

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



Facultad de Ingeniería

“Diseño de sensores inerciales basados en la  
tecnología de microsistemas”

T E S I S

que para obtener el título de  
Ingeniero en Computación  
presenta:  
Cesar Tomás Gómez Cruz

Director de tesis:  
Dr. José Ismael Martínez López



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A** mis dos hijos, Namir y Karesh, ustedes son el *leit-motiv* de mi historia... Su cariño me alienta... Sus sueños, esperanzas y deseos ahora son los míos... Juntos surcaremos nuevos horizontes y escribiremos páginas de hermosas aventuras...

**A** mis padres, Francisca y Tomás, por todo su cariño, paciencia y dedicación. Lo mejor que han podido hacer por mí, no ha sido evitarme las dificultades de la vida, sino enseñarme a superarlas. Espero haber aprendido... Con mucho cariño este trabajo también es para ustedes, pues al final, todo esto es fruto de su esfuerzo...

**A** mis hermanos, Karen y Rubén, por ser mis compañeros de vida... Este trabajo no hubiera sido posible sin su ayuda... Con mucho cariño a los otros dos mosqueteros...

**A** mi amigo y mentor, Dr. Ismael Martínez, muchas gracias por toda tu paciencia, solidaridad y dedicación... Si dios existe, él te puso en mi camino...

**A** mis amigos, compañeros y profesores, con quienes recorrí las aulas, los meses y los años y con quienes forjé capítulos que ahora son parte de mi memoria...

**A** mi Facultad y a mi Universidad, que me brindó la oportunidad de acceder al conocimiento y a través de él tener la posibilidad de una vida mejor...

# Índice general

<b>I</b>	<b>Sistemas Microelectromecánicos (MEMS)</b>	<b>1</b>
<b>1.</b>	<b>Definición y breve historia de los MEMS</b>	<b>3</b>
1.1.	Aplicaciones y mercados . . . . .	9
1.2.	Publicaciones periódicas, conferencias y sitios electrónicos . . . . .	13
<b>2.</b>	<b>Tecnología para la fabricación de MEMS</b>	<b>17</b>
2.1.	Materiales para la fabricación de MEMS . . . . .	17
2.1.1.	Enlaces interatómicos . . . . .	17
2.1.2.	Estructura de los materiales . . . . .	18
2.2.	Diseño de Mems asistido por computadora . . . . .	18
2.2.1.	Programas de diseño y simulación . . . . .	20
2.2.2.	Creación de máscaras para la fabricación de MEMS . . . . .	48
<b>II</b>	<b>Principios físicos del funcionamiento de los Sistemas Microelectromecánicos</b>	<b>65</b>
<b>3.</b>	<b>Teoría de elasticidad</b>	<b>67</b>
3.1.	Esfuerzo y deformación unitaria . . . . .	67
3.1.1.	Esfuerzo . . . . .	67
3.1.2.	Deformación unitaria . . . . .	69
3.1.3.	Ley de Hooke . . . . .	73
3.1.4.	Relaciones generales entre esfuerzo y deformación unitaria . . . . .	74
3.2.	Esfuerzo y deformación unitaria en vigas . . . . .	77
3.2.1.	Esfuerzo y deformación en una viga flexionada . . . . .	77
3.2.2.	Momento de flexión y momento de inercia . . . . .	79
3.2.3.	Desplazamiento de vigas bajo peso . . . . .	82
3.2.4.	Flexión por deformación residual de vigas compuestas . . . . .	89
3.2.5.	Desplazamiento angular de vigas sujetas a torsión . . . . .	94
3.3.	Método de la energía para el análisis de la frecuencia de oscilación . . . . .	97
3.3.1.	Sistema masa-resorte . . . . .	97
3.3.2.	Método de Rayleigh-Ritz . . . . .	100
3.3.3.	Frecuencias de oscilación de una viga . . . . .	103
3.4.	Modos de oscilación y flexión de una viga . . . . .	107
3.4.1.	Ecuación diferencial para la oscilación libre de una viga . . . . .	107
3.4.2.	Frecuencias de oscilación de una viga doblemente anclada . . . . .	109
3.4.3.	Oscilación bajo la acción de una fuerza axial . . . . .	112
3.4.4.	Flexión de una viga doblemente anclada . . . . .	115
3.5.	Vibraciones forzadas y amortiguadas . . . . .	118
3.5.1.	Fuerza de amortiguamiento . . . . .	118
3.5.2.	Vibraciones con amortiguamiento . . . . .	119
3.5.3.	Oscilación provocada por una fuerza . . . . .	123

3.5.4.	Resonancia y factor de calidad . . . . .	126
3.5.5.	Oscilación provocada por una vibración . . . . .	129
<b>4.</b>	<b>Amortiguamiento por efecto del aire</b>	<b>133</b>
4.1.	Efecto de arrastre de un fluido . . . . .	133
4.1.1.	Viscosidad de un fluido . . . . .	133
4.1.2.	Flujo viscoso de un fluido . . . . .	136
4.1.3.	Amortiguamiento por la fuerza de arrastre . . . . .	140
4.1.4.	Efectos del amortiguamiento debido al aire sobre la dinámica de los Microsistemas . . . . .	141
4.2.	Amortiguamiento por compresión de una película de aire . . . . .	142
4.2.1.	Ecuación de Reynolds para amortiguamiento por presión sobre una película de aire . . . . .	142
4.2.2.	Placa rectangular larga . . . . .	147
4.2.3.	Placa rectangular . . . . .	148
4.2.4.	Placas circulares y anillos . . . . .	152
4.2.5.	Placa perforada, infinita y muy delgada . . . . .	155
4.2.6.	Amortiguamiento en vigas con movimiento oscilatorio . . . . .	157
4.2.7.	Efectos de un coeficiente de presión pequeño . . . . .	161
4.3.	Amortiguamiento de placas gruesas perforadas . . . . .	163
4.3.1.	Ecuación modificada de Reynolds para placas perforadas . . . . .	163
4.3.2.	Placa perforada larga y rectangular . . . . .	165
4.3.3.	Aproximación del área efectiva de amortiguamiento . . . . .	168
4.4.	Amortiguamiento por deslizamiento de superficies sobre una película de aire . . . . .	169
4.4.1.	Ecuaciones básicas para el amortiguamiento por deslizamiento de superficies sobre una película de aire . . . . .	169
4.4.2.	Modelo del flujo de Couette . . . . .	172
4.4.3.	Modelo del flujo de Stokes . . . . .	174
4.4.4.	Amortiguamiento por efecto del aire para un resonador con actuador electrostático lateral en forma de peine . . . . .	176
4.5.	Amortiguamiento en aire enrarecido . . . . .	178
4.5.1.	Viscosidad efectiva del aire enrarecido . . . . .	178
4.5.2.	Modelo de Christian para amortiguamiento provocado por aire enrarecido . . . . .	180
4.5.3.	Modelo de transferencia de energía para amortiguamiento por presión sobre una película de aire . . . . .	182
4.5.4.	Amortiguamiento en alto vacío . . . . .	188
<b>5.</b>	<b>Actuación electrostática</b>	<b>191</b>
5.1.	Fuerzas electrostáticas . . . . .	191
5.1.1.	Fuerza normal . . . . .	191
5.1.2.	Fuerza tangencial . . . . .	192
5.1.3.	Efectos en los bordes . . . . .	193
5.2.	Actuadores mecánicos impulsados por fuerzas electrostáticas . . . . .	195
5.2.1.	Actuador de placas paralelas . . . . .	195
5.2.2.	Actuador electrostático sujeto con vigas de torsión . . . . .	200
5.2.3.	Actuador electrostático lateral en forma de peine . . . . .	204
5.3.	Voltaje alterno y escalones aplicados a los actuadores electrostáticos . . . . .	206
5.3.1.	Voltaje alterno . . . . .	206
5.3.2.	Efecto de resorte negativo y frecuencia de vibración . . . . .	210
5.3.3.	Actuación mediante voltaje de tipo alterno . . . . .	212

<b>6. Registro de variaciones en sensores capacitivos</b>	<b>215</b>
6.1. Esquemas de medición de variaciones en la capacitancia . . . . .	215
6.1.1. Mediciones a través de un voltaje directo de polarización . . . . .	219
6.1.2. Medición mediante arreglos de diodos . . . . .	222
6.1.3. Medición mediante doble excitación . . . . .	225
6.1.4. Medición mediante balance de fuerzas electrostáticas . . . . .	227
6.1.5. Medición mediante conmutación de capacitores . . . . .	230
6.1.6. Medición de la frecuencia . . . . .	232
6.2. Efectos de la excitación eléctrica en sistemas que reciben una aceleración cte. . . . .	234
6.2.1. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor simple . . . . .	234
6.2.2. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor doble . . . . .	238
6.2.3. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor configurado para el balanceo de fuerzas	241
6.3. Efectos de la excitación en sistemas que reciben acel. con forma de escalón . . . . .	245
6.3.1. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor simple . . . . .	245
6.3.2. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor doble . . . . .	248
6.3.3. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor configurado para el balanceo de fuerzas	249
6.4. Efectos de la excitación en sistemas que reciben una acel. con forma de pulso . . . . .	251
6.4.1. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor simple . . . . .	251
6.4.2. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor doble . . . . .	252
6.4.3. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor configurado para el balanceo de fuerzas	253
<b>III Diseño de sensores inerciales micromaquinados</b>	<b>255</b>
<b>7. Antecedentes</b>	<b>257</b>
7.1. Sensores inerciales . . . . .	257
7.2. Aplicaciones . . . . .	262
<b>8. Conceptos básicos de los acelerómetros</b>	<b>267</b>
8.1. Descripción general . . . . .	267
8.2. Configuración geométrica de un acelerómetro micromaquinado . . . . .	270
8.2.1. Masa móvil . . . . .	270
8.2.2. Suspensión . . . . .	271
8.2.3. Amortiguador . . . . .	284
8.2.4. Transductor mecánico-eléctrico . . . . .	287
8.2.5. Factor de calidad . . . . .	288
<b>9. Diseño de un acelerómetro micromaquinado en el proceso PolyMumps</b>	<b>289</b>
9.1. Propuesta de los parámetros de diseño . . . . .	289
9.2. Simulación mediante ecuaciones diferenciales de parámetros concentrados . . . . .	309
9.2.1. Acelerómetro de 600 x 1200 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja . . . . .	318
9.2.2. Acelerómetro de 600 x 1200 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión sagital . . . . .	322
9.2.3. Acelerómetro de 960 x 1200 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja . . . . .	327
9.2.4. Acelerómetro de 960 x 1200 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión sagital . . . . .	331
9.2.5. Acelerómetro de 1200 x 360 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja . . . . .	336
9.2.6. Acelerómetro de 1200 x 360 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión sagital . . . . .	340
9.2.7. Acelerómetro de 1200 x 480 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja . . . . .	345
9.2.8. Acelerómetro de 1200 x 480 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión sagital . . . . .	349
9.3. Máscara final . . . . .	354
9.3.1. Acelerómetro de 600 x 1200 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja . . . . .	359
9.3.2. Acelerómetro de 600 x 1200 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión sagital . . . . .	360
9.3.3. Acelerómetro de 960 x 1200 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja . . . . .	361
9.3.4. Acelerómetro de 960 x 1200 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión sagital . . . . .	362
9.3.5. Acelerómetro de 1200 x 360 [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja . . . . .	362

9.3.6. Acelerómetro de $1200 \times 360$ [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión sagital . . . . .	363
9.3.7. Acelerómetro de $1200 \times 480$ [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja . . . . .	363
9.3.8. Acelerómetro de $1200 \times 480$ [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión sagital . . . . .	364
9.3.9. Verificación general automática de las reglas de diseño y aproximación de la geometría	364
9.3.10. Formación del dado final . . . . .	364
9.4. Conclusiones y trabajo futuro . . . . .	365
<b>A. Apéndice 1. Constantes físicas.</b>	<b>369</b>
<b>B. Bibliografía</b>	<b>371</b>

# Índice de figuras

1.1. La Ley de Moore expresa el incremento de la densidad de transistores por unidad de superficie en la fabricación microelectrónica a lo largo de los últimos 45 años. . . . .	7
2.1. Configuración general de un acelerómetro micromaquinado. . . . .	22
2.2. Modelo en Simulink del dispositivo mecánico de registro del acelerómetro micromaquinado, el cual es un sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	22
2.3. Modelo en Simulink del acelerómetro completo. El modelo incluye la dinámica del sistema masa-resorte-amortiguador, el bloque de conversión de desplazamiento a capacitancia y el arreglo de realimentación. . . . .	23
2.4. Modelo a nivel de sistema en Orcad PSpice de un acelerómetro micromaquinado con un controlador PID en lazo cerrado. . . . .	25
2.5. L-Edit es el editor de máscaras de Mems Pro de la empresa gala MemsCap. . . . .	26
2.6. Modelo tridimensional de un motor electrostático diseñado en MEMSPro. . . . .	26
2.7. Simulación en T-Spice de la respuesta en el tiempo de un acelerómetro micromaquinado. . . . .	27
2.8. Diseño geométrico de un motor electrostático exportado hacia Ansys desde MemsPro para su simulación. . . . .	28
2.9. Diagrama de un acelerómetro con vigas voladas como resortes, masa móvil y sensores capacitivos capturado en S-Edit. . . . .	28
2.10. Flujo de diseño en MemsPro. . . . .	29
2.11. El diseño de las máscaras bidimensionales y la definición de los pasos del proceso de fabricación en Designer es la base del trabajo en CoventorWare. . . . .	31
2.12. Modelado de un microacelerómetro en CoventorWare. A la izquierda, modelo a nivel de sistema en Architect. A la derecha, modelo geométrico tridimensional en Designer. . . . .	32
2.13. Particionamiento (mallado) de una placa suspendida correspondiente a un capacitor variable para RF en Analyzer de CoventorWare. . . . .	32
2.14. Análisis del desplazamiento en un microinterruptor electrostático en Analyzer de CoventorWare. . . . .	33
2.15. CoventorWare puede simular Sistemas Microoptoelectromecánicos (MOEMS) como un microespejo. . . . .	33
2.16. Máscara creada con IntelliMask de IntelliSuite. . . . .	34
2.17. De la máscara al modelo tridimensional al mallado para la simulación multifísica. . . . .	35
2.18. Modelado tridimensional y mallado de un acelerómetro en IntelliFab de Intellisuite. . . . .	35
2.19. Simulación electromecánica de un sensor de presión piezoresistivo en IntelliSuite. . . . .	36
2.20. Modelado del fluido dentro de una boquilla de tinta con IntelliSuite. . . . .	37
2.21. Simulación con AnisE del micromaquinado en volumen de un acelerómetro fabricado en una oblea tipo [100]. . . . .	38
2.22. Procedimiento típico en Ansys Multiphysics. . . . .	39
2.23. Actuador electrotrémico conocido como HotArm. Al circular una corriente eléctrica entre los dos cojinetes se disipa energía en forma de calor (efecto Joule) lo que incrementa la temperatura del material y lo deforma. El efecto obtenido es un cabeceo hacia la izquierda. . . . .	40
2.24. Imagen de un actuador electrotrémico fabricado en el proceso PolyMumps (Simon Fraser University, 2003). El actuador tiene una longitud de 200 $\mu\text{m}$ y es capaz de alcanzar un desplazamiento máximo de 10 $\mu\text{m}$ . . . . .	41

2.25. Mallado de la placa y de las vigas de torsión del microespejo. La placa funciona como electrodo y superficie reflejante giratoria del dispositivo. . . . .	42
2.26. Mallado de la placa del microespejo, del sustrato y de la masa de aire que rodea al Microsistema. . . . .	42
2.27. Visualización de los contornos de voltaje para el microespejo gracias a las herramientas de post-procesamiento que Ansys proporciona a los diseñadores. . . . .	42
2.28. Visualización de la rotación y aproximación entre placas del Sistema Microelectromecánico. . . . .	43
2.29. Visualización con Ansys de los esfuerzos en las vigas de torsión del microespejo. . . . .	43
2.30. Estructura modular de ComSol Multiphysics. Entre los módulos que ofrece se encuentra uno especialmente orientado al modelado y simulación de Sistemas Microelectromecánicos; además, ComSol Multiphysics puede intercambiar información con Matlab y Simulink en formatos nativos. . . . .	44
2.31. Resultado de la simulación del actuador electrostático con forma de peine. La imagen muestra desplazamiento e intensidad de campo eléctrico. . . . .	45
2.32. Visualización tridimensional del desplazamiento del giroscopio afectado por el amortiguamiento debido a la compresión del aire atrapado entre el sustrato y la masa suspendida. . . . .	45
2.33. Diagrama que representa las distintas etapas necesarias para la simulación de Microsistemas con Algor. . . . .	47
2.34. Visualización de esfuerzos obtenida mediante la simulación electromecánica de una microbomba piezoeléctrica usada en aplicaciones biomédicas tales como: la creación de dosificadores automáticos de medicamentos para pacientes con diabetes o bajo tratamiento de quimioterapia. . . . .	47
2.35. Análisis de las fuerzas electrostáticas generadas cuando se aplica un voltaje al actuador electrostático de peine con forma radial. . . . .	48
2.36. Capacitor variable simulado con Abaqus. En la gráfica se visualiza el desplazamiento de la placa y de las vigas que la sostienen con lo cual varía la capacitancia del dispositivo. Los varactores son parte de los Sistemas Microelectromecánicos para Radio Frecuencia. Sus aplicaciones más comunes están en los controladores de frecuencia y los generadores de armónicos. . . . .	49
2.37. Interruptor micromaquinado simulado con Abaqus. En la imagen se aprecia el desplazamiento de la viga volado que cierra el circuito entre los dos cojinetes inferiores. La viga volada se flexiona por efecto de la fuerza electrostática presente entre ella y el cojinete inferior más grande. . . . .	49
2.38. Ciclo del proceso de micromaquinado de superficie. . . . .	50
2.39. Ejemplo de aproximación mediante un polígono cerrado frente a la entidad geométrica original. . . . .	51
2.40. Pantalla del ambiente de diseño MemsPro. La barra de herramientas del proceso se encuentra en el costado izquierdo de la pantalla. El proceso que muestra es PolyMumps de la empresa MemsCap. . . . .	51
2.41. Capas de material estructural y de sacrificio del proceso de fabricación de Sistemas Microelectromecánicos PolyMumps. También se muestra el trabajo de socavado realizado sobre la primera capa de sacrificio (primer óxido) llamado Dimples (postes). . . . .	52
2.42. La periferia de la masa y los agujeros de liberación son descritos por una secuencia continua de segmentos de línea para formar polígonos cerrados en una sola capa. . . . .	55
2.43. La masa es dibujada en una capa y los agujeros en otra, así, la descripción se logra en dos capas separadas. . . . .	55
2.44. Cortes seccionales de varios Sistemas Microelectromecánicos: a) actuador electrotérmico, b) resonador, c) placa levadiza y d) capacitor variable. . . . .	56
2.45. Simulación de capas de polisilicio ancladas entre sí. . . . .	57
2.46. Visualización del corte seccional de un poste creado en MemsPro. Intencionalmente se violan las reglas de diseño para compactar el perfil del poste. . . . .	57
2.47. Cojinete de contacto. Elemento indispensable en el diseño de Sistemas Microelectromecánicos para ingresar y extraer señales eléctricas mediante puntas de prueba o conductores soldados. . . . .	58
2.48. Anillo rotacional. Elemento básico para la creación de engranes, motores electrostáticos, levas y palancas. . . . .	59
2.49. Viga volada. Elemento básico para la creación de resortes, masas suspendidas, actuadores electrotérmicos, actuadores electrostáticos y microinterruptores, entre otros. . . . .	60

2.50. Bisagra. Elemento que permite a una placa de polisilicio girar alrededor de un eje paralelo a la placa de sustrato. . . . .	61
2.51. Revisión automática de las reglas de diseño sobre una máscara creada con L-Edit. La ventana de revisión de errores señala cada una de las violaciones y conduce al diseñador hasta la sección de la máscara en dónde se encuentra la falla. . . . .	63
2.52. Conjunto de celdas estándar en PolyMumps: a) actuador electrostático rotacional en forma de peine, b) suspensión en forma de cangrejo, c) actuador electrostático lineal y d) motor electrostático. . . . .	64
2.53. Motor electrostático hecho completamente a partir de celdas estándar disponibles en MemsPro. . . . .	64
3.1. Componentes del tensor de esfuerzos. . . . .	68
3.2. Deformación de un material unidimensional. . . . .	69
3.3. Deformación en un material tridimensional. . . . .	70
3.4. Deformación angular debido a esfuerzos cortantes. . . . .	72
3.5. Un elemento con forma de paralelepipedo sometido a un esfuerzo normal. . . . .	73
3.6. Sección elemental de una viga. . . . .	77
3.7. Combadado de una viga bajo la acción de un momento de flexión. . . . .	78
3.8. Las fuerzas provocan un momento de flexión. . . . .	80
3.9. Corte seccional de una viga trapezoidal. . . . .	81
3.10. Viga volada con carga concentrada en un extremo. . . . .	83
3.11. Viga volada con carga distribuida. . . . .	84
3.12. Viga doblemente anclada (puente) y sus características. . . . .	86
3.13. El dibujo esquemático de una estructura formada por dos vigas voladas sosteniendo una masa. . . . .	87
3.14. Flexión del par de vigas voladas que sostienen una masa por efecto del peso. . . . .	87
3.15. Distribución del esfuerzo sobre la superficie de la viga. . . . .	88
3.16. Viga compuesta por dos capas: óxido de silicio ( $\text{SiO}_2$ ) y silicio (Si). . . . .	90
3.17. Viga compuesta por $n$ capas. . . . .	93
3.18. Sección transversal de la barra de torsión rectangular. . . . .	96
3.19. Microestructura con barras de torsión. A la izquierda una perspectiva del dispositivo. A la derecha una vista seccional. . . . .	96
3.20. Modelo masa-resorte. . . . .	98
3.21. Análisis de la energía potencial en una viga. . . . .	101
3.22. Función de forma aproximada para el primer modo superior de vibración. . . . .	107
3.23. Fuerzas y momentos actuando sobre la sección de una viga en movimiento oscilatorio. . . . .	108
3.24. Fuerzas y momentos actuando sobre la sección de una viga bajo la acción de una fuerza axial. . . . .	112
3.25. Flexión (combadado) de una viga doblemente anclada. . . . .	115
3.26. Modelo simplificado de un sistema oscilatorio con amortiguamiento. . . . .	119
3.27. Grafica con las atenuaciones de amplitud de oscilación en sistemas con diferentes coeficientes de amortiguamiento. . . . .	121
3.28. Respuesta a una fuerza con forma de escalón para diferentes coeficientes de amortiguamiento. . . . .	123
3.29. Relaciones entre la amplitud y la frecuencia para diferentes coeficientes de amortiguamiento. . . . .	125
3.30. Corrimiento de fase de vibraciones forzadas para diferentes coeficientes de amortiguamiento. . . . .	126
3.31. Oscilación inducida por una vibración mecánica. . . . .	130
4.1. Mecanismo de viscosidad en líquidos. . . . .	134
4.2. Mecanismo de viscosidad en un gas. . . . .	134
4.3. Esfuerzos cortantes sobre la superficie de un elemento cúbico en un líquido. . . . .	136
4.4. Flujo de un fluido en una tubería muy larga. . . . .	137
4.5. Presión ejercida por un movimiento de compresión sobre el aire contenido entre dos placas. . . . .	142
4.6. Flujo de masa dentro y fuera de un elemento unitario. (a) una columna elemental, (b) las tasas de flujo. . . . .	143
4.7. Compresión de un gas debida a la acción de un pistón. . . . .	146
4.8. Amortiguamiento debido a la compresión del aire por una placa rectangular. . . . .	147
4.9. Distribución de la presión bajo una larga placa rectangular. . . . .	148

4.10. Placa rectangular con dimensiones de ancho y largo comparables. . . . .	149
4.11. Dependencia del factor $\beta$ respecto de la relación dimensional B/L. . . . .	152
4.12. Placa circular. (a) vista superior y sistema de referencia polar y (b) vista de la sección transversal. . . . .	153
4.13. Placa anular. (a) vista superior y sistema de referencia polar y (b) vista de la sección transversal. . . . .	154
4.14. Dibujo esquemático de las perforaciones sobre una placa delgada. (a) arreglo cuadrangular y (b) arreglo hexagonal. . . . .	155
4.15. La dependencia del factor $k$ respecto de $\beta$ . . . . .	157
4.16. Modelo de una cadena de discos para el amortiguamiento por efecto del aire en una viga (vista superior). . . . .	159
4.17. Esquema de la estructura de una placa perforada. (a) vista superior y (b) vista de la sección transversal. . . . .	164
4.18. Geometría de una larga placa rectangular perforada ( $b \gg a$ ). En la figura no se muestran los agujeros. . . . .	166
4.19. Dependencia de la distribución normalizada de presión respecto de $a/l$ . . . . .	167
4.20. Distribución de la presión (normalizada) para una placa rectangular cuyo ancho, $a$ , es diez veces mayor que la longitud de atenuación: $l$ . . . . .	168
4.21. Aproximación de la distribución de la presión para una placa rectangular con $a$ diez veces mayor que $l$ . . . . .	169
4.22. Amortiguamiento por deslizamiento sobre una delgada película de aire. (a) esquema de la estructura y (b) modelo simplificado. . . . .	170
4.23. Decaimiento efectivo de la distancia, $\delta$ , como función de la frecuencia. . . . .	172
4.24. Placa que oscila lateralmente sobre el sustrato. . . . .	173
4.25. Esquema de un resonador basado en un actuador electrostático en forma de peine. . . . .	176
4.26. Colisiones frontales de la placa oscilante con las moléculas de gas. . . . .	180
4.27. La velocidades de la placa y de una molécula. (a) antes de una colisión y (b) después de una colisión. . . . .	183
4.28. Compresión de aire en un ambiente de baja presión (enrarecimiento de gases). . . . .	185
4.29. Dependencia del factor de calidad de la presión del aire. . . . .	188
6.1. Ejemplos de actuadores de placas paralelas. (a) Microrresonador con peine electrostático para movimiento lateral (consignado en <i>The MEMS Handbook: design and fabrication</i> , editado por Mohamed Gad-el-Hak, CRC Press, 2006). (b) Giroscopio con actuadores de placas paralelas dispuestos en pila vertical (consignado en <i>Robust Micromachined Vibratory Gyroscopes</i> , Cenk Acar, University of California, 2004). (c) Scanner bidimensional con peines electrostáticos verticales (consignado en <a href="http://www.stanford.edu/~wibool/research.html">http://www.stanford.edu/~wibool/research.html</a> , 2009). (d) Micromotor electrostático (consignado en <i>Comprehensive Microsystems</i> editado por Yogesh B. Gianchandani, Elsevier, 2008). . . . .	216
6.2. Acelerómetro basado en un sistema masa-resorte con sensores capacitivos del tipo diferencial. . . . .	217
6.3. Ejemplos de sensores capacitivos de placas paralelas. (a) Parte de un acelerómetro diseñado por la empresa Freescale en el que se muestra un sensor capacitivo diferencial (consignado en <i>The MEMS Handbook, Applications</i> , editado por Mohamed Gad-el-Hak, CRC Press, 2006). (b) Parte de un giroscopio vibratorio en el que se aprecia el uso de sensores capacitivos de placas paralelas para registrar el movimiento de una masa de prueba (consignado en <i>Robust Micromachined Vibratory Gyroscopes</i> , Cenk Acar, University of California, 2004). (c) Vista superior de un arreglo de cinco sensores de presión basados en diafragmas con un capacitor de referencia al centro (consignado en <i>Comprehensive Microsystems</i> , editado por Yogesh B. Gianchandani, Elsevier, 2008). (d) Giroscopio vibratorio con electrodos de actuación, registro y control (consignado en <i>Comprehensive Microsystems</i> , editado por Yogesh B. Gianchandani, Elsevier, 2008). . . . .	218
6.4. Esquema de medición de variaciones de capacitancia a través de un voltaje directo de polarización. . . . .	219
6.5. Sensor de presión basado en placas paralelas. . . . .	220
6.6. Circuito basado en diodos rectificadores (puente de Wheatstone) para el registro de variaciones en la capacitancia. . . . .	222

6.7. Puente de Wheatstone para registrar cambios en un capacitor variable diferencial. . . . .	224
6.8. Puente de Wheatstone con carga externa. . . . .	224
6.9. Circuito para el registro de variaciones en la capacitancia mediante la aplicación de dos señales sinusoidales. . . . .	226
6.10. Circuito para el registro de variaciones en la capacitancia mediante la aplicación de dos señales sinusoidales y realimentación. . . . .	227
6.11. Técnica para registro de variaciones en la capacitancia y balance de fuerzas electrostáticas presentes en el sensor. . . . .	228
6.12. Diagrama del circuito para el registro de variaciones en la capacitancia a través de conmutación de capacitores. . . . .	230
6.13. Diagrama del circuito de conmutación de capacitores para registrar variaciones en un capacitor variable diferencial. . . . .	231
6.14. Diagrama de un puente autobalanceado para medir un capacitor variable diferencial. . . . .	232
6.15. Diagrama con un oscilador de Schmitt para medir cambios en la frecuencia de oscilación de un circuito. . . . .	233
6.16. Variante en el uso de un oscilador de Schmitt para el registro de cambios en la frecuencia de oscilación de un circuito. . . . .	234
6.17. Esquema con la estructura de un dispositivo capacitivo simple. . . . .	235
6.18. Gráfica de aceleración ( $q$ ) en función del desplazamiento relativo ( $x/d$ ) para distintos valores de voltaje ( $p$ ) en un capacitor simple. . . . .	237
6.19. Esquema con la estructura de un dispositivo capacitivo diferencial (doble capacitor). . . . .	238
6.20. Gráfica de aceleración ( $q$ ) en función del desplazamiento relativo ( $x/d$ ) para distintos valores de voltaje ( $p$ ) en un capacitor diferencial (doble). . . . .	239
6.21. Gráfica de la relación entre la aceleración máxima ( $f$ ) y voltaje ( $p$ ) para las configuraciones de capacitor simple y doble. . . . .	240
6.22. Versión simplificada de la estructura de un sensor capacitivo realimentado para lograr el balanceo de fuerzas eléctricas. . . . .	241
6.23. Gráfica de la relación aceleración ( $f$ ) en función del desplazamiento relativo ( $x/d$ ) para distintos valores de voltaje de realimentación ( $\beta$ ). . . . .	243
6.24. Gráfica de la relación aceleración ( $f$ ) en función del desplazamiento relativo ( $x/d$ ) para distintos valores de voltaje de realimentación ( $\beta$ ). . . . .	244
6.25. Esquema de la estructura básica de un sensor capacitivo simple sometido a una aceleración con forma de escalón. . . . .	246
6.26. Dependencia de la aceleración máxima ( $q_c$ ) respecto del voltaje ( $p$ ) para una aceleración constante y una aceleración con forma de escalón. . . . .	247
6.27. Esquema de la estructura básica de un sensor capacitivo diferencial (doble) sometido a una aceleración con forma de escalón. . . . .	248
6.28. Dependencia de la aceleración crítica ( $q_c$ ) respecto del voltaje de alimentación ( $p$ ) para distintos arreglos en los capacitores y aceleración con forma de escalón. . . . .	249
6.29. Esquema de la estructura básica de un sensor capacitivo diferencial (doble) con realimentación para el balanceo de fuerzas sometido a una aceleración con forma de escalón. . . . .	250
6.30. Dependencia de $f(p)$ respecto de $p$ para configuraciones en el capacitor variable con un sólo lado, diferencial y diferencial con realimentación. . . . .	252
7.1. Esquema y fotografía del acelerómetro pendular diseñado y fabricado por la empresa Bosch. . . . .	258
7.2. Fotografía del llamado G-Chip desarrollado por la empresa Insouth Microsystems. . . . .	259
7.3. Fotografía del acelerómetro ADXL50 desarrollado y comercializado por la empresa Analog Devices Inc. . . . .	260
7.4. Fotografía retocada de una celda G desarrollada por Motorola. . . . .	260
8.1. Suspensión formada a partir de vigas voladas sometidas a flexión lateral con restricciones de giro en su extremo adherido a la masa móvil. . . . .	273
8.2. Equilibrio de fuerzas y momentos. . . . .	274

8.3. Suspensión formada a partir de una viga volada doblada. . . . .	275
8.4. Suspensión formada a partir de un par de vigas voladas dobladas y conectadas entre sí. . . . .	276
8.5. Suspensión tipo serpiente. Muy útil en microensambles. . . . .	277
8.6. Suspensión tipo caja con bordes rectangulares. . . . .	278
8.7. Suspensión de caja con bordes circulares. . . . .	279
8.8. Suspensión sagital. Muy sensible pues puede amplificar un movimiento por factores mayores a 10. . . . .	280
8.9. Suspensión en forma de doble V. . . . .	281
8.10. Suspensión tipo patas de cangrejo. Normalmente el segmento más largo se coloca de forma ortogonal a la dirección de movimiento. . . . .	282
8.11. Suspensión tipo langosta. Se utilizan cuatro, una en cada esquina, para sostener una placa rectangular. . . . .	283
8.12. Suspensión tipo X, este tipo de suspensión toma su nombre debido a que se colocan cuatro soportes inclinados (dos por lado) para una placa (masa) móvil. . . . .	284
8.13. Suspensión en forma de espiral. La masa móvil se encuentra sujeta al centro de la espiral y se presenta un par como entrada. . . . .	285
9.1. Modelo tridimensional del actuador y sensor electrostático. Se aprecian las anclas de los electrodos diferenciales fijos y las pistas de Poly0 que sirven para la conexión eléctrica y corren por debajo de los electrodos (vigas) suspendidos. . . . .	358

# Introducción

Este trabajo está estructurado en tres partes. La primera de ellas es una introducción general al campo de investigación y desarrollo de los Sistemas Microelectromecánicos (MEMS por su acrónimo en inglés) y aborda temas que van desde los orígenes de esta interesante área de desarrollo tecnológico hasta el uso de las herramientas de diseño, simulación y elaboración de máscaras y plantillas de fabricación para los MEMS. La segunda parte es una exposición detallada de los fenómenos físicos que intervienen en el funcionamiento de los Sistemas Microelectromecánicos, dicha exposición incluye el análisis de los modelos matemáticos y diversas discusiones sobre las consideraciones que deben tenerse en cuenta debido a los factores de escala, los arreglos geométricos y las propiedades de los materiales propios de la fabricación de MEMS. Esta segunda parte inicia con una revisión de la teoría de la elasticidad, tema que resulta de gran importancia en virtud de que las estructuras de soporte y los elementos mecánicos en general para la creación de acelerómetros son creados a partir de placas y vigas suspendidas cuyo comportamiento elástico es aprovechado para crear resortes a partir de diversos arreglos geométricos que aumentan o disminuyen la rigidez. En el segundo capítulo se aborda el tema del amortiguamiento por efecto del aire. En este capítulo se analizan, principalmente, tres fenómenos que resultan de interés para los Sistemas Microelectromecánicos: el amortiguamiento debido al arrastre de un cuerpo inmerso en un fluido, el amortiguamiento que se presenta al comprimir una delgada película de aire entre dos placas y el amortiguamiento por efecto de deslizamiento de una superficie sobre una película de aire. Todas estas formas de amortiguamiento se presentan en un acelerómetro micromaquinado.

En el tercer capítulo de la segunda parte se trata la actuación electrostática. Este tópico es fundamental para el diseño de Sistemas Microelectromecánicos en general y en particular para el diseño de un acelerómetro, pues permite implantar una forma de estabilización electromecánica que amplía el rango de operación del dispositivo y mejora su sensibilidad. Este capítulo estudia el principio básico de la electrostática, según el cual dos cargas puntuales en el espacio se atraen o repelen (según el signo de las cargas) con una fuerza que es directamente proporcional al producto de los valores de dichas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, y analiza este fenómeno para arreglos geométricos de placas paralelas en la escala de micrometros. El principio de atracción y repulsión de cargas electrostáticas se aprovecha en la creación de MEMS para generar movimientos lineales oscilatorios que pueden ser transformados fácilmente en movimientos lineales o rotatorios continuos.

En el último capítulo de la segunda parte se analizan los sensores capacitivos. Este tipo de sensores resultan de gran interés en los Sistemas Microelectromecánicos en general y en particular en los acelerómetros, debido a la simplicidad de su manufactura basada en placas paralelas, a la facilidad de su manejo a partir de señales de voltaje y a la confiabilidad de su operación si se toman las precauciones debidas en el proceso de diseño y manufactura. Estos sensores aprovechan la capacidad de almacenamiento de carga que un par de placas metálicas paralelas tienen y la variación de esta capacidad a partir de los cambios que experimentan en su proximidad, para registrar desplazamientos asociados con variables físicas tales como aceleración y presión. Cabe mencionar que existen otros dos factores que modifican la capacidad de almacenamiento de cargas de dos placas paralelas, estos son: el área de traslape entre ellas y la permitividad eléctrica del material colocado en el espacio de su separación, sin embargo, en el diseño del acelerómetro micromaquinado se aprovecharán las variaciones debidas a cambios en la distancia de separación entre placas.

La tercera parte del trabajo corresponde a una propuesta de diseño original de un acelerómetro micromaquinado en un proceso de fabricación superficial llamado Polymumps. A la luz de lo abordado en las dos

primeras partes, se hace la propuesta de diseño de este sensor inercial aplicando todas las herramientas de modelado matemático estudiadas en la segunda parte y utilizando datos provenientes de la primera parte. En este tercer apartado, se incluyen los cálculos elaborados para definir las dimensiones y características geométricas del dispositivo, las simulaciones hechas a partir de modelos de parámetros concentrados y las plantillas con el diseño para su fundición (término de uso corriente en el ámbito de los MEMS para denominar al proceso de fabricación de un Microsistema). El alcance del texto no incluye la realización de pruebas experimentales, debido a la indisposición de recursos económicos para fabricar el Sistema Microelectromecánico y llevarlo al laboratorio, sin embargo el rigor y meticulosidad con que se ha tratado cada parte del diseño aportan solidez a la propuesta y se espera que en un futuro cercano pueda fabricarse el acelerómetro micromaquinado que se propone.

Al final del texto se han incluido una serie de apéndices con información técnica muy útil en el diseño y simulación de MEMS. Entre ellos, las especificaciones y reglas de diseño del proceso de maquinado superficial llamado Polymumps, las propiedades térmicas, mecánicas y eléctricas de diversos materiales empleados en la fabricación de MEMS, los valores de los momentos de inercia para distintos elementos geométricos comunes en la fabricación de Microsistemas, los valores de algunas constantes físicas muy útiles para quienes trabajan con MEMS y una guía de manejo de los factores de escala en el sistema de unidades al pasar al mundo de los micrometros.

Finalmente, el presente volumen representa uno de los pocos esfuerzos por sistematizar en español la información técnica existente sobre el diseño, simulación y fabricación de Sistemas Microelectromecánicos. Campo de desarrollo tecnológico que en otras latitudes e idiomas tiene gran vitalidad y empuje y que en nuestro país apenas inicia su gestación. Ójala este texto resulte de interés para las nuevas generaciones y sea una referencia para iniciarse en esta interesante y atractiva disciplina.

**Parte I**

**Sistemas Microelectromecánicos  
(MEMS)**

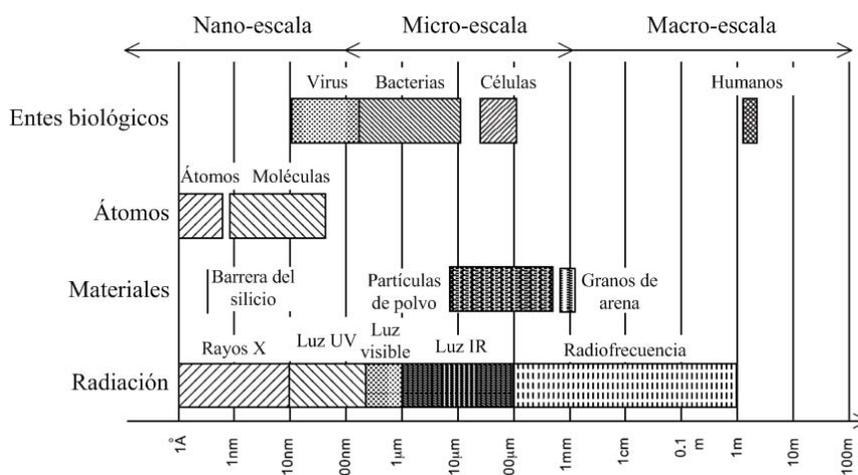


# Capítulo 1

## Definición y breve historia de los MEMS

Una primera definición general para los MEMS es que se trata de sistemas embebidos y especializados en miniatura que involucran uno o más componentes o estructuras micromaquinadas que actúan como sensores o actuadores para habilitar funciones en un nivel superior dentro de la estructura de un sistema más complejo.

En los Estados Unidos esta tecnología se conoce como Sistemas Microelectromecánicos (MEMS), en tanto que en Europa son llamados Tecnología de Microsistemas (MST). Para uno y otro polo de desarrollo tecnológico las diferencias de las denominaciones implican diferencias en las definiciones. En tanto que para los tecnólogos norteamericanos, los MEMS son principalmente dispositivos electromecánicos, fabricados mediante técnicas desarrolladas por la industria de la microelectrónica, cuyas dimensiones se encuentran en el orden de los  $\mu\text{m}$ , basados principalmente en estructuras de silicio y que tienen un cierto grado de integración con circuitos electrónicos desarrollados en este mismo material, para los tecnólogos europeos se trata primordialmente de sistemas con un alto nivel de integración y miniaturización (también en el orden de los  $\mu\text{m}$ ) que emplean diferentes tecnologías y materiales para fabricar componentes que son combinados en una sola unidad funcional. Una forma de entender las diferencias en las definiciones en este campo de investigación y desarrollo es que se trata en realidad de un reflejo de la diversidad de aplicaciones y tecnologías que intervienen en el desarrollo de los MEMS y MST.

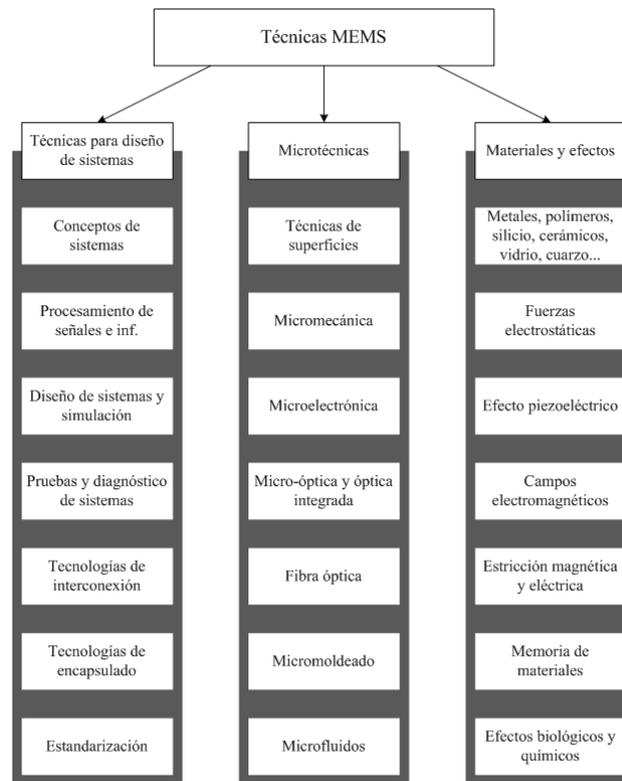


Una perspectiva de los tamaños de diversos elementos en el dominio nano, micro y macro.

Por esta razón, tal vez, la definición más acertada para MEMS y MST es la que proponen Nadim Maluf y Kirt Williams [1] en su texto *An Introduction to MEMS Engineering* pues afirman que se trata de un

conjunto de herramientas, un dispositivo físico y una metodología de desarrollo tecnológico, todo en uno. Así, los MEMS y MST son:

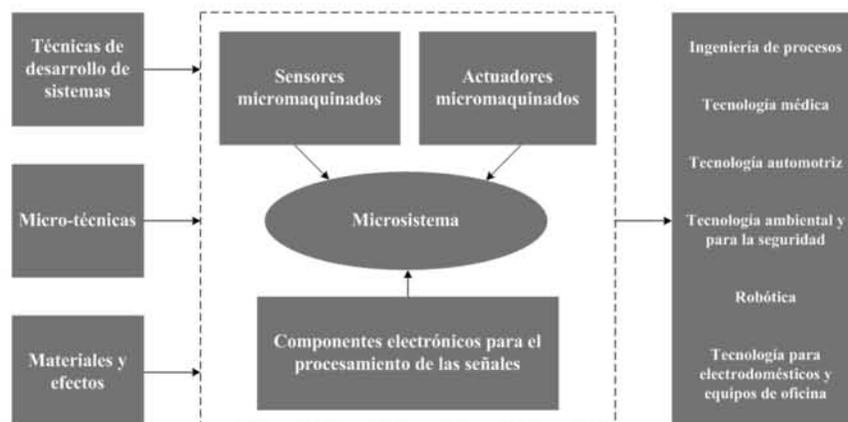
1. Un portafolio de técnicas y procesos para diseñar y crear sistemas en miniatura muchos de ellos heredados de la industria de la microelectrónica.
2. Un dispositivo físico generalmente especializado y con una única aplicación final que contiene al menos un elemento transductor en la escala de los  $\mu\text{m}$  creado con técnicas o procesos de micromaquinado.
3. Una forma de hacer las cosas. *Cosas* que reúnen funciones de registro y actuación con procesamiento y comunicación para controlar localmente parámetros físicos a microescala que provocarán efectos a mayores escalas.



Algunas de las técnicas fundamentales que deben dominarse para desarrollar MEMS.

Una definición alternativa para los MEMS y MST basada en la funcionalidad es la que proporciona Stephen Beeby [12] en su libro *MEMS Mechanical Sensors*, en la cual argumenta que un Microsistema debe comprender:

1. Un sensor que alimenta de información a un sistema externo más complejo.
2. Un circuito electrónico que acondiciona la señal producida por el sensor para ser enviada al exterior.
3. Y un actuador que responde a las señales eléctricas generadas por los circuitos internos y que puede interactuar con el sensor.



Descripción de las técnicas que convergen en el diseño de Sistemas Microelectromecánicos, los elementos de un MEMS y algunas de sus áreas de aplicación.

Si atendemos a esta definición es importante señalar que tanto sensores como actuadores son dos tipos de transductores cuya interacción con el exterior es parte intrínseca de su funcionalidad. Por lo tanto, es posible hablar de una clasificación de los MEMS a partir de una de sus características más críticas, el movimiento [2]. Así, la clasificación de los Sistemas Microelectromecánicos a partir de sus características de movimiento será:

1. Sin partes móviles. En esta categoría se encuentran los inyectores de tinta, los sensores de presión basado en galgas piezorresistivas, los secuenciadores de ADN y algunos RF MEMS.
2. Con partes móviles pero sin rozamiento ni superficies de impacto. En esta categoría se encuentran los acelerómetros, los giroscopios, los sensores de presión basados en diafragmas y capacitores variables, resonadores, algunos RF MEMS y ciertos mecanismos de actuación electro-térmicos.
3. Con partes móviles y superficies de impacto. En esta categoría se encuentran los interruptores ópticos, los DMD (Digital Micromirrors Device), los microrrelevadores, las microválvulas, las microbombas y los dispositivos que requieren de microensamblado.
4. Con partes móviles, rozamiento y superficies de impacto. Mecanismos de actuación basados en engranes, mecanismos basados en vástagos y actuadores electrostáticos de efecto scratch.

Es innegable que la historia de los MEMS y MST está estrechamente vinculada con la historia de la microelectrónica, por ello, un buen punto de partida para fijar el origen de los Sistemas Microelectromecánicos es la invención del transistor. Así, con la creación en 1947 del primer transistor de punto de contacto por Bardeen y Brattain y su posterior evolución hacia el transistor de efecto de campo inventado por Shockley en 1952, los aparatos electrónicos basados en el tubo de vacío (bulbo), que fue creado en 1906 por Lee de Forest, cedieron su lugar a los compactos dispositivos basados en semiconductores. La invención del transistor fue un gran avance en la reducción de tamaño, consumo de energía, producción de calor y portabilidad en los aparatos e instrumentos electrónicos. Y ya en los días iniciales del desarrollo del transistor se estudiaron las propiedades piezorresistivas de los materiales semiconductores y se estableció un primer vínculo entre los materiales electrónicos (silicio y germanio) y la creación de sensores mecánicos.

A finales de la década de los 1950, ocurrieron muchos eventos clave que motivaron el desarrollo de la electrónica mucho más allá del modesto transistor. La invención del transistor planar de silicio y del proceso de fabricación planar sentaron las bases para el desarrollo de los procesos de fabricación y del equipamiento que harían posible alcanzar dispositivos electrónicos monolíticos (integrados en un mismo sustrato) a una escala de  $\mu\text{m}$ . El proceso de fabricación planar con silicio proporcionó una vía para integrar un gran número de transistores y crear diferentes dispositivos electrónicos y, a través del continuo avance técnico de las herramientas de fabricación (litografía, socavado, difusión e implantación), lograr una continua reducción en el tamaño de los transistores. Un claro ejemplo del potencial que la miniaturización alcanzó en pocos

años fue el desarrollo del microprocesador en 1970, logro que generó un efecto de realimentación al mejorar significativamente la resolución de los procesos de litografía [3].

De estos avances en los procesos de fabricación se verían beneficiados los MEMS y MST pues se hacía factible la fabricación monolítica o la integración de chips que no sólo registrarán ciertos fenómenos físicos, químicos o biológicos sino que tuvieran la capacidad de activar actuadores y acondicionar la señal proveniente del sensor para su posterior transmisión al mundo exterior, complementando así el ciclo de captación de información, procesamiento, transmisión y acción.

El consenso general de la comunidad que se dedica al desarrollo de los Sistemas Microelectromecánicos o Microsistemas ubica el momento fundacional de este campo multidisciplinario de investigación y desarrollo en la conferencia titulada *There's plenty of room at the bottom* (existe mucho espacio allá abajo), impartida el 29 de diciembre de 1959 por el Dr. Richard Feynman durante la reunión anual de la Sociedad Americana de Física en el Instituto Tecnológico de California. En ella el Dr. Feynman señaló con clarividencia las posibilidades que la miniaturización ofrecía como campo de desarrollo e investigación para los científicos e ingenieros de la postguerra, desde el reto de codificar y almacenar toda la información que la humanidad ha registrado a lo largo de su historia en libros, por todo el mundo, en un cubo de apenas el tamaño de un grano de polvo, hasta la miniaturización y mejora de las capacidades de procesamiento de las computadoras, pasando por la construcción de mejores microscopios y la invención y desarrollo de la endoscopia y la microcirugía. Al final de su elocuente conferencia, el Dr. Feynman ofreció premios para quienes resolvieran un par de retos tecnológicos que darían un gran impulso al desarrollo de la miniaturización, el primero de ellos era colocar todo el texto de una página en un área de 1/25,000 de pulgada cuadrada en una escala lineal, de modo que pudiera ser leído por un microscopio electrónico y el segundo para quien desarrollará un motor eléctrico funcional de apenas 1/64 de pulgada cúbica.

Cinco años después, en 1964, H.C, Nathanson y sus colegas en Westinghouse produjeron el primer sistema microelectromecánico, el transistor de compuerta resonante (transistor de efecto de campo que incorpora una viga volada de oro que vibra a una frecuencia específica de entre 1 a 100 khz para discriminar señales de alta frecuencia), empleando procedimientos estándar de fabricación microelectrónica en silicio.

El rápido desarrollo de la tecnología microelectrónica fue comprendido y explicado por Gordon Moore en 1965 en un artículo en el que predice el rápido crecimiento de la microelectrónica. En aquel año, la microelectrónica producía circuitos integrados con 50 transistores en una oblea de 1 pulgada cuadrada, los cuales debían estar separados por 50  $\mu m$  y el silicio emergía como el material de la microelectrónica debido a la facilidad en la producción de capas de dióxido de silicio estables y de alta calidad (esenciales para la fabricación de transistores). En su artículo Moore establece lo que hoy se conoce como la ley que lleva su nombre:

*"...la complejidad del componente (microelectrónico) de menor costo se ha incrementado en un factor de dos por año aproximadamente. En lo inmediato se espera que esta tendencia se mantenga o se incremente. Y en el largo plazo, la tasa de incremento es un poco incierta, aunque no existe razón para creer que no se mantendrá más o menos constante, al menos, por los próximos diez años."*

En la gráfica 1.1 puede apreciarse el ritmo de desarrollo de la microelectrónica en los últimos 45 años.

En los días iniciales de la microelectrónica y a lo largo de la década de 1970, se desarrollaron diversas técnicas de micromaquinado de volumen ex-profeso, las cuáles empleaban técnicas de socavado a profundidad en el sustrato para la creación de sensores de presión y microacelerómetros.

Para 1979, el primer acelerómetro basado en tecnología MEMS fue desarrollado por investigadores de la Universidad de Stanford. El microacelerómetro fue el primer Sistema Microelectromecánico en convertirse en un éxito comercial, para el año 2000 más de 30 millones de microacelerómetros fabricados en silicio habían sido vendidos en todo el mundo [4].

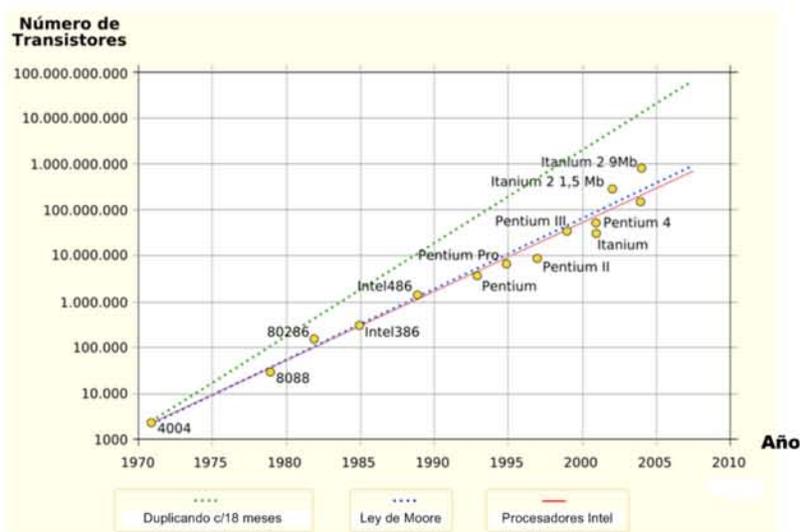


Figura 1.1: La Ley de Moore expresa el incremento de la densidad de transistores por unidad de superficie en la fabricación microelectrónica a lo largo de los últimos 45 años.

En 1982, Kurt E. Petersen escribió su artículo germinal "Silicon as a Mechanical Material". A partir de su publicación, el silicio fue considerado y empleado para una mayor cantidad de aplicaciones que incluían la producción de sensores con elementos mecánicos, tales como masas inerciales y diafragmas de presión, y mecanismos de transducción mecánico-eléctricos. También es resultado del micromaquinado de volumen la manufactura de microinyectores de tinta, los cuáles se convertirían en un enorme mercado, gracias a la extensión del uso de las computadoras personales y a la demanda de impresoras de bajo costo.

En 1983, R. T. Howe y R. S. Muller desarrolló el esquema básico para el micromaquinado de superficie, éste utiliza dos tipos de materiales (uno estructural y otro de sacrificio) y las herramientas desarrolladas por la microelectrónica para crear una tecnología de fabricación capaz de producir elementos mecánicos complejos sin la necesidad de ningún tipo de ensamble posterior a la fabricación. Muchos de los elementos mecánicos y de actuación esenciales en los MEMS fueron construidos en los años siguientes al desarrollo de esta técnica de fabricación.

También en la década de 1980, el proceso LIGA (Lithographie Galvanoförmung Abförmung) fue desarrollado en Alemania. El conjunto de materiales que el proceso LIGA emplea son significativamente diferentes de los usados en los procesos de maquinado de volumen y maquinado de superficie, los cuales tienden a usar las herramientas y técnicas que la microelectrónica desarrolla. El proceso LIGA puede ser usado para crear partes o moldes a partir de materiales electrodepositados o utilizar los moldes para inyectar plástico.

Un dato curioso en la historia de los Sistemas Microelectromecánicos es que el acrónimo MEMS fue oficialmente adoptado durante la realización del Micro Tele-Operated Robotics Workshop en Salt Lake City en 1989, después de una acalorada discusión sobre el nombre que debía adoptar este nuevo campo de investigación, el Dr. Roger Howe de la Universidad de California en Berkeley propuso el acrónimo y generó consenso entre los participantes [5].

La década de 1990 vio el surgimiento de productos comerciales que requerían la integración de las tecnologías de fabricación de MEMS mecánicos y eléctricos (IMEMS) debido a las necesidades de alta resolución en el registro de datos provenientes de elementos mecánicos o a la actuación y conducción de largos arreglos de elementos mecánicos. La empresa Analog Devices Inc. desarrolló una tecnología MEMS que facilitaba el desarrollo de sensores inerciales (acelerómetros y giroscopios) para aplicaciones automotrices. Texas Instruments desarrollo otra tecnología para producir enormes arreglos (en el orden de millones) de espejos

empleados en proyectores, cines y televisión. En esta misma década, la National Science Foundation de los Estados Unidos financió diversos proyectos de desarrollo e investigación en MEMS a través de su Iniciativa de Tecnologías Emergentes y la Agencia de Investigación Avanzada en Proyectos de Defensa (DARPA por sus siglas en inglés) invirtió más de 200 millones de dólares en el desarrollo de este campo tecnológico. Para 1997 el número de patentes por año en tecnología MEMS era de 160 en los Estados Unidos, existían 80 compañías dedicadas a este sector y el mercado internacional representaba 2 mil millones de dólares.

Otros desarrollos, de los años 80 y 90 del siglo pasado, que estimularían aún más el interés por la micro y la nanotecnología son: la aparición del microscopio de efecto túnel en 1982, el desarrollo del microscopio de fuerza atómica en 1986, el descubrimiento de los nanotubos de carbón en 1991 y el desarrollo de la técnica Smalley para la producción uniforme de nanotubos en 1996.

### Cronología de los Sistemas Microelectromecánicos

Año	Evento
1940	La invención del radar impulsa el desarrollo de los semiconductores.
1947	Se inventa la computadora ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) en la Universidad de Pennsylvania.
1947	John Bardeen, Walter Brattain y William Shockley inventan el transistor de unión bipolar en los Bell Telephone Laboratories
1954	Charles S. Smith de los Bell Telephone Laboratories descubre los efectos piezoresistivos en el germanio y en el silicio.
1958	Kulite Semiconductor desarrolla los primeros extensómetros comerciales basados en silicio.
1959	El Dr. Richard Feynman ofrece su famosa conferencia <i>There's plenty of room at the bottom</i> en el Caltech.
1960	William McLellan del Caltech construye un motor eléctrico de 2000 rpm, 1/64 de pulgada cúbica y 250 microgramos, logro con el cual reclama el premio que el Dr. Feynman había ofrecido un año antes en su conferencia ante la Sociedad Americana de Física.
1960	Se inventa el proceso de fabricación planar por lotes (en serie y empleando una misma máscara) sobre silicio.
1961	Kulite Semiconductor desarrolla a nivel experimental un sensor de presión basado en silicio.
1964	H.C. Nathanson y su equipo producen en Westinghouse el transistor de compuerta resonante, considerado el primer sistema microelectromecánico.
1965	Gordon Moore formula la famosa ley que lleva su nombre. En ella establece la tendencia a largo plazo entre la densidad de transistores por unidad de área en la fabricación microelectrónica.
1970	Se inventa el microprocesador y se incrementa enormemente la demanda de circuitos integrados.
1974	National Semiconductor desarrolla el primer sensor comercial de presión basado en tecnología MEMS.
1977	IBM y Hewlett-Packard desarrollan la primera cabeza de inyección de tinta empleando tecnología MEMS.
1979	El acelerómetro micromaquinado es desarrollado por la Universidad de Stanford.
1981	Aparece el artículo <i>Protein design as a pathway to molecular manufacturing</i> de K. Eric Drexler, constituyéndose en el primer artículo técnico sobre nanotecnología que es publicado.
1982	Se inventa el microscopio de efecto túnel.
1982	Kurt E. Petersen publica su famoso artículo <i>Silicon as a mechanical material</i> , en el cual analiza las propiedades mecánicas del silicio a la escala de fabricación de los Microsistemas.
1982	Honeywell desarrolla un transductor de presión sanguínea empleando tecnología MEMS.
1984	El proceso de micromaquinado superficial en silicio policristalino es desarrollado en la Universidad de California en Berkeley por R. T. Howe y R. S. Muller. Los circuitos electrónicos y los Sistemas Microelectromecánicos pueden ser fabricados juntos por primera vez.

**Cronología de los Sistemas Microelectromecánicos (continuación...)**

Año	Evento
1985	La Buckyball (nanoestructura formada por 60 átomos de carbono con extraordinarias características mecánicas y eléctricas) es descubierta.
1985	T. Newman y R. F. W. Pease emplean litografía mediante un haz de electrones para imprimir la primera página de la novela <i>A Tale of Two Cities</i> en un cuadrado de 5.9 micras, hito con el cual ganan el premio ofrecido por el Dr. Feynman en 1959 durante su conferencia en el Caltech.
1986	El microscopio de fuerza atómica es inventado.
1986	Es inventado el proceso LIGA de fabricación de microsistemas por el Dr. E. W. Becker y el Dr. W. Ehrfeld del Instituto de Ingeniería Nuclear del Centro de Investigación Karlsruhe en Alemania.
1987	Larry Hornbeck y William E. Nelson de Texas Instruments inventan el dispositivo digital de microespejos o DMD.
1989	Es inventado el actuador electrostático conocido como peine electrostático lateral.
1991	Es inventada la bisagra de polisilicio en procesos de maquinado superficial.
1991	El nanotubo de carbón es descubierto.
1993	Analog Devices introduce en el mercado su acelerómetro micromaquinado ADXL50.
1996	Texas Instruments introduce en el mercado su DLP que contiene un DMD desarrollado por la propia empresa.
1996	Richard Smalley desarrolla una técnica para producir nanotubos de carbón de diámetro uniforme.
2002	Analog Devices introduce en el mercado su giroscopio micromaquinado ADXRS.

Es claro que los Sistemas Microelectromecánicos (MEMS) son en buena medida el resultado del desarrollo de la microelectrónica para satisfacer las necesidades tecnológicas y comerciales de la última parte del siglo XX y deben parte de su crecimiento al impulso que la miniaturización ha motivado en la innovación técnica a lo largo de la historia humana. La habilidad para incrementar la miniaturización de los circuitos electrónicos, a lo largo de más de 45 años, y previsiblemente por al menos otros 20 años más, es lo que ha hecho posible la consolidación técnica y comercial de los MEMS. El desarrollo de ésta tecnología ha generado una gran sinergia que realimenta la extensión de los métodos de fabricación y los materiales empleados por la industria de electrónica.

Los MEMS son el resultado de una larga historia de desarrollo tecnológico que inicia con las máquinas y procesos iniciales de fabricación humana y tiene una de sus cúspides en el surgimiento de la microelectrónica. De hecho en un continuo de dispositivos y procesos de fabricación, los MEMS ocupan el rango que va de 1 mm a 1  $\mu\text{m}$ .

**Tabla con las definiciones de las escalas.**

Tamaño de la escala	Tecnología de fabricación	Dispositivos
Macroescala (> 10 mm)	Maquinado convencional	Máquinas y dispositivos convencionales
Mesoescala (10 mm <-> 1 mm)	Maquinado de precisión	Motores, dispositivos y partes miniatura
Microescala (1 mm <-> 1 $\mu\text{m}$ )	Proceso LIGA, micromaquinado de volumen y micromaquinado de superficie	Dispositivos MEMS
Nanoescala (1 $\mu\text{m}$ <-> 1 nm)	Ingeniería bioquímica	Dispositivos a escala molecular

**1.1. Aplicaciones y mercados**

El mercado actual para los MEMS se encuentra principalmente en los sensores inerciales y de presión, las cabezas inyectoras de tinta (segmento que es dominado por Hewlett.Packard) y las pantallas digitales de alta

resolución (con Texas Instruments como el líder indiscutible). Las aplicaciones emergentes y futuras incluyen sensores de presión para neumáticos, dispositivos para RF y comunicaciones inalámbricas, componentes para fibra óptica, dispositivos de manejo y procesamiento de fluidos para microanálisis químico, diagnósticos médicos y suministro automático de medicamentos. Aunque las estimaciones sobre los mercados para MEMS varían considerablemente de fuente a fuente, todas coinciden en mostrar un crecimiento presente y futuro muy importante, alcanzando volúmenes agregados de varios miles de millones de dólares para el año 2012. En los últimos años el mercado de los MEMS ha tenido un crecimiento promedio anual del 25%. En el futuro, el crecimiento esperado provendrá principalmente de la diversificación de las aplicaciones en las que son empleados los MEMS (sector de la construcción, robótica, sector de la energía y el transporte, entre otros), de mayores innovaciones técnicas (mayor funcionalidad e integración) y de la aceptación y demanda de ésta tecnología por parte de un mayor número de usuarios finales y consumidores (productos electrónicos de consumo general: teléfonos, cámaras, consolas de video juegos, computadoras y relojes entre otros). Una tasa de rápida aceptación de los MEMS para microfluidos, RF y óptica provocaría que estas aplicaciones crecieran a un paso más rápido que los sensores de presión y acelerómetros. Como resultado, el porcentaje de ganancias provenientes de aplicaciones automotrices, sector que consume grandes volúmenes de sensores de presión y acelerómetros, está previsto que decrezca comparativamente hablando, en un escenario de incremento del volumen general del mercado de los MEMS.

Hasta ahora la inmensa mayoría de los MEMS disponibles comercialmente pueden clasificarse como componentes o subsistemas, pero una nueva tendencia se está imponiendo al integrar cada vez más funciones dentro del chip. Un ejemplo notable es la evolución de los sensores para las bolsas de aire anti-impacto en los automóviles. Estos sensores fueron al principio simples interruptores mecánicos que evolucionaron hacia sensores micromecánicos que cuantificaban directamente la desaceleración provocada por algún choque. Hoy en día, se trata de dispositivos que integran toda la electrónica de acondicionamiento de señal junto con el sensor microelectromecánico para incorporar funciones de autodiagnóstico y salidas digitales. La siguiente generación sin duda avanzará en la incorporación de toda la electrónica necesaria para el manejo de las bolsas de aire, sin necesidad de una etapa posterior de tratamiento de las salidas del dispositivo.

Otra dirección de crecimiento del mercado de los MEMS se encuentra en las nuevas aplicaciones. Hasta ahora la gran mayoría de los usos dados a los Sistemas Microelectromecánicos han sido las que se podrían considerar como obvios a partir de la miniaturización de los sensores, pero aún existen áreas completas de desarrollo y negocio que poco a poco se revelan, como parte del proceso de evolución de ésta tecnología. Un ejemplo de ello es el uso de MEMS para el control térmico en microsatelites. Hasta hace muy poco, el control térmico de los satelites se hacía abriendo y cerrando unos pequeños respiraderos con el propósito de variar la cantidad de calor irradiado al espacio. Pero en 2002, la NASA en cooperación con otros centros norteamericanos de investigación, desarrollaron un nuevo tipo de dispositivo basado en tecnología MEMS con funcionalidad similar a los dispositivos mecánicos convencionales empleados en los satelites hasta ese momento. El dispositivo MEMS consistían de un actuador electrostático que movía unas persianas para controlar la apertura de los respiraderos y la cantidad de superficie expuesta del satélite, variando así su emitancia.

Este es tan sólo un ejemplo de los nuevos y fértiles campos en los que los MEMS incursionarán en el futuro inmediato y harán realidad en breve la visión expresada por Picraux y McWhorter (S.T. Picraux y P.J. McWhorter, *The broad sweep of integrated microsystems*, IEEE Spectrum, 35(12), 24–33, diciembre 1998), quienes vislumbraban que las aplicaciones en las que los MEMS tomarían parte, serían para lograr que los sistemas piensen, sensen su medio, actuen, se comuniquen y se auto-propulsen [6].

**Ejemplos de áreas de aplicación presentes y futuras para los Sistemas Microelectromecánicos.**

<b>Aplicaciones comerciales</b>	
	Sensores biomédicos invasivos y no invasivos.
	Instrumentos miniatura para análisis bioquímicos.
	Sistemas de manejo cardiaco.
	Sistemas para suministro automático de medicamentos.
	Corrección de desórdenes neurológicos.
	Control de motores y propulsión.
	Sistemas de seguridad, frenado y suspensión automotriz.
	Interruptores y componentes para fibra óptica en telecomunicaciones.
	Sistemas de almacenamiento masivo de datos.
	Componentes para RF y comunicación inalámbrica.
	Sensores distribuidos para supervisión y atención médica.
	Control distribuido de sistemas aerodinámicos e hidrodinámicos.
<b>Aplicaciones militares</b>	
	Sistemas inerciales para guía de municiones y navegación personal.
	Componentes microoptomecánicos integrados para la identificación de sistemas amigos y enemigos.
	Dispositivos de almacenamiento masivo de datos, de alta densidad y bajo consumo de energía.
	Sensores y actuadores para diagnóstico y mantenimiento de equipos y maquinaria.
	Sistemas integrados para el manejo de fluidos en propulsores miniatura y control de combustión.
	Sistemas integrados para la detección temprana de amenazas de agentes biológicos y químicos.
	Procesamiento electromecánico de señales para comunicación inalámbrica en distancias cortas y bajo consumo de energía.
	Superficies activas conformables para control aerodinámico distribuido de aeronaves.

Al analizar la información del mercado de los Sistemas Microelectromecánicos a nivel mundial debe tenerse en consideración que se trata en realidad de un conjunto de mercados especializados. Este grupo de nichos comerciales reflejan en buena medida la variedad de aplicaciones en las que intervienen los MEMS y son también una muestra indirecta del gran número de compañías medianas y pequeñas que están involucradas en el desarrollo de ésta tecnología.

De acuerdo con iSuppli, empresa norteamericana dedicada al análisis de mercado en los sectores tecnológicos, el mercado de los Sistemas Microelectromecánicos pasará de 6 mil 100 millones de dólares en 2006 a 8 mil 800 millones de dólares para el año 2012. Esta empresa afirma que las cabezas inyectoras de tinta y los Procesadores Digitales de Luz finalmente entregarán la estafeta de liderazgo en los MEMS a los sensores basados en esta tecnología para crear la siguiente gran expansión de mercado. La nueva ola expansiva esta fundada en el rápido crecimiento de las aplicaciones para MEMS en el sector de la electrónica móvil y de consumo general (sensores de movimiento para consolas de videojuegos, teléfonos celulares, cámaras fotográficas y computadoras portátiles entre otros). Otro sector del que se espera fuertes ingresos es el de los dispositivos de manos libres para teléfonos celulares pues tendra una tasa anual de crecimiento del 23% en los próximos años hasta alcanzar un mercado general de 925 millones de dólares en 2012 [8].

El mercado global para acelerómetros, giroscopios, micrófonos, sensores de presión, sensores de flujo, chips para manejo y análisis de microfluidos, pilas térmicas y osciladores crecerá a una tasa anual del 11%.

Cuatro son los segmentos que en conjunto representarán poco más del 60% del total del mercado de los MEMS en 2012: electrónica móvil y de consumo general, el sector automotriz, los dispositivos de manos libres para teléfonos celulares y los sensores para el control de procesos industriales. Se espera también un renovado crecimiento del sector automotriz, principalmente por las nuevas regulaciones de seguridad y emisiones contaminantes en Norteamérica y Europa [8].

Información proveniente de esta misma empresa de análisis de mercado, señala que los Sistemas Microelectromecánicos han hecho la mayor incursión en el mundo de la electrónica móvil y de consumo general de los últimos años. Como resultado de ello, el volumen de MEMS para este sector se espera que crezca de mil 100 millones de dólares en 2006 a 2 mil 600 millones de dólares para 2012. Durante 2008, el líder en el mercado de MEMS para dispositivos electrónicos móviles y de consumo general es la empresa STMicroelectronics que duplicó sus ingresos por concepto de ventas de acelerómetros, giroscopios y sensores de presión al exceder los 200 millones de dólares. Texas Instruments, empresa que había ocupado la primera posición por muchos años en este sector, en 2008 se ubicó en segundo lugar. Otros proveedores de MEMS que vieron crecer sus ingresos en el sector de electrónica móvil y de consumo general fueron: Epson Toyocom, que incrementó sus ventas en un 75% gracias a su nueva generación de giroscopios para aplicaciones de videojuegos y navegación y Bosch Sensortec que aumentó en un 167% sus ventas gracias a los dispositivos de manos libres para teléfonos celulares que emplean MEMS [7].

Por otra parte, la empresa de análisis de mercado Yole Développement, afirma en su estudio para el sector de sensores inerciales basados en tecnología MEMS que para el año 2013 el mercado será de más de 3 mil millones de dólares y representará poco más de un millón 500 mil unidades [9].

Geográficamente, los Estados Unidos y Europa encabezan la manufactura de productos basados en MEMS, con Japón en crecimiento y entrando con fuerza a la competencia.

#### Distribución geográfica mundial de las instalaciones para la fabricación de MEMS [10]

Región geográfica o país	Número de fundidoras
Estados Unidos y Canadá	139
Alemania	34
Francia	20
Reino Unido	14
Benelux (Bélgica, Holanda y Luxemburgo)	17
Scandinavia (Suecia, Noruega y Dinamarca)	20
Suiza	14
Resto de Europa	10
Japón	41
Resto de Asia	31

Sin embargo, las proyecciones de mercado deben tomarse con precaución. En la década de los 90 las estimaciones del sector de control de bolsas de aire rondaba los 500 millones de dólares, lo que impulsó a muchas compañías para ingresar en este segmento, pero la competencia mantuvo los precios de los dispositivos bajos y se exageró el tamaño del mercado, que en realidad alcanzó los 150 millones de dólares, situación que llevó a diversas empresas a abandonar sus programas de desarrollo unos años más tarde. Otro ejemplo de falla en las proyecciones de mercados, lo representa la rápida deflación de la burbuja económica de las telecomunicaciones en 2001. En medio de la burbuja, los gigantes de las telecomunicaciones adquirieron pequeñas compañías con desarrollos innovadores en interruptores ópticos y láseres ajustables (área que se estimaba muy pronto rebasaría los 10 mil millones de dólares). Nortel Networks de Ontario, Canada, compró por 3 mil 250 millones de dólares a Xros, una joven compañía en Sunnyvale, California, que desarrolló un interruptor óptico basado en MEMS, sin embargo, el mercado de los interruptores ópticos nunca maduró y Nortel terminó por cerrar su división dedicada a este sector. En el mismo periodo, JDS Uniphase de San José, adquirió Cronos Integrated Microsystem de Research Triangle Park en North Carolina, una fundidora de MEMS, por 700 millones de dólares. JDS Uniphase vendió posteriormente esta división a MEMScap de

Grenoble, Francia, por aproximadamente 5 millones de dólares. La industria de los Sistemas Microelectromecánicos ha forjado tres modelos de negocio: la fabricación, el diseño y la integración de sistemas. En 2006, existían alrededor del mundo 368 instalaciones (en su mayoría empresas: 340) para la producción de MEMS, los centros más importantes se encontraban ubicados en Norteamérica, Europa y Japón. Y en ese mismo año, estaban documentadas más de 130 aplicaciones para Microsistemas en los sectores médico, automotriz y de aparatos electrónicos de consumo general.

**Análisis de los mercados globales de MEMS (en millones de dólares) [11]**

	2002	2012
MEMS para microfluidos	1,404	2,241
MEMS ópticos	702	1,826
MEMS para RF	39	249
Otros actuadores	117	415
Sensores inerciales	819	2,526
Sensores de presión	546	913
Otros sensores	273	830
Total	3,900	9,000

## 1.2. Publicaciones periódicas, conferencias y sitios electrónicos

Un indicador de la importancia y madurez que un campo de investigación y desarrollo tecnológico ha alcanzado, lo representa el número y la calidad de las publicaciones y reuniones periódicas en las que se dan a conocer los nuevos aportes y propuestas de la comunidad que trabaja en dicho campo. El campo de los MEMS ha crecido de forma significativa en los últimos diez años, en este lapso ha consolidado una importante pléyade de publicaciones propias y comparte un espacio significativo en publicaciones de campos vinculados o afines. También, se ha incrementado de forma notable el número de libros que abordan el campo como una materia unitaria en dónde conviven distintas ramas de la ingeniería, la física, las matemáticas, la biología, la química y la medicina. Además, son cada vez más los centros de desarrollo e investigación asociados con universidades y los programas de posgrado existentes para adquirir la formación y conocimientos necesarios para desarrollarse en el campo de los MEMS.

La lista de publicaciones, conferencias y sitios electrónicos especializados enfocados hacia los MEMS, Microsistemas y Nanotecnología sigue en crecimiento año con año. Entre los sitios electrónicos, destaca por la calidad de su información y su cada vez mayor importancia el sitio MEMSnet. Este sitio es un repositorio de información sobre MEMS patrocinado por la Corporation for National Research Initiatives de Reston, Virginia y Nexus Association de Grenoble, Francia (una organización sin fines de lucro con fondos de la Comisión Europea).

En cuanto a las revistas y publicaciones periódicas sobre MEMS, Microsistemas y Nanotecnología, la mayoría de ellas son editadas en los Estados Unidos y Europa. Algunos ejemplos de éstas publicaciones son:

1. *Sensors and Actuators. (A, B & C)*: publicación científica sancionada por especialistas (los artículos son revisados por pares antes de ser incluidos) y publicada por Elsevier Science de Amsterdam, Holanda.
2. *Journal of Micromechanical Systems (JMMS)*: publicación científica sancionada por especialistas (los artículos son revisados por pares antes de ser incluidos) y publicada por el IEEE de Piscataway, New Jersey, en colaboración con la Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos (ASME) de Nueva York, NY.
3. *Microsystem Technologies*: publicación científica sancionada por especialistas (los artículos son revisados por pares antes de ser incluidos) y publicada por Springer Verlag de Berlín, Alemania.
4. *Journal of Micromechanics and Microengineering (JMM)*: publicación científica sancionada por especialistas (los artículos son revisados por pares antes de ser incluidos) y publicada por el Instituto de Física de Bristol, Gran Bretaña.

5. *Sensors Magazine*: publicación periódica comercial con énfasis en aplicaciones y usos industriales. Es publicada por Helmers Publishing Inc., de Peterborough, NH.
6. *MST News*: periódico bimestral sobre Microsistemas y MEMS que es publicado por VDI/VDE Technologiezentrum Informationstechnik GbmH de Teltow, Alemania.
7. *Micro/Nano Newsletter*: suplemento de R&D Magazine con noticias y actualizaciones sobre dispositivos micromaquinados y nanotecnología. Es publicado por Reed Business Information de Morris Plains, NJ.
8. *Small Times Magazine*: publicación bimestral comercial sobre MEMS, Microsistemas y Nanotecnología. Es publicada por Small Times Media, una subsidiaria de Ardesta LLC originaria de Ann Arbor, Michigan.
9. *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS and MOEMS*: publicación trimestral que aborda los últimos avances en procesos de litografía, Sistemas Microelectromecánicos y Sistemas Microoptoelectromecánicos. Es publicada por la International Society for Optical Engineering, con sede en Bellingham, Washington.
10. *Microelectronic Engineering*: publicación trimestral que aborda diversos temas relacionados con los procesos de microfabricación y el desarrollo de Sistemas Microelectromecánicos. Es publicada por Elsevier Science de Amsterdam, Holanda.

En cuanto a las conferencias y reuniones anuales de especialistas, existen varios eventos de gran prestigio a escala mundial que reúnen a la comunidad dedicada al desarrollo de esta tecnología. A continuación se mencionan algunos ejemplos:

1. *Micro Electro Mechanical Systems Workshop (MEMS)*: una reunión anual internacional patrocinada por el IEEE.
2. *Micromechanics Europe Workshop*: reunión anual europea patrocinada por universidades y empresas vinculadas a los Microsistemas.
3. *International Conference on Micro and Nano Engineering*: llevada a cabo cada año con la participación de investigadores de todo el mundo y el patrocinio de empresas y centros de investigación del campo de los Microsistemas.
4. *Micro Total Analysis Systems ( $\mu$ TAS)*: una conferencia dedicada a los sistemas microanalíticos y químicos. Es de carácter anual y la sede se alterna entre Norteamérica y Europa.
5. *International Society for Optical Engineering (SPIE)*: serie regular de conferencias impartidas en los Estados Unidos y patrocinada por la SPIE de Bellingham, Washington.
6. *International Conference on Solid-State Sensors and Actuators*: llevada a cabo cada dos años (en años impares) y cuya sede se rota secuencialmente entre Norteamérica, Asia y Europa.
7. *Solid-State Sensor and Actuator Workshop*: llevado a cabo cada dos años (en años pares) en Hilton Head Island, Carolina del Sur, y patrocinado por la Transducers Research Foundation de Cleveland, Ohio.
8. *IEEE Sensors Conference*: llevada a cabo cada año con la convocatoria y auspicio del IEEE en diversos países del mundo.
9. *Euroensors*: conferencia dedicada a los nuevos desarrollos e investigaciones en sensores. Es de carácter anual y se lleva a cabo en alguna ciudad del viejo continente.
10. *Symposium on Sensors, Micromachines & Applied Systems*: simposium llevado a cabo cada año en Japón con el auspicio de Institute of Electrical Engineers of Japan, Japan Society of Mechanical Engineers y Japan Society of Applied Physics.

**Lista de sitios electrónicos de organizaciones oficiales y no gubernamentales vinculadas al tema de los Sistemas Microelectromecánicos**

Organización	Ubicación	Descripción	Sitio electrónico
MEMSnet	Reston, VA	Repositorio auspiciado por el gobierno norteamericano	www.memsnet.org
MEMS Exchange	Reston, VA	Broker intermediario para servicios de fabricación	www.mems-exchange.org
MEMS Industry Group	Pittsburg, PA	Consortio industrial	www.memsindustrygroup.org
NIST	Gaithersburg, MD	Proyectos gubernamentales financiados por los EEUU	www.atp.nist.gov
DARPA	Arlington, VA	Proyectos gubernamentales financiados por los EEUU	www.darpa.mil
IDA	Alexandria, VA	Inserción en aplicaciones militares	mems.ida.org
NEXUS	Grenoble, Francia	Red de Microsistemas de la Unión Europea	www.nexus-mems.com
VDI/VDE-IT	Teltow, Alemania	Asociación de Ingenieros Alemanes	www.mstonline.de
AIST-MITI	Tokio, Japón	El proyecto <i>Micromáquina</i> en Japón	www.aist.go.jp
ATIP	Albuquerque, NM	Proyecto Asiático en Tecnologías de la Información	www.atip.org
Centro de Sensores y Actuadores en Berkeley	Berkeley, CA	Centro de investigación cooperativa entre Universidad e Industria de la NSF	www-bsac.eecs.berkeley.edu
Sandia National Laboratories	Albuquerque, NM	Centro de investigación y desarrollo propiedad del gobierno norteamericano operado por la empresa Lockheed Martin	www.mems.sandia.gov
Mems Industry Group	Pittsburgh, PA	Esfuerzo unitario de empresas como Honeywell, Intel y Freescale para la comercialización de MEMS y la definición de tendencias en el desarrollo de este sector tecnológico	www.memsindustrygroup.org
Yole Development	Lyon, Francia	Investigación de mercado y consultoría estratégica para empresas dedicadas a los MEMS.	www.yole.fr

**Lista de sitios electrónicos de empresas dedicadas al diseño y fabricación de Sistemas Microelectromecánicos**

<b>Organización</b>	<b>Ubicación</b>	<b>Descripción</b>	<b>Sitio electrónico</b>
Fairchild Semiconductor	South Portland, ME	Fundidora que ha implantado el proceso SUMMiT para la fabricación de MEMS.	<a href="http://www.fairchildsemi.com">www.fairchildsemi.com</a>
Analog Devices	Norwood, MA	Empresa desarrolladora de MEMS comerciales (acelerómetros, giroscopios, sensores de efecto hall y de temperatura).	<a href="http://www.analog.com">www.analog.com</a>
Texas Instruments	Dallas, TX	Empresa de tecnología desarrolladora del Procesador Digital de Luz (DLP).	<a href="http://www.ti.com">www.ti.com</a>
Kulite Semiconductor	Leonia, NJ	Empresa líder en el desarrollo de tecnología para transductores de presión.	<a href="http://www.kulite.com">www.kulite.com</a>
MEMSCap	Research Triangle Park, NC	Empresa gala desarrolladora de procesos estándar de bajo costo para la fabricación de MEMS y herramientas de software para su diseño.	<a href="http://www.memscap.com">www.memscap.com</a>
Coventor	Cary, NC	Empresa desarrolladora de herramientas de diseño y modelado para MEMS y semiconductores.	<a href="http://www.coventor.com">www.coventor.com</a>
ANSYS	Irving, CA	Empresa desarrolladora de herramientas de análisis de fenómenos multifísicos a través del método de elemento finito.	<a href="http://www.ansys.com">www.ansys.com</a>
Intellisense	Woburn, CA	Empresa desarrolladora de software de diseño y modelado para Sistemas Microelectromecánicos.	<a href="http://www.intellisensesoftware.com">www.intellisensesoftware.com</a>

## Capítulo 2

# Tecnología para la fabricación de MEMS

### 2.1. Materiales para la fabricación de MEMS

#### 2.1.1. Enlaces interatómicos

El tipo de estructura de un material está influenciado en gran medida por sus enlaces atómicos y sus complementos. Existen tres tipos de atracciones o interacciones atómicas: los enlaces iónicos, los enlaces covalentes y los enlaces metálicos (véase la siguiente figura). Los enlaces iónicos se presentan en los materiales cuando la atracción interatómica es provocada por atracción electrostática entre dos iones adyacentes. Por ejemplo, un átomo de sodio (Na) tiene un electrón en su nivel de valencia, el cual puede liberar fácilmente para convertirse en un ión de sodio cargado positivamente. Un átomo de cloro (Cl) puede fácilmente aceptar un electrón para completar su nivel de valencia, el cual puede producir un ión de cloro cargado negativamente. La atracción electrostática de un enlace iónico puede provocar que el ión de cloro cargado negativamente se rodee con iones de sodio cargados positivamente.

La estructura de un átomo es estable si sus niveles de valencia están completos. El nivel más externo de valencia puede completarse si comparte electrones con otros átomos adyacentes. El enlace covalente se genera cuando los átomos comparten sus electrones de valencia. Este tipo de enlace es una fuerza interatómica muy fuerte que genera moléculas tales como las de hidrógeno ( $H_2$ ) o metano ( $CH_4$ ), las cuáles tienen temperaturas de fusión muy bajas y generan poca atracción sobre moléculas adyacentes, o diamante, el cual es un enlace covalente de carbón cristalino con una temperatura de fusión muy alta y gran dureza. La diferencia entre estos dos tipos de materiales con enlaces covalentes (el metano frente al diamante) es que la estructura del enlace covalente del metano ( $CH_4$ ) completa su nivel de valencia a partir de los propios átomos que intervienen en la formación de una sola molécula, en tanto que los niveles de valencia de los átomos de carbón en el diamante se completan a través de la repetición de una estructura con un gran número de átomos del propio elemento (estructura que recibe el nombre de cristal, malla o lattice en inglés).

El tercer tipo de enlace interatómico es el enlace metálico. Este tipo de enlace ocurre cuando sólo cuando unos cuantos electrones de valencia en un átomo pueden removerse fácilmente para generar un ión positivo (es decir, un núcleo cargado positivamente y ningún electrón de valencia) y un electrón libre. Metales tales como el cobre exhiben este tipo de enlace interatómico. Los materiales con enlace metálico tienen una alta conductividad eléctrica y térmica.

Por otra parte, existe un tipo de enlaces débiles debidos a las llamadas fuerzas de *van der Waals*. El origen de estas fuerzas se encuentra en la asimetría de las fuerzas electrostáticas presentes en las moléculas, tales como la polarización molecular debida a dipolos eléctricos. Estas fuerzas son muy débiles y frecuentemente son observables o significativas cuando los enlaces iónicos, covalente o metálicos no están presentes. Por

ejemplo, en los gases nobles, los enlaces iónicos, covalentes o metálicos no se presentan debido a que sus niveles de valencia están completos y no pueden ceder o aceptar electrones hacia o desde otros átomos.

### 2.1.2. Estructura de los materiales

La estructura atómica de los materiales puede ser clasificada en general como: cristalina, policristalina o amorfa. Un material cristalino tiene una enorme estructura atómica tridimensional en la cual los átomos ocupan locaciones específicas dentro de la estructura de la malla a *lattice*. El silicio epitaxial o el diamante, son ejemplos de materiales que presentan una estructura cristalina. Un material policristalino consiste de una matriz de granos, los cuales son pequeños cristales de algún material con otro material de contacto empotrado entre cualquier par de granos adyacentes que recibe el nombre de frontera o límite de los granos. La mayoría de los metales, tales como el aluminio y el oro, incluso el silicio policristalino, son buenos ejemplos de este tipo de estructura.

## 2.2. Diseño de Mems asistido por computadora

La simulación por computadora del comportamiento de los distintos elementos que constituyen un Sistema Microelectromecánico, o del sistema completo, es parte importante del proceso de desarrollo. La motivación principal para realizar simulaciones por computadora, se encuentra en la posibilidad de construir un sistema virtual sobre el cual realizar distintas pruebas para observar su comportamiento y dar paso a un proceso iterativo de optimización de los diversos parámetros de diseño hasta obtener una respuesta que se ajuste a las especificaciones marcadas.

Un hecho que debe tenerse en cuenta es que el uso de simulaciones por computadora permite reducir significativamente los tiempos y costos de desarrollo y contribuye a evitar la creación de prototipos fallidos. Hasta hace apenas unos años, el software de simulación para circuitos electrónicos tenía un grado de madurez muy superior a las herramientas disponibles para la simulación de MEMS, sin embargo, en los últimos cinco años las herramientas de simulación para Sistemas Microelectromecánicos han mejorado significativamente y han avanzado en la creación de ambientes integrados para el diseño, la simulación y la generación de máscaras de fabricación.

Las simulaciones de Sistemas Microelectromecánicos son mucho más complejas que las simulaciones de circuitos electrónicos, principalmente, porque los primeros son regidos por fenómenos de distintos dominios físicos (mecánica, óptica, electromagnetismo y termodinámica) que presentan diversos grados de acoplamiento (todos los dominios físicos interactúan y se influyen entre sí), haciendo del modelado y las simulaciones un problema con un alto grado de dificultad. Sin embargo, las herramientas disponibles en la actualidad para la simulación por computadora, permiten llevar a cabo simulaciones multidominio y realizar visualizaciones gráficas de los resultados.

Cualquier software de simulación para MEMS utiliza alguna de las siguientes aproximaciones:

1. Modelado a nivel de sistema (que puede ser mediante modelos de orden reducido o modelos de parámetros concentrados): esta aproximación captura las principales características del MEMS. Proporciona un método rápido y fácil para predecir el comportamiento principal de un MEMS. El requerimiento es que el dispositivo o sistema puede ser descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias y funciones no lineales a un nivel de diagrama de bloques. Este tipo de aproximación tiene su origen en la ingeniería de control. Y tiene la debilidad de que los fenómenos multidominio no pueden simularse de forma fiel en virtud de que las herramientas de simulación son adimensionales en términos físicos y sólo el usuario es capaz de interpretar las entradas y salidas de los diversos bloques en una forma físicamente significativa.

2. Modelado mediante elemento finito y elemento de contorno: Esta aproximación tiene su origen en la ingeniería mecánica en donde ha sido empleada para predecir la respuesta de elementos estructurales a una carga, tales como fuerzas o momentos. La parte o fragmento que se simula se particiona en varios elementos discretos (un proceso conocido como mallado). Cada elemento del mallado tiene un número determinado de nodos y esquinas en las cuales interactúa con sus elementos vecinos. Una ventaja de este tipo de modelado y simulación es que puede extenderse a cargas de tipo no mecánico, como son por ejemplo, la temperatura o la diferencia de potencial eléctrico. Las técnicas de elemento finito han sido satisfactoriamente aplicadas en problemas que involucran campos electromagnéticos, mecánica de fluidos o análisis termodinámico. Y en todos los casos, los resultados obtenidos son mucho más fieles a la realidad que aquellos generados mediante modelos de orden reducido o parámetros concentrados, sin embargo, esta mayor verosimilitud con la realidad tiene su precio, pues este método demanda una gran potencia de cálculo y en ocasiones, esta exigencia, imposibilita la simulación del sistema completo.

El nivel de detalle y los esfuerzos invertidos en el análisis dependen de la etapa de desarrollo del Sistema Microelectromecánico. Existen distintos niveles de complejidad del análisis de un MEMS. Construir un modelo es la primera etapa de análisis que debe cubrirse en la transición del mero concepto al sistema físico. Este tipo de modelos generalmente son de parámetros concentrados, tienen un número limitado de grados de libertad, se desarrollan a partir de las versiones para el macromundo de las leyes y principios de los fenómenos físicos y químicos que intervienen en el funcionamiento del sistema y son de fácil implantación en programas de simulación numérica de propósito general. En el otro extremo de la complejidad se encuentra la creación de modelos detallados, los cuáles se caracterizan por un gran número de grados de libertad y el uso de los métodos de análisis por elemento finito o elemento de contorno. La creación de estos modelos implica tomar en cuenta las interacciones de los fenómenos físicos de distintos dominios. Un modelo detallado proporcionará hasta los más pequeños detalles del funcionamiento del sistema, pero el costo en tiempo de cálculo puede resultar prohibitivo. Un modelo Una técnica común para lograr un buen compromiso entre detalle y rapidez de modelado y simulación es tomar del sistema aquellos elementos que son más significativos en su funcionamiento y simularlos con un modelo detallado, extraer algunos parámetros sobre su funcionamiento e incorporarlos en el modelo de parámetros concentrados para simular el sistema completo.

Las técnicas para el desarrollo de modelos detallados de Sistemas Microelectromecánicos han sido un área muy activa de investigación en los últimos 15 años. El desarrollo inicial de técnicas para el modelado en detalle de MEMS se concentró en métodos de análisis para los múltiples dominios físicos que se encontraron subyacentes al funcionamiento de los Microsistemas. El primer problema multifísico en el campo de los MEMS que recibió atención significativa fue el problema estructural-electrostático, que derivó en el desarrollo del programa MEMCAD actualmente disponible como parte de los analizadores de CoventorWare. En los últimos diez años, muchas empresas dedicadas al desarrollo de programas de análisis por el método de elemento finito y por el método de elemento de contorno han incursionado en el campo de los MEMS ofreciendo técnicas de modelado y simulación multidominio. La investigación y desarrollo de técnicas de modelado y simulación que integren dominios tales como: fluidos, electromagnetismo, mecánica y termodinámica es muy activa y ha dado ya sus primeros resultados. Por otra parte, el modelado a escala atómica cobrará cada vez mayor relevancia pues las micromáquinas eventualmente alcanzarán escalas tan pequeñas que los modelos basados en mecánica del medio continuo mediante ecuaciones diferenciales no será válido.

Por otra parte, existen herramientas de software para la visualización tridimensional que resultan de gran ayuda en el proceso de diseño de Sistemas Microelectromecánicos, pues permiten al diseñador anticipar los resultados del proceso de fabricación. En esta categoría se tienen dos grandes grupos de programas:

1. Herramientas de modelado basadas en el proceso físico de fabricación: anticipan y visualizan el resultado de los procesos de fabricación empleados en la creación de Microsistemas. Proveen información detallada sobre los parámetros de los procesos y muestran los resultados posibles si existen variaciones en ellos. Este tipo de visualización, basada en el detallado modelado físico de los procesos es muy intensivo en consumo de recursos de cómputo y proporciona información muy valiosas a los ingenieros de proceso y diseño, la mayoría de los programas de diseño para Sistemas Microelectromecánicos actualmente ya incorporan este tipo de visores como parte de su conjunto de herramientas.

2. Herramientas de emulación geométrica de los procesos de fabricación: utilizan una descripción geométrica aproximada del resultado de cada paso del proceso que esta concatenado para la construcción del modelo sólido de un Sistema Microelectromecánico. La emulación geométrica es un recurso ampliamente aprovechado en el diseño de MEMS, el primer diseñador en utilizarlo fue G. M. Koppelman quien desarrolló el programa OYSTER con el cual dió origen a MemBuilder y posteriormente a MEMulator que se incorporaron como módulos del MEMCAD, actualmente parte de CoventorWare. La emulación geométrica es capaz de modelar una gran cantidad de los trabajos dentro de los procesos de fabricación de MEMS (deposiciones conformales, planarización, socavados, entre otros), son técnicas más económicas (en cuanto a los recursos de cómputo consumidos) que los modeladores físicos de procesos y proporcionan información muy valiosa al diseñador, además son el vínculo entre el software de diseño de máscaras y el software de simulación multifísico mediante el método de elemento finito.

Finalmente, se muestra una guía básica para la realización de simulaciones de Sistemas Microelectromecánicos:

1.
  - a) Debe asegurarse un amplio conocimiento de todos los dominios de energía necesarios para afrontar el desarrollo de Sistema Microelectromecánico que es de interés fabricar.
  - b) Nunca debe usarse un simulador, a menos que se conozca de antemano el rango de respuesta del sistema.
  - c) Sólo deben incluirse en la simulación de un sistema aquellos elementos que son estrictamente necesarios.
  - d) Siempre debe usarse el modelo más simple que cumpla satisfactoriamente con el trabajo.
  - e) El simulador debe emplearse del mismo modo en como se realizaría un experimento con el dispositivo o sistema real.
  - f) Debe emplearse un procedimiento específico para explorar el espacio de diseño. En la mayoría de los casos esto significa que sólo debe variarse un parámetro entre simulación y simulación.
  - g) Se debe comprender el simulador que se usa y todas las opciones disponibles.
  - h) Debe hacerse un uso correcto de las unidades para obtener la escala correcta en la simulación del fenómeno.
  - i) Deben compararse los resultados de la simulación con reportes experimentales (si están disponibles) y deben publicarse o compartirse los resultados de las simulaciones con colegas que puedan analizar y refutar dichos resultados.
  - j) Se debe tener siempre en consideración que al escalar los fenómenos al dominio de lo micro, los resultados de una simulación en el nivel macro (que sean tomados como referencia) pueden resultar absolutamente inválidos.
  - k) Y lo más importante, en la planificación de la simulación y el análisis de los datos se debe aplicar siempre el sentido común.

El penúltimo punto es particularmente importante, pues muchos fenómenos que son despreciados en una escala macro de análisis, deben ser tomados en cuenta en la escala micro. Por ejemplo, en la escala macro, un fluido puede comportarse en forma completamente diferente a cómo lo hace en la escala micro.

### 2.2.1. Programas de diseño y simulación

#### Simulink de Matlab

Simulink es una caja de herramientas dentro del ambiente de trabajo Matlab que es muy popular en la ingeniería eléctrica para la simulación y análisis de sistemas y señales tanto lineales como no lineales, continuos o discretos, en el dominio del tiempo. Simulink cuenta con una interfaz gráfica basada en diagramas

de bloques a partir de los cuales se simulan las diferentes etapas de un sistema o de tratamiento de una señal (siempre y cuando dicho sistema o señal pueden ser representados matemáticamente por algún conjunto de ecuaciones). Los diagramas se construyen arrastrando desde la barra de herramientas los bloques necesarios y soltándolos en el área de trabajo, su interconexión se hace dibujando líneas que van de las salidas de unos a las entradas de otros.

En los diagramas de bloques, a las variables independientes, del modelo matemático que representa al sistema, normalmente se les asocian funciones matemáticas que representan los valores que dichas variables pueden tomar y se les define como entradas. Para implantar las ecuaciones que representan a un sistema, Simulink dispone de bloques de constantes, sumadores, multiplicadores, integradores y derivadores que pueden aplicarse a las variables independientes del sistema. Además, si el sistema es más complejo, es posible definir su función de transferencia o su representación en espacios de estados para su implantación. De este modo se simula el comportamiento de un sistema modelado matemáticamente por un conjunto de ecuaciones (algebraicas o diferenciales de parámetros concentrados) y se representa la evolución de su respuesta en el tiempo, bajo un conjunto de condiciones y entradas, con el conjunto de las señales de salida. Es posible visualizar cualquier señal intermedia, de entrada o de salida a través de las herramientas de graficación en pantalla que Simulink ofrece o almacenar una sucesión de valores de dicha señal en una matriz, para posteriormente aplicar algún tipo de análisis en Matlab. Los dominios que Simulink puede mostrar al usuario son tiempo y frecuencia.

Otra parte importante de la funcionalidad que Simulink ofrece para el manejo de las señales son los multiplexores, interruptores, limitadores, muestreadores, retenedores y la gran cantidad de bloques para realizar operaciones matemáticas sobre ellas, que están a disposición del usuario. A cada bloque en Simulink se le definen sus entradas y salidas en función del modelo del sistema que se desea simular y pueden interconectarse entre sí de modo tal que las salidas de un bloque pueden alimentar las entradas de otro.

Dado que la representación de sistemas mediante diagramas de bloques proviene de la ingeniería de control, Simulink permite realimentar las salidas a las entradas y de este modo implantar lo que se conoce como lazo cerrado. También posee diversas herramientas para implantar controladores, observadores y técnicas de control inteligente (redes neuronales, lógica difusa y computación evolutiva).

En Simulink, el usuario puede crear sus propios bloques y reunirlos en librerías. Cada bloque definido por el usuario, será en realidad un sistema capaz de recibir entradas y generar las salidas correspondientes con parámetros ajustables para modificar su comportamiento. Esta funcionalidad permite al usuario crear sistemas muy complejos a partir de arreglos jerárquicos de subsistemas.

Ahora se abordará la simulación de un acelerómetro en Simulink [13] para mostrar el funcionamiento de esta herramienta. El dispositivo mecánico de registro de un acelerómetro es una masa móvil que forma parte de un capacitor de placas paralelas y que se encuentra suspendida sobre el sustrato de silicio gracias a un conjunto de vigas voladas que actúan como resortes, tal como lo muestra la figura 2.1.

Este dispositivo puede describirse perfectamente por la ecuación diferencial de un sistema masa-resorte-amortiguador. Por razones de diseño, la masa móvil normalmente está limitada a un rango seguro en su desplazamiento por topes mecánicos, los cuales se incorporarán en la simulación junto con un desplazamiento inicial de la masa móvil. La entrada será una fuerza externa y las salidas serán el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la masa móvil como respuesta a dicha fuerza. El modelo en Simulink del dispositivo mecánico de registro del acelerómetro se muestra en la figura 2.2.

El modelo contiene un subsistema definido por el usuario (control limitante del desplazamiento) el cual tiene dos entradas: la aceleración que actúa sobre el dispositivo mecánico de registro y el desplazamiento de

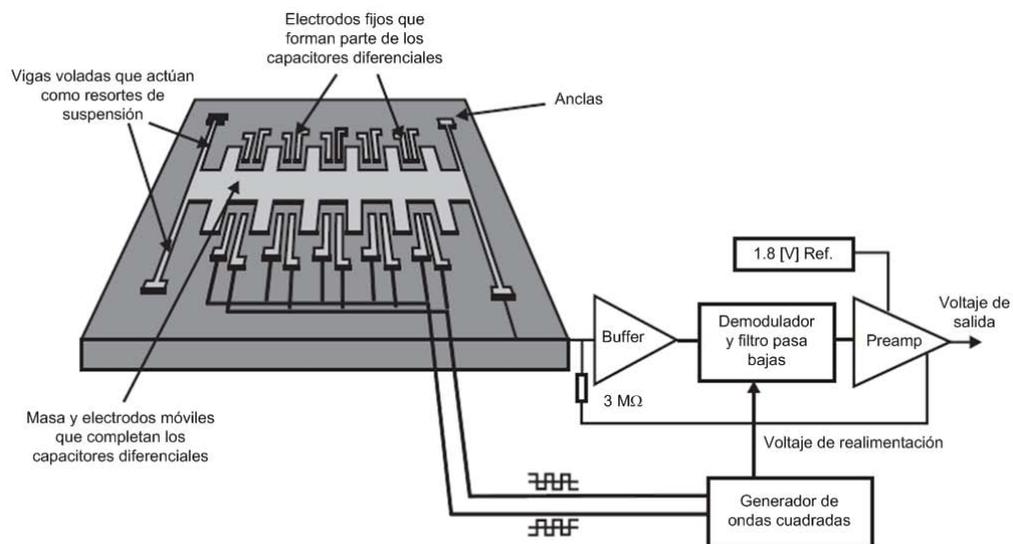


Figura 2.1: Configuración general de un acelerómetro micromaquinado.

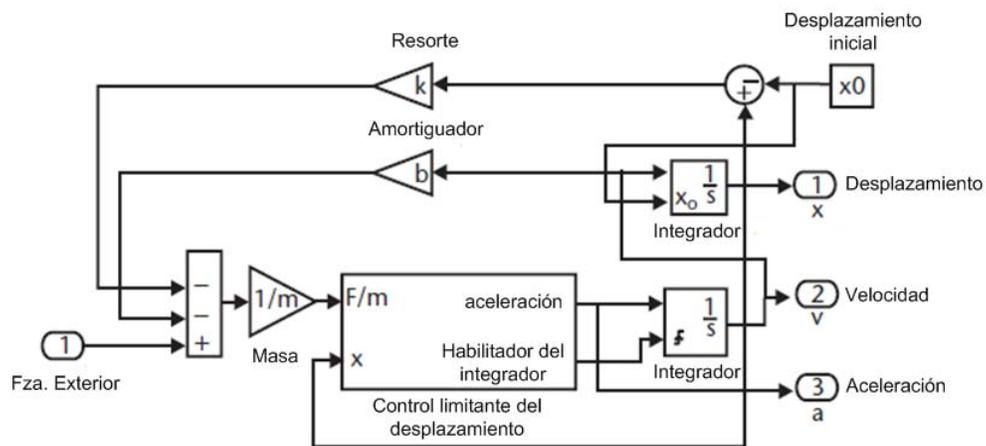


Figura 2.2: Modelo en Simulink del dispositivo mecánico de registro del acelerómetro micromaquinado, el cual es un sistema masa-resorte-amortiguador.

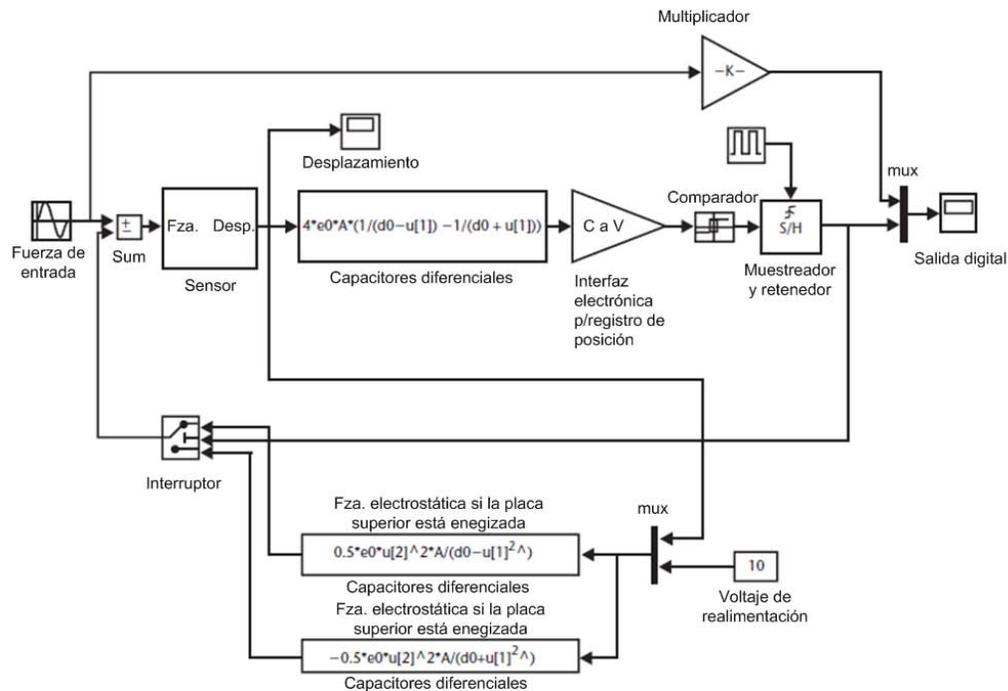


Figura 2.3: Modelo en Simulink del acelerómetro completo. El modelo incluye la dinámica del sistema masa-resorte-amortiguador, el bloque de conversión de desplazamiento a capacitancia y el arreglo de realimentación.

las masa móvil. Este subsistema modela el comportamiento no lineal de la masa móvil cuando hace contacto con los tope mecánicos (es decir, en caso de que el desplazamiento rebase el valor máximo permisible). En cuyo caso, la velocidad de la masa móvil y el primer integrador son puestos a cero hasta que una nueva aceleración en sentido opuesto aleje la masa del tope. Otra característica del modelo es que se puede colocar un desplazamiento inicial diferente de cero. Nótese que el sumador adiciona todas las fuerzas actuando sobre la masa móvil.

A su vez, el modelo del dispositivo mecánico de registro es un subsistema del modelo completo del sensor que incluye un control en lazo cerrado para la realimentación de fuerza al sistema, tal como lo muestra la figura 2.3. Dado que algunas partes de la masa móvil se encuentran entre dos electrodos con los cuales forma un par de capacitores diferenciales de placas paralelas, el desplazamiento experimentado por la masa móvil se convierte en una variación de capacitancia (la cual es modelada por un bloque en el que se ha definido la expresión matemática que calcula dichas variaciones en función del desplazamiento). La capacitancia diferencial se detecta mediante el circuito electrónico que registra la posición de la masa móvil. A continuación se encuentran un comparador y de un circuito de muestreo y retención, que modela un control sigma-delta. En el lazo de realimentación se calculan las fuerzas electrostáticas que actúan sobre la masa móvil si cualquiera de los electrodos está energizado y se suman con la fuerza de entrada.

Este modelo permite la optimización de muchos parámetros de diseño, tales como el área de traslape entre las placas paralelas del capacitor, la constante del resorte, la masa móvil o la frecuencia de muestreo. Se puede estudiar la estabilidad del control en lazo cerrado y la relación señal/ruido del sistema. Además, las fuerzas electrostáticas indeseadas, debidas al voltaje de alimentación del circuito de interfaz y las fuentes

inherentes de ruido, pueden simularse mediante generadores de números aleatorios y revisar cómo afectan el desempeño del sensor.

El modelado de todos estos efectos puede incrementar considerablemente el tiempo de simulación, razón por la que se recomienda iniciar las simulaciones con un modelo básico e incrementar gradualmente la complejidad para evaluar la influencia de cada factor en el comportamiento del sistema.

La precisión y los méritos de tal aproximación se basan en la comprensión analítica de la física subyacente del sistema que se simula. El proceso de modelado como tal, lo hace analíticamente el diseñador. Algunas herramientas computacionales de simulación por el método de elemento finito permiten obtener un modelo de parámetros concentrados a partir de un análisis modal y este modelo puede emplearse posteriormente para realizar simulaciones en herramientas como Simulink.

### Spice

Spice es un simulador de circuitos eléctricos y electrónicos de uso generalizado en el ámbito académico e industrial que puede utilizarse para simular parcialmente fenómenos de otros dominios físicos. Para realizar estas simulaciones que implican un traslado de dominios es posible utilizar dos enfoques: el primero consiste en aplicar las equivalencias entre las cantidades eléctricas que Spice puede simular y aquellas que son de interés modelar pero que pertenecen a otro dominio físico para, a partir de ello, construir un circuito eléctrico equivalente. Si se considera establecer una equivalencia entre elementos mecánicos y componentes eléctricos se pueden aplicar las analogías *Fuerza-Voltaje* o *Fuerza-Corriente* utilizadas ampliamente en ingeniería eléctrica.

#### Analogía Fuerza-Voltaje [14].

Sistemas mecánicos	Sistemas eléctricos
Fuerza ( $F$ ) o par ( $T$ )	Voltaje ( $V$ )
Masa ( $m$ ) o momento de inercia ( $I$ )	Inductancia ( $L$ )
Coefficiente de fricción viscosa ( $b$ )	Resistencia ( $R$ )
Constante de resorte ( $k$ )	Recíproco de la capacitancia ( $C^{-1}$ )
Desplazamiento lineal ( $x$ ) o angular ( $\theta$ )	Carga ( $Q$ )
Velocidad lineal ( $v$ ) o angular ( $\omega$ )	Corriente ( $i$ )

#### Analogía Fuerza-Corriente [15].

Sistemas mecánicos	Sistemas eléctricos
Fuerza ( $F$ ) o par ( $T$ )	Corriente ( $i$ )
Masa ( $m$ ) o momento de inercia ( $I$ )	Capacitancia ( $C$ )
Coefficiente de fricción viscosa ( $b$ )	Recíproco de la resistencia ( $R^{-1}$ )
Constante de resorte ( $k$ )	Recíproco de la inductancia ( $L^{-1}$ )
Desplazamiento lineal ( $x$ ) o angular ( $\theta$ )	Acoplamiento por flujo magnético ( $\Psi$ )
Velocidad lineal ( $v$ ) o angular ( $\omega$ )	Voltaje ( $V$ )

Equivalencias similares pueden establecerse para fenómenos de otros dominios físicos como son los procesos termodinámicos. Esto permite la simulación de la dinámica de estructuras mecánicas tales como resonadores, acelerómetros y sensores de presión. Incluso fenómenos más complejos como son el amortiguamiento por compresión de películas de aire puede modelarse de esta forma.

El segundo enfoque para la realización de simulaciones es el uso de la librería de comportamiento analógico que la versión comercial de Spice incluye. Esta librería contiene bloques para la descripción de sistemas: multiplicadores, sumadores, integradores y funciones de transferencia. Con ello, es posible modelar dinámicamente diversos tipos de sensores. En la figura 2.4 se muestra la simulación a nivel de sistema de un acelerómetro en lazo cerrado hecha en Orcad PSpice [16].

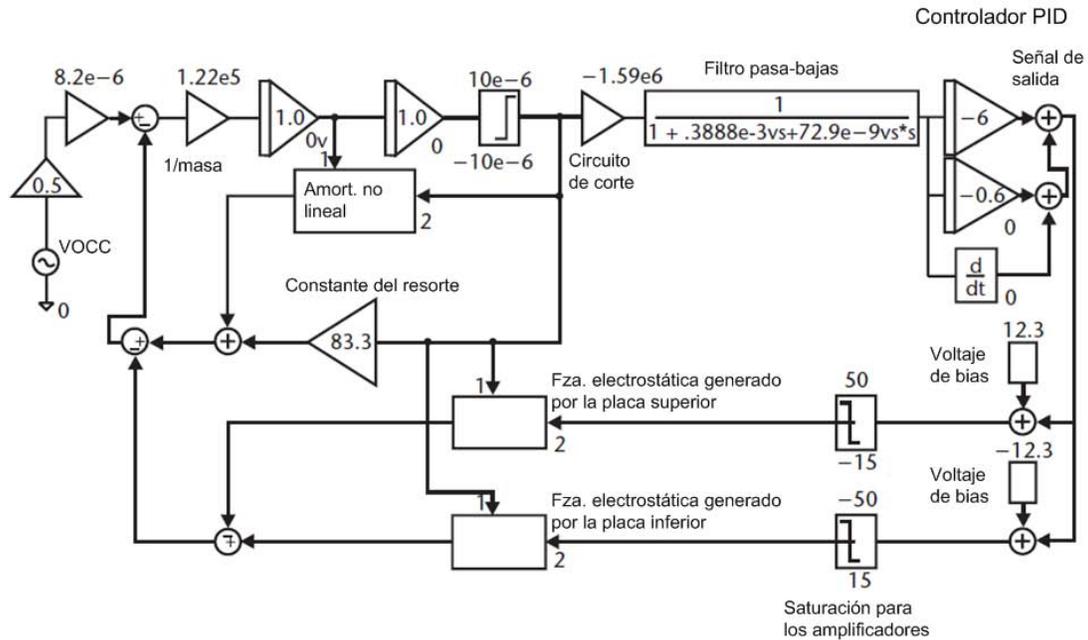


Figura 2.4: Modelo a nivel de sistema en Orcad PSpice de un acelerómetro micromaqueado con un controlador PID en lazo cerrado.

La principal ventaja de ambos enfoques para realizar simulaciones en Spice es que tanto la interfaz electrónica como la etapa de control del sensor (Sistema Microelectromecánico) puede simularse muy fácilmente.

### Mems Pro

MEMS Pro and MEMS Xplorer son herramientas de diseño asistido por computadora (CAD) disponibles para ambientes UNIX y Windows, desarrollados por la empresa MEMSCAP. El paquete MEMS Pro fue desarrollado originalmente por Tanner Research Inc.

La suite básica de MEMS Pro es esencialmente un editor de máscaras para microelectrónica (L-Edit) dirigido al diseñador de MEMS. Contiene librerías estándar de componentes para Sistemas Microelectromecánicos y algunas funciones de diseño especialmente orientadas para MEMS, como son: el MEMS Solid Modeler, el cual produce modelos tridimensionales a partir de las máscaras y empleando las especificaciones de distintos procesos de fabricación. El MEMS Solid Modeler simula procesos de micromaqueado de superficie y de volumen para visualizar los elementos de un Sistema Microelectromecánico. Los modelos pueden ser exportados hacia Ansys, para realizar simulaciones de su funcionamiento. El uso de MEMS Pro y Ansys es una combinación de software muy poderosa.

La suite de verificación de MEMS Pro es la suite básica más un verificador de reglas de diseño, una interfase de usuario programable con herramientas automáticas de diseño y funciones para creación de bloques y ruteo. La suite de diseño de MEMS Pro incluye el módulo T Spice para la simulación de MEMS y componentes electrónicos. Esto proporciona un sistema integrado de simulación que aprovecha el enfoque de circuitos eléctricos equivalentes e incluye una librería de componentes de Sistemas Microelectromecánicos

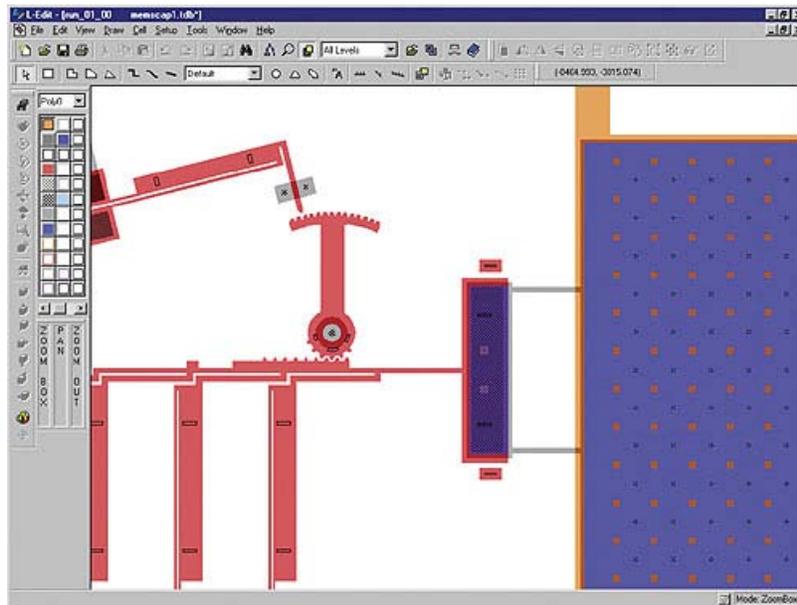


Figura 2.5: L-Edit es el editor de máscaras de Mems Pro de la empresa gala MemsCap.

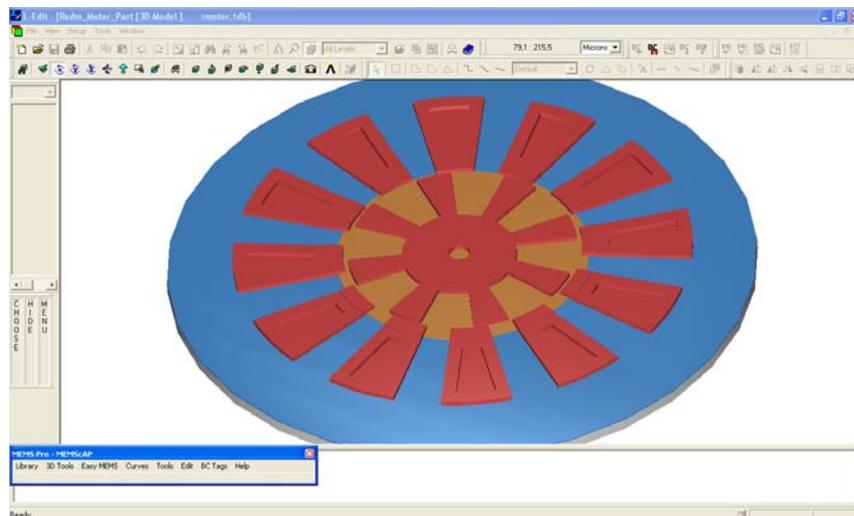


Figura 2.6: Modelo tridimensional de un motor electrostático diseñado en MEMS Pro.

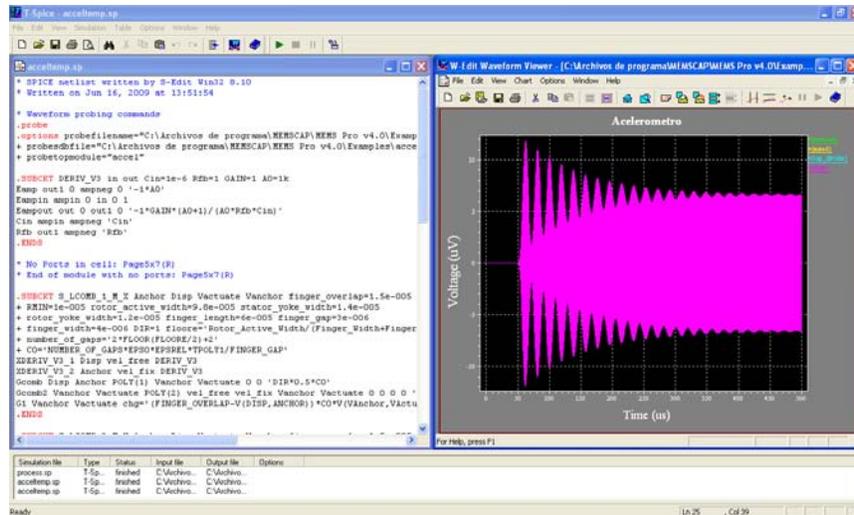


Figura 2.7: Simulación en T-Spice de la respuesta en el tiempo de un acelerómetro micromaquinado.

para facilitar su modelado. Esta suite también incluye una herramienta de verificación de máscaras (hechas en L-Edit) contra diagramas (eléctricos o electrónicos hechos en T Spice), la cual compara los modelos provenientes de los editores correspondientes.

La suite completa de MEMS Pro incluye además una herramienta para la simulación mediante modelos de orden reducido, la cual provee modelos (de parámetros concentrados) para distintos elementos de Sistemas Microelectromecánicos provenientes de la aplicación de métodos de simulación mediante elemento finito. Esto proporciona un vínculo entre el análisis del sistema completo y el análisis más detallado de cada componente. La suite completa acepta archivos CIF lo que permite que las máscaras sean generadas a partir de modelos tridimensionales en Ansys. Ansys también puede generar componentes de orden reducido para su uso en el ambiente MEMS Pro.

MEMS Master es otra herramienta desarrollada por MEMSCap para la creación de prototipos y predimensionamiento que puede emplearse junto con MEMS Pro. Este software modela MEMS a nivel de sistema mediante ecuaciones diferenciales de parámetros concentrados. Los diseños se desarrollan en el módulo M2Arquitect y la simulación se hace en el simulador SMASH VHDL-AMS. MEMS Master puede generar modelos VHDL-AMS a partir de modelos generados por el método de elemento finito en Ansys.

La suite MEMS Xplorer es una herramienta que incorpora módulos de diseño de circuitos integrados de Mentor/Cadence y herramientas de simulación mediante elemento finito de Ansys. Corre bajo Unix y HP. Utiliza los mismos módulos ya descritos pero sustituye a L-Edit con Cadence Virtuoso como editor de máscaras. Contiene una librería de componentes de Sistemas Microelectromecánicos, herramientas de diseño para MEMS y un generador de modelos tridimensionales que se acopla con Ansys. La simulación de los procesos de fabricación puede configurarse para que se apegue a un proceso en particular. Esto permite realizar simulaciones de los resultados de la fabricación para los componentes de un MEMS.

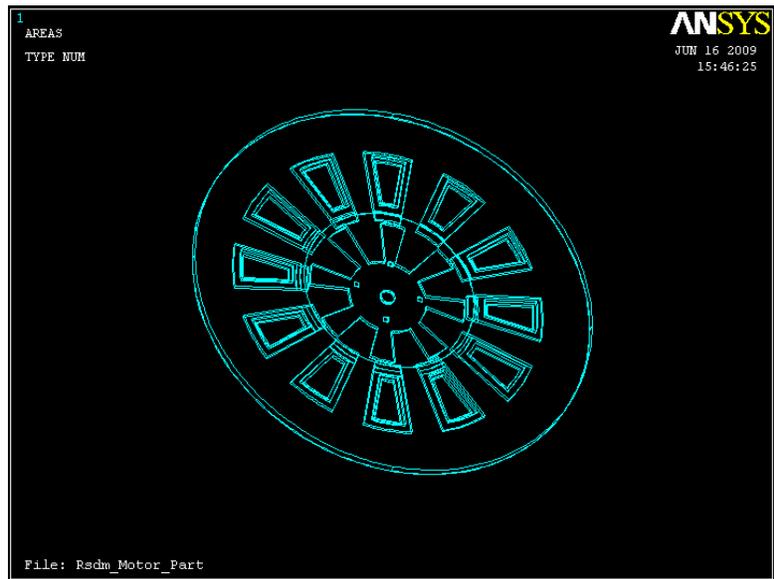


Figura 2.8: Diseño geométrico de un motor electrostático exportado hacia Ansys desde MemsPro para su simulación.

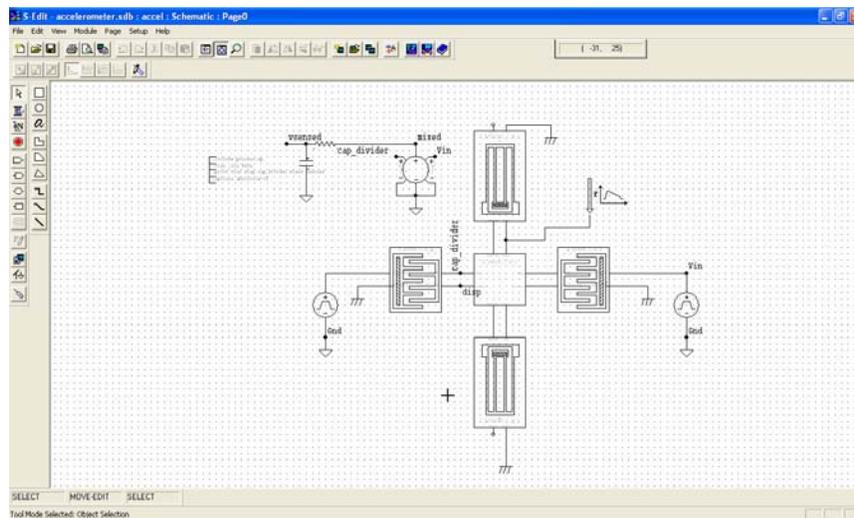


Figura 2.9: Diagrama de un acelerómetro con vigas voladas como resortes, masa móvil y sensores capacitivos capturado en S-Edit.

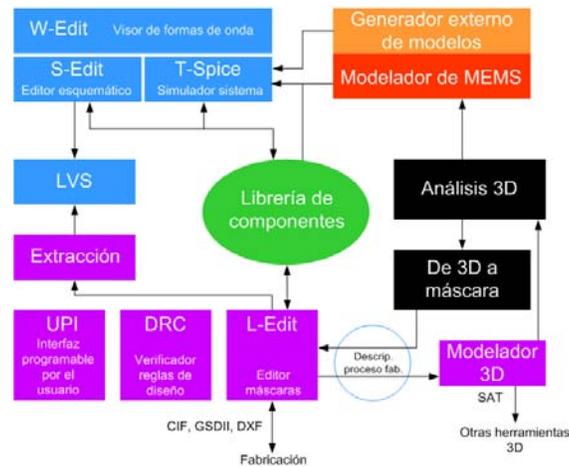


Figura 2.10: Flujo de diseño en MemsPro.

### CoventorWare

CoventorWare es un ambiente integrado para el diseño de MEMS. Su versión más reciente es CoventorWare 2008 y corre bajo Solaris y Windows. Es independiente del proceso de fabricación y consta de cinco paquetes:

1. Designer: para el diseño, especificación y modelado de estructuras MEMS, incluyendo la creación de máscaras o plantillas bidimensionales, la emulación de los procesos de fabricación y la definición de los materiales a partir de una base de datos, la generación de modelos tridimensionales a partir de las plantillas bidimensionales y el mallado para la aplicación de análisis por el método de elemento finito. Crea archivos en el formato .cat y soporta formatos de otros programas para la elaboración de máscaras, tales como: GDS II, CIF, IGES y DXF.
2. Analyzer: para el desarrollo de análisis de fenómenos complejos, acoplados y en múltiples dominios físicos útiles en el diseño de MEMS. Este paquete muestra al diseñador la interacción entre dominios físicos mediante la aplicación de análisis mecánicos, de microfluidos, piezoeléctricos, electromagnéticos y termodinámicos acoplados, entre otros. Tiene la capacidad de realizar análisis sobre la interacción del Sistema Microelectromecánico con su encapsulado y exponer los comportamientos dependientes del tiempo mediante la aplicación de análisis de transitorios mecánicos y térmicos. Además, es posible desarrollar análisis ópticos para evaluar la propagación y difracción de un haz de luz en un Sistema Microoptoelectromecánico (MOEMS). El paquete Analyzer es el núcleo de CoventorWare, y maneja varios módulos de simulación y análisis tales como: MemCap, MemMech, CoSolveEM, SimMan y algunos otros especializados en análisis de inductancias, características piezoeléctricas de los materiales y efectos del encapsulado sobre el sistema. Todos estos módulos emplean técnicas de elemento finito y de elemento de contorno para resolver las ecuaciones diferenciales de cada dominio físico.
  - MemCap es el analizador electrostático que calcula la matriz de cargas basada en las condiciones de voltaje o la matriz de voltajes basada en las condiciones de carga del MEMS bajo análisis. Este analizador puede simular los efectos de borde en las capacitancias y la influencia de medios disipativos en el comportamiento eléctrico.
  - MemMech analiza los desplazamientos, esfuerzos y propiedades estructurales, modales, harmónicas y estacionarias de los Sistemas Microelectromecánicos.
  - CoSolveEM es el módulo que combina análisis electrostáticos y mecánicos para fenómenos acoplados. También realiza eficientes análisis para calcular el voltaje de llegada o colapso y la histeresis en Sistemas Microelectromecánicos.

- SimMan es el manejador de analizadores que permite al usuario configurar corridas secuenciales de analizadores para apreciar los efectos de variaciones en los parámetros de diseño y manufactura en los distintos dominios físicos. Con SimMan se programan variaciones automáticas de los parámetros y la ejecución de análisis iterativos.
  - MemHenry es el analizador de inductancias que calcula las matrices de resistencia dependiente de la frecuencia y de inductancias para un conjunto de conductores. Esta herramienta está dirigida al diseño de sensores magnéticos, el análisis de inductores pasivos montados en un chip y el filtrado de efectos parásitos provocados por el encapsulado.
  - MemPackage es el analizador para el cálculo de los esfuerzos y deformaciones inducidos por el encapsulado sobre un dispositivo micromaquinado y montado en él. El analizador simula encapsulados estándar o cualquiera definido por el usuario.
  - MemPZR analiza los efectos piezoeléctricos, es decir, la generación de corriente debida a los esfuerzos mecánicos y las deformaciones mecánicas que provoca el paso de una corriente por el material. Puede manejar grandes desplazamientos y los efectos no lineales introducidos por cargas eléctricas, mecánicas y térmicas. Esto incluye el análisis de transitorios y armónicos que resultan indispensables para dispositivos de radio frecuencia.
  - MemETherm es un analizador electrotérmico que analiza el efecto de Joule en cualquier material que se opone al paso de una corriente eléctrica.
  - AutoSpring es un analizador que extrae las constantes de rigidez de resortes multidimensionales no lineales creados a partir de complejos arreglos geométricos. Los valores extraídos pueden emplearse en simuladores de parámetros concentrados.
  - MemDamping es el analizador que calcula los distintos coeficientes de amortiguamiento en un MEMS usando las ecuaciones de Navier-Stokes y de Reynolds. Muchos MEMS son sensibles al amortiguamiento por compresión de delgadas películas de fluido tales como el acelerómetro y giroscopio.
  - MemTrans es un analizador que calcula los transitorios, las deformaciones y esfuerzos mecánicos de origen térmico. Una aplicación típica es el cálculo de las condiciones de falla por colapso (efecto de llegada) en sensores inerciales.
  - MemCFD es un analizador para el diseño y simulación de dispositivos que trabajan con microfluidos y para la integración de tecnologías de manejo de microfluidos y microarreglos en un laboratorio automático en un sólo chip.
  - SwitchSim calcula la respuesta electrocinética de una especie en un fluido sujeto a un campo eléctrico.
  - DropSim analizador que permite la simulación numérica de la formación, transporte e impacto de gotas en forma completamente tridimensional.
  - BubbleSim simula el movimiento de burbujas y los fluidos que las rodean en microcanales.
  - ReactSim es un analizador re reacciones químicas.
  - BioChip Developer es un ambiente de desarrollo para diseñadores que desarrollan análisis bioquímicos y síntesis de sistemas a escala micro, tales como secuenciación de ADN, separación de proteínas y tecnologías de integración de laboratorios en un chip.
3. Integrator: extrae modelos de orden reducido a partir de simulaciones detalladas hechas por el Método de Elemento Finito o el Método de Elemento de Contorno. Cada componente obtenido por esta vía tiene seis grados de libertad mecánicos y hasta cinco grados de libertad eléctricos. Los modelos se exportan hacia MAST (Synopsys), Matlab (MathWorks) o Virtuoso (Cadence). Tiene la capacidad de simular simultáneamente los Sistemas Microelectromecánicos y los circuitos electrónicos que se encuentren integrados en un mismo dado. Realiza rápidas simulaciones de transitorios para sistemas con acoplamientos electromecánicos (incluido el amortiguamiento) que en los programas tradicionales de simulación por el método de elemento finito son irrealizables o muy pesadas. Permite al diseñador crear nuevos elementos MEMS para complementar la extensa librería de componentes parametrizados del paquete ARCHITECT.

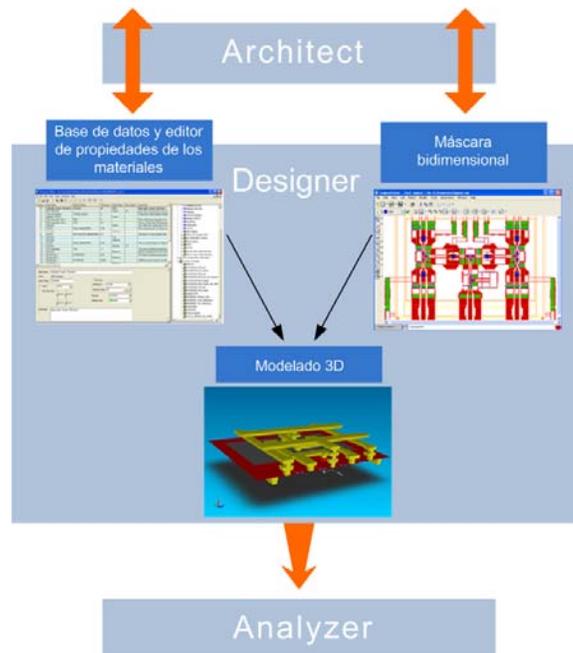


Figura 2.11: El diseño de las máscaras bidimensionales y la definición de los pasos del proceso de fabricación en Designer es la base del trabajo en CoventorWare.

4. Architect: para la creación de modelos esquemáticos de MEMS que simula en un mismo Sistema Microelectromecánico elementos cuyos principios de funcionamiento pertenecen a distintos dominios y presentan acoplamientos multi-físicos. Ejecuta simulaciones muy precisas de modelos hasta con seis grados de libertad cien veces más rápido que las técnicas tradicionales de elemento finito. Soporta modelos de parámetros concentrados y de orden reducido para la simulación de los elementos de un MEMS o del sistema completo. Permite la incorporación, a las simulaciones, de los subsistemas que interactúan con el Sistema Microelectromecánico principal. Posee una amplia librería de componentes y admite la personalización de múltiples opciones de diseño. Relaciona los modelos de orden reducido o de parámetros concentrados de algún MEMS con los resultados provenientes de simulaciones hechas con el método de elemento finito a través de la base de datos de CoventorWare.
5. MEMulator: simula las técnicas de fabricación con semiconductores empleadas para crear MEMS, circuitos integrados, cabezas de discos duros y displays LCD. Iniciando a partir de máscaras bidimensionales y la descripción del proceso de fabricación. MEMulator usa algoritmos basados en voxels para producir vistas tridimensionales realistas de la forma en como lucirán los MEMS una vez fabricados. Los modelos creados con MEMulator pueden visualizarse en 3D o exportarse a software 3D y analizadores de terceros fabricantes.

CoventorWare generalmente sigue un procedimiento de diseño y simulación que inicia con la creación de la máscara bidimensional del Sistema Microelectromecánico empleando las herramientas de dibujo en el editor de máscaras. El siguiente paso es la definición de los pasos del proceso de fabricación para que sean emulados por el software.

El editor de procesos proporciona toda la información necesaria para crear el modelo tridimensional del MEMS a partir de la máscara bidimensional proporcionada por el editor. La información de la profundidad del MEMS es definida por las capas de materiales empleadas en las secuencia de pasos de depósito y socavado.

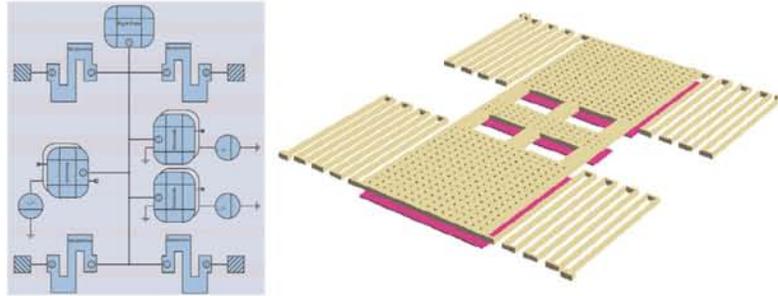


Figura 2.12: Modelado de un microacelerómetro en CoventorWare. A la izquierda, modelo a nivel de sistema en Architect. A la derecha, modelo geométrico tridimensional en Designer.

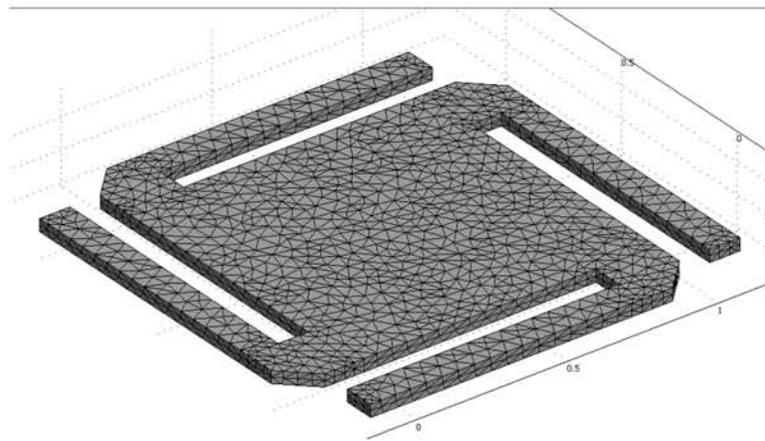


Figura 2.13: Particionamiento (mallado) de una placa suspendida correspondiente a un capacitor variable para RF en Analyzer de CoventorWare.

