



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

COLEGIO DE PEDAGOGÍA

LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA
MULTIPLICACIÓN EN NIÑOS DE SEGUNDO
AÑO DE PRIMARIA A TRAVÉS DE LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, UN
ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA.

TESINA PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN PEDAGOGÍA

P R E S E N T A :

TERESITA EUGENIA GONZALO DEL TORO

ASESORA:

DRA. CONCEPCIÓN BARRÓN TIRADO



AGOSTO 2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatorias

Fue larga la espera pero ¡¡¡¡ Por fin lo logre!!!

Dedico este trabajo:

A mi mamá

Por su apoyo y cariño que siempre me ha brindado en mis decisiones buenas o malas.

A mi maestra: Concepción Barrón

Por su gran ayuda y paciencia.

A mis hermanos: Jose, Ariadna, Jorge, Mario, Alejandro, Martha

Que siempre están presentes en mi corazón.

A todos mis sobrinos:

Para que aprendan de mi experiencia y realicen las cosas en su tiempo.

A mis amigas: Julieta, Ludmi y Lourdes

Por creer en mí y estar siempre conmigo y por decirme las cosas como son.

A Mitzy:

Por echarme siempre hacia adelante, apoyándome en todo momento del camino recorrido sin darse por vencida.

A todas las personas que estuvieron presentes apoyándome en algún momento de esta parte de mi vida.

Gracias

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. ENFOQUE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA	3
1.1 Antecedentes del Plan y Programa de Estudios de 1993 de Educación Básica	3
1.2 Estructura del Plan y Programas de Estudio	5
1.3 Contenidos del programa de matemáticas en segundo año de primaria	9
CAPÍTULO 2. DESARROLLO LÓGICO MATEMÁTICO DESDE UN ENFOQUE COGNOSCITIVO CONSTRUCTIVISTA	14
2.1. Etapas del desarrollo cognoscitivo de Piaget	14
2.1.1 Desarrollo lógico matemático	16
2.1.2. Conocimiento físico	16
2.1.3 Conocimiento lógico matemático	16
2.1.4 Conocimiento social	17
2.1.5 Clasificación	18
2.1.6 Seriación	19
2.1.7 Noción de número	19
2.1.8 Conocimientos Infralógicos	20
2.2. Constructivismo	22
2.2.1 Jean Piaget	23
2.2.2 Lev Vygotsky	24
2.2.3 Jerome Bruner	27
2.2.4 David Ausubel	29
2.2.5 El constructivismo y las matemáticas	32

CAPÍTULO 3. ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS	39
3.1 Didáctica de las matemáticas	40
3.2 Estrategias de enseñanza y aprendizaje	48
3.3 El juego en el aprendizaje de las matemáticas	55
CAPÍTULO 4. ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN	63
4.1 La Resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas	63
4.2 Concepto de la multiplicación a través de la resolución de problemas.	68
4.3 Estrategias para la enseñanza de la multiplicación	74
CONCLUSIONES	102
BIBLIOGRAFÍA	107

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son de suma importancia en la actualidad ya que se pretende que el alumno desarrolle las habilidades y destrezas para adquirir los conceptos y métodos de las matemáticas como un elemento útil en la vida y quede atrás el aprendizaje mecánico o memorístico.

Para enseñar matemáticas lo primero que hay que hacer es crear en el niño el interés por éstas, que no la vean como una disciplina aislada fuera de su contexto.

La enseñanza de las matemáticas en los primeros años debe estar cargada de actividades prácticas e intuitivas que motiven a los niños a utilizar las matemáticas encontrándoles un sentido, a la vez de que deben realizar actividades de tipo lógico como el de clasificar, ordenar, interactuar etc., actividades que de alguna manera no son meramente de orden matemático sino que se pueden realizar con otras disciplinas.

El presente trabajo, es una tesina donde pretendo mostrar la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación a través de estrategias como la resolución de problemas, tomando en cuenta un enfoque cognitivo constructivista.

En el primer capítulo explicaré los antecedentes que dieron origen al Plan y Programas de Estudio de Educación Básica de 1993, ya que en este esquema se plantea la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas generando nuevas prácticas de enseñanza en relación con los saberes matemáticos, que permitieran construir aprendizajes con mayor significado de los que se lograban con las formas tradicionales. Mostraré de una forma general cómo están conformados los contenidos y propósitos en el Plan y Programas de Estudios, resaltando los contenidos y propósitos de las matemáticas en segundo año de primaria.

En el segundo capítulo describiré cómo se desarrolla el pensamiento lógico matemático con el cual los niños adquieren nociones como: el concepto de número, clasificación, seriación en los niños como una vía mediante la cual el niño conformará su estructura intelectual desde una perspectiva Piagetana.

Asimismo describiré el desarrollo del aprendizaje a partir de un punto de vista constructivista, considerando a los principales teóricos de este enfoque como:

Piaget, Vigotsky, Bruner, Ausubel, ya que sus aportes se plantean como una perspectiva para la enseñanza de las matemáticas en la escuela.

En el tercer capítulo, abordaré el tema de la didáctica de las matemáticas que estudia los procesos de transmisión y adquisición de diferentes contenidos matemáticos en la situación escolar, describiendo y explicando los fenómenos referentes a su enseñanza y aprendizaje en distintas situaciones didácticas a través de una visión constructivista, además de que plantea la resolución de problemas como estrategia de su enseñanza y aprendizaje.

Comentaré qué son las estrategias didácticas y los tipos de estrategias que promueven un aprendizaje significativo en los alumnos donde el maestro puede aprovechar dichas herramientas para generar en los estudiantes un aprendizaje con sentido.

Por último, me refiero a la importancia del juego como una estrategia en la que los niños aprendan las matemáticas de una manera lúdica y más o menos vivencial dentro del salón de clases, promoviendo un aprendizaje significativo de acuerdo a sus conocimientos previos e intereses, brindado así al niño y al maestro la posibilidad de divertirse al superar los retos que se le plantean, conduciéndolos a una mayor comprensión matemática.

En el capítulo cuatro, abordaré la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas como una propuesta que aparece en el Plan y Programas de Estudios de 1993. También mostraré las diferentes definiciones de la multiplicación y cómo el niño adquiere el concepto multiplicativo a partir de la resolución de problemas, por último presento una compilación de problemas tomados de diferentes fuentes que cubran los propósitos y contenidos del programa de estudios y ayuden al maestro en su enseñanza y contribuyan a la construcción del concepto multiplicativo en los niños de segundo año de educación básica.

CAPÍTULO 1.

ENFOQUE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA EN MÉXICO.

En este capítulo realizaré un acercamiento breve a los antecedentes que dieron origen y estructura del Plan y Programas de Estudios de Educación Básica de 1993 de, para precisar cómo está conformado en cuanto contenidos y propósitos.

En un segundo momento, mostraré la forma en que se plantean los contenidos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el segundo año de primaria en el curriculum vigente, prestando atención al nuevo enfoque que es el planteamiento de la resolución de problemas, que tiene un origen constructivista.

1.1 Antecedentes del Plan y Programas de Estudios de Educación Básica de 1993.

El plan de estudios con el que trabajan los maestros de la escuela primaria en la actualidad en México es el Plan y Programas de Estudios de Educación Básica 1993¹, fue concebido a partir de una evaluación en el que participaron maestros, padres de familia, centros académicos, organizaciones sociales, autoridades educativas y representantes del Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación.

Como se destaca en el Plan y Programas de Estudios de Educación Básica, en 1989 se realizó una consulta que permitiera identificar los principales problemas educativos.

¹ México. Secretaría de Educación Pública. *Plan y Programas de Estudio Educación Básica 1993 Primaria*. p.162.

En Programa de Educación Educativa 1989 -1994, se estableció la renovación de los contenidos y los métodos de enseñanza, la formación de maestros y la articulación de los niveles educativos que conforman la educación básica.

La Secretaría de Educación Pública, inició la evaluación de planes, programas y libros de texto, en 1990 dentro de un programa nombrado Prueba Operativa se elaboraron planes experimentales para preescolar, primaria y secundaria, aplicándose para probar su pertinencia y viabilidad en diferentes planteles.

El Consejo Nacional Técnico de la Educación, en 1991 lanza una propuesta para la orientación general de la modernización de la educación básica en un documento titulado “Nuevo Modelo Educativo”, contribuyendo a la precisión de los criterios centrales que orientaron la reforma, como el fortalecimiento de los conocimientos y habilidades considerados básicos como la lectura y la escritura, el uso de las matemáticas en la solución de problemas y en la vida práctica, la vinculación de los conocimientos científicos así como el cuidado de la salud y el ambiente, ampliando el conocimiento de la historia y la geografía del país.

Por último en 1992, la Secretaría de Educación Pública lanzó la última etapa del cambio de planes y programas de estudio de la educación básica adoptando propuestas contenidas en el Acuerdo Nacional Para la Modernización² de la Educación Básica, orientadas hacia dos direcciones:

1. Realizar acciones para el fortalecimiento de los contenidos educativos, elaborando guías para el maestro de primaria, prestando atención a los conocimientos y habilidades expresados anteriormente. Así como de una actualización de los maestros en servicio.
2. Preparar el proceso del nuevo currículo que tendría que estar listo en septiembre de 1993. En su primera mitad se establecieron los nuevos planes y programas, los nuevos libros de texto gratuitos, guías didácticas y materiales auxiliares para el uso de los maestros.

Con esta idea de cambio en el Plan y Programa de Estudio del 1993 de Educación Básica, se propuso enseñar las matemáticas mediante la resolución de problemas, generando nuevas prácticas de enseñanza y aprendizaje, dando comienzo a una nueva etapa donde se destaca el “Constructivismo”, cuya

² México. Secretaría de Educación Pública. *op. cit*, p. 12.

propuesta es llevar al aula una matemática que permita a los alumnos construir sus conocimientos a través de actividades interesantes, novedosas y dinámicas para llegar a un resultado, proporcionando los conocimientos, habilidades, capacidades, destrezas, actitudes y valores necesarios para el desenvolvimiento de los estudiantes.

1.2 Estructura del plan y programa de estudios

El plan consta de 200 días laborales en el calendario anual, con 4 horas de trabajo en clase diario, se contemplan en total 800 horas anuales de trabajo, los maestros organizaran su programa con los tiempos establecidos buscando una articulación, equilibrio y continuidad con los contenidos. En los siguientes cuadros se presenta la organización de las asignaturas, su distribución del tiempo de trabajo para que el maestro distribuya su planeación de acuerdo al tratamiento de los contenidos.³

Educación primaria/Plan 1993 Distribución del tiempo de trabajo/Primer y segundo grado. Asignatura	Horas Anuales	Horas Semanales
Español	360	9
Matemáticas	240	6
Conocimiento del Medio (Trabajo integrado de: Ciencias Naturales Historia Geografía Educación Cívica) Educación Artística	120 40	3 1
Educación Física	40	1
Total	800	20

Distribución del tiempo de trabajo/Tercer a sexto grado⁴

Asignatura	Horas Anuales	Horas Semanales
Español	240	6
Matemáticas	200	3

³ *Ibidem*, p.14.

⁴ *Idem*. p. 14.

Ciencias Naturales	120	3
Geografía	60	1.5
Historia	60	1.5
Educación Cívica	40	1
Educación Artística	40	1
Educación Física	40	1
TOTAL	800	20

El plan se ha organizado, destacando los propósitos formativos de la asignatura, el enfoque pedagógico y los contenidos de aprendizaje, para permitir al maestro flexibilidad en base a su experiencia e iniciativa.

Con esto se busca que el alumno no sólo reciba mera información o que tenga que memorizar, sino que ésta sea contextualizada y que le signifique y se apropie del conocimiento.

Los programas se estructuran por asignatura y por grado, se muestran los propósitos formativos de la asignatura y los rasgos del enfoque pedagógico que se utiliza. Posteriormente se muestran los contenidos de aprendizaje, organizados para algunas asignaturas en ejes temáticos y para otras en temas centrales, aspectos, actividades y campos de enseñanza.

Son ocho las asignaturas que conforman el Plan y Programas de Estudio: Español, Matemáticas, Ciencias Naturales, Educación Cívica, Educación Artística y Educación Física.

ESPAÑOL

El propósito principal de la materia de español es favorecer el desarrollo de las capacidades de comunicación de los niños en los distintos usos de la lengua y el desarrollo de la lengua hablada y escrita. Se divide en cuatro ejes temáticos: Lengua hablada, Lengua escrita, Recreación literaria y Reflexión sobre la lengua.

MATEMÁTICAS

Las matemáticas tienen como fin lograr que los niños construyan sus propios conocimientos a partir del aprendizaje por medio de la resolución de problemas

para desarrollar un pensamiento matemático partiendo de sus experiencias. Cuenta con 6 ejes: Los números, sus relaciones y sus operaciones, medición, geometría, procesos de cambio, tratamiento de la información y la predicción y el azar.

CIENCIAS NATURALES

En primero y segundo año se integran las materias de Ciencias Naturales, Historia, Geografía y Educación Cívica vinculándose entre sí. De tercero a sexto año cada materia es independiente. El fin es adquirir los conocimientos, capacidades, actitudes y valores para fomentar el cuidado del medio natural, el conocimiento del cuerpo, la salud y su bienestar. Se manejan cinco ejes: Los seres vivos, El cuerpo humano y la salud, El ambiente y su protección, Materia energía y cambio, y Ciencia, tecnología y sociedad.

HISTORIA

En primero y segundo año la enseñanza de la historia se centra en la noción de cambio y del tiempo a partir de su entorno. En tercer grado, se incorporarán los factores más relevantes de la historia y la geografía revisando su entidad federativa. En cuarto grado se evocaran a estudiar la historia de México, rescatando las nociones de tiempo. En quinto y sexto grados se continúa el estudio de la Historia de México articulándose con la Historia Universal, con el fin de incentivar el desarrollo de nociones para el ordenamiento y la comprensión del conocimiento de la historia, de sus diferentes objetos de conocimiento y el fortalecimiento de la función cívica y el estudio de la geografía.

GEOGRAFÍA

En primero y segundo grado los conocimientos van enfocados hacia la comprensión de su localidad relacionándolos con los fenómenos naturales y la forma de vida de las distintas localidades. En tercer grado se busca que los alumnos conozcan su municipio y su ubicación con el territorio nacional y reconozcan la simbología convencional. A partir de cuarto grado los alumnos deben de manejar y ejercitar destrezas geográficas, así como en cuarto año la

enseñanza de la Geografía de México. En quinto y sexto continuarán con la enseñanza de la Geografía Universal.

CIVISMO

Esta asignatura abarca los conocimientos que se manejan durante toda la instrucción primaria basándose en la comprensión de los valores y actitudes, en el reconocimiento de sus derechos y obligaciones, así como consolidar su identidad nacional.

EDUCACIÓN ARTÍSTICA

Tiene como finalidad motivar al estudiante hacia las manifestaciones artísticas como la música, el canto, la danza el teatro y las artes plásticas. Los programas se organizan por grado de acuerdo al desarrollo del niño.

EDUCACIÓN FÍSICA

Tiene como intención desarrollar las habilidades motrices, promover la salud con el deporte a través de juegos tradicionales que aumenten su autoestima y promuevan el respeto hacia los demás.

El Plan y Programas de Estudio de Educación Básica Primaria, es el que se ha trabajado desde el año 1993 en las escuelas de educación pública y particulares del Distrito Federal.

En él se observa un cambio con el propósito de organizar la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos.

Se resalta el desarrollo de habilidades y actitudes necesarias para un aprendizaje permanente, con el que se busca que los alumnos tengan una formación integral, que conste de habilidades intelectuales que fortalezcan la lectura, la escritura y la expresión oral, el cuidado de su ambiente, y se formen una visión estructurada de la historia y la geografía, sintiéndose parte de una comunidad con sus derechos y obligaciones.

Hasta aquí se ha presentado cómo está estructurado el Plan y Programas de Estudio 1993 en la Educación Básica Primaria, éste determina la enseñanza en las instituciones escolares gubernamentales y privadas, les da sentido a partir de la determinación y organización de los contenidos, de los propósitos trazados, de la metodología de enseñanza y aprendizaje y de las normas de evaluación correspondientes a la práctica educativa en la que se requiere formar alumnos.

1.3 Contenidos del programa de matemáticas en el segundo año de primaria.

El enfoque de las matemáticas que se contempla en el Plan y Programas de Estudios de 1993 en la Educación Básica Primaria, advierte para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas la resolución de problemas concretos basados en las experiencias culturales y desarrollo de los propios alumnos.

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se pretende que los alumnos desarrollen las habilidades para la resolución de problemas para que las apliquen de acuerdo a su contexto y estas sean significativas para el alumno, dejando atrás el aprendizaje memorístico, fortaleciendo el razonamiento matemático.

En este sentido los propósitos de las matemáticas buscan que los alumnos adquieran y desarrollen:¹

- ✓ La matemática para reconocer, plantear y resolver problemas.
- ✓ Anticipar y verificar resultados.
- ✓ Comunicar e interpretar información matemática.
- ✓ Desarrollar la imaginación espacial.
- ✓ Estimar resultados de cálculos y mediciones.
- ✓ Manejar instrumentos de medición.
- ✓ Desarrollar el pensamiento abstracto a través de diversas formas de razonamiento del tratamiento de la información al emplear diversas estrategias.

¹ *Ibidem*, p.50.

Los contenidos se organizan en 6 ejes temáticos establecidos según el desarrollo cognitivo de los niños.

- Los números, sus relaciones y sus operaciones
- Medición
- Geometría
- Procesos de cambio
- Tratamiento de la información
- La predicción y el azar

LOS NÚMEROS, SUS RELACIONES Y SUS OPERACIONES

Se basa en la resolución de problemas que permitan a los niños acceder al conocimiento a partir de las experiencias adquiridas, relacionándose con los números en diversas circunstancias y los empleen para solucionar situaciones problemáticas que le signifiquen y den un sentido a sus conocimientos.

MEDICIÓN

Parte de que los conceptos de la medición se construyan en las actividades directas que se tengan con los objetos. Los contenidos se componen de:

- El estudio de las magnitudes
- La noción de unidad de medida
- La cuantificación, como resultado de la medición de dichas magnitudes⁶

GEOMETRÍA

Los contenidos se derivan en función de la ubicación del alumno en relación con su entorno y se plantean estrategias de manipulación, observación, dibujo y análisis de diferentes formas.

PROCESOS DE CAMBIO

Se inicia a partir de cuarto grado de primaria, en él se elaboran y analizan tablas y gráficas, a la vez de que se examinan elementos de noción y proporción partiendo siempre de situaciones problemáticas para una mejor comprensión.

⁶ *Ibidem*, p.51.

TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Aquí se presentan situaciones problemáticas en las que el alumno tendrá que resolver y de analizar la información para representarla en tablas o gráficas.

PREDICCIÓN Y EL AZAR

Se maneja a partir del tercer grado de primaria con el fin de que el alumno desarrolle la capacidad de comprender situaciones de probabilidad y azar.

A continuación presento los contenidos por ejes temáticos del programa de segundo año de primaria.⁶

En primero y segundo año se manejan cuatro ejes temáticos:

1. Los números, sus Relaciones y sus Operaciones
2. Medición
3. Geometría
4. Tratamiento de la Información

A continuación presento por medio de cuadros los contenidos por eje temático propuestos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el segundo año de educación primaria.

⁶ *Ibidem*, p. 56.

EJES TEMÁTICOS

Los números, sus Relaciones y sus Operaciones	Medición	Geometría	Tratamiento de la Información
<p>C <i>Números Naturales</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Los números de tres cifras <p>O -Conteos</p> <p>N -Agrupamientos y desagrupamientos en centenas, decenas y unidades</p> <p>T -Lectura y escritura</p> <p>E -El orden de la serie numérica</p> <p>N Antecesor y sucesor de un número</p> <p>I -Valor posicional</p> <p>D • Uso de números ordinales en contextos familiares para el alumno</p>	<p>Longitudes y áreas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Medición de longitudes y superficies utilizando medidas arbitrarias • Comparación y ordenamiento de varias longitudes y áreas • Introducción al uso de la regla graduada como instrumento que permite comparar longitudes 	<p>Ubicación espacial</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ubicación espacial <p>- Del alumno en relación con su entorno</p> <p>- Del alumno en relación con otros seres u objetos</p> <p>- De objetos o seres entre sí</p> <ul style="list-style-type: none"> • Los puntos cardinales • Representación de desplazamientos sobre el plano <p>- Trayectos, caminos y laberintos</p> <p>- Recorridos tomando en cuenta puntos de referencia</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretación de la información contenida en ilustraciones, registros y pictogramas sencillos • Resolución e invención de problemas sencillos elaborados a partir de la información que aporta una ilustración • Invención de problemas a partir
<ul style="list-style-type: none"> • Planteamiento y resolución de diversos problemas de suma y resta con números hasta de tres cifras, utilizando diversos procedimientos • Algoritmo convencional de la suma y resta, con transformaciones • Introducción a la multiplicación mediante resolución de problemas que impliquen agrupamientos y 	<ul style="list-style-type: none"> • Capacidad, peso y tiempo • Uso de la balanza para comparar el peso de objetos • Medición de la capacidad y el peso de objetos utilizando unidades de medida arbitrarias • Comparación y ordenamiento de varios objetos y recipientes, de acuerdo con su peso y su capacidad • Uso del 	<p>Cuerpos geométricos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representación de cuerpos y objetos del entorno utilizando diversos procedimientos • Clasificación de objetos o cuerpos geométricos bajo distintos criterios (por ejemplo, caras planas y caras redondas) • Construcción de algunos cuerpos usando cajas o cubos <p>Figuras geométricas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Trazo de figuras diversas utilizando la regla 	<p>de expresiones numéricas dadas</p>

<p>arreglos rectangulares, utilizando diversos procedimientos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Escritura convencional de la multiplicación (con números de una cifra) • Construcción del cuadro de multiplicaciones • Planteamiento 	<p>calendario: meses, semanas y días</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Construcción y transformación de figuras a partir de otras figuras básicas • Clasificación de diversas figuras geométricas bajo distintos criterios (por ejemplo, lados curvos y lados rectos, número de lados) • Dibujo y construcción de motivos utilizando figuras geométricas 	
<p>y resolución de reparto de objetos</p>			

CAPÍTULO 2.

DESARROLLO LÓGICO MATEMÁTICO DESDE UN ENFOQUE COGNOSCITIVO CONSTRUCTIVISTA.

En este capítulo comenzaré hablar de las etapas de desarrollo cognitivo planteadas por Piaget, para comprender el desenvolvimiento de los niños de segundo año de primaria y establecer la importancia del desarrollo lógico matemático en la adquisición del conocimiento matemático.

Explicaré a partir de las teorías constructivistas del aprendizaje como adquieren el conocimiento los niños para que éste sea significativo; considerando a los principales teóricos de este enfoque, ya que el Plan y Programas de Estudios de 1993 considera el constructivismo para la enseñanza de las matemáticas en la resolución de problemas, como una forma de facilitar la construcción del aprendizaje, para que éste sea realmente significativo para los alumnos.

