Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

COMPACTACIONES EQUIVARIANTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
ERNESTO AURELIO VELASCO VALADEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. SERGEY ANTONYAN

2010

1. Datos del alumno
Velasco
Valadez
Ernesto Aurelio
56 42 90 88
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
3030346411

2. Datos del tutor
Dr
Sergey
Antonyan

3. Datos del sinodal 1
Dr
Ángel
Tamariz
Mascarúa

4. Datos del sinodal 2
Dr
Fidel
Casarrubias
Segura

5. Datos del sinodal 3
Dra
Patrcia
Pellicer
Covarrubias

6. Datos del sinodal 4
Dra
María Isabel
Puga
Espinosa

7. Datos del trabajo escrito
Compactaciones Equivariantes
42 p
2011

Agradecimientos

Esto es para mi padre, el verdadero científico,
que ama la ciencia mas que cualquier
hombre que haya conocido.
A mi madre: cada triunfo mío es también tuyo;
ojalá que esto te brinde un instante de felicidad.
A mi hermano y amigos que me apoyaron
para llegar hasta aquí, espero
que este sincero gracias sea suficiente.
Gracias al Dr. Antonyan por su apoyo.
Agradecimientos al PAPIIT proyecto IN-102608
A todo los que no mencione pero
me han acompañado hasta aquí,
espero ser digno de todo cuanto me han brindado.

Índice general

Introducción

Un *grupo topológico de transformaciones* (también conocido como *sistema dinámico topológico*) es una terna (G, X, θ), donde G es un grupo, X es un espacio topológico y θ es una función continua de $G \times X$ en X. En este caso se dice que X es un *G-espacio* (alternativamente se le nombra *G-flujo*).

Los grupos topológicos de transformaciones formalizan el estudio de las *simetrías* de los espacios topológicos y refinan muchos de los resultados acerca de estos últimos. Estos aparecen con frecuencia en la física y en muchas de las ramas de las matemáticas.

Es bien conocido el resultado para espacios topológicos el cual dice, que todo espacio de Tychonoff se encaja como subconjunto denso de un espacio compacto. En el caso de los G-espacios este encaje denso debe realizarse mediante una función equivariante, es decir, que el G-espacio posee compactación equivariante. Entonces de manera natural se formulan las siguientes preguntas:

¿Todo G-espacio de Tychonoff se encaja, mediante una función equivariante, de manera densa en un G-espacio compacto?

¿Para cuales grupos es cierto que cada G-espacio de Tychonoff tiene compactación equivariante?

En 1960 Palais [11] demostró que cada G-espacio de Tychonoff tiene una G-compactación si G es un grupo compacto de Lie. Este resultado fue generalizado por de Vries en 1978 en [3] y [4] para el caso en el que G es un grupo localmente compacto.

En 1988, en [6], Megrelishvili prueba que no todo G-espacio de Tychonoff tiene compactación equivariante, sin embargo existen muchos G-espacios que se encajan equivariantemente en un G-espacio compacto.

A lo largo de este texto daremos algunos conceptos, notación, así como resultados básicos que usaremos en el mismo y demostraremos el resultado dado por de Vries correspondiente a los grupos localmente compactos. Se seguirán para esto, principalmente, las pruebas dadas en [3] y [5]. Además para un grupo arbitrario G (no necesariamente localmente compacto) se caracterizaran los G-espacios que poseen compactación equivariante.

Finalmente reconstruiremos el contraejemplo a la primera pregunta, dado por Megrelishvili en [6].

Capítulo 1

Grupos topológicos y G-espacios

A lo largo de este capítulo consideraremos únicamente espacios topológicos Hausdorff, que en adelante se denominarán sencillamente como *espacios*.

1.0. Encajes en los productos

En esta sección se presentan diversos resultados y definiciones de topología general (que pueden encontrarse con mayor detalle en [12] y [10]) que iremos usando en los capítulos posteriores.

Definición 1.0.1. *Sea X un espacio y consideremos una familia de espacios $\{Y_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Se dice que una familia de funciones,*

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha \mid \alpha \in A\},$$

separa puntos de cerrados *si para cada $B \subset X$ cerrado y $x_0 \notin B$ existe $\alpha \in A$ tal que*

$$f_\alpha(x_0) \notin \overline{f_\alpha(B)}.$$

Definición 1.0.2. *Dada una familia de espacios $\{Y_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Sea X un espacio, para una familia de funciones*

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha \mid \alpha \in A\},$$

se define la función **producto diagonal** $\Delta\mathcal{F} : X \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$*, o bien*

$$\underset{\alpha\in A}{\Delta} f : X \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha,$$

como sigue

$$x \mapsto \big(f_\alpha(x)\big)_{\alpha\in A}.$$

Lema 1.0.3. *Sean X un espacio y una familia de espacios $\{Y_\alpha \mid \alpha\in A\}$. Si una familia de funciones*

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha \mid \alpha \in A\},$$

separa puntos de cerrados entonces la función producto diagonal

$$\underset{\alpha\in A}{\Delta} f : X \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha,$$

es un encaje, es decir, $\Delta\mathcal{F} : X \to (\Delta\mathcal{F})(X)$ es un homeomorfismo.

Teorema 1.0.4 (Tychonoff)**.** *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ una familia de espacios compactos, entonces*

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$$

es un espacio compacto.

Teorema 1.0.5 (Del Encaje de Tychonoff)**.** *Sea X un espacio entonces X es de Tychonoff si y sólo si existe un encaje $j : X \to [0,1]^\sigma$, para algún cardinal σ.*

1.0.1. Espacios de funciones

Dados dos espacios X, Y podemos considerar el conjunto de las funciones continuas:

$$C(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ es continua}\}.$$

Para ciertos casos se utilizarán las siguientes notaciones:

(I) Si Y es un espacio métrico se tiene el siguiente conjunto:

$$C^*(X,Y) = \{f \in C(X,Y) \mid f \text{ es acotada}\}.$$

(II) Si X, Y son espacios métricos, entonces podemos definir el conjunto

$$\mathcal{U}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ es uniformemente continua}\}.$$

(III) Si $Y = \mathbb{R}$ al conjunto de funciones continuas de X a Y se le denotará

$$\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}.$$

(IV) Si $Y = \mathbb{R}$ podemos considerar el conjunto

$$\mathcal{C}^*(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f \text{ es acotada}\}.$$

(V) Si $X = Y$, entonces se tiene el siguiente conjunto

$$\mathscr{H}(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ es homeomorfismo}\}.$$

Cada uno de estos aparecerán posteriormente en el texto, así que es importante en este momento mencionar algunos de los resultados sobre las distintas topologías que pueden darse a estos conjuntos.

Definición 1.0.6. *Sean (X,τ_X), (Y,τ_Y) dos espacios. Dados $U \subset Y$ abierto y $x \in X$ definimos el siguiente subconjunto de $C(X,Y)$:*

$$\langle x, U\rangle = \{f \in C(X,Y) \mid f(x) \in U\}.$$

Entonces

$$\Gamma = \{\langle x, U\rangle \mid x \in X, U \in \tau_Y\}$$

es sub-base para una topología en $C(X,Y)$, a la cual se le llama **topología punto-abierta***; en este caso denotaremos al espacio como $C_p(X,Y)$.*

Definición 1.0.7. *Sean (X,τ_X), (Y,τ_Y) dos espacios. Dados $U \subset Y$ abierto y un compacto $K \subset X$ se tiene el siguiente conjunto:*

$$\langle K, U\rangle = \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

Entonces

$$\Lambda = \{\langle K, U\rangle \mid U \in \tau_Y, K \subset X \textit{ es compacto}\}$$

es sub-base para una topología en $C(X,Y)$, la cual se denomina **topología compacto-abierta** *o* **topología de convergencia puntual***; en esta situación se denotará al espacio como $C_c(X,Y)$.*

Definición 1.0.8. *Sea X un espacio y (Y, d) un espacio métrico. Definimos la métrica $d_\infty : C^*(X, Y) \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d\big(f(x), f(y)\big).$$

Entonces d_∞ genera una topología en $C^*(X, Y)$, a la que llamaremos **topología de convergencia uniforme***; en esta situación se denotará al espacio como $C_u^*(X, Y)$.*

Nos referiremos al siguiente teorema en el ultimo capítulo, este puede ser encontrado con su demostración en [10, pág 285].

Teorema 1.0.9. *Sean X un espacio y Y un espacio métrico. Denotemos por τ_p, τ_c y τ_u las topologías punto-abierta, compacto-abierta y de convergencia uniforme, entonces se cumple*

$$\tau_p \subset \tau_c \subset \tau_u.$$

Si además X es compacto $\tau_c = \tau_u$.

Definición 1.0.10. *Sean X un espacio y Y un espacio métrico. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas $X \to Y$ es* **equicontinua** *en $x_0 \in X$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe U vecindad de x_0 tal que $d\big(f(y), f(x_0)\big) < \varepsilon$ para cualesquiera $y \in U$ y $f \in \mathcal{F}$. Si la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada punto de X se dice simplemente que $\mathcal{F}$ es* **equicontinua**.

El siguiente lema será muy importante en lo posterior, puede encontrarse la demostración en [12, pág 286].

Lema 1.0.11. *Sean X un espacio y Y un espacio métrico. Si una familia de funciones $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ es equicontinua entonces la topología compacto abierta y punto abierta coinciden en $\mathcal{F}$.*

1.1. Grupos topológicos

Definición 1.1.1. *Sea G un espacio dotado de una estructura de grupo, formalmente se tiene la terna $(G, \tau, \cdot)$ donde G es un conjunto, τ es una topología en G y $\cdot$ es una operación de grupo para G. Diremos que G es un* ***grupo topológico****, si las operaciones de* ***multiplicación*** *$\mu : G \times G \to G$, $\mu(g, h) = g \cdot h$ e* ***inversión*** *$\iota : G \to G$, $\iota(g) = g^{-1}$ son continuas.*

Es sencillo ver que la continuidad de las operaciones μ e ι equivale a la continuidad de la función **división** $\delta : G \times G \to G$ dada por $\delta(g, h) = gh^{-1}$.

Para dar una mejor idea de la definición anterior, se presentan algunos ejemplos sencillos de grupos topológicos:

Ejemplos 1A

1. Todo grupo con la topología discreta es un grupo topológico, ya que al ser G discreto se tiene por ende que también lo es $G \times G$, por lo que la división resulta continua y con ello tanto μ como ι.
2. Los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{C}, +)$ con sus topologías usuales.
3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es un grupo topológico.

En adelante, para $A, B \subset G$ denotaremos $\mu(A \times B) = AB$ y $\iota(A) = A^{-1}$. En el caso en que $A = B$ se denotará $AA = A^2$. Si sucede que $A = A^{-1}$ diremos que A es un conjunto **simétrico**.

La estructura algebraica de un grupo topológico nos permite trabajar con funciones uniformemente continuas como ocurre en el caso de $\mathbb{R}$. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.1.2. *Sean G un grupo topológico y $f : G \to \mathbb{R}$. Entonces*

1. *f es llamada* **uniformemente continua por la derecha** *si, para cada $\varepsilon > 0$ existe W vecindad de $e \in G$ tal que, si $ab^{-1} \in W$ entonces*
$$|f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$
2. *f es llamada* **uniformemente continua por la izquierda** *si, para cada $\varepsilon > 0$ existe W vecindad de $e \in G$ tal que, si $a^{-1}b \in W$ entonces*
$$|f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

Si en G estas dos nociones coinciden, diremos simplemente que f es **uniformemente continua**.

Un caso en el que se puede hablar simplemente de funciones uniformemente continuas es en el que G es un grupo abeliano, por ejemplo: $\mathbb{R}$.

