9$ (la mayoría de estos tiene grado $k_{min} = 1$). En contraste, la **Red 2** es completamente heterogénea ya que el grado k de los nodos está en el intervalo $[1, 4]$, sin embargo en este caso se produce una red disconexa. Como se revelará más adelante, las redes libres de escala generadas de modo tal que la mayoría de los nodos tengan grado $k = 1$ no se sincronizan. Una forma de modificar esto, similar a las redes de mundo pequeño generadas a partir de una red $2k$ -regular donde se controla el número k de vecinos de la red inicial, es definiendo el valor inicial k_0 de la distribución de ley de potencia con la cual se genera la red. De este modo se controla el grado mínimo $k_0 = k_{min}$ y por ende, la heterogeneidad (ver los detalles en el Apéndice C.2). La **Red 3** del Cuadro 3.4, es comparable con la red 1 de

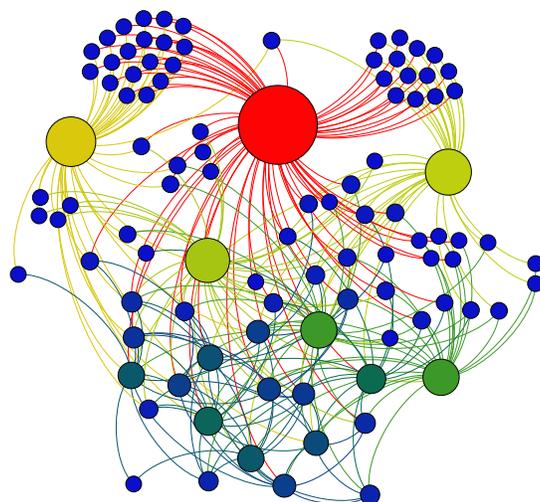


Figura 3.37: **Red 5** libre de escala del Cuadro 3.4 con 100 nodos y exponente $\tau = 2.0$ de la distribución iniciada en $k_0 = 2 = k_{min}$, el grado máximo es $k_{max} = 73$. El tamaño del nodo es proporcional al tamaño del mismo. La homogeneidad de la red aumenta por el sólo hecho de iniciar la distribución en $k_0 = 2$, además esto también ayuda a la cohesión de los nodos pues si se elimina el nodo de grado mayor la red no se desconecta.

mundo pequeño del Cuadro 3.3 pues tienen grado promedio y diámetro similares; sin embargo el coeficiente de agrupamiento \mathcal{C} de la red libre de escala es considerablemente mayor y la longitud de la trayectoria característica ℓ es menor. La diferencia en \mathcal{C} se debe a que muchos nodos están conectados al nodo de grado mayor y por lo tanto la probabilidad de que sean vecinos mutuos se incrementa drásticamente. La **Red 4** y **Red 5** tienen $N = 100$ nodos, la distribución de potencias de la primera se inicia en $k_0 = 1$ y la segunda en $k_0 = 2$. Esta última se muestra en la Fig. 3.37⁹. En la primera, el nodo de grado máximo está conectado al 90% de los nodos lo cual determina que la red tenga un coeficiente de agrupamiento alto pero también su eliminación produciría no sólo que la red se separase sino que muchos nodos quedarían completamente aislados. La segunda, sin embargo, es mucho más compacta por lo que la eliminación del nodo de grado máximo no rompe a la red. Sin embargo, en este caso, el nodo de grado mayor sólo está conectado a 73 nodos por lo que el coeficiente de agrupamiento \mathcal{C} disminuye y la longitud de la trayectoria característica ℓ aumenta. La **Red 6** (Fig. 3.38) tiene una fracción muy pequeña del total de las aristas posibles, que equivale a un poco más

⁹La visualización de estas redes se hace con **Gephi** 0.7 Beta (<http://gephi.org/>).

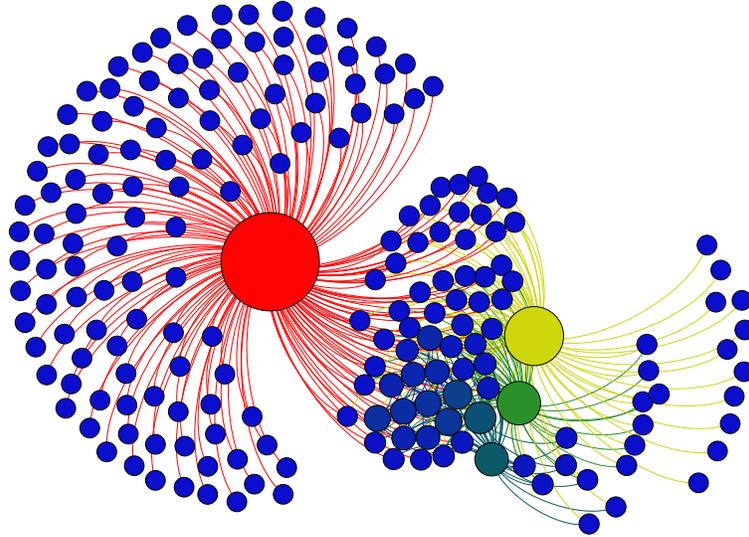


Figura 3.38: **Red 6** libre de escala del Cuadro 3.4 con 200 nodos, y exponente $\tau = 2.0$ en la distribución de ley de potencias la cual inicia en el valor $k_0 = 1 = k_{min}$. La eliminación del nodo de grado máximo ($k_{max} = 173$) produciría casi 100 nodos aislados (sin conexiones).

del 1%; sin embargo tanto el diámetro como la longitud de la trayectoria característica son menores comparadas con una red regular, e incluso con una de mundo pequeño (ver Cuadro 3.3); por ejemplo la **Red 4** tiene el mismo número de aristas que una red de mundo pequeño construída a partir de una red 6-regular, aunque la red libre de escala posee una longitud en la trayectoria característica menor debido al nodo que posee alto grado (llamémosle c a este nodo) y, por ende, una alta centralidad que acerca a la mayoría de los nodos a una distancia $d(c, j) = 2$; tanto el grado como la centralidad suelen estar correlacionadas por lo que, generalmente, el coeficiente de grado máximo es el de máxima centralidad.

En lo relativo a sincronización en redes libres de escala, analizaremos dos casos de los anteriores: la **Red 3** y la **Red 5** (Fig. 3.37). Nuevamente el estado del nodo i -ésimo x_{n+1}^i al tiempo n está dado por la ecuación

$$x_{n+1}^i = F(x_n^i) - \frac{\varepsilon}{D_{ii}} \sum_{j=1}^N L_{ij} F(x_n^j) \quad (3.13)$$

$$= F(x_n^i) - \varepsilon \sum_{j=1}^N R_{ij} F(x_n^j), \quad (3.14)$$

con \mathbf{R} la matriz de acoplamiento con eigenvalores ρ_k para los cuales la condición de estabilidad dada por la Función Maestra de Estabilidad (FME) está dada por

$$\lambda(\varepsilon\rho_k) = \ln(1 - \varepsilon\rho_k) + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \ln |DF(s_n)| < 0, \quad (3.15)$$

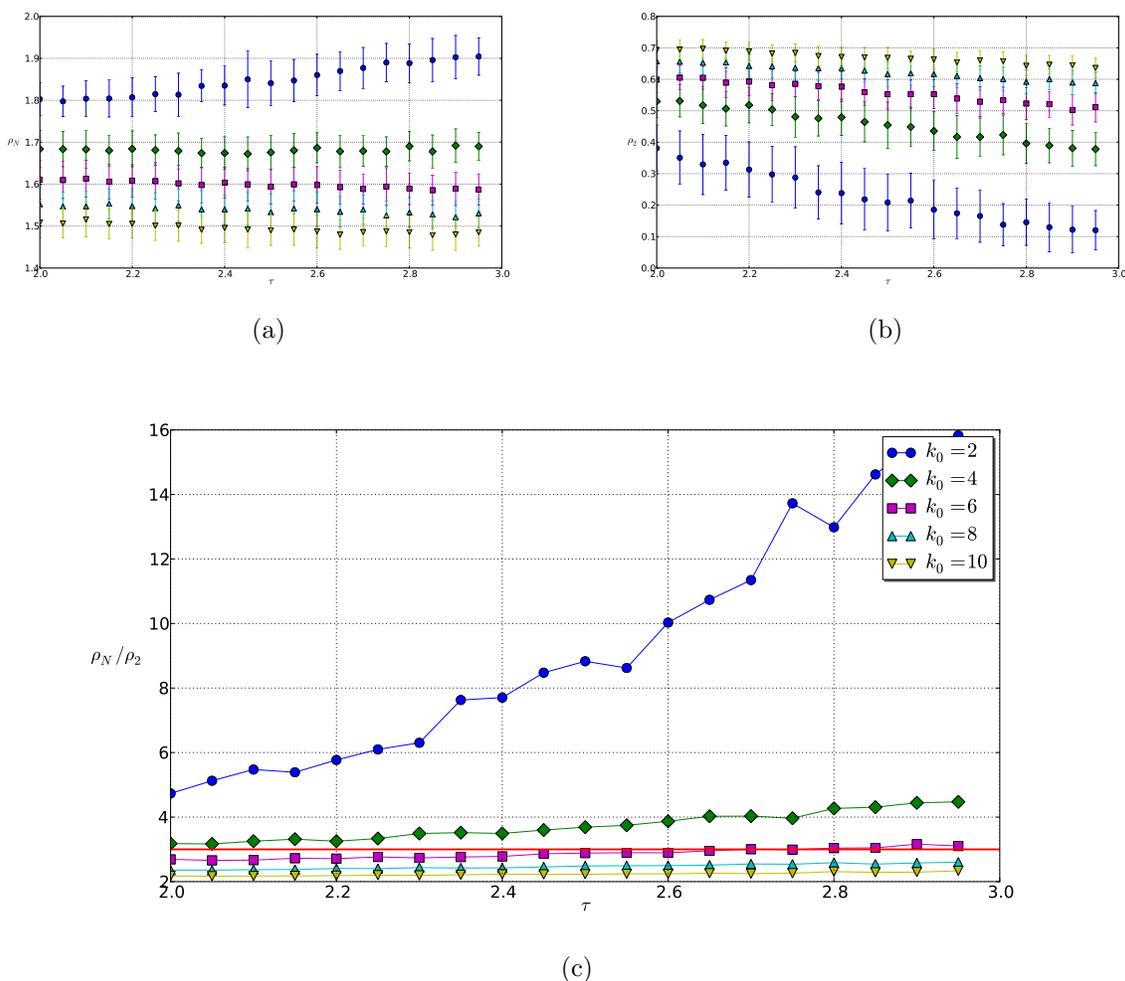


Figura 3.39: En (a) se calcula el máximo eigenvalor ρ_N asociado a la matriz de acoplamiento \mathbf{R} para redes de $N = 50$ nodos generadas con ley de potencias iniciadas en diferentes valores k_0 comparadas con el parámetro τ . Para cada valor de τ se promedian 100 gráficas. En (b) se muestra el mínimo eigenvalor distinto de cero ρ_2 . En (c) se muestra el cociente ρ_N/ρ_2 ; con $k_0 > 6$ una red libre de escala con 50 nodos cumple la condición algebraica $\rho_N/\rho_2 < 3$ para todos los valores de τ . La leyenda en (c) es la misma para las tres figuras.

o de forma genérica

$$\lambda(\alpha) = \ln |1 - \alpha| + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \ln |DF(s_n)| < 0, \tag{3.16}$$

donde el segundo término es el exponente de Lyapunov del mapeo $F(x_n)$, en este caso dado por el mapeo logístico $F(x_n) = rx_n(1 - x_n)$ con r el parámetro no lineal. Antes de continuar con el análisis es interesante comentar las implicaciones de la matriz de acoplamiento \mathbf{R} : la intensidad del acoplamiento ε debe ser normalizada para mantener el valor de los nodos en el intervalo $[0, 1]$ para el cual el mapeo logístico está definido, por lo tanto es *necesario* normalizar ε de algún modo. Si bien se pueden perder algunas propiedades de la matriz Laplaciana

L, el análisis se efectúa de la misma manera. Otra forma de entender esto, quizá menos evidente, es que la influencia de un nodo sobre sus vecinos no se da con la misma intensidad, i.e. depende del grado del nodo que recibe la señal. Por ejemplo, si fuesen neuronas, la señal que una neurona envía a través de las dendritas, aunque es la misma señal, será percibida con mayor intensidad por las neuronas con menos conexiones.

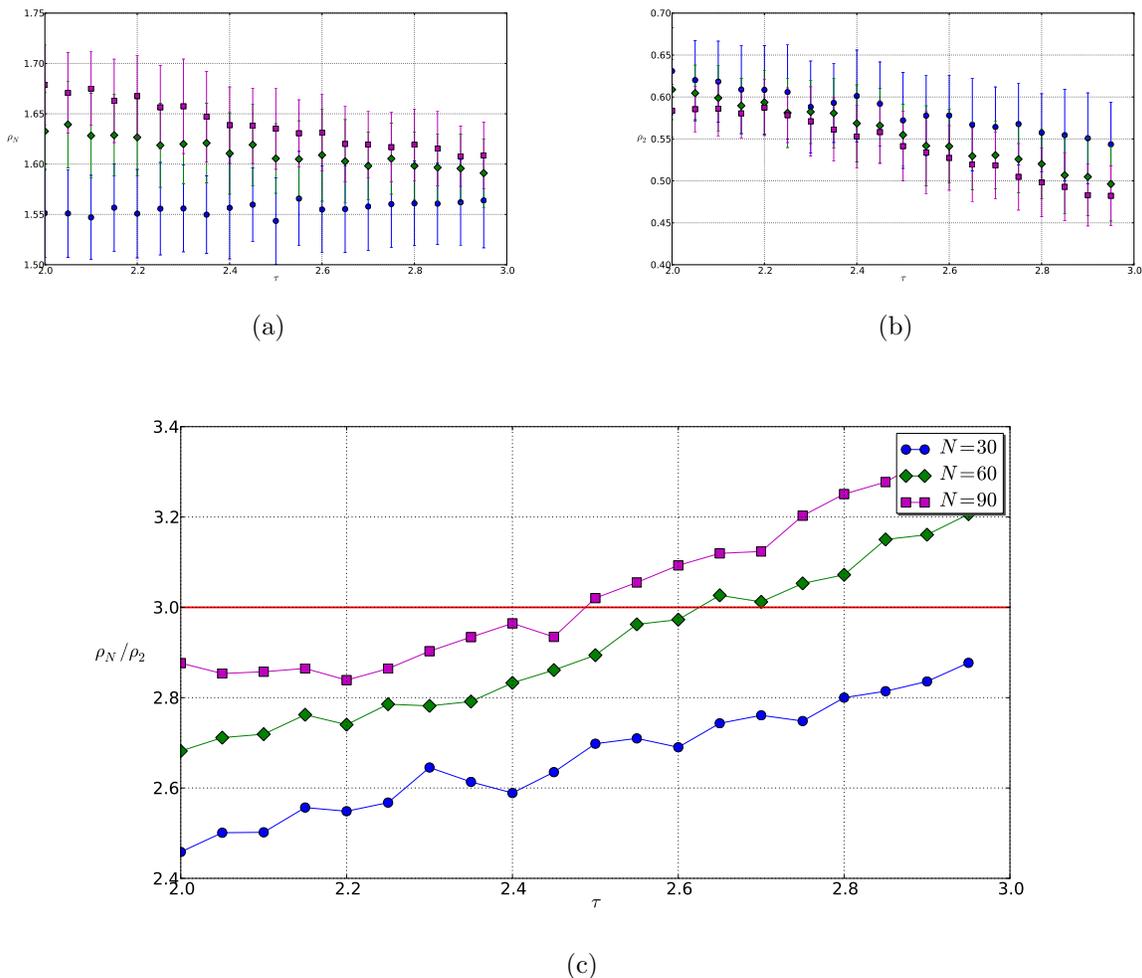


Figura 3.40: En (a) se calcula el máximo eigenvalor ρ_N asociado a la matriz de acoplamiento \mathbf{R} para redes con diferente número de nodos generadas con una distribución de ley de potencias iniciada en $k_0 = 6$, comparado contra el parámetro τ . Para cada valor de τ se promedian 100 gráficas. En (b) se muestra el mínimo eigenvalor distinto de cero ρ_2 . En (c) se muestra el cociente ρ_N/ρ_2 . La leyenda en (c) es la misma para las tres figuras.

Recordamos que la condición algebraica de estabilidad de *Tipo 1* consiste en tener acotados a los eigenvalores $\varepsilon\rho_k$ entre dos valores α_1 y α_2 , lo cual se reduce a la condición $\rho_N/\rho_2 < \alpha_2/\alpha_2 = 3.0$. En las Figs. 3.39 y 3.40 se comparan los eigenvalores asociados a la matriz de acoplamiento \mathbf{R} de redes libres de escala generadas con diferentes distribuciones iniciadas en $k_0 = 2$, $k_0 = 4$, $k_0 = 6$, $k_0 = 8$ y $k_0 = 10$ nodos comparadas con el parámetro τ de la ley de potencias, en donde se observa que el máximo eigenvalor ρ_N no depende de

τ pues es casi constante para todos los valores excepto para el caso $k_0 = 2$ en donde crece conforme aumenta τ . El mínimo eigenvalor distinto de cero ρ_2 decrece conforme τ aumenta, y la pendiente se acentúa conforme k_0 disminuye. También es importante notar que conforme k_0 se incrementa ρ_N disminuye y ρ_2 aumenta, lo cual produce que ρ_N/ρ_2 disminuya; para valores mayores que $k_0 = 6$, una red de 50 nodos cumple la condición de *Tipo 1* para todo valor de τ . Por la forma en que evoluciona el cociente ρ_N/ρ_2 conforme aumenta el parámetro τ , esto es, conforme aumenta la homogeneidad de la red, podemos concluir que es más viable que se sincronice una red heterogénea para la cual el diámetro es menor.

