



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

SIMULACIONES NUMÉRICAS DE  
HIDRODINÁMICA RELATIVISTA EN  
SIMETRÍA ESFÉRICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
ANTONIO CASTELLANOS RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. MIGUEL ALCUBIERRE MOYA



2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno Apellido paterno: Apellido materno: Nombre(s): Teléfono: Universidad: Facultad o escuela: Carrera: Número de cuenta:	Castellanos Ramírez Antonio 55 37 43 75 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 99500658
2. Datos del tutor Grado: Apellido paterno: Apellido materno: Nombre(s):	Dr. Alcubierre Moya Miguel
3. Datos del sinodal 1 Grado: Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:	Dr. William Henry Lee Alardín
4. Datos del sinodal 2 Grado: Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:	Dr. Tonatiuh Matos Chassin
5. Datos del sinodal 3 Grado: Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:	Dr. Juan Carlos Degollado Daza
6. Datos del sinodal 4 Grado: Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:	Dr. Roberto Allan Sussman Livovsky
7. Datos del trabajo escrito. Título:  Número de páginas: Año:	Simulaciones numéricas de hidrodinámica relativista en simetría esférica  114 2011



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
Secretaría General  
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ  
Jefe de la División de Estudios Profesionales  
Facultad de Ciencias  
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

**Simulaciones Numéricas de Hidrodinámica Relativista en Simetría Esférica**

realizado por **Castellanos Ramírez Antonio** con número de cuenta **0-9950065-8** quien ha decidido titularse mediante la opción de tesis en la licenciatura en Física. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dr. William Henry Lee Alardin

Propietario Dr. Tonatiuh Matos Chassin

Propietario Dr. Miguel Alcubierre Moya

Tutor Suplente M. en C. Juan Carlos Degollado Daza

Suplente Dr. Roberto Allan Sussman Livovsky

Atentamente,

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Ciudad Universitaria, D. F., a 22 de octubre de 2009

EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA

M. EN C. MIRNA VILLAVICENCIO TORRES

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo 'nlm.

# Agradecimientos

Quiero agradecer de manera particular al Dr. Miguel Alcubierre por haber aceptado ser mi asesor desde el servicio social una vez concluido el curso de Relatividad que tomé con él. Agradecer todas las enseñanzas que de él recibí, por la infinita paciencia que me tuvo a lo largo de este trabajo, por su tiempo al revisar y corregir cada uno de los capítulos de este trabajo, y también por su apoyo.

Me gustaría agradecer también al Dr. Darío Nuñez por su apoyo, su tiempo y también por sus enseñanzas.

A los doctores William Lee, Tonatiuh Matos, Juan Carlos Degollado y Roberto Sussman por aceptar ser mis sinodales y por todos los comentarios hechos, los cuales contribuyeron a que este trabajo se realizara de la mejor manera posible.



# Índice general

Índice general	III
Introducción	v
<b>1. Formulación 3+1 de la Relatividad General</b>	<b>1</b>
1.1. Formalismo 3+1 . . . . .	1
1.2. Curvatura extrínseca . . . . .	4
1.3. Ecuaciones de Einstein en 3+1 . . . . .	5
1.4. Datos iniciales . . . . .	7
1.5. Condiciones de foliación . . . . .	7
<b>2. Hidrodinámica Newtoniana</b>	<b>11</b>
2.1. Leyes de conservación e hiperbolicidad . . . . .	11
2.2. Ecuaciones de Euler . . . . .	13
2.3. Ecuación de estado . . . . .	15
2.4. Ondas de choque y problema de Riemann . . . . .	18
2.4.1. Solución elemental del problema de Riemann . . . . .	24
<b>3. Hidrodinámica relativista</b>	<b>31</b>
3.1. Relatividad especial . . . . .	31
3.1.1. Recuperando las variables primitivas . . . . .	35
3.2. Relatividad general . . . . .	36
3.3. Hidrodinámica relativista en 3 + 1 . . . . .	39
3.4. Hiperbolicidad . . . . .	42

<b>4. Métodos numéricos</b>	<b>45</b>
4.1. Diferencias finitas . . . . .	45
4.2. Consistencia, convergencia y estabilidad . . . . .	47
4.3. Algo de métodos numéricos . . . . .	49
4.3.1. Métodos de líneas . . . . .	51
4.4. Un problema de prueba: El tubo de choques . . . . .	54
4.4.1. Viscosidad artificial y disipación artificial . . . . .	56
<b>5. Simetría esférica</b>	<b>63</b>
5.1. Soluciones esféricas de estrellas . . . . .	63
5.1.1. Coordenadas y métrica de un sistema esférico estático . . . . .	63
5.1.2. Ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto estático . . . . .	64
5.1.3. Solución interior de la estrella . . . . .	67
5.1.4. La solución exterior . . . . .	68
5.2. Formalismo 3+1 en simetría esférica . . . . .	69
5.3. Hidrodinámica relativista en simetría esférica . . . . .	72
5.4. El código numérico OLLINSPHERE . . . . .	74
<b>6. Estrellas TOV</b>	<b>75</b>
6.1. Construyendo los datos iniciales . . . . .	75
6.1.1. Añadiendo el término perturbativo . . . . .	81
6.2. Evolución numérica . . . . .	84
6.3. Resultados . . . . .	87
6.3.1. Estrella TOV estática (no perturbada) . . . . .	87
6.3.2. Estrella TOV perturbada . . . . .	90
<b>7. Conclusiones</b>	<b>101</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>105</b>



# Introducción

La teoría de la relatividad general explica el comportamiento de los campos gravitacionales intensos y dinámicos. Su éxito se debe no solo al hecho de explicar algunos fenómenos observables, sino también a la predicción de algunos fenómenos astrofísicos como son: la existencia de los agujeros negros, las ondas gravitacionales y la expansión del universo. El formalismo sólido en el que está basada la teoría se puede observar en la elegancia matemática de sus ecuaciones. Desafortunadamente, la elegancia no permite identificar la complejidad de estas.

Las ecuaciones de campo de Einstein forman un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales en 4 dimensiones, acopladas y no lineales; por lo que sólo se conocen soluciones exactas con altos grados de simetría, ya sea en el espacio o el tiempo.

Sin embargo, cuando se desea conocer el comportamiento de algún objeto astrofísico interesante, donde se involucren campos gravitacionales intensos, dinámicos o con poca simetría resulta casi imposible encontrar una solución analítica de las ecuaciones. Es a partir de estos hechos que surgió la relatividad numérica, la cual intenta resolver las ecuaciones de Einstein utilizando métodos numéricos y códigos computacionales.

El área de la relatividad numérica es una disciplina joven, no obstante, y gracias al avance vertiginoso de las herramientas computacionales en los últimos años, ha tenido logros importantes; el más reciente y quizás el más importante, es el haber resuelto el problema de la colisión de dos agujeros negros en órbita. Este hecho provocó la búsqueda de nuevos problemas por resolver, como son la extracción de ondas gravitacionales debido a la colisión de los agujeros negros, entre otros. Los ejemplos mencionados arriba, son simulaciones en las cuales hay ausencia de materia.

Para explicar el colapso de una estrella de neutrones, la acreción de un disco rotando alrededor de un agujero negro supermasivo o la producción de jets relativistas en el centro de las galaxias, se necesita además de la hidrodinámica. La conexión entre ambas, la hidrodinámica relativista, surge de la necesidad de explicar estos fenómenos astrofísicos.

Este trabajo pretende ser una introducción al estudio de la hidrodinámica relativista. En él, se presentan las ideas principales de la relatividad numérica, seguidas de las de la hidrodinámica, tanto newtoniana como relativista; se da una idea general de los métodos numéricos, se escriben las ecuaciones de la relatividad general en simetría esférica para el caso de un fluido perfecto y finalmente, se describe el comportamiento físico de una estrella estática (estrella TOV).

El trabajo está estructurado como sigue:

En el capítulo 1 se hace una breve revisión del formalismo  $3 + 1$  de la relatividad numérica, en el cual necesitamos hacer una distinción entre espacio y tiempo, hecho que rompe la covariancia de las ecuaciones, pero permite tratar el problema como un problema de valores iniciales. Se discuten los conceptos esenciales como son: la función de lapso, el vector de corrimiento, el tensor de curvatura extrínseca y se escriben las ecuaciones en el formalismo  $3+1$  (ecs ADM, ver [4]), que son las ecuaciones que nos permiten evolucionar el espacio tiempo. Al final se discuten brevemente el concepto de los datos iniciales y de las condiciones de foliación.

El capítulo 2 muestra el desarrollo las ecuaciones de la hidrodinámica newtoniana para un fluido perfecto (ecuaciones de Euler). Se introduce el concepto de leyes de conservación y la importancia que tiene el escribir las ecuaciones de evolución como un sistema de este tipo, además de que esté “bien puesto”. En este sentido, se discute el concepto de hiperbolicidad y el significado que tiene sobre las ecuaciones de evolución. Posteriormente se estudia la ecuación de estado, la cual nos proporciona la información termodinámica de un fluido y permite que el sistema de ecuaciones esté completo. Finalmente se estudia el comportamiento de las discontinuidades de contacto, los choques y las ondas de rarefacción, y se da un esbozo de la solución al problema de Riemann en el caso de las ecuaciones de Euler.

En el capítulo 3 se discute la formulación de la hidrodinámica relativista desde el punto de la formulación de Valencia (ver [10]), tanto en el caso de la relatividad especial, como el de la relatividad general y el puente entre esta y la formulación  $3+1$ . Comenzamos escribiendo el tensor de energía momento, las ecuaciones de conservación y la ecuación de continuidad. Introducimos las variables denominadas “dinámicas” (las cuales sustituyen a las variables “primitivas”: densidad, presión y velocidad), que permiten que nuestro sistema de ecuaciones esté bien puesto y discutimos la forma no trivial para obtener a partir de las variables dinámicas las variables primitivas.

En el capítulo 4 se presentan las ideas fundamentales de los métodos numéricos. Se discute la utilidad de las aproximaciones en diferencias finitas así como los conceptos de consistencia, convergencia y estabilidad, puntualizando el caso de la estabilidad como un indicador de la conveniencia de adoptar un esquema de diferencias sobre otro. En seguida se introducen los métodos de líneas para la solución de ecuaciones diferenciales parciales y finalmente se aplica todo lo discutido en un problema de prueba: “el tubo de choques relativista”. Aquí se ponen en juego el manejo de los choques y se introduce el concepto de la viscosidad artificial como un artilugio numérico para poder manipular los choques. De esta manera, preparamos el terreno para, en el capítulo 6, hacer la evolución de un sistema astrofísico más interesante.

En el capítulo 5 se estudia un espacio-tiempo con simetría esférica. Se discute el caso de una solución para una estrella esférica estática, y se obtienen las ecuaciones de Einstein en el caso de un fluido perfecto (ecuaciones TOV) tanto en el interior de la estrella como en el exterior y se discute el problema de la superficie de la estrella (donde la solución interior y la exterior se deben conectar suavemente). Después se escriben las ecuaciones ADM en simetría esférica, haciendo énfasis en la hiperbolicidad del sistema y en las condiciones de regularización. Posteriormente, se escriben las ecuaciones de la hidrodinámica relativista en simetría esférica.

El capítulo 6 muestra la evolución numérica de una estrella TOV. Comenzamos por presentar la relación entre la densidad central de la estrella y su masa total. Este resultado separa a las estrellas en dos grupos: estables e inestables. Se estudian los datos iniciales para el caso estable, haciendo énfasis en el problema de la superficie, donde la densidad debe ser idénticamente cero. Además se introduce una pequeña perturbación en los datos iniciales y se resuelven las constricciones para garantizar la solución de las ecuaciones de Einstein. Se evolucionan ambos sistemas y se analiza con cuidado el tema de la formación de un choque en la superficie, y se discuten los resultados.

Finalmente, en el capítulo 7, se presentan las conclusiones del trabajo realizado.



# Capítulo 1

## Formulación 3+1 de la Relatividad General

### 1.1. Formalismo 3+1

La dinámica de un campo gravitacional según la teoría de la relatividad general está dada por las ecuaciones de Einstein  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ , las cuales están escritas en forma tensorial, es decir no se distingue un sistema de coordenadas específico<sup>1</sup>. Estas ecuaciones relacionan las componentes de la métrica del espacio tiempo  $g_{\mu\nu}$  con el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$ .  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein, el cual involucra segundas derivadas (tanto en espacio como en tiempo) de la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Es decir, las ecuaciones son un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales que, salvo en casos muy específicos, son prácticamente imposibles de resolver analíticamente.

Una manera de resolver las ecuaciones de Einstein es haciendo aproximaciones numéricas de éstas e intentar resolverlas con la ayuda de las computadoras. Para esto es necesario separar las ecuaciones de Einstein en una serie de ecuaciones de evolución y, dando ciertas condiciones iniciales, obtener la evolución del campo gravitacional en el tiempo.

El formalismo 3+1 de la relatividad numérica consiste en hacer una separación entre espacio y tiempo: por un lado se tienen las tres dimensiones espaciales, y por otro la temporal. Esto nos permite ahora escribir las ecuaciones como un problema de Cauchy (o de valores iniciales): Si damos condiciones iniciales y ecuaciones de evolución sobre ciertas variables, podemos obtener el comportamiento de dichas variables a distintos tiempos. La discusión expuesta a continuación puede consultarse con más detalle en [2], [29], [17] y [27].

Vamos a considerar un espacio-tiempo con cierta métrica  $g_{\mu\nu}$ , el cual separamos en cortes tridimensionales tal que las superficies tridimensionales son de tipo espacialoide<sup>2</sup> (ver Figura 1.1).

---

<sup>1</sup>A lo largo de este trabajo, se utiliza la convención de unidades naturales, es decir,  $c = G = M_{\odot} = 1$ , donde  $M_{\odot}$  es la masa solar. Los índices griegos son usados para denotar las componentes espacio-temporales y corren desde 0 hasta 3, mientras que los índices latinos denotan las componentes espaciales y van de 1 a 3.

<sup>2</sup>Un espacio-tiempo con estas características recibe el nombre de “globalmente hiperbólico”.

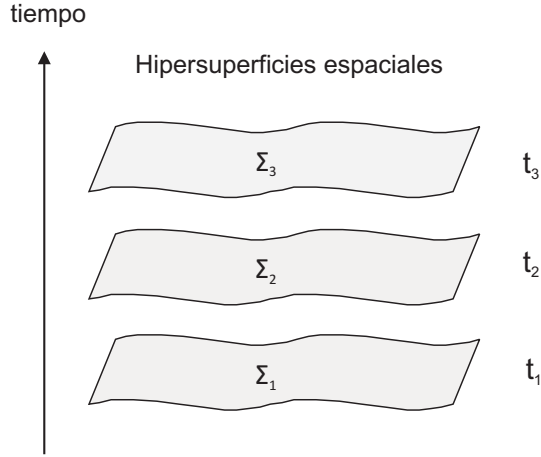


Figura 1.1: Foliación del espacio-tiempo en superficies tridimensionales de tipo espacialoide.

Definimos un parámetro  $t$  con el cuál podremos identificar a las distintas hipersuperficies de la foliación ( $\Sigma_t$ ).