Para cada una de las definiciones anteriores se tiene una equivalencia, que usaremos continuamente durante el texto, que se presenta a continuación.

Lema 1.1.3. *Sea G un grupo topológico. Para una función $f : G \to \mathbb{R}$ son equivalentes:*

I) *f es uniformemente continua por la derecha.*

II) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $W \subset G$ vecindad de $e \in G$ tal que $|f(st) - f(t)| < \varepsilon$ si $s \in W$ y $t \in G$.*

De manera similar, f es uniformemente continua por la izquierda si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $W \subset G$ vecindad de $e \in G$ tal que $|f(ts^{-1}) - f(t)| < \varepsilon$ si $s \in W^{-1}$ y $t \in G$.

Demostración. La primera implicación es clara ya que, si f es uniformemente continua por la derecha, para cada $\varepsilon > 0$ existe V vecindad de e, tal que $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$ si $ab^{-1} \in V$. Para esta misma vecindad V y para cada $t \in G$ se cumple que $|f(st) - f(t)| < \varepsilon$ si $st(t^{-1}) = s \in V$; lo cual prueba la primera parte.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe W vecindad de e, tal que $|f(st) - f(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in g$ si $s \in W$. Sean $a, b \in G$ tales que $ab^{-1} \in W$, por lo cual, para cualquier $t \in G$ se tiene que $|f(ab^{-1}t) - f(t)| < \varepsilon$. En particular para $t = b$, luego $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$ si $ab^{-1} \in W$, con lo que la demostración queda terminada.

La prueba en el caso en que f es uniformemente continua por la izquierda es completamente análoga al primer caso; así que en adelante lo supondremos cierto. □

Definimos a partir de las definiciones de continuidad uniforme, las familias de funciones:

$$\mathcal{RUC}(G) = \{f : G \to \mathbb{R} \mid f \text{ es uniformemente continua por la derecha}\},$$

$$\mathcal{LUC}(G) = \{f : G \to \mathbb{R} \mid f \text{ es uniformemente continua por la izquierda}\}.$$

Si consideramos un grupo topológico de Tychonoff la familia de funciones $\mathcal{F} = \{f : G \to [0, 1] \mid \text{f es continua}\}$ separa puntos de cerrados en G, pero se tiene aún más, tal y como muestra el siguiente resultado.

Lema 1.1.4. *Sea G un grupo topológico de Hausdorff con elemento neutro e, entonces las familias $\mathcal{LUC}(G)$ y $\mathcal{RUC}(G)$ separan puntos de cerrados en G.*

Demostración. En [2, pág. 45–46] se prueba que dada una sucesión $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de vecindades simétricas de e, tal que $U_{n+1}^2 \subset U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una pseudométrica σ invariante por izquierda tal que:

i) Si $h^{-1}g \in U_n$ entonces $\sigma(g,h) \leq 2^{-n+2}$,

ii) Si $h^{-1}g \notin U_n$ entonces $\sigma(g,h) \geq 2^{-n}$,

Usando este resultado y examinado solamente el caso en que $A \subset G$ es cerrado y $e \notin A$, construimos la sucesión adecuada comenzando con una vecindad simétrica $U_1 \subset G \setminus A$ y considere U_2 una vecindad simétrica tal que $U_2^2 \subset U_1$. De manera sucesiva para U_n consideramos una vecindad simétrica U_{n+1} tal que $U_{n+1}^2 \subset U_n$. Por inducción se tiene una sucesión $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de vecindades simétricas de e, tal que $U_{n+1}^2 \subset U_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, con lo que se puede considerar su pseudométrica asociada σ.

Con esto se define $f : G \to [0,1]$ como $f(h) = \text{mín}\{1, 2\sigma(h,e)\}$; esta función es la buscada. Observe que $\sigma(e,e) = 0$ luego $f(e) = 0$, además si $g \in A$ se tiene que $g \notin U_1$ ya que $A \subset G \setminus U_1$, por lo que $\sigma(g,h) \geq 2^{-1}$ y en conclusión $f(g) = 1$ para todo $g \in A$. El hecho de que $f \in \mathcal{LUC}(G)$ es consecuencia de la siguiente desigualdad

$$|f(g) - f(h)| \leq 2\sigma(g,h),$$

que probaremos en este momento. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $f(h) \leq f(g)$, si $f(h) = 1$ se tiene que $f(g) - f(h) = 0$, en el caso contrario

$$2\sigma(h,e) = f(h) \leq f(g) \leq 2\sigma(g,e)$$

y consecuentemente

$$|f(g) - f(h)| \leq 2\sigma(g,e) - f(h) \leq 2\sigma(g,h) + 2\sigma(h,e) - f(h) = 2\sigma(g,h).$$

Con lo que dado $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que $2^{-k+2} < \varepsilon/2$. Sea $V = U_k$, si $a^{-1}b \in V$ entonces $\sigma(a,b) \leq 2^{-k+2}$ por lo cual $\sigma(a,b) < \varepsilon/2$ y por consiguiente

$$|f(a) - f(b)| \leq 2\sigma(a,b) < \varepsilon,$$

por lo tanto f es uniformemente continua por la izquierda.

En general para $A \subset G$ cerrado y $g_0 \notin A$ se tiene que $e \notin g_0^{-1}A$. De este hecho y la parte anterior se tiene que existe $f \in \mathcal{LUC}(G)$ tal que $f'(e) = 0$ y $f'(g_0^{-1}A) = \{1\}$. Sea $f(x) = f'(g_0^{-1}x)$. Claramente $f(g_0) = f'(e) = 0$ y $f(A) = f'(g_0^{-1}A) = \{1\}$. Se tiene también que $f' \in \mathcal{LUC}(G)$, por lo que dado $\varepsilon > 0$ hay una vecindad V de e tal que

$$|f(a) - f(b)| = |f'(g_0^{-1}a) - f'(g_0^{-1}b)|$$

si $(g_0^{-1}a)^{-1}g_0^{-1}b = a^{-1}b \in V$. En conclusión $f \in \mathcal{LUC}(G)$.

Similarmente para el caso de la familia $\mathcal{RUC}(G)$ se puede construir una pseudométrica invariante por la derecha ρ con las propiedades:

i) Si $hg^{-1} \in U_n$ entonces $\rho(g,h) \leq 2^{-n+2}$,

ii) Si $hg^{-1} \notin U_n$ entonces $\rho(g,h) \geq 2^{-n}$.

Usando esta pseudométrica de la misma manera que en el caso de $\mathcal{LUC}(G)$ se observa de inmediato que $\mathcal{RUC}(G)$ también separa puntos de cerrados. □

1.2. Acciones

Definición 1.2.1. *Sean G un grupo topológico y X un espacio. Una* ***acción*** *de G en X es una función continua $\theta : G \times X \to X$ que satisface:*

1) $\theta(e,x) = x$ para cada $x \in X$.

2) $\theta(g, \theta(h,x)) = \theta((gh), x)$ para cualesquiera $g, h \in G$ y cada $x \in X$.

Si $\theta(g,x) = x$ para cada $g \in G$ y $x \in X$ entonces diremos que la acción es ***trivial****.*

De aquí en adelante, cuando no haya riesgo de confusión, la imagen $\theta(g,x)$ se denotará simplemente por gx. Es decir, $\theta(g,x) = gx$.

Dado un elemento $g \in G$, éste induce una función continua

$$\begin{aligned} \theta_g : \quad & X \to X \\ & x \mapsto gx\,, \end{aligned}$$

que llamaremos *traslación* por g. Se observa que cada θ_g es una función invertible, ya que ${\theta_g}^{-1} = \theta_{g^{-1}}$; de donde se concluye que las translaciones θ_g son homeomorfismos de X en sí mismo. Análogamente a cada $x \in X$ se le asocia la función continua

$$\begin{aligned} \theta^x : \quad & G \to X \\ & g \mapsto gx \end{aligned}$$

que de manera respectiva recibe el nombre de *movimiento* por X.

Definición 1.2.2. *La terna (G, X, θ), donde G es un grupo topológico, X es un espacio y θ es una acción de G en X, es llamada* ***grupo topológico de transformaciones****. En este caso diremos que X es un G-**espacio**.*

A partir de este momento, por conveniencia, al referirnos a un G-espacio X se dará por hecho que se está considerando un grupo topológico de transformaciones (G, X, θ).

Definición 1.2.3. *Si G es un grupo topológico y X un G-espacio con acción θ, para $A \subset X$ y $H \subset G$ consideraremos los siguientes conjuntos:*

i) *$H(A) = \{ha \in X \mid h \in H, a \in A\} = \theta(H \times A)$ se llama la H-**saturación** de A. Si $A = \{x\}$ denotaremos $H(\{x\})$ de manera mas sencilla como $H(x)$. Si además $H = G$ diremos que $G(x)$ es la **órbita** de x en X. Si $H = \{h\}$, escribimos $H(A)$ como hA.*

ii) *El conjunto $G_A = \{g \in G \mid gA = A\}$ recibe el nombre de **estabilizador** de A. Si $A = \{x\}$ se usa la notación G_x en lugar de $G_{\{x\}}$; en este caso a G_x también se le nombra **grupo de isotropía** de x.*

iii) *Se dice que $A \subset X$ es H-**invariante** si $H(A) = A$. Cuando $H = G$, llamaremos a A simplemente **invariante**.*

iv) *Un punto $x \in X$ se llama **fijo** si $G = G_x$, es decir, si $gx = x$ para cada $g \in G$.*

Si $A \subset X$ es conjunto invariante, la restricción $\theta|_{G\times A} : G \times A \to A$ claramente es una acción continua de G en A. Se dice en este sentido que A es un G-*subespacio* de X.

A continuación presentamos algunos resultados útiles sobre estos conjuntos, que usaremos en lo sucesivo.

Proposición 1.2.4. *Sea X un G-espacio y $A \subset X$ invariante, entonces $\overline{A}$ es invariante.*

Demostración. Sea A un subconjunto invariante de X, como $e \in G$ se tiene que $\overline{A} = e\overline{A} \subset G(\overline{A})$. Ahora bien, las translaciones por elementos de G son homeomorfismos de X en sí mismo, por lo cual

$$G(\overline{A}) = \bigcup_{g\in G} g\overline{A} = \bigcup_{g\in G} \overline{gA},$$

como A es invariante $G(A) = A$, con lo que se deduce $gA \subset A$ para cada $g \in G$, de donde se sigue $\overline{gA} \subset \overline{A}$ para toda $g \in G$. Por lo tanto

$$G(\overline{A}) = \bigcup_{g\in G} \overline{gA} \subset \overline{A}$$

y en conclusión $G(\overline{A}) = \overline{A}$. □

Proposición 1.2.5. *G_x es un subgrupo cerrado de G.*

Demostración. Para $x \in X$ se tiene $ex = x$, es decir $e \in G_x$, si $h, g \in G_x$ entonces $gx = x$ y $hx = x$ con lo que $h^{-1}x = x$, por consiguiente

$$h^{-1}(gx) = h^{-1}x = x$$

con lo que $h^{-1}g \in G_x$ y por lo tanto G_x es un subgrupo de G. Además G_x es cerrado para cada $x \in X$, ya que dados $g \in \overline{G_x}$ y $U \subset X$ vecindad de gx, por la continuidad de la acción se tiene que existen vecindades $V \subset G$ y $W \subset X$ de g y x, respectivamente, tales que $VW \subset U$. Luego como $g \in \overline{G_x}$ entonces $V \cap G_x \neq \emptyset$, es decir que existe $h \in V$ tal que $hx = x$, por consiguiente $x \in VW \subset U$. Entonces $x \in U$ para toda vecindad U de gx. Por lo tanto $gx = x$, concluyendo que G_x es cerrado. □

Ejemplos 1B

1. Sea G un grupo topológico, $X = G$. Entonces cualquier grupo topológico actúa en sí mismo mediante las siguientes acciones:

   a) $g * x = gx$

   b) $g \,\square\, x = xg^{-1}$

   c) $g \,\triangle\, x = gxg^{-1}$.