También se comparan en la Fig. 3.40 los eigenvalores ρ_N correspondientes a redes libres de escala con diferente número de nodos generadas con una distribución iniciada en el valor $k_0 = 6$, como la **Red 3** del Cuadro 3.4. Se observa que entre mayor sea el número de nodos mayor es el máximo eigenvalor ρ_N . Tanto ρ_N como ρ_2 decrecen conforme aumenta τ sin embargo el primero lo hace más despacio que el segundo. Con esto se espera que la **Red 3** sea sincronizable para algún valor en la intensidad de acoplamiento ε . Se comprueba que la **Red 3** se sincroniza en el intervalo $0.814 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.898$ como se puede observar en el análisis de la desviación estándar en la Figura 3.42 en donde se grafica la desviación estándar σ para 200 iteraciones después del tiempo transitorio de 1000 iteraciones para cada valor de ε en el intervalo $[0, 1]$. Asimismo se observa una órbita de periodo 1 en los valores de la intensidad de acoplamiento $0.972 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.988$, y una órbita de periodo 4 en los valores $\varepsilon = 0.996$ y $\varepsilon = 0.998$. El mismo análisis aplicado a la **Red 5** (cf. Fig. 3.43) revela que no hay sincronización para ningún valor en la intensidad de acoplamiento ε , lo cual se podría entender desde el análisis de los eigenvalores ρ_k en las Figuras 3.39 y 3.40. Sin embargo, en este último caso se detecta que los nodos se autoorganizan para algunos valores de la intensidad de acoplamiento ε : en los valores $\varepsilon = 0.724$ y $\varepsilon = 0.752$ se encuentra que la desviación estándar cae en una órbita de periodo 6 lo cual implica que cada 6 iteraciones se obtiene el mismo valor de σ , i.e $\sigma(n) = \sigma(n + 6)$. El código utilizado para calcular la desviación estándar se muestra en el Apéndice D.1. Si se quisiera comparar la dinámica promedio de los nodos en una red particular para diferentes parámetros τ y ε se puede calcular la desviación estándar promedio $\bar{\sigma}$ como en la Figura 3.41, donde se muestra $\bar{\sigma}$ para 10000 redes libres de escala con 50 nodos con diferentes parámetros. Se observa aquí que estas redes se sincronizan para valores relativamente grandes en la intensidad de acoplamiento ε y con τ pequeño de modo que las redes sean heterogéneas.

En las Figuras 3.44 y 3.45 se muestra la FME $\lambda(\alpha)$ dada por la Ec. (3.16) asociada a los casos límites observados en la Fig. 3.42 para el estado sincronizado en la **Red 3**, i.e. aquellos valores en la intensidad de acoplamiento ε para los cuales se cumple que $\alpha_1 \approx \varepsilon\rho_2$ y $\varepsilon\rho_N \approx \alpha_2$, respectivamente. El primer caso, asociado al límite inferior, corresponde a un valor $\varepsilon = 0.82$, y el límite superior corresponde a un valor $\varepsilon = 0.892$. En el Apéndice D.2 se incluye el código utilizado para calcular la FME, el cual también puede ser utilizado para calcular el exponente de Lyapunov λ de cualquier mapeo unidimensional.

En el estudio de sincronización se ha encontrado que, para el acoplamiento dado por la matriz Laplaciana \mathbf{L} en la dinámica de los nodos, las redes libres de escala se comportan opuesto a lo esperado; en el análisis de los eigenvalores de la matriz de acoplamiento (similar al expuesto en las Figs. 3.39 y 3.40) se encuentra que las redes con menor τ tienen un diámetro menor que aquellas más homogéneas con valores mayores del exponente τ , sin embargo las de menor diámetro presentan valores muy grandes del cociente γ_N/γ_2 lo cual no satisface

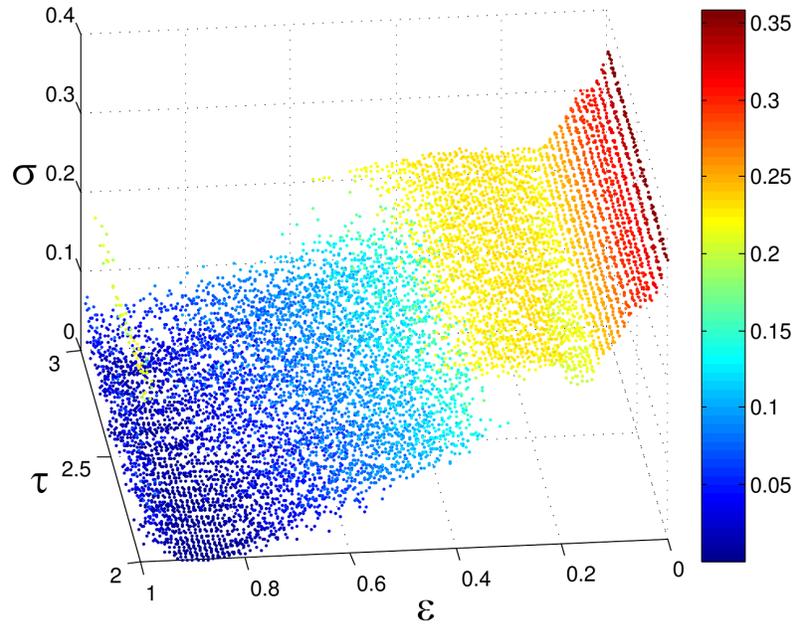


Figura 3.41: Desviación estándar promedio $\bar{\sigma}$ de 10000 redes libres de escala con diferentes parámetros τ y ϵ , el exponente de la ley de potencias y la intensidad de acoplamiento, respectivamente.

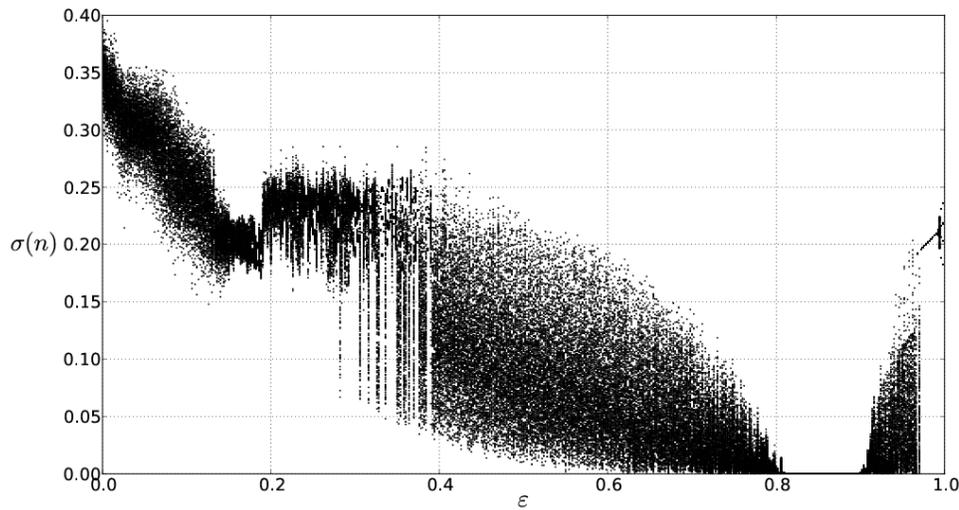


Figura 3.42: Fluctuaciones en la desviación estándar σ del estado de los nodos en la **Red 3** del Cuadro 3.4 correspondiente a una red libre de escala con 50 nodos y parámetros $\tau = 2.0$ y grado mínimo $k_0 = k_{min} = 6$ de la distribución de ley de potencia con la cual se genera. La zona de sincronización se observa en los valores de la intensidad de acoplamiento tales que $0.814 \lesssim \epsilon \lesssim 0.898$. Se observa también una órbita de periodo 1 en los valores de la intensidad de acoplamiento $0.972 \lesssim \epsilon \lesssim 0.988$, y una órbita de periodo 4 en los valores $\epsilon = 0.996$ y $\epsilon = 0.998$.

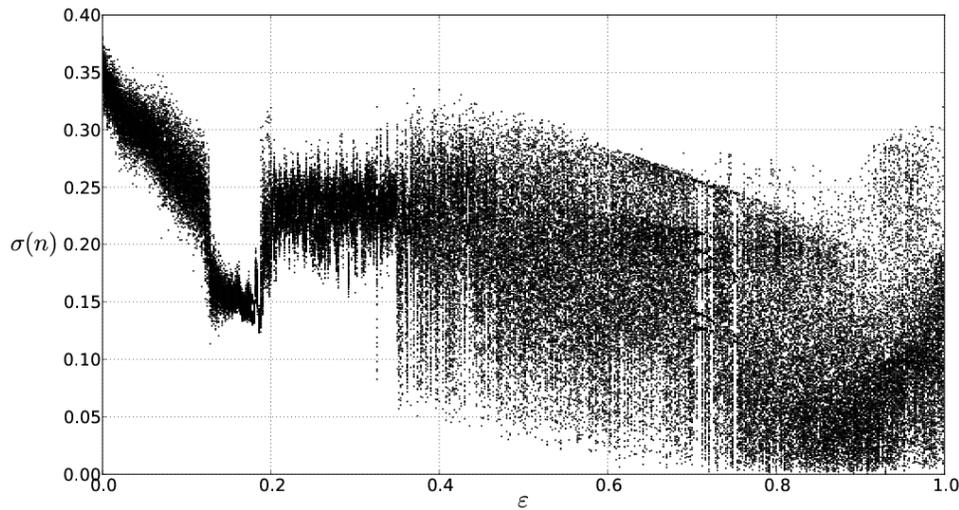


Figura 3.43: Fluctuaciones en la desviación estándar σ del estado de los nodos en la **Red 5** del Cuadro 3.4 correspondiente a una red libre de escala con 100 nodos y parámetros $\tau = 2.0$ y grado mínimo $k_0 = k_{min} = 2$ de la distribución de ley de potencia con la cual se genera. Se encuentran algunas dinámicas interesantes: en los valores $\epsilon = 0.724$ y $\epsilon = 0.752$ se encuentra que la desviación estándar cae en una órbita de periodo 6, i.e. $\sigma(n) = \sigma(n + 6)$.

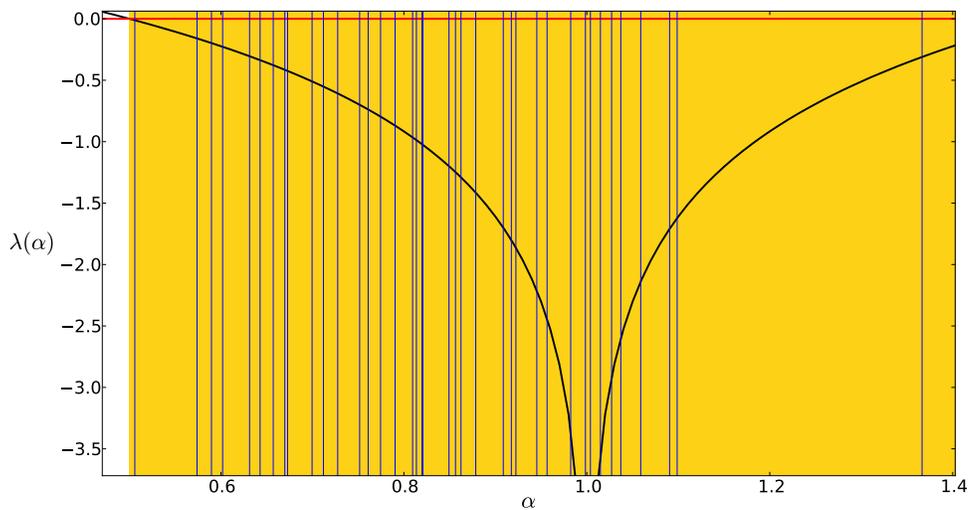


Figura 3.44: Función Maestra de Estabilidad $\lambda(\alpha)$ de la **Red 3** del Cuadro 3.4 con 50 nodos. Las líneas verticales representan los valores $\epsilon\rho_k$ con $\epsilon = 0.82$ y ρ_k los eigenvalores de la matriz de acoplamiento \mathbf{R} . La franja (en amarillo para la versión de color) se ubica en los valores α para los cuales $\lambda(\alpha) < 0$; en el límite izquierdo de la franja se observa a $\epsilon\rho_2$ tal que $\alpha_1 = 0.5 \lesssim \epsilon\rho_2$.

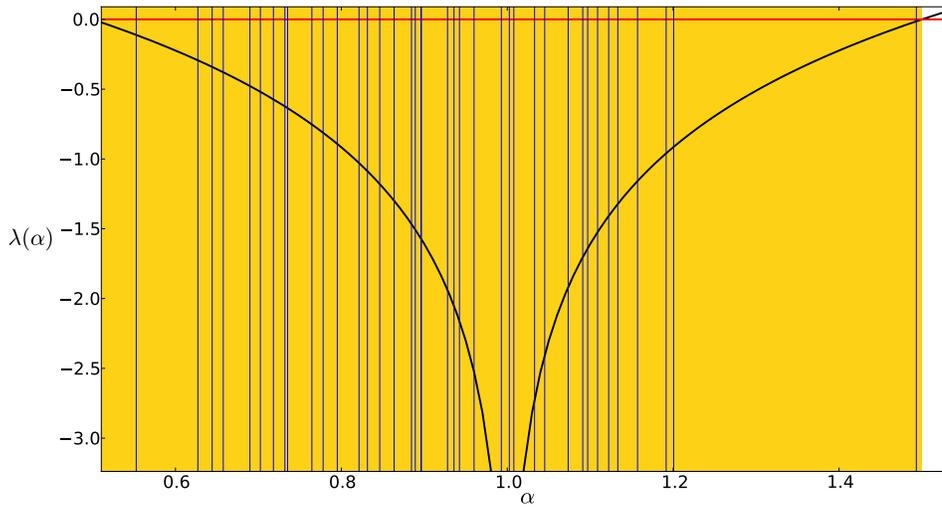


Figura 3.45: Función Maestra de Estabilidad $\lambda(\alpha)$ de la **Red 3** del Cuadro 3.4 con 50 nodos. Las líneas verticales representan los valores $\varepsilon\rho_k$ con $\varepsilon = 0.892$ y ρ_k los eigenvalores de la matriz de acoplamiento \mathbf{R} . La franja (en amarillo para la versión de color) se ubica en los valores α para los cuales $\lambda(\alpha) < 0$; en el límite derecho de la franja se observa a $\varepsilon\rho_N$ tal que $\varepsilon\rho_N \lesssim \alpha_2 = 1.5$.

la condición necesaria para que una red se sincronice. De esta manera, se sincronizan más fácilmente las redes libres de escala con mayor diámetro, esto es, las redes más homogéneas; esta paradoja es llamada la *paradoja de heterogeneidad* [42]. La explicación de por qué ocurre de este modo es que los nodos de mayor grado, debido a que reciben señales de diversos nodos con estados muy diferentes, no logran sincronizarse. Sin embargo el análisis realizado con los eigenvalores (γ_N/γ_2) no incluye en ningún momento el estado de los nodos por lo que el argumento debe hacer alusión únicamente a la topología de la red.

En contraste, utilizando la matriz de acoplamiento \mathbf{R} definida en términos de la matriz Laplaciana y Diagonal como $R_{ij} = L_{ij}/D_{ii}$ si $D_{ii} \neq 0$, y $R_{ij} = 0$ de otro modo, no produce ninguna paradoja; las redes de menor diámetro, aquellas con $\tau \sim 2$, satisfacen la condición de estabilidad $\rho_N/\rho_2 < \alpha_2/\alpha_1$ antes que las redes con mayor τ .

Capítulo 4

Conclusiones

El análisis de sincronización mediante las ecuaciones maestras de estabilidad, y sus funciones maestras de estabilidad asociadas a los exponentes de Lyapunov del sistema, permite encontrar la zona de sincronización en redes regulares, debido a que se encuentra el intervalo del parámetro de la intensidad del acoplamiento ε en el cual se produce sincronización completa, esto es, donde todos los nodos evolucionan en el tiempo exactamente con el mismo estado caótico. De igual forma, el no haber sincronización revela la inestabilidad de uno o varios eigenmodos causantes de ello. Por otro lado, en redes con acoplamiento más complejo, donde se normaliza la influencia de los nodos por el número de nodos acoplados a un cierto nodo, no es posible encontrar una expresión general de las cotas inferior y superior del intervalo de sincronización. En estos casos se procede de otro modo: la condición necesaria que deben cumplir los eigenvalores de la matriz de acoplamiento es aquella condición algebraica $\rho_N/\rho_2 < \alpha_2/\alpha_1$ dada por los cocientes entre el mayor eigenvalor y el menor distinto de cero, y los valores de α_1 y α_2 ; en el caso donde la dinámica de los nodos en la red está dada por un mapeo unidimensional, se encuentran a partir de la función maestra de estabilidad $\lambda(\alpha) = \ln|1 - \alpha| + \lambda = 0$, donde λ es el exponente de Lyapunov del mapeo. Recordemos que para el mapeo logístico $\lambda = \ln 2$, y por lo tanto la condición algebraica es tal que $\rho_N/\rho_2 < 3.0$. Puesto que dicha condición elimina la dependencia del parámetro ε , se desconoce el valor de ε para el cual una red que cumple dicha condición, se sincroniza. Una implicación fundamental de lo anterior es que hay redes que, independientemente del valor en la intensidad del acoplamiento ente sus nodos, no se sincronizan, como se encontró en algunas redes de mundo pequeño.