Tomamos una cierta foliación y dos de sus hipersuperficies, y suponemos que la distancia que las separa es infinitesimal. Dado  $n^\mu$ , un vector unitario normal a las hipersuperficies  $\Sigma_t$ , la métrica del espacio tiempo  $g_{\mu\nu}$  induce una métrica tridimensional  $\gamma_{ij}$  sobre la hipersuperficie  $\Sigma_t$  dada por:

$$\gamma_{ij} = g_{ij} + n_i n_j . \quad (1.1)$$

Una vez hecha esta definición, vamos a expresar la geometría del espacio tiempo de acuerdo a lo siguiente (ver Figura 1.2):

- La métrica tridimensional  $\gamma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) que mide las distancias en la hipersuperficie:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j . \quad (1.2)$$

- La función de “lapso”, la cual determina el lapso de tiempo propio  $\alpha$  que mide un observador de Euler (aquél que se mueve en dirección normal a ellas):

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt . \quad (1.3)$$

- El “vector de corrimiento”, que mide la velocidad relativa  $\beta^i$  entre los observadores de Euler y las líneas con coordenadas espaciales constantes:

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^j) dt . \quad (1.4)$$

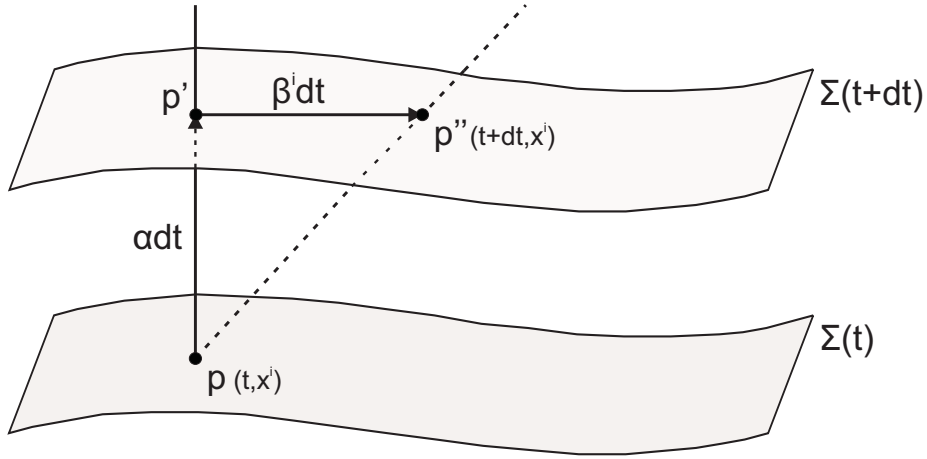


Figura 1.2: Representación esquemática de la descomposición 3+1:  $\alpha$  es la función de lapso, que mide el tiempo propio entre dos hipersuperficies separadas infinitesimalmente,  $\Sigma(t)$  y  $\Sigma(t + dt)$ ;  $\beta^i$  es el vector de corrimiento el cual describe el desplazamiento de las coordenadas espaciales  $x^i$  relativas a la propagación normal.

Es importante mencionar aquí que la manera en como se hace la foliación no es única, ni tampoco la manera en la que se propaga el sistema de coordenadas de una hipersuperficie a la otra. Esto implica que tanto la función de lapso  $\alpha$  como el vector de corrimiento  $\beta^i$  son funciones que pueden escogerse libremente. Ambas funciones determinan nuestra elección de coordenadas y se conocen como “funciones de norma”.

La métrica del espacio-tiempo se puede escribir entonces como:

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta^i \beta_i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.5)$$

o en forma matricial:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta^i \beta_i & \beta_i \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^i}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^i}{\alpha^2} & \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

El vector normal unitario a las hipersuperficies  $n^\mu$  es:

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha), \quad n_\mu = (-\alpha, 0). \quad (1.8)$$

Notamos que este vector corresponde a la 4-velocidad de los observadores de Euler.

Más adelante usaremos el vector normal  $n^\mu$  para escribir las ecuaciones de Einstein en el formalismo 3+1.

## 1.2. Curvatura extrínseca

Cuando hablamos acerca de las hipersuperficies espaciales que constituyen nuestra foliación, es importante distinguir entre dos conceptos: la curvatura intrínseca y la curvatura extrínseca. La primera de ellas proviene de su geometría interna y está determinada por el tensor de Ricci tridimensional, asociado a la métrica espacial  $\gamma_{ij}$ . La curvatura extrínseca tiene que ver con la manera en que las hipersuperficies se encuentran inmersas en el espacio-tiempo de 4 dimensiones. Esta curvatura se define en términos del comportamiento del vector normal  $n^\alpha$  cuando es transportado paralelamente de un lugar a otro de la superficie. En general lo que se obtiene transportando este vector paralelamente a lo largo de la superficie, es que al final ya no será normal a la superficie. El cambio del vector normal bajo transporte paralelo está dado por el “tensor de curvatura extrínseca”  $K_{\alpha\beta}$ .

Para definir dicho tensor, primero tenemos que introducir el operador de “proyección”  $P_\nu^\mu$  a las hipersuperficies espaciales:

$$P_\nu^\mu = g_\nu^\mu + n^\mu n_\nu, \quad (1.9)$$

donde  $n^\mu$  es el vector normal unitario a las hipersuperficies definido en la sección anterior.

Usando este operador, se define a la curvatura extrínseca como:

$$K_{\mu\nu} = -P_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu. \quad (1.10)$$

De lo anterior, podemos concluir que el tensor  $K_{\mu\nu}$  es puramente espacial, es decir:  $n^\mu K_{\mu\nu} = 0$ , por esa razón consideraremos solamente las componentes espaciales  $K_{ij}$ . También es posible mostrar que el tensor de curvatura extrínseca es un tensor simétrico, es decir,  $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$ .

Sustituyendo la forma explícita del vector normal (1.8) se puede mostrar que el tensor de curvatura extrínseca está dado en términos de la métrica espacial como

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{ij}, \quad (1.11)$$

donde  $\mathcal{L}_{\vec{n}}$  es la derivada de Lie a lo largo del vector normal. Usando el hecho de que  $\mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{ij} = (1/\phi) \mathcal{L}_{\phi \vec{n}} \gamma_{ij}$ , tomando la función de lapso como el escalar y, recordando que en coordenadas adaptadas a nuestro sistema la derivada de Lie es idéntica a la derivada parcial, obtenemos:

$$\partial_t \gamma_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}. \quad (1.12)$$

Esta ecuación se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_j \beta_i + D_i \beta_j, \quad (1.13)$$

donde  $D_i$  representa la derivada covariante tridimensional.



De la ecuación (1.13), observamos que la curvatura extrínseca está relacionada con el cambio en el tiempo de la métrica espacial. Dicho de otro modo, la curvatura extrínseca es esencialmente la velocidad de la métrica tridimensional vista por los observadores de Euler.

Esta no puede ser la única ecuación de evolución, pues, para poder cerrar el sistema y describir a la relatividad como un problema de Cauchy nos falta encontrar una ecuación de evolución para la curvatura extrínseca.

Hasta aquí notamos que sólo hemos utilizado argumentos geométricos, sin tomar en cuenta las ecuaciones de Einstein, por lo que la ecuación de evolución para la  $K_{ij}$  debemos obtenerla a partir de las ecuaciones de Einstein. En resumen, la ecuación de evolución para la  $\gamma_{ij}$  (1.13) es meramente cinemática, mientras que la ecuación de evolución para la  $K_{ij}$  deberá contener la información dinámica.

### 1.3. Ecuaciones de Einstein en 3+1

Para escribir las ecuaciones de Einstein en el lenguaje 3+1 es necesario utilizar la contracción de dichas ecuaciones con el vector normal  $\vec{n}$  y con el operador de proyección  $P_\beta^\alpha$ . Además, debemos utilizar las ecuaciones de Gauss-Codazzi y Codazzi-Mainardi, que relacionan el tensor de Riemann en cuatro dimensiones, con el tensor de Riemann en tres dimensiones. Un desarrollo de estas ecuaciones y de la descomposición 3+1 puede encontrarse en [2] y [9].

Comenzamos por proyectar las ecuaciones de Einstein dos veces sobre la dirección normal  $n^\mu$ , entonces:

$$n^\mu n^\nu (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = 0 . \quad (1.14)$$

Utilizando las ecuaciones de Gauss-Codazzi encontramos:

$${}^3R - K_{ij}K^{ij} + K^2 = 16\pi\rho , \quad (1.15)$$

donde  ${}^3R$  es el escalar de curvatura de la métrica espacial,  $K = \gamma^{ij}K_{ij}$  es la traza del tensor de curvatura extrínseca y  $\rho$  es la densidad de energía de la materia medida por los observadores de Euler, definida como  $\rho := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$ .

Es importante notar que la ec. (1.15) no tiene derivadas que involucren el tiempo (es decir, derivadas temporales), pero sí tiene derivadas espaciales de  $\gamma_{ij}$  dentro del escalar de Ricci. Por tanto no es una ecuación de evolución sino una restricción del sistema. Al estar relacionada con la densidad de energía  $\rho$  se le conoce como la “*constricción hamiltoniana*”.

Si ahora hacemos la proyección mixta, es decir, proyectamos un índice en la dirección normal y otro en la hipersuperficie, tenemos:

$$P^{\alpha\mu} n^\nu [G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}] = 0 . \quad (1.16)$$

Escribiendo el tensor de Einstein en términos de la métrica y el escalar de Ricci, y posteriormente utilizando las Ecuaciones de Codazzi-Minardi para contraer la derivada de la curvatura extrínseca, obtenemos:

$$D_j[K^{ij} - \gamma^{ij}K] = 8\pi j^i, \quad (1.17)$$

donde  $D_i$  es la derivada covariante con respecto a la métrica espacial, y donde  $j^i$  es el “flujo de momento” medido por los observadores de Euler, definido como:

$$j^i := -P^{i\mu}n^\nu T_{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

La ecuación (1.17) tampoco contiene derivadas temporales, de modo que es otra restricción (tres contricciones más, debido a que tenemos un índice libre). Al conjunto de ecuaciones (1.17) se les conoce como “*constricción de momentos*”.

Tanto la ecuación (1.15) como el conjunto de ecuaciones (1.17) son muy importantes debido a que nos imponen una restricción sobre las condiciones iniciales. Si queremos resolver las ecuaciones de Einstein debemos garantizar que las constricciones se cumplan desde el inicio, de otro modo no estaremos resolviendo las ecuaciones de Einstein. Esto implica que la elección de las variables dinámicas (métrica y curvatura extrínseca) no es enteramente arbitraria.

Es de notar que en ninguna de las dos ecuaciones anteriores aparecen términos que tengan que ver con las funciones de norma, dicho de otro modo son independientes del lapso  $\alpha$  y del vector de corrimiento  $\beta^i$ .

Finalmente, proyectamos las ecuaciones de Einstein con la hipersuperficie. Después de un álgebra bastante larga, obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ik} \partial_j \beta^k + K_{jk} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \\ & + \alpha \left[ {}^3R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k \right] + 4\pi \alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}], \end{aligned} \quad (1.19)$$

donde  $S_{ij} = P_i^n P_j^m T_{nm}$  “es el tensor de esfuerzos” de la materia, y  $S$  su traza.

La ecuación (1.19) sí tiene derivadas temporales, por tanto es una ecuación de evolución. No solo eso, estas ecuaciones contienen la verdadera dinámica del sistema.

Notamos que a diferencia de las constricciones, en las ecuaciones (1.19) si aparecen las variables de norma; al mismo tiempo podemos observar que no tenemos ecuaciones de evolución para estas variables. Esto es así, ya que tenemos la libertad de escoger las variables de norma libremente.

A las ecuaciones (1.13) y (1.19) se les conoce como las ecuaciones de Arnowitt, Deser y Misner ó ecuaciones ADM [4]. La forma de estas ecuaciones no es la que obtuvieron originalmente Arnowitt, Deser y Misner, sino que están escritas en la forma como las derivó York [29]. Estas ecuaciones forman un sistema cerrado y nos permiten escribir las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy.

## 1.4. Datos iniciales

Las ecuaciones de constricción (1.15) y (1.17) implican que las variables dinámicas  $\gamma_{ij}, K_{ij}$  no pueden ser elegidas de manera arbitraria como condiciones iniciales. Si se desea hacer la evolución de un sistema, primero debemos asegurarnos que las constricciones se satisfagan en los datos iniciales, es decir, debemos resolver las constricciones y encontrar los valores apropiados de  $\gamma_{ij}$  y  $K_{ij}$ , esto nos garantiza la evolución del sistema físico de interés. Si los datos iniciales se satisfacen en una hipersuperficie a un tiempo  $t = 0$ , entonces las identidades de Bianchi (ver por ejemplo [2] para mayor referencia) garantizan que las constricciones se satisfacen a todo tiempo posterior, es decir, las ecuaciones de evolución propagan las constricciones.

Sin embargo, el resolver las constricciones no es algo trivial, juntas forman un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales elípticas. No obstante, existen algunos métodos conocidos para resolver estas ecuaciones de constricción en algunos casos particulares.

En este trabajo sólo nos restringimos a hacer mención de los datos iniciales por ser uno de los elementos fundamentales de la Relatividad Numérica y donde hay un gran campo de estudio (resolvedores elípticos para encontrar datos iniciales para colisión de dos agujeros negros rotando, etc). Para mayor referencia, se puede consultar [2] y [7].

En el caso particular que nos interesa, la estrella TOV (ver sección 6.1), tomamos los datos iniciales directamente de las ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto en simetría esférica (estrella TOV estática), por lo que las ecuaciones de constricción se satisfacen automáticamente. Sin embargo en el caso de la estrella TOV perturbada, los datos iniciales ya no satisfacen las ecuaciones de Einstein, por lo que hay que resolver las ecuaciones de constricción para obtener las variables adecuadas. En ambos casos las soluciones se obtienen de manera numérica.

## 1.5. Condiciones de foliación

En la sección (1.3) vimos que la elección de coordenadas en el formalismo 3+1 está en términos de las funciones de norma: la función de lapso  $\alpha$  y el vector de corrimiento (o shift)  $\beta^i$ . Estas funciones aparecen en las ecuaciones de evolución tanto para la métrica como para la curvatura (1.13) y (1.19).

En todo el desarrollo de las ecuaciones 3+1 nunca encontramos ecuación de evolución alguna para el lapso ni para el shift. Ni siquiera algo que nos diga que valores deben tomar estas funciones. Esto es algo natural, pues la elección de coordenadas es libre (de ahí la covariancia de las ecuaciones de Einstein, de no depender de un sistema de referencia privilegiado).

Sin embargo, cuando se desea hacer la evolución numérica de un sistema físico de interés, se debe tomar en cuenta la elección de coordenadas, ya sea para que el sistema se comporte mejor, o para que las ecuaciones se simplifiquen. Si hacemos una mala elección de coordenadas, puede suceder que el código numérico falle o deje de ser confiable y por tanto no podemos obtener la información deseada.

Inmediatamente surgen las preguntas: ¿Cómo podemos saber si una elección de coordenadas es mejor que otra? ¿Cuál elección de coordenadas es buena y cuál no? Es importante poder responder estas preguntas incluso antes de empezar la evolución, pues recordemos que para poder evolucionar las ecuaciones (1.13) y (1.19) necesitamos los valores de  $\alpha$  y  $\beta^i$ .