Los materiales para cada capa del proceso del MEMS son escogidos de una base de datos que contiene la información de las propiedades de cada tipo de material; las propiedades de los materiales incluyen elasticidad, densidad, viscosidad, conductividad, permeabilidad eléctrica y características térmicas y piezoeléctricas. Algunos de los parámetros del proceso de fabricación son: el grosor del material, el tipo de depósito, los perfiles de los flancos angulares y el perímetro de compensación de la máscara. Una vez que la máscara y el flujo del proceso de fabricación han sido generados, la herramienta de modelado sólido crea el modelo geométrico tridimensional empleando la información geométrica proveniente de la máscara y la información de los depósitos, socavados y el grosor contenidos en el archivo de definición del proceso.

El siguiente paso es la creación del modelo matemático para la simulación de los fenómenos físicos por el método de elemento finito, para ello es necesario crear el mallado de todo el sistema. La herramienta de mallado crea la partición tridimensional a partir del modelo geométrico generado con la herramienta de modelado sólido y el archivo de definición del proceso de fabricación. El diseñador puede escoger entre distintos elementos geométricos básicos para la creación de la malla, tales como tetraédros, paralelepípedos, y hexaédros en función de la geometría del dispositivo.

El procedimiento sigue con la creación del mallado de la estructura y la simulación detallada para analizar los resultados y finalmente generar, si el diseñador lo requiere, un modelo de orden reducido del Sistema

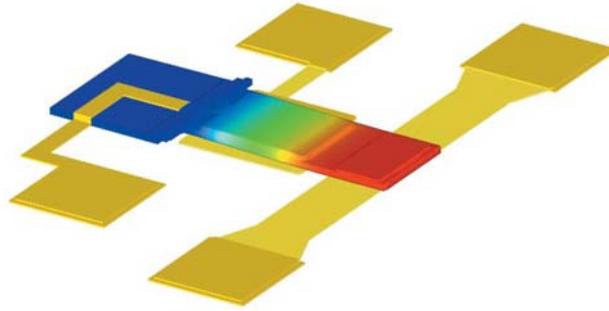


Figura 2.14: Análisis del desplazamiento en un microinterruptor electrostático en Analyzer de CoventorWare.

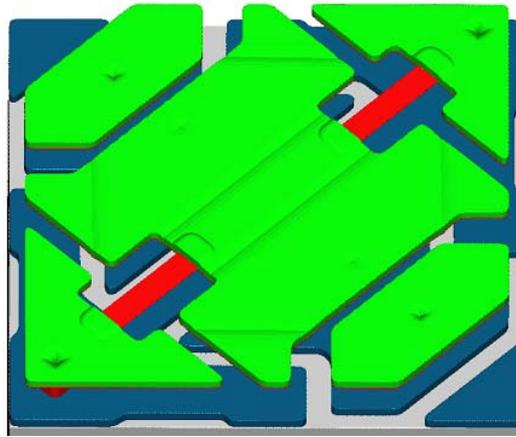


Figura 2.15: CoventorWare puede simular Sistemas Microoptoelectromecánicos (MOEMS) como un microespejo.

Microelectromecánico. El resultado es almacenado en un archivo que contiene toda la información del modelo completo (es decir, del modelo geométrico más el modelo físico), dicha información comprende la geometría básica del diseño, las propiedades de los materiales, las propiedades del proceso y su afectación a la geometría y las condiciones del sistema, las características del mallado, las simulaciones de los fenómenos físicos incluyendo sus distintos acoplamientos y el modelo de orden reducido.

CoventorWare facilita la simulación de una gran variedad de MEMS y otros componentes de RF basados en Microsistemas, incluyendo interruptores, varactors, inductores, resonadores, líneas de transmisión, elementos de antenas y guías de onda. Además, CoventorWare cuenta con herramientas para el diseño de MEMS ópticos tales como microespejos, obturadores y alineadores de fibra empleados en interruptores ópticos, filtros ópticos ajustables y láseres. Finalmente, el paquete Integrator permite la extracción de modelos de orden reducido para los efectos físicos que más frecuentemente (rigidez, amortiguamiento e inercia) se encuentran en la dinámica de los Sistemas Microelectromecánicos. Para esto se emplean tres herramientas: 1) SpringMM que extrae la rigidez de resortes lineales y no lineales tanto mecánicos como electromecánicos, 2) DampingMM que resuelve las ecuaciones de Stokes para fluidos y es aplicable a geometrías arbitrarias y 3) InertiaMM que calcula la inercia de las partes móviles del Sistema Microelectromecánico. Estos modelos de orden reducido puede emplearse para simulaciones en Simulink.

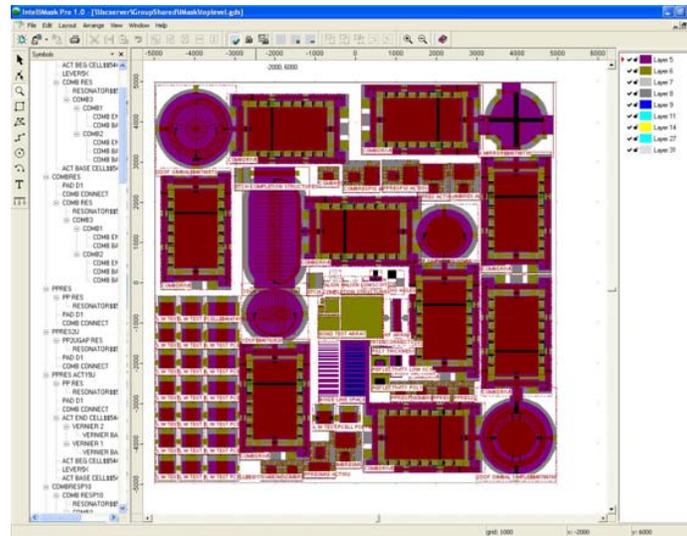


Figura 2.16: Máscara creada con IntelliMask de IntelliSuite.

## IntelliSuite

Intellisense desarrolla y comercializa el software de diseño asistido por computadora conocido como Intellisuite. La versión más reciente es la 8.5. Intellisuite es una herramienta de diseño y un ambiente de simulación basada en el método de elemento finito específicamente diseñada para MEMS. Corre bajo windows. Los diseñadores inician con el dibujo de las máscaras en IntelliMask, el cual es un paquete estándar con las características típicas para el diseño de plantillas tales como: control de capas, creación jerárquica de celdas y manipulación de sus instancias. Cada máscara es dibujada en una capa separada y salvada en un archivo diferente. También es posible importar y exportar las máscaras en formatos GDS II y DXF.

El siguiente paso es definir las características del proceso de fabricación en la herramienta llamada IntelliFab. Esta herramienta contiene una enorme base de datos con información sobre: materiales comúnmente empleados en la creación de MEMS y los pasos de depósito y socavado de dichos materiales. La simulación del proceso de fabricación incluye los pasos de depósito, socavado, fusión, dopado, electrochapado y separación, entre los más comunes en el diseño de MEMS. También simula procesos de microensamblado para crear modelos geométricos precisos de los Sistemas Microelectromecánicos. La máscara previamente elaborada en IntelliMask es usada por IntelliFab para definir las áreas en las cuales los materiales son agregados o removidos. Una vez que el usuario ha creado el flujo completo del proceso, IntelliFab visualiza un prototipo virtual del MEMS en un visor que permite hacer acercamientos, desplazamientos y rotaciones. Para los procesos estándar de fabricación de MEMS existen plantillas proporcionadas por las fundidoras responsables de dichos procesos que pueden fácilmente cargarse en IntelliFab.

Las propiedades de los materiales usados en cualquier paso del proceso puede definirse o alterarse con una poderosa herramienta llamada MEMaterial. Al proveer una perspectiva del comportamiento de los materiales, MEMaterial ayuda a eliminar las corridas de ensayo y error que anteriormente eran empleadas para analizarlo. MEMaterial permite ajustar las predicciones de las propiedades mecánicas, eléctricas, térmicas y ópticas de los materiales en función de los parámetros de fabricación, su información está basada en mediciones y no en estimaciones o valores teóricos y contiene una extensa base de datos que es actualizada periódicamente. Provee información de más de 70 procesos de fabricación de MEMS y dispone de la más completa base de datos de propiedades de materiales usados en procesos de micromaquinado de superficie.

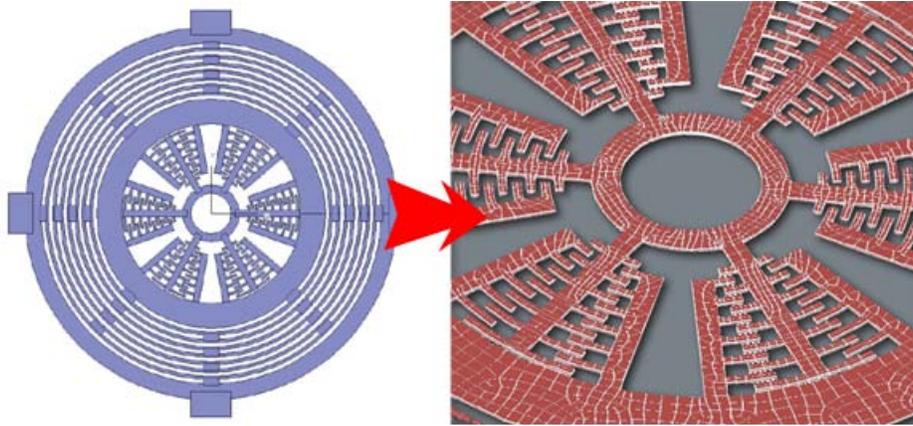


Figura 2.17: De la máscara al modelo tridimensional al mallado para la simulación multifísica.

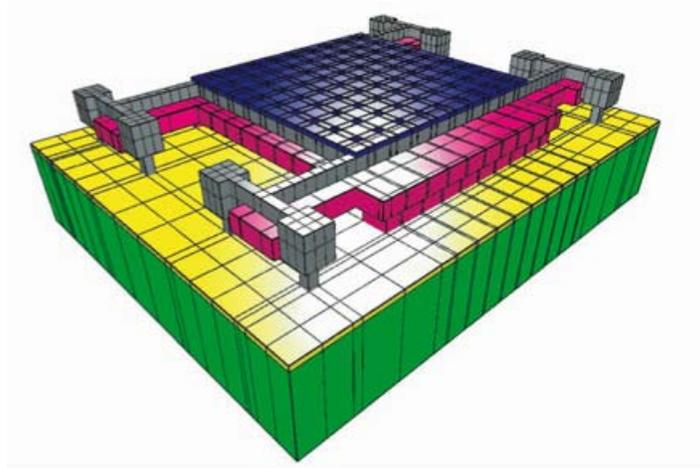


Figura 2.18: Modelado tridimensional y mallado de un acelerómetro en IntelliFab de Intellisuite.

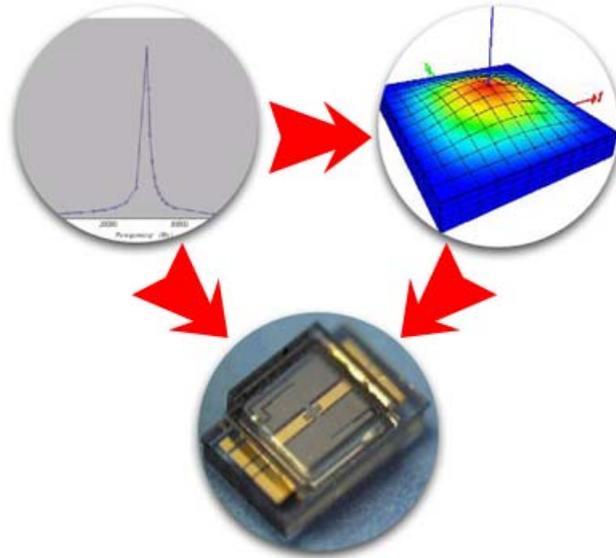


Figura 2.19: Simulación electromecánica de un sensor de presión piezoresistivo en IntelliSuite.

Intellisuite dispone de analizadores mecánicos, electromagnéticos, electromecánicos y electrostáticos que tienen la capacidad de correr desde IntelliFab o de forma directa. El analizador mecánico particiona el dispositivo que será analizado. El proceso de particionamiento puede controlarse definiendo límites globales o focalizados de la malla en ciertas áreas de interés. Permite visualizar en una animación los modos naturales de resonancia mecánica y aplicar cargas mecánicas tales como fuerzas y momentos sobre las diferentes superficies de la estructura o cargas térmicas en forma de calentamiento por convección. También permite simular la distribución térmica a través de materiales con variaciones de resistividad y deformaciones mecánicas provocadas por los esfuerzos térmicos. Cualquier análisis puede aplicarse como respuesta a una carga constante o variante en el tiempo. El analizador electrostático emplea procesos muy similares de mallado y calcula una matriz de capacitancia para las distintas capas y superficies. Más aún, permite un análisis de la densidad de carga resultante, fuerzas electrostáticas y presiones. El analizador electromecánico permite al usuario aplicar varias cargas al dispositivo bajo consideración, tales como cargas electrostáticas (a través de voltajes), cambios de temperatura, presión, aceleración y desplazamientos y consecuentemente calcular las reacciones mecánicas resultantes (tales como distribución de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos) y propiedades eléctricas (tales como capacitancia, densidad de carga y campo eléctrico).

Otro analizador es el módulo para bioMEMS y microfluidos. Esta herramienta permite al diseñador analizar los efectos térmicos, concentraciones y flujos internos en un fluido. También simula la velocidad y distribución de campo eléctrico como resultado de fenómenos electrocinéticos. Dispone de algoritmos de visualización para ver los perfiles de las secciones transversales, los vectores de velocidad y los transitorios resultantes. Simula reacciones multivalentes, electroforesis, estequiometría y cinética de reacciones.

Otra herramienta muy útil es AnisE, un simulador de procesos de socavado anisotrópico. Con AnisE, el diseñador puede usar la máscara de la microestructura del prototipo para visualizar una representación tridimensional de él, acceder a información sobre las tasas de socavado de diferentes atacantes y simular el socavado bajo distintas temperaturas, tiempos de exposición y concentraciones. AnisE puede simular superficies de socavado dobles o simples para los planos [100] y [110], y puede emular la incorporación de múltiples pasos y detensiones del socavado o cualquier otro proceso que sea posible hacer en el mundo real,

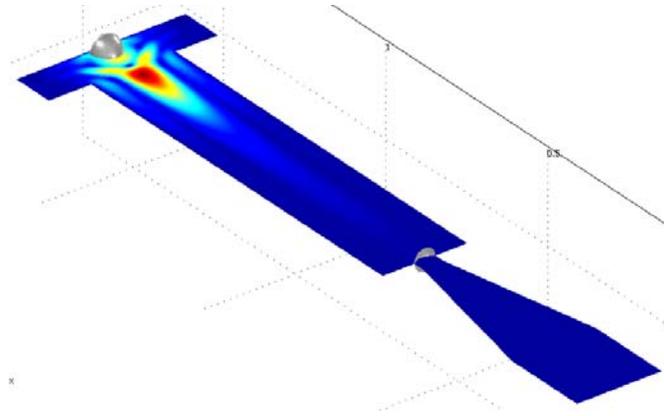


Figura 2.20: Modelado del fluido dentro de una boquilla de tinta con IntelliSuite.

pueden modelarse y visualizarse las compensaciones en las esquinas y los márgenes de tolerancia del proceso, incluidos los efectos de errores en la alineación de las máscaras o la combinación de socavados anisotrópicos y de iones.

Finalmente, Intellisense dispone de un módulo llamado 3D Builder, el cual puede ser llamado desde cualquiera de los analizadores o separadamente como una aplicación autónoma. Esta herramienta permite construir y particionar la geometría tridimensional de una estructura MEMS mediante una interfase gráfica. Su espacio de trabajo está dividido en dos áreas, en una de ellas se aprecia la máscara bidimensional y el delineado de las capas y en otra se dispone de una vista tridimensional que permite al usuario visualizar el dispositivo. Más aún, el grosor de cada capa puede cambiarse, de este modo un dispositivo MEMS puede crearse sin tener que definir por completo el flujo del proceso de fabricación. Este módulo produce un archivo que puede ser usado para análisis en cualquiera de los analizadores o alternativamente, un archivo de máscara que puede ser procesado posteriormente por IntelliMask.

### Ansys Multiphysics

El software de análisis por el método de elemento finito llamado Ansys Multiphysics es una herramienta de simulación comercialmente disponible capaz de realizar análisis estructurales, de vibraciones (modales, armónicas y transitorias), térmicos, acústicos, de mecánica de fluidos, electromagnéticos y piezoeléctricos y los diversos acoplamientos entre estos dominios. Aunque es una herramienta que no está dirigida específicamente al diseño de MEMS, la mayoría de sus análisis son aplicables al microdominio de los Sistemas Microelectromecánicos. Por esta razón, Ansys es ampliamente empleado por la comunidad dedicada al diseño de MEMS. La interfase del software resulta al principio un tanto críptica, pero en las versiones más recientes se ha mejorado el diseño de los menús, barras de herramientas y cuadros de diálogo. La versión más reciente del software es la 11 y corre bajo Windows, Linux y Solaris.

Ansys Multiphysics tiene la capacidad de simular diversos fenómenos físicos presentes en el funcionamiento de los Sistemas Microelectromecánicos:

- Comportamiento estructural (análisis modal, armónico y de transitorios).
- Efectos electrostáticos.
- Comportamiento de películas de material piezoeléctrico.
- Esfuerzos residuales.

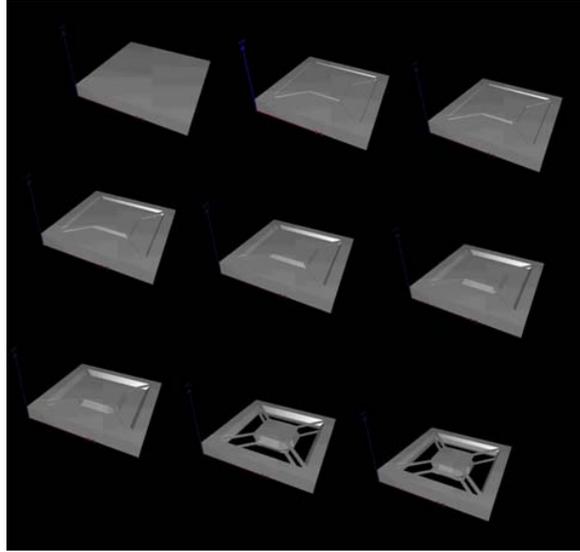


Figura 2.21: Simulación con AnisE del micromaquinado en volumen de un acelerómetro fabricado en una oblea tipo [100].

- Amortiguamiento debido a flúidos.
- Comportamiento de microfluidos.
- Comportamiento de estructuras compuestas.
- Acoplamientos Electro-termo-estructurales.
- Electromagnetismo.

Dada la naturaleza de los sensores, los análisis de fenómenos físicos acoplados resultan de gran interés. El software permite la importación de archivos, lo que hace posible que los diseños y modelos geométricos de MEMS sean ingresados desde otros programas de modelado sólido tales como AutoCAD, SolidWorks y SolidEdge entre otros. La simulaciones en Ansys generalmente se desarrollan en tres etapas, la primera es realizada en el preprocesador y define los parámetros del sistema que será analizado e incluye:

1. Trazo de la geometría del MEMS directamente en el ambiente de simulación Ansys o importación del modelo geométrico desde otra aplicación. Es muy importante explotar la simetría de las estructuras que se simularán. Si existe simetría con respecto a un eje sólo es necesario hacer la simulación de la mitad del sistema o si existe simetría con respecto a dos ejes que crucen el sistema, sólo será necesario simular la cuarta parte del MEMS; lo cual no sólo representa simplicidad en el trazado geométrico del MEMS, sino sobretodo ahorro de tiempo en la simulación.
2. Asignación de los tipos de materiales a cada elemento de la geometría del Sistema Microelectromecánico. Esto implica definir los coeficientes de rigidez, plasticidad, permeabilidad electromagnética, conductividad térmica, resistencia eléctrica entre otros, para cada elemento en el MEMS en correspondencia con las características de los materiales que se emplearan en su fabricación.
3. Asignación del tipo de elemento geométrico y analítico que será utilizado para realizar el mallado de todo el sistema. Ansys deja en manos del diseñador la responsabilidad de elegir los fenómenos que desea estudiar en el sistema (cuerpo geométrico fabricado con determinados materiales) a partir de que el diseñador elija las capacidades de modelado, y por lo tanto las capacidades analíticas, que cada elemento de la malla del sistema es capaz de simular, es decir, el diseñador decide si los elementos con

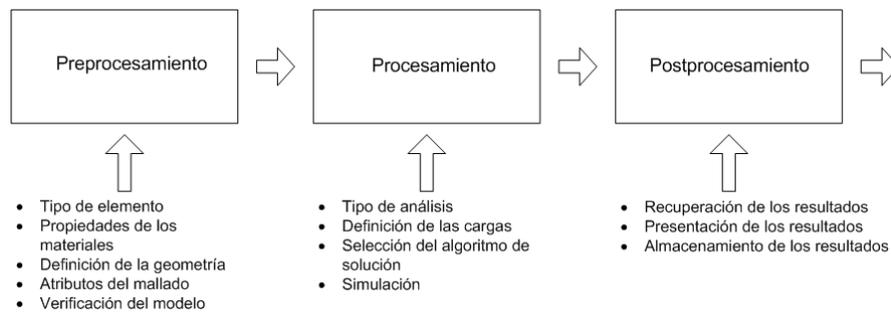


Figura 2.22: Procedimiento típico en Ansys Multiphysics.

que se particiona el sistema pueden simular simultáneamente comportamientos mecánicos, eléctricos y térmicos o sólo comportamientos mecánicos y eléctricos. Esto no significa que en un diseño no sea posible realizar los tres análisis, sólo significa que algunos de ellos se harán en un sólo paso de simulación. Si el diseñador decide que el elemento de particionamiento tiene capacidad de simular fenómenos mecánicos y eléctricos únicamente, podrá hacer los cálculos correspondientes a estos dominios en un primer paso de simulación, podrá almacenar los resultados y emplearlos como condiciones iniciales para un siguiente paso de simulación en el que analizará el comportamiento eléctrico y térmico del sistema.

- Definición de las variables de interés o salidas que serán tomadas en cuenta a partir de la simulación.
- Definición de las cargas, restricciones y condiciones iniciales para todo el sistema. Las cargas normalmente se aplican en una superficie o punto de la geometría; pueden ser de tipo mecánico, térmico y electromagnético, y constantes o variantes en el tiempo. Las restricciones normalmente se refieren a anclajes mecánicos, conexiones eléctricas y disipaciones térmicas. Y las condiciones iniciales pueden engresarse en forma de pre-esfuerzos,
- Determinación de la densidad y uniformidad del mallado con que se particionará el sistema.

La siguiente fase de solución, es en la cual se define el tipo de análisis y el método de solución.

- Definición de los pasos de simulación y sus características, es decir, los dominios que se analizarán en un primer paso y el lugar en dónde se almacenarán parcialmente sus resultados para que en un siguiente proceso se empleen como condiciones iniciales. Se definen también el número de iteraciones que se cumplirán al llamar de forma sucesiva cada paso de la simulación.
- Selección de los métodos numéricos que se emplearán para resolver las ecuaciones diferenciales, el tipo de análisis que se aplicará a los resultados finales de la simulación (modal, de armónicos, de transitorios, entre otros) y la tolerancia para la convergencia en la simulación.

Y la fase final involucra la revisión de los resultados en el postprocesador. Diferentes postprocesadores son utilizados dependiendo del tipo de análisis que se desarrolle (es decir, estático o basado en el tiempo).

A continuación se mostrarán un par de ejemplos de Sistemas Microelectromecánicos simulados con Ansys. El primero de ellos corresponde a un actuador electro-térmico. El dispositivo consiste en una placa (brazo) conectada a los cojinetes de contacto eléctrico a través de dos delgadas vigas tal como lo muestra la figura 2.23. Una diferencia de potencial es aplicado en los cojinetes de contacto eléctrico y la corriente fluye a través de las vigas delgadas y del brazo. El dispositivo se construirá de silicio policristalino, el cual tiene una resistividad eléctrica dependiente de la temperatura. Así, el flujo de corriente producirá un calentamiento

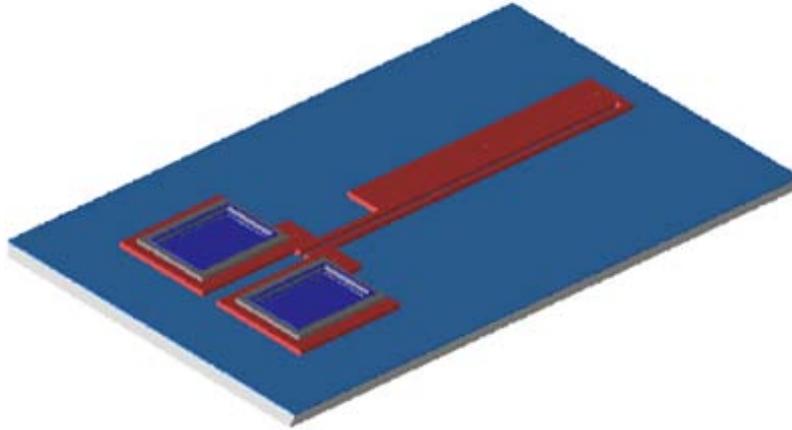


Figura 2.23: Actuador electrotérmico conocido como HotArm. Al circular una corriente eléctrica entre los dos cojinetes se disipa energía en forma de calor (efecto Joule) lo que incrementa la temperatura del material y lo deforma. El efecto obtenido es un cabeceo hacia la izquierda.

(efecto Joule) que se convertirá en un esfuerzo térmico sobre el dispositivo concentrado en la delgada viga larga adyacente al brazo. La expansión térmica de la delgada viga larga empuja hacia adelante el brazo, lo cual provoca una flexión en la unión entre el brazo y la viga delgada corta. El punto extremo del brazo normalmente está conectado a otras vigas, las cuáles a su vez mueven engranes y mecanismos de propulsión. Ansys tiene la capacidad de realizar los siguientes análisis en este MEMS:

1. Determinar la naturaleza del movimiento del dispositivo.
2. Determinar la deflexión del brazo para un rango de voltajes.
3. Determinar la temperatura máxima en el dispositivo para un rango de voltajes.
4. Incorporar las propiedades del material dependientes de la temperatura.
5. Incorporar la transferencia de calor hacia el fluido que circunda el dispositivo.
6. Calcular el amortiguamiento debido a la inmersión del dispositivo en el aire.
7. Construir un modelo de orden reducido del dispositivo.

El dispositivo puede ser analizado en 2D o 3D. A partir de un modelo bidimensional, éste puede ser extruído en el modelador de sólidos de Ansys para crear el cuerpo del dispositivo o también es posible, importar la geometría desde algún software para diseño asistido por computadora. Los tipos de análisis que se aplicaron al dispositivo son electro-térmico seguidos de otro de tipo termo-mecánico. Sólo se modela el silicio policristalino del dispositivo y el mallado se ha hecho con tetraedros. El voltaje de DC se aplica y el calentamiento por el efecto de Joule se calcula. Los resultados son aplicados entonces como cargas para la parte termomecánica de la simulación. Los siguientes resultados se obtuvieron del análisis tridimensional:

Voltaje [V]	Corriente [pA]	Desplazamiento máximo [ $\mu\text{m}$ ]	Temperatura máxima [K]
10	$3,712 \times 10^6$	0,12	288,5
20	$7,424 \times 10^6$	0,47	329
30	$1,111 \times 10^7$	1,05	394,9
40	$1,485 \times 10^7$	1,87	485
50	$1,856 \times 10^7$	2,92	600,5

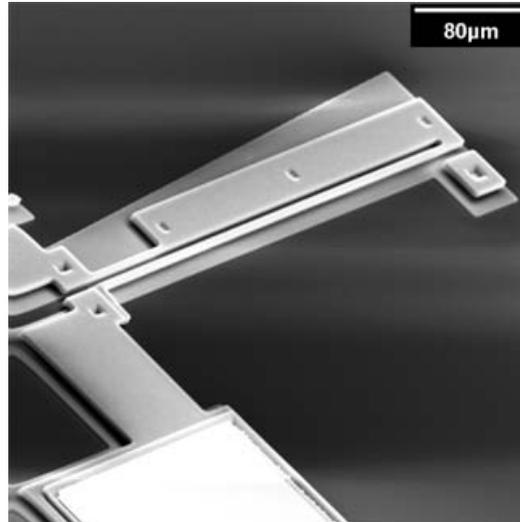


Figura 2.24: Imagen de un actuador electrotrmico fabricado en el proceso PolyMumps (Simon Fraser University, 2003). El actuador tiene una longitud de  $200 \mu\text{m}$  y es capaz de alcanzar un desplazamiento mximo de  $10 \mu\text{m}$ .

El segundo dispositivo es un microespejo sostenido por una barra de torsin. Dos electrodos separados bajo cada seccion permiten al espejo ser inclinado sobre del eje de la viga de torsin. El espejo en s mismo, forma un tercer electrodo. Los micro-espejos tienen aplicaciones en pantallas y proyectores (tal como el DLP de Texas Instruments) y pueden ser usados como interruptores pticos en la industria de las telecomunicaciones. Con Ansys se realizaron anlisis mecnicos y electrostticos del dispositivo y un anlisis del amortiguamiento por la compresin de la pelcula de aire entre el sustrato y la placa mvil del microespejo (efecto que influye en la respuesta en el tiempo del sistema). Otros anlisis posibles seran:

- Calcular las fuerzas electrostticas para varios ngulos de inclinacin del microespejo.
- Calcular el voltaje de llegada (colapso) del microespejo.
- Calcular los esfuerzos mecnicos y desplazamientos estructurales.
- Anlisis de transitorios, incluidos los efectos de un voltaje de bias (CD).
- Obtener un modelo de orden reducido del microespejo.

El espejo, los electrodos y el aire que los rodea se incluye en el particionamiento del modelo. El espejo y los electrodos tienen un eje de simetra transversal que puede aprovecharse para simular nicamente la mitad del sistema y disminuir el tiempo de clculo. El modelo de trabajo en Ansys permite emplear slo la mitad simtrica del Microsistema para simplificar el proceso y posteriormente extender los resultados a la totalidad del MEMS.

Slo un pequeo volumen que rodea el microespejo es particionado dado que la frontera externa es tratada como un dominio de Trefftz. Ntese que slo los nodos superficiales de los dos electrodos bajo el espejo son necesarios en el modelado y simulacin, y son tratados como conductores perfectos.

Al aplicar un anlisis acoplado electrosttico-mecnico los grados de libertad definidos para ambos dominios estn disponibles para su post-procesamiento, se pueden obtener resultados como los contornos de voltaje en su posicin inicial (sin rotacin).

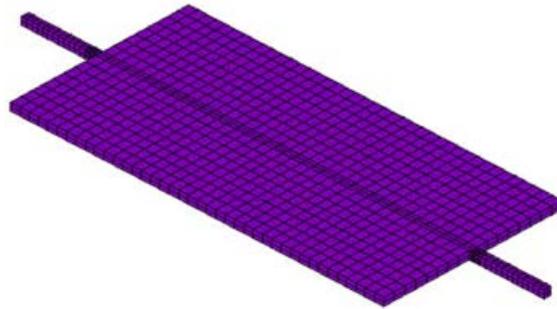


Figura 2.25: Mallado de la placa y de las vigas de torsión del microespejo. La placa funciona como electrodo y superficie reflejante giratoria del dispositivo.

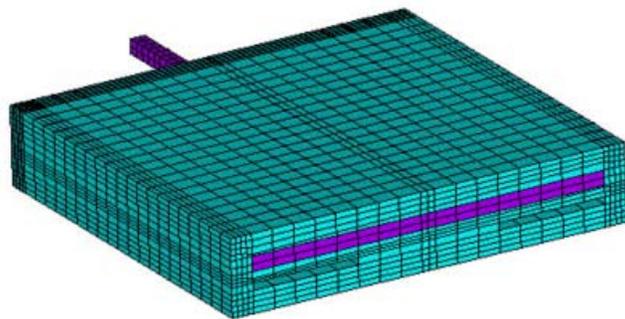


Figura 2.26: Mallado de la placa del microespejo, del sustrato y de la masa de aire que rodea al Microsistema.

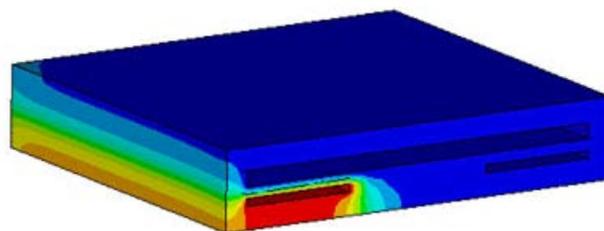


Figura 2.27: Visualización de los contornos de voltaje para el microespejo gracias a las herramientas de post-procesamiento que Ansys proporciona a los diseñadores.

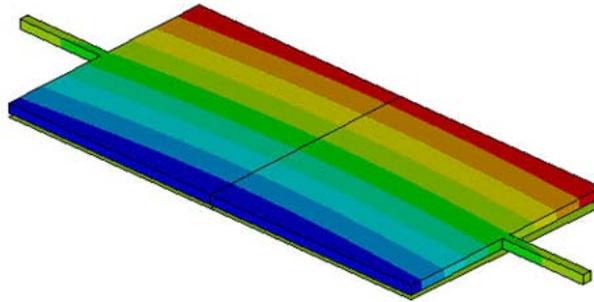


Figura 2.28: Visualización de la rotación y aproximación entre placas del Sistema Microelectromecánico.

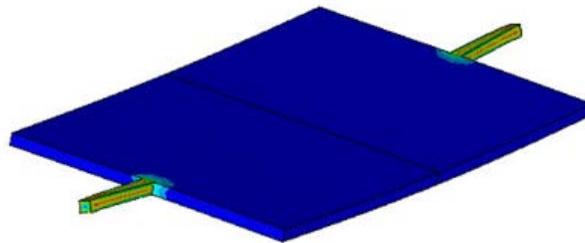


Figura 2.29: Visualización con Ansys de los esfuerzos en las vigas de torsión del microespejo.

Y los desplazamientos del espejo. Además, con el uso de una simple instrucción, se puede expandir la mitad simétrica del modelo geométrico y generar imágenes más realistas.

Finalmente, se pueden apreciar los esfuerzos en las vigas de torsión que sujetan la placa del microespejo, debidos al torque producido por el campo electrostático.

## ComSol

ComSol Multiphysics (anteriormente FemLab) es un ambiente de trabajo para el análisis y solución basados en el método de elemento finito para aplicaciones en el campo de la ingeniería, especialmente para fenómenos acoplados o multifísicos. ComSol es multiplataforma, por lo que tiene versiones que corren bajo Windows, Linux, MacOSX y Unix. Dispone de una interfaz de comunicación con Matlab y Simulink, lo que le otorga una enorme capacidad para la automatización de análisis y el postprocesamiento de los resultados. En la versión más reciente incorpora ComSol Script como lenguaje de programación.

Las etapas del proceso de simulación y análisis son: definición de la geometría, especificación de las ecuaciones diferenciales, mallado, resolución y postprocesamiento de los resultados. La configuración de un modelo físico es muy rápido, gracias a un número predefinido de interfaces de modelado para aplicaciones que van desde los fluidos y transferencia de calos hasta mecánica estructural y análisis electromagnéticos. Las propiedades de los materiales, las condiciones en la frontera y las entradas se pueden definir como funciones arbitrarias de las variables dependientes. Existen plantillas de aplicaciones multifísicas predefinidas que

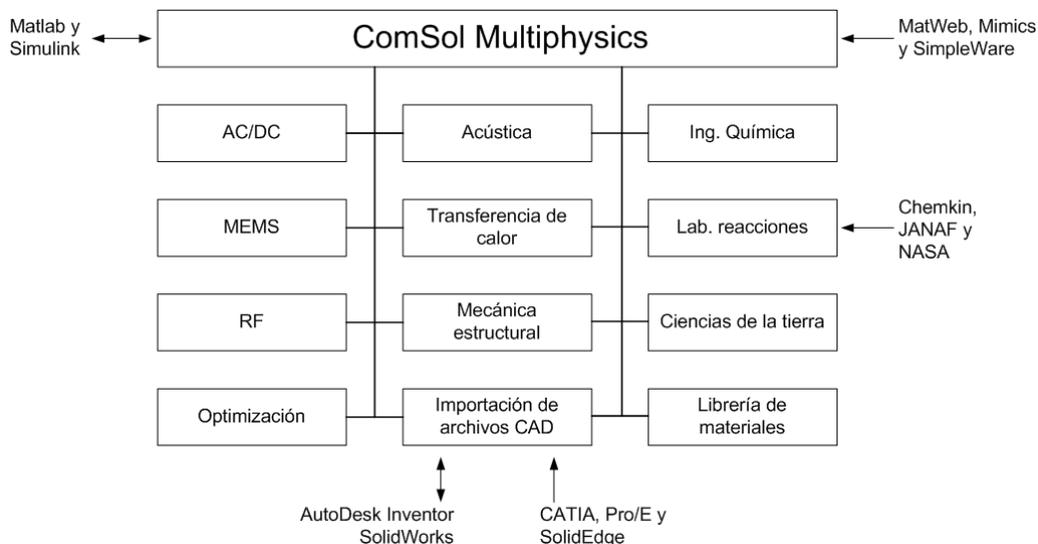


Figura 2.30: Estructura modular de ComSol Multiphysics. Entre los módulos que ofrece se encuentra uno especialmente orientado al modelado y simulación de Sistemas Microelectromecánicos; además, ComSol Multiphysics puede intercambiar información con Matlab y Simulink en formatos nativos.

resuelven muchos de los tipos de problemas más comunes. El diseñador tiene la opción escoger diferentes dominios físicos y definir sus interdependencias o puede ingresar cualquier sistema de ecuaciones diferenciales parciales que describan fenómenos multifísicos para simular el comportamiento del sistema que sea de interés analizar. Cualquier número de ecuaciones diferenciales parciales pueden acoplarse automáticamente con cualquier otro conjunto de ecuaciones en ComSol Multiphysics independientemente del área de aplicación.

ComSol dispone de interfaces con paquetes de diseño asistido por computadora como son: Catia, Autodesk Inventor, SolidWorks, Pro/Engineer y Parasolid. Los módulos analíticos de ComSol proporcionan librerías de materiales, analizadores y herramientas de visualización especializadas para cada área de aplicación. Entre los módulos estándar que ofrece ComSol se encuentra el de Sistemas Microelectromecánicos.

El módulo para las aplicaciones MEMS está dirigido al diseño de micromáquinas. Modela fenómenos físicos presentes en actuadores y sensores y aquellos relacionados con microfluidos y elementos piezoresistivos. La naturaleza multifísica de los fenómenos estudiados incluye interacciones electromagnéticas y mecánicas, térmicas y mecánicas, estructurales y de fluidos o electromagnéticas y de fluidos. El módulo de MEMS proporciona las ecuaciones para el modelado simple o de dominios acoplados y permite la realización de análisis de respuesta en estado estacionario, de transitorios y de respuesta en frecuencia, así como la determinación de frecuencias características.

A continuación se muestran algunos ejemplos de diseño con ComSol. El primero de ellos es un actuador electrostático en forma de peine el cual es usado en una gran variedad de aplicaciones de Sistemas Microelectromecánicos. El modelo mostrado en la figura 2.31 es un actuador electrostático en forma de peine usado para abrir y cerrar un par de micropinzas. Dado que las fuerzas electrostáticas atraen a las dos partes del peine (la móvil hacia la estática), cualquier cambio de geometría tiene un impacto sobre el campo eléctrico entre ellos. Para tener en consideración este efecto, el modelo usa el método de Lagrangiano-Euleriano Arbitrario implantado en ComSol Multiphysics en el modo de ajuste dinámico de la malla. Este modo de ComSol Multiphysics hace un seguimiento automático de los movimientos y ajusta las ecuaciones para describir el campo entre la parte fija y la móvil. En este ejemplo, los desplazamientos son relativamente grandes y para describir bien las deformaciones del material se aplica el modo para grandes deformaciones en el plano de

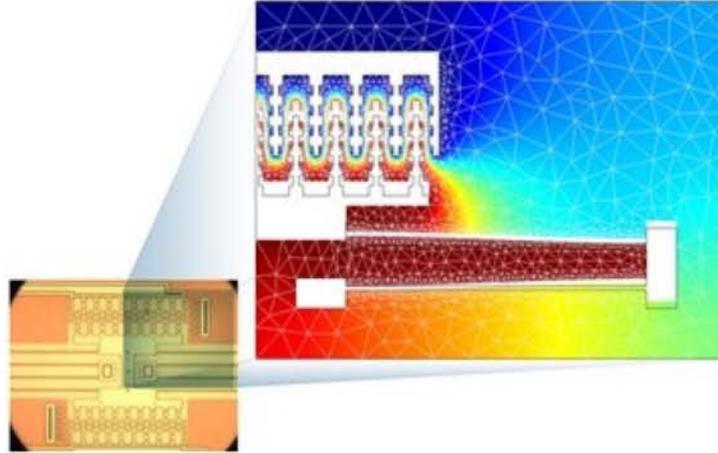


Figura 2.31: Resultado de la simulación del actuador electrostático con forma de peine. La imagen muestra desplazamiento e intensidad de campo eléctrico.

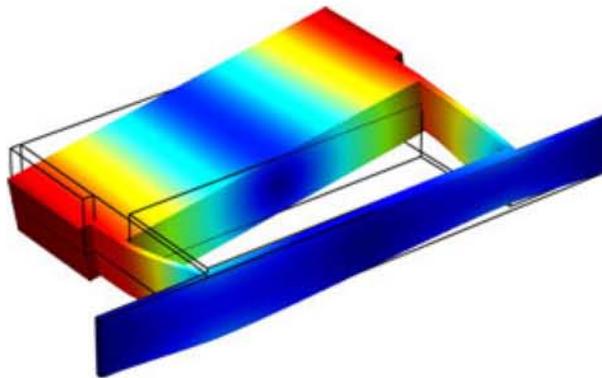


Figura 2.32: Visualización tridimensional del desplazamiento del giroscopio afectado por el amortiguamiento debido a la compresión del aire atrapado entre el sustrato y la masa suspendida.

esfuerzo. En cuanto al análisis de la fuerza electrostática, éste se hace con el modo de tensor de esfuerzo superficial de Maxwell.

El segundo ejemplo es la estimación del desplazamiento de un giroscopio micromaquinado. El amortiguamiento por compresión de fluidos es un factor importante cuando se modelan estructuras vibratorias moviéndose en dirección normal respecto de una referencia o de otra estructura. El amortiguamiento por compresión de fluidos ocurre en el giroscopio por el aire atrapado en la entre la masa móvil del giroscopio y el sustrato. Los desplazamientos obtenidos mediante este análisis deben considerarse como un parametro ideal para el diseño. Todos los procesos que contribuyen al amortiguamiento influyen en el desplazamiento. Por lo tanto, si la compresión de un fluido puede considerarse como el proceso disipativo dominante en el sistema, los resultados obtenidos con la simulación son un buen punto de partida para mejorar de forma iterativa el diseño.

### Autodesk Algor

Algor es un conjunto de herramientas de software para realizar análisis por el método de elemento finito en distintos campos físicos. Originalmente desarrollado y comercializado por Algor Inc. a finales de 2008 fue adquirido por Autodesk Inc. Fue el primer software de elemento finito disponible para computadoras personales. La solución de Algor para MEMS vincula los análisis electrostáticos con los análisis de esfuerzos mecánicos.

Algor puede intercambiar datos directamente con Inventor, SolidEdge, SolidWorks, Pro/Engineer y Rhinoceros para los modelos geométricos. El diseñador dispone de una herramienta para la supresión de detalles en el modelo sólido y de diversas prestaciones para ajustar el mallado de los elementos de modo que haga más eficientes los cálculos numéricos sin sacrificar verosimilitud en los resultados. Las capacidades de análisis de Algor aplicables a los Sistemas Microelectromecánicos incluyen:

1. Análisis electrostático que calcula las fuerzas debido a las cargas superficiales.
2. Simulador de eventos mecánicos y análisis de esfuerzos estáticos con modelos de materiales lineales y no lineales que predicen los efectos electromecánicos producidos por fuerzas electrostáticas.
3. Modelos de materiales piezoeléctricos para simulación mecánica y análisis de esfuerzos.

Como todos los programas de simulación por el método de elemento finito Algor sigue las etapas de preprocesamiento, procesamiento y postprocesamiento para realizar los análisis. En la etapa de preprocesamiento se realizan las siguientes tareas: definición de los puntos nodales y elementos geométricos, definición de soportes y cargas y definición de las propiedades de los materiales. En la etapa de procesamiento se calculan las matrices de rigidez, capacitancia e inductancia y se calculan los desplazamientos de los nodos, los esfuerzos de los elementos y la capacitancia entre elementos. En la etapa de revisión de resultados se despliegan los elementos deformados y los esfuerzos, además Algor puede mostrar los resultados de las simulaciones mediante distintos tipos de gráficas y animaciones y exportarlos hacia otros programas para ampliar las capacidades de postprocesamiento.

### Simulia Abaqus

Abaqus es un paquete de software comercial para la realización de análisis mediante el método de elemento finito desarrollado originalmente por HKS Inc. y comercializado por Simulia que es una subsidiaria de Dassault Systemes, empresa conocida en el mundo del diseño mecánico gracias a su popular software de modelado sólido SolidWorks.

Abaqus consiste de tres productos principales: Abaqus/Standard, Abaqus/Explicit y Abaqus/CAE. Abaqus/Standard es un analizador de propósito general que utiliza el esquema tradicional de integración implícita para resolver problemas con el método de elemento finito. Abaqus/Explicit emplea un esquema de integración explícita para resolver análisis cuasi-estáticos y dinámicos altamente no lineales. Abaqus/CAE proporciona un ambiente integrado de modelado y visualización que puede adecuarse mediante Python que es un lenguaje de código abierto para la creación de scripts. Abaqus proporciona una buena colección de capacidades de simulación de fenómenos multifísicos.

Abaqus fue inicialmente diseñado para analizar comportamientos físicos no lineales y dispone de un extenso rango de modelos de materiales producto de la experiencia y realimentación con el sector industrial. En el campo de los Sistemas Microelectromecánicos Abaqus proporciona:

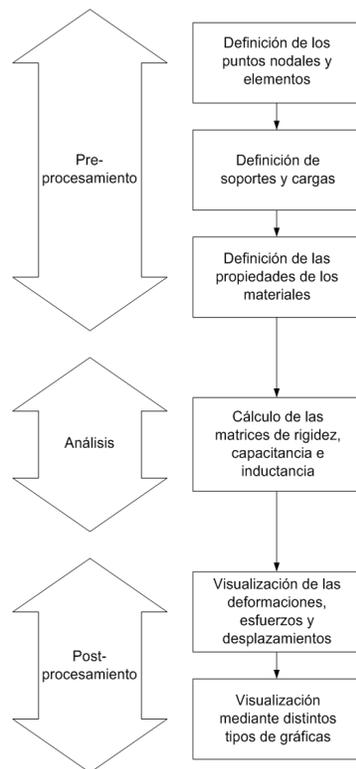


Figura 2.33: Diagrama que representa las distintas etapas necesarias para la simulación de Microsistemas con Algor.

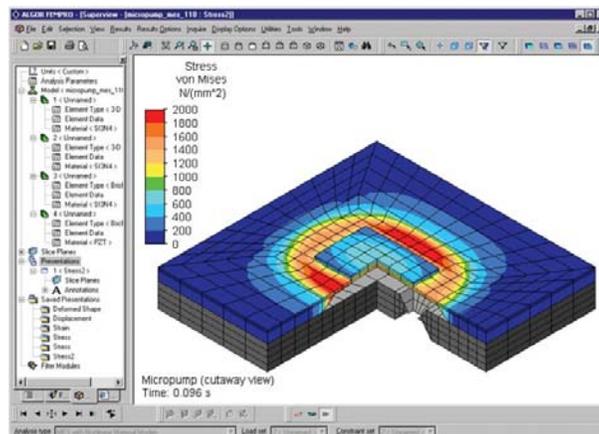


Figura 2.34: Visualización de esfuerzos obtenida mediante la simulación electromecánica de una microbomba piezoeléctrica usada en aplicaciones biomédicas tales como: la creación de dosificadores automáticos de medicamentos para pacientes con diabetes o bajo tratamiento de quimioterapia.

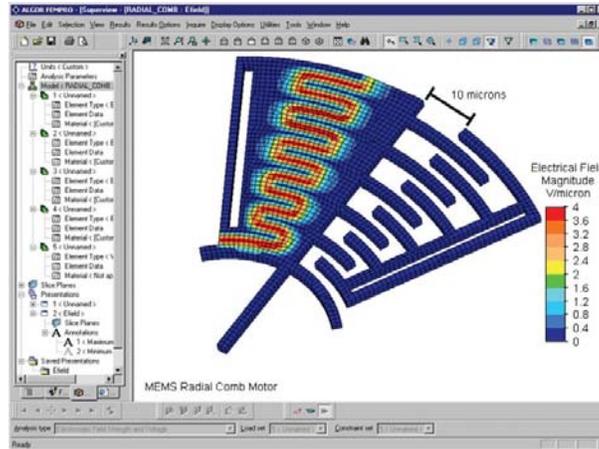


Figura 2.35: Análisis de las fuerzas electrostáticas generadas cuando se aplica un voltaje al actuador electrostático de peine con forma radial.

1. Ambiente unificado de modelado sólido (dibujo tridimensional) y simulación numérica.
2. Simulaciones precisas que incluyen en sus análisis los efectos de los pre-esfuerzos en los materiales.
3. Métodos de simulación que permiten análisis robustos de fenómenos físicos acoplados (dominios eléctrico, mecánico, piezoelectrico, térmico y fluidos).

La naturaleza multidisciplinaria del campo de investigación y desarrollo de los Sistemas Microelectromecánicos ha llevado a Simulia a establecer alianzas con empresas especializadas en MEMS para proporcionarles el software base o núcleo de diseño y análisis por el método de elemento finito para realizar análisis estructurales, térmicos y de propiedades piezoelectricas en los materiales. Algunos de los socios de Simulia y Abaqus en el campo de los MEMS son Coventor e IntelliSense.

### 2.2.2. Creación de máscaras para la fabricación de MEMS

Así como la fabricación de Sistemas Microelectromecánicos tienen sus bases en la infraestructura de fabricación de la industria microelectrónica, el diseño de MEMS tiene sus bases también en el software de diseño microelectrónico. Sin embargo, el diseño de los Sistemas Microelectromecánicos es significativamente diferente al de microcomponentes electrónicos. El diseño de MEMS implica arreglos geométricos complejos y movimientos tridimensionales de sus elementos (de forma similar al mundo macro). El resultado ha sido la disposición de ambientes de diseño para Sistemas Microelectromecánicos que van más allá de las prestaciones que las herramientas de diseño microelectrónico proporcionan, lo que ha creado un gran impulso para buena parte de la industria microelectrónica.

El diseño de un dispositivo que será fabricado a través de algún proceso (LIGA, micromaquinado de superficie o micromaquinado de volumen) requiere de una máscara para definir los pasos del procedimiento de fabricación. La figura 2.38 contiene un esquema con el ciclo del proceso de micromaquinado y la importancia que la máscara tiene dentro de él. La máscara de diseño es la representación bidimensional de un Sistema Microelectromecánico que será empleada como patrón para crear (mediante depósitos, crecimientos, socavados y remociones) el dispositivo en el material de trabajo. Los dispositivos hechos en procesos de micromaquinado

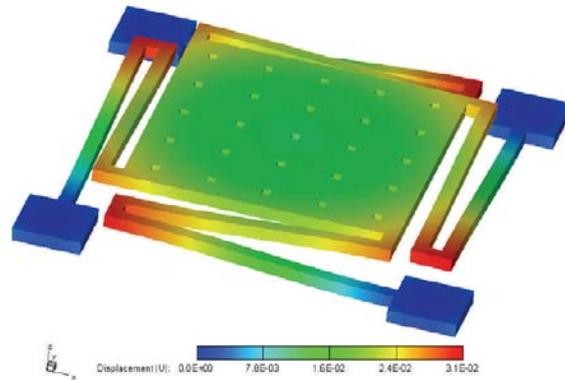


Figura 2.36: Capacitor variable simulado con Abaqus. En la gráfica se visualiza el desplazamiento de la placa y de las vigas que la sostienen con lo cual varía la capacitancia del dispositivo. Los varactors son parte de los Sistemas Microelectromecánicos para Radio Frecuencia. Sus aplicaciones más comunes están en los controladores de frecuencia y los generadores de armónicos.

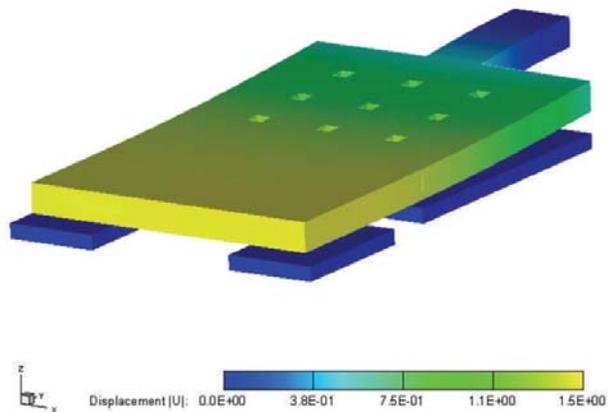


Figura 2.37: Interruptor micromaquinado simulado con Abaqus. En la imagen se aprecia el desplazamiento de la viga volado que cierra el circuito entre los dos cojinetes inferiores. La viga volada se flexiona por efecto de la fuerza electrostática presente entre ella y el cojinete inferior más grande.

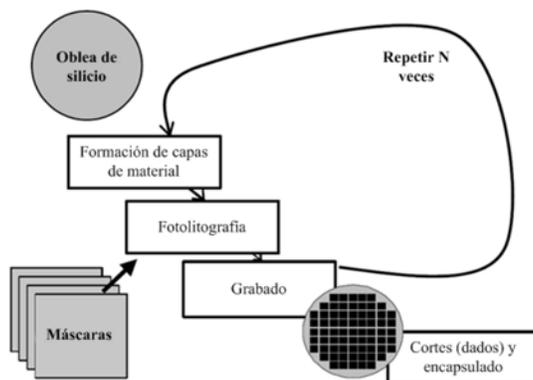


Figura 2.38: Ciclo del proceso de micromaquinado de superficie.

de volumen o LIGA típicamente requieren de un número mínimo de máscaras (normalmente una o dos) para crear los elementos de alto perfil necesarios en el MEMS. En contraparte, los procesos de micromaquinado superficial pueden requerir de hasta 16 máscaras para producir Sistemas Microelectromecánicos complejos. Al menos estas tres tecnologías de fabricación de MEMS necesitan como interfaz de comunicación entre el proceso de diseño y el de fabricación la información contenida en la máscara. El micromaquinado de superficie implica un grado de complejidad en el diseño de MEMS que puede considerarse un metaconjunto de todos los aspectos involucrados en las otras tecnologías de fabricación.

La infraestructura para la creación de máscaras se ha convertido en un sector de servicios muy bien establecido dentro del complejo industrial que representa la microelectrónica. Los dos formatos estándar para el intercambio de información mediante máscaras de diseño empleados en este sector son el formato GDS II y el CIF (CalTech Intermediate Format). GDS II es un formato binario, en tanto que CIF es un formato basado en ASCII, ambos se han transformado en los estándares de la industria, con la preminencia del GDS II.

Debido a que la microelectrónica necesita de simplicidad en la geometría de sus diseños, la integración del archivo GDS II es una secuencia de polígonos cerrados que se aproxima a la verdadera geometría del diseño.

En el contexto de las herramientas de dibujo y modelado sólido para diseño de máquinas y diseño asistido por computadora, las capacidades de representación del formato GDS II son muy modestas. El formato GDS II restringe el uso de circunferencias, elipses, curvas, cubos, esferas y cilindros y en su lugar intenta recrearlos mediante polígonos cerrados. Por esta razón, las herramientas que actualmente se emplean para la creación de máscaras en el diseño de MEMS deben aproximar los trazos complejos basados en curvas mediante el uso de polígonos cerrados, una tarea que no resulta fácil y a veces no proporciona los resultados esperados.

Para ejemplificar algunas de las complicaciones que conlleva el uso del formato GDS II es necesario adentrarse un poco en la representación que las herramientas de diseño para MEMS hacen del proceso de fabricación. Se tomará el proceso de fabricación PolyMumps y su herramienta asociada para el diseño de máscaras L-Edit para abordar este tema. L-Edit permite al diseñador hacer elaborados trazos geométricos

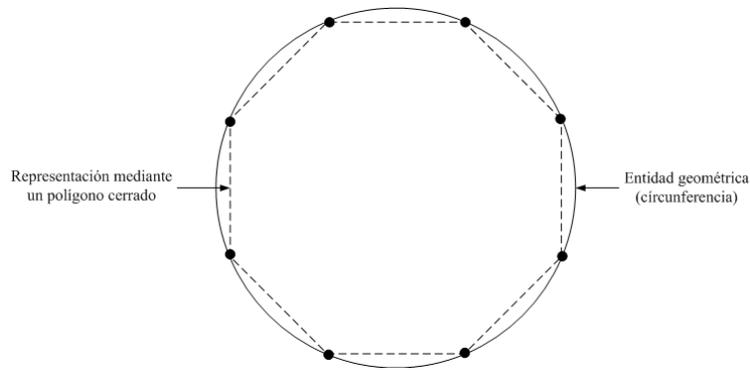


Figura 2.39: Ejemplo de aproximación mediante un polígono cerrado frente a la entidad geométrica original.

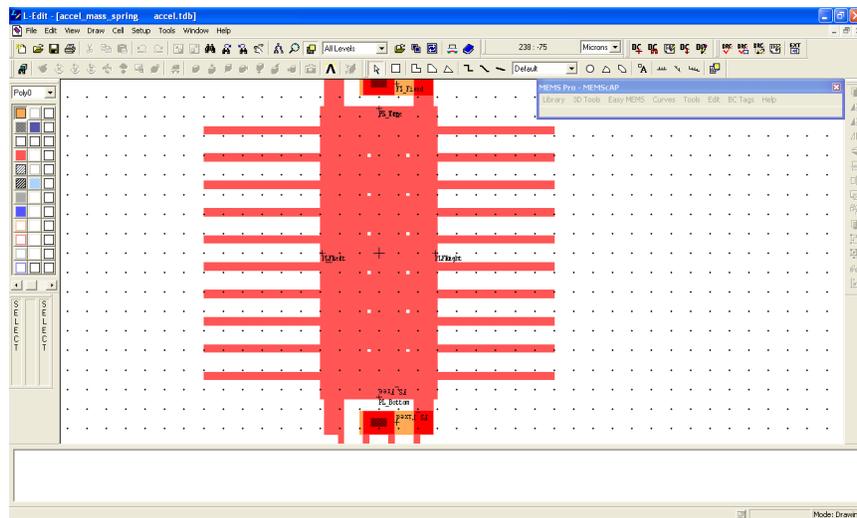


Figura 2.40: Pantalla del ambiente de diseño MemsPro. La barra de herramientas del proceso se encuentra en el costado izquierdo de la pantalla. El proceso que muestra es PolyMumps de la empresa MemsCap.

como parte de los diseños de MEMS, pero antes de enviar la plantilla o máscara definitiva para su fabricación, se debe aplicar un proceso de aproximación de los trazos geométricos mediante polígonos. Una vez hecha dicha aproximación, los elementos geométricos de la máscara pierden la posibilidad de ser editados con facilidad, es decir, ya no es posible cambiar el radio de una circunferencia para ajustar el área que cubre o cambiar el ángulo de inclinación de un rectángulo para hacerlo coincidir con algún otro elemento, debido a que una vez que se realiza la aproximación, los elementos quedan formados por cuerdas (líneas rectas) cuya edición implica la reubicación de puntos individuales que especifican el contorno del elemento.

En general, las capas del proceso de fabricación con el que serán creados los Microsistemas forman parte de la herramienta de diseño de máscaras. Si se trata de una herramienta de propósito general como Autocad, se puede instalar una barra de herramientas adicional en la que se tienen las capas del proceso de fabricación deseado, por ejemplo SUMMiT (Sandia's Ultraplantar Multilevel MEMS Technology), o dentro del propio L-Edit es posible cargar las capas de otros procesos de fabricación ofrecidos por la misma empresa MEMSCap, como son MetalMumps o SOIMumps. La figura 2.40 muestra la pantalla principal de MEMSPro en la que la barra de proceso aparece en el costado izquierdo del área de trabajo.

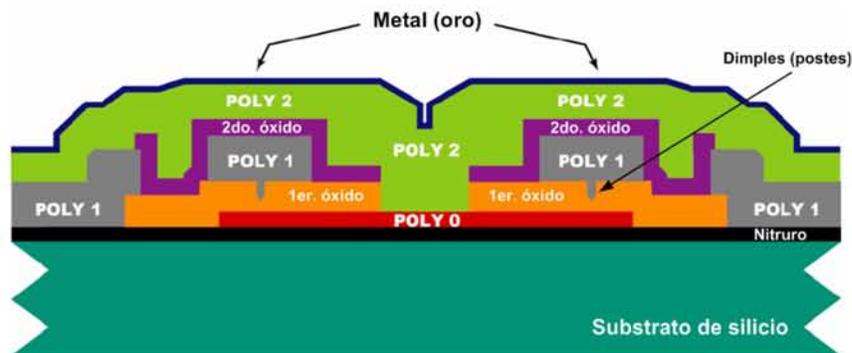


Figura 2.41: Capas de material estructural y de sacrificio del proceso de fabricación de Sistemas Microelectromecánicos PolyMumps. También se muestra el trabajo de socavado realizado sobre la primera capa de sacrificio (primer óxido) llamado Dimples (postes).

Las figura 2.41 muestra todas las capas del proceso PolyMumps.y la lista siguiente detalla sus características.

Capa de material/Trabajo	Grosor	Propósito	Nombre en la máscara	Clave CIF	Clave GDS
Substrato	5 $\mu\text{m}$	Soporte físico general.	substrate	---	---
Nitruro	0.6 $\mu\text{m}$	Aislante eléctrico pegado al substrato.	nitride	---	---
Poly0	0.5 $\mu\text{m}$	Primera capa de polisilicio grabable que forma el plano de referencia general.	Poly0	CPZ	13
Agujeros en Poly0	0.5 $\mu\text{m}$	Grabado adicional sobre la primera capa de polisilicio.	Hole0	CHZ	41
Primer óxido	2 $\mu\text{m}$	Primera capa de sacrificio. Separa las capas estructurales de Poly1 y Poly0 para permitir movimiento.	ox1	---	---
Ancla 1	2 $\mu\text{m}$	Abre agujeros en la primera capa de sacrificio para conectar la capa Poly1 con el nitruro o con la capa de Poly0.	Anchor1	COF	43
Postes	0.75 $\mu\text{m}$	Socava el primer óxido para que los escurrimientos de Poly1 formen postes que eviten la adhesión estática.	Dimples	COS	50

<b>Capa de material/Trabajo</b>	<b>Grosor</b>	<b>Propósito</b>	<b>Nombre en la máscara</b>	<b>Clave CIF</b>	<b>Clave GDS</b>
Poly1	2 $\mu\text{m}$	Segunda capa de polisilicio grabable. Es la primera capa estructural móvil.	Poly1	CPS	45
Agujeros en Poly1	2 $\mu\text{m}$	Grabado adicional sobre la segunda capa de polisilicio. Se colocan agujeros para permitir el paso del atacante químico en el proceso de remoción de las capas de sacrificio.	Hole1	CHO	0
Segundo óxido	0.75 $\mu\text{m}$	Segunda capa de sacrificio. Separa las capas estructurales de Poly2 y Poly 1 para permitir movimiento.	ox2	---	---
Conexión entre Poly2 y Poly1	0.75 $\mu\text{m}$	Abre agujeros en la segunda capa de sacrificio para conectar Poly2 con Poly1.	Poly1-Poly2 via	COT	47
Ancla 2	5.25 $\mu\text{m}$	Abre agujeros en la segunda capa de sacrificio y todas las que estén por debajo de ella para conextar Poly2 con Poly0 o con la capa de nitruro.	Anchor2	COL	52
Poly2	1.5 $\mu\text{m}$	Tercera capa de polisilicio grabable. Es la segunda capa estructural móvil.	Poly2	CPT	49
Agujeros en Poly2	1.5 $\mu\text{m}$	Grabado adicional sobre la tercera capa de polisilicio. Se colocan agujeros para permitir el paso del atacante químico en el proceso de remoción de las capas de sacrificio.	Hole2	CHT	1
<b>Capa de material/Trabajo</b>	<b>Grosor</b>	<b>Propósito</b>	<b>Nombre en la máscara</b>	<b>Clave CIF</b>	<b>Clave GDS</b>
Metal	0.52 $\mu\text{m}$	Capa de oro para acabado final adherida a la capa de Poly2.	Metal	CCM	51
Agujeros en Metal	0.52 $\mu\text{m}$	Grabado adicional sobre la capa de metal. Se colocan agujeros para permitir el paso del atacante químico en el proceso de remoción de las capas de sacrificio.	HoleMetal	CHM	48

En algunos casos a una sola capa de material del proceso de fabricación se le aplican trabajos que alteran su forma (dichos trabajos se representan en la herramienta de diseño de máscaras como capas aunque en

estricto sentido no son capas físicas del proceso de fabricación). Estos trabajos (capas) están identificados en la barra de proceso como agujeros (Hole) y postes (Dimples). Por ejemplo, la primera capa móvil de silicio policristalino del proceso PolyMumps, llamada Poly1, tiene además de la capa de material correspondiente, dos capas más (trabajos) que se aplican a ella y afectan su geometría y perfil: Hole1 y Dimples. La capa Dimples representa un paso de fabricación que graba a poca profundidad ( $0.75 \mu\text{m}$ ) las capas de sacrificio (sin atravesarla) con una serie de agujeros por los que escurrirá el depósito de la siguiente capa estructural para formar postes que sobresaldrán por la cara inferior de los elementos fabricados. El propósito principal de los Dimples es disminuir la superficie de contacto entre las capas de polisilicio Poly0 y Poly1 para evitar que se presente el fenómeno de adhesión estática entre placas (es recomendable incluirlos siempre en los diseños de Sistemas Microelectromecánicos que emplean placas suspendidas o anillos giratorios, a menos que la rigidez de la estructura sea lo suficientemente grande como para prevenir la adhesión estática). También resultan muy útiles en la reducción de la fricción entre elementos móviles creados con diferentes capas de material estructural que mantienen contacto físico. Otros usos frecuentes para los Dimples son: la creación de toques mecánicos para evitar que actuadores o sensores de placas paralelas horizontales entren en contacto eléctrico y generen un circuito corto (para ello se colocan en los extremos de la placa superior fuera del área de posible contacto con la placa inferior), como puntas de contacto para microinterruptores con actuación electrostática y para la obtención de perfiles en forma de  $L$  recostada necesarios en los actuadores electrostáticos tipo *scratch* o *pie de gecko*. Las reglas de diseño establecen las dimensiones mínimas de los Dimples, la separación mínima que debe existir entre ellos al formar arreglos y la distancia mínima que deben tener de los bordes de la capa en donde se realizan.

La capa Hole1 también representa un paso de fabricación que graba la capa de material estructural Poly1 con agujeros cuyo principal objetivo es permitir a los atacantes químicos (removedores) penetrar por debajo de la capa estructural para remover el material de sacrificio (normalmente óxido) a fin de liberar los elementos diseñados en Poly1. Los agujeros son colocados principalmente en placas de grandes dimensiones tales como: masas suspendidas o electrodos horizontales de placas paralelas. Existen agujeros para las capas Poly1, Poly2 y Metal. Las reglas de diseño establecen las dimensiones mínimas de los agujeros, la separación mínima que debe existir entre ellos al formar arreglos, la distancia mínima que deben tener de los bordes de la capa en donde se realizan y la forma en que los agujeros de capas estructurales superiores deben circunscribir a los agujeros de capas estructurales inferiores.

Dado que el formato GDS II está limitado a polígonos cerrados, los agujeros para liberación en las capas de polisilicio se describen también mediante polígonos cerrados. La figura 2.42 muestra un polígono formado por una secuencia continua de segmentos de línea que definen la periferia de una masa y los agujeros individuales de liberación sobre ésta, en otras palabras, define en una sola capa dos pasos del proceso de fabricación. Esta manera de formar elementos dentro de una máscara es muy difícil de editar si se requieren cambios; en su lugar es preferible el enfoque de múltiples capas para formar los elementos dentro de las máscaras, es decir, usar una capa por cada material o trabajo que el proceso defina. En la figura 2.43 se aprecia el uso de dos capas para definir la masa (Poly1) y sus agujeros de liberación (Hole1), arreglo que se puede mantener durante la fase de diseño para facilitar la realización de modificaciones. Sin embargo, para crear los archivos definitivos que se enviarán a fabricación será necesario fusionar Poly1 y Hole1 mediante una operación lógica XOR a fin de crear un sólo elemento en Poly1 que cuente con las características de ambas capas. Por supuesto la capa que se toma como referencia es Poly1 y existen restricciones del proceso de fabricación que marcan que los trazos en la capa Hole1 deben circunscribirse a regiones de Poly1.

## Elementos básicos en el diseño de MEMS

En esta sección se explicarán las máscaras de diversos elementos de uso frecuente en la creación de Sistemas Microelectromecánicos. Aún cuando los ejemplos están basados en el proceso PolyMumps, las técnicas para su creación son igualmente útiles en otros procesos de micromaquinado de superficie. Las máscaras de los elementos mostrados involucran la combinación de trabajos en los 8 niveles físicos del proceso PolyMumps

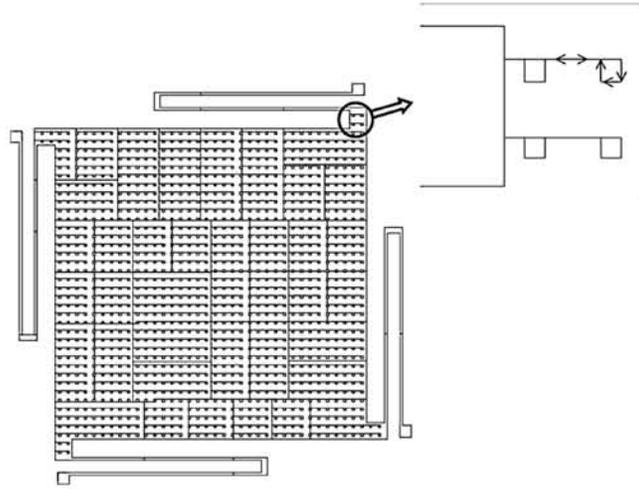


Figura 2.42: La periferia de la masa y los agujeros de liberación son descritos por una secuencia continua de segmentos de línea para formar polígonos cerrados en una sola capa.

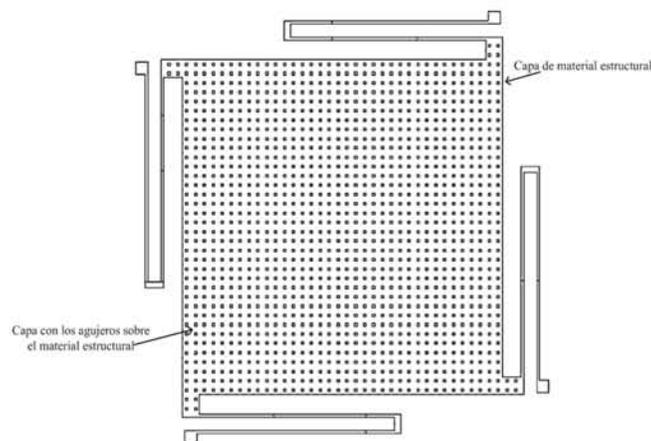


Figura 2.43: La masa es dibujada en una capa y los agujeros en otra, así, la descripción se logra en dos capas separadas.

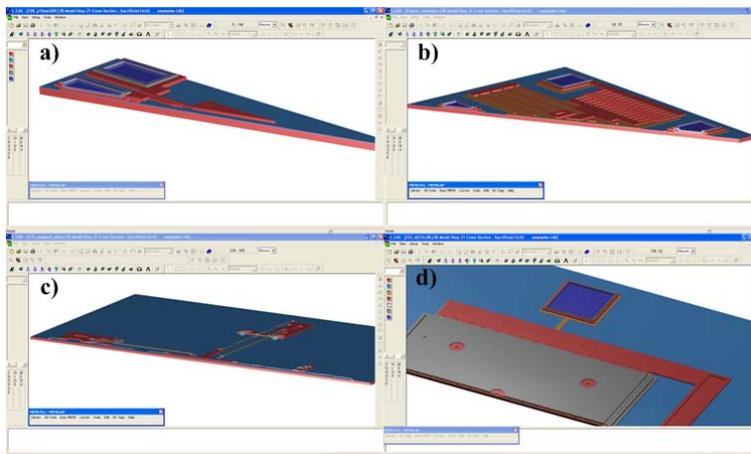


Figura 2.44: Cortes seccionales de varios Sistemas Microelectromecánicos: a) actuador electrotérmico, b) resonador, c) placa levadiza y d) capacitor variable.

que se representan en la herramienta de diseño de máscaras como 16 capas. La figura 2.44 muestra algunos cortes seccionales de diversos elementos empleados en la creación de MEMS.

Anclar o sujetar mecánicamente las capas de material entre sí y aterrizarlas eléctricamente es la función más elemental que debe realizarse en cualquier proceso de micromaquinado de superficie. Dado que el micromaquinado de superficie es un apilamiento alternado de dos tipos de materiales, estructural y de sacrificio, las capas estructurales o mecánicas son conectadas entre sí mediante la creación de agujeros (socavados) en el material de sacrificio; la existencia de estos agujeros en el material que separa los niveles estructurales (mecánicos) permite abrir vías de contacto físico entre una capa recién depositada y la capa por debajo del material de separación. La figura 2.45 muestra imágenes de capas del proceso PolyMumps ancladas entre sí. En el proceso PolyMumps, la conexión entre niveles estructurales se representa en la herramienta de diseño de máscaras (L-Edit) mediante tres capas: Anchor1, Poly1-Poly2 Via y Anchor 2, dependiendo de los niveles que serán conectados entre sí se utiliza una capa u otra: Anchor1 para conectar Poly1 con Poly0, Poly1-Poly2 Via para conectar Poly2 con Poly1 y Anchor2 para conectar Poly2 con Poly0 (siempre y cuando no exista capa de Poly1 interpuesta).

La figura 2.46 muestra la sección transversal de un poste que se extiende desde Poly0 hasta la capa de metal en el proceso PolyMumps. Nótese que los postes pueden crearse haciendo la capa inferior más angosta que la superior. Al hacer la capa inferior más angosta se asegura que el poste creado tenga el menor ancho posible. En el proceso PolyMumps existen capas de sacrificio (óxido) entre cada par de capas de polisilicio, sin embargo entre la capa de metal y la tercera capa de polisilicio no existe material alguno de separación, razón por lo que éstas dos capas quedan conectadas entre sí. Si en el diseño se decidiera no colocar la tercera capa de polisilicio es recomendable no colocar tampoco la capa de metal.

La figura 2.47 muestra la máscara, la vista tridimensional y el corte seccional de un cojinete de contacto, el cual se crea a partir del apilamiento de capas de material estructural en contacto directo entre sí. Estos cojinetes son útiles para las conexiones de ingreso y extracción de señales eléctricas de control y registro (ya sea a través de puntas de prueba o conductores debidamente soldados). Para crear líneas de conexión eléctrica entre distintos elementos dentro de un Sistema Microelectromecánico, se pueden utilizar ls mismos

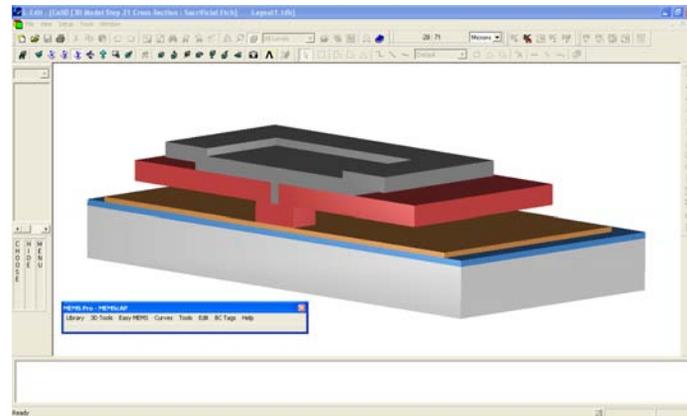


Figura 2.45: Simulación de capas de polisilicio ancladas entre sí.

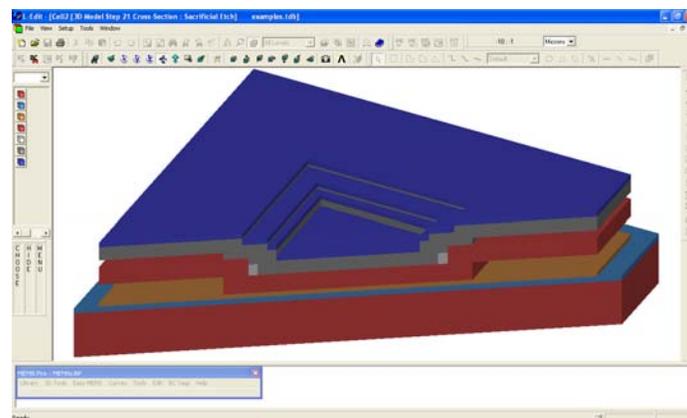


Figura 2.46: Visualización del corte seccional de un poste creado en MemPro. Intencionalmente se violan las reglas de diseño para compactar el perfil del poste.

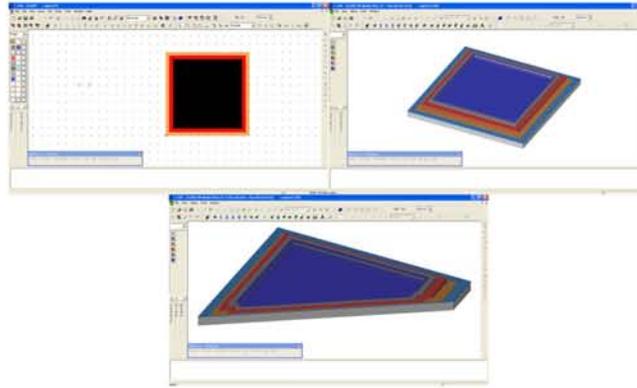


Figura 2.47: Cojinete de contacto. Elemento indispensable en el diseño de Sistemas Microelectromecánicos para ingresar y extraer señales eléctricas mediante puntas de prueba o conductores soldados.

apilamientos de capas que para el caso de los cojinetes, aunque con un ancho mucho menor. Las dimensiones mínimas recomendables para los cojinetes de contacto es de  $100 \times 100 \mu\text{m}$ .

Otro elemento básico de gran utilidad en los Sistemas Microelectromecánicos son los anillos giratorios. Rondanas de material estructural con un eje central de giro que son la base de engranes, levas, motores electrostáticos y palancas. El eje de giro también evita que el anillo de material estructural salga de su posición. A continuación se describe un procedimiento general para crear este elemento en PolyMumps:

1. Con la capa de Poly0 dibújese una figura geométrica que rebase las dimensiones del anillo giratorio (creado con las capas Poly1, Poly2 y Metal). Si se trata de un anillo con eje fuera del centro geométrico, es recomendable que la figura en la capa Poly0 cubra toda la región de barrido del anillo en movimiento.
2. Con la capa de Poly1 dibújese una figura geométrica circunscrita a la figura en la capa de Poly0 y colóquese un agujero circular en el lugar en dónde estará el eje de giro. Esta será la capa estructural del anillo giratorio.
3. Sobre esta figura geométrica deberán colocarse con la capa Hole1, una serie de agujeros equidistantes que cubran toda su área, ello con el fin de crear vías para que el atacante químico del socavado pueda actuar por debajo del anillo y remover las capas de sacrificio.
4. El diseñador tendrá la opción de colocar postes a lo largo y ancho de esta figura geométrica con la capa Dimples.
5. En la misma capa de Poly1 dibújese un círculo circunscrito y equidistante del borde del agujero del eje de giro, para unirlo con la capa de Poly0 dibújese un círculo circunscrito y equidistante de su borde empleando la capa Anchor1. Este círculo anclado de Poly1 será la primera capa del eje de giro del anillo.
6. Con la capa de Poly2 dibújese un círculo que circunscriba de forma equidistante a sus bordes el agujero circular de la figura geométrica giratoria hecha en Poly1, es decir, deberán coincidir los centros geométricos de los círculos en la capa Poly1 y Poly2, pero éste último deberá rebasar las dimensiones del agujero circular dispuesto en la figura giratoria. Para unir este círculo con la capa de Poly1 dibújese otro círculo con la capa Poly1-Poly2 via que circunscriba (rodee) al círculo hecho con la capa Anchor1.

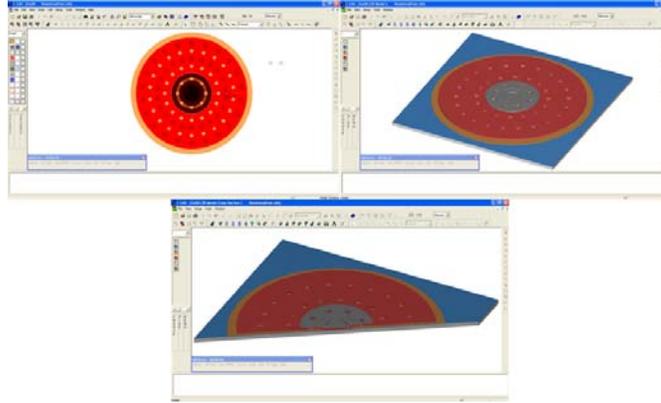


Figura 2.48: Anillo rotacional. Elemento básico para la creación de engranes, motores electrostáticos, levas y palancas.

En todo el procedimiento anterior se deben respetar las llamadas reglas de diseño del proceso PolyMumps (la definición e importancia de las reglas de diseño se abordarán en la siguiente sección y en particular las reglas de diseño del proceso PolyMumps se tratan en el apéndice 1). La figura 2.48 muestra la máscara, la vista tridimensional y el corte seccional de un anillo giratorio circular con eje de giro coincidente con el centro geométrico. El área del anillo giratorio está cubierta por agujeros y dispone de postes en su cara inferior (Dimples).

El siguiente elemento de gran importancia en el diseño de MEMS son las vigas voladas y puentes. En PolyMumps pueden crearse vigas voladas o puentes a partir de una sola capa de silicio policristalino o empleando las dos capas estructurales móviles de silicio policristalino disponibles más la capa de metal. El uso de una capa, dos o tres está en función de la altura (o grosor, según se vea) deseada en la estructura. A continuación se describe un procedimiento general para crear estos elementos en PolyMumps:

1. Este paso es opcional. En la capa Poly0 dibújese una figura geométrica que rebase las dimensiones de la viga volada y su base.
2. Con la capa de Poly1 dibújese el perfil superior de la viga volada. Normalmente se trata de un rectángulo con alguna de sus dimensiones mucho mayor que la otra.
3. En uno de los extremos de la viga trazada con Poly1, dibújese un cuadrado grande (que al menos duplique la dimensión más pequeña del rectángulo que forma la viga) también con Poly1, asegúrese que el cuadrado y la viga estén en contacto o traslapados (ambas figuras pueden fusionarse con una operación lógica de conjunción en L-Edit). Este cuadrado será parte de la base de la viga.
4. Con la capa Anchor1 dibújese un cuadrado inscrito en el cuadrado de la base de la viga volada. Esto anclará el cuadrado base de la viga a la capa Poly0 o al sustrato.
5. Hasta aquí, se tiene una viga volada con una sola capa de material estructural. Si se desean agregar más capas simplemente cópiese el trazo de la viga y su base hecho con Poly1, trasládese a Poly2 (esta operación puede hacerse fácilmente en L-Edit) y traslápense de forma coincidente ambas figuras.
6. Con la capa Poly1-Poly2 Via dibújese una figura que siga y rebase por  $2 \mu\text{m}$  el contorno de la viga volada y la base trazadas con Poly2. Esta figura trazada en Poly-Poly2 Via debe cubrir por completo las vigas y bases trazadas en Poly1 y Poly2.

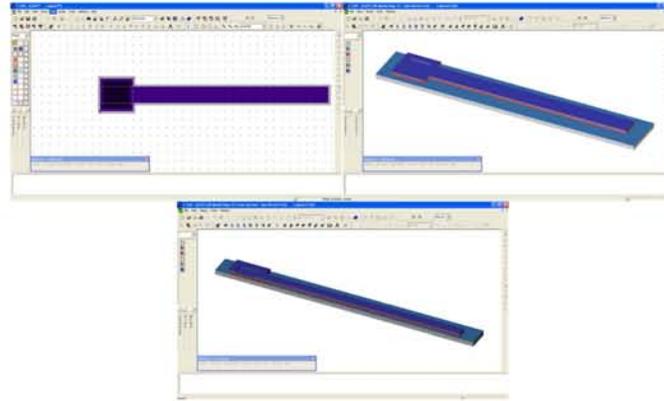


Figura 2.49: Viga volada. Elemento básico para la creación de resortes, masas suspendidas, actuadores electrostáticos, actuadores electrostáticos y microinterruptores, entre otros.

7. Hasta aquí se tiene una viga volada con dos capas de material estructural. Si se desea agregar la capa de metal simplemente cópiese el trazo de la viga y su base hecho con Poly2, trasládese a la capa Metal y traslápense de forma coincidente ambas figuras.
8. Hasta aquí se tiene una viga volada con tres capas de material estructural. Si se desea transformarla en un puente, simplemente agréguese otro cuadrado base en el extremo libre de la viga volada con las mismas dimensiones y capas que el cuadrado ya existente.

El paso número seis de este procedimiento viola deliberadamente las reglas de diseño del proceso PolyMumps con el fin de obtener una viga continua en sus perfiles laterales. En la figura 2.49 se muestra la máscara, vista tridimensional y el corte seccional de una viga volada. A partir de las vigas voladas se pueden crear resortes, masas suspendidas, actuadores electrostáticos y sensores capacitivos de placas paralelas, actuadores electrostáticos, bobinas, varactores, microinterruptores y todo lo que la imaginación permita.

El último elemento que se tocará son las bisagras. Las bisagras fueron propuestas inicialmente por K. S. Pister en 1992. Estos elementos permiten que una placa gire alrededor de un eje paralelo al sustrato (de forma más general, las bisagras unen dos placas y permiten el giro de dichas placas sobre un eje paralelo al plano que las contiene). Aquí sólo se mostrará un tipo de bisagras pegadas al sustrato que permiten a una placa de material estructural girar sobre un eje paralelo al sustrato. A continuación se describe un procedimiento general para crear estos elementos en PolyMumps:

1. Con la capa Poly1 dibújese una placa rectangular cuyas dimensiones lineales se encuentren en las decenas de  $\mu\text{m}$ .
2. Siguiendo uno de los lados de la placa, dibújense agujeros rectangulares con la capa Hole1 regularmente espaciados entre sí, que dejen tan sólo una banda de dos  $\mu\text{m}$  en el extremo de la placa. Las dimensiones mínimas recomendables para dichos agujeros son  $18 \times 18 \mu\text{m}$ .
3. Con la capa Poly0 dibújense rectángulos (o cuadrados, según sean las dimensiones elegidas para el agujero) al interior de los agujeros a una distancia de  $4 \mu\text{m}$  del contorno.
4. Ahora dibújense con la capa Poly0 rectángulos de las mismas dimensiones que los anteriores y colóquense fuera de la placa de forma simétrica a los inscritos en los agujeros.

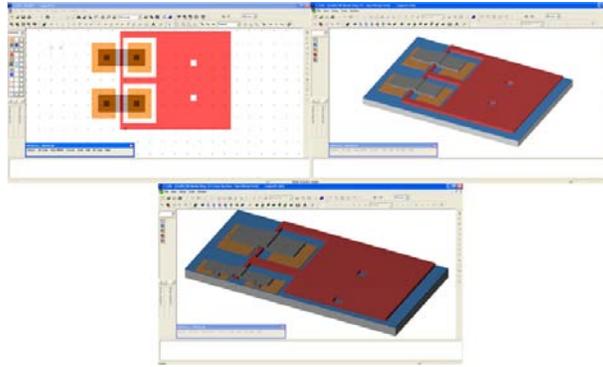


Figura 2.50: Bisagra. Elemento que permite a una placa de polisilicio girar alrededor de un eje paralelo a la placa de sustrato.

5. Con la capa Poly2 dibújense rectángulos que conecten longitudinalmente los rectángulos hechos con Poly0 (uno colocado dentro de los agujeros con otro colocado fuera de la placa). Estos rectángulos deben ser menores en  $5 \mu\text{m}$  a los rectángulos hechos con Poly0 en tres de sus lados, el cuarto lado debe extenderse para conectar la correspondiente pareja de rectángulos hechos en Poly0.
6. Con la capa Anchor2 dibújense rectángulos que se inscriban en los rectángulos hechos con Poly0, deben estar inmersos al menos  $10 \mu\text{m}$  a partir de los bordes de los rectángulos creados con Poly0. Las dimensiones mínimas recomendables para estos trazos son  $4 \times 4 \mu\text{m}$ . Estas figuras representan el anclaje de la capa Poly2 en la capa Poly0.

En la figura 2.50 se muestra la máscara, vista tridimensional y el corte seccional de una bisagra.

### Reglas de diseño

El término reglas de diseño proviene originalmente de la industria microelectrónica. Éstas reglas son un medio formal de comunicación entre el ingeniero de proceso y el ingeniero de diseño. Para la industria de la microelectrónica, las reglas de diseño son las reglas necesarias para que a partir de las máscaras se obtenga una producción óptima (dispositivos funcionales frente a dispositivos inservibles) en un área tan pequeña como sea posible sin comprometer la confiabilidad de los circuitos. Las reglas de diseño para la fabricación de MEMS también son un medio formal de comunicación entre el ingeniero de proceso y el ingeniero de diseño. Los procesos de fabricación de MEMS son similares a los de la microelectrónica; sin embargo, debido a las características de movilidad de los MEMS los procesos pueden llegar a ser muy diferentes, incluso los procesos de fabricación de MEMS normalmente cuentan con una gama de funcionalidades y aplicaciones mucho mayor.

Aunque la funcionalidad de un Sistema Microelectromecánico y su confiabilidad están muy ligadas al proceso de diseño y no pueden ser cubiertas por completo con la sola aplicación de las reglas de diseño, el cumplimiento de éstas es una condición necesaria para el buen funcionamiento del Microsistema elaborado. Las reglas de diseño son, para cualquier proceso de fabricación de Sistemas Microelectromecánicos, las reglas mínimas necesarias para la correcta elaboración de las máscaras que permitirán obtener MEMS con defectos mínimos en las dimensiones mínimas permisibles.

Las máscaras para el diseño en microelectrónica y Sistemas Microelectromecánicos son muy complejas y regularmente involucran un gran número de capas con geometrías e información. La definición de las características de los Sistemas Microelectromecánicos están en función de ésta información normalmente referida

a los pasos de agregado y remoción empleados en el proceso de fabricación. Por lo tanto, las reglas de diseño son en realidad una forma esquemática de guiar al ingeniero de diseño en el uso del proceso de fabricación para lograr la funcionalidad deseada en sus diseños y una forma de abstraer la complejidad funcional de los Microsistemas a esquemas geométricos fácilmente reproducibles.

Otro factor importante en la formulación de las reglas de diseño es el límite dimensional de la transferencia de patrones, pues ello fija el tamaño del elemento más pequeño que puede incorporarse en un Sistema Microelectromecánico, esta limitación es conocida como tamaño característico o dimensión crítica (CD). Los límites de la transferencia de patrones de cualquier tecnología de fabricación se expresan en las reglas de diseño mediante el ancho de línea mínimo y el espaciado mínimo entre elementos.

Dado que crear patrones uniformes es una técnica recurrente en muchas tecnologías de fabricación de MEMS deben tenerse en cuenta los efectos ópticos que tiene la creación de grandes arreglos de estructuras similares. Por ejemplo, la fabricación de un acelerómetro en un proceso de micromaquinado superficial generalmente involucra la creación de un gran banco de electrodos (dedos) para formar los actuadores electrostáticos con forma de peine. Por la naturaleza óptica del proceso de transferencia de patrones (litografía) al grabar una estructura como ésta se presentan distorsiones (efecto de combado) en los extremos del banco de electrodos. Este problema puede paliarse parcialmente, si se colocan electrodos adicionales en los extremos del banco para asegurar que los electrodos funcionales sean fabricados sin distorsiones.

Debido a que las máscaras de diseño de Sistemas Microelectromecánicos son con frecuencia grandes y complejas sábanas que requieren de una revisión automática para asegurar el cumplimiento de las reglas de diseño. El concepto y desarrollo de la revisión automática de las reglas de diseño se originó en la industria microelectrónica a finales de la década de 1970 y principios de la de 1980 durante su primer gran auge. Originalmente usadas para la verificación de las reglas de diseño en las máscaras de circuitos VLSI las técnicas desarrolladas durante esos años para la inspección automática de grandes arreglos de celdas repetidas han sido heredadas por los Sistemas Microelectromecánicos. Las máscaras para microelectrónica se desarrollan generalmente con geometría Manhattan, la cual no incluye ángulos arbitrarios ni curvas de tipo alguno. Sin embargo, en el campo de los MEMS es frecuente que las formas geométricas no cumplan con esta geometría, razón por la que la mayoría de las herramientas de diseño para MEMS incorporan mecanismos de revisión y conversión. En la actualidad la mayoría de las herramientas de diseño de máscaras para la fabricación de MEMS incorporan módulos de verificación de las reglas de diseño. Dichas herramientas dividen los resultados de la revisión de las reglas de diseño en dos categorías:

1. Errores: violaciones a las reglas de diseño cuya corrección es crítica para evitar malos funcionamientos.
2. Advertencias: violaciones a las reglas de diseño que requieren de la evaluación del diseñador para decidir sobre su corrección.

La figura 2.51 muestra una revisión automática de las reglas de diseño hecha con L-Edit (usando la barra de herramientas de MEMSPro). La máscara se revisa para encontrar errores en la aplicación de las reglas de diseño, si se encuentran dichos errores son resaltados en la máscara para auxiliar al diseñador en su proceso de localización y corrección de las violaciones a las reglas de diseño. El ambiente de verificación de las reglas de diseño contiene herramientas de navegación para desplazarse a través de la máscara hacia cada una de las violaciones.

### Componentes estándar

Los componentes estándar son otro concepto heredado del mundo de la microelectrónica (en microelectrónica son conocidos como celdas estándar). Los componentes genéricos generalmente han sido fabricados y probados con antelación a su inclusión en librerías para su uso en el diseño de nuevos Sistemas Microelectromecánicos. Idealmente, un diseñador debe ser capaz de implantar una porción significativa de cualquier

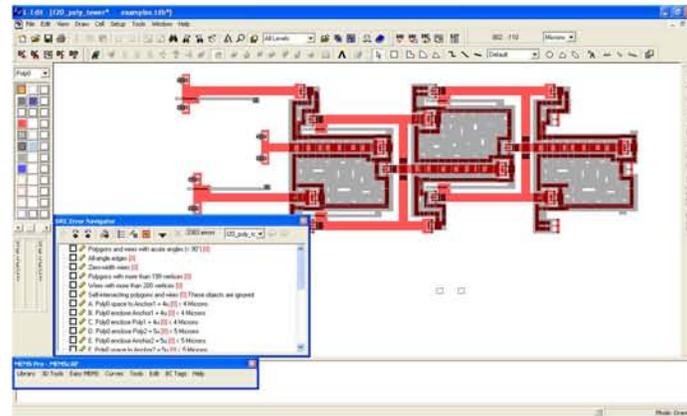


Figura 2.51: Revisión automática de las reglas de diseño sobre una máscara creada con L-Edit. La ventana de revisión de errores señala cada una de las violaciones y conduce al diseñador hasta la sección de la máscara en dónde se encuentra la falla.

diseño mediante la colocación y conexión de éstos componentes estándar y debe realizar las simulaciones de la respuesta del nuevo sistema empleando los modelos existentes. Este tipo de aproximación al desarrollo de nuevos sistemas reduce enormemente el riesgo y tiempo inherentes al diseño de nuevos productos.

Aunque en principio la validez del uso del concepto de celdas estándar para el diseño de MEMS se complica por la amplitud de las aplicaciones de los Sistemas Microelectromecánicos, es posible disponer de elementos constitutivos básicos que faciliten en buena medida los procesos de diseño. Muchos programas de diseño asistido por computadora para MEMS ya emplean el concepto de celda estándar de manera práctica. En la figura 2.52 se muestran las celdas estándar disponibles en MEMSPRO y en la figura 2.53 se muestra un sistema hecho completamente a partir de elementos estándar.

Las librerías de componentes estándar están formadas por elementos básicos que pueden tomarse como bloques de construcción para sistemas más complejos, tales como:

1. Actuadores (brazos electro térmicos, peines electrostáticos, motores electrostáticos, entre otros).
2. Elementos eléctricos (cojinetes, líneas de conducción y microinterruptores).
3. Elementos mecánicos de conexión (resortes y bisagras).
4. Elementos mecánicos giratorios (anillos y levas).

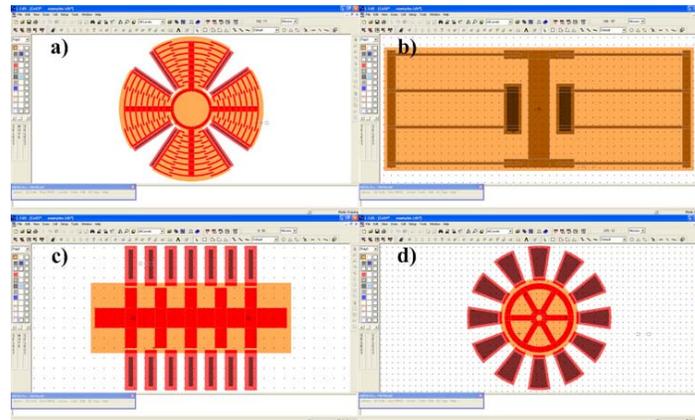


Figura 2.52: Conjunto de celdas estándar en PolyMumps: a) actuador electrostático rotacional en forma de peine, b) suspensión en forma de cangrejo, c) actuador electrostático lineal y d) motor electrostático.

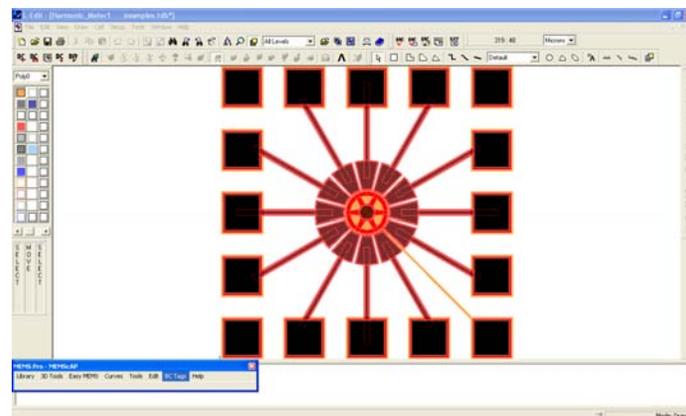


Figura 2.53: Motor electrostático hecho completamente a partir de celdas estándar disponibles en MemsPro.

## Parte II

# Principios físicos del funcionamiento de los Sistemas Microelectromecánicos



# Capítulo 3

## Teoría de elasticidad

El silicio cristalino tiene propiedades mecánicas que en algunos aspectos son mejores que las del acero y, al mismo tiempo, se trata del semiconductor más usado en la industria de la electrónica, para el diseño de componentes de diversa índole. Las propiedades mecánicas del silicio maquinado en volumen están modeladas en su totalidad por la teoría de la elasticidad dentro de un rango de temperatura considerable. Aunque se ha especulado acerca de que las características mecánicas del silicio pueden cambiar cuando la geometría de las estructuras se encuentra en la escala micrométrica, en realidad no existen cambios significativos en dichas propiedades. Por esta razón, las propuestas de diseños que se hacen a lo largo de este trabajo, se harán bajo la consideración de que las propiedades mecánicas de las microestructuras de silicio son idealmente elásticas. Esta asunción significa que si la deformación producida por fuerzas externas sobre una estructura de silicio no excede un cierto límite, dicha deformación desaparecerá una vez que las fuerzas dejen de actuar sobre la estructura.

Dado que un material con estructura cristalina como el silicio es anisotrópico por definición, sus propiedades mecánicas son dependientes de la orientación de los cristales que lo constituyen y las relaciones entre los parámetros mecánicos son modeladas de forma adecuada por ecuaciones tensoriales. Esto lleva a expresiones analíticas un tanto complejas que obligan a buscar formas de simplificarlas sin pérdida de generalidad, por esta razón, en el análisis mecánico de las estructuras creadas con silicio, se asumirá que el material es homogéneo, es decir, isotrópico. Debe aclararse que esta consideración no introduce errores significativos en los resultados analíticos frente a la evidencia experimental reportada en múltiples artículos técnicos. De cualquier modo, los resultados en general son suficientemente exactos para llevar a cabo el proceso de optimización de los diseños y como en la mayoría de los casos, el desempeño de los sensores mecánicos se ve afectado de forma mucho más significativa por la variación de los parámetros geométricos y mecánicos determinados por el control del proceso más que por las simplificaciones y aproximaciones. De cualquier modo, en la actualidad se dispone de herramientas computacionales de simulación de fenómenos físicos por el método de análisis de elemento finito, en las que es posible obtener resultados del comportamiento de las estructuras y materiales ya sean anisotrópicos o isotrópicos de forma relativamente simple, dichos resultados pueden compararse con los resultados analíticos obtenidos a partir de las ecuaciones y, eventualmente, con la evidencia experimental.

Dado que las estructuras basadas en vigas y diafragmas son importantes para los Sistemas Microelectromecánicos (MEMS), el análisis de su comportamiento mecánico basado en la teoría de la elasticidad será la primera parte de la exposición de los principios de funcionamiento.

### 3.1. Esfuerzo y deformación unitaria

#### 3.1.1. Esfuerzo

De acuerdo con la teoría de la elasticidad, las fuerzas externas actuando sobre un cuerpo sólido producen fuerzas internas entre las porciones del cuerpo y provocan una deformación [17]. Si las fuerzas no exceden

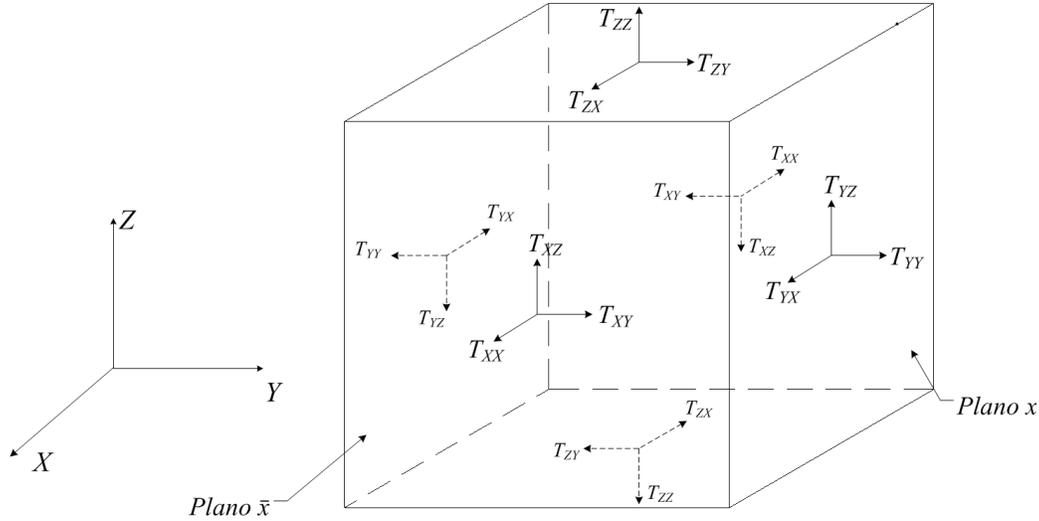


Figura 3.1: Componentes del tensor de esfuerzos.

de un cierto límite, la deformación desaparece una vez que las fuerzas dejan de actuar. Para describir las fuerzas internas, el tensor de esfuerzo es la forma más adecuada de hacerlo. Matemáticamente, el esfuerzo es un tensor de rango dos, el cual tiene nueve componentes expresados por la siguiente matriz:

$$T = \begin{pmatrix} T_{XX} & T_{XY} & T_{XZ} \\ T_{YX} & T_{YY} & T_{YZ} \\ T_{ZX} & T_{ZY} & T_{ZZ} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

En donde las tres componentes de la diagonal principal de la matriz, son llamados los esfuerzos normales y las seis componentes restantes se denominan esfuerzos cortantes. Para ilustrar la definición de los componentes del tensor de esfuerzos obsérvese la figura 3.1.

Las seis caras del cubo se denotan con:  $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$ , de acuerdo con las normales de cada cara. La testa sobre los identificadores de algunos planos, denotan un signo negativo.  $T_{ij}$  denota un componente del tensor de esfuerzo y se define como la fuerza en la dirección específica  $j$  (el segundo subíndice) sobre una unidad de área en una superficie específica  $i$  (el primer subíndice) del cubo elemental. Los signos de los componentes del tensor están determinados por la dirección de la fuerza relativa a la normal del plano. Las componentes del tensor de esfuerzo generados por las fuerzas tangenciales sobre los planos  $x, y, z$  están definidos como positivos, en tanto que las debidos a fuerzas tangenciales actuando sobre los planos  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  son negativos. Por otra parte, para el plano  $\bar{y}$ , los componentes del esfuerzo provocados por una fuerza en la dirección de  $\bar{y}$  son positivos pero los provocados por una fuerza en la dirección  $y$  son negativos. Del mismo modo los componentes del esfuerzo provocados por fuerzas tangenciales en las direcciones  $\bar{x}$  y  $\bar{z}$  sobre el plano  $\bar{y}$  son definidas como positivas y aquellas debidas a fuerzas en las direcciones  $x$  y  $z$  sobre el mismo plano, son definidas negativas.

De acuerdo con la condición de balance de fuerzas, la componente  $T_{XX}$  en los dos planos opuestos y paralelos  $x$  y  $\bar{x}$  deben ser iguales en magnitud y signo, y del mismo modo ocurre con  $T_{YY}$  y  $T_{ZZ}$ . Por otra parte se tiene que la condición de balance de torques se expresa como:

$$T_{XY} = T_{YX}, T_{YZ} = T_{ZY}, T_{XZ} = T_{ZX} \quad (3.2)$$

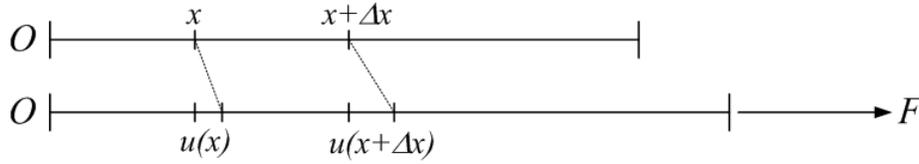


Figura 3.2: Deformación de un material unidimensional.

Esto significa que la matriz de tensores de esfuerzos  $T$  es simétrica y tiene sólo seis componentes independientes. Esto permite reescribir la ecuación 3.1 del siguiente modo.

$$T = \begin{pmatrix} T_{XX} & T_{XY} & T_{XZ} \\ T_{XY} & T_{YY} & T_{YZ} \\ T_{XZ} & T_{YZ} & T_{ZZ} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

### 3.1.2. Deformación unitaria

Bajo la acción de los esfuerzos se producen tensiones (físicamente apreciables como deformaciones) al interior de las estructuras[18]. Las cuales para el caso de un material unidimensional pueden apreciarse en la figura 3.2.

Si en un material unidimensional se denota con  $x$  a la posición original de una marca identificada sobre el material y con  $u(x)$  se denota al desplazamiento que experimentará dicha marca, debido a la elongación relativa del material bajo la acción de una fuerza, entonces para una posición  $x + \Delta x$  el desplazamiento será  $u(x + \Delta x)$  y la deformación unitaria en el material unidimensional tendrá un único componente representado por:

$$e = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.4)$$

Para un material tridimensional, la deformación que experimenta dicho material se puede apreciar en la figura 3.3.

Los componentes del desplazamiento para un punto  $\mathbf{r}(x, y, z)$  son  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  y  $w(x, y, z)$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Del mismo modo para un punto  $\mathbf{r}'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  sus componentes de desplazamiento son  $u + \Delta u$ ,  $v + \Delta v$  y  $w + \Delta w$ , respectivamente (las tres son funciones de  $x$ ,  $y$  y  $z$ ). Así, el desplazamiento incremental entre el punto  $\mathbf{r}$  y el punto  $\mathbf{r}'$  puede expresarse como:

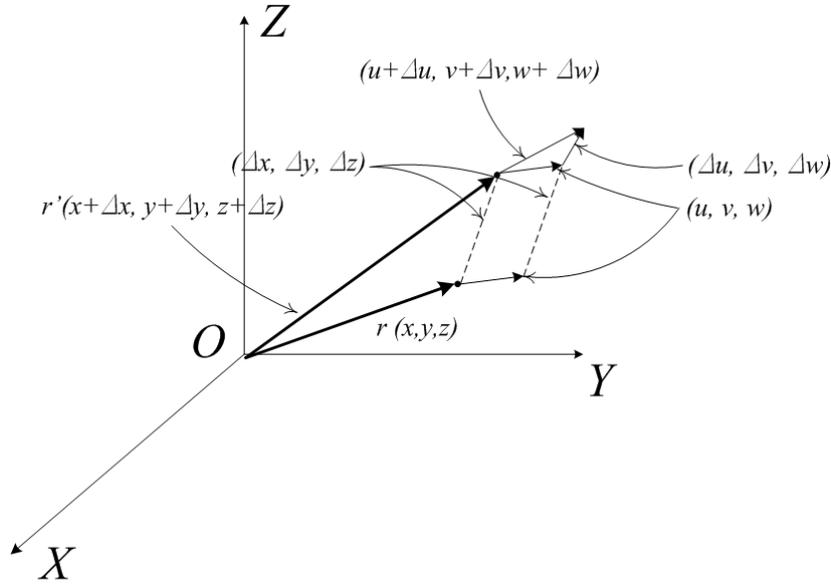


Figura 3.3: Deformación en un material tridimensional.

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Para un cuerpo rígido rotando alrededor del origen  $O$  de un sistema de coordenadas con una velocidad angular  $\bar{\omega}$ , la velocidad en el extremo final del vector  $\bar{r}(x, y, z)$  es  $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ . Recordando que  $\nabla \times \bar{v} = \nabla \times \bar{\omega} \times \bar{r} = (\nabla \cdot \bar{r}) \cdot \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \nabla) \bar{r} = 3\bar{\omega} - \bar{\omega} = 2\bar{\omega}$ , se tiene que  $\nabla \times \bar{v} = 2\bar{\omega}$ . Por otra parte, el desplazamiento angular  $\bar{\Phi} = \bar{\omega} \Delta t$  puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \\ &= \Phi_X \hat{i} + \Phi_Y \hat{j} + \Phi_Z \hat{k} \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde:

$$\Phi_X = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \Phi_Y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \Phi_Z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.9)$$

Con lo cual el último término a la derecha en la ecuación 3.5 queda expresado como:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Phi_Z & \Phi_Y \\ \Phi_Z & 0 & -\Phi_X \\ -\Phi_Y & \Phi_X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Además, si está restringido el movimiento rotacional del cuerpo rígido, el último término a la derecha en la ecuación 3.5 es cero y dicha ecuación queda expresada como:

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

La matriz de 3 x 3 presente en la ecuación se conoce como tensor de deformación unitaria y los elementos en la diagonal de la matriz son los componentes normales del tensor de deformación unitaria:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.11)$$

Las tres componentes normales del tensor de deformación unitaria denotadas por las ecuaciones 3.11 representan las elongaciones relativas de la estructura a lo largo de los tres ejes coordenados. Los seis componentes del tensor fuera de la diagonal se conocen como deformaciones unitarias cortantes:

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = e_{yx}, e_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = e_{zy}, e_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = e_{xz} \quad (3.12)$$

Con lo cual la ecuación 3.10 queda como:

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = (e) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

donde  $(e)$  representa el tensor de deformación unitaria, un tensor de rango dos. Dado que el tensor de deformación unitaria es un tensor simétrico con sólo seis componentes independientes, puede simplificarse la notación para representarlo:

$$e_1 = e_{xx}, e_2 = e_{yy}, e_3 = e_{zz}, e_4 = e_{yz} = e_{zy}, e_5 = e_{zx} = e_{xz}, e_6 = e_{xy} = e_{yx} \quad (3.14)$$

y expresarlo del siguiente modo:

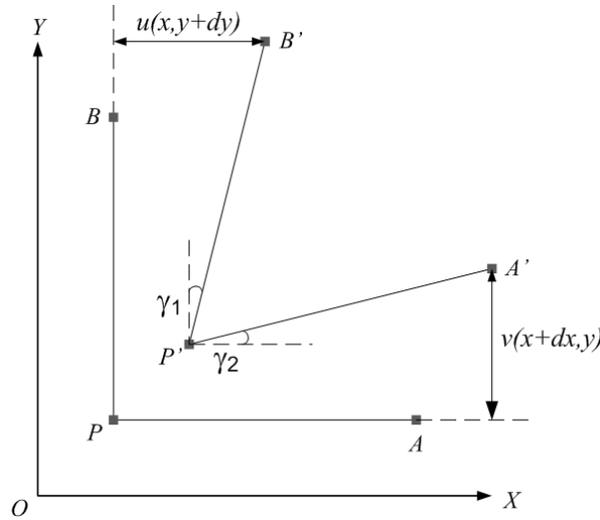


Figura 3.4: Deformación angular debido a esfuerzos cortantes.

$$(e) = \begin{pmatrix} e_1 & e_6 & e_5 \\ e_6 & e_2 & e_4 \\ e_5 & e_4 & e_3 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Las tres componentes de la deformación unitaria están relacionadas con la distorsión angular del material. Esto puede apreciarse si se considera el ángulo recto  $\widehat{APB}$  cuyos segmentos  $\overline{PA}$  y  $\overline{PB}$  son identificados con  $dx$  y  $dy$ , respectivamente, en el plano  $XY$  y se asume que debido a la deformación que experimenta dicha estructura los puntos  $A$ ,  $P$  y  $B$  son llevados hacia nuevas posiciones llamadas  $A'$ ,  $P'$  y  $B'$ , respectivamente (véase la figura 3.4). Si  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  son los desplazamientos en las direcciones  $x$  y  $y$  para el punto  $P(x, y)$ . El desplazamiento del punto  $A$  en la dirección  $y$  es  $v(x + dx, y) = v(x, y) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx$  y el desplazamiento del punto  $B$  en la dirección  $x$  está dado por  $u(x, y + dy) = u(x, y) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy$ .

El segmento de línea  $\overline{P'A'}$  está inclinada lejos del segmento original  $\overline{PA}$  un ángulo:

$$\gamma_1 = \frac{v(x + dx, y) - v(x, y)}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.16)$$

Del mismo modo, el segmento de línea  $\overline{P'B'}$  está inclinada lejos del segmento original  $\overline{PB}$  un ángulo:

$$\gamma_2 = \frac{u(x, y + dy) - u(x, y)}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.17)$$

Además, el ángulo recto inicial  $\widehat{APB}$  se ve afectado por el ángulo total de deformación:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.18)$$

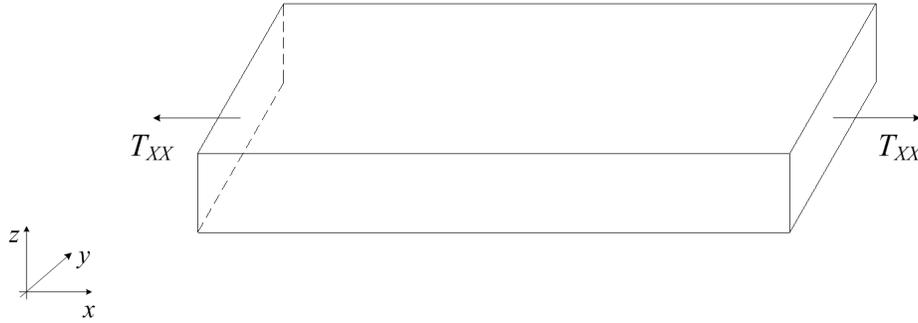


Figura 3.5: Un elemento con forma de paralelepípedo sometido a un esfuerzo normal.

Tomando en cuenta la ecuación 3.12, se tiene que  $e_6 = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$ . Esto significa que la deformación unitaria  $e_6 = e_{xy}$  es la mitad de la distorsión angular. Los componentes  $e_4$  y  $e_5$  tienen significados geométricos similares en los planos  $YZ$  y  $XZ$ , respectivamente.

En mecánica de materiales es frecuente encontrar la definición del tensor de deformación unitaria como:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Así se tiene que  $\varepsilon_1 = e_1$ ,  $\varepsilon_2 = e_2$ ,  $\varepsilon_3 = e_3$ ,  $\varepsilon_4 = 2e_4$ ,  $\varepsilon_5 = 2e_5$  y  $\varepsilon_6 = 2e_6$ . Con lo cual la componente de deformación,  $\varepsilon_6 = (\gamma_1 + \gamma_2)$ , queda definida exactamente como la distorsión angular entre el plano  $ZX$  y el plano  $ZY$  en el material en lugar de quedar expresada como la mitad de la distorsión angular, y esto se extiende al resto de los componentes.

### 3.1.3. Ley de Hooke

Las relaciones lineales entre esfuerzo y deformación unitaria se conocen bajo el nombre genérico de Ley de Hooke [19]. Para ejemplificar esto en materiales homogéneos, se puede considerar un componente elemental con forma de paralelepípedo cuyas aristas sean paralelas a los sistemas coordenados como se muestra en la figura 3.5.

Si los lados opuestos del paralelepípedo que son perpendiculares al eje  $x$  son sujetos a la acción de un esfuerzo normal  $T_{XX}$ , la elongación relativa de un elemento está dado por:

$$e_{xx} = \frac{T_{XX}}{E} \quad (3.20)$$

donde  $E$  es una constante intrínseca de los materiales conocida como módulo de Young.  $E$  normalmente es mucho mayor que los esfuerzos permisibles, tanto así que la elongación  $\varepsilon_{ii}$  usualmente es menor que 0.01. Por lo tanto, la superposición puede ser usada para modelar las deformaciones que se presentan en la mayoría de las aplicaciones, sin provocar errores significativos. La extensión en la dirección  $x$  está siempre acompañada por contracciones en las direcciones laterales (es decir, en las direcciones  $y$  y  $z$ ):

$$e_{yy} = -\nu e_{xx}, \quad e_{zz} = -\nu e_{xx} \quad (3.21)$$

donde  $\nu$  es otra constante intrínseca de los materiales llamada razón o constante de Poisson. Si el elemento está sujeto a la acción de esfuerzos normales  $T_{XX}$ ,  $T_{YY}$  y  $T_{ZZ}$ , entonces los componentes de la deformación unitaria resultante se obtienen a partir de las ecuaciones 3.20 y 3.21 mediante el principio de superposición.

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{[T_{XX} - \nu(T_{YY} + T_{ZZ})]}{E} \\ e_{yy} &= \frac{[T_{YY} - \nu(T_{XX} + T_{ZZ})]}{E} \\ e_{zz} &= \frac{[T_{ZZ} - \nu(T_{XX} + T_{YY})]}{E} \end{aligned} \quad (3.22)$$

En las ecuaciones 3.22 las relaciones entre los componentes de la deformación unitaria normal y los componentes del esfuerzo normal están completamente definidas por las constantes intrínsecas de los materiales: módulo de Young,  $E$ , y constante (razón) de Poisson,  $\nu$ .

También para materiales homogéneos, las relaciones entre los tres componentes de la deformación unitaria cortante y los componentes del esfuerzo cortante serán:

$$e_{xy} = \frac{T_{XY}}{2G}, \quad e_{yz} = \frac{T_{YZ}}{2G}, \quad e_{zx} = \frac{T_{ZX}}{2G} \quad (3.23)$$

o

$$\varepsilon_{xy} = \frac{T_{XY}}{G}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{T_{YZ}}{G}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{T_{ZX}}{G} \quad (3.24)$$

donde  $G$  se conoce como módulo volumétrico. Las ecuaciones 3.23 y 3.24 indican que una componente de deformación unitaria depende únicamente de las componentes correspondientes de los esfuerzos cortantes. Finalmente, el módulo volumétrico para un material homogéneo se relaciona con el módulo de Young y la constante (razón) de Poisson de dicho material de la siguiente forma:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.25)$$

### 3.1.4. Relaciones generales entre esfuerzo y deformación unitaria

Generalmente, un cristal es anisotrópico en cuanto a sus propiedades mecánicas. Por lo tanto, las relaciones generales entre el tensor de esfuerzo y el tensor de deformación ([19] y [20]) se describen mediante la ecuación matricial:

$$(e) = (\Sigma)(T)$$

Un componente del tensor de deformación unitaria puede expresarse como:

$$e_{ij} = \sum_{k,l} \Sigma_{ijkl} T_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

Dado que  $(e)$  y  $(T)$  son ambos tensores de segundo grado con  $3 \times 3$  componentes y  $\Sigma$  es un tensor de grado 4 con  $9 \times 9$  componentes. El tensor  $\Sigma$  frecuentemente es llamado tensor de coeficientes de comportamiento. Dado que  $(T)$  y  $(e)$  son ambos tensores simétricos, se tienen sólo seis componentes independientes en cada uno. Simplificando la notación, se tiene:

$$e_{ij} = \sum_j \Sigma_{ij} T_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6)$$

Por lo tanto,  $\Sigma$  es una matriz de  $6 \times 6$  elementos. Dado que el silicio tiene una estructura reticular en forma de diamante,  $\Sigma$  puede reducirse aún más debido a la simetría cúbica del cristal. En un sistema de referencia cristalográfico existen sólo tres componentes independientes diferentes de cero,  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$  y  $\Sigma_{44}$ , en el tensor de coeficientes de comportamiento.

$$S = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{12} & \Sigma_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{44} \end{pmatrix}$$

Las tres componentes diferentes de cero están relacionadas con las constantes del material de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma_{11} = \frac{1}{E}, \quad \Sigma_{12} = -\frac{\nu}{E} \quad \text{y} \quad \Sigma_{44} = \frac{1}{2G}$$

Nótese que  $G$  es un parámetro independiente cuando el material no es homogéneo. Tomando la definición regular de la deformación, se tiene:

$$(\varepsilon) = (S)(T) \tag{3.26}$$

donde  $(S)$  es una matriz de  $6 \times 6$  componentes y se le conoce como matriz de coeficientes de comportamiento. Para el silicio en su sistema de coordenadas cristalográficas, se tiene:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix}$$

donde  $S_{11} = \Sigma_{11}$ ,  $S_{12} = \Sigma_{12}$  y  $S_{44} = 2\Sigma_{44}$ . Algunas veces la ecuación 3.26 se expresa en su forma inversa:

$$(T) = (C)(\varepsilon)$$

donde  $(C)$  es una matriz de  $6 \times 6$  componentes llamada coeficiente de elasticidad. Para un cristal cúbico como los de silicio, en su sistema de referencia cristalográfico, existen sólo tres componentes independientes diferentes de cero, por lo que  $(C)$  queda expresada como:

$$(C) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

Las relaciones entre  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$ , las componentes de  $(C)$ ,  $(S)$  y  $(\Sigma)$  serán:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} &= S_{11} = \Sigma_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} - C_{12}) \cdot (C_{11} + 2C_{12})} \\ \nu &= -\frac{S_{12}}{S_{11}} = -\frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}} = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}} \\ \frac{1}{G} &= S_{44} = 2\Sigma_{44} = \frac{1}{C_{44}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Con base en [21] los valores aceptados para el silicio en un sistema cristalográfico de referencia, son:  $C_{11} = 1.674 \times 10^{11}$  Pa,  $C_{12} = 0.652 \times 10^{11}$  Pa y  $C_{44} = 0.796 \times 10^{11}$  Pa. Por tanto, la matriz del coeficiente de elasticidad queda como:

$$(C) = \begin{pmatrix} 1.674 & 0.652 & 0.652 & 0 & 0 & 0 \\ 0.652 & 1.674 & 0.652 & 0 & 0 & 0 \\ 0.652 & 0.652 & 1.674 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.796 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.796 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.796 \end{pmatrix} \times 10^{11} \text{Pa}$$

Tomando las relaciones 3.27 se tienen tres componentes independientes para  $(\Sigma)$  y el tensor de coeficientes de comportamiento queda como:

$$(\Sigma) = \begin{pmatrix} 0.764 & -0.214 & -0.214 & 0 & 0 & 0 \\ -0.214 & 0.764 & -0.214 & 0 & 0 & 0 \\ -0.214 & -0.214 & 0.764 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.628 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.628 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.628 \end{pmatrix} \times 10^{-11} \text{Pa}^{-1}$$

Con lo cual, los tres parámetros mecánicos pueden calcularse:  $E = 1.31 \times 10^{11}$  Pa,  $\nu = 0.28$ , y  $G = 0.796 \times 10^{11}$  Pa. Sin embargo, en un sistema de referencia arbitrario los parámetros mecánicos son dependientes de la orientación, por lo que si se considera un sistema de referencia con el eje  $x'$  en la dirección  $[110]$ , el eje  $y'$  en la dirección  $[\bar{1}10]$  y el eje  $z'$  en la dirección  $[001]$ , el tensor de coeficientes de comportamiento será:

$$(\Sigma') = \begin{pmatrix} 0.589 & -0.039 & -0.214 & 0 & 0 & 0 \\ -0.039 & 0.589 & -0.214 & 0 & 0 & 0 \\ -0.214 & -0.214 & 0.764 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.628 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.628 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.978 \end{pmatrix} \times 10^{11} / \text{Pa} \quad (3.28)$$

El tensor de coeficientes de comportamiento en el sistema coordenado  $(x', y', z')$  puede calcularse a partir de  $\Sigma$  en el sistema de referencia cristalográfico a través de una transformación de coordenadas del tensor de rango 4.

A partir del tensor de coeficientes de comportamiento en un sistema de referencia arbitrario es fácil observar que los parámetros mecánicos son anisotrópicos. En el caso expuesto anteriormente a partir de los elementos  $\Sigma'_{11}$  y  $\Sigma'_{22}$  puede obtenerse el módulo de Young en las direcciones  $x'$  y  $y'$ :  $E_{x'x'} = E_{y'y'} = 1.7 \times 10^{11}$  y a partir de  $\Sigma'_{33}$  se tiene que el módulo de Young en la dirección  $z$  es  $E_{z'z'} = 1.31 \times 10^{11}$  Pa. Se observa también que el módulo volumétrico y la razón de Poisson son anisotrópicos. En el caso del módulo volumétrico se tiene que  $G = 0.796 \times 10^{11}$  [Pa] para  $T_{y'z'}$  y  $T_{x'z'}$ , y  $G = 0.511 \times 10^{11}$  [Pa] para  $T_{x'y'}$ . Para el esfuerzo normal  $T_{x'x'}$ , la constante de Poisson es de  $\nu = 0.066$  en la dirección  $y'$  y de  $\nu = 0.36$  en la dirección  $z'$ . En general para el desarrollo de cálculos manuales o simulaciones por computadora (fuera de las herramientas de análisis de elemento finito) se consideran los valores de las características mecánicas del silicio como:  $E = 1.7 \times 10^{11}$  [Pa],  $\nu = 0.3$  y  $G = 0.65 \times 10^{11}$  [Pa] y se considera que el material es isotrópico.

## 3.2. Esfuerzo y deformación unitaria en vigas

### 3.2.1. Esfuerzo y deformación en una viga flexionada

Considérese una viga de sección rectangular con un ancho  $b$  y grosor  $h$ , en la cual el largo  $L$  es mucho mayor que los dos parámetros previos. Se colocará un sistema de referencia en el centro geométrico de la sección transversal menor haciendo coincidir el eje de las abscisas con la dimensión  $L$  de la viga, el eje de las cotas irá hacia abajo siguiendo la dirección del grosor, como se muestra en la figura 3.6. Si ocurre una flexión en ambos extremos de la viga debida a un momento de flexión  $M$ , la cuál vista desde la perspectiva del plano  $x-z$  se aprecia como un doblez hacia arriba, es fácil apreciar que la parte concava o superior de la estructura (viga flexionada) experimentará una compresión y que la parte inferior o convexa experimentará una extensión. Existe un plano neutral entre la parte del volumen que está siendo comprimida y la parte que esta siendo estirada que no está sometido ni a compresión ni a extensión.

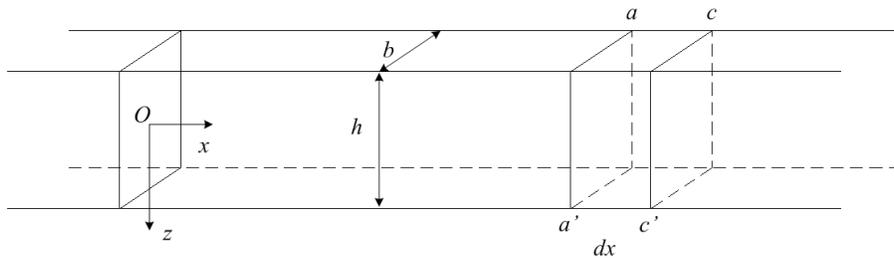


Figura 3.6: Sección elemental de una viga.

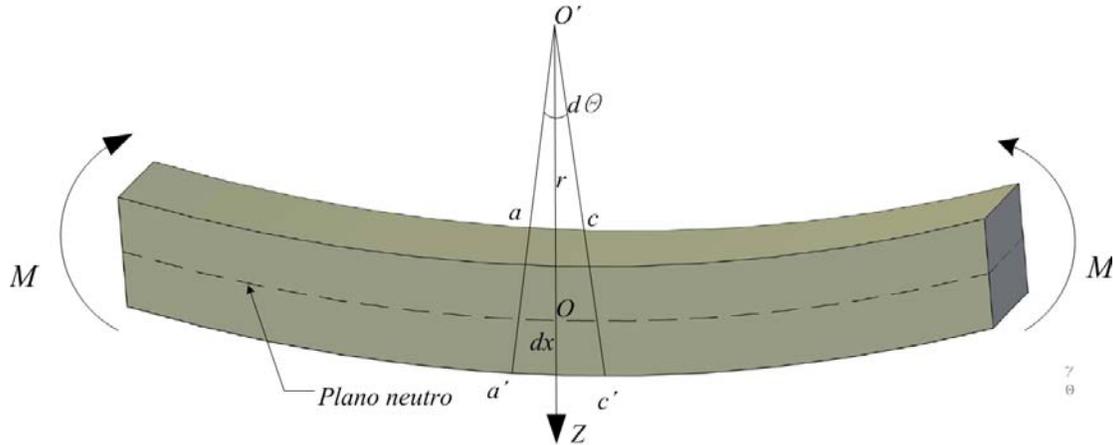


Figura 3.7: Combado de una viga bajo la acción de un momento de flexión.

Si se toma un elemento seccional de la viga, situado entre los planos  $aa'$  y  $cc'$ , cuyo largo se denomine  $dx$ , cuando se hable del desplazamiento en la dirección  $z$  que experimenta una parte de la viga bajo flexión, se podrá establecer dicho desplazamiento en términos de  $x$ , es decir:

$$\Delta z = f(x)$$

y se le conocerá como función de desplazamiento de la viga flexionada.

Si ahora se establece el centro de curvatura del trazo que modela la deformación del elemento seccional (cuyo largo es  $dx$ ) de la viga bajo flexión, se podrá obtener el radio de curvatura  $r$  como el segmento de recta entre el centro de curvatura y el punto  $O$  situado entre los planos  $aa'$  y  $cc'$  como lo muestra la figura 3.7 y sobre el plano neutro de la viga. Con base en lo anterior, se tiene que para un elemento seccional cualquiera sobre el plano neutro, la longitud de dicho elemento será  $dx = r d\theta$ .

Para un elemento sobre un plano alejado del plano neutro, el material está siendo comprimido o extendido en la dirección  $x$ . Si el material se elonga, se tiene que  $\Delta dx = (r + z) d\theta - r d\theta = z d\theta$ . La deformación unitaria para el plano alejado del plano neutro es la elongación relativa del material, esto es:

$$\varepsilon(z) = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z d\theta}{r d\theta} = \frac{z}{r}$$

De acuerdo con la Ley de Hooke, el esfuerzo en dicha capa será:

$$T_{XX}(z) = \frac{Ez}{r} \quad (3.29)$$

El signo para la deformación unitaria o el esfuerzo es positivo para deformaciones por extensión y negativo para deformaciones por compresión. Hasta ahora sólo se ha analizado un esfuerzo normal y hacen falta dos esfuerzos normales más y tres esfuerzos cortantes, pero debido a que en las consideraciones del análisis se afirmó que la longitud de la viga es mucho mayor que sus otras dos dimensiones, entonces puede considerarse a este análisis como un análisis unidimensional.

El recíproco del radio de curvatura  $r$  para una curva  $f(x)$  es el valor absoluto de la segunda derivada de  $f(x)$ , esto es:

$$\frac{1}{r} = |f''(x)| \quad (3.30)$$

con lo cual a partir de la ecuación 3.29 se tiene que:

$$|T(x, z)| = Ez |f''(x)|$$

Para una condición de flexión como la mostrada en la figura (hacia arriba), se tiene que  $f''(x) < 0$ . Para un plano con  $z > 0$ , es decir, por debajo del plano neutral, si se toma un elemento seccional y se analiza su longitud, se verá que ésta se alarga, es decir, está siendo estirado el elemento seccional, por lo que  $T > 0$  y viceversa. Con lo cual puede establecerse la relación entre  $T$  y  $f''(x)$  como:

$$T(x, z) = -Ez f''(x) \quad (3.31)$$

### 3.2.2. Momento de flexión y momento de inercia

#### Fuerza axial de una viga

La fuerza axial de una viga es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la sección transversal. De la ecuación 3.31, la fuerza axial de una viga rectangular causada por una flexión pura será:

$$F = \int_{-h/2}^{h/2} T(z) b dz = -E b f''(x) \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0 \quad (3.32)$$

Al igualar la fuerza axial a cero es relativamente simple encontrar la posición del plano neutral, cuando la viga está sometida exclusivamente a una flexión.

#### Momento de flexión y momento de inercia

Al interior de la viga flexionada existen fuerzas internas a lo largo de sus secciones transversales, por lo que el momento de flexión se define como la suma de todos los momentos producidos por dichas fuerzas (que actúan contra el plano neutral):

$$M(x) = \int z dF = \int z T(z) dA = - \int E z^2 f''(x) b h dx \quad (3.33)$$

Para resolver la integral, se considera al origen del eje de las cotas sobre el plano neutral. Si el origen no está sobre el plano neutral y la posición del plano neutral está en  $z = a$ , debe emplearse  $(z - a)$  para sustituir a  $z$  en la ecuación 3.33. Además, si el ancho de la sección transversal no es uniforme, es decir,  $b = b(z)$ , se tiene que  $dA = b(z) dz$ , por lo que:

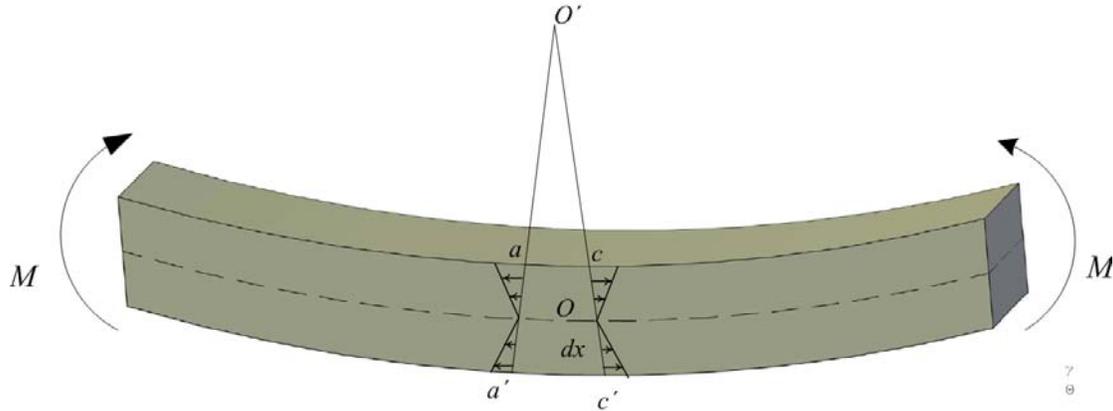


Figura 3.8: Las fuerzas provocan un momento de flexión.

$$M(x) = -Ef'''(x) \int z^2 b(z) dz \quad (3.34)$$

A esta integral se le conoce como momento de inercia de la viga y se le denota con  $I$ :

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b(z) dz \quad (3.35)$$

Para una viga con una sección transversal rectangular de ancho  $b$  y grosor  $h$ , el momento de inercia de la viga es  $I = bh^3/12$ . Con lo cual la ecuación 3.34 puede escribirse como:

$$-EIf'''(x) = M(x) \quad (3.36)$$

Con este resultado y el de la ecuación 3.31, se tiene que:

$$T(x, z) = \frac{zM(x)}{I} \quad (3.37)$$

Las ecuaciones 3.36 y 3.37 son muy útiles para encontrar la función de desplazamiento  $f(x)$  y el esfuerzo en la viga, una vez que el momento de flexión es conocido.

De acuerdo con la definición, el momento de flexión es de signo positivo si la viga está doblada hacia arriba en ambos lados del elemento seccional, dado que  $dF$  es positivo para  $z > 0$  y negativo para  $z < 0$  como lo muestra la figura 3.8. La regla de los signos para fuerzas externas que generan momentos de flexión es: si se observa en el lado izquierdo del elemento seccional  $dx$ , el momento causado por una fuerza aplicada en el sentido horario es positivo; por otra parte, si se observa en el lado derecho del elemento seccional  $dx$ , el momento causado por una fuerza aplicada en el sentido anti-horario es positivo. En caso contrario, el momento de flexión es negativo si la viga está doblada hacia abajo en ambos lados.

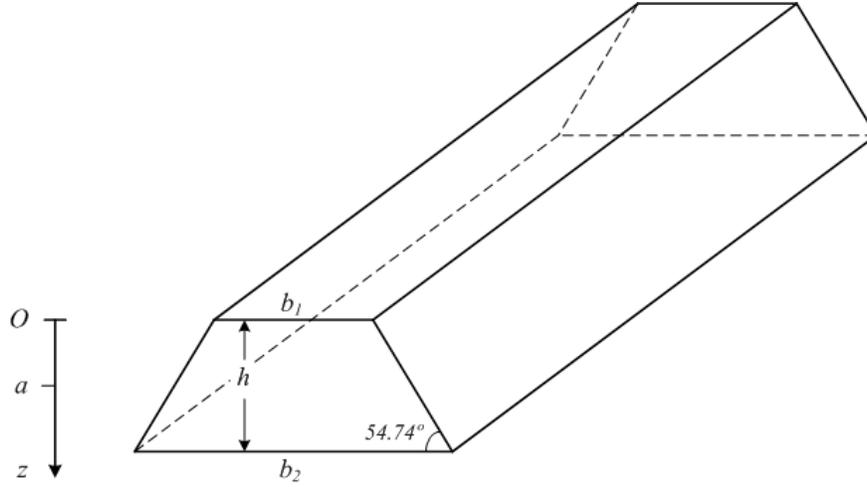


Figura 3.9: Corte seccional de una viga trapezoidal.