En las redes regulares, debido a que el acoplamiento es el mismo para todos los nodos, se conoce con precisión la zona de sincronización. Sin embargo, dicho análisis impide en general conocer las dinámicas encontradas fuera de la zona de sincronización, tales como: fases ordenadas en donde se suprime el caos en los nodos y estos se auto-organizan en pocos clusters, fases donde los nodos se sincronizan y forman clusters siguiendo una dinámica caótica, intermitencia entre fases ordenadas y fases caóticas, o bien fases totalmente caóticas. El análisis de la desviación estandar del estado de los nodos, en cambio, revela las diferentes dinámicas producidas conforme cambia la intensidad de acoplamiento ε entre los nodos; la presencia de órbitas de diferentes periodos sugiere la formación de clusters en la red, sin embargo no es posible revelar ni el tamaño ni el número de los clústers generados. Para ello se puede graficar directamente la evolución del estado de los nodos en el tiempo y revelar, por completo, la dinámica de los nodos.

El acoplamiento utilizado en las redes no regulares, impuesto por la dinámica de los nodos, puede presentar algunos inconvenientes respecto al acoplamiento “natural”. Recordemos que fue necesario normalizar el término de acoplamiento por el número de vecinos del nodo bajo análisis, de modo tal que la nueva matriz de acoplamiento \mathbf{R} quedó definida en términos de la matriz Laplaciana y la matriz diagonal como $(R_{ij}) = (L_{ij})/(D_{ii})$. Como se explicó en la Sección 3.2 dicha matriz no es simétrica y sus renglones no suman cero, de manera que los eigenvalores podrían ser complejos y el menor eigenvalor ρ_1 podría ser distinto de cero. En los casos analizados, sin embargo, los eigenvalores fueron reales y el análisis de estabilidad se concentró en la parte real. Es importante comentar que el encontrar eigenvalores complejos no presenta ningún problema, pues el caso general de la función maestra de estabilidad $\lambda(\alpha + i\beta)$ fue definido en el plano complejo; lo anterior produciría una superficie para la cual se tendría que cumplir que $\lambda(\alpha + i\beta) < 0$ y en particular que $\lambda(\text{Re}(\varepsilon\rho_k) + i\text{Im}(\varepsilon\rho_k)) < 0$. Físicamente,

el acoplamiento dado por la matriz \mathbf{R} indica que la intensidad con la que un nodo j afecta a un nodo i depende del grado de este último, lo cual, aplicado a algunos sistemas reales, podría no describir el problema de forma precisa e incluso alterar por completo la dinámica.

Lo anterior puede ser ilustrado con las redes libres de escala. Por un lado, la condición algebraica relacionada con los eigenvalores de la matriz Laplaciana en redes libres de escala, con una ley de potencias $P(k) \sim k^{-\tau}$ en el grado de sus nodos, produce una paradoja si ingenuamente se piensa que las redes con menor diámetro se sincronizan más fácilmente que aquellas de diámetro mayor; en las redes libres de escala ocurre al revés: entre más heterogénea es una red y τ es menor, tiene menor diámetro, sin embargo se encuentra que el cociente γ_N/γ_2 es muy grande; si se aumenta el valor de τ , aumenta la homogeneidad de la red pero también aumenta su diámetro, pero siempre se satisface la condición $\gamma_N/\gamma_2 < \alpha$ para algún α . Por otro lado, si se utiliza el acoplamiento dado por la matriz \mathbf{R} no se presenta la paradoja de heterogeneidad; las redes con menor diámetro se sincronizan mejor que aquellas más homogéneas. De algún modo se minimiza la influencia de los pocos nodos con alto grado y centralidad por el hecho de redefinir la matriz de acoplamiento del modo en que se hace.

En las redes de mundo pequeño se encontró que las generadas mediante el modelo de Watts-Strogatz se sincronizan antes que las creadas con el método de Newman- Watts pese a tener menor número de aristas. Las primeras, recordamos, reconectan las aristas presentes en una red regular mientras que las segundas añaden aristas a dicha red regular. La explicación de ello se alude a que una red de NW conserva la red regular con la que se genera, y esto ciertamente afecta la topología de la red y en consecuencia el espectro de eigenvalores asociado. Por ejemplo, ρ_N en una red generada con el modelo WS, fluctúa conforme se aumenta la probabilidad p de reconectar aristas, es decir, no hay una tendencia clara en su comportamiento. En una red de NW dicha tendencia es clara: ρ_N decrece o permanece constante conforme aumenta p . Entonces dichas diferencias en los eigenvalores producen que las redes WS satisfagan la condición $\rho_N/\rho_2 < 3.0$ antes que las redes de NW.

En el caso donde la dinámica de los nodos está dada por un sistema dinámico continuo, se puede utilizar la matriz Laplaciana como matriz de acoplamiento sin necesidad de normalizar la intensidad de acoplamiento ε . Sin embargo, en estos sistemas existe el riesgo de que el estado de los nodos aumente de tal forma que son “expulsados” del atractor por lo que es importante trabajar con ε pequeños.

Naturalmente, algunas generalizaciones al problema analizado en el presente trabajo pueden ser estudiadas: Se podría definir una intensidad de acoplamiento variable introduciendo pesos en las aristas, o se podría estudiar la sincronización en redes dirigidas. Se debe tener en cuenta que el hecho de añadir variables a un problema no necesariamente implica que el modelo lo describe mejor. Sin embargo, si pueden encontrarse dinámicas nuevas e interesantes con lo cual se es capaz de describir a otros sistemas. Como primera aproximación, el modelo descrito en este trabajo puede modelar la sincronización en redes neuronales, donde usualmente se piensa el estado de una neurona como un oscilador periódico mas un término que añade ruido.

Apéndice A

Resultados en teoría de gráficas

Por completez se incluyen en el presente apéndice algunos resultados importantes en teoría de gráficas con lo cual se pueden enriquecer los conceptos abordados en el Capítulo 2.

A.1. Ciclos

A continuación se incluyen dos resultados esenciales en teoría de gráficas, relacionados con ciclos, antes se prueba la desigualdad de Cauchy-Schwarz que será utilizada más adelante.

Lema 1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. *Dados dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

Demostración. Consideremos la función cuadrática para la variable x :

$$|x\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = x^2|\mathbf{a}|^2 - 2x\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + |\mathbf{b}|^2$$

Entonces,

(a) Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} |x\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= 0 \\ \implies x &= \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\left(\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\right)^2 |\mathbf{a}|^2 - 2\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + |\mathbf{b}|^2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\implies \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \quad (\text{A.2})$$

$$\implies \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2. \quad (\text{A.3})$$

(b) Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente independientes,

$$\begin{aligned} |x\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &> 0 \\ \implies x &= \frac{-2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \pm \sqrt{4\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 - 4|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2}}{2|\mathbf{a}|^2} \in \mathbb{C} \\ \implies \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 &< 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, por (a) y (b):

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2. \quad (\text{A.4})$$

O bien, desarrollando (A.4) en términos de las componentes de \mathbf{a} y \mathbf{b} tal que $\mathbf{a} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ y $\mathbf{b} = (k'_1, k'_2, \dots, k'_n)$ queda expresada como

$$\left(\sum_{i=1}^n k_i k'_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n k_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n k'^2_i\right). \quad (\text{A.5})$$

En particular, si $\mathbf{b} = (1, 1, \dots, 1)$:

$$\left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 \leq n \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \right). \quad (\text{A.6})$$

□

Teorema 2. *El conjunto de aristas de una gráfica puede ser particionado en ciclos si, y solo si, cada nodo tiene grado par.*

Demostración. Si una gráfica es la unión de ciclos disjuntos y vértices aislados, los vértices dentro de un solo ciclo tienen grado igual a 2 mientras que un vértice contenido en k ciclos tiene grado $2k$, esto es, en una gráfica formada por la unión de ciclos, todos los nodos tienen grado par.

Supongamos que cada vértice de G tiene grado par y $|E| > 0$. Sea $x_0x_1 \cdots x_l$ una trayectoria de longitud máxima l en G . Puesto que x_0x_1 pertenece a $E(G)$, $k_{x_0} \geq 2$, en consecuencia existe un vértice y que es vecino de x_0 . Además, $y = x_i$ $2 \leq i \leq l$ pues de no ser así, se tendría la trayectoria $yx_0x_1 \cdots x_l$ de longitud $l+1$. Por lo tanto se ha encontrado el ciclo $C^{(1)}$ dado por $x_0x_1 \cdots x_ix_0$. Se repite el proceso con la gráfica inicial menos las aristas contenidas en el ciclo encontrado, y así sucesivamente. De esta manera se tendrá al final el conjunto de ciclos $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(s)}$ tal que $E(G) = \bigcup_{i=1}^s E(C^{(i)})$. □

Para el segundo teorema se utiliza la observación hecha en (2.1) así como el Lema 1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Teorema 3. Teorema de Mantel. *Toda gráfica de orden n y tamaño mayor que $\lfloor n^2/4 \rfloor^1$ contiene un triángulo,*

Demostración. Sea G una gráfica de orden n que no contiene triángulos. Entonces $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) = \emptyset$ para toda arista $xy \in E(G)$, lo cual implica que

$$k_x + k_y \leq n,$$

pues el grado máximo de un nodo es $n-1$ y ningún nodo se cuenta doble, de lo contrario estaría simultáneamente en la vecindad de x y y .

Sumando estas desigualdades para todas las aristas xy , se encuentra que

$$\sum_{xy \in E} (k_x + k_y) \leq n|E|, \quad (\text{A.7})$$

y debido a que k_x aparece k_x veces en la suma anterior, sumando sobre los vértices se obtiene

$$\sum_{x \in V} k_x^2 \leq n|E|. \quad (\text{A.8})$$

Por (2.1) y (A.6),

$$(2|E|)^2 = \left(\sum_{x \in V} k_x \right)^2 \leq n \left(\sum_{x \in V} k_x^2 \right).$$

¹ $\lfloor x \rfloor$ es el menor entero no menor que x

Por lo tanto, por (A.8)

$$(2|E|)^2 \leq n^2|E|,$$

lo cual implica que $|E| \leq n^2/4$. □

A.2. Funciones generadoras

Utilizando las llamadas *funciones generadoras* se pueden deducir algunas propiedades obtenidas en la Sección 2.2.2 mediante otros argumentos. La función generadora fundamental es conocida como $G_0(x)$, asociada a la distribución de probabilidad de los grados k [43, 21], dada una gráfica no dirigida con N vértices, $G_0(x)$ se define por

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^N p_k x^k, \quad (\text{A.9})$$

donde se asume que la distribución p_k está normalizada y por lo tanto

$$G_0(1) = \sum_{k=0}^N p_k = 1. \quad (\text{A.10})$$

Los cálculos realizados se suponen en la región $|x| \leq 1$, para los cuales $G_0(x)$ es convergente. La función generadora $G_0(x)$, y en general cualquier función generadora, tiene diversas propiedades útiles que veremos a continuación:

- La probabilidad p_k está dada por la k -ésima derivada de la función G_0 evaluada en 0,

$$p_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k G_0}{dx^k} \right|_{x=0}. \quad (\text{A.11})$$

Decimos que G_0 “genera” la distribución de probabilidad p_k .

- El promedio sobre la distribución de probabilidad generada a partir de la función generadora, por ejemplo, el grado promedio z en el caso de la función $G_0(x)$, está dado por

$$z = \langle k \rangle = \sum_k k p_k = x \left. \frac{dG_0}{dx} \right|_{x=1}, \quad (\text{A.12})$$

conocido como **primer momento**. En general, el n -ésimo momento de la distribución

se calcula aplicando n veces el operador $(x \frac{d}{dx})$ en la función generadora G_0 como sigue

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(x \frac{d}{dx}\right) \left(x \frac{d}{dx}\right) \cdots \left(x \frac{d}{dx}\right)}_{n \text{ veces}} G_0(x) &= \underbrace{\left(x \frac{d}{dx}\right) \left(x \frac{d}{dx}\right) \cdots \left(x \frac{d}{dx}\right)}_{n \text{ veces}} \sum_k p_k x^k \\ &= \underbrace{\left(x \frac{d}{dx}\right) \left(x \frac{d}{dx}\right) \cdots \left(x \frac{d}{dx}\right)}_{(n-1) \text{ veces}} \sum_k k p_k x^k \\ &= \\ &\vdots \\ &= \sum_k k^n p_k x^k. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle k^n \rangle = \sum_k k^n p_k = \left[\left(x \frac{d}{dx}\right)^n G_0(x) \right]_{x=1}. \quad (\text{A.13})$$

- Si la distribución de una propiedad k es generada a partir de una cierta función generadora, entonces la distribución de la suma de dicha propiedad tomada en m muestras independientes es generada por la m -ésima potencia de aquella función generadora [24]. Por ejemplo, si sumamos el grado de m nodos, la distribución de la suma de sus grados está dada por $[G_0(x)]^m$. Para comprobar que esto es cierto veamos el caso más simple de dos vértices. El cuadrado de la función generadora para un vértice se expande como sigue:

$$\begin{aligned} [G_0(x)]^2 &= \left[\sum_k p_k x^k \right]^2 \\ &= \sum_{j,k} p_j p_k x^{k+j} \\ &= p_0 p_0 x^0 + (p_1 p_0 + p_0 p_1) x^1 + (p_2 p_0 + p_1 p_1 + p_0 p_2) x^2 + \cdots. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

El coeficiente del término n -ésimo será la suma de los productos $p_j p_k$ tal que $j + k = n$ y por lo tanto da la probabilidad de que la suma de dos nodos dé n . Como veremos más adelante, estas propiedades de la función generadora serán utilizadas para derivar algunos resultados fundamentales.

Otra cantidad importante es la distribución de los grados de los nodos a los cuales llegamos siguiendo una arista escogida al azar. Si un vértice tiene muchas aristas, es más probable escoger una que esté conectada a él. Por lo tanto, tomando una arista al azar, la probabilidad de llegar a un nodo siguiéndola es proporcional al grado del nodo, entonces su distribución de probabilidad es proporcional a $k p_k$. La función de distribución correctamente normalizada es

$$\frac{\sum_k k p_k x^k}{\sum_k k p_k} = x \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)}. \quad (\text{A.15})$$

Dado un vértice de grado k , la distribución del grado de cada uno de sus k vecinos está dada por la función (A.15) menos una potencia de x , debido que no consideramos la arista por la cual llegamos al nodo. Entonces la distribución de las aristas restantes está dada por la función

$$G_1(x) = \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)} = \frac{1}{z} G'_0(x), \quad (\text{A.16})$$

donde z es el grado promedio de los vértices (o primer momento de la distribución $\langle k \rangle$). Debido a que $G_1(x)$ es la función generadora de las aristas restantes de uno de los k vecinos del nodo original del cual partimos, la distribución de probabilidad de los *segundos vecinos* del nodo original está dada por la k -ésima potencia de la función G_1 ,

$$\sum_k p_k [G_1(x)]^k = G_0(G_1(x)). \quad (\text{A.17})$$

Análogamente, la distribución de terceros vecinos está dada por $G_0(G_1(G_1(x)))$. El número promedio de segundos vecinos, similar a la Ec. (A.12) es

$$z_2 = \left[x \frac{dG_0(G_1(x))}{dx} \right]_{x=1} = G'_0(1)G'_1(1) = G''_0(1), \quad (\text{A.18})$$

donde se supone que la distribución generada por G_1 está normalizada, y por lo tanto $G_1(1) = 1$.