   La continuidad de cada una se sigue de la continuidad de la multiplicación y la división, las dos propiedades de una acción se cumplen claramente. Cabe notar que $g \diamond x = xg$ no siempre es una acción, ya que si G no es abeliano, entonces $g \diamond (h \diamond x) = g \diamond (xh) = xhg$ y $gh \diamond x = xgh$ y se tiene que $g \diamond (h \diamond x)$ no necesariamente es igual a $gh \diamond x$.

2. Para cada grupo topológico G y cualquier espacio X se obtiene un G-espacio mediante la acción trivial dada por $\theta(g, x) = x$ para toda $g \in G$ y $x \in X$. θ es una acción y es continua, ya que si $U \subset X$ es abierto, se tiene que

   $$\theta^{-1}(U) = \{(g, u) \mid \theta(g, u) \in U\} = \{(g, u) \mid u \in U\} = G \times U$$

   es un abierto de $G \times X$.

En el caso de los espacios topológicos las funciones que resultan de interés son las funciones continuas. En los G-espacios las funciones de mayor importancia son aquellas que además de ser continuas respetan o conmutan con la acción del grupo. Esto queda más claro con la definición siguiente.

Definición 1.2.6. *Sea G un grupo topológico. Si X, Y son dos G-espacios, una función continua $f : X \to Y$ se llama **G-equivariante** o **G-función** si*

$$f(gx) = gf(x) \tag{1.1}$$

*para toda $x \in X$ y toda $g \in G$. Cuando no haya riesgo de confusión diremos simplemente que f es **equivariante**. En caso de que Y tenga la acción trivial de G, diremos que f es **invariante**.*

Ejemplos 1C

1. Sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ y los G-espacios $X = Y = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ con la acción dada por $1 \circ x = x$ y $-1 \circ x = -x$, entonces claramente son equivariantes:
   a) $\zeta : X \to Y$ dada por $\zeta(x) = -x$.
   b) $\psi : X \to Y$ dada por $\psi(x) = \overline{x}$.
   En el caso de ésta acción se observa que $\phi(x) = x^2$ no es equivariante, ya que $\phi(-1 \circ x) = \phi(-x) = x^2$ mientras que $-1 \circ \phi(x) = -1 \circ x^2 = -x^2$.
2. Sean G, X y Y como en el ejemplo 2, pero ahora con la acción de G en X y en Y dada por $-1 \bullet x = \overline{x}$. Entonces la función $\phi(x) = x^2$ resulta equivariante.

Dada una familia de G-espacios $\{X_j \mid j \in J\}$ podemos considerar el espacio producto, en este se puede definir una acción de manera natural, mediante la función θ tal y como se muestra a continuación

$$\begin{array}{rcl} G \times \prod_{j\in J} X_j & \stackrel{\theta}{\to} & \prod_{j\in J} X_j \\ g(x_j)_{j\in J} & \mapsto & (gx_j)_{j\in J} \end{array}$$

en este caso θ es continua ya que en cada entrada gx_j es continua. En esta situación se observa que el producto diagonal de funciones equivariantes $f_j : X \to X_j$ es también equivariante, ya que para $g \in G$ se tiene

$$g \underset{j\in J}{\Delta} f_j(x) = g(f_j(x))_{j\in J} = (f_j(gx))_{j\in J} = \underset{j\in J}{\Delta} f_j(gx).$$

1.2.1. Acciones Lineales

Definición 1.2.7. *Sean G un grupo topológico y L un espacio* ***vectorial topológico*** *sobre $\mathbb{R}$, es decir, un espacio vectorial donde $(L, +)$ es grupo topológico y la multiplicación por escalares es continua. Decimos que L es un* ***G-espacio lineal****, si existe una acción θ de G en L que satisface*

$$g(\lambda x + y) = \lambda gx + gy$$

para cualesquiera $x, y \in L$, $g \in G$, $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, en L cada translación θ_g es una transformación lineal. Decimos en este caso que G actúa linealmente.

Ejemplo 1D

1. Sean V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$, $X = V$ y considere el grupo $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la multiplicación usual. Entonces si la acción se encuentra dada por $\mu \circ v = \mu v$, se tiene que X es un G-espacio lineal, ya que

$$\mu \circ (\lambda v + w) = \mu(\lambda v + w) = \mu\lambda v + \mu w = \lambda\mu \circ v + \mu \circ w\,.$$

2. Considere $X = \mathbb{R}^n$ y $G = GL(n, \mathbb{R})$ entonces la acción dada por $A * v = Av$ claramente es una acción lineal ya que

$$A*(\lambda v+w) = A(\lambda v+w) = A(\lambda v)+Aw = \lambda Av+Aw = \lambda A*v+A*W\,.$$

Definición 1.2.8. *Sea X un G-espacio. Una G-linealización para X es una pareja (L, j), donde L es un G-espacio lineal $j : X \to L$ es un encaje equivariante.*

1.2.2. G-grupos

Un caso interesante es cuando un G-espacio X es un grupo topológico, en la siguiente definición formalizamos esto.

Definición 1.2.9. *Sean G y X dos grupos topológicos, si G actúa en X mediante una acción θ y se cumple que cada translación $\theta_g : X \to X$ es a su vez un homomorfismo de X en sí mismo, es decir que,*

$$\theta_g(xy) = \theta_g(x)\theta_g(y)$$

*para cualesquiera $g \in G$ y $x, y \in X$. En este caso X se llama G-**grupo**.*

Ejemplo 1E

1) Sea G un grupo topológico y $X = G$ con la acción $\theta(g, x) = gxg^{-1}$, es claro que en este caso X es un G-grupo, ya que para cada $g \in G$

$$\theta_g(xy) = gxyg^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = \theta_g(x)\theta_g(y).$$

2) Cualquier G-espacio lineal X, es a su vez un G-grupo, ya que se satisface claramente $g(x + y) = gx + gy$ para cualesquiera $x, y \in X$ y $g \in G$.

Capítulo 2

Compactaciones equivariantes

A partir de este capítulo comenzaremos el estudio del tema central de este texto, en lo posterior se considerarán únicamente espacios de Tychonoff, en el caso de los grupos topológicos los llamaremos simplemente **grupos**, su elemento neutro lo denotaremos generalmente como e siempre y cuando no haya riesgo de confusión.

2.0. Compactaciones de G-espacios

Las compactaciones de los espacios de Tychonoff tienen su equivalente en los G-espacios, el cual se introduce con la siguiente definición.

Definición 2.0.1. *Sea G un grupo y X un G-espacio. Una* ***compactación equivariante*** *o* ***G-compactación*** *de X es una pareja (K, j), donde K es un G-espacio compacto y $j : X \to K$ es un encaje denso y equivariante. Al conjunto $K \setminus j(X)$ se le conoce como residuo.*

En ocasiones posteriores nos referiremos como compactación equivariante de X al G-espacio Z donde X se encaja, dando por entendido que hay un encaje equivariante de X en Z.

Dada una compactación equivariante (Z, i) de X, podemos identificar X con $i(X)$ y considerar a X como un G-subespacio de Z. Así que inicialmente para abordar el problema, dado un G-espacio X, podemos tratar de extender la acción de G en X a una compactación de X. Esto se observa en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "id_G \times i"'] & X \arrow[d, "i"] \\ G \times Z \arrow[r, "\widetilde{\theta}"] & Z\,. \end{tikzcd}$$

Por ejemplo en el caso en que $G = \mathbb{Z}_2$ y $X = (-1, 1)$ donde la acción está dada por la multiplicación de números reales $\theta(g, x) = g \cdot x$, una compactación para X es el espacio $Z = [-1, 1]$ y podemos extender la acción naturalmente a Z simplemente definiendo en 1 y -1 igual que para los elementos de X. Esta acción claramente resulta continua y con ello Z es una compactación equivariante.

De manera similar podemos usar la compactación maximal o de Stone-Ĉech βX ya que esta posee una propiedad universal. Dada una función continua $f : X \to Z$ donde Z es un espacio compacto, existe una función $F : \beta X \to Z$ que extiende a f. Entonces considerando las translaciones

$$\theta_g : X \to X \subset \beta X$$

podemos encontrar extensiones $\widetilde{\theta}_g : \beta X \to \beta X$, por la unicidad de la extensión se tienen las propiedades:

1) $\widetilde{\theta}_{gh} = \widetilde{\theta}_g \circ \widetilde{\theta}_h$ ya que $\theta_{gh} = \theta_g \circ \theta_h$.

2) $\widetilde{\theta}_e(x) = x$ para todo $x \in \beta X$.

3) Cada $\widetilde{\theta}_g$ es un homeomorfismo, ya que $\widetilde{\theta}_{g^{-1}} = \widetilde{\theta}_g^{-1}$.

De aquí podemos definir la posible acción $\widetilde{\theta} : G \times \beta X \to \beta X$ como $\widetilde{\theta}(g, x) = \widetilde{\theta}_g(x)$, sin embargo $\widetilde{\theta}$ no necesariamente es continua, aun en el caso en el que G es compacto. Por lo que es necesario usar otro enfoque en la resolución del problema; un caso sencillo en el que $\widetilde{\theta}$ es continua se da enseguida.

Teorema 2.0.2. *Sea G un grupo discreto, entonces todo G-espacio tiene compactación equivariante*

Demostración. Sea X un G-espacio, como se vio antes usando la compactación de Stone-Ĉech tenemos la acción $\widetilde{\theta} : G \times \beta X \to \beta X$ dada por

$\widetilde{\theta}(g,x) = \widetilde{\theta}_g(x)$ donde $\widetilde{\theta}_g$ es la extensión de θ_g para cada $g \in G$, como cada una de estas funciones es continua, dada una vecindad U de gx existe V tal que $\widetilde{\theta}_g(V) \subset U$, por consiguiente $\{g\} \times V$ es una vecindad de $(g,x) \in G \times \beta X$ y se tiene que

$$\widetilde{\theta}\big(\{g\} \times V\big) = \widetilde{\theta}_g(V) \subset U,$$

lo cual prueba la continuidad de $\widetilde{\theta}$. □

2.0.1. G-espacios Compactos

Para mostrar la existencia de compactaciones para espacios de Tychonoff se usa la familia de funciones continuas del espacio en el intervalo $[0,1]$. La idea a seguir es encontrar una colección de G-espacios compactos que realicen la misma función que el intervalo $[0,1]$ en el caso de espacios topológicos. Dado que los G-espacios compactos pueden tener formas muy abstractas, el lugar adecuado para buscar inicialmente es $\mathcal{C}(G)$ el espacio de funciones reales y continuas del grupo G .

En adelante la topología en $\mathcal{C}(G)$ es la topología punto-abierta o de convergencia puntual. En caso de que consideremos el espacio con la topología compacto-abierta ó la topología de convergencia uniforme denotaremos al espacio como $\mathcal{C}_c(G)$ y $\mathcal{C}_u(G)$, respectivamente.

Dentro de $\mathcal{C}(G)$ consideraremos también varios de sus subconjuntos, tales como $\mathcal{RUC}(G)$, $\mathcal{LUC}(G)$ y $\mathcal{C}^*(G)$.