Frecuentemente, las vigas están hechas de silicio micromaquinado en volumen por medio de atacantes anisotrópicos, en cuyo caso la sección transversal es un trapecioide en lugar de un rectángulo. Obsérvese la figura 3.9.

El ángulo en la parte inferior es  $\alpha = \tan^{-1} \sqrt{2}$ , si se coloca el origen del eje de las cotas en la parte superior, se tiene:

$$b(z) = b_1 + z\sqrt{2}$$

y de acuerdo con la condición de fuerzas axiales nulas, necesaria para tener un fenómeno de flexión pura, se tiene que:

$$\int_0^h b(z) T(z) dz = 0$$

Si ahora se considera que la posición del plano neutral es  $z = a$ , se tiene que  $T(z) \approx (z - a)$ , por lo que la posición  $a$  puede encontrarse utilizando la condición:

$$\int_0^h b(z) (z - a) dz = 0 \quad (3.38)$$

A partir de esta ecuación se tiene que  $a$  puede calcularse como:

$$a = \frac{(b_1 + 2b_2) h}{3(b_1 + b_2)} \quad (3.39)$$

Si ahora se considera que  $b_1$  y  $b_2$  son mucho mayores de  $h$  se tiene que  $a \approx h/2$ , es decir, que puede ser aproximada como una viga rectangular. Por otra parte si  $b_1 = 0$  (una viga con sección triangular), se tiene  $a = 2h/3$ , con lo cual puede apreciarse que el resultado es un poco diferente que el obtenido para una viga rectangular.

Una vez que se encuentra la posición del plano neutral puede calcularse el momento de inercia de la viga. De acuerdo con la definición, se tiene:

$$I = \int_0^h b(z) (z - a)^2 dz \quad (3.40)$$

De las ecuaciones 3.39 y 3.40, el momento de inercia de una viga con sección transversal trapezoidal será:

$$I = \frac{h^3 (b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2)}{36(b_1 + b_2)}$$

### 3.2.3. Desplazamiento de vigas bajo peso

Si las dimensiones geométricas, los parámetros del material de la viga, las fuerzas externas y las condiciones de frontera se conocen, la función de desplazamiento  $f(x)$  puede encontrarse a partir de la ecuación 3.36 y las condiciones de frontera. Una vez que  $f(x)$  es encontrada, los esfuerzos en la viga pueden ser calculados mediante el uso de la ecuación 3.31. A continuación se analizarán las configuraciones más comunes en las vigas.

#### Viga volada con carga concretada en un extremo

Considérese una viga volada con una sección transversal rectangular con la carga concentrada en un extremo como la mostrada en la figura 3.10.

El ancho, grosor y longitud de la viga son  $b$ ,  $h$ , y  $L$ , respectivamente. Sea  $F$  la fuerza provocada por una masa  $m$  colocada en el extremo libre de la viga y la aceleración gravitacional, es decir,  $F = mg$ . Y también se asume que la masa  $m$ , es mucho mayor que la masa de la viga, de modo tal que el peso de la viga puede ser despreciado. Para balancear la fuerza  $F$ , debe existir una fuerza de soporte,  $F_0$ , actuando sobre la viga, en el extremo anclado. La condición de balance de fuerzas en la dirección  $z$  lleva a establecer que  $F_0 = F$ . Además, debe existir un momento de flexión restrictivo,  $M_0$ , en el extremo anclado de la viga que balancee el momento de flexión provocado por la fuerza  $F$ .

El momento en el extremo anclado que es producido por el peso de la carga es igual a  $FL$ , y el sentido en el que se presenta es horario. Para balancear los momentos de flexión, el momento de flexión restrictivo,  $M_0$ , debe ser igual a  $FL$ , en sentido antihorario.

A partir de una posición  $x$  cualquiera, como se muestra en la figura, el momento de flexión a la izquierda queda expresado por  $(-M_0 + F_0x)$  y el momento de flexión a la derecha es igual a  $-F(L - x)$ . Considerando que se encuentra en equilibrio estático, se tiene que los momentos a izquierda y derecha de la posición  $x$  son iguales, es decir,  $M(x) = -F(L - x)$ . Por lo tanto, la ecuación diferencial para calcular  $f(x)$  será:

$$-EI f''(x) = -F(L - x) \quad (3.41)$$

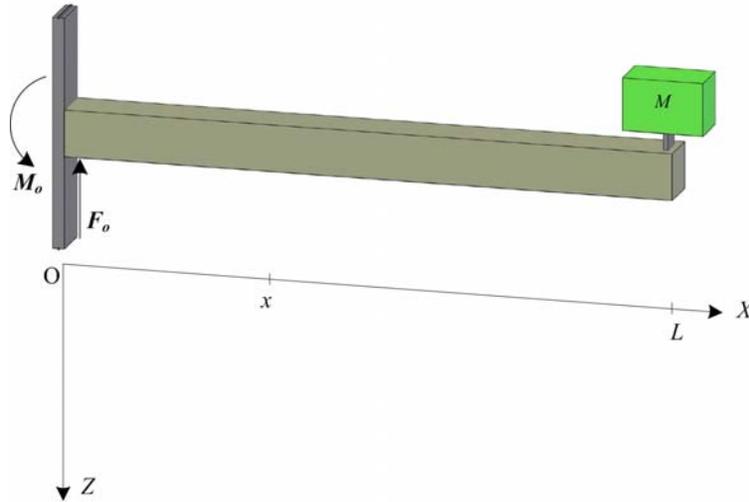


Figura 3.10: Viga volada con carga concentrada en un extremo.

Si además se considera que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  y  $f''(L) = 0$ , la solución a la ecuación 3.41 [22] será:

$$f(x) = \frac{F(3L-x)x^2}{6EI} = \frac{2mg(3L-x)x^2}{Ebh^3}$$

Por lo que el desplazamiento máximo en el extremo libre de la viga se calcula a partir de:

$$f_{\text{máx}} = f(L) = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{4mgL^3}{Ebh^3}$$

Si se considera a la viga como un resorte, su constante se obtiene mediante la expresión:

$$k = \frac{Ebh^3}{4L^3} \quad (3.42)$$

A partir de la ecuación 3.31, el esfuerzo en la superficie superior de la viga, es decir, en  $z = -h/2$  será:

$$T(x) = -E \left( -\frac{h}{2} \right) f''(x) = \frac{Fh(L-x)}{2I} = \frac{6mg(L-x)}{bh^2} \quad (3.43)$$

El esfuerzo tiene su máximo cuando  $x = 0$  y decrece linealmente cuando  $x$  tiende a  $L$ . Por lo tanto, de la ecuación 3.43, el esfuerzo máximo en  $x = 0$  [22], queda expresado como :

$$T_{\text{máx}} = \frac{FhL}{2I} = \frac{6mgL}{bh^2}$$

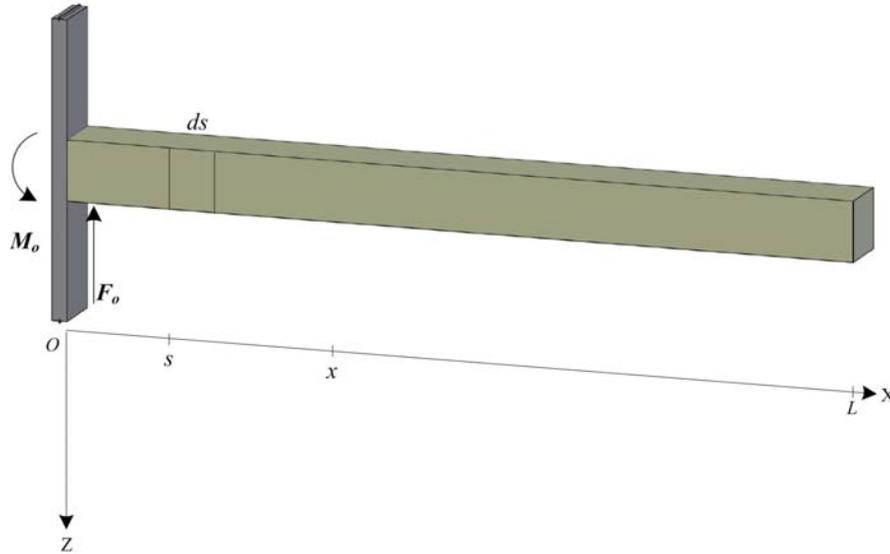


Figura 3.11: Viga volada con carga distribuida.

### Flexión de una viga volada bajo la acción de su propio peso

Si no existe una carga concentrada en el extremo libre de una viga volada y la carga que experimenta la viga es sólo su propio peso, entonces la carga se encuentra distribuida de manera uniforme como lo muestra la figura 3.11.

La ecuación diferencial que modela el momento de flexión se expresa como:

$$-EI f''(x) = m_b g x - M_0 - \int_0^x \frac{m_b g}{L} (x - s) ds \quad (3.44)$$

donde  $m_b$  es la masa total de la viga, esto es,  $m_b = \rho b h L$ ,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad y el último término a la derecha es un movimiento de flexión provocado por el peso de la viga distribuido entre 0 y  $x$ . Después de resolver la integral, se tiene que la ecuación queda como:

$$-EI f''(x) = m_b g x - M_0 - \frac{m_b g x^2}{2L} \quad (3.45)$$

Si se considera que las condiciones límite para la viga son  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  y  $f''(L) = 0$ , y se resuelve la ecuación 3.45, se tiene que el momento restrictivo será:

$$M_0 = \frac{m_b g L}{2} = \frac{\rho b h g L^2}{2}$$

y el desplazamiento de la viga [22] queda como:

$$f(x) = \frac{m_b g x^2 (x^2 - 4Lx + 6L^2)}{24ELI} = \frac{m_b g x^2 (x^2 - 4Lx + 6L^2)}{2Ebh^3} \quad (3.46)$$

Por lo tanto, el desplazamiento máximo al final de la viga se obtiene a partir de:

$$f_{máx} = \frac{m_b g L^3}{8EI} = \frac{3m_b g L^3}{2Ebh^3}$$

o

$$f_{máx} = \frac{3\rho g L^4}{2Eh^2} \quad (3.47)$$

Así, el esfuerzo en la superficie superior de la viga se obtiene mediante:

$$T(x) = -E \left( -\frac{h}{2} \right) f''(x) = \frac{m_b g (L-x)^2}{4LI} = \frac{3m_b g (L-x)^2}{bh^2 L}$$

y el esfuerzo máximo en  $x = 0$  [22], nos lleva a que:

$$T_{máx} = \frac{m_b g h L}{4I} = \frac{3m_b g L}{bh^2} = \frac{3\rho g L^2}{h} \quad (3.48)$$

### Vigas doblemente ancladas

Para una viga con ambos extremos anclados (normalmente llamada puente) como lo muestra la figura , si la carga bajo la que se encuentra es su propio peso, la ecuación para el desplazamiento es similar a lo expresado por las ecuaciones 3.44 y 3.45, pero dado que la viga está sujeta en ambos extremos, las fuerzas de reacción son  $F_0 = m_b g/2$  para ambos extremos. Por lo tanto, la ecuación que define la función de desplazamiento será:

$$-EI f''(x) = \frac{m_b g x}{2} - M_0 - \frac{m_b g x^2}{2L} \quad (3.49)$$

Las condiciones límite para la viga son  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f(L) = 0$  y  $f'(L) = 0$ , con lo cual a partir de la ecuación 3.49, puede calcularse  $M_0$  como:

$$M_0 = \frac{m_b g L}{12} = \frac{\rho g b h L^2}{12}$$

y la función de desplazamiento de la viga:

$$f(x) = \frac{m_b g}{24ELI} x^2 (L-x)^2 = \frac{\rho g}{2Eh^2} x^2 (L-x)^2$$

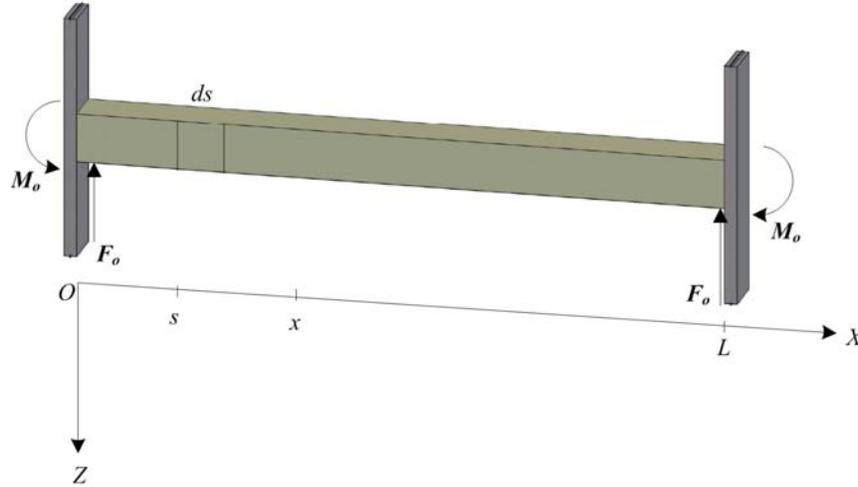


Figura 3.12: Viga doblemente anclada (puente) y sus características.

El desplazamiento máximo de la viga, el cual se presenta en  $x = L/2$ , será:

$$f_{m\acute{a}x} = \frac{\rho g L^4}{32 E h^2} \quad (3.50)$$

El esfuerzo en la superficie superior de la viga, en  $z = -h/2$ , se calcula a partir de:

$$T(x) = -E \left( -\frac{h}{2} \right) f''(x) = \frac{m_b g h}{24 I L} (L^2 - 6xL + 6x^2)$$

El esfuerzo máximo, en  $x = 0$  y  $x = L$ , se calcula a partir de:

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{m_b g h L^2}{24 I L} = \frac{\rho g L^2}{2h} \quad (3.51)$$

Si se comparan las ecuaciones 3.51 y 3.48 es evidente que el esfuerzo máximo en una viga doblemente anclada es menor que el que se presenta en una viga volada, por un factor de 6, bajo las mismas condiciones. También si se comparan las ecuaciones 3.50 y 3.47 es posible apreciar que el desplazamiento máximo de una viga doblemente anclada es mucho menor que el de una viga volada por un factor de 48.

### Vigas doblemente ancladas y con una masa central

La estructura de vigas doblemente ancladas soportando una masa central es frecuentemente utilizada para la creación de sensores inerciales (tal es el caso de los acelerómetros y giroscopios), resonadores y actuadores mecánicos (como en el caso de los interruptores). En general la masa central es mucho más ancha y gruesa que las vigas que la sostienen, de modo tal que la flexión que se presenta en la estructura que forma la masa central puede ser despreciada, veáanse las figuras 3.13 y 3.14. Si la carga de la estructura es su peso propio actuando en la dirección  $z$ , el desplazamiento de la masa es parecido al de un pistón debido a la simetría de la estructura en las direcciones  $x$  y  $y$ . Por lo tanto, para el análisis se puede considerar sólo la mitad de la estructura.

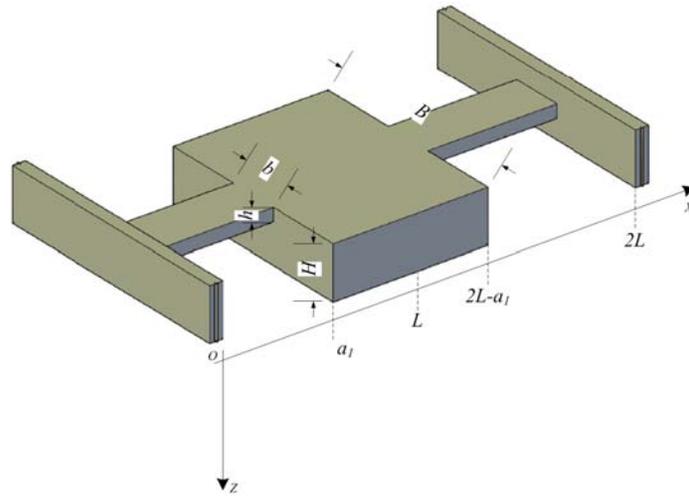


Figura 3.13: El dibujo esquemático de una estructura formada por dos vigas voladas sosteniendo una masa.

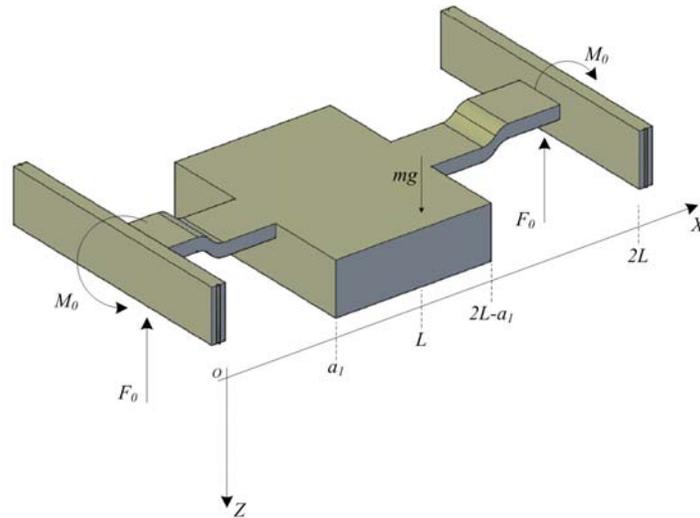


Figura 3.14: Flexión del par de vigas voladas que sostienen una masa por efecto del peso.

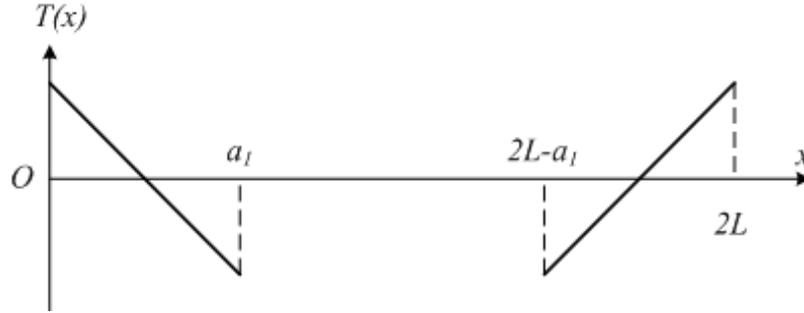


Figura 3.15: Distribución del esfuerzo sobre la superficie de la viga.

Para la viga izquierda, la expresión para el desplazamiento es similar a la ecuación 3.49:

$$-EI f''(x) = \frac{mg}{2}x - M_0 - \frac{\rho b h g x^2}{2}$$

donde el momento de inercia  $I$  es igual a  $bh^3/12$ ,  $M_0$  es el momento de flexión restrictivo que debe calcularse y  $m$  es la masa total de la estructura (vigas y masa reunidas) con valor  $m = 2(L - a_1)BH\rho + 2bha_1\rho$ .

Bajo la consideración de que la masa de las vigas es mucho menor que la masa del cuerpo central, la ecuación puede simplificarse para quedar como:

$$-EI f''(x) = \frac{mg}{2}x - M_0 \quad (3.52)$$

Si las condiciones límite para la ecuación 3.52 son  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f'(a_1) = 0$  y  $f''(\frac{1}{2}a_1) = 0$ , entonces:

$$M_0 = \frac{1}{4}mga_1$$

Por lo tanto, el esfuerzo máximo en la superficie superior de la viga será:

$$T(x) = \frac{3mg}{bh^2} \left( \frac{1}{2}a_1 - x \right)$$

La distribución del esfuerzo se muestra en la gráfica de la figura 3.15.

Puede observarse que los esfuerzos sobre la superficie de la viga varían linealmente desde un máximo positivo en un extremo a un máximo negativo en el otro. Los valores para ambos máximos (tanto el positivo como el negativo) son el mismo:

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{3a_1}{2bh^2}mg$$

El desplazamiento de la viga izquierda queda expresado por:

$$f(x) = \frac{mg}{Ebh^3} x^2 \left( \frac{3}{2} a_1 - x \right)$$

en cuanto al desplazamiento de la masa central se tiene:

$$f(a_1) = \frac{mg}{2Ebh^3} a_1^3$$

y si las vigas son consideradas como un resorte, la constante del resorte es:

$$k = \frac{2Ebh^3}{a_1^3} \quad (3.53)$$

### 3.2.4. Flexión por deformación residual de vigas compuestas

En diversos tipos de aplicaciones prácticas es frecuente que las vigas se recubran con capas de materiales tales como dióxido de silicio, nitruro de silicio, material fotoresistivo, aluminio y otros metales que proporcionen aislamiento, pasivación, activación o sirven para algunos otros propósitos de diseño. Por ejemplo, la estructura más ampliamente utilizada es la viga de silicio con una película de dióxido de silicio en la parte superior. Ya que la película de dióxido de silicio crece o es depositada a altas temperaturas y el coeficiente de expansión térmica de la película es diferente al de la viga, esfuerzos y deformaciones residuales surgen cuando la viga compuesta ( $\text{SiO}_2/\text{Si}$ ) se enfría hasta llegar a una temperatura ambiente. Este esfuerzo/deformación es frecuentemente llamado esfuerzo/deformación térmica o residual.

La deformación residual provocará la flexión o curvatura de la viga y la operación normal de la viga será impredecible. Por lo que, el efecto de flexión debido a la deformación residual puede utilizarse para la creación de dispositivos dentro de los Sistemas Microelectromecánicos.

Las expresiones generales para ubicar el plano neutral y la curvatura de una viga de dos capas se obtuvieron del trabajo de Townsend, Barnett y Brunner [23]. Con estas expresiones el esfuerzo/deformación térmico presente en una viga puede calcularse. Como parte de las aplicaciones de estas ecuaciones, se obtiene también la ecuación de Stoney, que relaciona el esfuerzo/deformación en una película delgada con la curvatura de la viga. Al final de esta sección se obtienen las expresiones para vigas de múltiples capas.

#### Viga compuesta de dos capas

Considerando la flexión de la viga compuesta ( $\text{SiO}_2/\text{Si}$ ) como se muestra en la figura 3.16, se define a  $t_{ox}$  como el grosor de la capa de dióxido de silicio y a  $t_{si}$  como el grosor del silicio, y el grosor de la viga se supone mucho más pequeño que el ancho y largo de la viga. Supóngase que el dióxido de silicio crece a una temperatura de  $T'$  y la longitud de la viga compuesta es  $L'$  y ninguna deformación interna aparece en la viga a esta temperatura.

Si las capas de dióxido de silicio y silicio son unidas y enfriadas hasta una temperatura ambiente  $T$ , la longitud de la película de dióxido será:

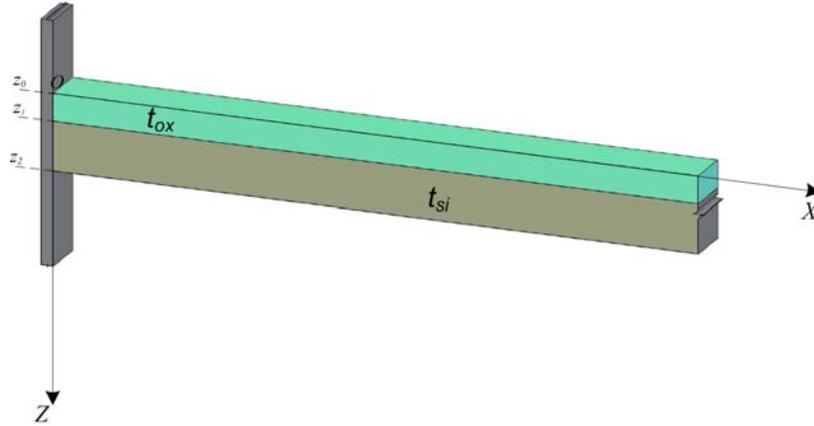


Figura 3.16: Viga compuesta por dos capas: óxido de silicio ( $\text{SiO}_2$ ) y silicio (Si).

$$L_{ox} = L' (1 - \alpha_{ox} \Delta T) \quad (3.54)$$

donde  $\Delta T = T' - T$  y  $\alpha_{ox}$  es el coeficiente de expansión térmica del dióxido de silicio. Por otra parte, la longitud de la viga de silicio se obtiene a partir de:

$$L_{si} = L' (1 - \alpha_{si} \Delta T) \quad (3.55)$$

donde  $\alpha_{si}$  es el coeficiente de expansión térmica del silicio. Los valores más comúnmente usados para los coeficientes de expansión térmica son:  $\alpha_{ox} = 0.5 \times 10^{-6} [K^{-1}]$  y  $\alpha_{si} = 2.6 \times 10^{-6} [K^{-1}]$ .

Como  $\alpha_{ox}$  es mucho menor que  $\alpha_{si}$ , el dióxido de silicio está comprimido y el silicio está estirado en la viga compuesta a temperatura  $T$ . Por lo tanto, la longitud resultante de la viga compuesta,  $L$ , estará entre  $L_{si}$  y  $L_{ox}$ , es decir  $L_{ox} > L > L_{si}$ . Y dado que  $\alpha_{ox} \Delta T$  y  $\alpha_{si} \Delta T$  son mucho más pequeños que la unidad, el esfuerzo en la película de dióxido será:

$$\varepsilon_{ox} = \frac{L - L_{ox}}{L} \doteq \ln \frac{L}{L_{ox}}$$

Y la deformación en la capa de silicio será:

$$\varepsilon_{si} = \frac{L - L_{si}}{L} \doteq \ln \frac{L}{L_{si}}$$

Dado que un extremo de la viga no está anclado, la fuerza total en dicho extremo es cero. Por lo tanto, se tiene que:

$$E_{si} t_{si} \ln \frac{L}{L_{si}} + E_{ox} t_{ox} \ln \frac{L}{L_{ox}} = 0 \quad (3.56)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.54 y 3.55 en 3.56, se tiene que la longitud de la viga a temperatura  $T$  será:

$$L = L' (1 - \alpha_{eff} \Delta T) \quad (3.57)$$

donde  $\alpha_{eff}$  es el coeficiente efectivo de expansión térmica de la viga compuesta:

$$\alpha_{eff} = \frac{E_{si} t_{si} \alpha_{si} + E_{ox} t_{ox} \alpha_{ox}}{E_{si} t_{si} + E_{ox} t_{ox}}$$

Aunque la fuerza total actuando en el extremo de la viga compuesta es nula, esta condición de deformación no necesariamente satisface la condición de equilibrio de momentos. En general, el resultado será que la viga compuesta se flexione. La deformación provocada por la flexión se suma para satisfacer la condición de equilibrio de momentos. Si la función de desplazamiento de la viga es  $f(x)$ , la deformación provocada por la flexión será  $-(z - z_0) f''(x)$ , donde,  $z_0$  es la posición del plano neutral y  $f''(x)$  es la curvatura de la viga. Generalmente, el efecto de flexión es más importante que el efecto de cambio en la longitud de la viga.

Cuando la deformación provocada por la flexión se considera, el esfuerzo en el dióxido de silicio se obtiene a partir de:

$$T_{ox} = E_{ox} \ln \frac{L}{L_{ox}} - E_{ox} (z - z_0) f''(x)$$

y el esfuerzo en el silicio se calcula con la siguiente expresión:

$$T_{si} = E_{si} \ln \frac{L}{L_{si}} - E_{si} (z - z_0) f''(x)$$

Además, se tiene que la posición del plano neutral se calcula a partir de:

$$z_0 = \frac{E_{ox} t_{ox} (0 + z_1) + E_{si} t_{si} (z_1 + z_2)}{2(E_{ox} t_{ox} + E_{si} t_{si})}$$

o mediante:

$$z_0 = \frac{E_{ox} t_{ox} (0 + t_{ox}) + E_{si} t_{si} (2t_{ox} + t_{si})}{2(E_{ox} t_{ox} + E_{si} t_{si})} \quad (3.58)$$

La curvatura de una viga compuesta, puede encontrarse a través del uso de la condición de balance de momentos de fuerza contra el plano neutral:

$$\int_0^{z_1} E_{ox} \ln \frac{L}{L_{ox}} (z - z_0) dz - E_{ox} f''(x) \int_0^{z_1} (z - z_0)^2 dz + \int_{z_1}^{z_2} E_{si} \ln \frac{L}{L_{si}} (z - z_0) dz - E_{si} f''(x) \int_{z_1}^{z_2} (z - z_0)^2 dz = 0$$

La expresión para la curvatura de la viga compuesta, puede obtenerse a partir de esta ecuación y queda como:

$$f''(x) = \frac{\int_0^{z_1} E_{ox} \ln \frac{L}{L_{ox}} (z - z_0) dz + \int_{z_1}^{z_2} E_{si} \ln \frac{L}{L_{si}} (z - z_0) dz}{E_{ox} \int_0^{z_1} (z - z_0)^2 dz + E_{si} \int_{z_1}^{z_2} (z - z_0)^2 dz}$$

De las ecuaciones 3.54, 3.55 y 3.57, se tiene que  $\ln(L/L_{ox}) \doteq (\alpha_{ox} - \alpha_{eff}) \Delta T = \varepsilon_{ox}$  y  $\ln(L/L_{si}) \doteq (\alpha_{si} - \alpha_{eff}) \Delta T = \varepsilon_{si}$ . Por lo tanto, la curvatura de la viga queda como:

$$f''(x) = 3 \frac{E_{ox} (\alpha_{ox} - \alpha_{eff}) t_{ox} \left( \frac{0+z_1}{2} - z_0 \right) + E_{si} (\alpha_{si} - \alpha_{eff}) t_{si} \left( \frac{z_1+z_2}{2} - z_0 \right)}{E_{ox} \left( (z_1 - z_0)^3 - (0 - z_0)^3 \right) + E_{si} \left( (z_2 - z_0)^3 - (z_1 - z_0)^3 \right)} \quad (3.59)$$

Con las ecuaciones 3.58 para  $z_0$  y la ecuación 3.59 para  $f''(x)$ , pueden obtenerse el esfuerzo y la deformación para la viga compuesta.

Considérese ahora una situación, que es muy común encontrar, en la que la película de dióxido de silicio sea mucho más delgada que el sustrato de silicio, es decir  $t_{si} \gg t_{ox}$ . En cuyo caso, la posición del plano neutral puede aproximarse mediante,

$$z_0 = \frac{1}{2} t_{si}$$

Si se sustituye este valor en la ecuación 3.59, se tiene que:

$$f''(x) = 6 \frac{E_{ox} \varepsilon_{ox} t_{ox}}{E_{si} t_{si}^2}$$

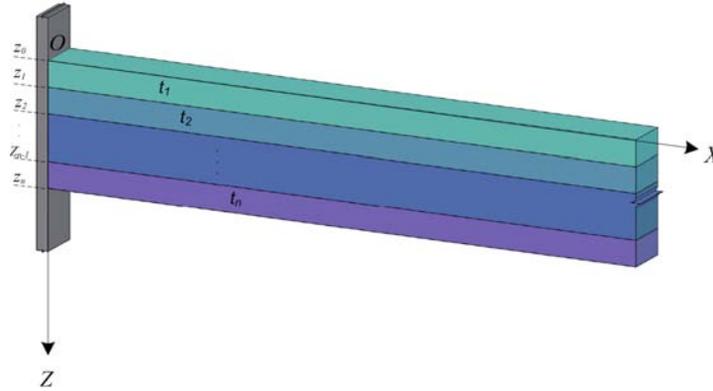
Por lo tanto, la deformación residual en el óxido se expresa como:

$$\varepsilon_{ox} = \frac{E_{si} t_{si}^2}{6 E_{ox} t_{ox}} f''(x)$$

Y el esfuerzo residual en el óxido se obtiene a partir de:

$$T_{ox} = \frac{E_{si} t_{si}^2}{6 t_{ox}} f''(x)$$

Expresión que es conocida como la ecuación de Stoney, la cual es ampliamente empleada para relacionar la flexión de una viga con el esfuerzo y deformación de una delgada capa de material sobre ella.

Figura 3.17: Viga compuesta por  $n$  capas.

### Viga compuesta por múltiples capas

Al igual que en el caso de una viga compuesta por dos capas, en una viga compuesta por  $n$  capas (véase la figura 3.17) es posible también conocer la longitud resultante, la posición del plano neutral y la curvatura.

La longitud de la viga a una temperatura  $T$  se obtiene a partir de:

$$L = L' (1 - \alpha_{eff} \Delta T)$$

donde:

$$\alpha_{eff} = \frac{E_1 t_1 \alpha_1 + E_2 t_2 \alpha_2 + \dots + E_n t_n \alpha_n}{E_1 t_1 + E_2 t_2 + \dots + E_n t_n}$$

Y en esta última expresión se tiene que  $E_i$ ,  $t_i$  y  $\alpha_i$  son el módulo de Young, el grosor de la viga y el coeficiente de expansión térmica de la capa  $i$ -ésima, respectivamente.

La posición de plano neutral se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$z_0 = \frac{E_1 t_1 (0 + z_1) + E_2 t_2 (z_1 + z_2) + \dots + E_n t_n (z_{n-1} + z_n)}{2 (E_1 t_1 + E_2 t_2 + \dots + E_n t_n)}$$

donde  $z_i = \sum_{j=1}^i t_j$  ( $i = 1, 2, 3 \dots n$ ), es la posición de la parte baja de la  $i$ -ésima capa. La curvatura de la viga será:

$$f''' = \frac{N}{D}$$

donde

$$N = \int_0^{z_1} E_1 \ln\left(\frac{L}{L_1}\right) (z - z_0) dz + \int_{z_1}^{z_2} E_2 \ln\left(\frac{L}{L_2}\right) (z - z_0) dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} E_n \ln\left(\frac{L}{L_n}\right) (z - z_0) dz$$

$$D = E_1 \int_0^{z_1} (z - z_0)^2 dz + E_2 \int_{z_1}^{z_2} (z - z_0)^2 dz + \dots + E_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} (z - z_0)^2 dz$$

Con una transformación similar a la hecha para la viga de SiO<sub>2</sub>/Si, se tiene que:

$$N = \Delta T \left\{ \begin{array}{l} E_1 (\alpha_1 - \alpha_{eff}) t_1 \left[ \frac{1}{2} (0 + z_1) - z_0 \right] + E_2 (\alpha_2 - \alpha_{eff}) t_2 \left[ \frac{1}{2} (z_1 + z_2) - z_0 \right] + \dots \\ + E_n (\alpha_n - \alpha_{eff}) t_n \left[ \frac{1}{2} (z_n + z_{n-1}) - z_0 \right] \end{array} \right\}$$

$$D = \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} [(z_1 - z_0)^3 - (0 - z_0)^3] + [(z_2 - z_0)^3 - (z_1 - z_0)^3] + \dots \\ + [(z_n - z_0)^3 - (z_{n-1} - z_0)^3] \end{array} \right\}$$

En condiciones prácticas, las diferentes capas serán depositadas o crecidas a diferentes temperaturas, lo cual provocará la presencia de deformaciones intrínsecas en las diferentes capas y complica mucho de forma considerable el análisis.

### 3.2.5. Desplazamiento angular de vigas sujetas a torsión

Cuando un torque,  $T$ , es aplicado en el extremo libre de la viga volada, la viga es retorcida (desplazamiento angular) hasta que su torque de restauración balancea el torque aplicado. Dentro de los límites elásticos, la relación entre el ángulo de torsión,  $\phi$ , y el torque será:

$$T = k_\phi \phi \quad (3.60)$$

donde  $k_\phi$  es conocida como la constante de torsión de la viga. La constante de torsión es igual al torque de restauración por unidad de desplazamiento angular. La viga diseñada para ser sometida a un movimiento torsional es frecuentemente llamada barra o viga de torsión.

#### Viga de torsión rectangular

Para una viga sujeta a torsión con sección transversal rectangular, la expresión teórica para el cálculo de la constante de torsión es un tanto complicada de obtener, pero si se recurre al trabajo de J. P. Timoshenko y J. N. Goodier [24] se tiene que  $k_\phi$  puede calcularse mediante la expresión:

$$k_\phi = \frac{1}{3L} G a^3 b \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) \equiv \frac{k_1 G a^3 b}{L} \quad (3.61)$$

donde  $a$  y  $b$  son la longitud de los lados corto y largo de la sección transversal rectangular, es decir,  $b > a$ , y el coeficiente  $k_1$  es:

$$k_1 = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) \quad (3.62)$$

Para  $a = b$  se tiene que  $k_1 = 0,141$ . Diversos valores para  $k_1$ , a partir de la relación entre  $a$  y  $b$  se muestran en la siguiente tabla (factores para relaciones de torsión):

$b/a$	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10	$\infty$
$k$	0,675	0,759	0,848	0,93	0,968	0,985	0,997	0,999	1	1
$k_1$	0,141	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	0,333
$k_2$	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,312	0,333

En el caso de una sección rectangular muy delgada, es decir,  $b \gg a$ , se tiene que:

$$k_1 = \frac{1}{3} \left( 1 - 0,63 \frac{a}{b} \right)$$

El máximo esfuerzo de deformación sobre la barra se presenta en los puntos de la parte media del lado más largo del rectángulo como se muestra en la figura 3.18. El esfuerzo máximo de deformación se calcula a partir de:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{G_{\phi} a}{L} - \frac{8G_{\phi} a}{\pi^2 L} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh(n\pi b/2a)} \equiv k \frac{G_{\phi} a}{L} \quad (3.64)$$

donde:

$$k = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh(n\pi b/2a)}$$

Para el caso de una sección transversal rectangular muy delgada ( $b \gg a$ ) la suma de la serie infinita puede ser despreciada, para dejar  $k = 1$ . En el caso de una sección transversal cuadrada ( $b = a$ ) se tiene que  $k = 0,675$ .

Si se define  $k_2 = k_1/k$  y se toman las ecuaciones 3.60, 3.61 y 3.64 se tiene que el esfuerzo máximo de deformación será:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T}{k_2 a^2 b}$$

Diversos valores para las constantes  $k$  y  $k_2$  pueden obtenerse de 3.63. La aplicación del movimiento de torsión es muy útil en los sensores y actuadores microelectromecánicos, la estructura más común es la de una masa suspendida mediante un par de vigas de torsión como la mostrada en la figura 3.19. El torque actúa sobre las vigas cuando la masa es sujeta a una aceleración en su dirección normal (considerando a la masa como una placa) y las vigas de torsión son dobladas repetidamente. Dado que el ángulo de torsión es proporcional al torque y, a su vez, éste es proporcional a la aceleración, puede tomarse el ángulo de torque

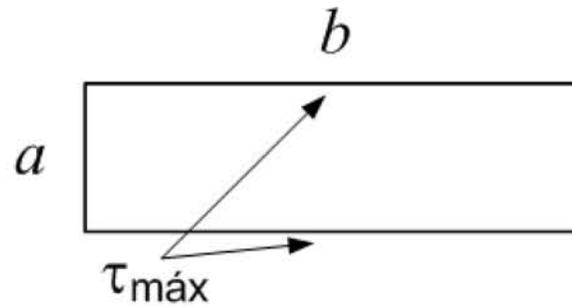


Figura 3.18: Sección transversal de la barra de torsión rectangular.

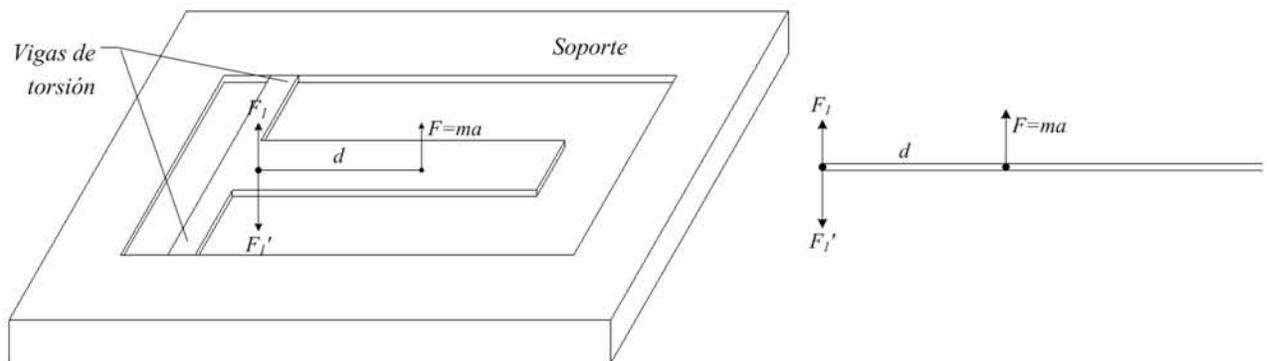


Figura 3.19: Microestructura con barras de torsión. A la izquierda una perspectiva del dispositivo. A la derecha una vista seccional.

como una medida de la aceleración. Muchos acelerómetros micromaquinados disponibles de forma comercial han sido fabricados empleando este principio.

Para una extructura de vigas de torsión como la mostrada en la figura 3.19, si la masa se denomina  $m$  y el centro de masa está fuera del eje formado por las vigas de torsión una distancia  $d$ , la fuerza inercial  $F = ma$  actuando sobre el centro de masa puede descomponerse en dos componentes: una fuerza  $F_1 = ma$  actuando en el centro del eje que de las vigas de torsión y un torque  $T_1 = mad$  formado por las fuerzas  $F_1$  y  $F$ . Por lo tanto, la masa sufrirá un desplazamiento en la dirección normal (pequeña) debido a la flexión de las vigas provocada por  $F_1$  sumada al movimiento de torsión generado por  $T_1$ . En un caso más general, cuando la sección transversal de la viga no es rectangular, de modo tal que el eje de las vigas de torsión no se puede ubicar fácilmente, la fuerza aplicada puede descomponerse tomando como referencia un eje auxiliar llamado centro cortante de las vigas de torsión. El centro cortante es un punto en la sección transversal de la viga dónde puede aplicarse una fuerza perpendicular a la viga sin provocar torsión sobre ésta. Para una viga rectangular, el centro cortante coincide con el centro geométrico del corte transversal.

### 3.3. Método de la energía para el análisis de la frecuencia de oscilación

#### 3.3.1. Sistema masa-resorte

##### Frecuencia de oscilación de un sistema masa-resorte

Una estructura mecánica vibratoria frecuentemente es simplificada como un modelo masa-resorte. La figura 3.20 ilustra una configuración típica para el modelo masa-resorte.

El origen del eje  $x$  está en el centro geométrico de la cara del bloque en su posición de equilibrio. Un desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio,  $x$ , provoca que una fuerza de recuperación actúe sobre la masa como acción del resorte,  $F = -kx$ , donde  $k$  es la constante de elasticidad del resorte. El signo negativo implica que la fuerza apunta en sentido opuesto al sentido de crecimiento del eje  $x$ . Si no existe otra fuerza actuando sobre la masa, la ecuación diferencial para el movimiento de la masa será:

$$m\ddot{x} = -kx$$

Si se define  $\omega^2 = k/m$ , se tiene que:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3.65}$$

La solución general a la ecuación 3.65 es una oscilación sinusoidal de la masa:

$$x = A \text{sen}(\omega t + \alpha) \tag{3.66}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia natural (radial) de la oscilación,  $A$  es la amplitud de la oscilación y  $\alpha$  un ángulo de fase. La frecuencia natural (radial)  $\omega$  está determinada únicamente por los parámetros  $k$  y  $m$ .

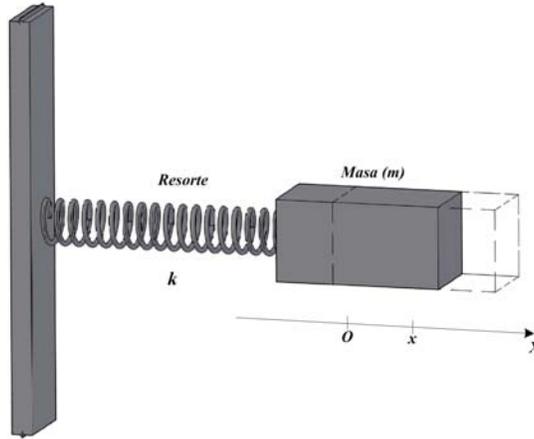


Figura 3.20: Modelo masa-resorte.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.67)$$

La amplitud  $A$  y el ángulo de fase pueden obtenerse a partir de las condiciones iniciales del sistema. Por ejemplo, para  $x = x_0$  y  $\dot{x} = v_0$  en  $t = 0$ , se tiene que:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

y

$$\alpha = \arctan\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right)$$

La frecuencia natural de oscilación,  $\omega$  (más adelante llamada  $\omega_0$ ), puede encontrarse también por medio del principio de conservación de la energía del propio sistema. Dado que la oscilación del sistema masa-resorte puede ser descrita por medio de la ecuación 3.66, la energía potencial del sistema será:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}A^2k \sin^2(\omega t + \alpha)$$

y la energía cinética del sistema se obtiene a partir de:

$$E_K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}A^2\omega^2m \cos^2(\omega t + \alpha)$$

Por lo tanto, la energía total,  $E$ , del sistema será:

$$E = E_p + E_K$$

Cuando  $\omega t + \alpha = 0$ , se tiene  $E = E_{K \text{ máx}} = mA^2\omega^2/2$  y cuando  $\omega t + \alpha = \pi/2$ , se tiene  $E = E_{P \text{ máx}} = kA^2/2$ . De acuerdo con el principio de la conservación de la energía,  $E_{K \text{ máx}} = E_{P \text{ máx}} = E$ , por lo que se tiene:

$$\frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Lo cual conduce al mismo resultado que el mostrado en la ecuación 3.67.

### Frecuencia de oscilación de una viga volada con una masa en el extremo libre

Ahora se analizará la frecuencia de oscilación de una viga volada con una masa,  $m$ , en el extremo libre. Si se asume que la masa colocada en el extremo, es mucho mayor que la masa de la viga y que ésta puede ser despreciada, esta estructura puede considerarse como una sistema masa-resorte. Para encontrar la constante de elasticidad del resorte puede analizarse la relación fuerza desplazamiento de la masa. De acuerdo con la ecuación 3.42, la constante de elasticidad de la viga será:

$$k = \frac{Ebh^3}{4L^3}$$

Sustituyendo este valor de  $k$  en la ecuación 3.67, la frecuencia radial de la estructura masa-viga se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{Ebh^3}{4L^3m}}$$

Por lo tanto, la frecuencia de oscilación del sistema masa-resorte se obtiene a partir de:

$$f = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{Ebh^3}{L^3m}}$$

Por lo que la frecuencia de la oscilación está sólo en función de los parámetros estructurales.

### Frecuencia de oscilación de una viga doblemente anclada y con masa central

Para una viga doblemente anclada con masa central, si la masa de las vigas y la flexión de la masa al centro de la viga son despreciables, la estructura puede considerarse como un sistema masa resorte y la constante del resorte estará dada por la ecuación 3.53. Por lo tanto, la frecuencia natural (radial) de oscilación de la estructura será:

$$\omega = \sqrt{\frac{2Ebh^3}{ma_1^3}}$$

donde  $m = 2\rho BH(L - a_1)$  es la masa que se tiene al centro de la viga.

### Frecuencia de oscilación para una viga sujeta a torsión

El mismo método empleado hasta ahora, puede ser utilizado para vigas sujetas a torsión. Si se considera una barra sujeta a torsión con una masa colocada en un extremo, cuando la barra es torcida un ángulo  $\varphi$  en dicho extremo, el torque de recuperación actuando sobre la masa debido a la barra de torsión será:

$$T = -k_\varphi \varphi$$

donde  $k_\varphi$  es la constante de elasticidad de la barra sujeta a torsión. Si el momento de inercia para la rotación de la masa es  $I_\varphi$ , de acuerdo con la segunda ley de Newton, la ecuación diferencial para la oscilación angular será:

$$I_\varphi \ddot{\varphi} + k_\varphi \varphi = 0 \quad (3.68)$$

La solución a la ecuación 3.68 es una oscilación angular  $\varphi = \Phi \sin(\omega t + \alpha)$ . En donde la frecuencia natural (radial) de la oscilación angular se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_\varphi}{I_\varphi}}$$

### 3.3.2. Método de Rayleigh-Ritz

En la sección previa se analizaron las frecuencias de oscilación de sistemas con masas concentradas y un resorte de masa despreciable. Pero estas relaciones no pueden emplearse para calcularse la frecuencia de oscilación para un sistema con masa distribuida. Existe un método más general, basado en el principio de conservación de la energía, útil para calcular la frecuencia de oscilación de sistemas con masa distribuida, el cual se llama método de Rayleigh-Ritz [25]. Se abordará el método de Rayleigh-Ritz para una viga uniforme con sección transversal rectangular, el resultado será aplicable a otras microestructuras haciendo el análisis y modificaciones pertinentes.

Considérese la energía almacenada en un elemento seccional,  $dx$ , en la posición  $x$  sobre la viga, tal como se muestra en la figura 3.21. El eje  $x$  del sistema de referencia se considera coincidente con la línea centroidal de la viga y el eje  $z$  está orientado en la dirección definida por el grosor de la viga, con el sentido positivo hacia abajo. El desplazamiento de la viga en la dirección  $z$  es una función de  $x$  y  $t$ , es decir,  $f(x, t)$ .

#### Energía potencial

Para una flexión pura en el plano  $x - z$ , el esfuerzo y la deformación en la viga será:  $\varepsilon = -zf''(x, t)$  y  $T = -Ezf'''(x, t)$ , respectivamente. Para una capa delgada de la viga con grosor  $dz$ , las áreas frontal y posterior se calcularán mediante  $bdz$  (donde  $b$  es el ancho de la viga) y las fuerzas normales en ambos extremos quedan expresadas mediante:

$$dF = Tbdz = -Ezf'''(x, t)bdz$$

La elongación de dicha capa en la dirección  $x$ , debido a las fuerzas que actúan sobre ella, se obtiene a partir de:

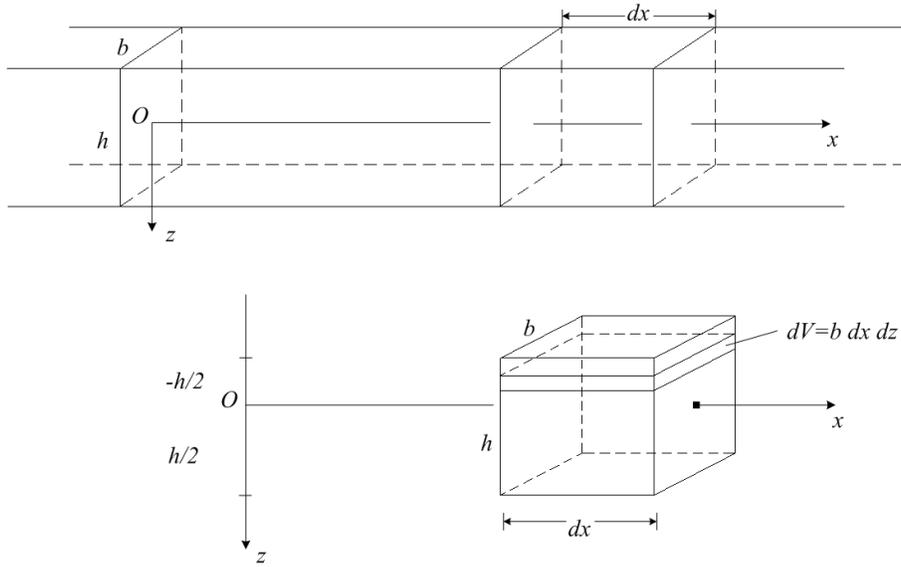


Figura 3.21: Análisis de la energía potencial en una viga.

$$\Delta(dx) = \varepsilon dx = -zf''(x, t) dx \quad (3.69)$$

La energía almacenada en la capa de grosor  $dz$ , la cual es generada por la deformación debida a la flexión de la viga, se expresa mediante:

$$\Delta(dE_p) = \frac{1}{2} df \cdot \Delta(dx)$$

De la ecuación 3.69, la energía potencial en la capa de grosor  $dz$  será:

$$\Delta(dE_p) = \frac{1}{2} E z^2 f''^2(x, t) b dx dz$$

Y la energía potencial almacenada en la sección de viga de largo  $dx$ , será:

$$dE_p = \frac{1}{2} E f''^2(x, t) \left( \int_{-h/2}^{h/2} b z^2 dz \right) dx = \frac{1}{2} E f''^2(x, t) I dx$$

Para la viga completa de longitud  $L$ , la energía potencial total provocada por la flexión será:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L E I f''^2(x, t) dx$$

**Energía cinética**

La energía cinética de un elemento seccional de longitud  $dx$  se obtiene mediante:

$$dE_K = \frac{1}{2} \rho b h dx \left( \frac{df}{dt} \right)^2$$

Y la energía de la viga completa será:

$$E_K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho b h \left( \frac{df}{dt} \right)^2 dx$$

**Funciones de forma aproximadas a los modos de oscilación**

En general, la oscilación de una viga puede describirse mediante:

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n W_n(x, t)$$

Donde  $W_n(x, t)$  es la función de onda del  $n$ -ésimo modo de oscilación con una oscilación sinusoidal de frecuencia radial  $\omega_n$  y una función de forma,  $W_n(x)$ :

$$W_n(x, t) = W_n(x) \text{sen}(\omega t + \alpha_n)$$

Matemáticamente,  $W_n(x, t)$  es una función característica de la ecuación diferencial para el sistema oscilatorio que se abordará en la siguiente sección.

**Cociente de Rayleigh**

Para el modo de oscilación designado por el subíndice  $n$ , la energía potencial será:

$$E_P = \frac{1}{2} c_n^2 \int_0^L EI [W_n''(x)]^2 \text{sen}^2(\omega_n t + \alpha_n) dx$$

y la energía cinética del modo de oscilación se obtendrá a partir de:

$$E_K = \frac{1}{2} c_n^2 \int_0^L \rho b h W_n^2(x) \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \alpha_n) dx$$

Por el principio de conservación de la energía,  $E_{P \text{ máx}} = E_{K \text{ máx}} = E$ , la frecuencia de oscilación del modo puede encontrarse a partir de la siguiente ecuación:

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L EI W_n''^2(x) dx}{\int_0^L \rho b h W_n^2(x) dx} \quad (3.70)$$

La ecuación 3.70 puede emplearse para una viga con una sección transversal no uniforme; si el área de la sección transversal  $A(x)$  es usada para sustituir el producto  $bh$  en el denominador:

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L EI W_n''^2(x) dx}{\int_0^L \rho A(x) W_n^2(x) dx}$$

Expresión que es conocida como el cociente de Rayleigh y el método para la obtención de la frecuencia de oscilación es conocido como el método Rayleigh-Ritz.

### La naturaleza del método Rayleigh-Ritz

Con el cociente de Rayleigh, la frecuencia de oscilación de un modo específico de oscilación puede encontrarse si la función de forma de dicho modo de oscilación es conocida. Normalmente es difícil encontrar las funciones de forma para una estructura. De cualquier modo, la frecuencia de oscilación para un modo de oscilación fundamental (con la frecuencia de oscilación más baja) puede encontrarse mediante el cociente de Rayleigh con gran precisión cuando una función de desplazamiento estático es empleada como una aproximación de la función de forma. En la mayoría de los casos, el modo básico de oscilación tiene gran importancia y el efecto de los modos superiores de oscilación pueden despreciarse ya que sus frecuencias son mucho más altas que la del modo básico de oscilación.

Para algunos modos superiores de oscilación, si es posible encontrar una aproximación apropiada de la función de forma  $W_n(x)$  (basados en la información de las condiciones de frontera, nodos, entre otros datos), entonces las frecuencias de oscilación pueden encontrarse mediante el cociente de Rayleigh con precisión muy aceptable.

Dado que la función de forma  $W_n(x)$  usada para el cálculo de la frecuencia de oscilación mediante el cociente de Rayleigh es una aproximación de la función característica real, el resultado es siempre más alto que el valor verdadero característico de la correspondiente función característica. De cualquier modo, la aproximación usualmente es muy buena para la frecuencia fundamental de oscilación. Los resultados para el primer y segundo armónico pueden resultar también en buenas aproximaciones si las funciones de forma empleadas son las adecuadas.

### 3.3.3. Frecuencias de oscilación de una viga

Ahora se empleará el método de Rayleigh-Ritz para encontrar las frecuencias de oscilación de algunas estructuras típicas basadas en vigas [26]. Las estructuras analizadas son las configuraciones básicas más utilizadas en microsensores y microactuadores.

**Viga volada**

La función de desplazamiento estático para una viga volada dada en la ecuación 3.46 puede reescribirse como:

$$f(x) = \frac{\rho g}{2Eh^2} x^2 (x^2 - 4Lx + 6L^2) = cx^2 (x^2 - 4Lx + 6L^2) \quad (3.71)$$

Esta función puede emplearse como una función de forma aproximada para el cálculo de la frecuencia fundamental de oscilación de la viga volada. Sustituyendo la ecuación 3.71 en la ecuación 3.70 se obtiene:

$$\omega_1 = 3,53 \sqrt{\frac{EI}{m_b L^3}} = 1,019 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.72)$$

donde  $m_b = bhL\rho$  es la masa de la viga volada.

**Viga volada con una masa sujeta en el extremo libre**

Para una viga volada con una masa colocada en el extremo libre,  $m$ , que es mucho mayor que la masa de la viga, la función de desplazamiento estático será:

$$f(x) = c(3L - x)x^2 \quad (3.73)$$

Sustituyendo 3.73 en la ecuación 3.70 para  $W_n(x)$ , se tiene:

$$\omega_1^2 = \frac{36 \int_0^L EI (L - x)^2 dx}{4mL^6}$$

o

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}} = \sqrt{\frac{Ebh^3}{4mL^3}} \quad (3.74)$$

Si la masa de la viga,  $m_b$ , no es despreciable, la frecuencia de oscilación de la estructura masa-viga puede calcularse empleando el método de Rayleigh-Ritz con la misma función de forma que la usada para el caso en que la masa de la viga es despreciable. Usando la ecuación 3.73 como la función de forma, se tiene:

$$\omega_1^2 = \frac{36 \int_0^L EI (L - x)^2 dx}{\int_0^L \rho bh (3Lx^2 - x^3)^2 dx + 4mL^6} = \frac{Ebh^3}{4 \left( m + \frac{33}{140} m_b \right) L^3}$$

o

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{Ebh^3}{4\left(m + \frac{33}{140}m_b\right)L^3}} \quad (3.75)$$

Cuando las ecuaciones 3.75 y 3.74 son comparadas, se aprecia que la masa distribuida de la viga,  $m_b$ , es equivalente a una masa de  $(33/140)m_b$  colocada en el extremo libre de la viga. A continuación se justifica la razón de esta aproximación analizando un caso extremo. Si se utiliza la ecuación 3.75 para una viga volada que no tiene masa alguna colocada en su extremo libre, es decir  $m = 0$ , se tiene:

$$\omega_1 = 1,0299\sqrt{\frac{Ebh^3}{m_bL^3}} = 1,0299\frac{h}{L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

que comparada con la ecuación 3.72, se observa que son muy parecidas. Lo cual recuerda que el método de Rayleigh-Ritz no es sensible a los detalles de la función de forma que se emplee.

Por otra parte, si la masa de la viga y la masa colocada en el extremo libre son consideradas, se puede demostrar que la expresión más precisa para obtener la frecuencia de la oscilación básica sería:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{Ebh^3}{4mL^3} \left( \frac{1 + \frac{3}{4}m' + \frac{3}{20}m'^3}{1 + \frac{552}{560}m' + \frac{26}{80}m'^2 + \frac{26}{720}m'^3} \right)} \quad (3.76)$$

donde  $m' = \rho bhL/m$ . Si la ecuación 3.76 es aproximada hasta la primera potencia de  $m'$ , el resultado es exactamente el mismo que el obtenido mediante la ecuación 3.75.

### Viga doblemente anclada

De acuerdo con la ecuación 3.46, la función de desplazamiento de una viga doblemente anclada será:

$$f(x) = cx^2(L-x)^2 \quad (3.77)$$

Si se sustituye esta expresión en la ecuación 3.70 para  $W_n(x)$ , se tiene:

$$\omega_1 = \frac{22,45}{L^2}\sqrt{\frac{IE}{\rho bh}} = \frac{4,738^2}{L^2}\sqrt{\frac{IE}{\rho bh}} = 6,48\frac{h}{L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.78)$$

Cuando esta última expresión es comparada con la ecuación 3.72, la frecuencia de la oscilación básica para la viga doblemente anclada es más alta que para una viga volada por un factor de alrededor de 6.4.

Supóngase ahora que la función de forma para una viga doblemente anclada puede ser:

$$f(x) = c\left(1 - \cos 2\pi\frac{x}{L}\right) \quad (3.79)$$

pareciera que esta función es diferente de aquella mostrada en la ecuación 3.77, pero la forma general de las ecuaciones 3.79 y 3.77 son similares dado que ambas satisfacen las mismas condiciones de frontera:

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f(L) = 0 \text{ y } f'(L) = 0$$

Sustituyendo la expresión 3.79 en la ecuación 3.70, se tiene:

$$\omega_1 = 6,58 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.80)$$

Resultado que es más cercano, aunque un poco mayor, al resultado mostrado en la ecuación 3.78, dado que la constante exacta es 6,4585. Por tanto, la ecuación 3.77 es una mejor aproximación para la función de forma que la ecuación 3.79.

### Frecuencias de armónicos superiores

La función de forma del primer armónico superior para una viga doblemente anclada es anti-simétrica con un nodo en el punto central de la viga. Por tanto, la función de forma tiene las siguientes condiciones de frontera:

$$f(0) = f(L) = 0; f'(0) = f'(L) = 0; f(L/2) = 0, f''(L/2) = 0 \quad (3.81)$$

Dado que la función de forma es anti-simétrica y el cociente de Rayleigh es una función par de  $x$ , la frecuencia de oscilación puede encontrarse para la longitud de la viga entre  $x = 0$  y  $x = L/2$ .

Si la función de forma que satisface la condición de frontera tiene una forma polinomial:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 \quad (0 \leq x \leq L/2) \quad (3.82)$$

al satisfacer las condiciones de frontera 3.81, se tendrá que  $a = -(5/4)L$  y  $b = (3/8)L^2$ . De este modo, la función de forma aproximada será:

$$f(x) = c \left( x^4 - \frac{5}{4}Lx^3 + \frac{3}{8}L^2x^2 \right) \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right) \quad (3.83)$$

La gráfica de esta función se muestra en la figura 3.22:

Si se utilizan las ecuaciones 3.70 y 3.83 para la región  $0 \sim L/2$ , es posible encontrar la frecuencia radial para el primer armónico superior:

$$\omega_2 = \frac{(7,8621)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 17,84 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.84)$$

Esta es también una buena aproximación para el primer armónico superior ya que el valor exacto de la constante es 17,8034.

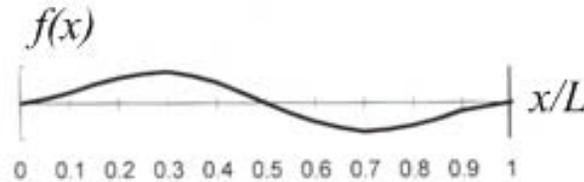


Figura 3.22: Función de forma aproximada para el primer modo superior de vibración.

### 3.4. Modos de oscilación y flexión de una viga

El método de Rayleigh-Ritz sólo puede ser empleado para encontrar un valor característico aproximado de la oscilación del sistema cuando una función de forma aproximada puede ser hallada. De cualquier modo, dado que la función de desplazamiento estático es normalmente una buena aproximación para la función de forma del principal modo de oscilación de un sistema, el método de Rayleigh-Ritz es muy efectivo en la ubicación de la frecuencia para un modo fundamental de oscilación. Para modos de oscilación de mayor frecuencia, el método de Rayleigh-Ritz es, en principio, aplicable pero da paso a la especulación sobre las características de las funciones de forma.

Existe un método más básico para encontrar las frecuencias de oscilación y las funciones de forma para todos los modos de oscilación, que es formular y resolver la ecuación diferencial del sistema oscilatorio [27]. Generalmente se trata de un proceso complicado para problemas prácticos, así que normalmente se emplean métodos numéricos para este fin. En este trabajo será utilizada, para el diseño de los dispositivos, una herramienta de simulación numérica que se basa en el método de análisis de elemento finito. Sin embargo, en esta sección se abordará el planteamiento y la solución de las ecuaciones diferenciales para problemas de vibraciones de estructuras basadas en vigas.

#### 3.4.1. Ecuación diferencial para la oscilación libre de una viga

Considérese un elemento seccional,  $dx$ , de una viga [28] como el mostrado en la figura 3.23.

La fuerza interna cortante aplicada sobre el costado izquierdo de la sección se dirige hacia arriba y se denota con  $F$  y la fuerza interna cortante aplicada sobre el costado derecho se dirige hacia abajo y se denota con  $F + dF$ . El momento de flexión aplicado sobre los costados izquierdo y derecho son  $M$  y  $M + dM$ , respectivamente. Y  $q(x)$  es la fuerza de la carga por unidad de longitud de la viga. Dado que  $F$  y  $F + dF$  se encuentran en direcciones opuestas, la fuerza neta  $dF$  provocará una aceleración del elemento seccional. Esto es, la relación del balance de fuerzas queda expresada mediante:

$$dF + q(x) dx = \rho A \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} dx$$

donde  $q(x) dx$  es la fuerza provocada por la carga sobre el elemento seccional  $dx$  ( $q = \rho gbh$  si la carga es el propio peso de la viga),  $A$  es el área de la sección transversal y es igual a  $bh$  y  $f(x, t)$  es la función de desplazamiento de la viga. De esta relación se tiene:

$$\frac{dF}{dx} + q(x) = \rho A \frac{d^2 f(x, t)}{dt^2} \quad (3.85)$$

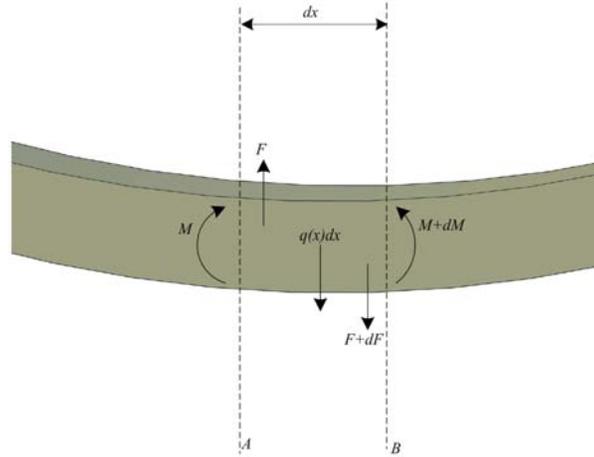


Figura 3.23: Fuerzas y momentos actuando sobre la sección de una viga en movimiento oscilatorio.

Del balance de los momentos de flexión que actúan sobre el elemento seccional, se tiene:

$$M + Fdx - \frac{q(dx^2)}{2} = M + dM$$

Por lo tanto, para un elemento seccional infinitesimal  $dx$  se tiene:

$$F = \frac{dM}{dx} \quad (3.86)$$

Sustituyendo 3.86 en 3.85 se encuentra que:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q(x) = \rho A \frac{d^2 f}{dt^2}$$

De acuerdo con la relación existente entre el momento de inercia y el momento de flexión (ecuación 3.36), es decir,  $M = EI f''(x)$ , se tiene:

$$EI \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = q(x) \quad (3.87)$$

Esta es la ecuación diferencial parcial lineal que gobierna la oscilación de la viga. Si no existe carga sobre la viga, la ecuación se reduce a [39]:

$$EI \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (3.88)$$

Por otra parte, al sustituir la ecuación 3.36 en 3.86, se encuentra que la fuerza cortante puede expresarse como:

$$F = -EI f'''(x)$$

Y dado que la fuerza cortante en el extremo libre de la viga es cero, las condiciones de frontera para dicho extremo serán  $d^3 f/dx^3 = 0$  y  $f''(x) = 0$ .

### 3.4.2. Frecuencias de oscilación de una viga doblemente anclada

Utilizando las condiciones de frontera correspondientes al problema práctico, la ecuación 3.88 puede resolverse para encontrar las frecuencias de oscilación y las correspondientes funciones de forma para diferentes modos de oscilación [30]. Para una viga doblemente anclada (un puente) con longitud  $L$ , las condiciones serán:

$$f(0) = 0, f(L) = 0, f'(0) = 0 \text{ y } f'(L) = 0 \quad (3.89)$$

La solución general a la ecuación 3.88 puede ser vista como la superposición de diferentes modos de oscilación, es decir:

$$f(x, t) = \sum_n W_n \left( \frac{x}{L} \right) (A_n \cos \omega_n t + B_n \text{sen } \omega_n t) \quad (3.90)$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia radial y  $W_n$  la función de forma del  $n$ -ésimo modo de oscilación. Sustituyendo la ecuación 3.90 en la ecuación 3.88 y empleando una variable adimensional  $\eta = x/L$ , se obtienen las ecuaciones para  $W_n(\eta)$ :

$$W_n''''(\eta) - \frac{\rho A}{EI} L^4 \omega_n^2 W_n(\eta) = 0$$

Se define  $(k_n)^4 = \rho A L^4 \omega_n^4 / EI$  y del mismo modo se tendría que  $\omega_n^2 = E I k_n^4 / (\rho A L^4)$ , por tanto:

$$W_n''''(\eta) - k_n^4 W_n(\eta) = 0$$

Si se toma  $W_n = e^{\lambda \eta}$  como una solución, se tiene:

$$\lambda^4 - k_n^4 = 0$$

Por lo tanto, las soluciones a la ecuación serán:

$$\lambda = k_n, -k_n, ik_n, -ik_n$$

Por lo que, el planteamiento general de la función de forma será:

$$W_n(\eta) = A e^{k_n \eta} + B e^{-k_n \eta} + C e^{ik_n \eta} + D e^{-ik_n \eta} \quad (3.91)$$

o

$$W_n(\eta) = A \operatorname{sen}(k_n \eta) + B \cos(k_n \eta) + C \operatorname{senh}(k_n \eta) + D \operatorname{cosh}(k_n \eta)$$

Ya que las funciones características de la ecuación diferencial (las funciones de forma), son ortogonales [27], se cumple la siguiente relación:

$$\int_0^L W_m W_n dx = 0 \quad (\text{para } m \neq n)$$

Sustituyendo 3.91 en 3.89, se obtienen las ecuaciones para calcular  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_n & -k_n & ik_n & -ik_n \\ e^{k_n} & e^{-k_n} & e^{ik_n} & e^{-ik_n} \\ k_n e^{k_n} & -k_n e^{-k_n} & ik_n e^{ik_n} & -ik_n e^{-ik_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0 \quad (3.92)$$

Para soluciones no triviales, el determinante de la matriz en la ecuación 3.92 debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_n & -k_n & ik_n & -ik_n \\ e^{k_n} & e^{-k_n} & e^{ik_n} & e^{-ik_n} \\ k_n e^{k_n} & -k_n e^{-k_n} & ik_n e^{ik_n} & -ik_n e^{-ik_n} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.93)$$

El determinante se reduce a:

$$\operatorname{cosh}(k_n) \cos(k_n) - 1 = 0 \quad (3.94)$$

Este resultado indica que los valores característicos,  $k_n$ , para las funciones de forma, deben satisfacer la ecuación 3.94. Una vez que  $k_n$  es encontrada a partir de la ecuación 3.94, la frecuencia de oscilación correspondiente es determinada mediante:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_n^4 EI}{L^4 \rho A}}$$

o

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Algunos de los valores de  $k_n$  que se encontrarán mediante la ecuación 3.94 se listan a continuación:

$$\begin{aligned}
k_0 &= 0 && \text{no representa un modo de oscilación} \\
k_1 &= 4,73, \quad k_2 = 7,8532, \quad k_3 = 10,996 \\
k_n &\approx \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) && \text{para } n > 3 \quad (\text{a partir de la aproximación de } \cos(k_n) = 0)
\end{aligned}$$

La frecuencia radial del modo fundamental de oscilación será:

$$\omega_1 = \frac{4,73^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 6,4585 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.95)$$

y la frecuencia radial del primer armónico de alta frecuencia:

$$\omega_2 = \frac{7,8532^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 17,803 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.96)$$

Comparando las ecuaciones 3.95 y 3.96 con los resultados obtenidos mediante el método de Rayleigh-Ritz, es decir, las ecuaciones 3.80 y 3.84, se tiene que las discrepancias entre las frecuencias de oscilación encontradas por el método de Rayleigh-Ritz y los resultados exactos obtenidos anteriormente son sólo de un uno por ciento y también que los valores encontrados por medio del método de Rayleigh-Ritz son siempre mayores.

El propósito principal del análisis anterior es aclarar que las frecuencias naturales de oscilación de una viga doblemente anclada forman un espectro infinito de frecuencias de oscilación correspondientes al espectro de los modos infinitos de oscilación. Esto es generalmente verdadero para sistemas oscilatorios y la situación es generalmente mucho más complicada si el sistema mecánico tiene más grados de libertad.

La frecuencia de oscilación de una viga volada puede abordarse a partir del proceso mostrado en esta sección. Para una viga volada, las condiciones de frontera serán [27]:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(L) = 0 \quad \text{y} \quad f'''(L) = 0$$

y las  $k_n$  encontradas serán:

$$k_1 = 1,875, \quad k_2 = 4,694, \quad k_3 = 7,855, \quad k_4 = 10,996, \quad k_5 = 14,137 \quad \text{y} \quad k_6 = 17,279$$

Entonces, la frecuencia radial del modo fundamental de oscilación se obtiene a partir de:

$$\omega_1 = \frac{1,875^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 1,015 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Cuando el resultado se compara con lo obtenido mediante el método de Rayleigh-Ritz expresado por la ecuación 3.72, la diferencia es menor a uno por ciento.

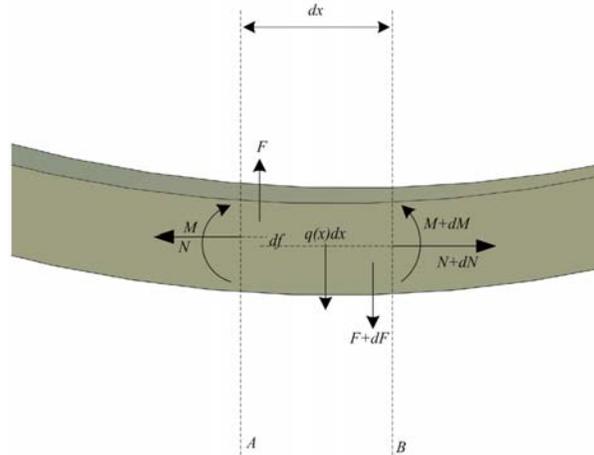


Figura 3.24: Fuerzas y momentos actuando sobre la sección de una viga bajo la acción de una fuerza axial.

### 3.4.3. Oscilación bajo la acción de una fuerza axial

En los análisis previos de esta sección sobre las frecuencias de oscilación libre de una viga no se ha considerado la acción de una fuerza axial. Sin embargo, una fuerza axial puede presentarse en muchos casos e influir de forma significativa sobre la oscilación. Uno de sus principales efectos será provocar que la frecuencia de oscilación del modo de oscilación se recorra. Este efecto es utilizado para propósitos de medición en sensores basados en resonadores. Por tanto, es importante obtener la ecuación diferencial para el caso de una viga bajo la acción de una fuerza axial y analizar los efectos de dicha fuerza sobre la frecuencia de oscilación.

#### Ecuación diferencial de una viga bajo la acción de una fuerza axial

Para una viga bajo la acción de una fuerza axial, la oscilación libre de amplitud pequeña puede ser descrita por medio de una ecuación diferencial parcial. Considérese un elemento seccional,  $dx$ , de una viga. Las fuerzas internas presentes en ambos extremos de la viga se ilustran en la figura 3.24.

En esta figura, a diferencia de la empleada cuando se analizó la oscilación libre de una viga, aparecen un par de fuerzas axiales (denotadas por  $N$  y  $N + dN$ ) sobre ambos extremos del elemento seccional. El efecto de las fuerzas axiales provoca un momento de flexión adicional  $Ndf = Nf'(x)dx$ . El balance de momentos de flexión lleva al planteamiento de la siguiente ecuación:

$$M + Fdx - N \frac{df}{dx} dx = M + dM$$

Por lo tanto, se tiene:

$$F = \frac{dM}{dx} + N \frac{df}{dx}$$

Y sustituyendo esta relación en la ecuación 3.85, se tiene:

$$EI \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = q(x)$$

Si la carga  $q(x)$  es despreciable, se tiene:

$$EI \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.97)$$

### Solución a la ecuación diferencial de una viga bajo la acción de una fuerza axial

Para resolver la ecuación, se utiliza la misma metodología que la empleada en la discusión para obtener las frecuencias de oscilación de una viga doblemente anclada. Por tanto, si se asume que:

$$f(x, t) = \sum_n W_n(\eta) (A_n \cos \omega_n t + B_n \sen \omega_n t)$$

Sustituyendo  $f(x, t)$  en 3.97 para el  $n$ -ésimo modo de oscilación, se obtiene:

$$W_n''''(\eta) - \frac{NL^2}{EI} W_n''(\eta) - \frac{\rho AL^4}{EI} \omega_n^2 W_n(\eta) = 0 \quad (3.98)$$

donde  $\eta = x/L$ . Asumiendo que  $W_n(\eta) = Ae^{\lambda\eta}$ , se tiene la ecuación para  $\lambda$ :

$$\lambda^4 - \frac{NL^2}{EI} \lambda^2 - \frac{\rho AL^4}{EI} \omega_n^2 = 0$$

Si se define:

$$\beta = \frac{NL^2}{2EI} \quad (3.99)$$

y

$$k_n^4 = \frac{\rho AL^4}{EI} \omega_n^2 \quad (3.100)$$

La ecuación para  $\lambda$  queda como:

$$\lambda^4 - 2\beta\lambda^2 - k_n^4 = 0$$

Por lo tanto, se tienen las soluciones:

$$\lambda = \pm i \sqrt{\sqrt{\beta^2 + k_n^4} - \beta}, \quad \pm \sqrt{\sqrt{\beta^2 + k_n^4} + \beta}$$

Si ahora se definen:

$$k_{n1} = \sqrt{\sqrt{\beta^2 + k_n^4} - \beta}, \quad k_{n2} = \sqrt{\sqrt{\beta^2 + k_n^4} + \beta} \quad (3.101)$$

se obtienen las soluciones:

$$\lambda_1 = ik_{n1}, \quad \lambda_2 = -ik_{n1}, \quad \lambda_3 = k_{n2} \text{ y } \lambda_4 = -k_{n2}$$

Por lo tanto, la solución general a la ecuación 3.98 será:

$$W_n(\eta) = Ae^{ik_{n1}\eta} + Be^{-ik_{n1}\eta} + Ce^{k_{n2}\eta} + De^{-k_{n2}\eta}$$

Para satisfacer las condiciones de frontera de la viga y seguir el mismo procedimiento dado en el caso de la viga doblemente anclada, para el cálculo de las soluciones no triviales,  $k_n$  debe satisfacer la siguiente ecuación [30]:

$$\cos k_{n1} \cosh k_{n2} - \frac{\beta}{k_n^2} \operatorname{sen} k_{n1} \operatorname{senh} k_{n2} - 1 = 0 \quad (3.102)$$

Las funciones de forma correspondientes, serán:

$$W_n(\eta) = \frac{\cosh(k_{n2}\eta) - \cos(k_{n1}\eta)}{\cosh(k_{n2}) - \cos(k_{n1})} - \frac{\operatorname{senh}(k_{n2}\eta) - \operatorname{sen}(k_{n1}\eta)}{\operatorname{senh}(k_{n2}) - \operatorname{sen}(k_{n1})}$$

Si no existe la fuerza axial, es decir,  $N = 0$ , la ecuación 3.102 se vuelve la ecuación 3.94. Si  $N \neq 0$ ,  $\beta$  puede determinarse a partir de la ecuación 3.99. Entonces, las ecuaciones 3.101 y 3.102 pueden ser utilizadas para encontrar  $k_n$ . Por lo tanto,  $k_n$  es una función de  $\beta$  (esto es, una función de la fuerza axial  $N$ ). La correspondiente frecuencia de oscilación  $\omega_n$  puede calcularse por medio de la expresión 3.100:

$$\omega_n(\beta) = k_n^2(\beta) \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$$

El procedimiento para encontrar  $k_n$  para un valor específico de  $N$  que satisfaga las ecuaciones 3.101 y 3.102 es un proceso muy elaborado numéricamente. Sin embargo, S. Bouwstra encontró que las soluciones pueden aproximarse mediante la siguiente relación analítica:

$$\omega_n(N) = \omega_n(0) \sqrt{1 + \gamma_n \frac{NL^2}{12EI}} \quad (3.103)$$

donde  $\gamma_n$  son un conjunto de coeficientes que representan la contribución de la fuerza axial. Los valores de  $k_n$  (con fuerza axial nula) y de  $\gamma_n$  se muestran en la siguiente tabla:



Figura 3.25: Flexión (combaro) de una viga doblemente anclada.

n	$k_n$	$\gamma_n$
1	4.73	0.2949
2	4.8532	0.1453
$\geq 3$	$(n + \frac{1}{2}) \pi$	$\frac{12(k_n-2)}{k_n^3}$

El error ocasionado por la aproximación de la ecuación 3.103 es menor al 0,5 % bajo la condición de que  $NL^2/12EI < 1$ .

#### Frecuencia de oscilación de una viga bajo la acción de fuerzas axiales

Para variaciones pequeñas en la frecuencia, puede hacerse una aproximación adicional por medio de la ecuación 3.103:

$$\omega_n(N) = \omega_n(0) \left( 1 + \frac{\gamma_n}{2} \frac{NL^2}{13EI} \right)$$

o bien

$$f_n(N) = f_n(0) \left( 1 + \frac{\gamma_n}{2} \frac{NL^2}{12EI} \right)$$

#### 3.4.4. Flexión de una viga doblemente anclada

De acuerdo con la discusión anterior, la frecuencia de oscilación de la viga decrece conforme decrece también la fuerza compresiva axial sobre la viga, de hecho la frecuencia puede disminuir hasta cero para un cierto valor de la fuerza compresiva axial  $N_b$  y la viga se flexiona como muestra la figura 3.25.

Por ejemplo, un puente hecho de dióxido de silicio, en un microsistema, puede flexionarse (combarse) debido a un esfuerzo o tensión sobre el propio puente provocado por el efecto térmico de expansión del

material. El valor del esfuerzo o tensión en el puente que hace que la viga empiece a combarse es conocido como *buckling strain* o *buckling stress* [31].

Para una fuerza axial compresiva  $N$ , la ecuación 3.97 puede reescribirse como:

$$EI \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Si se supone que  $f(x, t) = X(x)T(t)$ , se tiene:

$$EIX''''(x)T(t) + NX''(x)T(t) + \rho AX(x)\ddot{T}(t)$$

Si la oscilación es de tipo sinusoidal, es decir  $T(t) = C \sin(\omega t + \alpha)$ , se tiene la ecuación para  $X(x)$ :

$$\frac{EI}{\rho A} X''''(x) + \frac{N}{\rho A} X''(x) - \omega^2 X(x) = 0 \quad (3.104)$$

Si se tiene que la forma de  $X(x)$  es  $e^{\lambda \frac{x}{L}}$  la ecuación anterior queda como:

$$\frac{EI}{\rho AL^4} \lambda^4 + \frac{N}{\rho AL^2} \lambda^2 - \omega^2 = 0 \quad (3.105)$$

donde  $L$  es la longitud de la viga. La solución a esta última ecuación será:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{-\frac{NL^2}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{NL^2}{2EI}\right)^2 + \frac{\rho AL^4}{EI} \omega^2}} = \alpha \\ \lambda_{3,4} &= \pm i \sqrt{\frac{NL^2}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{NL^2}{2EI}\right)^2 + \frac{\rho AL^4}{EI} \omega^2}} = \beta \end{aligned}$$

Las soluciones a la ecuación 3.105 pueden escribirse como:

$$\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\alpha, \lambda_3 = i\beta \text{ y } \lambda_4 = -i\beta$$

Por lo tanto, la solución general a la ecuación 3.104 toma la forma:

$$X(x) = A \sinh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + B \cosh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + C \sin\left(\beta \frac{x}{L}\right) + D \cos\left(\beta \frac{x}{L}\right)$$

Las condiciones de frontera para una viga doblemente anclada (un puente) serán:

$$X(0) = 0, X(L) = 0, X'(0) = 0 \text{ y } X'(L) = 0$$

Sustituyendo la forma general de la solución en las condiciones de frontera se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 B + D &= 0 \\
 A \operatorname{senh} \alpha + B \cosh \alpha + C \operatorname{sen} \beta + D \cos \beta &= 0 \\
 A \frac{\alpha}{L} + C \frac{\beta}{L} &= 0 \\
 A \frac{\alpha}{L} \cosh \alpha + B \frac{\alpha}{L} \operatorname{senh} \alpha + C \frac{\beta}{L} \cos \beta + D \frac{\beta}{L} \operatorname{sen} \beta &= 0
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

Para soluciones no triviales, el determinante de la matriz en la ecuación 3.106 debe ser cero:

$$\begin{vmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 \operatorname{senh} \alpha & \cosh \alpha & \operatorname{sen} \beta & \cos \beta \\
 \frac{\alpha}{L} & 0 & \frac{\beta}{L} & 0 \\
 \frac{\alpha}{L} \cosh \alpha & \frac{\alpha}{L} \operatorname{senh} \alpha & \frac{\beta}{L} \cos \beta & -\frac{\beta}{L} \operatorname{sen} \beta
 \end{vmatrix} = 0$$

El determinante queda como:

$$\operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta \left( \frac{\alpha^2 - \beta^2}{L^2} \right) + \frac{\alpha\beta}{L^2} (\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta - \cos \beta \cosh \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha + \cosh \alpha \cos \beta + \cosh^2 \alpha) = 0$$

De acuerdo con las siguientes relaciones  $\beta = \alpha^2 + NL^2/EI$ ,  $\cosh^2 \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha = 0$  y  $\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta = 0$ , se puede reducir el resultado del determinante hasta:

$$\frac{\alpha\beta}{L^2} (1 - \cosh \alpha \cos \beta) = \frac{N}{EI} \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Dado que  $\alpha\beta/L^2 = \omega\sqrt{\rho A/EI}$ , se tiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{N}{EI\rho A}} \cdot \frac{\operatorname{senh}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{2[1 - \cosh(\alpha) \cos(\beta)]}$$

Además dadas las aproximaciones de  $\alpha \cong \omega L\sqrt{\rho A/N}$  y  $\beta \cong L\sqrt{N/EI}$  para  $\omega \cong 0$ , se obtiene:

$$\beta \operatorname{sen} \beta = 2(1 - \cos \beta), \text{ o, } \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \left( \beta \cos \frac{\beta}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right) = 0$$

Existen dos soluciones a la ecuación: 1)  $\beta = 2n\pi$  desde  $\operatorname{sen}(\beta/2) = 0$  y 2)  $\beta = 0$  (es decir,  $N = 0$ ) desde  $\tan(\beta/2) = (\beta/2)$ . Obviamente, el valor más pequeño de la solución diferente de cero  $\beta = 2\pi$  es el estado de flexión (combado) de la viga y la fuerza compresiva que lo provoca se obtiene a partir de:

$$N_b = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 Ebh^3}{3L^2} = 3,29 \frac{Ebh^3}{L^2} \tag{3.107}$$

Esto significa que el esfuerzo que flexiona la viga se calcula mediante:

$$T_b = \frac{\pi^2 E h^2}{3L^2}$$

Debe mencionarse que si la fuerza que flexiona la viga se obtiene a partir de la ecuación 3.102 mediante la *condición de frecuencia cero*, la constante en la ecuación 3.107 es 3,39 en lugar de 3,29.

## 3.5. Vibraciones forzadas y amortiguadas

### 3.5.1. Fuerza de amortiguamiento

Para las vibraciones libres como las descritas hasta ahora, no es necesario que el sistema trabaje frente a fuerzas resistivas de modo tal que su energía total se mantiene constante en cualquier momento. En la práctica, la oscilación de un sistema real siempre enfrenta resistencias de fuerzas disipativas, tales como la viscosidad del aire, la fricción, la transmisión acústica, entre otras. El sistema, por tanto, hace un trabajo positivo. La energía para hacer dicho trabajo proviene de la energía de la oscilación y normalmente se convierte en energía térmica. Por lo tanto, el amortiguamiento es un proceso en el que la energía es tomada del sistema en movimiento oscilatorio.

Generalmente, el amortiguamiento es inevitable en los sistemas. Por ejemplo, la fricción interna en un resorte (flexión) siempre es disipativa y transforma, en cada ciclo, parte de la energía de la oscilación en energía térmica. Otra causa común de amortiguamiento es el movimiento a través de un fluido viscoso como el aire.

Una aproximación de primer orden, de una fuerza de amortiguamiento,  $F_d$ , es la proporcionalidad a la velocidad del movimiento, es decir:

$$F_d = -c\dot{x}$$

donde  $c$  es conocido como el coeficiente de amortiguamiento y el signo negativo significa que la fuerza se opone al movimiento (se presenta en el sentido opuesto). Un sistema en movimiento oscilatorio con amortiguamiento es normalmente modelado como muestra la figura 3.26.

El efecto de amortiguamiento es representado por un amortiguador. El amortiguamiento es un factor que contribuye a que el movimiento cese. En muchos casos, se toman acciones para reducir el amortiguamiento de modo que el movimiento pueda mantenerse con un mínimo suministro de energía por ciclo de oscilación. Sin embargo, en muchos casos, el amortiguamiento es introducido de forma deliberada para reducir las oscilaciones del sistema.

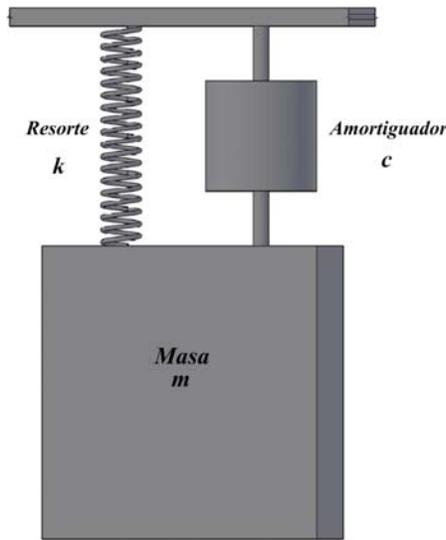


Figura 3.26: Modelo simplificado de un sistema oscilatorio con amortiguamiento.

### 3.5.2. Vibraciones con amortiguamiento

Para un sistema con movimiento oscilatorio, la ecuación diferencial que lo describe es de segundo orden:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

donde  $m$  es la masa y  $c$  el coeficiente de amortiguamiento. Así, se tiene:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3.108)$$

al definir

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (3.109)$$

y

$$n = \frac{c}{2m} \quad (3.110)$$

se llega a:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (3.111)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia natural del sistema oscilatorio si no existe amortiguamiento (es decir, se trata de una oscilación libre) y  $n$  es conocido como coeficiente de amortiguamiento. Si se considera que la forma general de  $x = Ae^{\lambda t}$ , se tiene entonces que:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + \omega_0^2 = 0$$

cuyas soluciones serán:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_0^2}$$

el desempeño del sistema puede discutirse en términos de la razón entre  $n$  y  $\omega_0$ . La razón  $\zeta = n/\omega_0$  es conocida como razón de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento relativo del sistema.

### Subamortiguamiento

Si  $n < \omega_0$ , es decir,  $\zeta < 1$ , se tiene:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{(\omega_0^2 - n^2)}$$

Y la solución a la ecuación 3.111 tiene la forma:

$$x = Ae^{-nt} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\omega_0^2 - n^2}t + \alpha \right)$$

lo cual indica que el sistema oscilará, pero a diferencia de un sistema con oscilación libre, se tiene: (i) la frecuencia de la oscilación es  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$ , la cual es menor que la frecuencia de oscilación libre  $\omega_0$ , y (ii) la amplitud de la oscilación decae de forma exponencial con el tiempo.

### Sobreamortiguamiento

Si  $n > \omega_0$ , es decir,  $\zeta > 1$ , se tiene:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{(n^2 - \omega_0^2)}$$

y

$$x = e^{-nt} \left( c_1 e^{\sqrt{n^2 - \omega_0^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{n^2 - \omega_0^2}t} \right)$$

de donde se concluye que no existe oscilación en el movimiento y que la masa regresa lentamente a su posición de equilibrio.

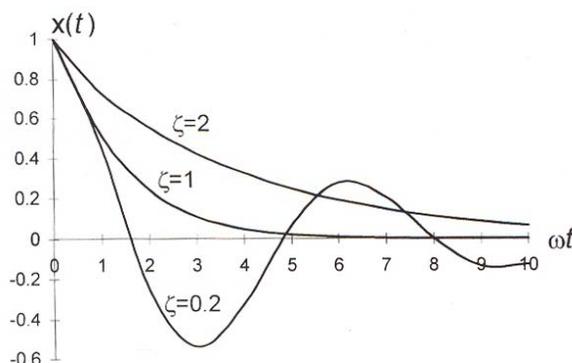


Figura 3.27: Gráfica con las atenuaciones de amplitud de oscilación en sistemas con diferentes coeficientes de amortiguamiento.

### Críticamente amortiguado

Si  $n = \omega_0$ , es decir,  $\zeta = 1$ , se tiene  $\lambda_1 = \lambda_2 = -n = -\omega_0$  y la solución especial a la ecuación 3.111 es  $x_1(t) = c_1 e^{-nt}$ . Asumiendo que la forma de la solución general es  $x = A(t)x_1(t)$  y sustituyéndolo en la ecuación 3.111, se tiene  $d^2A/dt^2 = 0$ . Por lo tanto, la forma general de la solución a la ecuación 3.111 será:

$$x(t) = c_1 e^{-nt} (c_2 t + c_3)$$

de donde se concluye que no existe oscilación pero el tiempo que toma al sistema lograr un desplazamiento nulo es el mínimo.

La figura 3.27 muestra la relación de  $x(t)$  respecto de  $\omega t$  para las tres condiciones de amortiguamiento.

### Respuesta al escalón unitario

Para un sistema masa-resorte, la posición de equilibrio de la masa ocurre cuando  $x = 0$ . Bajo la acción de una fuerza constante  $F_0$  sobre la masa, la posición de equilibrio se alcanza cuando  $x_0 = F_0/k$ .

Si se define a  $F_0$  como una fuerza de magnitud constante y unitaria a partir de  $t = 0$ , se tiene la masa se mueve de su posición de equilibrio,  $x = 0$ , hacia adelante a su nueva posición de equilibrio,  $x_0 = F_0/k$ . Si el efecto del amortiguamiento es despreciable, el sistema tendrá una energía total  $E = F_0 x_0$  cuando la masa alcance la posición  $x_0$  debido al trabajo hecho por la fuerza. Dado que la energía potencial en esta condición es  $kx_0^2/2 = F_0 x_0/2$ , la masa debe tener una energía cinética  $F_0 x_0/2$  en  $x_0$ . Esto significa que la masa deberá seguir adelante después de pasar por  $x_0$  hasta alcanzar  $x'$ , donde el trabajo hecho por la fuerza aplicada es igual a la energía potencial elástica:

$$F_0 x' = \frac{1}{2} k x'^2$$

Ya que  $x' = 2x_0$  no es una posición de equilibrio, la masa retrocederá hasta  $x = 0$ . De este modo, la masa oscilará entre 0 y  $2x_0$ . Cuando el efecto del amortiguamiento sea considerable, la oscilación cesará y la masa

alcanzará finalmente la posición de equilibrio  $x = x_0$  cuando el exceso de energía sea consumido por efecto del amortiguamiento. Por lo tanto, la respuesta del sistema a un escalón depende de forma importante del amortiguamiento.

El proceso puede ser descrito por medio de la ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \quad (3.112)$$

Dado que  $F_0 = kx_0$ , se tiene:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x - x_0) = 0$$

Si se define  $x_1 = x - x_0$  se obtiene la ecuación diferencial en términos de  $x_1$ :

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = 0 \quad (3.113)$$

Con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_0 & \text{para } t = 0 \\ \dot{x}_1 &= 0 & \text{para } t = 0 \end{aligned} \quad (3.114)$$

Por lo tanto, las soluciones a la ecuación 3.111 son aplicables a la ecuación 3.113 y las condiciones iniciales 3.114 pueden utilizarse para determinar las constantes en la solución.

Para el caso de un sistema subamortiguado, es decir,  $\zeta < 1$ , el sistema oscila antes de alcanzar la posición de equilibrio. Así, la expresión para  $x(t)$  será:

$$x = x_0 \left( 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t + \alpha \right) \right)$$

donde  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  y  $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{1-\zeta^2}$ .

Para el caso de un sistema críticamente amortiguado, es decir,  $\zeta = 1$ , el sistema alcanza la posición de equilibrio sin oscilar. La dependencia de la posición  $x$  con respecto del tiempo será:

$$x = x_0 \left( 1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right)$$

Para el caso de un sistema sobreamortiguado, éste alcanzará su posición de equilibrio lentamente. La expresión para  $x(t)$  será:

$$x = x_0 \left( 1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 t} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 t} \right)$$

En la figura 3.28 se muestran las curvas de respuesta en el tiempo para los tres casos abordados.

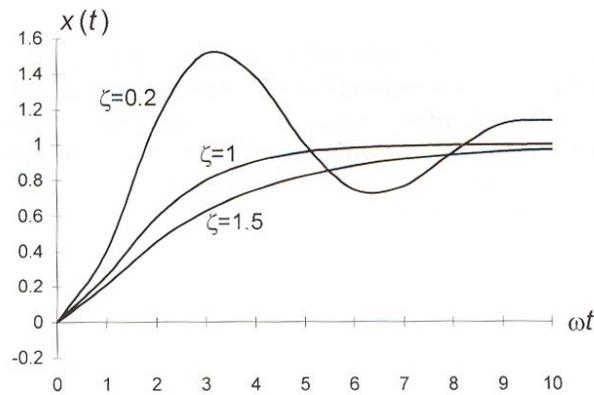


Figura 3.28: Respuesta a una fuerza con forma de escalón para diferentes coeficientes de amortiguamiento.

### 3.5.3. Oscilación provocada por una fuerza

El sistema masa-resorte puede ser llevado a una oscilación continua por medio de una fuerza periódica que actúe sobre la masa [32]. Si la fuerza es de tipo sinusoidal con una frecuencia  $\omega$  y una amplitud  $F_0$ , entonces:

$$F = F_0 \text{sen}(\omega t)$$

así, la ecuación diferencial para el sistema será:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_0 \text{sen}(\omega t) \quad (3.115)$$

La solución a la ecuación 3.115 toma la forma:

$$x = x_1 + x_2$$

donde  $x_2$  es una solución específica a la ecuación 3.115 y  $x_1$  es una solución general a la ecuación diferencial homogénea del sistema amortiguado, esto es, la ecuación para  $x_1$  será:

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = 0$$

La solución a ésta última ecuación es una oscilación amortiguada (para  $n < \omega_0$ ):

$$x_1 = Ae^{-nt} \text{sen}\left(\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t + \alpha\right)$$

Si se asume que  $x_2$  es una oscilación estable:

$$x_2 = B \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

donde  $B$  es la amplitud de la oscilación resultante y  $\varphi$  es el corrimiento en la fase de la oscilación respecto de la aplicación de la fuerza sinusoidal. Si se sustituye  $x_2$  en la ecuación 3.115, se tiene:

$$[B(\omega_0^2 - \omega^2) - f \cos \varphi] \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) + (2nB\omega - f \operatorname{sen} \varphi) \cos(\omega t - \varphi) = 0$$

donde  $f = F_0/m$ . Para satisfacer esta ecuación se tiene:

$$B(\omega_0^2 - \omega^2) - f \cos \varphi = 0$$

y

$$2nB\omega - f \operatorname{sen} \varphi = 0$$

Por lo tanto, se tiene que la amplitud y el corrimiento en la fase se expresan mediante:

$$B = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \quad (3.116)$$

y

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.117)$$

Con lo cual, la solución a la ecuación 3.115 será:

$$x = Ae^{-nt} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\omega_0^2 - n^2} t + \alpha \right) + B \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

Esta solución muestra que en los primeros instantes se presenta una salida de gran amplitud a la oscilación forzada y amortiguada, llevando el sistema de un sobrepaso a oscilaciones transitorias de corta duración.

### Frecuencia de oscilación

La frecuencia de una oscilación estable es la misma que la frecuencia de la fuerza de excitación. De cualquier modo, se presenta un corrimiento en la fase que es función de la frecuencia de oscilación libre  $\omega_0$ , la frecuencia de la fuerza de excitación y la razón de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento relativo, tal como lo indica la ecuación 3.117.

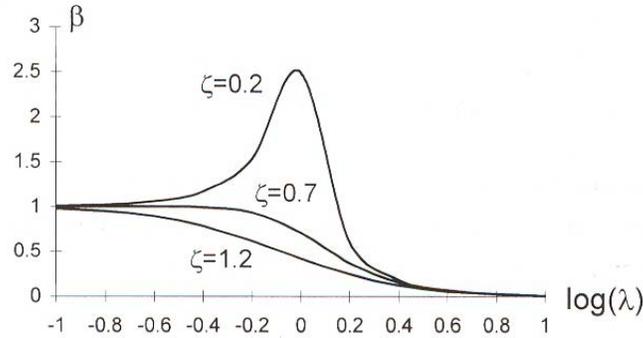


Figura 3.29: Relaciones entre la amplitud y la frecuencia para diferentes coeficientes de amortiguamiento.

### Amplitud

La amplitud de la oscilación estable está dada por la ecuación 3.116 y puede reescribirse como:

$$B = \frac{B_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\zeta}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

donde  $B_0 = F_0/k$  es el desplazamiento estático de la masa provocado por la fuerza constante  $F_0$ . Si  $\omega/\omega_0$  es indicado por  $\lambda$  y se introduce una amplitud relativa  $\beta = B/B_0$ , se tiene:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2 \lambda^2}} \quad (3.118)$$

Para una fuerza de amplitud constante  $F_0$ , se presenta dependencia de  $\beta$  de la frecuencia de excitación.

1. Para el caso de frecuencias bajas,  $\omega \ll \omega_0$  o  $\lambda \ll 1$ ,  $\beta \approx 1$ , lo cual significa que la amplitud es la misma que el desplazamiento provocado por la fuerza constante  $F_0$ .
2. Para el caso en que  $\omega \approx \omega_0$  o  $\lambda \approx 1$ , la amplitud tiene un máximo en  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ . Si el amortiguamiento es pequeño ( $\zeta < 0,7$ ),  $\omega$  es muy cercana a  $\omega_0$  y  $\beta$  es aproximadamente igual a  $1/2\zeta$ , cociente que se hará muy grande para valores pequeños de  $\zeta$ . El pico de resonancia desaparece en  $\zeta \geq 0,7$ . En este caso, la curva para la relación  $\beta \sim \omega$  tiene la mayor región plana (esto es, el mayor ancho de banda). Por lo tanto,  $\zeta = 0,7$  es frecuentemente conocido como condición óptima de amortiguamiento.
3. Para el caso en que  $\omega \gg \omega_0$  o  $\lambda \gg 1$  se tiene que  $\beta \approx 1/\lambda^2$ . Esto significa que la amplitud decae rápidamente con la frecuencia. La figura 3.29 contiene la gráfica que muestra la dependencia de la frecuencia de la amplitud relativa.

Puede apreciarse que la amplitud de una oscilación forzada está en función de la frecuencia de excitación y de la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo).

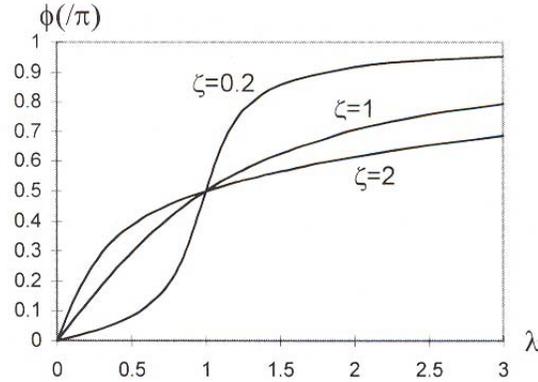


Figura 3.30: Corrimiento de fase de vibraciones forzadas para diferentes coeficientes de amortiguamiento.

### Corrimiento de la fase

La oscilación forzada toma su frecuencia de la fuerza de excitación, pero se presenta un corrimiento en la fase como el mostrado en la ecuación 3.117. Para una  $\omega$  pequeña,  $\varphi$  está cercana a cero.  $\varphi$  aumenta conforme  $\omega$  lo hace, alcanza  $\pi/2$  a la frecuencia natural del sistema y se aproxima a  $\pi$  a muy altas frecuencias, tal como muestra la gráfica de la figura 3.30.

### 3.5.4. Resonancia y factor de calidad

#### Frecuencia de resonancia

De acuerdo con la ecuación 3.118 para un amortiguamiento ligero, la amplitud tiene un máximo alrededor de la frecuencia de oscilación libre. Este fenómeno es conocido como resonancia y la frecuencia correspondiente es llamada, frecuencia de resonancia. Utilizando la condición  $d\beta/d\lambda = 0$ , se tiene que la frecuencia de resonancia de una oscilación forzada se presenta en  $\lambda_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  o  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ . Ya que la frecuencia de la oscilación natural del sistema (sin amortiguamiento) es  $\omega_0$  y la frecuencia de la oscilación amortiguada es  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ , se tiene que para un amortiguamiento ligero,  $\omega_0$ ,  $\omega_d$  y  $\omega_r$  están muy cercanas entre sí.

En la frecuencia de resonancia la amplitud relativa alcanza un valor máximo:

$$\beta_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Para un amortiguamiento ligero, se tiene la amplitud en resonancia:  $\beta_r \doteq 1/2\zeta$ .

#### Corrimiento en la fase en resonancia

Sustituyendo  $\omega_r$  en la ecuación 3.117, se tiene que el corrimiento en la fase en resonancia queda expresado por:

$$\varphi_r = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\zeta} \quad (3.119)$$

Para el caso de un amortiguamiento ligero,  $\varphi_r \doteq \tan^{-1}(1/\zeta) \doteq \pi/2$  o  $\zeta = 1/\tan \varphi_r$ .

### Factor de calidad

Para muchas aplicaciones de registro de mediciones, la agudeza del pico de resonancia es importante, a fin de lograr una alta resolución o una alta precisión en las mediciones. El parámetro que indica lo espigado de la curva de resonancia es el *Factor de Calidad* o *Factor Q* del sistema. Existen diversas definiciones para el factor de calidad y todas ellas son equivalentes para amortiguamientos leves.

La primera definición establece a  $Q$  como el valor pico de la amplitud relativa en la frecuencia de resonancia, es decir:

$$Q = \beta_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.120)$$

Por supuesto, se intuye de antemano que  $Q$  esté relacionado con la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo)  $\zeta$ , de modo que entre más pequeño sea la razón de amortiguamiento, mayor será el factor de calidad.

La segunda definición toma en cuenta aspectos físicos.  $Q$  se define como la razón entre la energía total del sistema y la energía promedio perdida en un radián de frecuencia de resonancia, es decir:

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} \quad (3.121)$$

donde  $E$  es la energía total de la oscilación del sistema y  $\Delta E$  es la energía disipada por el amortiguamiento en un ciclo (igual a  $2\pi$  radianes) de oscilación. La ecuación 3.121 se deduce a partir de la siguiente discusión.

Para un sistema oscilando en su frecuencia de resonancia  $\omega_r$ , el desplazamiento será:

$$x = A \operatorname{sen} \omega_r t$$

Y la energía total del sistema se obtiene a partir de:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_r^2$$

La disipación de energía en un ciclo será:

$$\Delta E = - \int_0^T F_d \dot{x} dt$$

donde  $F_d$  es la fuerza de amortiguamiento, es decir,  $F_d = -c\dot{x}$ . Por lo tanto, se tiene:

$$\Delta E = \int_0^T c \dot{x}^2 dt = \pi c A^2 \omega_r$$

y

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{m\omega_r}{c} \quad (3.122)$$

Si se consideran  $n = \frac{c}{2m}$  y  $\zeta = \frac{n}{\omega_0} \cong \frac{n}{\omega_r}$ , se tiene  $Q \cong \frac{1}{2\zeta}$ .

La tercera definición para  $Q$  es similar a la definición de  $Q$  para un circuito eléctrico resonante. La energía de un sistema oscilatorio es proporcional al cuadrado de la amplitud de la oscilación. En resonancia, el sistema tiene su máxima energía:

$$E_r = C\beta_r^2$$

La amplitud relativa para un medio de la energía máxima es  $\beta_r/\sqrt{2}$ . Existen dos frecuencias para la amplitud: una que es menor que  $\omega_r$  y la otra que es mayor que  $\omega_r$ . Si las dos frecuencias se denominan como  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , se tiene que las frecuencias relativas correspondientes,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , pueden encontrarse por medio de la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_r$$

Tanto  $\lambda_1$  como  $\lambda_2$  se obtienen a partir de:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{1-2\zeta^2} \left( 1 \pm \frac{\zeta}{1-2\zeta^2} \right)$$

Esto conduce a:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{1-2\zeta^2} \frac{2\zeta}{1-2\zeta^2} = \frac{2\zeta}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

Por lo tanto, para un amortiguamiento ligero, se tiene:

$$\frac{\lambda_r}{\Delta\lambda} = \frac{1-2\zeta^2}{2\zeta} \doteq \frac{1}{2\zeta}$$

Lo cual significa que el factor de calidad  $Q$  puede definirse también como:

$$Q = \frac{\lambda_r}{\Delta\lambda} \quad (3.123)$$

Es claro que las tres definiciones son equivalentes para una razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) pequeña, es decir, para un valor grande de  $Q$ . Para microestructuras resonantes de silicio inmersas en aire, el valor del factor de calidad es usualmente del orden de  $10^2$  y puede alcanzar y rebasar valores en el orden de  $10^5$  en el vacío.

### La medición de $Q$

El factor  $Q$  es un parámetro muy importante para caracterizar un sistema oscilatorio. En tanto que la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) que determina el factor de calidad  $Q$  es normalmente muy pequeño y difícil de estimar teóricamente, el factor  $Q$  de un sistema es encontrado generalmente mediante mediciones experimentales.

El primer método se basa en la definición básica según la cual  $Q$  es igual a la amplitud relativa de la oscilación en resonancia del sistema,  $\beta_r$ . Por lo tanto, si se encuentra la relación amplitud-frecuencia para una fuerza de excitación constante con frecuencias que vayan desde cero hasta una frecuencia mayor que la frecuencia de resonancia,  $Q = \beta_r$  podrá encontrarse en la frecuencia de resonancia. Dado que los registros deberán cubrir un gran rango de frecuencias y la amplitud puede variar en varios órdenes de magnitud, dicho registro puede resultar lento e impreciso.

El segundo método toma en cuenta la ecuación 3.123 y encuentra  $Q$  mediante registros de amplitud y frecuencia en un rango pequeño alrededor de la frecuencia de resonancia. Primero se encuentra la frecuencia de resonancia  $f_r$  y la amplitud de la oscilación en resonancia  $A_r$ . A continuación se establece la relación amplitud-frecuencia alrededor de la frecuencia de resonancia mediante mediciones que ubiquen las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  cuyas amplitudes son  $A_r/\sqrt{2}$ . Finalmente el valor del factor  $Q$  se obtiene mediante la relación  $Q = f_r/(f_1 - f_2)$ .

El tercer método recurre a la primera definición del factor de calidad (3.120) y a la definición del corrimiento de fase en resonancia (3.119) y encuentra  $Q$  de forma indirecta a partir de su relación con la razón de amortiguamiento ( $\zeta$ ), el cual a su vez está relacionado con el corrimiento de la fase en resonancia. Por lo tanto, primero se encuentra la frecuencia radial de resonancia  $\omega_r$  y a partir de ello el corrimiento de fase  $\varphi_r$  en resonancia. Finalmente el factor de calidad  $Q$  puede calcularse mediante  $Q = \tan \varphi_r/2$ .

#### 3.5.5. Oscilación provocada por una vibración

En muchos casos un sistema masa-resorte puede ser puesto a oscilar mediante su exposición a una vibración mecánica [33]. Por ejemplo, un acelerómetro montado sobre un generador eléctrico que vibra cuando está en funcionamiento. En estos casos, la fuerza de inercia aplicada sobre la masa de prueba del giroscopio está relacionada tanto con la frecuencia de la vibración como con la amplitud.

Considérese un acelerómetro micromaquinado montado sobre una máquina de dimensiones macroscópicas y asúmase que la masa del acelerómetro es mucho menor que la de la máquina, de modo tal que la vibración de la máquina no se ve afectada por su medición mediante el acelerómetro. El caso se ilustra en la figura 3.31:

El acelerómetro se representa mediante un sistema masa-resorte-amortiguador y su movimiento se encuentra restringido a una dimensión. La vibración de la máquina será:

$$x_M = d_0 \text{sen } \omega t$$

donde  $d_0$  es la amplitud de la vibración y  $\omega$  la frecuencia de la vibración. Si el desplazamiento de la masa de prueba es  $x_m$ , la fuerza elástica del resorte sobre la masa de prueba es  $-k(x_m - x_M)$  dado que el acelerómetro se mueve con la máquina. Por lo tanto, la ecuación diferencial para la masa de prueba será:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x}_m - \dot{x}_M) + k(x_m - x_M) = 0 \quad (3.124)$$

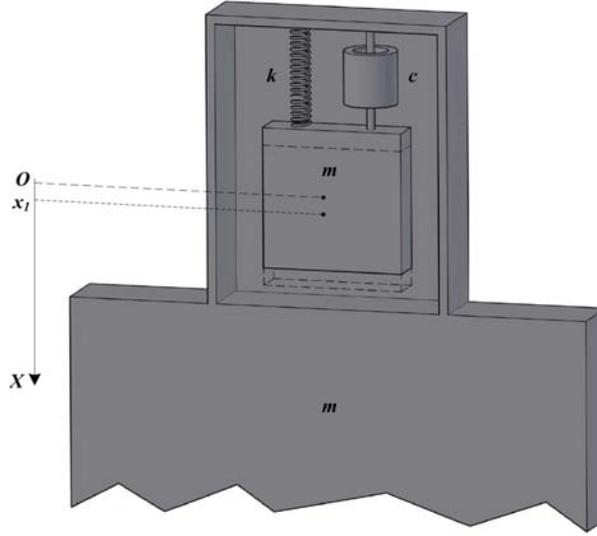


Figura 3.31: Oscilación inducida por una vibración mecánica.

Si se define el desplazamiento relativo de la masa de prueba respecto de la máquina como  $\xi = x_m - x_M$ , la ecuación 3.124 puede reescribirse como:

$$m\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + k\xi = -m\ddot{x}_M = ma_0 \sin \omega t \quad (3.125)$$

donde  $a_0 = d_0\omega^2$  es la amplitud de la aceleración de la vibración.

La ecuación 3.125 es una ecuación diferencial para una oscilación forzada por una fuerza periódica  $ma_0 \sin \omega t = md_0\omega^2 \sin \omega t$ . Para una condición de amortiguamiento ligero, la solución a la ecuación será:

$$\begin{aligned} \xi &= B \sin(\omega t - \varphi) \\ B &= \frac{d_0(\omega^2/\omega_0^2)}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega^2/\omega_0^2)/Q^2}} \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \end{aligned}$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia natural de la vibración del acelerómetro y  $\varphi$  es el corrimiento de fase.

Para el caso de una frecuencia de vibración baja,  $\omega \ll \omega_0$  y  $(1 - \omega^2/\omega_0^2) \gg \omega/Q\omega_0$ , se tiene  $\varphi \approx 0$  y

$$B = \frac{d_0\omega^2/\omega_0^2}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \doteq d_0 \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \right)$$

El desplazamiento de la masa de prueba con respecto de la máquina se calcula a partir de:

$$\xi = \frac{md_0\omega^2}{k} (1 + \omega^2/\omega_0^2) \sin \omega t \quad (3.126)$$

Para la calibración del acelerómetro, la amplitud de aceleración  $d_0\omega^2$  frecuentemente se mantiene constante pero se varía la frecuencia de la vibración. Dado que la salida del acelerómetro es normalmente proporcional a  $\xi$ , la ecuación 3.126 establece que la sensibilidad del acelerómetro es una función de la frecuencia de vibración:

$$S(\omega) = \frac{md_0\omega^2}{k} (1 + \omega^2/\omega_0^2) \equiv S_0 (1 + \omega^2/\omega_0^2) \quad (3.127)$$

donde  $S_0 = md_0\omega^2/k$  es la sensibilidad a muy baja frecuencia y  $S(\omega)$  es la sensibilidad a la frecuencia  $\omega$ . Puede mostrarse que la sensibilidad  $S(\omega)$  es mayor que  $S_0$  por 10% a una frecuencia de  $\omega = 0,316\omega_0$  para un acelerómetro con amortiguamiento ligero.

Si la frecuencia de vibración  $\omega$  iguala la frecuencia de resonancia  $\omega_{res}$  del acelerómetro, se tiene  $B = Qd_0$ . Esto significa que la amplitud de la vibración de la masa de prueba puede ser mucho mayor que la de la vibración de excitación si el acelerómetro no está adecuadamente amortiguado.

Para el caso de una frecuencia de vibración alta,  $\omega \gg \omega_0$ , se tiene  $B = d_0$  y  $\varphi = 180^\circ$ . Por lo tanto,  $\xi = x_m - x_M = -d_0 \text{sen } \omega t$  o  $x_m \approx 0$ . Esto significa que a alta frecuencia, la masa de prueba no sigue del todo a la vibración. Dado que la masa de prueba se mantiene estática si se observa desde el sistema de referencia que tiene asociado, su desplazamiento relativo respecto de su base de sujeción puede emplearse como un espejo para observar la vibración de la máquina. En este caso, la amplitud, en lugar de la aceleración, de la vibración puede ser registrada.



## Capítulo 4

# Amortiguamiento por efecto del aire

Para máquinas convencionales, el amortiguamiento provocado por el aire que la rodea puede despreciarse. En general, esto se debe a que la energía disipada por el amortiguamiento provocado por el aire es mucho menor que la energía disipada por otros medios.

Dado que el amortiguamiento provocado por el aire está relacionado con el área de la superficie de las partes en movimiento, el amortiguamiento puede ser de importancia considerable para los Microsistemas e influir en su respuesta dinámica, sobre todo, si en sus partes móviles la relación área de la superficie en contacto con el aire es mucho mayor que el volumen. Para algunos Microsistemas, la energía consumida por el amortiguamiento debido al aire debe ser minimizada para lograr que el movimiento de las partes mecánicas se maximice con un suministro mínimo de energía.

En otros casos, el amortiguamiento provocado por el aire debe llevarse a niveles en los que el sistema obtenga su respuesta óptima. Por estas razones, la estimación del efecto de amortiguamiento en el sistema es uno de los pasos más importantes en el análisis y diseño de Microsistemas.

### 4.1. Efecto de arrastre de un fluido

#### 4.1.1. Viscosidad de un fluido

##### El coeficiente de viscosidad de un fluido

Un fluido en reposo no puede resistir permanentemente el intento de un esfuerzo cortante por cambiar su forma, la fuerza viscosa aparece como oposición al movimiento relativo entre diferentes capas de un fluido. La viscosidad es entonces una fricción interna entre capas en movimiento con diferentes velocidades.

La fuerza cortante interna en un flujo estable de un fluido viscoso es proporcional al gradiente de velocidad. Si el flujo se presenta en la dirección  $x$  y la velocidad del flujo esta distribuida en la dirección  $y$ , es decir, la velocidad del flujo en la dirección  $x$ ,  $u$ , es función de  $y$ , la fuerza cortante  $\tau_{yx}$  será:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du(y)}{dy} \quad (4.1)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad del fluido. Si el coeficiente de viscosidad de un fluido es una constante para un flujo estable, el fluido es llamado Newtoniano. Las unidades del coeficiente de viscosidad son  $Pa \times s$ . A temperatura ambiente ( $20^\circ C$ ) al aire tiene un coeficiente de viscosidad de  $1,81 \times 10^{-5} [Pa \times s]$  y el coeficiente de viscosidad del agua es  $1,0 \times 10^{-3} [Pa \times s]$ .

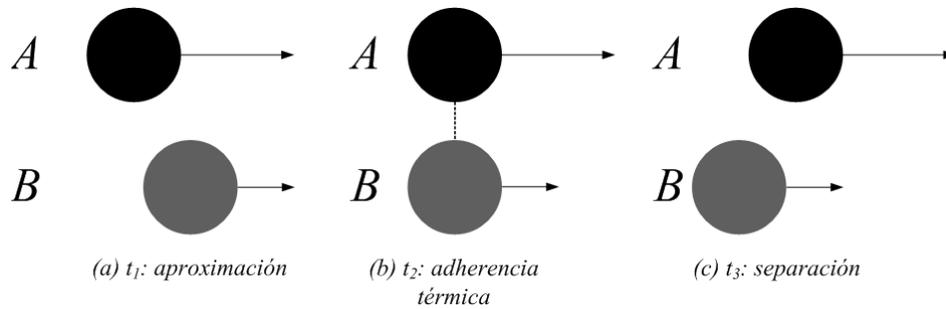


Figura 4.1: Mecanismo de viscosidad en líquidos.

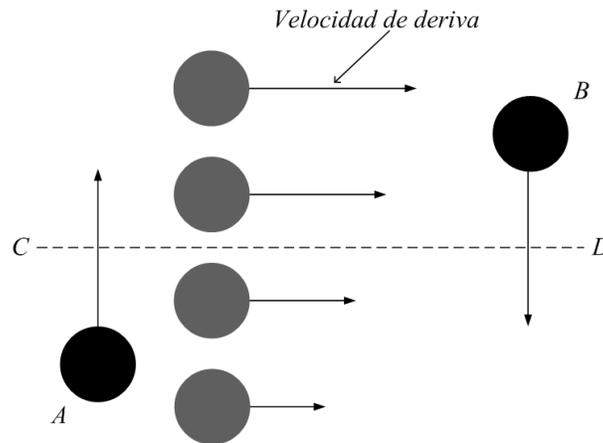


Figura 4.2: Mecanismo de viscosidad en un gas.

### El mecanismo de viscosidad

Aunque líquidos y gases muestran viscosidad, tienen diferentes propiedades debido a diferentes mecanismos físicos. Para un líquido en estado estable, las posiciones relativas de moléculas adyacentes en la misma capa, son básicamente estables, pero las posiciones relativas de las moléculas en capas adyacentes de un flujo laminar, cambian debido al propio movimiento del flujo.

En la figura 4.1 se muestran los cambios de posiciones relativas entre moléculas en capas adyacentes con diferentes velocidades de flujo, donde las moléculas en la capa superior tienen mayor velocidad que las moléculas en la capa inferior. Al principio, la molécula  $A$ , de la capa superior, alcanza a la molécula  $B$ , de la capa inferior, y la rebasa. Esta aproximación de  $A$  a  $B$  conlleva un decremento de la energía potencial intermolecular y un incremento en la energía cinética molecular. Mientras la energía cinética molecular se vuelve desordenada, se forma una adherencia temporal entre las moléculas. Una fuerza externa deberá efectuar un trabajo posterior si las moléculas deben separarse. El trabajo hecho por las fuerzas externas se vuelve aleatorio. De acuerdo con este comportamiento en los líquidos, un incremento en la temperatura significa que las moléculas tienen una mayor velocidad térmica. Es decir, se requiere menor energía para separar los pares de moléculas o, dicho de otra forma, la viscosidad de la mayoría de los líquidos decrece con la temperatura.

Para los gases, el movimiento térmico de una molécula es mucho mayor que su movimiento de arrastre relacionado con el flujo del gas. En la figura 4.2, la molécula  $A$  con una velocidad de arrastre pequeña experimenta un incremento en dicha velocidad conforme se acerca y cruza la frontera  $CD$  (debida al movimiento térmico), a esto se le conoce como incremento del momento de arrastre y experimenta una fuerza hacia la derecha. Esto significa que la molécula ha ejercido una fuerza hacia la izquierda sobre la capa superior, lo cual tenderá a generar un retraso en el movimiento de la capa más rápida.

De forma similar, la molécula  $B$  en la capa más rápida, se mueve hacia abajo, cruzando la frontera  $CD$  y ejerce una fuerza hacia la derecha sobre la capa más lenta dentro de la cual se mueve. Esto es, las moléculas en la capa superior, ejercen una fuerza hacia la derecha sobre la capa inferior, lo cual tiende a incrementar la velocidad de la capa inferior.

### Viscosidad del gas dependiente de la temperatura

Debido al mecanismo descrito con anterioridad, un incremento en la temperatura significa que las moléculas tienen mayor velocidad térmica, lo cual incrementa la razón de moléculas que cruzan de una capa a otra. Por lo tanto, la viscosidad de un gas se incrementa con la temperatura. Un análisis cuantitativo basado en el modelo simple de la teoría cinética de los gases predice que:

$$\mu = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda \quad (4.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del gas,  $\bar{v}$  es la velocidad promedio de las moléculas y  $\lambda$  es la distancia promedio entre colisiones para las moléculas de un gas. De acuerdo con la teoría cinética de los gases,  $\bar{v}$ ,  $\lambda$  y  $\rho$  son:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_m}}, \quad \lambda = \frac{1}{\pi \sqrt{2} n d^2} \quad \text{y} \quad \rho = n \frac{M_m}{N_{av}}$$

respectivamente, donde  $R$  es la constante universal de los gases ( $R = 8,31 \text{ J} \times \text{K}^{-1} \times \text{mol}^{-1}$ ),  $M_m$  la masa molar,  $d$  el diámetro molecular efectivo del gas,  $T$  la temperatura absoluta y  $N_{av}$  la constante de Avogadro ( $N_{av} = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ). Por lo tanto, se tiene que:

$$\mu = \frac{2\sqrt{M_m R}}{3\sqrt{\pi^3} d^2 N_{av}} \sqrt{T}$$

Con lo cual se observa que  $\mu$  es independiente de la presión  $P$ . Maxwell confirmó experimentalmente que este resultado es válido para valores de presión de alrededor de una atmósfera. Esta expresión también muestra que  $\mu$  se incrementa en proporción directa a  $\sqrt{M_m}$  y  $\sqrt{T}$ . La experiencia ha confirmado que  $\mu$  se incrementa con la temperatura pero la potencia excede ligeramente  $\frac{1}{2}$ .

La dependencia molecular y de la temperatura de  $\mu$  se expresa mediante una relación empírica conocida como ecuación de Sutherland:

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + T_S/T_0}{1 + T_S/T} \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

donde  $T_0 = 273,16 \text{ K}$ ,  $\mu_0$  es el coeficiente de viscosidad a temperatura  $T_0$  y  $T_S$  es una constante.  $\mu_0$  y  $T_S$  dependen específicamente del gas considerado. A continuación, se listan algunos valores de estas constantes para diversos gases.

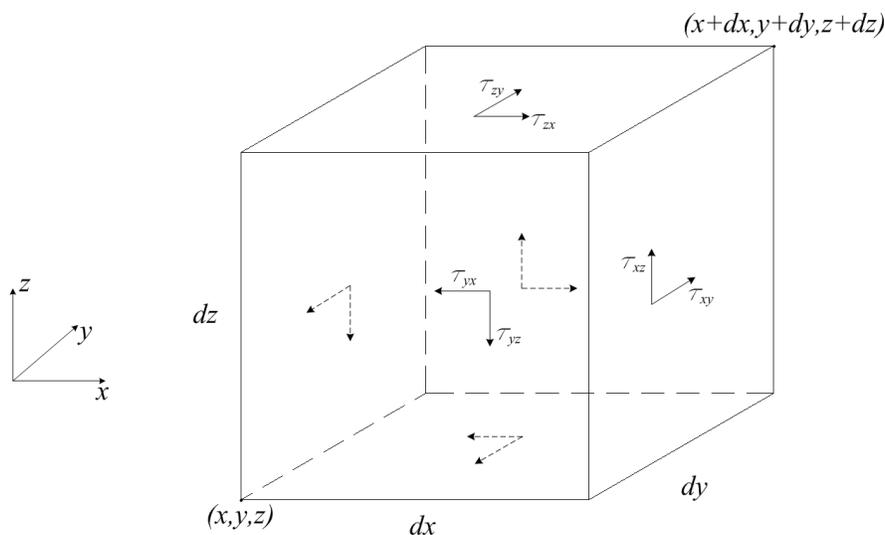


Figura 4.3: Esfuerzos cortantes sobre la superficie de un elemento cúbico en un líquido.

gas	aire	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>
$\mu_0/10^{-6} (Pa \times s)$	17.2	16.6	8.4	13.8
$T_S K^{-1}$	124	104	71	254

Usualmente, el coeficiente de viscosidad de un líquido es mucho más sensitivo a la temperatura que el de un gas. En la siguiente tabla se muestran datos sobre el coeficiente de viscosidad del agua a distintas temperaturas para una presión de una atmósfera, como elemento comparativo se colocan datos relativos al aire a una presión de  $10^{-6} Pa \times s$ .

$T \text{ } ^\circ C$	0	10	20	30	0	50	60	70	80	90	100
H <sub>2</sub> O	1.79	1.3	1.02	0.8	0.65	0.55	0.47	0.41	0.36	0.32	0.28
Aire	17.2	17.8	18.1	18.7	19.2	19.6	20.1	20.4	21	21.6	21.8

### 4.1.2. Flujo viscoso de un fluido

#### Ecuaciones para un flujo viscoso

Considérese un elemento cúbico en un fluido, como el que muestra la figura 4.3.

Existen seis componentes cortantes de fuerza sobre la superficie del cubo, provocados por el gradiente de velocidad del flujo:  $\tau_{xy}(x) dydz$ ,  $\tau_{xy}(x+dx) dydz$ ,  $\tau_{yz}(y) dx dz$ ,  $\tau_{yz}(y+dy) dx dz$ ,  $\tau_{zx}(z) dx dy$ ,  $\tau_{zx}(z+dz) dx dy$ . También están presentes seis componentes normales de fuerza sobre la superficie del cubo que son provocadas por la presión:  $P(x) dydz$ ,  $P(x+dx) dydz$ ,  $P(y) dx dz$ ,  $P(y+dy) dx dz$ ,  $P(z) dx dy$  y  $P(z+dz) dx dy$ .

Para un flujo estable, asumiendo que el peso del fluido es despreciable, el balance de fuerzas para el cubo en la dirección  $z$  será:

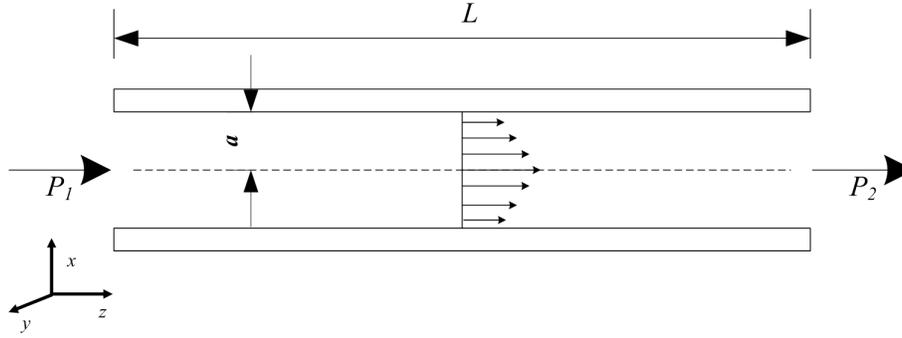


Figura 4.4: Flujo de un fluido en una tubería muy larga.

$$[P(z) - P(z + dz)] dx dy + [\tau_{xz}(x + dx) - \tau_{xz}(x)] dy dz + [\tau_{yz}(y + dy) - \tau_{yz}(y)] dx dz = 0$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$$

y dado que  $\tau_{xz} = \mu \partial w / \partial x$  y  $\tau_{yz} = \mu \partial f / \partial y$ , se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.3)$$

donde  $w$  es la componente de velocidad en la dirección  $z$ . Por la misma razón, se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (4.4)$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (4.5)$$

donde  $u$  y  $v$  son las componentes de velocidad en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. Las expresiones 4.3, 4.4 y 4.5 son ecuaciones para el flujo viscoso de un fluido provocado por una presión  $P$ .

### Flujo viscoso en una tubería

Si se designa a la longitud de una tubería como  $L$  y al radio de la sección transversal circular como  $a$ , se supone que  $L \gg a$  (como lo muestra la figura 4.4) y se ubica al eje  $z$  a lo largo del centroide de la tubería, entonces la ecuación 4.3 es la única que puede emplearse para determinar el flujo.

Dado que la longitud de la tubería,  $L$ , es mucho mayor que el radio,  $a$ , el flujo en la tubería se presenta en la dirección  $z$  y la distribución de la velocidad es radialmente simétrica, puede emplearse un sistema coordenado polar en el plano  $x$ - $y$  que haga coincidir su polo con el centro geométrico de la sección transversal circular de la tubería, y por tanto, la ecuación 4.3 puede escribirse como:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w(r)}{\partial r} \right)$$

Después de integrar una vez con respecto a  $r$ , se tiene:

$$r \frac{\partial}{\partial r} w(r) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} r^2 + C_1$$

dado que  $\partial w(r) / \partial r = 0$  en  $r = 0$ , se tiene  $C_1 = 0$ . Y después de una segunda integración con respecto a  $r$  se tiene:

$$w(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} r^2 + C_2$$

de acuerdo con la condición de frontera de *no deslizamiento* expresada como:

$$w(a) = 0$$

se tiene que:

$$w(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (a^2 - r^2)$$

El signo negativo indica que la velocidad es opuesta al gradiente de presión. Si la diferencia de presiones entre los dos extremos de la tubería es  $P$ , es decir,  $\partial P / \partial z = P/L$ , se tiene:

$$w(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{P}{L} (a^2 - r^2)$$

La tasa de flujo, es decir, el volumen de fluido pasando a través de la tubería por unidad de tiempo, será:

$$Q = \int_0^a |w(r)| 2\pi r dr$$

Resolviendo la integral se tiene:

$$Q = \frac{\pi a^4 P}{8\mu L} \quad (4.6)$$

Expresión que es conocida como ecuación de Pouseuille. A partir de la ecuación 4.6, la velocidad promedio del flujo se calcula mediante:

$$\bar{w} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2 P}{8\mu L}$$

Es pertinente aclarar que, para los gases, los resultados antes expuestos son exactos sólo cuando el diámetro de la tubería es mucho mayor que la distancia promedio entre colisiones para las moléculas del gas. De otra forma, la condición de frontera de *no deslizamiento* deberá ser modificada.

### Número de Reynolds

El patrón de flujo descrito con anterioridad es un flujo ordenado conocido como flujo laminar. Un flujo laminar ocurre sólo cuando la velocidad del flujo es pequeña. El flujo se volverá turbulento si la velocidad del flujo excede un cierto límite. El criterio para la turbulencia está usualmente dado por el valor del número de Reynolds que se representa como  $Re$ .  $Re$  es un número adimensional, que para un tubo tiene la forma:

$$Re = \frac{\bar{v}\rho d}{\mu}$$

donde  $\rho$  es la densidad de la masa del fluido,  $\bar{v}$  la velocidad promedio del fluido y  $d$  el diámetro del tubo.  $Re$  es un parámetro que puede medir la estabilidad del fluido. De cualquier forma, el valor crítico de  $Re$  que provoca la inestabilidad del flujo del fluido, depende fuertemente de la forma del tubo y solo puede ser determinada de forma experimental. Para tubos con sección circular, se tiene:

1.  $Re < 2200$ , el flujo es laminar.
2.  $Re \approx 2200$ , el flujo es inestable.
3.  $Re \geq 2200$ , el flujo es turbulento.

El número de Reynolds también es útil en la medición de la estabilidad del fluido en movimiento a través de un objeto sólido dentro del fluido (o, de la estabilidad de un objeto moviéndose a través de un fluido en reposo). En este caso, la forma general del número de Reynolds resulta:

$$Re = \frac{\nu\rho l}{\mu}$$

donde  $l$  es una dimensión característica del objeto. Por ejemplo,  $l$  es el diámetro de una esfera y, para una columna con una sección transversal circular moviéndose a través del fluido lateralmente,  $l$  es el diámetro de la sección transversal. El valor crítico del número de Reynolds que provoca inestabilidad depende de la forma del objeto y puede ser determinada sólo de forma experimental. Dado que  $Re$  es normalmente pequeño para micromáquinas, sólo se considerará la condición de flujo laminar.

### 4.1.3. Amortiguamiento por la fuerza de arrastre

Una fuerza de arrastre puede ser aplicada sobre un cuerpo si el cuerpo se mantiene estable sobre un fluido que transcurre (o el cuerpo es arrastrado a través de un fluido estable) dado que existe un gradiente de velocidad entre la capa de la frontera y los puntos más distantes en el fluido viscoso. En virtud de que el análisis para la fuerza de arrastre es un tanto complicado, las fuerzas de arrastre para algunos cuerpos con estructuras simples moviéndose a través de un fluido viscoso se dan a continuación:

1. **Esfera con un radio  $r$ .**

$$F = 6\pi\mu r v \quad (4.7)$$

2. **Disco circular con radio  $r$  moviéndose en su dirección normal.**

$$F = 16\pi\mu r v \quad (4.8)$$

3. **Disco circular con radio  $r$  moviéndose en el plano que lo contiene.**

$$F = \frac{32}{3}\pi\mu r v \quad (4.9)$$

donde  $v$  es la velocidad de la esfera o del disco circular relativa al fluido.

Los tres casos presentados pueden compararse entre sí y se puede encontrar que la dependencia de las fuerzas de arrastre respecto de diferentes secciones transversales o respecto de las direcciones de movimiento no son significativas. Las tres fuerzas de arrastre para movimientos a bajas velocidades pueden escribirse con la misma forma:

$$F = 6\pi\alpha\mu r v \quad (4.10)$$

donde el valor de  $\alpha$  para una esfera, un disco moviéndose en su dirección normal y un disco moviéndose en el plano que lo contiene son 1, 0,85 y 0,567, respectivamente. Destaca el hecho de que las fuerzas de arrastre son independientes de la densidad del fluido,  $\rho$ , lo que se conoce como Ley de Stokes.

De cualquier forma, esta conclusión no es válida para grandes velocidades en el movimiento. La fuerza sobre una esfera con radio  $r$  oscilando en un fluido, está dada por:

$$F = -\beta_1 v - \beta_2 \frac{dv}{dt}$$

con

$$\beta_1 = 6\pi\mu r + 3\pi r^2 \sqrt{2\rho\mu\omega}$$

y

$$\beta_2 = \frac{2}{3}\pi\rho r^3 + 3\pi r^2 \sqrt{\frac{2\rho\mu}{\omega}}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia radial de la oscilación. Debe notarse que tanto  $\beta_1$  como  $\beta_2$  son dependientes de la densidad del fluido.

#### 4.1.4. Efectos del amortiguamiento debido al aire sobre la dinámica de los Microsistemas

Como se vió en la sección anterior, la fuerza de arrastre aplicada a una esfera moviéndose en un fluido viscoso a una velocidad  $v$  es  $F = 6\pi\mu rv$ , donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad del fluido y  $r$  el radio de la esfera. La relación entre la fuerza de arrastre,  $F$ , y la masa del cuerpo,  $M$ , se expresa mediante:

$$\frac{F}{M} = \frac{6\pi\mu rv}{4\pi r^3 \rho/3} = \frac{9}{2} \frac{\mu v}{\rho r^2}$$

donde  $\rho$  es la densidad específica del cuerpo. Cuanto menor sea la dimensión del cuerpo, mayor será el efecto de la fuerza de arrastre sobre dicho cuerpo. Por ejemplo, para una esfera de silicio de radio  $r = 1 \times 10^{-2}$  [m] moviéndose entre aire a una velocidad de  $0,01$  [ $\frac{m}{s}$ ], la relación  $F/M$  es  $3,5 \times 10^{-6}$  [ $\frac{m}{s^2}$ ], en tanto que para una esfera de silicio de radio  $r = 10 \times 10^{-6}$  [m], la relación  $F/M$  es  $3,5$  [ $\frac{m}{s^2}$ ], es decir, un millón de veces mayor. Por lo tanto, la fuerza de arrastre provocada por la viscosidad del aire envolvente es normalmente despreciable para estructuras mecánicas convencionales, pero en el caso de microestructuras es de gran importancia considerar sus efectos.