Del mismo modo como se ha calculado la función que genera la distribución de primeros vecinos ($G_0(x)$) y segundos vecinos ($G_0(G_1(x))$) de un vértice dado, se pueden extender los resultados a vecinos alejados m pasos mediante la función $G_0(G_1(\dots G_1(x) \dots))$ con $m - 1$ composiciones de la función G_1 consigo misma. Si se define la función generadora como $G^{(m)}(x)$ entonces para los m -ésimos vecinos, se tiene

$$G^{(m)}(x) = \begin{cases} G_0(x) & \text{si } m = 1 \\ G^{(m-1)}(G_1(x)) & \text{si } m \geq 2. \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Entonces el número promedio z_m de vecinos a m pasos de un vértice es

$$z_m = x \frac{dG^{(m)}}{dx} \Big|_{x=1} = G'_1(1)G^{(m-1)'}(1) = G'_1(1)z_{m-1}. \quad (\text{A.20})$$

Teniendo en cuenta la condición inicial $z_1 = z = G'_0(1)$ con los primeros vecinos, se puede expresar también como

$$z_m = [G'_1(1)]^{m-1} G'_0(1) = \left[\frac{z_2}{z_1} \right]^{m-1} z_1. \quad (\text{A.21})$$

De dicha expresión se puede deducir la trayectoria más corta ℓ entre dos nodos elegidos al azar; la longitud típica de dicha trayectoria se encuentra de manera aproximada cuando la cantidad de nodos dentro de esa longitud es igual al total de nodos en la red [21], esto es

$$1 + \sum_{m=1}^{\ell} z_m = N, \quad (\text{A.22})$$

con lo cual se puede encontrar, haciendo uso de la Ec. (A.20) la siguiente expresión:

$$\ell = \frac{\ln[(N-1)(z_2 - z_1) + z_1^2] - \ln z_1^2}{\ln(z_2/z_1)}. \quad (\text{A.23})$$

Evalutando esta expresión en el límite $N \gg z_1$ y $z_2 \gg z_1$, se reduce a

$$\ell = \frac{\ln(N/z_1)}{\ln(z_2/z_1)} + 1. \quad (\text{A.24})$$

Esta expresión no es válida si no existe una componente gigante, pues supone que cualquier vector puede ser alcanzado por alguno otro tomado al azar, lo cual, en general, no es posible². Sin embargo, podemos usar la Ec. (A.24.) para calcular ℓ en algunos casos particulares; más adelante se calcula ℓ para una red aleatoria generada con distribución poissoniana.

Otras propiedades importantes en redes aleatorias son el tamaño de las componentes antes de la transición de fase, i.e. sin componente gigante, y el tamaño promedio de la componente gigante después de la transición de fase. Por ejemplo, el tamaño promedio de una componente a la cual pertenece un nodo elegido al azar, en el caso donde no hay componente gigante en la gráfica es [21, 25]:

$$\langle s \rangle = 1 + \frac{G'_0(1)}{1 - G'_1(1)} = 1 + \frac{z_1^2}{z_1 - z_2}. \quad (\text{A.25})$$

Se observa que dicha expresión diverge cuando

$$G'_1(1) = 1, \quad (\text{A.26})$$

lo cual establece el punto en el cual aparece la componente gigante. Otra forma de expresar la misma condición se obtiene a partir de la derivada de la Ec. (A.16) como sigue:

$$G'_1(1) = \frac{G''_0(1)}{G'_0(1)} = \frac{\sum_k k(k-1)p_k}{\sum_k kp_k}, \quad (\text{A.27})$$

donde se ocupa la Ec. (A.9). Entonces, de la Ec. (A.26) se tiene:

$$G'_1(1) - 1 = \frac{\sum_k k(k-1)p_k - \sum_k kp_k}{\sum_k kp_k} = \frac{\sum_k k(k-2)p_k}{\sum_k kp_k} = 0. \quad (\text{A.28})$$

Por lo tanto la transición de fase se presenta cuando se satisface

$$\sum_k k(k-1)p_k = 0, \quad (\text{A.29})$$

de lo cual se concluye que la componente gigante aparece cuando esta suma es positiva. Un argumento similar se puede encontrar de la Ec. (A.25) donde la componente gigante existe si y sólo si $z_2 > z_1$.

²Se remite al lector a la Ref. [21] donde se describen con más detalle las implicaciones de la Ec. A.24

Ejemplo

Se aplicarán los conceptos analizados en esta sección a una gráfica aleatoria generada mediante una distribución binomial para comparar los resultados con los obtenidos al inicio de la sección utilizando otros argumentos. Si bien el tipo de gráfica analizada por Erdős y Renyi está lejos de ser el modelo utilizado para representar redes reales, matemáticamente es el modelo mejor estudiado en cuanto a teoría de gráficas aleatorias se refiere [17]. Como se dijo antes, los grados de los nodos en la gráfica son generados mediante la distribución binomial o bien, con la distribución de Poisson en el límite $N \rightarrow \infty$. En este caso, la probabilidad $p = z/N$ de que una arista entre dos nodos exista es la misma para todos los nodos, y $G_0(x)$ está dada por

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} x^k = \left(1 - \frac{z}{N} + \frac{zx}{N}\right)^N \simeq e^{z(x-1)}, \quad (\text{A.30})$$

donde la primera igualdad es directa³, y la segunda igualdad se vuelve exacta en el límite $N \rightarrow \infty$ por el mismo argumento utilizado en la Ec. (2.19). Resulta trivial mostrar que $G'_0(1) = z$ y que la distribución de los grados se reduce a la distribución de Poisson. Además $G_0(x) = G_1(x)$ en este caso, por lo cual la teoría en este tipo de redes resulta más sencilla. Por ejemplo, se puede encontrar que $z_1 = z$ y $z_2 = z^2$ y por lo tanto, usando la Ec. A.24, la longitud de la trayectoria característica es $\ell = \ln N / \ln z$ [17].

La fracción de la red ocupada por la componente gigante se puede encontrar también utilizando este formalismo, sin embargo se requiere definir la función generadora de la distribución de los tamaños de las componentes, lo cual queda fuera del objetivo de esta sección. Se mencionó antes que dicha fracción satisface que $S = 1 - e^{-zS}$. Con el mismo formalismo también se encuentra que el tamaño promedio de las componentes [21], en este caso, es

$$\langle S \rangle = \frac{1}{1 - z + zS}. \quad (\text{A.31})$$

³El binomio de Newton se define por $(a+b)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} a^{N-k} b^k$.

Apéndice B

Sistemas Dinámicos y Caos

En el presente apéndice se definen los sistemas dinámicos continuos, también llamados *flujos*, y los discretos, mejor conocidos como *mapeos*. Se analizan también algunas de sus propiedades fundamentales; se representa su dinámica en el *espacio fase* y de manera natural surgen los conceptos de *puntos fijos* y *atractores*. Al observar con atención la dinámica de un sistema dinámico en el espacio fase, se observan conjuntos que “atraen” (o “repelen”) al resto de las trayectorias; a estos conjuntos se les llama atractores (o repulsores), los cuales pueden tener la forma de puntos (conjunto de dimensión cero) o trayectorias cerradas, también llamadas *órbitas* (conjuntos de dimensión 1). En sistemas donde dos condiciones iniciales muy cercanas se alejan exponencialmente, puede haber atractores en el espacio fase llamados *extraños* debido a que su dimensión no es entera; dichos sistemas son *caóticos*.

Como se verá más adelante, la forma más simple de encontrar *caos* es en un *mapeo unidimensional* no invertible, como es el caso del *mapeo logístico*. En estos mapeos se producen múltiples *bifurcaciones de periodo* al variar el parámetro del mapeo. Una bifurcación es un cambio cualitativo en la dinámica del sistema como resultado de modificar un parámetro del sistema. Al final se exponen la estabilidad de estados estacionarios y órbitas periódicas, así como una forma de cuantificar el caos mediante *los exponentes de Lyapunov*.

B.1. Sistemas dinámicos

Para entender lo que es un sistema dinámico es esencial entender primero lo que significa que un sistema sea *determinista*. En el caso de un péndulo simple, si se conoce su estado inicial, esto es, su posición φ (ángulo respecto a la vertical) y velocidad angular $\dot{\varphi}$ (donde $\dot{\varphi}$ indica $d\varphi/dt$), entonces se puede conocer su estado a cualquier tiempo. Todos los estados accesibles del sistema son representados en el espacio fase o espacio de estados, el plano $(\varphi, \dot{\varphi})$. Asociada a la ecuación de movimiento $\varphi = \varphi(t)$, la *evolución* del sistema está descrita por $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$, que es la trayectoria descrita por las variables del espacio fase vistas como función del tiempo t . Si $(\varphi(0), \dot{\varphi}(0))$ son los valores del sistema al tiempo $t = 0$, entonces el estado del sistema al tiempo $t > 0$ será representado por el *mapeo* $\Phi((\varphi(0), \dot{\varphi}(0)), t) = (\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$; esto expresa el hecho de que el estado actual del sistema determina todos los estados posteriores, i.e. el sistema es **determinista**. El mapeo

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

es llamado **operador de evolución** del sistema.

Definimos de manera muy general a un **sistema dinámico** como la estructura que consta de un *espacio fase* \mathcal{F} y un *operador de evolución*

$$\Phi : \mathcal{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}.$$

Algunas propiedades importantes de dicho operador se enuncian a continuación:

1. Para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ se cumple que

$$\Phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}. \tag{B.1}$$

2. Si $\varphi(t_1)$ satisface la ecuación de movimiento del sistema, también la satisface $\varphi(t_1 + t_2)$, para toda constante t_2 . Expresado en términos del mapeo se escribe de la siguiente manera:

$$\Phi(\Phi(\mathbf{x}, t_1), t_2) = \Phi(\mathbf{x}, t_1 + t_2). \quad (\text{B.2})$$

Las propiedades (B.1) y (B.2) son conocidas como **propiedades de grupo**. Si reescribimos el mapeo como $\Phi(\mathbf{x})^t = \Phi(\mathbf{x}, t)$, podemos expresar las propiedades de una forma más compacta:

1. $\Phi^0 = \text{Id}_{\mathcal{F}}$ (donde $\text{Id}_{\mathcal{F}}$ es la identidad del mapeo en \mathcal{F})
2. $\Phi^{t_1} \circ \Phi^{t_2} = \Phi^{t_1+t_2}$ (donde \circ indica la composición de mapeos)

Podemos ver al operador de evolución Φ como el mapeo que define el flujo del estado \mathbf{x} a lo largo de la órbita $t \mapsto \Phi^t(\mathbf{x})$ en el espacio fase. Los sistemas dinámicos así definidos son idénticos (si $t \in \mathbb{R}$) a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden: Si Φ es de clase C^2 , i.e., con su segunda derivada continua, dado un vector \mathbf{x} del espacio de estados \mathcal{F} , definimos el mapeo de clase C^1 $\mathbf{f} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0).$$

Entonces la curva $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ es la evolución del sistema dinámico definido por Φ , si y sólo si es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)). \quad (\text{B.3})$$

En general, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ es un vector en \mathbb{R}^N , y $\mathbf{f} = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_N(\mathbf{x}))$, se tienen entonces N ecuaciones diferenciales de primer orden autónomas

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} = f_N(x_1, x_2, \dots, x_N). \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

En principio, dadas las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$, podemos resolver el sistema de ecuaciones en (B.4) y obtener el estado $\mathbf{x}(t)$ al tiempo t ($t > 0$). En 3 dimensiones, podemos dibujar la evolución del sistema mediante la trayectoria u órbita en el espacio de configuración, como se muestra en la Fig. B.1.

También hay sistemas dinámicos *discretos* en el tiempo (se denotará al tiempo con n como *subíndice*, $n = 1, 2, \dots$, y las componentes espaciales se denotarán por *superíndices*). Dichos sistemas son conocidos como *mapeos*; en forma vectorial se escribe como

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n), \quad (\text{B.5})$$

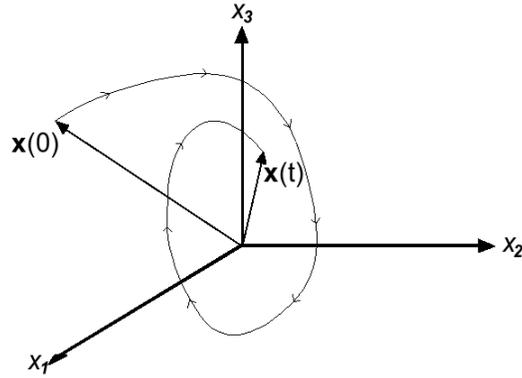


Figura B.1: Espacio de configuración en 3 dimensiones asociado a $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Se observa el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ y la trayectoria u órbita seguida para llegar hasta $\mathbf{x}(t)$.

donde \mathbf{x}_n tiene N componentes, $\mathbf{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)$. Dada la condición inicial \mathbf{x}_0 , obtenemos el estado al tiempo $t = 1$ mediante $\mathbf{x}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$, y con ello el estado al tiempo $t = 2$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{M}^2(\mathbf{x}_0)$, y así sucesivamente. Entonces el estado al tiempo $t = n$ está dado por

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{M}^n(\mathbf{x}_0). \quad (\text{B.6})$$

Más adelante veremos que la complejidad de un sistema dinámico se relaciona directamente con la dimensionalidad del mismo.

B.2. Atractores

En sistemas Hamiltonianos, como en las ecuaciones de Newton para el movimiento de partículas sin fricción, dadas las coordenadas del sistema (por ejemplo, la posición y momento canónicos, q y p), los volúmenes en el espacio fase se preservan ante evolución temporal del sistema. Supongamos que nuestro sistema es de dimensión N . Si tomamos una superficie cerrada S_0 de dimensión $N - 1$ al tiempo $t = 0$, y dejamos evolucionar cada punto de S_0 en el tiempo, entonces al tiempo t se tendrá una superficie S_1 . El volumen N dimensional $V(0)$ encerrado por S_0 y $V(t)$, encerrado por S_1 son *iguales*, $V(0) = V(t)$. Se dice que dicho sistema es **conservativo**. Si por el contrario, el sistema (continuo) no preserva el volumen, se dice que es **no conservativo**. Estos sistemas, también llamados **disipativos**, se caracterizan por la presencia de conjuntos *atractores* en el espacio fase. Estos subconjuntos acotados son regiones a las cuales los volúmenes en el espacio fase convergen asintóticamente.

Consideremos como ejemplo el oscilador armónico amortiguado descrito por

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \nu \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (\text{B.7})$$

En la Fig. B.2 se representa una trayectoria típica ($x_1 = y$, $x_2 = dy/dt$) girando y convergiendo hacia el origen. En este caso el *punto fijo* $x_1 = x_2 = 0$ es el atractor del sistema dinámico

[37].

Como segundo ejemplo, analicemos la ecuación de Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - \eta) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad (\text{B.8})$$

introducida como modelo para describir un oscilador electrónico [37]. En este caso, el conjunto atractor es un *ciclo límite* (u *órbita periódica*). Las condiciones iniciales fuera del ciclo límite se acercan hacia el origen, sin embargo, cuando $t \rightarrow \infty$ convergen a la órbita periódica. Cuando se inicia dentro del ciclo límite, la trayectoria se aleja del origen tendiendo, nuevamente, hacia el atractor. (Ver Fig. B.3).

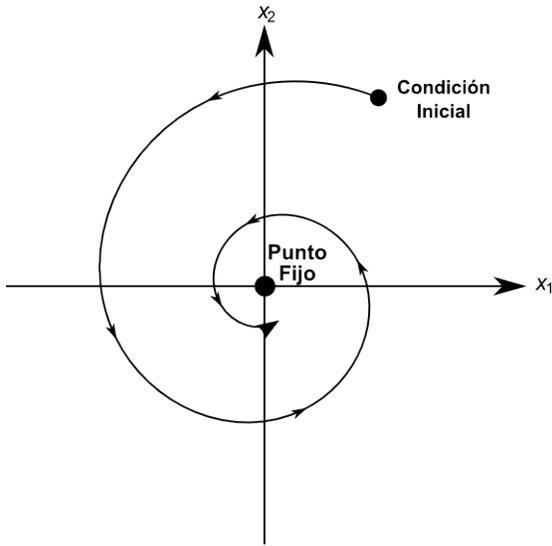


Figura B.2: Punto fijo

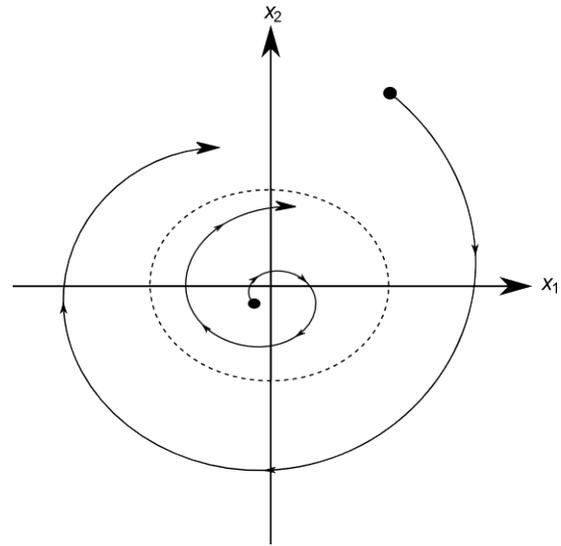


Figura B.3: Ciclo límite

De igual modo, uno se puede referir a los *mapeos* como conservativos o disipativos. Un mapeo conservativo de dimensión N es aquel que preserva volúmenes de dimensión N en el espacio fase en cada iteración. Consideremos un mapeo \mathbf{M} arbitrario, entonces, en términos de la matriz Jacobiana de derivadas parciales, el volumen se conserva si

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) \equiv \left| \det \left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \right| = 1. \quad (\text{B.9})$$

Si $\mathbf{J}(\mathbf{x}) < 1$ en algunas regiones, decimos que el mapeo es disipativo y, del mismo modo que en los sistemas dinámicos continuos, tiene atractores.

