



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Modelos variacionales
para paredes magnéticas.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE MATEMÁTICO.

PRESENTA:

URIEL EMMANUEL PELÁEZ HERNÁNDEZ.

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ANTONIO CAPELLA KORT.



2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios


Dr. ISIDRO ÁVILA MARTÍNEZ
Director General
Dirección General de Administración Escolar
Presente


Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:


Modelos variacionales para paredes magnéticas

realizado por Peláez Hernández Uriel Emmanuel con número de cuenta 0-9924869-3 quien ha decidido titularse mediante la opción de tesis en la licenciatura en Matemáticas. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dra. María de la Luz Jimena de Teresa de Oteyza 

Propietario Dr. Francisco Marcos López García 

Propietario Tutor Dr. Antonio Capella Kort 

Suplente Dr. Ramón Gabriel Plaza Villegas 

Suplente Dra. Clara Eugenia Garza Hume 

Atentamente,
"POR MI RAZA HARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 11 de marzo de 2011
EL JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ACT. MAURICIO AGUILAR GÓZALEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.
MAG/CZS/eigs

*«Sueña tus sueños y talvez se hagan realidad»
Felix Bloch.*

*A mis tíos, por su fortaleza.
A Lorena y Ursula, por su comprensión.
A mis amigos, por su compañía.*

...

*Agradezco al Dr. Antonio Capella K. por su muestra de razón, paciencia y entusiasmo;
con las cuales me formó nuevas ideas y me enseñó nuevos horizontes.*

Índice general

1. Introducción.	1
1.1. Micromagnetismo.	3
1.2. Objetivo y estructura de la tesis.	7
2. Cálculo de variaciones	9
2.1. Espacios L^2 y de Sobolev.	9
2.2. Existencia y unicidad de mínimos.	14
2.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange	21
3. Energía en el Bulk.	25
3.1. Hipótesis del modelo y energía reducida.	25
3.2. Soluciones explícitas	38
3.3. Solución para las paredes de 180°	41
3.4. Solución para las paredes de 360°	44
4. Estabilidad de paredes en el Bulk.	47
4.1. Segunda variación de $E[\theta]$	47
4.2. Estabilidad lineal en las paredes de 180°	48
5. Energía en películas delgadas.	53
5.1. Hipótesis del modelo.	53
5.2. Paredes de Néel de 360°	68
5.3. Paredes de Néel de 180°	77
5.4. Cálculos numéricos.	83
6. Conclusiones.	87
Agradecimientos	89

Apéndice	91
Bibliografía	91

Capítulo 1

Introducción.

Los materiales magnéticos¹ son aquellos que en cada punto tienen un vector de magnetización asociado. En estos materiales se observan redes que separan «grandes» regiones, las cuales se denominan dominios magnéticos. La magnetización cambia su orientación de un dominio a otro, véase imagen 1.1. A las interfases entre dominios se les conoce como paredes magnéticas, debido a que son angostas comparadas con los dominios magnéticos y suelen presentar un cambio rápido de la orientación del vector magnético entre un extremo y otro.

La teoría de dominios magnéticos se enfoca en el estudio de la estructura que se observa en los materiales magnéticos. El objetivo de esta teoría consiste en obtener un modelo que describa de manera razonable el patrón de magnetización que se observa en la superficie del material. Esta teoría es de carácter variacional, y se basa en una energía que en general depende de varios parámetros. Para las distintas situaciones experimentales es necesario variar dichos parámetros (escogiendo un régimen dado) y analizar la energía bajo estas suposiciones. Las energías obtenidas para ciertos modelos son útiles no solo para describir patrones superficiales, sino también, patrones internos que no pueden ser observados directamente.

Existen dos tipos básicos de paredes magnéticas: las paredes de Bloch y las paredes de Néel. Estas se presentan dependiendo de la geometría de la muestra; el Bulk (o muestras gruesas) para la primera y las películas delgadas para la segunda.

Las paredes de Bloch describen la transición de la magnetización, a través de la pared de un dominio a otro, donde el vector de magnetización gira en un plano perpendicular al eje de transición (véase la figura 1.2).

Las paredes de Néel describen transiciones semejantes donde la magnetización gira

¹Definición tomada de [6].

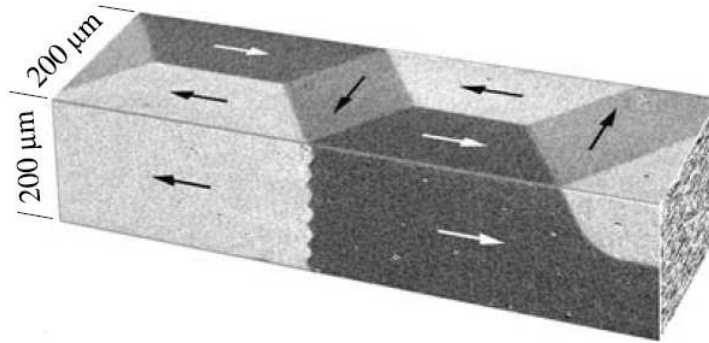


Figura 1.1: En la imagen se muestra la perspectiva, generada por una simulación computacional, de los dominios magnéticos en una varilla de acero. Se puede ver el cambio de la magnetización, representada por flechas, de un dominio magnético a otro. Fuente [6].

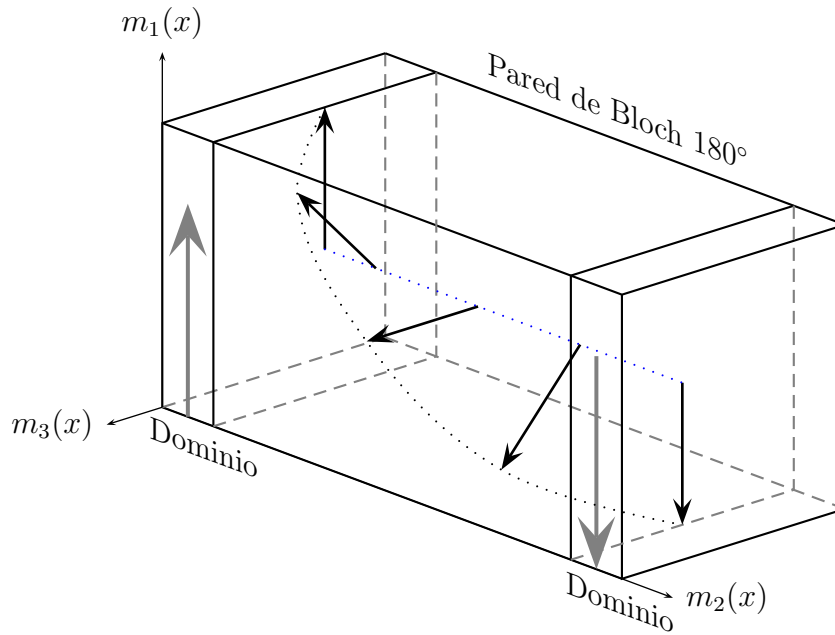


Figura 1.2: Vector de magnetización en el Bulk dando un giro de 180°.

sobre un plano paralelo a la transición (véase figura 1.3).

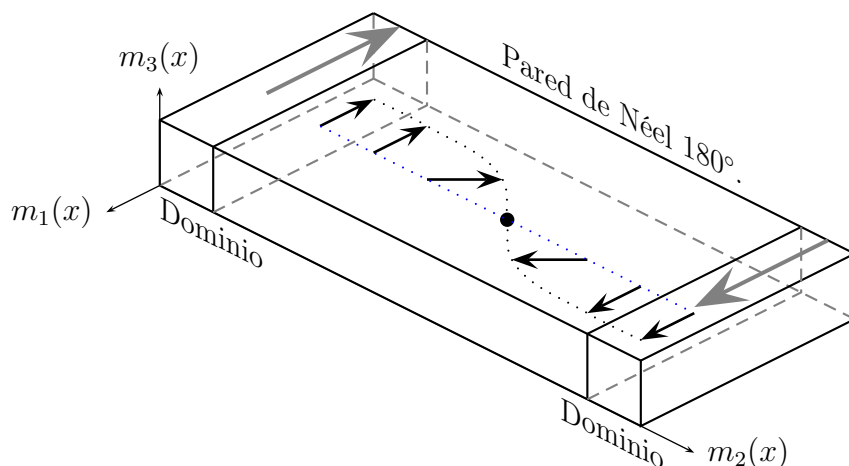


Figura 1.3: Película delgada, en la cual se muestra la transición de 180° del vector de magnetización.

1.1. Micromagnetismo.

A continuación hacemos un resumen que contiene la descripción de la teoría micromagnética. Todo el material se obtuvo de [1], [3] y [6].

El micromagnetismo se define como una teoría continua de los momentos (o vectores) magnéticos, que se presentan en los materiales magnéticos. Esta teoría se basa en principios variacionales y tiene como objetivo obtener la distribución magnética de menor energía que describa las microestructuras observadas. De lo anterior se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales, denominadas ecuaciones micromagnéticas.

En esta teoría la muestra se describe como un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ donde la variable incógnita es un vector \mathbf{J} que describe la magnetización. Además, se supone que la temperatura del material es cercana a la temperatura Curie (T_c), lo cual implica que el vector de magnetización tendrá longitud constante a lo largo de la muestra. De lo anterior se obtiene que la magnetización queda definida como la función

$$\mathbf{J}(m_1, m_2, m_3) : \Omega \rightarrow J_s \mathbb{S}^2$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $m_i(x_1, x_2, x_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ y J_s es una constante que depende del material.

La energía de la magnetización consiste de varias contribuciones que describimos a continuación:

Exchange, es la energía que penaliza cambios en la dirección de magnetización (en los materiales ferromagnéticos). Está dada por la expresión

$$E_{ex} = A \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{J}|^2 dx, \quad (1.1)$$

donde A es una constante del material (constante de exchange) y depende generalmente de la temperatura. Esta energía es una expresión isotrópica, debido a que no tiene direcciones favorables y cualquier dirección es aceptable.

Anisotropía, es la energía que tiene un material magnético causada por la variación en la dirección de la magnetización respecto a los ejes estructurales del material. La energía de la anisotropía se describe por la expresión

$$E_{\Phi} = K_a \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{J}), \quad (1.2)$$

donde K_a es la constante de anisotropía y $\Phi(\mathbf{J})$ es un polinomio par en las componentes de la magnetización.

Stray-field, también llamado campo de demagnetización, es la energía producida por el campo magnético inducido por el mismo cuerpo. Este campo vectorial se denota por \mathbb{H}_{ind} y se calcula a partir de las ecuaciones magnetostáticas de Maxwell. Es decir,

$$\nabla \times \mathbb{H}_{ind} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{H}_{ind} = \begin{cases} -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\mu_0} \right) & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \end{cases} \quad (1.4)$$

$\mathbf{J} := \mu_0 \mathbf{J}$ (campo de magnetización) y μ_0 es la permeabilidad del vacío. De (1.3) podemos suponer que existe un campo escalar \mathbb{U} tal que

$$\mathbb{H}_{ind} = -\nabla \mathbb{U}. \quad (1.5)$$

Usando (1.4) y (1.5) se llega a que

$$\Delta \mathbb{U} = \begin{cases} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\mu_0} \right) & \text{en } \Omega, \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega. \end{cases} \quad (1.6)$$

con $\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \nu} = -\mathbf{J} \cdot \nu$ sobre $\partial\Omega$, donde ν es el vector normal a cada punto en $\partial\Omega$.

De las últimas dos igualdades se obtiene que

$$\mathbb{H}_{ind} = -\nabla \left(\Delta^{-1} \nabla \cdot \frac{J}{\mu_0} \right), \quad (1.7)$$

por lo que la expresión \mathbb{H}_{ind} es función de $\nabla \cdot J$. Entonces la energía del stray-field queda expresada por

$$E_{sf} = \frac{\mu_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbb{H}_{ind}|^2. \quad (1.8)$$

Por lo tanto, la energía del stray-field se minimiza sobre campos de divergencia igual a cero.

Suponemos que (1.4) se satisface en el sentido de distribuciones, es decir

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{H}_{ind} \cdot \nabla \phi = -\frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} J \cdot \nabla \phi \quad \text{para todo } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3). \quad (1.9)$$

Observe que a partir de (1.6), por analogía electrostática, para un campo de magnetización J suave se tiene que las llamadas cargas volumétricas y cargas superficiales están dadas por $\nabla \cdot J$ (en Ω) y $-J \cdot \nu$ (en $\partial\Omega$) respectivamente. Si el campo J es discontinuo y $J \cdot \nu$ se anula, entonces dentro de Ω existirán distribuciones de magnetización con divergencia cero que generarán flujos cerrados dentro de la muestra, como el que se observa en la figura 1.4.

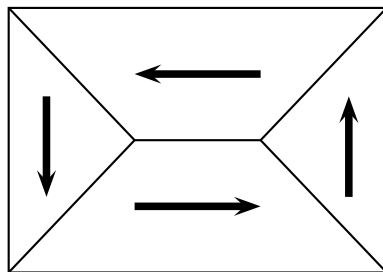


Figura 1.4: Flujo cerrado del campo de magnetización en un material magnético.

Por último se introduce la energía del campo externo.

Campo externo, es la energía generada por la interacción de la magnetización y algún campo magnético externo al material H_{ex} . Se describe por la energía

$$E_{ex} = - \int_{\Omega} H_{ex} \cdot J. \quad (1.10)$$

La energía micromagnética total está dada por

$$E[\mathbf{J}] = A \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{J}|^2 + K_a \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{J}) + \frac{\mu_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbb{H}_{ind}|^2 - \int_{\Omega} H_{ex} \cdot \mathbf{J}.$$

1.1.1. Adimensionalización de la energía.

En la sección anterior se obtuvo la energía micromagnética, sumando todas las energías, la cual para una geometría $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es

$$E[\mathbf{J}] = A \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{J}|^2 + K_a \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{J}) + \frac{\mu_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbb{H}_{ind}|^2 - \int_{\Omega} H_{ex} \cdot \mathbf{J}$$

y que tiene unidades de [*Joule/metro*], donde \mathbf{J} es la densidad de magnetización (campo vectorial de magnitud constante dentro de Ω y extendido por cero a todo \mathbb{R}^3). A continuación se toman ciertos cambios de variable para obtener la misma energía pero adimensional, los pasos que se describen son tomados de [3].

El escalar positivo J_s , llamado saturación de magnetización, es constante cuando se supone una temperatura fija en el material por lo que es válido hacer el reescalamiento

$$m = \frac{\mathbf{J}}{J_s} \quad \text{entonces } E[\mathbf{J}] \text{ cambia a } E[m],$$

además se tendrá que

$$|m(\mathbf{x})| = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ está en } \Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \text{ está en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponemos que la energía debida al campo externo es cero, es decir $E_{ex} = 0$. Definimos las constantes K_d y u como

$$K_d := \frac{J_s^2}{2\mu_0},$$

$$\mathbb{H}_{ind} := \frac{-J_s}{\mu_0} \nabla u.$$

Realizando el rescalamiento

$$E[m] \rightarrow \frac{E[m]}{2K_d}$$

se obtiene que la expresión para la energía micromagnética adimensional está dada por

$$E[m] = \frac{d^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx + \frac{Q}{2} \int_{\Omega} \Phi(m) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx,$$

con

$$d := d_{BL} = \sqrt{\frac{A}{K_d}} \quad \text{y} \quad Q := \frac{K_a}{K_d}$$

donde d mide el tamaño relativo del exchange versus el strayfield y la constante Q mide el tamaño relativo de la anisotropía versus el strayfield.

Bajo tales suposiciones se tiene que u está dada por

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \nabla \cdot m \quad \text{en } \Omega, \\ \Delta u &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= m \cdot \nu \Big|_{\partial\Omega} \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \right\}$$

Finalmente recordamos que, debido a la condición de saturación $|m| = 1$ en Ω el problema del micromagnetismo es en general no convexo.

1.2. Objetivo y estructura de la tesis.

El objetivo de esta tesis consiste en investigar la existencia de paredes magnéticas, en particular las paredes de Bloch y las paredes de Néel, que presentan una rotación en la magnetización de 180° y 360° . Para esto se estudia la energía micromagnética en su forma 1-dimensional, para los casos en que la geometría está dada por todo el espacio \mathbb{R}^3 (Bulk) y para el caso en que la geometría está dada por una película delgada, es decir, un dominio acotado bidimensional y periódico.

Desde el punto de vista matemático, en el caso del Bulk estudiamos un problema variacional no lineal, y en el caso de las películas delgadas estudiamos un problema lineal, pero no local. En el problema del Bulk se demuestra la existencia de paredes de 180° , como mínimos para el funcional de energía, así como su estabilidad y la construcción de soluciones explícitas. Para el caso de paredes de 360° se demuestra la no existencia de éstas como mínimos para el funcional de energía. En las películas delgadas se obtienen las soluciones de la energía micromagnética de 180° y 360° como puntos críticos con restricciones. Además, se analiza numéricamente el comportamiento de la energía para los dos últimos casos.

La estructura de los siguientes capítulos, a grandes rasgos, es como sigue: el Capítulo 2 contiene la introducción a todas las nociones matemáticas de análisis y cálculo de variaciones; empezamos con una recopilación de los resultados relevantes en la teoría de espacios de Sobolev y el análisis funcional. Más adelante enunciamos, con demostración, los resultados del cálculo de variaciones que usaremos en este trabajo, en particular la existencia y unicidad de mínimos para funcionales convexos.

El Capítulo 3 contiene la reducción del modelo de la energía micromagnética a su forma 1-dimensional, esta energía resulta ser un funcional de la magnetización, en la cual se estudia la existencia de mínimos que describan paredes de Bloch. El Capítulo 4 es, de alguna forma, la continuación del Capítulo 3 sobre el estudio de las paredes de Bloch centrándose en el estabilidad de aquellas funciones que minimizan a la energía micromagnética. Y por último en el Capítulo 5 se estudian las paredes de Néel, de 180° y 360° , en materiales con una geometría bidimensional periódica que se asemejan a un plano con un grosor muy pequeño denominado película delgada.

Capítulo 2

Método directo en cálculo de variaciones.

En este capítulo se da la introducción a todas las nociones matemáticas de análisis funcional y del cálculo de variaciones que se usan en los capítulos subsecuentes. Por último se agrega la deducción de la primera y segunda variación de un funcional, para un caso particular, así como la definición de la ecuación de Euler-Lagrange. La mayoría de los resultados que se presentan aquí se han obtenido de [9] y [10].

2.1. Espacios L^2 y de Sobolev.

En esta sección se presentan de forma resumida y sin demostración las definiciones relevantes de los espacios L^2 y de Sobolev H^1 que se utilizan en este trabajo.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un subconjunto abierto y sea f una función definida como

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Denotaremos la derivada k -ésima de f por

$$f^k(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k} \quad \text{para algún } k \in \mathbb{N}.$$

Definimos al soporte de una función f como el conjunto¹

$$Cl\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}.$$

¹La notación Cl indica tomar la cerradura del conjunto.

Diremos que f tiene soporte compacto si el dominio de la función se toma sobre el soporte de dicha función y usaremos la notación

$$f \in C_c(\Omega).$$

Diremos que una función f es infinitamente continua diferenciable y con soporte compacto si $f \in C_c^\infty(\Omega)$, donde

$$C_c^\infty(\Omega) := \{f \in C_c(\Omega) \mid f^k(x) \text{ existe y es continua para algún } k \in \mathbb{N}\}$$

Hay que recordar que el conjunto $\mathcal{L}(\Omega)$ es el espacio vectorial de funciones integrables de Lebesgue, donde $\Omega \subset \mathbb{R}$ es un conjunto medible.

Definición 1. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}$ abierto, definimos el espacio $L^2(\Omega)$ como

$$L^2(\Omega) := \{(las \text{ clases de equivalencia de) las funciones medibles } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ con } |f(x)|^2 \in \mathcal{L}(\Omega)\} \quad (2.1)$$

con producto interno definido por

$$(f, g)_{L^2} := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

A partir de aquí vamos a suponer que $\Omega \subset \mathbb{R}$ es un abierto, a menos que se mencione lo contrario.

Definición 2. Definimos a $\mathcal{L}(L^2(\Omega), \mathbb{R})$ como el espacio de todos los funcionales $\mathbf{L} : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ lineales y continuos.

Por el teorema de representación de Riesz, sabemos que para cada $\mathbf{L} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), \mathbb{R})$ existe un único elemento $g \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\mathbf{L}(f) = \int_{\Omega} g(x)f(x) dx \quad \text{para todo } f \in L^2(\Omega).$$

Definición 3. Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ una sucesión y $u \in L^2(\Omega)$. Decimos que u_n converge débilmente a u en $L^2(\Omega)$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x)g(x) dx = \int_{\Omega} u(x)g(x) dx \quad \text{para todo } g \in L^2(\Omega).$$

Además, en este caso usamos la notación

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } L^2(\Omega).$$

Teorema 1. (*Compacidad débil*) Dada una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ acotada, existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$u_{n_m} \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } L^2(\Omega),$$

donde $\{u_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Sean dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$, si se escribe $A \subset\subset B$ (A está contenido compactamente en B) se refiere a que

$$A \subset \bar{A} \subset B$$

donde \bar{A} es un compacto. Definimos al conjunto $L^1_{loc}(\Omega)$ como

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \mid f \in L^1(\Omega') \text{ para cada } \Omega' \subset\subset \Omega\}.$$

Definición 4. Dadas $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ decimos que v es la derivada débil de u , escrito como

$$u' = v,$$

siempre que

$$\int_{\Omega} u' \phi \, dx = - \int_{\Omega} v \phi \, dx$$

para toda función de prueba $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

La definición anterior nos es útil para definir el espacio de Sobolev.

Definición 5. Definimos al espacio de Sobolev como

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid u' \in L^2(\Omega) \text{ existe en sentido débil}\}$$

con producto interior dado por

$$(u, v)_{H^1} := \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} u' \cdot v' \, dx.$$

Usando la definición anterior se podría mostrar que $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, i.e. el espacio es normado y toda sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$ converge a un elemento del mismo espacio.

El siguiente teorema nos asegura que podemos aproximar cualquier función de $H^1(\Omega)$ con funciones infinitamente diferenciables.