En el caso de un acelerómetro simple (sistema masa-resorte) su comportamiento dinámico se expresa mediante la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

donde  $k$  es la constante del resorte formado por una viga y  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento provocado por el aire envolvente. Un parámetro dinámico muy importante del acelerómetro es la razón de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento relativo del sistema ( $\zeta$ ):

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia natural no amortiguada del sistema. La razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo),  $\zeta$ , para un acelerómetro normalmente se fija alrededor de  $0,7$  de modo que el sistema alcance su mejor respuesta en frecuencia a una señal de entrada. Frecuentemente, el factor de calidad,  $Q$ , es utilizado para caracterizar el sistema mecánico. Para un amortiguamiento pequeño, la relación entre el factor de calidad y el coeficiente de amortiguamiento relativo se expresa mediante:  $Q = \frac{1}{2\zeta}$ .

De acuerdo con la ecuación 4.10, la constante del amortiguamiento,  $c$ , es proporcional a las dimensiones de la estructura mecánica y al coeficiente de viscosidad del fluido envolvente. Dado que  $m$  es frecuentemente mayor para un acelerómetro hecho de estructuras mecánicas convencionales, el coeficiente de amortiguamiento relativo,  $\zeta$ , debido al aire es usualmente muy pequeño. Por esta razón es difícil llevar el coeficiente de amortiguamiento relativo a valores cercanos a  $0,7$ , incluso si la estructura es inmersa en aceite de alta viscosidad. En cambio, para un acelerómetro micromaquinado, el coeficiente de amortiguamiento relativo puede llevarse fácilmente a valores cercanos a  $0,7$  si está inmerso en aire y se emplean las estructuras clásicas de los Microsistemas para incrementar la fuerza de amortiguamiento en forma controlada. Los mecanismos básicos de amortiguamiento debidos al aire para Microsistemas son el amortiguamiento por compresión de películas de aire y deslizamiento de superficies sobre películas de aire, además del amortiguamiento debido a la fuerza de arrastre que se abordó en las secciones previas.

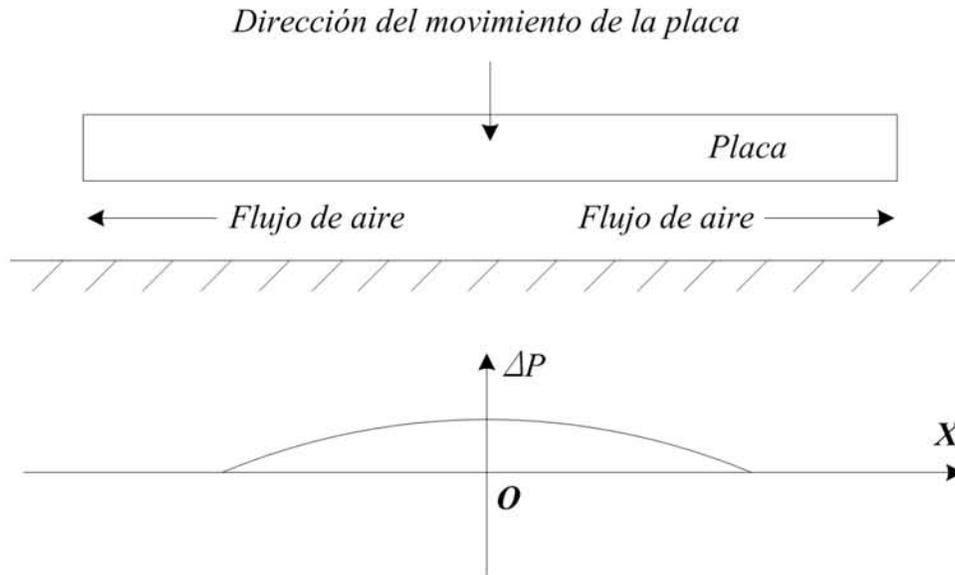


Figura 4.5: Presión ejercida por un movimiento de compresión sobre el aire contenido entre dos placas.

## 4.2. Amortiguamiento por compresión de una película de aire

### 4.2.1. Ecuación de Reynolds para amortiguamiento por presión sobre una película de aire

Cuando una placa es colocada de forma paralela a la referencia mecánica (oblea) y la placa se mueve al encuentro de dicha referencia, la película de aire entre la placa y la referencia se estruja de modo que parte del fluido (aire) se va hacia afuera del área de traslape como se muestra en la figura 4.5. Por lo tanto, una presión adicional  $\Delta p$  se manifiesta en el traslape debido al flujo viscoso del aire. En el caso contrario, cuando la placa se aleja de la referencia, la presión en el área de traslape se reduce por efecto del flujo de aire que ingresa.

Por tanto, cualquier movimiento en la dirección normal a la placa encuentra fuerzas provocadas por las variaciones de la presión que siempre están en oposición a dicho movimiento. Así, el trabajo hecho por la placa es consumido por el flujo viscoso del aire y transformado en calor. En otras palabras, la película de aire actúa como amortiguador y el amortiguamiento se conoce como amortiguamiento por compresión (estrujamiento) de una película de aire.

Obviamente, la fuerza de amortiguamiento es dependiente de la distancia de traslape; mientras más pequeña sea la distancia, mayor será la fuerza de amortiguamiento. Cuando la placa está muy alejada de la referencia (oblea), las variaciones en la presión, son despreciables y la fuerza de amortiguamiento se debe principalmente a la fuerza de arrastre.

El amortiguamiento por compresión (estrujamiento) de una película de aire tiene efectos significativos sobre el comportamiento dinámico de las microestructuras. En muchos casos, éste deberá reducirse y, en algunos otros casos, deberá ser controlado para mantenerlo en un nivel deseado.

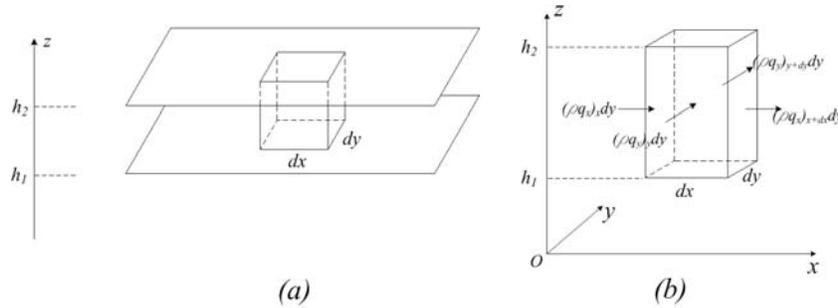


Figura 4.6: Flujo de masa dentro y fuera de un elemento unitario. (a) una columna elemental, (b) las tasas de flujo.

### Ecuación de Reynolds

Si se supone la disposición de un par de placas con el plano  $x-y$  del sistema de referencia cartesiano como se muestra en la figura siguiente 4.6, y además, se suponen las dimensiones de las placas mucho mayores a la distancia entre ellas, de modo que el flujo del gas atrapado entre las placas (debido al movimiento relativo entre ellas) es lateral.

Se considera un elemento columna,  $h dx dy$  (donde  $h = h_2 - h_1$ ), como se muestra en la figura siguiente.  $q_x$  es la tasa de flujo en la dirección  $x$  por unidad de ancho en la dirección  $y$  y  $q_y$  es la tasa de flujo en la dirección  $y$  por unidad de ancho en la dirección  $x$ . El balance del flujo de masa para el elemento columna  $h dx dy$  requiere que:

$$(\rho q_x)_x dy - (\rho q_x)_{x+dx} dy + (\rho q_y)_y dx - (\rho q_y)_{y+dy} dx = \left( \frac{\partial \rho h_2}{\partial t} - \frac{\partial \rho h_1}{\partial t} \right) dx dy$$

Y haciendo uso de las relaciones:  $(\rho q_x)_{x+dx} = (\rho q_x)_x + [\partial(\rho q_x) / \partial x] dx$ ,  $(\rho q_y)_{y+dy} = (\rho q_y)_y + [\partial(\rho q_y) / \partial y] dy$  y  $h = h_2 - h_1$ , se tiene:

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (4.11)$$

Para encontrar  $q_x$  y  $q_y$ , primero debe encontrarse la distribución de la velocidad en la dirección  $z$ . Dado que las dimensiones de la placa son mucho mayores que la separación y el flujo es lateral, las componentes de velocidad  $u$  y  $v$  son funciones sólo de  $z$ . De la ecuación 4.5 se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Sin embargo, para una separación muy pequeña,  $P(x, y)$  no es función de  $z$ . Después de integrar la ecuación dos veces, se tiene:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} z^2 + C_1 \frac{1}{\mu} z + C_2 \quad (4.12)$$

Si las placas no se mueven lateralmente y se coloca el origen del sistema de referencia sobre la placa inferior, las condiciones para la ecuación 4.12 serán:

$$u(0) = 0, \quad u(h) = 0$$

Por lo tanto:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} z(z-h)$$

La tasa de flujo en la dirección  $x$  por unidad de ancho en la dirección  $y$  será:

$$q_x = \int_0^h u dz = -\frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (4.13)$$

El signo negativo en la ecuación indica que el flujo se presenta en la dirección en que decrece la presión. Del mismo modo se tiene que:

$$q_y = -\frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (4.14)$$

Sustituyendo 4.13 y 4.14 en 4.11, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{\partial (h\rho)}{\partial t} \quad (4.15)$$

La ecuación 4.15 se conoce como ecuación de Reynolds. Esta misma ecuación puede derivarse de la ecuación de Navier-Stokes, que es mucho más complicada, bajo la condición de que el Número Modificado de Reynolds para una película delgada y sometida a presión,  $R_s$ , sea mucho menor que la unidad, es decir:

$$R_s = \frac{\omega h^2 \rho}{\mu} \ll 1$$

donde  $\omega$  es la frecuencia radial de oscilación de la placa. Esta condición es satisfecha para estructuras típicas de silicio, por ejemplo, un acelerómetro con una película de aire cuyo grosor sea de 10  $[\mu m]$ , oscilando a una frecuencia de 1  $[kHz]$ , tendría un Número Modificado de Reynolds de  $R_s = 0,045$ .

Dado que se asume que  $h$  es uniforme en las direcciones  $x$  y  $y$ , se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{\mu}{h^3} \frac{\partial (h\rho)}{\partial t}$$

Para una película isotérmica, la densidad del aire,  $\rho$ , es proporcional a la presión  $P$ , es decir,  $\rho = \frac{P}{P_0} \rho_0$ , por lo que la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( P \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{\mu}{h^3} \frac{\partial (hP)}{\partial t} \quad (4.16)$$

Se desarrolla la ecuación 4.16 para quedar como:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + P \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} P + \frac{\partial^2}{\partial y^2} P \right) = 12 \frac{\mu}{h^3} \left( P \frac{dh}{dt} + h \frac{\partial P}{\partial t} \right)$$

Asumiendo que  $h = h_0 + \Delta h$  y  $P = P_0 + \Delta P$ , para movimientos de la placa en distancias pequeñas, se tiene que  $\Delta h \ll h_0$  y  $\Delta P \ll P_0$ . Bajo estas consideraciones, la ecuación puede aproximarse como:

$$P_0 \left( \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2} \right) = 12 \frac{\mu}{h^3} P_0 h_0 \left( \frac{1}{h_0} \frac{d\Delta h}{dt} + \frac{1}{P_0} \frac{\partial \Delta P}{\partial t} \right)$$

Si  $\Delta P/P_0 \ll \Delta h/h_0$ , se tiene:

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2} = 12 \frac{\mu}{h^3} \frac{d\Delta h}{dt}$$

o

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 12 \frac{\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (4.17)$$

En la última ecuación  $P$  es equivalente a  $\Delta P$ . Es decir, la letra  $P$  en esta ecuación es algunas veces leída como  $\Delta P$ . Pero debe prestarse atención a la diferencia en las condiciones de frontera para  $P$  y  $\Delta P$ :  $P = P_0$  pero  $\Delta P = 0$  en la periferia de la placa. Supóngase que la dimensión típica de la placa es  $l$  (puede ser el radio de un disco o la mitad del ancho de un rectángulo) y el movimiento de la placa es una oscilación sinusoidal con amplitud  $\delta$ , tal como  $h = h_0 + \delta \sin \omega t$ . A partir de la ecuación 4.17 se puede obtener una estimación de  $\Delta P$ :

$$\frac{\Delta P}{l^2} = 12 \frac{\mu}{h^3} \delta \omega \cos \omega t$$

o

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{12 \mu l^2 \omega}{P_0 h^2} \frac{\delta \cos \omega t}{h} = \sigma \frac{\delta \cos \omega t}{h}$$

donde  $\sigma \equiv 12 \mu l^2 \omega / P_0 h_0^2$  se conoce como coeficiente de compresión (estrujamiento). Dado que  $\delta \cos(\omega t)$  tiene el mismo orden de magnitud que  $\Delta h = \delta \sin(\omega t)$  se tiene:

$$\frac{\Delta P}{P_0} \cong \sigma \frac{\Delta h}{h_0}$$

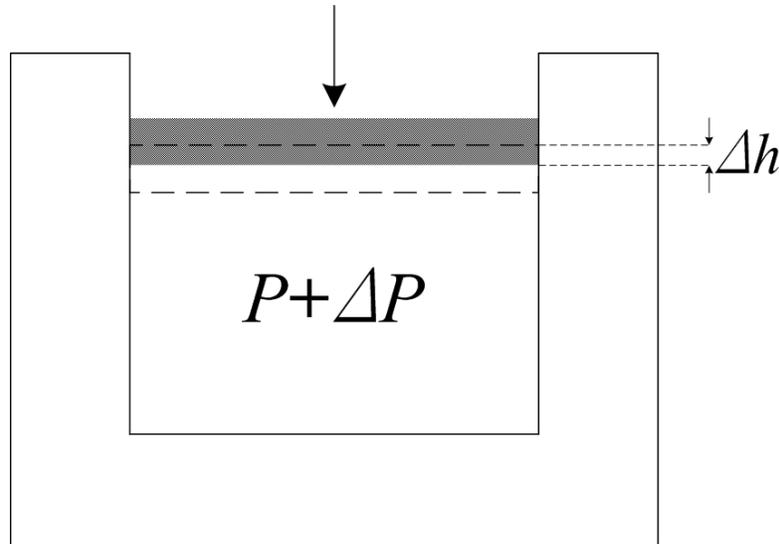


Figura 4.7: Compresión de un gas debida a la acción de un pistón.

Por lo tanto, la condición para la validez de la ecuación 4.17,  $\Delta P/P_0 \ll \Delta h/h_0$ , es equivalente a un coeficiente de compresión (estrujamiento) muy pequeño,  $\sigma \ll 1$ , o dicho de otra forma:

$$\frac{l}{h_0} \ll \sqrt{\frac{P_0}{12\mu\omega}}$$

Como es bien sabido la presión del aire  $P$  en un cilindro cerrado, como el mostrado en la figura 4.7, es inversamente proporcional a la distancia entre el pistón y la parte baja del cilindro, es decir,  $\Delta P/P = \Delta h/h$  (para  $\Delta h \ll h$ ). Para el caso de dos placas paralelas sin paredes laterales será mucho más difícil aumentar la presión del aire entre ellas, ya que nada impide que el aire escape, esto implica que la suposición de que  $\Delta P/P \ll \Delta h/h$  es verdadera en la mayoría de las condiciones prácticas.

El coeficiente de compresión (estrujamiento) es una medida de la eficiencia que tiene en el establecimiento de la presión el apretón que se da a la placa móvil. Para un pistón sellado en su periferia se tiene:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = 1 \frac{\Delta h}{h_0}$$

lo cual significa que la presión relativa cambia a la par de la variación de la compresión (estrujamiento). Con lo cual se puede afirmar que existe un coeficiente de compresión (estrujamiento) unitario en un pistón cerrado y un coeficiente de compresión (estrujamiento) menor a la unidad para una placa sin paredes laterales.

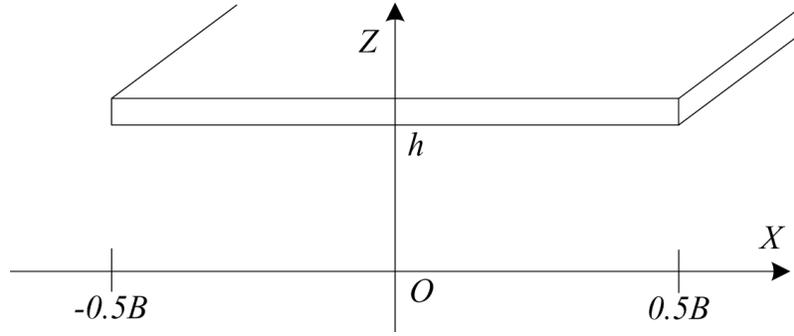


Figura 4.8: Amortiguamiento debido a la compresión del aire por una placa rectangular.

### 4.2.2. Placa rectangular larga

#### Presión y fuerza de amortiguamiento

Considérese un par de placas rectangulares de longitud,  $L$ , mucho mayor que el ancho,  $B$ . El origen del sistema cartesiano de referencia se ubica en el centro de la placa inferior y el eje  $x$  se extiende a lo largo de la dirección determinada por la anchura de la placa (véase la siguiente figura 4.5).

De este modo, el problema se reduce a un problema unidimensional, por lo que la ecuación 4.17 puede escribirse como:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = 12 \frac{\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (4.18)$$

cuyas condiciones de frontera son:

$$P\left(\pm \frac{1}{2}B\right) = 0$$

Si la ecuación 4.18 se integra dos veces, se obtiene la expresión para calcular la presión de amortiguamiento:

$$P(x, t) = 6 \frac{\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} x^2 + C_1 x + C_2$$

a la cual pueden aplicársele las condiciones de frontera para dejarla como:

$$P(x, t) = -6 \frac{\mu}{h^3} \left( \frac{B^2}{4} - x^2 \right) \frac{dh}{dt} \quad (4.19)$$

$P(x, t)$  es positiva cuando la película de aire es estrujada ( $dh/dt < 0$ ), y viceversa. La presión de amortiguamiento máxima se presenta en el centro de la placa ( $x = 0$ ) donde  $P(0, t) = -(3\mu B^2/2h^3) dh/dt$ . El esquema 4.9 ilustra la distribución de la presión de amortiguamiento.

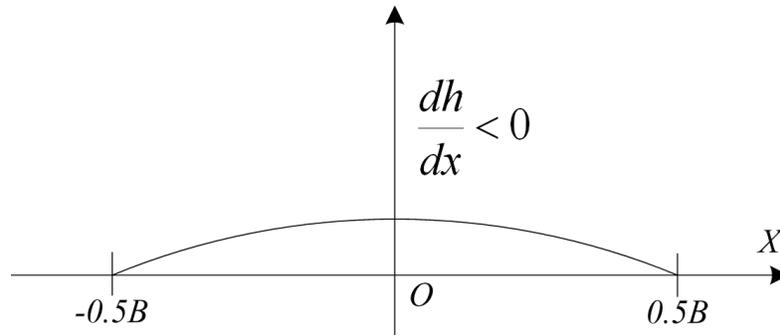


Figura 4.9: Distribución de la presión bajo una larga placa rectangular.

La fuerza de amortiguamiento  $F$  sobre la placa se calcula a partir de:

$$F_{lr} = \int_{-B/2}^{B/2} P(x) L dx = -\frac{\mu B^3 L}{h^3} \frac{dh}{dt} \equiv -\frac{\mu B^3 L}{h^3} \dot{h}$$

De acuerdo con la definición de  $F = -c\dot{x}$ , el coeficiente de amortiguamiento para una placa rectangular larga será:

$$c_{lr} = \frac{\mu B^3 L}{h^3} \quad (4.20)$$

Obsérvese que esta ecuación es válida solo para placas rectangulares cuya longitud,  $L$ , es mucho mayor que su anchura,  $B$ . El caso de una placa rectangular con longitud y anchura comparables se discute a continuación.

### 4.2.3. Placa rectangular

Considérese una placa como la mostrada en la figura 4.10:

Si las dimensiones de la placa en las direcciones  $x$  y  $y$  son  $B = 2a$  y  $L = 2b$ , respectivamente, y además  $a$  y  $b$  son comparables, la ecuación diferencial para la presión en la película de aire es la ecuación 4.17 y las condiciones de frontera son:

$$P(\pm a, y) = 0, P(x, \pm b) = 0 \quad (4.21)$$

La solución a la ecuación 4.17 puede dividirse en dos partes:  $P = p_1 + p_2$ , donde  $p_1$  es una solución específica a la ecuación 4.17, es decir,  $p_1$  es una solución a la ecuación:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} = 12 \frac{\mu}{h^3} \dot{h}$$

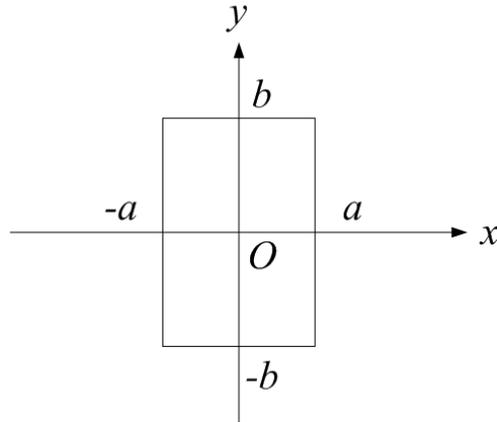


Figura 4.10: Placa rectangular con dimensiones de ancho y largo comparables.

y  $p_2$  es una solución general a la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} = 0 \quad (4.22)$$

### Solución de $p_1$

Asumiendo que  $p_1 = A + Bx + Cx^2$  y que  $p_1$  satisface la condición de frontera de  $p_1(\pm a) = 0$ , se tiene:

$$p_1 = -6 \frac{\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (a^2 - x^2) \quad (4.23)$$

### Condición de frontera para $p_2$

De la definición de  $P = p_1 + p_2$  y la condición de frontera de  $P(\pm a, y) = 0$ , se tiene:

$$p_1(\pm a, y) + p_2(\pm a, y) = 0$$

De acuerdo con la ecuación 4.23, es posible mostrar que las condiciones de frontera para  $p_2$  en  $x = \pm a$  serán:

$$p_2(\pm a, y) = 0 \quad (4.24)$$

De acuerdo con la ecuación 4.21, las condiciones de frontera para  $P$  en  $y = \pm b$  deben ser  $P(x, \pm b) = 0$ , es decir:

$$p_1(x) + p_2(x, \pm b) = 0$$

Por lo tanto, las condiciones de frontera para  $p_2$  en  $y = \pm b$  serán:

$$p_2(x, \pm b) = -p_1(x) = 6 \frac{\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (a^2 - x^2) \quad (4.25)$$

Las condiciones de frontera completas para  $p_2$  son las ecuaciones 4.24 y 4.25.

### Solución de $p_2$

Para encontrar la solución de  $p_2$ , se asume que las variables son separables y que  $p_2$  puede expresarse como:

$$p_2 = X(x)Y(y) \quad (4.26)$$

Si se sustituye la ecuación 4.26 en la ecuación 4.22 se tiene:

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = 0$$

o

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Por lo tanto, se tienen dos ecuaciones independientes:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

y

$$Y''(y) + Y(y) = 0$$

Si se asume que  $X(x) = A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x$  y dado que  $X(\pm a) = 0$ , se tiene que  $A_2 = 0$ , por tanto:

$$X(x) = A_1 \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.27)$$

Del mismo modo, si se asume que  $Y(y) = C_1 \cosh(\gamma y) + C_2 \sinh(\gamma y)$  y utilizando la condición de frontera para  $Y(y)$ ,  $Y(b) = Y(-b)$ , se tiene que  $C_2 = 0$ , por tanto:

$$Y(y) = C_1 \cosh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.28)$$

De las ecuaciones 4.26, 4.27 y 4.28,  $P_2(x, y)$  puede escribirse como:

$$p_2(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

Para satisfacer las condiciones de frontera expresadas por la ecuación 4.25, se tiene:

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \cosh \frac{n\pi b}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a} = 6 \frac{\mu}{h^3} \dot{h} (a^2 - x^2)$$

Las constantes  $a_n$  son:

$$a_n = \frac{\int_{-a}^a 6 \frac{\mu}{h^3} \dot{h} (a^2 - x^2) \cos \frac{n\pi x}{2a} dx}{\cosh \frac{n\pi b}{2a} \int_{-a}^a \cos^2 \frac{n\pi x}{2a} dx} = \frac{192 \mu \dot{h} a^2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3 \pi^3 h^3 \cosh \frac{n\pi b}{2a}} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$p_2(x, y) = \frac{192 \mu a^2}{h^3 \pi^3} \dot{h} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3 \cosh \frac{n\pi b}{2a}} \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

Siendo la solución final al problema:

$$P = p_1 + p_2 = -6 \frac{\mu}{h^3} \dot{h} (a^2 - x^2) + \frac{192 \mu \dot{h} a^2}{h^3 \pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3 \cosh \frac{n\pi b}{2a}} \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

### Fuerza de amortiguamiento

La fuerza de amortiguamiento sobre una placa rectangular será:

$$F_{rect} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b P(x, y) dx dy \equiv -\frac{\mu L B^3}{h^3} \dot{h} \beta \left( \frac{B}{L} \right) \quad (4.29)$$

donde el factor  $\beta(B/L)$  se calcula mediante:

$$\beta \left( \frac{B}{L} \right) = \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \left( \frac{B}{L} \right) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \left( \frac{n\pi L}{2B} \right) \right\}$$

La dependencia de  $\beta$  de la relación  $B/L$  se muestra en la gráfica 4.11:

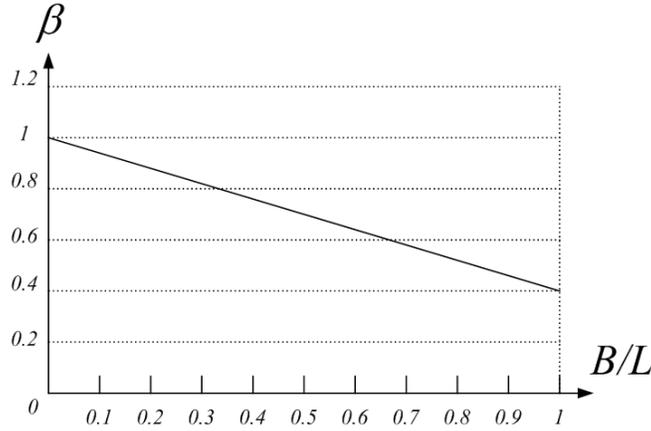


Figura 4.11: Dependencia del factor  $\beta$  respecto de la relación dimensional  $B/L$ .

Para una placa muy larga,  $\beta = 1$ , y para una placa cuadrada (es decir,  $a = b$ ),  $\beta = 0,42$ . El coeficiente de amortiguamiento queda expresado por:

$$c_{rec} = \frac{\mu L B^3}{h^3} \beta \left( \frac{B}{L} \right)$$

Este resultado muestra que el coeficiente de amortiguamiento para una placa rectangular es similar al coeficiente para una placa cuyo largo es significativamente mayor que su ancho, excepto por el factor de corrección  $\beta$  que está relacionado con la geometría de la placa. Para una placa rectangular muy larga, el factor de corrección es igual a la unidad.

#### 4.2.4. Placas circulares y anillos

##### Placa circular

Para una placa circular moviéndose contra el substrato como se muestra en el esquema 4.12, la ecuación para el amortiguamiento provocado por la delgada película de aire atrapada, puede escribirse tomando como referencia un sistema coordenado polar.

Con lo cual quedaría como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} P(r) \right) = 12 \frac{\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (4.30)$$

Las condiciones de frontera quedan expresadas mediante:

$$P(a) = 0, \quad \frac{dP}{dr}(0) = 0 \quad (4.31)$$

donde  $a$  es el radio de la placa. Si se integra la ecuación 4.30 y se emplean las condiciones de frontera expresadas por la ecuación 4.31, se tiene que la presión de amortiguamiento será:

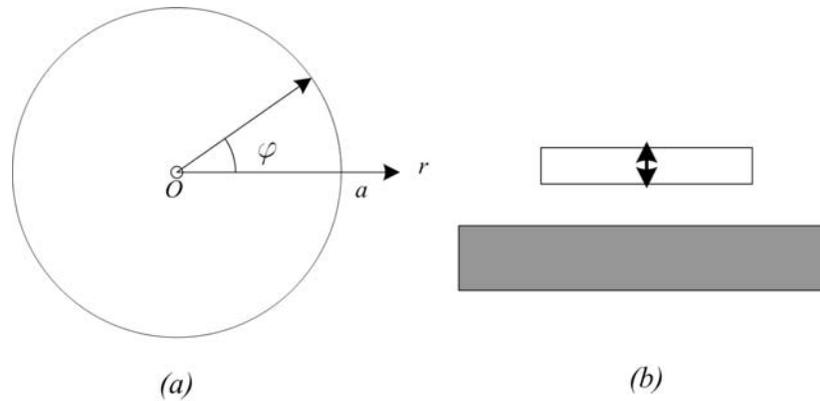


Figura 4.12: Placa circular. (a) vista superior y sistema de referencia polar y (b) vista de la sección transversal.

$$P(r) = -\frac{3\mu}{h^3} (a^2 - r^2) \frac{dh}{dt}$$

Así, la fuerza de amortiguamiento sobre la placa circular será:

$$F_{circ} = \int_0^a P(r) 2\pi r dr = -\frac{3\pi}{2h^3} \mu a^4 \frac{dh}{dt}$$

o

$$F_{circ} = -\frac{3}{2\pi} \frac{\mu A^2}{h^3} \frac{dh}{dt} = -0,4775 \frac{\mu A^2}{h^3} \frac{dh}{dt}$$

donde  $A = \pi a^2$  es el área de la placa. El coeficiente de amortiguamiento queda expresado por:

$$c_{cir} = \frac{3\pi}{2h^3} \mu a^4$$

### Anillo

Para un anillo moviéndose contra el substrato, el cálculo del amortiguamiento provocado por la película de aire atrapada tiene la misma ecuación 4.30, pero las condiciones de frontera cambian y se transforman en:

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0$$

donde  $a$  y  $b$  son los radios exterior e interior del anillo, respectivamente, como se muestra en la figura. Resolviendo la ecuación 4.30 con las condiciones de frontera correspondientes, la presión de amortiguamiento será:

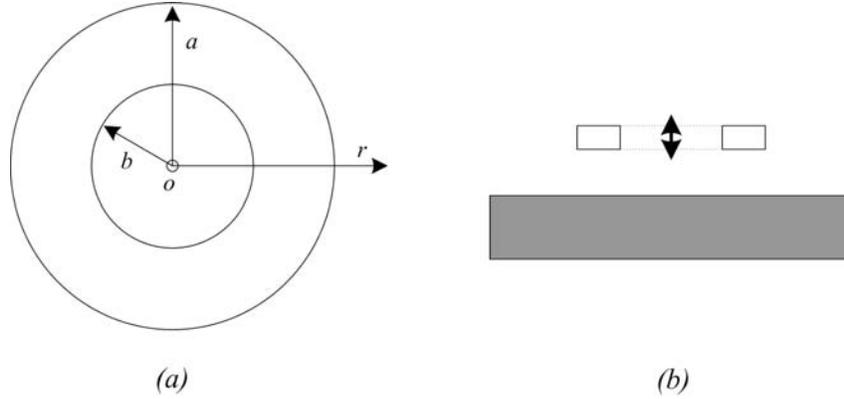


Figura 4.13: Placa anular. (a) vista superior y sistema de referencia polar y (b) vista de la sección transversal.

$$P(r) = \left( -\frac{3\mu}{h^3} a^2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{3\mu}{h^3} a^2 \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\ln(r/a)}{\ln(r/b)} \right) \frac{dh}{dt}$$

Si la relación  $b/a$  se denomina con  $\beta$ , se tiene que la fuerza de amortiguamiento para el anillo queda expresada como:

$$F_{anillo} = \int_b^a P(r) 2\pi r dr = -\frac{3\pi\mu a^4}{2h^3} \left( 1 - \beta^4 + \frac{(1 - \beta^2)^2}{\ln \beta} \right) \dot{h}$$

Pero, la fuerza de amortiguamiento puede escribirse también como:

$$F_{anillo} = -\frac{3\pi\mu a^4}{2h^3} G(\beta) \dot{h} = -\frac{3\mu A^2}{2\pi h^3} G(\beta) \dot{h}$$

donde  $A = \pi a^2$  y  $G(\beta)$  queda expresado mediante:

$$G(\beta) = 1 - \beta^4 + \frac{(1 - \beta^2)^2}{\ln \beta}$$

Así, el coeficiente de amortiguamiento para un anillo será:

$$c_{anillo} = \frac{3\mu a^2 A}{2h^3} G(\beta)$$

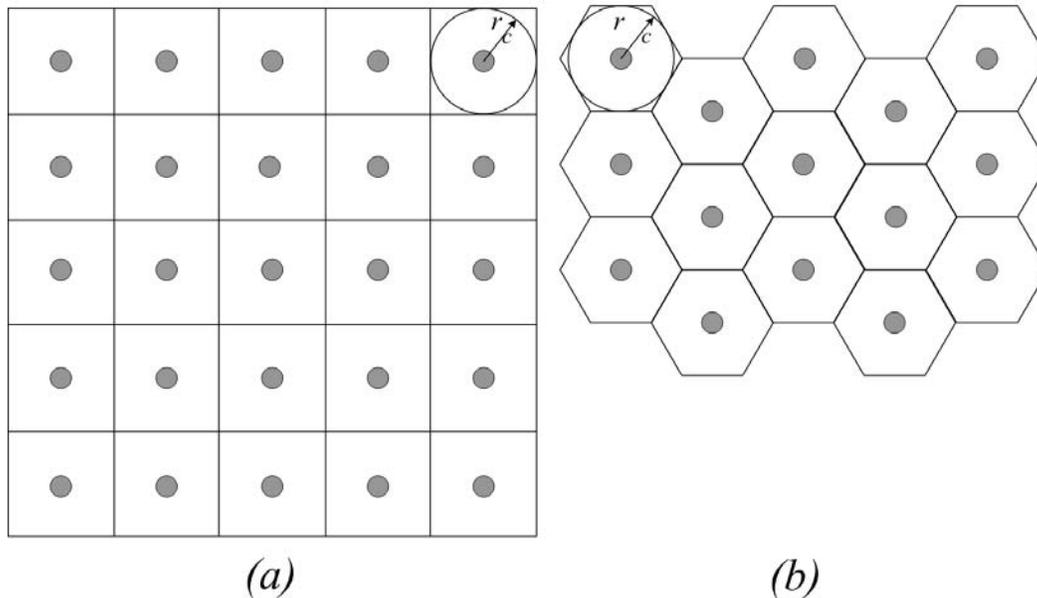


Figura 4.14: Dibujo esquemático de las perforaciones sobre una placa delgada. (a) arreglo cuadrangular y (b) arreglo hexagonal.

#### 4.2.5. Placa perforada, infinita y muy delgada

Las placas móviles usadas en microestructuras normalmente están perforadas para facilitar el ataque de los reactivos químicos que remueven las capas de sacrificio. Estas perforaciones reducen el efecto de amortiguamiento hasta cierto nivel conveniente para aplicaciones tales como acelerómetros, giroscopios, micrófonos, entre otras. Por tanto, la estimación de la fuerza de amortiguamiento provocada por la película de aire es importante en el diseño de sensores inerciales.

Si se supone que la placa está perforada con agujeros circulares de radio  $r_0$  y los agujeros están uniformemente distribuidos, el espacio entre perforaciones puede verse como una serie de cuadrados, hexágonos o círculos con dicho agujero en el centro, tal como se muestra en la figura 4.14.

Si la densidad del agujero es  $n$ , el área (la celda) asignada al agujero es  $A_1 = 1/n$ . Si la celda es aproximada como una placa circular con un agujero en el centro (es decir, si la celda se aproxima como un anillo), el radio externo del anillo será:

$$r_c = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

La fuerza de amortiguamiento sobre la placa completa es la suma de la fuerza de amortiguamiento para cada celda. De este modo, se considerará inicialmente, la fuerza de amortiguamiento sobre una celda. La ecuación para la presión de amortiguamiento provocada por el movimiento paralelo de una celda con forma de anillo será la ecuación 4.30:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} P(r) \right) = 12 \frac{\mu}{h^3} \dot{h}$$

Bajo condiciones de aproximación que establezcan que:

1. la placa es mucho mayor que una celda, y por tanto, el flujo de aire entre las celdas puede ser despreciado (lo cual se conoce como aproximación por placa infinita), y
2. el diámetro del agujero es mucho mayor que el grosor de la placa de modo que no existe un aumento significativo de la presión en el agujero (lo cual se conoce como aproximación por placa muy delgada), las condiciones de frontera para la celda serán:

$$P(r_0) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial r}(r_c) = 0$$

Al resolver la ecuación 4.30 considerando las condiciones de frontera antes mencionadas, se obtiene la presión de amortiguamiento:

$$P(r) = 3 \frac{\mu r_c^2}{h^3} \dot{h} \left( 2 \ln \frac{r}{r_0} - \frac{r^2 - r_0^2}{r_c^2} \right)$$

En consecuencia, la fuerza de amortiguamiento sobre la celda queda expresada por:

$$F_1 = - \int_{r_0}^{r_c} 3 \frac{\mu r_c^2}{h^3} \dot{h} \left( 2 \ln \frac{r}{r_0} - \frac{r^2 - r_0^2}{r_c^2} \right) 2\pi r dr = - \frac{\mu (\pi r_c^2)^2}{h^3} \dot{h} \frac{3}{\pi} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_0} - \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_c^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r_0^4}{r_c^4} \right) \right]$$

Si a  $r_0/r_c$  se le designa como  $\beta$ , se tiene:

$$F_1 = -3 \frac{\mu A_1^2}{2\pi h^3} \dot{h} (-\beta^4 + 4\beta^2 - 4 \ln \beta - 3) = -3 \frac{\mu}{2\pi h^3 n^2} \dot{h} (-\beta^4 + 4\beta^2 - 4 \ln \beta - 3) \quad (4.32)$$

Es decir, la fuerza total de amortiguamiento sobre la placa perforada es aproximadamente:

$$F_P = \frac{A}{A_1} F_1 = -3 \frac{\mu A}{2\pi n h^3} \dot{h} k(\beta) = -3 \frac{\mu A^2}{2\pi h^3 N} \dot{h} k(\beta) \quad (4.33)$$

donde  $N$  es el número total de agujeros en la placa y  $k(\beta)$ :

$$k(\beta) \equiv -\beta^4 + 4\beta^2 - 4 \ln \beta - 3$$

La dependencia de  $k$  respecto de  $\beta$  se muestra en la gráfica 4.15.

Para una placa de área finita  $A$ , la ecuación 4.33 sobreestima la fuerza de amortiguamiento (especialmente en el caso de que los agujeros sean pequeños), esto se debe a que no se considera el efecto en los bordes de la placa. Una aproximación empírica mostrada por B. Davies [34] asume que la fuerza de amortiguamiento dada por la ecuación 4.33 y la fuerza de amortiguamiento de una placa no perforada de la misma forma y dimensiones actúan en paralelo. Considérese una placa rectangular con perforaciones, la fuerza de amortiguamiento debida al aire,  $F_{rec}$ , de la placa rectangular sin perforaciones puede encontrarse mediante la

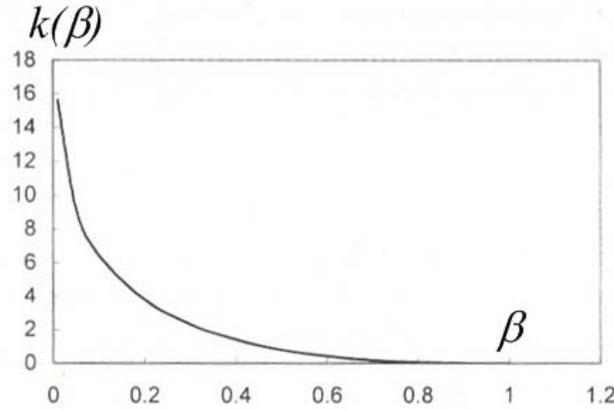


Figura 4.15: La dependencia del factor  $k$  respecto de  $\beta$ .

ecuación 4.29, entonces la fuerza de amortiguamiento resultante de la placa perforada,  $F_R$ , está dada por la siguiente relación:

$$F_R = \frac{F_p F_{rec}}{F_p + F_{rec}} \quad (4.34)$$

Todas las relaciones obtenidas sobre la placa perforada están basadas en la ecuación de Reynolds para una placa sólida 4.17.

#### 4.2.6. Amortiguamiento en vigas con movimiento oscilatorio

Las vigas son ampliamente usadas en los sensores y actuadores micromecánicos, especialmente en los dispositivos de tipo resonante, para los cuales el amortiguamiento debido al aire es un factor de diseño de gran interés. Por lo que, el conocimiento de los efectos del amortiguamiento debido al aire sobre vigas voladas en movimiento oscilatorio toma especial interés. El movimiento oscilatorio de una viga volada no es uniforme, lo cual significa que no existe una solución en forma cerrada para problemas de vibraciones presentes en vigas que involucren la fuerza de amortiguamiento. Por lo tanto, se buscarán modelos simplificados que obtengan soluciones aproximadas en forma cerrada.

##### Amortiguamiento por presión sobre una película de aire

Supóngase que una viga es paralela al sustrato y oscila en su dirección normal, además, su longitud es  $L$  y es mucho mayor que su ancho  $B$  y a su vez el ancho es mucho más grande que el grosor  $h$ . Si la separación entre la viga y el sustrato es  $d_0$  y es pequeña comparada con el ancho de la viga, el principal mecanismo de amortiguamiento es la compresión de la película de aire. Dado que la velocidad de movimiento de la viga oscilante no es uniforme y su distribución es dependiente del modo de oscilación, la fuerza de amortiguamiento debida al aire puede simplificarse por un modelo de parámetros concentrados. Ya que el flujo de aire provocado por la oscilación es primordialmente lateral, de acuerdo con la ecuación 4.20, la fuerza de amortiguamiento debida a la compresión de una película de aire por unidad de longitud de la viga será:

$$\widetilde{F}_d = \frac{\mu B^3}{d_0^3} \dot{f}(x, t) \quad (4.35)$$

donde  $\dot{f}(x, t)$  es la velocidad de movimiento del sector de viga considerado. Con referencia a la ecuación 3.87 y con el efecto de amortiguamiento considerado, la ecuación diferencial para una oscilación forzada de la viga será:

$$\rho B h \ddot{f}(x, t) + \tilde{c} \dot{f}(x, t) + EI \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} = \tilde{F}(x) \text{sen } \omega t \quad (4.36)$$

donde  $\rho$  es la densidad de la masa,  $E$  es el módulo de Young del material del que está hecha la viga,  $I$  es el momento de inercia de la viga,  $\tilde{F}(x)$  la fuerza de excitación externa por unidad de longitud de la viga y  $\tilde{c}$  el coeficiente de amortiguamiento por compresión (estrujamiento) de una película de aire por unidad de longitud de la viga. De acuerdo a la ecuación 4.35 se tiene:

$$\tilde{c} = \frac{\mu B^3}{d_0^3}$$

La función de desplazamiento  $f(x, t)$  en la ecuación 4.36 puede desarrollarse para quedar como:

$$f(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) W_i(x) \quad (4.37)$$

donde las funciones  $W_i(x)$  son las funciones de forma de la vibración libre de la viga, es decir, son las funciones características de las siguientes ecuaciones:

$$EI \frac{d^4 W_i(x)}{dx^4} = \rho B h \omega_i^2 W_i(x)$$

Sustituyendo la ecuación 4.37 en 4.36 se tiene:

$$\rho B h \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\varphi}_i(t) W_i(x) + \tilde{c} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\varphi}_i(t) W_i(x) + EI \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \varphi_i(t) W_i(x) = \tilde{F}(x) \text{sen } \omega t$$

Multiplicando toda la ecuación por  $W_n(x)$ , integrando y haciendo uso de las características de ortogonalidad de las funciones de forma  $W_n(x)$  (es decir,  $\int_0^L W_i(x) W_n(x) dx = 0$  para  $i \neq n$  y  $\int_0^L W_n^2(x) dx = 1$ ) se tiene:

$$\rho B h \ddot{\varphi}_n(t) + \tilde{c} \dot{\varphi}_n(t) + \rho B h \omega_n^2 \varphi_n(t) = \tilde{F}_n \text{sen } \omega t \quad (4.38)$$

donde

$$\tilde{F}_n = \int_0^L \tilde{F}(x) W_n(x) dx \quad (4.39)$$

La efectividad de una fuerza externa de excitación para un modo específico está determinada por la ecuación 4.39. Esto es muy útil en el diseño de electrodos de excitación para actuadores electrostáticos.

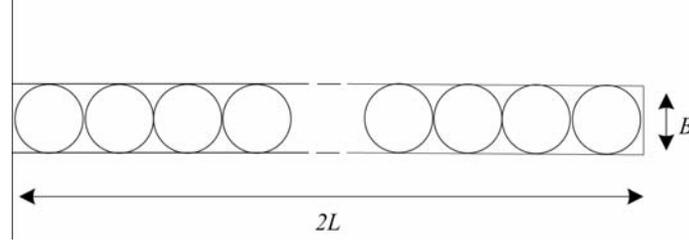


Figura 4.16: Modelo de una cadena de discos para el amortiguamiento por efecto del aire en una viga (vista superior).

De acuerdo con el resultado obtenido para el caso de una oscilación provocada por la aplicación de una fuerza, para un sistema con ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + m\omega_0^2 x = F_0 \text{sen } \omega t$$

La razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) de la oscilación forzada queda como  $\zeta = c/2m\omega_0$  y el factor de calidad  $Q = m\omega_0/c$ .

Por lo tanto, de acuerdo con 4.38, la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) del  $n$ -ésimo modo de oscilación será:

$$\zeta_n = \frac{\tilde{c}}{2\rho B h \omega_n} = \frac{\mu B^2}{2\rho h d_0^3 \omega_n}$$

Y el factor de calidad para el  $n$ -ésimo modo de oscilación (para un amortiguamiento pequeño) será:

$$Q_n = \frac{\rho h d_0^3 \omega_n}{\mu B^2}$$

Lo cual indica que el factor de calidad para una viga resonante está relacionado con la frecuencia del modo específico de oscilación y también con la geometría de la viga. Debe notarse que mientras más alta la frecuencia del modo de oscilación (mientras más alta la frecuencia de oscilación) mayor es el factor de calidad.

### Amortiguamiento provocado por la fuerza de arrastre

Si una viga está alejada de cualquier objeto circundante (como en el caso en que la viga es puesta a oscilar por métodos piezoeléctricos), el principal mecanismo de amortiguamiento es la fuerza de arrastre del flujo de aire. Dado que no existe una solución en forma cerrada para la fuerza de amortiguamiento en vigas, un modelo simplificado de discos concatenados es propuesto en [?]. El modelo de discos concatenados reemplaza la viga con una serie de discos pegados como se muestra a continuación (veáse la figura 4.16).

El diámetro de los discos es igual al ancho de la viga,  $B$ , y la interferencia entre discos vecinos es despreciable. De acuerdo con la ecuación 4.8, la fuerza de amortiguamiento provocada por el aire sobre el  $i$ -ésimo disco será:

$$\tilde{F}_{ai} = 8\mu B\dot{w}_i$$

donde  $w_i$  es el desplazamiento del  $i$ -ésimo disco. Dado que el número de discos por unidad de longitud de la viga es  $1/B$ , la fuerza de amortiguamiento provocada por el aire por unidad de longitud de la viga se obtiene a partir de:

$$\tilde{F}_{a1} = 8\mu\dot{w} \quad (4.40)$$

Para la oscilación forzada de una viga con amortiguamiento provocado por la fuerza de arrastre, la ecuación resulta:

$$\rho bh\ddot{w}(x, t) + \tilde{c}_{a1}\dot{w}(x, t) + EI\frac{d^4w(x, t)}{dx^4} = \ddot{F}(x, t)$$

donde  $\tilde{c}_{a1}$  es el coeficiente de amortiguamiento provocado por el flujo de aire por unidad de longitud de la viga. De acuerdo con la ecuación 4.40, se tiene:

$$\tilde{c}_{a1} = 8\mu$$

Siguiendo una argumentación similar a la hecha para el amortiguamiento provocado por una película de aire sometida a presión, la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) para el  $n$ -ésimo modo de oscilación (con una frecuencia radial de  $\omega_n$ ) será:

$$\zeta_{an} = \frac{\tilde{c}_{a1}}{2\rho BH\omega_n} = \frac{4\mu}{\rho Bh\omega_n}$$

y el factor de calidad  $Q$  para el modo de vibración se obtiene a partir de:

$$Q_{sn} = \frac{\rho Bh\omega_n}{8\mu} \quad (4.41)$$

Hasta ahora los discos se han considerado aislados de cualquier otro disco y tampoco llenan por completo el área de la viga. También se asume que no existe flujo de aire entre dos discos contiguos. Por lo tanto, la fuerza de amortiguamiento calculada mediante la ecuación 4.40 está por debajo de la real y el factor de calidad dado por la ecuación 4.41 está sobreestimado.

### 4.2.7. Efectos de un coeficiente de presión pequeño

A partir de la ecuación de Reynolds para el amortiguamiento provocado por una película de aire bajo presión:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + P \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} P + \frac{\partial^2}{\partial y^2} P \right) = \frac{12\mu}{h^3} \left( P \frac{dh}{dt} + h \frac{\partial P}{\partial t} \right)$$

Y después de una serie de consideraciones abordados en la subsección *Ecuación de Reynolds para amortiguamiento por presión sobre una película de aire*, las cuales se resumen en el hecho de que el coeficiente de presión sea pequeño, ésta ecuación se simplifica para quedar como:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h^3} \frac{dh}{dt}$$

Ecuación sobre la cual se puede abundar para analizar los casos de amortiguamiento provocado por una película de aire sometida a presión en algunas estructuras mecánicas típicas y en los casos en que  $\sigma$  (coeficiente de presión) es pequeño pero no es despreciable. Entre las estructuras mecánicas típicas se encuentra la placa rectangular con una longitud  $L$  mucho mayor que su ancho  $B$ . Este caso es analizado por M. Sadd y A. Stiffer [44] y establecen que para una placa que varía su distancia de separación respecto de la referencia inmóvil en la forma  $h = h_0 (1 + \delta \sin \omega t)$  la fuerza de amortiguamiento será:

$$F = P_0 LB \int_0^1 (\tilde{P} - 1) d\tilde{x} = P_0 LB \left[ -\frac{1}{3} \frac{h_0^2 \dot{h}}{h^3 \omega} \sigma + \frac{2}{15} \frac{h_0^4 \ddot{h}}{h^5 \omega^2} \sigma^2 - \frac{1}{3} \frac{h_0^4 \dot{h}^2}{h^6 \omega^2} \sigma^2 \right] \quad (4.42)$$

donde  $P_0$  es la presión del aire. A partir de esta ecuación pueden presentarse los casos de una amplitud de oscilación pequeña o una amplitud de oscilación grande.

#### Amplitud de oscilación pequeña

Si la amplitud de oscilación es pequeña, es decir,  $\varepsilon \ll 1$  y también  $h \approx h_0$  y usando las relaciones  $\dot{h} = h_0 \varepsilon \omega \cos \omega t$ ,  $\ddot{h} = -h_0 \varepsilon \omega^2 \sin \omega t$ , la ecuación 4.42 puede aproximarse y quedar como:

$$\begin{aligned} F &= P_0 LB \left[ -\frac{1}{3} \sigma \varepsilon \cos \omega t - \frac{2}{15} \sigma^2 \varepsilon \sin \omega t - \frac{1}{6} \sigma^2 \varepsilon^2 - \frac{1}{6} \sigma^2 \varepsilon^2 \cos 2\omega t \right] \\ &\equiv F_D + F_k + F_R + F_{2\omega} \end{aligned}$$

El efecto de amortiguamiento es el primer término de la ecuación:

$$F_D = -\frac{1}{3} P_0 LB \sigma \varepsilon \cos \omega t = -\frac{\mu LB^3}{h_0^3} h_0 \varepsilon \omega \cos \omega t = -\frac{\mu LB^3}{h_0^3} \dot{h}$$

Esto es exactamente el mismo resultado que el dado por la ecuación 4.20, es decir, es el resultado de la aproximación de primer orden.

La energía perdida por el sistema debido a la fuerza de amortiguamiento en un ciclo se obtiene a partir de:

$$\Delta E = \int_0^T -\frac{\mu LB^3}{h_0^3} h_0 \varepsilon \omega \cos(\omega t) \dot{h} dt = \int_0^{2\pi} -\frac{\mu LB^3 \omega}{h_0^3} h_0^2 \varepsilon^2 \cos^2(\omega t) d\omega t = -\frac{\pi \mu LB^3 \omega}{h_0} \varepsilon^2$$

Por lo tanto, se tiene:

$$Q = \frac{2\pi E_T}{\Delta E} = \left(2\pi \frac{1}{2} k (h_0 \varepsilon)^2\right) / \left(2\pi \frac{\mu LB^3 \omega}{2h_0} \varepsilon^2\right) = \frac{kh_0^3}{\mu LB^3 \omega}$$

donde  $E_T$  es la energía total del sistema y  $k$  es la constante elástica del resorte que soporta la placa.

El efecto elástico está considerado en el segundo término  $F_k$ .

$$F_k = -\frac{2}{15} P_0 LB \sigma^2 \varepsilon \sin \omega t = -\frac{2}{15} LB \frac{9\mu^2 \omega^2 B^4}{P_0 h_0^5} h_0 \varepsilon \sin \omega t = -\frac{6}{5} LB \frac{\mu^2 \omega^2 B^4}{P_0 h_0^5} \Delta h$$

$F_k$  es significativo para coeficientes de presión grandes, cuando no existe la posibilidad de que el aire entre las placas y alrededor de ellas circule, deteniendo el movimiento del sistema. Dado que el aire atrapado actúa como un resorte, ésta es la causa de que el sistema pierda energía. Por lo tanto el efecto es conocido como *efecto elástico*.

El tercer término de la ecuación  $F_R$  es una fuerza constante que proviene del término cuadrático de  $p$ . Por lo tanto se conoce como fuerza de rectificación debido a la relación no lineal entre la presión y el desplazamiento.

El último término  $F_{2\omega}$  representa el componente de fuerza cuya frecuencia es dos veces mayor que la placa oscilante. Este componente es también generado por el término cuadrático de  $p_2$ .

### Amplitud de oscilación grande

Si la amplitud de la oscilación de la placa no es despreciable, entonces el valor de  $h = h_0 (1 + \delta \sin \omega t)$  en lugar de ser aproximado por  $h \approx h_0$  debe obtenerse a partir de la ecuación 4.42. Para determinar el efecto de la amplitud grande se desarrolla la ecuación 4.42:

$$F = A_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + A_2 \cos 2\omega t + B_2 \sin 2\omega t \dots$$

donde  $A_0$  es la fuerza de rectificación, y  $A_1$  y  $B_1$  son las amplitudes de las fuerzas de amortiguamiento y elástica, respectivamente. Se tiene entonces que:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \cdot d(\omega t) = P_0 LB \frac{\varepsilon^2 (4 + 3\varepsilon^2) \sigma^2}{24 (1 - \varepsilon^2)^{9/2}}$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F \cdot \cos \omega t d(\omega t) = -P_0 LB \frac{\varepsilon \sigma}{3 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

y

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F \cdot \text{sen } \omega t d(\omega t) = -P_0 L B \frac{\left(\frac{3}{4}\varepsilon^4 + 6\varepsilon^2 + 2\right) \sigma^2 \varepsilon}{15(1 - \varepsilon^2)^{9/2}}$$

Las ecuaciones anteriores muestran que las fuerzas de rectificación, amortiguamiento y elástica se incrementan conforme aumenta  $\varepsilon$ .

De la ecuación correspondiente a la amplitud de la fuerza de amortiguamiento  $A_1$  se tiene que la fuerza de amortiguamiento será:

$$F_D = A_1 \cos \omega t = -\frac{\mu L B^3}{h_0^3} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \dot{h}$$

Por lo que el coeficiente de amortiguamiento queda como:

$$c = \frac{\mu L B^3}{h_0^3} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

Obviamente, para amplitudes pequeñas, el coeficiente es el mismo que el dado en la ecuación 4.20.

### 4.3. Amortiguamiento de placas gruesas perforadas

El análisis hecho hasta ahora es útil sólo en los casos en los que la placa perforada tienen dimensiones laterales mucho mayores que la separación respecto de la placa fija y el grosor. En estos casos, la fuerza de resistencia provocada por el flujo del aire a través de los agujeros es despreciable y el efecto en los bordes de la placa puede ignorarse o estimarse por medio de la ecuación 4.34.

Aunque estas condiciones pueden ser satisfechas por algunos Microsistemas fabricados mediante procesos de maquinado superficial, actualmente existen procesos de maquinado de volumen que crean perfiles altos en los que dicho análisis debe ser replanteado.

Se han propuesto muchos métodos para analizar el efecto de amortiguamiento por presión de una película de aire en el caso de placas gruesas perforadas. El más socorrido ha resultado ser el análisis por medio de elemento finito, sin embargo, este proceso consume mucho tiempo de cálculo y es poco claro, motivos por los cuales no es recomendable emplearlo como alternativa para la optimización de los parámetros de diseño. Por lo tanto, es recomendable construir un modelo analítico a partir de la ecuación de Reynolds.

#### 4.3.1. Ecuación modificada de Reynolds para placas perforadas

Considérese una placa con gran número de agujeros distribuidos de forma uniforme por unidad de área. La placa puede dividirse en celdas, cada una de las cuáles mantendrá un agujero en el centro. Como la celda es mucho menor que la placa, la presión puede considerarse como una función suave de posición respecto de la placa completa. Por la misma razón, el flujo de aire a través del agujero (el flujo se presenta en la dirección  $z$ ) puede considerarse como penetrante a través del área completa de la celda de forma uniforme. Por lo tanto, para la placa en movimiento relativo respecto del sustrato, la ecuación 4.11 puede modificarse y quedar como:

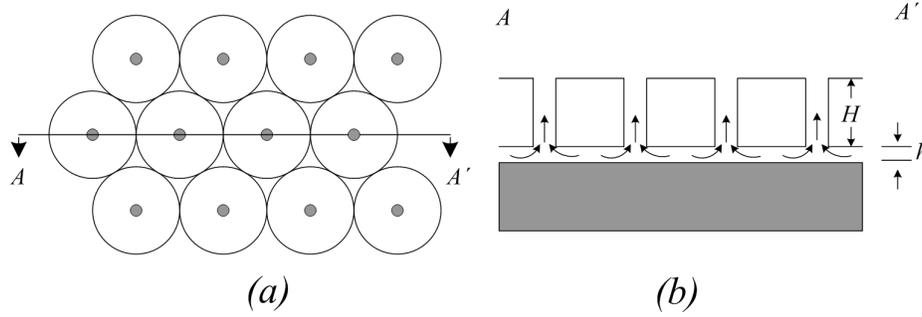


Figura 4.17: Esquema de la estructura de una placa perforada. (a) vista superior y (b) vista de la sección transversal.

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \rho Q_z + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (4.43)$$

donde  $q_x = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $q_y = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y}$  y  $Q_z$  es la tasa de penetración, la cual es función de  $\Delta P$ , la presión adicional en el espacio entre placas provocado por el efecto de amortiguamiento del aire.

La dependencia de  $Q_z$  de  $\Delta P$  para una placa perforada puede encontrarse basada en el modelo simplificado presentado por Minhang [?]. En la figura 4.17 se describe dicho modelo.

La placa tiene perforaciones circulares uniformemente distribuidas. El área circundante a cada perforación constituye una celda y éstas están organizadas en arreglos hexagonales o cuadrados. El radio de los agujeros es  $r_0$  y el área de la celda es  $A_1 = \pi r_c^2$ , donde  $r_c$  es el radio de la celda. El grosor de la placa es  $H$  y la distancia de la placa al sustrato es  $h$ .

De acuerdo con la ecuación de Poiseuille 4.6 para un conducto con radio  $r_0$  y longitud  $H$ , el volumen de aire que pasa a través del agujero por unidad de tiempo (la tasa de flujo  $Q$ ) será:

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \frac{P_H}{H} \quad (4.44)$$

donde  $P_H$  es la presión diferencial entre los dos extremos del agujero. La presión a través del agujero está en función directa de la tasa de flujo  $Q$ , por tanto:

$$P_H = \frac{8\mu H}{\pi r_0^4} Q$$

De acuerdo con la ecuación 4.32 y  $Q = A_1 dh/dt$ , la fuerza de amortiguamiento en el área de una celda de una placa perforada, infinita y muy delgada será:

$$F_l = \frac{3\mu A_1}{2\pi h^3} k(\beta) Q$$

donde  $k(\beta) = 4\beta^2 - \beta^4 - 4 \ln \beta - 3$  y  $\beta = r_0/r_c$ . De las ecuaciones 4.43 y 4.44, la presión promedio de amortiguamiento en la celda provocada por el flujo se obtiene a partir de:

$$\Delta P = P_H + \frac{F_{l1}}{A_1} = P_H \left( 1 + \frac{3r_0^4 k(\beta)}{16Hh^3} \right) \equiv \eta(\beta) P_H$$

o  $P_H = \Delta P/\eta(\beta)$ , donde  $\eta(\beta) \equiv [1 + 3r_0^4 k(\beta)/16Hh^3]$ . La tasa promedio de penetración del aire a través de la placa (volumen por unidad de área en una unidad de tiempo) se calcula mediante:

$$Q_z = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{\beta^2 r_0^2}{8\mu H} \frac{\Delta P}{\eta(\beta)} \quad (4.45)$$

después de la sustitución de la 4.45 en 4.43 y empleando pasos de derivación similares a los usados para obtener la ecuación de Reynolds se tiene:

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2} - \frac{3\beta^2 r_0^2}{2h^3 H} \frac{1}{\eta(\beta)} \Delta P = \frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.46)$$

Esta es la ecuación modificada de Reynolds para el amortiguamiento provocado por la presión de una película de aire para el caso de una placa perforada. Algunas veces la presión de amortiguamiento  $\Delta P$  es denotada como  $P$  por simplicidad. Durante la derivación, se asumió que el flujo del gas en los agujeros es un flujo de Poiseuille completamente desarrollado. Esta consideración es, sin embargo, falsa para muchas estructuras micromaquinadas si el radio de los agujeros,  $r_0$ , es comparable al grosor de la placa,  $H$ . En estos casos Minhang [?] propone que la ecuación de Poiseuille se modifique para quedar como:

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \frac{P_H}{H + 3\pi r_0/8} \quad (4.47)$$

Comparando las ecuaciones 4.44 y 4.47 se puede definir la profundidad efectiva de las perforaciones en la placa como:

$$H_{efectiva} = H + \frac{3\pi r_0}{8}$$

Por otra parte, los efectos en los extremos de los agujeros pueden incorporarse en las ecuaciones que estén relacionadas con el análisis de una placa gruesa perforada, si se sustituye  $H$  por  $H_{efectiva}$ .

### 4.3.2. Placa perforada larga y rectangular

Para demostrar la naturaleza del amortiguamiento provocado por la presión de una película de aire en una placa gruesa perforada, se considera una placa rectangular perforada con una longitud mucho mayor que su anchura (es decir,  $b$  es mucho mayor que  $a$  como se muestra en la figura 4.18). Por lo tanto, la ecuación 4.46 puede considerarse unidimensional:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{3\beta^2 r_0^2}{2h^3 H_{efectiva}} \frac{1}{\eta(\beta)} P = \frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.48)$$

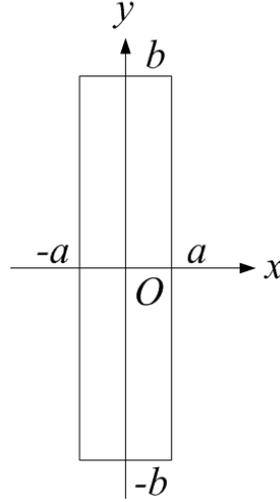


Figura 4.18: Geometría de una larga placa rectangular perforada ( $b \gg a$ ). En la figura no se muestran los agujeros.

Definiendo  $R = -\frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t}$  y  $l = \sqrt{\frac{2h^3 H_{efectiva} \eta(\beta)}{3\beta^2 r_0^2}}$  ( $l$  es una longitud característica o longitud de atenuación de la placa perforada) la ecuación 4.48 puede simplificarse y quedar como:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{P}{l^2} + R = 0$$

Con condiciones de frontera  $P(\pm a) = 0$ , la distribución de la presión de amortiguamiento será:

$$P(x) = Rl^2 \left(1 - \cosh \frac{x}{l} / \cosh \frac{a}{l}\right) \quad (4.49)$$

La dependencia de la distribución de la presión respecto del cociente  $a/l$  se muestra en la gráfica 4.19:

donde la presión de amortiguamiento ha sido normalizada con  $Rl^2$ . Puede apreciarse que mientras mayor sea el efecto del agujero sobre el amortiguamiento menor será el efecto del borde de la placa, y viceversa. La presión máxima al centro,  $P(0)$ , aumenta con  $l$  para una  $a$  constante. Efecto que no sería fácil de apreciar si la presión no estuviera normalizada con  $Rl^2$ .

Ahora considérense dos condiciones extremas. Si los agujeros son muy estrechos y la placa es muy gruesa de modo que la longitud de atenuación es mucho mayor que la mitad del ancho  $a$  de la placa, la ecuación 4.49 toma la forma:

$$P(0) = -\frac{6\mu}{h^3} (a^2 - x^2) \frac{dh}{dt}$$

que es el mismo resultado que el expresado por la ecuación 4.19 considerando  $B = 2a$ .

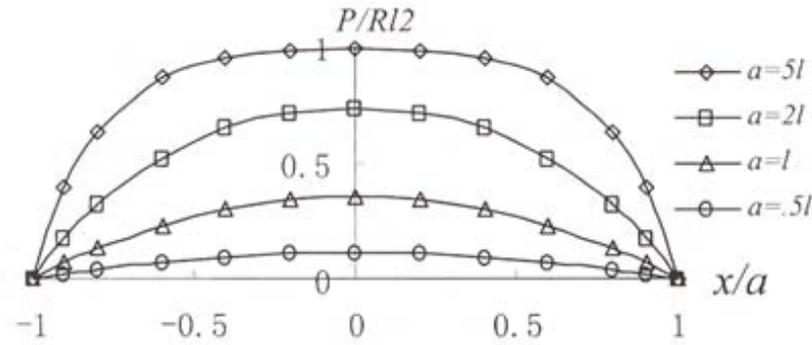


Figura 4.19: Dependencia de la distribución normalizada de presión respecto de  $a/l$ .

En el otro extremo, si la placa es muy delgada de modo que  $a \gg l$ , la ecuación 4.49 muestra que la presión para la mayor parte del área de la placa tiene un valor constante de:

$$P = Rl^2 = -\frac{3\mu v_c^2}{2h^3} \dot{h}k(\beta)$$

Resultado que concuerda con la ecuación 4.33 para la presión de amortiguamiento de una placa perforada infinita y delgada. Los resultados anteriores para los dos extremos justifica la ecuación modificada de Reynolds.

Generalmente,  $l$  es mucho más pequeño que  $a$ , pero tiene un valor finito cuyos efectos sobre la presión de amortiguamiento en las áreas cercanas a los bordes no puede despreciarse. En estos casos, para la región  $x > 0$  (la distribución de la presión en la región  $x < 0$  es simétrica) la ecuación 4.49 puede aproximarse mediante:

$$P(x) = Rl^2 \left( 1 - e^{-\frac{a-x}{l}} - e^{-\frac{a+x}{l}} \right)$$

Esto significa que la presión en la mayoría del área bajo la placa es  $P = Rl^2$ . De cualquier modo, en el área cercana a los bordes, donde  $a-x$  es comparable con  $l$  o más pequeña, la presión decae exponencialmente:

$$P(x) = Rl^2 \left( 1 - e^{-\frac{a-x}{l}} \right)$$

A partir de la ecuación 4.49, la fuerza de amortiguamiento sobre la placa rectangular será:

$$F_d = 2aLRl^2 \left[ 1 - \frac{l}{a} \tanh\left(\frac{a}{l}\right) \right]$$

De acuerdo con la relación  $F_d = \dot{h}c$ , el coeficiente de amortiguamiento será:

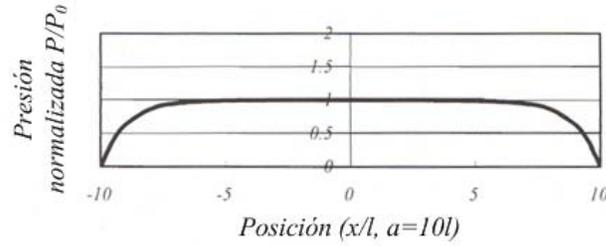


Figura 4.20: Distribución de la presión (normalizada) para una placa rectangular cuyo ancho,  $a$ , es diez veces mayor que la longitud de atenuación:  $l$ .

$$c = 2aL \frac{8\mu H}{\beta^2 r_0^2} \left( 1 + \frac{3r_0^4 k(\beta)}{16Hh^3} \right) \left[ 1 - \frac{l}{a} \tanh\left(\frac{a}{l}\right) \right]$$

Si la placa es la masa de prueba de un acelerómetro, la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) del sistema será  $\zeta = c/(2m\omega_0)$ , donde  $\omega_0$  es la frecuencia radial de la vibración libre y  $m$  es la masa de la placa.

Si se cumple la condición  $a \gg l$  de modo tal que  $\tanh(a/l) \cong 1$ , se tienen las siguientes ecuaciones:

$$F_d = 2(a-l)LRl^2 \quad (4.50)$$

y

$$c = \frac{32\mu H}{\beta^2 r_0^2} \left( 1 + \frac{3r_0^4 k(\beta)}{16Hh^3} \right) L(a-l)$$

### 4.3.3. Aproximación del área efectiva de amortiguamiento

Cuando se cumple que  $a \gg l$  (condición bajo la cual el efecto de los agujeros en el amortiguamiento es significativa), la presión de amortiguamiento en el área interna es constante y vale  $Rl^2$  pero cerca de los bordes dicha presión decae en forma exponencial. Si se analiza la ecuación 4.50, podrá observarse que es posible generar una fuerza de amortiguamiento equivalente, a partir de una función de distribución de la presión cuya representación gráfica sea la mostrada por la figura 4.21:

Por lo tanto, puede considerarse que la placa sólo es efectiva para generar un efecto de amortiguamiento para un área de ancho  $2(a-l)$ , excluyendo las dos regiones en los bordes, cada una de anchura  $l$ . Basados en la aproximación del *área efectiva de amortiguamiento*, para  $a, b \gg l$ , la fuerza de amortiguamiento de la placa perforada rectangular puede aproximarse mediante:

$$F_d \cong 4Rl^2(a-l)(b-l)$$

De forma análoga, la fuerza de amortiguamiento sobre una placa perforada puede aproximarse mediante:

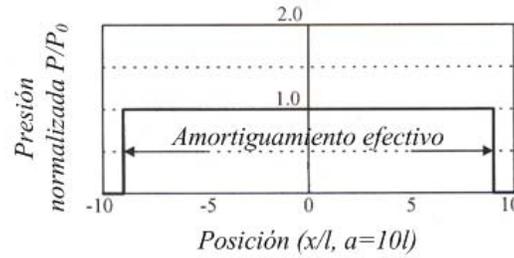


Figura 4.21: Aproximación de la distribución de la presión para una placa rectangular con  $a$  diez veces mayor que  $l$ .

$$F_d \cong Rl^2\pi (a - l)^2$$

donde  $a$  es el radio de la placa circular perforada. Por otra parte, esta aproximación puede aplicarse a placas perforadas con formas irregulares simplemente excluyendo las áreas de los bordes, de ancho  $l$ , que poco contribuyen al efecto de amortiguamiento.

Considerando las condiciones para la aproximación del área efectiva de amortiguamiento y de acuerdo con la definición de la longitud de atenuación  $l$ , si el agujero es suficientemente grande de modo tal que  $r_0^4 \gg H_{efectiva}h^3$ , se tiene  $\eta(\beta) \approx \frac{3r_0^4 k(\beta)}{16Hh^3}$  y  $l \approx r_c \sqrt{\frac{k(\beta)}{8}}$ . Esto es,  $l < r_c$  sólo si  $\beta > 0,06$ . Por lo tanto, la condición  $a, b \gg 1$  para la aproximación del área efectiva de amortiguamiento es equivalente a  $a, b \gg r_c$  o  $a, b > 3r_c$ . Esto significa que la aproximación del área efectiva de amortiguamiento es buena si y sólo si existen sobre la placa más de cinco agujeros en cualquier dirección.

De este modo, los resultados analíticos obtenidos a partir de la ecuación modificada de Reynolds se han comparado con los resultados obtenidos mediante métodos de análisis numérico y análisis de datos experimentales.

## 4.4. Amortiguamiento por deslizamiento de superficies sobre una película de aire

### 4.4.1. Ecuaciones básicas para el amortiguamiento por deslizamiento de superficies sobre una película de aire

Los dispositivos microelectromecánicos fabricados con tecnología de micromaquinado de superficie logran dimensiones en sus elementos móviles de hasta  $2 \mu m$  de grosor, dichas estructuras están normalmente suspendidas sobre el sustrato, dejando una separación muy pequeña entre los elementos móviles (placas) y el sustrato. Este tipo de estructuras básicas permite el desplazamiento lateral de las placas para aplicaciones tales como: resonadores, actuadores electrostáticos, acelerómetros, giroscopios, microinterruptores, entre otros.

Las dimensiones de las placas móviles normalmente son mucho mayores que su grosor y la distancia de separación entre ellas y el sustrato, el amortiguamiento viscoso provocado por el aire circundante cobra relevancia en el proceso de disipación de energía del sistema dinámico; la película de aire atrapada entre el sustrato y los elementos móviles se comporta como un amortiguador deslizante para la estructura en movimiento. Para investigar las características básicas del amortiguamiento provocado por el deslizamiento de superficies sobre una película de aire, deberá obtenerse un modelo mecánico del fenómeno, éste deberá

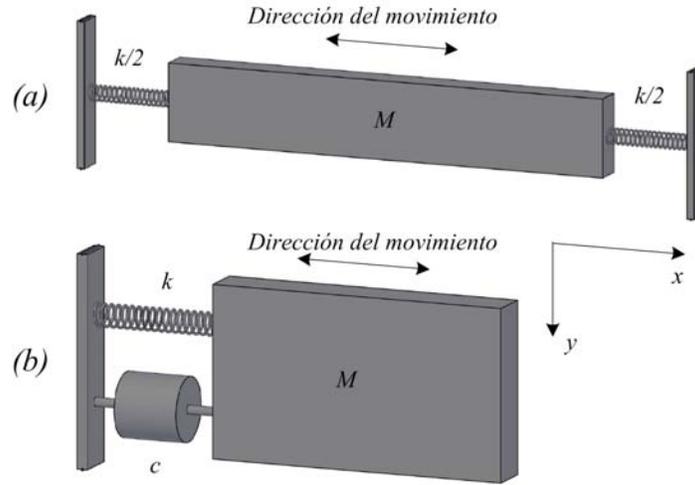


Figura 4.22: Amortiguamiento por deslizamiento sobre una delgada película de aire. (a) esquema de la estructura y (b) modelo simplificado.

considerar: una placa infinita, inmersión en un fluido viscoso e incompresible, movimiento en la dirección lateral a una distancia constante medida desde el sustrato, obsérvese la figura 4.22:

El modelo simplificado puede considerarse como un sistema masa-resorte-amortiguador.

La ecuación diferencial general para un flujo estable de un fluido incompresible es la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\vec{F}$  la fuerza aplicada,  $p$  la presión en el fluido,  $\mu$  el coeficiente de viscosidad y  $\vec{v}$  la velocidad del fluido:

$$\vec{v} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

Los símbolos  $\nabla$  y  $\nabla^2$  son el gradiente y el laplaciano, respectivamente:

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{y} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Se supone que el plano que representa la placa móvil del sistema mecánico está contenida en el plano  $x-y$  del sistema de referencia, empleado para estudiar el fenómeno y que la placa tiene dimensiones infinitas. Si el movimiento de la placa es en la dirección  $x$ , y no existen fuerzas externas o gradiente de presión en el fluido, se tiene que  $u \gg v, w$  y  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Por lo tanto, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.51)$$

Para una placa infinita (se considerará infinita a una placa cuyas dimensiones de largo y ancho sean mucho mayores que su grosor, la separación que mantiene respecto del sustrato y la amplitud de su oscilación mecánica), el segundo término de la izquierda de la ecuación anterior puede despreciarse, por lo que la ecuación de Navier-Stokes para una placa infinita que se mueve en la dirección  $x$  en un fluido que no está sujeto a fuerzas externas ni que experimenta gradiente de presión alguno, queda como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.52)$$

Las condiciones de frontera para la ecuación son:  $u$  igual a cero sobre la superficie del sustrato y  $u$  igual a la velocidad de la placa en movimiento sobre la superficie inferior de la placa.

Supóngase ahora que el movimiento de la placa con respecto a su posición de equilibrio es una simple oscilación armónica, es decir:

$$x(t) = a_0 \operatorname{sen} \omega t$$

donde  $a_0$  es la amplitud de la oscilación armónica simple, es decir:

$$u(t) = a_0 \omega \cos \omega t = u_0 \cos \omega t$$

donde  $u_0 = a_0 \omega$ . Con lo cual el primer término de la izquierda de la ecuación 4.51 será:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u_0 \omega \operatorname{sen} \omega t$$

Si la dimensión de la placa es  $l$  (considerando que tanto ancho como largo coinciden), el segundo término de la izquierda de la ecuación 4.51 queda como:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_0^2}{l} = \frac{a_0^2 \omega^2}{l} \quad (4.53)$$

y el término a la derecha será:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx \frac{\mu}{\rho} \frac{a_0 \omega}{d^2} \quad (4.54)$$

donde  $d$  es la distancia de separación entre el sustrato y la placa móvil.

Por lo tanto, las condiciones de aproximación para la ecuación 4.52 serán:

1.  $|\partial u / \partial t| \gg |u \partial u / \partial x|$ , lo cual requiere que la amplitud de la oscilación sea muy pequeña comparada con las dimensiones de la placa,  $a_0 \ll l$ .

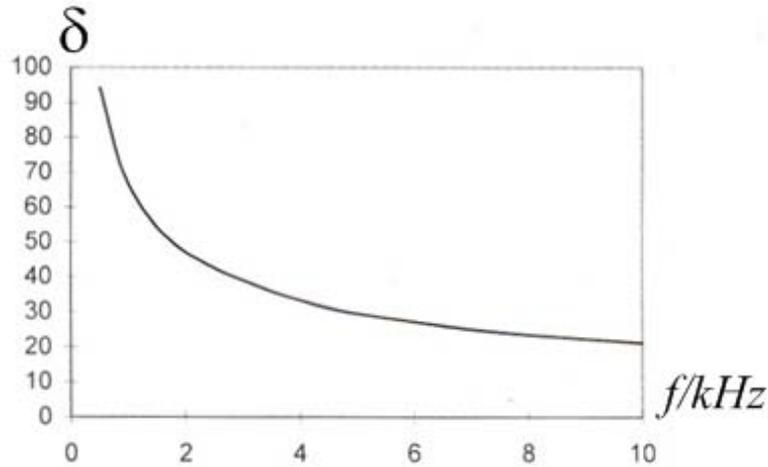


Figura 4.23: Decaimiento efectivo de la distancia,  $\delta$ , como función de la frecuencia.

2.  $(\mu/\rho) (\partial^2 u/\partial z^2) \gg u (\partial u/\partial x)$ . A partir de las ecuaciones 4.53 y 4.54, esta condición se transforma en:  $l \gg 2(\rho\omega/2\mu) d^2 a_0$ . Si se define una característica denominada *decaimiento efectivo de la distancia* como  $\delta = \sqrt{2\mu/\rho\omega}$ , se tiene:

$$l \gg 2 \frac{d^2}{\delta^2} a_0$$

El decaimiento efectivo de la distancia,  $\delta$ , es la distancia en la dirección  $z$  sobre la cual la velocidad decae desde la placa por un factor de  $e$  ( $e = 2,718\dots$ ). La figura 4.23 muestra la gráfica de la dependencia de  $\delta$  respecto de la frecuencia en el aire, a presión de una atmósfera y temperatura de veinte grados celsius.

Si la condición de que  $(\mu/\rho) (\partial^2 u/\partial z^2) \gg (\partial u/\partial t)$ , es decir,  $d \ll \delta$ , la ecuación 4.52 se simplifica aún más, para quedar como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4.55)$$

#### 4.4.2. Modelo del flujo de Couette

Supóngase que una placa de grandes dimensiones oscila lateralmente sobre el sustrato tal como lo muestra la figura 4.24.

Si la frecuencia de oscilación es baja de modo tal que  $\delta \gg d$ , el patrón de flujo del aire que circunda la placa es llamado flujo de Couette. La fuerza de amortiguamiento sobre la placa provocada por el fluido viscoso modelado como flujo de Couette tiene las siguientes condiciones de frontera:

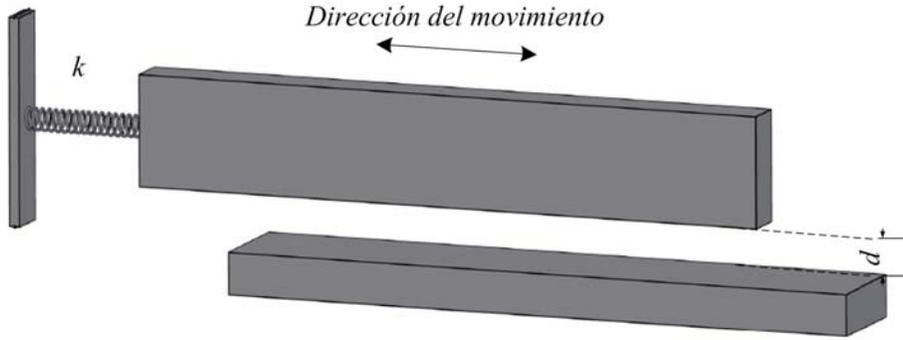


Figura 4.24: Placa que oscila lateralmente sobre el sustrato.

$$u(0) = u_0 \cos \omega t, \quad u(d) = 0 \quad (4.56)$$

De acuerdo con las ecuaciones 4.55 y 4.56, la distribución de la velocidad del fluido será:

$$u(z) = u(0) \left(1 - \frac{d}{z}\right)$$

donde  $u(0)$  es la velocidad de la placa en movimiento. La fuerza aplicada a la placa se calcula mediante:

$$F = -\mu \frac{u(0)}{d} A \quad (4.57)$$

donde  $A$  es el área de la placa. De acuerdo con el modelo de flujo de Couette, el gradiente de velocidad en el lado abierto de la placa móvil es cero. Por lo tanto, no existe fuerza de amortiguamiento en la parte abierta de la placa y el factor de calidad  $Q$  del sistema vibratorio lateral está determinada únicamente por la fuerza de amortiguamiento descrita por la ecuación 4.57. Si la parte abierta de la placa está muy alejada de referencia mecánica alguna, la condición para poder modelar el flujo en el que está inmersa dicha placa como un flujo de Couette,  $\delta \gg d$ , no es aplicable, y puede considerarse que la fuerza de amortiguamiento sobre este lado de la placa es despreciable.

La energía disipada por la fuerza de amortiguamiento en un ciclo será:

$$\Delta E_{Cd} = \int_0^T A\mu \frac{u(0)}{d} u(0) dt$$

dado que  $u(0) = u_0 \cos \omega t$ , se tiene:

$$\Delta E_{Cd} = \int_0^{2\pi} A\mu \frac{u_0^2 \cos^2 \omega t}{d} \frac{1}{\omega} d\omega t = \frac{\pi}{\omega} u_0^2 \frac{\mu}{d} A$$

De acuerdo con la segunda definición establecida para el factor de calidad en la subsección *Resonancia y factor de calidad* del capítulo anterior, se tiene:

$$Q_{Cd} = \frac{\pi m u_0^2}{\Delta E_{Cd}} = \frac{m \omega d}{\mu A} \quad (4.58)$$

Si la densidad de la masa de la placa es  $\rho_p$  y el grosor de la placa es  $H$ , la ecuación 4.58, puede escribirse como:

$$Q_{Cd} = \frac{\rho_p H \omega d}{\mu}$$

El factor de calidad no depende del área,  $A$ , de la placa.

#### 4.4.3. Modelo del flujo de Stokes

En el modelo de Couette, el decaimiento efectivo de la distancia,  $\delta$ , es mucho mayor que la separación entre placas  $d$ . Por lo tanto, el perfil de la velocidad entre la placa y el sustrato es lineal. El modelo se vuelve inválido cuando la separación entre placas es muy grande. Si el decaimiento efectivo de la distancia,  $\delta$ , no es mucho mayor de la separación entre placas,  $d$ , deberá usarse la ecuación 4.52.

Resolviendo la ecuación 4.52 con las mismas condiciones de frontera marcadas para el caso del flujo de Couette, el perfil de la velocidad del fluido será:

$$u = u_0 \frac{-e^{-\tilde{d}+\tilde{z}} \cos(\omega t + \tilde{z} - \tilde{d} - \theta) + e^{\tilde{d}-\tilde{z}} \cos(\omega t - \tilde{z} + \tilde{d} - \theta)}{\sqrt{e^{2\tilde{d}} + e^{-2\tilde{d}} - 2 \cos(2\tilde{d})}} \quad (4.59)$$

donde  $\tilde{d} \equiv d/\delta$ ,  $\tilde{z} \equiv z/\delta$  y  $\theta$  es el corrimiento en la fase presente en la oscilación de la placa ( $u(0) = u_0 \cos \omega t$ ).  $\theta$  se define mediante:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{(e^{\tilde{d}} + e^{-\tilde{d}}) \sin \tilde{d}}{(e^{\tilde{d}} - e^{-\tilde{d}}) \cos \tilde{d}}$$

Por lo tanto, la fuerza de amortiguamiento sobre la placa será:

$$F_{Sd} = A \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{A \mu u_0}{\delta \sqrt{e^{2\tilde{d}} + e^{-2\tilde{d}} - 2 \cos 2\tilde{d}}} (-e^{-\tilde{d}} \cos(\omega t - \tilde{d} - \theta) + e^{-\tilde{d}} \sin(\omega t - \tilde{d} - \theta) - e^{\tilde{d}} \cos(\omega t + \tilde{d} - \theta) + e^{\tilde{d}} \sin(\omega t + \tilde{d} - \theta))$$

Con la fuerza de amortiguamiento, la energía de disipación en un ciclo de oscilación se calcula a partir de:

$$\Delta E_{Sd} = \int_0^T F_{Sd} u_0 dt = \frac{\pi A \mu u_0^2}{\omega \delta} \frac{\sinh(2\tilde{d}) + \sin(2\tilde{d})}{\cosh(2\tilde{d}) - \cos(2\tilde{d})}$$

y el factor de calidad  $Q$  se obtiene mediante:

$$Q_{Sd} = \frac{m\omega\delta \cosh(2\tilde{d}) - \cos(2\tilde{d})}{A\mu \sinh(2\tilde{d}) + \sin(2\tilde{d})}$$

Para la condición extrema  $d \ll \delta$ , se tiene que  $\theta = \pi/4$ ,  $F_{Sd} = F_{Cd} = -A\mu u(0)/d$ ,  $\Delta E_{Sd} = \Delta E_{Cd}$  y  $Q_{Sd} = Q_{Cd}$ , es decir, los resultados del modelo del flujo de Stokes coinciden con los obtenidos empleando el modelo de flujo de Couette.

Para la otra condición extrema  $d \gg \delta$ , y a partir de la ecuación 4.59, se tiene:

$$u = u_0 e^{-\tilde{z}} \cos(\omega t + \tilde{d} - \theta)$$

Esto muestra que el fluido alrededor de la placa oscila con la misma frecuencia que la placa, pero la amplitud de la oscilación en el fluido decae exponencialmente al alejarse de la placa.  $\delta$  es la distancia sobre la cual la amplitud decrece en un factor de  $e = 2,718$ .

Bajo esta condición ( $d \gg \delta$ ), la disipación de energía en un ciclo será:

$$\Delta E_{S\infty} = \frac{\pi}{3} u_0^2 \frac{\mu}{\delta} A$$

y

$$Q_{S\infty} = \frac{m\omega\delta}{\mu A} = \frac{\rho_p H \omega \delta}{\mu}$$

Si  $Q_{S\infty}$  es comparado con  $Q_{Cd}$  (ecuación 4.58), se tiene que la fuerza de amortiguamiento se obtiene a partir de:

$$F_{S\infty} = \frac{\mu A u(0)}{\delta} \quad (4.60)$$

Dado que la condición señala que  $d \gg \delta$ , esto significa que el efecto del sustrato es despreciable para la placa oscilatoria, la placa puede ser considerada como un objeto aislado inmerso en el fluido. Si ahora se compara este resultado con la fuerza de arrastre sobre un objeto aislado que se analizó en la subsección *Amortiguamiento por la fuerza de arrastre* de este capítulo, en particular la señalada para un plato circular moviéndose dentro del plano que lo contiene:

$$F_d = \frac{32}{3} \mu r v = \frac{32}{3\pi} \frac{\mu A v}{r} \quad (4.61)$$

(donde  $v$  es la velocidad de la placa, equivalente a la condición  $u(0)$  en la ecuación 4.60 y  $r$  es el radio del disco), se verán las coincidencias. El efecto en los bordes del disco no se considera en  $F_{S\infty}$  y los efectos de la frecuencia tampoco se han considerado en  $F_d$ . Dado que el efecto de amortiguamiento está subestimado en ambos modelos, el mayor será el más preciso.

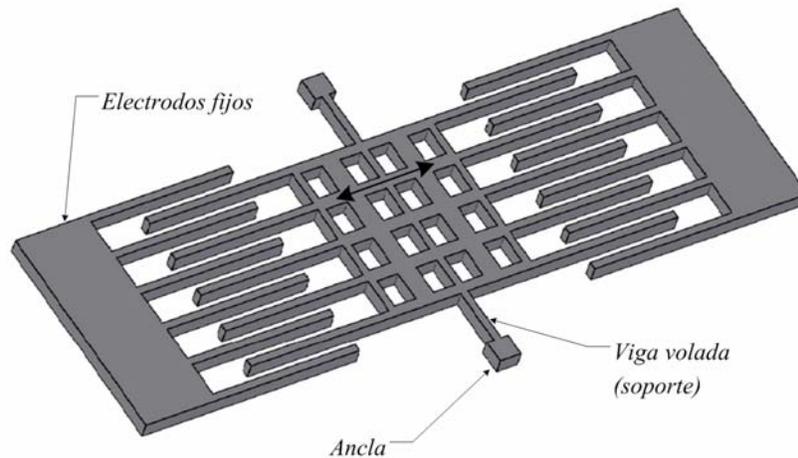


Figura 4.25: Esquema de un resonador basado en un actuador electrostático en forma de peine.

#### 4.4.4. Amortiguamiento por efecto del aire para un resonador con actuador electrostático lateral en forma de peine

Los Microsistemas que basan su diseño en la operación de un microresonador con actuadores electrostáticos laterales en forma de peine son muy comunes.

Los elementos laterales son los dedos o electrodos fijos, las anclas se encuentran a derecha e izquierda, los soportes (que actúan como resortes) unen las anclas con la masa de prueba, la masa de prueba es el rectángulo que se muestra al centro y los electrodos móviles son los dedos que sobresalen de la masa de prueba para intercalarse con los electrodos fijos. A las partes móviles de la estructura (masa, electrodos móviles y resorte) se les induce un movimiento oscilatorio mediante la aplicación de una señal alterna de voltaje (más un escalón) entre los electrodos fijos y las anclas que sujetan la masa de prueba. Es común que la frecuencia de la señal de alimentación coincida con la frecuencia de resonancia de la estructura mecánica, de modo tal que el dispositivo mecánico es llevado a un estado de resonancia y de ahí deriva su nombre.

Una de las características más importantes del microresonador es el factor de calidad mecánico,  $Q$ . Para un microresonador operando en un ambiente con presión de una atmósfera, el amortiguamiento por efecto del aire es el factor dominante para determinar el factor de calidad del resonador. La fuerza de amortiguamiento total para un microresonador es el resultado de las características geométricas de la estructura y la presencia de diferentes mecanismos de amortiguamiento. Los principales componentes de la fuerza de amortiguamiento son:

##### Película de aire atrapada entre la masa del microresonador y el sustrato

Dado que la distancia de separación entre placas,  $d_p$ , entre la placa móvil y el sustrato es mucho menor que  $\delta$ , la fuerza de amortiguamiento es del tipo *flujo de Couette* y puede expresarse como:

$$F_1 = \mu \frac{A_p}{d_p} \dot{x} = c_1 \dot{x}$$

donde  $A_p$  es el área efectiva de la placa para el cálculo del amortiguamiento, incluyendo las áreas de la placa, dedos y resortes. Las áreas de los agujeros también se incluyen en  $A_p$  (es decir, no se restan del área

total de la placa) ya que sus dimensiones son muy pequeñas y se considera, normalmente, que no existe flujo de aire lateral en los agujeros.

#### **Película de aire atrapada entre la masa del microresonador y alguna referencia mecánica en la parte superior**

Si la estructura está alejada de cualquier objeto colocado por encima de ella (o simplemente no existe referencia mecánica encima del microresonador), la fuerza de amortiguamiento experimentada por las partes móviles es del tipo flujo de Stokes y puede expresarse como:

$$F_2 = \mu \frac{A_p}{\delta} \dot{x} = c_2 \dot{x}$$

donde  $\delta$  es el decaimiento efectivo de la distancia  $\delta = \sqrt{2\mu/\rho\omega}$  y  $\rho$  es la densidad del aire.

#### **Película de aire atrapada entre los electrodos intercalados del microresonador**

La fuerza de amortiguamiento experimentada por los electrodos intercalados es:

$$F_3 = \mu \frac{A_s}{d_s} \dot{x} = c_3 \dot{x}$$

donde  $A_s$  es el área lateral traslapada entre los electrodos fijos y los móviles y  $d_s$  es la distancia de separación entre electrodos fijos y móviles. Para estas consideraciones se ha asumido que  $d_s \ll \delta$ .

#### **Fuerza de arrastre del aire**

La fuerza de arrastre del aire sobre la placa en movimiento es muy difícil de estimar. De acuerdo con la ecuación 4.61, la fuerza puede aproximarse mediante:

$$F_4 \approx \frac{32}{3} \mu l \dot{x} = c_4 \dot{x}$$

donde  $l$  es la dimensión característica de la estructura móvil que puede tomarse como la mitad del ancho de la placa.

La fuerza total de amortiguamiento sobre la placa consiste de  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  o  $F_4$ . Y dado que  $F_3$  y  $F_4$  son normalmente muy pequeñas, por conveniencia, la fuerza total de amortiguamiento queda expresada como:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \dot{x} \equiv c \dot{x}$$

y el factor de calidad se calcula mediante:

$$\frac{1}{Q} = 2\zeta = \frac{c}{m\omega}$$

o

$$\frac{1}{Q} = \frac{\mu}{m\omega} \left( \frac{A_p}{d_p} + \frac{A_p}{\delta} + \frac{A_s}{d_s} + 10,7l \right) \quad (4.62)$$

donde  $m$  es la masa de la placa y  $\omega$  es la frecuencia radial de la oscilación.

Debido a la dimensión finita de la estructura y al efecto en los bordes y esquinas, la ecuación 4.62 es una aproximación semicuantitativa al valor preciso que resulta útil en el diseño del resonador.

La frecuencia de resonancia  $\omega$  en la ecuación 4.62 puede escribirse como:

$$\omega = \sqrt{\frac{2Ehb^3}{mL^3}}$$

donde  $L$  es la longitud efectiva de los resortes (vigas suspendidas),  $b$  el ancho y  $h$  el grosor. Dado que  $m \cong A_p h \rho_p$ , se tiene:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\mu}{h} \sqrt{\frac{L^3}{2E\rho_p A_p b^3}} \left( \frac{A_p}{d_p} + \frac{A_p}{\delta} + \frac{A_s}{d_s} + 10,7l \right) \quad (4.63)$$

Para la mayoría de los casos, el término del amortiguamiento debido a la película de aire atrapada entre placas deslizantes que se comporta como flujo de Couette (primer término en la ecuación 4.63) es el factor dominante del amortiguamiento debido al aire. Si sólo se considera el amortiguamiento debido al flujo de Couette en la estimación del factor de calidad de la estructura, se tiene:

$$Q \approx \frac{hd_p}{\mu} \sqrt{\frac{E\rho_p}{A_p} \left( \frac{b}{L} \right)^3}$$

Esto significa que, para un factor de calidad alto, la estructura deberá ser gruesa y estar alejada del sustrato. Los resortes (vigas suspendidas) deberán balancear el compromiso entre rigidez en la dirección  $z$  (para sostener la masa de prueba) y flexibilidad en la dirección de movimiento,  $x$  o  $y$ .

El modelo unidimensional del flujo de Stokes ignora los efectos en los bordes de la placa, y esto genera un error significativo debido a la presencia de los electrodos intercalados. W. Ye, entre otros, [?] investigó el amortiguamiento debido al aire en un resonador con actuador electrostático lateral en forma de peine empleando un modelo tridimensional y comparó los resultados teóricos con los datos experimentales y encontró que el modelo unidimensional subestima la fuerza de amortiguamiento por un factor de alrededor de dos unidades, en tanto que el modelo tridimensional se aproxima a la evidencia experimental hasta en un 90%.

## 4.5. Amortiguamiento en aire enrarecido

### 4.5.1. Viscosidad efectiva del aire enrarecido

Hasta ahora el aire, a presión de una atmósfera, puede considerarse como un fluido viscoso debido a las frecuentes colisiones entre las moléculas de los gases que lo componen. Por lo tanto, el mecanismo de disipación de energía del amortiguamiento provocado por aire se debe al flujo viscoso del aire provocado por el movimiento de la estructura oscilatoria. El coeficiente de viscosidad del gas,  $\mu$ , derivado a partir de un modelo simple queda expresado como:

$$\mu = \frac{1}{3}\rho_a\lambda\bar{v}$$

donde  $\rho_a$  es la densidad del gas,  $\lambda$  es la distancia promedio entre colisiones para las moléculas de un gas y  $\bar{v}$  la velocidad promedio de las moléculas. Dado que  $\rho_a$  es proporcional a la presión, en tanto que  $\lambda$  es inversamente proporcional a la presión, el coeficiente de viscosidad,  $\mu$ , es independiente de la presión  $p$ .

La evidencia experimental muestra que el amortiguamiento provocado por el aire es totalmente constante cuando la presión es cercana a la presión atmosférica. Por lo tanto, es comprensible que cuando el aire se enrarece a una presión por debajo de la atmosférica, el amortiguamiento provocado por el aire se reduce considerablemente.

Existen dos enfoques, lejanos entre sí, para modelar el amortiguamiento provocado por aire enrarecido: el coeficiente efectivo de viscosidad y el modelo de moléculas libres. El primer enfoque sugiere que las ecuaciones que modelan el amortiguamiento por deslizamiento de superficies sobre una película de aire son válidas en presencia de aire enrarecido, pero que el coeficiente de viscosidad debe reemplazarse por otro llamado coeficiente efectivo de viscosidad,  $\mu_{efectivo}$ , el cual es dependiente de la presión a través del número de Knudsen,  $K_n$ , del sistema. El número de Knudsen se define como:

$$K_n = \frac{\lambda}{d}$$

donde  $\lambda$  es la distancia promedio entre colisiones para las moléculas y  $d$  es la dimensión característica de la estructura amortiguada (por ejemplo, para el análisis del amortiguamiento de un objeto aislado,  $d$  es la dimensión característica del cuerpo y, para el amortiguamiento por deslizamiento de superficies,  $d$  es la distancia de separación entre la placa y el sustrato).

Una ecuación simple para aproximar el coeficiente efectivo de viscosidad, basada en datos experimentales, es proporcionada por los trabajos de Fukui (cita) y Veijola (cita):

$$\mu_{efectivo} = \frac{\mu_0}{1 + 9,658K_n^{1,159}}$$

donde  $\mu_0$  es el coeficiente de viscosidad a presión atmosférica.

Basados en datos experimentales de Andrews (cita) y Li (cita) es posible derivar una ecuación empírica similar para el coeficiente efectivo de viscosidad:

$$\mu_{efectivo} = \frac{\mu_0}{1 + 6,8636K_n^{0,9906}}$$

Con el coeficiente efectivo de viscosidad, el efecto de amortiguamiento por el deslizamiento de placas sobre una película de aire enrarecido está en función de las dimensiones de la placa y la distancia entre la placa móvil y el sustrato del mismo modo que ocurre cuando la presión es de una atmósfera.

El concepto del coeficiente efectivo de viscosidad para aire enrarecido es razonable cuando la presión del aire no es muy baja, de modo que el gas puede ser considerado aún como un continuo aunque las condiciones de frontera deben ser replanteadas. En presencia de una presión mucho menor que la presión atmosférica, las colisiones entre las moléculas del gas se reducen de modo tal que difícilmente puede seguirse considerando como un fluido viscoso. En cuyo caso, el concepto de coeficiente efectivo de viscosidad no resulta útil para realizar el análisis.

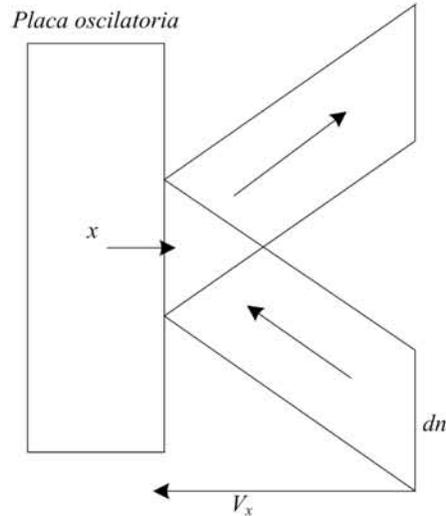


Figura 4.26: Colisiones frontales de la placa oscilante con las moléculas de gas.

Cinemáticamente, la naturaleza de la interacción entre un cuerpo sólido y un gas ambiente es descrito utilizando el número de Knudsen  $K_n$ . Para el caso en que  $K_n \ll 1$ , lo cual significa que la dimensión característica de la microestructura es mucho mayor que la distancia promedio entre colisiones para las moléculas, el gas puede considerarse como un fluido viscoso. Para el caso en que  $K_n \gg 1$ , lo cual significa que la distancia de separación entre elementos deslizantes es mucho menor que la distancia promedio entre colisiones para las moléculas, el modelo de flujo viscoso pierde validez y debe considerarse el modelo de moléculas libres. Para ilustrar esta última sugerencia considérese que  $\lambda$  (la distancia promedio entre colisiones para las moléculas de un gas) es del orden de  $0,1 \mu m$ , a presión atmosférica y para el vacío con una presión de  $1 Pa$ ,  $\lambda$  se incrementa hasta un centímetro, dimensión que es mucho mayor que las dimensiones características de cualquier microestructura. Por lo que el empleo del modelo de moléculas libres está justificado.

#### 4.5.2. Modelo de Christian para amortiguamiento provocado por aire enrarecido

La evidencia experimental muestra que la fuerza de amortiguamiento sobre una microestructura se reduce de forma significativa cuando la presión del aire se reduce hasta cerca de  $1 [kPa]$  o por debajo. Lo cual indica que las moléculas del gas están tan separadas en presiones bajas que la interacción entre ellas puede despreciarse. Por lo tanto, el modelo de moléculas libres puede emplearse.

R. Christian propuso el modelo de moléculas libres para amortiguamiento en bajas presiones [?]. En este modelo, la fuerza resistiva de amortiguamiento sobre una placa oscilante se calcula mediante la tasa de transferencia de la cantidad de movimiento desde la placa oscilatoria al aire circundante a través de colisiones entre la placa y las moléculas. En este modelo, no se ha empleado el coeficiente de viscosidad en forma alguna y el factor de calidad de la placa oscilante se calcula de forma directa.

Considérese la fuerza de amortiguamiento actuando sobre una placa que oscila en la dirección  $x$ , como se muestra en la figura 4.26. Si la interacción entre las moléculas de gas puede despreciarse, la fuerza de amortiguamiento actuando sobre la placa oscilante es provocada por la transformación de la cantidad de movimiento debido a las colisiones entre la placa y las moléculas de gas.

El número de moléculas por unidad de volumen con una velocidad en el rango de  $v_x$  hasta  $v_x + \Delta v_x$  es  $dn = n f(v_x) dv_x$ , donde  $f(v_x)$  es una función con distribución de Maxwell.

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \quad (4.64)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann ( $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  o  $k = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$ ). Si la velocidad de la placa es  $\dot{x}$ , debido al movimiento de la placa, el número de colisiones por unidad de tiempo por unidad de área de la placa, para aquellas moléculas en el rango de velocidades de  $v_x$  hasta  $v_x + \Delta v_x$ , es  $(v_x + \dot{x}) dn = n(v_x + \dot{x})f(v_x) dv_x$ .

Dado que el cambio del momento para cada colisión contra alguna molécula es  $2m(v_x + \dot{x})$ , la presión provocada por las colisiones sobre la parte frontal de la placa puede encontrarse mediante una integración para tomar en cuenta todas las velocidades de las moléculas.

$$P_f = 2mn \int_{-\dot{x}}^{\infty} (v_x + \dot{x})^2 f(v_x) dv_x \quad (4.65)$$

De modo análogo, la presión provocada por las colisiones sobre la parte posterior de la placa será:

$$P_b = 2mn \int_{\dot{x}}^{\infty} (v_x - \dot{x}) f(v_x) dv_x \quad (4.66)$$

La fuerza total de amortiguamiento provocado por las colisiones es  $F_r = A(P_f - P_b)$ , donde  $A$  es el área de la placa. Si la velocidad de la placa,  $\dot{x}$ , es mucho menor que la velocidad de la mayoría de las moléculas de gas, de acuerdo con las ecuaciones 4.64, 4.65 y 4.66, se tiene:

$$F_r \cong 8mnA \int_0^{\infty} v_x \dot{x} f(v_x) dv_x = 8mnA \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \dot{x}$$

Para un gas en condiciones normales ( $P_0 = 1 \text{ atm}$ ,  $T_0 = 273 \text{ K}$ ), la densidad de moléculas del gas es  $n_0 = N_A/V_0$ , donde  $N_A = 6,023 \times 10^{23}$  y  $V_0 = 0,0224 \text{ m}^3$ . La densidad de moléculas a presión  $P$  y temperatura  $T$  se obtiene mediante:

$$n = n_0 \frac{PT_0}{P_0T} = \frac{N_A P}{RT}$$

donde  $R = 8,31 \text{ kgm}^2/\text{s}^2/\text{K}$  es la constante universal molar de los gases. Por lo tanto, se obtiene:

$$F_r = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{M_m}{RT}} PA\dot{x} \quad (4.67)$$

donde  $M_m$  es la masa Molar del gas. Así, el coeficiente de amortiguamiento en aire enrarecido calculado mediante el modelo de moléculas libres será:

$$c_r = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{M_m}{RT}} PA \quad (4.68)$$

La ecuación 4.67 muestra que el efecto de amortiguamiento en aire enrarecido decrece de forma lineal con la presión. Por lo tanto, el factor  $Q$  del sistema en bajo vacío será:

$$Q = \frac{M_p \omega_0}{c_r}$$

donde  $M_p$  es la masa de la placa y  $\omega_0$  la frecuencia natural del sistema. Dado que  $M_p = Ah\rho$ , el factor de calidad dado por el modelo de Christian será:

$$Q_{Chr} = \frac{H\rho\omega_0}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{RT}{M_m P}} \quad (4.69)$$

donde  $H$  es el grosor de la placa y  $\rho$  es la densidad de la placa. A pesar de que el factor de calidad es inversamente proporcional al valor de la presión  $P$ , el modelo de Christian sobreestima el valor del factor de calidad y con ello subestima la fuerza de amortiguamiento en presencia de aire enrarecido.

### 4.5.3. Modelo de transferencia de energía para amortiguamiento por presión sobre una película de aire

Aunque el modelo de Christian explica cuantitativamente el efecto de amortiguamiento en bajo vacío, el efecto de amortiguamiento es subestimado hasta en un orden de magnitud cuando los factores de calidad obtenidos se comparan con datos experimentales, al respecto consúltese la obra de J. Zook [?].

Otro problema del modelo de Christian es que se trata sólo de un modelo de amortiguamiento aplicable a una placa aislada, dado que el efecto de cualquier muro cercano no se considera. En la mayoría de los casos prácticos, las placas móviles están rodeadas por electrodos o por otras estructuras. Cuando la placa es actuada de forma electrostática, los electrodos están muy cercanos a la placa móvil para lograr magnitudes de fuerza lo suficientemente grandes para mover la placa.

El tercer problema del modelo de Christian es que la dependencia del factor de calidad de las dimensiones de la placa móvil no es contemplada, lo cual resulta poco razonable.

Para resolver estos problemas, Minhang Bao (cita) ha propuesto otro modelo de moléculas libres. Con este nuevo modelo se evitan los problemas antes mencionados y para una placa aislada es posible obtener resultados similares a los obtenidos con el modelo de Christian. El modelo calcula la energía perdida por el efecto de transferencia de energía.

#### Cambio de velocidad de las moléculas de gas debido a las colisiones

Para calcular la energía transferida desde la placa hacia el aire que la rodea, debe considerarse en primer término el cambio de velocidad de las moléculas de gas debido a sus colisiones con la placa móvil.

Una molécula de gas se mueve con velocidad  $v_2$  hacia la placa móvil y ésta se mueve al encuentro de la molécula con una velocidad  $v_1$ . Dado que la masa de la molécula de gas,  $m$ , es mucho menor que la masa de la placa,  $M$ , la molécula de gas rebota en la placa después de la colisión y la placa continua su movimiento aunque experimenta variaciones en su velocidad. Véase la figura 4.27.

Si las velocidades de la placa y de la molécula son  $v'_1$  y  $v'_2$  después de la colisión, respectivamente, la conservación del momento cinético se expresará como:

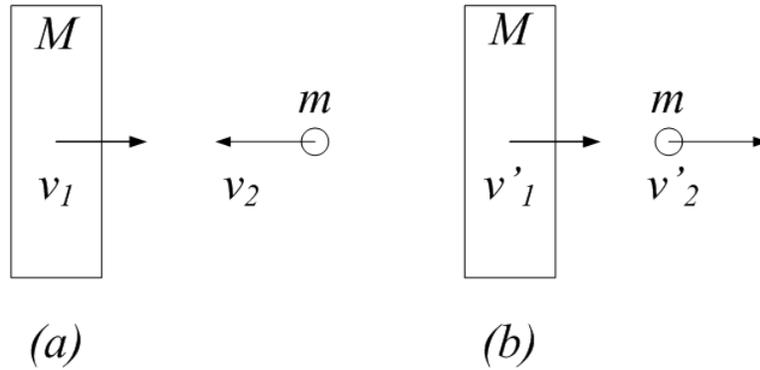


Figura 4.27: Las velocidades de la placa y de una molécula. (a) antes de una colisión y (b) después de una colisión.

$$Mv_1 - mv_2 = Mv'_1 + mv'_2$$

Si se define  $\gamma = m/M$ , se tiene:

$$v_1 - \gamma v_2 = v'_1 + \gamma v'_2 \quad (4.70)$$

A causa de la conservación de la energía cinética se tiene:

$$v_1^2 + \gamma v_2^2 = v_1'^2 + \gamma v_2'^2 \quad (4.71)$$

De las ecuaciones 4.70 y 4.71, para  $\gamma$  mucho menor que la unidad, se tiene:

$$v_2' = v_2 + 2v_1$$

Lo cual significa que las moléculas de gas han experimentado un incremento de velocidad de  $2v_1$  debido a la colisión frontal con la placa con velocidad  $v_1$ . De forma similar, si la placa se mueve en la misma dirección que la molécula, la velocidad resultante de la molécula sería:

$$v_2' = v_2 - 2v_1$$

#### Amortiguamiento por aire para una placa aislada

Para comparar el modelo de transferencia de energía y el modelo de Christian, el factor de calidad de una placa aislada oscilatoria en bajo vacío será calculado utilizando el primer modelo. De acuerdo con la estadística de Boltzmann, el número de moléculas con velocidad en el rango entre  $v_x$  y  $v_x + dv_x$  que impactan la superficie de una placa estática normal al eje  $x$  en un intervalo  $\Delta t$  será:

$$\Delta n = An f(v_x) v_x dv_x \Delta t$$

donde  $A$  es el área de la placa.

Si la placa está en movimiento en su dirección normal (la dirección  $x$ ), el número de moléculas (con velocidades entre  $v_x$  y  $v_x + \Delta v_x$  en un intervalo  $\Delta t$ ) que colisionan con la parte frontal de la placa se obtiene mediante:

$$\Delta n_{frontal} = Anf(v_x)(v_x + \dot{x}) dv_x \Delta t$$

donde  $\dot{x}$  es la velocidad de la placa en movimiento. De forma análoga, el número de colisiones en la parte posterior de la placa será:

$$\Delta n_{trasera} = Anf(v_x)(v_x - \dot{x}) dv_x \Delta t$$

Por lo tanto, la energía transferida desde la placa en movimiento a las moléculas, ubicadas en la parte frontal de dicha placa, en un intervalo  $\Delta t$  se calcula a partir de:

$$\Delta E_{frontal} = A \int_{-\dot{x}}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} m (v_x + 2\dot{x})^2 - \frac{1}{2} m v_x^2 \right] (v_x + \dot{x}) n f(v_x) dv_x \Delta t$$

De forma similar, la energía transferida desde la placa en movimiento a las moléculas, ubicadas en la parte trasera de dicha placa, en un intervalo  $\Delta t$  se calcula mediante:

$$\Delta E_{trasera} = A \int_{\dot{x}}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} m (v_x - 2\dot{x})^2 - \frac{1}{2} m v_x^2 \right] (v_x - \dot{x}) n f(v_x) dv_x \Delta t$$

La energía neta transformada desde la placa oscilante a las moléculas que la circundan ( $\Delta E = \Delta E_{frontal} + \Delta E_{trasera}$ ) en un intervalo  $\Delta t$  será:

$$\Delta E = A \int_{-\dot{x}}^{\infty} \frac{1}{2} m (4\dot{x}v_x + 4\dot{x}^2) (v_x + \dot{x}) n f(v_x) dv_x \Delta t + A \int_{\dot{x}}^{\infty} \frac{1}{2} m (-4\dot{x}v_x + 4\dot{x}^2) (v_x - \dot{x}) n f(v_x) dv_x \Delta t$$

Si  $\dot{x}$  es mucho menor que  $v_x$ , la ecuación puede aproximarse como:

$$\Delta E = Amn \int_0^{\infty} 8v_x \dot{x}^2 f(v_x) dv_x \Delta t = 4Amn \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \dot{x}^2 \Delta t$$

Para una oscilación sinusoidal, es decir,  $x = a_0 \sin \omega t$ , la pérdida de energía en un ciclo se calcula empleando:

$$\Delta E_{ciclo} = 4Amn \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \int_0^{2\pi} a_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \cdot \frac{1}{\omega} d(\omega t) = 4Amn \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} a_0^2 \omega \pi$$

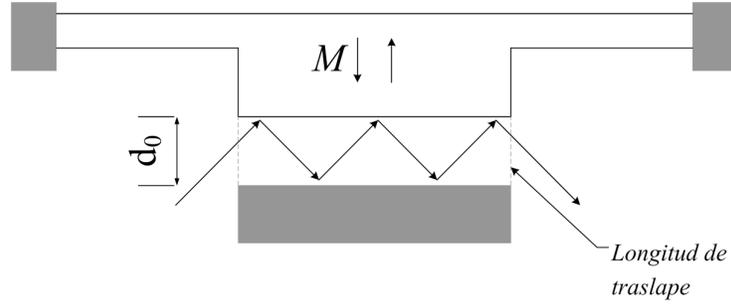


Figura 4.28: Compresión de aire en un ambiente de baja presión (enrarecimiento de gases).

De acuerdo con la definición de factor de calidad, el factor de calidad será:

$$Q_{E,Aislada} = \frac{2\pi E_p}{\Delta E_{ciclo}} = \frac{\rho H \omega}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{RT}{M_m}} \frac{1}{P} \quad (4.72)$$

Cuando la ecuación 4.72 es comparada con la ecuación 4.69 se tiene que  $Q_{E,Aislada} = Q_{Chr}$ .

#### Amortiguamiento por presión sobre una película de aire

Se define a la distancia de separación original entre la placa oscilante y el sustrato como  $d_0$  y al desplazamiento (hacia abajo, al encuentro del sustrato) de la placa oscilatoria como  $x = a_0 \sin \omega t$ . Véase la figura 4.28.

Debido al desplazamiento de la placa, la distancia de separación es  $d = d_0 - x$ . Si la longitud del traslape entre placa y sustrato es  $L$ , entonces el área transversal del espacio de separación es  $L(d_0 - x)$ . El número de moléculas desplazándose en el área transversal del espacio de separación entre la placa y el sustrato por unidad de tiempo será:

$$\frac{1}{4} n \bar{v} L (d_0 - x) \quad (4.73)$$

donde  $n$  es la concentración de las moléculas y  $\bar{v}$  la velocidad promedio de las moléculas:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Si una molécula ingresa en el área transversal del espacio de separación entre placa y sustrato, tiene componentes de velocidad  $v_{yz0}$  en el plano  $y - z$  y  $v_{x0}$  en la dirección  $x$ , gana velocidad en la dirección  $x$  debido a la colisión con la placa cuando viaja por el espacio de separación. Si la distancia lateral recorrida por la molécula en el espacio de separación es  $l$ , el tiempo que la molécula permanece en la separación es  $\Delta t = l/v_{yz0}$ . Dado que  $v_{yz0}$  está en el orden de varios cientos de metros por segundo,  $\Delta t$  es mucho menor que un ciclo de oscilación de la placa. Así, el número de colisiones en un periodo  $\Delta t$  será:

$$\Delta N = \frac{\Delta t \times v_{x0}}{2(d_0 - x)} = \frac{l v_{x0}}{2(d_0 - x) v_{yz0}}$$

Dado que las moléculas incrementan su velocidad en  $2\dot{x}$  cada vez que chocan con la placa, la velocidad en la dirección  $x$  al final del recorrido por el espacio de separación será:

$$v_x = v_{x0} + \Delta N \times 2\dot{x} = v_{x0} + \frac{lv_{x0}}{(d_0 - x)v_{yz0}}\dot{x}$$

La energía cinética de la molécula al ingresar al espacio de separación se calcula mediante:

$$e_{k, entrada} = \frac{1}{2}m [v_{yz0}^2 + v_{x0}^2]$$

en tanto que la energía de la molécula al abandonar el espacio de separación se obtiene a partir de:

$$e_{k, salida} = \frac{1}{2}m \left[ v_{yz0}^2 + v_{x0}^2 + \frac{2lv_{x0}^2}{(d_0 - x)v_{yz0}}\dot{x} + \frac{l^2v_{x0}^2}{(d_0 - x)^2v_{yz0}^2}\dot{x}^2 \right]$$

la energía adicional ganada por la molécula debido a las colisiones con la placa será:

$$\Delta e_k = \frac{1}{2}m \left[ \frac{2lv_{x0}^2}{(d_0 - x)v_{yz0}}\dot{x} + \frac{l^2v_{x0}^2}{(d_0 - x)^2v_{yz0}^2}\dot{x}^2 \right] \quad (4.74)$$

dado que el promedio del primer término a la derecha de la ecuación es cero en un ciclo, sólo el segundo término contribuye a la pérdida de energía de la placa. De acuerdo con las ecuaciones 4.73 y 4.74, la energía promedio perdida por la placa en un ciclo de oscilación se obtiene empleando:

$$\Delta E_{ciclo} = \frac{1}{4}n\bar{v}L \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{ml^2v_{x0}^2}{2(d_0 - x)v_{yz0}^2} a_0^2\omega^2 \cos^2 \omega t d(\omega t)$$

Por simplicidad,  $l^2$ ,  $v_{x0}^2$  y  $v_{yz0}^2$  son aproximadas como  $\bar{l}^2$ ,  $\bar{v}_{x0}^2$  y  $\bar{v}_{yz0}^2$  respectivamente. Dado que  $\bar{v}_{yz0}^2 = 2\bar{v}_{x0}^2$ , la energía perdida por la placa en un ciclo será:

$$\Delta E_{ciclo} = \frac{1}{4}\rho_0\bar{v}L \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{l}^2 a_0^2 \omega^2}{4(d_0 - x)} \cos^2 \omega t \cdot d(\omega t)$$

donde  $\rho_0 = mn$  es la densidad del gas. Si la amplitud de la vibración  $a_0$  es mucho menor que  $d_0$ , se tiene:

$$\Delta E_{ciclo} \cong \frac{1}{4}\rho_0\bar{v}L \frac{1}{\omega} \frac{\pi\bar{l}^2 a_0^2 \omega^2}{4d_0} = \frac{\pi\bar{l}^2 a_0^2 \omega}{16} \rho_0\bar{v} \frac{L}{d_0}$$

de acuerdo con la definición de  $Q$ , el factor de calidad para el amortiguamiento por presión sobre una película de aire obtenido mediante el modelo de transferencia de energía en bajo vacío será:

$$Q_E = \frac{2\pi E_p}{\Delta E_{ciclo}} = \frac{16M_p d_0 \omega}{l^2 \rho_0 \bar{v} L}$$

donde  $E_p$  es la energía de la placa y  $M_p$  la masa de la placa. Si la densidad del gas a presión atmosférica se denota mediante  $\rho_{atm}$  y la presión atmosférica es  $p_{atm}$ , el factor  $Q$  para una presión  $p$  se calcula a partir de:

$$Q_E = \frac{16M_p d_0 \omega p_{atm}}{\rho_{atm} \bar{v} L^2} \frac{1}{p}$$

para una placa rectangular con largo  $a$ , ancho  $b$ , grosor  $H$  y densidad  $\rho$ , la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$Q_E = \frac{16\rho H \omega p_{atm}}{\beta \rho_{atm} \bar{v}} \left(\frac{d_0}{L}\right) \frac{1}{p}$$

donde  $\beta = \frac{l^2}{ab}$ . Dado que  $\bar{v} \cong \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_m}}$  y  $\frac{p_{atm}}{\rho_{atm}} = \frac{RT}{M_m}$ , esta última ecuación puede escribirse como:

$$Q_E = \frac{8\sqrt{\pi}\rho H \omega}{\beta\sqrt{2}} \left(\frac{d_0}{L}\right) \sqrt{\frac{RT}{M_m}} \frac{1}{p}$$

se tiene que  $\beta = 2/\pi$ , con lo cual el factor de calidad para el amortiguamiento provocado por presión sobre una película de aire en bajo vacío será:

$$Q_E = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \rho H \omega \left(\frac{d_0}{L}\right) \sqrt{\frac{RT}{M_m}} \frac{1}{p} \quad (4.75)$$

o el coeficiente de amortiguamiento:

$$c_r = \frac{M_p \omega}{Q_E} = 0,0635 \left(\frac{L}{d_0}\right) \sqrt{\frac{M_m}{RT}} P A \quad (4.76)$$

Esta relación es válida bajo la condición de que el número de Knudsen  $K_n$  sea muy grande, de modo tal que las colisiones entre las moléculas de gas puedan ser despreciadas. Si  $K_n$  no es lo suficientemente grande, el factor de calidad será menor que el consignado en la ecuación 4.75. Comparando la ecuación 4.75 con 4.69, la relación entre el factor de calidad del amortiguamiento provocado por presión sobre una película de aire calculado por el modelo de transferencia de energía y el obtenido mediante el modelo de Christian se obtiene a partir de:

$$Q_E = 16\pi \left(\frac{d_0}{L}\right) Q_{Chr}$$

Dado que el valor de  $\beta$  puede subestimarse, el valor del factor de calidad puede estar sobreestimado.

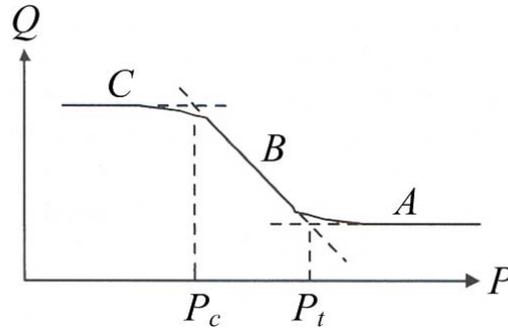


Figura 4.29: Dependencia del factor de calidad de la presión del aire.

#### 4.5.4. Amortiguamiento en alto vacío

De acuerdo con el modelo de moléculas libres, la fuerza de amortiguamiento en aire enrarecido es proporcional a la presión del aire. Por lo tanto, la fuerza de amortiguamiento provocada por el aire disminuye, o, el factor de calidad se incrementa, con la disminución de la presión. Sin embargo, el factor de calidad deja de incrementarse, cuando la fricción interna y las pérdidas en los soportes se convierten en los principales mecanismos de disipación de energía. Para microestructuras hechas de silicio, el factor de calidad en alto vacío,  $Q_0$ , se encuentra en el rango de  $10^4 \sim 10^5$ . Una vez que  $Q_0$  es obtenido a partir de mediciones, el coeficiente de amortiguamiento provocado por la fricción interna y las pérdidas en los soportes puede calcularse utilizando:

$$c_0 = \frac{M_p \omega}{Q_0}$$

donde  $M_p$  es la masa de la placa oscilante. Por lo tanto, la ecuación diferencial para la oscilación en aire enrarecido puede modificarse para quedar como:

$$m\ddot{x} + (c_r + c_0)\dot{x} + kx = F$$

donde  $c_r$  se obtiene a partir de las ecuaciones 4.68 o 4.76, dependiendo del modelo empleado.

Asumiendo que el factor de calidad de la placa oscilante sea alrededor de  $5 \times 10^4$ , la placa está hecha de silicio con un grosor de  $200 \mu m$  y la frecuencia natural de la estructura es  $1 kHz$ . La presión crítica,  $P_c$ , a la cual el factor de calidad se estabiliza a pesar del decremento de la presión puede calcularse mediante las ecuaciones 4.68 o 4.76 dependiendo del modelo empleado.

La relación entre el factor de calidad y la presión (desde una atmósfera hasta alto vacío) se muestra en la gráfica de la figura 4.29:

El comportamiento del factor de calidad a alta presión se muestra en la sección A de la gráfica. Bajo condiciones de alta presión,  $Q$  está determinado por la geometría y la dirección de movimiento de la estructura. El mecanismo de amortiguamiento podría deberse a la presión sobre una película de aire, al deslizamiento entre placas sobre una película de aire, a la fuerza de arrastre o a la combinación de todos estos mecanismos.

Cuando la presión disminuye hasta el rango de  $10^2 \sim 10^3 Pa$ ,  $Q$  se incrementa de forma considerable. El factor de calidad es inversamente proporcional a la presión del aire en la región. La presión de transición,  $P_t$ ,

desde el sector  $A$  hasta el sector  $B$ , es normalmente de varios cientos de pascales. El valor exacto dependerá de la geometría y los modos de oscilación de la estructura.

En alto vacío, cuando el amortiguamiento por aire es pequeño, los efectos de la fricción interna y las pérdidas de energía en los soportes de la estructura deben considerarse en el análisis. El factor de calidad está determinado principalmente por la fricción interna y las pérdidas en los soportes si el vacío es lo suficientemente alto y  $Q$  puede volverse constante como lo muestra el sector  $C$  de la gráfica bajo estas condiciones. El valor exacto dependerá, nuevamente, de la geometría de la estructura.



# Capítulo 5

## Actuación electrostática

Los actuadores mecánicos en raras ocasiones son impulsados por fuerzas de tipo electrostático, debido a que este tipo de fuerzas son muy pequeñas para desplazar o levantar elementos mecánicos, a menos que el voltaje empleado sea muy alto. Con la miniaturización de estructuras mecánicas, la fuerza electrostática se vuelve relativamente grande, por lo que el uso de fuerzas de tipo electrostático tiene múltiples y numerosas aplicaciones en los actuadores de los Microsistemas.

La fuerza electrostática en Sistemas Microelectromecánicos tiene las siguientes características, las cuales son muy importantes para el análisis y diseño de los dispositivos, o, en algunos casos, para la exploración de nuevas aplicaciones:

1. Para las microestructuras, la fuerza electrostática es comparable con la fuerza elástica de la estructura mecánica y la fuerza de amortiguamiento del aire circundante. Por lo tanto, todas las fuerzas deben ser consideradas de forma simultánea.
2. La fuerza electrostática no es lineal respecto de la distancia. La acción conjunta de la fuerza electrostática y la fuerza elástica puede provocar severos problemas de no linealidad e inestabilidad.
3. Dado que las distancias entre los elementos mecánicos y las dimensiones de las estructuras son comparables, los efectos de la fuerza electrostática en los bordes deben considerarse en muchos casos.

### 5.1. Fuerzas electrostáticas

#### 5.1.1. Fuerza normal

Se considerará que un actuador electrostático consiste de una fuente de voltaje y un capacitor de placas paralelas. Una de las placas del capacitor estará fija y la otra tendrá libertad de movimiento en su dirección normal. La capacitancia del capacitor de placas paralelas será por tanto:

$$C(x) = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{x} \quad (5.1)$$

donde  $A$  es el área de traslape de las placas paralelas del capacitor (actuando como electrodos),  $x$  es la distancia de separación entre las dos placas,  $\varepsilon_0$  es la permitividad del vacío ( $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ),  $\varepsilon$  es la permitividad relativa del medio presente entre las placas, la cual es aproximadamente igual a la unidad para el aire.

Por simplicidad en el análisis se asume que la energía inicial almacenada en el capacitor es cero y que la energía inicial de la fuente de voltaje, normalmente una batería, es  $E_0$ . Por lo tanto, cuando el capacitor es

conectado a la fuente de voltaje, si la fuerza electromotriz de la fuente es  $V$ , la carga eléctrica almacenada en el capacitor es:

$$Q_c = C(x) V$$

La energía almacenada en el capacitor es:

$$E_c = \frac{1}{2} C(x) V^2$$

Debido a la carga del capacitor, la energía de la batería (fuente de voltaje) se reduce, por lo que:

$$E_B = E_0 - Q_c V = E_0 - C(x) V^2$$

Por lo tanto, la energía del circuito es:

$$E(x) = E_B + E_c = E_0 - \frac{1}{2} C(x) V^2 = E_0 - \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2x^2} V^2 \quad (5.2)$$

De la ecuación anterior, la fuerza normal aplicada sobre la placa móvil del capacitor es:

$$F_N = -\frac{\partial E(x)}{\partial x} = -\frac{A\epsilon\epsilon_0}{2x^2} V^2 \quad (5.3)$$

el signo negativo de la fuerza indica que la fuerza es atractiva.

De acuerdo con la ecuación 5.3, la fuerza atractiva entre las dos placas paralelas se mantiene constante cuando las dimensiones de las placas y la distancia de separación se escalan por el mismo factor. Esta es una de las características favorables de la fuerza electrostática para aplicaciones a Microsistemas.

### 5.1.2. Fuerza tangencial

Considérese un sistema formado por una batería y un actuador de placas paralelas. La separación entre placas,  $d$ , es constante; la placa que se encuentra en la parte superior es móvil y se desplaza sobre el plano que ella misma define. Si se supone que la distancia de traslape,  $y$ , es mucho mayor que la distancia de separación,  $d$ , la capacitancia entre las dos placas se obtiene mediante:

$$C(y) = \frac{by\epsilon\epsilon_0}{d} \quad (5.4)$$

donde  $b$ , es el ancho de las placas.

La energía almacenada por la batería se denota por  $E_0$  antes de que el capacitor sea conectado a ella de forma paralela. Una vez que el capacitor es conectado a la batería, la carga eléctrica almacenada en el capacitor es:

$$Q_c = C(y) V$$

y la energía almacenada en el capacitor es:

$$E_c = \frac{by\varepsilon\varepsilon_0}{2d} V^2$$

Debido a la carga del capacitor, la energía de la batería se reduce a:

$$E_B = E_0 - Q_c V = E_0 - C(y) V^2$$

Por lo tanto, la energía del sistema batería-capacitor se expresa como:

$$E(y) = E_B + E_c = E_0 - \frac{1}{2} C(y) V^2 = E_0 - \frac{by\varepsilon\varepsilon_0}{2d} V^2 \quad (5.5)$$

A partir de la ecuación 5.5, la fuerza aplicada sobre la placa móvil del capacitor es:

$$F_T = -\frac{\partial E(y)}{\partial y} = \frac{b\varepsilon\varepsilon_0}{2d} V^2 \quad (5.6)$$

El signo positivo en el segundo término de la ecuación 5.6 indica que la fuerza tangencial aplicada sobre la placa móvil tira de la placa para lograr una mayor área de traslape con la placa estacionaria. También a partir de la ecuación 5.6 puede apreciarse que la fuerza es independiente de la distancia de traslape entre placas,  $y$ , de modo tal que la fuerza es constante con el movimiento de la placa, y la fuerza electrostática tangencial se mantiene constante cuando el ancho,  $b$ , de la placa se escala con la distancia  $d$ .

Si se compara la fuerza tangencial  $F_T$  y la fuerza normal  $F_N$  bajo las consideraciones de que  $x = d$  y  $A = by$ , a partir de las ecuaciones 5.3 y 5.6, se tiene que  $|F_N|/|F_T| = y/d$ . Normalmente,  $F_N$  es mayor que  $F_T$ , así como  $y$  es usualmente mayor que  $d$ .

### 5.1.3. Efectos en los bordes

#### Capacitancia

Hasta ahora los electrodos del capacitor mecánico se han considerado paralelos y como placas cuyas dimensiones son mucho mayores que la distancia que las separa. Por lo tanto, el capacitor en cuestión puede aproximarse como uno de placas paralelas y la capacitancia se obtiene mediante la ecuación 5.1 o la ecuación 5.1. Sin embargo, en el diseño de microsensores y actuadores es frecuente que las dimensiones de los electrodos mecánicos sean comparables con la distancia entre ellos.

Por lo tanto, la capacitancia entre dos placas paralelas actuando como electrodos no puede obtenerse a partir de las ecuaciones hasta ahora vistas. La capacitancia que provocan las áreas laterales e incluso el área posterior de la placa son relevantes y se les conoce como efecto en los bordes. Debido a este efecto, la capacitancia de la estructura mecánica es mayor que la obtenida mediante las expresiones 5.1 y 5.1.

Si se considera una estructura de dos barras paralelas, con sección transversal rectangular (cuya placa superior es móvil), se tiene que la capacitancia, calculada mediante una aproximación como capacitor de placas paralelas, es:

$$C_0(z) = \frac{2al\varepsilon\varepsilon_0}{z} \quad (5.7)$$

donde  $l$  es la longitud de las barras y es mucho mayor que  $a$ ,  $h$  y  $z$ . Debido a efecto en los bordes, la capacitancia entre las barras,  $C(z)$ , es siempre mayor que  $C_0(z)$ .

El valor exacto de la capacitancia de un capacitor micromaquinado no puede encontrarse en una forma cerrada y puede calcularse únicamente por métodos numéricos basados en la ecuación de Poisson ( $\nabla^2 V = 4\pi\rho$ , donde  $\rho$  es la densidad de carga) y condiciones de frontera adecuadas. Por lo tanto, para algunas condiciones, pueden encontrarse relaciones aproximadas.

Para una estructura como la mostrada en la figura anterior, con una distancia pequeña entre las placas ( $z \ll a$ ), la capacitancia puede aproximarse mediante:

$$C(z) \doteq C_0(z) \left\{ 1 + \frac{z}{2\pi a} \ln \frac{2\pi a}{z} + \frac{z}{2\pi a} \ln \left[ 1 + \frac{2h}{z} + 2\sqrt{\frac{h}{z} + \frac{h^2}{z^2}} \right] \right\} \quad (5.8)$$

donde  $C_0(z)$  es la capacitancia obtenida mediante la aproximación como capacitor de placas paralelas que la ecuación 5.7 arroja.

La ecuación 5.8 puede escribirse como  $C(z) = \beta C_0(z)$ , donde  $\beta$  es un factor de corrección de la capacitancia por el efecto de los bordes, el cual es dependiente de las dimensiones de la estructura:

$$\beta = 1 + \frac{z}{2\pi a} \ln \frac{2\pi a}{z} + \frac{z}{2\pi a} \ln \left[ 1 + \frac{2h}{z} + 2\sqrt{\frac{h}{z} + \frac{h^2}{z^2}} \right] \quad (5.9)$$

Basado en la ecuación 5.9 y la dependencia de  $\beta$  respecto de  $z$ ,  $h$  y  $a$ , se ha encontrado que  $\beta$  puede ser mayor que 1 de manera apreciable. Por ejemplo, para  $z = 0,5a$  y  $h = 0,2a$ , se tiene  $\beta = 1,3$ .

Por otra parte, si la distancia entre las dos barras es mucho mayor que su grosor ( $z \gg a$ ), la estructura puede aproximarse como dos filamentos conductores. Si los filamentos tienen una sección transversal circular de radio  $a$  y la distancia entre las dos superficies de los filamentos es  $z$ , se tiene que:

$$C(z) \doteq C_0(z) \frac{\pi z}{2a \ln(z/a + 2)}$$

Por lo tanto,  $C(z)$  es mucho mayor que  $C_0(z)$  para una distancia considerable, pero  $C_0(z)$  y  $C(z)$  son ambas lo suficientemente pequeñas para que la capacitancia diferencial entre ellas sea despreciada.

Para este mismo arreglo de barras paralelas, en el cual la placa superior puede moverse lateralmente con una distancia normal constante,  $d$ , respecto de la barra inferior, la capacitancia obtenida mediante la aproximación como un capacitor de placas paralelas es:

$$\begin{aligned} C_0(x) &= \frac{l(2a - |x|)\varepsilon\varepsilon_0}{d}, & (-2a < x < 2a) \\ C_0(x) &= 0, & (x < -2a, x > 2a) \end{aligned}$$

donde  $l$  es la longitud de la barra y  $x$  es la posición del centro de la barra móvil. Cuando se consideran los efectos de los bordes, la capacitancia  $C(x)$  es generalmente mayor que  $C_0(x)$ .

### Fuerza electrostática

Para un par de barras paralelas (con sección transversal rectangular), la fuerza normal es:

$$F_N = \frac{1}{2} \frac{\partial C(z)}{\partial z} V^2 = \frac{1}{2} \left( \beta(z) \frac{\partial C_0(z)}{\partial z} + \frac{\partial \beta(z)}{\partial z} C_0(z) \right) V^2$$

donde  $C_0 = A\epsilon\epsilon_0/z$ . Dado que  $\beta(z) \geq 1$  y  $\partial\beta/\partial z > 0$ , la fuerza es siempre mayor que la calculada para el caso de la aproximación como capacitor de placas paralelas. Si  $h \ll z \ll a$ , la ecuación 5.9 puede aproximarse como:

$$\beta = 1 + \frac{h}{\pi a} + \frac{z}{2\pi a} \ln \frac{2\pi a}{z} + \frac{1}{\pi a} \sqrt{zh + h^2}$$

Por lo tanto, la fuerza normal puede simplificarse y quedar como:

$$F_N = \left[ \left( 1 + \frac{z}{2\pi a} + \frac{h}{\pi a} \right) + \frac{zh + 2h^2}{2\pi a \sqrt{zh + h^2}} \right] \frac{1}{2} \frac{\partial C_0}{\partial z} V^2 \equiv \gamma \frac{1}{2} \frac{\partial C_0}{\partial z} V^2 \quad (5.10)$$

donde  $\gamma$  es el factor de corrección para la fuerza normal, debido al efecto en los bordes.

Considerando el mismo arreglo mecánico de barras paralelas con sección transversal rectangular, pero ahora con libertad de movimiento lateral para la barra superior, se presentará una fuerza tangencial cuyo valor será  $F_T = \partial C(x)/\partial x \cdot V^2$ . Cuando se analiza el fenómeno empleando una aproximación como capacitor de placas paralelas, la fuerza es uniforme en la región de traslape pero tiene signos opuestos para los lados izquierdo y derecho.