En los ejemplos vistos anteriormente encontramos dos casos: en el primero, el atractor es un punto fijo (Fig. B.2), i.e., un conjunto de dimensión cero. En el segundo, el conjunto atractor es una curva cerrada, de dimensión uno (Fig. B.3). En sistemas donde la dinámica es caótica, se encuentran atractores cuya estructura geométrica es más compleja que los vistos en aquellos ejemplos. De hecho, se encuentra que la dimensión de dichos conjuntos no es entera por lo cual se dice que estos atractores son *fractales*, llamados también **atractores extraños**. Un ejemplo típico de dicho atractor (ver Fig. B.4) se encuentra en las ecuaciones de Lorenz [44] que modelan, en dos dimensiones, la convección de un fluido contenido entre

dos capas horizontales cuya diferencia de temperatura Δt se mantiene constante. El líquido es calentado desde la parte inferior. El sistema de Lorenz que modela dicho fenómeno está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^3 :

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(-x + y), \quad (\text{B.10a})$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad (\text{B.10b})$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz, \quad (\text{B.10c})$$

donde los parámetros se eligen generalmente como $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r = 28$. La cantidad x es proporcional a la velocidad del flujo, y se relaciona con la diferencia de temperatura entre la corriente ascendente y descendente, signos similares en x y y denotan que el fluido caliente asciende y el frío desciende. La variable z se relaciona con la distorsión en el perfil vertical de temperatura, un valor positivo indica que el mayor gradiente se encuentra en las fronteras.

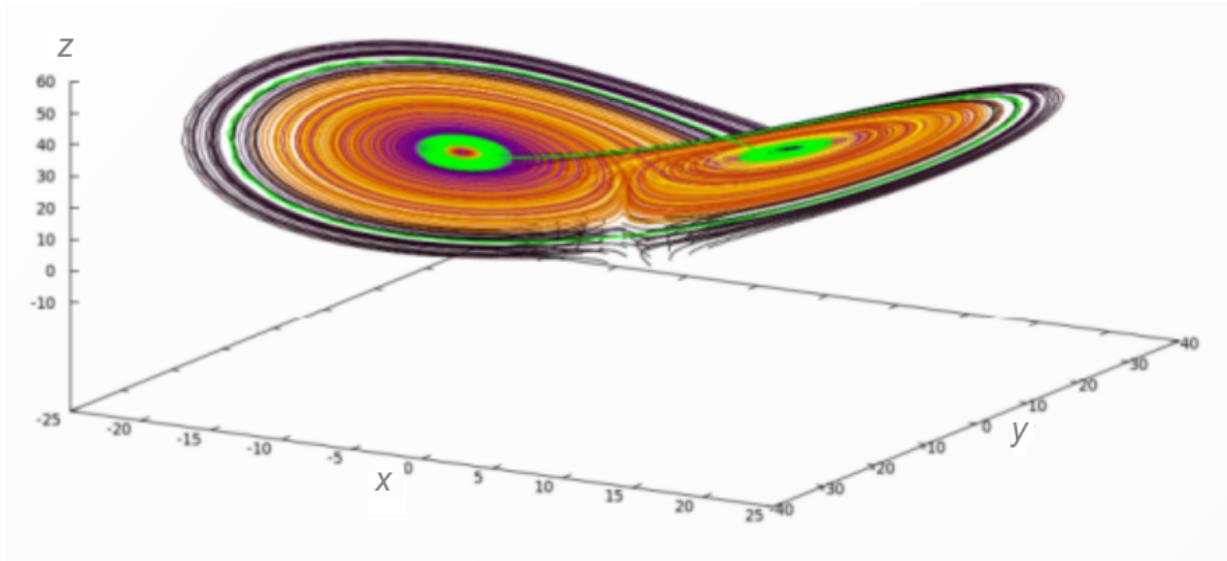


Figura B.4: Conjunto atractor obtenido de las ecuaciones de Lorenz. En este sistema se encuentran tres puntos fijos, $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$, $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ y $(0, 0, 0)$.

Una característica muy particular de los atractores que presentan dinámica caótica es que muestran alta sensibilidad ante ligeros cambios en las condiciones iniciales. Consideremos dos puntos cercanos $\mathbf{x}_1(0)$ y $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_1(0) + \Delta(0)$ en el espacio fase. Imaginemos que evolucionan en el tiempo mediante un sistema dinámico continuo formando las órbitas $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ como se muestra en la Fig. B.5. Al tiempo t , la separación entre las órbitas es $\Delta(t) = \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)$. Si se parte de dos puntos muy cercanos entre sí, de forma tal que $|\Delta(0)| \ll 1$, nos interesa la separación de las trayectorias a un tiempo $t \gg 1$. Si $|\Delta(t)|$ crece exponencialmente en relación a la separación inicial $|\Delta(0)|$, i.e. $|\Delta(t)/\Delta(0)| \approx \exp(\alpha t)$, $\alpha > 0$, se dice entonces que el sistema es sensible a las condiciones iniciales y, por lo tanto, es caótico. Si las trayectorias permanecen acotadas, entonces existe $R > 0$ tal que los valores \mathbf{x} asociados al atractor

cumplen que $|\mathbf{x}| < R < \infty$, i.e., están adentro de una bola de radio R . El caos se relaciona con *impredictabilidad*. De hecho, el trabajo de Lorenz [44] fue motivado por el problema de predecir el clima, sin embargo, con los resultados que ahí se obtienen, hasta “el aleteo de una mariposa” podría provocar cambios drásticos en los resultados, de manera tal que las predicciones realizadas distarían considerablemente.

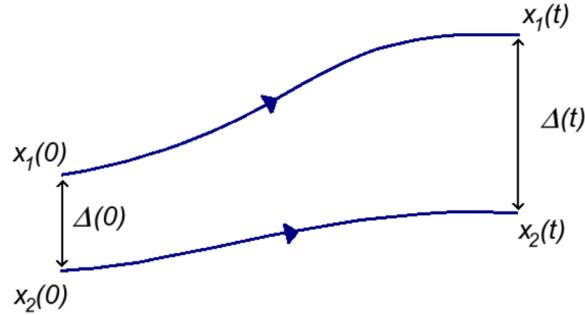


Figura B.5: Evolución en el tiempo de dos condiciones iniciales cercanas.

Como se dijo antes, la dimensionalidad de un sistema se relaciona con la complejidad del mismo. En el caso de sistemas de N ecuaciones diferenciales ordinarias, es suficiente con que $N \geq 3$ para que pueda presentarse caos. En otras palabras, en sistemas con $N = 2$, el caos es descartado de inmediato.

En el caso de sistemas dinámicos discretos la dimensionalidad requerida para que se presente caos es diferente del caso continuo. Antes debemos distinguir entre mapeos *invertibles* y *no invertibles*. Un mapeo \mathbf{M} es **invertible** si, dado \mathbf{x}_{n+1} , podemos determinar \mathbf{x}_n a partir de $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n)$. Si es posible, la solución se denota por

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_{n+1}), \quad (\text{B.11})$$

donde \mathbf{M}^{-1} es el inverso de \mathbf{M} . Por ejemplo, el mapeo unidimensional

$$M(x) = rx(1 - x), \quad (\text{B.12})$$

llamado *mapeo logístico*, no es invertible, pues dado un valor x_{n+1} hay dos posibles valores de x_n de los cuales pudo haberse obtenido.

Si el mapeo es invertible, no puede haber caos a menos que $N \geq 2$ [36]. Si el mapeo es no invertible, puede presentarse caos incluso en mapeos unidimensionales. Por lo anterior, como punto de partida en el estudio del caos, los mapeos unidimensionales no invertibles resultan una herramienta muy útil, ya que muchas propiedades encontradas en sistemas de más alta dimensionalidad también están presentes, de algún modo, en algunos mapeos unidimensionales.

B.3. Mapeos unidimensionales

Para ilustrar la *sensibilidad* de un mapeo $M(x)$ a las condiciones iniciales, se considera la composición del mapeo consigo mismo m veces hasta obtener M^m , donde M^m se define por

$$M^m(x) = M(M^{m-1}(x)) = \underbrace{M(M(M(\dots(M(x))\dots)))}_{m \text{ veces}}$$

Esto es,

$$x_{n+m} = M^m(x_n).$$

En el caso de mapeos unidimensionales, también podemos encontrar tanto *puntos fijos* y *ciclos límite* (u *órbitas periódicas*), como *órbitas caóticas*. Los **puntos fijos** son aquellos x^* tal que $M(x^*) = x$, i.e., aquellos puntos donde el mapeo interseca a la identidad. Las **órbitas de periodo** p son secuencias de puntos del mapeo $\bar{x}_0\bar{x}_1\cdots\bar{x}_p$ tal que $\bar{x}_p = \bar{x}_0$. En general se cumple que $M^p(\bar{x}_j) = \bar{x}_j$ para $j = 0, 1, \dots, p-1$. La estabilidad de dichas órbitas se determina mediante el valor de $\lambda_p = dM^p(x)/dx|_{x=x_j}$: si $|\lambda_p| > 1$, se dice que la órbita es **inestable**. Decimos que una órbita es **estable** si $|\lambda_p| < 1$ y **superestable** si $|\lambda_p| = 0$. El coeficiente λ_p es llamado **coeficiente de estabilidad** para las órbitas periódicas.

Por ejemplo, consideremos el mapeo logístico dado por la siguiente expresión,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \quad (\text{B.13})$$

Este sistema modela la variación en la población anual de una especie de insectos como sigue [36]: Imaginemos que cada otoño los insectos ponen huevos y durante la primavera nacen; entonces comen, crecen, maduran, se reproducen, ponen huevos y mueren. Si se asumen las mismas condiciones cada año, la población al tiempo $n+1$ depende únicamente de la población al tiempo n . Supongamos que la cantidad de huevos que cada insecto pone es r , entonces la población al tiempo $n+1$ es $z_{n+1} = rz_n$. Si $r > 1$, el resultado es una población exponencialmente creciente, $z_n = r^n z_0$. Sin embargo, si la población es demasiado grande las reservas de comida podrían ser insuficientes, lo cual provocaría que algunos insectos perezcan antes de alcanzar la madurez. Para incorporar dicho efecto en el modelo, se supone que la cantidad de huevos que cada insecto pone decrece linealmente con la población total de insectos, $r[1 - (z/\bar{z})]$, donde \bar{z} es la cantidad de individuos para la cual las reservas se agotan y ninguno de los insectos sobrevive. Con ello se obtiene el mapeo unidimensional $z_{n+1} = rz_n[1 - (z_n/\bar{z})]$. Dividiendo ambos lados de la ecuación entre \bar{z} obtenemos la Ec. (B.13).

Nos interesa saber cómo cambia la dinámica de las órbitas conforme varía el parámetro r . En la Fig. B.6 se observa que el máximo de $M(x)$ se alcanza en $x = \frac{1}{2}$ y $M(\frac{1}{2}) = r/4$. Por lo tanto, si $0 \leq r \leq 4$ y x_n se encuentra en el intervalo $[0, 1]$, entonces las órbitas permanecen en el intervalo $[0, 1]$ para cualquier tiempo posterior. Si $r > 4$, entonces el punto fijo $x = 0$ es inestable, pues $M'(0) > 1$.

Consideremos el caso $r = 4$,

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n). \quad (\text{B.14})$$

En este caso, un cambio de variables transforma el mapeo logístico en el mapeo de tienda $x_{n+1} = 1 - 2|x_n - \frac{1}{2}|$ que se puede demostrar que es caótico [36]. Se define tanto x como y en

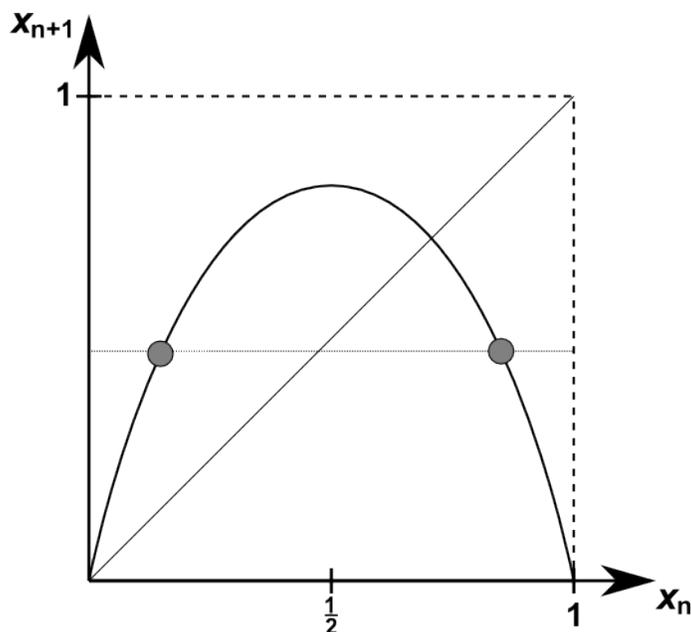


Figura B.6: El mapeo logístico es no invertible debido a que para dos valores distintos de x_n corresponde un mismo valor de x_{n+1}

el intervalo $[0, 1]$ como

$$x = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\pi y)]. \quad (\text{B.15})$$

Sustituyéndolo en la Ec. (B.14) se obtiene $\operatorname{sen}^2(\pi y_{n+1}/2) = 1 - \cos^2(\pi y_n) = \operatorname{sen}^2(\pi y_n)$. Esto implica que $(\pi y_{n+1}/2) = \pm(\pi y_n) + s\pi$, donde s es un entero. La elección de y determina s y el signo del término πy_n . Entonces obtenemos $y_{n+1} = 2y_n$ (asociado al signo positivo y $s = 0$) para $0 \leq y_n \leq \frac{1}{2}$, y $y_{n+1} = 2 - 2y_n$ (asociado al signo negativo y $s = 1$) para $\frac{1}{2} \leq y_n \leq 1$. Lo cual es justo el mapeo de tienda. Por lo tanto, si el mapeo de tienda es caótico, entonces también lo es el mapeo logístico con $r = 4$.

Habiendo determinado que se presenta caos con $r = 4$, nos preguntamos ahora qué pasa con valores más pequeños de r . Si $r \neq 1$, el mapeo logístico tiene dos puntos fijos asociados a las soluciones de $x = rx(1 - x)$, las cuales son $x^* = 0$ y $x^* = 1 - 1/r$. Como ya se dijo antes, el punto fijo $x^* = 0$ es inestable para $r > 1$. Notando que $M'(1 - 1/r) = 2 - r$, vemos que $x^* = 1 - 1/r$ es estable si $|2 - r| < 1$, esto es, si $1 < r < 3$. Por lo tanto, $x^* = 1 - 1/r$ es un *atractor*. Entonces para el intervalo $1 < r < 3$ sólo hay dos órbitas de período uno y no hay caos. (Ver Fig. B.7a).

Para ver lo que pasa en el intervalo $3 < r < 4$, consideremos la segunda iteración del mapeo logístico M^2 como se muestra en la Figura B.7b. El punto fijo de M en $x^* = 1 - 1/r$ es también punto fijo de M^2 , y la pendiente de $M^2(x)$ en $x = x^*$ es $[M^2(x^*)]' = (2 - r)^2$. Se observa que conforme se incrementa r , la órbita $x = x^*$ se vuelve inestable ($M'(x^*)$ decrece a través de -1), y, al mismo tiempo, la pendiente de $M^2(x)$ en $x = x^*$ se incrementa pasando de valores menores a uno a valores mayores a uno. Como se muestra en la Figura B.7, se crean dos puntos fijos de M^2 . Debido a que estos nuevos puntos fijos no corresponden a puntos fijos de M , deben ser de período dos. En otras palabras, donde la órbita de período uno se

vuelve inestable se crea una órbita estable de periodo dos, como se ilustra en la Figura B.8. Este proceso es una **bifurcación de doblamiento del periodo**.

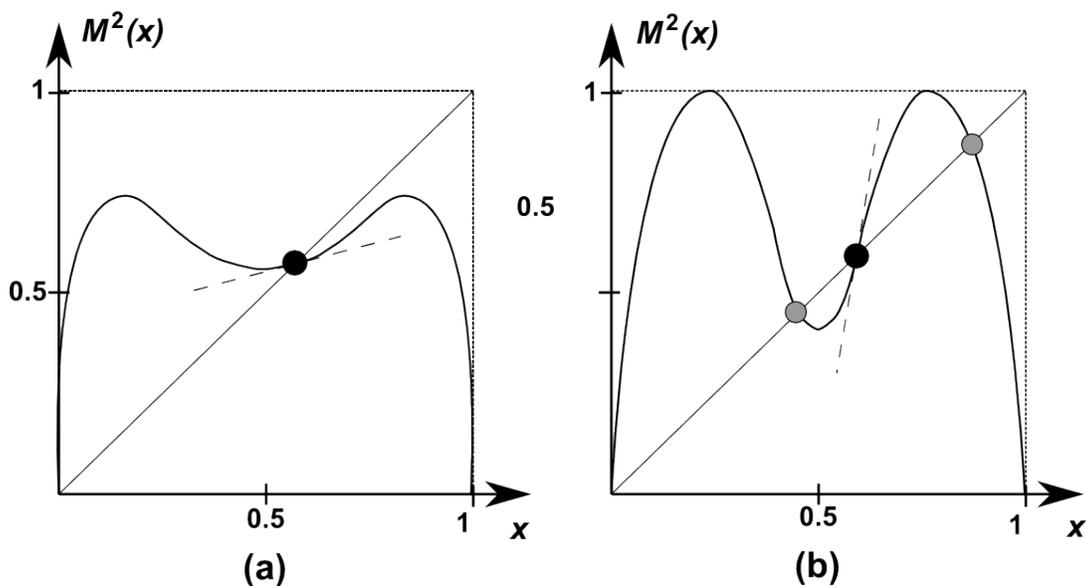


Figura B.7: En (a) se muestra el mapeo logístico con $r < 3$; se observan los puntos fijos de M también en M^2 ; además, $M'(x^*) < 1$ para $x^* \neq 0$ (*punto negro*). En (b) se observa que la pendiente en el mismo punto fijo es $M'(x^*) > 1$ por lo cual se vuelve inestable; debido a que los nuevos puntos fijos (*puntos grises*) en M^2 no son puntos fijos de M , deben corresponder a una órbita de periodo dos.