La elección de la función de lapso determina como avanza el tiempo propio entre distintas hipersuperficies espaciales, mientras que el shift muestra como se propagan de una hipersuperficie a otra las líneas de coordenadas espaciales constantes.

Siguiendo [2] incluimos una lista de propiedades que deben cumplir las condiciones de norma:

- Cuando sea posible, las condiciones de norma deben poderse adaptar a las simetrías fundamentales del problema. Idealmente, las condiciones de norma deben buscar automáticamente simetrías del espacio-tiempo, ya sea aproximadas o exactas, y hacerlas evidentes durante la evolución.
- Las condiciones de norma deben evitar la formación de singularidades en las coordenadas.
- Las condiciones de norma deberán ser bien puestas y sencillas de aplicar numéricamente.
- Las condiciones de norma deben poderse expresar en términos de la 3-covariancia, esto garantiza que tenemos la misma norma aún cuando el sistema de coordenadas cambie.

La manera más simple de escoger una condición de foliación es tomando  $\alpha = 1$ , es decir, el tiempo coordinado coincide con el tiempo propio de los observadores de Euler. En este caso dichos observadores se mueven a lo largo de geodésicas (caída libre) y por tanto la foliación recibe el nombre de “foliación geodésica”. El gran inconveniente de esta condición es que, cuando los observadores eulerianos chocan entre ellos por efecto del campo gravitacional, el sistema de coordenadas se vuelve singular. Este es el motivo por el cual esta foliación en la práctica no se usa.

Una condición distinta de la foliación geodésica fue introducida por Smarr y York [23]. En esta foliación los elementos de volumen se mantienen constantes (la idea es evitar el acercamiento entre los distintos observadores en caída libre).

Puesto que el cambio en los elementos de volumen es  $\nabla_\mu n^\mu = -K$ , entonces la condición para que los elementos de volumen se mantengan constantes es:  $K = \partial_t K = 0$ . Es decir,  $K$  debe ser cero inicialmente y debe mantenerse cero durante su evolución.

Utilizando las ecuaciones (1.13) y (1.19) encontramos

$$\frac{dK}{dt} = -D^2\alpha + \alpha [K_{ij}K^{ij} + 4\pi(\rho + S)]. \quad (1.20)$$

Para escribir esta ecuación de este modo, hemos empleado la constrictión hamiltoniana para eliminar el escalar de curvatura. Puesto que  $\partial_t K = 0$  debe satisfacerse, la función de lapso debe ser tal que cumpla con la siguiente ecuación:

$$D^2\alpha = \alpha [K_{ij}K^{ij} + 4\pi(\rho + S)] ; \quad (1.21)$$

la cual es una ecuación elíptica. Esta condición, recibe el nombre de “foliación maximal”, ya que garantiza que el volumen será máximo en la hiper-superficie si existen pequeñas variaciones.

Esta foliación se ha utilizado en muchas simulaciones numéricas, incluyendo agujeros negros. Además puede evadir singularidades, tanto físicas como las que se encuentran dentro de un agujero negro (“colapso de lapso”), como también de coordenadas debidas al choque de observadores. La desventaja de este tipo de foliación se encuentra en la resolución de la ecuación elíptica en tres dimensiones, ya que el tiempo de máquina empleado resulta muy alto. Es por esta razón que se han buscado otras condiciones de foliación, que sean similares a la condición maximal, pero resulten más sencillas a la hora de resolver.

Una familia de condiciones de foliación hiperbólicas puede obtenerse si el lapso satisface la condición:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha^2 f(\alpha)K, \quad (1.22)$$

donde  $\frac{d\alpha}{dt} := \partial_t\alpha - \mathcal{L}_\beta$ , con  $\mathcal{L}_\beta$  la derivada de Lie a lo largo del vector de corrimiento, y  $f(\alpha)$  una función arbitraria de  $\alpha$  que debe ser mayor que cero. Esta familia recibe el nombre de condición de Bona-Masso [6].

Derivando (1.22), obtenemos:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\alpha^2 f(\alpha) \left\{ \frac{dK}{dt} - \alpha(2f + \alpha f')K^2 \right\}.$$

Sustituyendo la ecuación (1.20), en el caso de vacío, en la ecuación de la segunda derivada del lapso encontramos

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \alpha^2 f(\alpha)D^2\alpha = -\alpha^3 f(\alpha)\{K_{ij}K^{ij} - (2f + \alpha f')K^2\}, \quad (1.23)$$

donde  $f' = \partial f/\partial\alpha$ . Esta ecuación nos dice que la función de lapso satisface una ecuación tipo onda. La velocidad de esta onda, esta asociada con  $f^{1/2}$ , por lo que  $f > 0$ .

Tomando  $f = 1$  en (1.22), se obtiene la *foliación armónica*. La ecuación para el lapso es por tanto:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha^2 K, \quad (1.24)$$

esta condición es equivalente a  $\frac{d(\alpha/\gamma)}{dt} = 0$  (ver [2]). Por lo que, integrando, la función de lapso toma la forma  $\alpha = h(x^i)\gamma^{1/2}$ , con  $h(x^i)$  una función independiente de  $t$  y  $\gamma^{1/2}$  el elemento de volumen.

Si ahora tomamos  $f(\alpha) = N/\alpha$ , con  $N$  una constante positiva, obtenemos la foliación llamada *1+log*, puesto que el lapso toma la forma:

$$\alpha = h(x^i) + \ln(\gamma^{1/2}). \quad (1.25)$$

El caso  $N = 2$ , se ha encontrado que presenta características muy similares a la foliación maximal, como por ejemplo la evasión de singularidades [1].

En el caso de las simulaciones numéricas en la estrella TOV, usaremos los lapsos maximal y *1+log*.

## Capítulo 2

# Hidrodinámica Newtoniana

En este capítulo desarrollaremos las ideas básicas de la hidrodinámica newtoniana. El escribir estas ecuaciones en forma de “leyes de balance”, abre el camino para el estudio del concepto de hiperbolicidad. Como veremos en la sección 2.1 esto permite descomponer las ecuaciones en términos de sus eigenvalores y sus respectivos eigenvectores.

Esta descomposición es de suma importancia tanto en la hidrodinámica newtoniana, como en la hidrodinámica relativista ya que proporciona la herramienta matemática necesaria para la resolución del Problema de Riemann tanto analítico como numérico. En el caso numérico, los métodos de alta resolución para la captura de choques (HRSC) se basan en este tratamiento. Si bien, dichos métodos exceden la finalidad de este trabajo, en la sección 2.4 se presenta la solución elemental del problema de Riemann la cual permite introducir los conceptos fundamentales para, en un estudio posterior, entrar de lleno en los HRSC.

### 2.1. Leyes de conservación e hiperbolicidad

Antes de escribir las ecuaciones de la hidrodinámica, tanto newtoniana como relativista, vamos a detenernos un instante para estudiar los sistemas hiperbólicos y señalar la importancia de estos en el uso de nuestras ecuaciones. Posteriormente, escribiremos las ecuaciones hidrodinámicas en forma de ecuaciones de conservación.

Consideremos un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{U}$  es el vector de las “variables conservadas” y  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U})$  es el vector de flujos. En general  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U})$  y  $\mathbf{S}(\mathbf{U})$  son funciones arbitrarias, quizá no lineales, de las componentes de  $\mathbf{U}$ , pero no de las derivadas de dichas componentes. Las ecuaciones 2.1 se les llama un sistema de “leyes de balance” y en el caso  $S = 0$  reciben el nombre de “leyes de conservación”.

En muchas áreas de la física, incluida la relatividad numérica y por supuesto la hidrodinámica relativista, se trabaja con ecuaciones diferenciales que tienen esta forma. Esto no es algo casual. La forma como están escritas estas ecuaciones tiene que ver con el concepto de “hiperbolicidad”. En esta sección analizaremos brevemente este concepto. Para más detalles pueden consultarse [2], y en el caso particular de las ecuaciones de la hidrodinámica puede verse también [26].

Las leyes de conservación son sistemas de ecuaciones diferenciales parciales que se pueden escribir de la forma (2.1). Usando la regla de la cadena, tenemos que, para el segundo término de (2.1)

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x},$$

la ecuación puede reescribirse como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$  es la “matriz jacobiana”. Las entradas de esta matriz son las derivadas parciales de las componentes del vector de flujo con respecto a las componentes del vector de las variables conservadas.

Consideremos ahora los eigenvalores  $\lambda_n$  de la matriz jacobiana  $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ . Se dice que un sistema es “hiperbólico” si todos los eigenvalores son reales. Si además la matriz tiene un conjunto completo de eigenvectores (la matriz es diagonalizable), entonces el sistema se denomina “fuertemente hiperbólico”. Si no existe tal conjunto, entonces el sistema se llama “debilmente hiperbólico”.

Supongamos ahora que el sistema es fuertemente hiperbólico, esto implica que la matriz  $\mathbf{A}$  es diagonalizable, entonces podemos expresarla de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}\mathbf{\Lambda}\mathbf{K}^{-1} \quad \text{ó} \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}, \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{\Lambda}$  es la matriz diagonal formada por los eigenvalores  $\lambda_n$  de  $\mathbf{A}$ , y  $\mathbf{K}$  es la matriz de los eigenvectores columna correspondientes a los eigenvalores  $\lambda_n$ .

Asumiendo la hiperbolicidad del sistema, podemos definir los llamados “eigencampos” mediante la transformación

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}\mathbf{W} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{U},$$

de esta manera el sistema (2.2) queda desacoplado<sup>1</sup>. No es difícil demostrar que la ecuación de evolución para los eigencampos es:

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbf{\Lambda} \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{Q}, \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>En realidad el sistema sigue acoplado en las fuentes y solo se desacopla en la parte principal; en el caso  $q_n = 0$ , el sistema queda completamente desacoplado.



donde  $\mathbf{Q}$  es una función de las componentes de  $\mathbf{W}$ , pero no de sus derivadas. Escrito en términos de las componentes  $w_i$  de  $\mathbf{W}$  tenemos:

$$\partial_t w_n + \lambda_n \partial_x w_n = q_n . \quad (2.5)$$

El problema inicial se ha reducido a una serie de ecuaciones de advección, cuyas velocidades están dadas por los eigenvalores  $\lambda_n$ , es decir, tenemos una serie de perturbaciones propagándose con velocidades  $\lambda_n$ .

Definimos las llamadas curvas características (o simplemente características) como aquellas curvas  $C(t)$  que satisfacen la “ecuación característica”  $\frac{dC(t)}{dt} = \lambda_n$ . Vemos que hay una característica por cada valor de  $n$  que tomemos. Las variables  $\omega_n$  son constantes a lo largo de su correspondiente característica en el caso en que  $q_n = 0$ .

En un determinado sistema, la velocidad característica es la velocidad a la cual se propaga la información en ese sistema, y por tanto, podemos asociarla con la velocidad física de la información transmitida por el sistema.

Los sistemas hiperbólicos son de gran utilidad cuando de ecuaciones de evolución se trata. Físicamente, la hiperbolicidad significa que el sistema es causal y local, dicho de otro modo, la solución en un lugar y en un instante de tiempo determinado sólo puede ser afectada por el llamado “cono característico” de ese lugar y de ese instante (que representa el pasado en ese punto y en ese instante de tiempo, matemáticamente estaríamos hablando de los datos iniciales).

Además de lo escrito anteriormente, los sistemas hiperbólicos son utilizados debido a que, si se tiene un sistema fuertemente hiperbólico, puede demostrarse que el problema está bien puesto, es decir, las soluciones al problema existen y son únicas localmente. Además, si hacemos perturbaciones pequeñas en los datos iniciales, esperaríamos tener cambios pequeños en la solución, por lo que las soluciones son estables.

Las ecuaciones ADM presentadas en el capítulo 1, son débilmente hiperbólicas, esto quiere decir que el sistema no está bien puesto, por lo que al hacer evoluciones numéricas con ellas en algunos casos el sistema se vuelve inestable. Sin embargo, en el caso de simetría esférica (ver sección 5.2), hay métodos para regularizar las ecuaciones 3+1 y hacer el sistema fuertemente hiperbólico.

En la sección siguiente verificaremos que las ecuaciones de la hidrodinámica en el caso Newtoniano, son fuertemente hiperbólicas. El detalle en el caso relativista, puede verse en [2].

## 2.2. Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de Euler son un sistema de ecuaciones no lineales escritas en forma de leyes de conservación, las cuales dictan la dinámica de fluidos, tales como líquidos o gases. No obstante, son útiles solo en el caso en que se desprecien la viscosidad y el flujo de calor en el fluido, es decir, son ecuaciones idealizadas del comportamiento de los fluidos. Sin embargo, para poder

describir completamente el estado del fluido en cuestión, es necesario incluir una ecuación de estado, la cual nos da las propiedades termodinámicas del sistema (ver sección 2.3).

Existen muchas maneras de escoger el conjunto de variables que describirán el fluido en cuestión. Una posible elección es tomar el conjunto de variables conocidas como “variables primitivas”:  $\rho$  = densidad de masa,  $p$  = presión,  $v$  = velocidad, esta última se puede descomponer en las diferentes componentes de movimiento ( $x, y, z$  por ejemplo). Una elección alternativa, suele ser la formada por las denominadas variables conservadas: la densidad de masa  $\rho$ , la densidad de momento  $S = \rho v$  y la energía total por unidad de volumen  $\mathcal{E}$ . Físicamente, las cantidades conservadas salen naturales de la aplicación de las leyes fundamentales como la conservación de la masa, la segunda ley de Newton y la conservación de la energía. Computacionalmente, como dijimos en la sección anterior, la ventaja de utilizar estas variables viene del hecho de expresar las ecuaciones de Euler como un sistema de ecuaciones de conservación.

Las ecuaciones de la hidrodinámica en el caso Newtoniano se pueden escribir en forma conservativa (2.1) de la siguiente manera:

$$\partial_t \rho + \partial_k (\rho v^k) = 0, \quad (2.6)$$

$$\partial_t S_i + \partial_k (S_i v^k + p \delta_i^k) = 0, \quad (2.7)$$

$$\partial_t \mathcal{E} + \partial_k [(\mathcal{E} + p)v^k] = 0, \quad (2.8)$$

donde  $S_i = \rho v_i$  es la densidad de momento y  $\mathcal{E} = \rho(\epsilon + v^2)/2$  es la energía total por unidad de volumen<sup>2</sup>. En este caso podemos ver que, una vez obtenidas las variables conservadas, es fácil invertir el sistema para obtener las variables primitivas.

Para observar el comportamiento de las ecuaciones anteriores, nos vamos a remitir al caso en el cual sólo hay movimiento a lo largo del eje  $x$ , esto significa que  $v_x = v$ ,  $S_x = S$ ,  $v_y = v_z = 0$ ,  $S_y = S_z = 0$ . Además, estudiaremos el caso de un gas ideal (el análisis puede hacerse para una ecuación de estado en general, ver [2]).