La fuerza se precipita a cero cuando la placa superior (móvil) se mueve fuera de la región de traslape. Cuando el efecto en los bordes es considerado, la fuerza lateral está relacionada con la pendiente de la curva  $C(x)$ . Es decir, la fuerza decae gradualmente cuando la placa superior se traslada fuera de la región de traslape.

## 5.2. Actuadores mecánicos impulsados por fuerzas electrostáticas

### 5.2.1. Actuador de placas paralelas

#### Manejo por voltaje y efecto de llegada

Es común que un actuador de placas paralelas (capacitor mecánico) se forme a partir de una placa adherida al sustrato (electrodo de referencia), una placa que mantiene la libertad de movimiento en su dirección normal (masa de prueba y electrodo móvil) y un conjunto de vigas voladas (resortes) que actúan como soportes de la masa-placa móvil. La separación inicial entre electrodos normalmente se denota como  $d$  y cuando se aplica una diferencia de potencial eléctrico,  $V$ , sobre los electrodos, la placa móvil (masa de prueba y electrodo móvil) experimenta una fuerza electrostática que tira de ella aproximándola al electrodo de referencia. Una vez que la masa se desplaza en dirección normal, las vigas voladas (actuando como resortes) se oponen al movimiento y ejercen una fuerza que regresa la placa a su posición original.

La posición de equilibrio de la placa móvil está determinada por una condición de balance de fuerzas. Dicho balance debe analizarse con detenimiento y tomar en cuenta la naturaleza no lineal de la fuerza electrostática, ya que debido a ella se pueden presentar problemas de inestabilidad.

Definido el desplazamiento de la placa móvil (masa) como  $y$ , y debido a las actuaciones de la fuerza electrostática y la fuerza elástica de las vigas voladas actuando como resortes, la condición de balance de fuerzas es:

$$F = F_e + F_k = 0$$

donde  $F_e$  es la fuerza electrostática y  $F_k = -ky$  es la fuerza elástica de recuperación ejercida por los resortes sobre la placa (masa) móvil. El balance de fuerzas está determinado por:

$$\frac{A\epsilon\epsilon_0 V^2}{2(d-y)^2} - ky = 0 \quad (5.11)$$

Tanto  $F_e$  como  $F_k$  son funciones del desplazamiento de la placa móvil; la curva para  $F_e$  es una hipérbola, en tanto que la curva que describe  $F_k$  es una línea recta que cruza por el origen del plano coordenado. Si  $k$  es lo suficientemente grande, las dos curvas se intersectan en dos puntos  $a$  y  $b$ . Los puntos de intersección entre las curvas correspondientes a los términos de la ecuación de balance de fuerzas constituyen soluciones a dicha ecuación que físicamente deben interpretarse como posiciones de equilibrio de la placa (masa) móvil. Esto lleva a plantear que la solución correspondiente al punto  $b$  representa un estado poco estable del sistema, pues si una pequeña perturbación mueve hacia atrás a la placa (masa), la fuerza elástica de los resortes será mayor que la fuerza electrostática y la placa (masa) retrocederá hasta un nuevo punto de balance de fuerzas que corresponderá al punto  $a$ . Por otra parte, si la perturbación mueve hacia adelante a la placa (masa), la fuerza electrostática será mayor que la fuerza de restauración de los resortes y la placa se moverá hasta hacer contacto con el electrodo de referencia. Por lo tanto, la solución a la ecuación de desplazamiento correspondiente al punto  $a$  se considera estable ya que la masa podrá siempre recuperar su posición de equilibrio después de experimentar una perturbación que la saque de este punto.

A partir de la condición para un estado estable  $\partial F/\partial y < 0$ , se tiene:

$$\frac{A\epsilon\epsilon_0 V^2}{(d-y)^3} - k < 0 \quad (5.12)$$

A partir de las ecuaciones 5.11 y 5.12, se tiene:

$$y < \frac{1}{3}d$$

Lo cual significa que la posición de equilibrio es estable cuando el desplazamiento de la placa es menor que un tercio de la distancia original que separa a la placa (masa) móvil del electrodo de referencia.

Para una estructura mecánica dada  $k$  será constante, por tanto, la pendiente de la recta correspondiente al término  $F_k$  no cambiará. Por otra parte, la curva que muestra el comportamiento de  $F_e$  respecto del desplazamiento, se recorre hacia arriba o abajo en el plano coordenado si el voltaje  $V$  aumenta o disminuye, respectivamente. Por lo tanto, para un voltaje crítico  $V_{po}$ , los puntos  $a$  y  $b$  se fusionan en uno solo (es decir, la recta correspondiente al término  $F_k$  se vuelve tangente en un punto a la curva del término  $F_e$ ) y para el caso en el que el voltaje  $V_{po}$  sea suficientemente grande no existe intersección entre las dos curvas. En este último caso,  $F_e$  será siempre mayor que  $|F_k|$  para  $V > V_{po}$ , por tanto, la placa (masa) móvil se moverá hasta hacer contacto con el electrodo de referencia. Éste fenómeno es llamado en inglés *pull-in effect* (efecto de llegada) y al voltaje  $V_{po}$  se le conoce como *pull-in voltage* (voltaje de llegada).

El voltaje  $V_{po}$  puede obtenerse directamente a partir de la ecuación 5.11. Es común encontrar en la literatura sobre el tema la siguiente notación adimensional:

$$\tilde{y} = \frac{y}{d} \text{ y } p = \frac{F_{\epsilon 0}}{kd}$$

Con lo cual la ecuación 5.11 normalmente se define como:

$$\tilde{y}(1 - \tilde{y})^2 = p \quad (5.13)$$

Adoptando esta notación, se tiene que el máximo de  $\tilde{y}(1 - \tilde{y})^2$  en la región de 0 a 1 es  $4/27$  en  $\tilde{y} = 1/3$ . Por lo tanto, la condición para una solución estable es:

$$p \leq \frac{4}{27}$$

Con lo cual  $V_{po}$  se obtiene como:

$$V_{po} = \sqrt{\frac{8kd^3}{27A\epsilon\epsilon_0}}$$

Para un voltaje  $V$  menor que  $V_{po}$ , el desplazamiento de la masa se puede obtener a partir de la ecuación 5.13 mediante cálculos iterativos. Si  $p$  es muy pequeño,  $\tilde{y}$  se incrementa con  $p$  de forma casi lineal. De cualquier modo,  $\tilde{y}$  se incrementa abruptamente con  $p$  cuando  $p$  alcanza  $4/27$  (es decir, cuando  $V$  alcanza a  $V_{po}$ ). Una vez que el desplazamiento de la placa (masa) móvil rebasa el límite marcado por la posición inestable de equilibrio, dicha placa no podrá liberarse aunque el voltaje se vuelva cero ( $V = 0$ ).

### Eliminación del efecto de llegada conectando un capacitor en serie

El desplazamiento estable de una placa móvil en la dirección normal impulsada por una fuerza electrostática está limitado a un tercio de la distancia original,  $d$ , entre las dos placas. La placa móvil hará contacto con el electrodo de referencia cuando el voltaje alcance y rebase un valor crítico, el voltaje  $V_{po}$  (voltaje de llegada). Un poco antes de que se llegue al punto crítico, el desplazamiento se incrementa con  $p$  de forma considerable (super linealidad). Para salvar el efecto de llegada y mejorar la relación lineal  $y \sim p$ , se inserta un capacitor  $C_s$  (que puede estar presente en cualquier tipo de componente eléctrico) en serie con el capacitor mecánico de placas paralelas.

Si la distancia original entre las dos placas es  $d$ , la capacitancia original del capacitor mecánico de placas paralelas es  $C_0 = A\epsilon\epsilon_0/d$ , donde  $A$  es el área de traslape entre las placas. Si se presenta un desplazamiento  $y$  (que aproxima las dos placas o electrodos), la capacitancia del capacitor mecánico es:

$$C_M = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{d - y}$$

Si la capacitancia del capacitor en serie es  $C_s = bC_0$ , el capacitor (presente como fenómeno eléctrico en cualquier tipo de componente) puede modelarse como un capacitor de placas paralelas con un área de traslape entre placas de  $A$  y una distancia de separación  $d/b$ . Por lo tanto, los capacitores  $C_M$  y  $C_s$  pueden

modelarse como un sólo capacitor de placas paralelas con un área de traslape entre placas igual a  $A$  y una distancia efectiva de separación entre placas igual a  $d_{efectiva}$ .

$$d_{efectiva} = d + \frac{1}{b}d$$

La placa móvil puede desplazarse una distancia máxima igual a  $d$ , dado que el espacio que el término  $d/b$  agrega no existe físicamente. Es frecuente, que la oblea que sirve de soporte físico para los Microsistemas se encuentre cubierta de óxido de silicio ( $\text{SiO}_2$ ) como aislante eléctrico, por lo que puede emplearse el arreglo oblea-óxido de silicio-electrodo de referencia como el capacitor  $C_s$ , con lo cual se tendría:

$$d_{efectiva} = d + \frac{d_1}{\varepsilon_1}$$

donde  $d_1$  es el grosor de la capa de óxido,  $\varepsilon_1$  es la permitividad relativa del óxido de silicio y  $d$  es la distancia entre el óxido y la placa (masa) móvil. También puede definirse a  $b$  como  $b = \varepsilon_1 d / d_1$ .

De acuerdo con el modelo que toma en cuenta la distancia efectiva de separación, el voltaje de llegada es:

$$V_{po} = \sqrt{\frac{8kd^3_{efectiva}}{27A\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Si la capacitancia  $C_s$  es lo suficientemente pequeña para cumplir la condición de que  $d_{efectiva} > 3d$ , el efecto de llegada no ocurrirá. Esto significa que  $b < 1/2$  o que  $C_s < C_0/2$ .

El voltaje máximo  $V_m$  para que la placa móvil alcance a la placa fija está determinado por:

$$kd = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V_m^2}{2d^2/b^2} \quad (5.14)$$

El movimiento de la masa es detenido mediante el electrodo fijo, si a éste se le aplica un voltaje  $V$  mayor que  $V_m$ . A partir de la ecuación 5.14 se tiene que  $V_m$  es igual a:

$$V_m = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2kd^3}{A\varepsilon\varepsilon_0}} \cong \frac{2,6}{b} V_{po}$$

### Manejo por carga para un actuador de placas paralelas

Cuando un actuador de placas paralelas es alimentado con un voltaje constante, dicho voltaje debe restringirse a ciertos límites de modo que el desplazamiento no exceda un tercio de la separación entre placas original. De otro modo, el efecto de llegada aparecerá y el sistema se comportará de forma errática. La conexión de un capacitor en serie con el capacitor mecánico es una forma de eliminar el efecto de llegada, pero el precio de este esquema es el uso de voltajes más altos para la operación del sistema. Para resolver el empleo de voltajes mayores, con el esquema de un capacitor en serie, se puede emplear un esquema de manejo por carga.

Un actuador de placas paralelas (capacitor mecánico) se carga hasta un voltaje  $V$  en un periodo muy breve (a partir de un estado inicial sin carga) y cuando alcanza  $V$ , el suministro es desconectado (antes de que la masa pueda moverse una distancia apreciable).

Donde la capacitancia parásita del sistema ( $C_p$ ) se modela como un capacitor conectado en paralelo al capacitor mecánico. Desde este enfoque, la placa móvil se aproximará al electrodo de referencia bajo la acción de la fuerza electrostática provocada por las cargas eléctricas almacenadas en la estructura:

$$Q = (C_0 + C_p) V$$

donde  $C_0 = A\varepsilon\varepsilon_0/d$ . Las cargas crean una fuerza atractiva que mueve la placa. El desplazamiento de la placa  $y_0$  debe satisfacer la siguiente condición:

$$ky_0 = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 Q^2}{2(d - y_0)^2 \left( \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d - y_0} + C_p \right)^2}$$

Si se denotan  $\tilde{y} = \frac{y}{d}$  y  $b = \frac{C_p}{(C_p + C_0)}$  se tiene:

$$\tilde{y}_0 (1 - b\tilde{y}_0)^2 = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 Q^2}{2kd^3 (C_p + C_0)^2}$$

Si se define  $\zeta = b\tilde{y}_0$ , la ecuación para  $\zeta$  es:

$$\zeta (1 - \zeta)^2 = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2kd^3} b$$

el máximo del término a la izquierda en esta ecuación es  $4/27$  para  $\zeta = 1/3$ , o  $\tilde{y}_0 = 1/3b$ . Obviamente, si  $b < 1/3$  (es decir,  $C_p < C_0/2$ ), se tiene  $\tilde{y}_0 > 1$ . Lo cual significa que el efecto de llegada no se presentará si la condición  $C_p < C_0/2$  se cumple. Bajo la condición de  $b > 1/3$  (o  $C_p > C_0/2$ ), la placa es llevada a su máximo desplazamiento estable  $y_0 = \frac{d}{3b} = d \frac{(C_p + C_0)}{3C_p}$  para un voltaje de carga:

$$V_{p, q} = \sqrt{\frac{8kd^3}{27A\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{b}}$$

Dado que  $b$  siempre es menor que 1, el desplazamiento máximo para el esquema de manejo por carga es siempre mayor que un  $1/3$  de la separación original. El esquema de manejo por carga para el actuador de placas paralelas ofrece la ventaja de operar con voltajes menores a los requeridos en el esquema de conexión de capacitor en serie, pero su desventaja radica en la dificultad para el control de la carga eléctrica y el control de fugas.

### 5.2.2. Actuador electrostático sujeto con vigas de torsión

#### Desplazamiento angular

Un actuador de este tipo consiste en un par de vigas que sujetan una placa rectangular suspendida (móvil) sobre un electrodo anclado al sustrato que sólo cubre la mitad de la longitud de la placa móvil.

El electrodo debajo de la placa puede colocarse en la mitad izquierda o derecha a partir de las vigas de soporte. Es común que en los procesos de micromaquinado de superficie, el grosor de la placa sea alrededor de  $2 \mu m$  y que la separación entre sustrato (o cualquier otra capa de material colocada sobre él) y placa móvil sea también de  $2 \mu m$ . Cada viga mantiene uno de sus extremos sujeto a la placa y el otro sujeto a un ancla (que a su vez está pegada al sustrato).

Si un torque  $T_e$  es aplicado mediante una fuerza electrostática, el desplazamiento angular de la placa es:

$$\varphi = \frac{1}{k_\varphi} T_e \quad (5.15)$$

donde  $k_\varphi$  es la constante de torsión de las vigas de soporte y se define como:

$$k_\varphi = \frac{2k_1 b h^3 G}{l}$$

donde  $b$  es el ancho de la viga de soporte,  $h$  su grosor,  $l$  su longitud,  $G$  el módulo volumétrico del material y  $k_1$  el factor numérico asociado a la razón entre el ancho y el grosor de la viga (véase 3.63).

En presencia de un desplazamiento angular, el torque necesario para restaurar la placa a su posición original es  $T = -k_\varphi \varphi$  y es producido por las vigas de torsión para balancear el torque aplicado:

$$T + T_e = 0 \quad (5.16)$$

Si el voltaje aplicado entre la placa móvil y el electrodo es  $V$ , el torque (para una  $\varphi$  pequeña) provocado por la fuerza electrostática es:

$$T_e = \int_{\alpha a}^{\beta a} \frac{B \varepsilon \varepsilon_0 V^2 x dx}{2(d - \varphi x)^2} = \frac{B \varepsilon \varepsilon_0 V^2}{2\varphi^2} \left[ \ln \left( 1 - \frac{\beta a \varphi}{d} \right) - \ln \left( 1 - \frac{\alpha a \varphi}{d} \right) + \frac{1}{\left( 1 - \frac{\beta a \varphi}{d} \right)} - \frac{1}{\left( 1 - \frac{\alpha a \varphi}{d} \right)} \right] \quad (5.17)$$

Empleando el desplazamiento angular normalizado,  $\phi = \frac{a\varphi}{d}$ , se tiene:

$$T_e = \frac{B \varepsilon \varepsilon_0 V^2 a^2}{2\phi^2 d^2} \left[ \ln \left( \frac{1 - \beta \phi}{1 - \alpha \phi} \right) + \frac{1}{(1 - \beta \phi)} - \frac{1}{(1 - \alpha \phi)} \right] \quad (5.18)$$

De las ecuaciones 5.15, 5.16 y ??, la ecuación para  $\varphi$  es:

$$\frac{B \varepsilon \varepsilon_0 V^2 a^3}{2 d^3} \left[ \ln \left( \frac{1 - \beta \phi}{1 - \alpha \phi} \right) + \frac{1}{(1 - \beta \phi)} - \frac{1}{(1 - \alpha \phi)} \right] - k_\varphi \phi^3 = 0$$

La relación entre  $V$  y  $\phi$  es:

$$V^2 = \frac{2k_\varphi d^3}{B\varepsilon\varepsilon_0 a^3} \frac{\phi^3}{\ln\left(\frac{1-\beta\phi}{1-\alpha\phi}\right) + \frac{1}{(1-\beta\phi)} - \frac{1}{(1-\alpha\phi)}} \quad (5.19)$$

Definiendo la constante  $V_0 = \sqrt{\frac{2k_\varphi d^3}{B\varepsilon\varepsilon_0 a^3}}$ , la ecuación 5.19 puede escribirse como:

$$V = V_0 \sqrt{\frac{\phi^3}{\ln\left(\frac{1-\beta\phi}{1-\alpha\phi}\right) + \frac{1}{(1-\beta\phi)} - \frac{1}{(1-\alpha\phi)}}} \quad (5.20)$$

Para un voltaje pequeño, el desplazamiento angular normalizado también es pequeño y se incrementa con el voltaje aplicado. Razón por la cual, la ecuación 5.20 puede aproximarse como:

$$V = V_0 \sqrt{\frac{2\phi}{\beta^2 - \alpha^2}}$$

O, depejando  $\phi$  queda la ecuación se escribe:

$$\phi = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2V_0^2} V^2$$

Si el voltaje no es pequeño, la pendiente de la curva decrece con el desplazamiento angular, y el voltaje alcanza un valor máximo en un valor crítico del ángulo  $\phi_m$ . Una vez que el voltaje alcanza el máximo, es sistema pierde estabilidad y la placa hace contacto con el electrodo de referencia (es decir,  $\phi$  tiende a 1). El efecto de llegada para una estructura con vigas de torsión es similar al efecto de llegada para un actuador de placas paralelas, por lo que el voltaje máximo para un actuador sujeto con vigas de torsión es el voltaje que provoca el efecto de llegada,  $V_{mo}$ . Una vez que la placa móvil ha hecho contacto con el electrodo de referencia, se requiere un voltaje mayor que el voltaje crítico  $V_S$  para mantener la placa en contacto. Este valor se conoce como voltaje de sujeción. Una vez que el voltaje disminuye por debajo del valor crítico  $V_S$ , la placa queda liberada y el efecto de llegada se suspende.

Una vez definido  $\phi = 1$  de la ecuación 5.20 se obtiene el valor del voltaje de sujeción mediante:

$$V_S = V_0 \sqrt{\frac{\phi^3}{\ln\left(\frac{1-\beta\phi}{1-\alpha\phi}\right) + \frac{1}{(1-\beta\phi)} - \frac{1}{(1-\alpha\phi)}}}$$

Para calcular el voltaje de llegada  $V_{mo}$ , se toma la ecuación 5.19 y la condición para voltaje máximo, con lo cual se tiene:

$$3 \left( \ln\left(\frac{1-\beta\phi}{1-\alpha\phi}\right) + \frac{1}{(1-\beta\phi)} - \frac{1}{(1-\alpha\phi)} \right) - \frac{\beta^2\phi^2}{(1-\beta\phi)^2} + \frac{\alpha^2\phi^2}{(1-\alpha\phi)^2} = 0 \quad (5.21)$$

La solución para esta ecuación es el desplazamiento angular crítico normalizado  $\phi_m$  para el cual se presenta el efecto de llegada.  $\phi_m$  puede encontrarse mediante métodos numéricos. Una vez que  $\phi_m$  es encontrado, el voltaje de llegada se calcula a partir de:

$$V_{mo} = V_0 \sqrt{\frac{\phi_m^3}{\ln\left(\frac{1-\beta\phi_m}{1-\alpha\phi_m}\right) + \frac{1}{(1-\beta\phi_m)} - \frac{1}{(1-\alpha\phi_m)}}} \quad (5.22)$$

Por simplicidad, se tomará  $\alpha = 0$ , dado que  $\alpha$  es normalmente pequeña. Para  $\alpha = 0$ , la solución numérica a la ecuación 5.21 es  $\beta\phi_m = 0,44$ , o,  $\phi_m = 0,44/\beta$ . Dado que  $\phi_m$  puede estar sólo en el rango de 0 a 1,  $\beta$  podría ser mayor que 0,44 para que el voltaje de llegada se presente, es decir, si  $\beta > 0,44$ , existe un valor real para  $\phi_m$  y el voltaje de llegada es posible. Por otra parte, para  $\beta < 0,44$ , el efecto de llegada puede evitarse.

Sustituyendo  $\alpha = 0$  y  $\beta\phi_m = 0,44$  en la ecuación 5.22, el voltaje de llegada es:

$$V_{mo} = 0,643\beta^{-1,5}V_0$$

Esta relación es para el caso en que  $\alpha = 0$ , pero es una buena aproximación para el caso en que  $\alpha$  es muy pequeña.

### Inestabilidad provocada por el voltaje de polarización

Si el electrodo sobre el sustrato cubre por completo el área de la placa móvil de un actuador electrostático sujeto con vigas de torsión (o el sustrato es alimentado con un voltaje de polarización), el torque resultante provocado por el voltaje aplicado es cero si la placa está en un estado de  $\varphi = 0$  debido a la simetría de la estructura. Obviamente, el voltaje deberá provocar que no exista desplazamiento angular. Sin embargo, para un estado de  $\varphi = 0$  la placa puede tornarse inestable cuando el voltaje es mayor que un valor crítico.

Para abordar el problema de inestabilidad, resulta útil el análisis de la energía en el sistema. La capacitancia entre la placa y el sustrato es una función del desplazamiento angular de la placa:

$$C(\varphi) = \int_{-a}^a \frac{B\varepsilon\varepsilon_0 dx}{(d - \varphi x)} = \frac{B\varepsilon\varepsilon_0 a}{\phi} \frac{1}{d} [\ln(1 + \phi) - \ln(1 - \phi)]$$

donde  $B$  es el ancho de la placa y  $\phi$  es el desplazamiento angular normalizado  $\phi = \varphi a/d$ . La variación de la capacitancia es una función del desplazamiento angular:

$$\Delta C = C(\varphi) - C_o = C_o \frac{\ln(1 + \phi) - \ln(1 - \phi) - 2\phi}{2\phi}$$

donde  $C_o$  es la capacitancia para el estado de  $\varphi = 0$ .

Asumiendo que la energía del sistema en  $\varphi = 0$  es cero, la energía del sistema es:

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}k_\varphi\varphi^2 - \frac{1}{2}V^2\Delta C \quad (5.23)$$

o,

$$E(\varphi) = \frac{d^2}{2a^2} \left( k_\varphi \phi^2 - \frac{a^2}{d^2} V^2 C_o \frac{\ln(1+\phi) - \ln(1-\phi) - 2\phi}{2\phi} \right) \quad (5.24)$$

- i. Si  $V = 0$ , de acuerdo con la ecuación 5.24, la curva de  $E(\varphi)$  es simplemente una parábola con un mínimo en  $\phi = 0$ . Esto representa un estado estable en  $\varphi = 0$  y significa que la placa estará siempre en el estado  $\phi = 0$ , al cual regresará después de cualquier perturbación.
- ii. Para un valor finito y pequeño de  $V$ , la energía del sistema se mantendrá como un mínimo en  $\varphi = 0$ . La energía del sistema se incrementará al principio junto con  $\varphi$ , alcanzará un máximo para un valor crítico del ángulo y decaerá continuamente cuando  $\varphi$  rebese el valor crítico. Esto significa que  $\varphi = 0$  se mantendrá como una posición de equilibrio; la placa regresará a dicha posición después de experimentar una perturbación pequeña. De cualquier forma, la placa no regresará al estado  $\varphi = 0$  si la energía de la perturbación es mayor que la barrera de energía  $\Delta E$ . De cualquier forma, la placa continuará girando hasta que sea detenida por el sustrato.
- iii. Si  $V$  es mayor que un valor crítico  $V_C$ , la curva de  $E(\varphi)$  tiene un máximo en  $\varphi = 0$ . Lo cual significa que el estado  $\varphi = 0$  deja de ser estable y la placa experimenta el efecto de llegada sea de un lado o de otro.

Para  $\varphi$  cercano a cero, la variación de la capacitancia se aproxima como:

$$\Delta C = C(\varphi) - C_o = C_o \left( \frac{1}{3} \phi^2 + \frac{1}{5} \phi^4 + \dots \right) \quad (5.25)$$

A partir de las ecuaciones 5.23 y 5.25, se tiene:

$$E(\varphi) \doteq \left( \frac{d^2}{2a^2} k_\varphi - \frac{1}{6} C_o V^2 \right) \phi^2 - \frac{1}{10} C_o V^2 \phi^4 \quad (5.26)$$

De la ecuación 5.26 y la condición de balance,  $\partial E / \partial \phi = 0$ , se tiene:

$$\left( \frac{d^2}{a^2} k_\varphi - \frac{1}{3} C_o V^2 \right) \phi - \frac{2}{5} C_o V^2 \phi^3 = 0$$

Existen tres soluciones para esta ecuación:

$$\phi_1 = 0; \quad \phi_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{5d^2}{2a^2 C_o V^2} \left( k_\varphi - \frac{a^2}{3d^2} C_o V^2 \right)}$$

Para examinar el problema de inestabilidad en  $\phi = 0$ , se analiza la segunda derivada de  $E(\varphi)$ :

$$\frac{\partial^2 E(\phi)}{\partial \phi^2} = \left( \frac{d^2}{a^2} k_\varphi - \frac{C_o V^2}{3} \right) - \frac{6}{5} C_o V^2 \phi^2$$

Para la solución  $\varphi = 0$ , se tiene:

$$\frac{\partial^2 E(\varphi)}{\partial \varphi^2} = \frac{d^2}{a^2} \left( k_\varphi - \frac{C_o a^2 V^2}{3d^2} \right) \quad (5.27)$$

- i. Si  $V$  es pequeño tal que  $k_\varphi > C_o a^2 V^2 / 3d^2$ , se tiene  $\partial^2 E(\varphi) / \partial \varphi^2 > 0$ .  $E(\varphi)$  tiene un mínimo en  $\varphi = 0$ , correspondiente al estado estable. En tanto,  $\varphi_2$  y  $\varphi_3$  corresponden a dos estados inestables.
- ii. Si  $V$  es grande de modo tal que  $k_\varphi > C_o a^2 V^2 / 3d^2$ , es decir,  $V$  es mucho mayor que el valor de voltaje:

$$V_{C, \varphi} = \sqrt{\frac{3d^2 k_\varphi}{C_o a^2}} \quad (5.28)$$

se tiene  $\partial^2 E(\varphi) / \partial \varphi^2 < 0$ . Por lo tanto,  $E(\varphi)$  tiene un máximo en  $\varphi = 0$  y el sistema es inestable.

Si el voltaje es mayor que un valor crítico  $V_{C, \varphi}$ , el estado  $\varphi = 0$  no se mantendrá estable. Cualquier pequeña perturbación provocará que la placa móvil se incline en una dirección u otra hasta que uno de sus extremos haga contacto con el electrodo de referencia. Este problema de inestabilidad debe considerarse para el análisis de un actuador electrostático sujeto con vigas de torsión como el empleado en los arreglos de microespejos.

### 5.2.3. Actuador electrostático lateral en forma de peine

#### Desplazamiento en la dirección tangencial

Los actuadores electrostáticos laterales en forma de peine hacen uso de las fuerzas electrostáticas tangenciales para moverse. Una fuerza electrostática en dirección normal siempre se presenta junto con una fuerza tangencial y es mucho mayor que la fuerza tangencial. Para eliminar el efecto de la fuerza normal, los electrodos estacionarios son colocados simétricamente en ambos lados de cada dedo móvil del peine, de modo tal que las fuerzas normales presentes en ambos lados se cancelan.

Dado que la fuerza tangencial  $F_T$  es independiente del desplazamiento, a partir de la ecuación 5.6, la expresión para calcular el desplazamiento es:

$$\frac{2nh\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2d} - k_x x = 0$$

donde  $h$  es el grosor de los dedos,  $d$  es la distancia entre el electrodo móvil y el electrodo estacionario,  $n$  es el número de dedos activos y  $k_x$  la constante de elasticidad de los soportes, en la dirección tangencial (para el caso que se analiza dicha dirección es  $x$ ). Por lo tanto, el desplazamiento de la placa móvil es:

$$x = \frac{nh\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{k_x d}$$

El desplazamiento de la placa es proporcional al cuadrado del voltaje aplicado  $V$ .

### Inestabilidad en la dirección normal

Aún cuando las fuerzas atractivas de los electrodos estacionarios en ambos lados de un dedo se cancelan entre sí, dichas fuerzas provocan inestabilidad en la dirección normal. Para resolver el problema de inestabilidad en la dirección normal, la estructura del actuador electrostático se modifica, dejándose dos electrodos estacionarios entre un electrodo que es parte de la placa móvil. Se define a  $k_y$  como la constante elástica en la dirección  $y$  de los soportes. La distancia del electrodo de la placa a cualquiera de los electrodos fijos es  $d$ . La capacitancia entre el electrodo móvil y los dos electrodos estáticos es:

$$C(y) = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{d+y} + \frac{A\epsilon\epsilon_0}{d-y} = 2\frac{A\epsilon\epsilon_0}{d(1-\tilde{y})^2}$$

Si se definen  $C_0 = 2A\epsilon\epsilon_0/d$  y  $\tilde{y} = y/d$ , la ecuación anterior se reescribe como:

$$C(\tilde{y}) = \frac{C_0}{1-\tilde{y}^2}$$

La variación de la capacitancia respecto del desplazamiento en la dirección  $y$  es:

$$\Delta C(\tilde{y}) = C(\tilde{y}) - C_0 = C_0 \frac{\tilde{y}}{1-\tilde{y}^2}$$

Con respecto a la energía en la posición original ( $y = 0$ ), la energía del sistema es:

$$E(\tilde{y}) = \frac{1}{2}k_y d^2 \tilde{y}^2 - \frac{1}{2}\Delta C(\tilde{y}) V^2 = \frac{(k_y d^2 - C_0 V^2) \tilde{y}^2 - k_y d^2 \tilde{y}^4}{2(1-\tilde{y}^2)} \quad (5.29)$$

Si  $V = 0$ , de acuerdo con la ecuación 5.29, la curva que describe  $E(\tilde{y})$  es una parábola con vértice en  $\tilde{y} = 0$ . Esto significa un estado estable en  $y = 0$ , con lo cual la placa siempre regresará a él después de cualquier perturbación.

Para un valor pequeño de  $V$ , la energía del sistema se mantendrá alrededor del mínimo  $y = 0$ . La energía se incrementa con  $y$  al principio, alcanza un máximo y decrece de forma continua cuando  $y$  excede un desplazamiento crítico. Esto significa que  $y = 0$  se mantiene como una posición estable, pero la placa móvil no regresará a ella si la energía de la perturbación es mayor que la barrera  $\Delta E$ . En lugar de ello, la placa se moverá y golpeará el electrodo estático.

Si  $V$  es mayor que un valor crítico  $V_C$ , la curva descrita por  $E(\tilde{y})$  tiene un máximo en  $y = 0$ . Con lo cual  $y = 0$  no es una posición estable. Esto significa que la placa estará siempre más próxima de un electrodo estático (inmóvil) que del otro.

Para un análisis cuantitativo del problema, se derivará  $E(\tilde{y})$  y se igualará a cero:

$$kd^2\tilde{y} - \frac{\tilde{y}}{(1-\tilde{y}^2)^2}C_0V^2 = 0$$

Esta ecuación tiene tres soluciones:

$$\tilde{y}_1 = 0 \text{ y } \tilde{y}_{2,3} = \pm \sqrt{1 - \sqrt{\frac{C_0V^2}{kd^2}}}$$

Como criterio de estabilidad se analizará la segunda derivada de  $E(\tilde{y})$ :

$$\frac{\partial^2 E(\tilde{y})}{\partial \tilde{y}^2} = kd^2 - \frac{1 + 3\tilde{y}^2}{(1 - \tilde{y}^2)^3} C_0 V^2$$

Para el estado  $\tilde{y}_1 = 0$ ,  $\frac{\partial^2 E}{\partial \tilde{y}^2} = kd^2 - C_0 V^2$ .

Si  $V < \sqrt{kd^2/C_0} = \sqrt{kd^3/2A\varepsilon\varepsilon_0}$ , o  $\partial^2 E(\tilde{y})/\partial \tilde{y}^2 > 0$ ,  $E(\tilde{y})$  tiene un mínimo en  $\tilde{y}_1 = 0$ . Por lo tanto,  $\tilde{y}_1 = 0$  corresponde a un estado estable y  $\tilde{y}_2$  y  $\tilde{y}_3$  son dos soluciones reales correspondientes a dos posiciones balanceadas e inestables en ambos lados.

Tomando  $\tilde{y}_2$  como ejemplo, se tiene que si el electrodo que forma parte de la placa se mueve un poco más allá de  $\tilde{y}_2 d$ , ésta se moverá continuamente hasta hacer contacto con el electrodo estático y se mantendrá ahí definitivamente. En el caso de que el electrodo que forma parte de la placa se mueva un poco hacia atrás del centro, regresará a su estado estable en  $y = 0$ . La región desde la cual el electrodo que forma parte de la placa puede regresar a su estado estable en  $y = 0$  está entre  $\tilde{y}_2 d$  y  $-\tilde{y}_2 d$  (es decir,  $\tilde{y}_3 d$ ). Obviamente, mientras mayor sea el voltaje  $V$ , menor será la región estable.

Por otra parte, si  $V$  es mayor que el valor crítico de voltaje  $V_C = \sqrt{kd^2/C_0}$ ,  $E(\tilde{y})$  tiene un máximo en  $\tilde{y}_1 = 0$ . Por lo tanto,  $\tilde{y}_1 = 0$  corresponde a un estado inestable. En este caso,  $\tilde{y}_2$  y  $\tilde{y}_3$  no son reales y el electrodo que forma parte de la placa hará siempre contacto con alguno de los electrodos estáticos.

Por lo tanto, para una operación estable,  $k_y$  deberá ser suficientemente grande. Debe señalarse que aunque en general no es difícil diseñar un actuador electrostático con una constante elástica en los soportes suficientemente grande, es posible que se presente un pequeño movimiento de rotación en el plano  $x - y$  que puede ocasionar problemas, esto se debe a que la constante elástica para un movimiento de rotación es relativamente pequeña en la mayoría de los diseños empleados para los actuadores electrostáticos. Es común que los dedos (electrodos móviles) de la placa en uno de los costados se inclinen en dirección  $y+$  y en el otro costado lo hagan en dirección  $y-$ .

Con respecto a la ecuación 5.28, el voltaje crítico que provoca la inestabilidad, reflejada por el movimiento de rotación, es:

$$V_{C, \varphi} = \sqrt{\frac{3d^2 k_\varphi}{2C_0 a^2}} \quad (5.30)$$

donde  $k_\varphi$  es la constante elástica para un movimiento de rotación y  $C_0$  es la capacitancia nominal de uno de los lados.

## 5.3. Voltaje alterno y escalones aplicados a los actuadores electrostáticos

### 5.3.1. Voltaje alterno

Hasta ahora el desplazamiento de la placa móvil se ha analizado bajo el supuesto de la aplicación de un voltaje constante. Los resultados obtenidos sólo son válidos cuando el voltaje aumenta hasta su valor nominal lentamente o cuando la estructura está fuertemente amortiguada de modo tal que no existe sobreimpulso provocado por la fuerza electrostática.

De cualquier modo, en aplicaciones tales como micro-relevadores e interruptores ópticos las placas móviles son impulsadas por fuerzas electrostáticas provocadas por señales de voltaje con forma de escalón y la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) del sistema es mucho menor que uno. Por lo tanto, es importante analizar la respuesta dinámica de la placa móvil a una entrada escalón para condiciones de amortiguamiento ligero.

### Sobreimpulso y voltaje de llegada

Sea un actuador de placas paralelas. Cuando un escalón  $V$  es aplicado en  $t = 0$ , la fuerza electrostática aplicada sobre la placa móvil es:

$$F_e(y) = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2(d-y)^2}$$

donde  $y$  es el desplazamiento dependiente del tiempo de la placa móvil.

Las posiciones de equilibrio de la placa están determinadas por la ecuación 5.11.

$$\frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2(d-y)^2} - ky = 0$$

Si el voltaje  $V$  no es demasiado grande, existen dos soluciones,  $y_0$  y  $y_1$ , para la ecuación. La posición estable se denominará  $y_0$  y  $y_1$  será una posición equilibrada inestable.

Para un amortiguamiento ligero, la placa móvil no se acomodará directamente en la posición  $y_0$  después de aplicado el voltaje. La placa pasará por la posición de equilibrio,  $y_0$ , con una velocidad máxima  $v_m$ , alcanzará un desplazamiento máximo  $y_m$  (asumiendo que  $y_m$  no rebasa la posición de equilibrio inestable  $y_1$ ), regresará y pasará por la posición de equilibrio  $y_0$  nuevamente y así sucesivamente. Con un amortiguamiento pequeño, la placa oscilará alrededor de la posición de equilibrio  $y_0$  con una amplitud disminuida en cada oscilación, hasta finalmente estacionarse en  $y_0$ .

La placa será atraída hasta el electrodo estático si el escalón de voltaje es mayor que un cierto valor crítico. El voltaje de llegada para el caso de una alimentación al actuador electrostático con un escalón, es mucho menor que en el caso de una alimentación con voltaje constante.

### Velocidad máxima

Si la disipación de energía por efecto del amortiguamiento en un ciclo es despreciable, se tiene que:

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \int_0^{y_0} (F_e + F_k) dy = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2(d-y_0)} \frac{y_0}{d} - \frac{1}{2}ky_0^2 \quad (5.31)$$

donde  $m$  es la masa de la placa y  $v_m$  es la velocidad máxima que alcanza en su desplazamiento. A partir de esto se tiene que:

$$v_m = \sqrt{\frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{m(d-y_0)} \frac{y_0}{d} - \frac{ky_0^2}{m}}$$

$y_0$  se calcula a partir de la ecuación 5.11 y  $v_m$  se obtiene fácilmente con esta información.

### Distancia de sobreimpulso

La distancia de sobreimpulso,  $y_m$ , está definida como el desplazamiento máximo de la placa debido al sobreimpulso.  $y_m$  se calcula fácilmente a partir de:

$$\int_0^{y_m} (F_e + F_k) dy = 0, \text{ o, } y_m (d - y_m) = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{kd}$$

Si se utiliza la misma notación normalizada que se empleó con la ecuación 5.11, se tiene que para  $\tilde{y}_m$  la ecuación anterior se expresa como:

$$\tilde{y}_m (1 - \tilde{y}_m) = 2p \quad (5.32)$$

### Voltaje de llegada

A partir de la ecuación 5.32, el valor máximo para  $\tilde{y}_m (1 - \tilde{y}_m)$  es  $\frac{1}{4}$  en  $\tilde{y}_m = \frac{1}{2}$ . Por lo tanto, el voltaje para una solución razonable de  $y_m$  es  $p < \frac{1}{8}$ . Esto determina que para un voltaje de alimentación en forma de escalón, el voltaje de llegada,  $V_{ps}$ , es:

$$V_{ps} = \sqrt{\frac{kd^3}{4A\varepsilon\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{27}{32}} V_{po} = 0,92V_{po} \quad (5.33)$$

donde  $V_{po}$  es el voltaje de llegada para un actuador de placas paralelas alimentado con un voltaje constante.

### Tiempo de llegada y tiempo de liberación

Si el voltaje de una señal de alimentación con forma de escalón es mayor que el voltaje de llegada,  $V_{ps}$ , la placa es atraída, hasta hacer circuito corto, por las fuerzas electrostáticas. El tiempo requerido para que la placa haga contacto con el electrodo estático está relacionado con el voltaje aplicado. De acuerdo con el principio de conservación de la energía, la velocidad de la placa está determinada por:

$$\frac{1}{2} m \dot{y}^2 = \int_0^y (F_y) dy = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2 y}{2d(d-y)} - \frac{1}{2} ky^2$$

Utilizando la notación normalizada, se tiene:

$$\dot{\tilde{y}} = \omega_0 \sqrt{\frac{2p\tilde{y} - \tilde{y}^2 + \tilde{y}^3}{1 - \tilde{y}}}$$

El tiempo necesario para que la placa móvil haga contacto con el electrodo estático es:

$$t_{contacto} = \int_0^1 \frac{d\tilde{y}}{\dot{\tilde{y}}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \tilde{y}} d\tilde{y}}{\omega_0 \sqrt{\tilde{y}} \sqrt{2p - \tilde{y}(1 - \tilde{y})}}$$

Si se define  $\zeta = \sqrt{\tilde{y}}$ , el tiempo para el contacto queda como:

$$t_{\text{contacto}} = \frac{2}{\omega_0} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{2p-\zeta^2(1-\zeta^2)}} d\zeta \equiv \frac{2}{\omega_0} f(p) \quad (5.34)$$

En la expresión anterior,  $f(p)$  es una integral definida. Dado que el máximo valor de  $\zeta^2(1-\zeta^2)$  es  $\frac{1}{4}$ ,  $f(p)$  tiene un valor real sólo si  $p > \frac{1}{8}$ .

Si el voltaje aplicado es tal que  $p \gg \frac{1}{8}$ , se tiene la siguiente aproximación de  $f(p)$ :

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^1 \sqrt{1-\zeta^2} d\zeta \equiv \frac{\pi}{4\sqrt{2p}}$$

En este caso, el tiempo de contacto es inversamente proporcional al voltaje  $V$ .

$$t_{\text{contacto}} \doteq \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{2p}} = \frac{\pi}{2V} \frac{\sqrt{md^3}}{\sqrt{A\epsilon\epsilon_0}} \quad (5.35)$$

Para calcular el tiempo que la placa necesita para regresar desde una posición proxima al contacto, con un electrodo estático, a su posición original después de que la alimentación fue suspendida es necesario considerar que las condiciones iniciales para la placa son  $y = d$ ,  $\dot{y} = 0$  y que la energía potencial de la placa es  $E_p = kd^2/2$  para  $t = 0$ , de acuerdo con el principio de conservación de la energía se tiene:

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}ky^2$$

La velocidad de la placa como una función de  $y$  es:

$$\dot{y} = -\sqrt{\frac{k}{m}d^2(1-\tilde{y}^2)}$$

La expresión para calcular el tiempo de liberación es:

$$t_{\text{liberación}} = \int_d^0 \frac{dy}{-\sqrt{\frac{k}{m}d^2(1-\tilde{y}^2)}}$$

Si se define  $\tilde{y} = \sin x$ , la integral definida queda como:

$$\int_0^1 \frac{d\tilde{y}}{\sqrt{1-\tilde{y}^2}} = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, el tiempo de liberación es:

$$t_{\text{liberación}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{1}{4f_0} \quad (5.36)$$

El tiempo de liberación sólo depende de la frecuencia natural de la estructura.

### 5.3.2. Efecto de resorte negativo y frecuencia de vibración

#### Actuador de placas paralelas

Un voltaje de alimentación con forma de escalón provoca que la placa móvil de un actuador de placas paralelas oscile alrededor de alguna nueva posición de equilibrio  $y_0$  antes de que se detenga en ella. La aplicación de un escalón provoca, también, que la frecuencia de oscilación se recorra más allá de la frecuencia natural, razón por la cual se afirma que existe una dependencia de la frecuencia de oscilación respecto del voltaje aplicado.

Si el voltaje es  $V$ , la fuerza resultante sobre la masa es:

$$F = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2(d-y)^2} - ky$$

La constante elástica efectiva (o, la constante efectiva del resorte) es:

$$k_{\text{efectiva}} = -\frac{\delta F}{\delta y}, \text{ evaluada en } y = y_0 \quad (5.37)$$

$$k_{\text{efectiva}} = k - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{(d-y_0)^3} \quad (5.38)$$

El primer término en el lado derecho de la ecuación es la constante elástica mecánica y el segundo término es equivalente a una constante elástica provocada por la fuerza electrostática:

$$k_e = -\frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{(d-y_0)^3}$$

donde  $k_e$  se conoce como *constante de resorte eléctrico* o *constante elástica eléctrica*. Dado que el voltaje aplicado provoca la fuerza de atracción sobre la placa móvil y la fuerza eléctrica es inversamente proporcional a la distancia, la constante elástica eléctrica es negativa. Por lo tanto, a este fenómeno también se le conoce como *efecto de resorte negativo*. La frecuencia de oscilación de la placa se ve reducida debido al efecto elástico negativo.

La constante efectiva del resorte puede calcularse a partir de las ecuaciones 5.11 y ??:

$$k_{\text{efectiva}} = k + k_e = k \frac{d-3y_0}{d-y_0} \quad (5.39)$$

Por lo tanto, la frecuencia de oscilación alrededor de la posición de equilibrio  $y_0$  es:

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{k_{efectiva}}{m}} = \omega_0 \sqrt{\frac{d - 3y_0}{d - y_0}}$$

donde  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia natural de la placa sin una fuerza electrostática. Cuando el voltaje se aproxima a  $V_{po}$  tal que  $y_0$  está cercano a  $d/3$ ,  $\omega'_0$  se reduce a cero. Debe mencionarse que el efecto de resorte negativo cobra relevancia cuando la  $k_e$  es comparable con  $k$ .

### Actuador electrostático sujeto con vigas de torsión

Para una estructura con vigas de torsión, la constante elástica eléctrica para el desplazamiento angular puede obtenerse a partir de:

$$k_{\varphi,e} = -\frac{\delta T_e}{\delta \varphi}, \text{ evaluada en } \varphi = \varphi_0$$

donde  $T_e$  es el torque dado por la ecuación 5.17 y  $\varphi_0$  es el desplazamiento angular calculado a partir de 5.18. Por lo tanto, la constante elástica efectiva para un desplazamiento es  $k_{\varphi,efectiva} = k_e + k_{\varphi,e}$ . La frecuencia de oscilación de la placa en la posición de equilibrio se obtiene mediante:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k_{\varphi,efectiva}}{I_\varphi}} = \omega_0 \sqrt{\frac{k_{\varphi,efectiva}}{k_\varphi}}$$

Normalmente, la frecuencia debe obtenerse mediante cálculos numéricos. Debido al valor negativo del efecto de resorte eléctrico, la frecuencia de oscilación se reduce a cero cuando la alimentación se acerca al voltaje de llegada.

Para una estructura sujeta con vigas de torsión que cuenta con un electrodo fijo sobre el sustrato, el cual cubre por completo el área de la placa móvil, la placa permanecerá en su posición de equilibrio  $\varphi = 0$ , si el voltaje de polarización no excede un valor crítico. Sin embargo, la frecuencia de oscilación en la posición de equilibrio  $\varphi = 0$  se verá afectada por el voltaje de polarización. Para analizar la dependencia de la frecuencia de oscilación respecto del voltaje de polarización  $V$ , los resultados obtenidos en el análisis de la energía del sistema son muy útiles.

De acuerdo con la ecuación 5.27, el electrodo fijo que cubre por completo el área de la placa móvil crea una constante elástica eléctrica negativa  $k_{\varphi,e} = -C_0 a^2 V^2 / 3d^2$  y la constante elástica efectiva para la barra de torsión es:

$$k_{\varphi,efectiva} = k_\varphi - \frac{C_0 a^2 V^2}{3d^2}$$

Por lo tanto, la frecuencia de oscilación en la posición de equilibrio es:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k_{\varphi,efectiva}}{I_\varphi}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{C_0 a^2 V^2}{3k_\varphi d^2}}$$

donde  $\omega_0 = \sqrt{k_\varphi / I_\varphi}$ . Obviamente,  $\omega'$  decrece con el voltaje de polarización y llega a cero cuando  $V$  alcanza el voltaje crítico  $V_c = \sqrt{3k_\varphi d^2 / C_0 a^2}$ , momento en el cual el sistema pierde su estabilidad.

### 5.3.3. Actuación mediante voltaje de tipo alterno

Una gran cantidad de sensores y actuadores micromecánicos trabajan en estados de oscilación, ejemplo de ello son los sensores de presión por resonancia, los acelerómetros por resonancia, los sensores de variación angular, los resonadores electrostáticos, entre otros. Para que estos dispositivos trabajen, algunos métodos de actuación mediante voltaje de tipo alterno son necesarios para mover la estructura mecánica y llevarla a un estado de resonancia.

Un voltaje de tipo alterno es aplicado entre la placa móvil y el electrodo fijo. Los esquemas típicos se analizan a continuación.

#### Voltaje de tipo alterno simple

Si un voltaje de tipo alterno,  $V_1 \text{ sen } \omega t$ , es aplicado entre la placa móvil y el electrodo fijo, la fuerza aplicada sobre la placa es:

$$F_e = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2d^2} (V_1 \text{ sen } \omega t)^2$$

donde  $d$  es la distancia entre la placa móvil y el electrodo fijo y  $A$  es el área de traslape entre la placa móvil y el electrodo fijo. Por tanto, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$F_e = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{4d^2} (1 - \cos 2\omega t) \equiv F_0 + F_2$$

donde  $F_0$  es una fuerza atractiva provocada por un voltaje de tipo continuo y  $F_2$  la componente de fuerza provocada por el voltaje de tipo alterno con una frecuencia radial de  $2\omega$ . Dado que la frecuencia de la fuerza que provoca el movimiento no es la misma que la frecuencia del voltaje de tipo alterno aplicado, los esquemas de control mediante realimentación de la señal pueden complicarse. Por lo tanto, este simple esquema de control es empleado de forma esporádica.

#### Voltaje de tipo alterno con un voltaje de tipo continuo como voltaje de polarización

Para crear la componente de fuerza debida al voltaje de tipo alterno con la misma frecuencia que el voltaje alterno aplicado, el voltaje de tipo alterno debe aplicarse juntón con un voltaje de tipo continuo como voltaje de polarización. Por lo tanto, se tendrá  $V = V_0 + V_1 \text{ sen } \omega t$ , con lo cual la fuerza electrostática queda como:

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2d^2} (V_0 + V_1 \text{ sen } \omega t)^2 = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2d^2} \left[ \left( V_0^2 + \frac{V_1^2}{2} \right) + 2V_0V_1 \text{ sen } \omega t - \frac{V_1^2}{2} \cos 2\omega t \right] \\ &\equiv F_0 + F_1 + F_2 \end{aligned}$$

donde  $F_0$  es una componente de fuerza constante,  $F_1$  una componente de fuerza debida al voltaje alterno con la misma frecuencia que el voltaje alterno aplicado y  $F_2$  una componente de fuerza con la frecuencia duplicada.

Si  $\omega$  está cercana a la frecuencia de resonancia de la estructura,  $\omega_0$ , el efecto de  $F_1$  será mucho mayor que el de  $F_2$  debido a la resonancia mecánica. Dado que las frecuencias de  $F_1$  y  $F_2$  están alejadas, los efectos de  $F_2$  son pequeños y pueden reducirse por medios electrónicos.

Para reducir el efecto de la componente constante de fuerza, la razón entre  $V_1$  y  $V_0$  es ajustada para proporcionar una razón alta de  $F_1$  respecto de  $F_0$ . Supóngase que  $V_1 = \alpha V_0$ , la razón entre  $F_1$  y  $F_0$  es:

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{2V_0V_1}{V_0^2 + V_1^2/2} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2/2}$$

Para una razón máxima de  $F_1$  respecto de  $F_0$ ,  $\alpha$  tiene que ser  $\sqrt{2}$ . En este caso, se tiene  $V_1 = \sqrt{2}V_0$  y  $F_1 = \sqrt{2}F_0 = 2\sqrt{2}F_2$ . Si sólo existe una fuente de voltaje es recomendable que  $V_1$  no rebase  $V_0$  para una buena forma de onda sinusoidal. En este caso, la condición de  $V_1 \cong V_0$  es frecuentemente empleada y  $F_1 = 1,33F_0 = 4F_2$ .

### Alimentación para la atracción y repulsión

Para la mayoría de las estructuras, las fuerzas pueden aplicarse sobre la placa móvil en ambos costados, con lo cual un buen esquema para maximizar la actuación sobre la placa es empujar desde un lado y jalar desde el otro. Un resonador electrostático con electrodos en forma de peine es una estructura típica que emplea este esquema. Los voltajes aplicados al costado izquierdo y derecho se definen como:

$$\begin{aligned} V_L &= V_0 + V_1 \sin \omega t \\ V_R &= V_0 - V_1 \sin \omega t \end{aligned} \quad (5.40)$$

La fuerza resultante que actúa sobre el resonador electrostático es:

$$F = \frac{nh\varepsilon\varepsilon_0}{d} (V_L^2 - V_R^2) \quad (5.41)$$

donde  $n$  es el número de dedos activos,  $d$  la distancia lateral entre los dedos móviles y los dedos fijos y  $h$  el grosor de los dedos.

De acuerdo con las ecuaciones 5.40 y 5.41 la fuerza electrostática es:

$$F_e = \frac{4nh\varepsilon\varepsilon_0}{d} V_0V_1 \sin \omega t$$

La fuerza resultante tiene sólo una frecuencia y la amplitud puede ajustarse variando  $V_0$  y  $V_1$ .



## Capítulo 6

# Registro de variaciones en sensores capacitivos

### 6.1. Esquemas de medición de variaciones en la capacitancia

Un sensor o un transductor convierte un efecto físico o químico en una señal eléctrica. Esta puede ser un voltaje, una corriente, un cambio en una capacitancia o en una resistencia. Con el propósito de ser procesadas posteriormente, estas cantidades deben ser convertidas en señales eléctricas, usualmente un voltaje. Debido a que las señales proporcionadas por los sensores son muy pequeñas, éstas deben amplificarse y filtrarse. También son necesarios procesos de compensación, linealización y calibración para corregir cualquier inconveniente que la señal pueda presentar. Idealmente, este procesamiento de la señal debe realizarse antes de la transmisión para evitar su distorsión por lo que muchos fabricantes optan por diseñar el dispositivo microelectromecánico, la electrónica de control y acondicionamiento de señal en el mismo dado (System on a Chip-SoC). Sin embargo, existe la alternativa de diseñar en dos dados diferentes el microsistema y la electrónica y colocarlos en un mismo empaque (System in package-SiP). Lo analizado en este capítulo es válido para ambos casos.

Dadas las características de la mayoría de los materiales y procesos para la fabricación de MEMS, el arreglo geométrico de placas paralelas para la creación de actuadores y sensores en los Microsistemas es muy común. Para la creación de estos dispositivos los materiales generalmente empleados son metales (aluminio, cobre, oro, nickel y aleaciones de nickel-hierro) y metaloides (silicio, germanio y aleaciones de silicio-germanio) dadas sus características mecánicas y eléctricas. En la arquitectura de estos dispositivos, es común que una de las placas sea sostenida por vigas que permiten su desplazamiento o giro en alguna dirección o sentido y funcionan como resortes al ser sometidas a flexión o torsión; la otra placa, normalmente, se encuentra anclada a la superficie del dado sobre el que está fabricado el dispositivo y existe entre ambas placas una área de traslape y una separación. La placa móvil constituye, en principio, un sistema masa-resorte y dependerá de las condiciones de operación del dispositivo (si es empacado al vacío o no) si el sistema cuenta además con un amortiguador, el cual estará formado por las delgadas capas de aire que comprimen o sobre las que se deslizan las placas.

Dado que el dispositivo de placas paralelas es en esencia un sistema masa-resorte-amortiguador por su configuración mecánica, su uso como actuador o sensor está determinado por la forma en que el microsistema es conectado con otros dispositivos electrónicos externos para recibir o entregar señales eléctricas.

Como actuador, la base del funcionamiento del dispositivo es la fuerza eléctrica provocada por la presencia de cargas electrostáticas en la superficie de las placas paralelas. Si las restricciones de movimiento de las placas son tales que sólo es posible su traslación en una dirección o su rotación sobre un eje, al alternar los signos de las cargas que almacena, entre iguales y opuestos, se obtiene un efecto de atracción y repulsión (que depende de la magnitud y signo de las cargas y de la separación y área de traslape entre las placas) que a su vez se traduce en un movimiento oscilatorio del dispositivo, ya sea traslacional o rotacional. Para alternar los

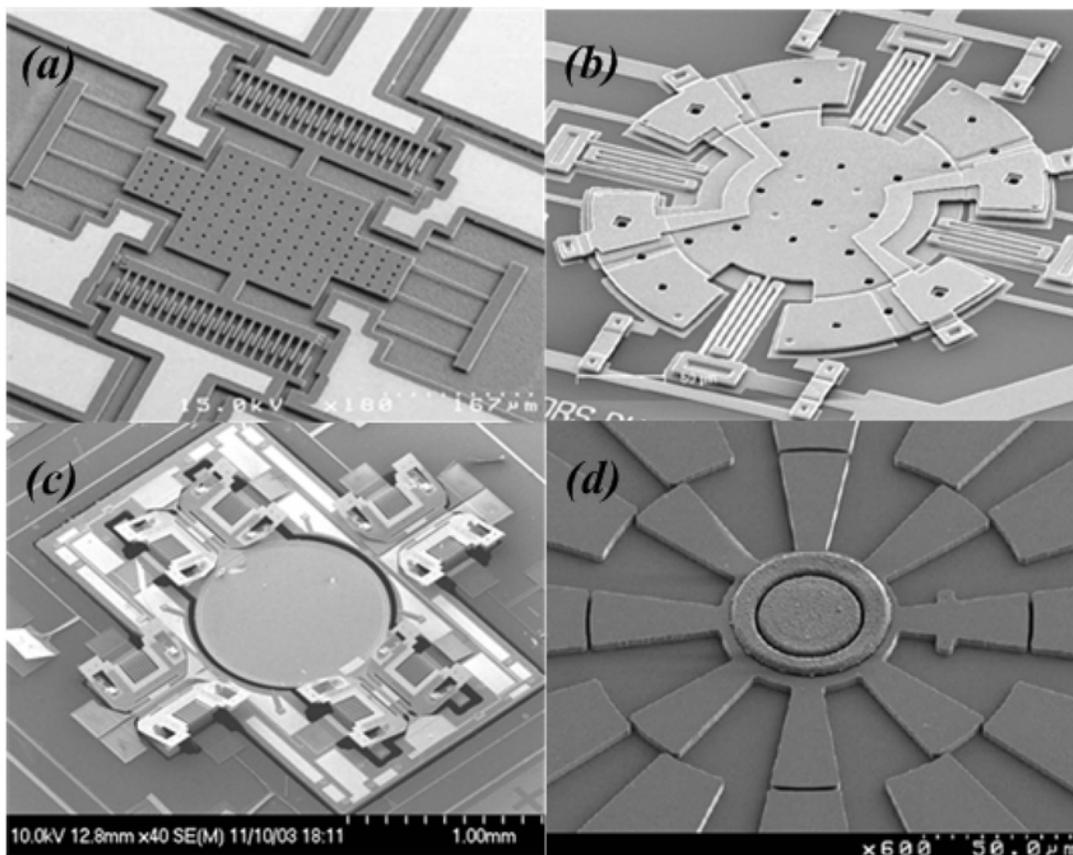


Figura 6.1: Ejemplos de actuadores de placas paralelas. (a) Microrresonador con peine electrostático para movimiento lateral (consignado en *The MEMS Handbook: design and fabrication*, editado por Mohamed Gad-el-Hak, CRC Press, 2006). (b) Giroscopio con actuadores de placas paralelas dispuestos en pila vertical (consignado en *Robust Micromachined Vibratory Gyroscopes*, Cenk Acar, University of California, 2004). (c) Scanner bidimensional con peines electrostáticos verticales (consignado en <http://www.stanford.edu/~wibool/research.html>, 2009). (d) Micromotor electrostático (consignado en *Comprehensive Microsystems* editado por Yogesh B. Gianchandani, Elsevier, 2008).

signos de las cargas sobre las placas normalmente se aplica en una de ellas una señal eléctrica periódica que varía sus valores de voltaje entre positivos y negativos y en la otra se aplica una señal constante de amplitud igual o mayor al máximo de la señal oscilatoria (para de este modo maximizar la fuerza eléctrica). Así, la presencia de la fuerza eléctrica permite alterar el estado de equilibrio del sistema (generalmente en reposo) y convertirlo en una fuente motriz dentro de un microsistema más complejo o para otros dispositivos. La faceta como actuador del dispositivo de placas paralelas ha sido cubierta con todo detalle en el capítulo anterior y en el actual se estudiará su faceta como sensor.

Como sensor, la base del funcionamiento del dispositivo es la variación de la capacitancia debido al aumento o disminución de la distancia entre placas. Esta distancia se modifica por efecto de los cambios de presión o variaciones de movimiento a los que se somete el dado sobre el que está construido el dispositivo, es decir, las placas varían su proximidad gracias a que todo el chip en el que se encuentra montado el sensor experimenta diferentes presiones que deflexionan las placas o gracias a que se somete a movimientos con cambios de velocidad y dirección a los que la masa suspendida por resortes (la placa móvil) se opone. En general, estas variaciones de presión o movimiento son los fenómenos físicos que resultan de interés registrar

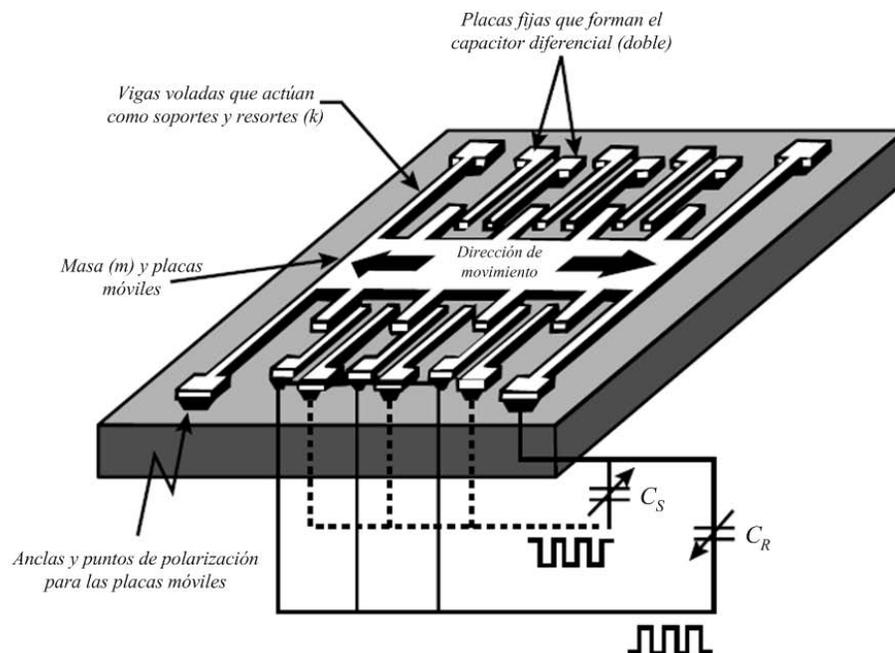


Figura 6.2: Acelerómetro basado en un sistema masa-resorte con sensores capacitivos del tipo diferencial.

por lo que los sensores capacitivos en Microsistemas son empleados de forma regular en sensores inerciales (acelerómetros y giroscopios) y en sensores de presión. En este tipo de sensores, las señales eléctricas de alimentación sirven para generar una señal de salida sensible a los cambios en el capacitor variable de placas paralelas pero crean un efecto colateral indeseable en la proximidad de las placas pues generan una fuerza eléctrica que tiende a unir las o separarlas según las cargas almacenadas. Este efecto puede contrarrestarse mediante la adición de una tercera placa fija, colocada de forma simétrica en el arreglo geométrico de las placas, que se alimenta con la misma señal que la suministrada a la otra placa fija, a fin de contrarrestar la atracción o repulsión que la primera placa ejerce sobre la placa móvil. Esta adición, mejora también de forma significativa el desempeño del sensor capacitivo, pues crea un capacitor variable diferencial, es decir, mientras la capacitancia en un par de placas disminuye por efecto de su separación, entre el otro par de placas ésta aumenta debido a su mayor proximidad.

Al adoptar esta arquitectura, que transforma el sensor capacitivo en uno de tipo diferencial, se puede aprovechar el efecto de equilibrio mecánico alcanzado gracias a las fuerzas eléctricas de igual magnitud y dirección pero sentido opuesto para aumentar la resistencia de la masa a los cambios de movimiento o presión, y de este modo mejorar su rango de operación frente a estos fenómenos. El aire o el vacío entre las placas paralelas cumple la función de dieléctrico para completar el capacitor. Las formas que estos sensores pueden tomar son muy variadas, como puede apreciarse en las fotografías de la figura 6.3.

Este capítulo consta de tres secciones, en la primera se aborda el funcionamiento de diversos circuitos acondicionadores de señal para sensores capacitivos y se llega a conclusiones que deben ser tomadas como recomendaciones para el diseño de Microsistemas con el propósito de lograr un mejor desempeño del microsistema. En la segunda sección se abordan los efectos que las señales de polarización suministradas al capacitor generan sobre el propio microsistema (fuerzas eléctricas que modifican la proximidad de las placas

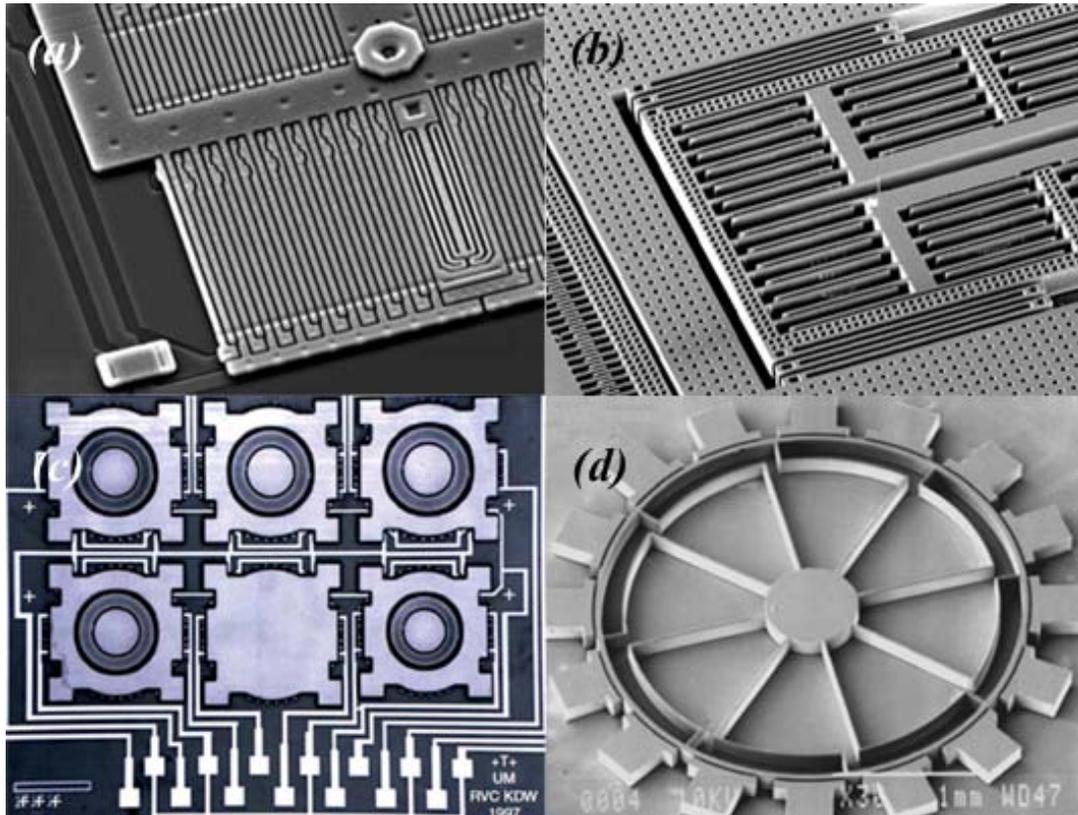


Figura 6.3: Ejemplos de sensores capacitivos de placas paralelas. (a) Parte de un acelerómetro diseñado por la empresa Freescale en el que se muestra un sensor capacitivo diferencial (consignado en *The MEMS Handbook, Applications*, editado por Mohamed Gad-el-Hak, CRC Press, 2006). (b) Parte de un giroscopio vibratorio en el que se aprecia el uso de sensores capacitivos de placas paralelas para registrar el movimiento de una masa de prueba (consignado en *Robust Micromachined Vibratory Gyroscopes*, Cenk Acar, University of California, 2004). (c) Vista superior de un arreglo de cinco sensores de presión basados en diafragmas con un capacitor de referencia al centro (consignado en *Comprehensive Microsystems*, editado por Yogesh B. Gianchandani, Elsevier, 2008). (d) Giroscopio vibratorio con electrodos de actuación, registro y control (consignado en *Comprehensive Microsystems*, editado por Yogesh B. Gianchandani, Elsevier, 2008).

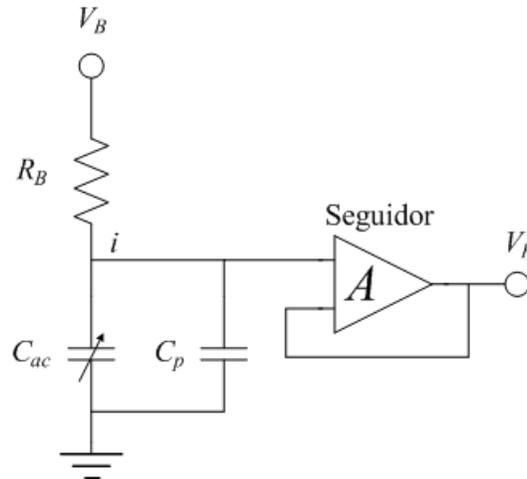


Figura 6.4: Esquema de medición de variaciones de capacitancia a través de un voltaje directo de polarización.

y con ello la capacitancia del dispositivo aún sin la presencia de aceleración externa alguna), en esta sección también se llega a resultados que representan recomendaciones que deben considerarse para el diseño de sensores capacitivos. Finalmente, en la tercera sección se abordan los efectos que diversas formas de aceleración tienen sobre el sistema.

### 6.1.1. Mediciones a través de un voltaje directo de polarización

Uno de los métodos más simples para registrar pequeños cambios en un microsistema que cuenta con un dispositivo capacitivo inercial es la aplicación de un voltaje directo de polarización [45] como se ilustra en el esquema 6.4, donde  $V_B$  es el voltaje directo de polarización,  $C_{ac}$  es el capacitor variable cuyo comportamiento se desea registrar y  $R_B$  es un resistor de polarización con un gran valor. Este método de medición sólo registra las variaciones de capacitancia, por lo que es común su uso en Sistemas Microelectromecánicos que cuentan con capacitores de placa móvil y electrodos fijos para registrar desplazamientos que están asociados con variables físicas que resultan de interés estudiar.

Existen diversas configuraciones de capacitores de placas paralelas que pueden emplearse en Microsistemas con el fin de registrar desplazamientos, pero una de las más utilizadas es la que se muestra en la figura 6.5 y corresponde a un típico sensor capacitivo de presión.

En este dispositivo una de las placas se encuentre fija y la otra esta suspendida gracias a elementos que actúan como resortes. La placa suspendida se encuentra expuesta, de algún modo, a las variaciones de presión provenientes del ambiente. A medida que la placa suspendida recibe mayor presión del entorno se aproxima a la placa fija, variando así la la capacitancia del dispositivo. A la razón entre el desplazamiento  $\Delta x$  de la placa y la presión  $\Delta p$  que actúa sobre la placa suspendida se le define como la sensibilidad mecánica del dispositivo:

$$S_m = \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{A}{k}$$

donde  $k$  es la constante elástica efectiva de los resortes que sostienen la placa suspendida y  $A$  es el área de traslape entre las placas paralelas. Para una distancia  $d$  entre las placas, la capacitancia nominal se calcula

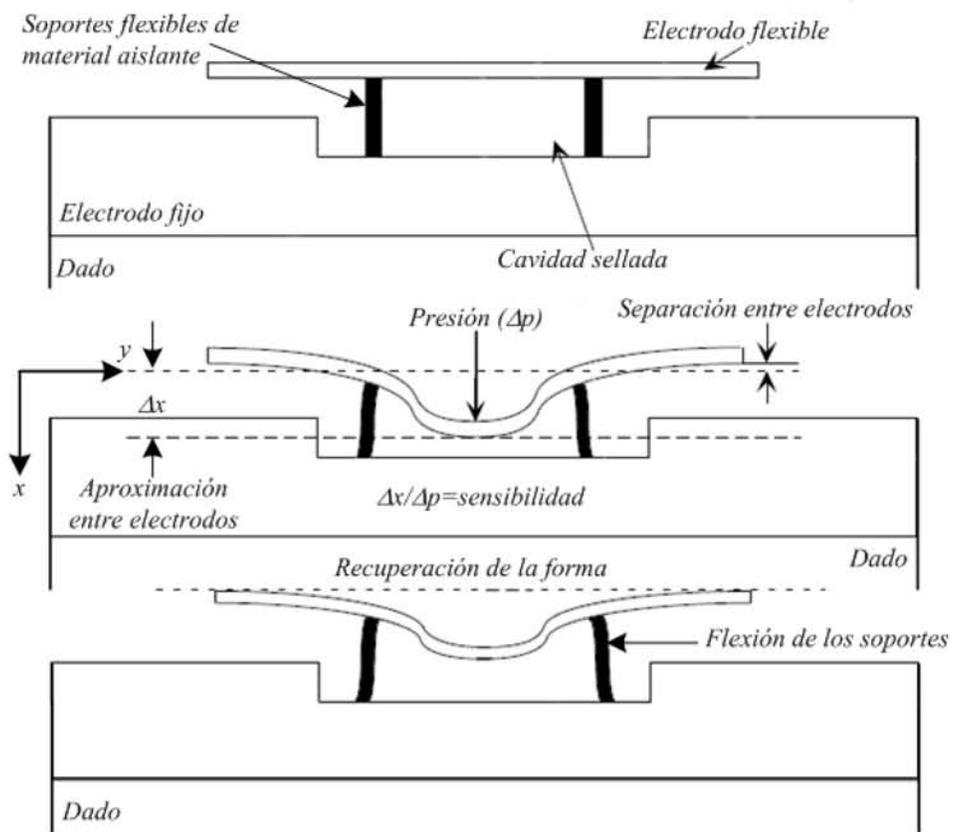


Figura 6.5: Sensor de presión basado en placas paralelas.

como  $C_0 = A\varepsilon\varepsilon_0/d$ . Si la placa suspendida oscila, por efecto de la presión, en dirección normal a la placa fija con una amplitud  $\delta$  y una frecuencia radial  $\omega$ , la capacitancia del capacitor de placas paralelas se obtiene a partir de:

$$C_{ac} = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d + \delta \sin \omega t} \doteq C_0 \left( 1 - \frac{\delta}{d} \sin \omega t \right)$$

Del circuito mostrado en la figura 6.4, si la constante de tiempo  $R_B C_0$  es mucho mayor que  $1/\omega$ , la carga eléctrica almacenada en el capacitor se mantiene constante. Por lo tanto, el voltaje  $V'_B$  en el punto  $i$  en la terminal del capacitor de placas variable se obtiene a partir de:

$$C_0 V_B = \left( C_0 - \frac{\delta}{d} C_0 \sin \omega t \right) V'_B$$

Así, se puede deducir que:

$$V'_B \cong V_B \left( 1 + \frac{\delta}{d} \sin \omega t \right) = V_B + v_{ac}$$

donde  $v_{ac} = (V_B/d) \delta \sin \omega t \equiv v_{ac,i} \sin \omega t$  es la componente oscilatoria de la señal de voltaje en el capacitor variable debida a las variaciones de presión. De este modo, se define a  $S_e = V_B/d$  como la sensibilidad eléctrica en circuito abierto del sensor de presión. Así, la sensibilidad total en circuito abierto del sensor de presión se expresa como:

$$S_{total} = S_e S_m = \frac{AV_B}{kd} = \frac{v_{ac,i}}{\Delta p}$$

La señal  $v_{ac}$  se transforma en una señal de baja impedancia a través del circuito seguidor que se muestra en la figura 6.4 antes de ser amplificada. En este proceso, la señal será atenuada debido a la presencia de capacitancias parásitas  $C_p$  y a la capacitancia de entrada  $C_i$  del amplificador operacional (seguidor). La sensibilidad en la salida del seguidor será:

$$S_F = \frac{C_0}{C_0 + C_p + C_i} S_{total}$$

Es muy importante tener en cuenta que la sensibilidad eléctrica en circuito abierto,  $S_e = V_B/d$ , es directamente proporcional al voltaje de polarización  $V_B$ . Por lo que, en principio, puede lograrse una mayor sensibilidad mediante un mayor voltaje de polarización. Sin embargo, el valor del voltaje de polarización está limitado por el voltaje de llegada (voltaje de máximo de atracción entre las placas antes de que colapsen) que permite la estructura de placas paralelas del sensor de presión. Para una operación confiable,  $V_B$  deberá ser menor que el voltaje de llegada  $V_{llegada}$  por un coeficiente  $\alpha$ . Si  $V_B = \alpha V_{llegada}$ , la sensibilidad en circuito abierto del dispositivo será:

$$S_{total} = \frac{\alpha A V_{llegada}}{kd} = \alpha \sqrt{\frac{8Ad}{27k\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Ecuación que resulta de gran valor en el diseño de Microsistemas como el sensor capacitivo de presión.

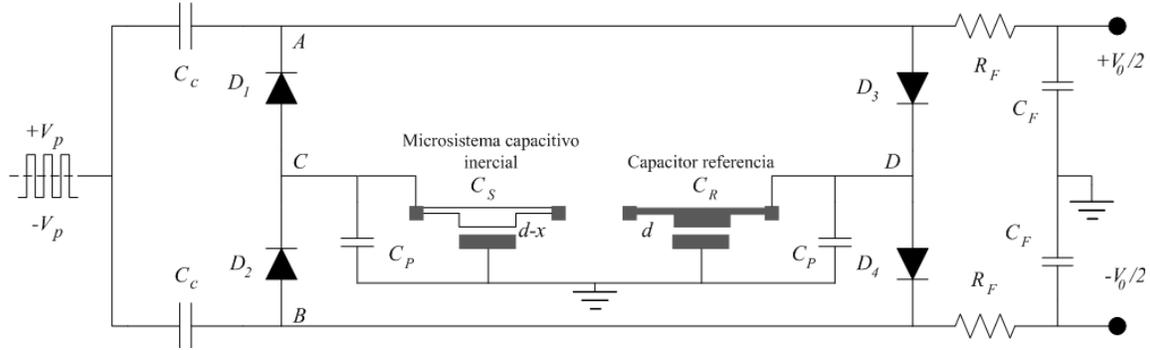


Figura 6.6: Circuito basado en diodos rectificadores (puente de Wheatstone) para el registro de variaciones en la capacitancia.

### 6.1.2. Medición mediante arreglos de diodos

Si se define la capacitancia de un capacitor empleado para registrar variaciones como  $C_S$ , se tiene que las variaciones registradas serán una pequeña fracción de este valor nominal, en consecuencia, con el propósito de registrar dichas variaciones por mínimas que sean, la capacitancia  $C_S$  es comparada con un capacitor de referencia  $C_R$  el cual es similar a  $C_S$ . El circuito eléctrico mostrado en la figura 6.6 permite la comparación de dos capacitancias ( $C_S$  y  $C_R$ ) empleando un arreglo de cuatro diodos similares ( $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  y  $D_4$ ) y un conjunto de capacitores de acoplamiento [46] cuyos valores son mucho mayores que los capacitores de registro y referencia. La señal de excitación es un tren de escalones con una amplitud  $\pm V_P$  y una frecuencia mucho mayor que la frecuencia natural de la estructura mecánica del microsistema en cuestión.

#### Conversión de capacitancia a voltaje

La componente oscilatoria de la señal de excitación se aplica en las terminales denominadas  $A$  y  $B$  y es ligeramente atenuada por los capacitores  $C_C$ , dado que el valor de los capacitores de acoplamiento  $C_C$  es mucho mayor que los capacitores  $C_S$  y  $C_R$ . Cuando el voltaje de excitación alcanza el valor  $+V_P$ , el capacitor  $C_S$  es cargado a través del diodo  $D_2$  en tanto que el capacitor  $C_R$  es cargado a través del diodo  $D_3$ . Cuando el voltaje de excitación es  $-V_P$ , el capacitor  $C_S$  se descarga a través del diodo  $D_1$  y el capacitor  $C_R$  se descarga a través del diodo  $D_4$ . Debido al efecto de rectificación de los diodos, en un ciclo de la señal de excitación, un cierto porcentaje de la carga se transfiere desde el punto  $B$  al punto  $A$  siguiendo la trayectoria  $B - C - A$  y otro porcentaje se transfiere del punto  $A$  al  $B$  siguiendo la trayectoria  $A - D - B$ . No debiera existir transferencia neta de carga entre los puntos  $B$  y  $A$  si  $C_S$  es exactamente igual a  $C_R$ . Pero dado que  $C_S$  eventualmente será diferente de  $C_R$  existirá una transferencia neta de carga entre los puntos  $A$  y  $B$ , y será entonces cuando aparecerá una diferencia de potencial entre los puntos  $A$  y  $B$ .

Supongase que el voltaje final en  $A$  es  $V_O/2$  y el voltaje en  $B$  es  $-V_O/2$  después de varios ciclos, entonces la carga transferida del punto  $B$  al punto  $A$  en un ciclo será:

$$\Delta Q_{BA} = 2 \left( V_P - \frac{1}{2} V_O - V_F \right) (C_S + C_P)$$

donde  $V_F$  es la caída de voltaje en el diodo y  $C_P$  es la capacitancia parásita paralela a  $C_S$ . Del mismo modo, la carga transferida desde el punto  $A$  al punto  $B$  en un ciclo será:

$$\Delta Q_{AB} = 2 \left( V_P + \frac{1}{2} V_O - V_F \right) (C_R + C_P)$$

Se tiene que  $\Delta Q_{BA} = \Delta Q_{AB}$ , por lo tanto, el voltaje de salida en circuito abierto será:

$$V_O = \frac{2(V_P - V_F)(C_S - C_R)}{C_S + C_R + 2C_P} \quad (6.1)$$

Obviamente el voltaje de salida no puede exceder  $2V_F$ .

La caída de voltaje en los diodos,  $V_F$ , reduce el voltaje efectivo de excitación a  $(V_P - V_F)$  y la dependencia del voltaje  $V_F$  de la temperatura provoca ruido de origen térmico. Para eliminar estos efectos, es necesario emplear relevadores en lugar de diodos.

### No linealidad

Para un desplazamiento  $x$  de la placa móvil, se tiene que  $C_S = dC_O/(d - x)$ . Si  $C_R = C_O = A\epsilon\epsilon_0/d$ , el voltaje de salida será:

$$V_O = \frac{2(V_P - V_F)C_0\tilde{x}}{2C_O + 2C_P - (C_O + 2C_P)\tilde{x}} \cong (V_P - V_F) \frac{C_0\tilde{x}}{C_O + C_P} \left(1 + \frac{C_O + 2C_P}{2C_O + 2C_P}\tilde{x}\right)$$

donde  $\tilde{x} = x/d$ . Si el cociente de  $C_P$  entre  $C_O$  es definido como  $\eta$ , se tiene:

$$V_O = (V_P - V_F) \frac{\tilde{x}}{1 + \eta} \left(1 + \frac{0,5 + \eta}{1 + \eta}\tilde{x}\right)$$

A partir de la ecuación anterior es posible concluir que mientras la capacitancia parásita sea grande (un valor grande para  $\eta$ ), menor será la sensibilidad y mayor la no linealidad.

Un problema común para la medición de la capacitancia es el efecto colateral de la fuerza electrostática provocado por la señal de excitación [47]. Para el puente de diodos mostrado en la figura 6.6, el voltaje en el capacitor es  $V_P - V_F$ . La fuerza electrostática causante del cambio en la capacitancia es  $\Delta F \approx AG\epsilon\epsilon_0(V_P - V_F)^2/2d^2$ . Esto provocará un error que puede ser significativo (tema que será abordado más adelante).

Para reducir la fuerza electrostática se debe emplear una estructura simétrica en el microsistema, para hacer un registro diferencial de las variaciones en la capacitancia (figura 6.7). Así, las fuerzas electrostáticas en ambos lados de los electrodos móviles se cancelarán entre sí.

$$\Delta F = \frac{A\epsilon\epsilon_0(V_P - V_F)^2}{2d^2} \left[ \frac{1}{(1 - \tilde{x})^2} - \frac{1}{(1 + \tilde{x})^2} \right] \approx \frac{A\epsilon\epsilon_0(V_P - V_F)^2}{2d^2} (4\tilde{x})(1 + 2\tilde{x}^2)$$

Una ventaja adicional de este esquema de registro es la mejora significativa de la linealidad dado que  $C_S$  y  $C_R$  cambian en direcciones opuestas [48]. Para un desplazamiento,  $x$ , del electrodo móvil, se tiene que:

$$C_S = C_O \frac{1}{1 - \tilde{x}}, C_R = \frac{1}{1 + \tilde{x}} \quad (6.2)$$

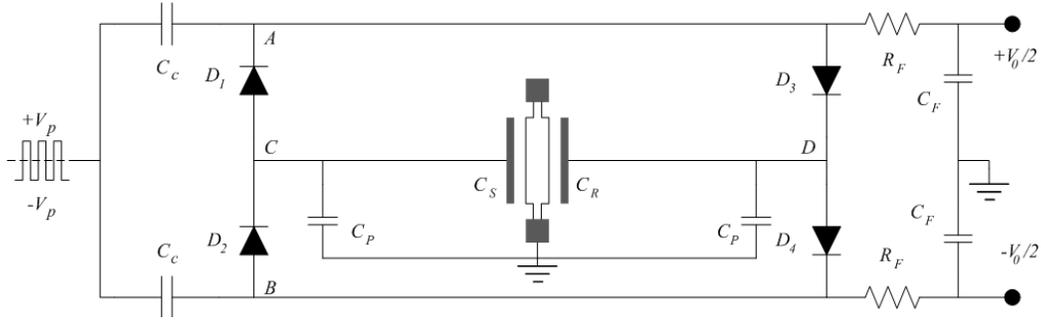


Figura 6.7: Puente de Wheatstone para registrar cambios en un capacitor variable diferencial.

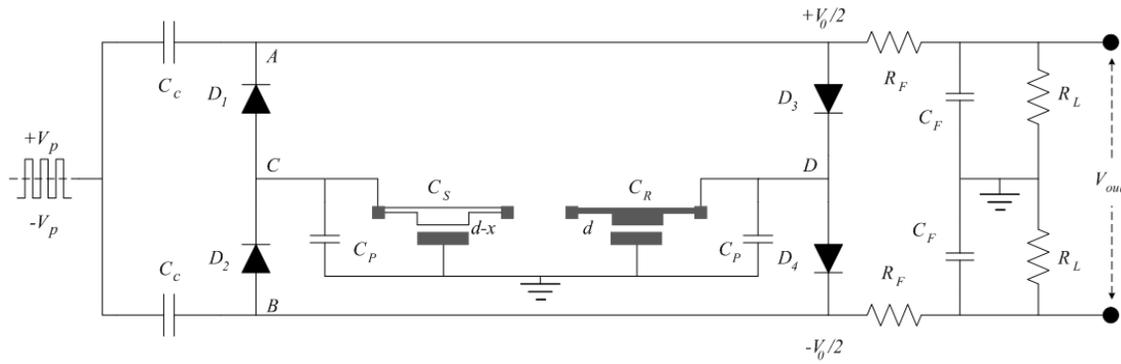


Figura 6.8: Puente de Wheatstone con carga externa.

Sustituyendo estos valores en la ecuación 6.1, el voltaje de salida en circuito abierto será:

$$V_O = \frac{2(V_P - V_F)C_O}{C_O + C_P(1 - \tilde{x}^2)} \tilde{x}$$

Para un pequeño desplazamiento, la salida será aproximadamente:

$$V_0 \equiv 2(V_P - V_F) \frac{1}{1 + \eta} \left( 1 + \frac{\eta}{1 + \eta} \tilde{x}^2 \right) \quad (6.3)$$

De la ecuación 6.3 se concluye que: i) la sensibilidad es mayor (el doble) para mediciones diferenciales comparadas con las mediciones hechas en un capacitor simple, ii) la no linealidad se reduce significativamente debido a la ausencia del término cuadrático en la ecuación 6.3 y iii) la no linealidad provocada por la capacitancia parásita  $C_P$  especialmente para  $C_P \leq C_O$ .

### Efecto de carga

Ahora considérese el puente de diodos empleado para registrar las variaciones de capacitancia, con una carga externa como se muestra en la figura 6.8.

De acuerdo con lo señalado anteriormente, la corriente neta que fluye de  $A$  a  $B$  será:

$$\Delta I_{BA} = I_{BA} - I_{AB} = [2(V_P - V_F)(C_S - C_R) - V_O(C_S + C_R + 2C_P)](f)$$

donde  $f$  es la frecuencia de la señal de excitación. Por lo tanto, la corriente en la carga será:

$$I_L = \frac{V_O}{2(R_F + R_L)}$$

Dado que las dos corrientes ( $I_{BA}$  e  $I_{AB}$ ) deben ser la misma, se tiene que:

$$V_O = \frac{2(V_P - V_F)(C_S - C_R)}{C_S + C_R + 2C_P} \frac{2(R_F + R_L)(C_S + C_R + 2C_P)f}{1 + 2(R_F + R_L)(C_S + C_R + 2C_P)f} \quad (6.4)$$

Y el voltaje de la salida en las terminales de la carga externa será:

$$V_{out} = \frac{R_L}{R_L + R_F} V_O$$

La ecuación 6.4 implica que la impedancia de salida del puente de diodos (excluyendo  $R_F$ ,  $C_F$  y  $R_L$ ) será:

$$R_{out} = \frac{1}{2(C_S + C_R + 2C_P)f}$$

El hecho de que la impedancia de salida del puente de diodos sea inversamente proporcional a la frecuencia de excitación puede corroborarse para la mayoría de las mediciones capacitivas.

De hecho, el voltaje de salida aumenta con la frecuencia de la señal de excitación a baja frecuencia y se va a cero para altas frecuencias de acuerdo con lo señalado en la ecuación 6.4. El voltaje de salida cae de nuevo para muy altas frecuencias, dado que los diodos no trabajan adecuadamente bajo estas condiciones. Por esta razón, la frecuencia de la señal de excitación está usualmente en el rango de 100 kHz a 10 MHz.

### 6.1.3. Medición mediante doble excitación

Con un esquema de doble excitación, el desplazamiento de la placa móvil puede registrarse mediante la aplicación de un par de señales sinusoidales de excitación como se muestra en la figura 6.9.

Aquí  $C_P$  es la capacitancia parásita y  $C_i$  es la capacitancia de entrada del amplificador operacional cumpliendo funciones de seguidor de voltaje. El registro de la capacitancia se hace mediante dos señales sinusoidales de igual amplitud,  $+V_R$  y  $-V_R$ , con la misma frecuencia  $\omega$  [49]. Cuando  $C_S$  y  $C_R$  son exactamente iguales, el voltaje de entrada para el amplificador es cero. Si  $C_S$  y  $C_R$  son diferentes, el voltaje de entrada

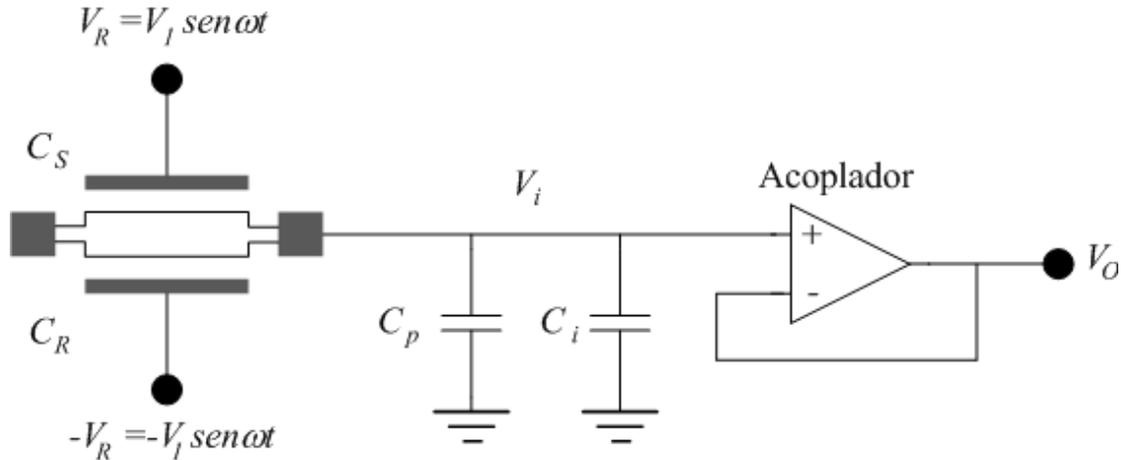


Figura 6.9: Circuito para el registro de variaciones en la capacitancia mediante la aplicación de dos señales sinusoidales.

para el amplificador (seguidor),  $V_i$ , puede determinarse gracias a la condición de corriente nula de entrada del amplificador operacional.

$$(V_R - V_i) C_S \omega = (V_R - V_i) C_R \omega + V_i (C_P + C_i) \omega$$

Así, la señal de voltaje en la placa móvil será:

$$V_i = \frac{C_S - C_R}{C_S + C_R + C_P + C_i} V_R$$

Para un pequeño desplazamiento  $x$  y de acuerdo con las ecuaciones 6.2, se tiene que:

$$V_i = \frac{2C_O V_R}{2C_O + (C_P + C_i)(1 - \tilde{x}^2)} \tilde{x}$$

Dado que  $V_i$  es independiente de  $C_P$  y  $C_i$ , la precisión y estabilidad de los registros se deteriora. Para solucionar esto, se puede emplear un esquema de realimentación como el mostrado en la figura 6.10.

donde  $C_{FB}$  es un capacitor de realimentación. Aprovechando el balance de corriente, como se hace en otros esquemas de registro, se tiene que:

$$(V_R - V_i) C_S \omega = (V_R + V_i) C_R \omega + V_i \omega (C_P + C_i) + (V_i + A_1 V_i) C_{FB} \omega$$

La señal de voltaje en la placa móvil se a partir de:

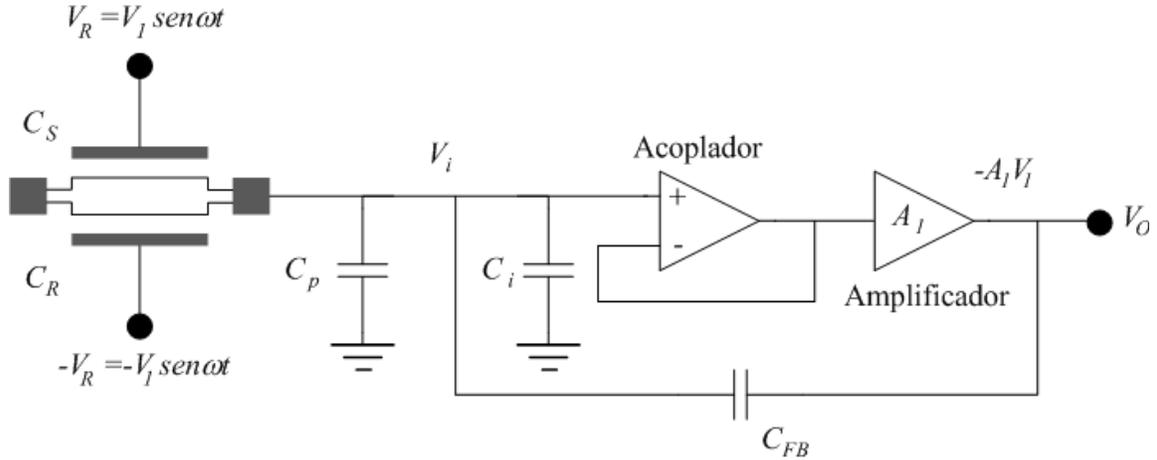


Figura 6.10: Circuito para el registro de variaciones en la capacitancia mediante la aplicación de dos señales sinusoidales y realimentación.

$$V_i = \frac{(C_S - C_R) V_R}{C_S + C_R + C_P + C_i + (1 + A_i) C_{FB}}$$

donde  $A_1$  es la ganancia de lazo abierto del amplificador  $A_1$ . La salida del circuito será:

$$V_O = -A_1 V_i = \frac{A_1 (C_S - C_R) V_R}{C_S + C_R + C_P + C_i + (1 + A_1) C_{FB}}$$

Si  $A_1$  es lo suficientemente grande, se tiene que la salida del circuito será aproximadamente:

$$V_O \doteq -\frac{C_S - C_R}{C_{FB}} V_R = -\frac{2C_{O\tilde{x}}}{C_{FB} (1 - \tilde{x}^2)} V_R$$

La salida  $V_O$  es linealmente dependiente de la capacitancia diferencial,  $C_S - C_R$ , pero independiente de la capacitancia parásita  $C_P$ .

#### 6.1.4. Medición mediante balance de fuerzas electrostáticas

Para implantar este esquema es necesario sustituir el capacitor de realimentación mostrado en la figura 6.10,  $C_{FB}$ , por un resistor con un valor muy alto,  $R_{FB}$ , de modo tal que un voltaje de CD pueda realimentarse. Además deben agregarse dos señales de CD de igual valor pero signos contrarios como voltaje de offset para las señales sinusoidales de excitación [50] e insertarse un demodulador síncrono entre el amplificador operacional que funciona como seguidor y el amplificador  $A_1$ . De este modo, el voltaje de realimentación de DC cambiará las fuerzas electrostáticas entre las placas o electrodos, de modo que la realimentación puede considerarse como electromecánica. Por lo tanto, las mediciones no son mediciones puramente eléctricas de la capacitancia, sino un control electromecánico en lazo cerrado que reacciona en función de las variaciones registradas.

Al principio, la placa móvil está en su posición de equilibrio entre las placas fijas. La distancia de separación es  $d$  para ambos lados. En este caso, la señal de excitación no genera ninguna señal de entrada

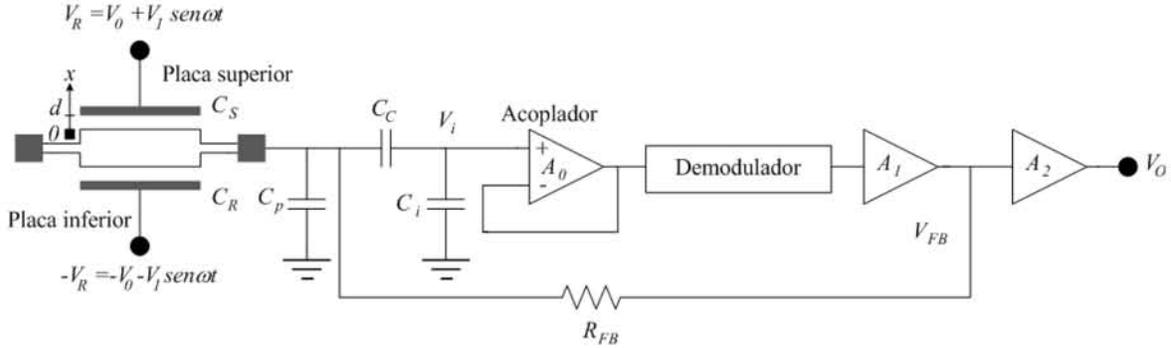


Figura 6.11: Técnica para registro de variaciones en la capacitancia y balance de fuerzas electrostáticas presentes en el sensor.

para el seguidor  $A_0$  ( $V_i = 0$ ) y no existe una fuerza resultante actuando sobre la placa móvil central (según la figura 6.11). Si la placa móvil se desplaza una distancia  $x$  en sentido positivo (según el eje de referencia colocado en el diagrama) como resultado de la inercia al aparecer una aceleración en sentido negativo ( $-a$ ) que afecta a todo el dado en donde se encuentra el microsistema, la señal sinusoidal  $V_i$  aparecerá en la entrada del amplificador  $A_0$ , la cual, para valores pequeños de  $C_P$  y  $C_i$  será:

$$V_i = \tilde{x}V_1 \sin \omega t$$

Esta señal se amplifica y procesa para realimentar un voltaje de DC,  $V_{FB}$ , a la entrada a través de  $R_{FB}$ . Así, el  $V_{FB}$  que se obtendrá queda como:

$$V_{FB} = +A_{op}V_1\tilde{x} \quad (6.5)$$

donde  $A_{op}$  es la ganancia de lazo abierto resultante del seguidor, el demodulador y el amplificador operacional  $A_1$ . Si los componentes electrónicos se eligen de modo tal que la ganancia sea grande, la fuerza resultante sobre la placa móvil provocada por la realimentación será negativa (según el eje de referencia en el diagrama). El voltaje positivo de DC en la placa móvil permite diferenciar las fuerzas electrostáticas provenientes de la placa superior e inferior.

Por lo tanto, el desplazamiento de la placa central es reducido por la realimentación electromecánica y la reducción es significativa si  $A_{op}$  es suficientemente grande. De hecho, la placa central se mantiene casi siempre en su posición original de equilibrio. Dado que el desplazamiento de la placa central es muy pequeño, la aceleración repentina ( $-a$ ) se registra por el voltaje de realimentación, el cual con su sola aparición genera una fuerza electrostática que balancea la fuerza externa. Por lo tanto, esta técnica de registro de variaciones es conocida como esquema de medición mediante balance de fuerzas electrostáticas. En esencia, sin embargo, el registro de variaciones se hace a través de mediciones de capacitancia.

En el análisis de la relación entre el voltaje de alimentación y la aceleración considérese, por simplicidad, que  $V_1$  es mucho más pequeño que  $V_0$ , de modo tal que la fuerza electrostática provocada por el componente de alta frecuencia sea despreciable, así la fuerza electrostática aplicada sobre la placa móvil será:

$$F_e = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{2d^2} \left[ \frac{(V_O - A_{op}V_1\tilde{x})^2}{(1 - \tilde{x})^2} - \frac{(V_O + A_{op}V_1\tilde{x})^2}{(1 + \tilde{x})^2} \right] \quad (6.6)$$

donde  $A$  es el área de las placas. Si se emplea la relación  $V_1 = \alpha V_O$ , se tiene:

$$F_e = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0V_O^2}{2d^2} \left[ \frac{(1 - \alpha A_{op}\tilde{x})^2}{(1 - \tilde{x})^2} - \frac{(1 + \alpha A_{op}\tilde{x})^2}{(1 + \tilde{x})^2} \right] \quad (6.7)$$

Y para  $\alpha A_{op}\tilde{x} \ll 1$  y  $\alpha A_{op}\tilde{x} \gg 1$ , la fuerza electrostática queda expresada como:

$$F_e \doteq - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0V_O^2\alpha A_{op}\tilde{x}}{d^2} \quad (6.8)$$

El desplazamiento está determinado por la ecuación:

$$ma - \frac{2a\varepsilon\varepsilon_0V_O^2\alpha A_{op}}{d^3}x - kx = 0$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\tilde{x} = \frac{ma}{kd + 2a\varepsilon\varepsilon_0V_O^2\alpha A_{op}/d^2} \quad (6.9)$$

Si  $A_{op}$  es lo suficientemente grande tal que  $kd$  en el denominador puede ser despreciada y  $\tilde{x}$  será:

$$\tilde{x} = \frac{d^2ma}{2A\varepsilon\varepsilon_0V_O^2\alpha A_{op}} \quad (6.10)$$

Obviamente, dado que  $\tilde{x}$  es muy pequeña, a partir de la ecuación 6.5, se tiene que el voltaje de realimentación  $V_{FB}$  será:

$$V_{FB} = \frac{d^2ma}{2A\varepsilon\varepsilon_0V_O} \quad (6.11)$$

Dado que  $V_{FB}$  es directamente proporcional a  $ma$ , puede considerarse como una medición de la aceleración. Con la fuerza electrostática, la ecuación para la vibración amortiguada de la masa será:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \frac{2A\varepsilon\varepsilon_0V_O^2\alpha A_{op}}{d^3}x = 0 \quad (6.12)$$

Esto significa que el sistema tiene una constante elástica efectiva  $k_{eff}$ :

$$k_{eff} = k + \frac{2A\varepsilon\varepsilon_0V_O^2\alpha A_{op}}{d^3} \quad (6.13)$$

Por lo tanto, la frecuencia de resonancia del sistema se incrementa con la realimentación electromecánica. La frecuencia del sistema es ahora  $\omega'_0 = \sqrt{k_{eff}/m}$  en lugar de  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . En tanto que la frecuencia de resonancia se incrementa debido a la realimentación electromecánica, la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) del microsistema se reduce a  $\zeta' = \zeta\omega_0/\omega'_0$ .

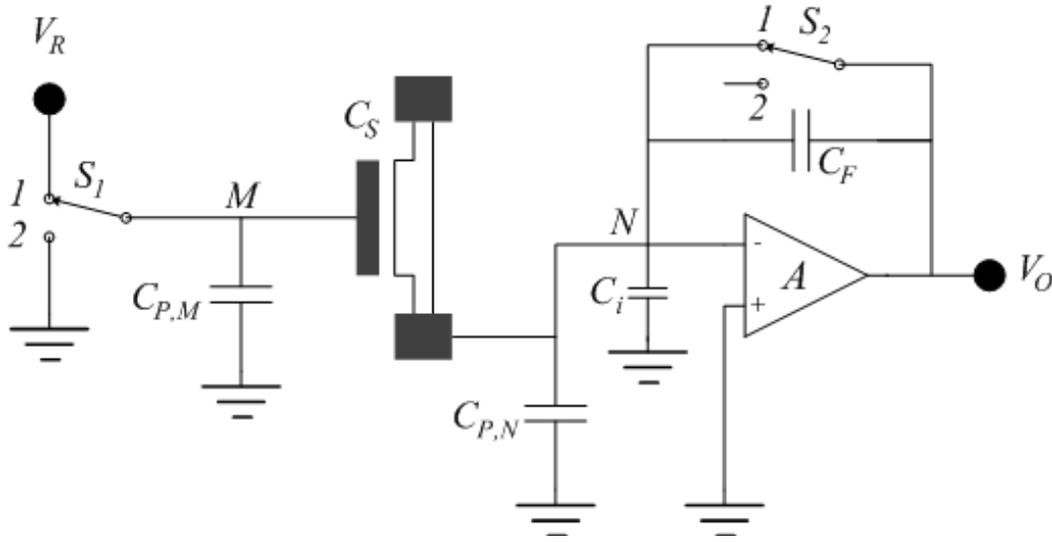


Figura 6.12: Diagrama del circuito para el registro de variaciones en la capacitancia a través de conmutación de capacitores.

### 6.1.5. Medición mediante conmutación de capacitores

El esquema de registro de variaciones en la capacitancia mediante la conmutación de capacitores es muy útil en mediciones de capacitancias muy pequeñas [51]. El diagrama mostrado en la figura 6.12 describe la conexión de los diferentes elementos.

Los interruptores  $S_1$  y  $S_2$  son interruptores analógicos CMOS,  $V_R$  es un voltaje de referencia y  $A$  un amplificador operacional ideal sin voltaje de offset (corrimiento). Para el tiempo  $t = t_1$ , ambos interruptores están en sus respectivas posiciones "1", la carga en  $C_S$  es  $C_S V_R$  y la carga en  $C_F$  es cero. Para el tiempo  $t = t_2$  ambos interruptores están en sus respectivas posiciones "2". Dado que la placa izquierda del capacitor variable está aterrizada, la carga almacenada en la placa móvil fluye a través del punto  $N$  y carga el capacitor  $C_F$ . Así, el voltaje en la salida  $V_O$  puede encontrarse a través de la relación que describe la conservación de la carga:

$$C_S V_R = (C_S + C_i + C_{P,N}) V_N + (V_N - V_O) C_F \quad (6.14)$$

Si la ganancia de lazo abierto del amplificador es  $-A_O$ , se tiene que:

$$V_O = -A_O V_N \quad (6.15)$$

A partir de las ecuaciones 6.14 y 6.15, se tiene:

$$C_S V_R = - (C_S + C_i + C_{P,N}) \frac{1}{A_O} V_O - C_F \frac{1 + A_O}{A_O} V_O$$

y

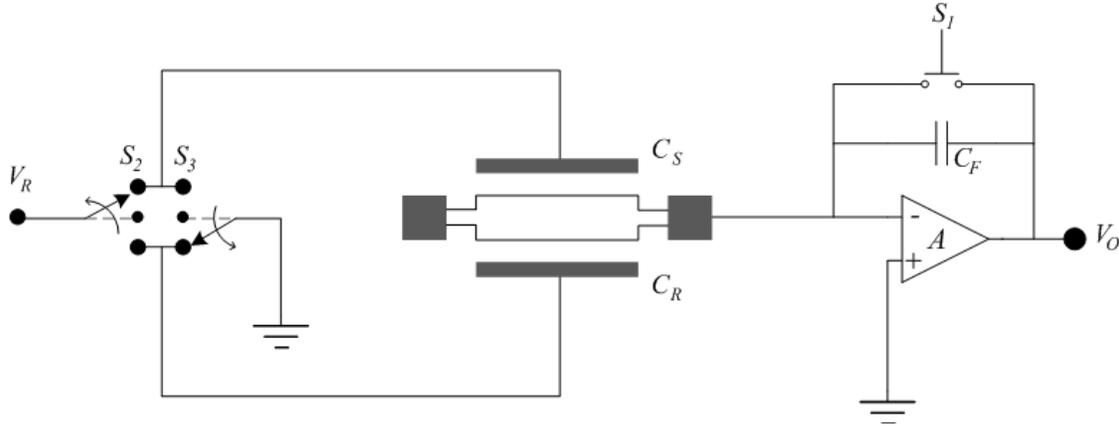


Figura 6.13: Diagrama del circuito de conmutación de capacitores para registrar variaciones en un capacitor variable diferencial.

$$V_O = \frac{A_O C_S V_R}{(A_O + 1) C_F + C_S + C_i + C_{P,N}}$$

Dado que  $A_O$  es grande, los efectos de  $C_i$  y  $C_{P,N}$  son mínimos. Entonces, la salida es directamente proporcional a  $C_S$ :

$$V_O = \frac{C_S}{C_F} V_R$$

Para una capacitancia cambiante  $C_S$ ,  $S_1$  y  $S_2$  deben conmutar rápidamente (alta frecuencia) entre sus posiciones "1" y "2", y un retenedor debe agregarse a la salida del amplificador operacional para facilitar el procesamiento de la señal.

Alternativamente pueden intercambiarse las posiciones de  $C_S$  y  $C_F$  [52]. En esta configuración, la señal de salida es inversamente proporcional a la capacitancia registrada  $C_S$ , y directamente proporcional al desplazamiento de la placa móvil  $x$ . Este esquema tiene la ventaja de proporcionar un mayor rango de operación lineal para la realización de mediciones, además de que la carga transferida al capacitor variable será constante en cantidad, y debido a ello, el rango de operación del sistema completo puede extenderse gracias a la fuerza electrostática constante presente entre las placas del dispositivo.

El diagrama 6.13 muestra un esquema de registro de variaciones que compara el capacitor variable con un capacitor de referencia [53]. Para realizar las mediciones,  $S_1$  se emplea para inicializar el circuito mediante la descarga del capacitor de realimentación  $C_F$ . A continuación, los interruptores  $S_2$  y  $S_3$  son colocados en las posiciones mostradas en el diagrama para cargar  $C_S$  y descargar  $C_R$ . Y en un tercer movimiento,  $S_2$  y  $S_3$ , son llevados a las posiciones opuestas (mostradas por las flechas en el diagrama). Con ello, el voltaje de salida será:

$$V_O = \frac{C_S - C_R}{C_F} V_{ref}$$

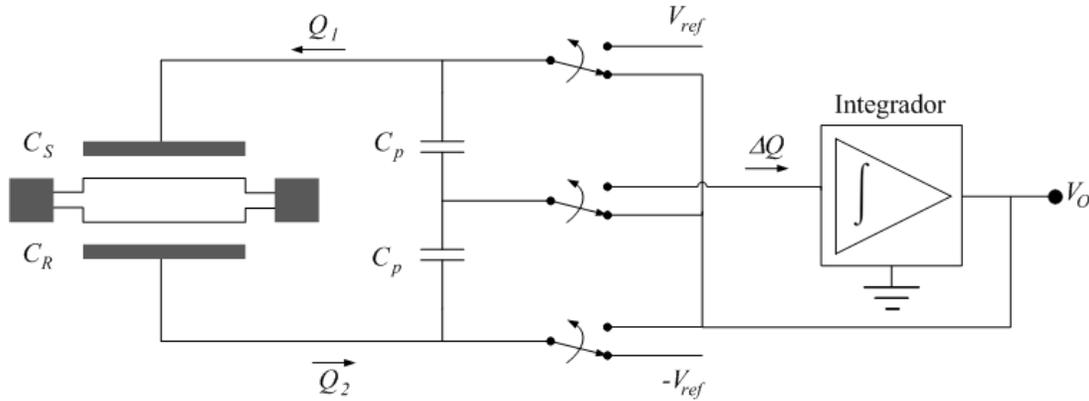


Figura 6.14: Diagrama de un puente autobalanceado para medir un capacitor variable diferencial.

Otro circuito basado en conmutación de capacitores para registrar una capacitancia diferencial se muestra en la figura 6.14.

Los electrodos fijos de los capacitores  $C_S$  y  $C_R$  son periódicamente conmutados entre los voltajes de referencia  $+V_{ref}$  /  $-V_{ref}$  y el voltaje de salida  $V_O$ , resultando en la transferencia de cargas  $Q_1$  y  $Q_2$  hacia los capacitores  $C_S$  y  $C_R$ , respectivamente. La diferencia entre las cargas transferidas está dada por:

$$\Delta Q = (C_S + C_P)(V_{ref} - V_O) - (C_R + C_P)(V_{ref} + V_O) \quad (6.16)$$

El circuito integrador muestrea  $\Delta Q$  de la placa móvil y la integra, generando el voltaje de salida  $V_O$  que es realimentado al circuito de excitación para establecer la condición de equilibrio  $\Delta Q = 0$ . Por esta razón, el método se conoce como puente de auto-balanceo. De la ecuación 6.16, puede determinarse el voltaje de salida:

$$V_O = \frac{C_S - C_R}{C_S + C_R + 2C_P}$$

La forma de abordar hasta ahora los tópicos acerca de los esquemas de medición mediante conmutación de capacitores son meramente conceptuales, dado que los interruptores se implantan con tecnología CMOS y las mediciones involucran circuitos mucho más complejos y el control de los propios interruptores.

### 6.1.6. Medición de la frecuencia

Dado que frecuencia de salida es fácil de acoplar con un sistema digital, este esquema puede emplearse para la medición de la capacitancia. El método más simple de medición de frecuencia emplea un oscilador Schmitt [55], tal como se muestra en el diagrama de la figura 6.15.

Si el voltaje de histeresis del oscilador es  $V_h$ , la frecuencia de oscilación será:

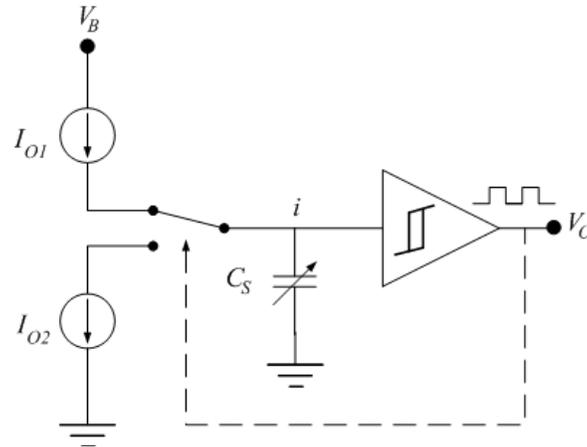


Figura 6.15: Diagrama con un oscilador de Schmitt para medir cambios en la frecuencia de oscilación de un circuito.

$$f = \frac{I_{O1}I_{O2}}{(I_{O1} + I_{O2})V_h} \frac{1}{C_S} = \frac{I_{O1}I_{O2}}{(I_{O1} + I_{O2})V_h C_O} (1 - \tilde{x}) \quad (6.17)$$

Como puede apreciarse en la ecuación 6.17, la variación de la frecuencia de salida está linealmente relacionada con el desplazamiento de la placa móvil.

Muchos dispositivos en combinación con el oscilador de Schmitt presentan dificultades de estabilidad en su estado inicial. Por ello, este tipo de circuito se emplea principalmente en el registro de variaciones de capacitancia en capacitores variables diferenciales. Una posible configuración para conectar este circuito se muestra en el diagrama de la figura 6.16 [56].

Cuando los capacitores variable y de referencia son conectados al oscilador alternadamente, la diferencia de las frecuencias es una indicación estable de las variaciones de capacitancia que se esta interesado en registrar.

$$\Delta f = f_S - f_R = \frac{I_O}{2V_h} \left( \frac{1}{C_S} - \frac{1}{C_R} \right)$$

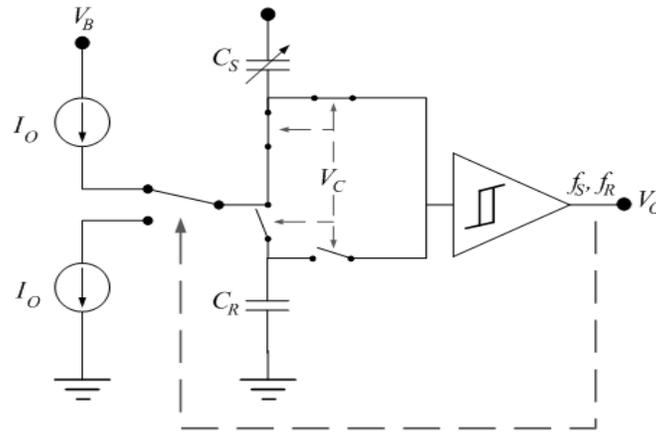


Figura 6.16: Variante en el uso de un oscilador de Schmitt para el registro de cambios en la frecuencia de oscilación de un circuito.

## 6.2. Efectos de la excitación eléctrica en sistemas que reciben una aceleración cte.

Como se abordó en la sección anterior, la excitación eléctrica es muy importante para registrar las variaciones de capacitancia en un microsistema, variaciones que a su vez están asociadas con desplazamientos de la placa móvil provocados por los movimientos experimentados por el microsistema completo. El voltaje de excitación provoca una fuerza electrostática entre los electrodos que a su vez es causa de algunos movimientos de la placa móvil. Por lo tanto, la precisión de las mediciones o incluso la operación normal del sensor capacitivo se ve afectada por el voltaje de excitación [57].

Generalmente, el voltaje de excitación consiste de un componente de CA y un componente de CD. Una forma comúnmente empleada es  $\pm V_0 \pm V_1 \sin \omega t$ , donde la frecuencia  $\omega$  (en el orden de  $10^6$ ) es usualmente mucho más grande que la frecuencia de la señal que es medida y la frecuencia natural de oscilación de la estructura mecánica del microsistema (ambas en el orden de  $10^3 \sim 10^4$ ). Por lo tanto, la fuerza sobre el electrodo móvil es el promedio de la fuerza electrostática del voltaje de excitación:

$$F_e = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2(d-x)^2} \left( V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2 \right)$$

Si el voltaje efectivo se define como  $V_{ef} = \sqrt{(V_0^2 + V_1^2/2)}$ , la forma general de la fuerza electrostática actuando sobre el electrodo será:

$$F_e = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2(d-x)^2} V_{ef}^2$$

### 6.2.1. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor simple

La configuración de capacitor simple es común en acelerómetros y sensores de presión; los elementos básicos se muestran en el esquema de la figura 6.17.

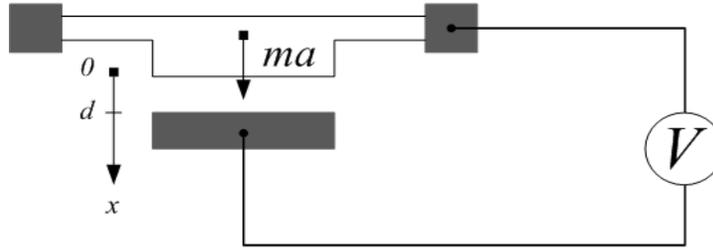


Figura 6.17: Esquema con la estructura de un dispositivo capacitivo simple.

Dado que la excitación eléctrica se presenta únicamente entre dos placas (es decir, no existe una tercera placa para configurar un dispositivo diferencial), la ecuación para determinar el desplazamiento de la placa móvil será:

$$\frac{A\epsilon\epsilon_0 V_{ef}^2}{2(d-x)^2} + ma - kx = 0 \quad (6.18)$$

donde  $ma$  es la fuerza en la dirección  $x$  y  $d$  es la distancia inicial entre las placas o electrodos del capacitor. Si se definen  $\tilde{x} = x/d$ ,  $p = A\epsilon\epsilon_0 V_{ef}^2 / 2kd^3$  y  $q = ma/kd$ , la ecuación anterior puede reescribirse del siguiente modo:

$$\tilde{x} - \frac{p}{(1-\tilde{x})^2} = q \quad (6.19)$$

A partir de esta ecuación se tienen los siguientes casos:

$V_{ef}$  **cero, es decir,  $p = 0$**

A partir de 6.19 se tiene  $\tilde{x} = q$  y por tanto la relación entre el desplazamiento y la aceleración es lineal.

$V_{ef}$  **diferente de cero y valores muy pequeños de  $p$ ,  $q$  y  $x$**

Para valores pequeños de  $\tilde{x}$ , y empleando la aproximación de  $(1+y)^{-1} = (1-y+y^2-y^3+\dots)$  (aproximación de la función mediante una serie de Maclaurin) hasta la segunda potencia, la ecuación 6.19 puede reescribirse como:

$$3p\tilde{x}^2 - (1-2p)\tilde{x} + (p+q) = 0 \quad (6.20)$$

La solución a la ecuación será:

$$\tilde{x} = \frac{(1-2p) - \sqrt{(1-2p)^2 - 12p(p+q)}}{6p}$$

Empleando la aproximación de  $\sqrt{1-y} = (1 - y/2 - y^2/8 - y^3/16 + \dots)$  (aproximación de la función mediante una serie de Maclaurin) para valores pequeños de  $p$  y  $q$ , la solución a la ecuación 6.20 puede aproximarse como:

$$\tilde{x} = \frac{p(1-4p+7p^2)}{(1-2p)^3} + \frac{1-4p+10p^2}{(1-2p)^3}q \left(1 + \frac{3p}{1-4p+10p^2}q\right)$$

A partir de esta ecuación se puede concluir que:

1. El voltaje de excitación provoca un corrimiento aún cuando la aceleración sea nula como lo indica el primer término del lado derecho. Obviamente, mientras mayor sea el valor de  $p$  (es decir, mayor voltaje de excitación) mayor será el corrimiento de la posición original de reposo del sistema.
2. La sensibilidad del dispositivo es proporcional a  $(1-4p+10p^2)/(1-2p)^3$ , lo cual evidentemente está directamente relacionado con el voltaje de excitación. Por lo tanto, mientras mayor sea el voltaje de excitación, mayor será la sensibilidad del dispositivo.
3. El voltaje de excitación provoca no-linealidad en la relación desplazamiento y aceleración. La no-linealidad es  $3pq_{m\acute{a}x}/4(1-4p+10p^2)$ , donde  $q_{m\acute{a}x}$  es el valor de  $q$  que corresponde al máximo del rango de aceleración.

### Planteamiento general

En general, puede observarse el comportamiento de las variables que intervienen en la ecuación 6.19 empleando gráficas para distintos valores de sus parámetros y variables. Por definición, la ecuación 6.19 es una función de  $\tilde{x}$  y  $p$ :

$$f(\tilde{x}, p) = \tilde{x} - \frac{p}{(1-\tilde{x})^2}$$

Las curvas de  $f$  como función de  $x$  y  $p$  se muestran en la figura 6.18. Las soluciones a la ecuación 6.19 para valores dados de  $p$  y  $q$  pueden encontrarse mediante la intersección entre una línea horizontal  $f = q$  y la curva correspondiente al valor de  $p$ .

Para un par de valores de  $p$  y  $q$ , tales como  $p = 0,05$  y  $q = 0,2$  existen dos intersecciones entre las curvas ( $A$  y  $B$ ). El desplazamiento correspondiente al punto  $A$  (en  $x \cong 0,3d$ ) representa una solución estable pero el desplazamiento correspondiente al punto  $B$  (en  $x \cong 0,67d$ ) es una solución inestable.

Se tiene que para un valor específico de  $p$ , existe un valor máximo  $f$ ,  $f_{m\acute{a}x}$  correspondiente a una aceleración crítica,  $a_c = f_{m\acute{a}x}kd/m$ . Para un valor de  $q$  más grande que  $f_{m\acute{a}x}$  (es decir, para una aceleración  $a$  mucho mayor que  $a_c$ ) no existe una solución estable para la ecuación. Esto significa que el efecto de llegada ocurre debido al efecto combinado de la fuerza electrostática y la inercia. Esto es, en tanto mayor sea el valor de  $p$  (lo que significa que el valor del voltaje de excitación es considerable) menor será el valor de  $f_{m\acute{a}x}$ . Para un mayor rango de operación confiable,  $p$  debe ser tan pequeño como sea posible. Sin embargo, con un valor pequeño de  $p$ , la sensibilidad del dispositivo disminuye. Por lo tanto, en el diseño de Microsistemas que empleen sensores capacitivos de placas paralelas, en particular aquellos que tiene sólo un par de éstas, debe tenerse en consideración este aspecto para lograr un buen compromiso entre sensibilidad y estabilidad.

A partir de la condición  $\delta f/\delta \tilde{x} = 0$ , puede encontrarse la ecuación para determinar el valor de  $f_{m\acute{a}x}$ :

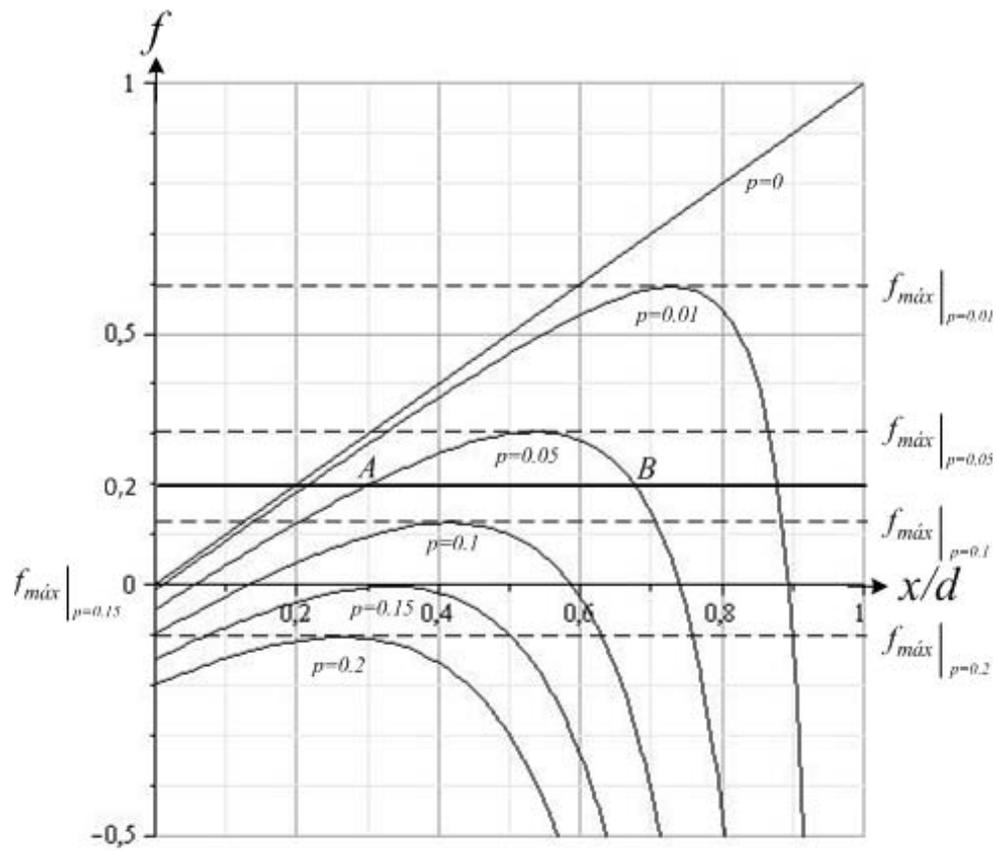


Figura 6.18: Gráfica de aceleración ( $q$ ) en función del desplazamiento relativo ( $x/d$ ) para distintos valores de voltaje ( $p$ ) en un capacitor simple.

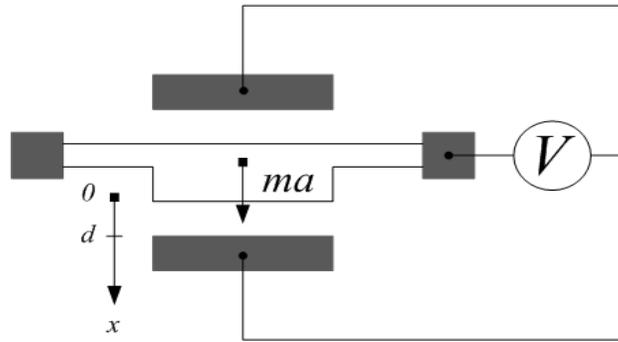


Figura 6.19: Esquema con la estructura de un dispositivo capacitivo diferencial (doble capacitor).

$$f_{m\acute{a}x} = 1 - \frac{3}{2} \sqrt[3]{2p}$$

Por ejemplo, para  $p = 0,05$ ,  $f_{m\acute{a}x}$  es 0,304, es decir, la aceleración máxima que no provoca el efecto de llegada (colapso mecánico y circuito corto eléctrico) es  $0,304kd/m$ , en lugar de  $kd/m$ . Para  $p = 0,1$ , la aceleración máxima se reduce a  $0,122kd/m$ . El acelerómetro colapsa si  $p$  es mayor a  $4/27$ .

### 6.2.2. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor doble

Para un capacitor doble, es decir, con dos placas fijas y una placa móvil colocados de forma tal que generan dos juegos de electrodos, como el mostrado en la figura 6.19, la ecuación para el desplazamiento de la placa móvil será:

$$\frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V_{ef}^2}{2d^2} \left[ \frac{1}{(1-\tilde{x})^2} - \frac{1}{(1+\tilde{x})^2} \right] + ma - kx = 0 \quad (6.21)$$

Si se definen  $\tilde{x} = x/d$ ,  $p = A\varepsilon\varepsilon_0 V_{ef}^2 / 2kd^3$  y  $q = ma/kd$ , la ecuación anterior puede reescribirse del siguiente modo:

$$\tilde{x} \left[ 1 - \frac{4p}{(1-\tilde{x}^2)^2} \right] = q \quad (6.22)$$

A partir de la ecuación 6.22 se tienen los casos siguientes.

$V_{ef}$  **cero, es decir**,  $p = 0$

Se tiene que  $\tilde{x} = q$ . La relación entre desplazamiento y aceleración es lineal.

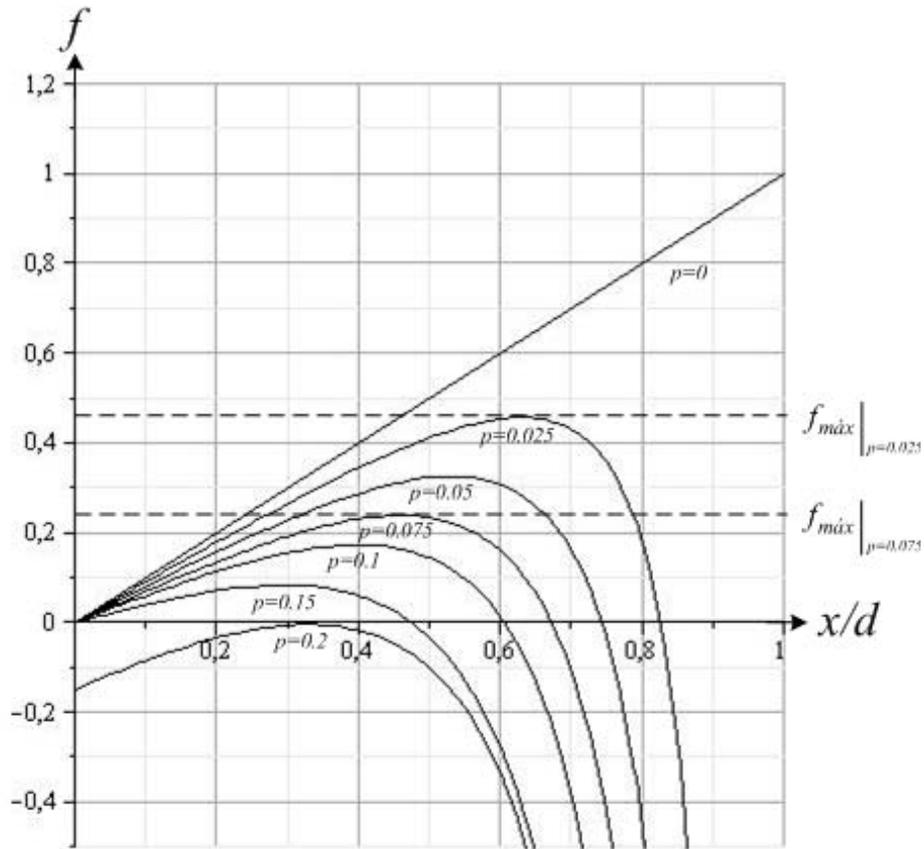


Figura 6.20: Gráfica de aceleración ( $q$ ) en función del desplazamiento realtivo ( $x/d$ ) para distintos valores de voltaje ( $p$ ) en un capacitor diferencial (doble).

#### $V_{ef}$ diferente de cero y valores muy pequeños de $p$ , $q$ y $x$

No se tiene corrimiento provocado por el voltaje de excitación debido a las fuerzas electrostáticas simétricas actuando sobre la placa móvil.

Para valores muy pequeños de  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{x} \cong q/(1-4p)$ . Esto significa que mientras mayor sea el voltaje de excitación, mayor será la sensibilidad del microsistema. Y el máximo valor de  $p$  para una operación estable es 0,25.

#### Planteamiento general

El comportamiento de la ecuación 6.22, para distintos valores de sus variables puede apreciarse, si se define a  $f$  como función de  $\tilde{x}$  y  $p$ , se fija un valor para  $p$  como parámetro y se traza la gráfica de  $f$  con respecto a  $\tilde{x}$ :

$$f(\tilde{x}, p) = \tilde{x} \left[ 1 - \frac{4p}{(1 - \tilde{x}^2)^2} \right] \quad (6.23)$$

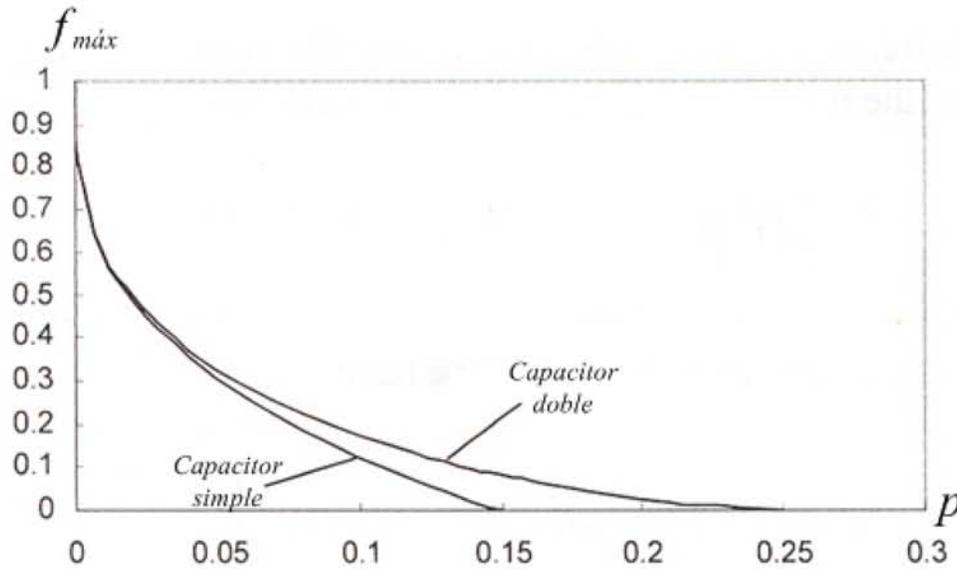


Figura 6.21: Gráfica de la relación entre la aceleración máxima ( $f$ ) y voltaje ( $p$ ) para las configuraciones de capacitor simple y doble.

Las soluciones a la ecuación 6.23 para un conjunto de valores de  $p$  y  $q$  pueden encontrarse mediante las intersecciones de la línea horizontal  $f = q$  para el valor  $q$  y la curva de  $f$  respecto de  $\tilde{x}$  para  $p$ .

Para un par de valores de  $p$  y  $q$ , tales como,  $p = 0,05$  y  $q = 0,3$ , existen dos intersecciones entre la línea  $f = 0,3$  y la curva de  $f$  respecto de  $\tilde{x}$ . La primera de estas intersecciones (en  $x \cong 0,42d$ ) corresponde a una solución estable pero la intersección a la derecha (en  $x \cong 0,61d$ ) corresponde a una solución inestable.

Para un valor específico de  $p$  existe un valor máximo acotado de  $f$ . Para un valor de  $q$  mayor que  $f_{m\acute{a}x}$ , no existe solución en los números reales para la ecuación. Esto significa que la masa que conforma la placa móvil sufre un efecto de llegada debido a la combinación de la fuerza electrostática y la inercia. En tanto mayor sea el valor de  $p$  (lo que significa un mayor valor de  $V_{ef}$ ) menor será el valor de  $f_{m\acute{a}x}$ . Si se considera el valor de  $p = 0,05$ , la  $f_{m\acute{a}x}$  es alrededor de  $0,32$ . Por lo tanto, la aceleración crítica  $a_c$  para provocar el efecto de llegada (o colapso) es  $0,32kd/m$ . Para  $p = 0,1$ , la aceleración crítica se reduce a  $0,17kd/m$ . No existe una solución estable para  $p$  mayor que  $0,25$ , incluso si la masa se encuentra en su posición original de reposo, ésta será empujada hasta hacer contacto con uno de los electrodos fijos (efecto de llegada o colapso).

A partir de lo analizado, se puede concluir hasta este momento, que la configuración de capacitor doble para un microsistema es mejor que la configuración de capacitor simple, dado que no existe corrimiento provocado por la aplicación de un voltaje de excitación y el voltaje de excitación puede ser mayor sin provocar la presencia del efecto de llegada.

En la gráfica siguiente se muestra la dependencia de  $f_{m\acute{a}x}$  respecto de  $p$  para un capacitor simple y para un capacitor doble. A partir de esta gráfica se puede apreciar que en ambos casos, para una operación confiable del microsistema,  $p$  debe ser pequeña, pero ello afecta directa y negativamente la sensibilidad del dispositivo.

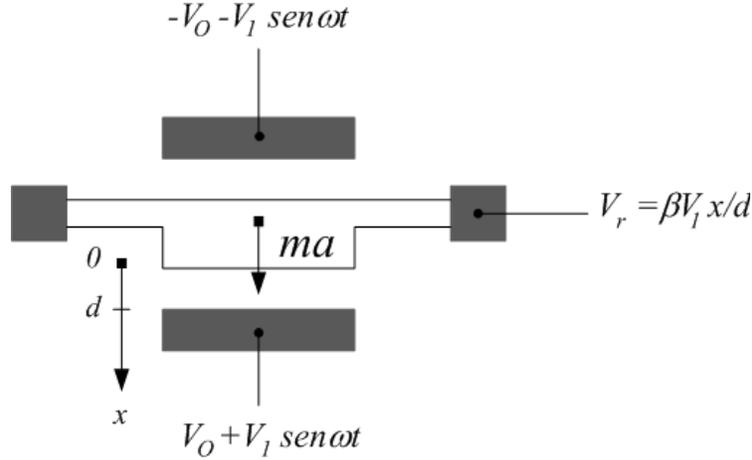


Figura 6.22: Versión simplificada de la estructura de un sensor capacitivo realimentado para lograr el balanceo de fuerzas eléctricas.