Teorema 2. *El espacio $C^\infty(\Omega)$ es denso en $H^1(\Omega)$. Es decir, para todo $u \in H^1(\Omega)$ existe $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ tal que*

$$u_n \rightarrow u \quad \text{en } H^1(\Omega).$$

Dado un subconjunto abierto Ω diremos que ∂U es de clase C^1 si para cada $x^0 \in \partial U$ existe $r > 0$ y una función $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \mid x > \gamma(x^0)\}.$$

Una propiedad interesante del espacio $H^1(\Omega)$ es que a diferencia de $L^2(\Omega)$, se puede definir el concepto de traza, el cual asigna valores sobre la frontera $\partial\Omega$ a cualquier función $u \in H^1(\Omega)$.

Teorema 3. *Dado Ω acotado con $\partial\Omega$ de clase C^1 . Entonces existe un operador lineal acotado*

$$T : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$$

tal que

$$(i) \quad Tu = u|_{\partial\Omega} \text{ si } u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}).$$

$$(ii) \quad \|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1} \text{ para cada } u \in H^1(\Omega), \text{ con } C \text{ una constante que depende de } \Omega.$$

Al operador T se le conoce como el operador de traza de u en $\partial\Omega$.

Definimos al espacio H_0^1 como la cerradura de las funciones $C_c^\infty(\Omega)$ relativo a la norma inducida por $(\cdot, \cdot)_{H^1}$, i.e.

$$H_0^1(\Omega) := \{ f \mid \text{hay alguna } \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega) \text{ donde } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{H^1} = 0 \}.$$

Los dos resultados siguientes se obtuvieron de [10]. Las funciones $u \in H^1(\Omega)$ que tienen traza cero son funciones que pertenecen a $H_0^1(\Omega)$, a estas funciones se le conoce como funciones con traza-cero.

Teorema 4. *(Funciones con Traza-cero en $H^1(\Omega)$) Dado un conjunto Ω tal que $\partial\Omega$ es C^1 y $u \in H^1(\Omega)$ se tiene que*

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{si y solo si} \quad Tu = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

La desigualdad de Poincaré nos permite acotar la norma de las funciones en $L^2(\Omega)$, este resultado se cita para el caso $p = 2$.

Teorema 5. *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y abierto. Dado $u \in H_0^1(\Omega)$ tenemos que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u'\|_{L^2(\Omega)},$$

donde la constante C depende de Ω únicamente.

El teorema de Compacidad débil nos asegura que toda sucesión acotada de H^1 tiene una subsucesión que converge a un elemento en el mismo espacio. Para demostrar dicho teorema necesitamos el siguiente resultado².

Teorema 6. *Dado F un subespacio cerrado en $H^1(\Omega)$ se tiene que, cada $x \in H^1(\Omega)$ tiene una única descomposición de la forma*

$$x = y + z \quad \text{con } y \in F \text{ y } z \in F^\perp,$$

donde

$$F^\perp := \{u \in H^1(\Omega) \mid (u, y) = 0, \text{ para todo } y \in F\}.$$

Teorema 7. *(Compacidad débil en H^1)* Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ acotada, entonces existe $\{u_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ y $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } H^1(\Omega).$$

Demostración. Sea $\|u_n\| \leq M$ en $H^1(\Omega)$. Definimos a S como un subespacio lineal de H^1 generado por u_n . Entonces, si $y \in \bar{S}$ por el Teorema 6 se cumple que

$$y = y_0 + y_1 \quad \text{donde } y_0 \in \bar{S}, y_1 \in \bar{F}^\perp$$

y $(u_n, y_1) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si fijamos algún m entonces (u_n, u_m) tiene una cota independiente de n , por lo que $\{(u_n, u_m)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Usando el proceso de diagonalización de Cantor podemos obtener una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tal que (u_{n_k}, u_m) converge para toda $m \in \mathbb{N}$ cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces (u_{n_k}, y) también converge cuando $y \in S$.

Si $y \in \bar{S}$ para cada $y' \in S$ se deduce por la desigualdad³ de Schwarz que

$$\begin{aligned} |(u_{n_j} - u_{n_k}, y)| &\leq |(u_{n_j}, y - y')| + |(u_{n_j} - u_{n_k}, y')| + |(u_{n_k}, y - y')| \\ &\leq 2M \|y - y'\| + |(u_{n_j} - u_{n_k}, y')|. \end{aligned}$$

²Véase [8].

³Dados x, y en H^1 se cumple que $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$.

Dado un $\epsilon > 0$ se toma $y' \in S$ de forma que $\|y - y'\| < \frac{\epsilon}{4M}$ entonces para j y k grandes se tiene

$$|(u_{n_j} - u_{n_k}, y')| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo anterior $|(u_{n_j} - u_{n_k}, y)| \rightarrow 0$ para todo $y \in \bar{S}$ cuando $j, k \rightarrow \infty$. Como el espacio H^1 es completo y usando el Teorema de Riesz⁴ se tiene que existe un único $u \in \bar{S}$ tal que

$$(u, y) := \lim_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k}, y) \quad \text{para todo } y \in \bar{S}.$$

Por lo tanto

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } H^1(\Omega).$$

□

Finalmente, mencionamos sin demostración el teorema de Mazur, el cual dice que $H_0^1(\Omega)$ es débilmente cerrado.

Teorema 8. (*Teorema de Mazur.*) Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $H^1(\Omega)$, entonces $u \in H_0^1(\Omega)$.

La importancia de este teorema radica en que para un subespacio es más “difícil” ser débilmente cerrado que fuertemente cerrado.

2.2. Existencia y unicidad de mínimos.

A continuación introducimos el funcional con el cual se trabajará en esta y la siguiente sección. Además, exponemos los teoremas necesarios para asegurar la existencia de mínimos para funcionales convexos.

A lo largo de esta sección suponemos que el intervalo $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ es abierto.

Definición 6. El funcional de energía $E : H^1(\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$E[u] := \int_{\Omega} L(u', u) dx, \tag{2.2}$$

donde $L : \mathbb{R} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función Lagrangiana.

⁴Véase Teorema 21.6 de [8].

Para definir las derivadas parciales del Lagrangiano se toma el cambio de notación

$$p := u'(x) \quad \text{y} \quad z := u(x)$$

el cual se usará a lo largo del Capítulo sin distinción, entonces se obtiene la siguiente notación

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_p L := \frac{\partial L}{\partial p}, & D_{pp} L := \frac{\partial^2 L}{\partial p^2}, \\ D_z L := \frac{\partial L}{\partial z}, & D_{zz} L := \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}, \\ D_{zp} L := \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial p} \quad \text{y} \quad D_{pz} L := \frac{\partial^2 L}{\partial p \partial z}. \end{array} \right.$$

Además denotaremos el Hessiano del Lagrangiano como

$$D^2 L := \text{Hess}(L) = \begin{pmatrix} D_{pp} L & D_{pz} L \\ D_{zp} L & D_{zz} L \end{pmatrix}.$$

Definición 7. Dado un funcional como en (1.3), el Lagrangiano L será uniformemente convexo si

$$\sum_{i,j=1}^n (D^2 L(x))_{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad (x, \xi \in \mathbb{R}^2) \quad (2.3)$$

para alguna constante $\theta > 0$.

Definición 8. Se dice que $E[\cdot]$ es coerciva si existen constantes $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$ tales que

$$L(p, z) \geq \alpha |p|^2 - \beta,$$

para todo $p, z \in \mathbb{R}$.

De la Definición 8 se sigue que $E[u] \rightarrow \infty$ cuando $\|u'\|_{L^2} \rightarrow \infty$, ya que dados $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$ e integrando la desigualdad anterior sobre \mathbb{I} se obtiene

$$E[u] \geq \delta \|u'\|_{L^2(\Omega)}^2 - \gamma$$

donde $\gamma := \beta |\mathbb{I}|$ y $\delta > 0$.

Definición 9. Decimos que $E : H^1(\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional débilmente semicontinuo inferiormente en $H^1(\mathbb{I})$ si

$$E[u] \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} E[u_j]$$

cuando $u_j \rightharpoonup u$ débilmente en $H^1(\mathbb{I})$.

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes bajo las cuales un funcional será débilmente semicontinuo inferiormente.

Teorema 9. *Supongamos que:*

a) $L(p, z)$ es acotado por abajo para todo $p \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{I}$.

b) El mapeo $p \rightarrow L(p, z)$ es convexo para todo z .

Entonces

$$E[u] = \int_{\Omega} L(u', u) \, dx$$

es débilmente semicontinuo inferiormente en $H^1(\mathbb{I})$.

La demostración de este resultado va más allá de los objetivos de esta tesis, por lo que se remite al lector al Teorema 8 de [10] página 446. Sin embargo, incluimos una demostración para el caso en que el funcional tiene la forma $L = L(u')$.

Demostración. Tomamos $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{I})$ tal que

$$u'_n \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } H^1(\mathbb{I}).$$

Entonces, por un lado $u'_n \rightharpoonup u'$ débilmente en $L^2(\mathbb{I})$. Por otro lado, de la hipótesis de convexidad se cumple que

$$E[u_n] = \int_{\mathbb{I}} L(u'_n) \, dx \geq \int_{\mathbb{I}} L(u') \, dx + \int_{\mathbb{I}} D_p L(u') \cdot (u'_n - u') \, dx.$$

Tomado el límite cuando n tiende a infinito del lado derecho de la desigualdad tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{I}} D_p L(u') \cdot (u'_n - u') \, dx = 0,$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[u_n] \geq \int_{\mathbb{I}} L(u') \, dx.$$

Por lo tanto $E[\cdot]$ es débilmente semicontinuo inferiormente en $H^1(\mathbb{I})$. □

Definición 10. *Definimos el conjunto \mathcal{A} como sigue*

$$\mathcal{A} := \{u \in H^1(\Omega) \mid u = g \text{ en } \partial\mathbb{I} \text{ en el sentido de traza}\},$$

donde $g : \partial\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, $g \in L^2(\partial\Omega)$ e \mathbb{I} es un conjunto donde $\partial\mathbb{I}$ es suave.

El teorema de existencia que se menciona a continuación, asegura que hay al menos una función $u \in \mathcal{A}$ la cual hace que la energía de la Definición 6 alcance su mínimo si el funcional es coercivo y convexo en la variable p .

Teorema 10. (*Existencia de un mínimo*)

Sea $E : H^1(\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional, dado como en la ecuación 2.2, tal que satisface:

(a) La función L es coerciva, es decir, existen constantes $\alpha > 0, \beta \geq 0$ tales que para todo $p, z \in \mathbb{R}$

$$L(p, z) \geq \alpha|p|^2 - \beta.$$

(b) La función L es convexa en la variable p .

Entonces existe al menos una función $u \in \mathcal{A}$ tal que

$$E[u] = \min_{v \in \mathcal{A}} E[v].$$

Demostración. Sea $m = \inf_{v \in \mathcal{A}} E[v]$. Si $m = +\infty$ tenemos que cualquier $v \in \mathcal{A}$ satisface

$$E[v] = \min_{v \in \mathcal{A}} E[v].$$

Cuando m es finito podemos suponer sin pérdida de generalidad que la hipótesis de coercividad es válida con $\beta = 0$, es decir,

$$L(p, z) \geq \alpha|p|^2,$$

ya que si $\beta \neq 0$ podemos tomar $\bar{L} = L + \beta$, de tal forma que \bar{L} satisface la igualdad anterior.

Integrando en ambos lados de la última desigualdad se obtiene

$$E[v] \geq \alpha \|v'\|_{L^2}^2.$$

Por una lado si $\{u_k\}$ es una sucesión minimizante, de la igualdad anterior tenemos que

$$\sup_k E[u_k] \geq \alpha \sup_k \|u'_k\|_{L^2(U)}^2. \quad (2.4)$$

Por otro lado, la sucesión $E[u_k]$ es acotada a partir de algún k ya que

$$E[u_k] \rightarrow m. \quad (2.5)$$

De lo anterior se deduce que

$$\sup_k \|u'_k\|_{L^2(U)} < \infty. \quad (2.6)$$

Ahora supongamos que v y u_k están en \mathcal{A} , donde v es una función fija, entonces

$$T(u_k) = g \text{ y } T(v) = g \text{ en } \partial\Omega$$

donde T es el operador de Traza. Si se aplica el operador de traza a $u_k - v$ resulta

$$T(u_k - v) = T(u_k) - T(v) = 0,$$

por el Teorema 4 de la sección anterior se concluye que $u_k - v \in H_0^1(\mathbb{I})$.

Observe que de la desigualdad de Poincaré y (2.6) se obtiene

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^2(\mathbb{I})} &= \|u_k - v + v\|_{L^2(\mathbb{I})} \\ &\leq \|u_k - v\|_{L^2(\mathbb{I})} + \|v\|_{L^2(\mathbb{I})} \\ &\leq C_1 \|u'_k - v'\|_{L^2(\mathbb{I})} + \|v\|_{L^2(\mathbb{I})} \\ &\leq C_1 \|u'_k\|_{L^2(\mathbb{I})} + C_1 \|v'\|_{L^2(\mathbb{I})} + \|v\|_{L^2(\mathbb{I})} \\ &\leq C, \end{aligned} \tag{2.7}$$

por lo que

$$\|u_k\|_{H^1} < \infty. \tag{2.8}$$

Entonces por el Teorema 1, de compacidad débil, existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{u_k\}_{k=1}^\infty$ y una función $u \in H^1$ tal que

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ débilmente en } H^1(\Omega).$$

Vamos a mostrar que $u \in \mathcal{A}$. Para esto notamos que $H_0^1(\mathbb{I}) \subset H^1(\mathbb{I})$ es un subconjunto cerrado y Teorema 8 es cerrado débilmente, por lo que

$$u - v \in H_0^1(\mathbb{I}).$$

Utilizando una vez más el Teorema 4 de la sección anterior se tiene

$$T(u - v) = 0 \text{ en } \partial\mathbb{I}$$

entonces

$$u = g \text{ en } \partial\mathbb{I}.$$

Del Teorema 9, como L es convexa, se tiene por un lado que

$$E[u] \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} E[u_{k_j}] = m, \tag{2.9}$$

por otro lado como $u \in \mathcal{A}$ y m es el ínfimo se deduce que

$$m \leq E[u]. \quad (2.10)$$

Por lo tanto de (2.9) y de (2.10) se obtiene que

$$E[u] = \min_{v \in \mathcal{A}} I[v].$$

□

Teorema 11. *Suponga que $L(p, u)$ es uniformemente convexa en ambas variables entonces el mínimo $u \in \mathcal{A}$ de $E[u]$ es único.*

Demostración. Sean $u, \hat{u} \in \mathcal{A}$ funciones minimizantes de $E[\cdot]$ donde definimos

$$\nu := \frac{u + \hat{u}}{2}.$$

Además definimos a $\xi \in \mathbb{R}^2$ como

$$\xi = (q - p, w - z).$$

Aproximando $L(q, w)$, con el polinomio de Taylor de grado dos y con la fórmula del residuo⁵, resulta

$$\begin{aligned} L(q, w) &= L(p, z) + D_p L(p, z)(q - p) + D_z L(p, z)(w - z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+1} (D^2 L(p, z))_{ij} \xi_i \xi_j + R_2(\xi). \end{aligned} \quad (2.11)$$

De (2.3) y (2.11) se deduce

$$\begin{aligned} L(q, w) &\geq L(p, z) + D_p L(p, z)(q - p) + D_z L(p, z)(w - z) \\ &\quad + \frac{\theta}{2} (|q - p|^2 + |w - z|^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por un lado si $p = \frac{u' + \hat{u}'}{2}$, $q = u'$, $z = \frac{u + \hat{u}}{2}$ y $w = u$ al sustituirlos en (2.12) se obtiene

$$\begin{aligned} L(Du, u) &\geq L\left(\frac{u' + \hat{u}'}{2}, \frac{u + \hat{u}}{2}\right) + D_p L\left(\frac{u' + \hat{u}'}{2}, \frac{u + \hat{u}}{2}\right) \left(\frac{u' - \hat{u}'}{2}\right) \\ &\quad + D_z L\left(\frac{u' + \hat{u}'}{2}, \frac{u + \hat{u}}{2}\right) \left(\frac{u - \hat{u}}{2}\right) \\ &\quad + \frac{\theta}{8} (|u' - \hat{u}'|^2 + |u - \hat{u}|^2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

⁵Usaremos R_2 para denotar la fórmula del residuo de grado dos, véase [12].

Por otro lado poniendo $p = \frac{u' + \hat{u}'}{2}$, $q = \hat{u}'$, $z = \frac{u + \hat{u}}{2}$ y $w = \hat{u}$ al sustituirlos en (2.12) se obtiene

$$\begin{aligned} L(\hat{u}', \hat{u}) &\geq L\left(\frac{u' + \hat{u}'}{2}, \frac{u + \hat{u}}{2}\right) + D_p L\left(\frac{u' + \hat{u}'}{2}, \frac{u + \hat{u}}{2}\right) \left(\frac{\hat{u}' - u'}{2}\right) \\ &\quad + D_z L\left(\frac{u' + \hat{u}'}{2}, \frac{u + \hat{u}}{2}\right) \left(\frac{\hat{u} - u}{2}\right) \\ &\quad + \frac{\theta}{8} (|\hat{u}' - u'|^2 + |\hat{u} - u|^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Sumando (2.13) con (2.14), integrando y dividiendo entre 2 se llega a la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{E[u] + E[\hat{u}]}{2} &\geq E[\nu] + \int_{\mathbb{I}} D_p(\nu', \nu) \left(\frac{u' - \hat{u}'}{2} + \frac{\hat{u}' - u'}{2}\right) dx_1 \\ &\quad + \int_{\mathbb{I}} D_z(\nu', \nu) \left(\frac{u - \hat{u}}{2} + \frac{\hat{u} - u}{2}\right) dx \\ &\quad + \frac{\theta}{8} \int_{\mathbb{I}} (|\hat{u}' - u'|^2 + |\hat{u} - u|^2) dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como en (2.15) la segunda y tercera integral del lado derecho se anulan resulta que

$$\frac{E[u] + E[\hat{u}]}{2} \geq E[\nu] + \frac{\theta}{8} \int_{\mathbb{I}} (|\hat{u}' - u'|^2 + |\hat{u} - u|^2) dx. \quad (2.16)$$

Por hipótesis u y \hat{u} son mínimos de \mathcal{A} entonces

$$E[u] = E[\hat{u}] = \inf_{w \in \mathcal{A}} E[w] \leq E[\nu],$$

lo que implica que

$$E[u] \geq E[u] + \frac{\theta}{8} \int_{\mathbb{I}} (|\hat{u}' - u'|^2 + |\hat{u} - u|^2) dx,$$

de donde el segundo sumando a la derecha de la desigualdad (2.16) es cero. Por lo tanto

$$u' = \hat{u}' \text{ y } u = \hat{u} \quad \text{para casi todo punto en } \mathbb{I}.$$

□

2.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange

En esta sección se introduce el concepto de la derivada de Fréchet, la primera y segunda variación de un funcional, el Lema fundamental del Cálculo de Variaciones y la ecuación de Euler-Lagrange; todo lo anterior aplicado al caso particular de la Definición 6. Esto será útil para encontrar el o los mínimos de dicho funcional.

Al igual que en la sección anterior tomamos $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ como un intervalo abierto. La siguiente definición fue tomada de [7].

Definición 11. *Dada una función $u \in H^1(\mathbb{I})$ y un funcional $E : H^1(\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que $E[\cdot]$ tiene una derivada de Fréchet en u si existe un funcional lineal y continuo $DE[u]$ tal que*

$$E[u + h] = E[u] + DE[u]h + o(\|h\|),$$

donde

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0.$$

En nuestro caso estudiamos el funcional dado en (2.2), por lo que aplicando la variación $\Phi(t) = u + th$ con $u \in H^1(\mathbb{I})$, $h \in C_c^\infty(\mathbb{I})$ y $t \in [0, 1]$ se obtiene que dicho funcional $E[\cdot]$ queda en función de la variable t , es decir, $E(t) = E[\Phi]$. Evaluando explícitamente la variación Φ en (2.2) se llega a que

$$E[u + th] := \int_{\Omega} L(u' + th', u + th) dx.$$

Derivando con respecto a t y usando de nuevo la notación $p := u'$ y $z := u$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{dE[u + th]}{dt} &= \int_{\mathbb{I}} D_p L(u' + th', u + th) h' dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{I}} D_z L(u' + th', u + th) h dx, \end{aligned}$$

Si se evalúa la última igualdad en $t = 0$ se llega a que

$$\delta E[u](h) = \int_{\mathbb{I}} D_p L(u', u) h' + D_z L(u', u) h dx,$$

donde

$$\delta E[u] := \frac{d}{dt} E(t)|_{t=0}$$

notación que será utilizada en capítulos posteriores.

Definición 12. Definimos la primera variación del funcional (2.2) como la ecuación

$$\delta E[u](h) = \int_{\mathbb{I}} D_p L(u', u) h' + D_z L(u', u) h \, dx, \quad (2.17)$$

donde $u \in H^1(\mathbb{I})$, $h \in C_0^\infty(\mathbb{I})$ y $t \in [0, 1]$.

Para obtener la ecuación de Euler-Lagrange es necesario hacer uso del Lema fundamental del Cálculo de Variaciones el cual se cita a continuación; ésta cita es una modificación de los lemas tomados de [7] y [9], y se demuestra sólo para el caso 1-dimensional.

Lema 1. Dada una función $u \in C^0(\mathbb{I})$ que satisfice

$$\int_{\mathbb{I}} u(x) \phi(x) dx = 0 \quad \text{para toda } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{I}),$$

entonces $u \equiv 0$ en \mathbb{I} .