Como se buscan G-espacios compactos dentro de $\mathcal{C}(G)$ nos gustaría dotar de una estructura de G-espacio a $\mathcal{C}(G)$, de manera natural esto puede hacerse mediante la siguiente función:

$$\begin{array}{rcl}\psi : G \times \mathcal{C}(G) & \to & \mathcal{C}(G) \\ (t,f) & \mapsto & \psi(t,f),\end{array}$$

donde $\psi(t,f)(s) = f(st)$ para todo $s \in G$.

Cabe notar que para $e \in G$ se cumple $\psi(e,f) = f$ para toda $f \in \mathcal{C}(G)$, además para cada $s \in G$

$$\psi\big(g,\psi(h,f)\big)(s) = \psi(h,f)(sg) = f(sgh) = \psi(gh,f)(s),$$

por lo que $\psi\big(g,\psi(h,f)\big) = \psi(gh,f)$ para cualesquiera $g,h \in G$ y cada $f \in \mathcal{C}(G)$. De las observaciones anteriores se sigue que ψ será una acción de G

en $\mathcal{C}(G)$ siempre y cuando ψ sea continua. Pero ψ no necesariamente resulta continua, sin embargo existen subconjuntos invariantes de $\mathcal{C}(G)$ en los que se satisface la continuidad de ψ.

A partir de este momento trabajaremos frecuentemente con la familias equicontinuas de $\mathcal{C}(G)$ ya que son precisamente éstas en las que al restringir ψ es continua. Esto queda claro con el siguiente lema.

Lema 2.0.3. *Sea $Z \subset \mathcal{C}(G)$ una familia equicontinua y tal que $\psi(G\times Z) = Z$. Entonces*

$$\theta = \psi|_{G\times Z} : G \times Z \to Z$$

es continua, es decir, Z es un G-espacio. Más aún, $Z \subset \mathcal{RUC}(G)$.

Demostración. Primero probaremos que para cada $x \in G$, la función $\rho_x : G\times Z \to \mathbb{R}$ definida como $\rho_x(t, f) = f(xt)$ es continua en cada punto $(t, f) \in G \times Z$. Para esto sean $x \in G$ y $(t_0, f_0) \in G \times Z$, sea $(t, f) \in G \times Z$. Entonces

$$|\rho_x(t, f)-\rho_x(t_0, f_0)| = |f(xt)-f_0(xt_0)| \le |f(xt)-f(xt_0)|+|f(xt_0)-f_0(xt_0)|$$

con lo que dado $\varepsilon > 0$, podemos considerar la vecindad de f_0,

$$W = \langle xt_0, B_{\varepsilon/2}(f_0(xt_0))\rangle .$$

Además como Z es equicontinua, para $\epsilon/2$ y $xt_0 \in G$ existe $V' \subset G$ vecindad de xt_0 tal que $|f(z) - f(xt_0)| < \varepsilon/2$ para todo $z \in V'$, asimismo existe V vecindad de t_0 tal que $xV \subset V'$ por consiguiente si $(t, f) \in V \times W$ se sigue que $|\rho_x(t, f) - \rho_x(t_0, f_0)| < \varepsilon$, con lo que que ρ_x es continua para cada $x \in X$.

Obsérvese que $\rho_x(t, f) = \psi(t, f)(x)$ para cada $x \in G$ y $(t, f) \in G \times Z$, entonces, si consideramos una vecindad sub-básica $\langle x, U\rangle$ de $\psi(t_0, f_0)$, se tiene que

$$\psi(t_0, f_0)(x) = \rho_x(t_0, f_0) \in U$$

y como ρ_x es continua, existen vecindades V y W de t_0 y f_0 respectivamente tales que $\rho_x(V \times W) = \psi(V \times X)(x) \subset U$ es decir que

$$\psi(V \times W) \subset \langle x, U\rangle,$$

por lo cual θ es continua y por lo tanto Z es un G-espacio.

Finalmente, si $f \in Z$ como $\psi(G\times Z) = Z$ por ende $\psi(t, f) \in Z$ para cada $t \in G$. Por lo que la familia $\{\psi(t, f) \mid t \in G\} \subset Z$ es equicontinua ya que se encuentra contenida en Z, en particular para $e \in G$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $W \subset G$ vecindad de e tal que

$$|f(st) - f(t)| < \varepsilon$$

para cada $s \in W$ y $t \in G$. Por lo anterior y el lema 1.1.3 se concluye que $f \in \mathcal{RUC}(G)$. $\square$

El lema anterior prueba que podemos restringirnos a $\mathcal{RUC}(G)$, en lugar de trabajar en todo $\mathcal{C}(G)$. En este momento ya tenemos una colección de G-espacios dentro de $\mathcal{RUC}(G)$, sin embargo nos interesan específicamente los que son compactos; estos los encontraremos con ayuda del teorema de Arzela-Ascoli, el cual recordaremos en seguida.

Teorema 2.0.4 (Arzela-Ascoli)**.** *Sea (Y, d) un espacio métrico y X un espacio. Una familia $\mathcal{F} \subset C_c(X, Y)$ tiene cerradura compacta si*

1. *$\mathcal{F}$ es equicontinua.*
2. *El conjunto $\mathcal{F}(x) = \{f(x) \in Y \mid f \in \mathcal{F}\}$ tiene cerradura compacta para cada $x \in X$.*

Lema 2.0.5. *Sea $Y \subset \mathcal{C}^*(G)$ una familia equicontinua, para la cual*

$$\psi(G \times Y) = Y$$

y además $Y(g)$ es acotado para toda $g \in G$. Sean $Z = \overline{Y}$ y $L = \overline{\mathrm{Conv}(Y)}$ donde

$$\mathrm{Conv}(Y) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \;\Big|\; y_i \in Y, \alpha_i \geq 0 \text{ para cada } i, 1 \leq i \leq n \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \Big\}.$$

Entonces Z y L son equicontinuas y compactas, además $\psi(G \times Z) = Z$, $\psi(G \times L) = L$ y $Z, L \subset \mathcal{RUC}^*(G)$, es decir que Z y L son G-espacios compactos.

Demostración. Como Y es equicontinua y $Y(g) \subset \mathbb{R}$ es acotado entonces $Y(g)$ tiene cerradura compacta para cada $g \in G$, con esto, se cumplen las hipótesis del teorema de Arzela-Ascoli y por lo tanto $\overline{Y}^c \subset \mathcal{C}_c(G)$ es compacto. Cabe notar que como Y es equicontinua la cerradura del mismo en la topología punto-abierta y en la topología compacto-abierta coinciden, esto dado que ambas topologías coinciden en las familias equicontinuas (lema 1.0.11), entonces

$$\overline{Y}^c = \overline{Y} = Z \subset \mathcal{C}(G)$$

es compacto. Además la cerradura de una familia equicontinua también es equicontinua, es decir, que Z es equicontinua.

Continuemos demostrando que $\psi(G\times\overline{Y}) = \overline{Y}$, es claro que $\overline{Y} \subset \psi(G\times\overline{Y})$, ahora bien para probar la otra contención, consideremos para cada $t \in G$ las funciones

$$\psi_t : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G)$$

definidas como $\psi_t(f) = \psi(t, f)$ para cada $f \in \mathcal{C}(G)$. Estas funciones son continuas ya que si $t \in G$, $f \in \mathcal{C}(G)$ y $W = \langle x, U\rangle$ es una vecindad de $\psi_t(f)$, entonces

$$\psi_t(f)(x) = \psi(t, f)(x) = f(xt) \in U,$$

es decir que $f \in \langle xt, U\rangle$. Sea $V = \langle xt, U\rangle$, entonces si $g \in V$ se tiene que

$$\psi_t(g)(x) = \psi(t, g)(x) = g(xt) \in U.$$

En consecuencia $\psi_t(g) \in W$ y por ende $\psi_t(V) \subset W$, lo cual prueba que ψ_t es continua para cada $t \in G$. Ahora bien es claro que para todo $A \subset \mathcal{C}(G)$ se cumple que

$$\psi(G \times A) = \bigcup_{t\in G} \psi_t(A).$$

Como $\psi(G\times Y) = Y$, se cumple que $\psi_t(Y) \subset Y$ para cada $t \in G$, luego de la continuidad de cada ψ_t se sigue $\psi_t(\overline{Y}) \subset \overline{\psi_t(Y)}$. Lo que implica $\psi_t(\overline{Y}) \subset \overline{Y}$ para toda $t \in G$, de donde se concluye que $\psi(G \times \overline{Y}) = \overline{Y}$. Finalmente, por el lema anterior, $Z \subset \mathcal{RUC}(G)$.

De manera similar para L, veamos primero que $\mathrm{Conv}(Y)(g)$ es acotado para cada $g \in G$. Sea $f \in \mathrm{Conv}(Y)$, entonces

$$f(g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(g), \text{ con } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\,.$$

Como $Y(g)$ es acotado existe $M > 0$ tal que $|h(g)| < M$ para toda $h \in Y$, luego

$$|f(g)| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(g)\Big| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |f_i(g)| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M = M$$

por lo tanto $\mathrm{Conv}(Y)(g)$ es acotado para cada $g \in G$.

De manera similar, como Y es equicontinua, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe U vecindad de e tal que $|f_i(a) - f_i(b)| < \varepsilon$, si $ab^{-1} \in U$ y $i \in \{1, \ldots, n\}$. En consecuencia

$$|f(a) - f(b)| = \Big| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \big(f_i(a) - f_i(b)\big) \Big| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |f_i(a) - f_i(b)|,$$

luego

$$|f(a) - f(b)| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |f_i(a) - f_i(b)| < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \varepsilon$$

si $ab^{-1} \in U$, dejando claro el hecho de que $\mathrm{Conv}(Y)$ es equicontinua.

Probaremos finalmente que $\psi\big(G \times \mathrm{Conv}(Y)\big) = \mathrm{Conv}(Y)$, lo cual es inmediato; dado $(t, f) \in G \times \mathrm{Conv}(Y)$ para cada $s \in G$ se cumple

$$\psi(t, f)(s) = f(st) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(st) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(t, f_i)(s)$$

y ya que $\psi(G \times Y) = Y$, se concluye que $\psi\big(G \times \mathrm{Conv}(Y)\big) \subset \mathrm{Conv}(Y)$, consecuentemente $\psi\big(G \times \mathrm{Conv}(Y)\big) = \mathrm{Conv}(Y)$. Con estas observaciones y la primera parte del lema, se concluye que L es un G-espacio compacto y más aún $L \subset \mathcal{RUC}(G)$. □

Corolario 2.0.6. *Para $f \in \mathcal{RUC}^*(G)$ sea $O_f = \{\psi_t(f) \mid t \in G\}$, entonces $X_f = \overline{O_f}$ y $L_f = \overline{\mathrm{Conv}(O_f)}$ son G-espacios compactos.*

Demostración. Como $f \in \mathcal{RUC}(G)$, para toda $\varepsilon > 0$ existe W vecindad de $e \in G$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $xy^{-1} \in W$. Ahora dado $\varepsilon > 0$ para cada $t \in G$ y $x_0 \in G$ tenemos que $|f(xt) - f(x_0 t)| < \varepsilon$ si $xx_0^{-1} \in W$. Luego sea $V = Wx_0$. Es claro que $x_0 \in V$ y si $y \in V$, entonces $yx_0^{-1} \in W$ por lo que

$$|f(yt) - f(x_0 t)| = |\psi_t(f)(y) - \psi_t(f)(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Luego, la familia $O_f = \{\psi_t(f) \mid t \in G\}$ es equicontinua ya que lo es en cada punto de G.