Las ecuaciones quedan entonces:

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \quad (2.9)$$

$$\partial_t S + \partial_x (Sv + p) = 0, \quad (2.10)$$

$$\partial_t \mathcal{E} + \partial_x [(\mathcal{E} + p)v] = 0. \quad (2.11)$$

Para un gas ideal tenemos la ecuación de estado siguiente:

$$\epsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho_0}, \quad (2.12)$$

---

<sup>2</sup>Aquí,  $\epsilon$  es la energía interna específica (energía interna por unidad de masa). Esta última cantidad será estudiada un poco más a fondo en la siguiente sección.

con  $\gamma$  el “índice adiabático” (ver ecuación (2.19) en la sección 2.3).

Definimos la velocidad del sonido como:

$$c_s = \sqrt{\frac{p}{\rho_0} p_e + p_{\rho_0}}, \quad (2.13)$$

donde los subíndices indican derivadas parciales:  $p_e = \partial p / \partial e$ ,  $p_{\rho_0} = \partial p / \partial \rho_0$ .

Entonces tenemos que:

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho_0}}. \quad (2.14)$$

La matriz jacobiana es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)v^2 & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 2)v^3 - \frac{c_s^2 v}{\gamma - 1} & \frac{3 - 2\gamma}{2}v^2 + \frac{c_s^2}{\gamma - 1} & \gamma v \end{pmatrix}.$$

Calculando los eigenvalores encontramos:

$$\lambda_1 = v - c_s, \quad \lambda_1 = v, \quad \lambda_1 = v + c_s, \quad (2.15)$$

y los correspondientes eigenvectores son:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ v - c_s \\ \frac{1}{2}v^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho_0} - vc_s \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ \frac{1}{2}v^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ v + c_s \\ \frac{1}{2}v^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho_0} + vc_s \end{bmatrix},$$

Los eigenvalores son todos reales y los eigenvectores forman un conjunto completo de eigenvectores linealmente independientes. Esto demuestra que las ecuaciones de Euler (2.6)-(2.8) son fuertemente hiperbólicas.

### 2.3. Ecuación de estado

Las ecuaciones de la hidrodinámica nos dan la descripción del movimiento de un fluido, sin embargo, como hemos mencionado antes, no son suficientes para describir completamente el sistema: hace falta una ecuación para poder tener el sistema completamente determinado. Esta ecuación es precisamente la ecuación de estado, la cual esperamos se pueda escribir de una forma sencilla:  $p = p(\rho_0, \epsilon)$ .

El caso más sencillo es tomar la ecuación de estado  $p = 0$ , el denominado *polvo* en relatividad, el cual se puede ver como una colección de partículas las cuales se encuentran en reposo en cierto sistema de referencia (dicho de otro modo todas las partículas, localmente, tienen exactamente

la misma velocidad. No hay componentes aleatorias, es decir, el conjunto de partículas posee cero energía interna.). La ausencia de presión implica que los elementos del fluido se mueven a lo largo de geodésicas en el espacio tiempo. En la práctica el polvo puede ser utilizado para modelar ciertos fenómenos en donde no haya colisión de partículas, como por ejemplo la estructura de anillos o discos rotantes, o el colapso de un cascarón esférico (colapso de Openheimer–Snyder). Sin embargo, cuando queremos describir un sistema físico más complejo (una estrella de neutrones), la ecuación de estado se vuelve más complicada. No obstante, esta debe contener la naturaleza y las propiedades del sistema físico en cuestión, es decir, este mismo debe proporcionar dicha ecuación.

Consideraremos en esta sección sólo el caso de una ecuación de estado sencilla, la ecuación de estado para un gas ideal. Cuando uno tiene un sistema termodinámico en equilibrio, este puede ser descrito completamente mediante las variables de estado: presión y volumen. Una familia de sistemas en equilibrio termodinámico puede ser descrita mediante una curva en el espacio  $p-V$ , a una determinada temperatura  $T$ . Esta ecuación puede ser o no complicada, dependiendo del tipo de problema que se quiera estudiar.

En el caso de un gas ideal, esta relación se puede escribir de la siguiente manera:

$$pV = \mathcal{N}RT , \quad (2.16)$$

donde  $V$  es el volumen,  $R$  es la constante universal de los gases,  $T$  es la temperatura y  $\mathcal{N} = n/N_A$ , con  $N_A$  el número de Avogadro y  $n$  es el número de partículas. Esta ecuación también puede verse de la siguiente forma:

$$pV = nkT , \quad (2.17)$$

donde hemos introducido la constante de Boltzman  $k$ . Sin embargo, en el uso de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista, los resultados están dados en términos de las variables primitivas, en particular en términos de  $p$  y  $\rho$ . De esta manera, necesitamos encontrar una ecuación de estado que nos relacione estas dos variables.

Definimos la capacidad calorífica a presión constante  $c_p$ , y la capacidad calorífica a volumen constante  $c_V$ , en términos de un incremento de calor  $dQ$  el cual genera cambios de temperatura  $dT$ , como:

$$c_p = \frac{1}{M} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p , \quad c_V = \frac{1}{M} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V . \quad (2.18)$$

donde  $M = nm$  es la masa total, y  $m$  la masa de cada partícula.

La razón de los calores específicos, o “índice adiabático”, se define como:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} . \quad (2.19)$$

Utilizando la primera ley de la termodinámica ( $dQ = dU + pdV$ , con  $U$  la energía interna del gas ideal) en el caso de un proceso a volumen constante ( $dQ = dU$ ), tenemos

$$c_V = \frac{1}{M} \frac{dU}{dT} \Rightarrow dU = Mc_V dT . \quad (2.20)$$

Suponiendo que el valor de  $c_V$  es constante (lo cual es válido en el caso de un gas ideal), podemos integrar esta ecuación para obtener:

$$U = Mc_V T . \quad (2.21)$$

También, si consideramos un proceso a presión constante, la primera ley se puede escribir

$$dQ = Mc_V dT + nk dT , \quad (2.22)$$

debido a que la ecuación de estado se puede escribir:  $pdV = nk dT$ .

De esta manera tenemos que:

$$c_p = \frac{1}{M} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p = \frac{Mc_V dT + nk dT}{M dT} = c_V + \frac{k}{m} . \quad (2.23)$$

El índice adiabático queda de la siguiente manera

$$\gamma = 1 + \frac{k}{mc_v} . \quad (2.24)$$

Finalmente, usando la ecuación de estado (2.17) y la ecuación (2.21), tenemos

$$p = (\gamma - 1)\rho_0 \epsilon . \quad (2.25)$$

donde  $\rho_0 = \frac{M}{V}$  es la densidad de materia y  $\epsilon = \frac{U}{M}$  es la densidad de energía por unidad de masa.

Esta ecuación puede ser escrita en términos de la temperatura utilizando la ecuación (2.21).

Otra relación, muy usada en algunos problemas astrofísicos y que usaremos en este trabajo, es la relación *politrópica*.

Partimos de la primera ley de la Termodinámica,  $dQ = dU + pdV$ ; puesto que  $\rho_0 = \frac{M}{V} \Rightarrow dV = Md \left( \frac{1}{\rho_0} \right)$  y  $\epsilon = \frac{U}{M} \Rightarrow dU = Md\epsilon$ , la primera ley la podemos expresar como:

$$dQ = M \left[ d\epsilon + pd \left( \frac{1}{\rho_0} \right) \right] . \quad (2.26)$$

Consideremos un proceso sin transferencia de calor ( $dQ = 0$ ), es decir adiabático, entonces

$$0 = \frac{1}{\gamma - 1} d\left(\frac{p}{\rho_0}\right) + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right), \quad (2.27)$$

no es difícil mostrar que

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho_0}{\rho_0}. \quad (2.28)$$

La cual integrando queda

$$p = \kappa \rho_0^\gamma, \quad (2.29)$$

con  $\kappa$  una constante de integración.

Esta ecuación comunmente se escribe de la forma:

$$p = \kappa \rho_0^\gamma \equiv \kappa \rho_0^{1 + \frac{1}{N}}. \quad (2.30)$$

donde  $N$  es el “índice politrópico”.

En el caso de un proceso adiabático, usando (2.25) y (2.29), tenemos una relación entre la energía interna específica y la densidad de materia dada de la siguiente manera:

$$\epsilon = \frac{\kappa}{\gamma - 1} \rho_0^{\gamma-1}. \quad (2.31)$$

La ecuación (2.29) es la ecuación de estado que utilizaremos en la parte de las condiciones iniciales, mientras que la ecuación (2.25) será utilizada en la evolución de las variables.

## 2.4. Ondas de choque y problema de Riemann

Las ecuaciones de la hidrodinámica son no lineales, esto significa que es posible la aparición de discontinuidades en las variables (velocidad, presión, densidad) a lo largo de la evolución, aún partiendo de datos iniciales suaves. Un estudio detallado de las discontinuidades puede encontrarse en [8] y [13].

Para observar este comportamiento, vamos a utilizar la ecuación más sencilla en donde ocurre este tipo de fenómenos: la ecuación de Burgers, la cual es una ecuación hiperbólica escalar no lineal de la forma:

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0. \quad (2.32)$$

Esta ecuación es muy similar a la ecuación de advección, sólo que en este caso la velocidad de la onda es la misma función desconocida  $u$ . La ecuación de Burgers tiene solución para un

tiempo pequeño, y la solución se da en términos de las características. Vamos a seguir aquí el método utilizado en [14] para observar el comportamiento de las características. Estas deben de satisfacer la siguiente ecuación:

$$x'(t) = u(x(t), t) , \quad (2.33)$$

y puesto que

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t) x'(t) \\ &= \partial_t u + u \partial_x u \\ &= 0 , \end{aligned} \quad (2.34)$$

vemos que  $u$  es constante a lo largo de cada característica. Esto implica que  $x'(t)$  es constante según (2.33) y por tanto las características son líneas rectas determinadas por los datos iniciales. Si estos son suaves, entonces se pueden usar para encontrar una solución  $u(x, t)$  para un tiempo pequeño sin que las características se crucen.

Sin embargo, supongamos que los datos iniciales son tales que la velocidad  $u$  no es uniforme en una cierta región, en particular si  $u > 0$  y  $\partial_x u < 0$  las características se cruzarán inevitablemente si el tiempo es suficientemente grande. Cuando esto sucede, y se comienza con un frente de onda suave, la cresta se mueve más rápido que el resto de la onda, lo que desarrolla un gradiente infinito y se dice que la onda se “rompe”. Este cruce de líneas características se denomina “choque”. En la figura 2.1 se muestra el comportamiento de la ecuación de Burgers en el tiempo y el efecto producido (la pendiente infinita) debido al choque sobre los datos inicialmente continuos . A partir de la formación del choque, la solución se vuelve discontinua y la solución de la ecuación diferencial ya no tiene sentido (no podemos garantizar que lo que estamos resolviendo numéricamente sea en realidad lo que se deseaba).

Como mencionamos anteriormente, el comportamiento expuesto arriba se presenta también en las ecuaciones de la hidrodinámica. Sin embargo, en el caso de un fluido real, nunca se observan este tipo de discontinuidades. Esto se debe a que las ecuaciones de Euler son demasiado simplistas, pues carecen de un término de viscosidad. En un fluido real, cuando un choque se forma, la viscosidad juega un papel fundamental de tal manera que en vez de observar una discontinuidad, lo que se observa es un gradiente muy alto pero finito.

Vamos a analizar a continuación los diferentes tipos de discontinuidades y sus propiedades, debido a que son fundamentales para entender el comportamiento de las ecuaciones de la hidrodinámica.

Las superficies en donde se producen discontinuidades (en el sentido matemático) de las cantidades hidrodinámicas, son llamadas superficies de discontinuidad. En estas deben cumplirse ciertas condiciones límites o de frontera, que formularemos a continuación. Consideremos nuestra superficie plana (siempre podemos hacer esto tomando un elemento suficientemente pequeño de

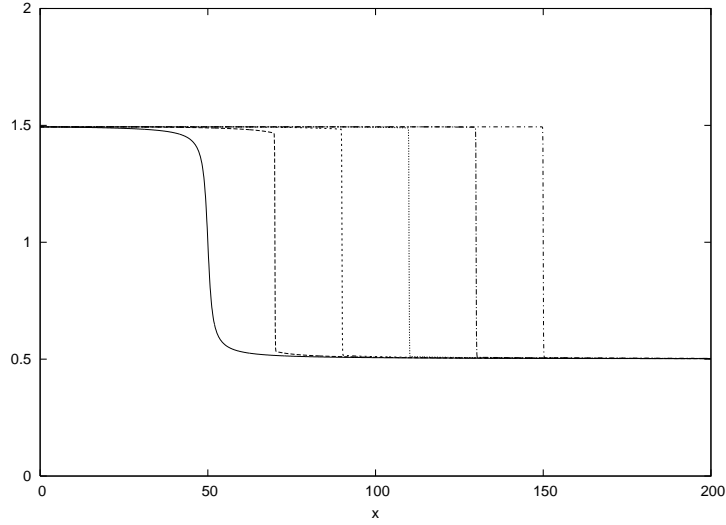


Figura 2.1: Variación del perfil de onda de la ecuación de Burgers en el transcurso del tiempo debido a la desigualdad de la velocidad en los distintos puntos del perfil de onda ocasionados por la aparición de las discontinuidades. La línea continua muestra el valor inicial de  $u$ . Se observa que rápidamente la solución ha desarrollado un gradiente infinito debido al cruce de líneas características denominado “choque”, hecho por el cual la onda se vuelve discontinua.

la superficie), además, definimos la dirección  $x$  como la dirección en la cual el flujo se mueve. Desde el sistema de referencia de la superficie de discontinuidad los flujos de masa, energía y momento deben conservarse a través de dicha superficie, es decir, la masa (energía y momento) del fluido que llega a una cara debe ser igual a la masa (energía y momento) que sale por la otra. Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$[\rho v] = 0, \quad (2.35)$$

$$[Sv + p] = 0, \quad (2.36)$$

$$[(\mathcal{E} + p)v] = 0. \quad (2.37)$$

con  $S = \rho v$ , y  $\mathcal{E} = \rho(\epsilon + v^2/2)$ , y, donde hemos definido  $[a] \equiv a_1 - a_2$  para cualquier variable, y los subíndices 1 y 2 se refieren a los valores de las variables hidrodinámicas antes y después de cruzar la superficie respectivamente. A partir de estas condiciones, y siguiendo [13] se puede observar la existencia de dos tipos de superficies de discontinuidad. En la primera, el flujo de masa a través de la superficie es cero, es decir,  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = 0$  y, ya que  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son distintas de cero, entonces  $v_1 = v_2 = 0$ . Las ecuaciones (2.35) y (2.37) se satisfacen automáticamente, y, de la condición (2.36) obtenemos  $p_1 = p_2$ . De aquí notamos que, tanto la velocidad normal (a la superficie de discontinuidad) como la presión son continuas en la superficie de discontinuidad, mientras que la densidad y demás variables termodinámicas pueden ser discontinuas. A esto se le conoce como una “discontinuidad de contacto”.