2.1 Etapas del desarrollo cognoscitivo de Piaget.

Jean Piaget, en su teoría evolutiva centra su estudio al desarrollo cognitivo del individuo, desde un enfoque genético. Plantea que el niño funciona a través de estadios o etapas que describen el proceso del niño y del adolescente.

Según Piaget⁷, las etapas se vinculan con la de edad, y el tiempo que dura cada etapa mejora su capacidad de emplear esquemas complejos y abstractos que le permiten organizar su conocimiento.

Considero importante conocer los estadios de los cuales parte Piaget para formular su teoría ya que cada uno de estos periodos los define un eje alrededor del cual se estructuran las adquisiciones propias de ese momento evolutivo y en consecuencia el desarrollo lógico-matemático.

⁷ Meece, Judith.(2000). *Desarrollo del niño y del adolescente. Compendio para educadores.* México. Mc Graw Hill. p.102.

Las etapas a las que hace referencia Piaget son:

ETAPA	EDAD	CARACTERÍSTICAS
SENSORIOMOTORA	Del nacimiento a los 2 años.	Los niños empiezan hacer uso de la imitación. La memoria y el pensamiento. Empiezan a reconocer que los objetos no dejan de existir cuando se ocultan. Pasan de las acciones reflejas a la actividad dirigida a metas.
PREOPERACIONAL	De los 2 a los 7 años	El niño puede usar símbolos y palabras para pensar lógicamente. Le resulta difícil considerar el punto de vista de otra persona es egocéntrico
OPERACIONES CONCRETAS	De los 7 a los 11 años	El niño aprende las operaciones lógicas de seriación, clasificación y de conservación. Es capaz de resolver problemas concretos de manera lógica. Entiende la reversibilidad.
OPERACIONES FORMALES	De los 11 a los 12 años	El niño es capaz de resolver problemas abstractos de manera lógica. Su pensamiento se hace más científico. Desarrolla el interés por los temas sociales.

2.1.1 Desarrollo lógico-matemático.

El desarrollo del razonamiento lógico- matemático se va conformando desde que el niño nace, ya que estas estructuras van madurando a través de la interacción que tienen los niños con las personas y el medio que lo rodea, permitiéndoles construirlo desde adentro.

Piaget⁷ reconoce tres tipos de conocimiento que permiten el desarrollo del razonamiento lógico-matemático basadas en las formas de estructuración de sujeto: Conocimiento: físico, lógico-matemático, y social y a continuación describiré.

2.1.2 Conocimiento físico.

Es la experiencia que se adquiere a través de la manipulación con los objetos; se refiere al conocimiento de los objetos externos a sus características, como pueden ser el color, el peso, el tamaño o la textura y que se pueden conocer a través de la observación ya que el niño solo se centra en una de las características del objeto.

2.1.3 Conocimiento lógico-matemático.

El conocimiento lógico-matemático se basa en la relación creada en la mente de cada niño, cuando establece una diferencia entre los objetos, esta diferencia es creada mentalmente y es decisión de él establecer una comparación.

Cada niño crea una relación (igual, diferente, ocho) en su mente, ya que estas no existen en el mundo exterior y observable, el niño avanza en la construcción de su conocimiento lógico-matemático en la medida que va coordinando las relaciones que crea de los objetos. Una vez que ha establecido las relaciones de igual y diferente puede relacionar y deducir que $2+2=4$ y $2 \times 2=4$.

El conocimiento lógico-matemático surge de una abstracción reflexiva, ya que no es observable y es el niño quién lo construye en su mente a través de las

⁷ Kamii, Constance. (1995). *Reinventando la aritmética II*. Madrid. Visor .p. 23.

relaciones con los objetos, desarrollándose siempre de lo más simple a lo más complejo, una vez adquirido este conocimiento no se olvida ya que la experiencia no proviene de los objetos sino de su acción sobre los mismos.

El desarrollo del pensamiento lógico –matemático requiere del manejo de ciertas nociones que son ante todo , producto de la acción y relación del niño con objetos y sujetos y que a partir de una reflexión le permiten adquirir las nociones fundamentales de clasificación, seriación y noción de número de las cuales comentaré más adelante.

2.1.4 Conocimiento social.

Su naturaleza es arbitraria, en el sentido de que no todas las personas tienen las mismas creencias o que un objeto se llame árbol y en otro país se pronuncie de otra forma, ya que para reconocer las palabras los niños precisan del conocimiento lógico – matemático, como por ejemplo, el 25 de diciembre se celebre la navidad, estos son pactos elaborados por las personas. Para que el niño adquiera conocimiento social es importante que reciba información de sus semejantes, amigos familiares o maestros ya que éste se logra al fomentar la integración grupal.

Como mencione anteriormente el conocimiento lógico-matemático comprende las nociones de clasificación, seriación, noción de número y las funciones infralógicas que se van construyendo lentamente como son el concepto tiempo y el espacio. Estas nociones sirven de base para desarrollar los conceptos lógico-matemáticos y las describo a continuación.

2.1.5 Clasificación.

El reconocimiento de las cualidades de los objetos y la comparación mediante el establecer diferencias y semejanzas, permite que el niño reúna objetos formando clases. Estas acciones de clasificación constituyen un proceso esencial en la formación de conceptos.

Clasificar es crear subconjuntos o clases de acuerdo a una norma, las clases no tienen elementos comunes, y todos los componentes pertenecen a algún grupo.

Las primeras destrezas del niño es hacer clasificaciones simples y una vez que ha alcanzado el desarrollo pleno de esta estructura, logra realizar clasificaciones múltiples.

De acuerdo con Piaget algunos criterios de clasificación son los siguientes:⁸
Reconocimiento de semejanzas y diferencias entre objetos.

1. Emparejar objetos idénticos para formar pequeños grupos.
2. Escoger criterios para hacer grupos incluyendo la discriminación de varios criterios posibles de clasificación.
3. Clasificar coherentemente según algún criterio realizando dos clasificaciones a la vez.
4. Desplazar criterios de formación de nuevos grupos después de que se haya efectuado una capacidad inicial.
5. Construir sistemas jerárquicos de clasificación y para comprender las relaciones entre los niveles, distinguir entre dos clases de objetos.

Mientras que los niños vayan construyendo más sistemas de clasificación ampliarán su panorama de posibilidades para la solución de problemas, a la vez de que da lugar al aspecto cardinal que surge de la relación de igualdad que se crea entre los elementos.

⁸ Saunders, A Ruth. M. Bingham y Newman. (1989). *Perspectivas Piagetanas en la Educación Infantil*. Madrid. Morata. p. 160.

2.1.6 Seriación.

Consiste en ordenar sistemáticamente la variedad de un conjunto de elementos de acuerdo a un criterio de consideración.

Algunas normas de seriación son:

1. Reconocer diferencias relativas entre dos objetos o más.
2. Clasificar de forma dicotómica un conjunto de objetos según un criterio de relación.
3. Utilizar el razonamiento transitivo.
4. Ordenar de modo seriado de 5 a 10 objetos.
5. Ordenar de 5 a 10 objetos en secuencia insertando de 2 a 5 objetos en la secuencia original aplicando los conceptos “mayor” y “menor”
6. Construir secuencias uno a uno entre dos secuencias ordenadas de 5 a 10 objetos.

La noción de seriación da lugar para la adquisición del aspecto ordinal, esta noción junto con la clasificación forman la base para la construcción del concepto de número.

2.1.7 Noción de número.

El número es una relación creada mentalmente por cada individuo, se construye a través de un proceso de abstracción reflexiva de las relaciones entre los conjuntos que expresan número.

La construcción del número es sucesiva con el desarrollo, se organiza etapa por etapa con apego gradual de los sistemas de inclusiones jerárquicas de las clases lógicas entre las relaciones asimétricas de seriación y clasificación. Piaget afirmaba, que sólo una vez que las operaciones se han constituido lógicamente en el plano práctico, la numeración verbal adquiere una significación propiamente numérica.

El conteo y los conocimientos aritméticos se deben enseñar después de muchas experiencias de seriación, clasificación y correspondencia biunívoca

(implica comprender tanto la clasificación como la seriación) ya que sería inútil imponer estos conceptos sin que el niño haya concebido estas nociones.

Para que el niño adquiriera la noción de número de acuerdo con Piaget se sugieren:

- Contar secuencias
- Advertir que al sumar uno a uno a cualquier número, da el número siguiente.
- Observar de que los números menores que un número determinado están incluidos en ese número.⁹

2.1.8 Conocimientos infralógicos.

Se caracterizan por la comprensión de los aspectos espacio, tiempo y velocidad y por el reconocimiento de los objetos cuyas propiedades permanecen inalterables a lo que se le conoce como la capacidad de conservar. (se refiere a la capacidad de considerar al mismo tiempo el todo y sus partes, no considerando sólo un aspecto).

La noción de espacio se comprende, en un principio, en función de la construcción de los objetos: sólo el grado de objetivación que el niño atribuye a las cosas permite ver el grado de exterioridad que puede conceder al espacio. El niño comienza a darse cuenta de que existen diferentes puntos de vista de un objeto, no puede comprender cómo éstos están relacionados con su propia posición en el espacio y cómo los desplazamientos de otros objetos en el espacio se relacionan con él mismo. La formación de imágenes mentales u otras representaciones de los cuerpos son el resultado de una abstracción de las propiedades de los objetos mientras el niño los manipula.

El concepto de tiempo se desarrolla paralela y conjuntamente con otras nociones del conocimiento lógico-matemático tales como el “movimiento, la velocidad y el espacio”. Estas nociones son literalmente consideradas como construcciones que no se encuentran “a priori” en la mente del niño, sino que

⁹ Saunders, op.cit, p. 165.

requieren de un proceso evolutivo, que se desarrolla lenta y gradualmente. Los niños deben haber adquirido la capacidad para recordar secuencias de sucesos temporales y espaciales antes de que puedan diferenciar entre estos dos aspectos, en este sentido el principio de la construcción de las relaciones temporales es la capacidad que tenga el niño para recordar una secuencia temporal.

La conservación se refiere a la capacidad de considerar al mismo tiempo el todo y sus partes, no considerando sólo un aspecto, como por ejemplo el número, peso, longitud, volumen y área.

Algunas de las capacidades que se deben adquirir para desarrollar estas nociones son:

1. Comprensión de las referencias espaciales
2. Toma posiciones
3. Relatar experiencias pasadas y futuras
4. Coordinar tiempo y espacio
5. Relatar experiencias pasadas y futuras
6. Coordinar tiempo y espacio
7. Conocer la secuencia de una o varias normas
8. Relacionar experiencias familiares
9. Conocer qué acciones conducen a cambios reversibles y cuáles no.
10. Reconocer qué propiedades cambian cuando se realizan varias acciones
11. Comprender qué el tiempo es independiente de las actividades que se realicen.¹⁰

Para Piaget el comienzo de las operaciones concretas, marca la actividad racional del niño alrededor de los 7 años, éste periodo se caracteriza por el razonamiento lógico sobre ideas que tienen su representación en el mundo real, los niños piensan lógicamente sobre experiencias concretas, clasifican y ordenan objetos y sucesos, en este período su pensamiento es descentralizado

¹⁰ *Ibidem*, p.166.

(toma en cuenta varios aspectos los relaciona y resuelve problemas) y reversible (piensa en dos direcciones como en la suma y la resta que son operaciones inversas) desarrolla habilidades para comprender los conceptos matemáticos.

2.2 Constructivismo.

El constructivismo es una posición en la cual participan diferentes tendencias de la investigación psicológica y educativa. Entre ellas se encuentran la teoría de la genética de Piaget, (que vimos una parte anteriormente), sociocultural de Vygotsky, la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel y el aprendizaje por descubrimiento de Bruner, y aun cuando ninguno de ellos se nombró como constructivista sus ideas y propuestas se manifiestan en los conceptos de esta corriente.

El constructivismo intenta explicar el desarrollo del conocimiento humano, asume que nada viene de nada, es decir que el conocimiento previo da origen a un nuevo conocimiento, que es una construcción propia que se produce como resultado de la actividad cotidiana y de la interacción con el ambiente así como del desarrollo cognitivo del sujeto, sin embargo otros pueden fungir como facilitadores de la construcción que cada sujeto tiene que realizar por sí mismo.

La construcción que el sujeto realiza del conocimiento tiene lugar en su interior y las condiciones que lo hacen posible facilitan o dificultan esa construcción y pueden ser factores externos al sujeto en el sentido de que el conocimiento es un producto de la vida social.

El sujeto tiene un papel activo en la construcción del conocimiento, ya que busca provoca e interpreta la realidad activando los esquemas que son siempre esquemas de acción, que implican una modificación o transformación del material cognitivo.

A continuación describiré el concepto de constructivismo que tiene cada uno de los teóricos antes mencionados.

2.2.1 Jean Piaget (1896-1980)

Plantea que el conocimiento se establece a partir de la relación entre la experiencia que tiene con la realidad del medio que rodea al sujeto y las estructuras de pensamiento que se desarrollan a partir de ella, para adaptarse al mundo. Considera que el aprendizaje depende del desarrollo cognoscitivo, en oposición a la visión tradicional de aprendizaje como un efecto inmediato de la transmisión proveniente de otros.

Para Piaget¹¹ el conocimiento se basa en un equilibrio entre los procesos de asimilación y acomodación, considera que el sujeto no sólo conoce el mundo que lo rodea sino también cambia el concepto que tiene de él a partir de dichos procesos.

Considera que a través de la asimilación los sujetos interpretan la información que surge del medio, en función de sus esquemas o estructuras conceptuales, así que asimilan la nueva experiencia en un marco ya existente en el sentido de que es el sujeto el que le da significado a la realidad, en este sentido se considera que conocemos a partir de que adaptamos las cosas a la forma y al conocimiento de nuestros conceptos, construyendo nuevos conocimientos.

Por lo que la acomodación es el proceso de modificación en la estructura cognitiva o representación mental del mundo externo para adaptar nuevas experiencias. La acomodación se puede entender como el mecanismo por el cual los esquemas cognitivos se reacomodan para dar origen a un nuevo conocimiento. Cuando actuamos con la expectativa de que el mundo funciona en una forma y no es cierto, fallamos a menudo, acomodando esta nueva experiencia y rehaciendo nuestra idea de cómo funciona el mundo, aprendemos de cada experiencia.

“Los procesos de asimilación y acomodación son indispensables para explicar la construcción de los esquemas cognitivos grupo estructurado de acciones,

¹¹ Pozo, Juan Ignacio. (2003). *Teorías Cognitivas del Aprendizaje*. Madrid. Morata. p.178.

conceptos que permiten al individuo repetir, usar y aplicar esas acciones en una nueva situación.”¹²

En este sentido podría decirse que la asimilación y la acomodación son estructuras cognitivas construidas por los propios sujetos para apropiarse del conocimiento.

2.2.2 Lev Vigotsky ¹³(1896-1934)

Propone que el conocimiento es un producto de la interacción social y la cultura, por lo que se le denomina a su teoría sociocultural. Sus contribuciones esenciales han sido la de concebir al sujeto como un ser eminentemente social, en el perfil del pensamiento marxista, y al conocimiento mismo como un producto social.

Plantea una psicología fundamentada en la actividad, considera que a través de instrumentos mediadores los sujetos actúan sobre los estímulos transformándolos, estos instrumentos modifican la realidad activamente.

Vigotsky, considera dos tipos de instrumentos¹⁴ sobre los que se mueve el sujeto según la actividad a ejercer y que son proporcionadas por la cultura, el primero se refiere a las herramientas que actúan materialmente sobre el estímulo transformándolo y modificando en su entorno adaptándose activamente a éste, y el segundo, son los signos o símbolos representados comúnmente por el lenguaje hablado, modificado al sujeto que lo emplea como mediador entre las personas y el medio.

Estas herramientas son los conocimientos previos o intereses del sujeto que modifican los estímulos que le llegan del contexto, a la vez de que los símbolos son un conjunto de signos que utiliza el mismo sujeto para hacer propios dichos estímulos. Modifican no los estímulos en sí mismo, sino las estructuras de conocimiento cuando los estímulos se interiorizan y se

¹² Ruiz Velasco Sánchez Enrique. (2007). *Educatrónica: Innovación en el aprendizaje de las Ciencias y la tecnología*. Madrid. Díaz de santos. p.128.

¹³ Pozo. *op. cit.* p. 190.

¹⁴ *Ibidem.* p. 195.

convierten en propios. Las herramientas están externamente orientadas y su función es situar la actividad del sujeto hacia los objetos, buscando dominar la naturaleza; los símbolos están internamente orientados y son un medio de la actividad interna que apunta al dominio de uno mismo.

En este sentido la línea del desarrollo y aprendizaje iría desde el exterior del sujeto al interior, existiendo un proceso interno o transformación de las acciones externas, sociales, en acciones internas, psicológicas, para Vigotsky, toda función aparece dos veces, a lo que denomina la ley de la doble formación¹⁵, ya que el conocimiento se adquiere procesándolo, primero, desde el exterior, con las herramientas y reestructurándolo luego en el interior, a través de los símbolos.

La relación entre desarrollo y aprendizaje lleva a Vigotsky a concebir su teoría denominada Zona de Desarrollo Próximo¹⁶ (ZDP), la cual adquiere relevancia por sus aportes al análisis de las prácticas educativas y al diseño de estrategias de enseñanza. Se basa en la consideración de dos niveles evolutivos o en la capacidad del niño; por un lado el límite de lo que puede hacer solo de manera autónoma, denominado Zona de Desarrollo Real¹⁷ y el otro que se refiere el límite de lo que puede hacer con ayuda de otras personas o mediadores externamente proporcionados, denominado Zona de Desarrollo Potencial¹⁸.

La zona de Desarrollo Potencial estaría determinada a las funciones que no han madurado completamente en el sujeto, pero que están en proceso de hacerlo.

Entre la Zona de Desarrollo Real y la Zona de Desarrollo Potencial, se encuentra la Zona de Desarrollo Próximo que se entiende según Vigotsky:

¹⁵ *Ibidem*, p.196.

¹⁶ *Ibidem*, p. 198.

¹⁷ W. Santrock, John. *Psicología de la Educación*. (2002). México. Mc Graw Hill. p. 66.

¹⁸ *Ibidem*, p.198.

“Como la distancia entre el nivel de desarrollo, determinado por la capacidad para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz.”¹⁹

Así en la escuela el aprendizaje de los niños esta mediado por la actividad del maestro, que es el encargado de activar los conocimientos previos (a través de las herramientas) y a estructurarlos (a través de los símbolos) proponiéndole actividades de aprendizaje ni demasiado fáciles ni difíciles, sino en el límite de las posibilidades de cada estudiante, es decir en su zona de desarrollo potencial con el fin de ir ampliarla y desarrollarla, así los procesos de aprendizaje y de enseñanza se convierten en la actividad del alumno y del maestro que actúan como mediadores del proceso en el ambiente escolar .

La educación no es un proceso que culmina con el aprendizaje de los niños, ya que los aprendizajes conducen a los procesos de desarrollo, en este sentido la Zona de Desarrollo Próximo nos ayuda a comprender que el aprendizaje constituye la base del desarrollo según Vigotsky.

El profesor toma como punto de partida los conocimientos del alumno y basándose en éstos presta la ayuda necesaria para realizar la actividad, cuando el punto de partida está demasiado alejado de lo que se pretende enseñar, al alumno le cuesta intervenir conjuntamente con el profesor, no está en disposición de participar, y por lo tanto no lo puede aprender.

El concepto de ZDP permite la formación de procesos psicológicos superiores, en tanto da cuenta del papel de la mediación del docente entre el alumno y los contenidos y la adquisición de herramientas necesarias para aprender.

2.2.3 Jerome Bruner²⁰ (1915-)

Bruner al igual que Vigotsky reconoce que el desarrollo es un proceso socialmente mediado, auxiliado, encaminado, en donde la educación y los procesos educativos son cruciales.

¹⁹ Aznar Minguet Pilar y colaboradores. (1999). *Teorías de la educación: Un enfoque Constructivista*. Valencia. Tirant lo Blanch. p. 118.

²⁰ Bruner, S. Jerome. *Desarrollo cognitivo en educación*. (1988). Madrid. Morata. p. 14.

Asimismo crea el concepto de Andamiaje²¹ que sirve para ilustrar la Zona de Desarrollo Próximo de Vigotsky, que indica la cooperación entre el maestro y el estudiante.

El andamiaje consiste en un proceso en el cual el maestro ayuda a los alumnos, simplificándoles las tareas, realizando el trabajo que no pueden hacer al principio, cediéndoles poco a poco hacerse cargo de partes del proceso de construcción del conocimiento, quitándole el apoyo en la medida en que haya alcanzado su competencia y capacidad dentro de la zona de desarrollo desde el punto en que parte su Zona de Desarrollo Próximo.

Bruner considera que el andamiaje debía ser dirigido sólo por el adulto, aunque Vigotsky planteaba que esta ayuda la podían ejercer tanto un adulto como algún compañero que estuviera un poco más adelantado.

Para Bruner la educación:

“es una forma de diálogo, una extensión del diálogo en el que el niño aprende a construir conceptualmente el mundo con ayuda, de un guía, “andamiaje” del adulto.”²²

Para él, el aprendizaje es un proceso activo en donde los alumnos construyen ideas nuevas y conceptos basados en sus conocimientos presentes y pasados, los alumnos deben de seleccionar y transformar la información elaborando hipótesis y tomando decisiones de acuerdo a las estructura cognitiva con la que disponen otorgándole un significado a las experiencias, permitiendo al estudiante ir más allá de la información dada.

Distingue tres sistemas de procesamiento de la información que son claves del desarrollo intelectual del niño, con los que transforman la información que les llega y construyen sus propios modelos de la realidad:

- La acción
- Las imágenes mentales

²¹ *Idem.*

²² *ibidem*, 15.

- Los símbolos (en los que se destaca el lenguaje)

De estos sistemas provienen tres formas de representación que Bruner ha relacionado con los estadios de Piaget, con los que los sujetos representan sus modelos mentales y la realidad, considerando que los niños en edad de aprender necesitan experiencias en los modos de representación en activo, icónico y simbólico.

1. “Representación Enactiva; (o sensoriomotora), se representan cosas mediante la reacción inmediata de la persona, representa a los acontecimientos relacionados con respuestas motoras apropiadas, ésta se ocurre durante los primeros años de edad.
2. Representación Icónica; (o de las operaciones concretas), consiste en representar cosas mediante una imagen o esquema espacial independiente a la acción.
3. La representación simbólica es otra forma de capturar representaciones en la memoria y tiene como base la competencia lingüística aunque evidentemente en Matemáticas, la representación simbólica hace referencia no sólo a definiciones conceptuales sino a leyes, propiedades, estrategias, y supone la forma más elaborada de representación.”²³

Para cualquier idea o problema se podía encontrar una forma lo suficientemente sencilla de presentación a los alumnos, de forma que fuera reconocible y/o comprensible por ellos, en función del nivel de desarrollo cognitivo o del nivel del desarrollo conceptual.