Demostración. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{I}$ tal que $u(x_0) \neq 0$. Entonces, por la continuidad de u en x_0 existe $\delta > 0$ tal que

$$a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$$

y

$$u(x) \neq 0 \quad \text{si } |x_0 - x| < \delta.$$

Observe que la función u tiene el mismo signo en el intervalo anterior, ésto debido a la continuidad. Se define a $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{I})$ como

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 0 & \text{para } |x_0 - x| \geq \delta, \\ \phi(x) &= (b - x)(x - a) & \text{para } |x_0 - x| < \delta. \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene

$$\int_{\mathbb{I}} u(x) \phi(x) dx = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} u(x) \phi(x) dx \neq 0,$$

ya que $u(x)$ y $\phi(x)$ son ambas distintas de cero en ese intervalo. Por lo tanto se deduce que $u(x) \equiv 0$ en $[a, b]$. \square

Bajo las hipótesis de la Definición 12, asumiendo suficiente regularidad y aplicando integración por partes al funcional (2.17) se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta E[u](h) &= \int_{\mathbb{I}} L_p(u', u)h' + L_z(u', u)h \, dx \\
&= L_p(u', u)h|_{\partial\mathbb{I}} + \int_{\mathbb{I}} \left\{ \frac{-dL_p(u', u)}{dx} h + L_z(u', u)h \right\} dx \\
&= L_p(u', u)h|_{\partial\mathbb{I}} + \int_{\mathbb{I}} \left\{ \frac{-dL_p(u', u)}{dx} + L_z(u', u) \right\} h \, dx \quad (2.18)
\end{aligned}$$

como h tiene soporte compacto entonces $h|_{\partial\mathbb{I}} = 0$. Igualando la primera variación a cero, $\delta E[u] = 0$, se puede aplicar el Lema fundamental del Cálculo de Variaciones con $u(x) = \frac{dL_p(u', u)}{dx} + L_z(u', u)$. Entonces se obtiene que

$$-\frac{dL_z(u', u)}{dx} + L_u(u', u) \equiv 0 \quad \text{en } \mathbb{I}.$$

Definición 13. Definimos a la ecuación de Euler-Lagrange, del funcional (2.2), como la ecuación

$$-\frac{dL_p(u', u)}{dx} + L_z(u', u) = 0.$$

Para terminar el capítulo damos la definición de la segunda variación del funcional. Para esto apliquemos otra variación w en la ecuación (2.17), i.e.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 E[u + tw]}{dt^2} &= \int_{\mathbb{I}} \{ D_{pp}L(u' + tw', u + tw)h'w' \\
&\quad + D_{pz}L(u' + tw', u + tw)(hw)' \\
&\quad + D_{zz}L(u' + tw', u + tw)hw \} dx.
\end{aligned}$$

Al evaluar la ecuación anterior en $t = 0$ se obtiene

$$\frac{d^2 E[u]}{dt^2} \Big|_{t=0} = \int_{\mathbb{I}} D_{pp}L(u', u)h'w' + D_{pz}L(u', u)(hw)' + D_{zz}L(u', u)hw \, dx,$$

al igual que en la primera variación usaremos en capítulos posteriores la siguiente notación

$$\delta^2 E[u] := \frac{d^2 E[u]}{dt^2} \Big|_{t=0}.$$

Definición 14. Definimos la segunda variación del funcional (2.2) por la ecuación

$$\delta^2 E[u](h, w) = \int_{\mathbb{I}} D_{pp}L(u', u)h'w' + D_{pz}L(u', u)(hw)' + D_{zz}L(u', u)hw \, dx$$

con $u \in H^1(\mathbb{I})$, $t \in [0, 1]$ y $h, w \in H_0^1(\mathbb{I})$.

Capítulo 3

Energía en el Bulk.

En este capítulo se reduce el modelo de la energía micromagnética a su forma 1-dimensional en la cual se estudia la existencia de mínimos que describan paredes de Bloch. Para encontrar los mínimos del funcional de magnetización se calcula la primera variación para obtener la ecuación de Euler-Lagrange, gracias a esta última ecuación es posible analizar dos casos en particular: la existencia de paredes de 180° y la existencia de paredes de 360° . En el caso de las paredes de 180° se deduce una solución explícita mediante la transformación de la magnetización a coordenadas polares y en el caso de las paredes de 360° se demuestra la no existencia de éstas en el Bulk.

3.1. Hipótesis del modelo y energía reducida.

Recordemos que la energía micromagnética está dada por

$$E[u] := \frac{d^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{Q}{2} \int_{\Omega} \Phi(m) dx \quad (3.1)$$

donde d y Q son parámetros del material y el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es el espacio que ocupa el material. Asimismo recordamos que u se obtiene al resolver

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \nabla \cdot m \quad \text{en } \Omega, \\ \Delta u &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 - \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= m \cdot \nu \Big|_{\partial\Omega} \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Para simplificar el modelo (3.1) y poder usar las herramientas del cálculo de variaciones introducido en el Capítulo 2 haremos las siguientes hipótesis:

(a) Sea el intervalo cerrado

$$\mathbb{I} := [-L, L].$$

Donde m satisfice

$$|m|^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1. \quad (3.3)$$

(b) La magnetización m es función de una sola coordenada cartesiana

$$m = m(x_1).$$

(c) El primer componente de la magnetización es cero, es decir

$$m_1 = 0.$$

(d) La anisotropía cristalina es el polinomio par no trivial, más sencillo, es decir

$$\Phi(m) := 1 - m_2^2.$$

(e) El sistema es ℓ -periódico en las direcciones \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 .

(f) La magnetización satisface las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} m(x_1) &= m_{-\infty} & x_1 &\leq -L, \\ m(x_1) &= m_{+\infty} & x_1 &\geq +L, \end{aligned}$$

para $L > 0$.

(g) El potencial u es acotado en \mathbb{R}^3 .

Como veremos a continuación, bajo las suposiciones anteriores la energía (3.1) se simplifica enormemente.

Proposición 1. *Bajo las hipótesis (a), (b) y (c) tenemos que si u es acotada, entonces es constante.*

Demostración. De las hipótesis (b) y (c) tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot m &= \underbrace{(\partial_{x_1} m_1)}_{\stackrel{(c)}{=} 0} + \underbrace{(\partial_{x_2} m_2 + \partial_{x_3} m_3)}_{\stackrel{(b)}{=} 0} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

De (3.4) y (a), (3.2) se reduce a

$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3.$$

Ahora bien, como por hipótesis u es acotada, usando el Teorema de Liouville ¹ entonces se deduce que u es constante. \square

Observamos ahora que, debido a la Proposición 1 el campo de demagnetización se anula (es decir $\nabla u = 0$), de donde

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx = 0. \quad (3.5)$$

Utilizando las hipótesis (b), (d) y (3.5) tendremos que la energía (3.1) se reduce a

$$E[m] = \frac{d^2}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{dm}{dx_1} \right|^2 dx + \frac{Q}{2} \int_{\Omega} (1 - m_2^2) dx. \quad (3.6)$$

Bajo las hipótesis (e) y (f), es decir que el sistema es ℓ -periódico y que m_1 es constante fuera de \mathbb{I} , la energía (3.6) en cada celda periódica queda como

$$\begin{aligned} & E[m] \\ &= \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{I}} \int_0^\ell \int_0^\ell \left| \frac{dm}{dx_1} \right|^2 dx + \frac{Q}{2} \int_{\mathbb{I}} \int_0^\ell \int_0^\ell (1 - m_2^2) dx \\ &= \frac{d^2}{2} \int_0^\ell \int_0^\ell dx_2 dx_3 \int_{\mathbb{I}} \left| \frac{dm}{dx_1} \right|^2 dx_1 + \frac{Q}{2} \int_0^\ell \int_0^\ell dx_2 dx_3 \int_{\mathbb{I}} (1 - m_2^2) dx_1 \\ &= \frac{d^2}{2} \ell^2 \int_{\mathbb{I}} \left| \frac{dm}{dx_1} \right|^2 dx_1 + \frac{Q}{2} \ell^2 \int_{\mathbb{I}} (1 - m_2^2) dx_1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Renormalizando la energía

$$E[m] \rightarrow \frac{E[m]}{\ell^2}$$

obtenemos

$$E[m] = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{I}} \left| \frac{dm}{dx_1} \right|^2 dx_1 + \frac{Q}{2} \int_{\mathbb{I}} (1 - m_2^2) dx_1. \quad (3.8)$$

Por un lado, de las hipótesis (a) y (c) se obtiene que

$$|m|^2 = m_2^2 + m_3^2 = 1 \quad (3.9)$$

¹Ver [10], Sección 2.2.3 inciso d.

y

$$\left| \frac{dm}{dx_1} \right|^2 = \left| \frac{dm_2}{dx_1} \right|^2 + \left| \frac{dm_3}{dx_1} \right|^2. \quad (3.10)$$

Por el otro, de (3.9) y de (3.10) se deduce la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \left| \frac{dm_2}{dx_1} \right|^2 + \left| \frac{dm_3}{dx_1} \right|^2 &= \left| \frac{dm_2}{dx_1} \right|^2 + \left| \frac{d}{dx_1} \sqrt{(1 - m_2^2)} \right|^2 \\ &= |m_2'|^2 + \left| \frac{-(2m_2)m_2'}{2\sqrt{(1 - m_2^2)}} \right|^2 \\ &= (m_2')^2 + \left(\frac{m_2 m_2'}{(1 - m_2^2)^{1/2}} \right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{m_2^2}{1 - m_2^2} \right) (m_2')^2 \\ &= \frac{(m_2')^2}{1 - m_2^2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $m_2' := \frac{dm_2}{dx_1}$.

Observe que intercambiando los subíndices (3 por 2) también se obtiene

$$\left| \frac{dm_2}{dx_1} \right|^2 + \left| \frac{dm_3}{dx_1} \right|^2 = \frac{(m_3')^2}{1 - m_3^2}. \quad (3.12)$$

Finalmente de las ecuaciones (3.8), (3.10) y (3.11) tenemos que, bajo las hipótesis anteriores, la energía $E[m]$ se reduce a

$$E[m_2] = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{I}} \frac{(m_2')^2}{1 - m_2^2} dx_1 + Q \int_{\mathbb{I}} (1 - m_2^2) dx_1. \quad (3.13)$$

Análogamente, si usamos (3.10) y (3.12), la energía (3.8) se puede expresar en términos de m_3 , es decir, tendrá la forma

$$E[m_3] = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{I}} \frac{(m_3')^2}{1 - m_3^2} dx_1 + Q \int_{\mathbb{I}} m_3^2 dx_1. \quad (3.14)$$

Las ecuaciones (3.13) y (3.14) representan la energía reducida E , en función de m_2 y m_3 respectivamente.

3.1.1. Primera variación de $E[m_2]$ y $E[m_3]$.

En esta sección se obtendrá la primera variación para la energía $E[m_3]$ y para la energía $E[m_2]$. Para obtener la primera variación de la ecuación (3.13) es necesario calcular la derivada de Fréchet, es decir tomar una perturbación Φ tal que $\Phi = m_2 + t\phi$ con $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{I})$. Si evaluamos la ecuación (3.13) en Φ se obtiene

$$E[\Phi] = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{I}} \frac{(m'_2 + t\phi')^2}{1 - (m_2 + t\phi)^2} dx_1 + Q \int_{\mathbb{I}} (1 - (m_2 + t\phi)^2) dx_1, \quad (3.15)$$

derivando con respecto a t la ecuación (3.15) nos queda que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[\Phi] &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{I}} \frac{(m'_2 + t\phi')^2}{1 - (m_2 + t\phi)^2} dx_1 + Q \int_{\mathbb{I}} (1 - (m_2 + t\phi)^2) dx_1 \right\} \\ &= \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{I}} \left(\frac{2(m'_2 + t\phi')\phi'(1 - (m_2 + t\phi)^2) - (m'_2 + t\phi')^2(-2(m_2 + t\phi)\phi)}{(1 - (m_2 + t\phi)^2)^2} \right) dx_1 \\ &\quad + Q \int_{\mathbb{I}} -2(m_2 + t\phi)\phi dx_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Al evaluar la ecuación (3.16) en $t = 0$ la primera variación de $E[m_2]$ queda dada por

$$\begin{aligned} \delta E[m_2] &= \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{I}} \left(\frac{2m'_2\phi'(1 - m_2^2) + 2m_2'^2 m_2\phi}{(1 - m_2^2)^2} \right) dx_1 + Q \int_{\mathbb{I}} -2m_2\phi dx_1 \\ &= d^2 \int_{\mathbb{I}} \left(\frac{m'_2\phi'}{1 - m_2^2} + \frac{m_2'^2 m_2\phi}{(1 - m_2^2)^2} \right) dx_1 - 2Q \int_{\mathbb{I}} m_2\phi dx_1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por último, integrando por partes el primer elemento de (3.17), usando la hipótesis de que ϕ tiene soporte compacto e igualando a cero la variación (para encontrar el punto crítico) resulta que

$$\begin{aligned} \delta E[m_2] &= -d^2 \int_{\mathbb{I}} \left(\frac{m'_2}{1 - m_2^2} \right)' \phi dx_1 + d^2 \int_{\mathbb{I}} \frac{m_2'^2 m_2\phi}{(1 - m_2^2)^2} dx_1 - 2Q \int_{\mathbb{I}} m_2\phi dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{I}} \left(-d^2 \left(\frac{m'_2}{1 - m_2^2} \right)' + d^2 \frac{m_2'^2 m_2}{(1 - m_2^2)^2} - 2Qm_2 \right) \phi dx_1 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Observación 1. Utilizando el lema fundamental del cálculo de variaciones en la ecuación (3.18) se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange para la energía (3.13). Es decir, se obtiene

$$-d^2 \left(\frac{m'_2}{1 - m_2^2} \right)' + d^2 \frac{m_2'^2 m_2}{(1 - m_2^2)^2} - 2Qm_2 = 0$$

c.p.t. $x \in \{x \in \mathbb{I} \mid |m_2(x)| \neq 1\}$.

Ahora se desea obtener la primera variación de la ecuación (3.14). Se realizará siguiendo los mismos pasos que para obtener la primera variación de $E[m_2]$.

Sea Ψ una perturbación tal que $\Psi = m_3 + t\psi$ con $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{I})$. Si evaluamos la ecuación (3.14) en Ψ se obtiene

$$E[\Psi] = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{I}} \frac{(m'_3 + t\psi')^2}{1 - (m_3 + t\psi)^2} dx_1 + Q \int_{\mathbb{I}} (m_3 + t\psi)^2 dx_1, \quad (3.19)$$

derivando con respecto a t , la ecuación (3.19) queda como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[\Psi] &= \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{I}} \left(\frac{2(m'_3 + t\psi')\psi'(1 - (m_3 + t\psi)^2) - (m'_3 + t\psi')^2(-2(m_3 + t\psi)\psi)}{(1 - (m_3 + t\psi)^2)^2} \right) dx_1 \\ &+ Q \int_{\mathbb{I}} 2(m_3 + t\psi)\psi dx_1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Si se evalúa en $t = 0$, la ecuación (3.20) se reduce a

$$\delta E[m_3] = d^2 \int_{\mathbb{I}} \left(\frac{m'_3\psi'}{1 - m_3^2} + \frac{m_3'^2 m_3\psi}{(1 - m_3^2)^2} \right) dx_1 + 2Q \int_{\mathbb{I}} m_3\psi dx_1, \quad (3.21)$$

que es la primera variación de $E[m_3]$.

Por último, si se integra por partes el primer elemento de (3.21), se iguala a cero la variación $\delta E[m_3]$ y usando la hipótesis de que ψ tiene soporte compacto se obtiene

$$\begin{aligned} \delta E[m_3] &= \int_{\mathbb{I}} \left(-d^2 \left(\frac{m'_3}{1 - m_3^2} \right)' + d^2 \frac{m_3'^2 m_3}{(1 - m_3^2)^2} + 2Qm_3 \right) \psi dx_1 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Observación 2. Análogamente a la Observación 1, la ecuación de Euler-Lagrange para (3.14) está dada

$$-d^2 \left(\frac{m'_3}{1 - m_3^2} \right)' + d^2 \frac{m_3'^2 m_3}{(1 - m_3^2)^2} + 2Qm_3$$

c.p.t. $x \in \{x \in \mathbb{I} \mid |m_3(x)| \neq 1\}$.

3.1.2. Existencia de la solución para la energía reducida

En esta sección se demostrará que el funcional de energía (3.14) alcanza su mínimo, es decir, existe m_3 que minimiza a la energía $E[m_3]$.

Por un lado se define la densidad de energía $f_{m_3} : \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_{m_3}(m'_3, m_3) := \begin{cases} \frac{d^2}{2} \frac{(m'_3)^2}{1 - m_3^2} + Qm_3^2 & \text{si } |m_3| < 1 \\ Q & \text{si } |m_3| = \pm 1. \end{cases} \quad (3.23)$$

Por otro lado se tiene que la densidad de energía para $f_{m_2} : \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$f_{m_2}(m'_2, m_2) := \begin{cases} \frac{d^2}{2} \frac{(m'_2)^2}{1 - m_2^2} + Q(1 - m_2^2) & \text{si } |m_2| < 1 \\ 0 & \text{si } |m_2| = \pm 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

Tenemos que la energía

$$E[m_2] \geq 0$$

para $|m_2| < 1$, ya que

$$f_{m_2} \geq 0.$$

Si tomamos $|m_2| = \pm 1$ de las ecuaciones (3.8) y (3.9) se tiene que

$$E[m] = 0,$$

pero usando (3.10) y (3.11) se deduce que

$$E[m] = E[m_2].$$

Entonces lo que se puede afirmar hasta este punto es que el funcional (3.13) (que corresponde a (3.24)) alcanza su ínfimo en dos mínimos triviales, es decir

$$E[m_2] = 0 \quad \text{para } m_2 = \pm 1.$$

Por lo anterior deberemos considerar ahora el problema de buscar puntos críticos en el funcional (3.13). Sin embargo, esta pregunta se responderá indirectamente estudiando el problema para m_3 , es decir, estudiando la energía (3.14) (que corresponde a (3.23)).

Proposición 2. *El funcional de energía (3.14) alcanza su único mínimo para toda condición de frontera $m_3(-L) = m_{-\infty}$ y $m_3(+L) = m_{+\infty}$.*

Para simplificar la notación de los próximos cálculos, se utilizará el siguiente cambio de variable

$$(m'_3, m_3) \rightarrow (p, z).$$

Entonces la ecuación 3.23 queda como

$$f(p, z) := \begin{cases} \frac{d^2}{2} \frac{p^2}{1-z^2} + Qz^2 & \text{si } |z| < 1 \\ Q & \text{si } |z| = 1 \end{cases} \quad (3.25)$$

donde $f(p, z) : \mathbb{R} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$.

Para demostrar la Proposición 2 necesitamos el siguiente lema.

Lema 2. *La función (3.25) es uniformemente convexa en ambas variables z y p , para $|z| < 1$.*

Demostración. Sea $|z| < 1$, definimos $\tilde{x} := (p, z) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$. Para mostrar que $f(\tilde{x})$ es uniformemente convexa se debe demostrar que para todo $\tilde{x} \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$, $\xi \in \mathbb{R}^2$ existe $\theta > 0$ tal que se satisface

$$K(\xi) := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 f_{\tilde{x}_i \tilde{x}_j}(\tilde{x}) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2. \quad (3.26)$$

Definimos

$$A(x) := \text{Hess}(f(x))$$

la matriz² tal que sus entradas A_{ij} corresponden a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j}.$$

De lo anterior se deduce que A es una matriz simétrica y por lo tanto existe una matriz ortogonal Q (ver [4] Teorema 6.20 página 384) tal que

$$Q^T A(x) Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

²Observe que $\frac{1}{2}A$ representa a la matriz bilineal de la forma cuadrática K .

donde λ_i son los eigenvalores de $A(x)$.

Si denotamos

$$\tilde{A}(x) := Q^T A(x) Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

y hacemos el cambio de coordenadas $\xi = Qs$ tenemos que

$$K(\xi) = \frac{1}{2} \xi^T A(x) \xi = \frac{1}{2} s^T Q^T A Q s,$$

de donde

$$K(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \tilde{A}_{ij} s_i s_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \lambda_i s_i^2.$$

Además

$$\|\xi\|^2 = \|s\|^2,$$

por lo tanto la condición (3.26) es equivalente a probar que

$$K(\xi) - \theta \|\xi\|^2 = \sum_{i=1}^2 s_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{2} - \theta \right) \geq 0$$

y se satisface siempre que

$$\theta := \min \left\{ \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2} \right\} > 0.$$

Por lo que basta con mostrar que los eigenvalores λ_i de A son positivos.

Para obtener los eigenvalores es necesario calcular f_{pp} , f_{zz} y f_{zp} . Ya que $|z| < 1$ al calcular f_{zz} nos queda

$$\begin{aligned} f_{zz}(p, z) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{d^2}{2} \frac{p^2}{1-z^2} + Qz^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d^2}{2} \frac{2zp^2}{(1-z^2)^2} + 2Qz \right) \\ &= \frac{d^2}{2} \left(\frac{2p^2(1-z^2) + 8z^2p^2}{(1-z^2)^3} \right) + 2Q \\ &= \frac{d^2(p^2(1-z^2) + 4z^2p^2)}{(1-z^2)^3} + 2Q > 0. \end{aligned}$$

Claramente

$$f_{pp}(p, z) = \frac{d^2}{(1-z^2)} > 0 \tag{3.27}$$

y

$$f_{zp}(p, z) = f_{pz}(p, z) = \frac{2d^2 zp}{(1-z^2)^2}. \quad (3.28)$$

Hasta aquí ya tenemos $Hess(f(x))$, para obtener los eigenvalores del Hessiano resolvemos la siguiente ecuación

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} f_{pp} - \lambda & f_{pz} \\ f_{zp} & f_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = (f_{pp} - \lambda)(f_{zz} - \lambda) - f_{pz}f_{zp} = 0.$$

Desarrollando lo anterior, y usando el hecho de que $f_{zp} = f_{pz}$, se obtiene la ecuación

$$\lambda^2 - (f_{pp} + f_{zz})\lambda - f_{pz}^2 + f_{pp}f_{zz},$$

por lo que se llega a una ecuación de segundo orden

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (3.29)$$

donde

$$\begin{aligned} a &:= 1 \\ b &:= \frac{-d^2}{(1-z^2)} - \frac{d^2(p^2(1-z^2) + 4z^2p^2)}{(1-z^2)^3} - 2Q \\ c &:= \frac{d^4p^2}{(1-z^2)^3} + \frac{2Qd^2}{(1-z^2)}. \end{aligned}$$

Observe que $b < 0$ por lo que $-b > 0$. De la ecuación (3.29) se deduce que

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Entonces los eigenvalores λ_i son todos reales positivos si

$$-b \pm \sqrt{b^2 - 4c} > 0,$$

es decir, si y sólo si

$$b^2 \geq 4c > 0.$$

Pero se tiene

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{4d^4}{(1-z^2)^2} + \frac{4d^4p^2}{(1-z^2)^3} + \frac{16d^4z^2p^2}{(1-z^2)^4} + \frac{d^4(p^2(1-z^2) + 4z^2p^2)^2}{(1-z^2)^6} \\ &+ \frac{8Qd^2}{(1-z^2)} + \frac{4Q(1-z^2)(p^2(1-z^2) + 4z^2p^2)}{(1-z^2)^4} + 4Q^2, \end{aligned} \quad (3.30)$$

por lo que

$$\begin{aligned} b^2 - 4c &= \frac{4d^4}{(1-z^2)^2} + \frac{16d^4 z^2 p^2}{(1-z^2)^4} + \frac{d^4(p^2(1-z^2) + 4z^2 p^2)^2}{(1-z^2)^6} \\ &\quad + \frac{4Q(1-z^2)(p^2(1-z^2) + 4z^2 p^2)}{(1-z^2)^4} + 4Q^2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

entonces

$$b^2 > 4c > 0.$$

Por lo tanto los eigenvalores λ_i son todos positivos y $\theta > 0$. \square

A continuación se dará la demostración de la Proposición 2.