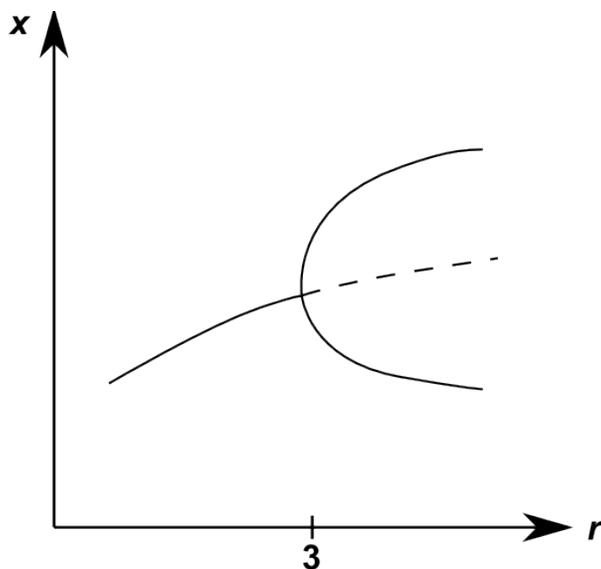


Figura B.8: Bifurcación con doblamiento de periodo. Cuando el punto fijo cruza el valor $r = 3$ se vuelve inestable (*línea rayada*) y se convierte en una órbita estable de periodo dos (*línea continua*).

Si se continúa aumentando el valor de r , los puntos fijos se vuelven inestables y se presentan sucesivos doblamientos de periodo; con $r = 4$, se confirma la dinámica caótica mostrada por el mapeo logístico como se muestra en el *diagrama de bifurcaciones* (Fig. B.9).

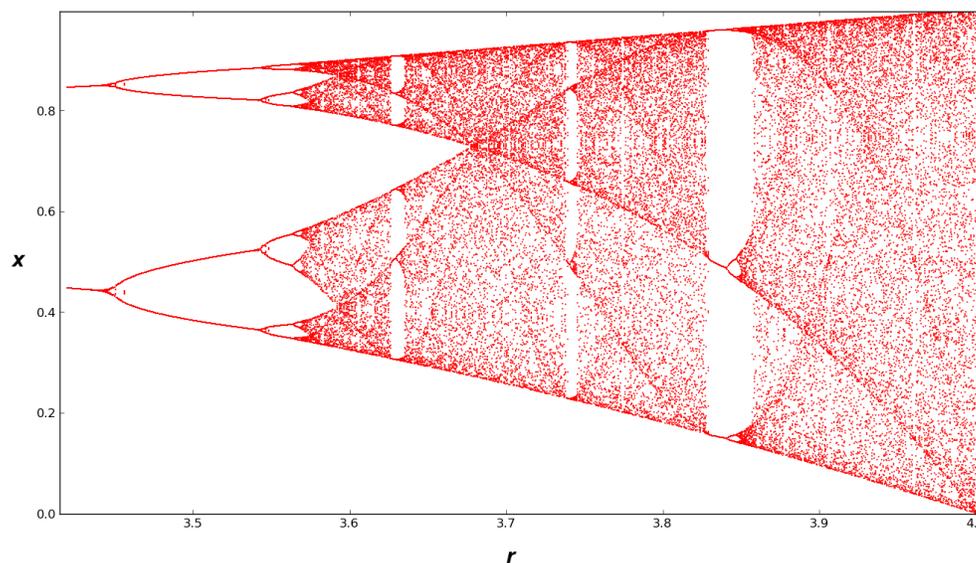


Figura B.9: Diagrama de Bifurcaciones. Conforme se aumenta el valor de r se presentan bifurcaciones de doblamiento de periodo; para algunos valores, las órbitas generadas son caóticas.

B.4. Propiedades dinámicas de sistemas caóticos

En esta sección se analizarán algunas propiedades de los sistemas dinámicos cuando estos evolucionan en el tiempo. Se analizará la estabilidad de estados estacionarios y órbitas periódicas en sistemas dinámicos continuos. De manera natural surge el concepto de variedad estable e inestable alrededor de, por ejemplo, un punto fijo, definidas a partir de los eigenvalores a lo largo de los cuales el sistema se comporta de forma estable o inestable. Finalmente, como un método para analizar la estabilidad de las órbitas en los sistemas dinámicos se estudia el método de los exponentes de Lyapunov.

B.4.1. Estabilidad lineal de estados estacionarios y órbitas periódicas

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden $dx/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Un estado estacionario de este sistema es un punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ en el cual

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Queremos analizar el comportamiento de los puntos cerca de \mathbf{x}^* . Para ello consideramos a $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta}(t)$, donde la perturbación $\boldsymbol{\eta}(t)$ es pequeña. Sustituyendo $\mathbf{x}(t)$ definido de aquel modo en el conjunto de ecuaciones diferenciales se tiene

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta}) \quad (\text{B.16})$$

y expandiendo $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a primer orden en $\boldsymbol{\eta}$ obtenemos

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{DF}(\mathbf{x}^*) \cdot \boldsymbol{\eta} + O(\boldsymbol{\eta}^2)$$

en donde $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$, debido a que \mathbf{x}^* es un estado estacionario, y \mathbf{DF} representa la matriz Jacobiana de derivadas parciales de \mathbf{F} . Dados

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ F_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{pmatrix},$$

\mathbf{DF} está definida como

$$\mathbf{DF}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x_1 & \partial F_1/\partial x_2 & \dots & \partial F_1/\partial x_N \\ \partial F_2/\partial x_1 & \partial F_2/\partial x_2 & \dots & \partial F_2/\partial x_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial F_N/\partial x_1 & \partial F_N/\partial x_2 & \dots & \partial F_N/\partial x_N \end{pmatrix}$$

Sustituyendo lo anterior se obtiene la siguiente ecuación que representa la dependencia temporal de la perturbación de \mathbf{x} del estado estacionario

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \mathbf{DF}(\mathbf{x}^*) \cdot \boldsymbol{\eta} + O(\boldsymbol{\eta}^2). \quad (\text{B.17})$$

El problema de estabilidad lineal se obtiene despreciando términos de orden $\boldsymbol{\eta}^2$ en (B.17); en general (B.17) se puede expresar de la siguiente forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \quad (\text{B.18})$$

donde \mathbf{y} es un vector de dimensión N y \mathbf{A} es una matriz de $N \times N$ independiente del tiempo. Si proponemos soluciones de (B.18) del tipo $\mathbf{y}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$, entonces se convierte en la ecuación de eigenvalores

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \quad (\text{B.19})$$

la cual tiene soluciones no-triviales para valores de λ que satisfacen el polinomio característico de N -ésimo orden

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0,$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de $N \times N$ y $|\cdot|$ es el determinante. Por ejemplo, en el caso donde se tienen N raíces distintas λ_k con $k = 1, 2, \dots, N$, se tiene un eigenvector \mathbf{v}_k asociado con cada una, en consecuencia, la evolución temporal puede ser representada como

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_k a_k e^{\lambda_k t}, \quad (\text{B.20})$$

donde a_k son constantes (pueden ser complejas), determinadas por las condiciones iniciales $\mathbf{y}(0) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{v}_i$. Los valores de λ_k son reales o pares complejos conjugados.

Supongamos que los eigenvalores son complejos $\lambda_j = \alpha_j - i\beta_j$ y $\lambda_{j+1} = \alpha_j + i\beta_j$, i.e. $\lambda_j = \lambda_{j+1}^*$, uno es el conjugado del otro. Entonces, en este caso, las órbitas se mueven en espiral alrededor del punto fijo; si $\alpha_j < 0$ y $\beta_j \neq 0$, se acerca asintóticamente en el tiempo y, si $\alpha_j > 0$ y $\beta_j \neq 0$, se alejan del punto fijo. Podemos denotar también por $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{j+1}^* = \mathbf{v}_j^R + i\mathbf{v}_j^I$ a los eigenvectores asociados (ver Figs. B.10a y B.10b). Si $\text{Im}(\lambda_k) = 0$, las puntos sobre la línea que contiene al eigenvector \mathbf{v}_j^R permanecen en ella, acercándose hacia el origen si $\alpha_j < 0$ ó alejándose asintóticamente si $\alpha_j > 0$, (ver Figs. B.10a y B.10b). A las soluciones que se alejan del punto fijo las llamamos **inestables** y a las que se acercan soluciones **estables**.

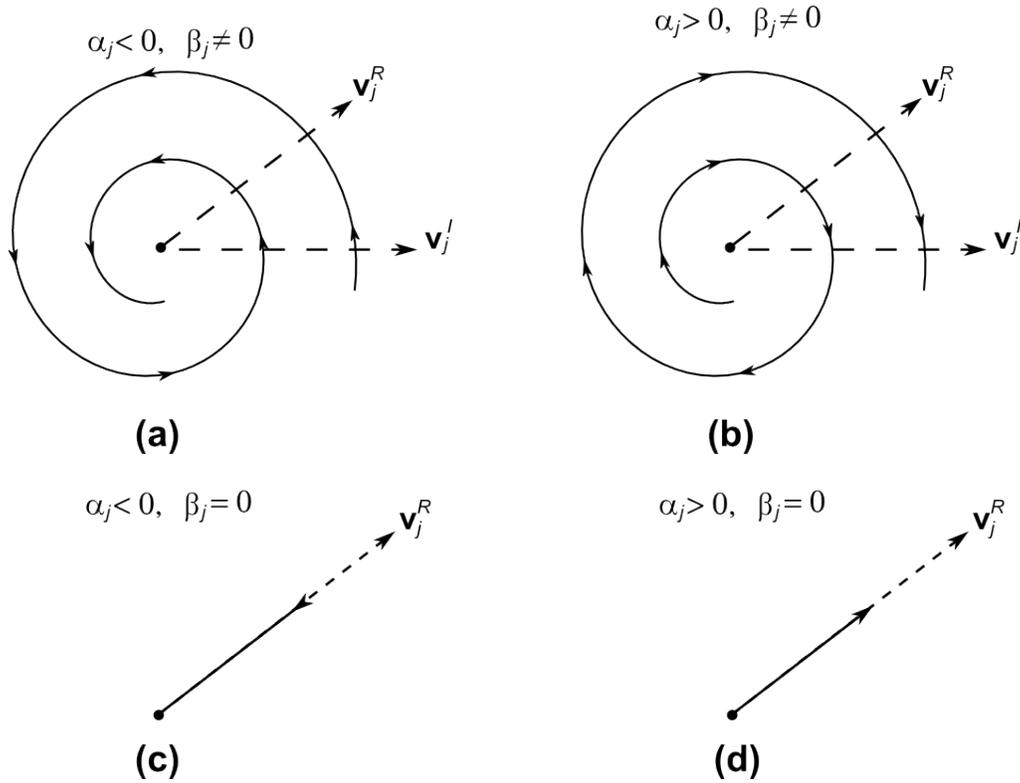


Figura B.10: Órbitas estables ($\alpha_j < 0$) e inestables ($\alpha_j > 0$)

En general denotamos como E^u (subespacio *inestable*) al subespacio generado por los vectores independientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n_u}$ asociados a las soluciones *inestables* ($\alpha_j > 0$). De forma similar, el subespacio invariante E^s (subespacio *estable*) es aquel generado por los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n_s}$ asociados a las soluciones *estables* ($\alpha_j < 0$). Si hay eigenvalores cuyas partes reales son cero ($\alpha_j = 0$), denotamos por E^c al subespacio *centrado* obtenido a partir del conjunto de vectores independientes $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{n_c}$ correspondientes a esos eigenvalores. Así, el conjunto de vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n_u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n_s}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{n_c}$ generan el espacio fase completo. Entonces

$$n_u + n_s + n_c = N.$$

El análisis de estabilidad lineal de órbitas periódicas es similar al analizado para estados

estacionarios [36]. Se propone un punto $\mathbf{X}^*(t) = \mathbf{X}^*(t + T)$, donde T denota el periodo y $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}^*(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$. Expandiendo para valores pequeños de $\boldsymbol{\eta}(t)$ se obtiene

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \mathbf{DF}(\mathbf{X}^*(t)) \cdot \boldsymbol{\eta} + O(\boldsymbol{\eta}^2), \quad (\text{B.21})$$

la cual es similar a (B.17) excepto que la matriz $\mathbf{DF}(\mathbf{X}^*(t))$ varía periódicamente en el tiempo. El problema linealizado tiene entonces la forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y}, \quad (\text{B.22})$$

donde \mathbf{y} es un vector de dimensión N y $\mathbf{A}(t)$ es una matriz real de $N \times N$ periódica en el tiempo,

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T).$$

El problema de eigenvalores sigue un desarrollo similar a aquel realizado en (B.19), donde también se pueden definir subespacios estables, inestables y centrados.

Una **variedad estable** W^s es el conjunto de puntos \mathbf{x} tales que se acercan al estado estacionario u órbita periódica conforme el sistema evoluciona en el tiempo. Análogamente, una **variedad inestable** W^u es el conjunto de puntos \mathbf{x} que se aproximan a los estados estacionarios u órbitas periódicas cuando se retrocede en el tiempo. Además, las variedades W^s y W^u tienen la misma dimensionalidad que los subespacios lineales E^s y E^u y estos son tangentes a las variedades,

$$\begin{aligned} \dim(W^s) &= n_s, \\ \dim(W^u) &= n_u. \end{aligned}$$

En la figura B.11(a) se muestra un mapeo bidimensional donde el punto fijo tiene una dirección estable y una inestable. En la figura B.11(b) se muestra un caso para el cual $n_s = 2$ y $n_u = 1$. La estabilidad está dada por la órbita en W^s que se acerca en espiral hacia el punto fijo en el cual los eigenvalores estables son complejos conjugados.

B.4.2. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov dan información sobre la contracción o estiramiento de las trayectorias en el espaci fase. En la figura B.5 se dibujan dos trayectorias separadas al tiempo t una distancia $\Delta(t)$. Se ha dicho que si dicha separación crece exponencialmente con el tiempo entonces el atractor es caótico. Por ejemplo, en el atractor de Lorenz (Fig. B.4) se encuentra que $|\Delta(t)| \approx |\Delta(0)|e^{\lambda t}$, donde $\lambda = 0.9$. La cantidad λ es, precisamente, un exponente de Lyapunov (o Liapunov) del sistema; para un sistema N -dimensional existen N diferentes exponentes, y en este caso λ corresponde al mayor exponente del sistema:

$$\lambda = \max \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \right| \right\}.$$

Formalmente, el **exponente de Lyapunov** se define como sigue: dado un sistema dinámico continuo descrito por un conjunto de N ecuaciones diferenciales $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, y un desplazamiento infinitesimal de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ en una dirección de un vector tangente $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(0)$ (la

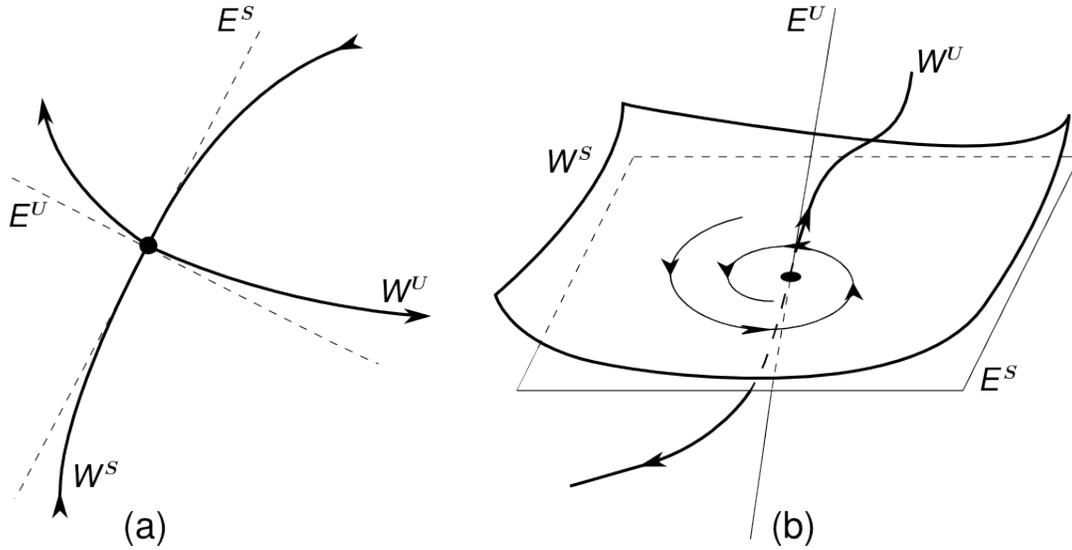


Figura B.11: Se muestran las variedades y subespacios estables e inestables asociados a un (a) mapeo bidimensional y (b) a un flujo.

dirección de \mathbf{y}_0 puede estar a lo largo de cualquiera de las N direcciones del sistema en el espacio fase N -dimensional), considere el vector $\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}(0)/|\mathbf{y}(0)|$, entonces [36]

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(|\mathbf{y}(t)/\mathbf{y}_0|), \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\hat{\mathbf{O}}(\mathbf{x}_0, t) \cdot \mathbf{u}_0|, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

donde $d\mathbf{y}(t)/dt = \mathbf{DF}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{y}(t)$ y $\hat{\mathbf{O}}(\mathbf{x}_0, t)$ es la matriz solución de la ecuación

$$\frac{d\hat{\mathbf{O}}}{dt} = \mathbf{DF}(\mathbf{x}(t)) \cdot \hat{\mathbf{O}}$$

con condiciones iniciales $\hat{\mathbf{O}}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{I}$. De lo anterior tenemos que $\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{O}}(\mathbf{x}_0, t) \cdot \mathbf{y}_0$.