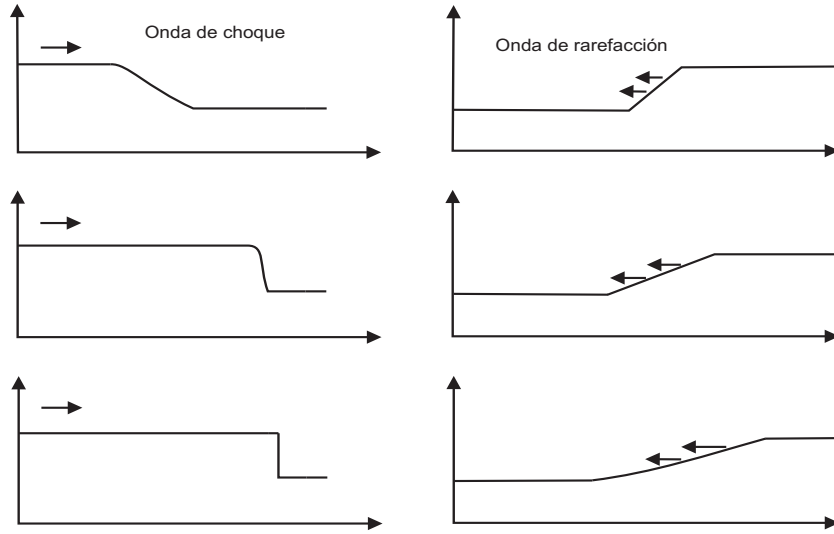


Figura 2.2: a) Propagación de una onda de choque. b) Propagación de una onda de rarefacción.

En el segundo caso, el flujo de masa no es cero y por tanto  $v_1$  y  $v_2$  no son cero. De esto tenemos que la velocidad, la densidad, la presión y demás variables hidrodinámicas son discontinuas. A este tipo de discontinuidad se le denomina “onda de choque” o simplemente “choque”.

En una superficie de discontinuidad, las ecuaciones diferenciales son reemplazadas por las ecuaciones (2.35)–(2.37), a las que se conoce como condiciones de salto. Siendo más específicos reciben el nombre de condiciones de Rankine–Hugoniot<sup>3</sup>.

Además de las superficies de contacto, existen las “ondas de rarefacción” que como tal no son discontinuidades, pero algunas de las derivadas de las cantidades hidrodinámicas si presentan discontinuidades. Las rarefacciones se producen por ejemplo cuando un gas se expande. El caso contrario, la compresión, viene acompañada de un choque. La figura 2.2 muestra el perfil básico de una onda de choque y una de rarefacción.

Las condiciones iniciales de un fluido no necesariamente tienen que ser continuas. Pueden ser discontinuas en algunos puntos. Usualmente, la discontinuidad inicial se separa en una serie de discontinuidades, donde cada una de ellas puede ser ya bien una onda de choque, o una onda de rarefacción, o una discontinuidad de contacto. Cuando se incluye una sola discontinuidad que separa datos iniciales constantes, se dice que se tiene un problema de Riemann. Este problema es una generalización del tubo de choques (ver adelante sección 4.4), el cual es de gran ayuda para hacer pruebas de códigos numéricos en hidrodinámica (tanto clásica como relativista).

Consideremos ahora el problema de Riemann en el caso de la ecuación general no lineal de la forma:

<sup>3</sup>En general, dado un sistema de ecuaciones de conservación  $\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{0}$  y una discontinuidad de velocidad  $S_i$  asociada con los campos característicos  $\lambda_i$ , la condición de Rankine-Hugoniot es:  $\Delta \mathbf{F} = S_i \Delta \mathbf{U}$ , con  $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L$ ,  $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L$ ,  $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$   $\mathbf{F}_L = \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)$ , donde  $\mathbf{U}_R$  y  $\mathbf{U}_L$  son los estados inmediatos a la derecha e izquierda de la discontinuidad.

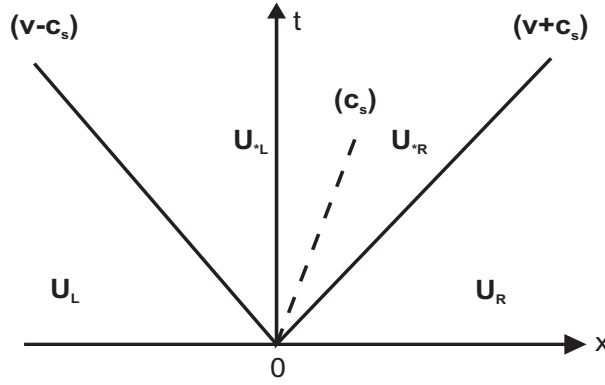


Figura 2.3: Solución típica del problema de Riemann en el caso de las ecuaciones de Euler. Existen tres familias de ondas asociadas a los 3 eigenvalores  $v - c_s$ ,  $v$  y  $v + c_s$ .

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{0}. \quad (2.38)$$

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^{(0)}(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & x < 0 \\ \mathbf{U}_R & x > 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

La solución consiste de  $m + 1$  estados constantes separados por  $m$  ondas. Para cada eigenvalor  $\lambda_i$  existe una familia de ondas, estas pueden derivar en discontinuidades como un choque o una discontinuidad de contacto, o en ondas de transición suaves como rarefacciones (ver figura 2.3). Presentamos a continuación las condiciones que deben cumplir estas familias de ondas:

**Ondas de choque.** Los dos estados constantes  $\mathbf{U}_L$  y  $\mathbf{U}_R$  se encuentran conectados a través de una discontinuidad simple en un *campo no lineal genuino*<sup>4</sup> y debe satisfacer las siguientes condiciones:

- Condición de Rankine-Hugoniot:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = S_i(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (2.40)$$

- Condición de entropía:

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) > S_i > \lambda_i(\mathbf{U}_R) \quad (2.41)$$

Podemos visualizar el significado de la condición de entropía observando la figura 2.4, donde se muestra el estado inicial y la propagación de la onda de choque. Notamos que las características se mueven hacia el choque y claramente  $\lambda_i(\mathbf{U}_L) > S_i > \lambda_i(\mathbf{U}_R)$ .

<sup>4</sup>Un campo se dice que es no lineal genuino si  $\nabla \lambda_i(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{K}^i(\mathbf{U}) \neq 0, \forall \mathbf{U} \in \mathcal{R}^m$  donde  $\lambda_i(\mathbf{U})$  son los eigenvalores reales y  $\mathbf{K}^i(\mathbf{U})$  los correspondientes eigenvectores.

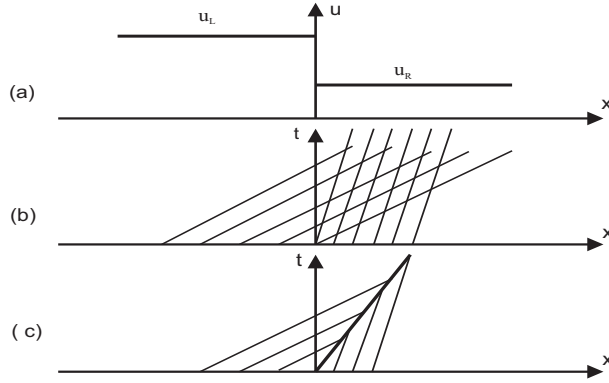


Figura 2.4: Onda de choque. a) Situación inicial para el caso  $\mathbf{U}_L > \mathbf{U}_R$ . b) Líneas características y c) propagación de la discontinuidad en  $x - t$ .

**Discontinuidad de contacto.** Los dos estados constantes  $\mathbf{U}_L$  y  $\mathbf{U}_R$  se encuentran conectados a través de una discontinuidad simple de velocidad  $S_i$  en un *campo linealmente degenerado*<sup>5</sup> y aplican las siguientes condiciones:

- Condición de Rankine-Hugoniot:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = S_i(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (2.42)$$

- Constancia de los invariantes de Riemann generalizados a lo largo de la onda:

$$\frac{du_1}{k_1^{(i)}} = \frac{du_2}{k_2^{(i)}} = \dots = \frac{du_m}{k_m^{(i)}}, \quad (2.43)$$

donde  $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$  y  $\mathbf{K}^{(i)} = [k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \dots, k_m^{(i)}]^T$  su respectivo eigenvector asociado al eigenvalor  $\lambda_i$ .

Los invariantes de Riemann son relaciones entre las distintas componentes del vector de variables dependientes que deben ser ciertas en toda la región de la onda. Integrando (2.43) obtenemos  $m - 1$  relaciones independientes entre las componentes de  $\mathbf{U}$ , las cuales denominamos:  $R_k^{(i)} = cte$ , para  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ , es decir existen  $m - 1$  invariantes de Riemann.

- Condición de característica paralela

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) = \lambda_i(\mathbf{U}_R) = S_i. \quad (2.44)$$

Es decir, las características permanecen paralelas a la velocidad de propagación de la discontinuidad.

**Onda de rarefacción.** Los dos estados constantes  $\mathbf{U}_L$  y  $\mathbf{U}_R$  se encuentran conectados a través de una transición suave en un campo no lineal genuino y las condiciones son:

<sup>5</sup>Un campo se dice que es linealmente degenerado si  $\nabla \lambda_i(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{K}^i(\mathbf{U}) = 0, \forall \mathbf{U} \in \mathcal{R}^m$

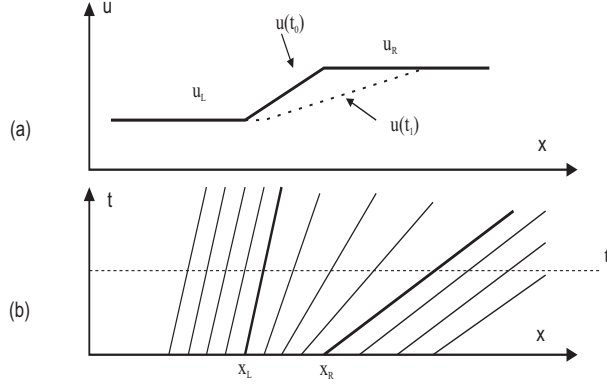


Figura 2.5: Onda de rarefacción para el caso  $\mathbf{U}_L < \mathbf{U}_R$ . a) Situación a  $t_0$  y  $t_1$ . b) Líneas características.

- Constancia de los invariantes de Riemann generalizados a lo largo de la onda

$$\frac{du_1}{k_1^{(i)}} = \frac{du_2}{k_2^{(i)}} = \dots = \frac{du_m}{k_m^{(i)}}, \quad (2.45)$$

- Divergencia de las características

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) < \lambda_i(\mathbf{U}_R). \quad (2.46)$$

En la figura 2.5, se muestra un perfil típico de una onda de rarefacción, la cual está limitada por dos discontinuidades débiles, ya que allí la solución es continua pero no sus derivadas. Las líneas rectas que salen de los puntos  $x_L$  y  $x_R$  reciben el nombre de cabeza (H) y cola (T) de la onda de rarefacción respectivamente. Observamos que en este caso las características divergen. Los valores más grandes se propagan más rápido que los valores menores, razón por la cual la onda tiende a aplanarse y suavizarse con el tiempo. Es claro que se cumple la condición (2.46).

### 2.4.1. Solución elemental del problema de Riemann

Para terminar la sección, vamos a describir la solución del problema de Riemann en las ecuaciones de Euler como un conjunto de ondas elementales (descritas anteriormente). El estudio detallado puede verse en [26].

Existen tres ondas asociadas con los tres campos característicos correspondientes a los tres eigenvectores  $\mathbf{K}^{(i)}$  obtenidos en la sección 2.2. Las ondas separan cinco diferentes estados como puede observarse en la figura 2.6<sup>6</sup> La línea continua corresponde a la onda de choque S, moviéndose hacia la derecha y separando los estados (5) y (4). La línea punteada muestra una discontinuidad

<sup>6</sup>En la mayoría de los textos, se señalan únicamente cuatro estados, sin embargo, debemos tomar en cuenta que, la onda de rarefacción separa tres estados distintos.

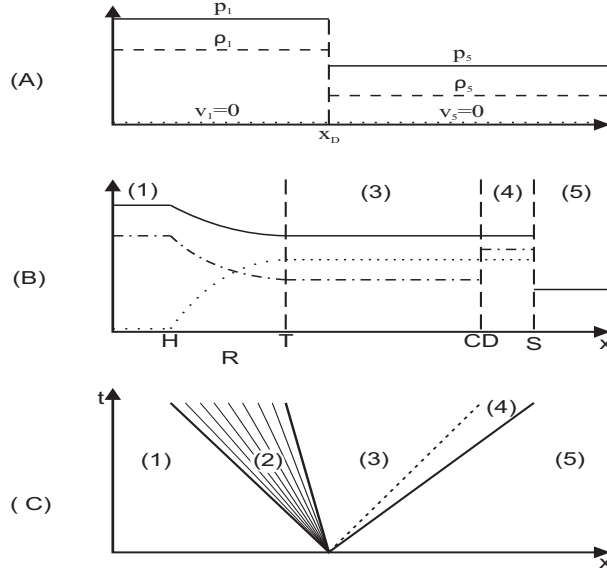


Figura 2.6: Solución esquemática del problema de Riemann en el caso de las ecuaciones de Euler. El estado inicial en  $t = 0$  (figura superior) consiste en dos estados 1 y 5 con  $p_1 > p_5$ ,  $\rho_1 > \rho_5$  y  $v_1 = v_5 = 0$ , separados por un diafragma colocado en  $x_D$ . La evolución del flujo una vez retirado el diafragma se muestra en la figura intermedia. La línea continua nos da el comportamiento de la densidad, la línea semicontinua muestra el comportamiento de la presión, y en la línea punteada se observa el comportamiento de la velocidad. Finalmente, en la figura inferior, mostramos el comportamiento en términos de las características en un diagrama de espacio-tiempo.

de contacto DC, que se propaga hacia la derecha y la cual separa los estados (4) y (3). El conjunto de líneas continuas acotadas por las líneas H y T representan una onda de rarefacción R, propagándose hacia la izquierda. Notamos que la cola de la onda (T) limita el estado (3) junto con la discontinuidad de contacto, mientras que la cabeza de la onda (H) y la cola (T) de rarefacción delimitan el estado (2). Finalmente, a cabeza de la onda limita el estado (1).

A fin de conocer el comportamiento de las ondas debemos analizar los campos característicos  $\mathbf{K}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . No es difícil mostrar que el campo asociado al eigenvector  $\mathbf{K}^{(2)}$  es linealmente degenerado, mientras que los campos asociados a  $\mathbf{K}^{(1)}$  y  $\mathbf{K}^{(3)}$  son no lineales genuinos. Es decir, la onda asociada con  $\mathbf{K}^{(2)}$  es una discontinuidad de contacto y las ondas asociadas a  $\mathbf{K}^{(1)}$  y  $\mathbf{K}^{(3)}$  son una onda de rarefacción y una onda de choque <sup>7</sup>.

Vamos a estudiar cada tipo de ondas por separado:

**Discontinuidad de contacto.** La condición de entropía es:

$$\lambda_2(\mathbf{U}_3) = \lambda_2(\mathbf{U}_4) = S_2,$$

donde  $\mathbf{U}_a$  denota el estado en la región (a) dado por las variables:  $\mathbf{U}_a = (\rho_a, v_a, p_a)^T$ .

<sup>7</sup>ver [8] y [26].

Aquí,  $S_2$  es la velocidad de la discontinuidad de contacto. En la discontinuidad de contacto las presiones se juntan, lo que significa que en ambos lados de la discontinuidad son iguales. Es claro que las velocidades tanto a la derecha como a la izquierda de la discontinuidad son iguales también.