### 6.2.3. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor configurado para el balanceo de fuerzas

Para un dispositivo capacitivo configurado para balancear fuerzas con un voltaje de realimentación  $V_r$ , el voltaje de realimentación es proporcional al desplazamiento de la masa (para desplazamientos pequeños):  $V_r = \beta V_1 \tilde{x}$ , donde  $\beta$  es el coeficiente de realimentación del circuito [50]. Dado que  $V_0$  y  $V_r$  están restringidos por el voltaje proporcionado por el circuito electrónico de realimentación  $V_s$ , se tiene que  $V_0, V_r \leq V_s/2$ .

Con el voltaje de realimentación, la fuerza electrostática actuando sobre la masa será:

$$F_e = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2d^2} \left[ \frac{(V_0 + V_1 \sin \omega t - V_r)^2}{(1 - \tilde{x})^2} - \frac{(V_0 + V_1 \sin \omega t + V_r)^2}{(1 + \tilde{x})^2} \right] \quad (6.24)$$

Dado que la frecuencia de excitación,  $\omega$ , es mucho mayor que las frecuencias de la señal medida y que la frecuencia natural de la estructura mecánica del sistema, la fuerza promedio actuando sobre la masa será:

$$\bar{F}_e = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2d^2 (1 - \tilde{x}^2)^2} \left[ 4 \left( V_0^2 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \tilde{x} + 4V_r^2 \tilde{x} - 4V_r V_0 - 4V_r V_0 \tilde{x}^2 \right] \quad (6.25)$$

Empleando la relación  $V_r = \beta V_1 \tilde{x}$  y definiendo  $V_1 = \alpha V_0$ , se tiene:

$$\bar{F}_e = \frac{2A\epsilon\epsilon_0 V_0^2}{d^2 (1 - \tilde{x}^2)^2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \tilde{x} - (\alpha \beta \tilde{x}) + (\alpha \beta \tilde{x})^2 \tilde{x} - (\alpha \beta \tilde{x}) \tilde{x}^2 \right] \quad (6.26)$$

Por lo tanto, la ecuación de balanceo de fuerzas para la masa sujeta a una aceleración  $a$  será:

$$ma - kd\tilde{x} + \frac{2A\varepsilon\varepsilon_0V_0^2}{d^2(1-\tilde{x}^2)^2} \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)\tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) + (\alpha\beta\tilde{x})^2\tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x})\tilde{x}^2 \right] = 0$$

Si se definen ahora  $p_0 = A\varepsilon\varepsilon_0V_0^2/2kd^3$  y  $q = ma/kd$ , se tiene:

$$q = \tilde{x} - \frac{4p_0}{(1-\tilde{x}^2)^2} \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)\tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) + (\alpha\beta\tilde{x})^2\tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x})\tilde{x}^2 \right] \quad (6.27)$$

A partir de esta ecuación se tienen relacionadas de forma directa a  $q$  y  $\tilde{x}$  y se pueden analizar los casos siguientes.

$V_{ef}$  **cero, es decir**,  $p_0 = 0$

Dado que  $q = \tilde{x}$ , la relación entre fuerza y desplazamiento es lineal.

$V_{ef}$  **diferente de cero y valores muy pequeños de  $p_0$ ,  $q$  y  $x$**

En este caso, se tiene  $\tilde{x} \cong \frac{q}{1-4p_0(1+\alpha^2/2)+4p_0\alpha\beta}$ . La relación entre  $\tilde{x}$  y  $q$  esta determinada por el valor de  $\beta$ . Para  $\beta \neq 0$ , en tanto mayor sea el valor de  $\beta$ , menor será el desplazamiento debido a la realimentación electromecánica, lo cual no es deseable en el comportamiento del sistema.

### Planteamiento general

Nuevamente se hará uso de gráficas para analizar la relación entre  $q$  y  $\tilde{x}$ . Si se define la función  $f(\tilde{x}, \beta, p_0, \alpha)$ :

$$f(\tilde{x}, \beta, p_0, \alpha) = \tilde{x} - \frac{4p_0}{(1-\tilde{x}^2)^2} \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)\tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) + (\alpha\beta\tilde{x})^2\tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x})\tilde{x}^2 \right]$$

y se trazan las curvas para  $f(\tilde{x}, \beta, p_0, \alpha)$  con diferentes valores para  $\beta$  y valores específicos de  $p_0$  y  $\alpha$  se obtiene la gráfica mostrada en la figura 6.23.

En los cálculos, el techo de valores para  $V_0$  esta dado por  $V_r$ . Para valores pequeños de  $\beta$ , el máximo de la curva,  $f_{máx}$ , también es pequeño debido a la fuerza electrostática provocada por la señal de excitación. Esto significa que la aceleración crítica que provoca el efecto de llegada, es decir,  $a_c = f_{máx}kd/m$ , es pequeño.  $f_{máx}$  se incrementa con  $\beta$  hasta que  $\beta$  alcanza un valor cercano a 5, momento en que la curva tiene su mayor linealidad. Todas las curvas con  $\beta$  mayor a 5 se juntan para valores grandes de  $x$  debido a que el voltaje de realimentación está restringido por el valor máximo de  $V_0$ .

De las gráficas de  $f(\tilde{x}, \beta, p_0, \alpha)$  se puede apreciar que para un valor pequeño de  $\beta$ , se maximiza el valor de  $p_0$  y se disminuyen los máximos de las curvas (debido a la gran fuerza electrostática provocada por la señal de excitación). Esto significa que en tanto mayor sea el valor de  $p$ , menor será la aceleración crítica  $a_c$ , que provoca el efecto de llegada. Sin embargo, si la realimentación es suficientemente grande  $f_{máx}$  puede

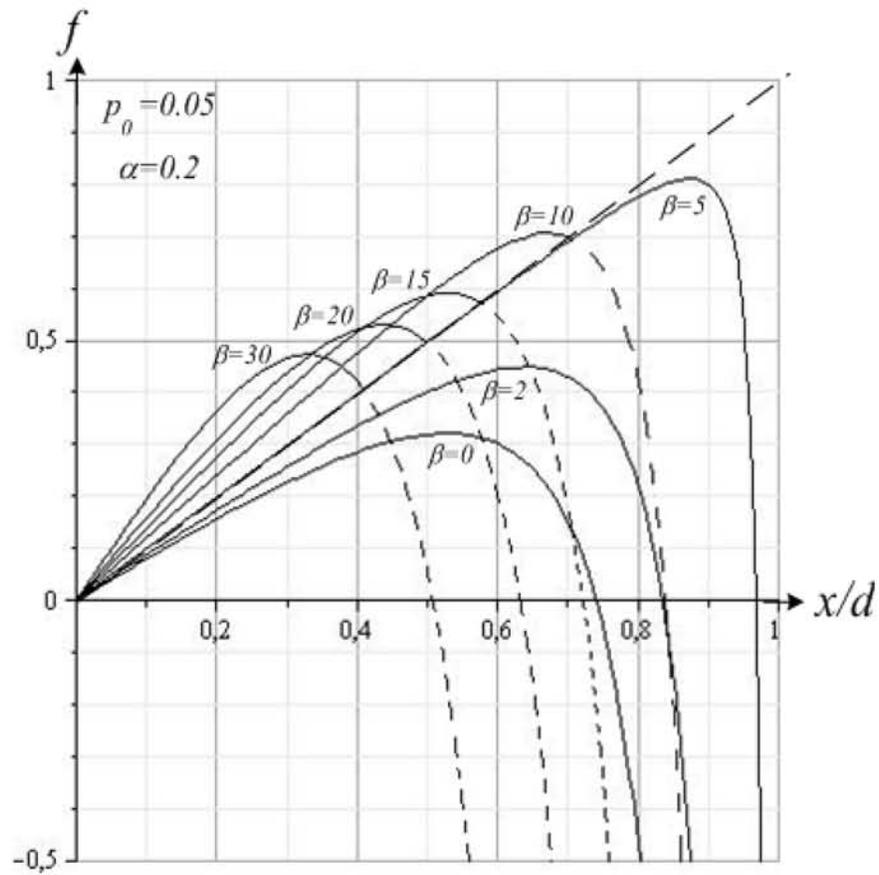


Figura 6.23: Gráfica de la relación aceleración ( $f$ ) en función del desplazamiento relativo ( $x/d$ ) para distintos valores de voltaje de realimentación ( $\beta$ ).

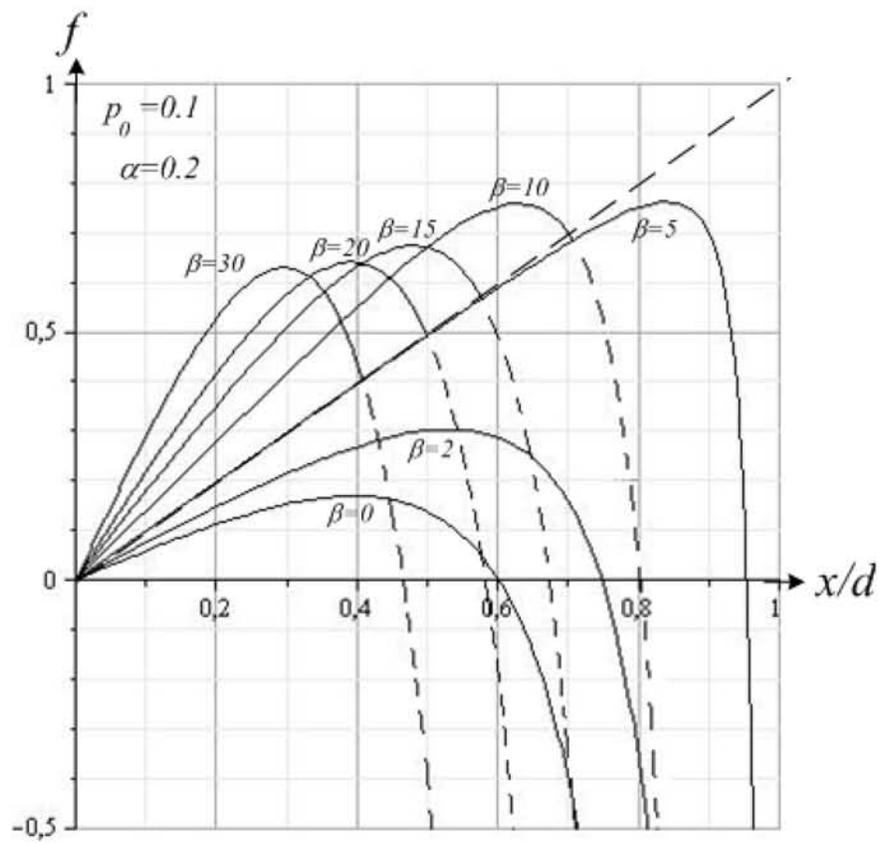


Figura 6.24: Gráfica de la relación aceleración ( $f$ ) en función del desplazamiento relativo ( $x/d$ ) para distintos valores de voltaje de realimentación ( $\beta$ ).

sobrepasar el valor de 0,8. Lo que significa que el efecto de llegada provocado por la señal de excitación es eliminado principalmente por la realimentación.

En resumen, puede concluirse que, de las tres configuraciones analizadas, la de capacitor doble con realimentación electromecánica (configuración para el balanceo de fuerzas) es la que menos se ve afectada por los efectos colaterales de la señal de excitación y tiene el mejor desempeño, bajo la consideración de una aceleración constante.

### 6.3. Efectos de la excitación en sistemas que reciben acel. con forma de escalón

En Microsistemas basados en dispositivos capacitivos para registrar movimientos las fuerzas mecánicas son dinámicas y el amortiguamiento de la estructura mecánica en su conjunto es mucho menor a la unidad. Bajo estas condiciones, un dispositivo inercial capacitivo es más susceptible de fallar por el efecto de llegada (colapso) debido al movimiento de sobreimpulso de la masa. En las peores condiciones, el efecto de amortiguamiento es cercano a cero (debido principalmente al empacamiento al vacío a la que son sometidos los Microsistemas), situación que reduce el rango de operación confiable del dispositivo. Este escenario de amortiguamiento cero (el peor caso) debe tenerse en cuenta para el diseño de Microsistemas con dispositivos capacitivos inerciales en los que los efectos de dicho amortiguamiento son difíciles de modelar. En virtud de lo anterior será necesario analizar con mayor detalle el comportamiento de un dispositivo capacitivo inercial que tiene un amortiguamiento pequeño y es sometido a aceleraciones con forma de escalón o impulso [58].

#### 6.3.1. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor simple

Para un dispositivo basado en un capacitor simple alimentado con una señal de excitación  $V = V_0 \pm V_1 \sin \omega t$ , la posición de equilibrio de la masa, llamada  $x_0$ , antes de que aparezca una aceleración con forma de escalón esta determinada por la ecuación 5.13. Con una aceleración con forma de escalón (con  $a$  iniciando en  $t = 0$ ) actuando sobre la masa ubicada en su posición inicial de equilibrio  $x_0$ , la energía cinética de la masa será:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \int_{x_0}^x \left[ \frac{A\epsilon\epsilon_0 V^2}{2(d-x)^2} + ma - kx \right] dx$$

Dado que el máximo desplazamiento que la masa puede alcanzar está determinado por la condición de  $\dot{x} = 0$ , la ecuación para el máximo desplazamiento  $x_1$  será:

$$p \frac{1}{1-\tilde{x}} + q\tilde{x}_1 - \frac{1}{2}\tilde{x}_1^2 = p \frac{1}{1-\tilde{x}_0} + q\tilde{x}_0 - \frac{1}{2}\tilde{x}_0^2$$

donde  $q = ma/kd$  y  $\tilde{x} = x/d$ . Una solución de la ecuación para  $\tilde{x}_1$  puede encontrarse si  $q$  es suficientemente pequeña. Sin embargo, una solución fuera de los números reales puede hallarse en la región ( $0 \sim 1$ ) cuando  $q$  alcanza valores más allá del valor crítico  $q_c$ . Esto significa que el desplazamiento de la masa puede incrementarse continuamente hasta que haga contacto con el electrodo.

Para encontrar el valor crítico  $q_c$ ,  $q$  se expresa como función de  $\tilde{x}_1$ .

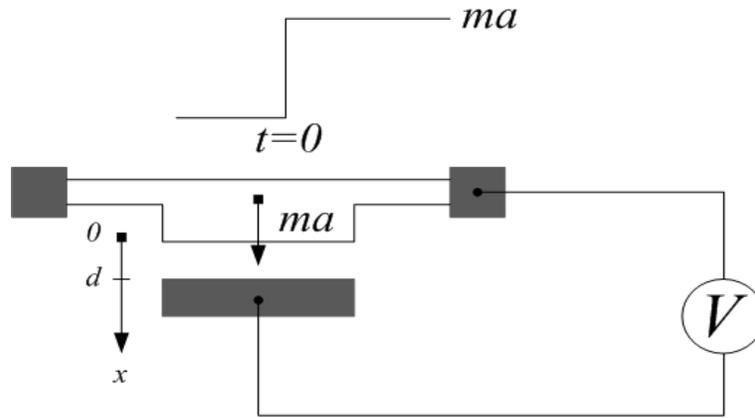


Figura 6.25: Esquema de la estructura básica de un sensor capacitivo simple sometido a una aceleración con forma de escalón.

$$q(\tilde{x}_1) = \frac{1}{2}(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_0) - \frac{p}{(1 - \tilde{x}_0)(1 - \tilde{x}_1)}$$

Existe un valor crítico de  $q_c$ , el cual corresponde al máximo valor de  $\tilde{x}_1$ , llamado  $\tilde{x}_m$ . Para hallar  $\tilde{x}_m$  se parte de la condición  $\delta q / \delta \tilde{x}_1 = 0$ :

$$\tilde{x}_m = 1 - \sqrt{\frac{2p}{1 - \tilde{x}_0}}$$

Por lo tanto,  $q_c$  será:

$$q_c = \frac{1}{2}(\tilde{x}_m + \tilde{x}_0) - \frac{p}{(1 - \tilde{x}_0)(1 - \tilde{x}_m)}$$

La dependencia de  $q_c$  respecto de  $p$  para una aceleración con forma de escalón se muestra en la gráfica de la figura 6.26.

Típicamente,  $q_c$  para una aceleración con forma de escalón es menor que para una aceleración constante por un factor de 0,5 a 0,7 (para la misma  $p$ ). El nivel crítico de la aceleración para una operación confiable del dispositivo capacitivo inercial será  $a_c = \omega_0^2 dq_c$ . Puesto que  $q_c$  es fuertemente dependiente de  $p$ , la dependencia en realidad es respecto del voltaje de excitación.

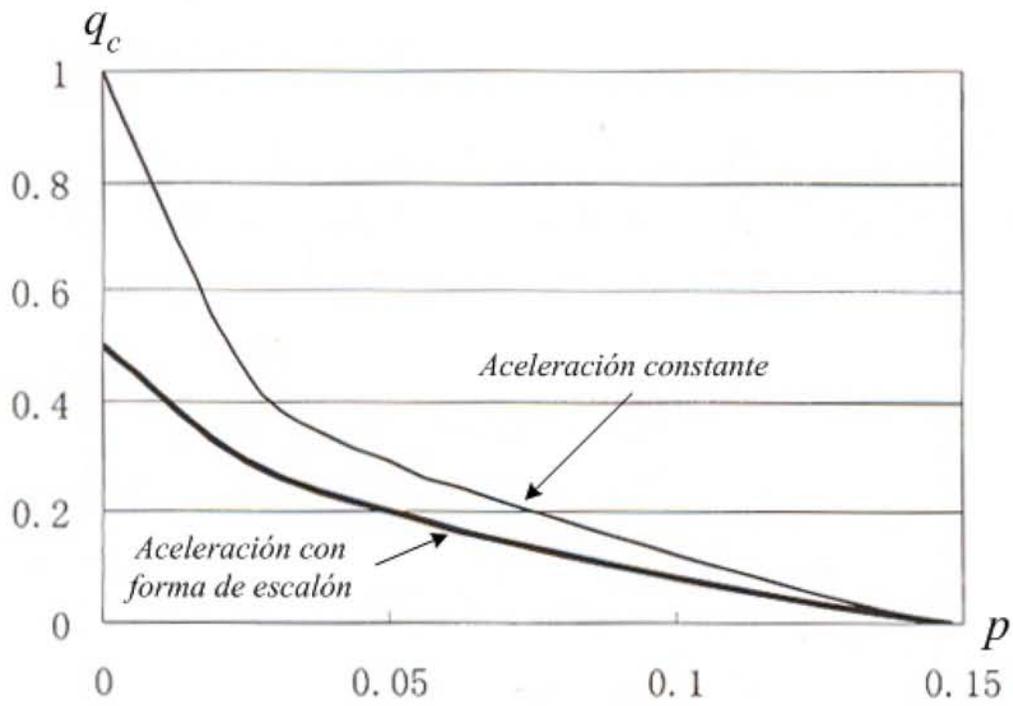


Figura 6.26: Dependencia de la aceleración máxima ( $q_c$ ) respecto del voltaje ( $p$ ) para una aceleración constante y una aceleración con forma de escalón.

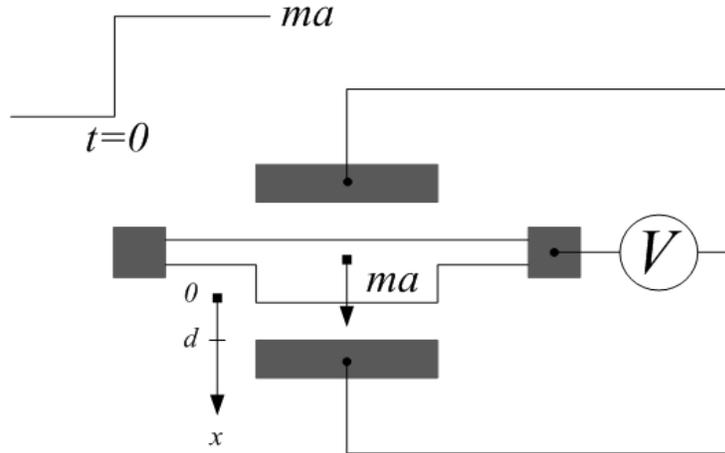


Figura 6.27: Esquema de la estructura básica de un sensor capacitivo diferencial (doble) sometido a una aceleración con forma de escalón.

### 6.3.2. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor doble

Para la configuración de un capacitor doble, la posición original de equilibrio de la masa será justo al centro entre los dos electrodos ( $x = 0$ ). Si es aplicada una aceleración con forma de escalón en el tiempo  $t = 0$ , la ecuación que modela el comportamiento dinámico de la masa será:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \int \left\{ \frac{A\epsilon\epsilon_0 V^2}{2d_0^2} \left[ \frac{1}{(1-\tilde{x})^2} - \frac{1}{(1+\tilde{x})^2} \right] + ma - kx \right\} dx$$

Lo que puede expresarse como:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = 2\frac{A\epsilon\epsilon_0 V^2}{2d_0} \frac{\tilde{x}^2}{1-\tilde{x}^2} + mad_0\tilde{x} - \frac{1}{2}kd_0^2\tilde{x}^2$$

Al introducir  $\dot{x} = 0$ , la expresión para  $q$  puede hallarse:

$$q = \frac{1}{2}\tilde{x}_1 - 2p\frac{\tilde{x}_1}{1-\tilde{x}_1^2}$$

El valor crítico  $q_c$  correspondiente a  $\tilde{x}_m$  se calcula por la condición  $\delta q/\delta y_1 = 0$ . Así, se tiene:

$$\tilde{x}_m = \sqrt{(1+2p) - \sqrt{4p(2+p)}}$$

Para un valor específico de  $p$ ,  $\tilde{x}_m$  puede hallarse a partir de la ecuación anterior y entonces  $q_c$  puede obtenerse a partir de:

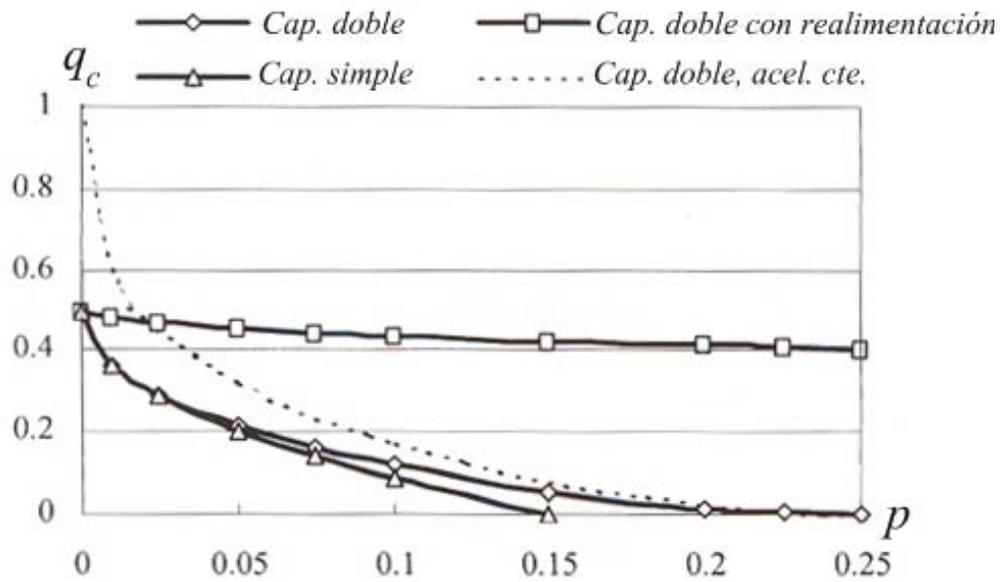


Figura 6.28: Dependencia de la aceleración crítica ( $q_c$ ) respecto del voltaje de alimentación ( $p$ ) para distintos arreglos en los capacitores y aceleración con forma de escalón.

$$q_c = \frac{1}{2} \tilde{x}_m - 2p \frac{\tilde{x}_m}{1 - \tilde{x}_m^2}$$

La aceleración crítica para una operación confiable es  $a_c = \omega_0^2 d_0 q_c$ . La dependencia de  $q_c$  respecto de  $p$  se muestra en la gráfica de la figura 6.28.

Para efectos de comparación, también se muestra la dependencia de  $q_c$  respecto de  $p$  para una aceleración constante. El valor de  $q_c$  para una aceleración con forma de escalón es menor que el presente para una aceleración constante por un factor de 0,5 a 0,7 para el mismo nivel de excitación.

### 6.3.3. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor configurado para el balanceo de fuerzas

En un dispositivo capacitivo inercial configurado para el balanceo de fuerzas se hace uso de un voltaje de realimentación  $V_r$ . El desplazamiento de la masa, requiere que el voltaje de realimentación  $V_r$  sea  $V_r = \beta V_1 \tilde{x}$ , donde  $\beta$  es el coeficiente de realimentación. Dado que  $V_r$  tiene un valor tope determinado por el circuito electrónico de realimentación  $V_s$ , este se ubica como  $V_r \leq V_s/2$ .

De acuerdo con la configuración mostrada en la figura 6.29, la fuerza electrostática aplicada a la masa será:

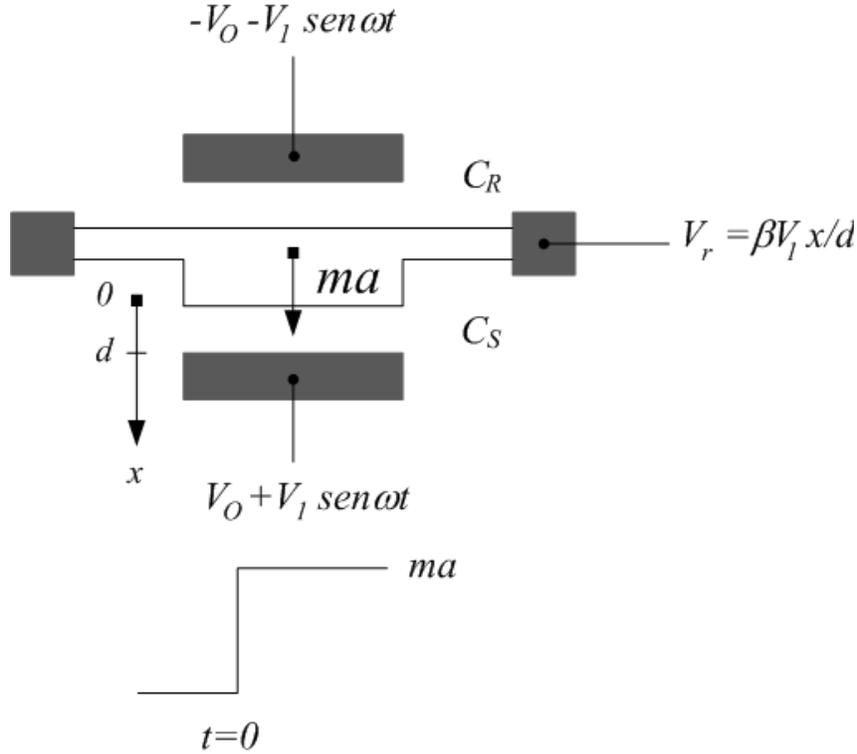


Figura 6.29: Esquema de la estructura básica de un sensor capacitivo diferencial (doble) con realimentación para el balanceo de fuerzas sometido a una aceleración con forma de escalón.

$$\bar{F}_e = \frac{2A\epsilon\epsilon_0 V_0^2}{d^2(1-\tilde{x}^2)^2} \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right) \tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) + (\alpha\beta\tilde{x})^2 \tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) \tilde{x}^2 \right]$$

Con una aceleración con forma de escalón, la energía cinética de la masa se obtiene a partir de:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{\tilde{x}}^2 &= \int (\bar{F}_e + ma - kx) dx \\ &= \int \left( \frac{2A\epsilon\epsilon_0}{(1-\tilde{x}^2)^2} \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right) V_0^2 \tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) V_0 + (\alpha\beta\tilde{x})^2 V_0^2 \tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) V_0 \tilde{x}^2 \right] + ma - kx \right) dx \end{aligned}$$

Dado que el voltaje de realimentación  $V_r$  iguala a  $\alpha\beta\tilde{x}V_0$  para pequeños desplazamientos y  $V_r = V_0$  (es decir  $\alpha\beta\tilde{x} = 1$ ) para  $\tilde{x} \geq 1/\alpha\beta$  debido a la restricción del circuito electrónico de realimentación, la ecuación debe analizarse en dos regiones y el valor crítico  $q_c$  deberá ser el mayor entre los dos máximos registrados, uno por región. La dependencia de  $q_c$  respecto de  $p$  para la condición de  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 5$  se muestra en la gráfica. Cuando esta curva de desempeño del sistema es comparada con las curvas de las configuraciones que no consideran realimentación, se aprecia que el rango de operación confiable del dispositivo mejora notablemente gracias a la realimentación electromecánica.

## 6.4. Efectos de la excitación en sistemas que reciben una acel. con forma de pulso

Debido al efecto combinado de la inercia, la fuerza elástica y la fuerza electrostática generada por la excitación eléctrica existen restricciones en el rango de operación confiable de un dispositivo capacitivo inercial que recibe una aceleración con forma de pulso. La masa del dispositivo puede colapsarse contra alguno de los electrodos (efecto de llegada) si el nivel o duración del pulso de aceleración es muy grande.

### 6.4.1. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor simple

De acuerdo con la ecuación 5.2, con el voltaje de excitación  $V$ , la energía potencial (referida al estado  $x = 0$ ) de un capacitor simple será:

$$E(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d-x} - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d} \right) V^2 = \frac{1}{2}kd^2 \left( \tilde{x}^2 - 2p \frac{\tilde{x}}{1-\tilde{x}} \right)$$

La condición para valorar los extremos de  $E(x)$  será:  $\tilde{x}(1-\tilde{x})^2 = p$ . Bajo la condición de  $p < 0,148$ , existen dos soluciones para  $x$  en el rango de 0 a  $d$ ; una posición equilibrada estable  $x_0$  correspondiente a un mínimo de energía y una posición equilibrada inestable  $x_1$  correspondiente a un máximo de energía. Generalmente tanto  $x_0$  como  $x_1$  se obtienen a través de cálculos numéricos.

La energía potencial del sistema en una posición equilibrada estable es  $E(x_0)$ . Si la energía desatada por el pulso de aceleración es mayor que la barrera potencial  $E(x_1) - E(x_0)$ , la masa puede sobrepasar la posición  $x_1$  y puede hacer contacto con el electrodo (efecto de llegada).

Si la amplitud del pulso de aceleración,  $a$ , es suficientemente grande y la duración del pulso,  $\Delta t$ , es suficientemente pequeña tal que la velocidad y el desplazamiento de la masa al final del pulso es pequeño, las condiciones iniciales pueden aproximarse como:

$$x_0 = a(\Delta t), \quad \dot{x}_0 = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \quad (6.28)$$

Por lo tanto, la condición para una operación confiable será  $\frac{1}{2}ma^2(\Delta t)^2 \leq E(\tilde{x}_1) - E(\tilde{x}_0)$ , o,  $a(\Delta t) \leq \omega_0 d \sqrt{(\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_0^2) - 2p \left( \frac{\tilde{x}_1}{1-\tilde{x}_1} - \frac{\tilde{x}_0}{1-\tilde{x}_0} \right)} \equiv \omega_0 d f_1(p)$ , donde  $f_1(p) = \sqrt{(\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_0^2) - 2p \left( \frac{\tilde{x}_1}{1-\tilde{x}_1} - \frac{\tilde{x}_0}{1-\tilde{x}_0} \right)}$ .

Los resultados muestran que el valor crítico de  $(a\Delta t)$  es proporcional al factor  $f_1(p)$  así como a  $d\omega_0$ . La dependencia de  $f_1(p)$  respecto de  $p$  está dada por la gráfica de la figura 6.30.

El análisis anterior es válido si la amplitud del pulso de aceleración es grande y la duración del pulso es breve de modo que las condiciones iniciales sean las marcadas por las ecuaciones 6.28. Esto significa que:

1. La inercia debe ser mucho mas grande que la fuerza elástica durante el tiempo que dura el pulso. Esto significa que  $ma \gg ka(\Delta t)^2/2$ . Por lo tanto, el cumplimiento de esta condición establece que  $\Delta t \ll \sqrt{2}/\omega_0$ .
2. La inercia debe ser mucho mayor que la fuerza de amortiguamiento al final de la duración del pulso. Esto significa que  $ma \gg ca(\Delta t)$  (donde  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento). El cumplimiento de esta condición significa que  $\Delta t \ll m/c = 1/2n$  o que  $\Delta t \ll Q/\omega_0$ .

Por lo tanto, la condición para una operación confiable será que  $\Delta t \ll \sqrt{2}/\omega_0$ , si  $Q$  es suficientemente grande.

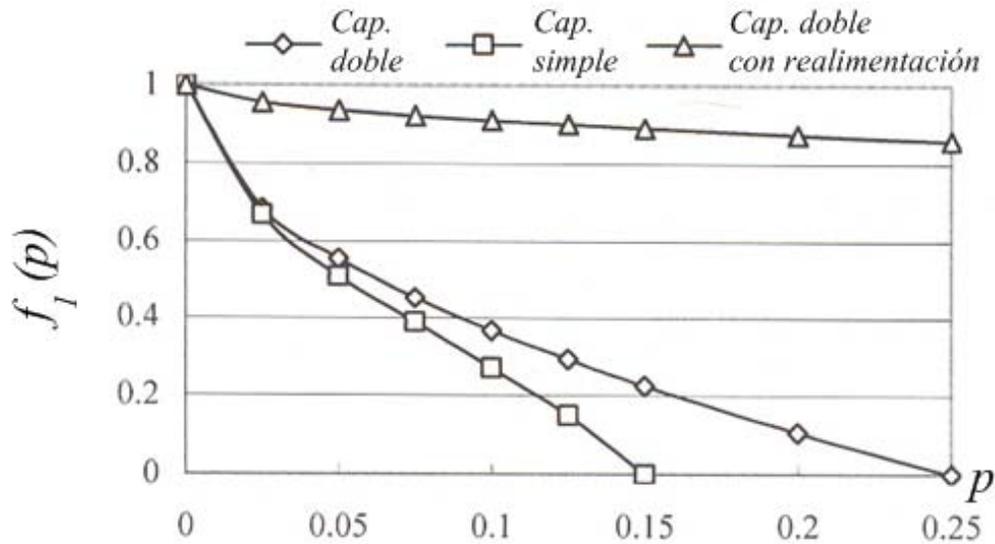


Figura 6.30: Dependencia de  $f(p)$  respecto de  $p$  para configuraciones en el capacitor variable con un sólo lado, diferencial y diferencial con realimentación.

#### 6.4.2. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor doble

De acuerdo con la ecuación 5.29 con el voltaje de excitación  $V$ , la energía potencial (referida al estado  $x = 0$ ) de un capacitor doble será:

$$E(\tilde{x}) = \frac{1}{2}kd^2\tilde{x}^2 - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0V^2\tilde{x}^2}{d(1-\tilde{x}^2)} \quad (6.29)$$

De la condición  $\delta E(x)/\delta x = 0$ , las posiciones para los extremos de  $E(x)$  serán:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_{2,3} = \pm \sqrt{1 - \sqrt{\frac{C_0V^2}{kd^2}}} = \pm \sqrt{1 - \sqrt{4p}}$$

Para una condición originalmente estable ( $V < \sqrt{kd^3/2A\varepsilon\varepsilon_0}$ ),  $x_1 = 0$  es la posición de mínima energía (posición equilibrada estable) en tanto que  $x_1$  y  $x_2$  son posiciones de máxima energía (posiciones equilibradas inestables).

Por lo tanto si la energía proporcionada por el pulso de aceleración es mayor que la barrera potencial entre  $x_2$  (o  $x_3$ ) y  $x_1$ , la masa irá más allá de la posición  $x_2$  (o  $x_3$ ) y hará contacto con alguno de los electrodos (efecto de llegada), provocando la falla del sistema. A partir de la ecuación 6.29 puede determinarse la barrera potencial:

$$E(x_2) = \frac{1}{2}kd^2(1 - \sqrt{4p})^2$$

Por lo tanto, la condición para una operación confiable del dispositivo capacitivo inercial será  $ma^2 (\Delta t)^2 / 2 = E(x_2)$ , o

$$a\Delta t = d\omega_0 (1 - 2\sqrt{p}) = d\omega_0 f_2(p)$$

dónde

$$f_2(p) = 1 - 2\sqrt{p}$$

La dependencia de  $f_2(p)$  respecto de  $p$  se muestra en la gráfica de la figura 6.30. Como podrá apreciarse en las curvas  $f_2(p)$  es consistentemente mayor que  $f_1(p)$ , por lo que la configuración de capacitor doble tiene un mayor rango de operación confiable que la configuración de capacitor simple.

### 6.4.3. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor configurado para el balanceo de fuerzas

Para un dispositivo capacitivo inercial con configuración para el balanceo de fuerzas la dependencia de la energía del sistema respecto del desplazamiento será:

$$E(\tilde{x}) = \frac{1}{2}kd^2\tilde{x}^2 - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{2d}\tilde{x} \left( \frac{V^2 - 2VV_r + V_r^2}{1 - \tilde{x}} - \frac{V^2 + 2VV_r + V_r^2}{1 + \tilde{x}} \right)$$

dónde  $V = V_0 + V_1 \sin \omega t$ ,  $V_1 = \alpha V_0$ ,  $V_r = \alpha\beta V_0 \tilde{x}$  para  $\tilde{x} < 1/\alpha\beta$  pero  $V_r = V_0$  para  $\tilde{x} \geq 1/\alpha\beta$ . Por simplicidad, se considera la condición  $\alpha\beta < 1$  tal que  $\tilde{x} < 1/\alpha\beta$ . Dado que  $\omega$  es mucho mayor que la frecuencia natural de oscilación de la estructura mecánica, se tiene que  $\overline{V^2} = V_0^2 + V_1^2/2$  y  $\overline{V} = V_0$ . Por lo tanto, la energía promedio será:

$$E(\tilde{x}) = \frac{1}{2}kd^2\tilde{x}^2 - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V_0^2}{d(1 - \tilde{x}^2)}\tilde{x}^2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha\beta \right) + \alpha^2\beta^2\tilde{x}^2 \right]$$

Más aún, para  $\tilde{x}$  pequeña, la ecuación anterior puede aproximarse como:

$$E(\tilde{x}) = \frac{1}{2}kd^2\tilde{x}^2 - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V_0^2}{d} \left( 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha\beta \right) \left( \frac{\tilde{x}^2}{1 - \tilde{x}^2} \right)$$

Si la energía se normaliza con la máxima energía potencial mecánica,  $kd^2/2$ , se tiene:

$$\overline{E}(\tilde{x}) = \frac{2E(\tilde{x})}{kd^2} = \tilde{x}^2 - 4p_0 \left( 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha\beta \right) \left( \frac{\tilde{x}^2}{1 - \tilde{x}^2} \right)$$

dónde  $p_0 = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V_0^2}{2kd^3} = p / \left( 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \right)$ . Debe aclararse que  $p_0$  es ligeramente más pequeña que  $p$ .

Los extremos de la función de energía pueden determinarse a partir de la condición  $\delta\overline{E}(\tilde{x})/\delta\tilde{x} = 0$ . Para lo cual será posible encontrar tres soluciones:

$$\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_{2,3} = \pm \sqrt{1 - \sqrt{4p_0(1 + \alpha^2/2 - 2\alpha\beta)}}$$

En concordancia con la condición para encontrar una solución real  $1 > 4p_0(1 + \alpha^2/2 - 2\alpha\beta) > 0$ ,  $\tilde{x}_1$  corresponde a un mínimo de energía y  $\tilde{x}_2$  y  $\tilde{x}_3$  corresponde a dos máximos de energía con el mismo valor. La diferencia de energía entre  $\tilde{x}_1$  y  $\tilde{x}_2$  (o  $\tilde{x}_3$ ) será:

$$\Delta E = E(\tilde{x}_2) - E(\tilde{x}_1) = \frac{1}{2}kd_0^2 \left( 1 - \sqrt{4p_0 \left( 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha\beta \right)} \right)^2$$

Por lo tanto, para un pulso de aceleración de amplitud  $a$  y duración  $\Delta t$ , la condición crítica para una operación confiable es  $ma^2(\Delta t)^2/2 = \Delta E$ , o,

$$a(\Delta t_c) = \omega_0 d_0 f_3(p, \alpha, \beta)$$

dónde  $f_3(p, \alpha, \beta) = 1 - \sqrt{4p_0(1 + \alpha^2/2 - 2\alpha\beta)}$ .

Para un conjunto de valores de  $p_0$  y  $\alpha$ , el máximo de la función  $f_3(p, \alpha, \beta)$  aparece en  $\beta = 1/\alpha$  y el valor máximo será  $f_3(p_0, \alpha, \beta) = 1 - \alpha\sqrt{2p_0}$ . El valor es muy cercano a la unidad para valores pequeños de  $p_0$  y  $\alpha$ . La dependencia de  $f_3(p, \alpha, \beta)$  respecto de  $p$  para  $\alpha = 0,2$  y  $\beta = 5$  se muestra en la gráfica de la figura 6.30.  $f_3(p, \alpha, \beta)$  es generalmente mucho mayor que  $f_1(p)$  y  $f_2(p)$ . Esto significa que el rango de operación confiable para un dispositivo capacitivo inercial se incrementa significativamente con el uso de una configuración de realimentación.

## **Parte III**

# **Diseño de sensores inerciales micromaquinados**



# Capítulo 7

## Antecedentes

### 7.1. Sensores inerciales

Los sensores físicos son el área de aplicación más grande para la tecnología MEMS, en particular el ramo de los sensores inerciales. Un sensor inercial es un dispositivo capaz de convertir o transducir, los efectos de una fuerza en una señal registrable, normalmente, de tipo eléctrico. Los efectos provocados por la fuerza y registrados por los sensores inerciales generalmente son la aceleración lineal, en el caso de los acelerómetros, y el movimiento angular, sobre uno o varios ejes, en el caso de los giroscopios. Dichos efectos físicos se transforman en una salida de voltaje linealmente proporcional y se cuida que el proceso de transducción tenga una sensibilidad específica en función de la aplicación en la que son incluidos.

Los grados de desempeño de este tipo de sensores se muestran en la siguiente tabla:

**Grados de desempeño para sensores inerciales [59]**

<b>Grado</b>	<b>Res. para acelerómetros</b>	<b>Res. para giroscopios</b>	<b>Costo USD</b>
Estratégico	$< 1 \mu\text{g}$	$< 0.0001 \text{ }^\circ/\text{h}$	$< 10$ millones por unidad
Navegación	$10 - 50 \mu\text{g}$	$0.001 - 0.01 \text{ }^\circ/\text{h}$	$< 100$ mil por unidad
Táctico	$0.1 - 1 \text{ mg}$	$1 - 10 \text{ }^\circ/\text{h}$	$< 30$ mil por unidad
Instrumentación	$10 - 100 \text{ mg}$	$30 - 100 \text{ }^\circ/\text{h}$	$250 - 2$ mil por unidad

En la tabla se aprecian los rangos de resolución y el costo para los cuatro grados de desempeño. Los rangos de desempeño van de instrumentos inerciales grado estratégico empleados en misiles y submarinos a instrumentos grado instrumental empleados en los sectores automotriz y de aparatos electrónicos de consumo general. Actualmente, los sensores inerciales basados en Sistemas Microelectromecánicos están disponibles comercialmente en los grados instrumental y táctico.

Es interesante analizar los factores que condujeron al desarrollo y masificación del uso de sensores inerciales micromaquinados, en particular de los acelerómetros, por tal razón se abordará un pequeño resumen de la historia de estos dispositivos.

Los sensores inerciales micromaquinados fueron sujetos de investigación intensa en las últimas décadas desde que L. Roylance [60] reportó el primer acelerómetro micromaquinado en 1979, fecha a partir de la cual muchos autores publicaron trabajos sobre distintos tipos de acelerómetros micromaquinados. Por su parte, el desarrollo de giroscopios micromaquinados en silicio tiene apenas 18 años, el primero de ellos basado en tecnología MEMS fue reportado por Draper Labs en 1991 [61].

El primer acelerómetro MEMS fue desarrollado en un proceso de micromaquinado de volumen y aprovechaba las propiedades piezoresistivas de los materiales semiconductores. Pero no fue sino hasta finales de la década de 1980 que se incrementó el interés por los acelerómetros micromaquinados y se empezaron a utilizar

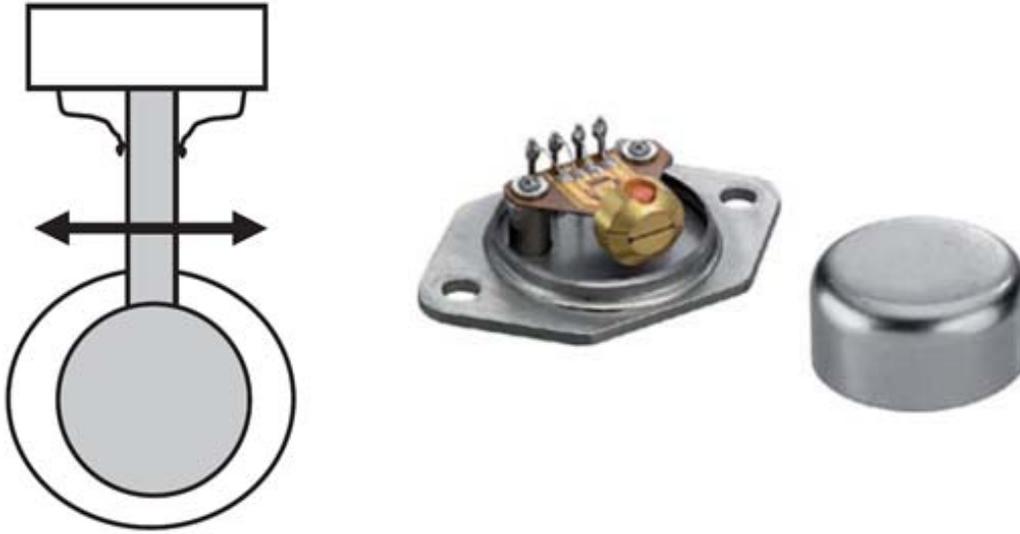


Figura 7.1: Esquema y fotografía del acelerómetro pendular diseñado y fabricado por la empresa Bosch.

varios mecanismos de registro, incluyendo piezoresistividad, generación piezoeléctrica, variación de capacitancia y efecto túnel, además de sensores térmicos y ópticos; y se experimentó con técnicas de micromaquinado de superficie y de volumen.

La necesidad que detonó el desarrollo de los acelerómetros micromaquinados fue la implantación de los dispositivos de seguridad para conductores y pasajeros en la industria automotriz (activación de las bolsas de aire y ajuste de los cinturones de seguridad) lo que demandó mantener costos bajos y mejoras en el desempeño y confiabilidad respecto de los acelerómetros mecánicos tradicionales ([62] y [63]). A mediados de la década de 1990, muchos acelerómetros micromaquinados comerciales fueron introducidos en el mercado principalmente para usos en el sector automotriz. Desde el inicio del nuevo siglo, el uso de acelerómetros micromaquinados se ha expandido rápidamente en diferentes campos tales como los aparatos electrónicos de consumo general, las consolas de videojuegos y los dispositivos biomédicos.

Antes de los acelerómetros micromaquinados, los mecanismos típicamente usados para medir la aceleración consistían de péndulos y extensímetros ([64] y [65]). Por ejemplo, uno de los primeros acelerómetros de la empresa Bosch usaba un resorte hecho a partir de una aleación de berilio-cobre, un extensímetro y una masa suspendida en aceite para su amortiguamiento (veáse la figura 7.1). Este acelerómetro, fue empleado en las primeras aplicaciones automotrices para medir la aceleración negativa y registrar un impacto que activara los sistemas de seguridad en los autos (bolsas de aire).

Los extensímetros con alta sensibilidad, creados a partir de silicio monocristalino dopado, fueron el mecanismo de transducción empleado en diversos diseños de acelerómetros en las últimas décadas [66]. Dado que el silicio monocristalino dopado es un material ampliamente disponible en la industria electrónica para la fabricación de circuitos integrados, se le ha explotado como material base en la construcción de acelerómetros. Kulite utilizó estematerial en algunos de los primeros acelerómetros piezoresistivos ([67]). El modelo mecánico de viga volada con carga en su extremo libre y un extensímetro en su extremo anclado fue empleado en diferentes tamaños y configuraciones para crear acelerómetros. La empresa SensorNor creó un acelerómetro que emplea un extensímetro en la parte superior y otro en la parte inferior de la viga volada de silicio y crea una conexión eléctrica mediante una aleación de oro y estaño. La viga estaba anclada en su base y una masa adicional fue colocada en su extremo libre. Las mejoras al diseño y encapsulado

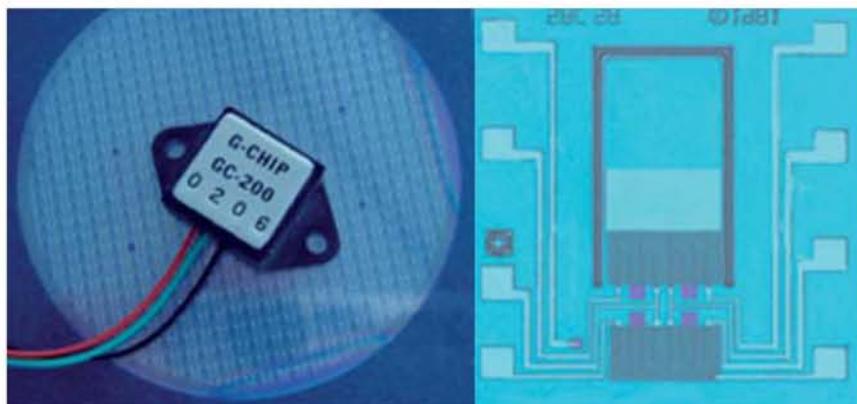


Figura 7.2: Fotografía del llamado G-Chip desarrollado por la empresa Insouth Microsystems.

derivaron en una estructura micromaquinada y un encapsulado plástico lleno de aceite que fue llevado a una escala de producción masiva a principios de la década de 1990 [66]. El acelerómetro basado en una viga volada reportado por L. Roylance [60] empleaba una masa de silicio creada mediante socavado (grabado) anisotrópico desde la parte inferior de la oblea; la oblea fue tratada con difusión de Boro y metalización de oro en la parte superior para crear una oblea monolítica.

El enfoque para la creación de Sistemas Microelectromecánicos monolíticos fue desarrollado posteriormente en un producto comercial de Insouth Microsystems en 1979, empleando metalización de aluminio y un puente completo piezoresistivo que fue conocido como el Chip G. El acelerómetro de silicio con socavado anisotrópico por ambos lados fue montado en un encapsulado LCC (Leadless Chip Carrier) y combinado con la circuitería de amplificación y compensación eléctrica, como se muestra en la figura 7.2.

Los acelerómetros piezoresistivos anisotrópicamente socavados diseñados y fabricados por Delphi, IC Sensors, Nova Sensors, Denso, Bosch y Endevco, entre otros, estaban dirigidos a los sectores automotriz y de instrumentación en los primeros años de la década de 1990 [66]. Debido a la demanda para aplicaciones automotrices, especialmente para los sistemas de bolsas de aire, muchas empresas entraron al campo de los acelerómetros con diseños innovadores. A finales de la década de 1980 y principios de 1990, el uso de polisilicio como material para la creación de todos los elementos mecánicos de un acelerómetro (resorte y masa) fue investigado por múltiples grupos universitarios de investigación, tales como: la Universidad de California en Berkeley ([68] y [69]), la Universidad de Wisconsin ([70]) y la Universidad de Berlín ([71]). El polisilicio es un material comúnmente empleado en el proceso CMOS (Complementary Metal Oxide Semiconductor) para las compuertas de los transistores y por lo tanto es nativo del proceso de fabricación de circuitos integrados. Los primeros trabajos que aprovecharon este material para la creación de los elementos mecánicos de un acelerómetro fueron desarrollados por Analog Devices Inc. a finales de la década de 1980. El resultado de su trabajo fue el ADXL50, primer acelerómetro que integró el transductor electromecánico micromaquinado en un proceso superficial y la electrónica de control y acondicionamiento de señales. En la figura 7.3 se muestra un acelerómetro ADXL50. El acelerómetro de Analog Devices emplea electrodos intercalados para formar un capacitor diferencial (*comb fingers*) que mide los desplazamientos de la masa sostenida con resortes y a la cual están acoplados la tercera parte de los electrodos. Al desplazarse la masa, se desplazan los electrodos y se genera una variación en la capacitancia. Este enfoque en el desarrollo del dispositivo hizo posible agregar circuitos con funciones adicionales y múltiples ejes de medición a partir de pequeños cambios en la plantilla de diseño mecánico y electrónico manteniendo el proceso común de fabricación.

El registro del desplazamiento de una estructura de polisilicio mediante variaciones en la capacitancia fue desarrollado e introducido por Motorola en los primeros años de la década de 1990 [72]. Esta estructura desarrollada por Motorola empleó varias capas de silicio policristalino, una celda G (como la mostrada en la figura 7.4) y estaba encapsulada junto con la circuitería de control y tratamiento de las señales eléctricas.

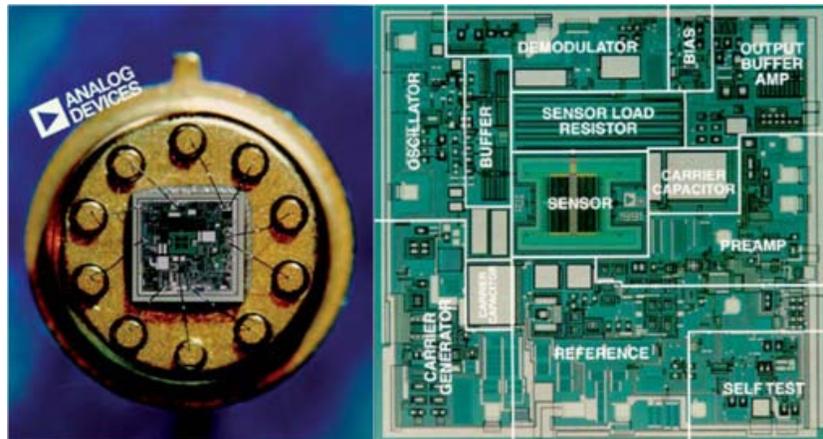


Figura 7.3: Fotografía del acelerómetro ADXL50 desarrollado y comercializado por la empresa Analog Devices Inc.

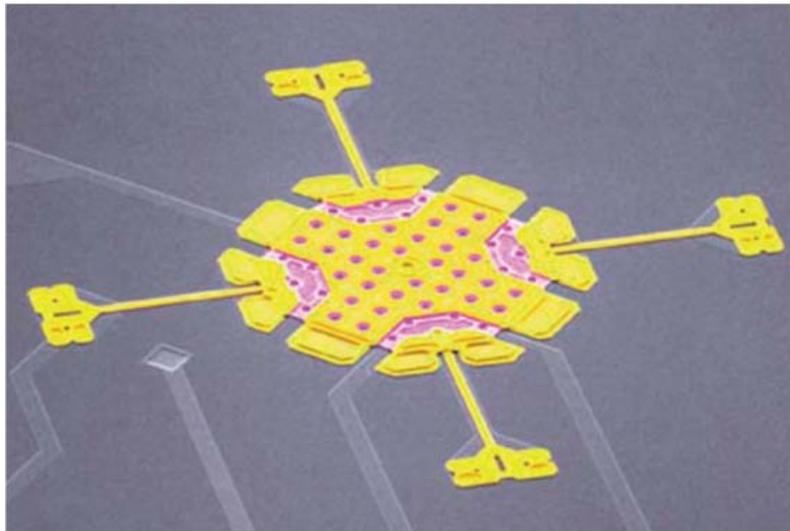


Figura 7.4: Fotografía retocada de una celda G desarrollada por Motorola.

Los acelerómetros capacitivos fabricados en procesos de micromaquinado de volumen fueron desarrollados también en los primeros años de la década de 1990 por diversas empresas y universidades, entre ellas: Centre Suisse d'Electronique et de Microtechnique [73], Litton [74], Applied MEMS (a finales de la década de 1990) y la Universidad de Michigan [75]. En la siguiente tabla se muestra un resumen de los acelerómetros desarrollados mediante procesos de micromaquinado de volumen.

**Resumen de acelerómetros capacitivos fabricados en procesos de micromaquinado de volumen**

<b>Desarrollador</b>	<b>Año</b>	<b>Estructura y proceso usado</b>	<b>Umbral mínimo de ruido</b>
F. Rudolf	1990	Multicapas de cristal de silicio	$1 \mu\text{g Hz}^{-1/2}$
W. Henrion	1990	Multicapas de cristal de silicio Grabado húmedo en múltiples pasos	$1 \mu\text{g Hz}^{-1/2}$
K. Warren	1994	Separación por implantación de oxígeno	N. D.
J. Bernstein	1999	Fusión de capas de cristal de silicio Doble cara Combinación de grabado en seco y húmedo Detención automática de grabado húmedo	$1 \mu\text{g Hz}^{-1/2}$
H. Kulah	2000	Combinación de micromaquinado de volumen y de superficie Liberación húmeda	$0.23 \mu\text{g Hz}^{-1/2}$
J. Chae	2002	Silicio sobre vidrio Fusión de capas de cristal de silicio Silicio refinado por planarización química y mecánica Liberación en seco	$100 \mu\text{g Hz}^{-1/2}$
N. Yazdi	2003	Combinación de micromaquinado de volumen y de superficie Liberación húmeda	$0.18 \mu\text{g Hz}^{-1/2}$
Applied MEMS	- - -	Micromaquinado de volumen Fusión de capas	$0.25 \mu\text{g Hz}^{-1/2}$

El diseño de un acelerómetro chapado en metal fue creado por Silicon Designs a principio de la década de 1980 empleando una masa de prueba fuera de balance y un resorte de torsión para registrar la aceleración mediante cambios en la capacitancia de un arreglo diferencial [76]. Ford convirtió este diseño en una estructura mecánica de polisilicio y la incluyó por un tiempo en sus automóviles como sensor de disparo de las bolsas de seguridad para padajeros. Los diseños de acelerómetros capacitivos se hicieron populares debido a que sus mediciones no se ven afectadas de forma significativa por variaciones en la temperatura a diferencia de lo sucedido en los acelerómetros basados en elementos piezoresistivos y porque permite aplicar un diferencial de potencial sobre las placas del capacitor (representadas por los electrodos intercalados o por las placas suspendidas paralelas) para realizar un procedimiento de auto-prueba [77].

Las condiciones bajo las que operarán los sensores inerciales lineales y angulares definen la elección de la tecnología de micromaquinado, el diseño del transductor y la arquitectura del sistema. La mayoría de los mecanismos de registro y tecnologías de micromaquinado han sido aplicados en el diseño y fabricación de acelerómetros y giroscopios, por supuesto, las características de cada tecnología han influido en el diseño del transductor, del sensor y del sistema completo.

Este capítulo presentará una breve discusión sobre los parámetros de diseño característicos de un acelerómetro micromaquinado. Posteriormente abordará una propuesta de diseño en el proceso Polymumps y simulará mediante diversas técnicas su respuesta y comportamiento. Se presentará una propuesta de control en lazo cerrado para el acelerómetro y se expondrán las conclusiones. Finalmente, se esbozará el rumbo del trabajo futuro.

## 7.2. Aplicaciones

Tres características que frecuentemente influyen sobre las áreas de aplicación de los dispositivos micromaquinados son: volumen del encapsulado, costo del sistema y desempeño. Frecuentemente estas tres características no pueden satisfacerse al cien por ciento eligiendo una sola tecnología. Normalmente el volumen de encapsulado o tamaño de todo el sistema es un requisito fácil de cumplir para los sensores inerciales micromaquinados frente a sus contrapartes macroscópicas. Las tecnologías de micromaquinado son capaces de reducir el transductor electromecánico y toda su circuitería de control y acondicionamiento de señal a un sólo chip o dos en un encapsulado plástico o cerámico. El costo del sistema es también un requisito importante para los sensores inerciales micromaquinados. Debido a su relación natal con la industria de la microelectrónica, los sensores micromaquinados pueden ser fabricados por lotes, compartiendo el costo del proceso de fabricación entre grandes volúmenes de sensores, reduciendo significativamente las restricciones económicas que representa la implantación de un proceso de fabricación basado en semiconductores. En tanto que muchos procesos individuales pueden ser significativamente más caros que sus contrapartes macroscópicas, debido a que los beneficios de la escala de producción pueden ser aplicados, el impacto se reduce significativamente.

Mejorar el desempeño de un dispositivo, con suficientes posibilidades de éxito, también requiere de mejoras en los costos de producción por unidad. Uno de los factores en la mejoría de la relación costo/desempeño es un mejor aprovechamiento de la superficie de fabricación (dado). Al maximizar la densidad por unidad de área en el proceso de fabricación y en el diseño del dispositivo, se minimiza el área necesaria en el dado. Los requisitos para los sensores actualmente empleados en los sistemas de seguridad automotriz permitieron la incorporación de tecnologías de micromaquinado de superficie desde el inicio del uso de estas características en los automóviles. Las tecnologías de micromaquinado de superficie hacen uso de un proceso de depósito sucesivo de capas de sacrificio y estructurales para producir un dispositivo de silicio policristalino cuyo espesor estructural regularmente es menor a los tres micrómetros. Estas tecnologías han sido exitosas en función de las especificaciones de diseño actuales, pero ya han empezado a ser reemplazadas por otras tecnologías que han demostrado flexibilidad en su aplicación y mejoras importantes en el aprovechamiento del área del dado.

Al integrarse a un sistema completo de control, los sensores micromaquinados pueden ver afectada su sensibilidad y rango de operación con mayor facilidad que sus contrapartes macroscópicas. Curiosamente, las metodologías de tratamiento de señales usadas para los sensores inerciales macroscópicos pueden emplearse para resolver estas complicaciones en los sensores micromaquinados. Los compromisos entre tamaño del sistema, costo y desempeño están normalmente imbricados entre sí. Las tecnologías de micromaquinado han sido exitosas en aquellas aplicaciones en las que el tamaño y el costo tienen mayor preponderancia y la resolución mantiene exigencias mínimas, tal es el caso de los usos en automóviles.

Las aplicaciones en el sector automotriz motivaron la mayoría de los esfuerzos para el desarrollo de la tecnología necesaria en la creación de sensores inerciales micromaquinados. Los acelerómetros representan uno de los mayores porcentajes de dispositivos micromaquinados; su uso en los mecanismos de disparo de las bolsas de aire y en el ajuste automático de los cinturones de seguridad impulsó la demanda de grandes volúmenes de acelerómetros de bajo costo y alto desempeño. Inicialmente reemplazaron al interruptor mecánico que podía detectar una aceleración negativa y activar las bolsas que hasta ese momento dominaba el mercado. El acelerómetro micromaquinado proporcionó mayor información a un precio significativamente bajo, además, este dispositivo podía emplearse en todos los sistemas y vehículos sin importar su marca con apenas unos cambios en el software de control. La adición de más bolsas de aire en los automóviles (para los pasajeros y las dedicadas a los impactos laterales) hizo necesaria la colocación de una mayor cantidad de acelerómetros

por vehículo, lo cual, a su vez, impulso aún más la demanda de estos sensores inerciales, hasta niveles de crecimiento por encima del 20 % anual en la demanda durante la última década.

Los dispositivos diseñados para los sistemas de bolsas de aire, requieren típicamente de sensibilidades de 20 a 100 gravedades para las bolsas de aire contra impactos frontales y de 100 a 250 gravedades para las bolsas de aire contra impactos laterales (donde una gravedad representa la aceleración debida a la gravedad de la tierra). Las regulaciones exigen actualmente mayores márgenes de seguridad en los vehículos automotores de uso general, razón por la que los sistemas que aseguran a los pasajeros han aumentado las cantidades requeridas de sensores para cumplir con la normatividad y hacer más inteligente la respuesta del sistema a las condiciones de un eventual impacto. Entre las condiciones de un impacto que son deseables conocer se encuentran: la localización de la zona de impacto, la posición y peso de los ocupantes, el uso o no de los cinturones de seguridad y la severidad del impacto. Los sistemas de seguridad estándar, en el futuro cercano, emplearán muchos transductores multieje distribuidos alrededor del vehículo para determinar si una bolsa de aire debe inflarse y con que rapidez debe hacerlo. Aunque en la actualidad ya se comercializan algunos vehículos de lujo con alguna de esta funcionalidad la complejidad y costo de los sistemas los hace prohibitivos para su incorporación en los vehículos más económicos, en unos pocos años, muchos de estos sistemas se fusionarán en uno sólo, con el fin de incrementar la capacidad de control del vehículo, acotar su complejidad y abaratar su costo.

Por otra parte, también con fines de seguridad se ha incrementado la capacidad de control sobre la dinámica de los vehículos en los últimos años. La mezcla funcional de suspensiones activas, controles de tracción, sistemas de rodamiento, acelerómetros de sensibilidad media, sensores de giro y de inclinación se utiliza dentro del motor, en la dirección y en el sistema antibloqueo de frenos tiene como propósito devolver el control del vehículo al conductor en una situación en la que típicamente lo perdería. El uso de sensores micromaquinados en estas tareas ha sido posible gracias a la mejora en la resolución de los dispositivos. Así, compañías como VTI, LETI, BOSCH, Denso y Analog Devices han cubierto este subsector del gran mercado automotriz con el diseño y fabricación de acelerómetros cuyas sensibilidades se encuentran en el rango de unas cuantas fracciones de gravedad a diez gravedades.

Las aplicaciones en el sector automotriz para los sensores inerciales se enlistan en la siguiente tabla.

#### Aplicaciones de sensores inerciales en el automóvil [79]

Característica	Rango	Aplicaciones
	$\pm 1 g$	Anti-bloque de frenos, control de tracción y realidad virtual
	$\pm 2 g$	Movimiento vertical de cuerpos
	$\pm 50 g$	Activación de bolsas de aire frontales y movimiento de ruedas
	$\pm 100 - 250 g$	Activación de bolsas de aire laterales
	$\pm 100 - 250 \text{ }^\circ/\text{s}$	Control de seguridad y estabilidad (guiñada y alabeo)
Resolución	$< 0.1 \%$	Todas las aplicaciones
Linealidad	$< 1 \%$	Todas las aplicaciones
Ruido de salida	$< 0.005 - 0.05 \%$ $\text{Hz}^{-1/2}$	Todas las aplicaciones
Corrimiento por deriva	$< 1 g/\text{s}$	Acelerómetro
	$< 0.1 \text{ }^\circ/\text{s}^2$	Giroscopio
Rango de temperatura	-40 a 85 $^\circ\text{C}$	Condiciones operacionales
	-55 a 125 $^\circ\text{C}$	Condiciones de almacenamiento
Sensibilidad	$< 1$ a 3 %	Dependiente de la aplicación
Respuesta en frecuencia	DC a 1 - 5 kHz	Activación de las bolsas de aire
	DC a 10 - 100 Hz	Giroscopios y acelerómetros de 1 a 2 gravedades
Sobrevivencia ante impacto	$> 500 g$	Energizados todos los ejes de medición
	$> 1500 g$	Sin energizar los ejes de medición

Los sensores inerciales angulares asociados con las mediciones de variación en los ángulos de navegación de distintos tipos de vehículos, requieren de una sensibilidad significativamente mayor que la de los acelerómetros análogos. Tales dispositivos muestran resoluciones en el rango que va de unas cuantas micro-gravedades hasta las mili-gravedades con el fin de registrar mediciones confiables de rotaciones con velocidades angulares menores a un grado por minuto. Las consideraciones de diseño para tales dispositivos son satisfechas con las mismas tecnologías de fabricación de micromaquinado de superficie que las empleadas en acelerómetros pero agregan una cantidad significativa de complejidad para alcanzar dispositivos estables y confiables.

La introducción de acelerómetros de una pocas gravedades para el sector automotriz, abrió un nuevo y amplio rango de aplicaciones en el campo de los aparatos electrónicos de consumo general. Acelerómetros capaces de medir inclinaciones y movimiento se han empleado en controles inalámbricos para computadoras y consolas de videojuegos. También se han abierto aplicaciones en el sector deportivo con sistemas que permiten a los entrenadores de golf, tenis y béisbol usar acelerómetros para registrar y analizar los movimientos de sus jugadores. Una aplicación muy popular en computadoras portátiles es la protección de los discos duros y sus datos frente a un impacto. Con la disponibilidad de acelerómetros de tres ejes con precios por debajo de los dos dólares, la viabilidad de agregar detección de movimiento a un amplio rango de dispositivos portátiles se ha hecho una realidad. Teléfonos celulares, con la habilidad de reconocer movimientos y realizar análisis basados en la situación para adecuar la orientación de las imágenes desplegadas en pantalla o poner a salvo sus partes móviles frente a un impacto inminente representan un mercado potencial de 700 millones de dispositivos al año. Lo cual combinado con las aplicaciones en el sector automotriz y otros sectores, representan un mercado para los acelerómetros con expectativas de crecimiento cercanas a mil millones de dispositivos por año.

Quedó atrás la época en que los sensores inerciales estaban restringidos para aplicaciones en las cuales el costo de dichos sensores era un factor secundario, como son los casos de los sistemas militares y aeroespaciales. Con la consolidación del micromaquinado como tecnología estándar de fabricación de sensores inerciales en el rango de la baja y mediana resolución, sobrevino la producción a un costo muy bajo y se abrieron campos de aplicación fuera de los sectores automotriz y del transporte, antes inimaginables: monitoreo de pacientes, estabilización de cámaras fotográficas y de video, la extensión de las aplicaciones militares hacía la guía autónoma de vehículos y proyectiles y su uso en distintos tipos de juguetes inteligentes. Muchas otras aplicaciones están en fase de desarrollo o en sus primeras versiones comerciales, tal es el caso de:

- Equipo para realidad virtual e inmersión (Head Mounted Display y Datagloves).
- Sistemas de respaldo para GPS.
- Monitoreo de impactos durante el embalado de equipo delicado.
- Dispositivos de entrada para computadoras basados en detección de movimiento.
- Sistemas de control de movimiento para robots industriales.
- Sistemas de navegación para vehículos a escala.
- Sistemas de control para robots móviles y humanoides.

Los sensores micromaquinados siguen siendo una tecnología con un enorme potencial comercial. Los requisitos para muchas de las nuevas aplicaciones siguen siendo los mismos que los planteados para la industria automotriz: que los sensores sean baratos, que puedan colocarse en un pequeño volumen y que su consumo de potencia sea muy bajo. Los dispositivos micromaquinados deberán mejorar de forma continua su cumplimiento de estos requisitos para mantener el dominio del voluminoso mercado de sensores inerciales para aplicaciones civiles y de propósito general.

La siguiente tabla muestra algunas aplicaciones actuales y futuras para acelerómetros y giroscopios, respectivamente. Los valores típicos de ancho de banda, resolución y rango dinámico son únicamente referencias.

**Aplicaciones típicas para acelerómetros micromaquinados [80]**

<b>Aplicación</b>	<b>Ancho de banda</b>	<b>Resolución</b>	<b>Rango dinámico</b>
Disparo de bolsas de aire	0 - 0.5 kHz	< 500 mg	± 250 g
Sistemas de control activo de estabilidad	0 - 0.5 kHz	< 10 mg	± 2 g
Suspensión activa	0 - 1 kHz	< 10 mg	100 g
Navegación inercial	0 - 100 Hz	< 5 $\mu$ g	± 1 g
Embalado de bienes frágiles	0 - 1 kHz	< 100 mg	± 1 kg
Medición de microgravedad en el espacio	0 - 10 Hz	< 1 $\mu$ g	± 1 g
Monitoreo de pacientes	0 - 100 Hz	< 10 mg	± 100 g
Monitoreo de vibraciones	1 - 100 kHz	< 100 mg	± 10 kg
Realidad virtual	0 - 100 Hz	< 1 mg	± 10 g
Guía inteligente de proyectiles	10 Hz a 100 kHz	1 g	± 100 kg

Cómo puede apreciarse en la tabla, los requisitos típicos de desempeño para cada aplicación son considerablemente diferentes, lo que implica que en el futuro inmediato será imposible utilizar un sólo tipo de sensor inercial en todas las áreas de aplicación; razón por la que los sensores inerciales seguirán siendo diseñados y fabricados para aplicaciones específicas, aumentando la variedad en los tipos de sensor disponibles en el mercado.



## Capítulo 8

# Conceptos básicos de los acelerómetros

### 8.1. Descripción general

Se iniciará por la definición de aceleración como cantidad física que resulta de interés registrar. La aceleración es una cantidad física que indica el ritmo o tasa con que aumenta o disminuye la velocidad de un móvil en función del tiempo. Su definición completa requiere señalar dirección y magnitud, razón por la que normalmente se representa mediante un vector. Sus dimensiones son longitud entre tiempo al cuadrado y sus unidades, según el sistema internacional, son  $m/s^2$ .

Los acelerómetros típicamente consisten de cuatro componentes: una masa móvil, llamada masa de prueba o masa sísmica; una suspensión formada por uno o varios soportes y resortes elásticos; un amortiguador; y un mecanismo mediante el cual se registra el desplazamiento de la masa móvil. La masa se utiliza para generar una fuerza debida a la aceleración o desaceleración del cuerpo sobre el que está montado el acelerómetro. La suspensión sujeta la masa móvil y cumple funciones de soporte rígido (de forma que impide el desplazamiento de la masa en las direcciones  $y$  y  $z$ , por ejemplo) y de resorte (de modo que regresa la masa a su posición original en la dirección  $x$ , una vez que la aceleración desaparece). El amortiguador es generalmente el volumen de aire, o ambiente controlado, capturado dentro del encapsulado o cavidad que rodea al dispositivo y se diseña para controlar el comportamiento de la masa móvil con el fin de obtener características favorables en la respuesta en frecuencia. El desplazamiento de la masa se transforma en una señal eléctrica de salida gracias al mecanismo de registro. Los acelerómetros lineales son clasificados en planares (registran sobre el eje  $x$  o  $y$ ) y fuera de plano (registran sobre el eje  $z$ ). La elección de ejes de registro se determina principalmente por las características de la aplicación. Actualmente existen prototipos de acelerómetros con capacidad de registro en los tres ejes cartesianos dentro de un mismo encapsulado.

Para analizar la operación del acelerómetro será necesario iniciar con la llamada segunda Ley del Movimiento de Newton, la cual mediante la ecuación 8.1 expresa la relación entre fuerza, aceleración y masa. Siendo las dos primeras cantidades vectoriales.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (8.1)$$

A partir de esta ecuación es fácil comprender que la aceleración de un cuerpo (masa) se puede determinar midiendo la fuerza que actúa sobre dicho cuerpo. Un cuerpo (masa) sobre la superficie terrestre experimenta una aceleración de  $9,8 m/s^2$  o  $1 g$  si se le deja en caída libre. El cambio en la velocidad del cuerpo (masa) como función del tiempo es la aceleración que dicho cuerpo experimenta y de acuerdo con lo señalado por la

ecuación 8.1 se requiere de una fuerza actuando sobre él (masa) para crear los cambios de velocidad. Dado que no tiene significado hablar de la masa como un escalar negativo, es evidente que la fuerza y la aceleración como cantidades vectoriales tienen la misma dirección y sentido.

Dado que los acelerómetros son dispositivos que determinan la fuerza necesaria para crear un cambio de velocidad, al mantener la masa constante y acelerar el cuerpo o estructura sobre la que se encuentra montado el acelerómetro, el resorte que conecta la masa con la estructura es el medio de transmisión mecánica de la aceleración; el cual al no ser un cuerpo rígido se ve afectado por la inercia de la masa (se opone al movimiento) y cambia su longitud. El resorte se elonga o contrae como consecuencia del sentido de la aceleración (dado que el movimiento de la masa se encuentra restringido a uno de tipo rectilíneo) y dicha deformación medida en unidades de longitud es proporcional a la fuerza que la provoca. Así, la relación entre el desplazamiento del resorte y la fuerza que actúa directa o indirectamente sobre él se expresa mediante la ecuación 8.2.

$$\bar{F} = k\bar{x} \quad (8.2)$$

dónde  $k$  es una constante escalar de proporcionalidad entre la fuerza y el desplazamiento y se le conoce como constante del resorte. La medición del desplazamiento de la masa móvil respecto de la estructura de montaje es en realidad una cuantificación directa de la aceleración.

Cuando no existe fuerza alguna de fricción o amortiguamiento que se oponga a la fuerza que provoca la aceleración, el desplazamiento de la masa móvil se presenta en proporción directa a dicha aceleración. Cuando la velocidad y el sentido de movimiento se invierten, la tendencia del cuerpo a mantener su estado provoca un sobrevuelo en el desplazamiento y agrega una fuerza actuante sobre el resorte en oposición a la fuerza que genera la aceleración. Si este movimiento continúa de forma armónica con una frecuencia de oscilación tal que se agrega una fuerza sobre el resorte en oposición a la aceleración, cada vez que se invierte el sentido de movimiento, y además, no existen fuerzas de amortiguamiento o fricción, se presentará un desplazamiento superior al generado por la fuerza que induce la aceleración, alrededor de la frecuencia natural de resonancia del sistema masa-resorte.

El desplazamiento en la frecuencia natural se maximiza 90 grados desfasado respecto de la aceleración del cuerpo o estructura de montaje. De cualquier forma, cómo ya se ha mencionado, los sistemas masa-resorte en la mayoría de las configuraciones de los acelerómetros encuentran fuerzas de fricción o de arrastre en un medio viscoso (aire) que actúan sobre la masa móvil y que en consecuencia amortiguan las oscilaciones. Estas fuerzas de amortiguamiento generan desplazamientos no-lineales y, cómo se verá más adelante, afectan el ancho de banda y los rangos de frecuencias útiles del sistema. De este modo, cuando se habla de un acelerómetro en realidad se habla de un sistema masa-resorte-amortiguador cuya ecuación general en el dominio del tiempo se expresa como:

$$ma = m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx \quad (8.3)$$

lo que arroja la siguiente función de transferencia para dicho sistema:

$$H(s) = \frac{X(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (8.4)$$

dónde  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento de la masa móvil. Es importante señalar que la configuración mecánica presente en el acelerómetro fue estudiada en la sección 5 del capítulo 3 de este trabajo. En dicha sección se abordaron la respuesta en frecuencia, la frecuencia de resonancia y el factor de calidad de este tipo de sistemas.

Si se tienen en cuenta las definiciones de  $\omega_0^2$  y  $Q$  expresadas mediante las ecuaciones 3.109 y 3.122, respectivamente, y se atiende la discusión de la subsección 3.5.4, la ecuación 8.4 puede expresarse del siguiente modo:

$$H(s) = \frac{X(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

A partir de la ecuación 3.127 (para sistemas con amortiguamiento ligero) es posible obtener la sensibilidad mecánica (desplazamiento respecto de la aceleración) para acelerómetros operando a frecuencias mucho menores que su frecuencia de resonancia:

$$S_{mec} = \frac{m}{k} = \frac{1}{\omega_0^2} \quad (8.5)$$

Dicha ecuación muestra el compromiso existente en un sistema masa-resorte-amortiguador entre la sensibilidad mecánica y la frecuencia natural de oscilación (la cual puede ser coincidente o muy cercana a la frecuencia de resonancia en sistemas sin amortiguamiento o con muy baja disipación). Este compromiso entre sensibilidad mecánica y frecuencia natural de oscilación puede superarse colocando un sistema de control en lazo cerrado para la realimentación de fuerza sobre el elemento mecánico de registro como se ha señalado en la sección 6.1.4. Para una discusión más detallada sobre la sensibilidad de un sistema masa-resorte-amortiguador consúltese la subsección *Oscilación provocada por una vibración* del capítulo 3.

Es importante señalar que las frecuencias de resonancia de los acelerómetros basados en Sistemas Microelectromecánicos se encuentran en el rango de 100 a 20 mil  $Hz$  y los factores de calidad pueden ser desde inferiores a la unidad para acelerómetros sobreamortiguados hasta superiores a 100 para acelerómetros subamortiguados.

La presencia de fuerzas de amortiguamiento debidas al desplazamiento de la masa móvil en un medio viscoso completan el sistema masa-resorte-amortiguador. El amortiguamiento tienen dos fuentes o modalidades: la primera debida al deslizamiento de la masa móvil sobre las delgadas capas de aire atrapadas entre ella y la placa de semiconductor (oblea) y la segunda debida a la compresión del aire atrapado entre los perfiles de los electrodos (peine electrostático). Sin embargo, el coeficiente de amortiguamiento no puede considerarse como absolutamente invariable, pues depende en buena medida del diseño mecánico del acelerómetro y se incrementa con la deflexión vertical de los soportes de la masa móvil y con la frecuencia de oscilación de la masa.

Dado que la respuesta dinámica del sistema se ve afectada considerablemente por el amortiguamiento, debe cuidarse su magnitud en relación con otros parámetros de diseño. Por ejemplo, para un ancho de banda máximo, el elemento mecánico de registro debe estar críticamente amortiguado; y se puede mostrar que para  $c = 2m\omega_0$  es el caso.

Finalmente, la cuantificación de la aceleración se hace mediante el registro del desplazamiento de la masa móvil (en relación con el cuerpo o estructura sobre la que está montado el acelerómetro) y su transformación en una señal eléctrica a través de distintos mecanismos de transducción; los más comunes son: un puente piezoresistivo (que aprovecha la variación de la resistencia eléctrica en materiales semiconductores ante la presencia de cargas mecánicas), un arreglo capacitivo variable (formado a partir de electrodos paralelos

móviles y fijos debidamente intercalados) o una celda piezoeléctrica (que aprovecha la generación de una polarización interna en respuesta a una tensión mecánica en materiales cristalinos). El voltaje obtenido como resultado de la transducción del desplazamiento se acondiciona mediante procesos de amplificación, filtrado y, eventualmente, conversión digital.

## 8.2. Configuración geométrica de un acelerómetro micromaquinado

A partir de las reglas de diseño del proceso PolyMumps se discutirá la forma de crear los distintos elementos que forman un acelerómetro micromaquinado capacitivo. Se iniciará con las capas y trabajos para la creación de la masa móvil (masa de prueba o masa sísmica). Se continuará con la creación de la suspensión mecánica a partir de arreglos de vigas voladas pegadas a la masa móvil, rígidas en las direcciones  $y$  y  $z$  y flexibles en la dirección  $x$  (definición que es arbitraria y que en nada afecta los análisis realizados). Se discutirá el amortiguamiento, sus distintas fuentes y modelado de acuerdo con las características del proceso PolyMumps. Se continuará con la configuración del transductor de desplazamiento a voltaje (peine electrostático en modo pasivo). Y se concluirá con la configuración del mecanismo de realimentación de fuerza (peine electrostático en modo activo) para mejorar la respuesta del sistema. En las discusiones sucesivas se adoptará como convención para la orientación de los ejes del espacio cartesiano la siguiente regla: el eje de las abscisas corresponde al ancho de las estructuras, el eje de las ordenadas corresponde al largo y el eje de las cotas corresponde al grosor o altura.

### 8.2.1. Masa móvil

La masa móvil se creará a partir del apilamiento de material de las capas estructurales móviles: Poly1 y Poly2. Para obtener la masa de una placa creada mediante este procedimiento se calculará el volumen de cada capa de material apilado y se multiplicará por su densidad. El grosor de la capa Poly1 es de  $2\ \mu\text{m}$  y el de la capa Poly2 es de  $1.5\ \mu\text{m}$  y es la única característica dimensional que el diseñador no puede modificar. Por otra parte, la densidad del silicio policristalino, de acuerdo con lo señalado en el Apéndice 2, es de:  $2,330\ \text{[kg/m}^3\text{]}$  o  $2,33 \times 10^{-15}\ \text{[kg}/\mu\text{m}^3\text{]}$ . Para la generación de la masa móvil por apilamiento de Poly1 y Poly2 se deben violar las reglas de diseño H, L, O y Q que marcan las distancias mínimas de rebase entre Poly1 y Poly-Poly2 Via, Poly2 y Poly1-Poly2 Via y Poly2 respecto de Poly1, según lo señalado en el apartado 10 de la sección *Más allá de las reglas de diseño del Manual de diseño con PolyMumps [81]*.

Al tratarse de placas muy largas y anchas será necesario colocarles agujeros de liberación para garantizar la penetración de los atacantes químicos empleados durante el proceso de remoción de las capas de sacrificio. De acuerdo con las reglas de diseño, los agujeros hechos en la capa Poly1 deben encerrar a los agujeros hechos en la capa Poly2 de modo que se garantice su adecuado grabado. Estos agujeros serán restados del volumen y por tanto de la masa total de las placas.

Así, para una placa de  $90\ \mu\text{m}$  por  $60\ \mu\text{m}$ , con sus respectivos agujeros de liberación (de  $4\ \mu\text{m}$  por  $4\ \mu\text{m}$ ) espaciados según las reglas de diseño ( $30\ \mu\text{m}$ ), con un grosor de  $2\ \mu\text{m}$ , la masa total será de:  $2,5015 \times 10^{-11}\ \text{[kg]}$ .

Para una placa con el mismo ancho y largo, con sus respectivos agujeros de liberación (de  $4\ \mu\text{m}$  por  $4\ \mu\text{m}$  en la primera capa de polisilicio y de  $8\ \mu\text{m}$  por  $8\ \mu\text{m}$  en la segunda capa, con un espaciado de  $30\ \mu\text{m}$ ), pero con un grosor de  $3.5\ \mu\text{m}$ , la masa total será de:  $4,3441 \times 10^{-11}\ \text{[kg]}$ .

Es importante que debajo de la masa móvil se coloque una plancha de polisilicio que sirva como referencia mecánica (para nivelación del depósito de las capas subsiguientes) utilizando la capa Poly0. Debe tenerse cuidado de aislar eléctricamente esta plancha para evitar generar un electrodo que atraiga la masa móvil cuando se polarice el transductor mecánico-electrico. La plancha en Poly0 debe rebasar en  $4\ \mu\text{m}$  por lado las dimensiones de la masa móvil para garantizar que no se presenten escurrimientos indeseados.

Si se desea ganar mayor masa sin crecer más las dimensiones de ancho y largo de la masa móvil, es conveniente utilizar la capa Metal del proceso PolyMumps. Esta capa se encuentra adherida a la capa Poly2, tiene un grosor de  $0.5 \mu\text{m}$  y está formada por oro que es mucho más denso que el polisilicio ( $19,300 \text{ [kg/m}^3]$  o  $19,3 \times 10^{-15} \text{ [kg}/\mu\text{m}^3]$ ). Los únicos aspectos que debe cuidarse son el encierro de la capa Metal por la capa Poly2 por al menos  $3 \mu\text{m}$  y los agujeros de la capa Metal que deben encerrar a los agujeros de la capa Poly2 en  $2 \mu\text{m}$  y deben estar espaciados entre sí  $30 \mu\text{m}$  como máximo.

Así, para una placa con un ancho de  $90 \mu\text{m}$  por  $60 \mu\text{m}$  con recubrimiento de oro, sus respectivos agujeros de liberación y un grosor de  $4 \mu\text{m}$  apilando las capas Poly1, Poly2 y Metal, la masa total será de:  $8,4434 \times 10^{-11} \text{ [kg]}$ . Es muy importante señalar que la rigidez del silicio policristalino es tal que la masa móvil es suficientemente rígida para no combarse o flexionarse por efecto de su propio peso en placas cuyas dimensiones se encuentran en el rango de los milímetros.

Los electrodos del mecanismo de transducción mecánico-eléctrico agregan masa a la placa móvil pues se encuentran pegados a ella y deben considerarse en el cálculo de la masa total de la masa de prueba o masa sísmica. Por otra parte, en general se desprecia la masa representada por las vigas voladas que forman la estructura de suspensión de la masa móvil, aún cuando están pegados a ella, debido a que actúan como los resortes y son al menos dos órdenes de magnitud menor.

Normalmente la conexión eléctrica de la masa móvil se hace a través de la suspensión mecánica, es decir, las vigas voladas que sostienen la masa móvil y que actúan como soportes y resortes también son los conductores eléctricos para la polarización del transductor mecánico eléctrico.

En la siguiente tabla, se hacen los calculos de la masa total para pequeñas celdas formadas a partir del apilamiento de las capas de material estructural del proceso PolyMumps.

Área [ $\mu\text{m}^2$ ]	Poly1 [kg]	Poly1+Poly2 [kg]	Poly1+Poly2+Metal [kg]	Agujeros
$10 \times 10$	$4,66 \times 10^{-13}$	$8,155 \times 10^{-13}$	$9,7 \times 10^{-13}$	No requiere
$20 \times 20$	$1,864 \times 10^{-12}$	$3,262 \times 10^{-12}$	$5,1534 \times 10^{-12}$	No requiere
$30 \times 30$	$4,194 \times 10^{-12}$	$7,3395 \times 10^{-12}$	$1,2898 \times 10^{-11}$	No requiere
$60 \times 60$	$1,6701 \times 10^{-11}$	$2,9060 \times 10^{-11}$	$5,581 \times 10^{-11}$	1
$90 \times 90$	$3,7448 \times 10^{-11}$	$6,4863 \times 10^{-11}$	$1,2739 \times 10^{-10}$	5
$120 \times 120$	$6,6433 \times 10^{-11}$	$1,1475 \times 10^{-10}$	$2,2765 \times 10^{-10}$	9
$60 \times 30$	$8,388 \times 10^{-12}$	$1,4679 \times 10^{-11}$	$2,7185 \times 10^{-11}$	No requiere
$90 \times 30$	$1,2582 \times 10^{-11}$	$2,2019 \times 10^{-11}$	$4,1473 \times 10^{-11}$	No requiere
$90 \times 60$	$2,5015 \times 10^{-11}$	$4,3441 \times 10^{-11}$	$8,4434 \times 10^{-11}$	2
$120 \times 30$	$1,6776 \times 10^{-11}$	$2,9358 \times 10^{-11}$	$5,576 \times 10^{-11}$	No requiere
$120 \times 60$	$3,3328 \times 10^{-11}$	$5,7821 \times 10^{-11}$	$1,1306 \times 10^{-10}$	3
$120 \times 90$	$4,9881 \times 10^{-11}$	$8,6285 \times 10^{-11}$	$1,7036 \times 10^{-10}$	6

### 8.2.2. Suspensión

La suspensión del acelerómetro se forma a partir de vigas voladas. Lo ideal en el comportamiento de la suspensión es que sea rígida en aquellas direcciones en las que no se desean efectuar mediciones y flexible en aquellas en las que se desea obtener registros. Para el caso del acelerómetro de un eje la suspensión debe ser rígida en dos de las tres direcciones coincidentes con los ejes ortogonales del espacio cartesiano, normalmente  $y$  y  $z$ , y flexible en la tercera dirección,  $x$ ; para el caso del acelerómetro de dos ejes la suspensión debe ser rígida en  $z$  y flexible en  $x$  y  $y$ . Para lograrlo, se crean arreglos geométricos a partir de vigas voladas, algunos de los cuales se mencionan en la tabla siguiente y se analizan a continuación:

Nombre de la suspensión	Rígido	Flexible
Simple	$y$	$x$ $y$ $z$
Un doblez	$y$	$x$ $y$ $z$
Doble doblez	$y$	$x$ $y$ $z$
Serpentin	$y$ $y$ $z$	$x$
De caja	$y$ $y$ $z$	$x$
De caja con los bordes circulares	$y$ $y$ $z$	$x$
Sagital	$y$ $y$ $z$	$x$
Doble V	$y$	$x$ $y$ $z$
Patas de cangrejo	$y$	$x$ $y$ $z$
Langosta	$y$	$x$ $y$ $z$
Tipo X	$y$	$x$ $y$ $z$
Radial con vigas curvadas	- - -	$\theta$ $y$ $z$
Espiral	- - -	$\theta$ $y$ $z$

En algunos procesos de fabricación es posible lograr mayor rigidez en la dirección  $z$  aumentando el grosor de las vigas voladas que forman la suspensión, en el caso de PolyMumps esta situación está acotada a  $3.5 \mu\text{m}$  apilando las dos capas estructurales móviles (Poly1 y Poly2), lo cual en principio sería suficiente para hacer la suspensión más rígida en la dirección  $z$  que en la dirección  $x$ , pues el ancho o largo mínimo de cualquier estructura en Poly1 o Poly2 es de  $2\mu\text{m}$ ; sin embargo, la violación a las reglas de diseño para apilar las capas de Poly1 y Poly2 imponen una limitante en la relación entre el grosor y ancho de las vigas para evitar su fractura durante el proceso de grabado de la capa Poly2 y su posterior liberación, esta debe ser 1 a 1, lo que implica que el ancho mínimo de las vigas voladas formadas por apilamiento será de  $3.5 \mu\text{m}$  [81]; con lo cual se tendrá la misma rigidez en las direcciones  $z$  y  $x$ . En cuanto a la dirección  $y$ , la constante de rigidez de una viga sometida a compresión o elongación es cuatro órdenes de magnitud mayor que la constante de rigidez de esa misma viga sometida a flexión [82], por lo que con sólo colocar las vigas voladas de modo que su largo coincida con el eje de las ordenadas se limita el movimiento en dicha dirección.

Para la obtención de las constantes de rigidez de cada arreglo geométrico serán útiles las expresiones para calcular la rigidez total de resortes conectados en serie y en paralelo. Para el primer caso se tiene:

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n}}$$

Para el segundo caso se tiene:

$$k_{eq} = k_1 + \dots + k_n$$

Una simple viga volada sujeta a la masa móvil del acelerómetro se considera como un resorte, por lo tanto, las suspensiones creadas a partir de arreglos geométricos de vigas voladas, son en realidad conexiones en serie y paralelo de resortes. La expresión para el cálculo de la constante de rigidez de una viga volada sometida a flexión lateral se obtiene a partir de la ecuación 3.42. Dicha expresión se obtuvo para una viga con carga concentrada en el extremo libre y libertad de giro en dicho extremo, cuya flexión será vertical (se presentará en el plano  $yz$  si se considera el largo de la viga coincidente con el eje de las ordenadas y al eje de las cotas como normal al plano de referencia formado por el sustrato). Pero en virtud de que la suspensión se flexionará en la dirección  $x$  cuando se presente una aceleración se hará el recalcu de la expresión 3.42; así, para una viga que se flexiona lateralmente y su extremo libre tiene libertad de giro, la expresión para la obtención de su constante de rigidez es:

$$k = \frac{Ehb^3}{4L^3} \quad (8.6)$$

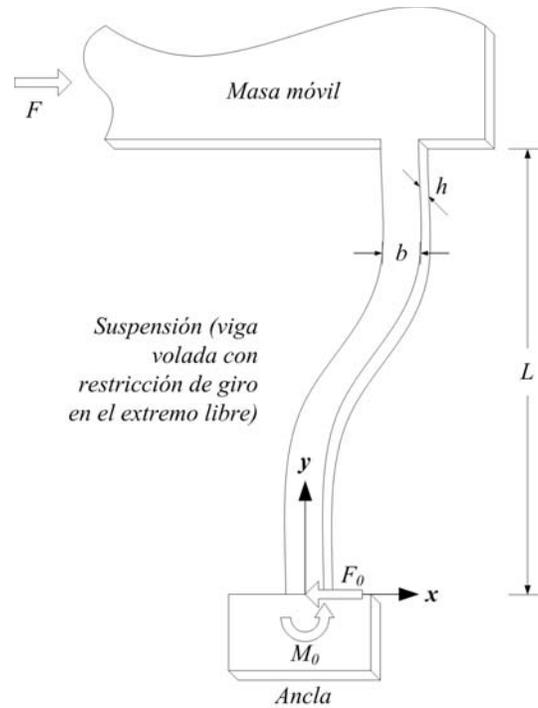


Figura 8.1: Suspensión formada a partir de vigas voladas sometidas a flexión lateral con restricciones de giro en su extremo adherido a la masa móvil.

En dónde  $b$ ,  $h$  y  $L$  son el ancho, grosor y longitud de la viga volada y  $E$  es módulo de Young para el silicio policristalino. Sin embargo, en los casos de las suspensiones que se utilizarán para mantener suspendida la masa móvil del acelerómetro, el extremo libre con la carga (aquel pegado a la masa móvil) no tiene libertad de giro, por lo que el coeficiente de rigidez o constante de elasticidad difiere considerablemente. De acuerdo con la figura 8.1 sea  $F$  una fuerza que provoca una aceleración  $a$  a la masa móvil pegada al extremo de la viga volada y considérese:

1. que la masa de la viga es mucho menor que la masa móvil, de modo tal que el peso de la viga puede ser despreciado, y
2. que la rigidez de la viga volada en la dirección del eje de las cotas ( $z$ ) es tal que el peso de la masa móvil no genera flexión alguna en la viga.

Para balancear la fuerza  $F$ , debe existir una fuerza de soporte,  $F_0$ , actuando sobre la viga, en el extremo anclado. La condición de balance de fuerzas en la dirección  $x$  lleva a establecer que  $F_0 = F$ . Además, debe existir un momento de flexión restrictivo,  $M_0$ , en el extremo anclado de la viga que balancee el momento de flexión provocado por la fuerza  $F$ .

El momento en el extremo anclado que es producido por el efecto de la fuerza es igual a  $FL$ , y el sentido en el que se presenta es horario. Para balancear los momentos de flexión, el momento de flexión restrictivo,  $M_0$ , debe ser igual a  $FL$ , en sentido antihorario. A partir de una posición  $y$  cualquiera, como se muestra en la figura 8.2, el momento de flexión a la izquierda queda expresado por  $-M_0 + F_0y$  y el momento de flexión a la derecha es igual a  $-\frac{F(L^2-y^2)}{2L} + \frac{F(L-y)^2}{2L}$  [83]. Considerando que se encuentra en equilibrio estático, se tiene que los momentos a izquierda y derecha de la posición  $y$  son iguales, es decir,  $M(y) = -\frac{F(L^2-y^2)}{2L} + \frac{F(L-y)^2}{2L}$ . Por lo tanto, la ecuación diferencial para calcular el desplazamiento en la dirección  $y$ , es decir,  $f(y)$  será:

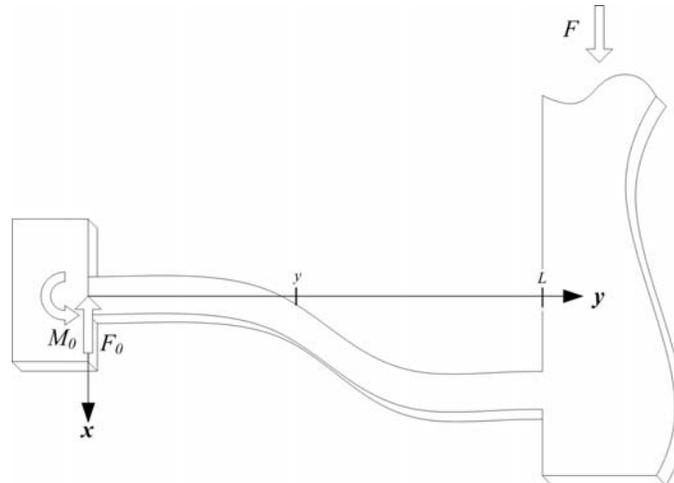


Figura 8.2: Equilibrio de fuerzas y momentos.

$$-EI f''(y) = -\frac{F(L^2 - y^2)}{2L} + \frac{F(L - y)^2}{2L} \quad (8.7)$$

Si además se considera que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  y  $f''(L) = 0$ , la solución a la ecuación 8.7 será:

$$f(y) = \frac{F}{2EIL} \left[ \frac{2Ly^3}{6} - \frac{y^4}{6} \right] = \frac{ma}{2EIL} \left[ \frac{2Ly^3}{6} - \frac{y^4}{6} \right] \quad (8.8)$$

Por lo que el desplazamiento máximo en el extremo libre de la viga se calcula a partir de:

$$\begin{aligned} f_{\text{máx}} &= f(L) = \frac{maL^3}{12EI} \text{ e } I = \frac{hb^3}{12} \\ \therefore f_{\text{máx}} &= f(L) = \frac{maL^3}{Ehb^3} \end{aligned} \quad (8.9)$$

De dónde se obtiene el valor para  $k$ :

$$k = \frac{Ehb^3}{L^3} \quad (8.10)$$

Con lo que el valor para la constante de elasticidad o rigidez en una viga (resorte) con restricciones de giro en su extremo libre resulta cuatro veces mayor que la obtenida para una cuyo extremo gira sin restricciones. Así para una suspensión formada por vigas voladas simples adheridas a la masa móvil, la constante de rigidez total se calculará a partir de la ecuación 8.10 multiplicándola por el número de vigas adheridas a la masa.

Por otra parte, es muy importante analizar la rigidez de las suspensiones en la dirección normal al plano de movimiento (regularmente  $z$ ) en los dispositivos inerciales como el acelerómetro para anticipar un posible

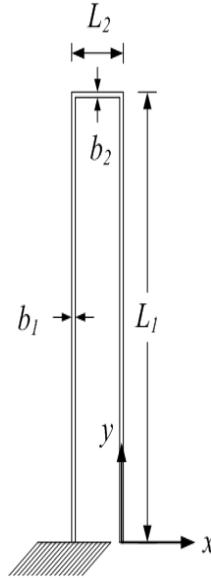


Figura 8.3: Suspensión formada a partir de una viga volada doblada.

colapso de la suspensión debido al peso de la masa suspendida y porque cualquier flexión en la dirección normal al plano de movimiento tendrá un impacto importante en el coeficiente de amortiguamiento del sistema.

Así, la rigidez en la dirección  $z$  para la viga volada recién analizada será:

$$k_z = \frac{Ebh^3}{L^3}$$

Para una suspensión formada por una viga con un doblez [84] como la mostrada en la figura 8.3, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{3EI}{L_1^3} \left( \frac{L_2\psi + 2L_1}{2L_2\psi + L_1} \right) = \frac{Eh}{4} \left( \frac{b_1}{L_1} \right)^3 \left( \frac{L_2\psi + 2L_1}{2L_2\psi + L_1} \right)$$

dónde  $\psi = (b_1/b_2)^3$ . Si además se cumple que  $b_1 = b_2 = b$ , la expresión se simplifica y queda como:

$$k = \frac{3EI}{L_1^3} \left( \frac{L_2 + 2L_1}{2L_2 + L_1} \right) = \frac{Ehb^3}{4L_1^3} \left( \frac{L_2 + 2L_1}{2L_2 + L_1} \right)$$

Para esta suspensión la rigidez en la dirección  $z$  se calcula a partir de:

$$k_z = \frac{3EGI_y I_t}{3EI_y L_2 (L_1^2 + L_1 L_2) + GI_t (2L_1^3 + L_2^3)}$$

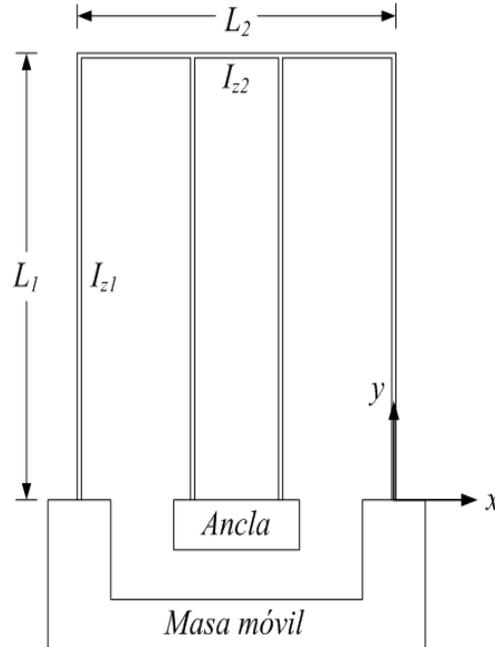


Figura 8.4: Suspensión formada a partir de un par de vigas voladas dobladas y conectadas entre sí.

dónde  $I_y$  es el momento de inercia para las flexiones en la dirección  $z$ , el cual se obtiene mediante  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ ,  $I_t$  es el momento de inercia torsional, el cual para secciones transversales muy delgadas,  $b \ll h$ , se calcula a través de  $I_t = \frac{b^3h}{3}$  o para el caso en que  $h \ll b$ ,  $I_t$  se obtiene a partir de  $I_t = \frac{bh^3}{3}$  o para el caso en que el grosor es menor o igual que el ancho de la viga,  $h \leq b$ ,  $I_t$  se calcula a través de  $I_t = \frac{bh^3(\frac{16}{3} - \frac{3.36h}{b})}{16}$  y  $G$  es el módulo volumétrico, el cual se obtiene mediante  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Para una suspensión del tipo doble dobléz [85] como la mostrada en la figura 8.4, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{12EI_{z1}}{L_1^3} \frac{L_{21}^2 + 14L_{21}\kappa + 36\kappa^2}{4L_{21}^2 + 41L_{21}\kappa + 36\kappa^2}$$

dónde  $L_{21} = L_2/L_1$  y  $\kappa = I_{z2}/I_{z1}$ . Para el caso en que  $I_{z2} \gg I_{z1}$  se tiene que:

$$k = \frac{12EI_{z1}}{L_1^3}$$

Para esta suspensión la rigidez en la dirección  $z$  se calcula a partir de:

$$k_z = \frac{3EI_y}{L_1^3}$$

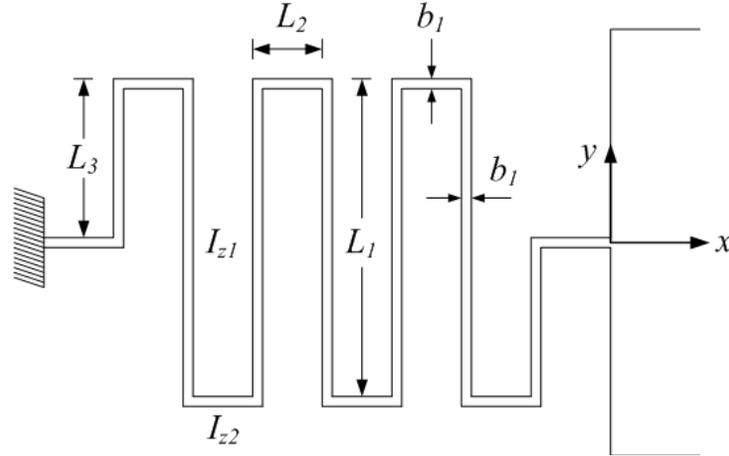


Figura 8.5: Suspensión tipo serpiente. Muy útil en microensambles.

dónde  $I_y$  es el momento de inercia para las flexiones en la dirección  $z$ , el cual se obtiene mediante  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ .

Para una suspensión del tipo serpiente [86] como la mostrada en la figura 8.5, con un ancho y grosor idéntico en cada elemento, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  con un número par de segmentos será:

$$k_x = \frac{48[(\gamma + L_1)n^2 - 3L_1n + 2L_1]EI_{z1}}{L_1^2[(3\gamma^2 + 4\gamma L_1 + L_1^2)n^3 - 2L_1(5\gamma + 2L_1)n^2 + (5L_1^2 + 6\gamma L_1 - 9\gamma^2)n - 2L_1^2]}$$

dónde  $\gamma = I_{z1}L_2/I_{z2}$  y  $n$  es el número de segmentos del serpiente. Por otra parte, para un número impar de segmentos, la constante de elasticidad en la dirección  $x$  será:

$$k_x = \frac{48[(\gamma + L_1)n - L_1]EI_{z1}}{L_1^2(n-1)[(3\gamma^2 + 4\gamma L_1 + L_1^2)n + 3\gamma^2 - L_1^2]}$$

Para este mismo tipo de suspensión, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $y$  con un número par de segmentos será:

$$k_y = \frac{48[(3\gamma + L_1)n - L_1]EI_{z1}}{L_2^2n[(3\gamma^2 + 4\gamma L_1 + L_1^2)n^3 - 2L_1(5\gamma + 2L_1)n^2 + (5L_1^2 + 6\gamma L_1 - 9\gamma^2)n - 2L_1^2]}$$

Y para un número impar de segmentos:

$$k_y = \frac{48EI_{z1}}{L_2^2n[(\gamma + L_1)n^2 - 3L_1n + 2L_1]}$$

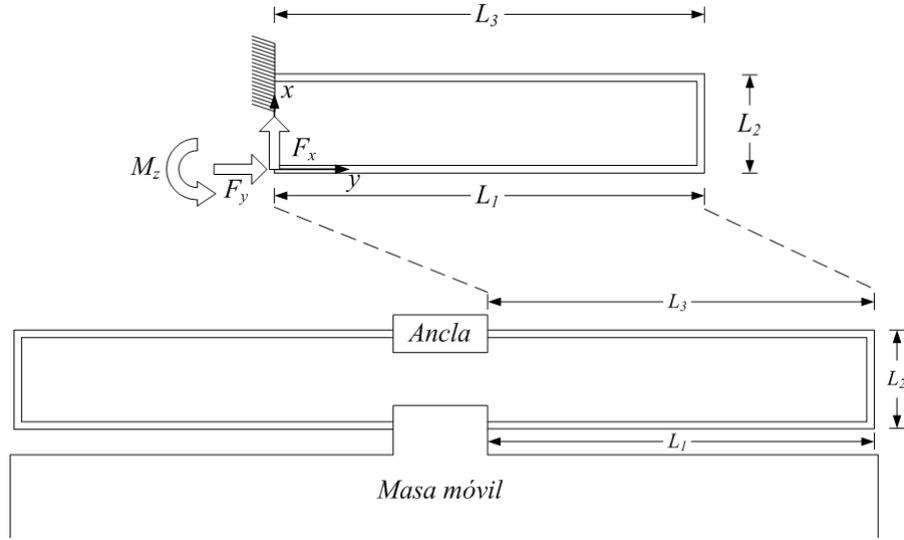


Figura 8.6: Suspensión tipo caja con bordes rectangulares.

Para esta suspensión la rigidez en la dirección  $z$  se calcula a partir de:

$$k_z = \frac{3EGI_y I_t}{6EI_y L_1 L_2 (L_1 + 3L_2) + 4GI_t (L_1^3 + 2L_2^2)}$$

dónde  $I_y$  es el momento de inercia para las flexiones en la dirección  $z$ , el cual se obtiene mediante  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ ,  $I_t$  es el momento de inercia torsional, el cual para secciones transversales muy delgadas,  $b \ll h$ , se calcula a través de  $I_t = \frac{b^3 h}{3}$  o para el caso en que  $h \ll b$ ,  $I_t$  se obtiene a partir de  $I_t = \frac{bh^3}{3}$  o para el caso en que grosor es menor o igual que el ancho de la viga,  $h \leq b$ ,  $I_t$  se calcula a través de  $I_t = \frac{bh^3(\frac{16}{3} - \frac{3,36h}{b})}{16}$  y  $G$  es el módulo volumétrico, el cual se obtiene mediante  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . Para una suspensión en forma de caja con los bordes a noventa grados [87] como la que se muestra en la figura 8.6, con un ancho y grosor idéntico en cada elemento, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$ , para un sólo lóbulo, será:

$$k = \frac{6(4L_1 L_2 + L_2^2 + 4L_2 L_3 + 12L_1 L_3)EI}{L_2 L_3^4 + 3L_1 L_3^4 + L_1^3 L_2^2 + 4L_1^3 L_2 L_3 + 3L_1^2 L_2 L_3^2 + 4L_1 L_2 L_3^3 + L_1^4 L_2 + 3L_1^4 L_3 + L_2^2 L_3^3}$$

Si además se cumple que  $L_1 = L_3$ , la constante de rigidez en la dirección  $x$ , también para un lóbulo, será:

$$k = \frac{6EI}{L_1^3} \left( \frac{L_2 + 2L_1}{2L_2 + L_1} \right)$$

Para esta suspensión (si se cumple que  $L_1 = L_3$ ), la rigidez en la dirección  $z$ , para un sólo lóbulo, se calcula a partir de:

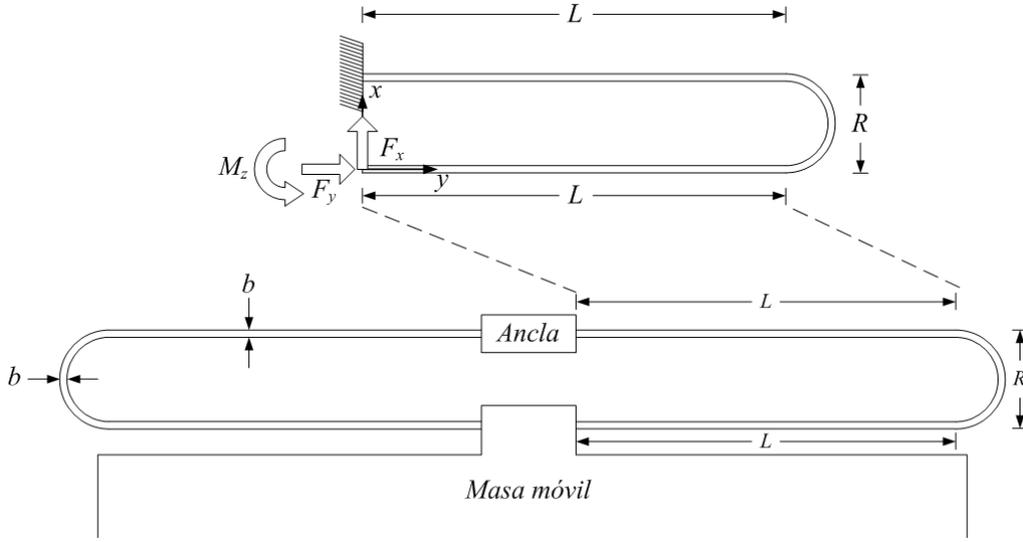


Figura 8.7: Suspensión de caja con bordes circulares.

$$k_z = \frac{6EGI_y I_t}{3EI_y L_2(L_1^2 + L_1 L_2) + GI_t(2L_1^3 + L_2^3)}$$

Para una suspensión en forma de caja con los bordes circulares [88] como la mostrada en la figura 8.7, con un ancho, grosor y largo idénticos en cada elemento recto y  $R > 10b$ , la constante de elasticidad (o rígidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{12(2L + \pi R)EI}{3\pi^2 R^4 - 6\pi^2 L^2 R^2 + 18\pi^2 L^2 R + 6\pi L R^3 - 8\pi L^3 R + 36\pi L^3 - 24R^4 + 24L^2 R^2 + 2L^4} \quad (8.11)$$

Para el caso en que  $R < 10b$ , la constante de elasticidad (o rígidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{12(8e^2 A^2 L^2 + 8\pi e^2 A^2 L I + 2\pi e A L I + 3\pi^2 e A I^2 - 4\pi e A L I - 2\pi^2 I^2)e E A I}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6}$$

dónde:

$$\begin{aligned} d_1 &= -6\pi^3 R^2 I^3 + 12\pi^3 L^2 I^3 + 24\pi^2 L R I^3 - 18\pi^3 L^2 I^3 - 28\pi e^2 A^2 L^4 I - 96\pi e A L^2 R I^2 \\ d_2 &= -50\pi^2 e A L^3 I^2 - 36\pi^2 L R I^3 - 12\pi^2 e^2 A^2 L^3 I^2 - 12\pi^3 e A L^2 I^3 - 24\pi^2 e A L R I^3 + 12\pi^2 e A L^3 I^2 \\ d_3 &= -12\pi^2 e A L R^2 I^2 + 6\pi^2 e A L^3 I^2 + 96e^2 A^2 L^3 R I - 96e A L R^2 I^2 + 8e^3 A^3 L^5 - 24\pi R^2 I^3 \\ d_4 &= 20\pi e^3 A^3 L^4 I + 48\pi^2 e^2 A^2 L^3 I^2 + 144\pi e^2 A^2 L^2 R I^2 + 48\pi^2 e A L R I^3 - 48\pi e A R^2 I^3 + 48\pi R^2 I^3 \\ d_5 &= 26\pi e^2 A^2 L^4 I - 24\pi e A L^2 R I^2 - 12\pi^2 L R I^3 + 18\pi^3 e A L^2 I^3 + 24\pi e^2 A^2 L^2 R^2 I + 24\pi^2 e^2 A^2 L R^2 I^2 \\ d_6 &= 6\pi^2 e A L R^2 I^2 + 9\pi^3 e A R^2 I^3 \\ A &= bh \end{aligned}$$

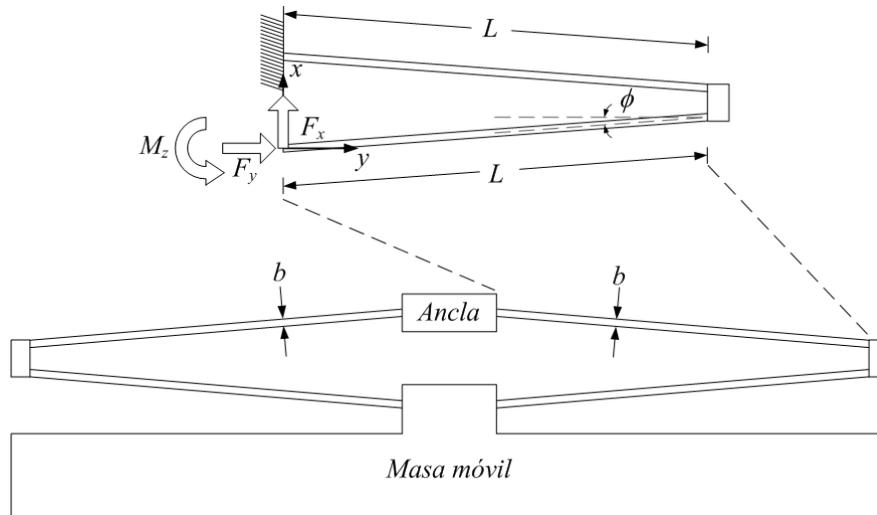


Figura 8.8: Suspensión sagital. Muy sensible pues puede amplificar un movimiento por factores mayores a 10.

y  $e$  es la excentricidad, cuya expresión de cálculo será:

$$e = \frac{R - b}{\ln\left(\frac{2R+b}{2R-b}\right)}$$

Para esta suspensión, la rigidez en la dirección  $z$  se calcula a partir de:

$$k_z = \frac{6EGI_y I_t}{3EI_y R[8LR + \pi(L^2 - 2LR + 3R^2)] + GI_t[4L^3 + 3\pi L^2 R + 6\pi LR^2 + 3\pi R^3]}$$

dónde  $I_y$  es el momento de inercia para las flexiones en la dirección  $z$ , el cual se obtiene mediante  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ ,  $I_t$  es el momento de inercia torsional, el cual para secciones transversales muy delgadas,  $b \ll h$ , se calcula a través de  $I_t = \frac{b^3 h}{3}$  o para el caso en que  $h \ll b$ ,  $I_t$  se calcula a partir de  $I_t = \frac{bh^3}{3}$  o para el caso en que grosor es menor que el ancho de la viga,  $h < b$ ,  $I_t$  se calcula a través de  $I_t = \frac{bh^3(\frac{16}{3} - \frac{3.36h}{b})}{16}$  y  $G$  es el módulo volumétrico, el cual se obtiene mediante  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Para una suspensión tipo sagital [89] como la mostrada en la figura 8.8, con un ancho, grosor y largo idénticos en cada elemento, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{12EI}{L^3 \cos^2 \phi}$$

Y la rigidez en la dirección  $z$  se calculará a partir de:

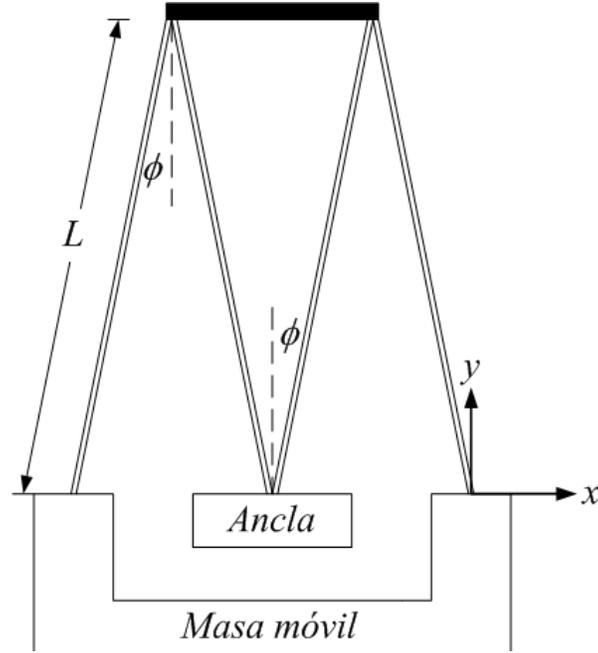


Figura 8.9: Suspensión en forma de doble V.

$$k_z = \frac{24}{L} \frac{EGI_y I_t}{d_1 + d_2 + d_3}$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= 6EI_y((L_A - 2u)^2 \sin^2 \phi + 2(L_R + 2L \sin \phi)(L_R \cos \phi + (2L \cos \phi + L_A - 2u) \sin \phi) \cos \phi) \\ d_2 &= GI_t(6L_R^2 + 14L^2 + 3(L_A - 2u)^2 + 3((L_A - 2u)^2 - 2(L_R^2 + 2L^2)) \cos(2\phi) - 6(2u - L_A)(L - 2L_R \sin \phi) \cos \phi) \\ d_3 &= 6GI_t L((L_A - 2u) \cos(3\phi) + L \cos(4\phi) + 4L_R \sin \phi - 2L_R \sin(3\phi)) \\ u &= \frac{GI_t(L_A \cos \phi + L \cos(2\phi)) \cos \phi + (EI_y - GI_t)L_R \sin \phi \cos \phi + EI_y(L_A + 2L \cos \phi) \sin^2 \phi}{2(GI_t \cos^2 \phi + EI_y \sin^2 \phi)} \end{aligned}$$

Para una suspensión tipo doble V [90] como la mostrada en la figura 8.9, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{12EI \cos \phi}{L^3} \left(1 + \frac{\cos \phi}{2}\right)$$

Para una suspensión tipo patas de cangrejo [91] como la mostrada en la figura 8.10, con secciones transversales rectangulares en ambos segmentos de la viga, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  será:

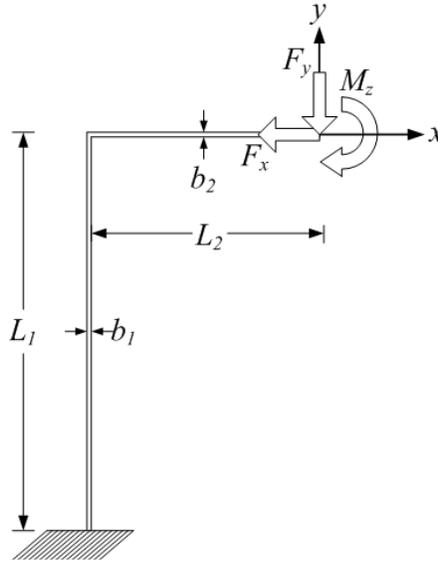


Figura 8.10: Suspensión tipo patas de cangrejo. Normalmente el segmento más largo se coloca de forma ortogonal a la dirección de movimiento.

$$k = \frac{Eh}{4} \left(\frac{b_1}{L_1}\right)^3 \left(\frac{4L_1 + \psi L_2}{L_1 + \psi L_2}\right)$$

dónde  $\psi = (b_1/b_2)^3$ . Para una suspensión tipo langosta [92] como la mostrada en la figura 8.11, con un ancho y grosor idénticos en cada elemento, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{3(20L_1^4 + 24L_1^3L_2 + 24L_1^2L_2^2 + 12L_1L_2^3 + 64L_1L_2^2 + 48L_2^3 - 3L_2^4)EI}{d_1 + d_2}$$

donde:

$$\begin{aligned} d_1 &= 48L_2^6 + 16L_1^7 - 15L_2^7 + 80L_1^4L_2^2 + 192L_1^3L_2^3 + 336L_1^2L_2^4 + 272L_1L_2^5 \\ d_2 &= 60L_1^6L_2 + 180L_1^5L_2^2 + 244L_1^4L_2^3 + 144L_1^3L_2^4 + 3L_1^2L_2^5 - 57L_1L_2^6 \end{aligned}$$

Para una suspensión completa, formada por cuatro lóbulos, la expresión deberá multiplicarse por cuatro. En cuanto a la rigidez en la dirección  $z$ , ésta se calculará a partir de:

$$k_z = \frac{3EGI_yI_t}{6EI_y(L_1 + L_2)(L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2) + GI_t + (4L_1^3 + 6L_1L_2(L_1 + L_2) + 3L_2^3)}$$

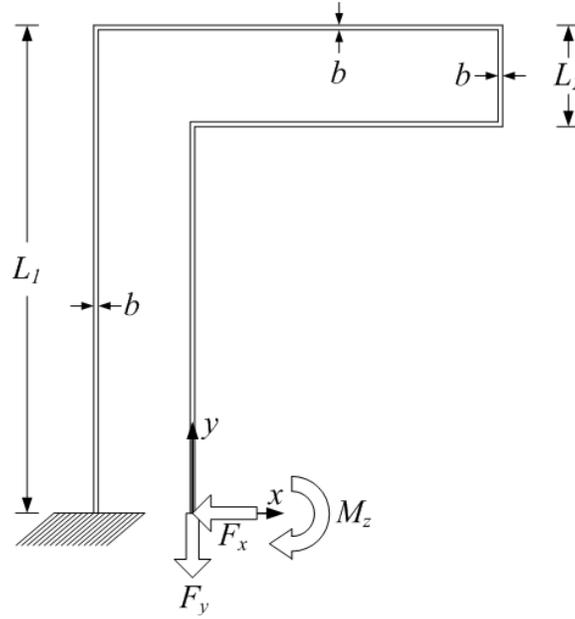


Figura 8.11: Suspensión tipo langosta. Se utilizan cuatro, una en cada esquina, para sostener una placa rectangular.

También para un sólo lóbulo. Ahora bien, para una suspensión en forma de X [93] como la mostrada en la figura 8.12, la constante de elasticidad (o rígedez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{1}{\left[ \frac{L}{Ebh} (\sin \phi + c_2 \cos \phi)^2 + \frac{L^3}{3EI} (\cos \phi - c_2 \sin \phi)^2 - 2c_1 \frac{L^2}{2EI} (\cos \phi - c_2 \sin \phi) + c_1^2 \frac{L}{EI} \right]}$$

dónde

$$c_1 = \frac{2 \frac{L}{Ebh} \frac{L^2}{2EI} \cos \phi}{\frac{L}{EI} \left( \frac{L}{Ebh} + \frac{L^3}{3EI} \right) - \frac{L^4}{4E^2 I^2} + \left[ \frac{L}{EI} \left( \frac{L}{Ebh} - \frac{L^3}{3EI} \right) + \frac{L^4}{4E^2 I^2} \right] \cos(2\phi)}$$

$$c_2 = - \frac{\left[ \frac{L}{EI} \left( \frac{L}{Ebh} - \frac{L^2}{2EI} \right) + \frac{L^4}{4E^2 I^2} \right] \sin \phi \cos \phi}{\frac{L}{EI} \frac{L}{Ebh} \cos^2 \phi + \left( \frac{L}{EI} \frac{L^3}{3EI} - \frac{L^4}{4E^2 I^2} \right) \sin \phi}$$

Para una suspensión tipo radial con vigas curvadas, la constante de elasticidad (o rígedez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{n(-9 + 6\phi^2 + 16 \cos \phi - 7 \cos 2\phi - 4\phi(2 + \cos \phi) \sin \phi)EI}{R(-9\phi + 2\phi^3 + 8\phi \cos \phi + \phi \cos 2\phi + 8 \sin \phi + 4 \sin 2\phi)}$$

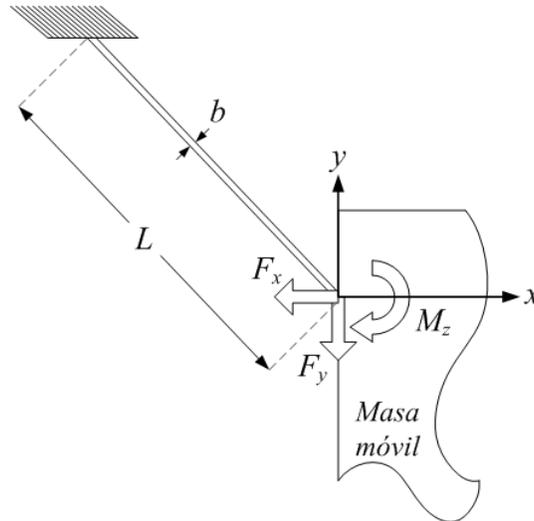


Figura 8.12: Suspensión tipo X, este tipo de suspensión toma su nombre debido a que se colocan cuatro soportes inclinados (dos por lado) para una placa (masa) móvil.

dónde  $n$  es el número de vigas curvadas que forman la suspensión radial. Para una suspensión basada en una espiral, con un gran número de vueltas, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $\theta$  será:

$$k = \frac{EI}{L}$$

dónde  $L$  es la longitud total de la espiral.

### 8.2.3. Amortiguador

En tanto que la masa móvil y la suspensión elástica pueden ser diseñadas para condiciones estáticas, el diseño del amortiguador debe proporcionar un óptimo coeficiente general de amortiguamiento dinámico considerando los tres principales fenómenos disipativos que afectan el movimiento del dispositivo:

1. amortiguamiento debido a la fuerza de arrastre (desplazamiento del dispositivo en un medio viscoso estable),
2. amortiguamiento por compresión de películas de aire (entre los electrodos móviles y fijos) y
3. amortiguamiento por deslizamiento sobre películas de aire.

Los principales elementos con que cuenta el diseñador para lograr un coeficiente de amortiguamiento óptimo son: la geometría del dispositivo y las condiciones de presión en el encapsulado. Así, para el cálculo del coeficiente general de amortiguamiento  $c$  de la ecuación 8.3 se sumarán los efectos de los tres fenómenos disipativos más importantes:

$$c_{\text{gral}} = c_{\text{arrastre}} + c_{\text{compresion}} + c_{\text{deslizamiento\_sustrato}} + c_{\text{deslizamiento\_abierto}}$$

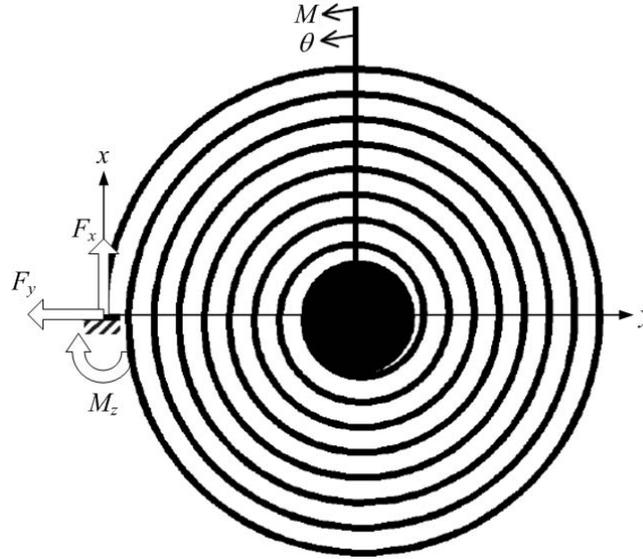


Figura 8.13: Suspensión en forma de espiral. La masa móvil se encuentra sujeta al centro de la espiral y se presenta un par como entrada.

Cada término de la suma corresponde a un tipo de amortiguamiento presente en el Sistema Microelectromecánico.

A partir de la ecuación 4.9 puede calcularse  $c_{arrastra}$ :

$$c_{arrastra} = \frac{32\mu B_m}{6}$$

dónde  $\mu$  es la viscosidad del aire y  $B_m$  el ancho de la placa que forma la masa móvil.

En cuanto a  $c_{compresion}$ , éste puede calcularse a partir de la ecuación 4.20:

$$c_{compresion} = \frac{\mu L_e h_e^3 n}{d_e^3}$$

dónde  $L_e$  es el traslape del largo de los electrodos,  $h_e$  es el grosor de los electrodos,  $n$  es el número de electrodos móviles y  $d_e$  es la separación entre electrodos (uno fijo y otro móvil).

Respecto del amortiguamiento debido al deslizamiento sobre la película de aire atrapada entre la placa que forma la masa móvil y el sustrato,  $c_{deslizamiento\_sustrato}$ , éste puede calcularse a partir de la ecuación 4.57:

$$c_{deslizamiento\_sustrato} = \frac{\mu B_m L_m}{d_{ms}}$$

dónde  $L_m$  es el largo de la placa que forma la masa móvil y  $d_{ms}$  es la distancia entre dicha placa y el sustrato.

Acerca del amortiguamiento debido al deslizamiento sobre la película de aire atrapada entre la placa que forma la masa móvil y alguna referencia mecánica en la parte superior,  $c_{deslizamiento\_abierto}$ , éste puede calcularse a partir de la ecuación 4.60:

$$c_{deslizamiento\_abierto} = \frac{\mu B_m L_m}{\sqrt{2\mu/\rho_{aire}\omega}}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación de la masa móvil y  $\rho_{aire}$  la densidad del aire.

Por lo tanto para un Sistema Microelectromecánico como el acelerómetro capacitivo diferencial el coeficiente general de amortiguamiento será:

$$c_{gral} = \mu \left[ \frac{32B_m}{6} + \frac{L_e h_e^3 n}{d_e^3} + \frac{L_m B_m}{d_{ms}} + \frac{L_m B_m}{\sqrt{2\mu/\rho_{aire}\omega}} \right] \quad (8.12)$$

La mayoría de los estudios disponibles en la actualidad sobre amortiguamiento debido a la interacción de una estructura micromecánica con el fluido que la envuelve, consideran únicamente el fenómeno de compresión de aire entre placas que se aproximan, es decir, el movimiento mayoritariamente estudiado corresponde a uno de tipo normal entre la masa móvil (formada por capas de material estructural) y el sustrato. En contraparte, existen muy pocos estudios comparativos entre los modelos matemáticos y los registros experimentales para los casos de amortiguamiento debido al deslizamiento de placas sobre películas de aire, y hasta ahora se ha documentado una discrepancia de alrededor del 20% entre los modelos teóricos y los datos de laboratorio para este tipo de fenómeno.

Para el caso en que el acelerómetro se encuentre inmerso en aire enrarecido, es decir, se hubiera encapsulado al dispositivo en bajo vacío, la separación entre las moléculas de los gases de forman el aire que rodea el acelerómetro es tal que la interacción entre ellas se considera nula y sus defectos completamente irrelevantes, razones por las que el amortiguamiento debido al deslizamiento sobre la película de aire atrapada entre el sustrato y la placa móvil (masa móvil) y la placa móvil y alguna referencia mecánica en la parte superior son despreciables y sólo se analizan los efectos provocados por el arrastre (choque de moléculas de aire contra la masa móvil) y la compresión de películas delgadas de aire atrapadas entre los electrodos del transductor mecánico-eléctrico del dispositivo. Así se tiene que, en aire enrarecido, el coeficiente general de amortiguamiento se obtiene a partir de las ecuaciones 4.68 y 4.76:

$$c_{ae\_gral} = c_{ae\_arrastre} + c_{ae\_compresion} = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{M_m}{RT}} PA + 0,0635n \left( \frac{L_e}{d_e} \right) \sqrt{\frac{M_m}{RT}} PA \quad (8.13)$$

dónde  $M_m$  es la masa molar del aire,  $R = 8,31 \left[ \frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot K} \right]$  es la constante universal molar de los gases,  $T$  es la temperatura a la que se encuentra el gas (expresada en la escala Kelvin),  $P$  la presión a la que se encuentra sometido el gas,  $A$  es el área de la sección transversal de la placa en dirección ortogonal a la dirección de movimiento sobre la cual impactarán las moléculas de aire ( $B_m h_e$ ),  $n$  es el número de pares de electrodos colocados a lo largo de la placa móvil,  $L_e$  es la longitud del traslape entre los electrodos del transductor mecánico eléctrico y  $d_e$  su separación inicial.

En el proceso de diseño, debe tenerse en cuenta que la razón de amortiguamiento para un sistema masa-resorte-amortiguador, como el acelerómetro, normalmente se fija alrededor de 0,7 (valor conocido como condición óptima de amortiguamiento) de modo que el sistema alcance su mejor respuesta en frecuencia a una señal de entrada (tal como se señala en la subsección *Efectos del amortiguamiento debido al aire sobre la dinámica de los Microsistemas* del capítulo 4).

#### 8.2.4. Transductor mecánico-eléctrico

Aunque existen distintos métodos de transducción mecánica-eléctrica aplicables a los Sistemas Micro-electromecánicos, en el presente trabajo se ha optado por un esquema capacitivo debido a su facilidad de implantación en los procesos de micromaquinado de superficie, a su insensibilidad ante variaciones de temperatura y a la simplicidad de su funcionamiento.

Como se discutió en la subsección *Medición mediante balance de fuerzas electrostáticas* del capítulo 6 y a lo largo de todo ese capítulo, la mejor configuración para el transductor mecánico eléctrico es el de un capacitor diferencial realimentado para el balance de fuerzas electrostáticas, tal como lo muestran las figuras 6.10, 6.11 y 6.22. De acuerdo con la discusión planteada en dicho capítulo y en particular en las ecuaciones 6.5, 6.6, 6.9, 6.24, 6.25, 6.26 y 6.27 si se cumple con las siguientes condiciones:

1.  $\beta$  (coeficiente de realimentación del circuito que incluye  $A_{op}$ ) es positivo y muy grande (mayor a 5) para evitar que la aceleración crítica que provoca el efecto de llegada tenga un valor muy pequeño y eventualmente se elimine dicho efecto mediante la realimentación, es decir,  $\beta$  es mucho mayor que  $kd$ ,
2. la frecuencia  $\omega$  de la componente de CA de la señal eléctrica de polarización para los electrodos es mucho mayor que la frecuencia de la aceleración de entrada y que la frecuencia natural de oscilación de la estructura mecánica,
3. los desplazamientos de los electrodos son muy pequeños,  $x \approx 0$ , y
4. en  $V_R = V_0 + V_1 \text{sen } \omega t$ , la amplitud de  $V_1$  es mucho menor que la de  $V_0$  de modo que la fuerza electrostática generada por la componente de alta frecuencia de  $V_R$  es despreciable.

entonces, el voltaje de salida se obtiene de forma aproximada a partir de:

$$V_{Out} = A_2 V_{FB} \approx \frac{A_2 d_e^2 m_{total} a}{2nL_e h_e \epsilon \epsilon_0 V_0} \quad (8.14)$$

donde  $A_2$  es la ganancia de lazo abierto del amplificador operacional al final del proceso de acondicionamiento de señal planteado en la figura 6.11,  $d_e$  es la distancia de separación entre electrodos fijos y móviles,  $m_{total}$  es la masa de la placa y de los electrodos móviles,  $a$  es la aceleración experimentada por el dispositivo,  $n$  es el número de pares de electrodos,  $L_e$  es el traslape a lo largo entre los electrodos móviles y los electrodos fijos,  $h_e$  es el grosor de los electrodos,  $\epsilon$  es la permitividad relativa del aire,  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío y  $V_0$  es la componente de CD del voltaje con que se alimentan los electrodos. Y cómo puede apreciarse en la ecuación anterior (8.14), el voltaje  $V_{Out}$  es proporcional a la aceleración aplicada al dispositivo, razón por la que puede emplearse como registro directo para su cuantificación.

Por otra parte, debe tenerse en consideración que el uso del esquema de realimentación para el balance de fuerzas electrostáticas afecta la constante elástica del sistema, incrementándola y generando una constante elástica efectiva:

$$k_{ef} = k_{suspension} + \frac{2nL_e h_e \epsilon \epsilon_0 V_0^2 \alpha A_{op}}{d_e^3}$$

donde  $\alpha$  es una constante de proporcionalidad entre  $V_0$  y  $V_1$  según lo señalado en la subsección *Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor configurado para el balanceo de fuerzas* del capítulo 6. La alteración de la constante elástica del sistema se debe a la realimentación en el transductor mecánico-eléctrico que también afecta la frecuencia de resonancia del acelerómetro (corriéndola hacia la derecha) y aumenta su rango de operación, pero puede afectar la sensibilidad del Sistema Microelectromecánico.