Además para cada $s \in G$, se cumple que

$$O_f(s) = \{\psi_t(f)(s) \in \mathbb{R} \mid t \in G\} = \{f(st) \in \mathbb{R} \mid t \in G\}$$

es acotado dado que f lo es. Finalmente resta probar que $\psi(G \times O_f) \subset O_f$. Para esto sea $(h, \psi_t(f)) \in G \times O_f$. Luego para cada $s \in G$ se tiene que

$$\psi(h, \psi_t(f))(s) = \psi_t(f)(sh) = f(sht) = \psi_{ht}(f)(s)\,.$$

Consecuentemente $\psi(h, \psi_t(f)) = \psi_{ht}(f) \in O_f$. Con estas observaciones y el lema anterior la proposición queda probada. □

Ahora bien, para un G-espacio X con acción θ y una función $f : X \to \mathbb{R}$, definimos para cada $x \in X$ la función $f_x : G \to \mathbb{R}$ dada por la composición de f con el movimiento por $x \in X$. Es decir que la función se encuentra dada por $f_x(g) = f\big(\theta^x(g)\big) = f(gx)$. Similarmente para cada $g \in G$ se define $f^g : X \to \mathbb{R}$ como $f^g(x) = f\big(\theta_g(x)\big) = f(gx)$.

Partiendo de una sola función se tienen dos familias de funciones asociadas a ella, la primera a la que denotaremos como

$$B_f = \{f_x \in \mathcal{C}(G) \mid x \in X\}$$

y la segunda como

$$B^f = \{f^g \in \mathcal{C}(X) \mid g \in G\}\,,$$

ambas serán de gran importancia posteriormente para determinar las condiciones para que un G-espacio X posea una G-compactación.

Lema 2.0.7. *Sea X un G-espacio y $f \in \mathcal{C}(X)$. Entonces son equivalentes:*

i) *B_f es una familia equicontinua en $e \in G$.*

ii) *B_f es uniformemente equicontinua por la derecha en G.*

Más aún si $f \in \mathcal{C}^*(X)$, entonces $B_f(g)$ es acotado para cada $g \in G$.

Demostración. Como B_f es equicontinua en $e \in G$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe W vecindad de e tal que si $g \in W$ se tiene que $|f_x(g) - f_x(e)| < \varepsilon$ para cada $x \in X$. Sea $t \in G$ y $x \in X$, por hipótesis para cada $s \in W$ se cumple que

$$|f_x(st) - f_x(t)| = |f(stx) - f(tx)| = |f_{tx}(s) - f_{tx}(e)| < \varepsilon \,.$$

Por consiguiente B_f es uniformemente equicontinua por la derecha en G.

Si B_f es uniformemente equicontinua por la derecha en G, dada $\varepsilon > 0$, existe W vecindad de e tal que para cualquier $t \in G$ y $x \in X$ se cumple $|f_x(st) - f_x(t)| < \varepsilon$ si $s \in W$. Por lo que para $t = e$ se cumple que $|f_x(s) - f_x(e)| < \varepsilon$ si $s \in W$, en consecuencia B_f es equicontinua en e.

Como f es acotada, para cada $g \in G$ y $x \in X$, se tiene que $|f_x(g)| = |f(gx)| < M$ lo cual muestra que $B_f(g)$ es acotado para cada $g \in G$. $\square$

Para un G-espacio X, definimos el siguiente conjunto:

$$\mathscr{C}(X) = \{f \in \mathcal{C}^*(X) \mid B_f \text{ es equicontinua en } e\}\,.$$

Las funciones de este conjunto por su importancia, reciben su propia denominación.

Definición 2.0.8. *Sean X un G-espacio con acción θ y una función $f : X \to \mathbb{R}$. Si $f \in \mathscr{C}(X)$ se dice que f es* **θ-uniforme**.

2.1. Existencia de Compactaciones Equivariantes

Proposición 2.1.1. *Sea X un G-espacio. Si $Z \subset X$ y $U \subset G$ son subconjuntos compactos, entonces para $f \in \mathcal{C}(X)$ se cumple:*

a) $B'_f = \{f_z \in \mathcal{C}(G) \mid z \in Z\}$ es equicontinua en $e \in G$.

b) $B'^f = \{f^g \in \mathcal{C}(X) \mid g \in U\}$ es equicontinua en X.

Demostración. Sea $\sigma_f : G \times X \to \mathbb{R}$ definida como $\sigma_f(t,x) = f(tx)$, claramente σ_f es continua por ser composición de la acción de G en X y de f. Ahora bien probemos que $B'_f = \{f_z \mid z \in Z\}$ es equicontinua en $e \in G$. Ya que σ_f es continua y dado $\varepsilon > 0$, para cada $z \in Z$ existe una vecindad $V_z \times W_z$ de (e,z) tal que $|\sigma_f(g,w) - \sigma_f(e,z)| < \varepsilon/2$ si $(g,w) \in V_z \times W_z$. Se observa que $\{W_z \mid z \in Z\}$ es cubierta abierta de Z, como Z es compacto existen $z_1, \ldots, z_n \in Z$ tales que

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{z_i}.$$

Entonces la vecindad de e que se deseaba encontrar es:

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{z_i}$$

ya que si $g \in V$ y $z \in Z$, $z \in W_{z_j}$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$. Consecuentemente $(g, z), (e, z) \in V_{z_j} \times W_{z_j}$, por lo cual $|\sigma_f(g, z) - \sigma_f(e, z_j)| < \varepsilon/2$ y $|\sigma_f(e, z) - \sigma_f(e, z_j)| < \varepsilon/2$, por ende

$$|f_z(g) - f_z(e)| = |\sigma_f(g, z) - \sigma_f(e, z)| < \varepsilon$$

si $g \in V$ y $z \in Z$, de donde se concluye que B'_f es equicontinua en $e \in G$.

La demostración en el caso de B'^f es análoga a la primera parte, así que resumiremos lo mas posible la prueba. La función σ_f es continua, entonces, dada $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, para cada $g \in U$ existe una vecindad básica $V_g \times W_g$ de (g, x) tal que $|\sigma_f(h, w) - \sigma_f(g, x)| < \varepsilon/2$ si $(h, w) \in V_g \times W_g$ Como $\{V_g \mid g \in U\}$ es cubierta abierta del compacto U, existen $g_1, \ldots, g_n \in U$ tal que $U \subset V_{g_1} \cup \cdots \cup V_{g_n}$. Luego $W = W_{g_1} \cap \cdots \cap W_{g_n}$ es la vecindad de x para la cual

$$|f^g(y) - f^g(x)| = |\sigma_f(g, y) - \sigma_f(g, x)| < \varepsilon$$

si $y \in W$ y para cada $f^g \in B'^f$. Por lo tanto B'^f es equicontinua en X. $\square$

Lema 2.1.2. *Sea Z un G-espacio compacto, entonces $\mathcal{C}(Z) = \mathscr{C}(Z)$. Además si X es un G-espacio y $\phi : X \to Z$ es continua y equivariante, se cumple que $f \circ \phi \in \mathscr{C}(X)$ para toda $f \in \mathcal{C}(Z)$.*

Demostración. Es inmediato el hecho que $\mathscr{C}(Z) \subset \mathcal{C}(Z)$, por ello basta probar la otra contención. Sea $f \in \mathcal{C}(Z)$. De la compacidad de Z se sigue que f es acotada, además de la proposición 2.1.1 se tiene que B_f es equicontinua en $e \in G$ y usando en seguida el lema 2.0.7 se concluye que $f \in \mathscr{C}(Z)$; por lo tanto $\mathscr{C}(Z) = \mathcal{C}(Z)$.

Falta por demostrar la segunda parte. Consideremos un G-espacio X y una función $\phi : X \to Z$ continua y equivariante. Para $f \in \mathcal{C}(Z)$ y cada $x \in X$ se satisface

$$(f \circ \phi)_x(g) = f\big(\phi(gx)\big) = f(g\phi(x)) = f_{\phi(x)}(g),$$

con lo que $(f \circ \phi)_x = f_{\phi(x)}$ y por consiguiente

$$\{(f \circ \phi)_x \mid x \in X\} \subset \{f_z \mid z \in Z\} = B_f.$$

Como B_f es equicontinua en $e \in G$ en consecuencia $\{(f \circ \phi)_x \mid x \in X\}$ también lo es, y por lo tanto, $f \circ \phi \in \mathscr{C}(X)$. □

Lema 2.1.3. *Sea X un G-espacio y $f \in \mathscr{C}(X)$. Entonces $X_f = \overline{B_f}$ y $L_f = \overline{\mathrm{Conv}(B_f)}$ son G-espacios compactos.*

Demostración. Como $f \in \mathscr{C}(X)$ se tiene que $f \in \mathcal{C}^*(X)$, lo cual implica que $B_f(g)$ es acotado para cada $g \in G$. Además, es claro que B_f es equicontinua dado que $f \in \mathscr{C}(X)$. Finalmente probemos que $\psi(G \times B_f) \subset B_f$. Sea $(g, f_x) \in G \times B_f$. Entonces para cada $s \in G$ se tiene que

$$\psi(g, f_x)(s) = f_x(sg) = f(sgx) = f_{gx}(s),$$

es decir $\psi(g, f_x) = f_{gx} \in B_f$. Luego $\psi(G \times B_f) = B_f$ y la proposición queda probada por el lema 2.0.5. □

Lema 2.1.4. *Sea X un G-espacio y $f \in \mathscr{C}(X)$. Entonces la función $\Phi_f : X \to X_f$ dada por $x \mapsto f_x$ es continua y equivariante, más aún, existe $\delta \in \mathcal{C}(X_f)$ tal que $f = \delta \circ \Phi_f$.*

Demostración. Primero probemos que Φ_f es continua. Sea $x \in X$ y $\langle g, U\rangle$ una vecindad de $\Phi_f(x) = f_x$, es decir $f_x(g) = f(gx) \in U$. Luego, como f es continua existe una vecindad V de gx tal que $f(V) \subset U$. Sea $W = g^{-1}V$, claramente W es vecindad de x y si $z \in W$, de esto se sigue que $gz \in V$ lo cual que implica que $f(gz) = f_z(g) \in U$. Es decir $f_z \in \langle g, U\rangle$, lo cual prueba que Φ_f es continua.

Sean $x \in X$ y $g \in G$. Entonces para cada $s \in G$ se tiene que

$$\Phi_f(gx)(s) = f_{gx}(s) = f(sgx) = f_x(sg) = gf_x(s) = g\Phi_f(x)(s)\,.$$

Consecuentemente $\Phi_f(gx) = g\Phi_f(x)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$, por lo tanto Φ_f es equivariante.

Finalmente, sea $\delta : X_f \to \mathbb{R}$ definida como $\delta(h) = h(e)$ para cada $h \in X_f$. La continuidad de δ es consecuencia del siguiente hecho: dada $h \in X_f$ y una vecindad U de $\delta(h)$ se tiene que $h(e) \in U$.

Consideremos $V = \langle e, U\rangle$. Claramente $h \in V$ y para cada $j \in V$ se tiene que $j(e) = \delta(j) \in U$, asimismo para cada $x \in X$ se cumple que

$$\delta\big(\Phi_f(x)\big) = \delta(f_x) = f_x(e) = f(x),$$

luego $f = \delta \circ \Phi_f$. Por lo tanto existe $\delta \in \mathcal{C}(X_f)$ tal que $f = \delta \circ \Phi_f$. □

Teorema 2.1.5. *Sea X un G-espacio, entonces $\mathscr{C}(X)$ separa puntos de cerrados si y solo si existe una familia $\{\eta_\gamma : X \to K_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ que separa puntos de cerrados.*

Donde K_γ es un G-espacio compacto y η_γ es continua y equivariante para cada $\gamma \in \Gamma$.