Matemáticamente, expresamos este hecho utilizando los invariantes generalizados de Riemann:

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{d(\rho v)}{v} = \frac{d\mathcal{E}}{\frac{1}{2}v^2}. \quad (2.47)$$

La primera igualdad la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d\rho}{\rho} - \frac{d(\rho v)}{\rho v} = 0.$$

Integrando los dos términos encontramos

$$\ln(\rho) - \ln(\rho v) = cte$$

de donde finalmente encontramos que  $v = cte$ .

De la segunda igualdad, podemos escribir

$$\frac{1}{2}v d(\rho v) = d\mathcal{E}.$$

Usando el hecho de que  $\mathcal{E} = \rho(\epsilon + \frac{1}{2}v^2)$ , con  $v = cte$  obtenemos

$$d(\rho\epsilon) = 0$$

Que finalmente, de la ecuación (2.25) nos da  $p = cte$ , como esperabamos. No obstante, las demás cantidades presentan discontinuidades (como lo mencionamos en la sección anterior).

**Ondas de rarefacción.** La condición de entropía es:

$$\lambda_1(\mathbf{U}_1) < \lambda_1(\mathbf{U}_3).$$

En el caso físico, por ejemplo el tubo de choques donde  $v_1 = v_5 = 0$ , en la región de alta presión la onda de rarefacción se propaga hacia la izquierda disminuyendo la presión de  $p_3$  a  $p_2$  y produciendo un cambio de velocidades, lo que se observa en la región (2) de la parte intermedia en la figura 2.6.

Los invariantes de Riemann son<sup>8</sup>:

$$v + \frac{2c_s}{\gamma - 1} = cte, \quad (2.48)$$

---

<sup>8</sup>Aquí hemos utilizado una definición equivalente a la presentada anteriormente en (2.43). Definimos la constancia de los invariantes de Riemann como:  $R_k^{(i)} = v \pm \int \frac{c_s(\rho)}{\rho}$ , donde  $c_s(\rho)$  está dada por (2.14). Para ver en más detalle dicha equivalencia, se puede consultar [8].

a lo largo de  $\lambda_1 = v - c_s$ . Por estar la región (2), entre dos estados constantes, se cumple:

$$\frac{c_{s1}}{\gamma - 1} = v_2 + \frac{2c_{s2}}{\gamma - 1} = v_4 + \frac{2c_{s4}}{\gamma - 1}, \quad (2.49)$$

donde hemos denotado  $c_{sa}$  como la velocidad del sonido en la región (a).

Las características cumplen la relación  $x/t = v_4 - c_{s4}$ , que juntamente con la relación de arriba da:

$$v_4 = \frac{2}{\gamma + 1} \left( c_{s2} + \frac{x}{t} \right), \quad c_{s4} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left( \frac{c_{s2}}{\gamma - 1} - \frac{x}{t} \right). \quad (2.50)$$

Usando (2.14) y (2.29), podemos encontrar  $\rho$  y  $p$ , por lo que tenemos la solución para el fluido en esta región. Es claro, según el desarrollo realizado, que las variables  $\rho$ ,  $v$ , y  $p$  cambian a lo largo de la onda de rarefacción.

**Ondas de choque.** La condición de entropía es:

$$\lambda_3(\mathbf{U}_4) > S_3 > \lambda_3(\mathbf{U}_5).$$

donde  $S_3$  es la velocidad del choque. Nuevamente, haciendo referencia a la figura 2.6 b), observamos que en la región de baja presión la onda de choque se propaga hacia la derecha aumentando la presión de  $P_5$  a  $P_4$  y produciendo un cambio de velocidad. Por tanto,  $\rho$ ,  $v$ , y  $p$  cambian a través del choque. En lo que sigue, explicaremos brevemente estos cambios en las variables.

Vamos a escoger un sistema de referencia el cual se mueve junto con el choque, de modo que la velocidad del choque respecto a este sistema es cero. Los valores para la presión y la densidad permanecen inalterados tanto en la región (4) como en la región (5) (regiones antes y después del choque respectivamente). Sin embargo, las velocidades se verán modificadas por las velocidades relativas:

$$\hat{v}_4 = v_4 - S_3, \quad \hat{v}_5 = v_5 - S_3. \quad (2.51)$$

Aplicando la condición de Rankine-Hugoniot tenemos:

$$\rho_4 \hat{v}_4 = \rho_5 \hat{v}_5, \quad (2.52)$$

$$\rho_4 \hat{v}_4^2 + p_4 = \rho_5 \hat{v}_5^2 + p_5, \quad (2.53)$$

$$\hat{v}_4(\hat{\mathcal{E}}_4 + p_4) = \hat{v}_5(\hat{\mathcal{E}}_5 + p_5). \quad (2.54)$$

De la ecuación (2.53) podemos despejar  $\hat{v}_5$ . Sustituyendo en (2.54) y haciendo algunas sencillas manipulaciones algebraicas encontramos

$$\rho_4 \hat{v}_4^2 - \frac{\rho_4^2 \hat{v}_4^2}{\rho_5} = p_5 - p_4,$$

factorizando el término  $1/\rho_5$  del lado derecho de la igualdad y dejando libre a  $\hat{v}_4^2$  tenemos

$$\hat{v}_4^2 = \frac{\rho_5}{\rho_4} \left[ \frac{p_5 - p_4}{\rho_5 - \rho_4} \right]. \quad (2.55)$$

Obtenemos  $\hat{v}_5^2$  sustituyendo este resultado en (2.53), es decir

$$\hat{v}_5^2 = \frac{\rho_4}{\rho_5} \left[ \frac{p_5 - p_4}{\rho_5 - \rho_4} \right]. \quad (2.56)$$

Por otro lado, podemos escribir la ecuación (2.54) de la siguiente manera

$$\hat{v}_4 \rho_4 \left[ \frac{1}{2} \hat{v}_4^2 + \epsilon_4 + p_4/\rho_4 \right] = \hat{v}_5 \rho_5 \left[ \frac{1}{2} \hat{v}_5^2 + \epsilon_5 + p_5/\rho_5 \right].$$

Usando la definición de la entalpía en cada región tenemos

$$h_4 = \epsilon_4 + p_4/\rho_4, \quad h_5 = \epsilon_5 + p_5/\rho_5. \quad (2.57)$$

De estas últimas dos expresiones y (2.53), (2.54) toma la forma

$$\frac{1}{2} \hat{v}_4^2 + h_4 = \frac{1}{2} \hat{v}_5^2 + h_5. \quad (2.58)$$

Si ahora sustituimos (2.55) y (2.56) en (2.58) encontramos

$$h_4 - h_5 = \frac{1}{2} (p_4 - p_5) \left[ \frac{\rho_4 + \rho_5}{\rho_4 \rho_5} \right]. \quad (2.59)$$

Usando (2.57) podemos reescribir esta última ecuación

$$\epsilon_4 - \epsilon_5 = \frac{1}{2} (p_4 + p_5) \left[ \frac{\rho_4 - \rho_5}{\rho_4 \rho_5} \right]. \quad (2.60)$$

Utilizando la ecuación de estado del gas ideal (2.25) en (2.60) y después de un poco de gimnasia algebraica, encontramos finalmente

$$\frac{\rho_4}{\rho_5} = \frac{\left( \frac{p_4}{p_5} \right) + \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)}{\left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left( \frac{p_4}{p_5} \right) + 1}. \quad (2.61)$$

la cual establece una relación entre el cociente de densidades  $\rho_4/\rho_5$  y el cociente de presiones  $p_4/p_5$ .

Introducimos ahora el número de Mach ( $M = v/c_s$ );  $M_5 = v_5/c_{s5}$  es el número de Mach del fluido antes del choque y  $M_S = S_3/c_{s5}$  es el número de Mach del choque (en el sistema de



referencia original). Necesitamos obtener una expresión para el cociente de las presiones y para el cociente de las densidades, ambas en términos del número de Mach relativo  $M_5 - M_S$ . Para esto utilizamos (2.56) y (2.61). El álgebra es un poco larga y no muy ilustrativa, razón por la cual presentamos únicamente el resultado:

$$\frac{\rho_4}{\rho_5} = \frac{(\gamma + 1)(M_5 - M_S)^2}{(\gamma - 1)(M_5 - M_S)^2 + 2}, \quad (2.62)$$

$$\frac{p_4}{p_5} = \frac{2\gamma(M_5 - M_S)^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}. \quad (2.63)$$

En términos de la razón de las presiones (2.63), observamos la siguiente relación

$$M_5 - M_S = -\sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma}\right) \left(\frac{p_4}{p_5}\right) + \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right)}, \quad (2.64)$$

Por otro lado, de la definición de los números de Mach  $M_5$  y  $M_S$ , notamos que

$$S_3 = v_5 + c_{s5}(M_5 - M_S). \quad (2.65)$$

Así que la velocidad del choque  $S_3$  dada en términos del cociente de presiones es:

$$S_3 = v_5 + c_{s5} \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma}\right) \left(\frac{p_4}{p_5}\right) + \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right)}. \quad (2.66)$$

Finalmente, la expresión para la velocidad en la región antes del choque la obtenemos de (2.53) y (2.62)

$$v_4 = (1 - \rho_5/\rho_4)S_3 + v_5\rho_5/\rho_4. \quad (2.67)$$

A lo largo de esta sección hemos construido de manera elemental la solución del problema de Riemann en términos elementales. Se obtuvo el comportamiento de las variables primitivas ( $\rho$ ,  $p$  y  $v$ ) tanto en la región de la discontinuidad de contacto, como en la de la onda de rarefacción y la onda de choque (mostradas en la figura 2.6). También se encontró el valor de la velocidad tanto para la onda de rarefacción como para el choque, además de la velocidad del fluido en la región antes del choque. Así finaliza nuestra discusión del problema de Riemann.



## Capítulo 3

# Hidrodinámica relativista

### 3.1. Relatividad especial

En el capítulo 2 mencionamos la importancia de los sistemas hiperbólicos cuando de ecuaciones de evolución se trata. Escribimos las ecuaciones de Euler en el caso Newtoniano como un conjunto de ecuaciones de conservación y verificamos que son fuertemente hiperbólicas. Vamos ahora a escribir las ecuaciones de Euler en el caso relativista (tanto especial como general), como un sistema de este tipo<sup>1</sup>.

Nuestro punto de partida es el tensor de energía momento para un fluido perfecto en relatividad especial, este lo podemos escribir como sigue<sup>2</sup>

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu} , \quad (3.1)$$

donde  $u^\mu$  es la 4-velocidad de los elementos de fluido,  $\rho$  es la densidad de energía y  $p$  es la presión, estas últimas medidas en el sistema de referencia en reposo del fluido, y la métrica es la de Minkowski,  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ .

El tensor de energía momento descrito arriba podemos escribirlo en una forma más sencilla separando la densidad total de energía  $\rho$  en sus componentes de densidad de energía en reposo y energía interna:

$$\rho = \rho_0(1 + \epsilon) , \quad (3.2)$$

donde  $\epsilon$  es la energía interna específica (energía interna por unidad de masa) del fluido. Introduciendo la llamada entalpía específica del fluido, definida como

---

<sup>1</sup>El procedimiento descrito en este capítulo se conoce como la “formulación de Valencia”, el cual consiste en la introducción de las llamadas “variables conservadas”, para escribir el sistema de ecuaciones de evolución como un sistema hiperbólico. Una revisión de esta formulación puede encontrarse en [10].

<sup>2</sup>Para un desarrollo de las ecuaciones, así como aplicaciones de la hidrodinámica en relatividad especial, puede consultarse [16].

$$h = 1 + \epsilon + \frac{p}{\rho_0} , \quad (3.3)$$

podemos escribir el tensor de energía-momento como

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p \eta^{\mu\nu} . \quad (3.4)$$

Es importante hacer una pausa antes de continuar, a fin de explicar las diferencias entre la densidad de energía obtenida aquí y la densidad de energía obtenida en el primer capítulo.

Si recordamos, las ecuaciones de Einstein escritas en el formalismo 3+1, específicamente la constricción Hamiltoniana (1.15), involucran la densidad de energía de materia como fuente del campo gravitacional. Sin embargo esta densidad de energía es medida por los observadores de Euler, que son los observadores para los cuales su 4-velocidad es normal a la hipersuperficie, y esta densidad de energía es en general diferente a la densidad de energía medida en el sistema de referencia del fluido. Por lo que vamos a hacer una distinción: la densidad de energía que aparece en las ecuaciones ADM la denotamos como  $\rho^{ADM}$ , mientras que la otra es simplemente  $\rho$ . Estas dos densidades de energía se relacionan usando la definición de  $\rho^{ADM}$ :

$$\rho^{ADM} := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} .$$

Sustituyendo (3.4) en la expresión de arriba y usando el hecho de que  $n^\mu n_\mu = -1$ , encontramos

$$\rho^{ADM} = \rho_0 h W^2 - p , \quad (3.5)$$

donde  $W = -u^\mu n_\mu = u^0$ , pues en relatividad especial  $n_\mu = (-1, 0)$ . Utilizando el hecho de que  $u^\mu u_\mu = -1$ , y de que la velocidad espacial del fluido está dada por

$$v^i = \frac{u^i}{u^0} , \quad (3.6)$$

obtenemos

$$W = 1/\sqrt{1 - v^2} , \quad (3.7)$$

es decir,  $W$  es el factor de Lorentz.

El comportamiento del fluido lo podemos entender mejor a través de lo que llamamos las variables “primitivas”  $(\rho_0, \epsilon, p, v^i)$ , las cuales contienen toda la información del sistema.

Las ecuaciones de evolución para el fluido son:

1. la ecuación de conservación de partículas

$$\nabla_\mu (\rho_0 u^\mu) = 0 , \quad (3.8)$$

2. la conservación de energía-momento

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.9)$$

donde  $\nabla_\mu$  denota la derivada covariante respecto a la coordenada  $x^\mu$ . En el caso de la relatividad especial, tenemos que  $\nabla_\mu = \partial_\mu$ , por tanto las ecuaciones se pueden escribir como

$$\partial_\mu(\rho_0 u^\mu) = 0, \quad (3.10)$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.11)$$

Observamos que sólo tenemos 5 ecuaciones y 6 variables. Por tanto, si queremos cerrar el sistema necesitamos una ecuación auxiliar; esta última ecuación está dada por la ecuación de estado, la cual nos proporciona una relación entre la presión y la densidad. Asumimos que la ecuación de estado tiene la siguiente forma:  $p = p(\rho, \epsilon)$ .

Empezamos definiendo una nueva variable  $D = \rho_0 W$ , la cual no es otra cosa que la densidad de masa en reposo vista en el sistema de laboratorio. La conservación de partículas implica que

$$\partial_t D + \partial_k(Dv^k) = 0. \quad (3.12)$$

Notamos que la ecuación de conservación de partículas (o ecuación de continuidad) tiene la misma forma que en el caso Newtoniano, con la salvedad que la variable  $D$  incluye los términos relativistas dados por el factor de Lorentz.