Estas tres formas de representación son reflejo del desarrollo cognitivo y actúan de forma paralela, es decir una vez que uno se adquiere, se pueden seguir utilizando los otros dos facilitando que el aprendizaje sea más fácil de comprender, recordar y aplicar.

²³ *Ibidem*, p. 16.

Para Bruner la motivación es un factor importante en el aprendizaje escolar, resalta la motivación intrínseca ya que cree que los profesores deben valerse de ésta para alimentar la voluntad de niño por aprender, esta se cultiva sacando provecho de las energías naturales o motivo intrínseco de los niños.

2.2.4 David Ausubel²⁴ (1918 - 2008)

Centra sus estudios en las cuestiones educativas dentro de los centros escolares, en un contexto de interiorización o asimilación a través de la enseñanza; ocupándose de los procesos de aprendizaje – enseñanza de conceptos científicos a partir de los conocimientos previos de los estudiantes.

Rescata la importancia de los conocimientos previos en la construcción de nuevos aprendizajes, es decir resalta la organización del conocimiento en estructuras y en reestructuraciones que se presentan al interactuar las estructuras presentes en los sujetos con la nueva información.

Considera que toda situación de aprendizaje se puede explicar a partir de dos planos, que corresponden al tipo de aprendizaje realizado por el alumno que puede ir de lo meramente memorístico a lo significativo y a las estrategias de enseñanza planeadas para fomentar el aprendizaje meramente receptivo expuesto por el profesor o al del descubrimiento espontáneo por parte del alumno en tareas de investigación o de solución de problemas.

Cree que aunque el aprendizaje y la enseñanza interactúan, son totalmente independientes, ya que la enseñanza receptiva o por descubrimiento no puede garantizar que el aprendizaje que se produzca en el alumno sea significativo o memorístico, ya que estos pueden ser posibles en los dos tipos de enseñanza.

Para Ausubel, el aprendizaje es significativo cuando se relaciona, de modo espontáneo con lo que el alumno ya sabe:

“...un aprendizaje es significativo cuando puede incorporarse a las estructuras de conocimiento que posee el sujeto, es decir cuando el nuevo material adquiere significado para el sujeto a partir de su relación con conocimientos anteriores.”²⁵

²⁴ Pozo, op. cit. p. 209.

²⁵ *Ibidem*, p. 211.

Para que esto sea posible el alumno debe contar con las estructuras cognitivas necesarias para asimilar el significado.

Además de que existen ciertas condiciones para que un aprendizaje sea significativo, se debe contar con material no arbitrario, este debe tener significado en sí mismo o sea debe ser lógico o potencial (significado lógico), en los cuales sus elementos se encuentren organizados en una estructura que se relacione entre sí, al mismo tiempo la estructura cognitiva del alumno (significado psicológico) debe contener ideas inclusoras o sea ideas con las que pueda relacionar el nuevo material. En este sentido las construcciones hechas por los alumnos son siempre individuales.

Ausubel²⁶, distingue tres tipos de aprendizaje significativo, el de las representaciones, conceptos y proposiciones en las que existe una escala de significatividad creciente entre cada una de ellas.

Se refiere a las representaciones como a la adquisición del vocabulario, a las primeras palabras que el niño aprende y que representan objetos u hechos reales y no categorías.

La formación de conceptos para Ausubel, son de una estructura lógica, en donde el aprendizaje se produce a partir de situaciones de descubrimiento en donde se incluyen procesos de diferenciación, generalización, formulación y comprobación de hipótesis; en contraste la asimilación de conceptos, se desarrolla en la medida en que los niños reciban educación formal, se irá produciendo en mayor grado una asimilación de conceptos que se relacionaran con los ya existentes en la mente del niño, en este sentido para Ausubel la asimilación de conceptos sería un aprendizaje significativo producido en contextos receptivos y no por descubrimiento, en la medida de que se reciba educación.

Por último el aprendizaje de proposiciones, consiste en adquirir el significado de nuevas ideas expresadas en una frase u oración que contiene dos o más conceptos; en la medida en que las proposiciones impliquen una relación entre conceptos solo podrán ser adquiridas por asimilación, por ende la asimilación

²⁶ Ausubel David, Novak Joseph, Hanesian Helen. (2001). *Psicología Educativa. Un punto de Vista cognoscitivo*. México. Trillas. p. 118.

es el proceso fundamental en la adquisición de significados a partir de la edad escolar.

En función del tipo de relación jerárquica entre las ideas ya existentes y las nuevas ideas Ausubel destaca tres formas de aprendizaje por asimilación: aprendizaje subordinado, aprendizaje supraordinado y aprendizaje combinatorio²⁷, estos consisten en la organización jerárquica que se establece en la estructura cognitiva con los conceptos previos los cuales se enriquecen se modifican o combinan a partir de las ideas de anclaje hasta las ideas de mayor nivel de abstracción.

²⁷ Diaz Barriga, Frida y Gerardo Hernández Rojas. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, una interpretación constructivista*. México. Mc Graw Hill. p. 39.

2.2.5 El constructivismo y las matemáticas

Según el Plan y Programas de Estudios de Educación Básica 1993²⁸, las matemáticas son un producto del quehacer humano cuyo proceso de construcción se basa en abstracciones sucesivas y su conocimiento es un instrumento indispensable para la sociedad.

Se plantea, que la construcción de los conocimientos matemáticos debe partir de experiencias concretas, con las cuales los niños vayan haciendo abstracciones gradualmente hasta prescindir de los objetos físicos, el dialogo la interacción y la confrontación de los puntos de vista de los estudiantes y el maestro ayudarán en su aprendizaje y en la construcción de sus conocimientos.

El logro que se tenga en el aprendizaje de las matemáticas se derivará de las actividades que promuevan la construcción de conceptos a partir de las experiencias concretas de los propios alumnos, así las herramientas matemáticas serán funcionales y flexibles y les permitirán resolver las situaciones problemáticas que se les presenten.

Resalta, que una de las funciones de la escuela es brindar situaciones en las que los niños utilicen los conocimientos que ya tienen para resolver determinados problemas y que a partir de sus soluciones iniciales comprueben sus resultados y sus formas de solución y en esta medida vayan progresando hacia los procedimientos y las conceptualizaciones propias de las matemáticas.

“El contar con las habilidades, los conocimientos y las formas de expresión que la escuela proporciona permite la comunicación y comprensión de la información matemática presentada a través de medios de distinta índole.”²⁹

De acuerdo a lo anterior, considero que se refleja una visión constructivista en el Plan y Programas de Estudios de Educación Básica 1993, en la enseñanza y aprendizaje de las asignaturas y principalmente en el de las matemáticas que es el tema que me ocupa, por lo que en este apartado desarrollaré su vinculación para que los alumnos logren un aprendizaje significativo en el aprendizaje de la multiplicación.

²⁸ Secretaría de Educación Pública. (1994). *Plan y Programas de Estudios 1993*. México. p. 162.

²⁹ Secretaría de Educación Pública. *Op.cit.* p. 49.

El aprendizaje significativo implica que el alumno asimile e integre la nueva información con la que ya posee, y para lograrlo se debe ayudar a los niños a que observen la conexión que existe entre los conocimientos nuevos y los ya tienen.

La enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, requiere partir de tareas programadas intencionalmente para movilizar los conocimientos previos y poner en juego determinadas relaciones procediendo a la reflexión por parte del maestro y el alumno.

Para Hernández³⁰, las matemáticas en los primeros años de primaria, deben basarse en la comprensión y el empleo inteligente de las relaciones y principios matemáticos. Las matemáticas encaminadas a incentivar la comprensión, el razonamiento y la resolución de problemas.

Basa su trabajo en dos vertientes, cómo aprenden los niños matemáticas y en la enseñanza de las matemáticas; considera en base a la primera, que los niños aprenden sacando sentido a lo que va ocurriendo en la clase de matemáticas, creando sus propias ideas. Las experiencias que van adquiriendo en su aprendizaje se van a reflejar en los niños al comprender los conceptos matemáticos no le costara trabajo recordar, en cambio si un niño no comprende no es por falta de práctica sino en que no ha construido su propio conocimiento con el suficiente significado.

Para que los niños encuentren el significado, el maestro debe proporcionarle experiencias que incentiven sus procesos cognitivos, ya que los niños aprenden relacionando mentalmente experiencias pasadas y nuevas, al realizar operaciones mentales como comparar, clasificar, inferir etc.

Con la puesta en práctica de las estrategias escolares los alumnos deberán de tener varias oportunidades de poner en juego lo que ya saben para darle sentido a los nuevos conocimientos.

³⁰ Fuensanta Hernández Pina, Encarnación Soriano Ayala. (1997). *La Enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de la educación primaria: una experiencia didáctica*. Murcia. Editum. p.32.

“Por ejemplo, si están efectuando la multiplicación $23 \times 2 = \dots$, es importante que recuerden que saben multiplicar $20 \times 2 = \dots$ y $3 \times 2 = \dots$ ”³¹

El niño deberá recordar su aprendizaje anterior dándose cuenta que el nuevo procedimiento es una combinación de los aprendizajes previos y a través de las interacción que tenga con el profesor y sus compañeros, el proceso de formar nuevos conceptos y reglas irán enriqueciendo su aprendizaje en la producción de algo nuevo.

Hernández considera, que en los primeros años de educación primaria los niños deben trabajar con materiales concretos o pictóricos, a la vez de que construyan nuevas ideas y las verifiquen con el uso de objetos, imágenes o diagramas, procesando el material mentalmente.

Cree que para que el alumno aprenda significativamente, el maestro debe reflexionar sobre el aprendizaje de sus alumnos antes de diseñar nuevas estrategias, ya que considera que enseñar matemáticas es ayudar a los niños a comprender el significado de los conocimientos matemáticos.

Retoma el trabajo de Holmes³² que parte del modelo cognitivo, para explicar los principios en los que se basa la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria y como los niños aprenden.

Los principios son:

1. Promover el uso de los procesos cognitivos: el aprendizaje de las matemáticas encierra el pensar, formar y reelaborar esquemas o estructuras de conocimiento matemático, los niños tienen que usar sus procesos cognitivos y manipular mentalmente los contenidos; los procesos cognitivos son: recibir, interpretar, organizar, aplicar, recordar y resolver problemas.
2. Hacer hincapié en el aprendizaje de conceptos y generalizaciones: Aprender a construir nuevos significados de la realidad, que se relacionan con los conocimientos previamente adquiridos enriquecen y permiten su aplicación a situaciones cada vez más complejas. Por lo que en la construcción del conocimiento matemático los conceptos y

³¹ Hernández Pina, Fuensanta y Soriano Ayala, Encarnación. (1999). *La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de las matemáticas en educación primaria*. Madrid. La muralla, p. 27.

³² Hernández, *op. cit.* p. 28.

generalizaciones constituyen el contenido de las matemáticas, por lo que se le debe poner mayor énfasis en la enseñanza de las matemáticas, ya que los niños comprenderán y aplicarán las matemáticas mejor que si su enseñanza se basa en los hechos y en reglas aprendidas mecánicamente o memorizadas.

Holmes, describe un concepto como la idea que representa una clase de objetos o hechos que tienen ciertas características en común llamadas atributos críticos y que se aprenden a través de un proceso y pone como ejemplo el concepto de cuadrado.

Llama generalizaciones a las reglas o principios matemáticos, como puede ser la propiedad conmutativa de la suma.

3. Favorecer la motivación intrínseca: Resalta que uno de los pilares de la concepción constructivista a la hora de enseñar es el grado de desarrollo o la capacidad general del alumno, sus conocimientos previos, la motivación para aprender significativamente y sus intereses personales. Por lo que considera que la motivación es un estímulo para alcanzar objetivos y por lo cual es un componente importante en la planificación y desarrollo de las estrategias de enseñanza. El diseño y desarrollo de una matemática motivadora ha de tener en cuenta, las características de los alumnos a los que va dirigida la clase para que los niños le asignen un significado en función de sus intereses y capacidades; considera tres factores para que las matemáticas sean motivadoras, el primero, la convicción con la que el maestro asuma su importancia, la segunda, la intencionalidad motivadora considerada en sus diversos elementos constitutivos y por último, su concreción en la práctica de cada día.

Sin la relación afectiva entre el alumno y el contenido que se le presenta a los niños para su aprendizaje, resulta claro la probabilidad de fracaso en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

“La motivación interna en matemáticas implica el interés por esta materia y el deseo de progresar.”³³

Sí la motivación intrínseca se relaciona con las estrategias y se trata de que la misma realización de éstas se conviertan para los alumnos en experiencias placenteras, se tendrán que dar situaciones de enseñanza en la que los alumnos tengan la oportunidad de tener desafíos ni muy fáciles ni muy difíciles acordes a sus propias competencias.

4. Atender a las diferencias individuales: el maestro debe estar consciente de las diferencias entre sus alumnos y que estos aprenden a ritmos diferentes, por lo que su aprendizaje se refleja en sus habilidades para construir y procesar mentalmente los contenidos matemáticos. Por lo que el maestro deberá contar con estrategias apropiadas para toda la clase o en determinado momento para la atención de la diversidad.

En resumen Piaget, considera las etapas de desarrollo de los niños desde la niñez hasta la adolescencia, en las cuales el niño va ir desarrollando determinadas características en su sistema cognitivo, dependiendo de la etapa en la cual se encuentren.

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debemos tomar en cuenta el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los niños para determinar su madurez.

Piaget considera tres tipos de conocimiento que son la base del desarrollo del pensamiento lógico-matemático en el niño: conocimiento físico o empírico, conocimiento reflexionante o lógico matemático y conocimiento social, que son producto de la actividad del sujeto a partir de la coordinación de sus propias acciones y no de las propiedades de los objetos, estos son apoyos de los cuales se sirve el niño para su propio desarrollo.

Reconoce que clasificación, la seriación y el concepto del número son nociones que el niño debe ir consolidando de acuerdo a su desarrollo y que le permiten ir fortaleciendo su pensamiento lógico-matemático.

³³ *Ibidem.* p.33.

El Plan y Programa de estudios de 1993, centra la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en un enfoque constructivista, en la medida en que plantea la construcción de los conocimientos matemáticos a partir de experiencias concretas y significativas de los estudiantes.

Piaget, Vigotsky, Bruner y Ausubel, son algunos de los autores que se les ha considerado dentro de la corriente constructivista de aprendizaje, cada una de sus aportaciones ha sido retomado para explicar como el niño construye el conocimiento o se apropia de este partiendo de sus experiencias anteriores.

Para el constructivismo poder vincular las vivencias anteriores con los nuevos aprendizajes a partir de experiencias concretas y significativas, es como el niño va construir el conocimiento modificando así su estructura cognitiva.

El aprendizaje de las matemáticas a partir del constructivismo centra la actividad del alumno, en sus intereses, motivaciones y sus necesidades.

Hernández considera que los niños de los primeros años deben trabajar con materiales concretos que les faciliten su aprendizaje, a la vez de que construyan nuevas ideas y las verifiquen con el uso de objetos, imágenes u operaciones mentales como comparar, clasificar, inferir etc., procesando el material mentalmente.

En este sentido el maestro debe plantear estrategias enfocadas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que motiven a los alumnos a construir conceptos a partir de sus propias experiencias y resuelvan situaciones problemáticas que le sean significativas y que generen la reflexión tanto con el maestro como con sus compañeros.

Holmes plantea que el aprendizaje de las matemáticas se debe basar en 4 principios, promover el uso de los procesos cognitivos, la importancia de enseñar a partir de conceptos y generalizaciones, favorecer la motivación intrínseca y atender las diferencias individuales.

CAPÍTULO 3.

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

En este capítulo abordo el tema de la didáctica de las matemáticas que estudia los procesos de transmisión y adquisición de diferentes contenidos en la situación escolar, describiendo y explicando los fenómenos referentes a su enseñanza y aprendizaje en distintas situaciones didácticas a través de una visión constructivista.

También, definiré lo que es una estrategia didáctica de aprendizaje y de enseñanza. Ya que considero que es importante tener dichas herramientas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que generen un aprendizaje con sentido.

Por último me refiero a la importancia del juego como una estrategia con la cual los niños puedan adquirir la enseñanza de las matemáticas de una manera lúdica y más o menos vivencial dentro del salón de clases, adquiriendo un aprendizaje significativo de acuerdo a sus conocimientos previos e intereses.

La naturaleza lúdica de las matemáticas brinda al niño y al maestro la posibilidad de divertirse con su aprendizaje al superar los retos que se le plantean aprovechando la motivación intrínseca y conduciéndolos a una mayor comprensión matemática.

3.1 Didáctica de las matemáticas

La didáctica de las matemáticas tuvo su origen en Francia a fines de los años 60s, formada básicamente por matemáticos en el Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM), sus primeros trabajos se enfocaron a la actualización de los maestros, en los programas y en la preparación de materiales para el uso del maestro y los alumnos en el aula.

Más tarde se plantearon la necesidad de hacer una investigación científica de los procesos que tienen lugar en el dominio de la enseñanza escolar de las matemáticas, tomando distancia de las matemáticas y de la pedagogía para desarrollar un campo teórico específicamente adaptado a su propia problemática y a sus propios métodos de investigación.

Uno de los principales investigadores del IREM han sido Guy Brousseau, que ha desarrollado una concepción llamada FUNDAMENTAL y define a la didáctica de las matemáticas como:

“Ciencia que se interesa en la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, y en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específico”³⁴

Su especificidad radica en:

- Las operaciones esenciales de la difusión de los conocimientos, las condiciones de esta difusión y las transformaciones que produce, tanto en los conocimientos como en quien los utiliza;
- Las instituciones y las actividades que tienen como objetivo el facilitar estas operaciones.

Es evidente que la escuela francesa considera el proceso de enseñanza – aprendizaje desde un punto de vista sistémico en donde debe existir una vinculación entre el alumno, maestro y el saber enseñado.

³⁴ D' More Bruno, *Didáctica matemática*. (2006). Bogotá. Corporativa Editorial del Magisterio. p. 56.

Bajo este punto de vista la enseñanza – aprendizaje no puede ser estudiada globalmente sin que influya uno con el otro.

Como se puede apreciar el sistema didáctico se determina partir de las relaciones que se crean entre estudiante, maestro y saber.

A continuación, presentaré algunos conceptos que se derivan de esta concepción, cada uno de ellos trata de explicar el sistema de enseñanza de las matemáticas, así como el sistema didáctico que se maneja de una manera independiente a ciertas restricciones u elecciones; identificando las restricciones y poniendo de manifiesto cómo la variedad de opciones producen diferentes formas de aprendizaje, a partir de la construcción del alumno de su propio conocimiento.

- Situaciones didácticas
- Obstáculos
- Instituciones
- Transposición didáctica
- Contrato Didáctico

Brousseau, define las situaciones didácticas de la siguiente manera:

“Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor).”³⁵

Todo esto con el objetivo de que los alumnos se apropien de un saber construido o en vías de construcción.

La importancia de las situaciones didácticas sería cómo se construye el “saber”, qué situaciones didácticas constituyen el objeto de conocimiento en el

³⁵ Godino Juan D. (2003). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. p.19. <http://www.ugr.es/local/jgodino/> [Consulta: 9 noviembre 2008]

alumno, con el fin de su control, su optimización y su reproducción en situaciones escolares.

Se admite un punto de vista piagetano, en el sentido de que Piaget considera que todo conocimiento se da por interacción constante entre sujeto - objeto, esta postura constructivista se diferencia de otras teorías por la forma en que caracteriza la relación alumno -saber. Los contenidos serán la esencia en la cual se van a desarrollar las estructuras mentales de los alumnos.

Brousseau, piensa que la propuesta Piagetana de considerar el aprendizaje natural corre el riesgo de liberar de toda responsabilidad didáctica al maestro. Él cree que la educación debe provocar en el alumno las adaptaciones deseadas mediante una selección cuidadosa de los problemas y de las situaciones que se le propongan.

Para Brousseau, el diseño de las situaciones didácticas debería estar planeado a partir de los saberes definidos culturalmente en los programas escolares, apoyándose en la tesis de que el sujeto que aprende necesita construir por sí mismo sus conocimientos mediante un proceso adaptativo.

Es el profesor el que pone en contacto al alumno con el medio y al hacerlo, devuelve al alumno la responsabilidad de su aprendizaje (a-didáctica)³⁶. Es decir, el alumno al interactuar con un problema, selecciona, anticipa, ejecuta y controla las estrategias que aplica a la resolución del problema planteado por la situación didáctica, formando nuevas concepciones.

Es así que la teoría de aprendizaje de las situaciones didácticas tiene un enfoque constructivista en la medida en que el aprendizaje se produce a partir de la resolución de problemas, en donde el alumno que resuelve el problema juega un papel importante construyendo su propio conocimiento.

³⁶ Se hallan en juego los estudiantes y el objeto de conocimiento, pero no el maestro.

Brousseau, contempla cuatro tipos de situaciones didácticas, determinadas por el conocimiento matemático ya que éste no sólo incluye conceptos sino también sistemas de representación simbólica, procesos de desarrollo y validaciones de nuevas ideas matemáticas:

1. Situaciones de acción: en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos toman las decisiones para organizar la resolución del problema planteado. El alumno es capaz de actuar en busca de resultados, individual o colectivamente.
2. Situaciones de formulación: establecen el intercambio de información entre los alumnos, modificando su lenguaje con la utilización de términos, manejándolos en la información que deben comunicar. Este modelo de explicación debe tener sentido para el niño facilitando que, en las situaciones que utiliza para ello, el alumno sea retroalimentado a través de su interés de comunicar la estrategia que ha descubierto.
3. Situaciones de validación: los alumnos deben demostrar la validez de sus resultados, elaborando pruebas y explicando el porque esa afirmación es la correcta. El alumno necesita demostrar que la estrategia empleada es correcta explicándola y probando cada una de las fases anteriores que utilizó para llegar al resultado.
4. Situaciones de institucionalización: Son las que establecen los convencionalismos sociales, los alumnos deben asumir la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situación de acción, formulación y de validación de nuevas ideas. En este sentido, el maestro tendrá que organizar las situaciones que promuevan en sus alumnos una adaptación que de cómo resultado la elaboración de nuevos conocimientos, a la vez de que identifiquen el instrumento construido como un conocimiento convencional y familiar para ellos. El papel de maestro sería ahora el de un guía y no el que posee y provee el conocimiento.

Cada situación didáctica va estar determinada por el conocimiento específico que se quiere enseñar, en el supuesto en que cada una hará funcionar dicho conocimiento bajo una modalidad diferente. Ya que cada situación es fundamental en la medida en que se tenga claro el conocimiento que interesa enseñar a través de un juego de variables en las que se les haga coincidir en cualquier situación en la cual intervenga un conocimiento.