Demostración. Para demostrar que la energía (3.14) alcanza su mínimo se utilizará el Teorema 10 del Capítulo 2, por lo que bastará con demostrar que las hipótesis (a) y (b) de dicho teorema se satisfacen.

Sea $\mathcal{A} = \{m_3 \in H(\mathbb{I}) \mid m_3(\pm L) = m_{\pm\infty}\}$. De la ecuación (3.25) tenemos que $f(p, z) : \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $|z| = 1$ de (3.25) tenemos que $E[m_3] = Q$. Pero si $|z| < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{2} \frac{p^2}{1-z^2} + Qz^2 &\geq \frac{d^2}{2} p^2 + Qz^2 \\ &\geq c(p^2 + z^2), \end{aligned} \tag{3.31}$$

donde c es una constante positiva. Por lo anterior si $\alpha = c$ y $\beta = 0$ se tiene que el inciso (a) del Teorema 10 se satisface.

Además, por el Lema 2 se tiene que $f(p, z)$ es convexa en ambas variables, lo que implica que el inciso (b) del Teorema 10 también se satisface.

Entonces, por un lado existe $\bar{m}_3 \in \mathcal{A}$ tal que minimiza al funcional

$$E[\bar{m}_3] = \int_{\mathbb{I}} f(\bar{m}'_3, \bar{m}_3) dx_1$$

donde f está dada por (3.25) y \bar{m}_3 satisface

$$\bar{m}_3(-L) = m_{-\infty} \quad \text{y} \quad \bar{m}_3(L) = m_{+\infty}.$$

Por otro lado, del Lema 2 y el Teorema 11 del Capítulo 2 se tiene que el mínimo \bar{m}_3 es único. \square

Corolario 1. *El funcional (3.13) tiene puntos críticos no triviales para toda condición de frontera.*

Demostración. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para m_3 y m_2 , respectivamente, son

$$-d^2 \left(\frac{m'_3}{1 - m_3^2} \right)' + d^2 \frac{m_3'^2 m_3}{(1 - m_3^2)^2} + 2Qm_3 = 0 \quad (3.32)$$

$$-d^2 \left(\frac{m'_2}{1 - m_2^2} \right)' + d^2 \frac{m_2'^2 m_2}{(1 - m_2^2)^2} - 2Qm_2 = 0. \quad (3.33)$$

De la Proposición 2 se tiene que para toda condición de frontera existe un único m_3 que minimiza a (3.14). Es decir, m_3 satisface la ecuación de Euler-Lagrange de $E[m_3]$ dada en la Observación 2. Entonces, para demostrar este corolario bastará con mostrar que la función m_2 definida implícitamente por $m_2^2 + m_3^2 = 1$ satisface la ecuación de Euler-Lagrange de $E[m_2]$, dada en la Observación 1. Sin embargo, podría pasar que $|m_3| = 1$ en algún subintervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{I}$. En este caso de las hipótesis (a) y (c), de la página 26, se deduce que $m_2 = 0$ en (a, b) entonces la ecuación de Euler-Lagrange (3.32) se satisface trivialmente. Si tenemos ahora que $|m_3| = 0$ en el intervalo (a, b) entonces por las mismas hipótesis se llega a que $|m_2| = 1$ y la energía se satisface trivialmente que $E[m_2] = 0$. Por lo tanto sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|m_2| < 1$ y $|m_3| < 1$.

Derivando explícitamente la ecuación (3.9) obtenemos

$$m_2 m'_2 + m_3 m'_3 = 0. \quad (3.34)$$

Reordenando los términos y de nuevo utilizando la ecuación(3.9) se llega a que

$$\frac{m'_2}{(1 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{m'_3}{(1 - m_3^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.35)$$

donde se ha escogido un signo en $m_3 = \pm(1 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}$, que se usará consistentemente a lo largo de los siguientes cálculos. Por un lado si se utiliza (3.35) y (3.9) en el primer término de (3.32) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{m'_3}{1 - m_3^2} &= \frac{m'_3}{(1 - m_3^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(1 - m_3^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\mp m'_2}{(1 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\pm m_2} \\ &= \frac{-m'_2}{(1 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{m_2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Por otro lado si desarrollamos la derivada del primer término en (3.32), utilizando (3.36) y (3.9) nos queda

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m'_3}{1-m_3^2}\right)' &= \left(\frac{-m'_2}{(1-m_2^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{m_2}\right)' \\
&= \left(\frac{-m'_2}{(1-m_2^2)} \frac{m_3}{m_2}\right)' \\
&= \left(\frac{-m'_2}{(1-m_2^2)}\right)' \left(\frac{m_3}{m_2}\right) + \left(\frac{-m'_2}{(1-m_2^2)}\right) \left(\frac{m_3}{m_2}\right)' \\
&= \left(\frac{-m'_2}{(1-m_2^2)}\right)' \left(\frac{m_3}{m_2}\right) + \left(\frac{-m'_2}{(1-m_2^2)}\right) \left(\frac{m'_3 m_2 - m_3 m'_2}{m_2^2}\right) \\
&= \left(\frac{-m'_2}{(1-m_2^2)}\right)' \left(\frac{m_3}{m_2}\right) + \left(\frac{-m'_2 m'_3}{(1-m_2^2) m_2}\right) + \left(\frac{m_3 m_2'^2}{(1-m_2^2) m_2^2}\right) \\
&= \left(\frac{-m'_2}{(1-m_2^2)}\right)' \left(\frac{m_3}{m_2}\right) - \left(\frac{m'_2 m'_3}{m_3^2 m_2}\right) + \left(\frac{m_3 m_2'^2}{(1-m_2^2) m_2^2}\right). \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Utilizando (3.35) y (3.9) en el segundo término de (3.32) se obtiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\frac{m_3'^2 m_3}{(1-m_3^2)^2} &= \frac{m_3'^2}{1-m_3^2} \frac{m_3}{1-m_3^2} \\
&= \frac{m_2'^2 m_3}{(1-m_2^2) m_2^2}. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

La última igualdad que será necesaria más adelante es

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m'_2 m'_3}{m_3 m_3^2}\right) &= \frac{-m_2'^2 m_2}{m_3^2 m_3^2} \\
&= \frac{-m_2'^2 m_2}{(1-m_2^2)(1-m_2^2)} \\
&= \frac{-m_2'^2 m_2}{(1-m_2^2)^2}. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Substituyendo (3.37) y (3.38) en (3.32) se obtiene

$$\begin{aligned}
& -d^2 \left(\frac{m'_3}{1 - m_3^2} \right)' + d^2 \frac{m_3'^2 m_3}{(1 - m_3^2)^2} + 2Qm_3 \\
= & d^2 \left\{ \left(\frac{m'_2}{(1 - m_2^2)} \right)' \left(\frac{m_3}{m_2} \right) + \left(\frac{m'_2 m'_3}{m_3^2 m_2} \right) - \left(\frac{m_3 m_2'^2}{(1 - m_2)m_2^2} \right) \right\} \\
& + d^2 \left(\frac{m_2'^2 m_3}{(1 - m_2^2)m_2^2} \right) + 2Qm_3 \\
= & d^2 \left\{ \left(\frac{m'_2}{(1 - m_2^2)} \right)' \left(\frac{m_3}{m_2} \right) + \left(\frac{m'_2 m'_3}{m_3^2 m_2} \right) \right\} + 2Qm_3. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Multiplicando la última igualdad por $\frac{m_2}{m_3}$ resulta

$$d^2 \left\{ \left(\frac{m'_2}{(1 - m_2^2)} \right)' + \left(\frac{m'_2 m'_3}{m_3^2 m_3} \right) \right\} + 2Qm_2 = 0. \tag{3.41}$$

Substituyendo la ecuación (3.39) en (3.41) y después multiplicando por -1 en ambos lado de la ecuación se llega a que

$$-d^2 \left(\frac{m'_2}{(1 - m_2^2)} \right)' + d^2 \frac{m_2'^2 m_2}{(1 - m_2^2)^2} - 2Qm_2 = 0. \tag{3.42}$$

Por lo tanto el mínimo m_3 y la relación $m_2^2 + m_3^2 = 1$ definen una solución de la ecuación de Euler-Lagrange para m_2 y un punto crítico no trivial de $E[m_2]$. \square

3.2. Soluciones explícitas

En esta sección calculamos algunas soluciones explícitas para los mínimos del funcional de energía $E[m]$ dado por (3.8). Para encontrar dichas soluciones explícitas es necesario tomar

$$L \rightarrow \pm\infty,$$

de donde

$$\mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Expresemos a la magnetización m en términos de una fase

$$\theta : \mathbb{R} \rightarrow [-\pi, \pi],$$

es decir, definimos

$$m = (0, \sin(\theta), \cos(\theta)) \quad \text{donde } \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (3.43)$$

Usando la hipótesis (a) y la definición (3.43) tenemos que

$$1 - m_2^2 = 1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta), \quad (3.44)$$

$$\frac{dm_2}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} \sin(\theta) = \cos(\theta) \frac{d\theta}{dx_1}, \quad (3.45)$$

$$\frac{dm_3}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} \cos(\theta) = -\sin(\theta) \frac{d\theta}{dx_1}, \quad (3.46)$$

de donde

$$\begin{aligned} \left| \frac{dm_2}{dx_1} \right|^2 + \left| \frac{dm_3}{dx_1} \right|^2 &= \cos^2(\theta) \left| \frac{d\theta}{dx_1} \right|^2 + \sin^2(\theta) \left| \frac{d\theta}{dx_1} \right|^2 \\ &= (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \left| \frac{d\theta}{dx_1} \right|^2 \\ &= \left| \frac{d\theta}{dx_1} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Entonces sustituyendo las ecuaciones (3.47) y (3.44) en la ecuación (3.8) se obtiene

$$E[\theta] = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d\theta}{dx_1} \right|^2 dx_1 + \frac{Q}{2} \int_{\mathbb{R}} \cos^2(\theta) dx_1. \quad (3.48)$$

En los siguientes apartados se calcularán las ecuaciones de Euler-Lagrange y las soluciones explícitas para algunos casos especiales.

3.2.1. Primera variación, $\delta E[\theta]$

El objetivo es obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional de energía $E[\theta]$, dado en la ecuación (3.48).

Lema 3. *La primera variación de $E[\theta]$, ecuación (3.48), está dada por*

$$\delta E[\theta]\phi = d^2 \int_{\mathbb{R}} \theta' \phi' dx_1 - Q \int_{\mathbb{R}} \phi \cos(\theta) \sin(\theta) dx_1 \quad (3.49)$$

y la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange es

$$d^2\theta'' + Q \cos(\theta) \sin(\theta) = 0. \quad (3.50)$$

Demostración. Sea $\Phi = \theta + t\phi$ una perturbación con $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ de soporte compacto. Si se evalúa $E[\theta]$ en Φ , ecuación (3.48), y después se deriva con respecto a t se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dE[\Phi]}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d\Phi}{dx_1} \right|^2 dx_1 + \frac{Q}{2} \int_{\mathbb{R}} \cos^2(\Phi) dx_1 \right\} \\ &= \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \left| \frac{d\Phi}{dx_1} \right|^2 dx_1 + \frac{Q}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \cos^2(\Phi) dx_1. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Usando el hecho de que $\Phi = \theta + t\phi$ la ecuación (3.51) queda como

$$\begin{aligned} \frac{dE[\Phi]}{dt} &= \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \left| \frac{d(\theta + t\phi)}{dx_1} \right|^2 dx_1 + \frac{Q}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \cos^2(\theta + t\phi) dx_1 \\ &= \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} |\theta' + t\phi'|^2 dx_1 + \frac{Q}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \cos^2(\theta + t\phi) dx_1 \\ &= d^2 \int_{\mathbb{R}} |\theta' + t\phi'| \phi' dx_1 - Q \int_{\mathbb{R}} \phi \cos(\theta + t\phi) \sin(\theta + t\phi) dx_1. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Si se evalúa la ecuación anterior en $t = 0$ se reduce a

$$\delta E[\theta]\phi = d^2 \int_{\mathbb{R}} \theta' \phi' dx_1 - Q \int_{\mathbb{R}} \phi \cos(\theta) \sin(\theta) dx_1. \quad (3.53)$$

La ecuación (3.53) es entonces la primera variación de la energía $E[\theta]$.

Por último, la ecuación de Euler-Lagrange se obtiene como sigue. Integrando por partes en la integral izquierda de (3.53) se obtiene

$$\delta E[\theta]\phi = d^2 \phi \theta' \Big|_{-\infty}^{+\infty} - d^2 \int_{\mathbb{R}} \phi \theta'' dx_1 - Q \int_{\mathbb{R}} \phi \cos(\theta) \sin(\theta) dx_1. \quad (3.54)$$

Ya que la función $\phi(x_1)$ es de soporte compacto la ecuación (3.54) resulta ser igual a

$$\begin{aligned} \delta E[\theta]\phi &= -d^2 \int_{\mathbb{R}} \phi \theta'' dx_1 - Q \int_{\mathbb{R}} \phi \cos(\theta) \sin(\theta) dx_1 \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \{d^2 \phi \theta'' + Q \phi \cos(\theta) \sin(\theta)\} dx_1 \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \{d^2 \theta'' + Q \cos(\theta) \sin(\theta)\} \phi dx_1, \end{aligned} \quad (3.55)$$

entonces utilizando el Lema fundamental del cálculo de variaciones, Lema 1 Capítulo 2, la ecuación de Euler-Lagrange para $E[\theta]$ resulta estar dada por

$$d^2\theta'' + Q \cos(\theta) \sin(\theta) = 0$$

□

Observación 3. *Observe que si reescalamos la longitud con*

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{Q}}{d}x$$

tenemos que

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{d\bar{x}}{dx} \frac{d\theta}{d\bar{x}} = \frac{\sqrt{Q}}{d} \frac{d\theta}{d\bar{x}} \\ \frac{d^2\theta}{dx^2} &= \frac{Q}{d^2} \frac{d^2\theta}{d\bar{x}^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Usando (3.56) en (3.50) y el hecho de que $Q > 0$ obtenemos

$$\theta'' + \cos(\theta) \sin(\theta) = 0.$$

3.3. Solución para las paredes de 180°

En esta sección vamos a obtener la solución de la ecuación

$$\theta'' + \cos(\theta) \sin(\theta) = 0, \quad (3.57)$$

la cual tiene por condiciones de frontera

$$\theta(-\infty) = \frac{-\pi}{2} \quad \text{y} \quad \theta(+\infty) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.58)$$

Estas condiciones de frontera permiten que la solución tenga un giro en el espacio de 180° (Véase la figura 3.1).

Proposición 3. *La ecuación diferencial*

$$\theta'' + \cos(\theta) \sin(\theta) = 0 \quad (3.59)$$

tiene por solución a

$$\theta(x_1) = \arcsen(\tanh(x_1)) \quad (3.60)$$

para las condiciones de frontera

$$\theta(-\infty) = \frac{-\pi}{2} \quad \text{y} \quad \theta(+\infty) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.61)$$

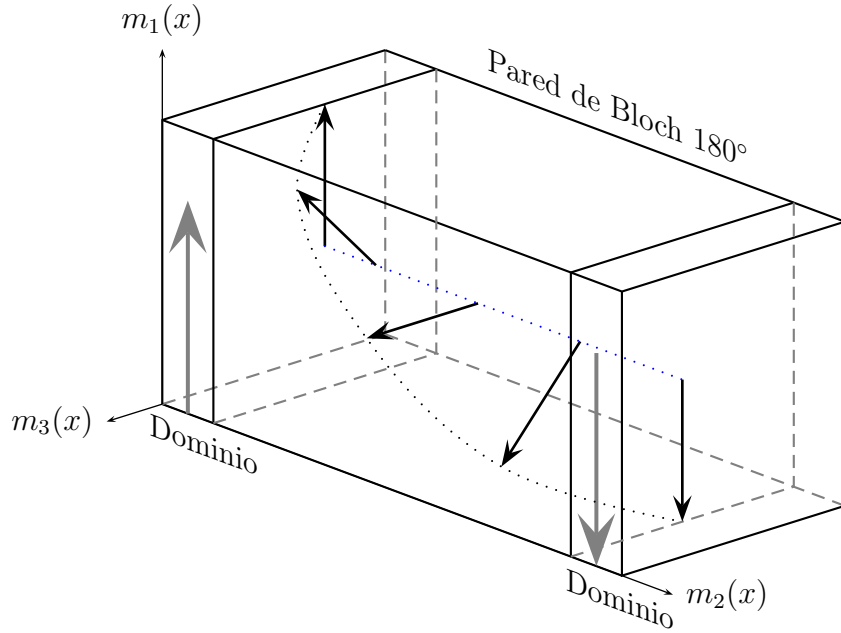


Figura 3.1: Vector de magnetización en el Bulk dando un giro de 180° .

Observación 4. La solución para las paredes de 180° para la magnetización m en términos de x_1 está dada por

$$m = (0, \tanh(x_1), \operatorname{sech}(x_1)) \quad \text{donde } x_1 \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Multiplicando en ambos lados de la ecuación (3.59) por θ' se obtiene

$$\theta''\theta' + \cos(\theta)\sin(\theta)\theta' = 0.$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\theta'^2}{2} + \frac{\sin^2(\theta)}{2} \right\} = 0,$$

de donde se sigue

$$\theta'^2 + \sin^2(\theta) = c. \tag{3.62}$$

Para determinar el valor de la constante c , usamos las condiciones de frontera $\theta_{-\infty} = \frac{-\pi}{2}$ y $\theta'_{-\infty} = 0$ de donde $c = 1$. Entonces

$$\theta'^2 = 1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta),$$

tomando la raíz de ambos lados resulta que

$$\theta' = \pm \cos(\theta),$$

de donde si escogemos el signo positivo obtenemos que

$$\frac{1}{\cos(\theta)} \frac{d\theta}{dx} = 1.$$

Integrando con respecto a x se tiene que existe una constante k tal que

$$\ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| = \int \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{d\theta}{dx} dx = \int dx = x + k.$$

Por lo tanto existe una constante $c > 0$ tal que

$$|\sec(\theta) + \tan(\theta)| = Ce^x.$$

Usando el hecho de que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ tenemos

$$\sec(\theta) = Ce^x \cos(\theta) - 1. \quad (3.63)$$

Sustituyendo en la identidad trigonométrica $\cos^2(\theta) + \sec^2(\theta) = 1$ obtenemos

$$\cos^2(\theta) + (Ce^x \cos(\theta) - 1)^2 = 1.$$

Desarrollando y factorizando resulta

$$\cos^2(\theta)(C^2 e^{2x} + 1) - 2Ce^x \cos(\theta) = 0,$$

Así,

$$\cos(\theta) = \frac{2Ce^x}{(C^2 e^{2x} + 1)}. \quad (3.64)$$

Ahora se determinará el valor de la constante C . Si asumimos que $\theta(0) = 0$, es decir que el centro de la pared se encuentra en $x_1 = 0$, la ecuación anterior queda como

$$1 = \cos(0) = \frac{2Ce^0}{(C^2 e^0 + 1)} = \frac{2C}{(C^2 + 1)}$$

entonces $C = 1$. Por lo tanto

$$\cos(\theta) = \frac{2e^x}{(e^{2x} + 1)} = \frac{2}{(e^x + e^{-x})} = \operatorname{sech}(x). \quad (3.65)$$

Evaluando (3.63) con $C = 1$ y usando la ecuación (3.64) obtendremos obtenemos

$$\begin{aligned}
 \text{sen}(\theta) &= e^x \frac{2e^x}{(e^{2x} + 1)} - 1 \\
 &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\
 &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
 &= \tanh(x).
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

En resumen, se tiene que la solución para la energía $E[\theta]$ ecuación (3.49) con condiciones de frontera (3.61) está dada por

$$\theta(x_1) = \text{arcsen}(\tanh(x_1)) \quad \text{y} \quad m = (0, \tanh(x_1), \text{sech}(x_1)).$$

□

Observación 5. *Se puede evitar todo el cálculo en (3.66) si se usa la identidad trigonométrica $\tanh^2(x) + \text{sech}^2(x) = 1$, junto con la ecuación (3.65). De tal forma que:*

$$\tanh^2(x) = 1 - \text{sech}^2(x) = 1 - \cos^2(\theta) = \text{sen}^2(\theta)$$

entonces

$$\text{sen}(\theta) = \tanh(x).$$

3.4. Solución para las paredes de 360°

En este apartado se mostrará que no existen paredes magnéticas como mínimos de la energía (3.48) con condiciones de frontera

$$\theta(-L) = \frac{-\pi}{2} \quad \text{y} \quad \theta(+L) = \frac{3\pi}{2},$$

donde $L < \infty$ (aunque puede ser arbitrariamente grande).

Las paredes magnéticas que tienen un giro de 360° en el Bulk se verían como en la figura 3.2.

Ya que la energía $E[\theta]$ dada en (3.48) es un modelo en función de la fase θ entonces basta con demostrar que el modelo (3.8) no tiene paredes de 360 grados.