Para analizar la ecuación del momento, definimos otra variable auxiliar

$$S^\mu := \rho_0 h W u^\mu, \quad (3.13)$$

y puesto que de (3.6)  $u^i = W v^i$ , entonces  $S^i := \rho_0 h W^2 v^i$  es la densidad de momento vista en el sistema de laboratorio, que a diferencia del caso Newtoniano incluye la corrección en el factor de Lorentz  $W$ . Otra de las diferencias es la aparición de la entalpía en esta ecuación, esto se debe a que en el caso relativista la presión contribuye a la densidad de momento.

Escribiendo el tensor de energía-momento (3.4) en términos de  $S^\mu$ , tenemos que

$$T_\nu^\mu = \frac{u^\mu S_\nu}{W} + p \delta_\nu^\mu, \quad (3.14)$$

por lo que la ecuación de conservación del momento ( $\partial_\mu T^{i\mu} = 0$ ) se puede reescribir como

$$\partial_\mu \left( \frac{S_i u^\mu}{W} + p \delta_i^\mu \right) = 0, \quad (3.15)$$

y utilizando (3.6), la ecuación toma la forma

$$\partial_t S_i + \partial_k (S_i v^k) + \partial_i p = 0 . \quad (3.16)$$

Estas son las ecuaciones de Euler, que tienen la misma estructura que en el caso Newtoniano con las correcciones relativistas incluidas en  $S_i$ . Cabe notar que la densidad de momento puede cambiar ya sea por la variación del flujo en el elemento de volumen  $\partial_k(S_i v^k)$ , o debido a la existencia de una fuerza dada por el gradiente de la presión  $\partial_i p$ .

Para la conservación de la energía, definimos la variable auxiliar  $\mathcal{E}$ , que es la diferencia entre la densidad total de energía y la densidad de energía de masa medida en el laboratorio;

$$\mathcal{E} := \rho^{ADM} - \rho_0 W = \rho^{ADM} - D = \rho_0 h W^2 - p - D . \quad (3.17)$$

De la definición de  $S^\mu$  podemos escribir:  $S^0 := \rho_0 h W^2$ . La conservación de la energía ( $\partial_\mu T^{0\mu} = 0$ ) toma la forma:

$$\partial_\mu (S^0 u^\mu / W + p \eta^{0\mu}) = 0 ,$$

desarrollando la derivada tenemos

$$\partial_t S^0 = \partial_k (S^0 v^k) - \partial_t p = 0 .$$

De (3.17), podemos escribir:  $S^0 = \mathcal{E} + D + p$ , por lo que la ecuación de evolución es:

$$\partial_t (\mathcal{E} + D + p) = \partial_k [(\mathcal{E} + D + p) v^k] - \partial_t p = 0 .$$

Utilizando la ecuación de evolución para  $D$  (3.12), encontramos finalmente la ecuación de evolución para  $\mathcal{E}$

$$\partial_t \mathcal{E} + \partial_k [(\mathcal{E} + p) v^k] = 0 . \quad (3.18)$$

De este modo, hemos encontrado nuestro conjunto de ecuaciones de evolución, que escrito como un sistema de ecuaciones de conservación es:

$$\partial_t D + \partial_k (D v^k) = 0 , \quad (3.19)$$

$$\partial_t S_i + \partial_k (S_i v^k + p \delta_i^k) = 0 , \quad (3.20)$$

$$\partial_t \mathcal{E} + \partial_k [(\mathcal{E} + p) v^k] = 0 , \quad (3.21)$$

en donde las llamadas variables dinámicas o conservadas ( $D, S_i, \mathcal{E}$ ) están dadas en términos de las variables primitivas ( $\rho_0, \epsilon, p, v^i$ ) de la siguiente manera:

$$D = \rho_0 W, \quad S^i := \rho_0 h W v^i, \quad \mathcal{E} := \rho_0 h W^2 - p - D . \quad (3.22)$$

### 3.1.1. Recuperando las variables primitivas

En el caso no relativista ( $v \ll 1, h \rightarrow 1$ )  $D, S^i, \mathcal{E}$  se aproximan a sus equivalentes Newtonianos,  $\rho_0, \rho_0 v^i, \rho_0(\epsilon + v^2/2)$ , y las ecuaciones se reducen a las clásicas obtenidas en el capítulo anterior; esto hace fácil invertir las variables conservadas para obtener las primitivas. Sin embargo, en el caso relativista no es tan sencillo obtener las variables primitivas  $\rho_0, v^i, p$  a partir de las variables dinámicas  $D, S^i, \mathcal{E}$ , dado que el sistema de ecuaciones (3.22) está fuertemente acoplado mediante el factor de Lorentz y la entalpía específica, además de involucrar explícitamente la presión, lo que implica que la ecuación de estado  $p(\rho_0, \epsilon)$  es necesaria para recobrar las variables primitivas.

Sin embargo, la evolución de las ecuaciones dinámicas involucran a las variables primitivas directamente, por tanto tenemos que resolver para ellas a cada paso de tiempo. Este procedimiento requiere la implementación de un algoritmo que recobre dichas variables. Siguiendo [15], tenemos que el algoritmo comienza escogiendo un valor arbitrario para la presión,  $p^*$  (ver también [2]). De la expresión (3.13) para  $S^i$  observamos que ( $v^i = S^i/\rho_0 h W^2$ ) y puesto que  $\rho_0 h W^2 = \mathcal{E} + p + D$  (de 3.17), obtenemos

$$v^i(p^*) = \frac{S^i}{E + D + p^*} . \quad (3.23)$$

Una vez encontrada la velocidad  $v^i$ , podemos calcular el valor de  $W$  como

$$W(p^*) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2(p^*)}} . \quad (3.24)$$

Esto significa que el valor de la densidad es

$$\rho_0(p^*) = \frac{D}{W(p^*)} . \quad (3.25)$$

Finalmente encontramos la energía interna específica despejando a la entalpía de la ecuación (3.17) e insertándola en (3.3)

$$\epsilon(p^*) = \frac{E + D(1 - W(p^*)) + p^*(1 - W^2(p^*))}{DW(p^*)} . \quad (3.26)$$

No obstante, el valor escogido de  $p^*$  puede no satisfacer la ecuación de estado  $p(\rho, \epsilon)$ , así que debemos evaluar el residuo  $r(p^*)$  definido como

$$r(p^*) := p(\rho_0(p^*), \epsilon(p^*)) - p^* , \quad (3.27)$$

y cambiar el valor de  $p^*$  por el valor obtenido de resolver la ecuación  $r(p^*) = 0$ , donde el cero de la función representa la presión en el estado físico. Para encontrar la solución a la ecuación se utiliza un método iterativo.

## 3.2. Relatividad general

Las ecuaciones de la hidrodinámica en relatividad general, al igual que en el caso de la relatividad especial, consisten en las ecuaciones de conservación del tensor de energía-momento y de la densidad de corriente (o conservación de partículas)<sup>3</sup>.

En este caso, las ecuaciones toman la forma:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.28)$$

$$\nabla_{\mu} j^{\mu} = 0. \quad (3.29)$$

donde  $\nabla_{\mu}$  es la derivada covariante usual asociada a la métrica del espacio tiempo  $g_{\mu\nu}$ , y  $j^{\mu}$  es la densidad de corriente definida como  $j^{\mu} = \rho_0 u^{\mu}$ ,  $u^{\mu}$  es la 4-velocidad del fluido y  $\rho_0$  es la densidad medida en el sistema de referencia en reposo.

El tensor de energía momento está dado por:  $T^{\mu\nu} = (\rho_0 + \rho_0\epsilon + p) u^{\mu} u^{\nu} + p g^{\mu\nu}$ , que escrito en términos de la entalpía,  $h = 1 + \epsilon + \frac{p}{\rho_0}$ , toma la forma

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h u^{\mu} u^{\nu} + p g^{\mu\nu}. \quad (3.30)$$

Usando la siguiente identidad matemática sobre la divergencia de un vector,

$$\nabla_{\mu} \xi^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} \xi^{\mu}),$$

podemos escribir la ecuación (3.29) de la siguiente manera

$$\partial_{\mu} (\sqrt{-g} \rho_0 u^{\mu}) = 0, \quad (3.31)$$

con  $g$  el determinante de la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Similarmente, para la ecuación de conservación del tensor de energía-momento utilizamos la siguiente identidad:

$$\nabla_{\beta} A^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\beta} (\sqrt{-g} A^{\beta}_{\alpha}) - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} A^{\mu}_{\lambda}$$

donde  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$  los índices de Christoffel asociados a la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Por tanto, la ecuación de conservación queda como

$$\partial_{\mu} (\sqrt{-g} T^{\mu}_{\nu}) = \sqrt{-g} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} T^{\mu}_{\alpha}. \quad (3.32)$$

---

<sup>3</sup>Una discusión más amplia acerca de las ecuaciones de la hidrodinámica en relatividad general, así como de sus aplicaciones puede encontrarse en [10]



Deseamos escribir el conjunto de ecuaciones (3.31), (3.32) como un conjunto de ecuaciones hiperbólicas. Para esto es necesario separar la parte temporal de la parte espacial. El procedimiento a seguir es muy similar al procedimiento descrito en el caso de la relatividad especial.

Usando la descomposición 3+1, podemos escribir el determinante de la métrica como:

$$g = -\alpha^2\gamma \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma}. \quad (3.33)$$

con  $\alpha$  la función de lapso y  $\gamma$  el determinante de la 3-métrica (o métrica espacial  $\gamma_{ij}$ ).

Definimos ahora (como en el caso de la relatividad especial) el parámetro  $W$  como  $W := -u^\mu n_\mu$ , donde  $n_\mu$  es el vector normal a la hipersuperficie espacial, y  $n_\mu = (\alpha, 0)$ , podemos entonces escribir a  $W$  de la siguiente manera:

$$W = \alpha u^0. \quad (3.34)$$

Definimos ahora la velocidad de los elementos del fluido medido por los observadores de Euler:

$$v^i := \frac{u^i}{\alpha u^0} + \frac{\beta^i}{\alpha}, \quad (3.35)$$

con  $\beta^i$  el vector de corrimiento. También, usando la definición de  $u^\mu$ , tenemos que:

$$u_i = g_{i\mu} u^\mu = \beta_i u^0 + \gamma_{ik} u^k = \beta_i u^0 + \gamma_{ik} u^0 (\alpha v^k - \beta^k) = \alpha u^0 v_i = W v_i.$$

Usando el hecho de que  $u_\mu u^\mu = -1$ , encontramos que

$$W = 1/\sqrt{1 - v^2}, \quad (3.36)$$

donde ahora  $v^2 = \gamma_{ij} v^i v^j$ , es decir es el factor de Lorentz visto por los observadores de Euler.

Si definimos de nuevo  $D = \rho_0 W$ , utilizando (3.34) y (3.35); podemos escribir la ecuación de conservación de partículas (3.31) como:

$$\partial_t(\sqrt{\gamma}D) + \partial_k \left[ \sqrt{\gamma}D (\alpha v^k - \beta^k) \right] = 0. \quad (3.37)$$

Notamos que a diferencia del caso en relatividad especial, en esta ecuación aparecen la función de lapso  $\alpha$ , el vector de corrimiento  $\beta^i$  y el determinante de la métrica espacial. Esto no es de sorprender, puesto que en el caso de la relatividad especial nos encontramos en un espacio-tiempo de Minkowski, en donde  $\alpha = 1$ ,  $\beta^k = 0$  y  $\gamma = 1$ .

Vamos a introducir ahora la variable  $S^\mu$  que utilizaremos en la ecuación de conservación del momento:

$$S^\mu := \rho_0 h W u^\mu. \quad (3.38)$$

En términos de  $S^\mu$  reescribimos el tensor de energía momento, entonces

$$T_\nu^\mu = \frac{u^\mu S_\nu}{W} + p\delta_\nu^\mu, \quad (3.39)$$

Insertando (3.34) y (3.35) en (3.39), la conservación del momento se escribe:

$$\partial_t(\sqrt{\gamma}S_i) + \partial_k \left\{ \sqrt{\gamma} \left[ S_i (\alpha v^k - \beta^k) + \alpha p \delta_i^k \right] \right\} = \alpha \sqrt{\gamma} \Gamma_{\nu i}^\mu T_\mu^\nu, \quad (3.40)$$

donde  $S_i := \rho_0 h W u_i = \rho_0 h W^2 v_i$ . Estrictamente hablando, no tenemos una ecuación de conservación, puesto que del lado derecho de la ecuación observamos términos fuente que se pueden entender como fuerzas gravitacionales.

Para finalizar, vamos a escribir la ecuación para la conservación de la energía. Es conveniente reescribir el término de la izquierda en la ecuación de la siguiente forma:

$$\partial_\mu (\alpha \sqrt{\gamma} T^{0\mu}) = \frac{1}{\alpha} \partial_\mu (\alpha^2 \sqrt{\gamma} T^{0\mu}) - \sqrt{\gamma} T^{0\mu} \partial_\mu \alpha.$$

De esta manera, la conservación de la energía queda

$$\partial_\mu (\alpha^2 \sqrt{\gamma} T^{0\mu}) = \alpha^2 \sqrt{\gamma} (T^{0\mu} \partial_\mu \ln \alpha - \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\mu\nu}). \quad (3.41)$$

Utilizando el hecho de que  $T^{0\mu} = \rho_0 h u^0 u^\mu + p g^{0\mu}$  y empleando (3.34) y (3.35) escribimos:  $T^{00} = \frac{1}{\alpha^2}(\rho_0 h W^2 - p)$ , y  $T^{0i} = \rho_0 h W^2 \left( \frac{v^i}{\alpha} - \frac{\beta^i}{\alpha^2} \right) + p \beta^i$ , por lo que después de un álgebra un poco larga, el lado izquierdo de la ecuación toma la forma:

$$\partial_\mu (\alpha^2 \sqrt{\gamma} T^{0\mu}) = \partial_t [\sqrt{\gamma} (\rho_0 h W^2 - p)] + \partial_k \left\{ \sqrt{\gamma} \left[ \rho_0 h W^2 (\alpha v^k - \beta^k) + p \beta^k \right] \right\}.$$

Definimos:  $\mathcal{E} = \rho_0 h W^2 - p - D$ . En términos de  $\mathcal{E}$ , la ecuación para la conservación de la energía queda finalmente:

$$\partial_t(\sqrt{\gamma}\mathcal{E}) + \partial_k \left\{ \sqrt{\gamma} \left[ \mathcal{E} (\alpha v^k - \beta^k) + \alpha p v^k \right] \right\} = \alpha^2 \sqrt{\gamma} (T^{0\mu} \partial_\mu \ln \alpha - \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\mu\nu}). \quad (3.42)$$

Donde hemos utilizado la ecuación de evolución para  $D$  a manera de completar el término  $\rho_0 h W^2 - p$ . en ambos lados de la ecuación.

Esta ecuación, al igual que la ecuación del momento, no es una ecuación de conservación. Sin embargo, ambas tienen la forma de las ecuaciones de balance:  $\partial_t u + \partial_k F^k(u) = s(u)$ .