Las cuatro situaciones didácticas conforman las etapas en que se lleva a cabo el proceso de resolución de problemas. Las estrategias y modelos que se construyen se comprometen en la fase siguiente, funcionando como estrategias y modelos de base para la construcción de conocimientos diferentes.

Siempre los cambios causan algún desajuste en los alumnos y al tenerse que adaptar a un medio social establecen nuevas relaciones cognitivas, se apropian de concepciones y lenguajes, los cuales les pueden provocar una ruptura entre los conocimientos anteriores que no han sido aprendidos con claridad y los nuevos, estos rompimientos pueden ser advertidos directamente por la teoría de las situaciones didácticas e indirectamente por los alumnos. Para el análisis de los problemas que se presentan Brousseau creo la idea de obstáculo.

“...viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes.”³⁷

Para superarlo se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones.

³⁷ D´ More. Op.cit. p. 222.

El obstáculo es en este sentido, un problema que se presenta cuando se aplica una situación didáctica específica para un conocimiento determinado y el alumno se resiste a cambiar su estrategia e insiste en proseguir con la misma para la solución de todos los problemas, esto no le permite desarrollar nuevas concepciones o aprendizajes.

Los obstáculos podrían ser todo aquello que se antepone al conocimiento, como cuestiones neurofisiológicas, de desarrollo de la inteligencia, las concepciones de los propios maestros y alumnos, de currículo escolar, del propio discurso matemático que implica cuestiones como el lenguaje, la evolución y continuidad de los conceptos.

Con respecto a las instituciones, Chevallard considera que el problema de la didáctica de la matemática radica en las instituciones con el saber; de sus condiciones y sus efectos ya que piensa que el saber no es absoluto, porque obedece a la institución en la que se halla el sujeto. Y establece lo que ha denominado contrato didáctico para asentar específicamente estas relaciones y del cual comentaré más adelante.

La transposición didáctica, sería prácticamente el ajustar el conocimiento matemático, para transformarlo en un saber para enseñar en función de los sujetos y de los objetivos didácticos.

El trecho que existe, entre el saber enseñar y el saber científico, no es permisible en el sentido de que dicho conocimiento depende de su legitimación, el desenvolvimiento de los conocimientos en su transcurso de adaptación supone la delimitación de conocimientos parciales, la descontextualización y por último su despersonalización, transformando el contenido original por un contenido pedagógico para que pueda ser enseñado. Esto no va a garantizar, principalmente en los primeros años de educación, reconstruir la noción original ni llenar únicamente las funciones para las que fue creado.

Cuando no hay una igualdad entre las partes, la escuela debe de replantear su programa, y corresponde a los maestros como agentes activos, vigilar la práctica de los estudiantes, adaptar los conocimientos, elaborar sus clases, realizar ejercicios y actividades en los cuales los saberes tengan un sentido de acuerdo a los programas; tomando en cuenta la edad de los alumnos, y los propios objetivos, como se mencionó con anterioridad la transposición didáctica

consistiría en sacar un elemento del saber de su contexto para recontextualizarlo en un contexto único de su clase.

La escuela nunca ha enseñado saberes puros sino contenidos de enseñanza, en el momento en que el saber matemático entra en un programa escolar sufre un cambio, se desnaturalizan existiendo una deshistorización de los propios conceptos, entran en una lógica diferente, en el ámbito del funcionamiento didáctico recontextualizando los conceptos ya no en el interior de un saber, sino del saber enseñado, sin devolver al saber su noción original, esto se observa principalmente en los niveles de enseñanza básica.

El concepto de contrato didáctico surgió del fracaso que mostraban algunos alumnos al presentar déficit de atención, dificultades de aprendizaje o falta de gusto en el dominio de las matemáticas, pero que se realizaban adecuadamente en otras disciplinas.

Según Brousseau, el contrato didáctico es:

“un conjunto de comportamientos del profesor que son esperados por los alumnos y al conjunto de comportamientos de los alumnos que el profesor espera de ellos”³⁸

Cuando nos referimos a contrato didáctico hablamos de las relaciones que se establecen entre el profesor y el alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje, el papel que juega cada uno ante una situación didáctica determinada dentro del salón de clases.

El contrato didáctico regula las relaciones que maestro y alumnos mantienen con el saber, establece derechos y obligaciones de unos y otros en relación con cada contenido escolar. En el contexto escolar el alumno debe ofrecer respuestas de acuerdo al propio razonamiento del contrato didáctico (instituciones).

La difusión del saber exige que el contrato didáctico sea replanteado, modificado, reconstruido por parte de la transposición didáctica ya que las relaciones y obligaciones que se establecen mediante el proceso didáctico causa consecuencias desfavorables en el alumno, deteriorando y suplantando

³⁸ *Idem*. p.222

en algunas ocasiones el aprendizaje, perdiendo totalmente el significado para el que fue planeado.

El contrato didáctico no está determinado por el conocimiento sino que a cada situación corresponde un contrato y por consecuencia es temporal, es por eso que el maestro no debe limitarse a formular un único contrato, éste tiene que mostrarse a favor de la elección, la ruptura y la situación de contratos siguiendo las normas que regulan el sistema didáctico que permitan mantener su eficacia. Brousseau a partir de un enfoque sistémico piensa que las regulaciones son inseparables a la acción y que éstas conducen a que el profesor haga uso de nuevos métodos y a la celebración de diferentes contratos, en donde se tendrán que aceptar los fracasos en el sistema, obligándolos a establecer otro funcionamiento; propone un tipo de contrato en donde el profesor asuma mayores responsabilidades, como los basados en la transformación de saberes previos y en donde el sujeto actúe de acuerdo a la situación, en base a su propio razonamiento.

En México las investigaciones de la Didáctica Matemática tienen su origen en el Departamento de Investigaciones Educativas CINVESTAV en 1978, con un grupo de investigadores conformado por psicólogos, pedagogos y matemáticos tuvieron que entender los obstáculos epistemológicos que enfrentaban los alumnos y analizar las concepciones de los maestros sobre su quehacer profesional, además de realizar investigaciones que se centraron en el diseño, análisis y experimentación en aulas escolares a partir de la secuencia de determinado tipo de situaciones didácticas para el aprendizaje de los contenidos específicos, influenciados desde una perspectiva constructivista del aprendizaje y retomando los principios de Guy Brousseau o la escuela francesa.

Destacan la importancia de la relación alumno- conocimiento-maestro dentro del aula, dentro del proceso didáctico, de tal forma que se produzca lo que denominan Dialéctica de la Acción.

Consiste, en que el alumno refuerce y abandone sus propios modelos mentales al presentarle una situación de aprendizaje distinta, enriqueciéndolos en el momento en que empieza a crear o a construir su conocimiento regulando su acción.

Las acciones sobre los objetos resultan indispensables para la comprensión de las relaciones aritméticas y geométricas en los niños de preescolar y primaria; en la medida en que las experiencias lógico-matemáticas se obtienen cuando el niño ejerce acciones sobre los objetos de una manera lúdica y significativa enriqueciendo su desarrollo cognitivo.

3.2 Estrategias de enseñanza y aprendizaje

El aprendizaje y la enseñanza son dos procesos distintos, sin embargo existe una relación directa entre los términos de enseñanza y aprendizaje, en la medida en que se busca que el alumno aprenda, no sólo enseñar sino como propiciar el aprendizaje, ya que la enseñanza es la actividad que dirige el aprendizaje.

El vínculo enseñanza y aprendizaje no es una relación causa –efecto ya que existe el aprendizaje sin enseñanza formal y también hay enseñanza formal sin aprendizaje

“El aprendizaje es el proceso de adquisición cognoscitiva que explica, en parte, el enriquecimiento y la transformación de las estructuras internas, de las potencialidades del individuo para comprender y actuar sobre su entorno.”³⁹

En el aprendizaje influyen procesos psicológicos y biológicos, así como externos como la forma en que el profesor organiza la clase, los contenidos, métodos y actividades.

El aprendizaje escolar es un proceso activo, basado en las experiencias de los sujetos, es una actividad mental en la que los alumnos se aplican en el manejo directo de los contenidos, asimilando la información, otorgándole un significado dentro de su esquema mental, a la vez de que modifican su comportamiento, la formación de nuevas actitudes y el enriquecimiento de su personalidad con nuevos y mejores recursos cognitivos, que favorecen la convivencia social y cultural.

El aprendizaje es un proceso que presume un cambio conductual y ocurre a través de la práctica o de otras formas de experiencia, a la vez de que debe ser perdurable en el tiempo.

³⁹ González Ornelas Virginia. (2003). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje*. México. Pax México. p. 2.

Por otro lado la enseñanza es una actividad realizada conjuntamente mediante la interacción de 3 elementos: el profesor, el alumno y el objeto de conocimiento.

Una característica de la enseñanza es la intencionalidad para transmitir los conocimientos, que es provocar en base de diferentes situaciones el proceso de aprender, los niños adquieren muchos conocimientos fuera de la escuela de forma cotidiana, pero es en ésta donde aprenden intencionalmente los contenidos establecidos y que el profesor debe enseñar en base a diferentes estrategias.

El maestro actúa como facilitador y vínculo entre el conocimiento y los alumnos, consiguiendo una interacción establecida por el interés de los alumnos por aprender.

Considerando el enfoque cognitivo son tres las etapas en el proceso de enseñanza que deben considerarse; la búsqueda de saberes previos que podrían facilitar o entorpecer el aprendizaje, la activación de estos conocimientos al presentar los contenidos y por último, la integración de la nueva información.

Creo que la importancia de la enseñanza radica de alguna manera en las estrategias que el maestro planea y faciliten intencionalmente un procesamiento de la información que se va aprender, por lo que a continuación plantearé lo que son las estrategias de enseñanza y aprendizaje a partir del constructivismo.

Siguiendo el trabajo de Díaz Frida⁴⁰; considera, que las estrategias de enseñanza, son procedimientos que el profesor utiliza de forma reflexiva y flexible para promover el logro de aprendizajes significativos en los alumnos; son medios o recursos para prestar la ayuda pedagógica que el maestro requiere en el salón de clases.

⁴⁰ Díaz Barriga, Frida y Hernández Rojas Gerardo. *op.cit.* p. 465.

Considera, 5 aspectos que se deben de tomar en cuenta para la elección de las estrategias y de qué modo el maestro haga uso de ellas y pueda ajustar su clase.

1. Consideración de las características generales de los aprendices (nivel de desarrollo cognitivo, conocimientos previos, factores motivacionales, etcétera).
2. Tipo de dominio del conocimiento en general y del contenido curricular en particular, que se va abordar.
3. La intencionalidad o meta que se desea lograr y las actividades cognitivas y pedagógicas que debe realizar el alumno para conseguirla.
4. Vigilancia constante del proceso de enseñanza (de las estrategias de enseñanza empleadas previamente, si es el caso), así como el progreso y aprendizaje de los alumnos.
5. Determinación del contexto.

Algunas estrategias de enseñanza son:

- Objetivos; enunciados que establecen condiciones, tipo de actividad, la evaluación del aprendizaje del alumno.
- Resúmenes; abstracción de la información importante, subrayan conceptos clave.
- Organizadores previos; información de tipo introductorio y contextual. Establecen un puente cognitivo entre la información nueva y la previa.
- Ilustraciones; representaciones visuales.
- Organizadores gráficos; cuadros sinópticos.
- Analogías; proposiciones que indican un evento o alguna cosa familiar o semejante a otro.

- Preguntas intercaladas; preguntas insertadas en una situación de enseñanza, que mantienen la atención y favorecen la retención.
- Señalizaciones; destacan elementos relevantes del contenido por aprender.
- Mapas y redes conceptuales; esquemas de conocimiento que indican conceptos, proposiciones o explicaciones.
- Organizadores textuales; organizaciones retóricas de un discurso que influye en la comprensión y el recuerdo.

Estrategias que promueven los procesos cognitivos

- Estrategias para activar conocimientos previos; se refieren a las estrategias dirigidas a activar conocimientos previos o a generarlos cuando no existan. Se recomienda usarlas al inicio de la clase, un ejemplo puede ser preguntas previas, la actividad generadora de información discusión guiada.
- Estrategias para orientar y guiar a los estudiantes sobre los contenidos de aprendizaje; son recursos que el maestro utiliza para guiar la atención de los estudiantes, estas pueden aplicarse de manera continua para indicar a los alumnos en que conceptos o ideas focalizar los procesos de atención y codificación. Pueden realizar señalizaciones internas o externas al discurso escrito u oral.
- Estrategias para mejorar la codificación (elaborativa) de la información a aprender; su intención es conseguir que la información nueva por aprender se enriquezca en calidad proporcionándole una mayor contextualización o riqueza elaborativa para que los estudiantes la asimilen mejor. Se puede usar información grafica como las ilustraciones.
- Estrategias para organizar la información nueva por aprender; proporcionan una adecuada organización de la información que se ha de aprender mejorando su significado lógico y haciendo más probable el aprendizaje significativo en los alumnos, se pueden utilizar estrategias de representación como mapas, cuadros sinópticos etc.

- Estrategias para promover el enlace entre los conocimientos previos y la nueva información que ha de aprender; ayudan a crear enlaces adecuados entre los conocimientos previos y la información nueva a aprender, asegurando un aprendizaje significativo de los aprendizajes logrados a este proceso de integración Mayer⁴¹, lo denomina construcción de “conexiones internas”. Se recomienda usar estrategias como los organizadores previos y las analogías.

Las estrategias de aprendizaje que presento parten de los enfoques cognitivos y constructivistas que se plantean en el texto de Frida Díaz⁴².

Las estrategias de aprendizaje se consideran como procedimientos que un estudiante emplea de manera consciente, controlada e intencional como instrumentos que le ayudan aprender y a solucionar problemas de una manera significativa y que son emprendidas por los estudiantes siempre que tengan algo que aprender o solucionar problemas de algún contenido de aprendizaje. Entre los puntos más característicos de las estrategias de aprendizaje sobresalen:

- a) Son controladas, demandan de la toma de decisiones, de actividades previamente planificadas y de controlar su ejecución.
- b) Su aplicación requiere de dominar las técnicas que las constituyen y de saber de cómo y cuándo aplicarlas.
- c) Obliga al estudiante a elegir inteligentemente entre varios recursos y capacidades que tenga a su disposición. Se utilizan en función de las demandas contextuales y del interés de las metas de aprendizaje planteadas.

La activación de estas estrategias depende de otros recursos y procesos cognitivos con los que cuenta el alumno y que se activan en forma mezclada y compleja cuando el estudiante utiliza las estrategias de aprendizaje⁴³:

- Procesos cognitivos básicos: como la atención, percepción, codificación, almacenaje, etc.
- Conocimientos conceptuales específicos: conocimientos previos.

⁴¹ *Ibidem.* p. 147.

⁴² *Ibidem.* p. 233.

⁴³ *Ibidem.* p. 235.

- Conocimiento estratégico: estrategias de aprendizaje (saber cómo conocer).
- Conocimiento metacognitivo: se relaciona con el conocimiento que se obtiene sobre qué y cómo lo saben, también sobre los procesos y operaciones cognitivas (como el recordar y el de solucionar problemas).

Frida Díaz, hace referencia a dos propuestas de estrategias de aprendizaje basándose en el tipo de proceso cognitivo y su finalidad encabezada por Pozo⁴⁴ y las estrategias que se refieren a determinados materiales de aprendizaje y su efectividad planteadas por Alonso⁴⁵, las primeras son:

Estrategias de recirculación de la información: Son de las más simples, suponen un procesamiento superficial y se utilizan para conseguir un aprendizaje memorístico o repetitivo de la información hasta lograr establecer una asociación para integrarla a la memoria a largo plazo, son útiles cuando los materiales son de escaso significado lógico o psicológico.

Estrategias de elaboración: integran y relacionan la información nueva con los conocimientos previos. Estas pueden ser simples o complejas dependiendo del nivel de profundidad que se establezca en la integración. También pueden diferenciarse por el tipo de elaboración visual y verbal-semántica. Estas estrategias proporcionan una codificación más profunda de la información que se ha de aprender por tener en cuenta su significatividad.

Estrategias de organización de la información: organizan de una manera constructiva la información que ha de aprenderse con la intención de lograr una representación correcta de ésta.

“Tanto las estrategias de elaboración como en las estrategias de organización, la idea fundamental no es simplemente reproducir la información aprendida, sino ir más allá, con la elaboración u organización del contenido”⁴⁶.

El objetivo de estas estrategias de aprendizaje es que los alumnos vayan descubriendo y construyendo significados, encontrándole el significado a la información a la vez de que permiten una mayor retención de los contenidos.

En segundo lugar las estrategias basadas en el tipo de información sobre la naturaleza de la información que se ha de aprender, estas estrategias van a la

⁴⁴ *Ibidem.* p. 238.

⁴⁵ *Idem.* p. 238.

⁴⁶ *Ibidem.* p. 240.

inversa a las anteriores porque se clasifican según el tipo de contenido declarativos.

Estrategias de aprendizaje para contenidos declarativos de tipo factual (términos, listas, o pares de términos).

Repetición simple parcial acumulativa: facilita el aprendizaje de términos que se han de acordar en un orden determinado cuyas características son simple, se repite varias veces cada término, parcial los términos se repiten juntos, acumulativa se va añadiendo a cada repetición otro término más a los de las veces anteriores.

Organización categorial: se utiliza cuando se tienen que aprender conjuntos de nombres en un orden cualquiera, agrupando los nombres en categorías de pertenencia.

Elaboración verbal y visual: útil para aprenderse palabras asociadas a un contexto o pares de palabras asociadas. Se pueden crear frases asociadas a lo que se ha de aprender o crear imágenes que faciliten su asociación.

Este tipo de estrategias son buenas para aprender contenidos como símbolos químicos o matemáticos, fórmulas, datos numéricos, fechas históricas, listas de palabras, asociaciones de palabras etc.

Por último, César Coll y Valls⁴⁷ retomando los planteamientos de Vigotsky y Bruner sobre de la zona de desarrollo próximo, plantean una estrategia llamada “estrategia guía” para la enseñanza de cualquier tipo de habilidad o estrategia cognitiva, de aprendizaje, metacognitiva, autorreguladora. Se basa en la idea de que las herramientas que forman parte de un acervo cultural se aprenden progresivamente en un contexto interactivo y compartido, estructurado entre el maestro y el alumno. El maestro actúa como un guía (andamiaje) provocando situaciones de participación guiada con los alumnos, hasta lograr la construcción de procedimientos estratégicos que le permitan al alumno apropiarse de dichas estrategias y emplearlas en la adquisición de su aprendizaje.

⁴⁷ *Ibidem.* p. 258.

3.3 El juego en el aprendizaje de las matemáticas

El juego es una actividad que ha estado presente siempre a lo largo de nuestras vidas y ha sido un elemento necesario para nuestro desarrollo y formación, a través de él hemos aprendido pautas de comportamiento.

El juego es una actividad libre, desarrollada de forma espontánea, ya que no posee una finalidad exterior.

El juego en los niños surge de una manera natural, instintiva, representando necesidades evolutivas, no sólo responde a una tendencia del niño sino también a la imitación, es una manera de aprender y descubrir nuevas realidades, es una forma de socialización, es una fuente inagotable de aprendizaje durante la vida.

Para Piaget, el juego evoluciona y cambia a lo largo del desarrollo en función de la estructura cognitiva, del modo de pensar concreto en cada estadio cognitivo, el juego es una forma de compensar la imposibilidad de adaptación e inmadurez de las estructuras cognitivas.

Clasifica el juego en cuatro categorías que responden a la evolución cognitiva de los niños:

1. Juego funcional o de acción: El niño realiza actividades sobre su propio cuerpo. Sus acciones carecen de normas no tienen un objetivo fijo, el niño pasa la mayor parte del tiempo explorando, la mayor parte de las actividades se realizan en solitario o en interacción con los adultos que se convierten en su principal compañero del juego.
2. Juego de Construcción: Se realizan actividades que conllevan a la manipulación de objetos con la intención de crear o construir algo, haciéndose más complejo en la medida en que el niño avanza en su desarrollo.

Juego Simbólico: Es la actividad más frecuente entre los 2/7 años de edad. Surge una nueva forma de juego para el niño, como el juego simbólico, representacional o sociodramático, a través del juego los niños manifiestan

comportamientos que forman parte de su realidad, acomodando o modificando la acción de acuerdo a sus intereses, este tipo de juego puede:

1. ser individual o social, y evoluciona en la medida en que los niños manipulan objetos o su propio cuerpo para simular algún aspecto de la realidad, adquiriendo mayor complejidad en el momento en que aumente el conocimiento de las acciones que se pueden ir incluyendo en el juego.
2. Juego de Reglas: A partir de los 7 años, el niño inicia formas de juego constituidos por normas y reglas, que cada participante debe conocer y respetar. Los niños deben de superar su egocentrismo para situarse en el lugar del otro, controlando sus deseos y motivaciones personales. La complejidad que caracteriza el juego de reglas se relaciona con el conocimiento de reglas que tiene el niño durante su desarrollo cognitivo. A partir de los 11 años los niños son más conscientes de que las reglas son acuerdos adoptados por las personas y que se pueden modificar de acuerdo al objetivo.

A diferencia de Piaget, Vigotsky considera que el juego es una forma de actuación cognitiva espontánea que refleja el proceso de construcción de conocimiento y de organización de la mente que tienen su origen en el marco social que influye sobre la actividad del sujeto.

El símbolo lúdico para Vigotsky, no es un signo de naturaleza abstracta y generalizado, sino un símbolo concreto, cultural e históricamente marcado por el contexto, que le permite al niño llegar a una elaboración de una necesidad no resuelta, aquello que el ambiente deja sin satisfacción es resuelto a través del juego con un conjunto de acciones adaptativas.

La acción es el origen del juego en Vigotsky, y es la acción que el niño ejerce sobre los objetos la que da significado.

Para distinguir al juego infantil de otra clase de actividad, Vigotsky plantea: la creación por parte del niño de una situación imaginaria y la presencia de reglas como parte de esta situación.

“La creación de una situación imaginaria no es un hecho fortuito en la vida del pequeño, sino más bien la primera manifestación de su emancipación de las limitaciones situacionales”⁴⁸

Por lo que Vigotsky, plantea dos paradojas la primera se refiere a la acción del niño de acuerdo a un significado alineado a una situación real, en la segunda el juego del niño adopta la línea de menor resistencia y, al mismo tiempo, aprende a seguir la línea de mayor resistencia, sometándose a ciertas reglas y renunciando a lo que desea, por lo que al sometimiento a las reglas y la renuncia a la acción impulsiva constituyen el camino hacia el máximo placer en el juego.

Desde este punto de vista el juego forma el motor de desarrollo, en la medida en que crea constantemente zonas de desarrollo próximas a partir de que el niño adquiere conciencia de las reglas y de los comportamientos previsibles o creíbles dentro del escenario construido, atendiendo a las reglas sociales presentadas en las situaciones imaginarias.