Para un sistema discreto, como es el caso del mapeo logístico, intuitivamente tenemos que dada una condición inicial x_0 ¹ y un punto cercano $x_0 + \delta_0$ (con Δ_0 muy pequeño), la separación después de n iteraciones será Δ_n . Si $|\Delta_n| \approx |\Delta_0|e^{n\lambda}$ entonces nuevamente λ es llamado exponente de Lyapunov. Si es positivo es señal de caos. Nuevamente, si sacamos el logaritmo en ambos lados de aquella expresión se obtiene [45]

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\Delta_n}{\Delta_0} \right|.$$

Además, notando que $\Delta_n = M^n(x_0 + \Delta_0) - M^n(x_0)$, podemos reescribirla del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{M^n(x_0 + \Delta_0) - M^n(x_0)}{\Delta_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln |DM^n(x_0)|, \end{aligned}$$

¹El subíndice corresponde a la iteración en mapeos

tomando el límite $\Delta_0 \rightarrow 0$ en el último paso. El término dentro del logaritmo puede ser expandido mediante la regla de la cadena:

$$DM^n(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} DM(x_i).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \end{aligned}$$

Si existe el límite cuando $n \rightarrow \infty$, definimos el **exponente de Lyapunov** para mapeos unidimensionales partiendo del punto inicial x_0 como

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |DM(x_i)| \right]. \quad (\text{B.24})$$

Para puntos estables y ciclos límites λ es negativo, y en atractores extraños, es positivo. Un tratamiento similar al realizado para sistemas dinámicos continuos puede ser encontrado en la Ref. [36].

Apéndice C

Diseño de Redes

Para programar las redes complejas en este trabajo se utiliza el lenguaje **Python** versión 2.6.2. Las principales ventajas de utilizar este lenguaje son la amplia gama de librerías con las que se cuenta, por ejemplo: *numpy*, cuya principal función es proveer de las funciones relacionadas con el manejo de arreglos incluido un módulo llamado *linalg* para calcular, entre otras cosas, los eigenvalores y eigenvectores de una matriz dada. *matplotlib* es una librería utilizada para generar gráficos como aquellos creados con **Matlab**. Otra librería que se utilizará es *random*, que cuenta con una función con el mismo nombre para generar números pseudo-aleatorios con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ y otra función llamada *randrange* para generar números aleatorios enteros en un intervalo arbitrario.

C.1. Redes $2k$ -regulares

En general, las redes fueron generadas modificando la matriz de adyacencia $\mathbf{A} = a_{ij}$. En este caso, las k posiciones a la derecha y a la izquierda del elemento a_{ii} tienen el valor de 1, y el resto vale 0. La matriz diagonal \mathbf{D} , recordamos, contiene en la diagonal los grados de los nodos, i.e., $D_{ii} = k_i = 2k$; entonces la matriz Laplaciana es $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$. El código para generar una matriz $2k$ -regular con N nodos se incluye a continuación:

```

1 from numpy import*
2
3 def RedRegular(N,k):
4     A=zeros((N,N))
5     D=zeros((N,N))
6     L=zeros((N,N))
7     for i in range(0,N):
8         for j in range(1,k+1):
9             A[i][(i+j)%N]=A[i][(i-j+N)%N]=1
10    for i in range(0,N):
11        for j in range(0,N):
12            D[i][i]+=A[i][j]
13    L=D-A
14    return L,D,A

```

C.2. Redes con distribución de probabilidad arbitraria

Como se puntualizó en el capítulo 2, la forma más sencilla de generar una red aleatoria arbitraria es generando una lista con los grados de los nodos en base a una función de distribución $P(k)$. Por ejemplo, veamos el código necesario para crear una red con distribución binomial con parámetros (N, k, p) , donde N es el número de nodos en la red, k el grado del nodo y p es la probabilidad de que una arista esté presente. La función de distribución de *ley de potencias* se define de manera similar, utilizando el parámetro τ en lugar de p y normalizada por la función ζ de Riemann. El código de dichas distribuciones es el siguiente:

```

1 from math import*
2 from numpy import*

```

```

3
4 def binomial(N,k,p):
5     C=factorial(N)/(factorial(N-k)*factorial(k))
6     return C*pow(p,k)*pow((1-p),(N-k))
7
8 def powerLaw(N,k,tau):
9     C=zeta(tau)
10    return (1/C)*(k**(-tau))
11
12 def zeta(t):
13     suma=0
14     for n in arange(1,1000):
15         suma+=1.0/(n**t)
16     return suma

```

La librería *math* contiene las funciones *factorial* y *pow*, esta última calcula la potencia de un número.

La función *binomial* (o *powerLaw*) es llamada a su vez por otra función que genera primero una lista (*pk*) cuyas entradas *pk[k]* contienen la probabilidad de que un nodo tenga grado $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ generadas con la función de distribución:

```

1 def probList(N,funcion,parametro,k0):
2     pk=[]
3     for k in range(k0,N):
4         pk.append(funcion(N-1,k,parametro))

```

donde *funcion* es la función de distribución a utilizar, *parametro* es el (los) parámetro(s) de la distribución (si los parámetros son más de uno, *p* es un arreglo) y *k0* es el valor inicial de la distribución $P(k)$. Con *pk* se genera otra lista (*pkSuma*) cuya entrada *i*-ésima es igual a la suma de las (*i* - 1)-ésimas anteriores entradas de *pk* de manera tal que, si la distribución de probabilidad está debidamente normalizada, la última entrada es 1.0,

```

5     pkSuma=[]
6     pkSuma.append(pk[0])
7     suma=pk[0]
8     for i in range(1,len(pk)):
9         suma+=pk[i]
10    pkSuma.append(suma)
11    return pkSuma

```

Este método es inspirado en aquel utilizado en algoritmos genéticos llamado *rueda de ruleta* (*roulette wheel*, en inglés) [46], con el cual la lista generada (*pk*) contiene en su entrada *k*-ésima un valor proporcional a la probabilidad $P(k)$ de que un nodo tenga grado *k* (ver Fig. C.1). La lista *pkSuma* cobrará sentido al definir la siguiente función que genera una lista cuya entrada *i*-ésima es el grado del nodo *i*-ésimo, que es precisamente la lista que necesitamos para generar la red a partir del grado de los nodos:

```

1 from random import random
2

```

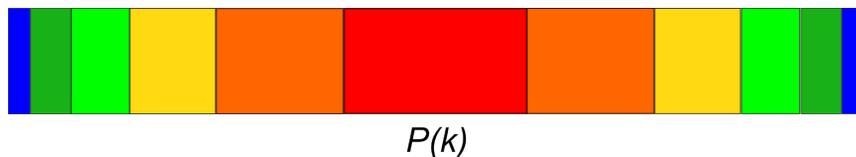


Figura C.1: Esquema para representar las entradas de la lista pk asociada a una red con 11 nodos cuya entrada k -ésima es la probabilidad de que un nodo tenga grado k y es proporcional a la longitud del rectángulo correspondiente. $P(k)$ es la distribución binomial con $N = 11$ y $p = 0.5$, el valor de p determina dónde se centra la distribución es decir, en qué posición se encuentra la máxima probabilidad.

```

3 def degreeList(N,funcion,parametro,k0):
4     P=probList(N,funcion,parametro,k0)
5     print P
6     degree=[]
7     for i in range(N):
8         r=random()
9         while r>P[len(P)-1]:
10            r=random()
11            print r
12            j=0
13            while r>P[j]:
14                j+=1
15            degree.append(j+k0)
16            print j,degree
17     return degree

```

La forma de generar la lista con los grados de los nodos (`degree`) consiste en escoger un número aleatorio en el intervalo $(0, 1)$ y fijarnos a qué entrada de `pkSuma` corresponde, similar a ver en qué casilla de la ruleta cae la esfera. Veamos un ejemplo,

Si se quiere construir una red con $N = 5$ nodos con distribución binomial con $p = 0.5$, entonces

- `pk=[0.0625,0.25,0.375,0.25,0.0625]`, la probabilidad de que un nodo arbitrario de la red tenga grado $k = 2$ es $P(2) = 0.375$ pues `pk[2]=0.375`.
- `pkSuma=[0.0625,0.3125,0.6875,0.9375,1.0]`
- Para generar la lista `degree` escogemos 5 números aleatorios: 0.28400281507425928, 0.96335199190905552, 0.35921877845143845, 0.32645852481577373 y 0.72565534448383096 y nos fijamos a qué entradas de `pkSuma` corresponden: `pkSuma[1]`, `pkSuma[4]`, `pkSuma[2]`, `pkSuma[2]` y `pkSuma[3]`. Por lo tanto, `degree=[1, 4, 2, 2, 3]`.

La lista con los grados de los nodos `degree` equivale a tener nodos con mitades de aristas conectadas a ellos (ver Fig. C.2(a)). El siguiente paso es tomar 2 nodos al azar y unir dos de esas mitades hasta haber unido todas, nótese que la única restricción es que la suma de

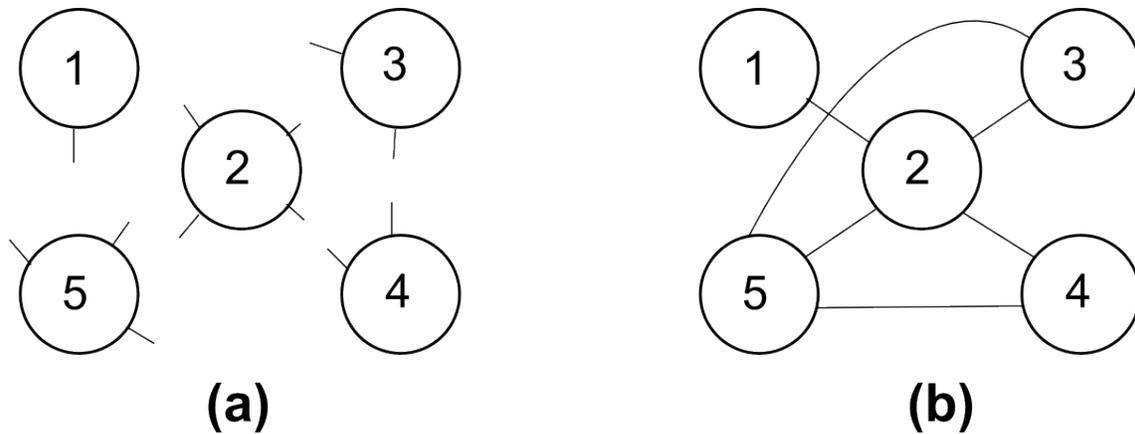


Figura C.2: (a) 5 nodos con mitades de aristas. (b) Red de 5 nodos con distribución binomial.

mitades de aristas debe ser par para que no quede una mitad “volando” (ver Fig. C.2(b)). El código para generar las matrices **A**, **D** y **L**, a partir de la lista `degree`, para una red aleatoria es el siguiente:

```

1 def randGraph(N,funcion,parametro,k0):
2 #Se revisa que la suma de los grados de los nodos sea par
3 g=degreeList(N,funcion,parametro,k0)
4 while sum(g)%2!=0:
5     g=degreeList(N,funcion,parametro,k0)
6 A=zeros((N,N))
7 D=zeros((N,N))
8 L=zeros((N,N))
9 g.sort(reverse=True)
10 for i in range(0,N):
11     D[i][i]=g[i]
12 for i in range(0,N):
13     nodos=[]
14     for l in range(0,N):
15         if A[i][l]==0.0 and g[l]>0:
16             nodos.append(l)
17     if i in nodos:
18         nodos.remove(i)
19     for j in range(0,int(g[i])):
20         if len(nodos)==1 and g[i]==2:
21             c=i
22             D[i][i]-=1
23         elif len(nodos)==0:
24             c=i
25             D[i][i]-=1
26         else:

```

```

27     r=randrange(0, len(nodos))
28     c=nodos[r]
29     count=0
30     while A[i][c]==1.0:
31         count+=1
32         if len(nodos)==0 or count>2*N:
33             c=i
34             D[i][i]-=1
35         else:
36             r=randrange(0, len(nodos))
37             c=nodos[r]
38     g[i]-=1
39     g[c]-=1
40     if c!=i:
41         nodos.remove(c)
42     A[i][c]=A[c][i]=1.0
43     L=D-A
44     return L,D,A

```

Similar a la función `RedRegular`, la función `randGraph` genera las matrices de Adyacencia **A**, Diagonal **D** y Laplaciana **L**; en este caso lo hace a partir de la lista `degree` (**g**, en este caso) obtenida de la función `degreeList`. **A** se genera iniciando del nodo con mayor grado y finalizando con el de menor grado para asegurar que no existe más de una arista conectada entre el mismo par de nodos, este paso se observa en el renglón 9 en donde se utiliza la función `sort` para ordenar la lista **g**. Por ejemplo, la matriz de Adyacencia del ejemplo incluido arriba, ordenada del nodo con mayor grado al nodo de menor grado, se muestra en la Ec. (C.1), y fue generada a partir de la lista **g** ordenada $g=[4,3,2,2,1]$. Sin embargo, dicho algoritmo no evita que existan nodos conectados a ellos mismos lo cual deberá tenerse en cuenta. Con la matriz de adyacencia **A** se generan **D** y **L**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

C.3. Redes de mundo pequeño

Recordamos que en el capítulo 2 se habló de dos métodos similares para generar redes de mundo pequeño: el método WS (Watts-Strogatz) propone *reconectar* las aristas de una red $2k$ -regular con probabilidad p ; mientras que el método NW (Newman-Watts) únicamente *añade* aristas a una red $2k$ -regular con probabilidad p por arista. El código para generar dichas gráficas es similar a aquel contenido por `RedRegular`. Primero veamos el método WS:

```

1 from numpy import*
2 from random import random,randrange

```

```

3
4 def RedWS(N,k,p):
5     A=zeros((N,N))
6     D=zeros((N,N))
7     L=zeros((N,N))
8     for i in range(0,N):
9         for j in range(1,k+1):
10            A[i][(i+j)%N]=A[i][(i-j+N)%N]=1
11     j=1
12 # Reconexion de las aristas de la red regular:
13     while j<=k:
14         for i in range(0,N):
15             if random()<p:
16                 r=randrange(i+k+1,i+N-k)%N
17                 contador=0
18                 while A[i][r]==1.0:
19                     r=randrange(i+k+1,i+N-k)%N
20                     contador+=1
21                     if contador>100:
22                         r=(i+j)%N
23                         A[i][(i+j)%N]=A[(i+j)%N][i]=0
24                         A[i][(i+j)%N]=A[(i+j)%N][i]=0
25                         A[i][r]=A[r][i]=1
26                 j+=1
27 # Matriz Diagonal y Laplaciana:
28     for i in range(0,N):
29         suma=0
30         for j in range(0,N):
31             suma+=A[i][j]
32         D[i][i]=suma
33     L=D-A
34     return L,D,A

```

El proceso de reconexión entre los renglones 13 y 26 consta de los siguientes pasos:

- Para cada vecino $(i+j) \% N$, a la derecha del nodo i (si imaginamos la red regular en un anillo), o equivalentemente a la derecha de la diagonal de la matriz \mathbf{A} , se escoge un número aleatorio $\text{random}()$ en el intervalo $(0, 1)$, si $\text{random()} > p$ no se reconecta esa arista.
- Si $\text{random()} < p$, escoge un nodo r de forma aleatoria que no esté conectado a i , si $A[i][r] == 1.0$ elige otro hasta que se cumpla que $A[i][r] == 0$, i.e. el nodo r no está conectado al nodo i .
- El código entre las líneas 17 y 23 se introduce para evitar un *loop* infinito con lo cual se deja sin cambios la arista.