Demostración. Sea $A \subset X$ cerrado y no vacío y $x_0 \notin A$. Sea $f \in \mathscr{C}(X)$ tal que $f(x_0) \notin \overline{f(A)}$, es decir

$$f_{x_0}(e) \notin \overline{\{f_x(e) \mid x \in A\}}.$$

Además $\delta : X_f \to \mathbb{R}$ se encuentra definida como $\delta(g) = g(e)$ para cada $g \in X_f$, con lo que se tiene

$$\delta(f_{x_0}) \notin \overline{\{\delta(f_x) \mid x \in A\}} = \overline{\delta\big(\{f_x \mid x \in A\}\big)}.$$

Como δ es continua, tenemos

$$\delta\big(\overline{\{f_x \mid x \in A\}}\big) \subset \overline{\delta\big(\{f_x \mid x \in A\}\big)}.$$

Entonces $f_{x_0} \notin \overline{\{f_x \mid x \in A\}}$, por lo cual $\Phi_f(x_0) \notin \overline{\Phi_f(A)}$.

Esto implica que la familia de funciones continuas y equivariantes

$$\{\Phi_f : X \to X_f \mid f \in \mathscr{C}(X)\}$$

separa puntos de cerrados y X_f es compacto para cada $f \in \mathscr{C}(X)$. Lo cual prueba la primera implicación.

Sea

$$\{\eta_\gamma : X \to K_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

una familia de funciones continuas y equivariantes que separa puntos de cerrados en X, donde K_γ es un G-espacio compacto para todo $\gamma \in \Gamma$. Entonces existe η_γ tal que

$$\eta_\gamma(x_0) \notin \overline{\eta_\gamma(A)}\,.$$

Luego existe $h \in \mathcal{C}(K_\gamma)$ tal que $h\big(\eta_\gamma(x_0)\big) = 0$ y $h\big(\overline{\eta_\gamma(A)}\big) = \{1\}$. Sea $f = h \circ \eta_\gamma$, por el lema 2.1.2 se tiene que $f \in \mathscr{C}(X)$, además es claro que $f(x_0) = 0$ y

$$\overline{f(A)} \subset \overline{h\big(\overline{\eta_\gamma(A)}\big)} = \{1\}.$$

Por lo tanto $f(x_0) \notin \overline{f(A)}$, es decir, $\mathscr{C}(X)$ separa puntos de cerrados. □

Teorema 2.1.6. *Sea X un G-espacio. Entonces X tiene una G-compactación (K, j) si y solo si $\mathscr{C}(X)$ separa puntos de cerrados.*

Demostración. Si $\mathscr{C}(X)$ separa puntos de cerrados, por el teorema anterior y el teorema del encaje de Tychonoff se tiene que

$$\Delta\Phi_f : X \to \prod_{f\in\mathscr{C}(X)} X_f = \widetilde{K}$$

definida como

$$\Delta\Phi_f(x) = \big(\Phi_f(x)\big)_{f\in\mathscr{C}(X)}$$

es un encaje. Como cada $\Phi_f : X \to X_f$ es equivariante $\Delta\Phi_f$ lo es también. Luego $K = \overline{\Delta\Phi_f(X)}$ es compacto ya que es un cerrado del G-espacio compacto $\widetilde{K}$. Es claro que $\Delta\Phi_f(X)$ es invariante, por ende K lo es y consecuentemente K es un G-espacio. Además $\Delta\Phi_f(X)$ es denso en K y por lo tanto $(K, \Delta\Phi_f)$ es una G-compactación para X.

Si X tiene una G-compactación (K, j), como $j : X \to K$ es un encaje $B = \{j\}$ separa puntos de cerrados y por lo tanto del teorema 2.1.5, $\mathscr{C}(X)$ separa puntos de cerrados. □

En [1] puede verse mas información sobre la compactación dada por $\prod_{f\in\mathscr{C}(X)} X_f$.

Con la demostraciones del teorema 2.1.6 podemos mostrar G-espacios que poseen compactación equivariante.

Corolario 2.1.7. *Sea G un grupo y $X = G$, para las acciones siguientes el G-espacio X posee compactación equivariante*

1. *Sea la acción dada por: $\mu(g, x) = gx$.*
2. *Sea $\delta(g, x) = xg^{-1}$.*

Demostración. Claramente tanto μ como δ son acciones de G en si mismo tal y como se vio en el ejemplo 1B. En virtud del teorema 2.1.6, basta probar que $\mathscr{C}(X)$ separa puntos de cerrados.

1.- De la pareja de lemas 2.0.7 y 1.1.3 se deduce que en este caso, la condición $f \in \mathscr{C}(X)$ es equivalente a que $f \in \mathcal{RUC}(X)$, pero X es un grupo de Tychonoff y se mostró en 1.1.4 que $\mathcal{RUC}(X)$ separa puntos de cerrados. Por ende también $\mathscr{C}(X)$ lo hace y en conclusión X tiene compactación equivariante.

2.- Nuevamente por los lemas 2.0.7 y 1.1.3 se observa que $f \in \mathscr{C}(X)$ se reduce al hecho de que $f \in \mathcal{LUC}(X)$ y en el lema 1.1.4 se probo este hecho con lo que la segunda afirmación queda demostrada.

□

Para finalizar esta sección se define, a continuación, el concepto de V-grupo.

Definición 2.1.8. *Sea G un grupo. Si para todo G-espacio X existe una G-compactación, se dice que G es un V-grupo.*

2.2. Funciones localmente equicontinuas

En esta sección probaremos que para G localmente compacto todo G-espacio tiene compactación equivariante. Para esto se presentara una transformación que convierte cierto tipo de elementos de $\mathcal{C}(X)$ en elementos de $\mathscr{C}(X)$. Esta transformación permitirá, partiendo de una familia que separa puntos de cerrados en X, obtener un subconjunto de $\mathscr{C}(X)$ que también separa puntos de cerrados.

Definición 2.2.1. *Sean X un G-espacio y $f : X \to \mathbb{R}$. Decimos que f es localmente equicontinua (con respecto a la acción de G en X) si f es acotada* *y además, existe U vecindad de e tal que la familia*

$$\{f^g : X \to \mathbb{R} \mid f^g(x) = f(\theta_g(x)) = f(gx)\}_{g\in U}$$

es equicontinua en X.

Sea $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces, de la definición se sigue que f es localmente equicontinua si y solo si existe $V \subset G$ vecindad de e tal que para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ existe $W \subset X$ vecindad de x, tal que $|f(gx) - f(gy)| < \varepsilon$ para cualesquiera $y \in W$ y $g \in V$.

Al conjunto de las funciones reales localmente equicontinuas lo denotaremos como $\mathcal{LE}(X)$ y consideraremos especialmente el siguiente subconjunto:

$$\mathcal{LE}^+(X) = \{f \in \mathcal{C}^*(X) \mid f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in X,\ f \in \mathcal{LE}(X)\}.$$

Las funciones de $\mathcal{LE}^+(X)$ son precisamente las que se pueden transformar en elementos de $\mathscr{C}(X)$ y nos darán un criterio mas para identificar cuando un G-espacio se encaja de manera densa y equivariante en un G-espacio compacto.

Lema 2.2.2. *Para cada $f \in \mathcal{LE}^+(X)$ existe $\phi \in \mathcal{LUC}(G)$, para la cual la función*

$$\widetilde{f}_\phi(x) = \inf_{g\in G}\{\phi(g) + f(gx)\}$$

es un elemento de $\mathscr{C}(X)$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{LE}^+(X)$ y U una vecindad de $e \in G$ para la cual $\{f^g \mid g \in U\}$ es equicontinua. Como G es un grupo de Tychonoff, por el lema 1.1.4, existe $\phi \in \mathcal{LUC}(G)$ tal que $0 \leq \phi(t) \leq \|f\| + 2$ para todo $t \in G$, $\phi(e) = 0$ y $\phi(G \setminus U) = \{\|f\| + 2\}$ donde $\|f\| = \sup\big\{|f(x)| \mid x \in X\big\}$. Sea $\widetilde{f}_\phi : X \to \mathbb{R}$ definida como sigue. Para cada $x \in X$, sea

$$\widetilde{f}_\phi(x) = \inf_{g\in G}\{\phi(g) + f(gx)\}.$$

Veamos que $\widetilde{f}_\phi \in \mathscr{C}(X)$. Es claro que para cada $x \in X$ tenemos la siguiente desigualdad

$$0 \leq \widetilde{f}_\phi(x) \leq \phi(e) + f(x) = f(x) \leq \|f\|,$$

es decir que $\widetilde{f}_\phi$ es acotada. Para probar que $\widetilde{f}_\phi$ es continua considere el siguiente conjunto

$$A_\phi = \{g \in G \mid \phi(g) < \|f\| + 1\}.$$

Si $g \notin A_\phi$ se sigue que $\phi(g) < \|f\| + 2$, luego $g \in U$, es decir $A_\phi \subset U$. Más aún si $g \in G \setminus A_\phi$ se deduce que $\phi(g) \geq \|f\| + 1$, por lo cual

$$\widetilde{f}_\phi(x) + 1 \leq \|f\| + 1 \leq \phi(g) + f(gx) \leq \|f\| + 1 + f(gx)$$

para cualquier $x \in X$. Entonces

$$\widetilde{f}_\phi(x) = \inf_{g\in G}\{\phi(g) + f(gx)\} = \inf_{g\in A_\phi}\{\phi(g) + f(gx)\}.$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ y $x \in X$. Como f es localmente equicontinua existe W vecindad de x tal que $|f(tx) - f(tz)| < \varepsilon/2$ para todo $z \in W$ y $t \in U$. Luego por definición de $\widetilde{f}_\phi(x)$ existe $t_1 \in A_\phi$ tal que $\phi(t_1) + f(t_1x) < \widetilde{f}_\phi(x) + \varepsilon/2$. Además, si $y \in W$ dado que $t_1 \in U$, se obtiene que $f(t_1y) < f(t_1x) + \varepsilon$, con lo cual

$$\widetilde{f}_\phi(y) \leq \phi(t_1) + f(t_1y) \leq \phi(t_1) + f(t_1x) + \varepsilon/2 < \widetilde{f}_\phi(x) + \varepsilon,$$

es decir $\widetilde{f}_\phi(y) - \widetilde{f}_\phi(x) < \varepsilon$.

De manera análoga se deduce que $\widetilde{f}_\phi(x) - \widetilde{f}_\phi(y) < \varepsilon$ y por lo tanto $|\widetilde{f}_\phi(y) - \widetilde{f}_\phi(x)| < \varepsilon$ si $y \in W$, es decir, $\widetilde{f}_\phi$ es continua.

Finalmente terminaremos en este momento de probar que $\widetilde{f}_\phi \in \mathscr{C}(X)$. Para esto sea $(t, x) \in G \times X$. Es claro que

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_\phi(tx) &= \inf_{g\in G}\{\phi(g) + f(gtx)\} \\
&= \inf_{h\in G}\{\phi(ht^{-1}) - \phi(h) + \phi(h) + f(ghx)\} \\
&\geq \inf_{h\in G}\{\phi(ht^{-1}) - \phi(h)\} + \widetilde{f}_\phi(x)
\end{aligned}$$

y al ser ϕ uniformemente continua por la izquierda, existe una vecindad simétrica V de e, tal que $|\phi(ht^{-1}) - \phi(h)| < \varepsilon$ para cada $h \in G$ y $t^{-1} \in V$. Entonces $\widetilde{f}_\phi(x) - \varepsilon < \widetilde{f}_\phi(tx)$ para cada $x \in X$ y $t^{-1} \in V$. Ahora de igual forma, como V es simétrica, para x y tx se tiene que

$$\widetilde{f}_\phi(tx) - \varepsilon < \widetilde{f}_\phi\big(t^{-1}(tx)\big) = \widetilde{f}_\phi(x).$$

En conclusión $\widetilde{f}_\phi \in \mathscr{C}(X)$. $\square$

Se observa que durante la construcción de $\widetilde{f}_\phi$ se puede usar cualquier otra vecindad V de e contenida en U y considerar ϕ que cumpla las mismas condiciones para esta V. Esto será muy útil en el siguiente lema.