Enseñar en este contexto supone facilitarle al niño experiencias e instrumentos variados, cada vez más ricos y complejos, para que construya aprendizajes realmente significativos, de acuerdo con su nivel evolutivo y con el contexto sociocultural en que vive. De ahí la necesidad de resituar las expectativas de logros y consideración de sus necesidades e intereses.

Por otro lado Bruner, considera que el juego tiene la función de guía del desarrollo en el niño y sostiene que las formas más complejas del lenguaje se dan en el ambiente del juego.

Le atribuye al juego distintas funciones, la primera, como un medio para explorar; la segunda, la actividad lúdica se caracteriza por una pérdida entre los medios y los fines de modo que los cambios que realiza el niño durante el juego unas veces como fin y otras como medio, permiten que sea un verdadero medio para la exploración y la invención; la tercera, el juego no se da al azar,

⁴⁸ M. Sarlé Patricia. (2006). *Enseñar el juego y jugar a la enseñanza*. Buenos Aires. Paidós. P. 43.

este se desarrolla a partir de un escenario; en cuarto lugar, el juego transforma el mundo exterior de acuerdo a los deseos, opuesto al aprendizaje, en el cual debemos transformarnos para adaptarnos mejor al mundo externo; por último, el juego produce placer y lo relaciona con la superación de obstáculos, por lo que ve en el juego alguna actividad compartida con otras relacionadas con la resolución de problemas.

Piensa, que el juego es un agente de socialización que tiene consecuencias educativas y que proporciona valores propios de la cultura además de que mejora la inteligencia.

Las secuencias de juego más largas y ricas se dan con los materiales que tienen una estructura instrumental, la causa más relevante de los largos episodios del juego se establecen con la presencia del adulto, y el juego en grupo, que demanda rendimientos intelectuales, origina que más tarde el juego en solitario de los niños sea a su vez más rico y elaborado.

Para Bruner, la forma o estructura que el juego asume como actividad propuesta por el maestro es un rasgo característico de lo lúdico dentro de la escuela, expone su concepto de *"formato"*⁴⁹ para describir el andamiaje, en relación al juego. En la escuela el juego debe ser adaptado a los contenidos de enseñanza que el maestro debe abordar dentro del salón de clases

Los juegos son un formato idealizado (argumentos o escenario) que regulan la relación entre el niño- adulto, niño-niño haciendo posible el andamiaje. Las reglas del juego establecen roles que se van tornando en la medida en que el niño comienza a dominar la acción.

"El adulto u otro niño más capaz establece el juego y proporciona una plataforma para asegurar que el que sabe menos pueda ser rescatado a partir de una intervención apropiada."⁵⁰

En la medida que el jugador se vuelve más capaz, se va quitando la plataforma, parte por parte, y la estructura recíproca se sostiene por sí misma.

⁴⁹ M. Sarlé. *op. cit* p. 57.

⁵⁰ *Ibidem*. p. 59.

Por otro lado los juegos colectivos proporcionan un camino para el juego estructurado en el cual los niños se ven intrínsecamente motivados, ya que implican normas e interacciones sociales y la posibilidad de establecer normas conjuntamente.

Kamii⁵¹, considera que los juegos colectivos que implican reglas, son esenciales para la enseñanza constructivista, además de ser mejores que los ejercicios, porque cree que la retroalimentación es inmediata ya que procede de los propios compañeros, los juegos a diferencia de los ejercicios, le dan a los niños la posibilidad de supervisar el trabajo de los demás y de aprender a ser críticos y de adquirir confianza en ellos mismos, al mismo tiempo le dan la oportunidad al niño de crear estrategias para resolver el problema, haciendo de esta una tarea más intelectual.

A partir de este enfoque, los contenidos matemáticos sólo adquieren sentido en la medida en que nos permiten resolver problemas. Es así que el maestro al proponer a los niños situaciones de carácter lúdico debe de considerar que éstos impliquen un obstáculo cognitivo a superar, que garantice el interés y la motivación de los niños, así como la construcción de saberes.

Plantea que para la enseñanza de las matemáticas, los maestros se valen de los juegos tradicionales que adaptan a los contenidos matemáticos con una clara intencionalidad pedagógica sin perder de vista la diversión del juego con el desafío y la situación de aprendizaje. Las actividades que incluyen elementos lúdicos se presentan comúnmente a través de juegos reglados que implican la participación de dos o más jugadores.

Para que el juego colectivo sea educativamente útil debe:

- Proponer algo interesante y estimulante para que los niños piensen en cómo hacerlo.
- Posibilitar que los propios niños evalúen su éxito.

⁵¹ Kamii, Constance y DeVries, R. (1980). *Juegos colectivos en la primera enseñanza*. Madrid. Visor. P. 322 .

- Permitir que todos los jugadores participen activamente durante todo el juego.

Cuando se habla de juego colectivo, las reglas no necesariamente son propuestas por el maestro, ya que existen reglas que permiten construir contenidos matemáticos a enseñar y otras que sólo tienen que ver con la dinámica del juego, las cuales las pueden establecer los alumnos con el fin de trabajar contenidos actitudinales como la autonomía, el respeto, la toma de decisiones, etc.

Por último, es importante tomar en cuenta que si un juego o actividad que se repite de la misma manera siempre, pasa a ser una situación cotidiana o funcional a ser rutinaria, perdiendo su valor de situación problemática y ya no genera aprendizaje.

En la escuela cuando se plantea una situación problemática puede o no desarrollarse dentro de un contexto lúdico, pero siempre debe ser:

- Natural; por corresponderse a la realidad.
- Interesante; para el niño susceptible de enriquecimiento; para permitir la evolución de los conocimientos⁵².

En resumen, en este capítulo la didáctica de las matemáticas encabezada por Brousseau, propone una enseñanza basada en las relaciones que se establecen entre el alumno, maestro y el saber, apoyándose en un enfoque constructivista.

Plantea diferentes situaciones didácticas con las cuales los alumnos aplican sus conocimientos y estrategias para la resolución del problema y comparten con los demás las estrategias que han utilizado en la búsqueda del resultado validando así su aprendizaje.

El maestro será como un guía que se encargue de organizar situaciones didácticas que promuevan en los alumnos ese conocimiento construido adaptándolo como un instrumento convencional y familiar para los estudiantes,

⁵² González Adriana y Weinstein Edith. (2001) *¿Cómo enseñar matemáticas en el jardín? Número, medida y peso*. Buenos Aires. Colihue. p. 30.

a lo que llama transposición didáctica, que se encarga de transformar el contenido original por un contenido pedagógico para que pueda ser enseñado, regulado por el contrato didáctico que normaliza las relaciones que maestro y alumnos mantienen con el saber, estableciendo derechos y obligaciones de unos y otros en relación con cada contenido escolar.

El maestro tendrá que establecer nuevas estrategias en la medida en que se vayan presentando obstáculos en el aprendizaje de los alumnos, estableciendo nuevos contratos didácticos, que son los que regulan las relaciones que tienen el maestro y el alumno con el saber.

En el proceso de enseñanza–aprendizaje se deben plantear estrategias que ayuden a los alumnos a construir conocimientos que le sean significativos en la medida en que establezca una conexión entre los conocimientos previos y el nuevo.

Frida Díaz, nos presenta una serie de estrategias de enseñanza y de aprendizaje enfocadas en lograr aprendizajes significativos en los alumnos.

Las estrategias de enseñanza son propuestas por los maestros con el objetivo de adaptar los contenidos y transmitir los conocimientos, motivando a los alumnos a aprender, facilitando así el procesamiento de la información, ya que las estrategias van dirigidas a estimular algunos procesos cognitivos como el de activar los conocimientos previos y establecer un puente con la nueva información etc.

Las estrategias de aprendizaje son controladas por los alumnos y se activan cuando el estudiante tiene algo que aprender, a la vez de que dependen de los procesos cognitivos con los que cuenta el alumno.

Pozo, plantea estrategias de aprendizaje que se establecen a partir de los procesos cognitivos y la finalidad de la información.

Las estrategias de aprendizaje que propone Alonso, son las que tienen que ver con el tipo de material de aprendizaje que el estudiante tenga que procesar.

También se sugieren estrategias para la enseñanza de cualquier tipo de habilidad o estrategia cognitiva de aprendizaje metacognitiva y autorreguladora como la llamada “estrategia guía” basada en las nociones de zona de desarrollo próximo y andamiaje.

El juego podría ser una buena estrategia para facilitar el aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas.

Desde la perspectiva de los diferentes autores, Piaget, Vigotsky y Bruner el juego tiene gran importancia en el desarrollo del niño, ya sea como adaptación de las estructuras cognitivas, o como reflejo del proceso de construcción del conocimiento, o como agente de socialización que tiene consecuencias educativas.

Kamii, considera que la enseñanza de las matemáticas en los primeros años de educación primaria, los juegos deben enfocarse en experiencias concretas para que los alumnos hagan sus propios descubrimientos mediante un proceso activo en donde las actividades lúdicas y los materiales permitan a los niños descubrir lo que luego ha de ser la realización mental de cualquier operación.

CAPÍTULO 4.

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN.

En este capítulo presentaré la enseñanza de las matemáticas a partir de la resolución de problemas como una propuesta que se maneja en el Plan y Programa de Estudios de 1993, desde una perspectiva constructivista, en un segundo momento definiré como se concibe la multiplicación retomando a varios autores y la importancia de que el niño construya el conocimiento de la multiplicación al descubrir el operador multiplicativo y por último mostraré una compilación de problemas en base a los contenidos que muestran los primeros conceptos de la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación en segundo año de primaria, que contribuyan a la construcción del concepto multiplicativo a partir de esta propuesta.

4.1 La resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de la resolución de problemas implicó un cambio en la enseñanza de la asignatura ya que se proponía romper con viejas prácticas que no generaban situaciones nuevas de aprendizaje para los estudiantes, sino la memorización y automatización de los contenidos.

En el Plan y Programa de Estudios del 1993, se planteó la idea de enseñar matemáticas mediante la resolución de problemas, intentando generar nuevas prácticas y estableciendo nuevos modelos de enseñanza y de saberes matemáticos que permitieran la construcción de aprendizajes significativos, como vía para llegar al dominio de los contenidos al lograr un aprendizaje perdurable que propiciara una relación distinta entre los alumnos, el maestro y las matemáticas.

“...las matemáticas que se pretende llevar a las aulas habrán de permitir que los alumnos construyan los conocimientos mediante la resolución de problemas y actividades que despierten su interés.”⁵³

La Reforma SEP 1999⁵⁴, fundamenta la resolución de problemas con un enfoque constructivista en donde sobresalen las siguientes características:

- Se plantean diferentes situaciones didácticas en donde el niño se enfrenta con problemas como punto de partida.
- El significado de los aprendizajes construidos radica en la variedad de los problemas que se le presenten al alumno.
- Se elaboran estrategias personales para su resolución.
- La confrontación de resultados contribuye a su aprendizaje.
- El aprendizaje se entiende como un proceso representado por aproximaciones sucesivas en las cuales los niños tienen acceso a representaciones más formales.
- La función del maestro será la de coordinar y planear situaciones didácticas en donde se analicen los contenidos de forma gradual.

Desde esta perspectiva la resolución de problemas se caracteriza por promover la capacidad de razonamiento lógico y el de enseñar a pensar de una manera estructurada sistemática y flexible, que facilite a los alumnos experiencias para el estudio y resolución de problemas reales que le sirvan para enfrentarse crítica y eficazmente a situaciones nuevas e imprevistas.

Se entiende como problema “una situación en que un individuo o un grupo requiere o necesita resolver y para lo cual no dispone de un camino rápido y directo que lo lleve a una solución.”⁵⁵

⁵³ Ávila Alicia y colaboradores (2004). *La Reforma Realizada. La Resolución De Problemas. Como vía de Aprendizaje en nuestras Escuelas*. México. Secretaría de Educación Pública. p. 70.

⁵⁴ Ávila. *Op.cit.* p.73

⁵⁵ *Ibidem.* p. 71.

Esta definición implica la búsqueda de estrategias que lleven al alumno a reflexionar acerca de los pasos para llegar a la solución.

La solución de problemas produce conocimientos y habilidades de acuerdo con el tipo de problema que se les plantean a los alumnos, que generan una serie de acciones relacionadas con la búsqueda y el reconocimiento del problema, intensificando el conocimiento matemático si se les presentan en un contexto que les sea significativo.

Según Ávila⁵⁶, resolver problemas nuevos les da la oportunidad a los alumnos de utilizar conocimientos que ya poseen, haciendo uso de estrategias informales hacia estrategias convencionales fortaleciendo la forma de pensar y adquiriendo conocimientos cada vez más formales.

El aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas debe de estar vinculada a las experiencias cotidianas como la salud, el deporte, los pasatiempos, etc., y a los intereses de los alumnos.

Por otro lado la Didáctica de la Matemática⁵⁷, define los problemas como aquellas situaciones que produzcan un obstáculo a derrotar, que promuevan la búsqueda de los conocimientos previos para decidir qué es lo más adecuado para la solución o establecer nuevas estrategias.

A partir de esta definición se plantea que el maestro tiene que introducir situaciones problema que propicien y favorezcan el análisis y la reflexión entre los alumnos de sus resultados. Ya que al hacer explícito lo que era implícito hace posible el reconocimiento y la reconstrucción de los contenidos de enseñanza, posibilitando la apropiación de estrategias utilizadas por los demás al otórgale un sentido a su aprendizaje.

Los problemas se clasifican según su estructura, el contenido, área a la que pertenece, por el tipo de operaciones y procesos que se involucran para su resolución:

⁵⁶ *Ibidem*. p. 67.

⁵⁷ Panizza, Mabel. (Compiladora). (2003). *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la E. G. B.* Buenos Aires. Paidós. p. 87.

- Inductivo; si se establecen regularidades en su función como nacimientos, juegos, conteos, etc.
- Deductivo; se establecen formulas matemáticas.
- Problemas bien definidos; en donde el punto de partida y de llegada se especifican de forma clara encontrando rápidamente la solución.
- Mal definidos; no se precisan los pasos necesarios para su solución por lo que puede haber resultados y estrategias diferentes y todas validas.

Para enseñar a resolver problemas se deben usar estrategias y técnicas aprendidas con anterioridad ya que si no se cuenta con los elementos necesarios no se podrá resolver un nuevo problema.

Con un enfoque heurístico, Polya⁵⁸, plantea cuatro fases en el proceso de solución de un problema, la comprensión, concepción de un plan, ejecución de un plan y examen de la solución obtenida, también propone estrategias como: dibujar figuras, introducir una notación adecuada, aprovechar problemas relacionados, explorar analogías, trabajar con problemas auxiliares, reformular el problema, introducir elementos auxiliares al problema, generalizar, especializar, variar el problema, trabajar hacia atrás.

Andre y Hayes (1981)⁵⁹, consideran que las etapas para la resolución de problemas resaltan el pensamiento consciente, acercarse analíticamente a la solución y ofrecer una descripción de los procesos mentales que se activan.

Andre (1986)⁶⁰, propone algunas etapas para la resolución de problemas:

⁵⁸ Ortiz Rodríguez, Francisca. (2001). *Matemáticas. Estrategias de enseñanza y aprendizaje*. México. Pax México. p.68.

⁵⁹ Etapas de la resolución de problemas. Conocimientos Web. Net (<http://www.conocimientosweb.net/descargas/article185.html>) [Consulta: 2 marzo 2011]

⁶⁰ *Idem*. p. 68.

Observar la diferencia entre lo que se desea y lo que se tiene, describir de forma precisa el problema, analizar las partes del problema apartando la información relevante, se consideran diferentes opciones, se evalúan las posibles soluciones escogiendo la que tenga mayor probabilidad de éxito y se implementa la solución.

Mayer (1993)⁶¹, considera que los estudiantes deben comprender el problema e interpretarlo en símbolos matemáticos para organizar estrategias en donde las tareas que se consignan los lleven a una solución.

Fuenlabrada (1996)⁶², explica que en un problema se deben desarrollar conceptos, principios procedimientos y actitudes que permitan reconocer acciones, en donde el profesor a partir de un tema, plantee un problema (una situación didáctica) que haga necesario ese conocimiento y el alumno a partir de sus conocimientos previos acepte resolverlo y elija las estrategias sobre el tema, que considere le van a servir para llegar a una solución. El maestro organiza a los alumnos para confrontar las diversas estrategias utilizadas en la resolución del problema induciendo al diálogo y a la discusión en el salón de clases, se eligen las mejores estrategias y ponen a prueba, a su vez el maestro va complicando la situación didáctica poniendo a prueba las herramientas elaboradas por los alumnos al realizar el nuevo problema al que se le ha asignado una exigencia mayor al ya resuelto con la intención de provocar nuevas confrontaciones, hasta llegar al descubrimiento de una fórmula ya conocida.

El maestro asume el papel de un guía que interviene sólo para establecer pautas que conduzcan al alumno de sus conocimientos previos a nuevos más complejos transitando por un lenguaje común hacia el de la matemática, y de un pensamiento común a un pensamiento formal.

⁶¹ Ortiz *op.cit.* p. 68.

⁶² *Idem* p. 68.

La enseñanza –aprendizaje de la matemática desde un enfoque de la solución de problemas representa un reto tanto para el maestro como para el alumno, ya que se combinan reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente aprendidos para dar una solución a una situación nueva, dando la oportunidad al que aprende de operar en matemáticas al resolver problemas que le representen desafíos nuevos.

4.2 Concepto de la multiplicación a través de la resolución de problemas.

La multiplicación ha estado presente en los planes y programas de estudios de la SEP de segundo año de primaria y esto no ha cambiado. Se han ido transformando los contenidos a partir de las diferentes concepciones que se tienen de esta: simplificación de una suma, una suma de sumandos iguales, número de veces que se repite un conjunto, relación de proporcionalidad, etc.

En el Plan y Programas de Estudio del 1993⁶³, la multiplicación se ubica dentro del eje de Los números, sus relaciones y sus operaciones, en donde los primeros conceptos multiplicativos se deben de enseñar a partir de los siguientes contenidos:

- Introducción a la multiplicación mediante resolución de problemas que impliquen agrupamientos y arreglos rectangulares, utilizando diversos procedimientos.
- Escritura convencional de la multiplicación (con números de una cifra).
- Construcción del cuadro de multiplicaciones.

Para comenzar a explicar cómo se enseña la multiplicación hay que empezar por definirla.

Muchos autores concuerdan en definir a la multiplicación como una suma de sumandos iguales (repetición de la misma cantidad). Baroody, Luceño, Holmes, Paling⁶⁴, la consideran como la adición repetida de números cuando los sumandos son iguales; para Castro, Rico, y Castro, multiplicar es reiterar una cantidad, en su nivel más intuitivo, ya que los dos términos del producto responden a contextos

⁶³ Secretaria de Educación Pública.(1994). *Plan y Programas de Estudio 1993.Educación Básica Primaria*. México SEP. 162 p.

⁶⁴ *Ibidem*. p. 77.

diferentes: uno es la cantidad que se repite multiplicando y el otro nos dice las veces que se repite la cantidad inicial multiplicador, sostienen que es necesario utilizar desde un principio el signo X ya que se manejan dos niveles diferentes de cardinación.

Por otro lado Holmes⁶⁵ interpreta la multiplicación de cuatro formas, la primera, como la unión de colecciones equivalentes, la segunda, como una adición repetida, la tercera, como un producto cartesiano, y por último como una razón, destacando que las dos primeras son las que se presentan en la educación primaria.

Holmes, considera que para enseñar el conocimiento de la multiplicación el niño ya debe cumplir con los siguientes requisitos:

1. Que puedan representar hechos de adición.
2. Mostrar habilidades de hechos de adición.
3. Solucionar historias problemáticas implicando para ello la adición.
4. Nombrar una colección de números hasta 10 como $1(n)$ o $n(1)$
5. $(N)S = S(N)$
6. Representar un número juntando colecciones con el mismo número de objetos.
7. Conocimiento intuitivo de múltiplos.

Fischbein⁶⁶, considera que los modelos intuitivos son representaciones de ciertas nociones matemáticas abstractas, que se desarrollan en ellas mismas en un estado inicial del proceso de aprendizaje, y que continúan influenciando implícitamente en las interpretaciones y soluciones en el aprendizaje.

Los modelos que crean los estudiantes son en la mayoría de los casos representaciones incorrectas de los conceptos modelados, llevándolos a interpretaciones erróneas o impidiéndoles aceptar como ciertas algunas relaciones o ideas.

⁶⁵ *Idem.* p. 77.

⁶⁶ Maza Gómez Carlos. (1991). *Multiplicar y dividir. A través de la resolución de problemas.* Aprendizaje Madrid. Visor. p. 42.

La influencia de los modelos intuitivos en la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación considera que el modelo intuitivo propio de la multiplicación es el de la suma reiterada, siendo el multiplicador el número de colecciones equivalentes y el multiplicando el tamaño de cada colección, lo que conduce a los estudiantes a la regla intuitiva de que los multiplicadores deben ser números enteros, y el producto de la multiplicación ha de ser siempre un número mayor que los correspondientes a la operación.

Si el multiplicando es un decimal, las dificultades no son mucho mayores que con los naturales, pero si el decimal es el multiplicador los aprietos para los alumnos son mayores para resolución de problemas.

Si se espera que el aprendizaje sea significativo, en donde se establezca una relación con los conocimientos previos, la multiplicación habrá de enseñarse como una suma reiterada donde se establecería un modelo intuitivo propio. Pero esto representaría un obstáculo para la extensión de la multiplicación a otros conjuntos numéricos como los decimales. La multiplicación vista a partir de los productos cartesianos no genera conocimientos significativos, porque se considera que no proviene de situaciones cotidianas ocasionando problemas de comprensión conceptual.

Para Fischbein, al entrar el escolar en el periodo de las operaciones formales supondría su alejamiento de los modelos intuitivos, consiguiendo por su propia madurez cognitiva, al aplicar sus operaciones a aspectos más formales; pero esto no es así ya que sostiene que la rigidez de estos modelos se extiende más allá de este período que abarca a jóvenes hasta los quince años.

En este sentido se haría necesario formular estrategias que permitan al alumno rebasar esta rigidez de los modelos intuitivos pasando de un conjunto a otro sin perder el significado de la operación.

Vergnaud⁶⁷, crea la idea del campo conceptual tratando de unificar la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación y la división como:

⁶⁷ Maza. *op. cit.* p.14.

“... un conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos estrechamente interconectados”⁶⁸

Considera que los problemas del campo conceptual de la multiplicación pueden ser de tres tipos:

1. Proporción simple: donde hay que reiterar una cantidad un número de veces. Los problemas de este tipo son las más sencillas y de exitosa resoluciones.
2. Producto de medida: en donde dos magnitudes se componen para dar una tercera magnitud (cálculo de áreas), implican el establecimiento de coordinaciones entre dos dimensiones, por lo que se les considera que son más de índole multiplicativo que los anteriores.
3. Proporción múltiple: Son los más complejos en tanto que involucran reglas de tres múltiples.