- Habiendo encontrado un nodo r tal que $A[i][r]==0$ se procede a desconectar el nodo i de su vecino $(i+j) \% N$: $A[i][(i+j) \% N]=0$, y reconectar con el nodo r : $A[i][r]=1.0$. Debido a que la matriz \mathbf{A} es simétrica también se modifican las celdas $A[(i+j) \% N][i]=0$ y $A[r][i]=1.0$

El método de NW es más simple debido a que tiene menos restricciones; inclusive es válido añadir “loops” en los nodos (nodos conectados con ellos mismos), aunque la probabilidad de que esto suceda es de $1/N$. El código es el siguiente:

```

1 from numpy import*
2 from random import random,randrange
3
4 def RedNW(N,k,p):
5     A=zeros((N,N))
6     D=zeros((N,N))
7     L=zeros((N,N))
8     for i in range(0,N):
9         for j in range(1,k+1):
10            A[i][(i+j)%N]=A[i][(i-j+N)%N]=1
11 # Se agregan aristas con probabilidad p
12     j=1
13     while j<=k:
14         for i in range(0,N):
15             if random()<p:
16                 r=randrange(i,i+N)%N
17                 A[i][r]=A[r][i]=1
18             j+=1
19 # Matriz Diagonal y Laplaciana
20     for i in range(0,N):
21         suma=0
22         for j in range(0,N):
23             suma+=A[i][j]
24         D[i][i]=suma
25     L=D-A
26     return L,D,A

```

Nótese que la función *randrange* elige un nodo de manera uniforme entre i y $i+N$ con lo cual, el mismo nodo i y nodos para los cuales ya existe una conexión previa, no quedan excluidos.

Apéndice D

Cálculos numéricos

En el presente Apéndice se trata de incluir la mayor parte del código utilizado para realizar las mediciones de sincronización en las redes. Se inicia mostrando el código utilizado para calcular la desviación estándar en los estados de los nodos conforme varía la intensidad de acoplamiento ε , tanto para el caso donde la dinámica de los nodos está dada por el mapeo logístico como aquel donde su estado es un sistema dinámico continuo; ligeras modificaciones habrán que hacerse entre uno y otro. Se expone también el programa utilizado para medir la estabilidad del estado sincronizado, es decir, la Función Maestra de Estabilidad.

D.1. Desviación estándar

Las gráficas donde se calcula la desviación estándar del estado de los nodos comparado con diferentes valores en la intensidad de acoplamiento ε intentan mostrar la dinámica observada por los nodos en conjunto. La desviación estándar, dada por la ecuación

$$\sigma(n) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(x_n^i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_n^j \right)^2}, \quad (\text{D.1})$$

mide una propiedad global, nos dice cuánto se alejan los valores de los nodos del promedio. La función que calcula la desviación estándar σ de las entradas del arreglo \mathbf{x} es el siguiente:

```

1 def SD(x):
2     a=0.
3     suma=0.
4     for i in range(len(x)):
5         a+=x[i]
6     promedio=a/len(x)
7     for i in range(len(x)):
8         suma+=(x[i]-promedio)**2
9     return sqrt(suma/(len(x)-1))

```

La función principal que genera las gráficas que muestran la desviación estándar contra la intensidad de acoplamiento ε se incluye a continuación.

```

1 from random import random
2 from numpy import *
3 from math import *
4 from pylab import *
5
6 def StandardDev(N, tipoRed, tiempo, valores, stEps):
7     L,D,A=RED(N, tipoRed)
8     sigmas=ones(valores)
9     figure()
10    for eps in arange(0,1.0,1./stEps):
11        epsilons=eps*ones(valores)
12        nodos=zeros(N)
13        for i in range(0,N):

```

```

14     nodos[i]=random()
15     for t in range(tiempo):
16         nodos=EVOLUCIONA(nodos,eps,A,D)
17         for t in range(valores):
18             nodos=EVOLUCIONA(nodos,eps,A,D)
19             sigmas[t]=SD(N,nodos)
20     plot(epsilons,sigmas,"k,")
21     ylabel(r'\sigma$(n)',fontsize=22,rotation='horizontal')
22     xlabel(r'\varepsilon$',fontsize=22)
23     xticks(fontsize=18)
24     yticks(fontsize=18)
25     grid(True)
26     show()

```

Utilizando las funciones definidas abajo, la función principal `StandardDev` genera primero una red con N nodos llamando a la función `RED` en la cual hay que introducir los parámetros requeridos por el tipo de gráfica que se quiere generar, la función `RED` regresa las matrices Laplaciana, Diagonal y de Adyacencia; el argumento `tipoRed`, que recibe la función `StandardDev`, es una variable de tipo cadena cuyos valores son: `'regular'` si se quiere generar una red $2k$ -regular con acoplamiento a k vecinos, `'aleatoriaBin'` si se quiere construir una red aleatoria con distribución binomial, `'aleatoriaPow'` si se quiere una red aleatoria con distribución de ley de potencias, `'smallworldWS'` si se desea una red de mundo pequeño generada con el método de Watts-Strogatz (reconectando las aristas de la red $2k$ -regular), y `'smallworldNW'` si se quiere una red de mundo pequeño con el método de Newman-Watts (añadiendo aristas a la red $2k$ -regular). El argumento `tiempo` es el número de iteraciones que se deja evolucionar la red antes de calcular la desviación estándar σ , i.e el tiempo transitorio. `valores` es el número de iteraciones n para las cuales se calcula la desviación estándar $\sigma(n)$, equivalentemente, es el número de puntos graficados para cada valor de ε , y `stEps` es el número de pasos en que se divide el intervalo $[0, 1]$ del parámetro ε .

Salvo aquellos casos con pocos nodos, es prácticamente imposible mostrar la dinámica de cada uno, por lo cual estas gráficas resultan indispensables para entender la dinámica global de los nodos en la red. A continuación se definen las funciones que son llamadas por la función principal `StandardDev`; la primera es la función `RED` que define el tipo de red que será generada:

```

1 def RED(N,tipoRed):
2     if tipoRed=='regular':
3         k=int(raw_input('vecinos?_'))
4         L,D,A=RedRegular(N,k)
5     elif tipoRed=='smallworldWS':
6         k=int(raw_input('vecinos_de_la_red_regular?_'))
7         p=int(raw_input('probabilidad?_'))
8         L,D,A=RedWS(N,k,p)
9     elif tipoRed=='smallworldNW':
10        k=int(raw_input('vecinos_de_la_red_regular?_'))
11        p=int(raw_input('probabilidad?_'))

```

```

12     L,D,A=RedNW(N,k,p)
13     elif tipoRed=='aleatoriaBin':
14         p=float(raw_input('parametro_p?_'))
15         L,D,A=randGraph(N,binomial,p,0)
16     elif tipoRed=='aleatoriaPow':
17         tau=float(raw_input('parametro_tau?_'))
18         k0=int(raw_input('inicio_de_la_distribucion?_'))
19         L,D,A=randGraph(N,powerLaw,tau,k0)
20     return L,D,A

```

La función EVOLUCIONA genera los nuevos estados de los nodos al tiempo $t + 1$ a partir del arreglo `nodos` cuya intensidad de acoplamiento ε está contenida en el argumento `eps`:

```

1 def EVOLUCIONA(nodos,eps,A,D):
2     nodosAux=zeros(len(nodos))
3     for i in range(len(nodos)):
4         nodosAux[i]=ACTUALIZA(i,nodos,eps,A,D)
5     return nodosAux

```

Los argumentos `A` y `D` son las matrices de Adyacencia y Diagonal, respectivamente.

La función ACTUALIZA, calcula el estado del i -ésimo nodo en base a la Ec. (2.65) con $w_{ij} = 1 \forall i, j$ y normaliza la intensidad de acoplamiento ε con el número de vecinos del nodo i dado por el término D_{ii} de la matriz diagonal:

$$x_{n+1}^i = F(x_n^i) + \frac{\varepsilon}{D_{ii}} \sum_{j=1}^N a_{ij} [F(x_n^j) - F(x_n^i)], \quad (\text{D.2})$$

donde $F(x_n^i)$ representa, en este caso, el mapeo logístico dado por la función MAP con parámetro no lineal r .

```

1 def ACTUALIZA(i,nodos,eps,A,D):
2     suma=0
3     I=MAP(nodos[i])
4     suma+=MAP(nodos[i])
5     for k in range(0,len(nodos)):
6         suma+=A[i][k]*(eps/D[i][i])*(MAP(nodos[k])-I)
7     return suma
8
9 def MAP(x):
10     r=4.0
11     return r*x*(1-x)

```

Esta función hereda los argumentos de la función EVOLUCIONA con el argumento adicional `i`, que indica el nodo de la red que está siendo modificado.

D.2. Función Maestra de Estabilidad (FME)

El análisis de estabilidad lineal basado en la Función Maestra de Estabilidad (FME) consiste en calcular la función $\lambda(\alpha)$ de la Ec. (3.9),

$$\lambda(\alpha) = \ln(1 - \alpha) + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \ln |DF(s_n)| < 0, \quad (\text{D.3})$$

donde el segundo término es el *exponente de Lyapunov* del mapeo.

El código que resuelve dicho problema también calcula los eigenvalores de la matriz de acoplamiento $R_{ij} = L_{ij}/D_{ii}$ y los sobrepone sobre la FME de manera que es claro qué eigenmodos son inestables dada una intensidad de acoplamiento ε . Veamos la función principal,

```

1 from numpy import*
2 from math import log
3 from pylab import*
4
5 def FME(N,tipoRed,amax,da,tiempo,epsilon):
6     L,D,A=RED(N,tipoRed)
7     #L,D,A=READ()
8     print L,D
9     R=zeros((N,N))
10    for i in range(N):
11        for j in range(N):
12            R[i][j]=L[i][j]/D[i][i]
13    eigVal,eigVec=linalg.eig(R)
14    alpha=zeros(int(amax/da))
15    X=zeros(int(amax/da))
16    nodo=random()
17    j=0.
18    for a in arange(0,amax,da):
19        mu=0.
20        for t in range(tiempo):
21            nodo=MAP(nodo)
22            mu+=log(abs(dMAP(nodo)))
23        mu/=tiempo
24        expLyap=log(abs(1-a))+mu
25        alpha[j]=a
26        X[j]=expLyap
27        j+=1
28    plot(alpha,X,"k-",linewidth=2)
29    axhline(y=0,linewidth=2,color='r')
30    axvspan(0.5,1.5,facecolor=(0.9,0.8,0.1),alpha=1.0,ec='none')
31    for i in range(len(eigVal)):
32        axvline(x=epsilon*eigVal[i],linewidth=0.5,color='b')
```

```

33  ylabel(r'\lambda(\alpha)', fontsize=24, rotation='horizontal'
    )
34  xlabel(r'\alpha', fontsize=24)
35  xticks(fontsize=18)
36  yticks(fontsize=18)
37  show()

```

Las funciones RED y MAP fueron definidas en la sección anterior (Apéndice D.1). Para calcular el exponente de Lyapunov (ver Apéndice B), recordamos que es necesario conocer la derivada del mapeo. En el caso del mapeo logístico está definida por la función dMAP:

```

1  def dMAP(x):
2    r=4.0
3    return r-2*r*x

```

Los renglones 28-37 contienen funciones definidas en la librería `matplotlib`¹, contenida dentro de `pylab`, utilizadas para graficar líneas horizontales (`axhline`), franjas de color (`axvspan`) y líneas verticales (`axvline`). Estas últimas son los valores $\varepsilon\rho_k$, con ρ_k los eigenvalores de la matriz **R**.

Si se quisiera analizar la estabilidad de una red en particular, entonces habrá que imprimir las matrices en archivos de texto y definir una función READ para llamarlas con la función principal FME. Un ejemplo de cómo se lee un archivo de texto en **Python** que contiene la matriz **A** se incluye a continuación:

```

1  def READ(N):
2    A=zeros((N,N))
3    D=zeros((N,N))
4    L=zeros((N,N))
5    archivoA=open(matrizA.dat,"r")
6    for i in range(N):
7      for j in range(N):
8        A[i][j]=float(matrizA.readline())
9    archivoA.close()
10   for i in range(N):
11     suma=0
12     for j in range(N):
13       suma+=A[i][j]
14     D[i][i]=suma
15   L=D-A
16   return L,D,A

```

Con las funciones definidas en el presente Apéndice se podría calcular la desviación estándar y la FME para sistemas dinámicos continuos; sin embargo esto no corresponde al objetivo del presente trabajo aunque sí se realizaron algunas gráficas para redes cuyos nodos siguen la dinámica dada por las ecuaciones de Lorenz y de Rössler al final de la sección 3.2 con programas similares a los incluidos aquí.

¹<http://matplotlib.sourceforge.net/>

Bibliografía

- [1] Ch. Huygens. *Horologium Oscillatorium*. Apud F. Muguet, Paris, France, 1673.
- [2] Ch. Huygens. *Œvres Complètes, volume 15*. Swets & Zeitlinger B. V., Amsterdam, 1967a.
- [3] Lord Rayleigh. *The Theory of Sound*. Dover publishers, New York, 1945.
- [4] W. H. Eccles and J. H. Vincent. *British Patent Spec.* cxiii, Application date 17.02.1920, 1920.
- [5] E. V. Appleton. The automatic synchronization of triode oscillator. *Proc. Cambridge Phil. Soc. (Math. and Phys. Sci.)*, 21:231–248, 1922.
- [6] B. van der Pol. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. *Phyl. Mag.*, 3:64–80, 1927.
- [7] Y. Brechet T. Viczek Z. Néda, E. Ravasz and A. L. Barabási. Tumultuous applause can transform itself into waves of synchronized clapping. *Nature*, 403(6772):849–850, 2000.
- [8] E. Bullmore and O. Sporns. Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems. *Nature*, 10:186–198, 2009.
- [9] L. Zemanová, Ch. Zhou, and J. Kurths. Structural and functional clusters of complex brain networks. *Physica D*, 224:202–212, 2006.
- [10] G. Zamora-López C. C. Hilgetag C. Zhou, L. Zemanová and Jürgen Kurths. Structure-function relationship in complex brain networks expressed by hierarchical synchronization. *New J. Phys.*, 9:178, 2007.
- [11] W. Singer and C. M. Gray. Visual feature integration and the temporal correlation hypothesis. *Annu. Rev, Neurosci.*, 18:555–586, 1995.
- [12] W. Singer. Striving for coherence. *Nature*, 397(4):391–393, 1999.
- [13] W. A. Mackay. Synchronized neuronal oscillations and their role in motor processes. *Trends Cogn, Sci.*, 1:176–183, 1997.
- [14] N. Koshiya and J. C. Smith. Neuronal pacemaker for breathing visualized *in vitro*. *Nature*, 400:360–363, 1999.

-
- [15] J. Engel and T. A. Pedley. *Epilepsy: A Comprehensive Textbook*. Lippincott-Raven, Philadelphia, 1975.
- [16] O. Sporns, G. Tononi, and R. Kötter. The human connectome: A structural description of the human brain. *PLoS Comput. Biol.*, 1 (4):245–251, 2005.
- [17] B. Bollobás. *Modern Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics.
- [18] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani. *Evolution and Structure of the Internet: A Statistical Physics Approach*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [19] A. Vespignani M. Boguñá, R. Pastor-Satorras. *Lect. Notes Phys.*, 625, 2003.
- [20] R. Pastor-Satorras M. Boguñá. *Phys. Rev. E*, 66, 2002.
- [21] S. H. Strogatz M. E. J. Newman and D. J. Watts. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Phys. Rev. E*, 64:026118, 2001.
- [22] M. Weigt A. Barrat. On the properties of small-world network models. *Eur. Phys. J. B*, 13:547, 2000.
- [23] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.
- [24] M. E. J. Newmann. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45:167–256, 2003.
- [25] R. Albert and A. L. Barabasi. Statistical mechanics of complex systems. *Lect. Notes Phys.*, 625, 2003.
- [26] A. L. Barabasi and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286, 1999.
- [27] Robert M. Gray. *Toeplitz and Circulant Matrices: A review*. Now, Stanford.
- [28] R. Solomonoff and A. Rapoport. Connectivity of random nets. *Bull. Math. Biophys.*, 13:107–117, 1951.
- [29] P. Erdos and A. Renyi. On random graphs. *Publ. Math. Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- [30] S. Milgram. The small world problem. *Psychol. Today*, 2:60–67, 1967.
- [31] M. E. J. Newman and D. J. Watts. Scaling and percolation in the small-world network model. *Phys. Rev. E*, 60:7332–7342, 1999.
- [32] M. E. J. Newman and D. J. Watts. Renormalization group analysis of the small-world network model. *Phys. Lett. A*, 263:341, 1999.
- [33] M. Rosenblum A. Pikovsky and J. Kurths. *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge Nonlinear Sciences Series 12. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

-
- [34] K. Kaneko and I. Tsuda. *Complex Systems: Chaos and Beyond. A Constructive Approach with Applications in Life Sciences*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.
- [35] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer, Berlin, 1984.
- [36] E. Ott. *Chaos and Dynamical Systems*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
- [37] H. Broer and Floris Takens. *Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2009.
- [38] M. Barahona and L. M. Pecora. Synchronization in small-world networks. *Phys. Rev. Lett.*, 89, 2002.
- [39] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2109–2112, 98.
- [40] J. Jost and M. P. Joy. Spectral properties and synchronization in coupled map lattices. *Phys. Rev. E*, 65:016201, 2001.
- [41] Ch. W. WU. *Synchronization of Complex Networks in Nonlinear Dynamics*. World Scientific, BM Thomas J. Watson Research Centre, US, 2007.
- [42] M. Barthélémy A. Barrat and A. Vespignani. *Dynamical Processes on Complex Networks*. Cambridge, 2008.
- [43] M. Molloy and B. Reed. A critical point for random graphs with a given degree sequence. *Random Struct. Algorithms*, 6:161, 1995.
- [44] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos*, 20:130–141, 1963.
- [45] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Perseus Books, Massachusetts, 1994.
- [46] Zbigniew Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer-Verlag, 1999.