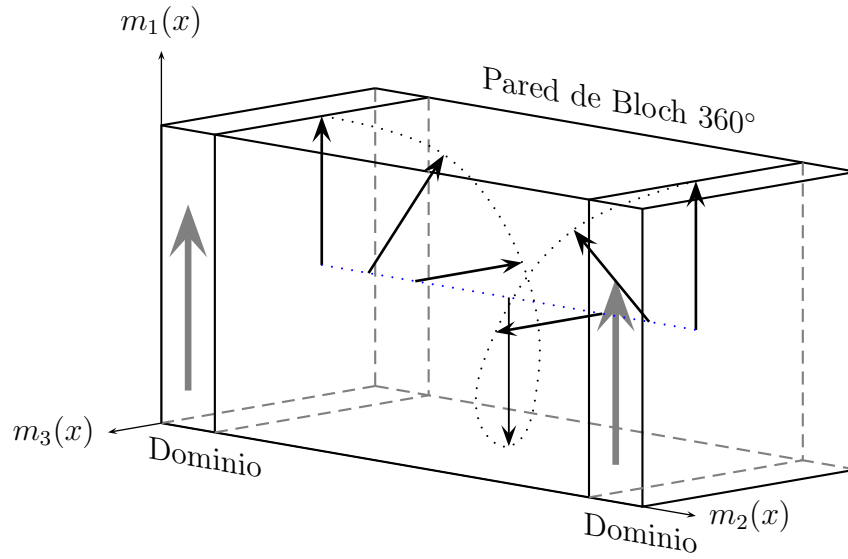


Figura 3.2: Vector de magnetización en el Bulk dando un giro de 360°

Lema 4. *El funcional de energía (3.13) dado por*

$$E[m_3] = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{(m_3')^2}{1 - m_3^2} dx_1 + Q \int_{\mathbb{R}} m_3^2 dx_1. \quad (3.67)$$

no admite paredes de 360°.

Demostración. Por un lado del Lema 2 se sabe que la función (3.25) es convexa. Si se toma $\alpha = \frac{d^2}{2}$, $\beta = 0$ se tiene que

$$\begin{cases} L(m_3', m_3) \geq \alpha |m_3'|^2 + \beta & \text{si } |m_3| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |m_3| = 1 \end{cases}$$

por lo que $L(Dm_3, m_3)$ resulta ser coerciva. Por el Teorema 10 tenemos que existe $m_3 \in \mathcal{A}$ que es el mínimo y por el Teorema 11 tenemos que este mínimo es único.

Por otro lado sabemos que las paredes magnéticas de 360° tienen por condición de frontera a

$$m_3(-L) = m_3(+L) = -1,$$

pero $m_3 \equiv -1$ es una solución para (3.67), por lo que debe de ser la única función que minimiza al funcional.

De lo anterior se concluye que las paredes magnéticas de 360° como mínimos del funcional $E[m_3]$ no existen. \square

Capítulo 4

Estabilidad de paredes en el Bulk.

Este capítulo es, de alguna forma, la continuación del Capítulo 3 sobre el estudio de las paredes de Bloch centrándose en la estabilidad de aquellas funciones que minimizan a la energía micromagnética. Dicha estabilidad indicará que la pared de Bloch será estable hasta translaciones.

4.1. Segunda variación de $E[\theta]$

En esta sección se calcula la segunda variación del funcional $E[\theta]$ dada por

$$E[\theta] = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d\theta}{dx_1} \right|^2 dx_1 + \frac{Q}{2} \int_{\mathbb{R}} \cos^2(\theta) dx_1. \quad (4.1)$$

Lema 5. *La segunda variación de $E[\theta]$, ecuación (4.1), está dada por*

$$\delta^2 E[\theta](\phi, \psi) = d^2 \int_{\mathbb{R}} \phi' \psi' dx_1 + Q \int_{\mathbb{R}} (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) \phi \psi dx_1. \quad (4.2)$$

Demostración. Para reducir los cálculos en la demostración partiremos de la ecuación (3.52), dada en el Lema 3 sección 2.2.1, es decir

$$\frac{dE[\Phi]}{dt} = d^2 \int_{\mathbb{R}} |\theta' + t\phi'| \phi' dx_1 - Q \int_{\mathbb{R}} \cos(\theta + t\phi) \sin(\theta + t\phi) \phi dx_1. \quad (4.3)$$

Para esto recordemos que en ese lema se tomó una perturbación $\Phi = \theta + t\phi$ con $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ de soporte compacto y después se evaluó la derivada de la energía $E[\theta]$

con respecto a t , con lo cual se obtuvo (4.3). Ahora se vuelve a derivar con respecto a t a la ecuación (4.3), por lo que se llega a que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 E[\Phi]}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left\{ d^2 \int_{\mathbb{R}} |\theta' + t\phi'| \phi' dx_1 - Q \int_{\mathbb{R}} \cos(\theta + t\phi) \sin(\theta + t\phi) \phi dx_1 \right\} \\
&= d^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} (|\theta' + t\phi'| \phi') dx_1 \\
&\quad - Q \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} (\cos(\theta + t\phi) \sin(\theta + t\phi)) \phi dx_1 \\
&= d^2 \int_{\mathbb{R}} \phi'^2 dx_1 - Q \int_{\mathbb{R}} (-\sin^2(\theta + t\phi) \phi^2 + \cos^2(\theta + t\phi) \phi^2) dx_1 \\
&= d^2 \int_{\mathbb{R}} (\phi')^2 dx_1 + Q \int_{\mathbb{R}} (\sin^2(\theta + t\phi) - \cos^2(\theta + t\phi)) \phi^2 dx_1. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Si se evalúa en $t = 0$ en (4.4) se obtiene lo siguiente

$$\delta^2 E[\Psi](\phi, \phi) = d^2 \int_{\mathbb{R}} (\phi')^2 dx_1 + Q \int_{\mathbb{R}} \phi^2 (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) dx_1, \quad (4.5)$$

donde la ecuación (4.5) es la segunda variación de (4.1). \square

4.2. Estabilidad lineal en las paredes de 180°

En esta sección se mostrará que las paredes magnéticas de Bloch de 180° descritas por la energía $E[\theta]$ son estables hasta translaciones.

Teorema 12. *Para la energía $E[\theta]$ se tiene que*

$$\delta^2 E[\theta_0](\phi, \phi) \geq 0 \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{\phi \equiv 0\}.$$

donde θ_0 es la solución de la ecuación (3.59) dada por

$$\cos(\theta_0) = \operatorname{sech}(x). \quad (4.6)$$

Observación 6. *Recordemos que*

$$m = (0, \sin(\theta_0), \cos(\theta_0)).$$

Usando que $m_2^2 + m_3^2 = 1$, se obtiene que

$$\sin(\theta_0) = \tanh(x) \quad (4.7)$$

y por lo tanto $\theta_0(0) = 0$ y $\theta_0'(0) > 0$.

La demostración del Teorema 12 está basada en los siguientes dos lemas.

Lema 6. *La segunda variación de $E[\theta_0]$ satisface*

$$\delta^2 E[\theta_0](\phi, \phi) > 0 \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{\phi \equiv 0\} \text{ tal que } \phi(0) = 0.$$

Demostración. Sea $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi(0) = 0$. Si definimos

$$\widehat{\phi} := \phi^2 \cot(\theta_0) \quad \text{entonces} \quad \widehat{\phi}(0) = 0.$$

Sustituyendo $\widehat{\phi}$ en (3.49) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta E[\theta_0](\widehat{\phi}) &= \int_{\mathbb{R}} d^2 \theta'_0 \widehat{\phi}' - Q \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) \widehat{\phi} \, dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} d^2 \theta'_0 (\phi^2 \cot(\theta_0))' - Q \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) \phi^2 \cot(\theta_0) \, dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} d^2 \theta'_0 (\phi^2 \cot(\theta_0))' - Q \cos^2(\theta_0) \phi^2 \, dx_1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como θ_0 es un mínimo se sabe que $\delta E[\theta_0](\widehat{\phi}) = 0$, de donde resulta

$$\int_{\mathbb{R}} d^2 \theta'_0 (\phi^2 \cot(\theta_0))' \, dx_1 = \int_{\mathbb{R}} Q \cos^2(\theta_0) \phi^2 \, dx_1.$$

Sustituyendo la igualdad anterior en la ecuación (4.2) se llega a que

$$\delta^2 E[\theta_0](\phi, \phi) = \int_{\mathbb{R}} d^2 \phi'^2 + Q \phi^2 \sin^2(\theta_0) - d^2 \theta'_0 (\phi^2 \cot(\theta_0))' \, dx_1. \quad (4.9)$$

Desarrollando la derivada del tercer sumando en (4.9) se obtiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} (\phi^2 \cot(\theta_0))' &= 2\phi\phi' \cot(\theta_0) + \phi^2 \left(\frac{-\cos^2(\theta_0) - \sin^2(\theta_0)}{\sin^2(\theta_0)} \right) \theta'_0 \\ &= 2\phi\phi' \cot(\theta_0) + \phi^2 \left(-1 - \frac{\cos^2(\theta_0)}{\sin^2(\theta_0)} \right) \theta'_0 \\ &= 2\phi\phi' \cot(\theta_0) - \phi^2 (1 + \cot^2(\theta_0)) \theta'_0. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.9) y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} \delta^2 E[\theta_0](\phi, \phi) &= \int_{\mathbb{R}} d^2 \phi'^2 + Q \sin^2(\theta_0) \phi^2 - 2d^2 \theta'_0 \phi \phi' \cot(\theta_0) + d^2 \phi^2 \theta_0'^2 \\ &\quad + d^2 \phi^2 \cot^2(\theta_0) \theta_0'^2 \, dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} d^2 \phi^2 \theta_0'^2 + Q \sin^2(\theta_0) \phi^2 + d^2 (\phi' - \phi \cot(\theta_0) \theta_0')^2 \, dx_1. \end{aligned}$$

Como todos los términos de la suma anterior son positivos se puede concluir que

$$\delta^2 E[\theta_0](\phi, \phi) > 0,$$

es decir, la energía $E[\theta_0]$ es estable para toda perturbación tal que $\phi(0) = 0$. \square

Lema 7. *La segunda variación de $E[\theta_0]$ satisface*

$$\delta^2 E[\theta_0](\theta'_0, \phi) = \delta^2 E[\theta_0](\phi, \theta'_0) = 0 \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

donde $\theta'_0 = \text{sech}(x)$.

Demostración. Como la segunda variación es simétrica, es decir

$$\delta^2 E[\theta_0](\phi, \psi) = \delta^2 E[\theta_0](\psi, \phi),$$

basta con demostrar que para $\phi = \theta'_0$ y $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ se satisface que

$$\delta^2 E[\theta_0](\phi, \psi) = 0.$$

Integrando por partes a (4.2), donde se toma

$$V(\theta_0) := \sin^2(\theta_0) - \cos^2(\theta_0)$$

y utilizando la hipótesis de que ψ tiene soporte compacto, nos queda

$$\begin{aligned} \delta^2 E[\theta](\phi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}} d^2 \phi' \psi' + QV(\theta_0) \phi \psi \, dx_1 \\ &= d^2 \phi' \psi|_{-L}^{+L} - \int_{\mathbb{R}} d^2 \psi \phi'' \, dx_1 + \int_{\mathbb{R}} QV(\theta_0) \phi \psi \, dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \{-d^2 \phi'' + QV(\theta_0) \phi\} \psi \, dx_1. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Si derivamos explícitamente la ecuación de Euler-Lagrange (3.50) obtenida para la primera variación de la energía $E[\theta_0]$ se llega a que

$$\frac{d}{dx} \{d^2 \theta_0'' + Q \cos(\theta_0) \sin(\theta_0)\} = d^2 (\theta_0')'' + Q (\cos^2(\theta_0) - \sin^2(\theta_0)) \theta_0' = 0,$$

es decir

$$-d^2 (\theta_0')'' + QV(\theta_0) \theta_0' = 0.$$

Si se sustituye $\theta'_0 = \phi$ entonces se tiene que

$$-d^2\phi'' + QV(\theta_0)\phi = 0, \quad (4.11)$$

por lo que la ecuación (4.10) queda como

$$\delta^2 E[\theta](\phi, \psi) = 0 \quad \text{siempre que} \quad \phi = \theta'_0 \text{ y } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Por último falta demostrar que $\theta'_0 = \text{sech}(x)$, este cálculo se da a continuación. Derivando explícitamente la igualdad (4.6) y usando (4.7) se obtiene que

$$\begin{aligned} -\theta'_0 \sin(\theta_0) &= -\text{sech}(x) \tanh(x) \\ &= -\text{sech}(x) \sin(\theta_0) \end{aligned}$$

por lo que resulta

$$\theta'_0 = \text{sech}(x).$$

□

Observación 7. Decir que $E[\cdot]$ preserva la energía hasta traslaciones significa que para toda t se cumple $E[u(\cdot)] = E[u(\cdot + t)]$, donde t es la traslación. Observe que tomando

$$u(x) = \theta_0(x + t) = \theta_0(x) + t\theta'_0(x) + \mathcal{O}(t^2),$$

podemos aproximar una traslación de θ_0 como

$$\tilde{u}(x) = \theta_0 + t\theta'_0,$$

por el lema anterior se tiene que

$$E[\tilde{u}] = E[\theta_0] + \underbrace{t\delta E[\theta_0](\theta'_0)}_{=0} + \underbrace{t^2\delta^2 E[\theta_0](\theta'_0, \theta'_0)}_{=0} + \mathcal{O}(t^3).$$

Por lo tanto θ'_0 genera las traslaciones de θ_0 a segundo orden en t .

Finalmente demostramos el Teorema 12.

Demostración. Por un lado es claro que el espacio $H^1(\mathbb{R})$ se puede escribir como

$$H^1 = \langle \theta'_0 \rangle \oplus \langle \theta'_0 \rangle^T,$$

donde $\langle \theta'_0 \rangle$ es el espacio generado por θ'_0 y $\langle \theta'_0 \rangle^T$ es su espacio ortogonal en $L^2(\mathbb{R})$.

Por otro lado como el conjunto de funciones en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $H^1(\mathbb{R})$ se puede suponer que todas las funciones tienen soporte compacto. Es decir, basta con demostrar la validez del teorema dada una función $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Sea $u \in C_c^\infty(\Omega)$ y de lo anterior definimos a ϕ como

$$\phi := u - \frac{u(0)}{\theta'_0(0)}\theta'_0,$$

donde $\theta'_0 := \text{sech}(x)$. Observe que $\phi(0) = 0$.

Se tiene que

$$\delta^2 E[\theta_0](\phi, \phi) = \delta^2 E[\theta_0] \left(u - \frac{u(0)}{\theta'_0(0)}\theta'_0, u - \frac{u(0)}{\theta'_0(0)}\theta'_0 \right). \quad (4.12)$$

Si tomamos $\lambda := \frac{u(0)}{\theta'_0(0)}$, aplicando las propiedades de una forma bilineal de la ecuación (4.12) se deduce que

$$\begin{aligned} \delta^2 E[\theta_0](\phi, \phi) &= \delta^2 E[\theta_0](u - \lambda\theta'_0, u) + \delta^2 E[\theta_0](u - \lambda\theta'_0, \lambda\theta'_0) \\ &= \delta^2 E[\theta_0](u, u) - 2\lambda\delta^2 E[\theta_0](\theta'_0, u) + \lambda^2\delta^2 E[\theta_0](\theta'_0, \theta'_0). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Del Lema 7 y la definición de θ'_0 se deduce que

$$\delta^2 E[\theta_0](\theta'_0, \theta'_0) = 0 \quad (4.14)$$

y

$$\delta^2 E[\theta_0](\theta'_0, u) = 0. \quad (4.15)$$

Entonces de (4.14) y (4.15) la igualdad (4.13) queda como

$$\delta^2 E[\theta_0](\phi, \phi) = \delta^2 E[\theta_0](u, u).$$

Usando lo anterior y los Lemas 6 y 7 se llega a que

$$\delta^2 E[\theta_0](u, u) \geq 0,$$

donde la igualdad se da si y sólo si $u = \theta'_0 = \text{sech}(x)$. □

Capítulo 5

Energía en películas delgadas.

En este capítulo se estudian las paredes de Néel en los casos de tener magnetizaciones de 180° o 360° , en materiales con una geometría bidimensional periódica que se asemejan a un plano con un grosor muy pequeño denominado película delgada. Además, se supone una linealización del funcional.

Debido a que el funcional de energía en películas delgadas es no-local se supone la periodicidad del dominio para expresar el problema en términos de la transformada de Fourier, y ya que es convexo se estudiará la existencia de paredes de 180° y 360° como puntos críticos con restricciones (es decir, se usarán multiplicadores de Lagrange).

Por último, se anexa una sección en donde se incluye un estudio numérico de la energía en función de los parámetros d y Q .

5.1. Hipótesis del modelo.

De la introducción se sabe que la energía micromagnética adimensional es

$$E[m] := \frac{d^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{Q}{2} \int_{\Omega} \Phi(m) dx. \quad (5.1)$$

En este capítulo se estudiará el funcional (5.1) utilizando las hipótesis para películas delgadas (véase [2]) las cuales se listan a continuación.

(a) La muestra es una película delgada. Es decir, definimos la geometría de la muestra como $\Omega_\delta := \mathbb{R}^2 \times (0, \delta)$.

(b) La magnetización m es ℓ_1 -periódica en x_1 , es decir

$$m(x_1 + \ell_1, x_2, x_3) = m(x_1, x_2, x_3) \quad \text{para todo } (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_\delta.$$

(c) El sistema es independiente de x_2 .

(d) La magnetización m satisface

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1.$$

(e) Para la anisotropía del material se consideraran dos casos

$$\phi_1(m) = 1 - m_2^2 \quad \text{y} \quad \phi_2(m) = 1 - m_1^2.$$

(f) se supone que $m_3 = 0$.

Una diferencia importante entre las paredes de Bloch y las paredes de Néel es que las paredes de Néel satisfacen la condición (f), en tanto que las de Bloch satisfacen $m_1 = 0$.

Definición 15. *Para simplificar los cálculos introducimos la siguiente notación*

· $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

· $\mathbf{x} := (x, z) \in \mathbb{R}^3$.

· $\mathbf{m}(\mathbf{x}) := m(x)\mathcal{X}_{(0,\delta)}(z)$, donde

$$\mathcal{X}_{(0,\delta)}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in (0, \delta) \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} - (0, \delta). \end{cases}$$

Recordamos que la función u de (5.1) satisface

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= \nabla \cdot \mathbf{m} & \text{en } \Omega_\delta, \\ \Delta u &= 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 - \Omega_\delta, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \mathbf{m} \cdot \nu & \text{sobre } \partial\Omega_\delta. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

o equivalentemente por las ecuaciones de Maxwell

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times H &= 0, \\ \nabla \cdot H &= \nabla \cdot \mathbf{m}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

5.1.1. Reducción del stray-field

En esta sección vamos a reducir la segunda integral de la energía $E[m]$, ecuación (5.1), con ayuda de las hipótesis dadas en la sección anterior. Esto con el objetivo de simplificar la energía $E[m]$ y poder encontrar algún mínimo para este funcional. Esta reducción es un caso particular para las paredes de Néel y para la reducción de la energía se siguieron los pasos dados en [2].

Observación 8. *Por las hipótesis (b) y (c) de la sección anterior la definición de la geometría de la muestra, inciso (a), se reduce a*

$$\tilde{\Omega}_\delta := (0, \ell_1) \times (0, \ell_2) \times \mathbb{R},$$

es decir trabajaremos en una celda periódica, donde ℓ_2 es cualquier longitud finita. También, la notación de la Definición 15 cambia a

- $x := (x_1, x_2) \in (0, \ell_1) \times (0, \ell_2)$.
- $\mathbf{x} := (x, z) \in (0, \ell_1) \times (0, \ell_2) \times \mathbb{R}$.
- $\mathbf{m}(\mathbf{x}) := m_1(x)\mathcal{X}_{(0,\delta)}(z)$, donde

$$\mathcal{X}_{(0,\delta)}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in (0, \delta) \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} - (0, \delta). \end{cases}$$

Dado que el sistema es independiente de x_2 consideramos la energía en un dominio periódico $\tilde{\Omega}_\delta$. Además tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} |\nabla u|^2 \int_0^{\ell_2} dx_2 dx_1 dz \\ &= \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} |\nabla u|^2 dx_1 dz. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Como $\tilde{\Omega}_\delta$ es periódico resulta natural usar una representación del stray-field en términos de series y transformadas de Fourier. Para esto necesitamos la siguiente definición.

Definición 16. *Se define la transformada¹ parcialmente discreta de Fourier para $(x_1, z) \in (0, \ell_1) \times \mathbb{R}$ como*

$$F[f](\xi_n, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell_1}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} f(x_1, z) e^{-i(\xi_n x_1 + \eta z)} dx_1 dz,$$

¹Mapeo que manda las coordenadas $(x_1, z) \rightarrow (\xi_n, \eta)$,

para todo

$$\xi_n = \frac{2\pi}{\ell_1} n,$$

con $n \in \mathbb{Z}$ y $\eta \in \mathbb{R}$.

Se usará indistintamente la notación

$$\widehat{f}(\xi_n, \eta) = F[f](\xi_n, \eta)$$

para la transformada de una función f . Además, si $g = g(x_1)$ entonces definimos

$$\widehat{g}(n) := F[g](\xi_n, 0)$$

y si $h = h(z)$ entonces

$$\widehat{h}(n) := F[h](0, \eta).$$

La siguiente proposición contiene el resultado principal de esta sección.

Proposición 4. Dada $\mathbf{m} \in H^1(\widetilde{\Omega}_\delta)$ y bajo las hipótesis (b), (c), (d) y (f) se tiene que

$$\frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} |\nabla u|^2 dx_1 dz \approx \frac{\delta \ell_2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n| |\widehat{m}_1(n)|^2, \quad (5.5)$$

para

$$0 < \delta \ll 1$$

donde $\widehat{m}_1(n) := F[m_1](n, 0)$.

Para demostrar la proposición anterior es necesario el siguiente resultado.

Proposición 5. Dada una función $\mathbf{m}(\mathbf{x}) \in H^1(\widetilde{\Omega}_\delta)$ tal que cumple las hipótesis (b), (c) y (f) entonces se deduce que

$$\frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} |\nabla u|^2 dx_1 dz = -\frac{\ell_2}{2} \int_0^\delta \int_0^{\ell_1} (\partial_1 u) m_1 dx_1 dz. \quad (5.6)$$

Demostración. Sea $\widetilde{\phi} \in C_c^\infty(\widetilde{\Omega}_\delta)$. Asumiendo que $u = \widetilde{\phi}$ se obtiene que $|\nabla u|^2 = \nabla \widetilde{\phi} \cdot \nabla u$ y de las ecuaciones en (5.3) se obtiene que $\nabla \widetilde{\phi} = -H$. Por lo anterior la ecuación (5.4) queda como

$$\begin{aligned} \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} \nabla \widetilde{\phi} \cdot \nabla u dx_1 dz &= -\frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} (\nabla \widetilde{\phi}) \cdot H dx_1 dz \\ &= \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} \widetilde{\phi} \cdot (\nabla \cdot H) dx_1 dz, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde la última igualdad se obtuvo integrando por partes y usando el hecho que ϕ tiene soporte compacto.