Dienes y Goldin⁶⁹, Afirman que la suma se refiere a un solo universo y la multiplicación fluye a través de dos universos distintos expresándolo de la siguiente manera.

“Si se tienen 3 veces 5 manzanas, el cardinal de un conjunto. El número 3, en cambio no designa un conjunto de manzanas, sino el conjunto de los conjuntos de manzanas.”⁷⁰

Piaget⁷¹, considera que la multiplicación no se puede razonar como una forma rápida de sumar repetidamente, sino que esta es una operación que requiere de un pensamiento más complejo, que el niño construye a partir de su habilidad para pensar aditivamente. Así describe la diferencia entre la multiplicación y la suma en términos de la diferenciación en los niveles de abstracción y de número de las relaciones de inclusión que un niño puede realizar simultáneamente.

⁶⁸ *Ibidem.* p. 14.

⁶⁹ *Ibidem.* p. 28

⁷⁰ *Idem.* p. 28.

⁷¹ *Ibidem.* p. 29.

Para Piaget, los niños entre los 4 y 7 años realizan una labor mecánica correspondiente al nivel más bajo desde un punto de vista operativo, pues las acciones del niño consisten en sucesión de adiciones, sin ser capaz de prever resultado alguno.

Entre los 7 y los 9 años, el niño es capaz de anticipar las igualdades como resultado a los que llega por conteos sucesivos, tomando conciencia del número de veces que se repiten las agrupaciones. Percibiendo la necesidad de una comprensión entre los dos números en juego, es decir el tamaño numérico de un grupo y el número de grupos, alcanzando la solución al problema por medios aditivos antes que multiplicativos.

En un tercer estadio se manifiesta una diferencia cualitativa, el niño se deja de centrar en el resultado de sus acciones, pues ya es capaz de considerar como objetos de conocimiento sus propias acciones y en sí su propio mecanismo, ya que puede repetir “tres veces dos fichas” esta diferencia para Piaget es fundamental desde el punto de vista de la abstracción empleada.

“Cuando las acciones se convierten en objeto de conocimiento, se ha pasado de una abstracción meramente empírica a otra de naturaleza diferente a la que denomina abstracción reflexionante o lógico-matemática.”⁷²

De acuerdo a las diferentes concepciones que se tienen de la multiplicación en este trabajo contemplaré el de la suma iterada o reiterada y trataré de explicar a continuación cómo el niño identifica el operador multiplicativo.

Vista la multiplicación como una suma reiterada o iterada, es necesario identificar el operador multiplicativo que hace referencia no a la medida de los elementos de cada grupo, tampoco a la cantidad de objetos que se obtienen al final, sino al número de veces que se repite el grupo.

Margarita Gómez Palacios⁷³, considera que uno de los problemas en el aprendizaje de la multiplicación es el del descubrimiento del operador multiplicativo, que consiste, en el número de veces que se repite un determinado conjunto o del número de acciones u operaciones realizadas. La diferencia entre

⁷² *Ibidem*. p. 30.

⁷³ Dirección General De Educación Primaria. (1992). *La matemática en la escuela primaria*. México. SEP. p.110.

las operaciones $3+3+3+3=$ y $3 \times 4=$ ó $4 \times 3=$ es que mientras en la primera adicionamos un conjunto sobre otro sin tener en cuenta para nada el número de conjuntos adicionados este dato es definitivo para la segunda.

Comenta, que en el aprendizaje a nivel manipulativo se observa que la abstracción del número de grupos ó número de operaciones y la consideración simultánea de dos variables de diferente rango (número de elementos de cada grupo y número de grupos) constituye un problema cognitivo para los niños, que recurren siempre a la adición y maneja el siguiente ejemplo:

Se simulaba una tienda donde los niños tenían que adquirir diferentes productos, cuyos precios se encontraban entre uno y nueve pesos, se les otorgaba a los niños monedas y se les pedía que averiguaran cuántas monedas necesitarían para comprar una determinada cantidad de alguna clase de productos (como cuatro dulces y cada uno valía tres pesos).

- A) En uno de los casos el niño separa un dulce y pone al lado de él las monedas que cuesta y así sucesivamente con todos los caramelos, cuando se le pregunta cuántos caramelos ha comprado o cuántos grupos de monedas ha hecho, no lo sabe.
- B) En el segundo caso, el niño cuenta el número de dulces que se le proponen para comprar, este toma tantos grupos de "X" monedas (siendo X el precio de cada dulce) y cuenta después el número total de monedas, cuándo se le pregunta qué ha hecho, dice que ha puesto "cuatro grupos de tres monedas porque había cuatro caramelos y cada uno valía tres monedas.

La diferencia entre uno y otro niño es clara mientras que el primero actúa de una forma aditiva $3+3+3+3=12$ sin tomar conciencia del número de grupos, el segundo, al anticipar y conservar el número de grupos, muestra que ha construido un nuevo factor, un operador multiplicativo, y que maneja simultáneamente dos variables de diferente rango (número de elementos de cada grupo y número de grupos).

Cuando se identifica el operador multiplicativo se puede observar que mientras el multiplicando es una medida (número de elementos de un conjunto) el multiplicador es un operador sin dimensión, (número de veces que se repite el

conjunto) a diferencia de la suma en donde los factores son medidas (número de elementos de dos conjuntos de una misma clase que se ponen en relación para obtener el conjunto producto de la unión de ambos). Esta desproporción entre multiplicando y multiplicador hace que los números que pueden ponerse en el multiplicando y en el multiplicador no sean de la misma magnitud en las diversas etapas de la enseñanza de la multiplicación (números enteros mayores a 10 o decimales).

Considero que el trabajo del maestro de segundo año de educación primaria al enseñar el concepto de la multiplicación a través de la resolución de problemas es precisamente el que el niño descubra el operador multiplicativo, al comprender lo que le indica el multiplicando (número de elementos de un conjunto) y el multiplicador (número de veces que se repite el conjunto), construyendo así el concepto de la multiplicación que es en lo que nos deberíamos enfocar los maestros al enseñar la multiplicación y no irnos luego, luego a que se aprendan las tablas de multiplicar hay que darles su tiempo, y para eso es el segundo año de primaria para que los niños construyan este concepto resolviendo problemas sencillos y afiancen este conocimiento y no tengan dificultades en los años posteriores.

Es por eso que a continuación presento una serie de estrategias a través de problemas o juegos que permitan a los niños de segundo año de educación primaria construir el concepto multiplicativo.

4.3 Estrategias para la enseñanza de la multiplicación

Mi propuesta se basa, en que el niño de segundo año de educación primaria adquiera de una manera significativa el concepto multiplicativo a través de la resolución de problemas. Para ello considero que durante el este grado los alumnos deben trabajar sobre esta noción para que al terminar el curso tengan bien afianzado el concepto multiplicativo, y se les facilite más adelante el aprendizaje de las multiplicaciones.

Para esto me he basado en el Plan y Programas de Estudios de Educación Básica de 1993, en el desarrollo cognoscitivo de los niños, en el constructivismo y en la

didáctica de las matemáticas que propone la resolución de problemas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Para ello planteo una serie de estrategias basadas en problemas multiplicativos recopilados de diferentes fuentes que apoyen al maestro en su clase y le ayude a los alumnos de segundo año de educación primaria a descubrir de una forma lúdica y significativa el concepto multiplicativo.

Para que los alumnos logren comprender de una forma significativa las operaciones se deben resolver problemas desde un principio de la enseñanza, a la vez de que se les debe de dar confianza, y dejar que su creatividad fluya en la construcción de los procedimientos para resolver las operaciones que se les planteen en los problemas, por lo que el maestro no deberá desaprobado las formas en que los niños lleguen al resultado, su papel será apoyarlo y orientarlo en su proceso de aprendizaje.

Existen diferentes tipos de problemas que se pueden resolver con esta operación y los más comunes para su enseñanza en segundo año de educación primaria consisten en los que la cantidad se repite varias veces, el de realizar colecciones con cantidades pequeñas.

Para introducir a los niños al concepto multiplicativo, se debe comenzar por utilizar material concreto como fichas, semillas, tarjetas, regletas, cajitas, bolsas etc..., para que vayan formando colecciones u agrupaciones pequeñas a través de juegos matemáticos, dibujos, conteos, estrategias de cálculo, series sucesivas, arreglos rectangulares, descomposiciones etc.

Las siguientes estrategias son una compilación de problemas tomados de diferentes fuentes bibliográficas con el fin de apoyar a los maestros y alumnos de segundo año de educación primaria en la enseñanza y aprendizaje del concepto multiplicativo.

Cada ficha contiene el eje temático, el contenido, el propósito, el material y las indicaciones, además contienen las páginas del libro de texto Matemáticas 2 grado SEP, que le sirven para apoyar dichas estrategias.

El maestro podrá hacer las adecuaciones pertinentes según las necesidades de los alumnos y realizar las estrategias las veces que sean necesarias, variando

como dije anteriormente las estrategias para que estas no pierdan su valor de significatividad y se hagan repetitivas y aburridas.

EJE TEMÁTICO: Los Números, sus relaciones y sus operaciones.		1	
Tratamiento de la información			
CONTENIDO: Introducción a la multiplicación mediante resolución de problemas que impliquen agrupamientos utilizando diversos procedimientos. Interpretación de la información contenida en ilustraciones, registros y pictogramas sencillos.			
PROPÓSITO: Que los niños usen colecciones pequeñas con igual cantidad de objetos para facilitar el conteo.			
MATERIAL: 21 a 35 fichas y una bolsa para cada equipo.			
INDICACIONES: Organizar al grupo en equipos y entregar a cada uno diferentes cantidades de objetos, entre 21 y 35. Se les pide a los niños que realicen agrupaciones de tres objetos y que observen cuántos grupos hicieron y el número de objetos que quedaron sueltos sin agrupar y lo escriban en su cuaderno. Cuando terminan el maestro el maestro les pide que guarden el material en una bolsa y que le digan cuántos objetos tenían en total y lo anota en el pizarrón en una tabla como la que se muestra. Enseguida el maestro les pide que saquen su material y lo cuenten para comprobar sus respuestas y si es necesario, rectifiquen sus respuestas.			
	Número de grupos de 3 objetos	Número de objetos sobrantes	Total de objetos
Equipo 1			
Equipo 2			
quipo			

EJE TEMÁTICO: Los Números, sus relaciones y sus operaciones.

2

CONTENIDO: Introducción a la multiplicación mediante resolución de problemas que impliquen agrupamientos utilizando diversos procedimientos.

PROPÓSITO: Representen la cantidad de objetos que hay en una colección indicando el número de grupos y el número de objetos que hay en cada grupo.

MATERIAL: Una hoja blanca para cada equipo, para todo el grupo, 6 hojas con bolitas dibujadas agrupadas como se muestra.

20 bolitas agrupadas de 4 en 4

30 bolitas agrupadas de 3 en 3

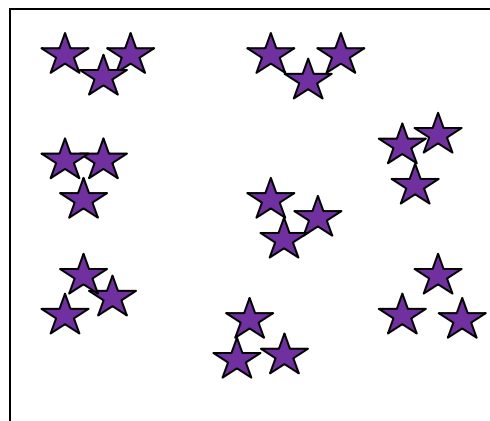
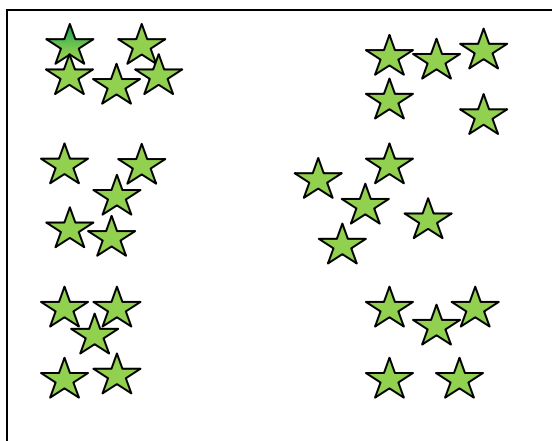
25 bolitas agrupadas de 5 en 5

27 bolitas agrupadas de 9 en 9

63 bolitas agrupadas de 7 en 7

80 bolitas agrupadas de 4 en 4

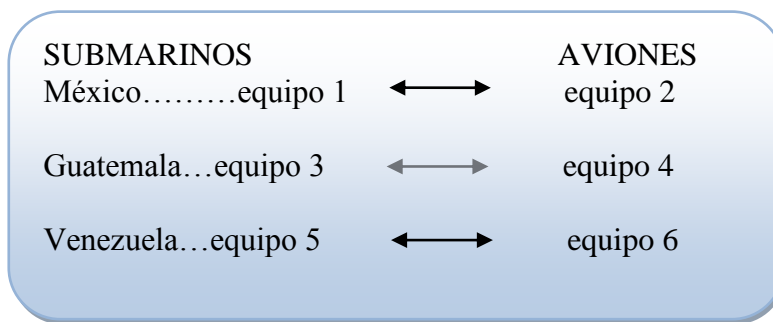
Las bolitas de las hojas deben estar acomodadas para que a simple vista se vea que todos los agrupamientos tienen la misma cantidad.



INDICACIONES: Se organizan en equipos y se enumeran. Unos serán los submarinos y otros los aviones. Los submarinos enviarán mensajes o a los aviones y los aviones dibujarán lo que digan los mensajes que reciban.

El maestro asigna a cada equipo de submarinos, un equipo de aviones para que sean

pareja, procurando que los equipos de la misma pareja estén lejos unos de otros. Cada pareja puede representar a un país.



Les explica que va a entregar a cada equipo de submarinos una de las hojas con bolitas dibujadas. Los submarinos deberán escribir rápidamente, en un papel un mensaje a los aviones, para que ellos dibujen en una hoja en blanco la misma cantidad de bolitas que tienen los submarinos. Cada equipo de submarinos enviará su mensaje al equipo de aviones que es su pareja.

No hay que dar importancia a cómo acomoden las bolitas los aviones, lo importante será que la cantidad de bolitas que dibujen sea la misma que la que tienen los submarinos.

Se les entregan las hojas con bolitas agrupadas a los submarinos y espera 10 segundos para que escriban sus mensajes, es importante no darles tiempo a que cuenten todas las bolitas y favorecer que cuenten los grupos.

Pasado el tiempo el maestro dice "Tiempo", si un equipo o más logran escribir el mensaje, el maestro los recoge y se los entrega a los equipos de aviones que les corresponden, con una hoja en blanco para que los aviones dibujen la cantidad de bolitas que se les indican.

Cuando los equipos de los aviones terminan de dibujar, el maestro organiza la revisión:

Escribe en el pizarrón el mensaje que hizo uno de los equipos de submarinos.

Pide a los alumnos del equipo que comparen la cantidad de bolitas que tienen en su hoja con la cantidad de bolitas que dibujaron los aviones.

Si hay la misma cantidad, los dos equipos ganaron.

Si no hay la misma cantidad, entre todos ayudan a ver de dónde viene el error, si de los submarinos o de los aviones.

Se hace lo mismo con todos los equipos.

Se repite la actividad intercambiando entre los equipos las hojas de bolitas.

El maestro les pide que piensen una manera de contar rápidamente las bolitas para que les dé tiempo de escribir los mensajes.

Para terminar el maestro les pide a los niños que opinen acerca de que mensajes les pueden servir mejor en las próximas veces.

Si en el grupo no aparece el recurso de escribir el número de grupos, el maestro puede propiciar con preguntas como:

¿No hay otra manera más rápida de dar la información que necesitan los aviones?

¿Es necesario contar todas las bolitas?

Esta actividad se puede repetir de 2 a 3 veces más en las siguientes ocasiones el maestro puede hacer que los dos equipos de cada pareja sean submarinos y aviones al mismo tiempo.

EJE TEMÁTICO: Los Números, sus relaciones y sus operaciones.

3

Tratamiento de la información

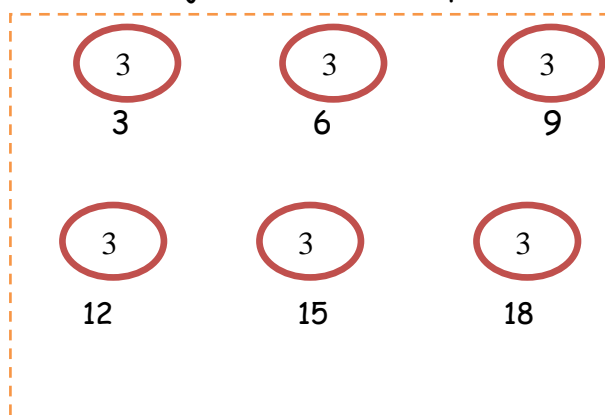
CONTENIDO: Introducción a la multiplicación mediante la resolución de problemas que impliquen agrupamientos y arreglos rectangulares, utilizando diversos procedimientos.

Interpretación de la información contenida en ilustraciones, registros y pictogramas sencillos.

PROPÓSITO: Desarrollen procedimientos propios para resolver problemas en los que una cantidad se repite varias veces.

MATERIAL: 24 piedritas y 8 cajas, para todo el grupo.

INDICACIONES: Se organizan en parejas y el maestro pone sobre su mesa seis cajitas con tres piedritas en cada una y les comenta a los alumnos que en cada una de esas seis cajitas, guardó tres piedritas y les muestra el contenido y les pide que averigüen, en parejas cuántas piedritas tienen en total. Los niños pueden hacer los dibujos o las cuantas que deseen.



- ✓ Al terminar el profesor organiza la revisión de resultados, anotando en el pizarrón el nombre de cada equipo.
- ✓ Si hay resultados diferentes, el profesor alienta a los niños para que justifiquen sus resultados hasta que se pongan de acuerdo sobre el resultado correcto.
- ✓ Al llegar a un acuerdo el profesor les pregunta si alguien utilizó una forma diferente de resolver el problema y si la respuesta es afirmativa, pide que pase al pizarrón a explicarla.
- ✓ El maestro realiza en el pizarrón una tabla para registrar los datos.

NÚMERO DE CAJITAS CON 3 PIEDRAS CADA UNA	TOTAL DE PIEDRAS
1	3
2	
3	
4	
5	
6	18
7	
8	

- ✓ Esta estrategia se puede realizar 2 o 3 veces, planteándoles a los niños cuatro o cinco problemas similares al anterior, variando el número de cajas de 2 a 8, cada caja con 3 piedras.
- ✓ Libro de texto P. 79

EJE TEMÁTICO: Los Números, sus relaciones y sus operaciones.

4

Tratamiento de la información.

CONTENIDO: Introducción a la multiplicación mediante la resolución de problemas que impliquen agrupamientos y arreglos rectangulares, utilizando diversos procedimientos.

Interpretación de la información contenida en ilustraciones, registros y pictogramas sencillos.

PROPÓSITO: Empiecen a reconocer algunos problemas que se pueden resolver con la multiplicación y trabajen con equivalencias entre dos unidades distintas: bolsas que contienen fichas y fichas sueltas.

MATERIAL: 20 fichas y 6 bolsas, tabla con el registro de datos de la actividad anterior.

INDICACIONES: Se organizan en equipos, y el maestro pega en el pizarrón la tabla con el registro de datos con los resultados, y les plantea los siguientes problemas.

Les comenta que pueden utilizar la información de la tabla, pero no pueden usar el material.

- ❖ Tengo 6 cajitas con tres piedras cada una. Si se me pierden dos cajitas, ¿Cuántas piedras me quedan?
- ❖ Tenía 6 cajas con tres piedras cada una y se me perdieron nueve piedras, ¿Cuántas cajas con tres piedras llenas me quedaron?
- ❖ Si me encuentro 12 piedras, ¿Cuántas cajitas podría llenar con 3 piedras cada una?
- ✓ Al terminar revisan sus resultados y comparten sus estrategias para resolverlos.
- ✓ Libro de texto P.88

EJE TEMÁTICO: Los Números, sus relaciones y sus operaciones.
Tratamiento de la información.

5

CONTENIDO:

PROPÓSITO: Desarrollen con procedimientos propios para calcular el total de objetos que hay en varias colecciones.

MATERIAL: 20 fichas y 40 cajitas, tarjetas marcadas del 0 al 4 para cada equipo y una hoja de papel para cada equipo.

INDICACIONES: Se organizan en equipos y se les entregan las 10 tarjetas 5 de cada uno de cada uno de los paquetes.

El maestro pide a los equipos que revuelvan las tarjetas de cada paquete, sin juntar las de un paquete con el otro, en cada paquete, se pone una tarjeta encima de la otra, con el número hacia abajo.

En todos los equipos cada alumno toma las tarjetas, una de cada paquete, por ejemplo un niño saca 3 cajitas y 4 fichas, tienen que calcular usando sus propias estrategias, cuántas fichas habría en total si coloca ese número de fichas en cada cajita. Pueden hacer en su cuaderno las operaciones o los dibujos que deseen.

En la hoja en blanco deberán anotar el número de cajitas y el número de fichas que le tocó a cada uno, y los totales que calcularon.

4 cajitas	1 ficha	son	4 fichas
3 cajitas	2 fichas	son	6 fichas
1 cajita	2 fichas	son	2 fichas
2 cajitas	3 fichas	son	6 fichas

Vuelven a revolver las tarjetas y repiten la actividad.

- ✓ Si los niños presentan dificultades cuando aparezcan las tarjetas con el número cero, el maestro deberá apoyarlos, explicándoles que cuando aparezca el cero significa tomar cero cajas, no tomar ninguna, haciéndoles la siguiente pregunta ¿Si no toman ninguna cajita, cuántas fichas tenemos en total?

- ✓ El maestro hace la revisión de la siguiente manera.
- ✓ Cada equipo dice dos de las tiradas que le salieron, escogiendo tiradas no dichas todavía por otros equipos, el maestro las apunta en el pizarrón con el resultado obtenido por el equipo.
- ✓ Cada vez que un equipo dice sus tiradas, el maestro pregunta si hay equipos con tiradas iguales, pero con resultados diferentes y anota también esos resultados y alienta a los niños a que decidan cuales son los correctos.
- ✓ Los niños pueden consultar sus resultados con el material.
- ✓ Libro de texto P. 89

EJE TEMÁTICO: Los Números, sus relaciones y sus operaciones.

6

CONTENIDO: Escritura convencional de la multiplicación con números de una cifra.

PROPÓSITO: Empiecen a reconocer problemas que se pueden resolver con la multiplicación.

MATERIAL: Fichas suficientes y bolsitas para todos los equipos, tarjetas del cero al 10 uno para las fichas y el otro para las bolsitas.