Lema 2.2.3. *Sean $g \in \mathcal{LE}^+(X)$, $A \subset X$ cerrado y $x_0 \notin A$ para los cuales $g(x_0) \notin \overline{g(A)}$. Entonces existe una función $\lambda : \mathbb{R} \to [0,1]$ y $\phi \in \mathcal{LUC}G)$, como en el lema anterior, tal que $f = \lambda \circ g \in \mathcal{LE}^+(X)$ y $\widetilde{f}_\phi(x_0) \notin \overline{\widetilde{f}_\phi(A)}$.*

Demostración. Por el teorema de Katetov existe $\lambda : \mathbb{R} \to [0,1]$ uniformemente continua tal que $\lambda\big(g(x_0)\big) = 1$ y $\lambda\big(\overline{g(A)}\big) = \{0\}$. Veamos que $f = \lambda \circ g$ es un elemento de $\mathcal{LE}^+(X)$. Claramente f es acotada y además $f(x) \geq 0$ para cada $x \in X$ ya que $\lambda : \mathbb{R} \to [0,1]$. Ahora bien falta ver que f es localmente equicontinua, lo cual se sigue del hecho que g lo es y que λ es uniformemente continua.

En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\lambda(a) - \lambda(b)| < \varepsilon$ si $|a - b| < \delta$, al ser g localmente equicontinua existe U vecindad de e tal que para cada $x \in X$ existe W vecindad de x tal que $|g(ty) - g(tx)| < \delta$ si $y \in W$ y $t \in U$. Luego

$$|f(ty) - f(tx)| = |\lambda\big(g(ty)\big) - \lambda\big(g(tx)\big)| < \varepsilon$$

para todo $y \in W$ y $t \in U$, lo cual prueba que $f \in \mathcal{LE}^+(X)$; además $f(x_0) = 1$ y $f(A) = \{0\}$.

Por otro lado como $f(x_0) = 1$, de la continuidad de f y de la acción, existe una vecindad V de e tal que $f(tx_0) > 1/2$ para todo $t \in V$. Como se dijo anteriormente podemos considerar una vecindad U de e para la cual f cumpla la condición de equicontinuidad local y también $f(tx_0) > 1/2$ para todo $t \in U$. Para esta vecindad U. Sea su función asociada $\phi \in \mathcal{LUC}(G)$ y a su vez $\widetilde{f}_\phi \in \mathscr{C}(X)$ como en el lema 2.2.2. Se probo en el lema anterior que

$$\widetilde{f}_\phi(x) = \inf_{g \in G}\{\phi(g) + f(gx)\} = \inf_{g \in A_\phi}\{\phi(g) + f(gx)\},$$

donde $A_\phi = \{g \in G \mid \phi(g) < \|f\| + 1\}$. Como $A_\phi \subset U$ se sigue que $\widetilde{f}_\phi(x_0) \geq 1/2$, además $0 \leq \widetilde{f}_\phi(x) \leq f(x)$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in A$. Por consiguiente $\widetilde{f}_\phi(x) = 0$ para todo $x \in A$, es decir que $\widetilde{f}_\phi(x_0) \notin \overline{\widetilde{f}_\phi(A)}$. $\square$

Teorema 2.2.4. *Si la familia $\mathcal{LE}^+(X)$ separa puntos de cerrados en X, entonces $\mathscr{C}(X)$ también lo hace.*

Demostración. Es inmediato, ya que dado $A \subset X$ cerrado y $x_0 \notin A$ existe $g \in \mathcal{LE}^+(X)$ tal que $g(x_0) \notin \overline{g(A)}$. Por el lema anterior existe $\lambda : \mathbb{R} \to [0,1]$ para la que $f = \lambda \circ g \in \mathcal{LE}^+(X)$ y además $\widetilde{f}_\phi(x_0) \notin \overline{\widetilde{f}_\phi(A)}$. Por el lema 2.2.2 se tiene que $\widetilde{f}_\phi \in \mathscr{C}(X)$. Con esto se concluye que $\mathscr{C}(X)$ separa puntos de cerrados. $\square$

Con este corolario se observa que si un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{LE}^+(X)$ separa puntos de cerrados, entonces un subconjunto de $\mathscr{C}(X)$ con la misma cardinalidad de $\mathcal{S}$ separa punto de cerrados. Esto dado que los lemas anteriores nos dan una función $\Xi : \mathcal{LE}^+(X) \to \mathscr{C}(X)$ la cual $g \mapsto (\lambda \circ g)_\phi$.

De este ultimo teorema se obtiene como corolario el siguiente resultado para los grupos localmente compactos.

Corolario 2.2.5 (Teorema de De Vries). *Si G es un grupo localmente compacto, entonces G es un V-grupo.*

Demostración. Sea X un G-espacio. Por el teorema 2.2.4 basta demostrar que $\mathcal{LE}^+(X)$ separa puntos de cerrados en X. Sea $f \in \mathcal{C}(X)$. Probaremos que $\{f^t \mid t \in U\}$ es equicontinua en X para alguna vecindad U de $e \in G$. Pero esto es inmediato, ya que al ser G localmente compacto existe U vecindad de $e \in G$ tal que U tiene cerradura compacta, por la proposición 2.1.1 la familia $\left\{f^t \mid t \in \overline{U}\right\}$ es equicontinua en X y consecuentemente $\{f^t \mid t \in U\}$ es equicontinua en X.

Dado que X es de Tychonnoff la familia

$$\mathcal{F} = \{f : X \to [0,1] \mid f \in \mathcal{C}(X)\}$$

separa puntos de cerrados y de lo anterior se sigue que si $f \in \mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$ entonces $f \in \mathcal{LE}^+(X)$, por consiguiente $\mathcal{LE}^+(X)$ separa puntos de cerrados y por lo tanto cualquier G-espacio X posee una compactación equivariante; concluyendo de esta manera que G es un V-grupo. $\square$

Capítulo 3

Ejemplo de un G-espacio sin compactación equivariante

En este última parte desarrollaremos los detalles del ejemplo de Megrelishvili descrito en [6], el cual muestra que existen G-espacios que no tienen G-compactaciones.

3.1. Preliminares

Sea $I = [0, 1]$. Consideremos el grupo de todos los homeomorfismo de I en sí mismo con la operación dada por la composición de funciones. Denotaremos a este grupo como $\mathscr{H}(I)$ y le daremos la topología de la convergencia uniforme. Al ser I compacto ésta coincide con la topología compacto-abierta. Debido a este hecho en adelante intercambiaremos las topologías según nos convenga.

$\mathscr{H}(I)$ es entonces un grupo topológico y actúa en I mediante la función evaluación $\Omega : \mathscr{H}(I) \times I \to I$ definida como $(f, x) \mapsto f(x)$. Esta función es continua ya que I es compacto y claramente cumple las propiedades de ser una acción.

Sea $S = \{ 1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset I$ y considérese el subgrupo de $\mathscr{H}(I)$ siguiente:

$$H = \{g \in \mathscr{H}(I) \mid g(s) = s, \text{ para todo } s \in S\}.$$

Obsérvese que H es un subgrupo cerrado de $\mathscr{H}(I)$, ya que

$$H = \bigcap_{s \in S} \mathscr{H}(I)_s,$$

es decir, H es la intersección de los grupos de isotropía de cada $s \in S$.

Consideremos en adelante I como un H-espacio con la acción Ω restringida a $H \times I$.

Entonces para la acción de H en I, es fácil observar que $H_0 = H$. Para probar esto, sea $h \in H$ luego $h(1/n) = 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como h es continua y la sucesión S converge a 0 se sigue que $h(0) = 0$, por lo tanto el conjunto de puntos fijos de la acción es $F = S \cup \{0\}$.

Además cada $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ es un conjunto invariante.

En efecto, supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ no es invariante. Entonces existen $r \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ y $h \in H$ tales que $h(r) \notin \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\frac{1}{n} < h(r)$ (si $h(r) < \frac{1}{n+1}$ se hace de manera similar). Como

$$\left(\frac{1}{n+1}, h(r)\right) \subset h\Big(\big(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\big)\Big)$$

luego

$$\frac{1}{n} \in \left(\frac{1}{n+1}, h(r)\right) \subseteq h\Big(\big(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\big)\Big).$$

Entonces existe $s \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ tal que $h(s) = \frac{1}{n}$ y $s \neq \frac{1}{n}$, lo cual es una contradicción pues h es un homeomorfismo. De igual manera cada conjunto $[0, 1/n)$ es también invariante.

Este H-espacio se tiene la siguiente propiedad:

Si $\{O_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de vecindades del 0 en I tal que $\overline{H(O_n)} \subset O_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces existe k_0 tal que $[0, 1/k_0) \subset O_1$ y $O_{k_0+1} = I$.

En efecto, como O_1 es una vecindad de 0, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left[0, \frac{1}{k_0 - 1}\right) \subset O_1,$$

de donde se sigue que

$$H\Big[0, \frac{1}{k_0 - 1}\Big) \subset HO_1.$$

Entonces tenemos que $[0, \frac{1}{k_0}] \subset O_1$. Como O_1 es abierto y $\frac{1}{k_0} \in O_1$, existe un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\Big(\frac{1}{k_0} - \varepsilon, \frac{1}{k_0} + \epsilon\Big) \subseteq O_1.$$

Esto implica que existe $r \in (\frac{1}{k_0}, \frac{1}{k_0} + \epsilon) \subset O_1$, por lo tanto tenemos que

$$[0, \frac{1}{k_0 - 1}] \subset \overline{H(O_1)} \subset O_2.$$

Si continuamos con este procedimiento llegaremos a que $O_{k_0+1} = I$ como se afirmaba.

3.2. La construcción del G-espacio

Ahora bien, para cada número natural i definimos $X_i = I \times \{i\}$ y $G_i = H$, observe que cada X_i es homeomorfo a I.

En este punto consideremos el siguiente espacio y el grupo:

$$X = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \text{ y } G = \prod_{i \in \mathbb{N}} G_i.$$

G tiene la topología producto y X la topología suma, la cual está dada de la siguiente manera:

$$\mathcal{T} = \{U \mid U \cap X_i \subset X_i \text{ es abierto para cada } i \in \mathbb{N}\}.$$

Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $i_n : I \to X$ definida por $i_n(x) = (x, n)$, es un encaje para toda $n \in \mathbb{N}$. De modo similar $\pi_n : G \to G_n$ definida como $\pi_n\big(\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}\big) = g_n$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$.

También es sencillo ver que $A \subset X$ es cerrado si y sólo si $A \cap X_i$ es cerrado para cada $i \in \mathbb{N}$. Ya que, si A es cerrado entonces $X \setminus A$ es abierto, luego $(X \setminus A) \cap X_i$ es abierto para cada $i \in \mathbb{N}$, por lo cual

$$X_i \setminus \big((X \setminus A) \cap X_i\big) = A \cap X_i$$

es cerrado para toda $i \in \mathbb{N}$. De manera similar si $A \cap X_i$ es cerrado para cualquier $i \in \mathbb{N}$ se sigue que $X_i \setminus (A \cap X_i)$ es abierto. Luego

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \setminus (A \cap X_i) = X \setminus A$$

es abierto y por lo tanto A es cerrado.