Usando la igualdad $\nabla \cdot H = \nabla \cdot \mathbf{m}$ en la ecuación (5.7) nos queda que

$$\begin{aligned}
\frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} \tilde{\phi}(\nabla \cdot H) dx_1 dz &= \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} \tilde{\phi}(\nabla \cdot \mathbf{m}) dx_1 dz \\
&= \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} \tilde{\phi}_1(\partial_1(m_1)\mathcal{X}_{(0,\delta)}(z)) dx_1 dz \\
&= \frac{\ell_2}{2} \int_0^{\delta} \int_0^{\ell_1} \tilde{\phi}_1(\partial_1 m_1) dx_1 dz \\
&= -\frac{\ell_2}{2} \int_0^{\delta} \int_0^{\ell_1} (\partial_1 \tilde{\phi}_1) m_1 dx_1 dz, \tag{5.8}
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtuvo integrando por partes y utilizando el hecho de que $\tilde{\phi}$ tiene soporte compacto.

Por último combinando las ecuaciones (5.7) y (5.8) y sustituyendo $\tilde{\phi} = u$, por aproximación, se llega a que

$$\frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} |\nabla u|^2 dx_1 dz = -\frac{\ell_2}{2} \int_0^{\delta} \int_0^{\ell_1} (\partial_1 u) m_1 dx_1 dz.$$

□

Con ayuda del resultado anterior se podrá demostrar la Proposición 4.

Demostración. Primero necesitamos obtener las transformadas de Fourier de \mathbf{m} y u , para esto le aplicamos la transformada a $\Delta u = \nabla \cdot \mathbf{m}$. Por un lado se obtiene que

$$\begin{aligned}
F[\nabla \cdot \mathbf{m}] &= F[(\partial_1(m_1\mathcal{X}_{(0,\delta)}(z)) + \underbrace{\partial_2(m_2\mathcal{X}_{(0,\delta)}(z))}_{(c)=0} + \partial_3(\underbrace{m_3}_{(f)=0}\mathcal{X}_{(0,\delta)}(z))] \\
&= F[\partial_1 m_1 \mathcal{X}_{(0,\delta)}(z)], \tag{5.9}
\end{aligned}$$

desarrollando la última ecuación se llega a

$$\begin{aligned}
F[\partial_1 m_1 \mathcal{X}_{(0,\delta)}(z)](\xi_n, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell_1}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} \partial_1 m_1(x_1) \mathcal{X}_{(0,\delta)}(z) e^{-i(\xi_n x + \eta z)} dx_1 dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell_1}} \int_0^{\ell_1} \partial_1 m_1(x_1) e^{-i\xi_n x} dx_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{(0,\delta)}(z) e^{-i\eta z} dz \\
&= -i\xi_n \hat{m}_1(n) \hat{\mathcal{X}}_{(0,\delta)}(\eta). \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Por otro lado se deduce que

$$\begin{aligned} F[\Delta u](\xi_n, \eta) &= (-i\xi_n)^2 \widehat{u}(\xi_n, \eta) + (-i\eta)^2 \widehat{u}(\xi_n, \eta) \\ &= -(\xi_n^2 + \eta^2) \widehat{u}(\xi_n, \eta). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Entonces, de las ecuaciones (5.10) y (5.11) resulta que

$$\widehat{u}(\xi_n, \eta) = \frac{i\xi_n \widehat{m}_1(n) \widehat{\mathcal{X}}_{(0,\delta)}(\eta)}{\xi_n^2 + \eta^2}. \quad (5.12)$$

Usando la Proposición 5 e integración por partes se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} |\nabla u|^2 dx_1 dz &= -\frac{\ell_2}{2} \int_0^{\delta} \int_0^{\ell_1} (\partial_1 u) m_1 dx_1 dz \\ &= \frac{\ell_2}{2} \int_0^{\delta} \int_0^{\ell_1} u (\partial_1 m_1) dx_1 dz \\ &= \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} u (\partial_1 m_1) \mathcal{X}_{(0,\delta)}(z) dx_1 dz. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Parseval y la definición de transformada de Fourier discreta, la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} |\nabla u|^2 dx_1 dz &= \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{u}(\xi_n, \eta) (\widehat{\partial_1 m_1 \mathcal{X}_{(0,\delta)}}(\xi_n, \eta)) d\eta \\ &= \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{u}(\xi_n, \eta) (\widehat{\partial_1 m_1}(n) \widehat{\mathcal{X}}_{(0,\delta)}(\eta)) d\eta. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Sustituyendo las ecuación (5.12) en la igualdad (5.13) y desarrollando la transformada $\widehat{\partial_1 m_1}(n)$ se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} |\nabla u|^2 dx_1 dz &= \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{i\xi_n \widehat{m}_1(n) \widehat{\mathcal{X}}_{(0,\delta)}(\eta)}{\xi_n^2 + \eta^2} \right) (-i)(\xi_n \widehat{m}_1(n) \widehat{\mathcal{X}}_{(0,\delta)}(\eta)) d\eta \\ &= \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\xi_n^2 \widehat{m}_1^2(n)}{\xi_n^2 + \eta^2} \right) \widehat{\mathcal{X}}_{(0,\delta)}^2(\eta) d\eta \\ &= \frac{\ell_2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{m}_1(n)|^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi_n^2}{\xi_n^2 + \eta^2} |\widehat{\mathcal{X}}_{(0,\delta)}(\eta)|^2 d\eta \end{aligned} \quad (5.14)$$

en la última igualdad se usa el Teorema de Fubini.

Calculando $\widehat{\mathcal{X}}_{(0,\delta)}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{X}}_{(0,\delta)}(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{(0,\delta)}(z) e^{-i\eta z} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\delta e^{-i\eta z} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{\sin(\delta\eta)}{\eta} + i \left(\frac{\cos(\delta\eta)}{\eta} - \frac{1}{\eta} \right) \right\}.\end{aligned}$$

La igualdad anterior implica que

$$\begin{aligned}|\widehat{\mathcal{X}}_{(0,\delta)}(\eta)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin^2(\delta\eta)}{\eta^2} + \left(\frac{\cos(\delta\eta)}{\eta} - \frac{1}{\eta} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\eta^2} - \frac{2\cos(\delta\eta)}{\eta^2} + \frac{1}{\eta^2} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi\eta^2} \left\{ \frac{1 - \cos(\delta\eta)}{2} \right\} \\ &= \frac{2 \sin^2(\frac{\delta\eta}{2})}{\pi \eta^2}\end{aligned}\tag{5.15}$$

Entonces usando la ecuación (5.15) en (5.14) resulta que

$$\begin{aligned}\frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} |\nabla u|^2 dx_1 dz &= \frac{\ell_2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{m}_1(n)|^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi_n^2}{\xi_n^2 + \eta^2} \left(\frac{2 \sin^2(\frac{\delta\eta}{2})}{\pi \eta^2} \right) d\eta \\ &= \frac{\ell_2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{m}_1(n)|^2 \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi_n^2 \sin^2(\frac{\delta\eta}{2})}{(\xi_n^2 + \eta^2)\eta^2} d\eta.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Basta con desarrollar la integral del lado derecho. Esta integral, véase [13], es igual a

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi_n^2 \sin^2(\frac{\delta\eta}{2})}{(\xi_n^2 + \eta^2)\eta^2} d\eta &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\sin^2(\frac{\delta\eta}{2})}{\eta^2} - \frac{\sin^2(\frac{\delta\eta}{2})}{\xi_n^2 + \eta^2} \right\} d\eta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\frac{\delta\eta}{2})}{\eta^2} d\eta - \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\frac{\delta\eta}{2})}{\xi_n^2 + \eta^2} d\eta\end{aligned}\tag{5.17}$$

Para la primera integral se utiliza la igualdad (5.15) y el Teorema de Parseval de donde

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\frac{\delta\eta}{2})}{\eta^2} d\eta &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{\delta\eta}{2})}{\eta} \right)^2 d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{X}}_{(0,\delta)}(\eta)|^2 d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{(0,\delta)}^2(z) dz = \delta.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Para la segunda integral, usamos el cambio de variable $\eta = |\xi_n|\tau$ y se usa la identidad trigonométrica

$$\sin^2\left(\frac{\delta\eta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\delta\eta)}{2}.$$

Al desarrollando la integral resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\frac{\delta\eta}{2})}{\xi_n^2 + \eta^2} d\eta &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(\delta\eta)}{2(\xi_n^2 + \eta^2)} d\eta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi_n^2 + \eta^2} d\eta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\delta\eta)}{\xi_n^2 + \eta^2} d\eta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi_n|}{\xi_n^2 + \xi_n^2\tau^2} d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi_n| \cos(\delta|\xi_n|\tau)}{\xi_n^2 + \xi_n^2\tau^2} d\tau \\
&= \frac{1}{\pi|\xi_n|} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \tau^2} d\tau - \frac{1}{\pi|\xi_n|} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\delta|\xi_n|\tau)}{1 + \tau^2} d\tau.
\end{aligned}$$

La solución para la primer integral en el lado derecho de la igualdad anterior es

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \tau^2} d\tau &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \tau^2} d\tau \\
&= \lim_{a \rightarrow +\infty} 2 \int_0^a \frac{1}{1 + \tau^2} d\tau \\
&= 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} (\tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(0)) = \pi.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Para resolver la segunda integral observamos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\delta|\xi_n|\tau)}{1 + \tau^2} d\tau = \mathbf{Re}F[g(\omega)], \tag{5.20}$$

es decir, la integral es la parte real de la transformada de Fourier de la función g donde

$$g(\tau) := \frac{1}{1 + \tau^2}$$

Sabemos que la transformada de Fourier de la función g está dada por

$$F[g](\omega) := \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-i\omega x} dx. \quad (5.21)$$

Por la Proposición 11 en el Apéndice para evaluar la integral 5.21 es necesario encontrar los residuos en los polos simples. El único polo de la función g en el dominio

$$H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$$

es $\tau = i$ y es simple por que

$$\lim_{\tau \rightarrow i} (\tau - i)g(\tau)e^{-i\omega\tau} = \frac{e^\omega}{2i}.$$

Además, se tiene que el residuo de g en τ_0 está dado por

$$b_1 = \frac{e^\omega}{2i}.$$

Por lo tanto la ecuación 5.21 está dada por

$$\int_{\mathbb{R}} g(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau = 2\pi i b_1.$$

Como sólo necesitamos la parte real de la transformada de Fourier de g entonces la ecuación (5.20) es igual a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2\delta|\xi_n|\tau)}{1 + \tau^2} d\tau = \mathbf{Re}(2\pi i b_1) = \pi e^\omega \quad (5.22)$$

donde $\omega = \delta|\xi_n|$.

De (5.19) y (5.22) la ecuación (5.17) queda como

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\frac{\delta}{2}\eta)}{\xi_n^2 + \eta^2} d\eta &= \frac{1}{\pi|\xi_n|} \{\pi - \pi e^\omega\} \\ &= \frac{1}{|\xi_n|} (1 - e^{-\delta|\xi_n|}). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Finalmente usando lo obtenido de (5.17), (5.18) y (5.23) en la ecuación (5.16) nos queda que

$$\begin{aligned} \frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} |\nabla u|^2 dx_1 dz &= \frac{\ell_2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{m}_1(n)|^2 \left(\delta - \frac{1 - e^{-\delta|\xi_n|}}{|\xi_n|} \right) \\ &= \frac{\delta \ell_2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{m}_1(n)|^2 \left(1 - \frac{1 - e^{-\delta|\xi_n|}}{\delta|\xi_n|} \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ahora definimos la función

$$\sigma(\delta|\xi_n|) := 1 - \frac{1 - e^{-\delta|\xi_n|}}{\delta|\xi_n|}.$$

Observe que la función σ satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} \sigma(\delta|\xi_n|) &= 1 - \frac{1 - \{1 + (-\delta|\xi_n|) + \frac{(-\delta|\xi_n|)^2}{2!} + \dots\}}{\delta|\xi_n|} \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2}\delta|\xi_n| + \dots \\ &= \frac{1}{2}\delta|\xi_n| + \mathcal{O}(\delta^2\xi_n^2), \end{aligned}$$

donde \mathcal{O} satisface que

$$|\mathcal{O}(\delta^2\xi_n^2)| \leq C|\delta^2\xi_n^2|$$

cuando $\delta \rightarrow 0$.

Por lo anterior, si se toma $\delta \ll 1$ la ecuación (5.24) se reduce a

$$\frac{\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} |\nabla u|^2 dx_1 dz \approx \frac{\delta \ell_2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi_n| |\widehat{m}_1(n)|^2.$$

□

Observación 9. Para facilitar la notación se hace el siguiente reescalamiento

$$E[m] \rightarrow \frac{1}{\ell_2 \delta} E[m].$$

De donde la expresión en (5.5) se reduce a

$$\frac{\delta \ell_2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi_n| |\widehat{m}_1(n)|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi_n| |\widehat{m}_1(n)|^2.$$

5.1.2. Reducción del Exchange.

En esta subsección se encuentra la reducción de la energía que está en función del campo de magnetización, el cual en la literatura es denominado «Exchange». La siguiente proposición relaja la energía de la primer integral en (5.1), de esta forma se evita la no linealidad de $E[m]$.

Observación 10. *Bajo las hipótesis del modelo podemos deducir que*

$$\begin{aligned} |\nabla \mathbf{m}|^2 &= |m'_1 \mathcal{X}_{(0,\delta)}(z)|^2 + |m'_2 \mathcal{X}_{(0,\delta)}(z)|^2 + \underbrace{|m'_3 \mathcal{X}_{(0,\delta)}(z)|^2}_{=0} \\ &= \frac{(m'_1)^2}{1 - m_1^2} |\mathcal{X}_{(0,\delta)}(z)|^2, \end{aligned}$$

observe que se usó una deducción similar a la ecuación (3.11) del Capítulo 2.

Proposición 6. *Dada una función $\mathbf{m} \in \tilde{\Omega}_\delta$ que satisface las hipótesis (b), (c), (d) y (f) entonces se cumple que*

$$\frac{d^2}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} |\nabla \mathbf{m}|^2 d\mathbf{x} \geq \frac{\ell_2 \delta d^2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi_n|^2 |\hat{m}_1(n)|^2. \quad (5.25)$$

Demostración. Sea $\mathbf{m} \in \tilde{\Omega}_\delta$. De las hipótesis y de la Observación 10 se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} |\nabla \mathbf{m}|^2 d\mathbf{x} &= \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} |\nabla \mathbf{m}|^2 \int_0^{\ell_2} dx_2 dx_1 dz \\ &= \frac{\ell_2 d^2}{2} \int_0^\delta \int_0^{\ell_1} \frac{(m'_1)^2}{1 - m_1^2} dx_1 dz \\ &= \frac{\ell_2 \delta d^2}{2} \int_0^{\ell_1} \frac{(m'_1)^2}{1 - m_1^2} dx_1. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Si suponemos que $|m_1| \leq 1$, se puede deducir la siguiente estimación

$$\int_0^{\ell_1} \frac{(m'_1)^2}{1 - m_1^2} dx_1 \geq \int_0^{\ell_1} (m'_1)^2 dx_1.$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (5.26) se obtiene

$$\frac{d^2}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} |\nabla \mathbf{m}|^2 d\mathbf{x} \geq \frac{\ell_2 \delta d^2}{2} \int_0^{\ell_1} (m'_1)^2 dx_1.$$

Por último, por la identidad de Parseval se llega a que

$$\frac{d^2}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} |\nabla \mathbf{m}|^2 d\mathbf{x} \geq \frac{\ell_2 \delta d^2}{2} \int_0^{\ell_1} |\widehat{m}_1(n)|^2 dx_1 = \frac{\ell_2 \delta d^2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi_n|^2 |\widehat{m}_1(n)|^2.$$

□

Observación 11. Para facilitar la notación se hace el siguiente reescalamiento

$$E[m] \rightarrow \frac{1}{\ell_2 \delta} E[m].$$

De donde la integral (5.25) se reduce a

$$\frac{\ell_2 \delta d^2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi_n|^2 |\widehat{m}_1(n)|^2 \rightarrow \frac{d^2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi_n|^2 |\widehat{m}_1(n)|^2.$$

5.1.3. Reducción de la anisotropía.

En la siguiente subsección tenemos la proposición que contiene la reducción de la anisotropía, dicha reducción resulta ser una suma de coeficientes de Fourier. Esta anisotropía es la última integral de la ecuación (5.1), supondremos que $\phi = \phi_1(\mathbf{m})$ definida en la hipótesis (e).

Proposición 7. Dada una función $\mathbf{m} \in \tilde{\Omega}_\delta = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2) \times (0, \delta)$ que satisface las hipótesis (b) a (f), con $\phi_1(\mathbf{m}) = (1 - m_2^2) \mathcal{X}_{(0, \delta)}^2(z)$, entonces se obtiene que

$$\frac{Q}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} \Phi(\mathbf{m}) d\mathbf{x} = \frac{Q \ell_2 \delta}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{m}_1(n)|^2. \quad (5.27)$$

Demostración. Sea $\mathbf{m} \in \tilde{\Omega}_\delta$. Por la hipótesis (c) se tiene que

$$\frac{Q}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} \Phi(\mathbf{m}) d\mathbf{x} = \frac{Q \ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} (1 - m_2^2) \mathcal{X}_{(0, \delta)}^2(z) dx_1 dz,$$

por la hipótesis (d) y (f) se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} \Phi(\mathbf{m}) d\mathbf{x} &= \frac{Q \ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} m_1^2 \mathcal{X}_{(0, \delta)}^2(z) dx_1 dz \\ &= \frac{Q \ell_2}{2} \int_0^{\ell_1} m_1^2 dx_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{(0, \delta)}^2(z) dz \\ &= \frac{Q \ell_2 \delta}{2} \int_0^{\ell_1} m_1^2 dx_1 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Aplicando Parseval a la ecuación (5.28) se obtiene que

$$\frac{Q}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} \Phi(\mathbf{m}) \, d\mathbf{x} = \frac{Q\ell_2\delta}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{m}_1(n)|^2, \quad (5.29)$$

lo que finaliza la demostración. \square

Observación 12. *Para facilitar la notación se hace el siguiente reescalamiento*

$$E[m] \rightarrow \frac{1}{\ell_2\delta} E[m].$$

De donde la integral en (5.27) se reduce a

$$\frac{Q\ell_2\delta}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{m}_1(n)|^2 \rightarrow \frac{Q}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{m}_1(n)|^2.$$

En el caso de tomar la anisotropía $\phi = \phi_2$, de la hipótesis (e), la integral en (5.1) estará dada por la siguiente proposición.

Proposición 8. *Dada una función $\mathbf{m} \in \tilde{\Omega}_\delta$ que satisface las hipótesis (c) a (e), con la anisotropía $\phi_2(\mathbf{m}) = (1 - m_1^2)\mathcal{X}_{(0,\delta)}^2(z)$, entonces*

$$\frac{Q}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} \Phi(\mathbf{m}) \, d\mathbf{x} = \frac{Q\ell_2}{2} \left(\ell_1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{m}_1(n)|^2 \right). \quad (5.30)$$

Demostración. Sea $\mathbf{m} \in \tilde{\Omega}_\delta$. De la hipótesis (c) y (e) se tiene que

$$\frac{Q}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} \Phi(\mathbf{m}) \, d\mathbf{x} = \frac{Q\ell_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} (1 - m_1^2)\mathcal{X}_{(0,\delta)}^2(z) \, dx_1 dz,$$

desarrollando lo anterior nos queda que

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} \Phi(\mathbf{m}) \, d\mathbf{x} &= \frac{Q\ell_2}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} \mathcal{X}_{(0,\delta)}^2(z) dx_1 dz - \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\ell_1} m_1^2 \mathcal{X}_{(0,\delta)}^2(z) dx_1 dz \right) \\ &= \frac{Q\ell_2}{2} \left(\int_0^{\ell_1} dx_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{(0,\delta)}^2(z) dz - \int_0^{\ell_1} m_1^2 dx_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{(0,\delta)}^2(z) dz \right) \\ &= \frac{Q\ell_2\delta}{2} \left(\ell_1 - \int_0^{\ell_1} m_1^2 dx_1 \right). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Aplicando el teorema de Parseval a (5.31) y recordando que $\xi_n = \frac{\pi}{2\ell_1}n$ se llega a

$$\frac{Q}{2} \int_{\tilde{\Omega}_\delta} \Phi(\mathbf{m}) \, d\mathbf{x} = \frac{Q\ell_2\delta}{2} \left(\ell_1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{m}_1(n)|^2 \right). \quad (5.32)$$

□

Observación 13. *Al igual que en la observación anterior, para facilitar la notación se hace el siguiente reescalamiento*

$$E[m] \rightarrow \frac{1}{\ell_2\delta} E[m].$$

De donde la integral en (5.30) se reduce a

$$\frac{Q\ell_2\delta}{2} \left(\ell_1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{m}_1(n)|^2 \right) \rightarrow \frac{Q}{2} \left(\ell_1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{m}_1(n)|^2 \right).$$

Notemos que de las Observaciones 9, 11 y 12 se obtiene que la energía (5.1) se puede escribir para la anisotropía $\phi = \phi_1(\mathbf{m})$, hipótesis (e), como

$$\tilde{E}_1[\hat{m}_1] = \frac{d^2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi_n|^2 |\hat{m}_1(n)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi_n| |\hat{m}_1(n)|^2 + \frac{Q}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{m}_1(n)|^2. \quad (5.33)$$

Observación 14. *La energía \tilde{E}_1 , ecuación (5.33), se puede representar en términos de x_1 como*

$$\tilde{E}_1(m_1) = \frac{d^2}{2} \int_0^{\ell_1} \left| \frac{d}{dx_1} m_1 \right|^2 dx_1 + \int_0^{\ell_1} \left| \frac{d}{dx_1} \right|^{\frac{1}{2}} m_1 \right|^2 dx_1 + Q \int_0^{\ell_1} |m_1|^2,$$

lo que pone de manifiesto el término no-local de la energía.