INDICACIONES: Se organizan en equipos, el maestro les recuerda a los niños la manera en que registraron sus resultados en la actividad anterior en las hojas en blanco y escribe un ejemplo en el pizarrón.

En tres bolsitas con
cuatro fichas en cada
una hay doce fichas

Les comenta que esa forma de registrar es muy larga y les pide que encuentren formas más cortas de anotar y los impulsa a que reduzcan lo más que puedan la manera de anotar.

3 bolsitas con 4 fichas
= 12 fichas

Una vez que los niños hayan reducido la manera de anotar, el maestro les propone la notación $3 \times 4 = 12$ como una forma más corta de registrar el número de bolsitas, el número de fichas en cada bolsita y el total de fichas.

- ✓ El maestro les explica que el primer número, el 3, indica la cantidad de bolsitas y el segundo número, el 4 la cantidad de fichas en cada bolsita.
- ✓ Les dice que $3 \times 4 = 12$ se lee: En tres bolsitas con cuatro fichas cada una hay doce fichas en total, o tres veces cuatro fichas son doce fichas en total, o tres por cuatro es igual a doce.

En seguida el maestro les reparte a cada equipo las tarjetas del cinco al ocho de cada paquete y le dice que van a trabajar con esas tarjetas de la misma forma que la actividad anterior: cada alumno toma dos cartas, una de cada paquete y calcula el total de de las fichas correctas. Anotan sus resultados en sus cuadernos con la nueva manera de registrar.

Cuando los alumnos hayan calculado sus multiplicaciones, el maestro los organiza para la revisión, como lo han venido haciendo las veces anteriores, los equipos que lo requieran pueden utilizar el material para verificar sus resultados.

- ✓ Para terminar el maestro les dice a los niños que han estado realizando una nueva operación que se llama multiplicación.

$$3 \times 4 = 12 \quad \text{y} \quad 2 \times 5 = 10 \quad \text{son multiplicaciones}$$

- ✓ La actividad se puede repetir dos veces más con 11 tarjetas de cada paquete. Los niños anotan en sus cuadernos los resultados en su cuaderno y si es necesario pueden utilizar el material.
- ✓ Libro de texto P.112

EJE TEMÁTICO: Los Números, sus relaciones y sus operaciones.

7

CONTENIDO: Escritura convencional de la multiplicación con números de una cifra.

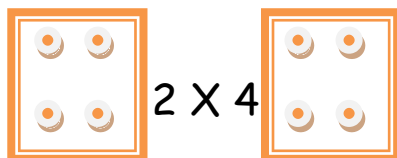
PROPÓSITO: Empiecen a reconocer problemas que se pueden resolver con la multiplicación.

MATERIAL: Una hoja blanca para cada equipo, para todo el grupo, 6 hojas con bolitas dibujadas agrupadas como se muestra en la actividad 2.

Libro de texto

INDICACIONES: se organizan en equipos de submarinos y aviones y el maestro antes de que comiencen les recuerda que una forma rápida de escribir los mensajes consiste en indicar el número de grupos y el número de bolitas d cada grupo.

Les dice que van a escribir el mensaje de la manera más breve que puedan, les pide que pongan las formas de abreviar los mensajes y les ayuda a concluir que basta con escribir una multiplicación que exprese el número de grupos por el número de bolitas de cada grupo.



- ✓ Al terminar se hacen la revisión escribiendo en el pizarrón los resultados.
- ✓ Repitan las veces que sea necesario la actividad.
- ✓ Libro de texto P. 112, 113 y 119

EJE TEMÁTICO: Los Números, sus relaciones y sus operaciones.

8

CONTENIDO: Escritura convencional de la multiplicación con números de una cifra.

Construcción de cuadro de multiplicaciones.

PROPÓSITO: Empiecen a reconocer problemas que se pueden resolver con la multiplicación.

Usen un cuadro de multiplicaciones para obtener resultados de algunas multiplicaciones.

MATERIAL: Un cuadro de multiplicaciones para cada niño de 12 cm de lado. El maestro en un pliego de cartulina dibuja una cuadrícula de 12 X 12 cuadritos lo más grande que sea posible, como se muestra a continuación.

Libro de texto

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											

INDICACIONES: El maestro pega en el pizarrón el cuadro de multiplicaciones y se reparte a cada alumno un cuadro. El maestro les dice que les va a enseñar a notar los resultados de las multiplicaciones en el cuadro. Explica que los números de la columna de la izquierda indican la cantidad de bolsitas con las que se juega, los números de arriba indican la cantidad de piedritas, fichas u otros objetos que se guardan en cada bolsita, en los cuadritos vacíos del Cuadro Multiplicador se anota el total de fichas guardadas, es decir, el resultado de multiplicar un número del primer renglón de arriba.

- ✓ El maestro escribirá en el pizarrón la multiplicación $5 \times 2 = 10$, y les recuerda a los alumnos en esta multiplicación, el 10 es el total de fichas de 5 bolsitas que tienen 2 fichas cada una.
- ✓ Continúa explicándoles como se localiza el resultado en el cuadro, coloca un dedo en el 5 que está en la primera columna a la izquierda y lo mueve hacia la derecha, al mismo tiempo, coloca un dedo de la otra mano en el 2 que está en el primer renglón de arriba y lo mueve hacia abajo, y en el cuadrado donde se encuentran los dos dedos escribe el 10.

Para continuar, los alumnos dictan al maestro todas las multiplicaciones, con su resultado que hicieron en las tres actividades anteriores y que registraron en sus cuadernos.

Por turnos cada niño pasa anotar un resultado en el cuadro que se encuentra pegado en el pizarrón.

El cuadro grande deberá permanecer pegado en el salón para que los niños puedan consultar los resultados cada vez que lo requieran y conservar su propio cuadro.

- ✓ Libro de texto P. 126 y 127.

EJE TEMÁTICO: Los Números, sus relaciones y sus operaciones.

9

Tratamiento de la información.

CONTENIDO: Desarrollen procedimientos propios para calcular los resultados que aún no están anotados en el Cuadro Multiplicador y que corresponden a diversas multiplicaciones.

PROPÓSITO: Usen Cuadro Multiplicador para obtener los resultados de algunas multiplicaciones.

MATERIAL: Cuadro Multiplicador para cada alumno y el grande del grupo. Fichas, semillas o piedritas, cajitas o bolsitas.

INDICACIONES: Se organizan en parejas con su Cuadro Multiplicador.

El maestro les pregunta a los niños que multiplicaciones faltan por llenar en el Cuadro Multiplicador en el renglón de las cajitas.

El maestro escribe en el pizarrón las multiplicaciones que le van diciendo los niños, les dice que las escriban en sus cuadernos y que encuentren los resultados.

- ✓ El maestro tendrá que validar las estrategias que los alumnos empleen para la resolución de las multiplicaciones.
- ✓ Si algunos alumnos tienen dificultades en las multiplicaciones cuya segunda cifra sea cero $5 \times 0 =$, les ayuda mediante la pregunta ¿Cuántas piedritas hay en total en 5 cajitas que no tienen piedritas?

Cuando los niños terminen de resolver las multiplicaciones en su cuaderno, los niños pasan por turnos a escribir en el Cuadro Multiplicador del pizarrón los resultados, los demás niños verifican sus respuestas, si hay errores, el maestro les pide que averigüen cuál es el resultado correcto. Los niños registran en su cuadro el resultado de las multiplicaciones.

- ✓ Esta actividad se repite para que los niños en las siguientes sesiones acaben de completar el Cuadro Multiplicador.
- ✓ Libro de texto P.132 y 133

EJE TEMÁTICO: Los Números, sus relaciones y sus operaciones.

10

Tratamiento de la información.

CONTENIDO: Interpretación de la información contenida en ilustraciones, registros y pictogramas sencillos.

Resolución e invención de problemas sencillos elaborados a partir de una información que aporte una ilustración.

Invención de problemas a partir de expresiones numéricas dadas.

Diferenciar problemas que se resuelven con una multiplicación, de aquellos que se resuelven con una suma o una resta.

PROPÓSITO: Empiecen a reconocer algunos problemas que se pueden resolver con la multiplicación.

Usen el Cuadro multiplicador para obtener los resultados de algunas multiplicaciones.

Recuerden el resultado de algunas multiplicaciones con números menores a seis y puedan calcular los resultados que no recuerden.

MATERIAL: Ilustraciones, libro de texto, fichas, semillas, cajitas, bolsitas.

INDICACIONES: Se organizan en parejas y copia los problemas en el pizarrón según los vayan resolviendo se pegan en el pizarrón las ilustraciones que ejemplifiquen los problemas.

- El maestro lee en voz alta los problemas y les pide que sin hacer ninguna operación por escrito, cómo cuántas sillas más o menos creen que se deben comprar, escribe en el pizarrón las respuestas dadas por los niños, les dice que resuelvan el problema con su pareja y que comparen su resultado con las respuestas escritas en el pizarrón con anterioridad.



En el salón de clases de mi primo Toño, varios de los mesabancos no sirven. Algunos padres de familia lograron conseguir que regalaran al grupo 6 mesas.

Ahora van a organizar una rifa para poder comprar 4 sillas para cada mesa. ¿Cuántas sillas deberán comprar en total?

“Pedir a los niños un resultado aproximado de un problema antes de que lo resuelvan, les ayuda a comprender el problema a la vez que les permite formarse una idea del tamaño probable del resultado, así como apreciar si el resultado que obtienen al aplicar operaciones razonables o no”.



Julieta tiene 4 muñecas en una en una repisa y cuatro sobre su cama, ¿Cuántas muñecas tiene en total Julieta?



Elena tiene cuatro cajas con tres muñecas en cada caja. ¿Cuántas muñecas tiene en total?

- ✓ El maestro organiza la revisión de los problemas y les da la oportunidad a los alumnos de decidir cuál es el resultado correcto y de que muestren diferentes formas de resolverlos.
- ✓ El maestro cuestiona a los niños, si la operación con la que se resuelve el problema de la suma está calculada en el Cuadro Multiplicador y les ayuda a ver que en ese problema no hay cantidades iguales que se repitan y por lo mismo no se puede encontrar el resultado en el cuadro.
- ✓ Esta actividad se debe repetir varias veces con diferentes problemas que incluyan suma, resta y multiplicación, como a continuación se muestran.



Doña Lupe tejió 2 bufandas para cada uno de sus 4 hijos. ¿Cuántas bufandas tejió en total?



Dentro de 6 años Edgar tendrá 9 años. ¿Cuántos años tiene ahora?



Pepe compró 4 macetas para el jardín de su escuela, en cada una quiere plantar 7 rosales. ¿Cuántos rosales necesita en total?

⁶⁴ Block David, Funlabrada Irma y colaboradores. (1994). *Lo que cuentan las cuentas de multiplicar y dividir*. Mexico. SEP. p. 28.



Patricia llenó 13 veces una cubeta para regar el jardín, como no fueron suficientes tuvo que llenarla otras 6 veces. ¿Cuántas veces llenó la cubeta para regar el jardín?



Estela y Luis tienen 75 canicas y necesitan 92. ¿Cuántas canicas les faltan?



Karen compró 7 bombones, cada bombón costó \$3. ¿Cuánto gastó Karen?



Mario invitó a 25 personas para su cumpleaños, 13 de ellas son hombres. ¿Cuántas mujeres invitó?



Un elevador está en el piso 19. Desciende 7 pisos. ¿A qué piso llega?



Juan tiene 13 estampas y Quique tiene el doble. ¿Cuántas estampas tiene Quique?



Andrés está jugando un juego de mesa, si se encuentra en el casillero 9, y tira el dado y obtiene un 5. ¿Hasta qué casillero puede avanzar?

EJE TEMÁTICO: Los Números, sus relaciones y sus operaciones.

11

Tratamiento de la información.

CONTENIDO: Escritura convencional de la multiplicación.

Resolución de problemas sencillos elaborados a partir de la información que se aporta en una ilustración.

PROPÓSITO: Resuelvan problemas para los que necesitan hacer sumas y multiplicaciones con números menores a 10.

MATERIAL: Fichas, corcholatas, semillas, cajitas bolsitas, Cuadro Multiplicador.

INDICACIONES: Se organizan en equipos, el maestro les pide su cuadro Multiplicador y propone el siguiente problema para que lo resuelvan en equipo pega una ilustración en el pizarrón.



Javier hace juguetes de madera: bicicletas, coches y autobuses, cada uno lleva un número diferente de ruedas:

Bicicletas 2 ruedas



Coches 4 ruedas



Camiones 6 ruedas



- ❖ Debe entregar 8 coches a una tienda. ¿Cuántas ruedas tiene que hacer Javier?
- ❖ Cuántas ruedas necesita Javier para hacer 9 bicicletas?
- ❖ ¿Para 4 coches?
- ❖ ¿Para 6 coches?
- ❖ ¿Para 3 camiones?
- ❖ ¿Para 2 coches y 6 camiones?
- ✓ El maestro debe pasar entre los equipos, mientras los niños resuelven los problemas observando lo que hacen y los aliente en trabajo colectivo además de apoyarlos con material si hay dificultades.

- ✓ El maestro les hace las siguientes preguntas; si para un coche necesitan 4 ruedas, ¿cuántas necesitas para dos coches? ¿y para tres coches?
- ✓ Al terminar el maestro organiza la revisión y los incita a responder el siguiente problema.



Javier tuvo que hacer 24 ruedas, ¿Que juguetes le pidieron?

- ✓ Este problema admite varias respuestas correctas como por ejemplo; 12 bicicletas, un coche y 10 bicicletas, 1 camión, 1 coche y 7 bicicletas, etc.
- ✓ El maestro debe dar oportunidad a los niños de probar, corregir y ajustar sus resultados y proporcionarles el material necesario para comprobar sus respuestas.
- ✓ El maestro propicia la revisión del problema y los motiva a demostrar que varias respuestas pueden ser correctas aunque sean diferentes con la siguiente pregunta entonces, si esta respuesta es correcta, ¿todas las demás están mal?
- ✓ El maestro les pone otro ejercicio pero ahora con las patas de diferentes animales y los cuestiona con ejercicios similares al anterior.



Araña 8 patas



hormiga 6 patas



mosca 4 patas



- ¿Cuántas patas tienen 5 arañas?
- ¿Cuántas patas tienen 7 hormigas?
- ¿Cuántas patas tienen 9 moscas?
- ¿Cuántas patas tienen en total 2 moscas y 2 hormigas?
- ¿Cuántas patas tienen en total 3 arañas y 5 moscas?

Tratamiento de la información.

CONTENIDO: Escritura convencional de la multiplicación.
El cuadro o tabla de multiplicaciones de números naturales.
Descomposición de un número natural en factores.

PROPÓSITO: Empiecen a reconocer algunos problemas que se pueden resolver con la multiplicación.

MATERIAL: Cuadro Multiplicador, libro de texto, fichas

INDICACIONES: Forman equipos, el maestro les pide que abran sus libros de texto en las páginas 142 - 143.


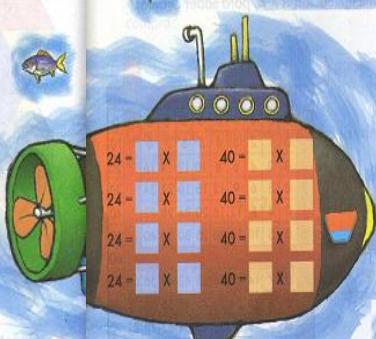
Hunde al submarino

- Toma del Rincón de las matemáticas tu Cuadro de multiplicaciones. Formen equipos de cuatro niños.
- Un niño coloca una piedrita en su Cuadro de multiplicaciones, sin que sus compañeros vean. Esa piedrita es el submarino.
- El niño dice al equipo el número donde colocó el submarino.
- Los niños del equipo anotan el número en la tabla de abajo.
- Buscan en su Cuadro de multiplicaciones todas las veces que aparece ese número y anotan en la tabla todas las multiplicaciones donde pueda estar el submarino.
- Por turnos, dicen las multiplicaciones que anotaron.
- El niño que puso el submarino dice en qué multiplicación está colocado el submarino.
- Encierran en un círculo la multiplicación donde estaba el submarino.

El submarino está en el número	Multiplicaciones		
16	4 X 4	2 X 8	8 X 2

■ Continúan así hasta que todos hayan colocado un submarino en su Cuadro de multiplicaciones.

- Jesús quiere poner sus submarinos en los números 18, 20, 24 y 40. Localiza en tu Cuadro de multiplicaciones los lugares donde pueden estar los submarinos.

142 CUADRO DE MULTIPLICACIONES LECCIÓN 94

143

El maestro lee en voz alta las indicaciones y pasa la lectura a uno de los niños para que siga leyendo y así sucesivamente, pregunta si hay dudas del juego que van a realizar. El maestro pasa entre las bancas observando las respuestas de los niños. Al final entre todos hacen la revisión.

Tratamiento de la información.

CONTENIDO: Resolución de problemas de multiplicación de números naturales hasta de dos cifras.

Resolución o invención de problemas a partir de una ilustración.

La proporcionalidad como significado del concepto de multiplicación de números naturales.

Escrituras convencionales de la multiplicación de números naturales.

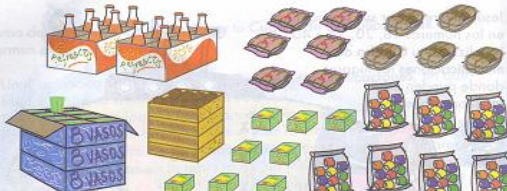
PROPÓSITO: Empiecen a usar la multiplicación en situaciones en las que se reúnen colecciones en las que la cantidad aumenta cierto número de veces. Resuelvan problemas de multiplicación

MATERIAL: Libro texto, fichas, bolsas, Cuadro de multiplicador

INDICACIONES: El maestro les pide que abran su libro de texto en las páginas 144 - 145, y solicita a un niño que lea una de las indicaciones y así sucesivamente, pregunta si hay dudas y les pide que de manera individual resuelvan los problemas.

El maestro organiza la revisión de los problemas y les da la oportunidad a los alumnos de decidir cuál es el resultado correcto.

La mamá de Tonatiuh



■ Tonatiuh quiere saber cuántas cosas compró su mamá. Usa su Cuadro de multiplicaciones para resolver los problemas.

Ruthy, la mamá de Tonatiuh, compró 5 cajas de vasos.

¿Cuántos vasos compró?

Tonatiuh tiene que resolver la multiplicación 5×8 , para saber cuántos vasos compró su mamá.

¿Estás de acuerdo?

■ Tonatiuh coloca su Señalador en el Cuadro de multiplicaciones.

■ El número que queda en la esquina del Señalador es el resultado de la multiplicación 5×8 . De esta manera Tonatiuh sabe que su mamá compró 40 vasos.

$5 \times 8 = 40$ vasos

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	100

■ Resuelve los siguientes problemas, como lo hizo Tonatiuh. Usa tu Cuadro de multiplicaciones y tu Señalador.

La mamá de Tonatiuh compra 2 cajas de refrescos. ¿Cuántos refrescos compra?

$2 \times 6 =$ refrescos.

La mamá de Tonatiuh compra 4 cajas de dulces de tamarindo. ¿Cuántos dulces compra?

$4 \times 9 =$ dulces de tamarindo.

La mamá de Tonatiuh compra 5 bolsas de panqués. ¿Cuántos panqués compra?

$5 \times 2 =$ panqués.

La mamá de Tonatiuh compra 6 bolsas de pastelitos. ¿Cuántos pastelitos compra?

$6 \times 3 =$ pastelitos.

■ Inventa otros problemas con los datos del dibujo y resuélvelos en tu cuaderno. Usa tu Cuadro de multiplicaciones para hacer las cuentas.

144

■ CUADRO DE MULTIPLICACIONES ■ RESOLUCIÓN

■ SEÑALADOR

145

Tratamiento de la información.

CONTENIDO: Concepto de multiplicación de números naturales como agrupamientos, arreglos rectangulares.


Resolución de problemas de multiplicación de números naturales con procedimientos informales.

PROPÓSITO: Desarrollen procedimientos propios para calcular el total de objetos que hay en varias colecciones.

MATERIAL: Libro de texto, fichas, Cuadro Multiplicador.

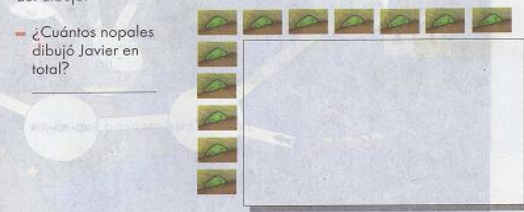
INDICACIONES: El maestro les pide que abran su libro de texto en las páginas 150 - 151, y solicita a un niño que lea una de las indicaciones y así sucesivamente, pregunta si hay dudas y les pide que de manera individual resuelvan los problemas.

El maestro organiza la revisión de los problemas y dando oportunidad a los alumnos que tuvieron algún error de utilizar el material para comprobar sus resultados.


★ Jesús y sus hermanos sembraron una nopalera de 4 X 10 nopales. 

— ¿Quién sembró 2 X 4 nopales?
— ¿Quién sembró 6 nopales?
— ¿Quién sembró más nopales?
— ¿Cuántos nopales sembraron en total Jesús y sus hermanos?

★ Dibuja en tu cuaderno una nopalera que tenga 18 nopales.


★ Javier dibujó una nopalera, pero una hoja de papel está tapando parte del dibujo. 

— ¿Cuántos nopales dibujó Javier en total?

★ Jesús y sus hermanos sembraron una nopalera de 4 X 10 nopales. 

— ¿Quién sembró 2 X 4 nopales?
— ¿Quién sembró 6 nopales?
— ¿Quién sembró más nopales?
— ¿Cuántos nopales sembraron en total Jesús y sus hermanos?

★ Dibuja en tu cuaderno una nopalera que tenga 18 nopales.

★ Javier dibujó una nopalera, pero una hoja de papel está tapando parte del dibujo. 

— ¿Cuántos nopales dibujó Javier en total?

150 151

EJE TEMÁTICO: Los Números, sus relaciones y sus operaciones.

15

Tratamiento de la información.

CONTENIDO: Resolución de problemas de multiplicación de números naturales hasta de dos cifras.

Resolución o invención de problemas a partir de una ilustración.

La proporcionalidad como significado del concepto de multiplicación de números naturales.

Escrituras convencionales de la multiplicación de números naturales.

PROPÓSITO: Resuelvan problemas de multiplicación, utilizando sus propios procedimientos.

MATERIAL: Fichas, bolsas, Cuadro Multiplicador

INDICACIONES: El maestro escribe los problemas en el pizarrón resuelvan por lo menos dos problemas diarios combinándolos con problemas de suma y resta.



En una dulcería establecida en el municipio de Cadereyta del estado de Nuevo León, cada dulce de nuez cuesta \$12 pesos y Manuel compró 7 de esos dulces. ¿Cuánto tendrá que pagar?



En el zoológico de Africam Zafari, en el estado de Puebla, un león avanza 2 metros por cada salto que da. ¿Cuántos metros avanzará en 9 saltos?