### 8.2.5. Factor de calidad

En la subsección *Resonancia y factor de calidad* del capítulo 3 se abordan tres definiciones para el factor de calidad. La primera de ellas hace referencia al valor pico de la amplitud relativa en la frecuencia de resonancia y establece que:

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

donde  $\zeta$  es la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) del sistema y se define como  $\zeta = \frac{c}{2m\omega_0}$  ( $m$  es la masa y  $\omega_0$  la frecuencia natural de oscilación del sistema). La segunda definición es la razón entre la energía total del sistema y la energía promedio perdida en un radián de frecuencia de resonancia, por lo que:

$$Q = \frac{m\omega_r}{c}$$

dónde  $m$  es la masa,  $\omega_r$  es la frecuencia de resonancia y  $c$  el coeficiente de amortiguamiento del sistema. La tercera definición remite a la primera para casos en que el amortiguamiento del sistema es muy ligero:

$$Q = \frac{1}{2\zeta}$$

Es importante señalar que el factor de calidad para microestructuras de silicio inmersas en aire es usualmente del orden de  $10^2$  y puede alcanzar valores del orden de  $10^5$  en el vacío.

## Capítulo 9

# Diseño de un acelerómetro micromaquinado en el proceso PolyMumps

### 9.1. Propuesta de los parámetros de diseño

Para el acelerómetro capacitivo micromaquinado se tienen como parámetros importantes de diseño a:

1. La frecuencia de resonancia ( $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ ) y
2. El factor de calidad ( $Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ ).

Dado que en ambos interviene la razón de amortiguamiento  $\zeta$  (cuyo valor óptimo se ubica alrededor de 0,7 para un sistema críticamente amortiguado) y la frecuencia natural de oscilación  $\omega_0$ , se empezará por fijar algunas características dimensionales a partir de las definiciones de dichos parámetros.

$$\zeta = \frac{c_{gral}}{2m_{total}\omega_0} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{suspension}}{m_{total}}}$$

Lo que deriva en:

$$\zeta = \frac{c_{gral}}{2\sqrt{m_{total}k_{suspension}}} \approx 0,7$$

Por otra parte, se tienen algunas características dimensionales que son propias del proceso de fabricación y que en principio no son modificables:

1. Separación entre el sustrato y la masa móvil,  $d_{ms}$ , igual a  $2 \mu m$ .
2. Separación mínima entre electrodos,  $d_e$ , igual a  $2 \mu m$ .
3. Grosor mínimo de los electrodos,  $h_e$  o  $h$ , igual a  $2 \mu m$ .
4. Grosor máximo de los electrodos,  $h_e$  o  $h$ , igual a  $3,5 \mu m$ .
5. Anchura mínima de los electrodos,  $b_e$  o  $b$ , igual a  $3,5 \mu m$ .

También se conocen los valores de las constantes involucradas en el diseño del acelerómetro.

1.  $\varepsilon_{aire} = 1,00059$  (permitividad relativa).
2.  $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-6}$  [pF/ $\mu\text{m}$ ].
3.  $\rho_{aire} = 1,204 \times 10^{-18}$  [kg/ $\mu\text{m}^3$ ], a 20 °C (temperatura ambiente) y 1 atm (presión al nivel del mar).
4.  $\mu_{aire} = 1,81 \times 10^{-11}$  [ $\mu\text{N}\cdot\text{s}/\mu\text{m}^2$ ], a 20 °C (temperatura ambiente).
5.  $E_{Si} = 1,6 \times 10^5$  [ $\mu\text{N}/\mu\text{m}^2$ ].
6.  $\rho_{Si} = 2,33 \times 10^{-15}$  [kg/ $\mu\text{m}^3$ ].
7.  $R = 8,31$  [J/mol·K] (constante universal de los gases ideales).
8.  $M_m = 0,028965$  [kg/mol] (masa molar del aire).
9.  $g = 9,81$  [m/s<sup>2</sup>] (aceleración gravitacional).

Otras consideraciones importantes son las señaladas en las subsecciones *Transductor mecánico-eléctrico* del capítulo 8 y *Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor configurado para el balanceo de fuerzas* del capítulo 6.

1. El coeficiente de realimentación del circuito  $\beta$  debe ser mayor a 5.
2. La proporcionalidad entre la amplitud de la componente de CD y la amplitud de la componente de CA de la señal eléctrica de polarización para los electrodos debe encontrarse en el rango de un décimo a un cuarto.
3. La relación  $\frac{A\varepsilon\varepsilon_0V_0^2}{2kd}$  debe tener un valor en el rango de un décimo a un cuarto.
4. La frecuencia  $\omega$  de la componente de CA de la señal eléctrica de polarización para los electrodos es mucho mayor que la frecuencia de la aceleración de entrada y que la frecuencia natural de oscilación de la estructura mecánica.

Se hará la propuesta de los parámetros dimensionales para el diseño del acelerómetro parte por parte, se iniciará con el diseño de la suspensión y se tomará el tipo de suspensión de caja con los bordes circulares como punto de partida y se analizarán como opciones alternativas los arreglos de suspensión de caja con bordes angulares a noventa grados, tipo langosta y tipo sagital. Así, de acuerdo con la ecuación 8.11, los parámetros dimensionales necesarios para la suspensión de caja con los bordes circulares serán:  $L$ ,  $R$ ,  $b$  y  $h$ . Algunas condiciones que deben tenerse en cuenta para simplificar la expresión de cálculo del coeficiente de rigidez en la dirección  $x$  son que la sección transversal de la viga que forma la suspensión debe ser cuadrada y que la relación entre el diámetro del borde circular y ancho de la viga debe mantenerse como  $R > 10b$ . Por otra parte, el grosor máximo de las vigas voladas que forman la suspensión será de  $3,5 \mu\text{m}$  y dado que el proceso de fabricación obliga a mantener el ancho también en  $3,5 \mu\text{m}$  si se forman las vigas empleando el método de apilamiento de las placas estructurales (subsección *Suspensión* del capítulo 8) y el diámetro del borde circular deberá mantenerse al menos en  $35 \mu\text{m}$ . Así, la expresión para calcular la rigidez en la dirección  $x$  (para un lóbulo completo de la suspensión) será :

$$k = \frac{(2L + \pi R)Ehb^3}{(3\pi^2R^4 - 6\pi^2L^2R^2 + 18\pi^2L^2R + 6\pi LR^3 - 8\pi L^3R + 36\pi L^3 - 24R^4 + 24L^2R^2 + 2L^4)}$$

y para calcular la rigidez en la dirección  $z$  (para un lóbulo completo de la suspensión), será:

$$k_z = \frac{6EGI_yI_t}{3EI_yR[8LR + \pi(L^2 - 2LR + 3R^2)] + GI_t[4L^3 + 3\pi L^2R + 6\pi LR^2 + 3\pi R^3]}$$

Dado que  $h = 3,5 \mu\text{m}$ ,  $b = 3,5 \mu\text{m}$  y  $R = 35 \mu\text{m}$ , sólo queda por definir el largo de las vigas, para lo cual se construirá una tabla en dónde se pongan distintos valores dimensionales.

Con  $h = 3,5 \mu\text{m}$ ,  $b = 3,5 \mu\text{m}$  y  $R = 35 \mu\text{m}$ , el cálculo de la rigidez para la suspensión completa (considerando los dos lóbulos, frontal y trasero) será:

$L [\mu\text{m}]$	$k [\text{kg/s}^2]$	$k_z [\text{kg/s}^2]$
200	$2,12 \times 10^{-5}$	$3,15 \times 10^{-1}$
250	$1,36 \times 10^{-5}$	$1,87 \times 10^{-1}$
300	$9,44 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^{-1}$
350	$6,93 \times 10^{-6}$	$8,19 \times 10^{-2}$
400	$5,31 \times 10^{-6}$	$5,82 \times 10^{-2}$
450	$4,19 \times 10^{-6}$	$4,29 \times 10^{-2}$
500	$3,4 \times 10^{-6}$	$3,25 \times 10^{-2}$
750	$1,51 \times 10^{-6}$	$1,09 \times 10^{-2}$
1000	$8,49 \times 10^{-7}$	$4,89 \times 10^{-3}$
1500	$3,77 \times 10^{-7}$	$1,55 \times 10^{-3}$

Los parámetros dimensionales necesarios para el diseño de la suspensión de caja con bordes angulares a noventa grados serán:  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $b$  y  $h$ . Algunas condiciones que pueden tenerse en cuenta para simplificar la expresión de cálculo del coeficiente de rigidez en la dirección  $x$  son que  $L_1$  sea igual a  $L_3$  y que la sección transversal de las vigas con que se forma la suspensión debe ser cuadrada dado que el grosor máximo que pueden alcanzar las vigas de la suspensión será de  $3,5 \mu\text{m}$ , lo que obliga a mantener el ancho también en  $3,5 \mu\text{m}$  dado que las vigas seguramente se formarán empleando el método de apilamiento de las placas estructurales (subsección *Suspensión* del capítulo 8). Así, la expresión para calcular la rigidez en la dirección  $x$  (para un lóbulo completo de la suspensión) será:

$$k = \frac{Ehb^3}{2L_1^3} \left( \frac{L_2 + 2L_1}{2L_2 + L_1} \right)$$

y para la rigidez en la dirección  $z$  (también para un lóbulo completo de la suspensión) será:

$$k_z = \frac{6EGI_y I_t}{3EI_y L_2 (L_1^2 + L_1 L_2) + GI_t (2L_1^3 + L_2^3)}$$

Dado que  $h = 3,5 \mu\text{m}$  y  $b = 3,5 \mu\text{m}$ , sólo queda por definir el largo de las vigas, para lo cual se construirá una tabla en dónde se pongan distintos valores dimensionales para  $L_1$  y  $L_2$ .

Con  $h = 3,5 \mu\text{m}$  y  $b = 3,5 \mu\text{m}$ , el cálculo de la rigidez para la suspensión completa (considerando los dos lóbulos, frontal y trasero) será:

$L_2$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_1$ [ $\mu\text{m}$ ]	$k$ [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]	$k_z$ [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]
10	200	5,5932	1,3269
10	250	2,9025	0,6961
10	300	1,6952	0,4095
10	350	1,0746	0,2609
10	400	0,7235	0,1763
10	450	0,5102	0,1247
10	500	0,3731	0,0914
10	750	0,1116	0,0275
10	1000	0,0473	0,0117
20	200	5,2522	1,1772
20	250	2,7554	0,6320
20	300	1,6216	0,3776
20	350	1,0338	0,2433
20	400	0,6992	0,1659
20	450	0,4947	0,1181
20	500	0,3628	0,087
20	750	0,1095	0,0266
20	1000	0,0466	0,0114

Continuación de la tabla con la rigidez de una suspensión tipo caja con bordes angulares a noventa grados,  $h = 3,5 \mu\text{m}$  y  $b = 3,5 \mu\text{m}$ .

$L_2$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_1$ [ $\mu\text{m}$ ]	$k$ [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]	$k_z$ [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]
30	200	4,9636	1,0481
30	250	2,6272	0,5751
30	300	1,5562	0,3488
30	350	0,9971	0,2272
30	400	0,6769	0,1562
30	450	0,4805	0,1119
30	500	0,3533	0,0829
30	750	0,1075	0,0258
30	1000	0,046	0,0111
40	200	4,7163	0,9365
40	250	2,5145	0,5245
40	300	1,4977	0,3227
40	350	0,9637	0,2124
40	400	0,6565	0,1471
40	450	0,4673	0,1061
40	500	0,3444	0,079
40	750	0,1056	0,0250
40	1000	0,0454	0,0109
50	200	4,5019	0,8398
50	250	2,4147	0,4795
50	300	1,445	0,299
50	350	0,9333	0,1988
50	400	0,6378	0,1388
50	450	0,4551	0,1007
50	500	0,3361	0,0753
50	750	0,1038	0,0242
50	1000	0,0447	0,0106

Los parámetros dimensionales necesarios para el diseño de la suspensión tipo langosta serán:  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $b$  y  $h$ . Sin embargo, algunas condiciones que pueden tenerse en cuenta para simplificar la expresión de cálculo del coeficiente de rigidez en la dirección  $x$  son que la sección transversal de las vigas con que se forma la suspensión debe ser cuadrada dado que el grosor máximo que pueden alcanzar las vigas de la suspensión será de  $3,5 \mu\text{m}$ , ello obliga a mantener el ancho también en  $3,5 \mu\text{m}$  en virtud de que las vigas seguramente se formarán empleando el método de apilamiento de las placas estructurales (subsección *Suspensión* del capítulo 8). Así, la expresión para calcular la rigidez en la dirección  $x$  (para los cuatro lóbulos de la suspensión) será:

$$k = \frac{(20L_1^4 + 24L_1^3L_2 + 24L_1^2L_2^2 + 12L_1L_2^3 + 64L_1L_2^2 + 48L_2^3 - 3L_2^4)Ehb^3}{d_1 + d_2}$$

donde:

$$\begin{aligned} d_1 &= 48L_2^6 + 16L_1^7 - 15L_2^7 + 80L_1^4L_2^2 + 192L_1^3L_2^3 + 336L_1^2L_2^4 + 272L_1L_2^5 \\ d_2 &= 60L_1^6L_2 + 180L_1^5L_2^2 + 244L_1^4L_2^3 + 144L_1^3L_2^4 + 3L_1^2L_2^5 - 57L_1L_2^6 \end{aligned}$$

y para la rigidez en la dirección  $z$  (considerando los cuatro lóbulos que forman la suspensión) la expresión será:

$$k_z = \frac{12EGI_yI_t}{6EI_y(L_1 + L_2)(L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2) + GI_t + (4L_1^3 + 6L_1L_2(L_1 + L_2) + 3L_2^3)}$$

Dado que  $h = 3,5 \mu\text{m}$  y  $b = 3,5 \mu\text{m}$ , sólo queda por definir el largo de las vigas, para lo cual se construirá una tabla en donde se propongan distintos valores dimensionales para  $L_1$  y  $L_2$ .

Con  $h = 3,5 \mu\text{m}$  y  $b = 3,5 \mu\text{m}$ , el cálculo de la rigidez para la suspensión completa (considerando los cuatro lóbulos) será:

$L_2$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_1$ [ $\mu\text{m}$ ]	$k$ [ $\text{kg/s}^2$ ]	$k_z$ [ $\text{kg/s}^2$ ]
10	100	16,0785	$4,9264 \times 10^{-12}$
10	200	2,2208	$8,0898 \times 10^{-13}$
10	300	0,6907	$2,5179 \times 10^{-13}$
10	400	0,3054	$1,0823 \times 10^{-13}$
10	500	0,1648	$5,5957 \times 10^{-14}$
20	100	13,1808	$4,3346 \times 10^{-12}$
20	200	2,0117	$7,5055 \times 10^{-13}$
20	300	0,6375	$2,3936 \times 10^{-13}$
20	400	0,2798	$1,0419 \times 10^{-13}$
20	500	0,148	$5,4284 \times 10^{-14}$

Continuación de la tabla con la rigidez de una suspensión tipo langosta,  $h = 3,5$  [ $\mu\text{m}$ ] y  $b = 3,5$  [ $\mu\text{m}$ ].

$L_2$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_1$ [ $\mu\text{m}$ ]	$k$ [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]	$k_z$ [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]
30	100	10,722	$3,7906 \times 10^{-12}$
30	200	1,8231	$6,9535 \times 10^{-13}$
30	300	0,5966	$2,2739 \times 10^{-13}$
30	400	0,2649	$1,0027 \times 10^{-13}$
30	500	0,1404	$5,2646 \times 10^{-14}$
40	100	8,7159	$3,3009 \times 10^{-12}$
40	200	1,6479	$6,4347 \times 10^{-13}$
40	300	0,5586	$2,1589 \times 10^{-13}$
40	400	0,2519	$9,6458 \times 10^{-14}$
40	500	0,1345	$5,1046 \times 10^{-14}$
50	100	7,1141	$2,8676 \times 10^{-12}$
50	200	1,4869	$5,9495 \times 10^{-13}$
50	300	0,5226	$2,0487 \times 10^{-13}$
50	400	0,2397	$9,276 \times 10^{-14}$
50	500	0,1291	$4,9483 \times 10^{-14}$

Finalmente, los parámetros dimensionales necesarios para el diseño de la suspensión tipo sagital serán:  $L$ ,  $\phi$ ,  $b$  y  $h$ . Algunas condiciones que pueden tenerse en cuenta para simplificar la expresión de cálculo del coeficiente de rigidez en la dirección  $x$  son que la sección transversal de las vigas con que se forma la suspensión debe ser cuadrada dado que el grosor máximo que pueden alcanzar las vigas de la suspensión es de  $3,5$  [ $\mu\text{m}$ ], lo que obliga a mantener el ancho también en  $3,5$  [ $\mu\text{m}$ ] en virtud de que las vigas seguramente se formarán empleando el método de apilamiento de las placas estructurales (subsección *Suspensión* del capítulo 8), además  $L_R = 20$  [ $\mu\text{m}$ ] y  $L_A = 50$  [ $\mu\text{m}$ ]. Así, la expresión para calcular la rigidez en la dirección  $x$  (para los dos lóbulos que forman la suspensión completa) será:

$$k = \frac{2Ehb^3}{L^3 \cos^2 \phi}$$

y para la rigidez en la dirección  $z$  (considerando los dos lóbulos que forman la suspensión completa) la expresión será:

$$k_z = \frac{24}{L} \frac{EGI_y I_t}{d_1 + d_2 + d_3}$$

dónde

$$\begin{aligned} d_1 &= 6EI_y((L_A - 2u)^2 \sin^2 \phi + 2(L_R + 2L \sin \phi)(L_R \cos \phi + (2L \cos \phi + L_A - 2u) \sin \phi) \cos \phi) \\ d_2 &= GI_t(6L_R^2 + 14L^2 + 3(L_A - 2u)^2 + 3((L_A - 2u)^2 - 2(L_R^2 + 2L^2)) \cos(2\phi) - 6(2u - L_A)(L - 2L_R \sin \phi) \cos \phi) \\ d_3 &= 6GI_t L((L_A - 2u) \cos(3\phi) + L \cos(4\phi) + 4L_R \sin \phi - 2L_R \sin(3\phi)) \\ u &= \frac{GI_t(L_A \cos \phi + L \cos(2\phi)) \cos \phi + (EI_y - GI_t)L_R \sin \phi \cos \phi + EI_y(L_A + 2L \cos \phi) \sin^2 \phi}{2(GI_t \cos^2 \phi + EI_y \sin^2 \phi)} \end{aligned}$$

Dado que  $L_R = 20$  [ $\mu\text{m}$ ],  $L_A = 50$  [ $\mu\text{m}$ ],  $h = 3,5$  [ $\mu\text{m}$ ] y  $b = 3,5$  [ $\mu\text{m}$ ], sólo queda por definir el largo de las vigas y su ángulo de inclinación, para lo cual se construirá una tabla en dónde se propongan distintos valores dimensionales para  $\phi$  y  $L$ .

$\phi$ [°]	$L$ [ $\mu\text{m}$ ]	$k$ [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]	$k_z$ [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]
15	100	51,4677	5,33
15	200	6,4335	0,8659
15	300	1,9062	0,2812
15	400	0,8042	0,1243
15	500	0,4117	0,0654
30	100	64,0267	2,511
30	200	8,0033	0,3764
30	300	2,3714	0,1188
30	400	1,0004	0,0518
30	500	0,5122	0,027
45	100	96,04	1,6573
45	200	12,005	0,2383
45	300	3,557	0,0741
45	400	1,5006	0,032
45	500	0,7683	0,0167

El siguiente parámetro de diseño a considerar será la masa suspendida formada por la placa de material estructural, para ello se ampliarán los datos contenidos en la tabla creada en la subsección *Masa móvil* del capítulo 8 con dimensiones y masas mayores.

Área [ $\mu\text{m}^2$ ]	Poly1 [kg]	Poly1+Poly2 [kg]	Poly1+Poly2+Metal [kg]	Agujeros
240 × 120	$1,3264 \times 10^{-10}$	$2,286 \times 10^{-10}$	$4,5684 \times 10^{-10}$	21
240 × 180	$1,987 \times 10^{-10}$	$3,4186 \times 10^{-10}$	$6,8613 \times 10^{-10}$	35
240 × 240	$2,6476 \times 10^{-10}$	$4,5511 \times 10^{-10}$	$9,1542 \times 10^{-10}$	49
360 × 180	$2,9787 \times 10^{-10}$	$5,1204 \times 10^{-10}$	$1,03 \times 10^{-9}$	55
360 × 240	$3,9688 \times 10^{-10}$	$6,8163 \times 10^{-10}$	$1,374 \times 10^{-9}$	77
360 × 360	$5,9491 \times 10^{-10}$	$1,0208 \times 10^{-9}$	$2,062 \times 10^{-9}$	121
480 × 240	$5,29 \times 10^{-10}$	$9,0814 \times 10^{-10}$	$1,8326 \times 10^{-9}$	105
480 × 360	$7,9295 \times 10^{-10}$	$1,36 \times 10^{-9}$	$2,7499 \times 10^{-9}$	165
480 × 480	$1,0569 \times 10^{-9}$	$1,8118 \times 10^{-9}$	$3,6673 \times 10^{-9}$	225
600 × 360	$9,9098 \times 10^{-10}$	$1,6991 \times 10^{-9}$	$3,4379 \times 10^{-9}$	209
600 × 480	$1,3208 \times 10^{-9}$	$2,2636 \times 10^{-9}$	$4,5846 \times 10^{-9}$	285
600 × 600	$1,6507 \times 10^{-9}$	$2,8281 \times 10^{-9}$	$5,7314 \times 10^{-9}$	361
960x360	$1,5851 \times 10^{-9}$	$2,7167 \times 10^{-9}$	$5,5018 \times 10^{-9}$	341
960x480	$2,1127 \times 10^{-9}$	$3,6191 \times 10^{-9}$	$7,3367 \times 10^{-9}$	465
960x600	$2,6402 \times 10^{-9}$	$4,5216 \times 10^{-9}$	$9,1716 \times 10^{-9}$	589
960x960	$4,223 \times 10^{-9}$	$7,229 \times 10^{-9}$	$1,4676 \times 10^{-9}$	961
1200x360	$1,9811 \times 10^{-9}$	$3,395 \times 10^{-9}$	$6,8777 \times 10^{-9}$	429
1200x480	$2,6405 \times 10^{-9}$	$4,5228 \times 10^{-9}$	$9,1714 \times 10^{-9}$	585
1200x600	$3,3 \times 10^{-9}$	$5,6506 \times 10^{-9}$	$1,1465 \times 10^{-8}$	741
1200x960	$5,2782 \times 10^{-9}$	$9,034 \times 10^{-9}$	$1,8346 \times 10^{-8}$	1209
1200x1200	$6,597 \times 10^{-9}$	$1,129 \times 10^{-9}$	$2,2933 \times 10^{-8}$	1521

El parámetro de diseño que completa el sistema masa-resorte-amortiguador es precisamente el disipador de energía creado por los distintos efectos del aire circundante sobre la placa suspendida (masa móvil). Para estimar el valor general de amortiguamiento se tiene la ecuación 8.12, formada por cuatro componentes que involucran la viscosidad del aire ( $\mu$ ), las dimensiones de la placa suspendida o masa móvil ( $B_m$  y  $L_m$ ), las dimensiones de los electrodos del actuador electrostático, su separación y cantidad ( $L_e$ ,  $h_e$ ,  $d_e$  y  $n$ ), la separación entre el sustrato y la placa suspendida o masa móvil ( $d_{sm}$ ) y la frecuencia de oscilación de la masa móvil ( $\omega$ ). Entre los parámetros antes descritos se puede considerar a la viscosidad del aire como una constante, el grosor mínimo de los electrodos será de 2 [ $\mu\text{m}$ ] y el máximo de 3,5 [ $\mu\text{m}$ ], la separación mínima entre electrodos será de 2 [ $\mu\text{m}$ ] y la separación entre el sustrato y la placa suspendida será de 2 [ $\mu\text{m}$ ].

Si se toman los grosores mínimo y máximo de los electrodos y la separación mínima como parámetros de diseño, sólo quedan por definir las dimensiones de la placa suspendida, el largo de los electrodos y su número y la frecuencia de oscilación de la masa móvil, para lo cual se construirán una serie de tablas con distintos valores para estos parámetros.

Con  $h_e = 3,5$  [ $\mu\text{m}$ ],  $d_e = 2$  [ $\mu\text{m}$ ],  $d_{ms} = 2$  [ $\mu\text{m}$ ] y considerando que  $n = 56$  para una placa de 480 [ $\mu\text{m}$ ] de largo o  $n = 72$  para una placa de 600 [ $\mu\text{m}$ ] de largo o  $n = 120$  para una placa de 960 [ $\mu\text{m}$ ] de largo o  $n = 152$  para una placa de 1200 [ $\mu\text{m}$ ] de largo.

$B_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\omega$ [hz]	$c_{gral1}$	$c_{gral2}$
360	480	600	150	50	$2,42 \times 10^{-6}$	$3,04 \times 10^{-6}$
360	480	600	150	100	$2,42 \times 10^{-6}$	$3,04 \times 10^{-6}$
360	480	600	150	200	$2,42 \times 10^{-6}$	$3,05 \times 10^{-6}$
360	480	600	150	500	$2,43 \times 10^{-6}$	$3,05 \times 10^{-6}$
360	480	600	150	1000	$2,43 \times 10^{-6}$	$3,06 \times 10^{-6}$
360	480	600	300	50	$3,23 \times 10^{-6}$	$4,09 \times 10^{-6}$
360	480	600	300	100	$3,23 \times 10^{-6}$	$4,09 \times 10^{-6}$
360	480	600	300	200	$3,24 \times 10^{-6}$	$4,09 \times 10^{-6}$
360	480	600	300	500	$3,24 \times 10^{-6}$	$4,1 \times 10^{-6}$
360	480	600	300	1000	$3,25 \times 10^{-6}$	$4,11 \times 10^{-6}$
360	480	600	450	50	$4,05 \times 10^{-6}$	$5,14 \times 10^{-6}$
360	480	600	450	100	$4,05 \times 10^{-6}$	$5,14 \times 10^{-6}$
360	480	600	450	200	$4,05 \times 10^{-6}$	$5,14 \times 10^{-6}$
360	480	600	450	500	$4,06 \times 10^{-6}$	$5,15 \times 10^{-6}$
360	480	600	450	1000	$4,06 \times 10^{-6}$	$5,16 \times 10^{-6}$

$B_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\omega$ [hz]	$c_{gral3}$	$c_{gral4}$
360	960	1200	150	50	$4,92 \times 10^{-6}$	$6,17 \times 10^{-6}$
360	960	1200	150	100	$4,92 \times 10^{-6}$	$6,17 \times 10^{-6}$
360	960	1200	150	200	$4,92 \times 10^{-6}$	$6,18 \times 10^{-6}$
360	960	1200	150	500	$4,93 \times 10^{-6}$	$6,19 \times 10^{-6}$
360	960	1200	150	1000	$4,94 \times 10^{-6}$	$6,2 \times 10^{-6}$
360	960	1200	300	50	$6,66 \times 10^{-6}$	$8,38 \times 10^{-6}$
360	960	1200	300	100	$6,67 \times 10^{-6}$	$8,38 \times 10^{-6}$
360	960	1200	300	200	$6,67 \times 10^{-6}$	$8,39 \times 10^{-6}$
360	960	1200	300	500	$6,68 \times 10^{-6}$	$8,4 \times 10^{-6}$
360	960	1200	300	1000	$6,69 \times 10^{-6}$	$8,41 \times 10^{-6}$
360	960	1200	450	50	$8,41 \times 10^{-6}$	$1,06 \times 10^{-5}$
360	960	1200	450	100	$8,41 \times 10^{-6}$	$1,06 \times 10^{-5}$
360	960	1200	450	200	$8,42 \times 10^{-6}$	$1,06 \times 10^{-5}$
360	960	1200	450	500	$8,43 \times 10^{-6}$	$1,06 \times 10^{-5}$
360	960	1200	450	1000	$8,44 \times 10^{-6}$	$1,06 \times 10^{-5}$

$B_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\omega$ [hz]	$c_{gral5}$	$c_{gral6}$
480	600	960	150	50	$3,71 \times 10^{-6}$	$5,97 \times 10^{-6}$
480	600	960	150	100	$3,71 \times 10^{-6}$	$5,98 \times 10^{-6}$
480	600	960	150	200	$3,71 \times 10^{-6}$	$5,98 \times 10^{-6}$
480	600	960	150	500	$3,72 \times 10^{-6}$	$6 \times 10^{-6}$
480	600	960	150	1000	$3,73 \times 10^{-6}$	$6,01 \times 10^{-6}$
480	600	960	300	50	$4,75 \times 10^{-6}$	$7,72 \times 10^{-6}$
480	600	960	300	100	$4,76 \times 10^{-6}$	$7,72 \times 10^{-6}$
480	600	960	300	200	$4,76 \times 10^{-6}$	$7,73 \times 10^{-6}$
480	600	960	300	500	$4,77 \times 10^{-6}$	$7,74 \times 10^{-6}$
480	600	960	300	1000	$4,78 \times 10^{-6}$	$7,76 \times 10^{-6}$
480	600	960	450	50	$5,8 \times 10^{-6}$	$9,47 \times 10^{-6}$
480	600	960	450	100	$5,81 \times 10^{-6}$	$9,47 \times 10^{-6}$
480	600	960	450	200	$5,81 \times 10^{-6}$	$9,48 \times 10^{-6}$
480	600	960	450	500	$5,82 \times 10^{-6}$	$9,49 \times 10^{-6}$
480	600	960	450	1000	$5,83 \times 10^{-6}$	$9,5 \times 10^{-6}$

$B_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\omega$ [hz]	$c_{gral7}$
480	1200	150	50	$7,48 \times 10^{-6}$
480	1200	150	100	$7,49 \times 10^{-6}$
480	1200	150	200	$7,5 \times 10^{-6}$
480	1200	150	500	$7,51 \times 10^{-6}$
480	1200	150	1000	$7,53 \times 10^{-6}$
480	1200	300	50	$9,7 \times 10^{-6}$
480	1200	300	100	$9,7 \times 10^{-6}$
480	1200	300	200	$9,71 \times 10^{-6}$
480	1200	300	500	$9,73 \times 10^{-6}$
480	1200	300	1000	$9,74 \times 10^{-6}$
480	1200	450	50	$1,19 \times 10^{-5}$
480	1200	450	100	$1,19 \times 10^{-5}$
480	1200	450	200	$1,19 \times 10^{-5}$
480	1200	450	500	$1,19 \times 10^{-5}$
480	1200	450	1000	$1,2 \times 10^{-5}$

$B_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\omega$ [hz]	$c_{gral8}$	$c_{gral9}$
600	960	1200	150	50	$7,03 \times 10^{-6}$	$8,8 \times 10^{-6}$
600	960	1200	150	100	$7,04 \times 10^{-6}$	$8,81 \times 10^{-6}$
600	960	1200	150	200	$7,04 \times 10^{-6}$	$8,82 \times 10^{-6}$
600	960	1200	150	500	$7,06 \times 10^{-6}$	$8,84 \times 10^{-6}$
600	960	1200	150	1000	$7,08 \times 10^{-6}$	$8,86 \times 10^{-6}$
600	960	1200	300	50	$8,78 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^{-5}$
600	960	1200	300	100	$8,78 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^{-5}$
600	960	1200	300	200	$8,79 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^{-5}$
600	960	1200	300	500	$8,81 \times 10^{-6}$	$1,11 \times 10^{-5}$
600	960	1200	300	1000	$8,82 \times 10^{-6}$	$1,11 \times 10^{-5}$
600	960	1200	450	50	$1,05 \times 10^{-5}$	$1,32 \times 10^{-5}$
600	960	1200	450	100	$1,05 \times 10^{-5}$	$1,32 \times 10^{-5}$
600	960	1200	450	200	$1,05 \times 10^{-5}$	$1,32 \times 10^{-5}$
600	960	1200	450	500	$1,06 \times 10^{-5}$	$1,33 \times 10^{-5}$
600	960	1200	450	1000	$1,06 \times 10^{-5}$	$1,33 \times 10^{-5}$

$B_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\omega$ [hz]	$c_{gral10}$
960	1200	150	50	$1,28 \times 10^{-5}$
960	1200	150	100	$1,28 \times 10^{-5}$
960	1200	150	200	$1,28 \times 10^{-5}$
960	1200	150	500	$1,28 \times 10^{-5}$
960	1200	150	1000	$1,29 \times 10^{-5}$
960	1200	300	50	$1,5 \times 10^{-5}$
960	1200	300	100	$1,5 \times 10^{-5}$
960	1200	300	200	$1,5 \times 10^{-5}$
960	1200	300	500	$1,5 \times 10^{-5}$
960	1200	300	1000	$1,51 \times 10^{-5}$
960	1200	450	50	$1,72 \times 10^{-5}$
960	1200	450	100	$1,72 \times 10^{-5}$
960	1200	450	200	$1,72 \times 10^{-5}$
960	1200	450	500	$1,72 \times 10^{-5}$
960	1200	450	1000	$1,73 \times 10^{-5}$

Para el caso en que el acelerómetro se encuentre inmerso en aire enrarecido, es decir, se encapsule a una presión en el rango de 10 [kPa] a 100 [Pa], el coeficiente general de amortiguamiento se calculará mediante la ecuación 8.13, formada por dos componentes que involucran la temperatura ( $T$ ), la presión ( $P$ ), la masa molar del aire ( $M_m$ ), la constante universal molar de los gases ( $R$ ) y algunas dimensiones características de la placa móvil y de la geometría del acelerómetro ( $B_m$ ,  $L_e$ ,  $d_e$  y  $h_e$ ). Fijando los valores de  $d_e$  en 2 [ $\mu\text{m}$ ],  $h_e$  (grosor de los electrodos) en 3,5 [ $\mu\text{m}$ ] y  $h_p$  (grosor de la placa) en 4 [ $\mu\text{m}$ ] (para una placa formada con las capas estructurales de polisilicio y el recubrimiento metálico de oro) de acuerdo con las reglas de diseño del proceso Polymumps y considerando la temperatura  $T$  en 293 [K], la presión  $P$  en el rango de 10 [kPa] a 100 [Pa], la masa molar del aire  $M_m$  en 0,02897 [kg/mol] y la constante universal molar de los gases  $R$  en 8,31 [ $\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2\cdot\text{K}}$ ], en la siguiente tabla se consignan los valores calculados para el coeficiente general de amortiguamiento en placas móviles de distintas dimensiones con cantidades y dimensiones variables de sus electrodos y una presión inicial de 10 [kPa].

Considerando que  $n = 56$  para una placa de 480 [ $\mu\text{m}$ ] de largo o  $n = 72$  para una placa de 600 [ $\mu\text{m}$ ] de largo o  $n = 120$  para una placa de 960 [ $\mu\text{m}$ ] de largo o  $n = 152$  para una placa de 1200 [ $\mu\text{m}$ ] de largo, los coeficientes de amortiguamiento quedan como a continuación se muestra.

$B_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral1}$	$c_{ae\_gral2}$
360	480	600	150	$4,99 \times 10^{-6}$	$6,37 \times 10^{-6}$
360	480	600	300	$1,95 \times 10^{-5}$	$2,5 \times 10^{-5}$
360	480	600	450	$4,36 \times 10^{-5}$	$5,6 \times 10^{-5}$
$B_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral3}$	$c_{ae\_gral4}$
360	960	1200	150	$1,05 \times 10^{-5}$	$1,33 \times 10^{-5}$
360	960	1200	300	$4,16 \times 10^{-5}$	$5,26 \times 10^{-5}$
360	960	1200	450	$9,33 \times 10^{-5}$	$1,18 \times 10^{-4}$
$B_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral5}$	$c_{ae\_gral6}$
480	480	600	150	$5,04 \times 10^{-6}$	$6,42 \times 10^{-6}$
480	480	600	300	$1,95 \times 10^{-5}$	$2,5 \times 10^{-5}$
480	480	600	450	$4,37 \times 10^{-5}$	$5,61 \times 10^{-5}$
$B_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral7}$	$c_{ae\_gral8}$
480	960	1200	150	$1,06 \times 10^{-5}$	$1,33 \times 10^{-5}$
480	960	1200	300	$4,16 \times 10^{-5}$	$5,26 \times 10^{-5}$
480	960	1200	450	$9,33 \times 10^{-5}$	$1,18 \times 10^{-4}$

$B_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral9}$	$c_{ae\_gral10}$
600	480	600	150	$5,09 \times 10^{-6}$	$6,47 \times 10^{-6}$
600	480	600	300	$1,96 \times 10^{-5}$	$2,51 \times 10^{-5}$
600	480	600	450	$4,37 \times 10^{-5}$	$5,61 \times 10^{-5}$
$B_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral11}$	$c_{ae\_gral12}$
600	960	1200	150	$1,06 \times 10^{-5}$	$1,34 \times 10^{-5}$
600	960	1200	300	$4,16 \times 10^{-5}$	$5,27 \times 10^{-5}$
600	960	1200	450	$9,34 \times 10^{-5}$	$1,18 \times 10^{-4}$
$B_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral13}$	$c_{ae\_gral14}$
960	480	600	150	$5,25 \times 10^{-6}$	$6,63 \times 10^{-6}$
960	480	600	300	$1,97 \times 10^{-5}$	$2,53 \times 10^{-5}$
960	480	600	450	$4,39 \times 10^{-5}$	$5,63 \times 10^{-5}$
$B_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral15}$	$c_{ae\_gral16}$
960	960	1200	150	$1,08 \times 10^{-5}$	$1,35 \times 10^{-5}$
960	960	1200	300	$4,18 \times 10^{-5}$	$5,29 \times 10^{-5}$
960	960	1200	450	$9,35 \times 10^{-5}$	$1,18 \times 10^{-4}$

Ahora, con una presión de 100 [Pa] y el resto de los valores idénticos, se tiene:

$B_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral1}$	$c_{ae\_gral2}$
360	480	600	150	$4,99 \times 10^{-8}$	$6,37 \times 10^{-8}$
360	480	600	300	$1,95 \times 10^{-7}$	$2,5 \times 10^{-7}$
360	480	600	450	$4,36 \times 10^{-7}$	$5,6 \times 10^{-7}$
$B_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral3}$	$c_{ae\_gral4}$
360	960	1200	150	$1,05 \times 10^{-7}$	$1,33 \times 10^{-7}$
360	960	1200	300	$4,16 \times 10^{-7}$	$5,26 \times 10^{-7}$
360	960	1200	450	$9,33 \times 10^{-7}$	$1,18 \times 10^{-6}$
$B_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral5}$	$c_{ae\_gral6}$
480	480	600	150	$5,04 \times 10^{-8}$	$6,42 \times 10^{-8}$
480	480	600	300	$1,95 \times 10^{-7}$	$2,5 \times 10^{-7}$
480	480	600	450	$4,37 \times 10^{-7}$	$5,61 \times 10^{-7}$
$B_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral7}$	$c_{ae\_gral8}$
480	960	1200	150	$1,06 \times 10^{-7}$	$1,33 \times 10^{-7}$
480	960	1200	300	$4,16 \times 10^{-7}$	$5,26 \times 10^{-7}$
480	960	1200	450	$9,33 \times 10^{-7}$	$1,18 \times 10^{-6}$
$B_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral9}$	$c_{ae\_gral10}$
600	480	600	150	$5,09 \times 10^{-8}$	$6,47 \times 10^{-8}$
600	480	600	300	$1,96 \times 10^{-7}$	$2,51 \times 10^{-7}$
600	480	600	450	$4,37 \times 10^{-7}$	$5,61 \times 10^{-7}$
$B_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral11}$	$c_{ae\_gral12}$
600	960	1200	150	$1,06 \times 10^{-7}$	$1,34 \times 10^{-7}$
600	960	1200	300	$4,16 \times 10^{-7}$	$5,27 \times 10^{-7}$
600	960	1200	450	$9,34 \times 10^{-7}$	$1,18 \times 10^{-6}$
$B_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral13}$	$c_{ae\_gral14}$
960	480	600	150	$5,25 \times 10^{-8}$	$6,63 \times 10^{-8}$
960	480	600	300	$1,97 \times 10^{-7}$	$2,53 \times 10^{-7}$
960	480	600	450	$4,39 \times 10^{-7}$	$5,63 \times 10^{-7}$

$B_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_{m4}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$c_{ae\_gral15}$	$c_{ae\_gral16}$
960	960	1200	150	$1,08 \times 10^{-7}$	$1,35 \times 10^{-7}$
960	960	1200	300	$4,18 \times 10^{-7}$	$5,29 \times 10^{-7}$
960	960	1200	450	$9,36 \times 10^{-7}$	$1,18 \times 10^{-6}$

Toca el turno al transductor mecánico-eléctrico con el cual se harán los registros de variación en la capacitancia que son proporcionales al desplazamiento y que a su vez son proporcionales a la aceleración experimentada por el dispositivo. De acuerdo con la ecuación 8.14, los parámetros que deben tenerse en cuenta para la determinación de dimensiones en el transductor son  $d_e$  que es la distancia de separación entre electrodos fijos y móviles,  $m_{total}$  que es la masa de la placa y de los electrodos móviles,  $n$  que es el número de pares de electrodos,  $L_e$  que es el traslape a lo largo entre los electrodos móviles y los electrodos fijos y  $h_e$  que es el grosor de los electrodos, además de parámetros eléctricos como  $A_2$ , la ganancia de lazo abierto del amplificador operacional de salida en la etapa de acondicionamiento de la señal y  $V_0$ , la amplitud de la componente de CD del voltaje con que se polarizan los electrodos (con valores de 6, 12 y 60 [V]) y el valor de la aceleración de entrada  $a$  ubicada en el rango de 100 a 10 [ $\mu\text{g}$ ]. En las tablas siguientes se muestran algunos valores para el voltaje de salida que están en función de las características dimensionales y los parámetros eléctricos. Fijando algunos valores tales como: la separación entre electrodos  $d_e = 2$  [ $\mu\text{m}$ ] y el grosor de los electrodos  $h_e = 3,5$  [ $\mu\text{m}$ ] se puede construir una tabla con los posibles valores del voltaje de salida.

El valor correspondiente a  $m_{total1}$  se obtuvo de una placa de 1200 [ $\mu\text{m}$ ] por 1200 [ $\mu\text{m}$ ] formada con las dos capas estructurales de polisilicio y la capa adicional de metal con 152 electrodos de 150, 300 y 450 [ $\mu\text{m}$ ], en cuanto a  $m_{total2}$  se obtuvo de una placa de 1200 [ $\mu\text{m}$ ] por 960 [ $\mu\text{m}$ ] formada con las dos capas estructurales de polisilicio y la capa adicional de metal con 120 electrodos de 150, 300 y 450 [ $\mu\text{m}$ ] y  $m_{total3}$  se obtuvo a partir de una placa de 1200 [ $\mu\text{m}$ ] por 600 [ $\mu\text{m}$ ] formada con las dos capas estructurales de polisilicio y la capa adicional de metal con 72 electrodos de 150, 300 y 450 [ $\mu\text{m}$ ].

$m_{total1}$ [kg]	$m_{total2}$ [kg]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$V_0$ [V]	$a$ [ $\text{m/s}^2$ ]	$V_{out1}$ [mV]	$V_{out2}$ [mV]
$2,36 \times 10^{-8}$	$1,88 \times 10^{-8}$	150	6	0,981	54,5	55,2
$2,36 \times 10^{-8}$	$1,88 \times 10^{-8}$	150	6	0,0981	5,45	5,52
$2,36 \times 10^{-8}$	$1,88 \times 10^{-8}$	150	12	0,981	27,25	27,6
$2,36 \times 10^{-8}$	$1,88 \times 10^{-8}$	150	12	0,0981	2,72	2,76
$2,36 \times 10^{-8}$	$1,88 \times 10^{-8}$	150	60	0,981	5,45	5,52
$2,36 \times 10^{-8}$	$1,88 \times 10^{-8}$	150	60	0,0981	,54	0,55
$2,41 \times 10^{-8}$	$1,93 \times 10^{-8}$	300	6	0,981	27,89	28,25
$2,41 \times 10^{-8}$	$1,93 \times 10^{-8}$	300	6	0,0981	2,79	2,82
$2,41 \times 10^{-8}$	$1,93 \times 10^{-8}$	300	12	0,981	13,95	14,12
$2,41 \times 10^{-8}$	$1,93 \times 10^{-8}$	300	12	0,0981	1,4	1,41
$2,41 \times 10^{-8}$	$1,93 \times 10^{-8}$	300	60	0,981	2,79	2,82
$2,41 \times 10^{-8}$	$1,93 \times 10^{-8}$	300	60	0,0981	,28	,28
$2,47 \times 10^{-8}$	$1,97 \times 10^{-8}$	450	6	0,981	19,03	19,26
$2,47 \times 10^{-8}$	$1,97 \times 10^{-8}$	450	6	0,0981	1,9	1,93
$2,47 \times 10^{-8}$	$1,97 \times 10^{-8}$	450	12	0,981	9,51	9,63
$2,47 \times 10^{-8}$	$1,97 \times 10^{-8}$	450	12	0,0981	,95	,96
$2,47 \times 10^{-8}$	$1,97 \times 10^{-8}$	450	60	0,981	1,9	1,92
$2,47 \times 10^{-8}$	$1,97 \times 10^{-8}$	450	60	0,0981	,19	,19

$m_{total3}$ [kg]	$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$V_0$ [V]	$a$ [ $\text{m/s}^2$ ]	$V_{out3}$ [mV]
$1,18 \times 10^{-8}$	150	6	0,981	57,44
$1,18 \times 10^{-8}$	150	6	0,0981	5,74
$1,18 \times 10^{-8}$	150	12	0,981	28,72
$1,18 \times 10^{-8}$	150	12	0,0981	2,87
$1,18 \times 10^{-8}$	150	60	0,981	5,74
$1,18 \times 10^{-8}$	150	60	0,0981	,57
$1,2 \times 10^{-8}$	300	6	0,981	29,36
$1,2 \times 10^{-8}$	300	6	0,0981	2,94
$1,2 \times 10^{-8}$	300	12	0,981	14,68
$1,2 \times 10^{-8}$	300	12	0,0981	1,47
$1,2 \times 10^{-8}$	300	60	0,981	2,93
$1,2 \times 10^{-8}$	300	60	0,0981	,29
$1,23 \times 10^{-8}$	450	6	0,981	20
$1,23 \times 10^{-8}$	450	6	0,0981	2
$1,23 \times 10^{-8}$	450	12	0,981	10
$1,23 \times 10^{-8}$	450	12	0,0981	1
$1,23 \times 10^{-8}$	450	60	0,981	2
$1,23 \times 10^{-8}$	450	60	0,0981	,2

Con la fuerza electrostática generada por el transductor mecánico eléctrico realimentado, las ecuaciones 6.12 y 6.13 muestran que el sistema tiene una constante elástica efectiva  $k_{eff}$ , la cual se calcula a partir de la constante  $k$  de la suspensión más el término  $\frac{2nL_e h_e \varepsilon \varepsilon_0 V_0^2 \alpha A_{op}}{d_e^3}$ , correspondiente a la actuación electrostática. En la tabla siguiente se enlistan valores para el término debido a la actuación electrostática en función de la cantidad y dimensiones de los electrodos.

Con  $h_e = 3,5$  [ $\mu\text{m}$ ],  $d_e = 2$  [ $\mu\text{m}$ ],  $\alpha = \frac{1}{20}$ ,  $A_{op} = 20$ ,  $\varepsilon_0 = 8,8544 \times 10^{-12}$  y  $\varepsilon = 1,00059$ , se tienen como valores posibles para la constante elástica electrostática los enlistados en la tabla siguiente. El valor de  $n = 40$  corresponde a una placa de 360 [ $\mu\text{m}$ ] de largo,  $n = 56$  corresponde a una placa de 480 [ $\mu\text{m}$ ] de largo,  $n = 72$  representa una placa de 600 [ $\mu\text{m}$ ] de largo,  $n = 120$  una placa de 960 [ $\mu\text{m}$ ] de largo y  $n = 152$  es el número de electrodos para una placa de 1200 [ $\mu\text{m}$ ] de largo.

$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$n$	$V_0$ [V]	$k_{electrostática}$ [ $\text{kg/s}^2$ ]
150	40	6	1,6745
150	40	12	2,3443
150	40	60	3,014
150	56	6	5,0234
150	56	12	6,363
150	56	60	3,3489
150	72	6	4,6885
150	72	12	6,028
150	72	60	10,0468
150	120	6	12,726
150	120	12	5,0234
150	120	60	7,0328
150	152	6	9,0421
150	152	12	15,0702
150	152	60	19,0889

$L_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	$n$	$V_0$ [V]	$k_{electrostática}$ [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]
300	40	6	6,6979
300	40	12	9,377
300	40	60	12,0562
300	56	6	20,0936
300	56	12	25,4519
300	56	60	13,3958
300	72	6	18,7541
300	72	12	24,1124
300	72	60	40,1873
300	120	6	50,9039
300	120	12	20,0936
300	120	60	28,1311
300	152	6	36,1685
300	152	12	60,2809
300	152	60	76,3558
450	40	6	167,4469
450	40	12	234,4257
450	40	60	301,4044
450	56	6	502,3407
450	56	12	636,2982
450	56	60	334,8938
450	72	6	468,8513
450	72	12	602,8088
450	72	60	1004,6814
450	120	6	1272,5964
450	120	12	502,3407
450	120	60	703,277
450	152	6	904,2132
450	152	12	1507,022
450	152	60	1908,8946

Es necesario escoger ahora las características dimensionales para el diseño del acelerómetro en función del factor de calidad y la frecuencia de resonancia. A partir de los valores consignados en todas las tablas previas en este capítulo y de las definiciones de frecuencia de resonancia y factor de calidad, las propuestas dimensionales para la masa móvil será de 600 por 1200, 960 por 1200, 1200 por 360 y 1200 por 480 micrometros cuadrados empleando una capa estructural de polisilicio, dos capas estructurales de polisilicio y dos capas estructurales de polisilicio más el recubrimiento de metal. En cuanto a la suspensión se probaron las de tipo caja con bordes redondeados, la de tipo caja con bordes angulares a 90 grados y la de tipo sagital; resultaron ser mucho mejores las suspensiones tipo caja con bordes angulares a 90 grados y la de tipo sagital; las dimensiones de la suspensión con bordes angulares serán de 30 por 200 y en la de tipo sagital se emplearán ángulos de 15, 30 y 45 grados y longitudes de 200, 300 y 400 [ $\mu\text{m}$ ]. Los electrodos tendrán 300 [ $\mu\text{m}$ ] de largo y 3,5 [ $\mu\text{m}$ ] de grosor. La alimentación eléctrica de entrada tendrá la forma  $V_0 + V_1 \sin(\omega t)$ ,  $V_0$  tomará valores de entre 6 y 12 [V],  $V_1$  será  $\frac{1}{20}V_0$  y  $\omega$  será un orden mayor que la frecuencia de resonancia del dispositivo. La presión a la que se simulará el encapsulado del sensor inercial sera de entre 10 [kPa] y 100 [Pa] y la aceleración de entrada se ubicará entre 100 y 10 mG's.

*Primera propuesta de diseño para el acelerómetro.*

- Dimensiones de la placa móvil (ancho por largo en [ $\mu\text{m}$ ] cada una):  $600 \times 1200$
- Grosor de la placa móvil: primera y segunda capas estructurales de polisilicio más capa metálica de recubrimiento (4 [ $\mu\text{m}$ ]).
- Masa de la placa móvil más masa de los electrodos (expresada en [kg]):  $12,66 \times 10^{-9}$

- Suspensión tipo caja con bordes angulares a 90 grados (ancho, grosor, largo de la vigas mayor y menor en  $[\mu\text{m}]$  cada una): 3,5, 3,5, 200 y 30
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $x$  ( $k_x$ , expresada en  $[\text{kg}/\text{s}^2]$ ): 4,9636
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $z$  ( $k_z$ , expresada en  $[\text{kg}/\text{s}^2]$ ): 1,0481
- Desplazamiento de la placa móvil bajo el efecto de su peso en la dirección  $z$  (expresado en  $[\mu\text{m}]$ ): 0,12
- Dimensiones de los electrodos en el sensor capacitivo y actuador electrostático (ancho, grosor y largo en  $[\mu\text{m}]$  cada una): 3, 3,5 y 300
- Cantidad de pares de electrodos colocados a lo largo de la placa móvil: 152
- Componente de corriente directa en el voltaje de alimentación para el sensor capacitivo y actuador electrostático (expresada en  $[\text{V}]$ ): 6
- Constante de elasticidad generada por la fuerza electrostática en el actuador ( $k_e$ , expresada en  $[\text{kg}/\text{s}^2]$ ): 12,726
- Constante de elasticidad efectiva ( $k_{ef} = k_x + k_e$ , expresada en  $[\text{kg}/\text{s}^2]$ ): 17,6896
- Presión del encapsulado del dispositivo (expresada en  $[\text{Pa}]$ ): 100
- Coeficiente general de amortiguamiento en aire enrarecido (expresado en  $[\text{kg}/\text{s}]$ ):  $0,527 \times 10^{-6}$
- Frecuencia natural de oscilación (expresada en  $[\text{kHz}]$ ): 37,387
- Razón de amortiguamiento (adimensional):  $556,882 \times 10^{-6}$
- Frecuencia de resonancia (expresada en  $[\text{kHz}]$ ): 37,387
- Factor de calidad (adimensional): 897,8566
- Rango de aceleraciones que puede detectar (expresado en miligravedades): de 10 a 100
- Rango de voltajes de salida (expresado en  $[\text{mV}]$ ): de 1,4633 a 14,633

*Segunda propuesta de diseño para el acelerómetro.*

- Dimensiones de la placa móvil (ancho por largo en  $[\mu\text{m}]$  cada una):  $600 \times 1200$
- Grosor de la placa móvil: primera y segunda capas estructurales de polisilicio más capa metálica de recubrimiento ( $4 [\mu\text{m}]$ ).
- Masa de la placa móvil más masa de los electrodos (expresada en  $[\text{kg}]$ ):  $12,66 \times 10^{-9}$
- Suspensión tipo sagital con ángulo de 45 grados (ancho, grosor y largo de la viga en  $[\mu\text{m}]$  cada uno): 3,5, 3,5 y 200
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $x$  ( $k_x$ , expresada en  $[\text{kg}/\text{s}^2]$ ): 12,005
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $z$  ( $k_z$ , expresada en  $[\text{kg}/\text{s}^2]$ ): 0,2383
- Desplazamiento de la placa móvil bajo el efecto de su peso en la dirección  $z$  (expresado en  $[\mu\text{m}]$ ): 0,52
- Dimensiones de los electrodos en el sensor capacitivo y actuador electrostático (ancho, grosor y largo en  $[\mu\text{m}]$  cada una): 3, 3,5 y 300
- Cantidad de pares de electrodos colocados a lo largo de la placa móvil: 152
- Componente de corriente directa en el voltaje de alimentación para el sensor capacitivo y actuador electrostático (expresada en  $[\text{V}]$ ): 6

- Constante de elasticidad generada por la fuerza electrostática en el actuador ( $k_e$ , expresada en  $[\text{kg/s}^2]$ ): 12,726
- Constante de elasticidad efectiva ( $k_{ef} = k_x + k_e$ , expresada en  $[\text{kg/s}^2]$ ): 24,731
- Presión del encapsulado del dispositivo (expresada en  $[\text{Pa}]$ ): 100
- Coeficiente general de amortiguamiento en aire enrarecido (expresado en  $[\text{kg/s}]$ ):  $0,527 \times 10^{-6}$
- Frecuencia natural de oscilación (expresada en  $[\text{kHz}]$ ): 44,206
- Razón de amortiguamiento (adimensional):  $470,979 \times 10^{-6}$
- Frecuencia de resonancia (expresada en  $[\text{kHz}]$ ): 44,206
- Factor de calidad (adimensional): 1061,6194
- Rango de aceleraciones que puede detectar (expresado en miligravedades): de 10 a 100
- Rango de voltajes de salida (expresado en  $[\text{mV}]$ ): de 1,4633 a 14,633

*Tercera propuesta de diseño para el acelerómetro.*

- Dimensiones de la placa móvil (ancho por largo en  $[\mu\text{m}]$  cada una):  $960 \times 1200$
- Grosor de la placa móvil: primera y segunda capas estructurales de polisilicio más capa metálica de recubrimiento (4  $[\mu\text{m}]$ ).
- Masa de la placa móvil más masa de los electrodos (expresada en  $[\text{kg}]$ ):  $19,53 \times 10^{-9}$
- Suspensión tipo caja con bordes angulares a 90 grados (ancho, grosor y largos mayor y menor de las vigas expresadas en  $[\mu\text{m}]$  cada una): 3,5, 3,5, 200 y 30
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $x$  ( $k_x$ , expresada en  $[\text{kg/s}^2]$ ): 4,9636
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $z$  ( $k_z$ , expresada en  $[\text{kg/s}^2]$ ): 1,0481
- Desplazamiento de la placa móvil bajo el efecto de su peso en la dirección  $z$  (expresado en  $[\mu\text{m}]$ ): 0,183
- Dimensiones de los electrodos en el sensor capacitivo y actuador electrostático (ancho, grosor y largo en  $[\mu\text{m}]$  cada una): 3, 3,5 y 300
- Cantidad de pares de electrodos colocados a lo largo de la placa móvil: 152
- Componente de corriente directa en el voltaje de alimentación para el sensor capacitivo y actuador electrostático (expresada en  $[\text{V}]$ ): 6
- Constante de elasticidad generada por la fuerza electrostática en el actuador ( $k_e$ , expresada en  $[\text{kg/s}^2]$ ): 12,726
- Constante de elasticidad efectiva ( $k_{ef} = k_x + k_e$ , expresada en  $[\text{kg/s}^2]$ ): 17,6896
- Presión del encapsulado del dispositivo (expresada en  $[\text{Pa}]$ ): 100
- Coeficiente general de amortiguamiento en aire enrarecido (expresado en  $[\text{kg/s}]$ ):  $0,5286 \times 10^{-6}$
- Frecuencia natural de oscilación (expresada en  $[\text{kHz}]$ ): 30,091
- Razón de amortiguamiento (adimensional):  $449,553 \times 10^{-6}$
- Frecuencia de resonancia (expresada en  $[\text{kHz}]$ ): 30,091
- Factor de calidad (adimensional): 1112,2163

- Rango de aceleraciones que puede detectar (expresado en miligravedades): de 10 a 100
- Rango de voltajes de salida (expresado en [mV]): de 2,2589 a 22,5895

*Cuarta propuesta de diseño para el acelerómetro.*

- Dimensiones de la placa móvil (ancho por largo en [ $\mu\text{m}$ ] cada una):  $960 \times 1200$
- Grosor de la placa móvil: primera y segunda capas estructurales de polisilicio más capa metálica de recubrimiento (4 [ $\mu\text{m}$ ]).
- Masa de la placa móvil más masa de los electrodos (expresada en [kg]):  $19,53 \times 10^{-9}$
- Suspensión tipo sagital con ángulo de 45 grados (ancho, grosor y largo de la viga en [ $\mu\text{m}$ ] cada uno): 3,5, 3,5 y 200
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $x$  ( $k_x$ , expresada en [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]): 12,005
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $z$  ( $k_z$ , expresada en [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]): 0,2383
- Desplazamiento de la placa móvil bajo el efecto de su peso en la dirección  $z$  (expresado en [ $\mu\text{m}$ ]): 0,804
- Dimensiones de los electrodos en el sensor capacitivo y actuador electrostático (ancho, grosor y largo en [ $\mu\text{m}$ ] cada una): 3, 3,5 y 300
- Cantidad de pares de electrodos colocados a lo largo de la placa móvil: 152
- Componente de corriente directa en el voltaje de alimentación para el sensor capacitivo y actuador electrostático (expresada en [V]): 6
- Constante de elasticidad generada por la fuerza electrostática en el actuador ( $k_e$ , expresada en [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]): 12,726
- Constante de elasticidad efectiva ( $k_{ef} = k_x + k_e$ , expresada en [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]): 24,731
- Presión del encapsulado del dispositivo (expresada en [Pa]): 100
- Coeficiente general de amortiguamiento en aire enrarecido (expresado en [ $\text{kg}/\text{s}$ ]):  $0,5286 \times 10^{-6}$
- Frecuencia natural de oscilación (expresada en [kHz]): 35,579
- Razón de amortiguamiento (adimensional):  $380,206 \times 10^{-6}$
- Frecuencia de resonancia (expresada en [kHz]): 35,579
- Factor de calidad (adimensional): 1315,0769
- Rango de aceleraciones que puede detectar (expresado en miligravedades): de 10 a 100
- Rango de voltajes de salida (expresado en [mV]): de 2,2589 a 22,5895

*Quinta propuesta de diseño para el acelerómetro.*

- Dimensiones de la placa móvil (ancho por largo en [ $\mu\text{m}$ ] cada una):  $1200 \times 360$
- Grosor de la placa móvil: primera y segunda capas estructurales de polisilicio más capa metálica de recubrimiento (4 [ $\mu\text{m}$ ]).
- Masa de la placa móvil más masa de los electrodos (expresada en [kg]):  $7,1909 \times 10^{-9}$

- Suspensión tipo caja con bordes angulares a 90 grados (ancho, grosor y largos mayor y menor de las vigas expresadas en  $[\mu\text{m}]$  cada una): 3,5, 3,5, 200 y 30
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $x$  ( $k_x$ , expresada en  $[\text{kg}/\text{s}^2]$ ): 4,9636
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $z$  ( $k_z$ , expresada en  $[\text{kg}/\text{s}^2]$ ): 1,0481
- Desplazamiento de la placa móvil bajo el efecto de su peso en la dirección  $z$  (expresado en  $[\mu\text{m}]$ ): 0,07
- Dimensiones de los electrodos en el sensor capacitivo y actuador electrostático (ancho, grosor y largo en  $[\mu\text{m}]$  cada una): 3, 3,5 y 300
- Cantidad de pares de electrodos colocados a lo largo de la placa móvil: 40
- Componente de corriente directa en el voltaje de alimentación para el sensor capacitivo y actuador electrostático (expresada en  $[\text{V}]$ ): 6
- Constante de elasticidad generada por la fuerza electrostática en el actuador ( $k_e$ , expresada en  $[\text{kg}/\text{s}^2]$ ): 3,3489
- Constante de elasticidad efectiva ( $k_{ef} = k_x + k_e$ , expresada en  $[\text{kg}/\text{s}^2]$ ): 8,3125
- Presión del encapsulado del dispositivo (expresada en  $[\text{Pa}]$ ): 100
- Coeficiente general de amortiguamiento en aire enrarecido (expresado en  $[\text{kg}/\text{s}]$ ):  $0,1433 \times 10^{-6}$
- Frecuencia natural de oscilación (expresada en  $[\text{kHz}]$ ): 33,99
- Razón de amortiguamiento (adimensional):  $292,988 \times 10^{-6}$
- Frecuencia de resonancia (expresada en  $[\text{kHz}]$ ): 33,97
- Factor de calidad (adimensional): 1706,5549
- Rango de aceleraciones que puede detectar (expresado en miligravedades): de 10 a 100
- Rango de voltajes de salida (expresado en  $[\text{mV}]$ ): de 3,1596 a 31,5961

*Sexta propuesta de diseño para el acelerómetro.*

- Dimensiones de la placa móvil (ancho por largo en  $[\mu\text{m}]$  cada una):  $1200 \times 360$
- Grosor de la placa móvil: primera y segunda capas estructurales de polisilicio más capa metálica de recubrimiento ( $4 [\mu\text{m}]$ ).
- Masa de la placa móvil más masa de los electrodos (expresada en  $[\text{kg}]$ ):  $7,1909 \times 10^{-9}$
- Suspensión tipo sagital con ángulo de 45 grados (ancho, grosor y largo de la viga en  $[\mu\text{m}]$  cada uno): 3,5, 3,5 y 200
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $x$  ( $k_x$ , expresada en  $[\text{kg}/\text{s}^2]$ ): 12,005
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $z$  ( $k_z$ , expresada en  $[\text{kg}/\text{s}^2]$ ): 0,2383
- Desplazamiento de la placa móvil bajo el efecto de su peso en la dirección  $z$  (expresado en  $[\mu\text{m}]$ ): 0,296
- Dimensiones de los electrodos en el sensor capacitivo y actuador electrostático (ancho, grosor y largo en  $[\mu\text{m}]$  cada una): 3, 3,5 y 300
- Cantidad de pares de electrodos colocados a lo largo de la placa móvil: 40
- Componente de corriente directa en el voltaje de alimentación para el sensor capacitivo y actuador electrostático (expresada en  $[\text{V}]$ ): 6

- Constante de elasticidad generada por la fuerza electrostática en el actuador ( $k_e$ , expresada en  $[\text{kg/s}^2]$ ): 3,3489
- Constante de elasticidad efectiva ( $k_{ef} = k_x + k_e$ , expresada en  $[\text{kg/s}^2]$ ): 15,3539
- Presión del encapsulado del dispositivo (expresada en  $[\text{Pa}]$ ): 100
- Coeficiente general de amortiguamiento en aire enrarecido (expresado en  $[\text{kg/s}]$ ):  $0,1433 \times 10^{-6}$
- Frecuencia natural de oscilación (expresada en  $[\text{kHz}]$ ): 46,208
- Razón de amortiguamiento (adimensional):  $215,579 \times 10^{-6}$
- Frecuencia de resonancia (expresada en  $[\text{kHz}]$ ): 46,208
- Factor de calidad (adimensional): 2319,3333
- Rango de aceleraciones que puede detectar (expresado en miligravedades): de 10 a 100
- Rango de voltajes de salida (expresado en  $[\text{mV}]$ ): de 3,1596 a 31,5961

*Séptima propuesta de diseño para el acelerómetro.*

- Dimensiones de la placa móvil (ancho por largo en  $[\mu\text{m}]$  cada una):  $1200 \times 480$
- Grosor de la placa móvil: primera y segunda capas estructurales de polisilicio más capa metálica de recubrimiento (4  $[\mu\text{m}]$ ).
- Masa de la placa móvil más masa de los electrodos (expresada en  $[\text{kg}]$ ):  $9,6098 \times 10^{-9}$
- Suspensión tipo caja con bordes angulares a 90 grados (ancho, grosor y largos mayor y menor de las vigas en  $[\mu\text{m}]$  cada una): 3,5, 3,5, 200 y 30
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $x$  ( $k_x$ , expresada en  $[\text{kg/s}^2]$ ): 4,9636
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $z$  ( $k_z$ , expresada en  $[\text{kg/s}^2]$ ): 1,0481
- Desplazamiento de la placa móvil bajo el efecto de su peso en la dirección  $z$  (expresado en  $[\mu\text{m}]$ ): 0,09
- Dimensiones de los electrodos en el sensor capacitivo y actuador electrostático (ancho, grosor y largo en  $[\mu\text{m}]$  cada una): 3, 3,5 y 300
- Cantidad de pares de electrodos colocados a lo largo de la placa móvil: 56
- Componente de corriente directa en el voltaje de alimentación para el sensor capacitivo y actuador electrostático (expresada en  $[\text{V}]$ ): 6
- Constante de elasticidad generada por la fuerza electrostática en el actuador ( $k_e$ , expresada en  $[\text{kg/s}^2]$ ): 4,6885
- Constante de elasticidad efectiva ( $k_{ef} = k_x + k_e$ , expresada en  $[\text{kg/s}^2]$ ): 9,6521
- Presión del encapsulado del dispositivo (expresada en  $[\text{Pa}]$ ): 100
- Coeficiente general de amortiguamiento en aire enrarecido (expresado en  $[\text{kg/s}]$ ):  $0,1985 \times 10^{-6}$
- Frecuencia natural de oscilación (expresada en  $[\text{kHz}]$ ): 31,692
- Razón de amortiguamiento (adimensional):  $325,811 \times 10^{-6}$
- Frecuencia de resonancia (expresada en  $[\text{kHz}]$ ): 31,692
- Factor de calidad (adimensional): 1534,6306

- Rango de aceleraciones que puede detectar (expresado en miligravedades): de 10 a 100
- Rango de voltajes de salida (expresado en [mV]): de 3,016 a 30,1605

*Octava propuesta de diseño para el acelerómetro.*

- Dimensiones de la placa móvil (ancho por largo en [ $\mu\text{m}$ ] cada una):  $1200 \times 480$
- Grosor de la placa móvil: primera y segunda capas estructurales de polisilicio más capa metálica de recubrimiento ( $4 \mu\text{m}$ ).
- Masa de la placa móvil más masa de los electrodos (expresada en [kg]):  $9,6098 \times 10^{-9}$
- Suspensión tipo sagital con ángulo de 45 grados (ancho, grosor y largo de la viga en [ $\mu\text{m}$ ] cada uno): 3,5, 3,5 y 200
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $x$  ( $k_x$ , expresada en [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]): 12,005
- Constante de elasticidad de la suspensión en la dirección  $z$  ( $k_z$ , expresada en [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]): 0,2383
- Desplazamiento de la placa móvil bajo el efecto de su peso en la dirección  $z$  (expresado en [ $\mu\text{m}$ ]): 0,396
- Dimensiones de los electrodos en el sensor capacitivo y actuador electrostático (ancho, grosor y largo en [ $\mu\text{m}$ ] cada una): 3, 3,5 y 300
- Cantidad de pares de electrodos colocados a lo largo de la placa móvil: 56
- Componente de corriente directa en el voltaje de alimentación para el sensor capacitivo y actuador electrostático (expresada en [V]): 6
- Constante de elasticidad generada por la fuerza electrostática en el actuador ( $k_e$ , expresada en [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]): 4,6885
- Constante de elasticidad efectiva ( $k_{ef} = k_x + k_e$ , expresada en [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]): 16,6935
- Presión del encapsulado del dispositivo (expresada en [Pa]): 100
- Coeficiente general de amortiguamiento en aire enrarecido (expresado en [ $\text{kg}/\text{s}$ ]):  $0,1985 \times 10^{-6}$
- Frecuencia natural de oscilación (expresada en [kHz]): 41,678
- Razón de amortiguamiento (adimensional):  $247,744 \times 10^{-6}$
- Frecuencia de resonancia (expresada en [kHz]): 41,678
- Factor de calidad (adimensional): 2018,2101
- Rango de aceleraciones que puede detectar (expresado en miligravedades): de 10 a 100
- Rango de voltajes de salida (expresado en [mV]): de 3,016 a 30,1605

## 9.2. Simulación mediante ecuaciones diferenciales de parámetros concentrados

Es necesario prever el comportamiento de los acelerómetros propuestos bajo distintos tipos de entrada (aceleraciones) y condiciones iniciales, para ello será necesario realizar simulaciones numéricas de las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento del dispositivo. El software más adecuado para realizar las simulaciones numéricas es Matlab. debido a la disposición de distintos métodos numéricos para la solución de las ecuaciones diferenciales de parámetros distribuidos y a su capacidad para despliegue y manipulación de gráficas.

El primer paso será retomar la ecuación diferencial del sistema masa-resorte-amortiguador que gobierna el comportamiento del acelerómetro. De acuerdo con las ecuaciones 3.108, 3.111, 3.112, 3.115 y 6.12 y lo señalado en la sección anterior, se puede reescribir la ecuación diferencial que gobierna al acelerómetro de la siguiente forma:

$$m_{total}\ddot{x} + c_{gral}\dot{x} + k_{eff}x = F_{ent}$$

dónde  $m_{total}$  es la masa de la placa móvil suspendida más la masa de los electrodos del sensor capacitivo y actuador electrostático,  $c_{gral}$  es el coeficiente general de amortiguamiento (a 293 [K] de temperatura y 10000 [Pa] de presión) resultante de la suma de los efectos provocados por el arrastre de la placa en aire enrarecido y la compresión de las delgadas películas de aire enrarecido atrapadas entre los electrodos móviles y fijos del sensor capacitivo y actuador electrostático,  $k_{eff}$  es la constante elástica efectiva del sistema que resulta de la adición de la constante elástica mecánica de la suspensión que mantiene elevada sobre el sustrato a la placa móvil y la constante elástica electrostática generada al alimentar el sensor capacitivo diferencial que se comporta entonces como actuador y crea fuerzas electrostáticas de atracción y repulsión entre los electrodos fijos y móviles. del dispositivo y  $F_{ent}$  es la fuerza de entrada formada por una aceleración que es función del tiempo,  $a_{ent}(t)$ , multiplicada por una constante  $M$ , se tiene:

$$m_{total}\ddot{x} + c_{gral}\dot{x} + k_{eff}x = Ma_{ent}(t)$$

Para obtener la representación de la ecuación diferencial mediante una ecuación de estados, se parte de:

$$m_{total}\frac{d^2}{dt^2}x(t) + c_{gral}\frac{d}{dt}x(t) + k_{eff}x(t) = Ma_{ent}(t) \quad (9.1)$$

Si ahora se definen:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \frac{d}{dt}x(t) \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

Por lo que, la ecuación diferencial 9.1 puede expresarse mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -\frac{k_{eff}}{m_{total}}x_1(t) - \frac{c_{gral}}{m_{total}}x_2(t) + \frac{M}{m_{total}}a_{ent}(t)\end{aligned}$$

Lo que en forma matricial queda expresado como:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_{eff}}{m_{total}} & -\frac{c_{gral}}{m_{total}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M}{m_{total}} \end{bmatrix} a_{ent}(t)$$

Dado que la ecuación de salida tiene la forma:  $y = Cx + Du$ , se tiene que:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} a_{ent}$$

Por lo tanto, para el acelerómetro las matrices de representación en espacio de estados serán:

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_{eff}}{m_{total}} & -\frac{c_{gral}}{m_{total}} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M}{m_{total}} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por conveniencia se definirá las condiciones iniciales como:

$$\begin{aligned}x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 0\end{aligned}$$

Y se hará unitario el cociente  $\frac{M}{m_{total}}$ , de modo que las matrices de representación en espacio de estados para el acelerómetro quedarán como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_{eff}}{m_{total}} & -\frac{c_{gral}}{m_{total}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con el uso del siguiente script en Matlab, se obtiene una muy buena aproximación del comportamiento del acelerómetro bajo condiciones de operación reales, la simulación incluye gráficas con la respuesta en el tiempo (desplazamiento, velocidad y aceleración), la salida de voltaje (asociada con la aceleración), la respuesta en frecuencia y las curvas de relación entre aceleración y desplazamiento relativo que son muy importantes para el análisis de la estabilidad del dispositivo bajo la polarización en el sensor-actuador capacitivo-electrostático que puede provocar el nocivo efecto de llegada.

```
%Simulacion de un acelerometro capacitivo disennado con el proceso Polymumps
clear all;          %Borrar la memoria de trabajo de Matlab
close all;         %Cerrar todos los archivos y ventanas
clc;              %Borrar la pantalla de trabajo de Matlab

a=.981;           %Aceleracion de entrada

%Constantes fisicas y matematicas
rho_Si=2.33e3;    %Densidad del Si
rho_Au=1.93e4;   %Densidad del Oro
E=1.6e11;        %Modulo de Young para el Si
v=0.23;         %Constante o razon de Poisson para el Si
G=(E/(2*(1+v))); %Modulo volumetrico para el Silicio
mu=1.81e-11;    %Viscosidad del aire a 293 K
rho_aire=1.204e-18; %Densidad del aire
R=8.31;         %Constante universal molar de los gases
Mm=0.028965;    %Masa molar del aire
T=293;         %Temperatura ambiente en grados K
Patm=101325;    %Presion atmosferica en Pa
Pvacioabajo=10000; %Presion en vacio bajo
Pvaciomedio=100; %Presion en vacio medio
P=Pvaciomedio;

epsilon0=8.8544e-12; %Permeabilidad electrica del vacio
epsilon=1.00059;    %Permeabilidad relativa del aire
pi=3.1416;         %Valor de Pi
gravedad=9.81;    %Valor de la gravedad [m/s^2]

%Calculo de la masa de la placa movil mas la masa de los electrodos
LmC1=0.0012;      %Largo de la primera capa de la masa movil
bmC1=0.0006;     %Ancho de la primera capa de la masa movil
hmC1=0.000002;   %Grosor de la primera capa de la masa movil
LmC2=0.0012;     %Largo de la segunda capa de la masa movil
```

```

bmC2=0.0006;           %Ancho de la segunda capa de la masa movil
hmC2=0.0000015;       %Grosor de la segunda capa de la masa movil
LmC3=0.0012;          %Largo de la tercera capa de la masa movil
bmC3=0.0006;           %Ancho de la tercera capa de la masa movil
hmC3=0.0000005;       %Grosor de la tercera capa de la masa movil
LeC1C2=0.0003;        %Largo de los electrodos
beC1C2=0.000003;      %Ancho de los electrodos
heC1C2=0.0000035;     %Grosor de los electrodos

%Numero de agujeros en la placa movil
n_agujeros=(((LmC1/0.00003)-1)*((bmC1/0.00003)-1));
%Numero de pares de electrodos que caben a lo largo de la placa
n_electrodos=floor(2*(LmC1-0.00005)/0.000015)-1;

%Masa de los agujeros en la capa Poly1
masaAgujerosC1=n_agujeros*(0.000004*0.000004*0.000002)*rho_Si;
%Masa de los agujeros en la capa Poly2
masaAgujerosC2=n_agujeros*(0.000008*0.000008*0.0000015)*rho_Si;
%Masa de los agujeros en la capa Metal
masaAgujerosC3=n_agujeros*(0.000012*0.000012*0.0000005)*rho_Au;

%Masa de la capa Poly1
masaCapa1=((LmC1*bmC1*hmC1)*rho_Si)-masaAgujerosC1;
%Masa de la capa Poly2
masaCapa2=((LmC2*bmC2*hmC2)*rho_Si)-masaAgujerosC2;
%Masa de la capa Metal
masaCapa3=(((LmC3-0.000006)*(bmC3-0.000006)*hmC3)*rho_Au)-masaAgujerosC3;

%Masa de la placa movil creada con las dos capas estructurales de
%polisilicio mas la capa de metal
masaPlacaMovil=(masaCapa1+masaCapa2+masaCapa3);
%Masa de los electrodos pegados a lo largo de la placa movil
masaElectrodos=n_electrodos*((LeC1C2+0.00002)*beC1C2*heC1C2)*rho_Si;

%Masa de la placa mas la masa de los electrodos,
%lo que forma la masa total del acelerometro
m=masaPlacaMovil+masaElectrodos;

%Calculo de la constante de elasticidad mecanica
%en las direcciones x y z para suspension tipo
%caja con los bordes angulares a 90 grados
%Largo de la viga principal de la suspension sujeta a la masa
L1s=0.0002;
%Largo de la viga lateral de la suspension
L2s=0.00003;
%Largo de la viga de la suspension sujeta al ancla
L3s=0.0002;
%Ancho de la viga que forma la suspension
bs=0.0000035;
%Grosor de la viga que forma la suspension
hs=0.0000035;
%Momento de inercia para las flexiones en la direccion z
Iy=(bs*hs^3)/12;
%Momento de inercia torsional de la viga que forma la suspension

```

## 9.2. SIMULACIÓN MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PARÁMETROS CONCENTRADOS 313

```

It=(bs*hs^3*((16/3)-(3.36*hs/bs)))/16;
%Constante elastica de la suspension en la direccion x
kme cx=2*((6*(4*L1s*L2s+L2s^2+4*L2s*L3s+12*L1s*L3s)*E*Iy)/(L2s*L3s^4+\
3*L1s*L3s^4+L1s^3*L2s^2+4*L1s^3*L2s*L3s+3*L1s^2*L2s*L3s^2+4*L1s*L2s*L3s^3+\
L1s^4*L2s+3*L1s^4*L3s+L2s^2*L3s^3));
%Constante elastica de la suspension en la direccion z
kme cz=2*(6*E*G*Iy*It/(3*E*Iy*L2s*(L1s^2+L1s*L2s)+G*It*(2*L1s^3+L2s^3)));

%Calculo de la constante electrostatica de elasticidad
%Voltaje de polarizacion en el sensor capacitivo y actuador electrostatico
V0=6;
%Cte de proporcionalidad entre la amplitud de la componente de CD y AC del
%voltaje de alimentacion
alfa=0.05;
%Valor de amplificacion del OpAmp Aop de realimentacion
beta=20;
%Separacion entre los electrodos sujetos a la masa movil y
%los electrodos fijos
de=0.000002;
%Valor de la constante de elasticidad electrostatica debida
a la polarizacion del sensor capacitivo y actuador electrostatico
kelec x=(2*n_electrodos*LeC1C2*heC1C2*epsilon*epsilon0*(V0^2)*alfa*beta)/(de^3);

%Calculo de la constante efectiva de elasticidad
k=kme cx+kelec x; %Valor de la constante efectiva de elasticidad

%Calculo del coeficiente general de amortiguamiento en aire enrarecido
%Coeficiente de amortiguamiento provocado por el movimiento de
%la placa en aire enrarecido
c_ae_placa=4*sqrt(2/pi)*sqrt(Mm/(R*T))*P*bmC1*(hmC1+hmC2+hmC3);
%Coeficiente de amortiguamiento provocado por la compresion de
%las peliculas de aire enrarecido atrapadas entre los electrodos en movimiento
c_ae_electrodos=0.0635*n_electrodos*(LeC1C2/de)*sqrt(Mm/(R*T))*P*LeC1C2*heC1C2;
c=c_ae_placa+c_ae_electrodos;

%Desplazamiento en z
z=(m*gravedad)/kme cz;

%Calculo de la estabilidad, analisis aceleracion ponderada frente
a desplazamiento relativo
%Coeficiente que involucra a la componente DC del volt. de alimentacion
p0=(n_electrodos*LeC1C2*heC1C2*epsilon*epsilon0*(V0^2))/(2*kme cx*(de^3));
%Relacion entre la fuerza de la masa sujeta a una determinada aceleracion
de entrada y la fuerza del resorte formado por la suspension
q=(m*a)/(k*de);
%Desplazamiento relativo definido como desplazamiento/separacion_electrodos
%Vector con valores de 0 a 1 en incrementos de centesimas
x=0:0.01:1;
sizexd=size(x); %Obtencion del tamaño del vector de desp. rel.
beta1=0;
beta2=1;
beta3=5;
beta4=10;
beta5=15;

```

```

beta6=30;
beta7=50;
beta8=100;
%Calculo de la relacion aceleracion ponderada y desplazamiento relativo
for i=1:size(xd,2)
    fpal(i)=(x(i)-((4*p0)/((1-x(i)^2)^2))*(((1+0.5*alfa^2)*x(i))-
(alfa*beta*x(i))+((alfa*beta*x(i))^2)*x(i)-((alfa*beta*x(i))*(x(i)^2)))));
    f1(i)=(x(i)-((4*p0)/((1-x(i)^2)^2))*(((1+0.5*alfa^2)*x(i))-
(alfa*beta1*x(i))+((alfa*beta1*x(i))^2)*x(i)-((alfa*beta1*x(i))*(x(i)^2)))));
    f2(i)=(x(i)-((4*p0)/((1-x(i)^2)^2))*(((1+0.5*alfa^2)*x(i))-
(alfa*beta2*x(i))+((alfa*beta2*x(i))^2)*x(i)-((alfa*beta2*x(i))*(x(i)^2)))));
    f3(i)=(x(i)-((4*p0)/((1-x(i)^2)^2))*(((1+0.5*alfa^2)*x(i))-
(alfa*beta3*x(i))+((alfa*beta3*x(i))^2)*x(i)-((alfa*beta3*x(i))*(x(i)^2)))));
    f4(i)=(x(i)-((4*p0)/((1-x(i)^2)^2))*(((1+0.5*alfa^2)*x(i))-
(alfa*beta4*x(i))+((alfa*beta4*x(i))^2)*x(i)-((alfa*beta4*x(i))*(x(i)^2)))));
    f5(i)=(x(i)-((4*p0)/((1-x(i)^2)^2))*(((1+0.5*alfa^2)*x(i))-
(alfa*beta5*x(i))+((alfa*beta5*x(i))^2)*x(i)-((alfa*beta5*x(i))*(x(i)^2)))));
    f6(i)=(x(i)-((4*p0)/((1-x(i)^2)^2))*(((1+0.5*alfa^2)*x(i))-
(alfa*beta6*x(i))+((alfa*beta6*x(i))^2)*x(i)-((alfa*beta6*x(i))*(x(i)^2)))));
    f7(i)=(x(i)-((4*p0)/((1-x(i)^2)^2))*(((1+0.5*alfa^2)*x(i))-
(alfa*beta7*x(i))+((alfa*beta7*x(i))^2)*x(i)-((alfa*beta7*x(i))*(x(i)^2)))));
    f8(i)=(x(i)-((4*p0)/((1-x(i)^2)^2))*(((1+0.5*alfa^2)*x(i))-
(alfa*beta8*x(i))+((alfa*beta8*x(i))^2)*x(i)-((alfa*beta8*x(i))*(x(i)^2)))));
end

%Calculo de la capacitancia inicial
C0=(n_electrodos*LeC1C2*heC1C2*epsilon*epsilon0)/de;

%Frecuencia natural de oscilacion, razon de amortiguamiento
%frecuencia de resonancia y factor de calidad
omega0=sqrt(k/m); %Frec. natural de oscilacion
dseta=(c/(2*m*omega0)); %Razon de amortiguamiento
omegar=(omega0*sqrt(1-2*(dseta^2))); %Frecuencia de resonancia
Q=(1/(2*dseta*sqrt(1-(dseta^2)))); %Factor de calidad

%Construccion de las matrices de la ecuacion de estados
A=[0 1;
-(k/m) -(c/m)];
B=[0 a]';
C=[1 0;
0 1];
D=[0];

%Definicion del sistema a partir de su descripcion mediante las
%matrices de la ecuacion de estado
sys=ss(A,B,C,D);

%Construccion del vector de barrido de frecuencias
freq=0:1:50000;

%Tiempo de duracion para la simulacion
tiemposim=0.5;
resptiempo=step(sys,tiemposim); %Calculo de la respuesta en el tiempo

```

## 9.2. SIMULACIÓN MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PARÁMETROS CONCENTRADOS 315

```

%Numero de muestras en el vector de respuestas en el dominio del tiempo
sizextiempo=size(resptiempo);
%Calculo del paso de simulacion para que el vector de tiempo base tenga
%el mismo numero de elementos que el vector de respuestas
pasosim=tiemposim/(sizextiempo(1)-1);
%Construccion del vector tiempo de simulacion
tiempo=0:pasosim:tiemposim;
posicion=resptiempo(:,1);
velocidad=resptiempo(:,2);
aceleracion=-(k/m)*posicion-(c/m)*velocidad+a;

%Calculo del voltaje de salida
%Ganancia en lazo abierto del OpAmp de salida
Asal=5;
Vout=Asal*((de^2*m*aceleracion)/\
(2*n_electrodos*LeC1C2*heC1C2*epsilon*epsilon0*V0));

%Calculo de la respuesta en frecuencia
respfreq=freqresp(sys,freq);
%Obtencion de la magnitud de la respuesta en frecuencia
magresp=abs(respfreq);
%Obtencion de la fase de la respuesta en frecuencia
pharesp=angle(respfreq);

%Extraccion del vector con la respuesta en frecuencia
sizex=size(respfreq);
for i=1:sizex(3)
%Magnitud de la respuesta en frec. del estado 1, desplazamiento
magx1(i)=magresp(1,:,i)*1e6;
%Fase de la respuesta en frec. del estado 1, desplazamiento
phax1(i)=pharesp(1,:,i);
%Magnitud de la respuesta en frec. del estado 2, velocidad
magx2(i)=magresp(2,:,i)*1e6;
%Fase de la respuesta en frec. del estado 1, velocidad
phax2(i)=pharesp(2,:,i);
%Magnitud de la parte real de la resp. en frec. del estado 1
magx1real(i)=respfreq(1,:,i)*1e6;
%Magnitud de la parte real de la resp. en frec. del estado 2
magx2real(i)=respfreq(2,:,i)*1e6;
end

%Graficas de respuesta en el tiempo (arriba izquierda), curva de relacion
%(estabilidad) aceleracion ponderada-desplazamiento relativo en el actuador
%electrostatico (abajo izquierda) y amplitud y fase de la respuesta en
%frecuencia (derecha)

figure;
subplot(2,2,1);
hold on; grid on; box on;
xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold')
ylabel('Amplitud de la respuesta [m]', 'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold')
title('\it{Respuesta en la direccion de registro}', 'FontSize', 14)
axis auto;
plot(tiempo, posicion, 'b--', 'LineWidth', 2);

```

```

subplot(2,2,3);
hold on; grid on; box on;
xlabel('x/d', 'FontSize',11, 'FontWeight', 'bold')
ylabel('f(x/d,beta,p0,alfa)', 'FontSize',11, 'FontWeight', 'bold')
title('\it{Análisis de estabilidad}', 'FontSize',14)
axis([0 1 -1.5 1.5]);
plot(x, [f1;f2;f3;fpal;f4;f5;f6;f7;f8], 'LineWidth',2);

subplot(2,2,2);
hold on; grid on; box on;
xlabel('Frecuencia [Hz]', 'FontSize',11, 'FontWeight', 'bold')
ylabel('Amplitud de la respuesta [um]', 'FontSize',11, 'FontWeight', 'bold')
title('\it{Respuesta en la direccion de registro}', 'FontSize',14)
axis auto;
plot(freq,magx1, 'r--', 'LineWidth',2);
plot(freq,-real(magx1real), 'b--', 'LineWidth',2);

subplot(2,2,4);
hold on; grid on; box on;
xlabel('Frecuencia [Hz]', 'FontSize',11, 'FontWeight', 'bold')
ylabel('Fase [grados]', 'FontSize',11, 'FontWeight', 'bold')
title('\it{Respuesta en la direccion de registro}', 'FontSize',14)
axis auto;
plot(freq,unwrap(phax1)*180/pi, 'r--', 'LineWidth',2);

%Graficas de la aceleracion (arriba izquierda), velocidad
%(abajo izquierda) Voltaje de salida (arriba derecha) y
%desplazamiento (abajo derecha)

figure;
subplot(2,2,1);
hold on; grid on; box on;
xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize',11, 'FontWeight', 'bold')
ylabel('Aceleracion [m/s^2]', 'FontSize',11, 'FontWeight', 'bold')
title('\it{Aceleracion}', 'FontSize',14)
axis auto;
plot(tiempo,aceleracion, 'b--', 'LineWidth',2);

subplot(2,2,2);
hold on; grid on; box on;
xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize',11, 'FontWeight', 'bold')
ylabel('Voltaje de salida [V]', 'FontSize',11, 'FontWeight', 'bold')
title('\it{Voltaje}', 'FontSize',14)
axis auto;
plot(tiempo,Vout, 'b--', 'LineWidth',2);

subplot(2,2,3);
hold on; grid on; box on;
xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize',11, 'FontWeight', 'bold')
ylabel('Velocidad [m/s]', 'FontSize',11, 'FontWeight', 'bold')
title('\it{Velocidad}', 'FontSize',14)
axis auto;
plot(tiempo,velocidad, 'b--', 'LineWidth',2);

```

```

subplot(2,2,4);
hold on; grid on; box on;
xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold')
ylabel('Desplazamiento [m]', 'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold')
title('\it{Desplazamiento}', 'FontSize', 14)
axis auto;
plot(tiempo, posicion, 'b--', 'LineWidth', 2);

```

Modificando en el script los valores dimensionales de la placa móvil, los electrodos, la suspensión y los parámetros de presión, voltaje de alimentación y aceleración de entrada se pueden simular cualquiera de los ocho acelerómetros propuestos en la sección anterior. Todos los valores usados en el script están en sistema MKS y las constantes físicas y características de materiales corresponden a valores promedio aceptados regularmente. El cambio mayor corresponde al cálculo de la constante de elasticidad de la suspensión en las direcciones  $x$  y  $z$ , por ello, a continuación se muestra el código que debe insertarse en lugar de las líneas empleadas para calcular la elasticidad de la suspensión tipo caja con bordes angulares a 90 grados que se utilizó en el script anterior.

```

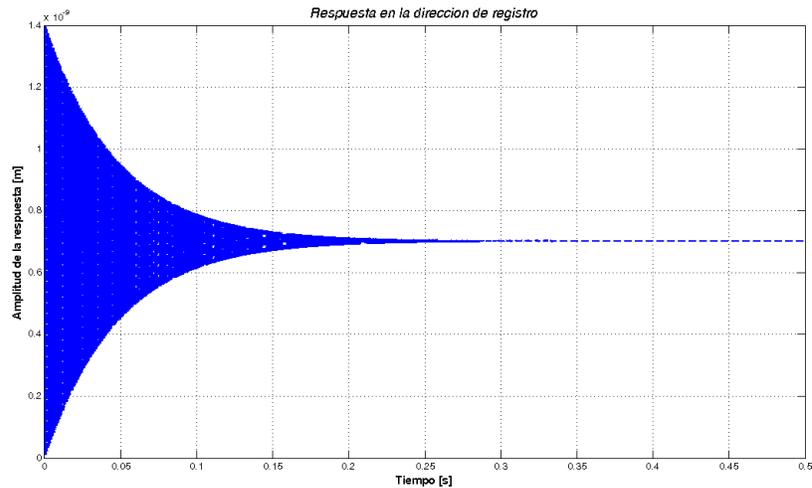
%Calculo de la constante de elasticidad mecanica en
%las direcciones x y z para suspension tipo sagital
%Largo de la viga principal de la suspension sujeta a la masa
L1s=0.0002;
%Angulo de inclinacion en grados de la viga que forma la suspension
phi=toRadians(45);
%Ancho de la viga que forma la suspension
bs=0.0000035;
%Grosor de la viga que forma la suspension
hs=0.0000035;
%Longitud del refuerzo lateral de la suspension
LR=20e-6;
%Longitud del ancla de la suspension
LA=50e-6;
%Momento de inercia para las flexiones en la direccion z
Iy=(bs*hs^3)/12;
%Momento de inercia torsional de la viga que forma la suspension
It=(bs*hs^3*((16/3)-(3.36*hs/bs)))/16;
%Variables intermedias auxiliares
u=((G*It*(LA*cos(phi)+L1s*cos(2*phi))*cos(phi))+((E*Iy-G*It)*\
LR*sin(phi)*cos(phi))+E*Iy*(LA+2*L1s*cos(phi))*(sin(phi))^2)/\
(2*(G*It*(cos(phi))^2+E*Iy*(sin(phi))^2));
d1=6*E*Iy*(((LA-2*u)^2)*(sin(phi))^2+2*(LR+2*L1s*sin(phi))*\
(LR*cos(phi)+(2*L1s*cos(phi)+LA-2*u)*sin(phi))*cos(phi));
d2=G*It*(6*LR^2+14*L1s^2+3*(LA-2*u)^2+3*((LA-2*u)^2-2*(LR^2+2*L1s^2))*\
cos(2*phi)-6*(2*u-LA)*(L1s-2*LR*sin(phi))*cos(phi));
d3=6*G*It*L1s((LA-2*u)*cos(3*phi)+L1s*cos(4*phi)+4*LR*sin(phi)-\
2*LR*sin(3*phi));
%Constante elastica de la suspension en la direccion x
kmecx=(2*E*hs*bs^3)/(L1s^3*(cos(phi))^2);
%Constante elastica de la suspension en la direccion z
kme cz=(24/L1s)*((E*G*Iy*It)/(d1+d2+d3));

```

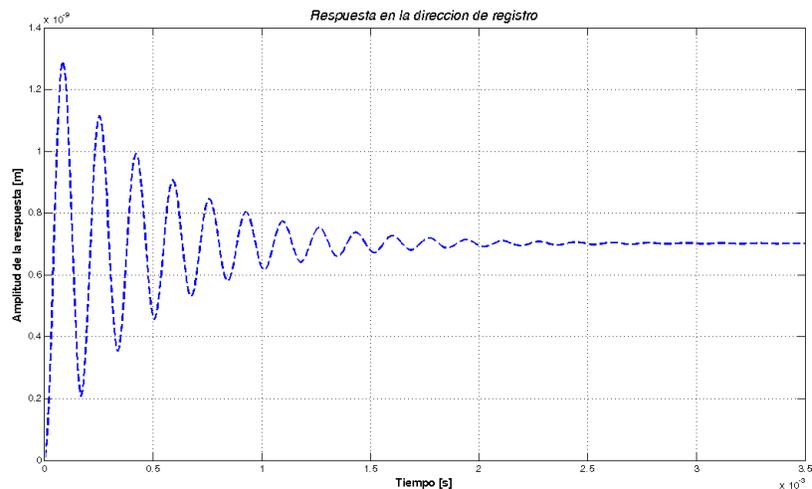
En las siguientes subsecciones se consignarán las gráficas con los resultados de las simulaciones para cada uno de los ocho acelerómetros propuestos.

### 9.2.1. Acelerómetro de $600 \times 1200 \text{ } [\mu\text{m}^2]$ con suspensión de caja

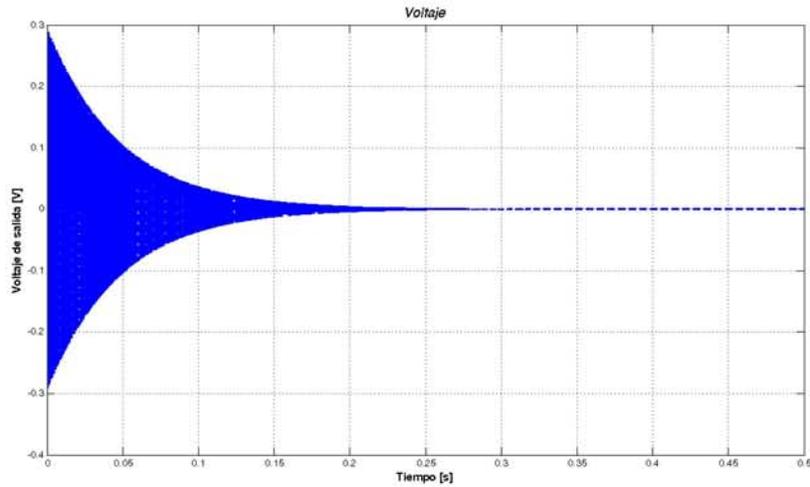
A continuación se consignan las gráficas del comportamiento simulado para el primer acelerómetro propuesto en la sección anterior.



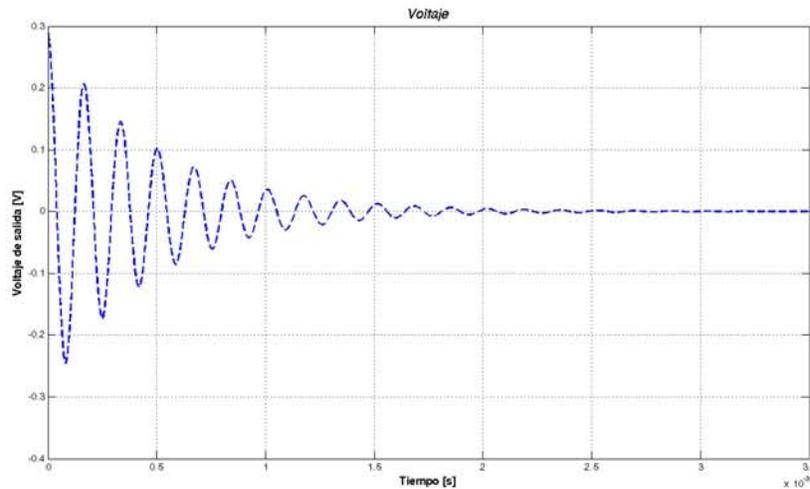
Resposta en el tiempo del acelerómetro de  $600 \times 1200 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión de caja de bordes angulares; la señal se estabiliza 0,35 [s] después de registrada la aceleración de entrada. Para esta simulación, la presión se colocó en 100 [Pa].



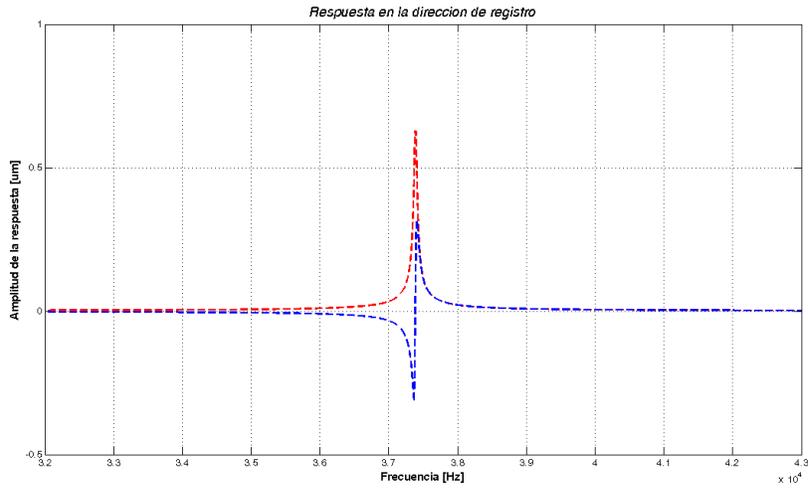
Simulación del comportamiento del primer acelerómetro propuesto, con una presión de encapsulado igual a 10 [kPa] (vacío bajo). Como es de esperarse, al aumentar la constante general de amortiguamiento (mecanismo de disipación de energía), el dispositivo oscila por un tiempo menor, en este caso, el sistema deja de oscilar alrededor de 3,5 [ms] después de registrada la aceleración de entrada.



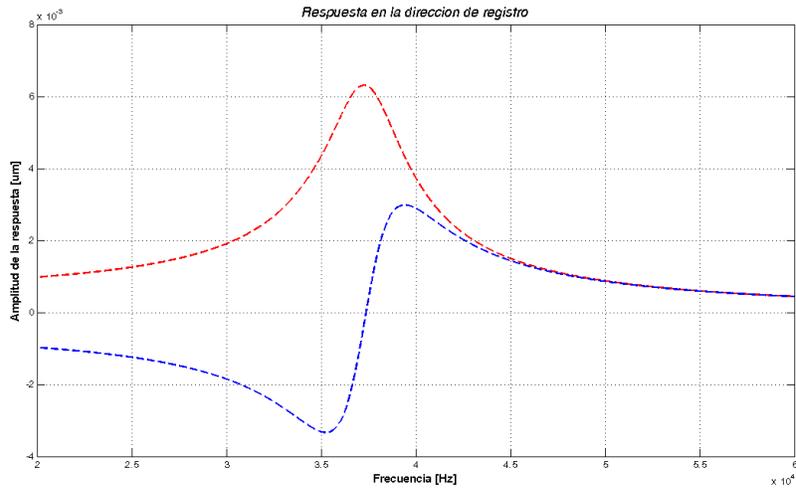
Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático colocado en el primer acelerómetro, al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de 100 [Pa] y aprovechar un factor de amplificación eléctrica de 100.



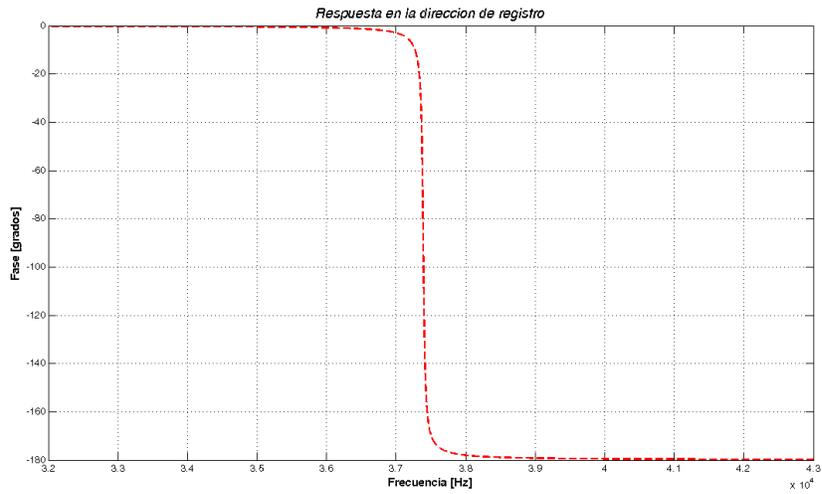
Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de 10 [kPa] y mantener un factor de amplificación eléctrica de 100.



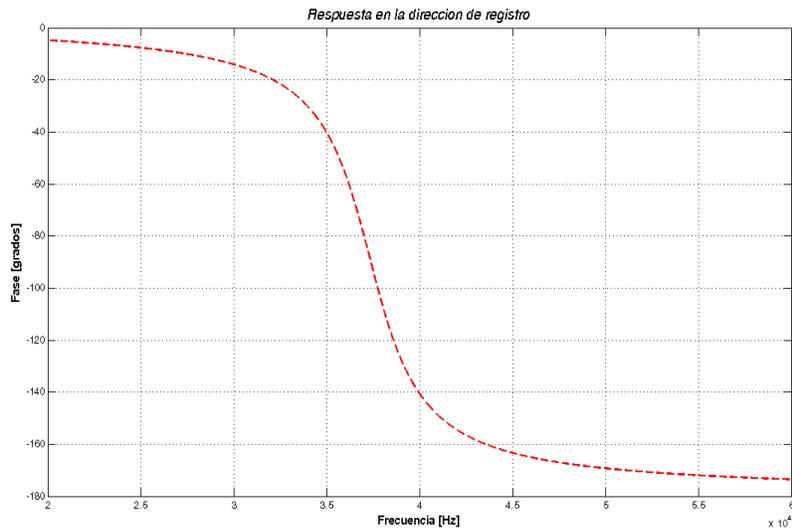
Resposta en frecuencia del acelerómetro de  $600 \times 1200 [\mu\text{m}^2]$ . La frecuencia de resonancia se encuentra alrededor de 37 [kHz]. Para esta simulación, la presión del encapsulado del dispositivo se colocó en 100 [Pa].



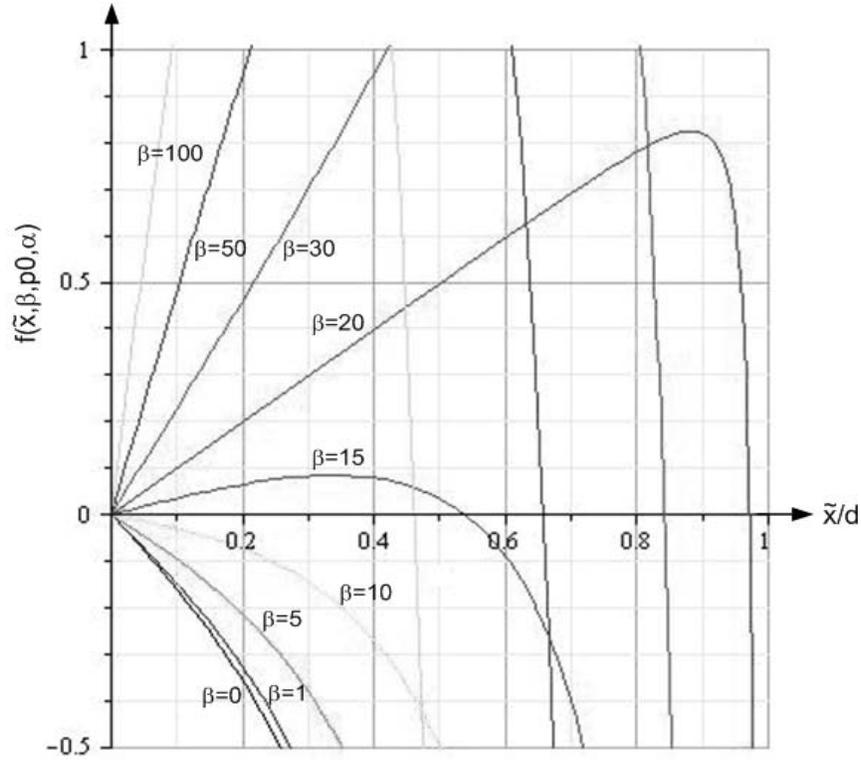
Al aumentar a 10 [kPa] la presión en el encapsulado del primer acelerómetro propuesto, la amplitud de la respuesta alrededor de la frecuencia de resonancia disminuye hasta en dos órdenes de magnitud.



Comportamiento de la fase para el primer acelerómetro propuesto sometido a una presión de encapsulado de 100 [Pa].



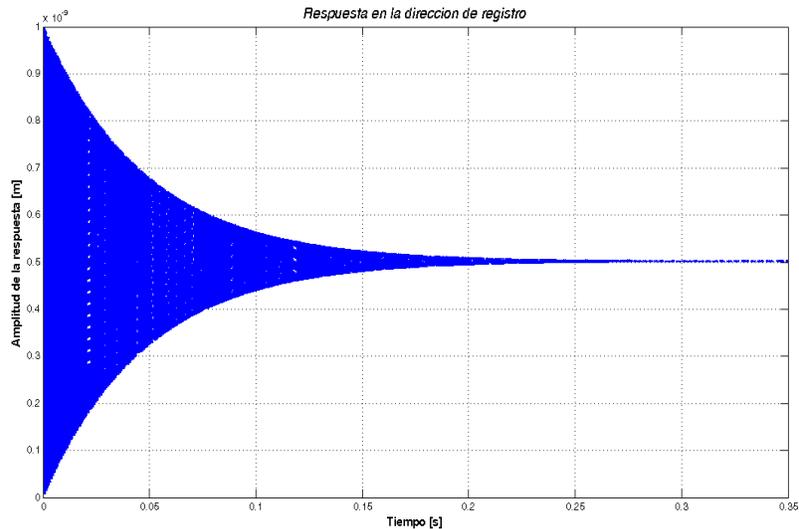
Comportamiento de la fase para el primer acelerómetro propuesto con una presión en el encapsulado igual a 10 [kPa].



Solución gráfica para la relación entre aceleración ponderada y desplazamiento relativo para el sensor-actuador diferencial con realimentación electromecánica del primer acelerómetro propuesto,  $p_0 = 0,641$ ,  $\alpha = 0,05$  y  $V_r \leq V_0$ .

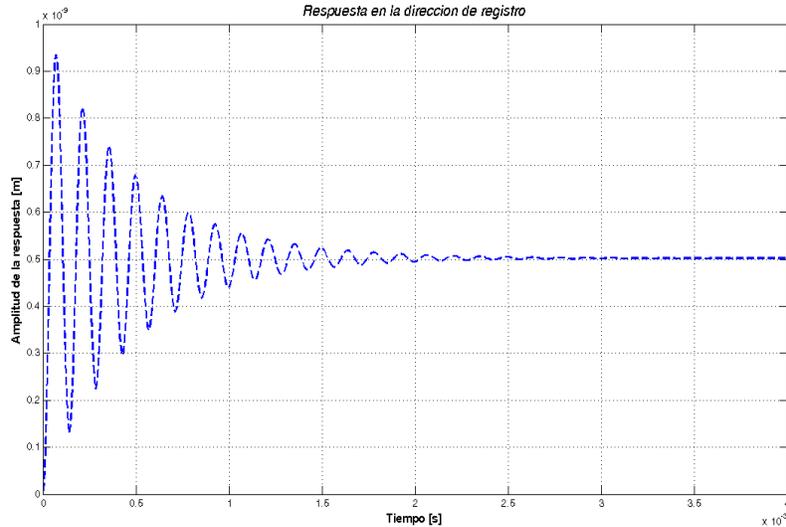
### 9.2.2. Acelerómetro de $600 \times 1200 \text{ } [\mu\text{m}^2]$ con suspensión sagital

A continuación se consignan las gráficas del comportamiento simulado para el segundo acelerómetro propuesto en la sección anterior.

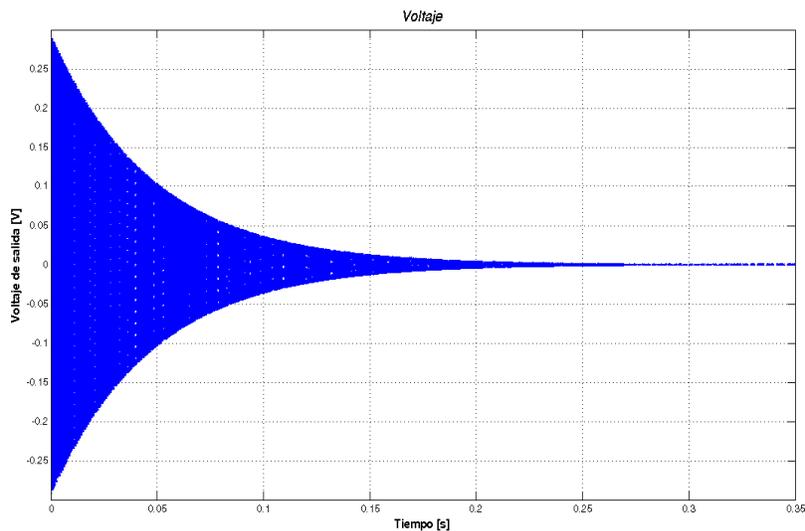


## 9.2. SIMULACIÓN MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PARÁMETROS CONCENTRADOS 323

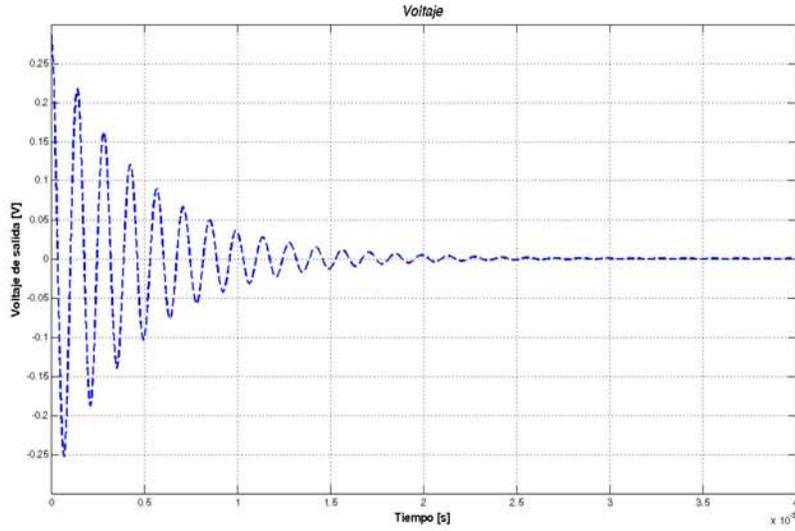
Respuesta en el tiempo del acelerómetro de  $600 \times 1200 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión sagital a 45 grados; la señal se estabiliza 0,35 [s] después de registrada la aceleración de entrada. Para esta simulación, la presión se colocó en 100 [Pa].



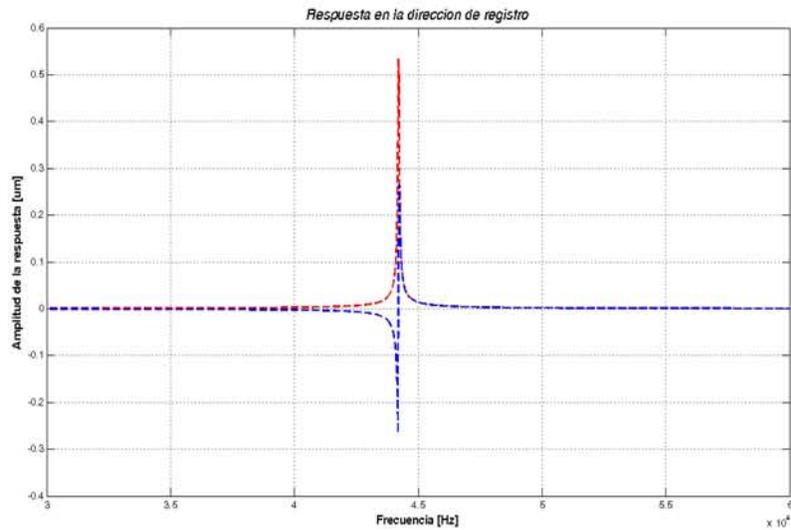
Simulación del comportamiento del segundo acelerómetro propuesto, con una presión de encapsulado igual a 10 [kPa] (vacío bajo). Al aumentar la constante general de amortiguamiento (mecanismo de disipación de energía), el dispositivo oscila por un tiempo menor, en este caso, el sistema deja de oscilar alrededor de 3,5 [ms] después de registrada la aceleración de entrada.



Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático incorporado al acelerómetro, al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de 100 [Pa] y aprovechar un factor de amplificación eléctrica de 100.

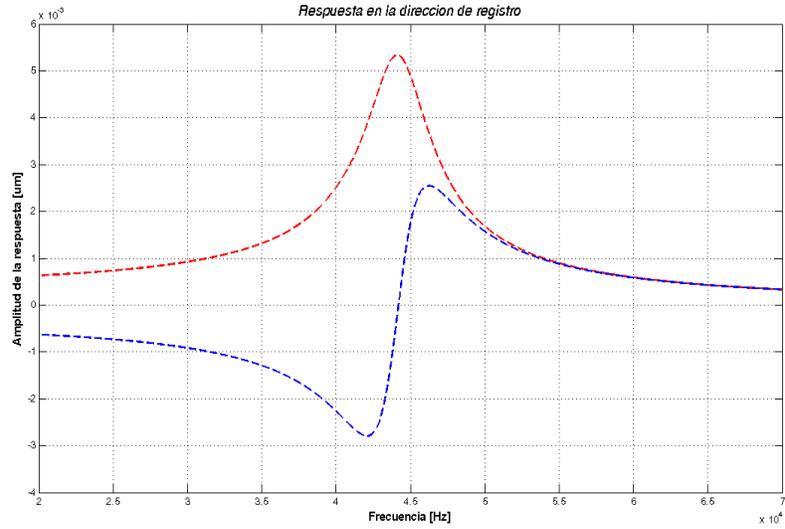


Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de 10 [kPa] y mantener un factor de amplificación eléctrica de 100.

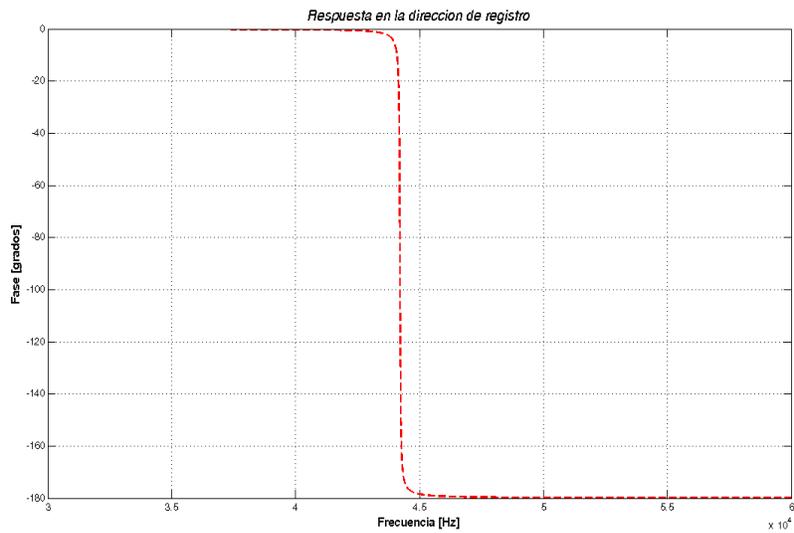


Respuesta en frecuencia del acelerómetro de  $600 \times 1200 [\mu\text{m}^2]$  con suspensión tipo sagital. La frecuencia de resonancia se encuentra alrededor de 44 [kHz]. Para esta simulación, la presión del encapsulado del dispositivo se colocó en 100 [Pa].

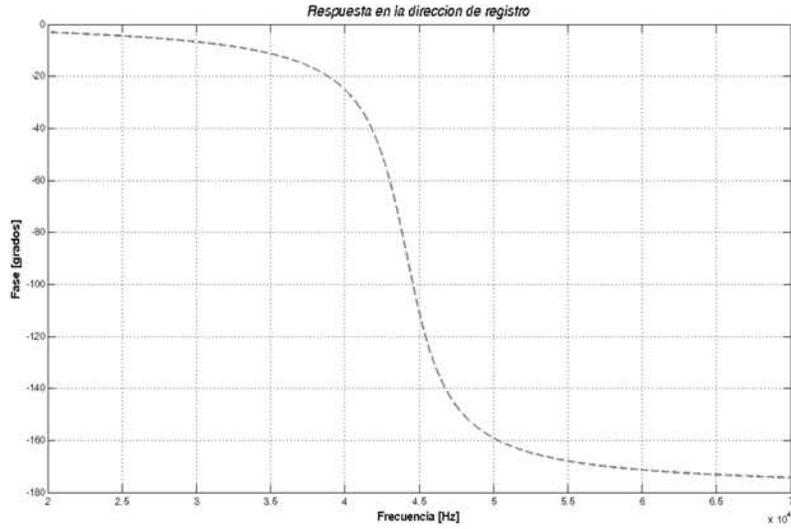
## 9.2. SIMULACIÓN MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PARÁMETROS CONCENTRADOS 325



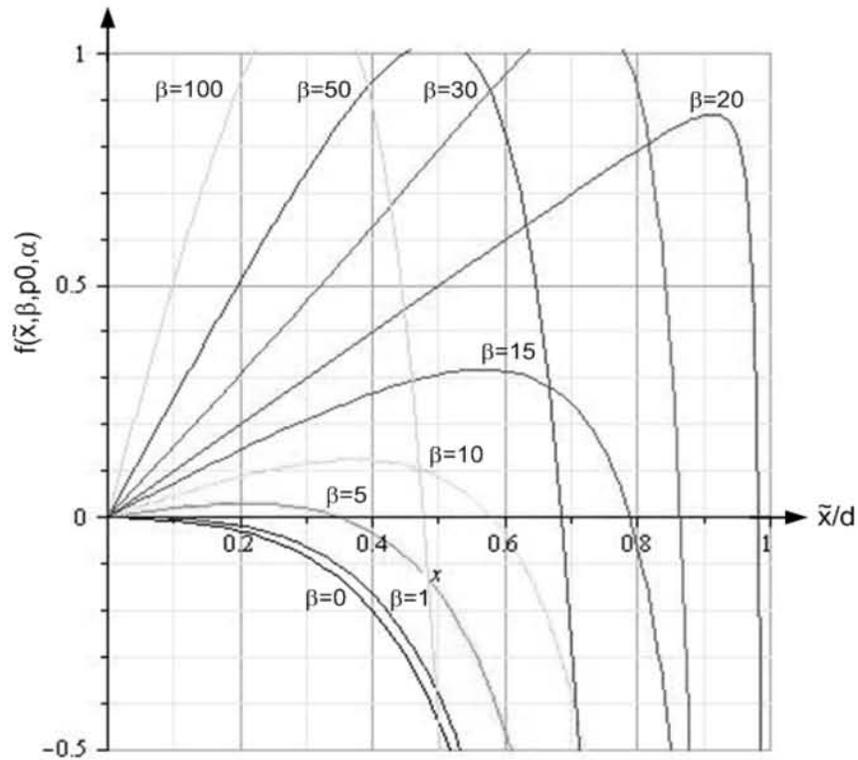
Al aumentar a 10 [kPa] la presión en el encapsulado del segundo acelerómetro propuesto, la amplitud de la respuesta alrededor de la frecuencia de resonancia disminuye hasta en dos órdenes de magnitud.



Comportamiento de la fase para el segundo acelerómetro propuesto sometido a una presión de encapsulado de 100 [Pa].



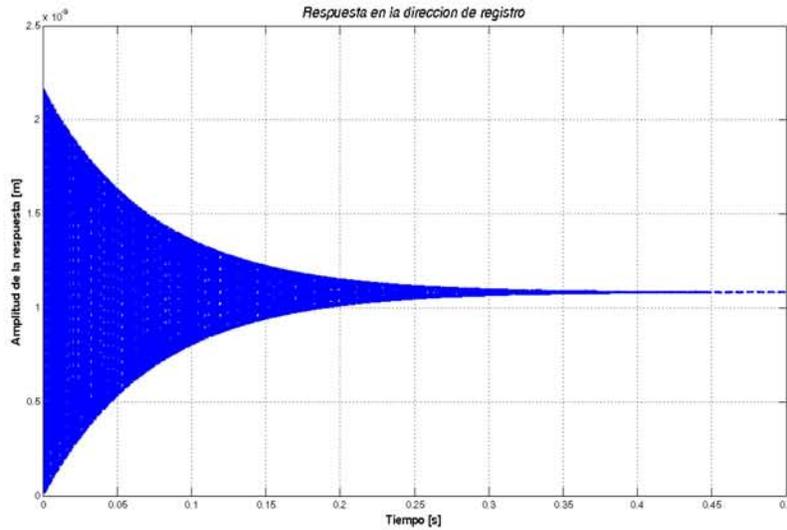
Comportamiento de la fase para el segundo acelerómetro propuesto con una presión en el encapsulado igual a 10 [kPa].



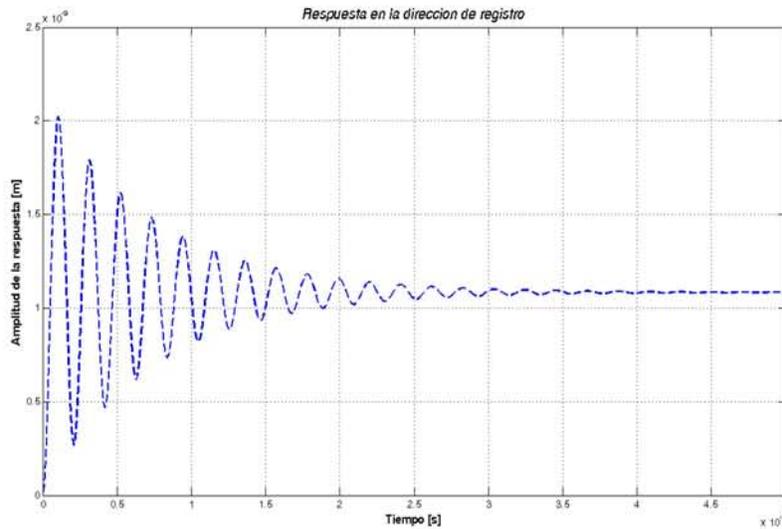
Solución gráfica para la relación entre aceleración ponderada y desplazamiento relativo para el sensor-actuador diferencial con realimentación electromecánica del segundo acelerómetro propuesto,  $p_0 = 0,265$ ,  $\alpha = 0,05$  y  $V_r \leq V_0$ .

### 9.2.3. Acelerómetro de $960 \times 1200 \text{ } [\mu\text{m}^2]$ con suspensión de caja

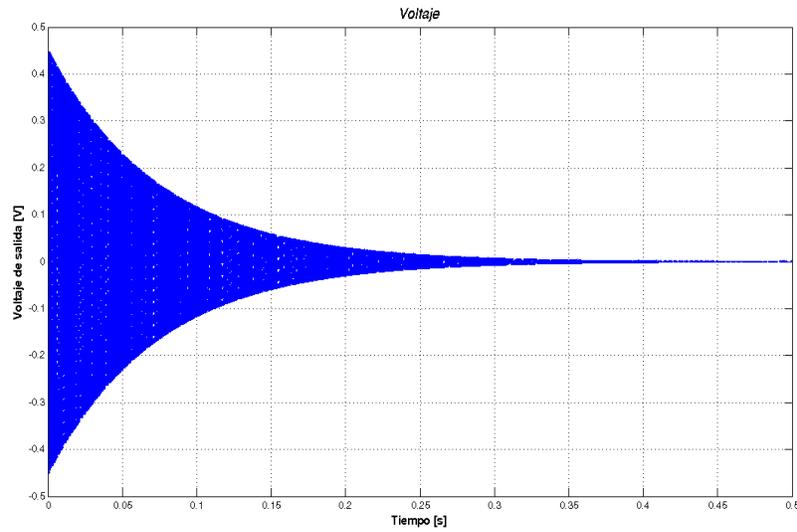
A continuación se consignan las gráficas del comportamiento simulado del tercer acelerómetro propuesto en la sección anterior.



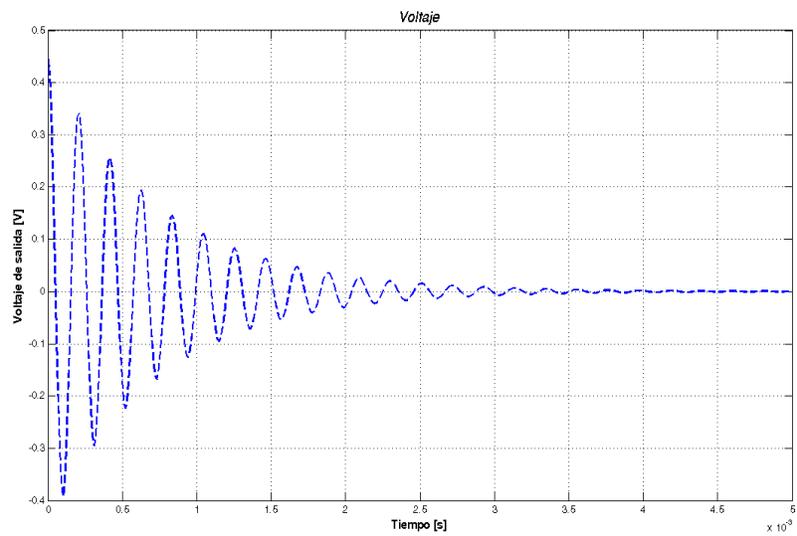
Respuesta en el tiempo del acelerómetro de  $960 \times 1200 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión de caja; la señal se estabiliza 0,5 [s] después de registrada la aceleración de entrada. Para esta simulación, la presión se colocó en 100 [Pa].



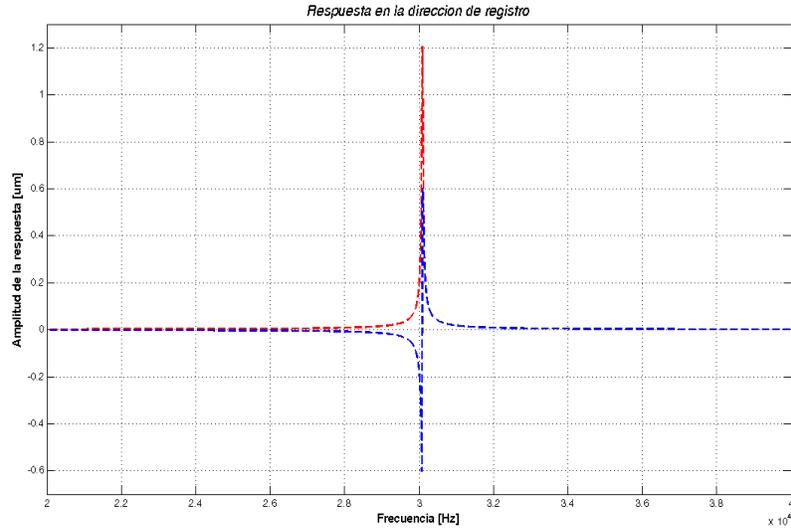
Simulación del comportamiento del tercer acelerómetro propuesto, con una presión de encapsulado igual a 10 [kPa] (vacío bajo). Al aumentar la constante general de amortiguamiento (mecanismo de disipación de energía), el dispositivo oscila por un tiempo menor, en este caso, el sistema deja de oscilar alrededor de 5 [ms] después de registrada la aceleración de entrada.



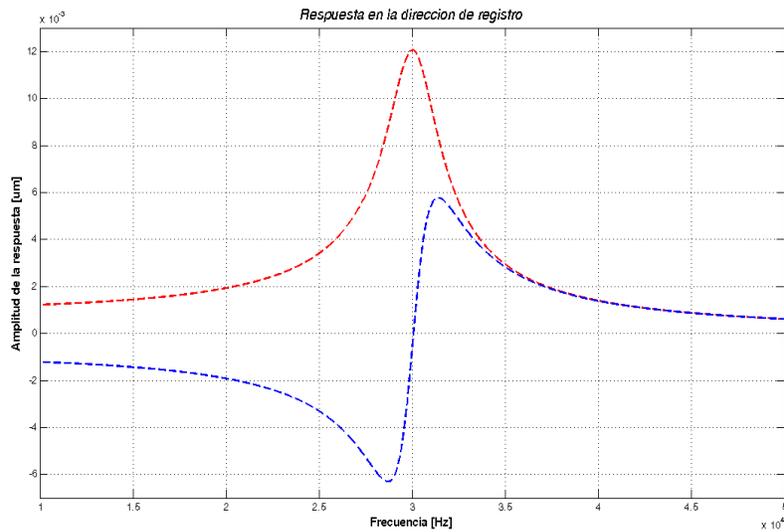
Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático del tercer acelerómetro. La aceleración de entrada fue de una décima de gravedad, el encapsulado se encontraba a una presión de 100 [Pa] y el factor de amplificación eléctrica fue de 100.



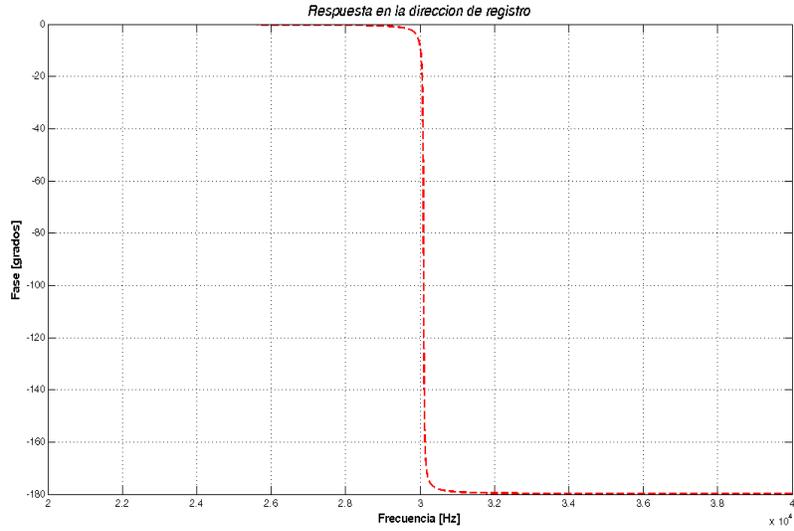
Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de 10 [kPa] y mantener un factor de amplificación eléctrica de 100.



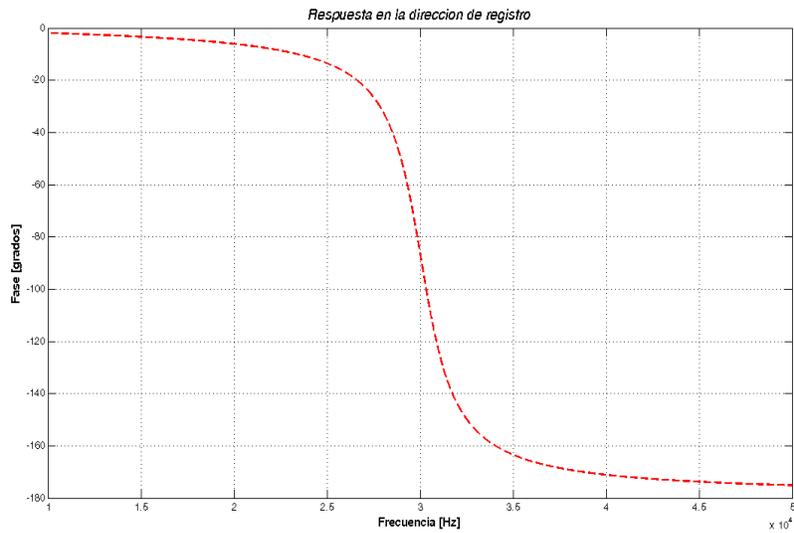
Resposta en frecuencia del acelerómetro de  $960 \times 1200 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión de caja. La frecuencia de resonancia se encuentra alrededor de 30 [kHz]. Para esta simulación, la presión del encapsulado del dispositivo se colocó en 100 [Pa].



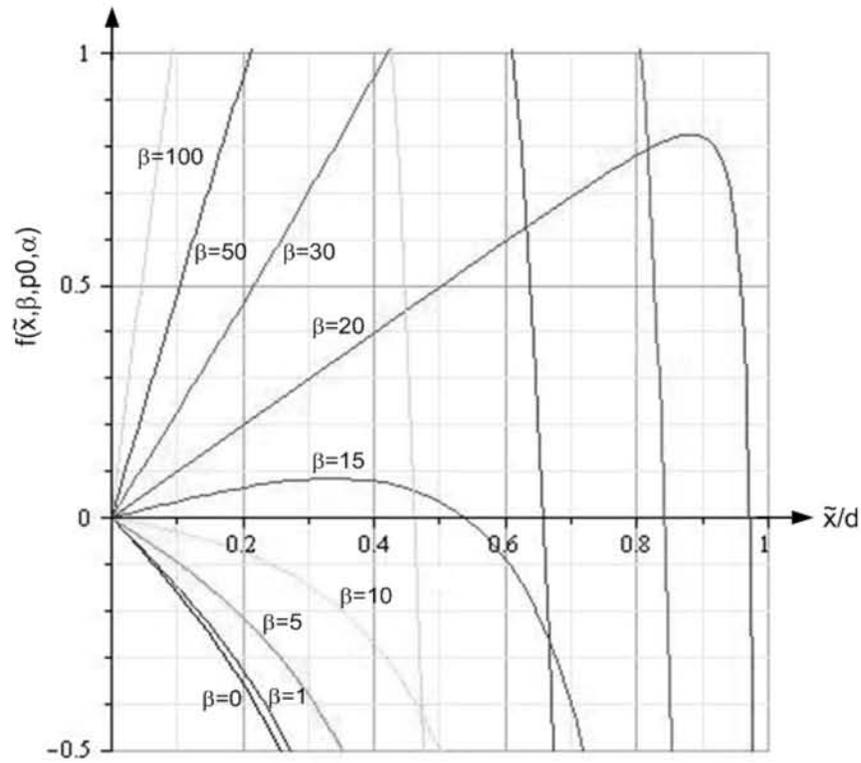
Al aumentar a 10 [kPa] la presión en el encapsulado del tercer acelerómetro propuesto, la amplitud de la respuesta alrededor de la frecuencia de resonancia disminuye hasta en dos órdenes de magnitud.



Comportamiento de la fase para el tercer acelerómetro propuesto sometido a una presión de encapsulado de 100 [Pa].



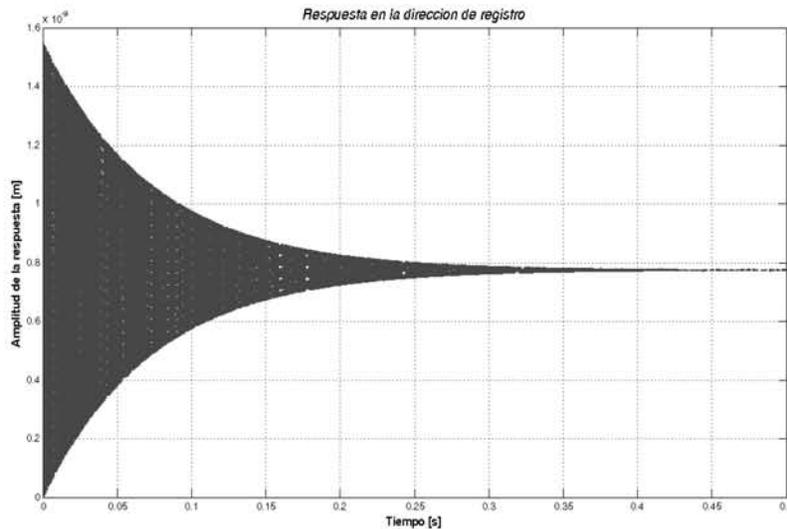
Comportamiento de la fase para el tercer acelerómetro propuesto con una presión en el encapsulado igual a 10 [kPa].