Al igual que en capítulos anteriores podemos hacer un reescalamiento a la energía (5.33), es decir

$$\tilde{E}_1 \rightarrow \frac{\tilde{E}_1}{Q}.$$

Usando el cambio de variable

$$\xi_n \rightarrow Q\xi_n,$$

se obtiene

$$\tilde{E}_1[\hat{m}_1] = \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \{ \epsilon |\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1 \} |\hat{m}_1(n)|^2 \right) \quad (5.34)$$

donde

$$\epsilon := d^2 Q. \quad (5.35)$$

Para la anisotropía $\phi = \phi_2(\mathbf{m})$ y bajo el mismo rescalamiento se tiene que la energía está dada por

$$\tilde{E}_2[\hat{m}_1] := \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \{ \epsilon |\xi_n|^2 + |\xi_n| - 1 \} |\hat{m}_1(n)|^2 + \ell_1 \right) \quad (5.36)$$

con

$$\epsilon := d^2 Q.$$

Observación 15. *El funcional $\tilde{E}_1(\tilde{m}_1)$ es convexo y tiene sólo un mínimo en $m_1 \equiv 0$. En efecto, como*

$$\tilde{E}_1(m_1) \geq 0 \quad \text{para todo } m_1 \quad \text{y} \quad \tilde{E}_1(0) = 0$$

se tiene que $m_1 = 0$ es un mínimo. Para facilitar la notación definimos

$$P(\xi_n) := \epsilon |\xi_n|^2 + |\xi_n| - 1.$$

Entonces, si \hat{m}_1 y $\hat{m}_{1'}$ son soluciones de \tilde{E} y $t \in [0, 1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} & t\tilde{E}_1(\hat{m}_1) + (1-t)\tilde{E}_1(\hat{m}_{1'}) - \tilde{E}_1(t\hat{m}_1 + (1-t)\hat{m}_{1'}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(\xi_n) |t\hat{m}_1 + (1-t)\hat{m}_{1'}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(\xi_n) \{ t|\hat{m}_1|^2 + (1-t)|\hat{m}_{1'}|^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(\xi_n) \{ |\hat{m}_1|^2(t-t^2) + |\hat{m}_{1'}|^2(t-t^2) - 2(t-t^2)\hat{m}_1\hat{m}_{1'} \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(\xi_n) \{ (t-t^2)(\hat{m}_1 - \hat{m}_{1'})^2 \} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto \tilde{E}_1 es convexo y su mínimo en $m_1 = 0$ es único.

5.2. Paredes de Néel de 360°

De la sección anterior el mínimo del funcional de energía es único. Por lo tanto si este funcional admite paredes de 360° éstas serán representadas por puntos críticos del funcional de energía. Para calcular dichos puntos críticos impondremos una serie de condiciones que fueren a que el sistema tome la configuración de una pared de 360° , como se muestra en la figura 5.1. Comenzaremos tomando en cuenta la anisotropía $\phi_1(\mathbf{m})$, hipótesis (e), de donde se obtiene la energía \tilde{E}_1 ecuación (5.33).

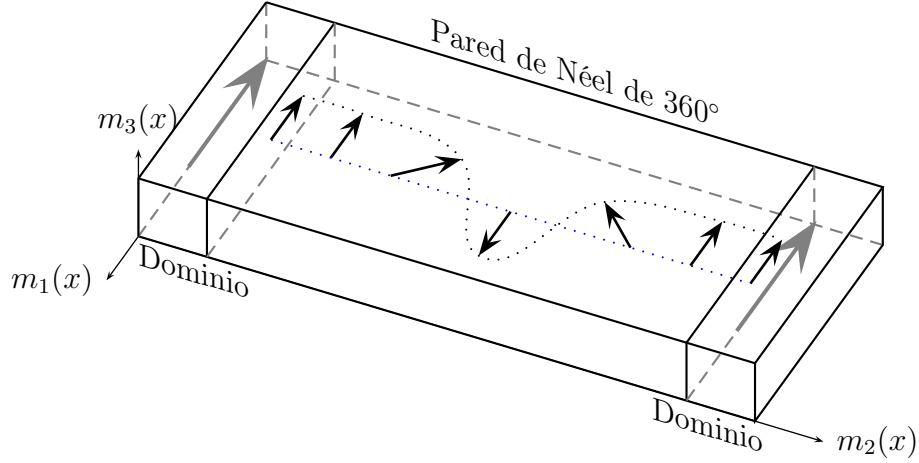


Figura 5.1: Pared de Néel 360° .

Sea la geometría del material

$$\Omega := [-\ell_1, \ell_1],$$

con condiciones para la magnetización para la pared de Néel de 360° dadas por

$$\left. \begin{aligned} m_1(-\ell_1) &= -1, \\ m_1(\ell_1) &= -1, \\ m_1(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

A continuación mostramos que bajo las condiciones anteriores si existe la pared de Néel de 360° entonces tendrá una transición como la que se observa en la figura 5.2.

El mínimo de

$$\tilde{E}_1[\hat{m}_1] = \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \{ \epsilon |\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1 \} |\hat{m}_1(n)|^2 \right) \quad (5.38)$$

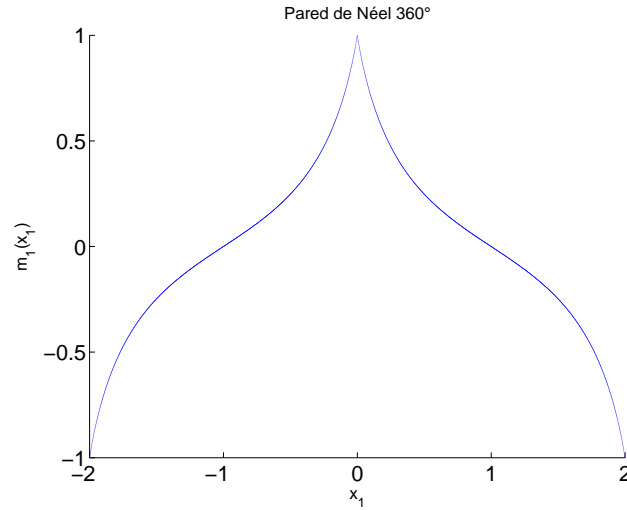


Figura 5.2: Gráfica de la pared de Néel de 360°. El eje horizontal es el dominio periódico de la variable x_1 , el eje horizontal es la magnitud de la transición de la magnetización.

se obtendrá usando el método de multiplicadores de Lagrange para la condición $m_1(0) = 1$, la cual se puede expresar como suma de los coeficientes de Fourier. Dado que²

$$m_1(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{m}_1(n) e^{i0\xi_n}$$

la restricción para el multiplicador de Lagrange queda dada por

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{m}_1(n) = 1. \quad (5.39)$$

De lo anterior la ecuación que hay que minimizar es

$$\tilde{E}_1[\hat{m}_1] + \lambda \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{m}_1(n) - 1 \right). \quad (5.40)$$

Sea $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ una función de prueba con soporte compacto, de la Definición 16 se obtiene

$$\hat{\phi}(n) = F[\phi](n, 0). \quad (5.41)$$

²Se toma al conjunto de los enteros como $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$.

Si se sustituye $\Phi(t) := \widehat{m}_1(n) + t\widehat{\phi}(n)$ en (5.40) se obtiene

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_1[\Phi(t)] - \lambda(\Phi(t) - 1) &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1)\Phi^2(t)\} \\ &\quad + \lambda \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(t) - 1 \right). \end{aligned}$$

Derivando con respecto a t nos queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\widetilde{E}_1[\Phi(t)] - \lambda(\Phi(t) - 1) \right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ (\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1) \left(\widehat{m}_1(n) + t\widehat{\phi}(n) \right) \widehat{\phi}(n) \right\} \\ &\quad + \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}(n). \end{aligned}$$

Al sustituir $t = 0$ se obtiene la primera variación de \widetilde{E} , es decir,

$$\begin{aligned} \delta^1 \left(\widetilde{E}_1[\widehat{m}_1] - \lambda(\widehat{m}_1) \right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ (\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1) \widehat{m}_1(n) \widehat{\phi}(n) \right\} + \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}(n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ (\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1) \widehat{m}_1(n) + \lambda \right\} \widehat{\phi}(n). \end{aligned} \quad (5.42)$$

El punto crítico se deduce al suponer que

$$\delta^1 \left(\widetilde{E}_1[\widehat{m}_1] - \lambda(\widehat{m}_1) \right) = 0.$$

Si también suponemos que la transición de la pared es una función par, usando la transformada de Fourier nos queda que

$$|\widehat{m}_1(0)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\ell_1}} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} m(x) e^{-ix\xi_n} dx \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\ell_1}} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} m(x) dx \right|^2,$$

por lo que la integral derecha debe de ser cero, entonces

$$\widehat{m}_1(0) = 0.$$

Por lo anterior se llega a que

$$\left. \begin{aligned} (\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1) |\widehat{m}_1(n)| + \lambda &= 0 & \text{si } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \lambda &= 0 & \text{si } n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Hasta aquí se obtiene que

$$\widehat{m}_1(n) = \left. \begin{array}{ll} \frac{-\lambda}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} & \text{si } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \widehat{m}_1(n) = 0 & \text{si } n = 0. \end{array} \right\} \quad (5.44)$$

Combinando la ecuación (5.39) y (5.44), se deduce que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{-\lambda}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} = 1. \quad (5.45)$$

Observemos³ que por simetría (5.45) satisface

$$-\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2\lambda}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} = 1,$$

despejando λ de la igualdad anterior se llega a que

$$\lambda^+ := \lambda = \left(-\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} \right)^{-1}. \quad (5.46)$$

Para obtener λ nos basta con calcular la serie infinita en (5.46), para eso hay que verificar primero que la serie converge. Claramente se observa que la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1}$$

contiene únicamente términos no negativos.

Recordando que $\xi_n = \frac{\pi}{2\ell_1}n$ y tomemos, sólo para este análisis, a $n \in \mathbb{R}^+$ entonces definimos la función continua f como

$$f(n) := \frac{1}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1}$$

entonces tenemos que $f(n)$ es no creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$. De lo anterior y por el Teorema⁴ del criterio de la integral basta verificar la convergencia o divergencia de

$$\int_0^\infty f(n)dn = \int_0^\infty \frac{dn}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1},$$

³Tomamos al conjunto de los números naturales como $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.

⁴Véase [5].

para asegurar la convergencia o divergencia de la serie.

Usando fracciones parciales y la definición de ξ_n se deduce que

$$\int_0^\infty \frac{dn}{\alpha|n|^2 + \beta|n| + \gamma} = \frac{1}{A-B} \int_0^\infty \frac{dn}{(n-A)} + \frac{1}{B-A} \int_0^\infty \frac{dn}{(n-B)}, \quad (5.47)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &:= \epsilon \left(\frac{\pi}{2\ell_1} \right)^2 \\ \beta &:= \frac{\pi}{2\ell_1} \\ \gamma &:= 1 \end{aligned}$$

y los valores A y B son las raíces de la ecuación de segundo orden $\alpha|n|^2 + \beta|n| + \gamma = 0$, es decir,

$$\left. \begin{aligned} A &:= \frac{\ell_1}{\pi\epsilon} (-1 + \sqrt{1-4\epsilon}) \\ B &:= \frac{\ell_1}{\pi\epsilon} (-1 - \sqrt{1-4\epsilon}) \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

Dado que $AB > 0$ y $B < 0$ se sigue que $A < 0$. Lo anterior hace notar $n - A$ y $n - B$ no se anulan en el intervalo $(0, \infty)$, por lo tanto las integrales de la ecuación (5.47) están bien definidas. Además, observe que A y B son reales negativos siempre que $0 \leq 4\epsilon \leq 1$ con $\epsilon = d^2Q$.

Desarrollando el lado derecho de la ecuación (5.47) nos queda

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dn}{\alpha|n|^2 + \beta|n| + \gamma} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{A-B} \int_0^b \frac{dn}{(n-A)} + \frac{1}{B-A} \int_0^b \frac{dn}{(n-B)} \right) \\ &= \frac{1}{A-B} \left\{ \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |b-A| - \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |b-B| \right\} \\ &\quad + \frac{1}{A-B} \{ -\ln |0-A| + \ln |0-B| \} \\ &= \frac{1}{A-B} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{\left| 1 - \frac{A}{b} \right|}{\left| 1 - \frac{B}{b} \right|} + \ln \left| \frac{B}{A} \right| \right) \\ &= \frac{1}{A-B} \ln \left| \frac{B}{A} \right|. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Sustituyendo lo obtenido de (5.48) en (5.49) y desarrollando se llega a que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dn}{\alpha|n|^2 + \beta|n| + \gamma} &= \frac{\ln \left| \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}}{-1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}} \right|}{\frac{\ell_1}{2\pi\epsilon} (-1 + \sqrt{1 - 4\epsilon} + 1 + \sqrt{1 - 4\epsilon})} \\
&= \frac{\ln \left| \frac{(1 + \sqrt{1 - 4\epsilon})^2}{1 - 1 + 4\epsilon} \right|}{\frac{\ell_1}{2\pi\epsilon} (2\sqrt{1 - 4\epsilon})} \\
&= \frac{\pi\epsilon}{2\ell_1\sqrt{1 - 4\epsilon}} \ln \left| \frac{(1 + \sqrt{1 - 4\epsilon})^2}{4\epsilon} \right| \tag{5.50}
\end{aligned}$$

Observe que de la igualdad (5.50) se obtiene que

$$\left. \begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} &\leq \frac{\pi d^2 Q}{2\ell_1} \quad \text{si } 4\epsilon \rightarrow 1 \\
\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} &\rightarrow \infty \quad \text{si } 4\epsilon \rightarrow 0,
\end{aligned} \right\}$$

entonces la serie converge si y solo si $0 < 4\epsilon \leq 1$.

Si expresamos a la función $m_1(x_1)$ como suma de términos de Fourier, en donde se utiliza (5.44) y (5.46), se llega a que

$$\begin{aligned}
m_1(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{m}_1(n) e^{ix\xi_n} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{-\lambda^+ e^{ix\xi_n}}{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1)}. \tag{5.51}
\end{aligned}$$

Desarrollando la ecuación anterior y haciendo un cambio de variable sobre las n

negativas implica⁵ que

$$\begin{aligned}
m_1(x) &= -\lambda^+ \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^-} \frac{e^{ix\xi_n}}{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{e^{ix\xi_n}}{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1)} \right) \\
&= -\lambda^+ \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{e^{-ix\xi_n}}{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{e^{ix\xi_n}}{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1)} \right) \\
&= -\lambda^+ \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{e^{-ix\xi_n} + e^{ix\xi_n}}{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1)} \\
&= -\lambda^+ \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{2 \cos(x\xi_n)}{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1)} \tag{5.52}
\end{aligned}$$

Recordando que $\xi_n = \frac{\pi}{\ell_1}n$ con $n \in \mathbb{N}$, la condición inicial $m_1(-\ell_1) = -1$ y junto con la igualdad anterior se obtiene que

$$\begin{aligned}
-1 &= -\lambda^+ \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{2 \cos(\ell_1 \cdot \frac{\pi}{\ell_1} n)}{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1)} \\
&= \lambda^+ \left(- \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{2 \cos(\pi n)}{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1)} \right). \tag{5.53}
\end{aligned}$$

Como la función coseno satisface que

$$\cos(\pi n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \tag{5.54}$$

y usando la ecuación (5.46) se obtiene que la ecuación (5.53) se satisface si y sólo si los valores de n pertenecen al conjunto

$$\mathbb{X}_1 := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es impar}\}.$$

Entonces, la solución para las paredes de 360° de la energía $\tilde{E}[\hat{m}_1]$, ecuación (5.38), está dada por

$$m_1(x_1) = \lambda^+ \left(- \sum_{n \in \mathbb{X}_1} \frac{2 \cos(x\xi_n)}{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1)} \right) \tag{5.55}$$

⁵Tomamos al conjunto de los enteros positivos y negativos como $\mathbb{Z}^+ := \{1, 2, 3, \dots\}$ y $\mathbb{Z}^- := \{-1, -2, -3, \dots\}$, respectivamente.

para $\xi_n = \frac{\pi}{2\ell_1}n$, $0 < 4\epsilon \leq 1$ y λ^+ dada por (5.46).

Recapitulamos los resultados obtenidos de esta sección en la siguiente Proposición.

Proposición 9. *La energía micromagnética*

$$\tilde{E}_1[\hat{m}_1] = \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1\} |\hat{m}_1(n)|^2 \right)$$

bajo las condiciones

$$\left. \begin{aligned} m_1(-\ell_1) &= -1 \\ m_1(\ell_1) &= -1 \\ m_1(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

y una anisotropía $\phi_1(x)$ tiene como mínimo a la ecuación

$$m_1(x_1) = \lambda^+ \left(- \sum_{n \in \mathbb{X}_1} \frac{2 \cos(x\xi_n)}{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1)} \right)$$

para $0 < 4\epsilon \leq 1$ y

$$\lambda^+ = \left(- \sum_{n \in \mathbb{X}_1} \frac{2}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} \right)^{-1},$$

donde $\xi_n = \frac{\pi}{2\ell_1}n$ y $\epsilon = Qd^2$.

Observe que de las ecuaciones (5.34), (5.44) y (5.46) se deduce

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1[\hat{m}_1] &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1\} (\hat{m}_1(n))^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1\} \left(\frac{-\lambda^+}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} \right)^2 \right) \\ &= \frac{(\lambda^+)^2}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} \right) \\ &= \frac{-\lambda^+}{2}. \end{aligned} \tag{5.56}$$

Ahora se deducirán las ecuaciones necesarias para tener la certidumbre de que la serie en (5.45) y el valor calculado numéricamente tengan un error de truncación menor o igual a algún número dado c . Para esto notamos que

$$|a - s_m| \leq \int_m^\infty f(n)dn, \quad (5.57)$$

donde

$$a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1},$$

$$s_m := \sum_{n=0}^m \frac{1}{\epsilon|\xi_m|^2 + |\xi_m| + 1}$$

para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $0 < 4\epsilon \leq 1$. Tomando los límites de integración apropiados se obtiene que la integral en (5.57) se resuelve de la misma forma que la integral en (5.47), por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \int_m^\infty f(n)dn &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{A-B} \int_m^b \frac{dn}{(m-A)} + \frac{1}{B-A} \int_m^b \frac{dn}{(m-B)} \right) \\ &= \frac{1}{A-B} \left\{ \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |b-A| - \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |b-B| \right\} \\ &\quad + \frac{1}{A-B} \{-\ln |m-A| + \ln |m-B|\} \\ &= \frac{1}{A-B} \left\{ \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{|1 - \frac{A}{b}|}{|1 - \frac{B}{b}|} + \ln \left| \frac{m-B}{m-A} \right| \right\} \\ &= \frac{1}{A-B} \ln \left| \frac{m-B}{m-A} \right|. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Entonces, si deseamos que el error de truncación no exceda c , es decir

$$0 \leq |a - s_m| \leq c,$$

de (5.57) y (5.58) se llega a que

$$c \geq \frac{1}{A-B} \ln \left| \frac{m-B}{m-A} \right|. \quad (5.59)$$

El número m satisface que la serie $|a - s_m|$ no sobrepasará el error de truncación. Al despejar m de la igualdad (5.59) se obtiene que este número está dado por la siguiente igualdad

$$m := \frac{Ae^{c(A-B)} - B}{e^{c(A-B)} - 1}. \quad (5.60)$$

Calcular el valor de a con un error de truncación c sería calcular

$$s_m = \sum_{n=0}^m \frac{1}{\epsilon|\xi_m|^2 + |\xi_m| + 1}, \quad (5.61)$$

donde m está dado por (5.60), el cual es un valor finito y computacionalmente accesible. Por lo anterior se tiene la certeza de que

$$s_m \leq a \leq s_m + c.$$

El valor numérico de λ^+ a orden m , lo denotamos como λ_m , y será igual a

$$\lambda_m = \frac{-1}{2(s_m + c)}. \quad (5.62)$$

Lo que se ha obtenido hasta este punto también es válido para la energía \tilde{E}_2 , ecuación (5.36), que es el caso de la anisotropía $\phi_2(\mathbf{m})$ salvo ciertos detalles. Es decir, analizando la ecuación (5.47) el valor de $\epsilon = d^2Q$ está definido para $\frac{-1}{4} \leq \epsilon$. Sin embargo, por definición $\epsilon > 0$ entonces $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

En resumen, para \tilde{E}_2 se tiene que la solución para paredes de 360° está dada por

$$m_1(x_1) = \lambda^- \left(- \sum_{n \in \mathbb{X}_1} \frac{2 \cos(x\xi_n)}{(\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| - 1)} \right),$$

para $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda^- < 0$. Donde

$$\lambda^- = \left(- \sum_{n \in \mathbb{X}_1} \frac{2}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| - 1} \right)^{-1}$$

y $\xi_n = \frac{\pi}{2\ell_1}n$. Además

$$\tilde{E}_2[\hat{m}_1] = \frac{-\lambda^+}{2} + \frac{\ell_1}{2}. \quad (5.63)$$

5.3. Paredes de Néel de 180°.

Al igual que en la sección anterior, calculamos los puntos críticos del funcional, en (5.34), bajo ciertas condiciones que implican tener una pared de 180° en el dominio del material. Es decir, definimos una geometría del material

$$\Omega := [-\ell_1, \ell_1]$$

con condiciones de magnetización

$$\left. \begin{aligned} m_1(-\ell_1) = m_1(\ell_1) = m_1(0) &= 0, \\ m_1\left(\frac{-\ell_1}{2}\right) &= -1, \\ m_1\left(\frac{\ell_1}{2}\right) &= 1. \end{aligned} \right\}$$

De las condiciones anteriores suponemos que la magnetización de la pared de Néel de 180° tiene una transición descrita por la figura 5.3, observe que dicha pared tiene un periodo de longitud $2\ell_1$. Aunque dichas condiciones pueden parecer extrañas son