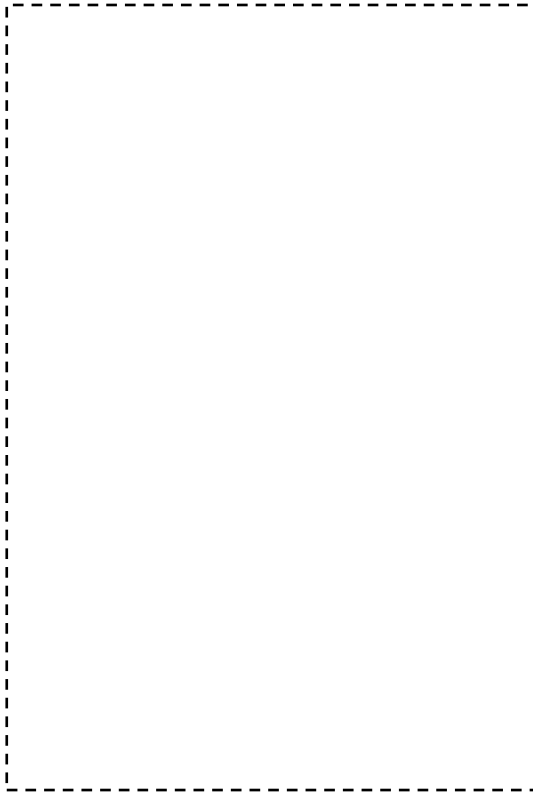
Carolina vive en Cuernavaca en el estado de Morelos. Si compró 1 kilogramo de peras y le dieron nueve y necesita completar 27 ¿cuántos kilogramos más deberá comprar?



Vivo en Morelia capital del estado de Michoacán; y la semana pasada gasté \$28 pesos en cada uno de los 7 días. ¿Cuánto gaste durante la semana?



Tomando como unidad de medida del lapicito ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?



María compró 6 cajas de donas y cada caja contiene 8 donas. ¿Cuántas donas hay en total?



En 2 cajas iguales hay 10 chocolates en total. ¿Cuántos habrá en 4 cajas?



Diana repartió a sus 9 amigas 28 estampas. ¿Cuántas estampas repartió?



Mi mamá colocó 7 pastelitos en 8 charolas. ¿Cuántos pastelitos puso en total?



< En la escuela Leona Vicario, ubicada en la ciudad de Villahermosa en el estado de Tabasco, tienen vitroleros con canicas. Si en cada vitrolero tienen 36 canicas. ¿Cuántas canicas tendrán en 4 vitroleros?



En la cooperativa de la escuela Inglesa Kent ubicada en la ciudad de México, se compraron varias cajas de chocolates LUXUS. Si en cada caja vienen 60 chocolates. ¿Cuántos chocolates tendrán en 4 cajas completas?



Jorge vive en el municipio de Ayotla, del estado de México. Si el sábado compró 25 sobres de estampas y cada sobre cuesta \$7 pesos cada uno. ¿Cuánto pagó por los sobres de estampas?



En una conferencia que dieron los alumnos del Centro Educativo Olivar había 48 conferencistas eran niñas y el doble eran niños. ¿Cuántos niños asistieron?



Verónica colecciona stickers y tiene 8, su hermana Sofía ya llegó a 32 stickers. ¿Cuántas veces más tiene Sofía que Verónica?



En un establo hay 18 vacas que dan aproximadamente 8 litros de leche por día cada una. ¿Cuál es la producción de leche en una semana?



Juan tiene 52 figuras de colección y Ana tiene el triple. ¿Cuántas figuras tiene Ana?



Alejandro tiene 14 años, la tercera parte de la edad de su mamá. ¿Cuántos años tiene la mamá de Alejandro?

CONCLUSIONES

Al término de este trabajo puedo concluir que el Plan y Programas de Estudios de Educación Básica de 1993, ya contemplaba la propuesta de la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas como punto de partida para la construcción de los aprendizajes escolares.

Dejando atrás el mecanicismo y generando nuevas prácticas que se fundamentarán una corriente constructivista que basa el aprendizaje en el desarrollo cognoscitivo de los niños, promoviendo una enseñanza que toma en cuenta los conocimientos previos a partir del contexto en que se desarrollan para acercarlos al conocimiento. A la vez de que considera la propuesta de la Didáctica de las Matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que plantea la resolución de problemas como una forma de enseñar las matemáticas.

El plan y programa de estudios diseñado por la Secretaría de Educación Pública contempla el desarrollo cognitivo del niño señalado por Piaget, ya que las etapas que establece pueden de alguna manera aplicarse en la dirección de los propósitos y contenidos no solo para la enseñanza de las matemáticas sino para las demás asignaturas que constituyen dicho programa .

A medida en que el ser humano va creciendo utiliza diversos esquemas que le ayudan a organizar la información que viene del exterior y que van conformando su inteligencia, su pensamiento y su conocimiento que puede ser según Piaget, físico (descubrirlos), lógico matemático (reconstruirlos) y social (aprenderlos). Las nociones que cada una de estas contempla son la base para la construcción del pensamiento lógico - matemático conformado por las funciones lógicas como la clasificación, la seriación, noción del número y las funciones infralógicas del tiempo y el espacio y que sirven de base para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Como mencione al principio, en Plan y Programas de Estudios de Educación Básica de 1993, se deja ver un enfoque constructivista que se caracteriza por que el niño construya activamente su propio conocimiento a través de ideas y conceptos pasados y nuevos que le sean significativos, estableciendo vínculos sustantivos y no arbitrarios entre lo que hay que aprender y lo que ya se sabe, ya que se considera que el conocimiento no es solo un producto del ambiente o de sus procesamientos internos.

Las posturas de Piaget, Vygostsky, Ausubel y Bruner lejos de ser contradictorias entre ellas, estas se complementan realizando aportaciones enriquecedoras para el desarrollo cognitivo y de la educación.

Por otro lado la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas visto a partir de un enfoque constructivista, sobresale como objetivo el empleo inteligente de los principios matemáticos, en donde las matemáticas sean consideradas como un proceso encaminado a estimular la comprensión, el razonamiento y la resolución de problemas; una enseñanza centrada en la actividad del alumno, partiendo de los intereses, las motivaciones y las necesidades de los niños.

Apoyados en una didáctica de las matemáticas que permita favorecer el aprendizaje por parte de los alumnos, de los contenidos de enseñanza de las matemáticas, al estudiar los sistemas didácticos: alumno, maestro, saber enseñado, dentro de un contexto.

Para que el alumno construya su conocimiento matemático, debe interesarse por la resolución problemas planteados en diferentes situaciones didácticas, que requieren de un pensamiento creativo que le permita hacer predicciones, descubrir, inventar, y compartir sus estrategias, así como argumentar sus resultados a través de la reflexión y de la crítica constructiva.

El papel del maestro será entonces el de guiar a los alumnos, facilitándoles el aprendizaje, enseñándoles intencionalmente contenidos matemáticos, propiciando situaciones –problema que planteen un obstáculo cognitivo, teniendo en cuenta las características de cada estudiante, a la vez de permitir que el niño vaya construyendo su conocimiento participando activamente en el proceso de

aprendizaje, logrando un equilibrio en el cual interactúen activamente el maestro, alumno y saber.

El maestro debe plantearse estrategias de enseñanza que le permitan promover de manera reflexiva y flexible el logro de aprendizajes significativos en los alumnos. Por su parte los alumnos tendrán que hacerse de estrategias de aprendizaje que ellos controlen, haciendo uso de su conocimiento metacognitivo que les permita regular las estrategias de aprendizaje para saber en qué momento emplearlas en función de las demandas que se les planteen.

El juego al ser considerado una actividad natural del niño, se convierte en un acto que lo envuelve en su totalidad, a nivel corporal, afectivo, cognitivo, cultural y social, permitiendo el conocimiento, la búsqueda de estrategias, la autonomía, la vivencia de valores, la creatividad y el cumplimiento de normas.

El interés que despierta el juego en el niño debe ser aprovechado por el maestro con fines de enseñanza y aprendizaje, partiendo de los saberes y de las motivaciones que los niños tienen, el profesor deberá planear situaciones problemáticas que involucren los contenidos sin perder el sentido lúdico, placentero y divertido del juego con el desafío y la situación de aprendizaje que implique un obstáculo cognitivo a superar garantizando la construcción de aprendizajes.

Trabajar matemáticas a partir de la resolución de problemas es una propuesta que en muchos de los casos ha sido mal entendida, porque no se trata de que se le ponga a los niños a resolver problemas sin sentido, sino, que, cuando nos hablan de enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas se refieren, a una propuesta planteada por el constructivismo y la didáctica de las matemáticas, cuyo propósito es que el alumno construya el conocimiento matemático a partir de la búsqueda de soluciones, relacionando mentalmente las experiencias pasadas con las nuevas y se haga de nuevas estrategias de resolución, los problemas que se les planteen deben provocar un choque cognitivo o un obstáculo a vencer. En la medida en que los niños busquen nuevos modos de resolución a las situaciones planteadas, es lo que le va a producir el avance en la construcción de su

conocimiento. Además de que el maestro debe provocar la comunicación entre los alumnos para confrontar y comparar sus resultados con los integrantes del grupo, permitiéndoles descubrir otras formas de resolución para una misma situación, esto les permitirá tomar conciencia de lo que ya sabe y de los límites de ese saber, posibilitándolos de la apropiación de estrategias utilizadas por otros que se muestran adecuadas y evidenciando sus errores muchas veces recurrentes, esta circulación del saber favorecerá la construcción del sentido del aprendizaje de los contenidos matemáticos.

La enseñanza de la multiplicación en México según el Plan y Programas de Estudios de Educación Básica de 1993, está orientada hacia la introducción de la multiplicación a través de la resolución de problemas que impliquen agrupamientos o arreglos rectangulares utilizando diversos procedimientos. Escritura convencional de la multiplicación (con números de una cifra). Construcción del cuadro de multiplicaciones. Iniciando su enseñanza a partir del segundo año de educación primaria, en donde el alumno se encuentra en la etapa de las operaciones concretas (7 a 11 años). Cuando se habla de operaciones se refiere a las operaciones lógicas usadas para la resolución de problemas. En esta fase o estadio el niño ya no sólo usa el símbolo, es capaz de usar los símbolos de un modo lógico, a través de la capacidad de conservar y llegar a generalizaciones atinadas.

La multiplicación se presenta como una operación compleja en el sentido que se manejan dos variantes el multiplicando que se refiere al número de elementos de un conjunto y nos indica una medida y el multiplicador que se refiere a un operador sin dimensión o al número de veces que se repite el conjunto; cuando al niño se le presenta la multiplicación como una suma abreviada caemos en una contradicción y causamos confusión en los niños que apenas comienzan a construir el concepto multiplicativo.

Si bien la multiplicación entra dentro del campo conceptual aditivo, las situaciones aditivas tienen una sola clase de elementos y pueden o tener una relación

constante, a diferencia de la multiplicación en la que se tienen dos clases de elementos claramente definidos en una relación constante.

En la escuela estas operaciones han llegado a confundirse y muchos maestros no se dan cuenta que sus alumnos solamente utilizan la suma reiterada para resolver problemas que exigen multiplicar.

Como la suma reiterada es la manera más natural que los niños tienen para resolver estos problemas, entonces, en muchos libros de texto se presenta como el camino a seguir para llegar a la multiplicación. Esto no es del todo malo, sin embargo, en muchos niños prevalece este procedimiento y es necesario que los alumnos superen los procedimientos aditivos y aprendan a multiplicar.

Se dice que el niño multiplica si maneja simultánea y multiplicativamente dos valores numéricos de diferente tipo. Multiplicativamente quiere decir que maneja uno de los dos términos como operador multiplicativo. Expresiones como “4 veces 3” y “3 por 4” permiten a un maestro a inferir la utilización de procedimientos multiplicativos y dan cuenta del manejo simultáneo de los dos valores numéricos.

Con respecto a los problemas y estrategias planteadas en este trabajo es necesario que los alumnos se enfrenten a ese tipo de problemas durante tres o cuatro clases y que el maestro encamine la marcha de la clase hacia el control completo y la economización de estrategias, para que se produzcan avances en los procedimientos de resolución de problemas y en la comprensión del concepto de la multiplicación.

BIBLIOGRAFÍA

- Alsina I Pastells, Ángel. 2006. *Como Desarrollar el Pensamiento Matemático de 0 a 6 Años*. España. Octaedro. 228 p.
- Ausubel, David P.; Joseph D. Novak; Helen Hanesian. 2001. *Psicología Educativa. Un Punto de Vista Cognoscitivo*. México. Trillas. 621 p.
- Ávila, Alicia y colaboradores. 2004. *La Reforma Realizada. La Resolución De Problemas. Como vía de Aprendizaje en nuestras Escuelas*. México D.F. Secretaría de Educación Pública. 401 p.
2006. *Transformaciones y costumbres en la Matemática Escolar*. México. PAIDÓS. 320 p.
- Aznar Minguet, Pilar y Colaboradores. 1999. *Teoría de la Educación. Un Enfoque Constructivista*. Valencia. Tirant Lo Blanch. 589 p.
- Bañeres, Domenec; Alan Bishop; María Claustre Cardona. 2008. *El juego como estrategia Didáctica*. España. Graó. 130 p.
- Block, David; Irma Fuenlabrada; H. Balbuena y L. Ortega. 1994. *Lo que cuentan las cuentas de multiplicar y dividir*. México. SEP (Libros del Rincón).
- Broitman, Claudia. 1999. *Las operaciones en el primer ciclo. Un aporte para el trabajo en el aula*. Primera edición. México. Novedades Educativas. 57 p.
- Brousseau, Guy. 1986. *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, nº 2, pp. 33-115.
- Bruner, S. Jerome. 1988. *Desarrollo cognitivo en la educación*. Madrid. Morata. 278 p.
- Caballero Ramos y Romeo Froylan. 2010. *Fábrica de genios matemáticos 2. Serie museo didáctico de la matemática*. México. 193 p.
- Cairney, Trevor. 1996. *Enseñanza de la comprensión lectora*. España. Morata. 150 p.
- Calero Pérez, Mavilo. 2007. *Educación jugando*. México. Alfaomega. 238 p.
- Chapela, Luz Maria. 2002. *El juego en la escuela*. México. Paidós. 117 p.
- Cofré J., Alicia y Lucila Tapia A. 1995. *Cómo desarrollar el razonamiento lógico y matemático*. Santiago de Chile. Universitaria. 309 p.

- Coll, César; Jesús Palacios; Álvaro Marchesi. 1999. *Desarrollo Psicológico y Educación, Psicología de la Educación*. España. Alianza. 536 p.
- De Puig, Irene y Angélica Sátiro . 2000. *Jugar a Pensar. Recursos para aprender a pensar en la educación infantil*. España. Octaedro. 276 p.
- Díaz Barriga Arceo Frida y Gerardo Hernández Rojas. 2002. *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, una interpretación constructivista*. México. Mc Graw Hill. 465 p.
- E. w Beth; G. Choquet; J Dieudonné; C. Gattegno; A. Linchnerowitz y Jean Piaget. 1968. *La Enseñanza de las Matemáticas*. España. Aguilar. 181 p.
- Fernández Borja, Fernanda; Ana María Llopis Paret y Pablo Marco Carmen. 1999. *Matemáticas básicas: dificultades de aprendizaje y recuperación*. México. Aula XXI Santillana. 311 p.
- Freudenthal, Hans. 1988. *Problemas mayores de la educación matemática*. Contenido en: López Yáñez, Alejandro (coord.) *Problemas de la enseñanza de las matemáticas*. México. UNAM/Porrúa: pp 3-11.
- Garza González, Beatriz. 2009. Curso taller. *El Aprendizaje Significativo Desde una Visión Humanista*. Universidad nacional Autónoma de México. Facultad de Filosofía y Letras. México. División de Educación Continua.
- González Adriana y Weinstein Edith. 2001. *¿Cómo enseñar matemáticas en el jardín? Número, medida y peso*. Buenos Aires Argentina. Ediciones Colihue. 193 p.
- González Ornelas, Virginia. 2003. *Estrategias de enseñanza y aprendizaje México*. Pax 175 p.
- Hernández Pina, Fuensanta y Encarnación Soriano Ayala. 1997. *La enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de la educación primaria una experiencia didáctica*. Universidad de Murcia. 164 p.
1999. *Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid. Muralla. 230 p.
- Itzcovich, Horacio; Beatriz Ressa de Moreno; Andrea Noviembre y Mónica Becerril María. 2007. *La Matemática Escolar. Las Prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires. AIQUE. 111 p.
- Baroody, Arthur. 1988. *El Pensamiento Matemático de los Niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Madrid: Visor. 269 p.
- Kamii, Constance. 1984. *El número en la educación preescolar*. Madrid: Visor. 88 p.
1995. *Reinventando la aritmética III*. Madrid. Visor. 261 p.
1980. *Juegos colectivos en la primera infancia*. Madrid. Visor. 128 p.
1985. *La teoría de Piaget y la educación preescolar*. Madrid: Visor 198 p.

1988. El niño reinventa la aritmética. *Implicaciones de la teoría de Piaget*. Aprendizaje Visor. Madrid. 248 p.
- Kilpatrick, Jeremy. 1998. *Qué podría ser el constructivismo en matemáticas*. Contenido en: Ontiveros Quiroz, Sofía Josefina (comp.) Antología. Aspectos epistemológicos de la educación matemática. México. Centro de Investigación en Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Querétaro.
- Kilpatrick, Jeremy; Pedro Gómez y Luis Rico. 1995. *Educación matemática*. México. Grupo Iberoamérica: 52 p.
- Luceño Campos, José Luis. 1999. *La resolución de problemas aritméticos en el aula*. Málaga. Ediciones Aljibes. 117 p.
- M. Sarlé, Patricia. 2006. *Enseñar el juego y jugar a la enseñanza*. Buenos Aires. Paidós. 205 p.
- Mattos, Luiz A. 1990. *Compendio de didáctica general*. México. Kapeluz. 355 p.
- Maza Gómez, Carlos. 1991. *Multiplicar y dividir. A través de la resolución de problemas*. Madrid. Aprendizaje Visor. 135 p.
- Meece, Judith. 2000. *Desarrollo del niño y del adolescente. Compendio para educadores*. México. Mc Graw Hill. 394 p.
- Moreno Armella, Luis E. 1996. *La epistemología genética: una interpretación*. Educación matemática, vol. 8, nº 3. México. Grupo Iberoamérica. pp. 5-23.
- Moreno Murcia, Juan Antonio. 2002. *Aprendizaje a través del juego*. Aljibe. Malaga. 193 p.
- Navarro Adelantado, Vicente. 2002. *El afán de jugar. Teoría y práctica de los juegos motores*. Barcelona España. Inde Publicaciones. 389 p.
- Ontiveros Quiroz, Sofía Josefina. 1994. *El fracaso en la enseñanza de las matemáticas en bachillerato*. México. Universidad Autónoma de Querétaro.
- Ortega Rosario. 1999. *Jugar y Aprender*. Sevilla. Díada. 90 p.
- Ortiz Rodríguez, Francisca. 2001. *Matemáticas. Estrategias de enseñanza y aprendizaje*. México. Pax. 139 p.
- Panizza, Mabel. (Compiladora). 2003. *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la E. G. B.* Buenos Aires. Paidós. 326 p.
- Piaget, Jean. 1983. *Génesis de las estructuras lógicas elementales*. Buenos Aires: Guadalupe
- Pinto Sierra, José Manuel; Martínez Sánchez, Jorge. 1994. *La teoría de Jean Piaget y el aprendizaje de las ciencias*. (Colección "Cuadernos del CESU", número 30). México. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Pozo, Juan Ignacio. 2003. *Teorías Cognitivas del Aprendizaje*. Madrid. Morata. 686 p.
- R.Saunders, A.M.Bingi. 1989. *Perspectivas Piagetanas en la Educación Infantil*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid. Morata. 350 p.

- Rodríguez Pérez, Pilar. 2009. *Matemáticas 2. Guía Didáctica para el Maestro. Primaria Encuentro*. Primera edición. México. SM. 233 p.
- Ruiz Valsco Sánchez Enrique. 2007. *Educatrónica: innovación en el aprendizaje de las ciencias y la tecnología*. Madrid. Díaz de santos. 128 p.
- Secretaría de Educación Pública. 1993b. Educación Básica. Primaria. *Plan y Programas de Estudio*. México, SEP. Secretaría de Educación Pública. 162 p.
- Secretaría de Educación Pública. 1994. *Matemáticas Segundo Grado Dirección General de Materiales Educativas de la Secretaría de Educación Básica y Normal, de la Secretaría de Educación Pública*. 175 p.
- SEP. 1993. *Plan y programas de estudio 1993*. Educación básica. Primaria
- Sinclair, Hermine. *Constructivismo y la psicología de las matemáticas*. Contenido en: Ontiveros Quiroz, Sofía Josefina (comp.) Antología. Aspectos epistemológicos de la educación matemática. México Centro de Investigación en Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Querétaro.
- Vergnaud, Gérard. *Sobre el constructivismo*. Contenido en: Ontiveros Quiroz, Sofía Josefina (comp.) Antología. Aspectos epistemológicos de la educación matemática. México. Centro de Investigación en Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Querétaro.
- Vygotsky, Lev. 1988. *El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores*. Cap. 6.: Interacción entre Aprendizaje y Desarrollo. México. Grijalbo. 237p.
- W. Santrock, John. 2002. *Psicología de la Educación*. México. McGraw – Hill. 586 p.
- Word David. 2001. *Cómo piensan y aprenden los niños: Contextos sociales del desarrollo cognoscitivo*. Siglo XXI. México. 376 p.

Internet

- Conocimientos Web. Net. *Etapas de la resolución de problemas*.
[Http://www.conocimientosweb.net/descargas/article185.html](http://www.conocimientosweb.net/descargas/article185.html). [Consultado: 2 marzo 2011]
- Diario Oficial de la Unión Europea. Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo. 18 de diciembre de 2006. *Sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente*.
<http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:394:0010:0018:ES:PD>
- Freudenthal, Hans. 1988. *Problemas mayores de la educación matemática*. Contenido en: López Yáñez, Alejandro (coord.) Problemas de la enseñanza de las matemáticas. UNAM/Porrúa: México. Pp 3-11.
http://eduardomancera.org/xxii_anpm/mario_giordano.pdf

Godino, Juan D. 2003. *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. 19 p.

<http://www.ugr.es/local/jgodino/> [Consulta: 9 noviembre 2008]

Secretaría de Educación Pública. 2007. *Plan Nacional de Desarrollo 2007 – 2012*. México.

http://74.125.95.132/search?q=cache:gMykfQ9NGwcJ:www.ses.sep.gob.mx/work/sites/ses/resources/LocalContent/1110/3/prog_sec.pdf+plan+nacional+de+educaci%C3%B3n+2007-2012&hl=es&ct=clnk&cd=3&gl=mx