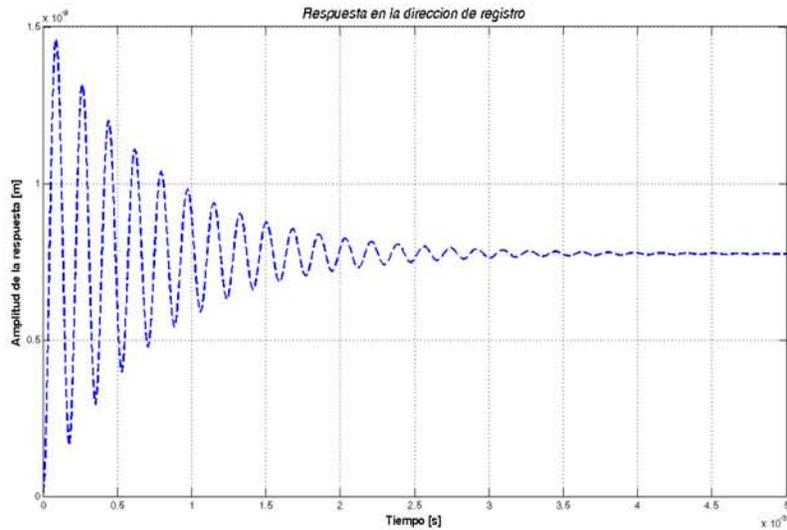
Solución gráfica para la relación entre aceleración ponderada y desplazamiento relativo para el sensor-actuador diferencial con realimentación electromecánica del tercer acelerómetro propuesto,  $p_0 = 0,641$ ,  $\alpha = 0,05$  y  $V_r \leq V_0$ .

#### 9.2.4. Acelerómetro de $960 \times 1200 \text{ } [\mu\text{m}^2]$ con suspensión sagital

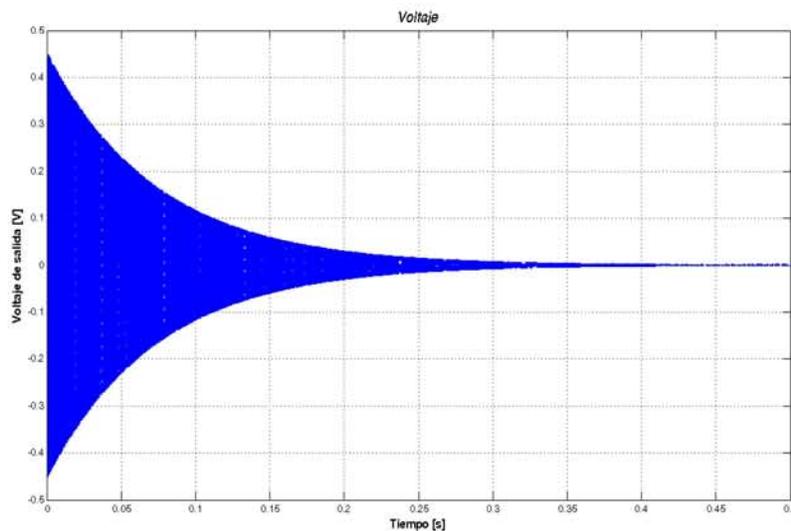
A continuación se consignan las gráficas del comportamiento simulado para el cuarto acelerómetro propuesto en la sección anterior.



Respuesta en el tiempo del acelerómetro de  $960 \times 1200 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión sagital; la señal se estabiliza 0,5 [s] después de registrada la aceleración de entrada. Para esta simulación, la presión se colocó en 100 [Pa].

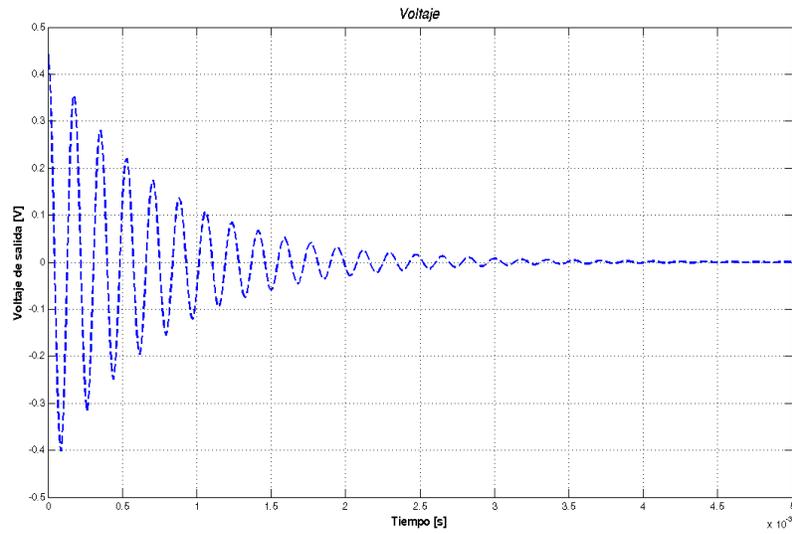


Simulación del comportamiento del cuarto acelerómetro propuesto, con una presión de encapsulado igual a 10 [kPa] (vacío bajo). Al aumentar la constante general de amortiguamiento (mecanismo de disipación de energía), el dispositivo oscila por un tiempo menor, en este caso, el sistema deja de oscilar alrededor de 5 [ms] después de registrada la aceleración de entrada.

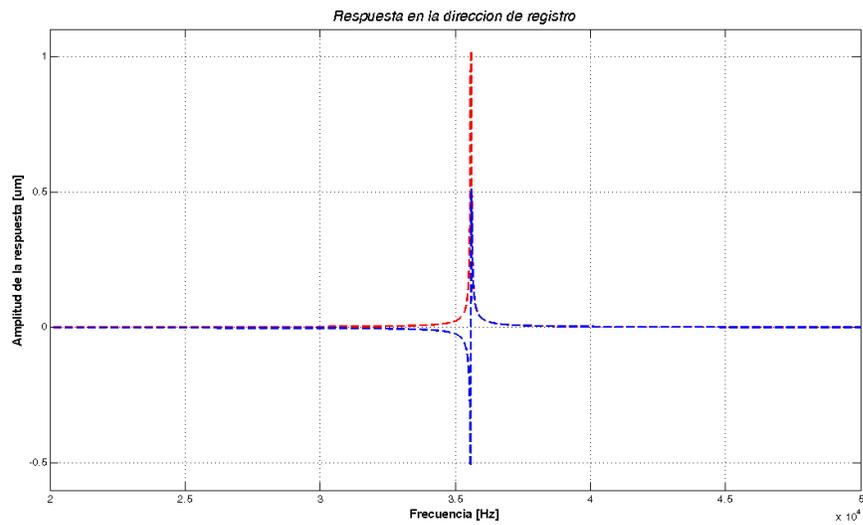


Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático incorporado al acelerómetro, al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de 100 [Pa] y aprovechar un factor de amplificación eléctrica de 100.

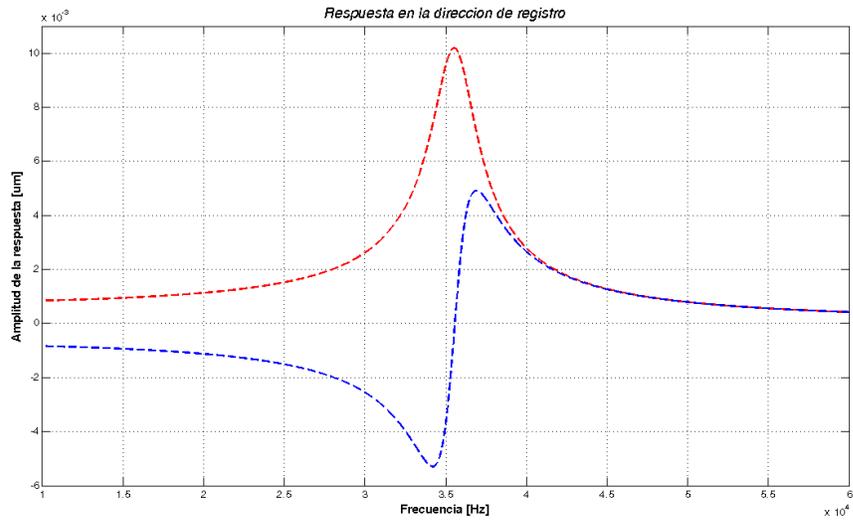
## 9.2. SIMULACIÓN MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PARÁMETROS CONCENTRADOS 333



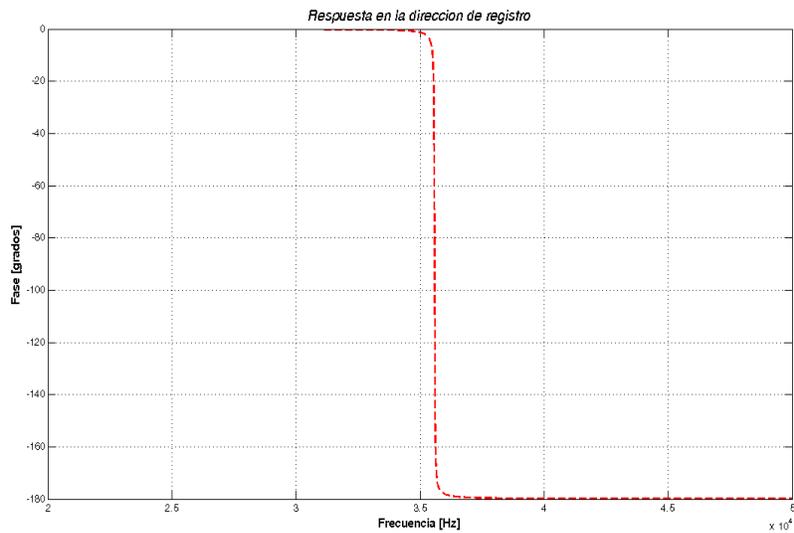
Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de 10 [kPa] y mantener un factor de amplificación eléctrica de 100.



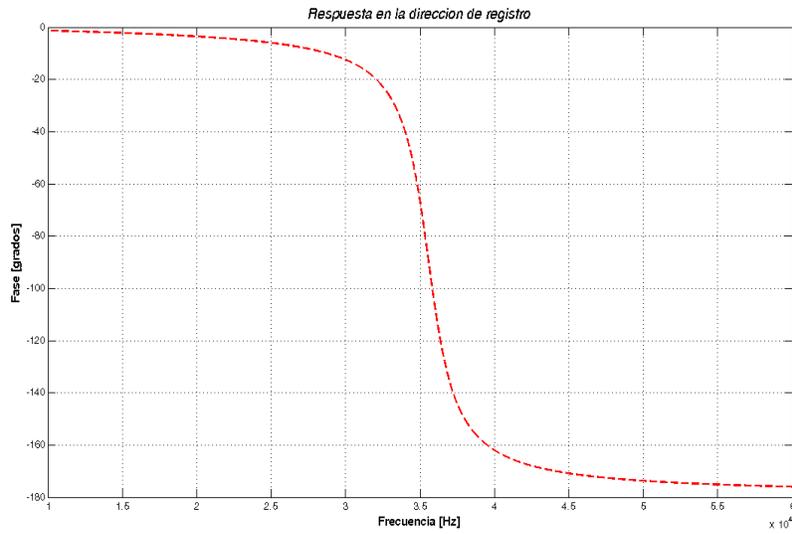
Respuesta en frecuencia del acelerómetro de  $960 \times 1200 [\mu\text{m}^2]$  con suspensión tipo sagital. La frecuencia de resonancia se encuentra alrededor de 35 [kHz]. Para esta simulación, la presión del encapsulado del dispositivo se colocó en 100 [Pa].



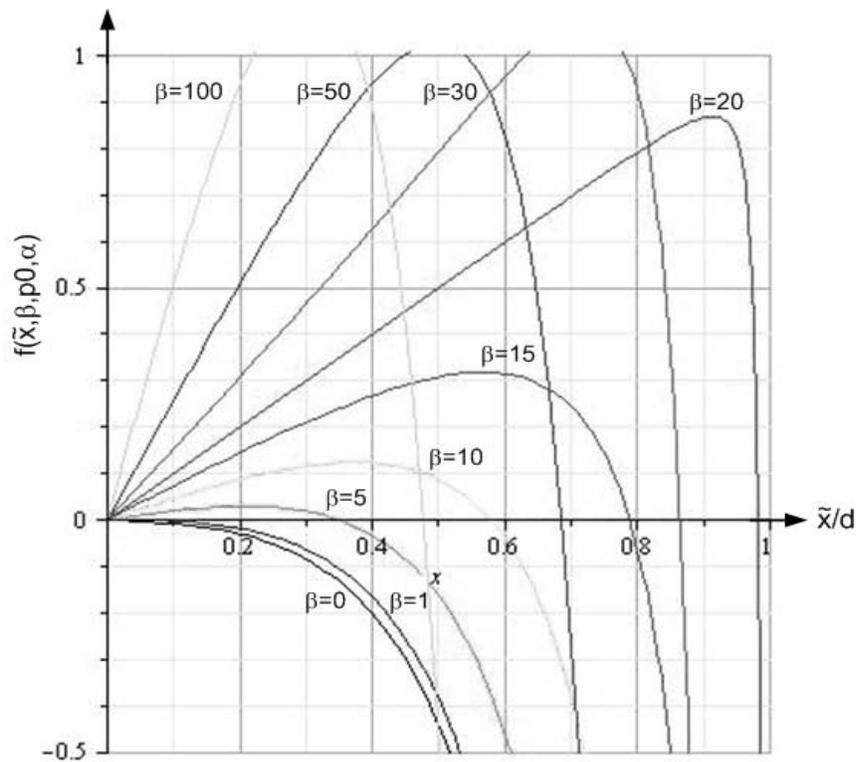
Al aumentar a 10 [kPa] la presión en el encapsulado del cuarto acelerómetro propuesto, la amplitud de la respuesta alrededor de la frecuencia de resonancia disminuye hasta en dos órdenes de magnitud.



Comportamiento de la fase para el cuarto acelerómetro propuesto sometido a una presión de encapsulado de 100 [Pa].



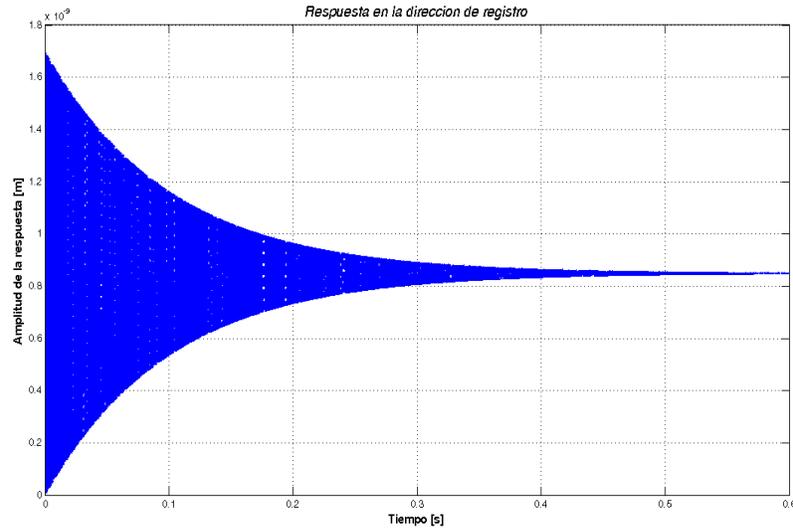
Comportamiento de la fase para el cuarto acelerómetro propuesto con una presión en el encapsulado igual a 10 [kPa].



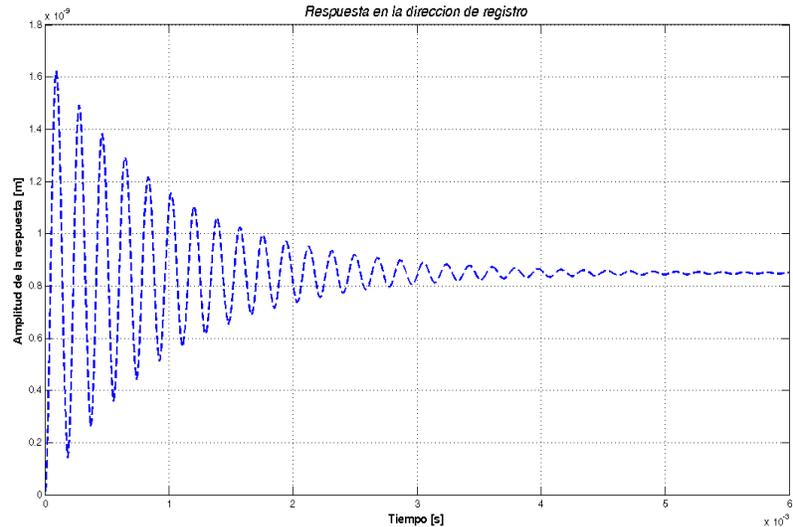
Solución gráfica para la relación entre aceleración ponderada y desplazamiento relativo para el sensor-actuador diferencial con realimentación electromecánica del cuarto acelerómetro propuesto,  $p_0 = 0,265$ ,  $\alpha = 0,05$  y  $V_r \leq V_0$ .

### 9.2.5. Acelerómetro de $1200 \times 360 \text{ } [\mu\text{m}^2]$ con suspensión de caja

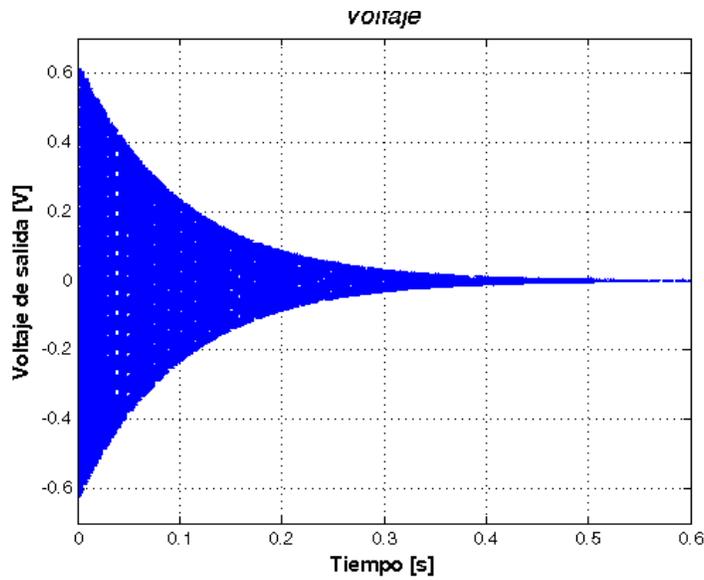
A continuación se consignan las gráficas del comportamiento simulado para el quinto acelerómetro propuesto en la sección anterior.



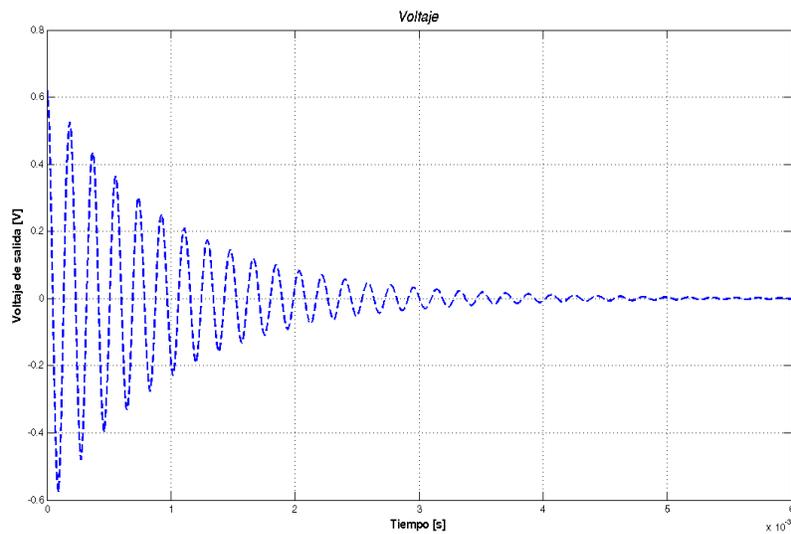
Resposta en el tiempo del acelerómetro de  $1200 \times 360 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión de caja; la señal se estabiliza  $0,6 \text{ [s]}$  después de registrada la aceleración de entrada. Para esta simulación, la presión se colocó en  $100 \text{ [Pa]}$ .



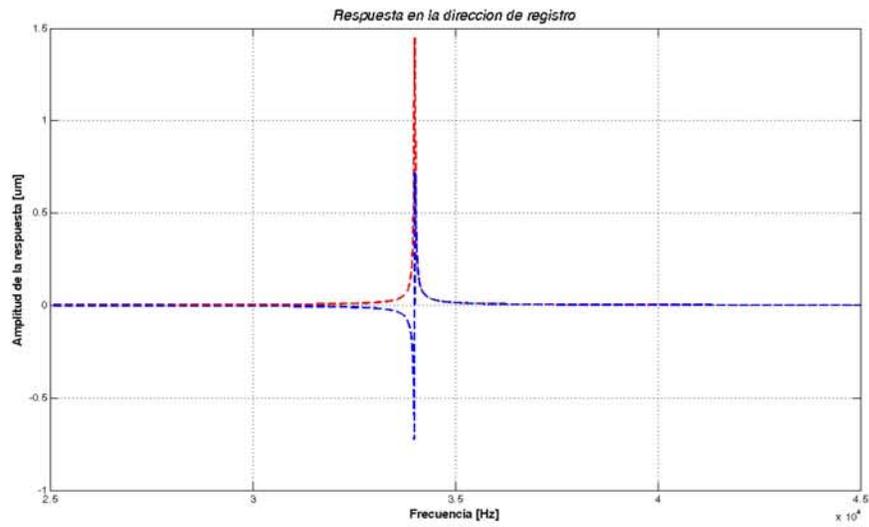
Simulación del comportamiento del quinto acelerómetro propuesto, con una presión de encapsulado igual a  $10 \text{ [kPa]}$  (vacío bajo). Al aumentar la constante general de amortiguamiento (principal mecanismo de disipación de energía), el dispositivo oscila por un tiempo menor, en este caso, el sistema deja de oscilar alrededor de  $6 \text{ [ms]}$  después de registrada la aceleración de entrada.



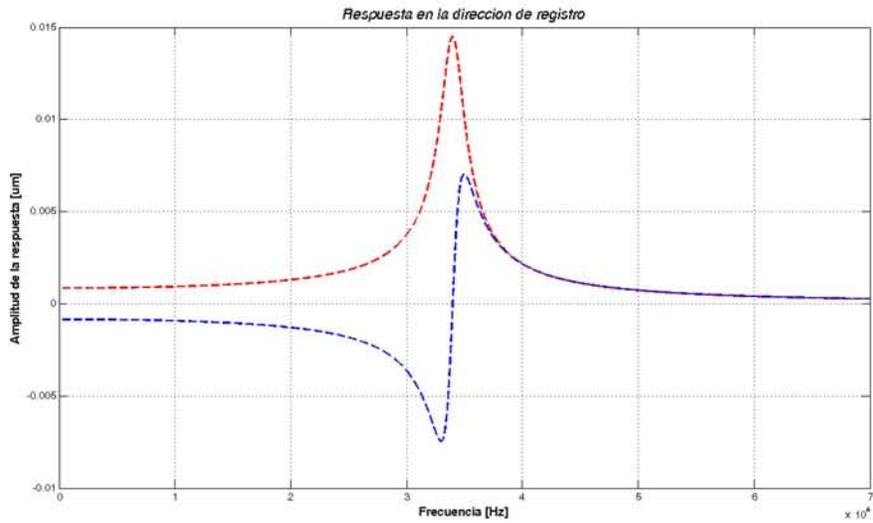
Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático del quinto acelerómetro. La aceleración de entrada fue de una décima de gravedad, el encapsulado se encontraba a una presión de 100 [Pa] y el factor de amplificación eléctrica fue de 100.



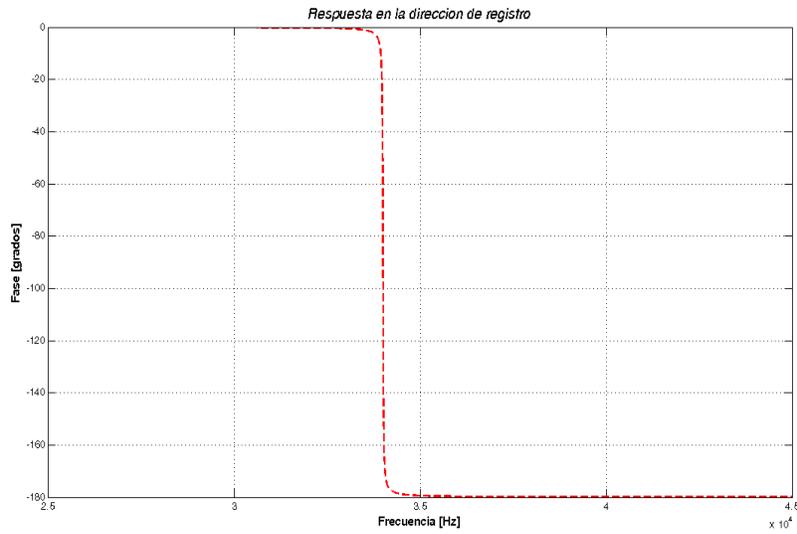
Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de 10 [kPa] y mantener un factor de amplificación eléctrica de 100.



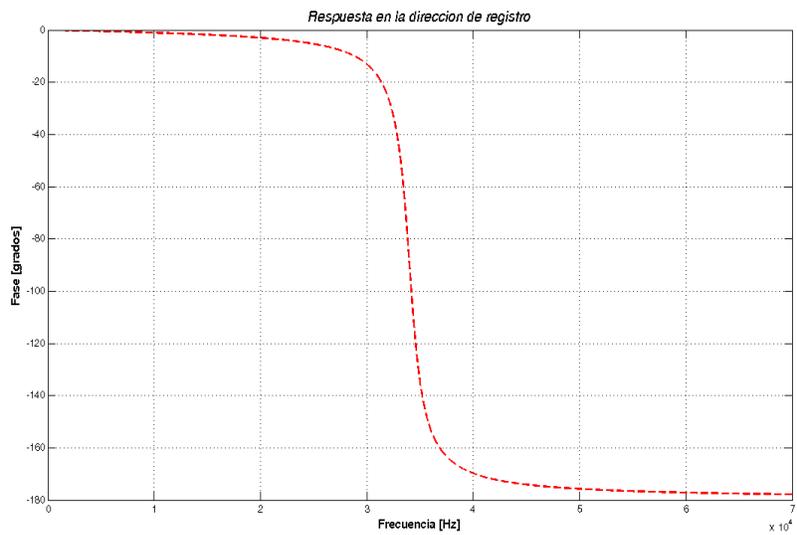
Respuesta en frecuencia del acelerómetro de  $1200 \times 360 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión de caja. La frecuencia de resonancia se encuentra alrededor de 35 [kHz]. Para esta simulación, la presión del encapsulado del dispositivo se colocó en 100 [Pa].



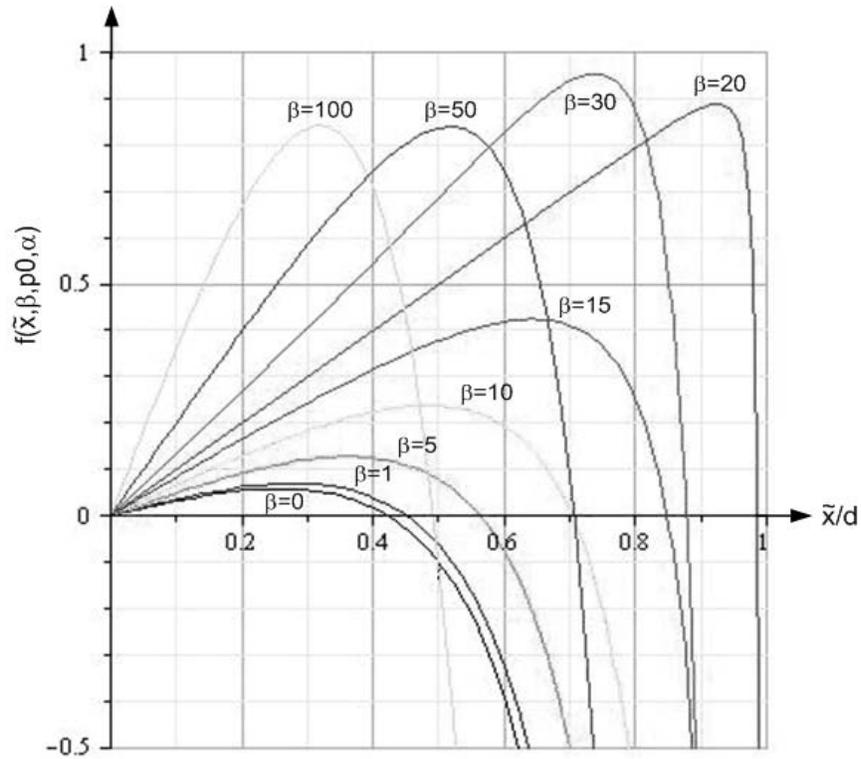
Al aumentar a 10 [kPa] la presión en el encapsulado del quinto acelerómetro propuesto, la amplitud de la respuesta alrededor de la frecuencia de resonancia disminuye hasta en dos órdenes de magnitud.



Comportamiento de la fase para el quinto acelerómetro propuesto sometido a una presión de encapsulado de 100 [Pa].



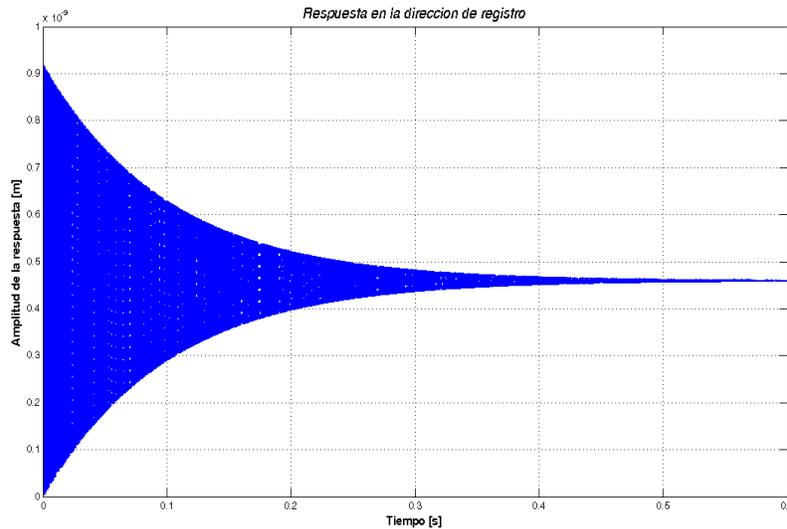
Comportamiento de la fase para el quinto acelerómetro propuesto con una presión en el encapsulado igual a 10 [kPa].



Solución gráfica para la relación entre aceleración ponderada y desplazamiento relativo para el sensor-actuador diferencial con realimentación electromecánica del quinto acelerómetro propuesto,  $p_0 = 0,1687$ ,  $\alpha = 0,05$  y  $V_r \leq V_0$ .

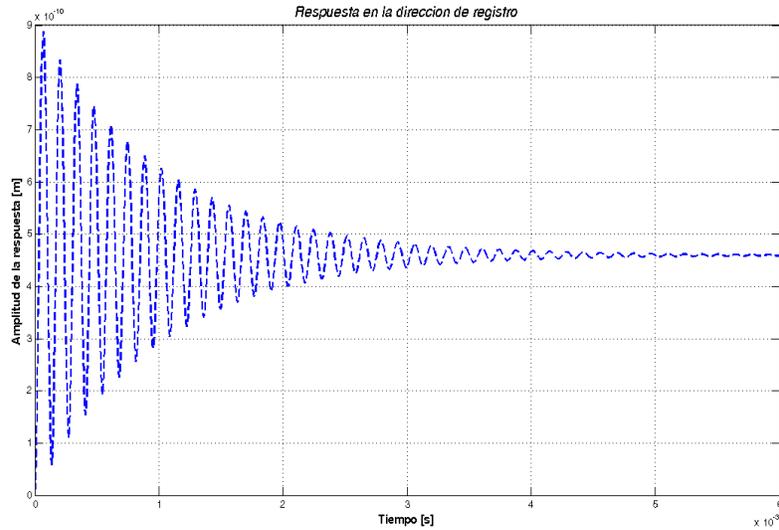
### 9.2.6. Acelerómetro de $1200 \times 360 \text{ } [\mu\text{m}^2]$ con suspensión sagital

A continuación se consignan las gráficas del comportamiento simulado para el sexto acelerómetro propuesto en la sección anterior.

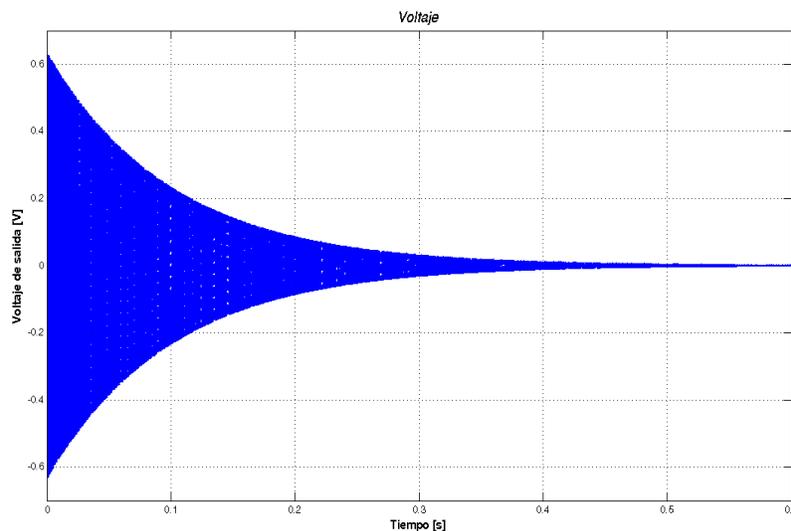


## 9.2. SIMULACIÓN MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PARÁMETROS CONCENTRADOS 341

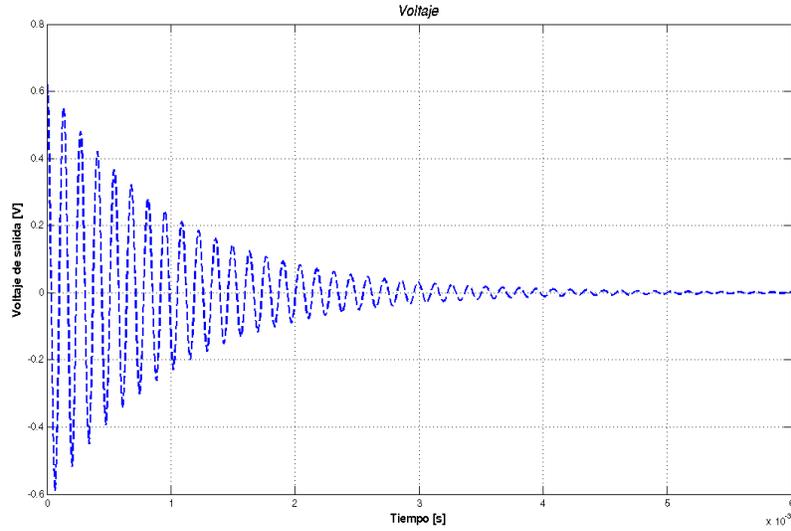
Respuesta en el tiempo del acelerómetro de  $1200 \times 360 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión sagital; la señal se estabiliza  $0,6 \text{ [s]}$  después de registrada la aceleración de entrada. Para esta simulación, la presión se colocó en  $100 \text{ [Pa]}$ .



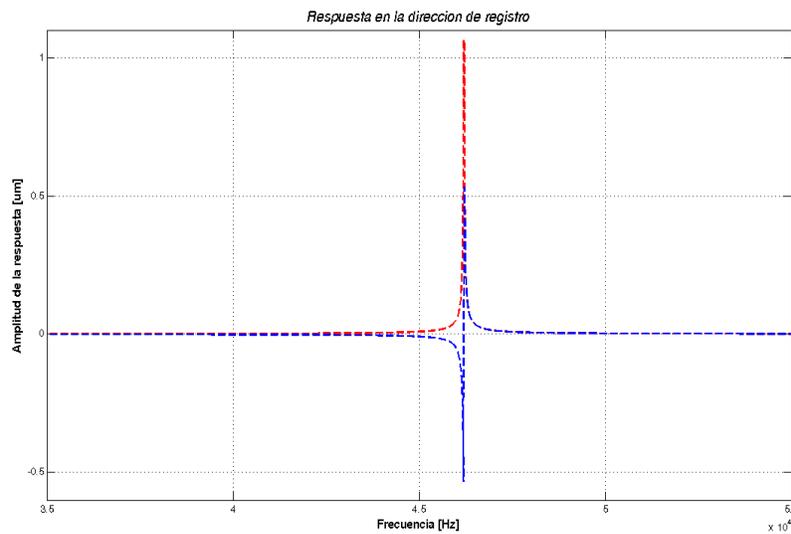
Simulación del comportamiento del sexto acelerómetro propuesto, con una presión de encapsulado igual a  $10 \text{ [kPa]}$  (vacío bajo). Al aumentar la constante general de amortiguamiento (mecanismo de disipación de energía), el dispositivo oscila por un tiempo menor, en este caso, el sistema deja de oscilar alrededor de  $6 \text{ [ms]}$  después de registrada la aceleración de entrada.



Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático incorporado al acelerómetro, al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de  $100 \text{ [Pa]}$  y aprovechar un factor de amplificación eléctrica de  $100$ .

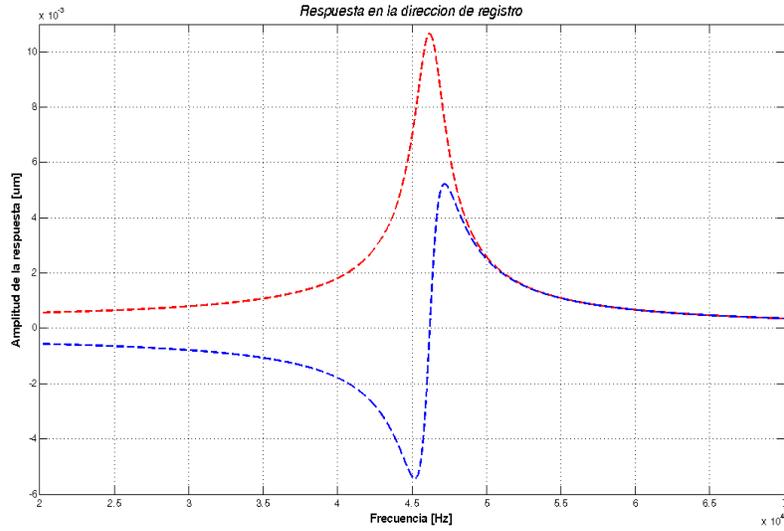


Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de 10 [kPa] y mantener un factor de amplificación eléctrica de 100.

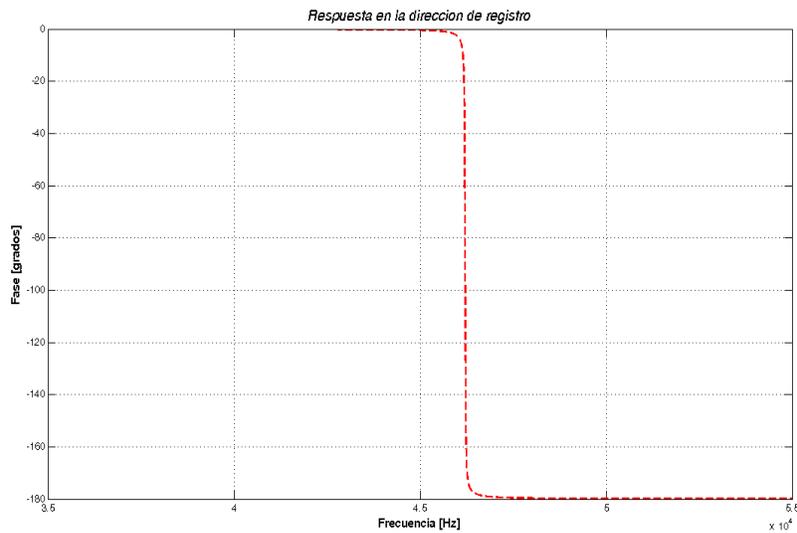


Respuesta en frecuencia del acelerómetro de  $1200 \times 360 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión tipo sagital. La frecuencia de resonancia se encuentra alrededor de 45 [khz]. Para esta simulación, la presión del encapsulado del dispositivo se colocó en 100 [Pa].

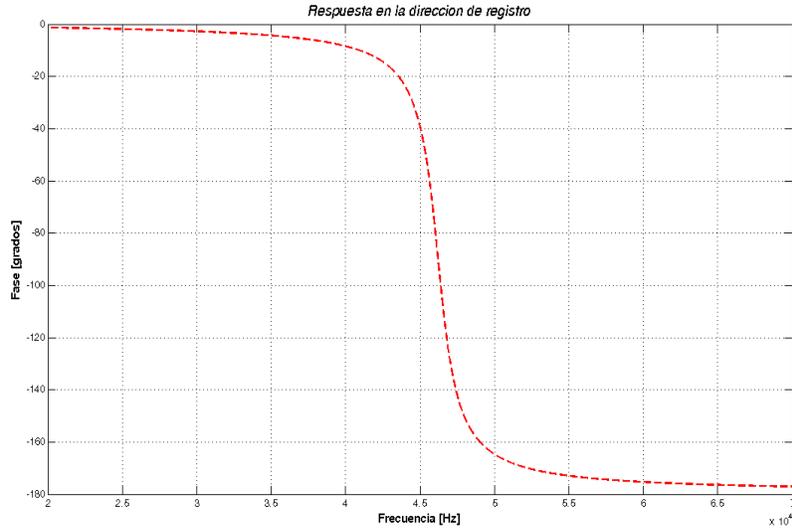
## 9.2. SIMULACIÓN MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PARÁMETROS CONCENTRADOS 343



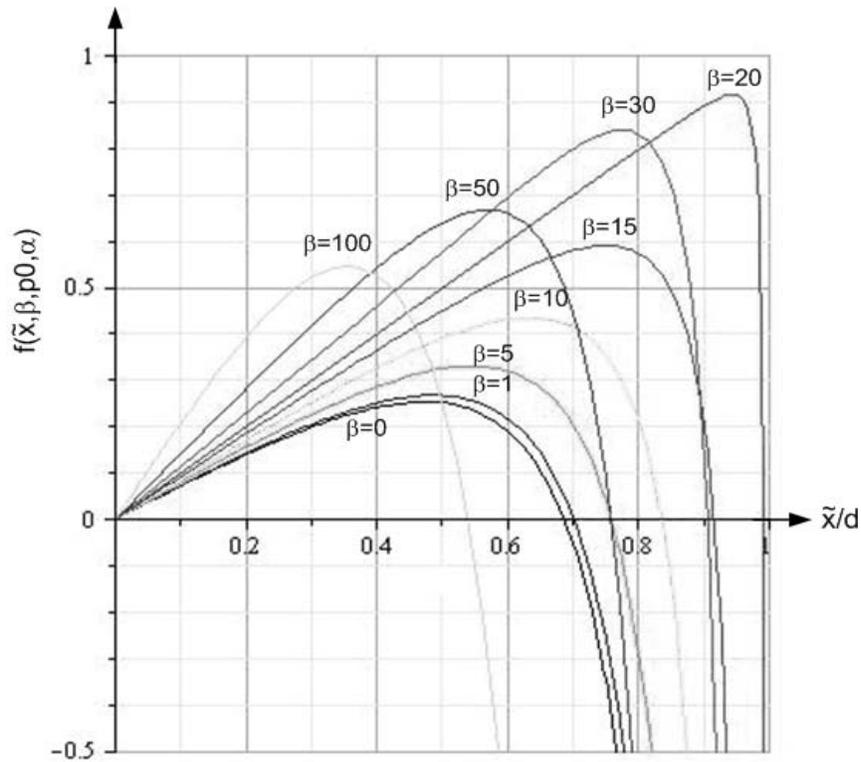
Al aumentar a 10 [kPa] la presión en el encapsulado del sexto acelerómetro propuesto, la amplitud de la respuesta alrededor de la frecuencia de resonancia disminuye hasta en dos órdenes de magnitud.



Comportamiento de la fase para el sexto acelerómetro propuesto sometido a una presión de encapsulado de 100 [Pa].



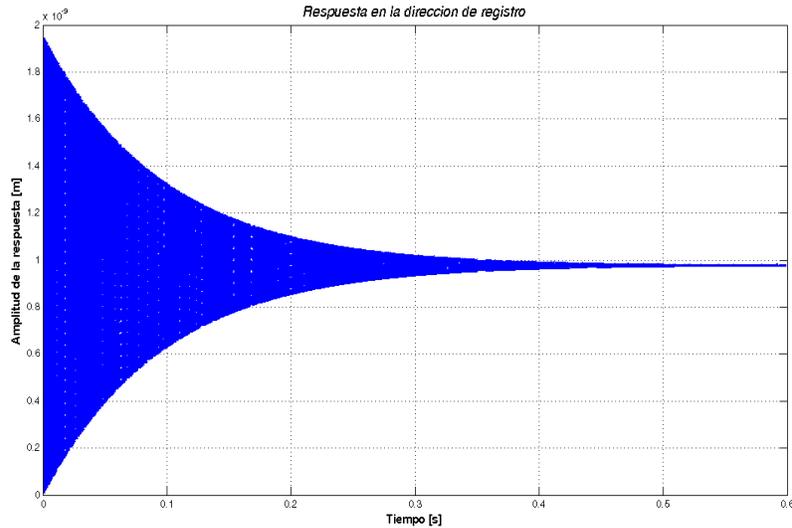
Comportamiento de la fase para el sexto acelerómetro propuesto con una presión en el encapsulado igual a 10 [kPa].



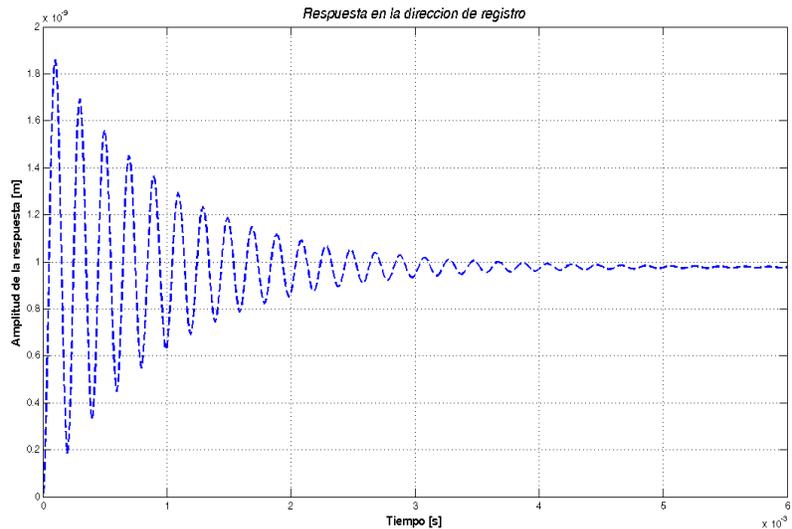
Solución gráfica para la relación entre aceleración ponderada y desplazamiento relativo para el sensor-actuador diferencial con realimentación electromecánica del cuarto acelerómetro propuesto,  $p_0 = 0,0697$ ,  $\alpha = 0,05$  y  $V_r \leq V_0$ .

### 9.2.7. Acelerómetro de $1200 \times 480 \text{ } [\mu\text{m}^2]$ con suspensión de caja

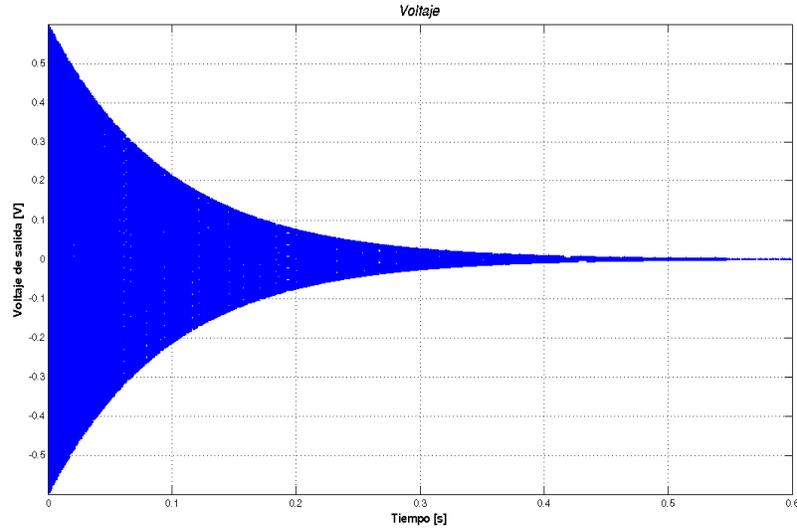
A continuación se consignan las gráficas del comportamiento simulado del séptimo acelerómetro propuesto en la sección anterior.



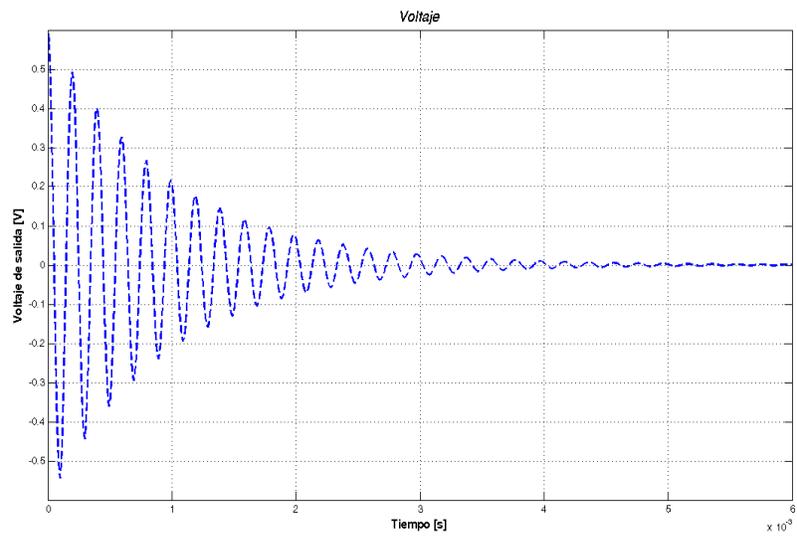
Respuesta en el tiempo del acelerómetro de  $1200 \times 480 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión de caja; la señal se estabiliza  $0,6 \text{ } [s]$  después de registrada la aceleración de entrada. Para esta simulación, la presión se colocó en  $100 \text{ } [Pa]$ .



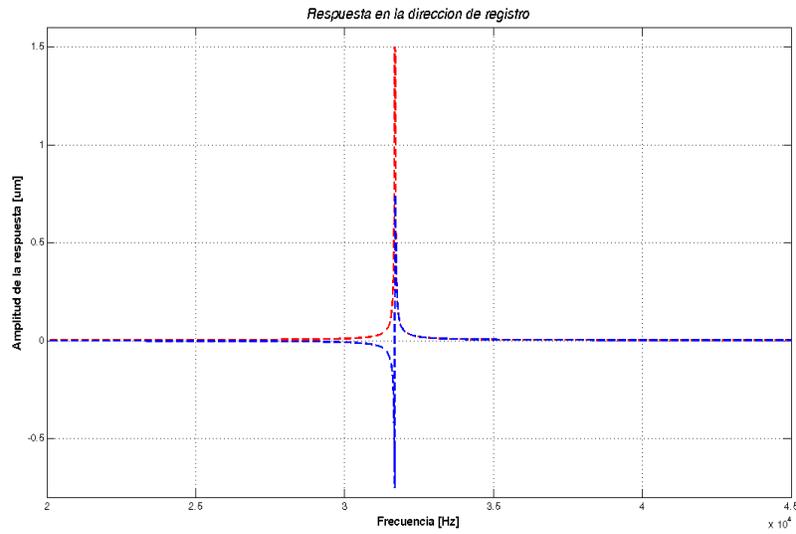
Simulación del comportamiento del séptimo acelerómetro propuesto, con una presión de encapsulado igual a  $10 \text{ } [kPa]$  (vacío bajo). Al aumentar la constante general de amortiguamiento (mecanismo de disipación de energía), el dispositivo oscila por un tiempo menor, en este caso, el sistema deja de oscilar alrededor de  $6 \text{ } [ms]$  después de registrada la aceleración de entrada.



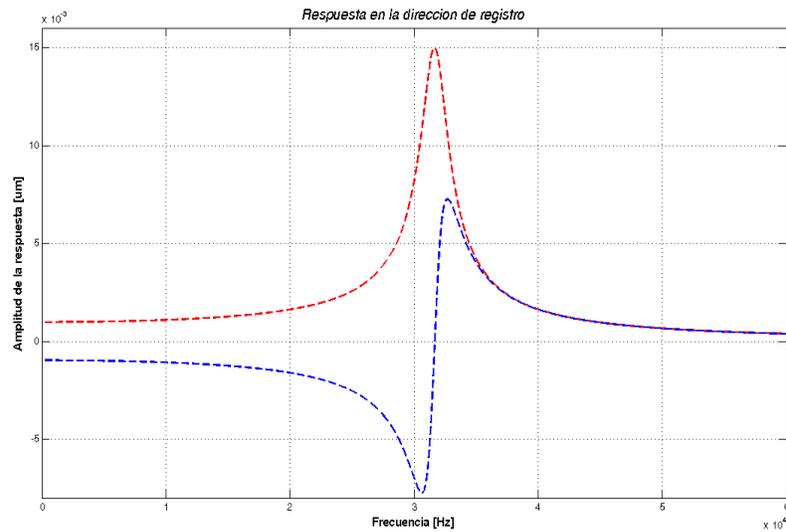
Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático del séptimo acelerómetro. La aceleración de entrada fue de una décima de gravedad, el encapsulado se encontraba a una presión de 100 [Pa] y el factor de amplificación eléctrica fue de 100.



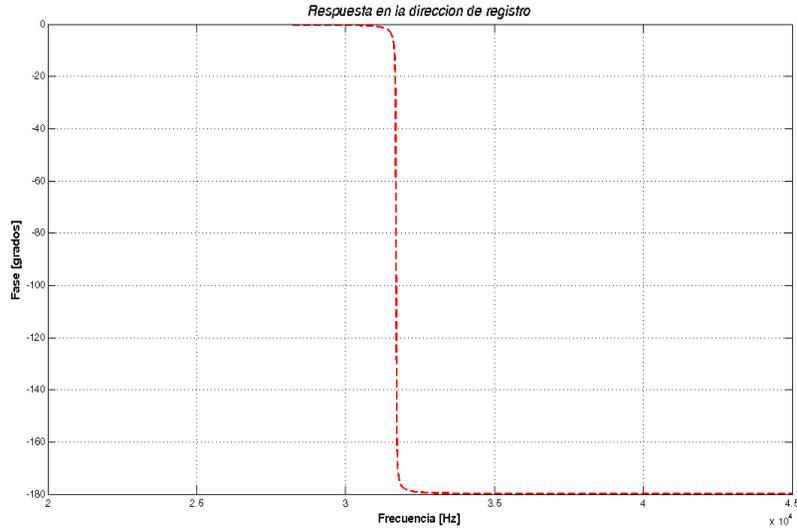
Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de 10 [kPa] y mantener un factor de amplificación eléctrica de 100.



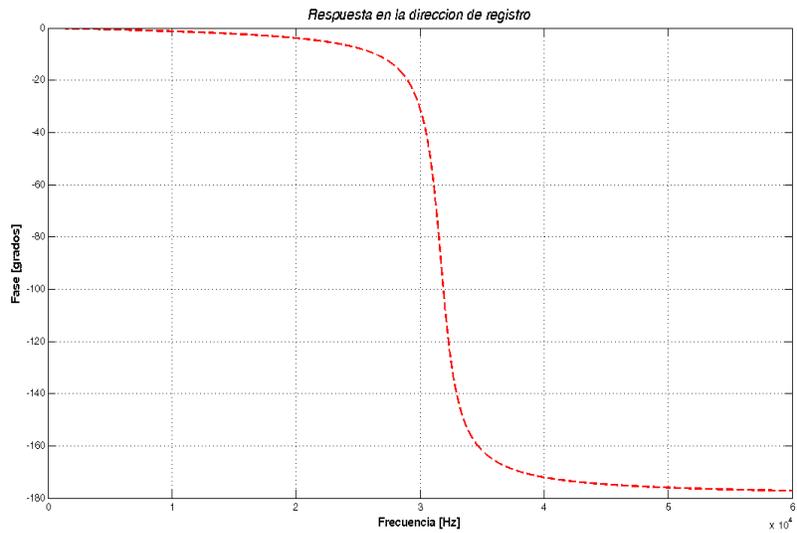
Resposta en frecuencia del acelerómetro de  $1200 \times 480 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión de caja. La frecuencia de resonancia se encuentra alrededor de 30 [kHz]. Para esta simulación, la presión del encapsulado del dispositivo se colocó en 100 [Pa].



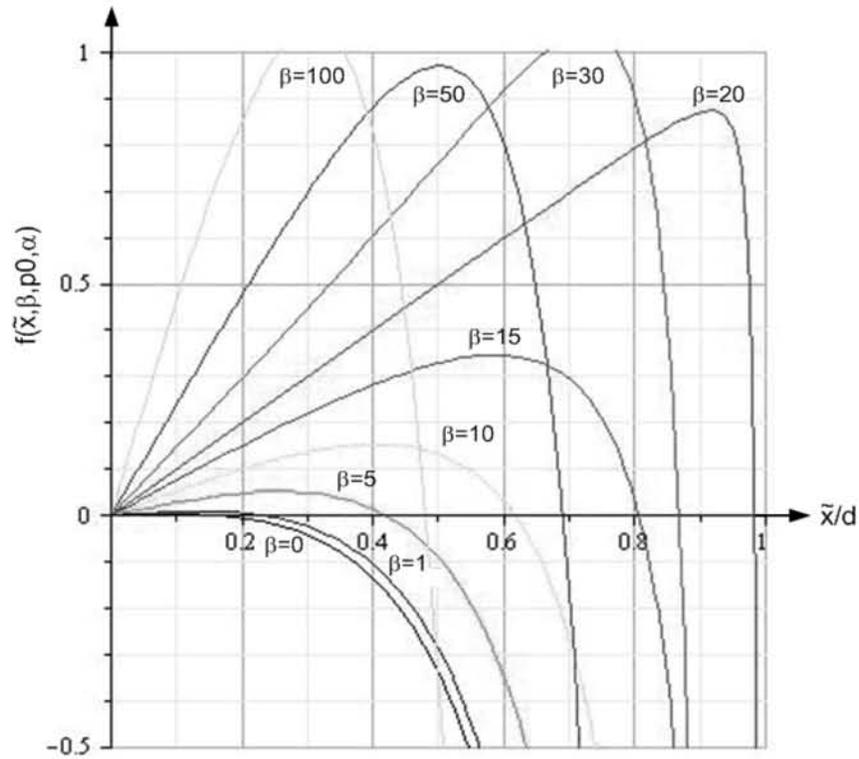
Al aumentar a 10 [kPa] la presión en el encapsulado del séptimo acelerómetro propuesto, la amplitud de la respuesta alrededor de la frecuencia de resonancia disminuye hasta en dos órdenes de magnitud.



Comportamiento de la fase para el séptimo acelerómetro propuesto sometido a una presión de encapsulado de 100 [Pa].



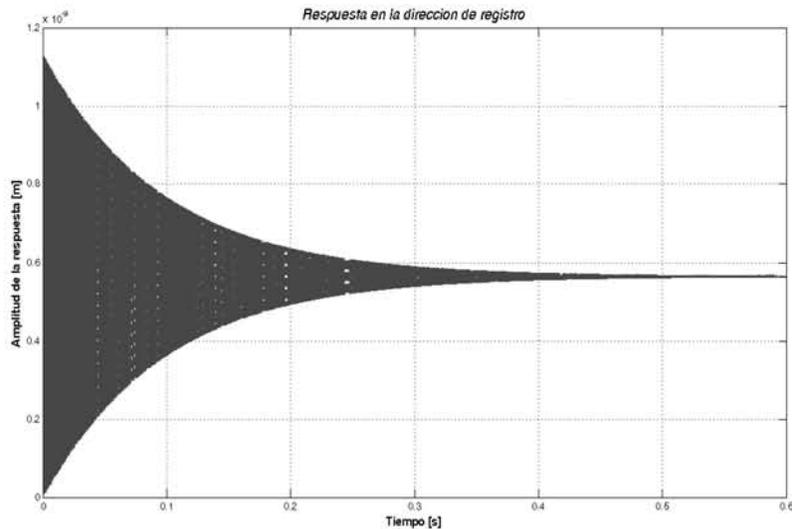
Comportamiento de la fase para el séptimo acelerómetro propuesto con una presión en el encapsulado igual a 10 [kPa].



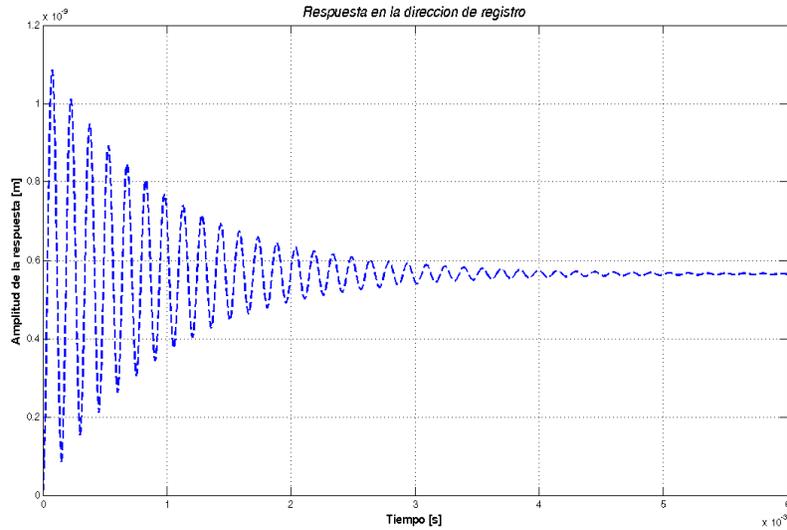
Solución gráfica para la relación entre aceleración ponderada y desplazamiento relativo para el sensor-actuador diferencial con realimentación electromecánica del cuarto acelerómetro propuesto,  $p_0 = 0,2361$ ,  $\alpha = 0,05$  y  $V_r \leq V_0$ .

### 9.2.8. Acelerómetro de $1200 \times 480 \text{ } [\mu\text{m}^2]$ con suspensión sagital

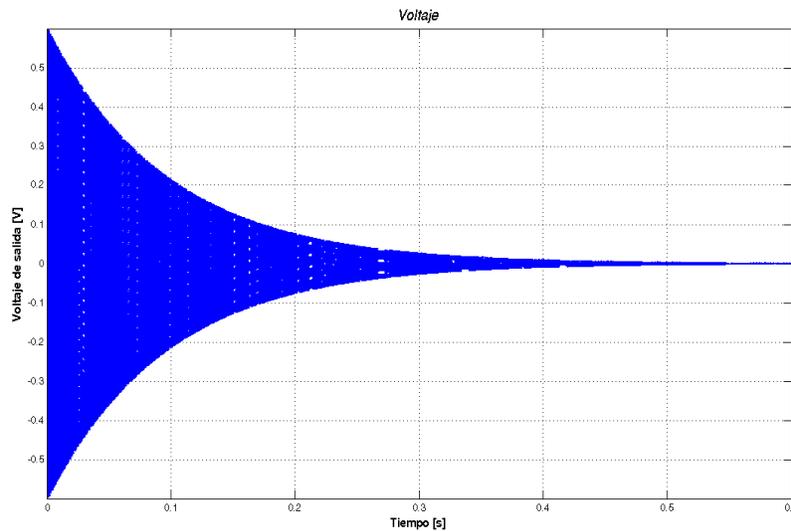
A continuación se consignan las gráficas del comportamiento simulado del último acelerómetro propuesto en la sección anterior.



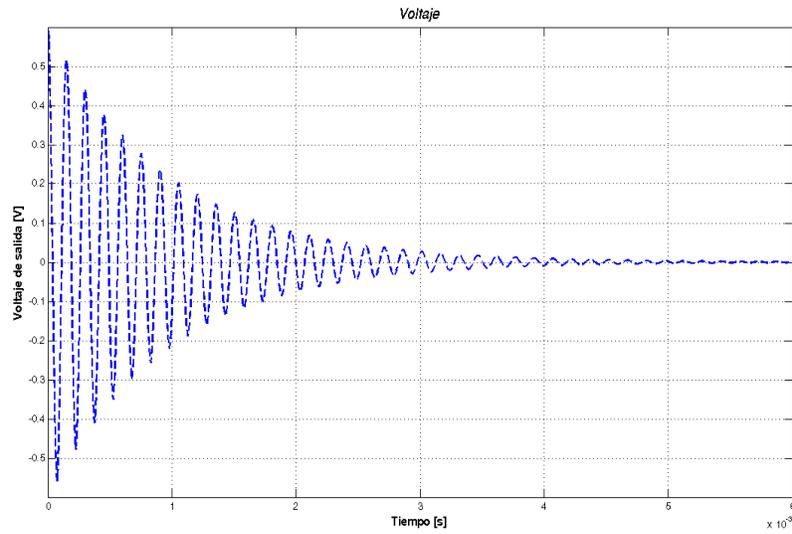
Respuesta en el tiempo del acelerómetro de  $1200 \times 480 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión sagital; la señal se estabiliza 0,6 [s] después de registrada la aceleración de entrada. Para esta simulación, la presión se colocó en 100 [Pa].



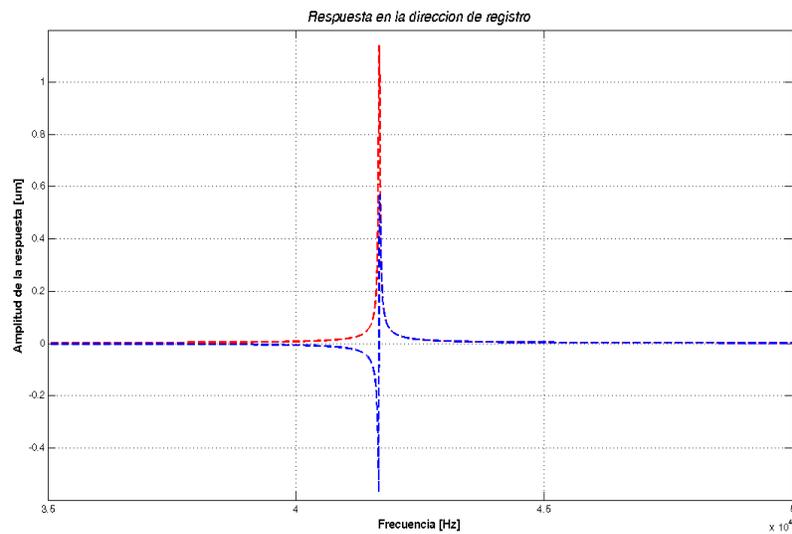
Simulación del comportamiento del octavo acelerómetro propuesto, con una presión de encapsulado igual a 10 [kPa] (vacío bajo). Al aumentar la constante general de amortiguamiento (mecanismo de disipación de energía), el dispositivo oscila por un tiempo menor, en este caso, el sistema deja de oscilar alrededor de 6,5 [ms] después de registrada la aceleración de entrada.



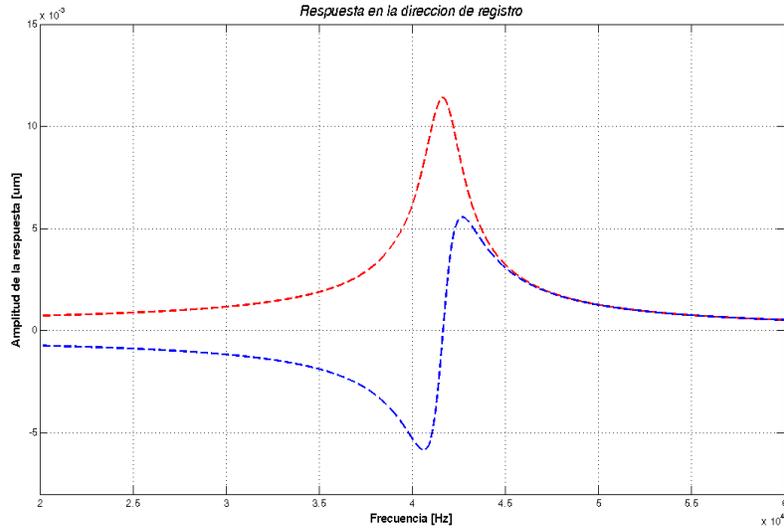
Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático incorporado al acelerómetro, al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de 100 [Pa] y aprovechar un factor de amplificación eléctrica de 100.



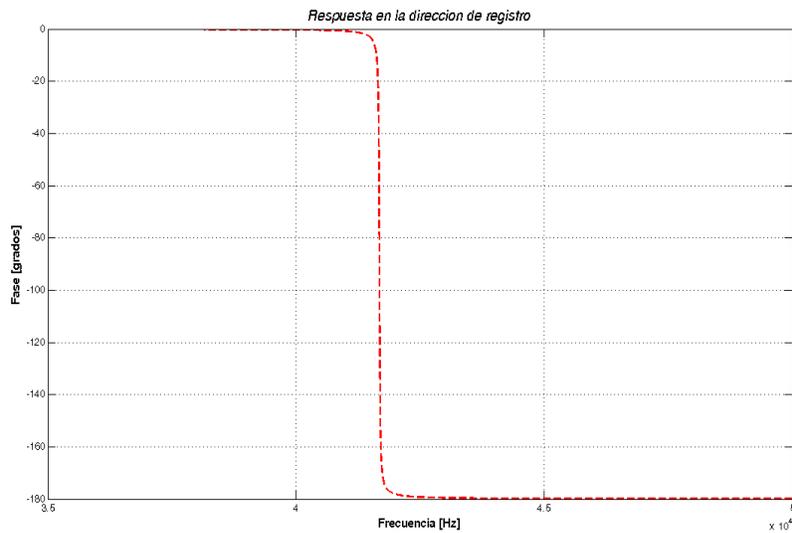
Voltaje de salida del sensor-actuador capacitivo-electrostático al recibir una aceleración de entrada de una décima de gravedad, estar encapsulado a una presión de 10 [kPa] y mantener un factor de amplificación eléctrica de 100.



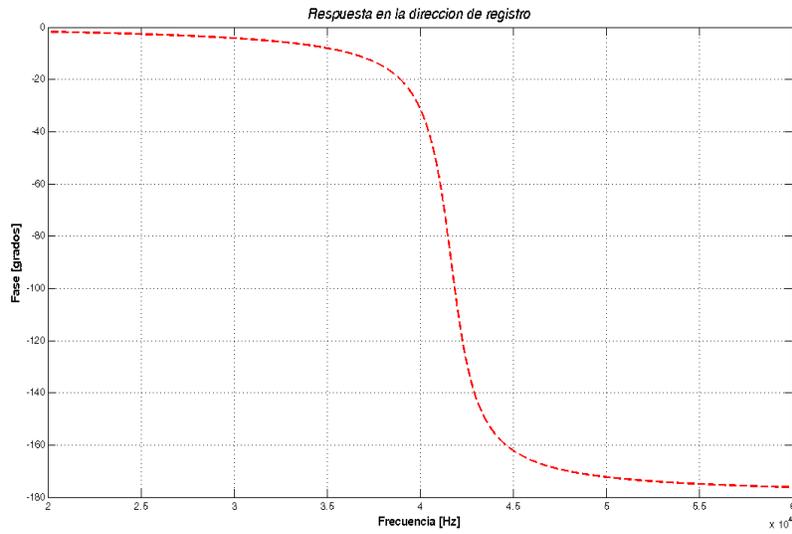
Respuesta en frecuencia del acelerómetro de  $1200 \times 480 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión tipo sagital. La frecuencia de resonancia se encuentra alrededor de 40 [kHz]. Para esta simulación, la presión del encapsulado del dispositivo se colocó en 100 [Pa].



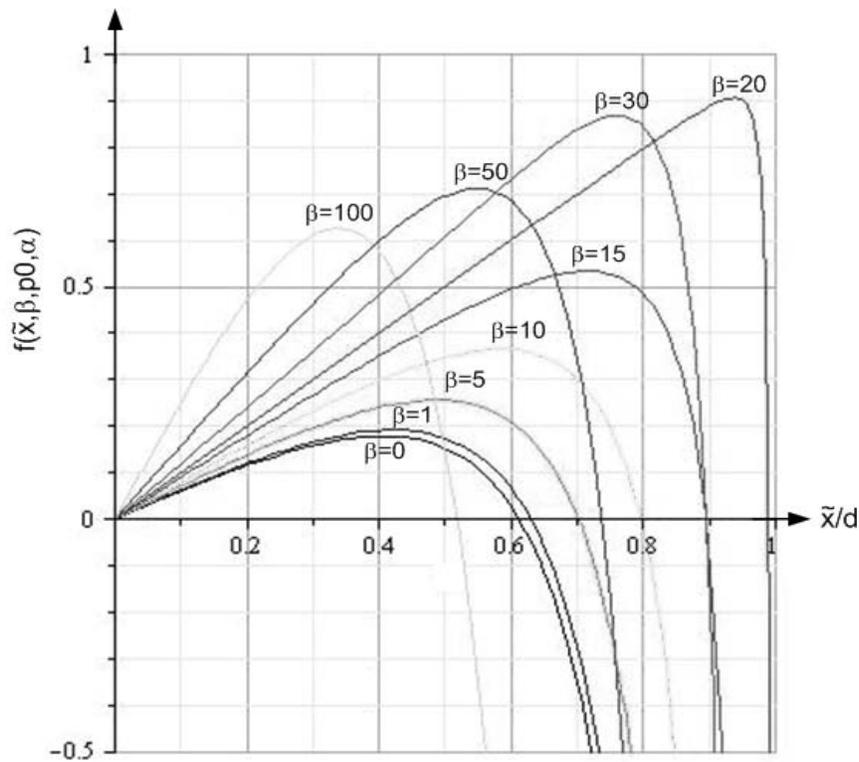
Al aumentar a 10 [kPa] la presión en el encapsulado del octavo acelerómetro propuesto, la amplitud de la respuesta alrededor de la frecuencia de resonancia disminuye hasta en dos órdenes de magnitud.



Comportamiento de la fase para el octavo acelerómetro propuesto sometido a una presión de encapsulado de 100 [Pa].



Comportamiento de la fase para el octavo acelerómetro propuesto con una presión en el encapsulado igual a 10 [kPa].



Solución gráfica para la relación entre aceleración ponderada y desplazamiento relativo para el sensor-actuador diferencial con realimentación electromecánica del cuarto acelerómetro propuesto,  $p_0 = 0,0976$ ,  $\alpha = 0,05$  y  $V_r \leq V_0$ .

A partir de lo obtenido en las simulaciones el diseño que obtiene el mejor desempeño corresponde al acelerómetro de  $1200 \times 480 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión de caja, el segundo mejor desempeño lo obtuvo el acelerómetro de  $1200 \times 360 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión de caja, el tercer mejor desempeño corresponde al acelerómetro

de  $1200 \times 480$  [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión sagital, el cuarto mejor desempeño fue para el acelerómetro de  $960 \times 1200$  [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja.

### 9.3. Máscara final

La última fase del trabajo es la realización de las máscaras de cada uno de los dispositivos propuestos (8 acelerómetros) en el proceso PolyMumps mediante el uso de la herramienta de edición de MemPro llamada *L-Edit*. Las máscaras de los acelerómetros tienen particularidades en su realización y sobre ellas se comentará de forma general en este último apartado.

Una de las características que vale la pena resaltar en las máscaras de los acelerómetros es la incorporación de una placa de polisilicio para la nivelación de la masa móvil, dicha placa de nivelación está formada por la capa identificada como Poly0 en el proceso PolyMumps y permite que el depósito de las placas estructurales Poly1 y Poly2 sea uniforme y no se presenten irregularidades significativas. Placas semejantes se colocaron debajo de los pares de electrodos que forman el actuador electrostático con la finalidad de nivelar sus perfiles laterales y disponer de la mayor área de traslape posible.

También se colocaron placas de nivelación debajo de las vigas que forman la suspensión, ello con el objetivo de evitar dobleces o desniveles que alteren su rigidez.

Nótese que en el anclado de las suspensiones del acelerómetro se han colocado pads de contacto de  $100 \times 100$  [ $\mu\text{m}^2$ ] para realizar la conexión eléctrica con la masa móvil a través de las vigas voladas de la suspensión. La correcta polarización del actuador electrostático implica que los electrodos pegados a la masa móvil se encuentren al mismo potencial eléctrico que el polo negativo de la señal de alimentación, por lo que en alguno de los pads de contacto de sus anclas se colocará la terminal negativa. Por otra parte, nótese que los electrodos pegados a la masa móvil se encuentran flanqueados por dos electrodos, uno en la parte derecha o superior y otro en la parte izquierda o inferior (según sea la orientación en que se aprecia la máscara). Todos los electrodos en la parte izquierda o superior están conectados entre sí y con el pad colocado a la derecha o en la parte superior de la máscara; en tanto que todos los dedos en la parte derecha o inferior están conectados entre sí y con el pad colocado a la izquierda o en la parte inferior; de este modo se crea el capacitor diferencial de placas paralelas que se consideró como parte del diseño de los dispositivos.

Todas las placas de polisilicio estructural y la placa final de oro tienen agujeros de liberación y la primera capa de polisilicio estructural móvil conocida como Poly1 tiene dimples. El propósito de los agujeros es permitir el ingreso del atacante químico que elimina la primera capa de óxido que sirve como capa de sacrificio para separar las capas estructurales Poly0 y Poly1 y evitar que queden pegadas por su inadecuada remoción. En tanto que los dimples, son un trabajo de grabado (perforación) sobre la primera capa de óxido con una profundidad de  $0,75$  [ $\mu\text{m}$ ] que generan un escurrimiento de la capa del polisilicio estructural Poly1 (cuando éste se deposita) con la finalidad de formar pequeños postes en el espacio de separación de Poly0 y Poly1. Los objetivos de inclusión de estos postes son dos, por una parte, evitar la adhesión electrostática entre las capas paralelas de Poly0 y Poly1 al entrar en contacto como dos superficies planas (fenómeno que es conocido en inglés como *stiction*) y, en segundo lugar, para los casos en que las estructuras de Poly1 se desplacen sobre placas de Poly0, disminuir la superficie de contacto y con ello la fricción.

Los agujeros hechos en la capa de polisilicio estructural Poly1 son seguidos por agujeros en las capas de Poly2 y Metal, ello con la finalidad, también, de permitir el paso del atacante químico que removerá la capa de óxido (capa de sacrificio) que separa las capas Poly0 y Poly1. Las reglas de diseño señalan que los agujeros en Poly2 deben encerrar al menos por 2 micrómetros a los agujeros en la capa Poly1 y los agujeros en la capa Metal deben encerrar a los agujeros en la capa Poly2 también al menos por 2 micrómetros.

Se aprovechó la disposición de la capa de oro (que es mucho más denso que el silicio policristalino) en el proceso PolyMumps para depositarla sobre la capa de polisilicio estructural Poly2 en la placa suspendida que forma la masa móvil, ello con el objetivo de ganar masa sin incrementar en exceso las dimensiones de

dicha placa. Como señalan las reglas de diseño del proceso, el trazo o depósito de la placa de oro debe quedar inscrito al trazo o depósito de la placa de polisilicio estructural Poly2 en al menos cuatro micrómetros para evitar anomalías en su grabado.

Como se señaló en el apartado *Elementos básicos en el diseño de MEMS* del capítulo 2, en algunas ocasiones se violan las reglas de diseño para obtener un resultado especial, en este caso otra alternativa para ganar mayor cantidad de masa sin incrementar en exceso las dimensiones de la placa suspendida que forma la masa móvil, es atrapar la capa de óxido (segunda capa de sacrificio del proceso) que se emplea para separar las capas de polisilicio estructural Poly1 y Poly2. Si se construye un cuadrado en Poly1 de  $60 \times 60 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  se le deberá hacer un agujero de  $4 \times 4 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  en la parte central para permitir la liberación de la capa de sacrificio entre Poly0 y Poly1, sobre este cuadrado se colocará otro cuadrado en Poly2 también de  $60 \times 60 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con un agujero de  $8 \times 8 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  en el centro. Ahora para atrapar la capa de óxido entre Poly1 y Poly2 se sellarán los extremos, para ello se colocará una tira de  $6 \text{ } [\mu\text{m}]$  de grosor, de la capa llamada Poly1-Poly2 Via, alrededor de los cuadrados sobrepuestos de Poly1 y Poly2, cuidando que la banda siempre rebase en  $2 \text{ } [\mu\text{m}]$  el borde de dichos cuadrados; en el centro de los cuadrados sobrepuestos de Poly1 y Poly2 se coloca un cuadrado de Poly1-Poly2 Via de  $16 \times 16 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  (tal como se muestra). De este modo, al depositarse la capa de Poly2, hará contacto físico con la capa de Poly1 en todos aquellos lugares en dónde se hubiera retirado la segunda capa de sacrificio (véase la figura) y se atraparán entre estas dos capas, como si se tratara de un sandwich, el resto del material de la capa de sacrificio (óxido de silicio), ganando un poco de masa sin crecer el largo o ancho de la placa. Dado que la densidad del óxido de silicio es de  $2,6 \times 10^{-15} \text{ } [\text{kg}/\mu\text{m}^3]$ , es decir, mayor que la del polisilicio, atrapar la capa de óxido de  $0,75 \text{ } [\mu\text{m}]$  de espesor es equivalente a sumar una placa de material estructural para ganar mayor cantidad de masa. Cabe aclarar que esta técnica no se empleó en el diseño de los acelerómetros consignados en el presente trabajo.

Otro aspecto importante de las máscaras de los acelerómetros es el aislamiento eléctrico de las placas de Poly0 que forman la parte más baja del pad de contacto en el anclaje de las suspensiones y la que está debajo de las vigas voladas de la suspensión y de la masa móvil. Así, se podría conectar a la placa de nivelación de la masa móvil un pad de contacto para aprovechar el capacitor de placas paralelas (formado por las placas de la masa móvil y la placa de nivelación) y registrar las conexiones de la suspensión, que son aproximaciones o alejamientos de las placas, en la dirección  $z$  y con ello agregar una dirección de registro para aceleración al diseño. Debe aclararse que en este caso, el capacitor generado no es diferencial, pero que a pesar de ello puede emplearse un control en lazo cerrado para evitar el nocivo efecto de llegada (*pull-in effect*). También, es conveniente que la placa de nivelación, debajo de los electrodos del actuador electrostático esté aislada de la placa de nivelación debajo de la masa móvil, a fin de evitar la flexión y eventual contacto de las vigas voladas estáticas (electrodos inmóviles) del actuador. Finalmente, también es aconsejable que debajo de cada dimple de la masa móvil se coloque un cuadro de Poly0 de  $8 \times 8 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  aislado eléctricamente del resto de la placa de nivelación (electrodo del capacitor de placas paralelas en la dirección  $z$ ) por una separación de al menos  $4 \text{ } [\mu\text{m}]$  que lo rodee, ello con la finalidad de que en caso de una flexión pronunciada de la suspensión, no se genere contacto eléctrico entre las placas de nivelación y masa móvil.

Para formar los capacitores diferenciales de registro a partir de una serie de electrodos intercalados (que también funcionen como actuadores electrostáticos diferenciales) es necesario que cada electrodo saliente de la masa móvil sea flanqueado por dos electrodos, cada uno de ellos eléctricamente aislado del otro, a fin de permitir la alimentación de dos señales eléctricas independientes que permitan el registro y control del desplazamiento de la masa móvil (en la dirección de menor rigidez de la suspensión, también llamada dirección de registro). Para lograr que todos los electrodos en la parte superior o a la derecha de cada electrodo saliente de la masa móvil (según sea la perspectiva en que se aprecia el dispositivo) estén eléctricamente conectados, se coloca una tira de Poly0 debajo de ellos (eléctricamente aislada de las placas de nivelación) y se crean unas pequeñas bases de algunos micrómetros cuadrados con un ancla hacia la capa Poly0 para cada electrodo; al final de la tira de Poly0 a la que se conectan todos los electrodos superiores o a la derecha se ubica un pad de contacto de  $100 \times 100 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  a través del cual se alimentará la señal eléctrica correspondiente (debe recordarse que el polo negativo de la vía de alimentación de cada señal con que se alimente el dispositivo estará conectado al pad en el anclaje de la suspensión). Del mismo modo, para conectar todos los electrodos en la parte inferior o a la izquierda de cada electrodo saliente de la masa móvil se coloca una tira de Poly0

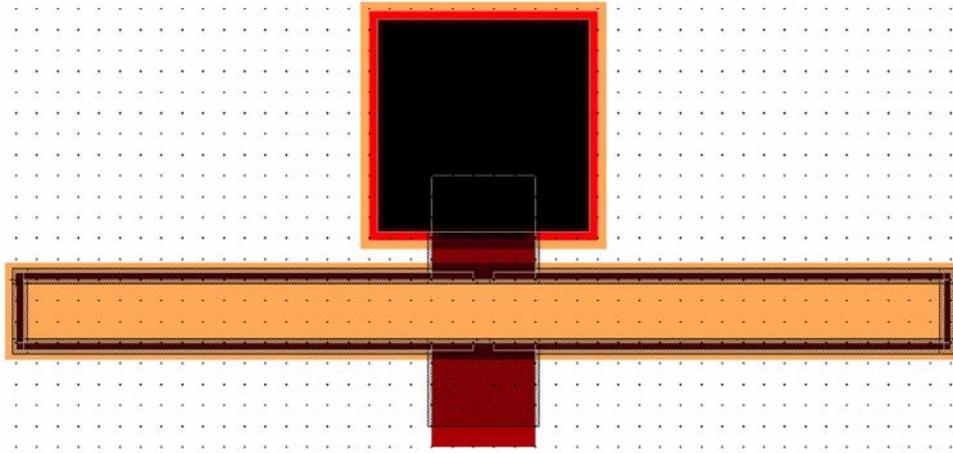
debajo de ellos, a la cual deberán anclarse mediante pequeñas bases y al final de la cual se colocará un pad de contacto para alimentar otra señal eléctrica. De este modo se evita que se presente el efecto de llegada (*pull-in effect*) mediante el balanceo de fuerzas electrostáticas empleando el actuador electrostático diferencial.

En la creación de las vigas voladas y la placa suspendida que forman la suspensión de la masa móvil, respectivamente, la capa del proceso PolyMumps llamada Poly1-Poly2 Via cubre por completo y rebasa en 2 [ $\mu\text{m}$ ] los trazos de las placas de material estructural Poly1 y Poly2 para fusionarlas y lograr elementos con un grosor de 3,5 [ $\mu\text{m}$ ]. Este procedimiento viola las reglas de diseño del proceso y pone en riesgo el resultado de la corrida (envío a fabricación), sin embargo, esta forma de fusionar las dos capas de material estructural para lograr perfiles de 3,5 [ $\mu\text{m}$ ] de grosor se consigna en el apartado *Creating Double Thickness Structures* del manual de reglas de diseño.

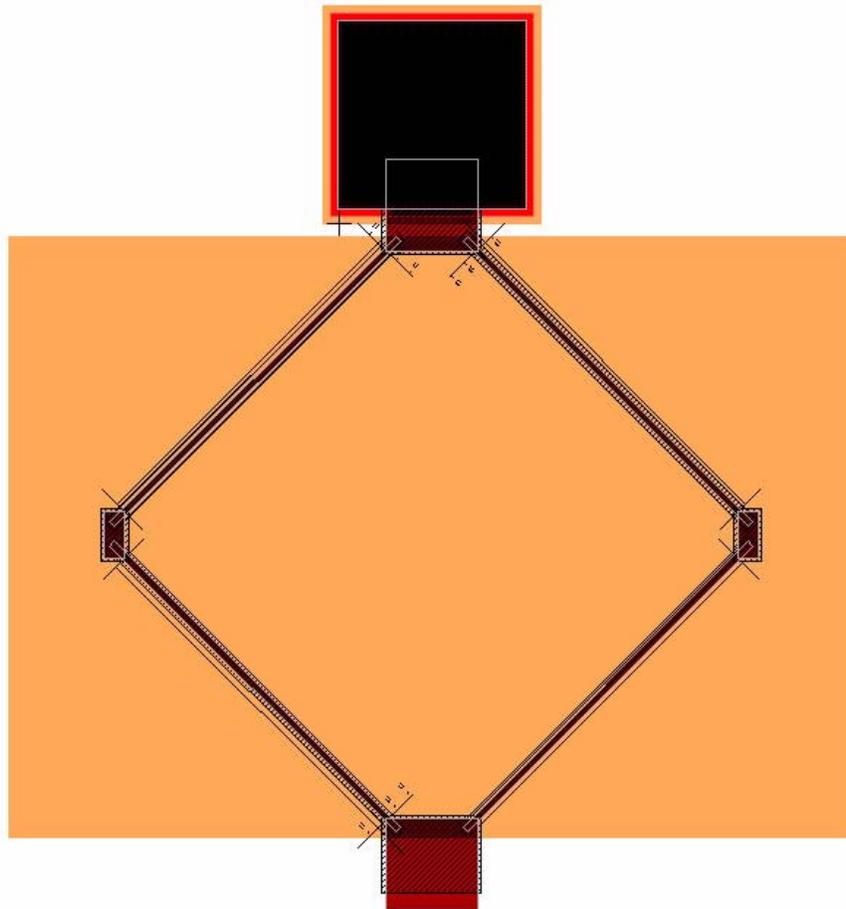
Un recurso muy poderoso en la creación de máscaras de cualquier dispositivo lo constituyen las celdas. Se trata de un agrupamiento de elementos creados a partir de las capas del proceso de fabricación que se identifican mediante un nombre genérico para su posterior inserción y reproducción dentro de una plantilla más grande. Las celdas pueden emplearse para crear partes repetitivas dentro de un dispositivo muy grande, tal como: los dientes en un engrane o los juegos de electrodos diferenciales en un actuador electrostático. A la reproducción de una celda dentro de un plantilla se le conoce como instancia y cualquier modificación que sufra el diseño base o la celda maestra, se verá reflejado de inmediato en todas sus instancias, sin la necesidad de editarlas una por una. La división del diseño de un dispositivo en partes simples que se puedan colocar en una celda para su posterior uso y reproducción, abrevia los tiempos de creación de las máscaras y posibilita la creación rápida de variaciones sobre un mismo dispositivo base.

Respecto de las variaciones sobre los diseños base de los dispositivos, en la máscara final se han introducido dos variaciones en las suspensiones y se han tomado las masas móviles ya propuestas y combinado con estas variaciones de las suspensiones. La primera de las variaciones realizada sobre las suspensiones fue una suspensión de caja con bordes redondeados. La segunda variación realizada sobre las suspensiones fue mover el ángulo de inclinación de la suspensión sagital a 30 grados. Finalmente, la tercera variación ha sido convertir la placa de nivelación y la placa de la masa móvil en un capacitor. Finalmente, un proceso que es muy importante realizar cada vez que se crea una celda (subcomponente de un dispositivo) o la máscara de algún dispositivo es muy importante realizar la revisión automática de las reglas de diseño para verificar posibles violaciones que generen problemas. El comando se encuentra en la barra de herramientas MemPro, en la opción *Tools* y bajo el nombre *Mems DRC*. Si por alguna razón no aparece la barra de herramientas de MemPro, entonces deberá cargarse mediante el siguiente procedimiento:

1. Selecciónese en el menú principal de *L-Edit*, la opción *Tools*.
2. A continuación selecciónese el comando *Macro...*, se abrirá una ventana con una serie de botones en la parte derecha.
3. De esos botones, selecciónese el botón *Load*, aparecerá una nueva ventana para la paginación de archivos, navéguese hasta el directorio *C:\Archivos de programa\Memscap\MEMS Pro v4.0\MemsLibs*, selecciónese el archivo *MEMSPHysicall.dll* y presiónese el botón abrir.
4. El foco del programa regresará a la ventana inicial y deberá presionarse el botón *Close*.
5. La barra de herramientas de MemPro debe estar cargada y abierta.



Máscara de la suspensión de caja con vigas horizontales de  $200\ \mu\text{m}$  de largo,  $3.5\ \mu\text{m}$  de ancho y  $3.5\ \mu\text{m}$  de grosor. Las barras verticales tienen  $30\ \mu\text{m}$  de largo,  $3.5\ \mu\text{m}$  de ancho y  $3.5\ \mu\text{m}$  de grosor.



Máscara de la suspensión sagital con inclinación de  $45^\circ$  y largo de las vigas de  $200\ \mu\text{m}$ , el ancho y grosor de las vigas inclinadas es de  $3.5\ \mu\text{m}$ .

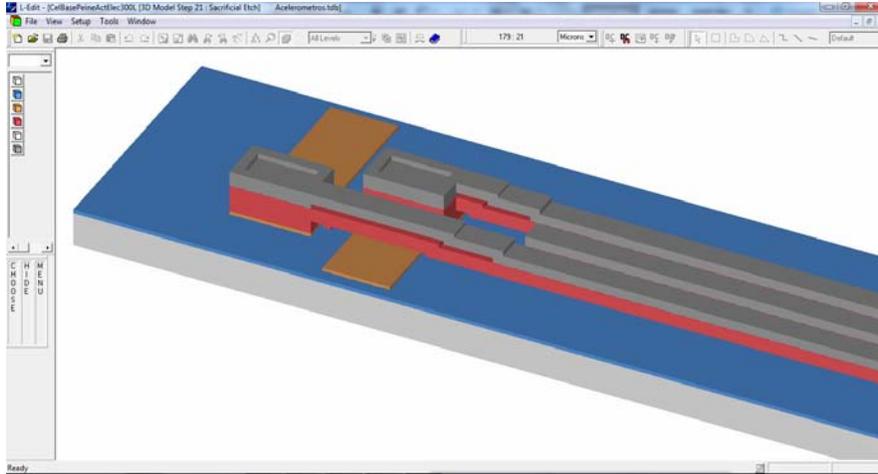
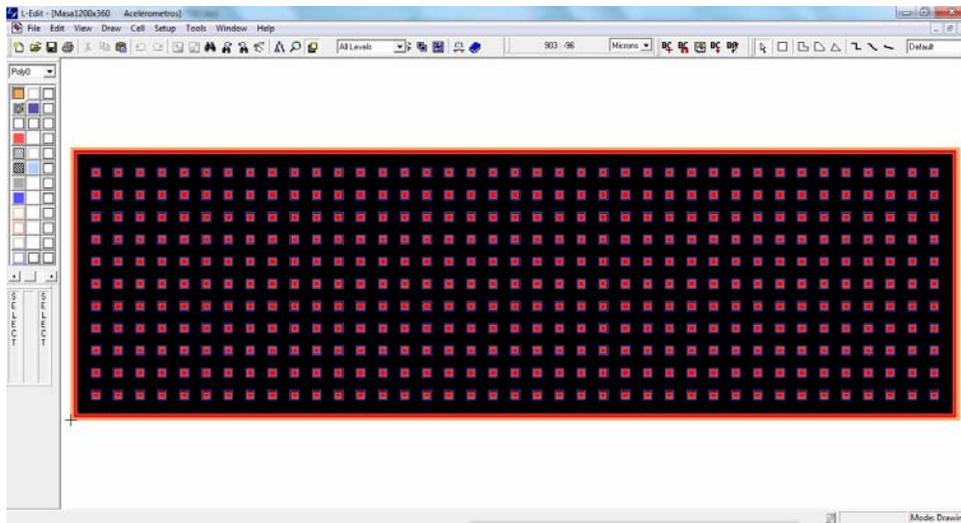
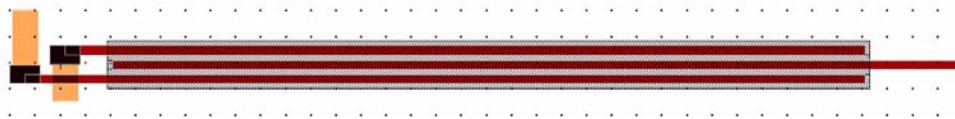


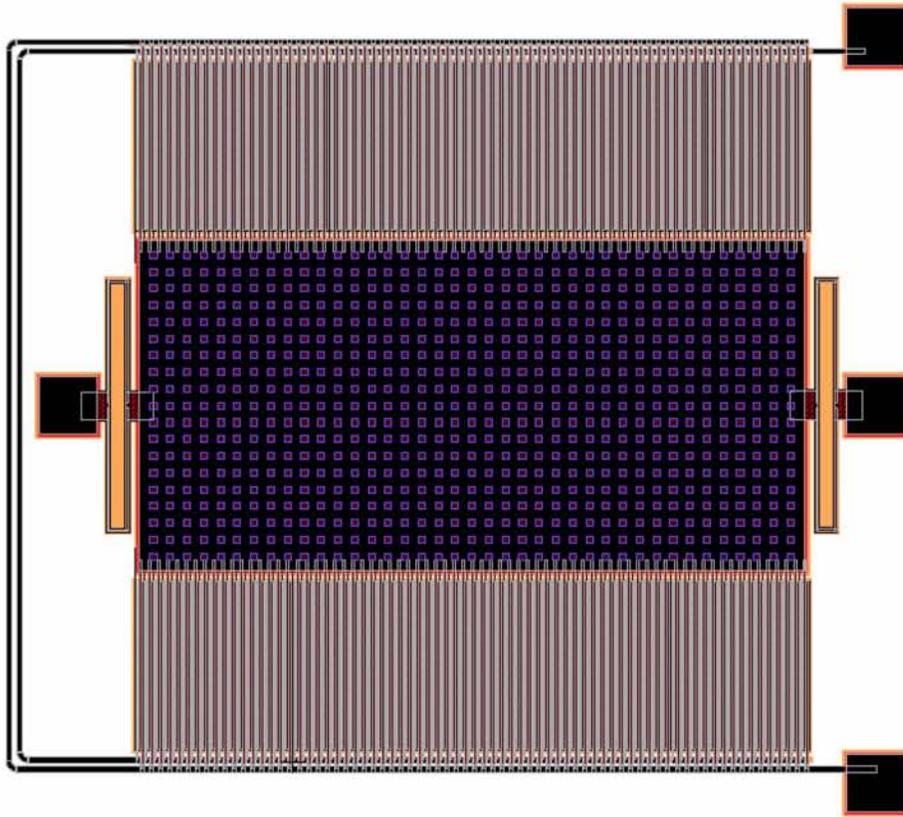
Figura 9.1: Modelo tridimensional del actuador y sensor electrostático. Se aprecian las anclas de los electrodos diferenciales fijos y las pistas de Poly0 que sirven para la conexión eléctrica y corren por debajo de los electrodos (vigas) suspendidos.



Máscara de la masa móvil sin electrodos del acelerómetro de  $1200 \times 360$  [ $\mu\text{m}$ ].

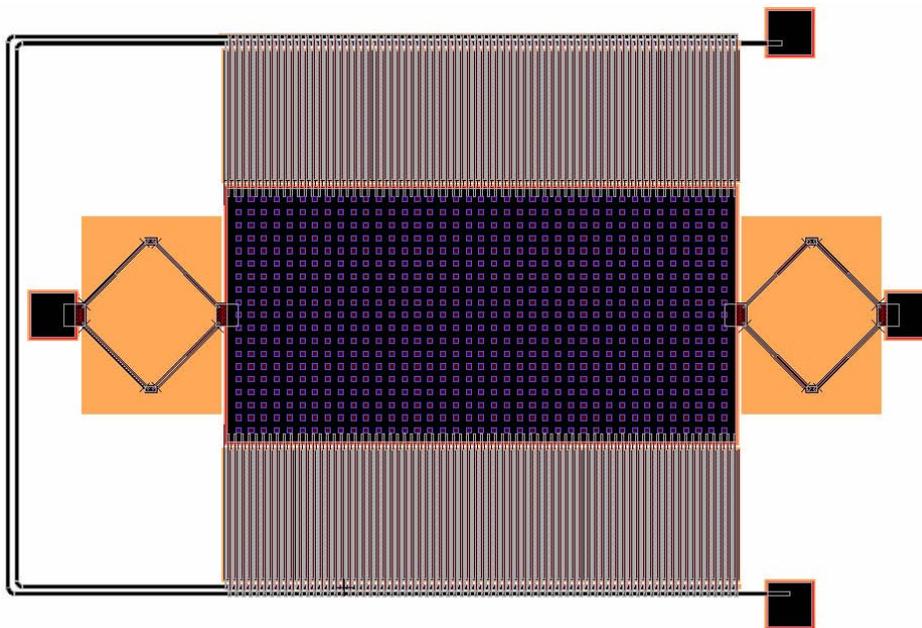


Máscara del actuador y sensor electrostático formado por los electrodos móviles pegados a la masa de prueba (electrodo central) y los electrodos fijos diferenciales (electrodos superior e inferior).

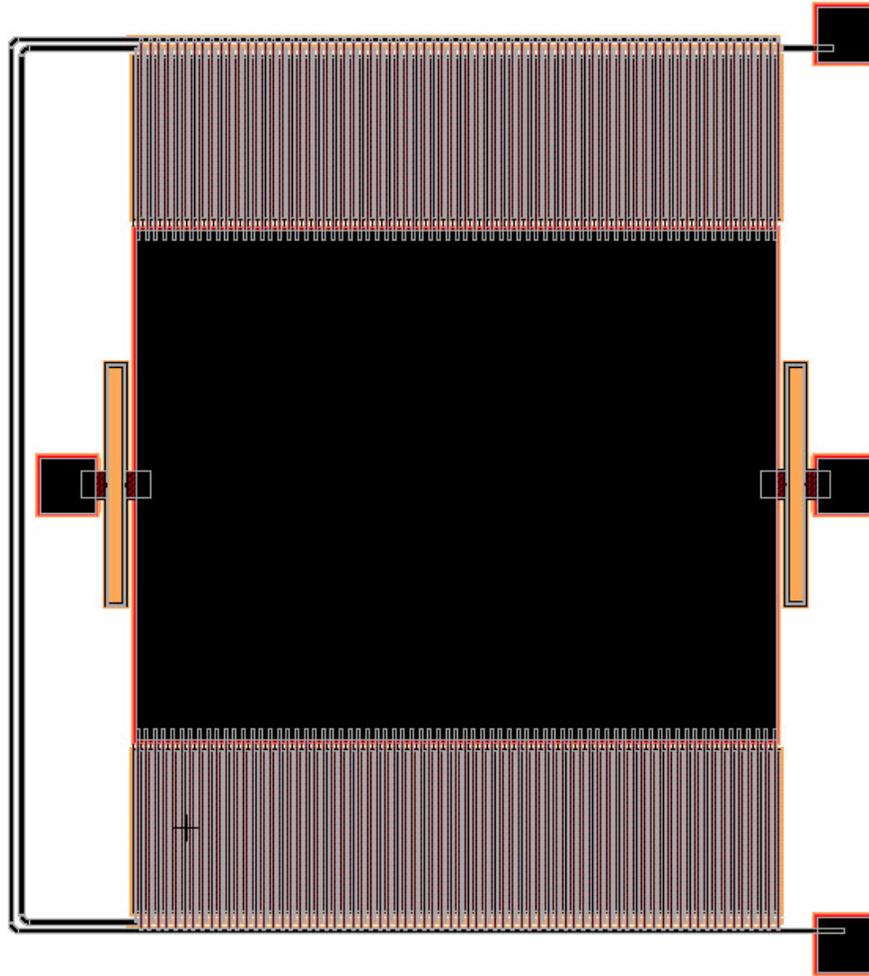
**9.3.1. Acelerómetro de  $600 \times 1200$  [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja**

Máscara correspondiente al acelerómetro de  $600 \times 1200$  [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja.

**9.3.2. Acelerómetro de  $600 \times 1200 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión sagital**

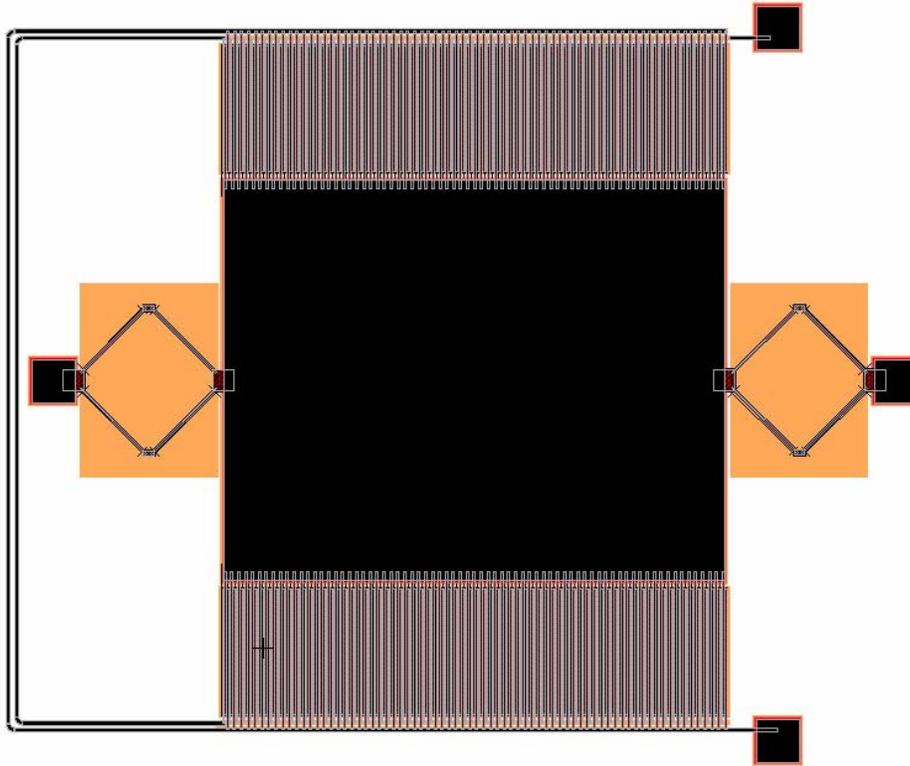


Máscara correspondiente al acelerómetro de  $600 \times 1200 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión sagital.

**9.3.3. Acelerómetro de  $960 \times 1200$  [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja**

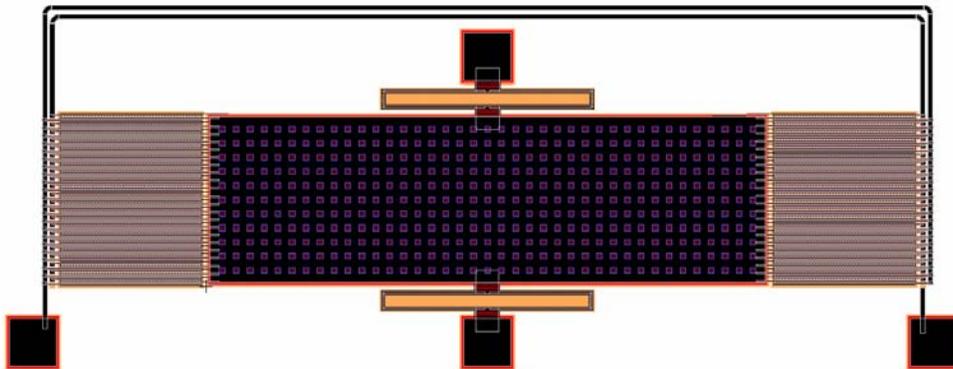
Máscara correspondiente al acelerómetro de  $960 \times 1200$  [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja.

### 9.3.4. Acelerómetro de $960 \times 1200$ [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión sagital

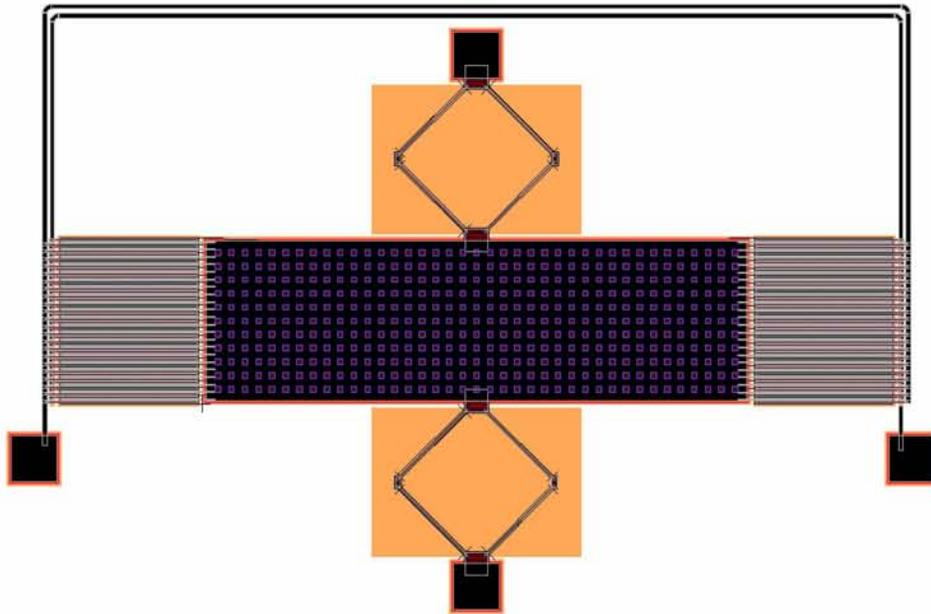


Máscara correspondiente al acelerómetro de  $960 \times 1200$  [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión sagital.

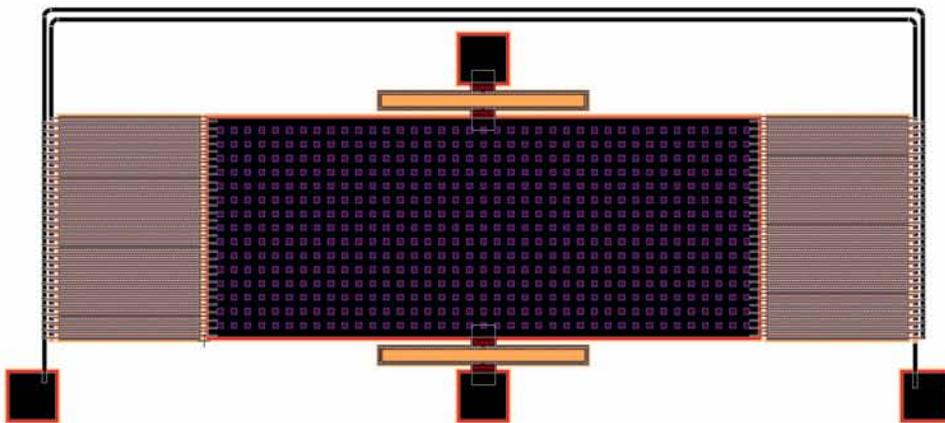
### 9.3.5. Acelerómetro de $1200 \times 360$ [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja



Máscara correspondiente al acelerómetro de  $1200 \times 360$  [ $\mu\text{m}^2$ ] con suspensión de caja.

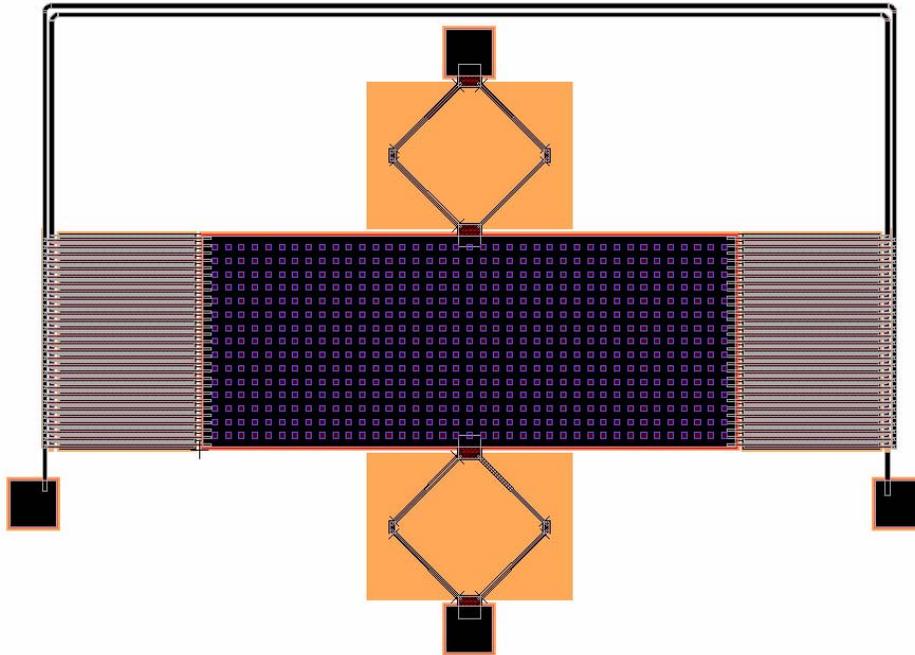
**9.3.6. Acelerómetro de  $1200 \times 360 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión sagital**

Máscara correspondiente al acelerómetro de  $1200 \times 360 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión sagital.

**9.3.7. Acelerómetro de  $1200 \times 480 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión de caja**

Máscara correspondiente al acelerómetro de  $1200 \times 480 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión de caja.

### 9.3.8. Acelerómetro de $1200 \times 480 \text{ } [\mu\text{m}^2]$ con suspensión sagital



Máscara correspondiente al acelerómetro de  $1200 \times 480 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  con suspensión sagital.

### 9.3.9. Verificación general automática de las reglas de diseño y aproximación de la geometría

Una vez que se han reunido los elementos de un dispositivo o se han agrupado dos o más máscaras correspondientes a dispositivos es conveniente ejecutar una revisión automática de las reglas de diseño, para cerciorarse que todo marcha adecuadamente. Esto con la finalidad de verificar que el proceso de reunión de dos o más celdas se ha hecho cuidadosamente (sobre todo en lo relativo al alineamiento) y no se ha provocado una violación de las reglas de diseño.

Un paso muy importante para la creación de la máscara general del dado es la aproximación de la geometría de los dispositivos mediante líneas escalonadas. Cualquier línea o trazo en la geometría de los dispositivos que sea diferente de líneas rectas paralelas a los ejes coordenados  $x$  y  $y$  debe pasar por un proceso de aproximación mediante líneas escalonadas, que es la forma en que el proceso de fabricación tratará los trazos curvos o inclinados.

### 9.3.10. Formación del dado final

La fase final del desarrollo de la máscara que se enviará a fabricación es la integración de todos los dispositivos en un cuadrado de  $1000 \times 1000 \text{ } [\mu\text{m}^2]$  llamado dado, que en sus bordes debe tener una hilera de pads de contacto útiles para hacer las conexiones de los dispositivos hacia las terminales del encapsulado en dónde se colocará finalmente dicho dado. Para determinar la cantidad de pads útiles, debe tenerse en mente el número de terminales que el encapsulado proporciona, son comunes los empaques DIP de 40 pines y 48 pines.

Del borde del dado al borde del arreglo de pads (llamado en inglés *bondframe*) que representan el límite del área en dónde se colocan los dispositivos existe una franja de 250 [ $\mu\text{m}$ ] que debe respetarse para que los cortes que se hacen sobre la oblea para obtener los dados no afecten a las máquinas creadas.

En el subdirectorío *CamelLibrary*, dentro del directorío de instalación de MemsPro se encuentra el archivo de ejemplo *f29.tdb* que contiene un *bondframe* que respeta las reglas de diseño del proceso PolyMumps y puede resultar útil para armar el dado final que se enviará a fabricación.

A partir de la máscara de cada dispositivo debe crearse una celda y posteriormente hacer una instancia de dicha celda en el archivo en dónde se armará el dado. Esto es con el propósito de facilitar los procesos de actualización de máscaras de los que nunca se está exento. Es común que existan correcciones de último minuto que pueden realizarse en los archivos originales del dispositivo y automáticamente se reflejarán en la máscara general que se envíe a fabricación, sin necesidad de alterar el acomodo del resto de los dispositivos en la superficie del dado.

## 9.4. Conclusiones y trabajo futuro

Las conclusiones después de trabajar por varios meses en la presente tesis, son de dos tipos, unas de naturaleza técnica acerca del contenido del trabajo mismo y otras de naturaleza académica acerca de la formación que todo ingeniero debiera obtener a su paso por nuestra facultad. Dado el carácter más general de éstas últimas, serán abordadas en primera instancia.

Sin duda el diseño de MEMS es un campo de la ingeniería altamente formativo dada su naturaleza aplicada y multidisciplinaria que exige conocimientos de matemáticas, mecánica de fluidos, electromagnetismo, termodinámica, mecánica de materiales, diseño mecánico, microelectrónica, microlitografía, física de semiconductores, programación y teoría de control, así como el manejo de diversas metodologías de diseño, simulación, optimización, fabricación y pruebas para obtener cualquier tipo de microdispositivo con el que se desee trabajar. Por estas razones, resulta importante la incorporación en la oferta académica de las carreras derivadas de la ingeniería eléctrica (ingeniería en computación, ingeniería en electrónica, ingeniería eléctrica e ingeniería en telecomunicaciones) y la ingeniería mecánica (ingeniería mecánica, ingeniería mecatrónica e ingeniería industrial) al, menos de un par de materias sobre sistemas microelectromecánicos y en el mediano plazo ofrecer una opción terminal o especialidad en microelectrónica y sistemas microelectromecánicos.

Es necesario dar continuidad al esfuerzo de equipamiento, iniciado con el apoyo de la Secretaría de Economía para reforzar el laboratorio con que actualmente cuenta la facultad de ingeniería de la UNAM, para ampliar sus capacidades con equipos como:

1. Equipos para electroenchapado, deposición física de vapor y deposición química de vapor
2. Equipo para encapsulado y fusión de materiales (wafer bonder, die attach & molding)
3. Equipos de análisis térmico
4. Tarjetas electrónicas para la adquisición de datos
5. Fuentes de poder de precisión y programables
6. Mesas antivibratorias
7. Licencias para software de análisis multifísico: Ansys y Comsol
8. Licencias para software de diseño de Mems: MemsPro
9. Licencias para software de diseño mecánico: SolidWorks e Inventor
10. Licencias para software de conversión de formatos de archivos CAD

También es necesario que la Facultad de Ingeniería de la UNAM haga un esfuerzo por disponer de un laboratorio de manufactura de sistemas microelectromecánicos y circuitos integrados con el fin de impulsar estas áreas que son la actualidad en la manufactura de dispositivos electrónicos, sensores y sistemas automáticos. Ójala los esfuerzos institucionales de crecimiento se orienten hacia estas áreas que hoy por hoy marcan la pauta en la ingeniería eléctrica y se invierta en el equipamiento y capacitación de profesores para fortalecer la currícula de las carreras relacionadas con estas tecnologías.

En cuanto a las conclusiones técnicas del trabajo, éstas pueden resumirse en:

1. El proceso PolyMumps resulta adecuado para la creación de acelerómetros con capacidad de registro de aceleraciones en el orden de las 10 a las 100 miligravedades, por lo que califican como dispositivos para aplicaciones de instrumentación.
2. Además, dados los valores de las frecuencias naturales de oscilación que se lograron con los dispositivos (entre 20 y 40 [khz]), bien pueden emplearse para la detección de vibraciones anómalas en equipos de generación eléctrica y en motores.
3. La metodología seguida para el análisis, diseño, simulación y creación de las máscaras de los dispositivos puede resultar una buena guía didáctica para impartir un curso sobre sistemas microelectromecánicos de nivel licenciatura.
4. El uso de técnicas y software de simulación por elemento finito y análisis multifísico puede mejorar mucho la formulación de hipótesis sobre el funcionamiento de los dispositivos y aportar elementos valiosos para su diseño.
5. El diseño electromecánico es tan sólo una parte del proceso de diseño y creación de sistemas microelectromecánicos, lo relativo a su embalaje e integración con la electrónica de alimentación y control resulta igualmente crucial para el adecuado funcionamiento del dispositivo, sin embargo, ambos aspectos quedan fuera del alcance del presente trabajo.

El trabajo futuro puede resumirse en los siguientes puntos:

1. La parte más importante del trabajo futuro es el envío a fabricación de los dispositivos propuestos en la presente tesis para realizar su caracterización mecánica y eléctrica en el laboratorio y ver su correspondencia con lo señalado por las simulaciones por computadora, sin embargo, esto depende de la disponibilidad de recursos para solventar los gastos de una corrida en PolyMumps, que son de alrededor de 6 mil dólares americanos, y el acceso a equipo para el encapsulado al vacío y la realización de las conexiones eléctricas entre el dado de semiconductor y algún empaque electrónico estándar.
2. Como parte del trabajo que puede desarrollarse posteriormente, está la realización de las simulaciones mecánicas y electromecánicas de los dispositivos aquí propuestos, utilizando algún software de elemento finito capaz de trabajar con acoplamientos multifísicos (como son los casos de Ansys Multiphysics o Comsol), ello con la finalidad de verificar posibles discrepancias con los resultados (desplazamiento, velocidad y aceleración de la masa de prueba y su transducción a voltaje) obtenidos mediante las simulaciones desarrolladas en Matlab. A partir de dichas discrepancias sería posible ajustar los parámetros de diseño y mejorar la respuesta del sistema.
3. Dentro de las mejoras para el desempeño que pueden realizarse a los dispositivos propuestos se encuentra el mejor aprovechamiento del control en lazo cerrado del dispositivo, que hasta este momento se modeló como uno del tipo proporcional como parte del diseño del sistema y que se simuló en Matlab (la constante de proporcionalidad del control,  $k$ , está determinada por la ganancia del amplificador operacional colocado en el lazo de realimentación). Sin embargo, la respuesta del sistema puede controlarse mucho mejor al incorporar un control proporcional integral derivativo (PID) que aumente la amplitud de la respuesta, mejore su tiempo de subida, disminuya el sobreimpulso y reduzca las oscilaciones.

4. Otra parte importante del trabajo por desarrollar corresponde a la extensión del presente trabajo hacia el diseño de acelerómetros tridimensionales (que registren cualquier variación en la aceleración de un cuerpo en movimiento tridimensional, es decir, con componentes en  $x, y$  y  $z$ ). Los acelerómetros propuestos en esta tesis, están diseñados para registrar variaciones en la dirección ortogonal al actuador electrostático, si se hace coincidir esta dirección con uno de los ejes de movimiento se tendrán registros de aceleración en dicha dirección. Puede modificarse la suspensión y realizarse un nuevo arreglo de actuadores electrostáticos para lograr registros en las dos direcciones que definen el plano del dado que contiene al acelerómetro (por simplicidad, supónganse  $x$  y  $y$ ). Por otra parte, podrían simplemente colocarse un par de acelerómetros, como los presentados en esta tesis, de modo tal que uno de ellos registrara en la dirección de un eje de movimiento y el otro se colocaría rotándolo 90 grados hacia la izquierda o la derecha para registrar en la dirección del otro eje de movimiento que define el plano que contiene los acelerómetros. Para lograr registros en el que se podría llamar eje  $z$ , puede aprovecharse el hecho de que la placa de nivelación debajo de cada masa de prueba (y que en el proceso PolyMumps se fabrica con la capa de proceso Poly0) de los acelerómetros puede formar junto con ésta un capacitor variable de placas paralelas, la masa de prueba (plaza móvil del capacitor variable) sostenida mediante la suspensión del acelerómetro, también experimenta desplazamientos que la aproximan a la placa de nivelación, dado que dichos desplazamientos generarán variaciones en la capacitancia, puede aprovecharse este hecho y el modelo del sistema como uno del tipo masa-resorte-amortiguador para averiguar la aceleración que experimenta el dispositivo en la dirección  $z$ .
5. Diseñar acelerómetros aprovechando las características de fabricación que ofrecen los otros procesos de bajo costo ofrecidos por la empresa Memscap Inc. tales como MetalMumps y SOImumps.
6. Finalmente, las herramientas de modelado, simulación y el aprovechamiento de las particularidades del proceso de fabricación PolyMumps abordadas en el presente trabajo podrían aprovecharse para el diseño de giroscopios planares que servirían como instrumentos de registro de cambios de dirección en movimientos contenidos en un plano.



# Apéndice A

## Apéndice 1. Constantes físicas.

Constante física	Símbolo	Valor
Angstrom	$\text{\AA}$	$\text{\AA}=0.1 \text{ nm}=10,000 \mu\text{m}$
Carga eléctrica del electrón	$q$	$q = 1,6021 \times 10^{-19} \text{ C}$
Electrón volt	$eV$	$1 eV = 1,6021 \times 10^{-19} \text{ J}$
Impedancia del vacío	$Z_0$	$Z_0 = 376,73 \Omega$
Constante de Faraday	$F$	$F = 9,6487 \times 10^4 \text{ C/mol}$
Permitividad del vacío	$\varepsilon_0$	$\varepsilon_0 = 8,8544 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
Permeabilidad del vacío	$\mu_0$	$\mu_0 = 1,2566 \times 10^{-6} \text{ H/m}$
Voltaje térmico	$kT/q$	$0,0259 \text{ V}$
Constante de Boltzmann	$k_B$	$k_B = 1,3807 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma_{SB}$	$\sigma_{SB} = 5,6704 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$
Número de Avogadro	$L$	$L = 6,0221 \times 10^{23} \text{ 1/mol}$
Constante universal de los gases	$R$	$R = 8,3145 \text{ J/mol K}$
Constante de Planck	$h$	$h = 6,6261 \times 10^{-34} \text{ Js}$
Presión atmosférica		$1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$
Aceleración producida por la fuerza de gravedad	$g$	$g = 9,8067 \text{ m/s}^2$



## Apéndice B

# Bibliografía



# Bibliografía

- [1] Maluf, N. & Williams, K. (2004). *An Introduction to Microelectromechanical Systems Engineering*. Second Edition. Artech House Inc. p. 2.
- [2] Allen, J. J. (2005). *Micro Electromechanical Systems Design*. Taylor & Francis Group. p. 419.
- [3] Allen, J. J. (2005). *Micro Electromechanical Systems Design*. Taylor & Francis Group. pp. 1-6.
- [4] Pelesko, J. & Bernstein, D. (2003). *Modeling MEMS and NEMS*. Chapman & Hall/CRC. pp. 2-3.
- [5] Maluf, N. & Williams, K. (2004). *An Introduction to Microelectromechanical Systems Engineering*. Second Edition. Artech House Inc. p. xiii.
- [6] Maluf, N. & Williams, K. (2004). *An Introduction to Microelectromechanical Systems Engineering*. Second Edition. Artech House Inc. p. 10.
- [7] Cheung, Ken. (2009). *MEMS Market Grows*. Publicado en <http://edablog.com/2009/01/30/mems-market-grows/>. Consultado el 13 de abril de 2009.
- [8] Bouchaud, J. (2008). *Sensors to drive MEMS market growth*. Publicado en <http://www.eetindia.co.in/>. Consultado el 28 de agosto de 2008.
- [9] Yole Développement. (2008). *MEMS Accelerometer, Gyroscope and IMU Market 2008-2013*. p. 5.
- [10] Yole Développement. (2006) *World MEMS Fab 2006*. pp.9-18.
- [11] In-Stat/MDR. (2003). *Got MEMS? Industry Overview and Forecast*. Agosto 2003. pp. 5-8.
- [12] Beeby, S., Ensell, G., Kraft, M. & White, N. (2004). *MEMS Mechanical Sensors*. Artech House. p. 3.
- [13] Beeby, S., Ensell, G., Kraft, M. & White, N. (2004). *MEMS mechanical sensors*. Artech house. pp. 40-42.
- [14] Ogata, K. (1987). *Dinámica de Sistemas Físicos*. Prentice Hall. p. 135.
- [15] Ogata, K. (1987). *Dinámica de Sistemas Físicos*. Prentice Hall. p. 136.
- [16] Beeby, S., Ensell, G., Kraft, M. & White, N. (2004). *MEMS mechanical sensors*. Artech house. p. 43.
- [17] Bao, M. (2005). *Analysis and design principles of MEMS devices*. First edition. Elsevier. pp. 33-35.
- [18] Bao, M. (2005). *Analysis and design principles of MEMS devices*. First edition. Elsevier. pp. 35-39.
- [19] Sokolnikoff, I. S. (1946). *Mathematical theory of elasticity*. First edition. McGraw-Hill Book Company. pp. 59-64.
- [20] Amenzade, Y. A. (1979). *Theory of elasticity*. First edition. MIR Publishers. pp. 69-80.
- [21] Clark, S. & Wise, K. (1979). *Pressure sensitivity in anisotropically etched thin-diaphragm pressure sensors*. IEEE Trans. on Electron Devices, Vol. ED-26. pp. 1887-1896.

- [22] Kovacs, G. (1998). *Micromachined Transducers Sourcebook*. McGraw-Hill. p. 186.
- [23] Townsend, P., Barnett, D. & Brunner, T. (1987). *Elastic relationships in layered composite media with approximation for the case of thin films on a thick substrate*. Journal Appl. Phys. Vol. 62. pp. 4438-4444.
- [24] Timoshenko, S. P. & Goodier, J. N. (1970). *Theory of elasticity*. Third edition. McGraw-Hill.
- [25] Thorby, D. (2008). *Structural Dynamics and Vibration in Practice*. First edition. Elsevier. pp. 189-191.
- [26] Thorby, D. (2008). *Structural Dynamics and Vibration in Practice*. First edition. Elsevier. pp. 191-194.
- [27] Timoshenko, S. P., Young, D.H. & Weaver, W. (1974). *Vibration Problems in Engineering*. Fourth edition. John Wiley and Sons.
- [28] Senturia, S. (2001). *Microsystem Design*. Kluwer Academic Publishers. pp. 208-211.
- [29] Elwenspoek, M. & Wiegerink, R. (2001). *Mechanical microsensors*. Springer Verlag. pp. 77-79.
- [30] Bouwstra, S. & Geijselaers, B. (1991). *On the resonance frequencies of microbridge*. Digest of technical papers, The 6th. Proc. Int. Conf. Solid State Sensors and Actuators. pp. 538-542.
- [31] Bao, M. (2005). *Analysis and design principles of MEMS devices*. First edition. Elsevier. pp. 81-84.
- [32] Wan, T. S. (2008). *Resonators, Oscillators & Frequency References*. Publicado en Comprehensive Microsystems. Vol. 3. Elsevier. pp. 554-555.
- [33] Bao, M. (2005). *Analysis and design principles of MEMS devices*. First edition. Elsevier. pp. 95-97.
- [34] Davies, B., Montague, S., Smith, J. & Lemkin, M. (1997). *Micromechanical structures and microelectronics for accelerometer sensing*. Proc. SPIE, Vol. 3223. pp. 237-244.
- [35] Bao, M. (2005). *Analysis and design principles of MEMS devices*. First edition. Elsevier.
- [36] Senturia, S. D. (2001). *Microsystem design*. First edition. Kluwer Academic Publishers.
- [37] Pelesko, J. A. & Bernstein, D. H. (2003). *Modeling MEMS and NEMS*. Chapman & Hall/CRC.
- [38] Kovacs, G. T. A. (1998). *Micromachined Transducers, sourcebook*. McGraw-Hill.
- [39] Elwenspoek, M. & Wiegerink, R. (2001). *Mechanical microsensors*. Springer-Verlag.
- [40] Gardner, J. W., Varadan, V. K. & Awadelkarim, O. O. (2001). *Microsensors MEMS and smart devices*. John Wiley and Sons, Ltd.
- [41] Maluf, N. (2000). *An introduction to microelectromechanical systems engineering*. Artech house.
- [42] Beeby, S., Ensell, G., Kraft, M. & White, N. (2004). *MEMS mechanical sensors*. Artech house.
- [43] Gad-el-hak, M. (2002). *The MEMS handbook*. CRC Press LLC.
- [44] Sadd, M. & Stiffer, A. (1975). *Squeeze Film dampers: amplitude effects at low squeeze number*. Journal of Engineering for Industry, Transactions of ASME, Vol. 97. pp. 1366-1370.
- [45] Bao, M. (2005). *Analysis and design principles of MEMS devices*. First edition. Elsevier. The Netherlands. pp. 212-215.
- [46] D.R. Harrison, J. Dimeff (1973). *A diode-quad bridge for use with capacitive transducers*. Review of Scientific Instruments, Vol. 44. pp. 1468-1477.
- [47] W. Ko, M. Bao & Y. Hong (1982). *A high sensitivity integrated-circuit capacitive pressure transducer*. IEEE Trans. On Electron Devices, Vol. ED-29. pp. 48-56.
- [48] X. Li, M. Bao, & S. Shen (1997). *Study on linearization of silicon capacitive pressure sensors*. Sensor and Actuators, A 63. pp. 1-6.

- [49] B. Boser (1997). *Electronics for micromachined inertial sensors*. Digest of technical papers, the 9th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators. Chicago, IL, USA, June 16-19, 1997. pp. 1169-1172.
- [50] W. Kuehnel & S. Sherman (1994). *A surface micromachined silicon accelerometer with on chip detection circuitry*. Sensors and Actuators, A45. pp. 7-16.
- [51] W. Ko (1986). *Solid-state capacitive pressure transducers*. Sensors and Actuators, 10. pp. 303-320.
- [52] B. Puers (1990). *A capacitive pressure sensor with low impedance output and active suppression of parasitic effects*. Sensors and Actuators, A21-23. pp. 108-114.
- [53] Y. Park & K. Wise (1983). *An MOS switched-capacitor read-out amplifier for capacitive pressure sensors*. IEEE Proc. Custom IC Conference, Rochester, mayo 23. pp. 380-384.
- [54] H. Leuthold & F. Ruldolf (1990). *An ASIC for high-resolution capacitive microaccelerometers*. Sensors and Actuators A21-23. pp. 278-281.
- [55] C. Sander, J. Knutt & J. Meindl (1980). *A monolithic capacitive pressure sensor with pulse-period output*. IEEE Trans. On Electron Devices, vol. ED-27. pp. 927-930.
- [56] Y. Matsumoto & M. Esashi (1993). *Low drift integrated capacitive accelerometer with PLL servo technique*. Digest of Technical Papers, the 7th Intl. Conf. on Solid-State Sensors and Actuators, Yokohama, Japan, June 7-10. pp. 826-829.
- [57] M. Bao, H. Yin, H. Yang & S. Shen(2000). *Effects of electrostatic forces generated by the driving signal on capacitive sensing devices*. Sensors and Actuators A84. pp. 213-219.
- [58] M. Bao, H. Yin, H. Yang & S. Shen(2004). *Reliable operation conditions of capacitive inertial sensor for step and shock signals*. Sensors and Actuators A114. pp. 41-48.
- [59] Allen, J. J. (2005). *Micro Electromechanical Systems Design*. Taylor & Francis Group. p. 314.
- [60] Roylance, L. y Angell, J. (1978). *A miniature integrated circuit accelerometer*. Dig. Tech. Papers. IEEE Int. Solid-State Circuits Conference. pp. 220-221.
- [61] Greiff, P. (1991). *Silicon Monolithic Micro-Mechanical Gyroscope*. IEEE Proc. Transducers. pp. 966-968.
- [62] MacDonald, G. A. (1990). *A review of low cost accelerometers for vehicle dynamics*. Sensors and Actuators A: Physics, vol. 21, Elsevier. pp. 303-307.
- [63] Sulouff, R. E. (1991). *Silicon sensors for automotive applications*. Dig. Tech. Papers 1991. Int. Conf. Solid-State Sensors and Actuators. pp. 170-176.
- [64] IEEE-STD-337 (1972). *IEEE standard specification format guide and test procedure for linear, single-axis, pendulous, analog torque balance accelerometer*. IEEE Std. 337.
- [65] Sawyer, G. A. e Ishii, T. K. (1969). *Reflex klystron accelerometer and seismometer*. IEEE Trans. Ind. Electron. Control Instrum. 16. pp. 103-106.
- [66] Xie, H., Fedder, G. y Sulouff, R. E. (2008). *Comprehensive Microsystems, Vol. II*. Elsevier. pp. 136-138.
- [67] Kurtz, A. D. (1976). *Transducers employing gap-bridging shim members*. US Patent No. 3,995,247.
- [68] Boser, B. E. y Howe, B. T. (1995). *Surface micromachined accelerometers*. Custom Integrated Circuits Conference. Proc. IEEE. pp. 337-344.
- [69] Lu, C., Lemkin, M. y Boser, B. E. (1995). *A monolithic surface micromachined accelerometer with digital output*. Dig. Tech. Papers 42nd IEEE Int. Solid-State Circuits Conference (ISSCC '95). pp. 160-161.

- [70] Guckel, H., Rypstat, C., Nesnidal, M., Zook, J. D., Burns, D. W. y Arch, D. K. (1992). *Polysilicon resonant microbeam technology for high performance sensor applications*. Tech. Dig. 5th IEEE Solid-State Sensor and Actuator Workshop. pp. 153–156.
- [71] Fricke, J. y Obermeier, E. (1993). *Cantilever beam accelerometer based on surface micromachining technology*. Journal of Micromechanics & Microengineering. pp. 190–192.
- [72] Ristic, L., Gutteridge, R., Dunn, B., Mietus, D. y Bennett, P. (1992). *Surface micromachined polysilicon accelerometer*. Tech. Dig. 5th IEEE Solid-State Sensor and Actuator Workshop. pp. 118–121.
- [73] Rudolf, F., Jornod, A., Bergqvist, J. y Leuthold, H. (1990). *Precision accelerometers with mg resolution*. Sensors and Actuators A: Physics, vol. 21, Elsevier. pp. 297–302.
- [74] Warren, K. (1996). *High performance silicon accelerometers with charge controlled rebalance electronics*. Position, Location, and Navigation Symposium. Proc. IEEE. pp. 27–30.
- [75] Najafi, K., Junseok, C., Kulah, H. y Guohong, H. (2003). *Micromachined silicon accelerometers and gyroscopes*. Int. Conf. Intelligent Robots and Systems (IROS 2003). Proc. IEEE/RSJ. pp. 2353–2358.
- [76] Cole, J. C. (1991). *A new sense element technology for accelerometer subsystems*. Tech. Dig. Int. Conf. Solid-State Sensors and Actuators. pp. 93–96.
- [77] Kemp, C. J. y Spangler, L. (1995). *An accelerometer interface circuit*. Custom Integrated Circuits Conference. Proc. IEEE. pp. 345–348.
- [78] Xie, H., Fedder, G. y Sulouff, R. E. (2008). *Comprehensive Microsystems, Vol. II*. Elsevier. p. 146.
- [79] Bergstrom, Paul L., Trombley, Melissa L. y Li, Gary G. (2006). *The MEMS Handbook, MEMS Applications*. CRC Press. p. 2-3.
- [80] Beeby, S., Ensell, G., Kraft, M. & White, N. (2004). *MEMS mechanical sensors*. Artech house. p. 174.
- [81] Carter, J., Cowen, A., Hardy, B., Mahadevan, R., Stonefield, M. y Wilcenski, S. (2005). *PolyMumps Design Handbook*. MemsCap Inc. pp. 35-37.
- [82] Senturia, S. (2001). *Microsystem Design*. Kluwer Academic Publishers. pp. 201-218.
- [83] Young, W. C. y Budynas, R. G. (2002). *Roark's Formulas for Stress and Strain*. McGraw-Hill. p. 189.
- [84] Allen, J. J. (2005). *Micro Electromechanical Systems Design*. Taylor & Francis Group. p. 429.
- [85] Allen, J. J. (2005). *Micro Electromechanical Systems Design*. Taylor & Francis Group. p. 430.
- [86] Fedder, G. K. (1994). *Simulation of microelectromechanical systems, Ph. D. thesis*. Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley. pp. 104-109.
- [87] Lobontiu, N. y García, E. (2005). *Mechanics of Microelectromechanical Systems*. Kluwer Academic Publishers. pp. 142-144.
- [88] Lobontiu, N. y García, E. (2005). *Mechanics of Microelectromechanical Systems*. Kluwer Academic Publishers. pp. 147-149.
- [89] Lobontiu, N. y García, E. (2005). *Mechanics of Microelectromechanical Systems*. Kluwer Academic Publishers. pp. 162-165.
- [90] Allen, J. J. (2005). *Micro Electromechanical Systems Design*. Taylor & Francis Group. p. 431.
- [91] Allen, J. J. (2005). *Micro Electromechanical Systems Design*. Taylor & Francis Group. p. 429.
- [92] Lobontiu, N. y García, E. (2005). *Mechanics of Microelectromechanical Systems*. Kluwer Academic Publishers. pp. 159-161.
- [93] Lobontiu, N. y García, E. (2005). *Mechanics of Microelectromechanical Systems*. Kluwer Academic Publishers. pp. 137-138.