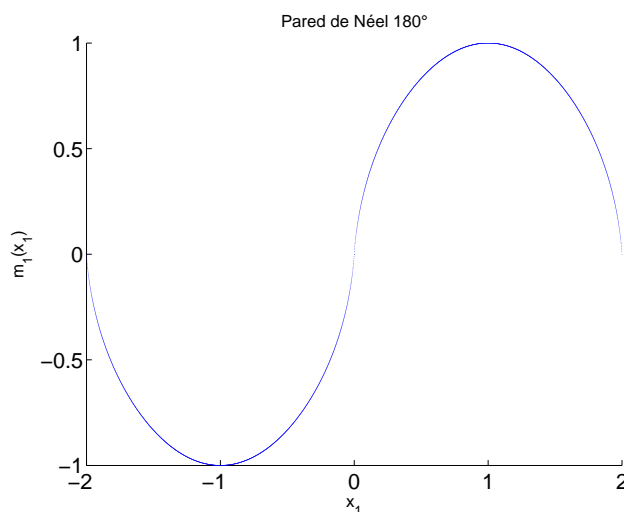


Figura 5.3: Gráfica de la pared de Néel de 180° . El eje horizontal es el dominio periódico de la variable x_1 , el eje horizontal es la magnitud de la transición de la magnetización.

necesarias debido a que la suma de coeficientes de Fourier requiere dicha periodicidad (i.e. no podemos localizar una sola pared de 180° en un dominio del material de periodo ℓ_1 , de tal forma que sea periódica). Entonces, es lógico suponer que la magnetización es una función impar de x , es decir,

$$m_1(x) = -m_1(-x).$$

Esta igualdad en términos de Fourier implica lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{m}_1(n) e^{ix\xi_n} &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{m}_1(n) e^{-ix\xi_n} \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{m}_1(-n) e^{ix\xi_n}, \end{aligned}$$

pero como los $e^{ix\xi_n}$ son linealmente independientes, entonces

$$\widehat{m}_1(n) = -\widehat{m}_1(-n). \quad (5.64)$$

Representando a $m_1(0)$ como una suma de términos de Fourier se obtiene que

$$m_1(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{m}_1(n) e^{i0 \cdot \xi_n} = 0$$

desarrollando lo anterior nos queda que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \widehat{m}_1(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^-} \widehat{m}_1(n) + \widehat{m}_1(0) = 0,$$

es decir

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \widehat{m}_1(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \widehat{m}_1(-n) + \widehat{m}_1(0) = 0.$$

Usando (5.64) resulta que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \widehat{m}_1(n) - \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \widehat{m}_1(n) + \widehat{m}_1(0) = 0,$$

de donde

$$\widehat{m}_1(0) = 0.$$

Además,

$$\begin{aligned} \widehat{m}_1(n) &= \frac{1}{2}(\widehat{m}_1(n) + \widehat{m}_1(n)) \\ &= \frac{1}{2}(\widehat{m}_1(n) - \widehat{m}_1(-n)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\ell_1}} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} m_1(x) \left(\frac{e^{-ix\xi_n} - e^{ix\xi_n}}{2} \right) dx \\ &= \frac{-i}{\sqrt{4\pi\ell_1}} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} m_1(x) \sin(x\xi_n) dx \end{aligned}$$

entonces se tiene que $\widehat{m}_1(n)$ es puramente imaginario. Debido a esta igualdad, para facilitar los cálculos, escribiremos a la solución y a la energía únicamente en términos de la transformada real $\sin(x\xi_n)$. A partir de ahora, la redefinimos como

$$\widehat{m}_1(n) := \frac{1}{\ell_1} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} m(x) \sin(x\xi_n) dx;$$

expresión que es púramente real. Entonces la solución y la energía quedan expresadas como

$$m_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{m}_1(n) \sin(x\xi_n) \quad (5.65)$$

y

$$\widetilde{E}_1[\widehat{m}_1(n)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\epsilon |\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1) |\widehat{m}_1(n)|^2. \quad (5.66)$$

Al igual que en la sección anterior primero estudiaremos la energía para el caso en el que la anisotropía es $\phi_1(\mathbf{m})$. Para esto usamos $m_1\left(\frac{\ell_1}{2}\right) = 1$ como la restricción del multiplicador de Lagrange para una pared magnética de 180° , junto con (5.65) se deduce la siguiente igualdad

$$1 = m_1\left(\frac{\ell_1}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{m}_1(n) \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right). \quad (5.67)$$

Por lo tanto el problema a minimizar es

$$\widehat{S}(\widehat{m}_1(n)) := \widehat{E}_1[\widehat{m}_1(n)] - \lambda \left(1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{m}_1(n) \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right). \quad (5.68)$$

Si se sustituye⁶ $\Phi(t) = \widehat{m}_1(n) + t\widehat{\phi}_1(n)$ en (5.68), se deriva con respecto a t y se evalúa en $t = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} \delta^1 \left(\widetilde{S}(\widehat{m}_1(n)) \right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \{ \epsilon |\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1 \} \widehat{m}_1(n) \widehat{\phi}_1(n) \\ &\quad + \lambda \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}_1(n) \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right). \end{aligned}$$

Sea

$$\mathbb{X}_2 := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ es impar}\}$$

entonces la ecuación anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} \delta^1 \left(\widetilde{S}(\widehat{m}_1(n)) \right) &= \left(\sum_{n \in \mathbb{X}_2} \{ \epsilon |\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1 \} \widehat{m}_1(n) + \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right) \widehat{\phi}_1(n) \\ &\quad + \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{X}_2} \{ \epsilon |\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1 \} \widehat{m}_1(n) \widehat{\phi}_1(n) \right). \end{aligned} \quad (5.69)$$

⁶Donde $\widehat{\phi}_1(n) = F[\phi(x)]$, véase la definición en la ecuación (5.41) Sección 5.2.

El mínimo se obtiene al igualar a cero (5.69) por lo que resulta

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cuando } n \text{ es par} \quad \widehat{m}_1(n) = 0, \\ \text{cuando } n \text{ es impar} \quad \widehat{m}_1(n) = \frac{-\lambda \sin(\frac{\pi}{2}n)}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1}. \end{array} \right\} \quad (5.70)$$

Si se sustituye el mínimo (5.70) en (5.67) se deduce que

$$1 = \sum_{n \in \mathbb{X}_2} \frac{-\lambda \sin^2(\frac{\pi}{2}n)}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} = \sum_{n \in \mathbb{X}_2} \frac{-\lambda}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1},$$

entonces

$$\lambda^+ := \lambda = \left(\sum_{n \in \mathbb{X}_2} \frac{-1}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} \right)^{-1}. \quad (5.71)$$

La solución final que describe al mínimo se obtiene de (5.65), (5.70) y (5.71), esta es

$$\begin{aligned} m_1(x_1) &= \sum_{n \in \mathbb{X}_2} \frac{-\lambda^+ \sin(\frac{\pi}{2}n) \sin(x\xi_n)}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} \\ &= -\lambda^+ \sum_{n \in \mathbb{X}_2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n) \sin(x\xi_n)}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} \end{aligned} \quad (5.72)$$

Finalmente, se resumen los resultados obtenidos de esta sección en la siguiente proposición.

Proposición 10. *La energía micromagnética*

$$\widetilde{E}_1[\widehat{m}_1] = \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1\} |\widehat{m}_1(n)|^2 \right)$$

bajo las condiciones

$$\left. \begin{array}{l} m_1(-\ell_1) = m_1(\ell_1) = m_1(0) = 0, \\ m_1(\frac{-\ell_1}{2}) = -1, \\ m_1(\frac{\ell_1}{2}) = 1. \end{array} \right\}$$

y una anisotropía $\phi_1(x)$ tiene como mínimo a la ecuación

$$m_1(x) = -\lambda^+ \sum_{n \in \mathbb{X}_2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n) \sin(x\xi_n)}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1}$$

para $\xi_n = \frac{\pi}{2\ell_1}n$ con $n \in \mathbb{X}_2$, $0 < 4\epsilon \leq 1$ y

$$\lambda^+ = \left(\sum_{n \in \mathbb{X}_2} \frac{-1}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} \right)^{-1}$$

donde $\epsilon = Qd^2$.

Recordemos que en la expresión (5.71) los términos n sólo están definidos en \mathbb{X}_2 , por lo que las ecuaciones (5.66) sólo válidas para n impar. Entonces, la energía $\tilde{E}(m_1)$ se expresará como

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1[\hat{m}_1] &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{X}_2} \{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1\} (\hat{m}_1(n))^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{X}_2} \{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1\} \left(\frac{-\lambda^+}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| + 1} \right)^2 \right) \\ &= \frac{-\lambda^+}{2}. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Al igual que en la sección anterior se hará un resumen de los resultados correspondientes a la energía \tilde{E}_2 , ecuación (5.36), donde se utiliza todo lo obtenido en esta sección referente a paredes de 180° . Hay que notar que esta energía tiene un signo distinto por lo que los procedimientos y resultados no varían mucho. Entonces, se tiene que el mínimo de \tilde{E}_2 está dado por

$$m_1(x) = -\lambda^+ \sum_{n \in \mathbb{X}_2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n) \sin(x\xi_n)}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| - 1}$$

para $\xi_n = \frac{\pi}{2\ell_1}n$ con $n \in \mathbb{X}_2$, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ y

$$\lambda^- = \left(\sum_{n \in \mathbb{X}_2} \frac{-1}{\epsilon|\xi_n|^2 + |\xi_n| - 1} \right)^{-1}.$$

La energía queda expresada explícitamente por la ecuación

$$\tilde{E}_2[\hat{m}_1] = \frac{-\lambda^+}{2} + \frac{\ell_1}{2}. \tag{5.74}$$

5.4. Cálculos numéricos.

A continuación se comparan los resultados de las ecuaciones obtenidas en las secciones anteriores, dichas ecuaciones generan un conjunto de gráficas que describen las energías para las paredes de Néel de 360° y 180° . Lo anterior se realiza con el objetivo de saber cuáles paredes requieren más energía y cuáles menos (primer caso), así como, saber bajo cuál anisotropía se necesita menos energía (segundo caso); este último caso estará determinado a la elección de la anisotropía⁷ ϕ_1 o ϕ_2 . Para esto observe que al variar el parámetro ϵ , ecuación (5.35), en un intervalo⁸ $(0 - 0.25)$ se obtienen las gráficas de las energías $E[\widehat{m}_1]$ y $E[\widehat{m}_2]$.

Como primer caso observe la imagen izquierda 5.4 cuyas gráficas comparan

$$\widetilde{E}_1[\widehat{m}_1] \text{ para } 360^\circ \quad \text{vs.} \quad \widetilde{E}_1[\widehat{m}_1] \text{ para } 180^\circ$$

(ecuación (5.56) contra (5.73) donde se usó ϕ_1 como anisotropía). Vea que el mínimo valor de energía para la pared de 180° se alcanza cuando tiene un $\epsilon \approx 0$, sin embargo para la pared de 360° este mismo valor se alcanza cuando $\epsilon \approx 0.1$ (i.e. la pared de 360° «cuesta» menos energía para valores pequeños de ϵ) y cuando $\epsilon > 0.1$ aún se tiene que la energía de la pared de 360° requiere menos energía. En el caso de la imagen derecha 5.4, en donde se grafica

$$\widetilde{E}_2[\widehat{m}_1] \text{ para } 360^\circ \quad \text{vs.} \quad \widetilde{E}_2[\widehat{m}_1] \text{ para } 180^\circ$$

(energías (5.63) y (5.74) con ϕ_2 como anisotropía) se puede observar algo similar, sin embargo las energías de ambas paredes aumentan en un valor de casi uno de magnitud, por lo que al comparar las dos imágenes de 5.4 vemos que cuesta menos energía tener paredes de 360° y 180° usando ϕ_2 que usando ϕ_1 .

Ahora analicemos el segundo caso, cuyos resultados se obtienen al comparar las energías de las paredes de Néel de 360° y 180° en caso de tener condiciones de frontera semejantes pero distinta anisotropía. Si se tienen paredes de 180° entonces se analiza a

$$\widetilde{E}_1[\widehat{m}_1] \text{ con } \phi_1 \quad \text{vs.} \quad \widetilde{E}_1[\widehat{m}_1] \text{ con } \phi_2,$$

ecuaciones (5.73) y (5.74). La gráfica que cuesta menor energía es cuando se usa ϕ_1 , vea la imagen izquierda de la figura 5.5. Y para el caso de tener paredes de 360° se compara a

$$\widetilde{E}_2[\widehat{m}_1] \text{ con } \phi_1 \quad \text{vs.} \quad \widetilde{E}_2[\widehat{m}_1] \text{ con } \phi_2,$$

⁷Ecuaciones de la hipótesis (e) al inicio del capítulo.

⁸Determinado por la restricción (5.48).

ecuaciones (5.56) y (5.63). Al observar la imagen derecha de la figura 5.5 se nota que la mínima energía es cuando se utiliza a ϕ_1 como anisotropía.

Por lo tanto se concluye que usando una anisotropía de la forma ϕ_1 se necesitará una menor cantidad de energía para las paredes de Néel, y esta cantidad de energía será aún menor en caso de tener paredes de 360° que en caso de tener paredes de 180° .

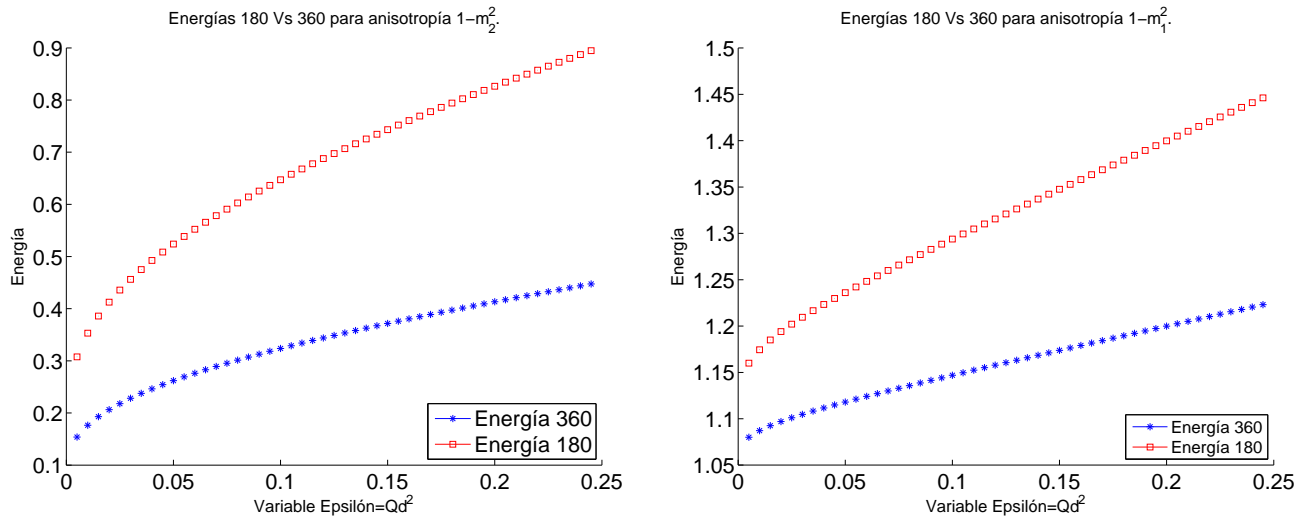


Figura 5.4: Comparación de las energías 180vs360 usando ϕ_1 (izq.) y comparación de energías 180vs360 usando ϕ_2 (der.).

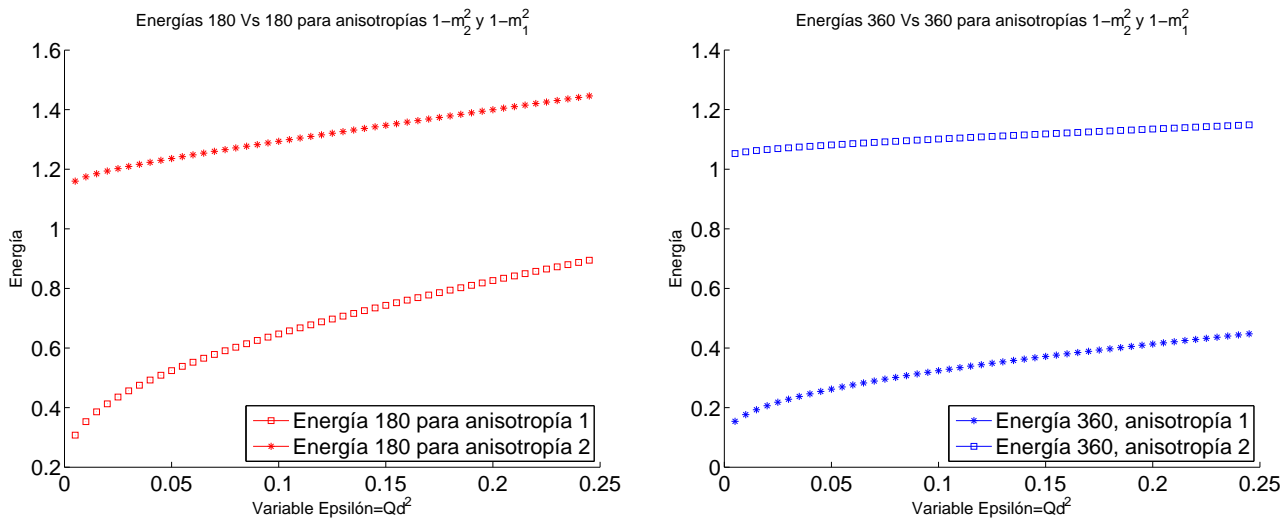


Figura 5.5: Comparación de energías bajo las mismas condiciones de frontera para la pared 180° usando ϕ_1 y ϕ_2 (izq.), y comparación de las energías para la pared 360° usando ϕ_1 y ϕ_2 (der.).

Capítulo 6

Conclusiones.

En este trabajo estudiamos la existencia y estabilidad de paredes magnéticas en un modelo variacional para la energía micromagnética, se analizaron dos configuraciones geométricas: el Bulk y una película delgada.

Para el Bulk, el modelo general se simplificó para poder aplicar las herramientas del cálculo de variaciones para funcionales convexos. Bajo nuestras hipótesis para el Bulk se demostró que, para toda condición de frontera en dominios acotados, existen paredes que son mínimos de la energía micromagnética. Para dominios no acotados se encontró que al expresar dicha energía micromagnética en términos de una fase θ , la solución explícita que describe la transición del vector de magnetización para un giro de 180° existe, y además, es un mínimo estable de la energía hasta traslaciones. Se demostró que las paredes que tienen una transición de 360° no existen como mínimos del funcional de energía.

Finalmente, para películas delgadas el modelo general también se simplifica y se considera una versión linealizada pero no local de la energía micromagnética. Para tratar este problema no local se expresó la energía en términos de series de Fourier y en un dominio periódico. Dado que los mínimos de este funcional son triviales se consideraron restricciones usando multiplicadores de Lagrange para encontrar paredes de 360° y 180° . Para estos casos se analizó el comportamiento de la energía en términos de los parámetros del material y el grosor de la película delgada. Se encontró que una pared de 360° tiene mucho menos energía que las paredes de 180° y la diferencia crece a medida que el grosor de la película aumenta. Esto permite concluir (sin tomar en cuenta efectos dinámicos) que, si se tiene una pared de 360° será más difícil deshacerla que una pared de 180° . En particular será más difícil cambiar una pared de 360° por dos paredes de 180° .

Agradecimientos

Agradezco al CONACyT por la beca para la realización de este trabajo.

Apéndice

En esta sección se citan algunas definiciones y proposiciones sin demostración de [11] relacionados con variable compleja.

Para $r_1 \geq 0, r_2 > r_1$ definimos la región A como

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}.$$

Si alguna función f es analítica en A en una ϵ -vecindad agujerada en z_0 entonces z_0 es una **singularidad aislada**. Si k es el mayor subíndice entero de los coeficientes de la expansión de Laurent b_n de f , es decir los coeficientes de

$$f(z) = \dots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots,$$

tal que $b_k \neq 0$ entonces decimos que z es un polo de orden k . En particular si $k = 1$ decimos que z_0 es un **polo simple**. Al valor b_1 se le llama el **residuo** de f en z_0 .

Para obtener el polo simple y residuo de una función f en z_0 ocupamos el siguiente enunciado.

Proposición 11. *Sea f analítica en una región A con una singularidad aislada en z_0 , entonces z_0 es un polo simple si*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

existe y es diferente de cero. Además este límite es igual al residuo de f en z_0 .

La región A será útil en la siguiente proposición para calcular integrales.

Proposición 12. *Sea una función analítica f en un conjunto abierto que contiene a la cerradura del semiplano superior $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$, excepto en un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales está en el eje real y tal que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Si $|f(z)| \rightarrow 0$ conforme $z \rightarrow \infty$ en H , entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum (\text{residuos de } f(z)e^{-i\omega z} \text{ en } H)$$

Bibliografía

- [1] BERTOTTI, GIORGIO, *Hysteresis in Magnetism: For Physicists, Materials Scientists, and Engineers*, Academic Press, 1998.
- [2] CAPELLA, ANTONIO, MELCHER, CHRISTOF, OTTO, FELIX, *Wave-Type Dynamics in Ferromagnetic Thin Film and the Motion of Néel walls*, Nonlinearity, Volume 20, Number 11, 2007.
- [3] DESIMONE, ANTONIO, KHON, ROBERT V., MÜLLER, STEFAN, OTTO, FELIX, *Recent analytical developments in micromagnetics*, The Science of Hysteresis, volume 2, chapter 4, Elsevier Academic Press, 2005.
- [4] FRIEDBERG, STEPHEN H., INSEL, ARNOLD J. y SPENCE, LAWRENCE E., *Linear Algebra*, Fourth Edition, Prentice Hall, 2003.
- [5] HAASER, NORMAN B. ET. ALL, *Análisis Matemático: curso intermedio*, Trillas, México, 1990.
- [6] HUBERT, ALEX, SCHÄFER, RUDOLF, *Magnetic Domains: The Analysis of Magnetic Microstructures*, Springer, 1998.
- [7] IZE, JORGE, *Cálculo de variaciones*, Segunda edición, Serie FENOMECC, México D.F., 2002.
- [8] JOST, JÜRGEN, *Postmodern Analysis*, Second Edition, Springer, Berlin, 2003.
- [9] JOST, JÜRGEN, LI-JOST, XIANQUING, *Calculus of Variations*, Cambridge University Press, United Kingdom, 1998.
- [10] LAWRENCE, C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Vol 19, 2002.
- [11] MARSDEN, JERROLD E., HOFFMAN, MICHAEL J., *Análisis básico de variable compleja*, Trillas, México, 1996.

- [12] MARSDEN, JERROLD E., TROMBA, ANTHONY J., *Cálculo vectorial*, Prentice Hall, México, 1998.
- [13] MELCHER, CHRISTOF, *The Logarithmic Tail of Néel Walls*, Springer-Verlag, 2003.