El espacio X con la topología generada por $\mathcal{B}$ es un espacio T_4. Claramente cada $(x, n) \in X$ es cerrado y dados $A, B \subset X$ cerrados, se tiene que $A \cap X_i$ y $B \cap X_i$ son cerrados para cada $i \in \mathbb{N}$. En X_i existen vecindades U_i y V_i de $A \cap X_i$ y $B \cap X_i$ respectivamente, tales que $U_i \cap V_i = \emptyset$. Consideremos entonces las vecindades de A y de B siguientes:

$$U = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \text{ y } V = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} V_i.$$

Es claro que $A \subset U$ y $B \subset V$, además por la construcción de las mismas, se observa que $U \cap V = \emptyset$. Con lo que se concluye que X es un espacio T_4.

Entonces G es un grupo topológico y X es un G-espacio con la acción definida por

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & G \times X & \to & X \\ & \big(g, (x, k)\big) & \mapsto & \big(g_k x, k\big) \end{array}$$

donde $g = \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in G$.

Demostraremos que α es continua, sean $\big(g, (x, n)\big) \in G \times X$ y $U \times \{n\}$ una vecindad básica de $\alpha\big(g, (x, n)\big) = (g_n x, n)$, donde $g = \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in G$. Entonces $g_n x \in U \subset I$. Consecuentemente existe $V_n \subset G_n$ vecindad de g_n y $W \subset I$ vecindad de x tal que $V_n(W) \subset U$. En consecuencia $g \in \langle V_n \rangle \subset G$ y $(x, n) \in W \times \{n\}$, por lo tanto $\langle V_n \rangle \times \big(W \times \{n\}\big)$ es vecindad de $\big(g, (x, s)\big)$ y se tiene que para cualquier $\big(h, (z, n)\big) \in \langle V_n \rangle \times \big(W \times \{n\}\big)$ se cumple $h_n z \in U$. Por lo cual $\alpha\big(h, (z, n)\big) = (h_n z, n) \in U \times \{n\}$, con lo que queda probado que α es continua. Además para cuales quiera $g, h \in G$ y $(x.k) \in X$ se satisface

$$g\big(h(x, k)\big) = g(h_k x, k) = (g_k h_k x, k) = gh(x, k)$$

y se concluye de lo anterior que α es una acción de G en X.

Ahora bien consideremos la siguiente relación de equivalencia en X: $(x, n) \sim (y, m)$ si y sólo si $(x, n) = (y, m)$ o $x = y = 0$. Claramente $\sim$ es una relación de equivalencia.

El conjunto $Y = X/\sim$ tiene una única clase de equivalencia no trivial, conformada por los puntos de la forma $(0, n)$; a esta clase de equivalencia la denotaremos por ω. Tenemos entonces la proyección $p : X \to Y$ definida como $p(x, n) = [x, n]$. Ahora dotemos a Y de una topología. Para cada $y \in Y \setminus \{\omega\}$ la base de vecindades esta dada por

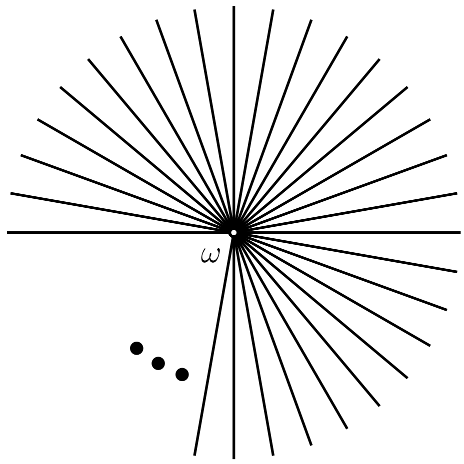
$$\mathscr{B}_y = \{p(U) \mid p^{-1}(y) \in U, U \text{ es abierto}\},$$

y en el caso de ω una base de vecindades es $\mathscr{B} = \{\mathcal{W}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, donde

$$\mathcal{W}_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} p\big([0, 1/k) \times \{n\}\big).$$

Bajo esta topología tenemos que $p : X \to Y$ es una función continua, además es fácil de ver que esta topología es la misma que la generada por la siguiente métrica $d : Y \times Y \to Y$, donde para cada $[x, n], [y, m] \in Y$ se define como

$$d\big([x, n], [y, m]\big) = \begin{cases} |x - y| & \text{Si } n = m \\ x + y & \text{Si } n \neq m \end{cases}.$$



Ahora, existe una única acción en Y que hace p equivariante, esta acción $\theta : G \times Y \to Y$ se encuentra dada por

$$\theta(g, [y, n]) = \big[g(y, n)\big] = \big[g_n y, n\big].$$

Probaremos en primer lugar que θ está bien definida, es decir que no depende de los representantes de las clases. Si $[x,n] = [y,m]$ se tienen dos casos $x = y$ y $n = m$ ó $x = y = 0$. En el primer caso $\theta\big(g,[x,n]\big) = \theta\big(g,[y,m]\big)$ se deduce fácilmente. En el segundo caso $[0,n] = [0,m]$ y es claro que

$$\theta\big(g,[0,n]\big) = \big[g_n 0, n\big] = [0,n] = [0,m] = \big[g_m 0, m\big] = \theta\big(g,[0,m]\big),$$

lo cual prueba que θ está bien definida, esto último también prueba que $\theta(G \times \{\omega\}) = \{\omega\}$. Además

$$\theta\big(g, \theta(h,[x,n])\big) = \theta\big(g, \big[h_n x, n\big]\big) = \big[g_n h_n x, n\big] = \theta\big(gh,[x,n]\big)$$

para cualesquiera $h, g \in G$ y $[x,n] \in Y$ y también $\theta\big(e,[y,n]\big) = \big[e_n y, n\big] = [y,n]$ para cada $[y,n] \in Y$. Para que θ sea una acción resta probar que es continua.

Aquí realizaremos un paréntesis y se mostrará que cada vecindad $\mathcal{W}_k$ de ω cumple la condición $\theta(G \times \mathcal{W}_k) = \mathcal{W}_k$. Esto sigue del hecho que dado $[y,n] \in W_k$ se tiene que $(y,n) \in [0,1/k) \times \{n\}$. Luego si $g \in G$ se tiene que $g(y,n) \in [0,1/k) \times \{n\}$, ya que cada $[0,1/k)$ es invariante bajo la acción de $H = G_n$. De esto se deduce que

$$g[y,n] = [g(y,n)] \in p\big([0,1/k) \times \{n\}\big) \subset W_k$$

por lo tanto $\theta(G \times \mathcal{W}_k) = \mathcal{W}_k$.

Ahora, la continuidad de θ en cada punto de $G \times \big(Y \setminus \{\omega\}\big)$ clara, ya que dada una vecindad básica $p(U)$ de $\theta(g,[y,n]) = [g_n y, n]$ se tiene que para $(g_n y, n)$, por la continuidad de α existe $V \times W$ vecindad de $\big(g,(y,n)\big) \in G \times X$ tal que $\alpha(V \times W) \subset U$. Luego $p\big(\alpha(V \times W)\big) \subset p(U)$ y además $\theta(g,[y,n]) = p\big(\alpha(g,(y,n))\big)$. Entonces

$$\theta\big(V \times P(W)\big) = p\big(\alpha(V \times W)\big) \subset p(U)$$

lo cual prueba que θ es continua en los puntos (g,y) con $y \neq \omega$. Para los puntos (g,ω), como $\theta(g,\omega) = \omega$ para cada $g \in G$, basta dar una vecindad básica de ω. Pero cada una cumple $\theta(G \times \mathcal{W}_k) = \mathcal{W}_k$, de donde se sigue que θ es continua en los puntos de $G \times \{\omega\}$ y finalmente concluimos que θ es continua en $G \times Y$.

3.3. Muestra del contraejemplo

Resta ver que Y es el G-espacio buscado. Por el teorema 2.1.6 el G-espacio Y tiene compactación equivariante si y sólo si $\mathscr{C}(Y)$ separa puntos de cerrados. Tomemos $B = \{[1,n] \mid n \in \mathbb{N}\}$, el cual claramente es cerrado ya que $Y \setminus B = \mathcal{W}_1$, y es evidente que $\omega \notin B$.

Ahora bien, como $\mathscr{C}(Y)$ separa puntos de cerrados entonces para ω y B existe $f \in \mathscr{C}(Y)$ tal que $f(\omega) = 0$ y $f(B) = 1$. Como $f \in \mathscr{C}(Y)$ la familia $\{f_y \mid y \in Y\}$ es equicontinua en e, es decir que para cada $\varepsilon > 0$ existe U vecindad de e tal que si $g \in U$ se tiene

$$|f(gy) - f(y)| < \varepsilon.$$

Por lo que para $\varepsilon > 0$, existen vecindades O y V de ω y e respectivamente tales que $V(O) \subset \mathcal{B}_\varepsilon(\omega)$, donde

$$\mathcal{B}_\varepsilon(\omega) = \{y \in Y \mid d(y,\omega) < \varepsilon\}.$$

En consecuencia una sucesión de vecindades O_n de ω y V_n de e tal que $O_n \cap B = \emptyset$ y $\overline{V_n(O_n)} \subset O_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego existe k_0 tal que $\mathcal{W}_{k_0} \subset O_1$. Como G tiene la topología producto, existe n_0 tal que si $1 \leq k \leq k_0 + 1$ y $n \geq n_0$ entonces $j_n(V_k) = G_n$. Dado que la restricción de la acción θ fuera de ω es equivalente a la acción α y como cada vecindad básica de los puntos de la forma $[0,n]$ es invariante bajo la acción de G en Y. Entonces se tiene que O_{k_0} contiene a la unión de los $\{p(i_m(I_m)) \mid m \in \mathbb{N}\}$ y en particular O_{k_0+1} intersecta a B. Por lo tanto Y no tiene G-compactación.

Conclusión

Pese a que existen muchas condiciones para determina cuando un G-espacio posee una compactación equivariante, aun queda mucho por esclarecer en el tema, comenzando por el hecho de descubrir mas V-grupos. Un caso que sigue abierto y ha sido motivo de estudio durante mucho tiempo es el caso en que el grupo $G = \mathbb{Q}$, el cual no es localmente compacto.

Bibliografía

[1] ANTONYAN, N., AND ANTONYAN, S. Free g-spaces an maximal equivariabt compactifications. *Annali di Matematica*, 184 (2005), 407–420.

[2] DE NEYMET, S. *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones.* Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[3] DE VRIES, J. Equivariant Embeddings of G-spaces. *General topology and its relations to modern analysis and algebra IV Part B: Contributed Papers* (1976), 485–493.

[4] DE VRIES, J. On Existence of G-compactifications. *Bull. Ac. Polon. Sci. Ser. Math. 26* (1978), 275–280.

[5] DE VRIES, J. Compactification of G-spaces Revisited. Tech. rep., Centrum Wiskunde & Informatica, Amsterdam (Netherlands), 2000.

[6] MEGRELISHVILI, M. A Tychonov G-space not admitting a compact Hausdorff G-extension or G-linearization. *Russian Mathematical Surveys 43*, 2 (1988), 177–178.

[7] MEGRELISHVILI, M. Compactification and factorization in the category of g-spaces. In *Categorical Topology.* World Scientific, 1989.

[8] MEGRELISHVILI, M. Free Topological G-groups. *New Zealand Journal of Mathematics 25*, 1 (1996), 59–72.

[9] MEGRELISHVILI, M., AND SCARR, T. Constructing tychonoff g-spaces which are not g-tychonoff. *Topology and its Applications 86*, 1 (1998), 69–81.

[10] MUNKRES, J. *Topology.* Prentice Hall, 2000.

[11] PALAIS, R. S. *The classification of G-Spaces.* American Mathematical Society, 1960.

[12] WILLARD, S. *General Topology.* Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1970.