El conjunto de ecuaciones de evolución finales son:

$$\partial_t(\sqrt{\gamma}D) + \partial_k \left[ \sqrt{\gamma}D (\alpha v^k - \beta^k) \right] = 0, \quad (3.43)$$

$$\partial_t(\sqrt{\gamma}S_i) + \partial_k \left\{ \sqrt{\gamma} \left[ S_i (\alpha v^k - \beta^k) + \alpha p \delta_i^k \right] \right\} = \alpha \sqrt{\gamma} \Gamma_{\nu i}^\mu T_\mu^\nu, \quad (3.44)$$

$$\partial_t(\sqrt{\gamma}\mathcal{E}) + \partial_k \left\{ \sqrt{\gamma} \left[ \mathcal{E} (\alpha v^k - \beta^k) + \alpha p v^k \right] \right\} = \alpha^2 \sqrt{\gamma} (T^{0\mu} \partial_\mu \ln \alpha - \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\mu\nu}). \quad (3.45)$$

donde las variables primitivas  $(\rho_0, \epsilon, p, v^i)$  y las variables dinámicas  $(D, S_i, \mathcal{E})$  están relacionadas mediante

$$D = \rho_0 W, \quad S_i = \rho_0 h W^2 v_i, \quad \mathcal{E} = \rho_0 h W^2 - p - D. \quad (3.46)$$

De nuevo, como en el caso de relatividad especial, escribimos la relación entre las variables dinámicas, obtenidas aquí, y los términos de materia que aparecen en las ecuaciones ADM. Usando la expresión para el tensor de energía-momento (3.30)  $T^{\mu\nu}$  tenemos:

$$\rho_{ADM} : = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = \rho_0 h W^2 - p = \mathcal{E} + D, \quad (3.47)$$

$$j_{ADM}^i : = -P^{\mu i} n^\nu T_{\mu\nu} = \rho_0 h W^2 v^i = S^i, \quad (3.48)$$

$$S_{ADM}^{ij} : = P^{\mu i} P^{\nu j} T_{\mu\nu} = \rho_0 h W^2 v^i v^j + \gamma^{ij} p. \quad (3.49)$$

### 3.3. Hidrodinámica relativista en 3 + 1

Vamos ahora a escribir las ecuaciones de evolución de la hidrodinámica relativista (3.43), (3.44) y (3.45) en el lenguaje 3+1. Comenzamos con la ecuación de evolución para  $D$ , esta ecuación es:

$$\partial_t(\sqrt{\gamma}D) + \partial_k \left[ \sqrt{\gamma}D (\alpha v^k - \beta^k) \right] = 0.$$

Necesitamos reescribir esta ecuación, para ello vamos a hacer uso de la siguiente identidad: si  $w^i$  es cualquier vector tridimensional entonces

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_k (\sqrt{\gamma} w^k) = D_k w^k, \quad (3.50)$$

con  $D_k$  la derivada covariante asociada a la métrica espacial  $\gamma_{ij}$ , de esto tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_k \left[ \sqrt{\gamma} D (\alpha v^k - \beta^k) \right] = D_k (\alpha D v^k) - D (D_k \beta^k) - \beta^k \partial_k D. \quad (3.51)$$

Por otro lado

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_t (\sqrt{\gamma} D) = \partial_t D + \frac{D}{2} \partial_t \ln \gamma.$$

Vamos a usar la ecuación de evolución para la métrica ADM (1.12). No es difícil mostrar que esa ecuación da

$$\partial_t \ln \gamma = -2\alpha K + 2D_k \beta^k, \quad (3.52)$$

con  $K$  la traza del tensor de curvatura extrínseca  $K_{ij}$ .

Juntando las ecuaciones (3.51) y (3.52) obtenemos la ecuación para  $D$  en el lenguaje 3+1

$$\partial_t D - \beta^k \partial_k D + D_k (\alpha D v^k) = \alpha K D . \quad (3.53)$$

Observamos que el vector de corrimiento aparece sólo en el término de advección (derivada de Lie de  $D$ ), ya que el vector de corrimiento sólo mueve las líneas coordenadas. El último término del lado izquierdo de la ecuación nos da el cambio de  $D$  a lo largo de las líneas normales a la hipersuperficie, y está dado por la divergencia del flujo de partículas. El término fuente muestra que un cambio en los elementos de volumen es factor para que la densidad de partículas  $D$  pueda también cambiar.

Podemos hacer aquí una observación en el vector de corrimiento entre (3.43) y (3.53); en esta última el vector de corrimiento aparece fuera de la derivada espacial, mientras que en la ecuación (3.43) da lugar a una especie de divergencia del vector de corrimiento, sin embargo este término es cancelado por el equivalente en la derivada temporal del elemento de volumen (3.52). Esto lo podemos interpretar de la siguiente manera: los términos tipo advección del vector de corrimiento pueden transformarse en términos del tipo conservación de flujo, mediante un factor  $\sqrt{\gamma}$  en la derivada temporal.

Vamos ahora a trabajar con la ecuación para  $\mathcal{E}$ ; la ecuación obtenida en la sección anterior es:

$$\partial_t(\sqrt{\gamma}\mathcal{E}) + \partial_k \left\{ \sqrt{\gamma} \left[ \mathcal{E} (\alpha v^k - \beta^k) + \alpha p v^k \right] \right\} = \alpha^2 \sqrt{\gamma} (T^{0\mu} \partial_\mu \ln \alpha - \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\mu\nu}) .$$

Usando la expresión para el tensor de energía-momento (3.30), la definición de  $v^i$  (3.35) y la expresión para los símbolos de Christoffel asociados a la métrica  $g_{\mu\nu}$  en el lenguaje 3+1, y después de un poco de álgebra, escribimos el término fuente como:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \sqrt{\gamma} (T^{0\mu} \partial_\mu \ln \alpha - \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\mu\nu}) &= \rho_0 h W^2 (\alpha v^m v^n K_{mn} - v^m \partial_m \alpha) + \alpha p K \\ &= (\mathcal{E} + p + D) (\alpha v^m v^n K_{mn} - v^m \partial_m \alpha) + \alpha p K . \end{aligned} \quad (3.54)$$

Nuevamente utilizamos (3.50) para desarrollar el lado izquierdo de la ecuación para  $\mathcal{E}$ , exactamente de la misma forma como lo hicimos con la ecuación para  $D$ . De este modo, la ecuación de evolución en términos de las variables 3+1 es:

$$\partial_t \mathcal{E} - \beta^k \partial_k \mathcal{E} + D_k \left[ \alpha v^k (\mathcal{E} + p) \right] = (\mathcal{E} + p + D) (\alpha v^m v^n K_{mn} - v^m \partial_m \alpha) + \alpha K (\mathcal{E} + p) . \quad (3.55)$$

Vamos a comentar sobre el último término de esta ecuación. Supongamos que tenemos un fluido el cual se mueve a la misma velocidad que los observadores de Euler, de este modo,  $v^k = \beta^k = 0 \Rightarrow \partial_t \mathcal{E} = \alpha K (\mathcal{E} + p)$ . Si hay un cambio en los elementos de volumen,  $(\alpha K \mathcal{E})$  habrá un cambio en la densidad de energía interna la cual también cambia debido a la existencia de una presión

( $\alpha K p$ ). Pero, puesto que  $\alpha K = -\partial_t \ln \sqrt{\gamma}$ , entonces  $\alpha p K = -p \partial_t \ln \sqrt{\gamma}$ , que no es otra cosa que el trabajo realizado por el fluido cuando el espacio se expande.

Consideramos finalmente la ecuación para  $S_i$ , esta ecuación es

$$\partial_t(\sqrt{\gamma} S_i) + \partial_k \left\{ \sqrt{\gamma} \left[ S_i (\alpha v^k - \beta^k) + \alpha p \delta_i^k \right] \right\} = \alpha \sqrt{\gamma} \Gamma_{\nu i}^\mu T_\mu^\nu .$$

Usando la expresión para el tensor de energía-momento, el lado derecho de la ecuación puede escribirse como

$$\alpha \sqrt{\gamma} \Gamma_{\nu i}^\mu T_\mu^\nu = p \partial_i (\alpha \sqrt{\gamma}) + \alpha \sqrt{\gamma} \frac{\rho_0 h}{2} u^\mu u^\nu \partial_i g_{\mu\nu} .$$

Expresando la métrica en términos de las cantidades 3+1, y después de un poco de álgebra encontramos que

$$\frac{\alpha}{2} u^\mu u^\nu \partial_i g_{\mu\nu} = W^2 \left[ -\partial_i \alpha + v^k D_i \beta_k + {}^3 \Gamma_{ik}^m \frac{u^k v_m}{u^0} \right] ,$$

donde  ${}^3 \Gamma_{ik}^m$  son los símbolos de Christoffel y  $D_i$  la derivada covariante, ambos asociados a la métrica espacial. Por otro lado tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_t (\sqrt{\gamma} S_i) = \partial_t - \alpha K S_i + S_i D_k \beta^k , \quad y$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_k \left[ \sqrt{\gamma} S_i (\alpha v^k - \beta^k) \right] = D_k \left[ \alpha S_i (v^k - \beta^k) \right] + S_m (a v^n - \beta^n) {}^3 \Gamma_{in}^m .$$

Juntando estos resultados, encontramos que la ecuación de evolución para  $S_i$  es:

$$\begin{aligned} \partial_t S_i - \alpha K S_i + D_k (\alpha S_i) - \beta^k D_k S_i + S_m (a v^k - \beta^n) {}^3 \Gamma_{in}^m + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i (\alpha \sqrt{\gamma} p) \\ = \frac{p}{\sqrt{\gamma}} \partial_i (\alpha \sqrt{\gamma}) + \rho_0 h W^2 \left[ -\partial_i \alpha + v^k D_i \beta_k + {}^3 \Gamma_{ik}^m \frac{u^k v_m}{u^0} \right] , \end{aligned} \quad (3.56)$$

que puede ser simplificada y quedar como

$$\partial_t S_i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} S_i + D_k (\alpha S_i v^k) + \partial_i (\alpha p) = -(\mathcal{E} + D) \partial_i \alpha + \alpha K S_i . \quad (3.57)$$

De nuevo podemos ver que el vector de corrimiento aparece sólo en la derivada de Lie, como era de esperarse.

Las ecuaciones de evolución escritas en el lenguaje 3+1 son entonces:

$$\partial_t D - \beta^k \partial_k D + D_k (\alpha D v^k) = \alpha K D, \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{E} - \beta^k \partial_k \mathcal{E} + D_k [\alpha v^k (\mathcal{E} + p)] &= (\mathcal{E} + p + D) (\alpha v^m v^n K_{mn} - v^m \partial_m \alpha) \\ &+ \alpha K (\mathcal{E} + p), \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\partial_t S_i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} S_i + D_k (\alpha S_i v^k) + \partial_i (\alpha p) = -(\mathcal{E} + D) \partial_i \alpha + \alpha K S_i. \quad (3.60)$$

Estas ecuaciones ponen de manifiesto la 3-covariancia cuando uno considera  $(D, \mathcal{E}, p)$  como escalares y  $S_i$  como 3-vector.

### 3.4. Hiperbolicidad

Así como en el caso Newtoniano, en el caso relativista las ecuaciones de Euler son fuertemente hiperbólicas. No obstante, debido al fuerte acomplamiento de las variables conservadas  $(D, \mathcal{E}, S_i)$  dado por el factor de Lorentz y a la presencia de la presión en estas, no es posible invertir las relaciones para encontrar las variables primitivas  $(\rho_0, v^i, \epsilon)$  a partir de las conservadas si no se tiene una ecuación de estado<sup>4</sup>. Esto significa que la matriz jacobiana no puede construirse.

Sin embargo, hay un procedimiento general para tratar la hiperbolicidad en el caso de estos sistemas<sup>5</sup>. Para esto, vamos a escribir el sistema de ecuaciones en la forma siguiente:

$$\partial_\mu \mathbf{F}^\mu(\mathbf{u}) = s(\mathbf{u}), \quad (3.61)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector de las variables primitivas y  $\mathbf{F}^\mu$  es el vector de flujos. En el caso de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista, tenemos que

$$\mathbf{F}^0(\mathbf{u}) = (D, S_i, \mathcal{E}) \quad (3.62)$$

$$\mathbf{F}^i(\mathbf{u}) = ((\alpha v^i - \beta^i) D, (\alpha v^i - \beta^i) S^i + \alpha \gamma^{ij} p, (\alpha v^i - \beta^i) \mathcal{E} + \alpha p v^i) \quad (3.63)$$

Si introducimos las matrices jacobianas  $\mathcal{A}^\sigma$  asociadas a los vectores  $\mathbf{F}^\sigma(\mathbf{u})$

$$\mathcal{A}^\sigma = \frac{\partial \mathbf{F}^\sigma(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}, \quad (3.64)$$

el sistema puede ser escrito como un sistema cuasi lineal de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden para las variables desconocidas  $\mathbf{u}$

<sup>4</sup>Recordemos de la sección 3.1.1, que inclusive si la ecuación de estado es sencilla, la manera de obtener las variables primitivas no es sencilla, ya que se deben encontrar las raíces de una ecuación no lineal.

<sup>5</sup>Tal procedimiento es debido a Friedrich (ver [2] y la referencia mencionada ahí).

$$\mathcal{A}^\mu(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.65)$$

El sistema (3.65) será fuertemente hiperbólico en la dirección temporal (definida por el vector  $\vec{\xi}$ , para el cual  $\xi^\alpha \xi_\alpha = -1$ ) si se cumplen:

1.  $\det(\mathcal{A}^\alpha \xi_\alpha) \neq 0$
2. Para algún  $\vec{\zeta}$  tal que  $\zeta_\alpha \xi^\alpha = 0$ ,  $\zeta_\alpha \zeta^\alpha = 1$ , el problema de eigenvalores  $\mathcal{A}^\alpha (\zeta_\alpha - \lambda \xi_\alpha) \mathbf{r} = 0$  tiene solo eigenvalores reales  $\lambda_n$  y un conjunto completo de eigenvectores  $\mathbf{r}_n$ .

Vamos a considerar que el movimiento se da en la dirección  $x$ , ignorando lo que sucede en los ejes  $y$  y  $z$ . Además tomamos  $\xi_\alpha = (1, 0, 0, 0)$  y  $\zeta_\alpha = (0, 1, 0, 0)$ . La condición 2 escrita arriba queda como  $(\mathcal{A}^1 - \lambda \mathcal{A}^0) \mathbf{r} = 0$ .

Después de un cálculo algebraico bastante largo obtenemos los siguientes eigenvalores:

$$\lambda_0 = \alpha v^x - \beta^x \quad (\text{multiplicidad tres}), \quad (3.66)$$

que define las ondas materiales, y los otros dos:

$$\lambda_\pm = \frac{\alpha}{1 - v^2 c_s^2} \left\{ v^x (1 - c_s^2) \pm c_s \sqrt{(1 - v^2) [\gamma^{xx} (1 - v^2 c_s^2) - v^2 (1 - c_s^2)]} \right\} - \beta^x, \quad (3.67)$$

asociados con las ondas acústicas, donde  $v^2 = \gamma_{ij} v^i v^j$  y la velocidad del sonido local  $c_s$  está definida como:

$$c_s^2 = \frac{1}{h} \left( \chi + \frac{p}{\rho_0^2} \kappa \right) \quad (3.68)$$

con  $\chi = \partial p / \partial \rho_0$  y  $\kappa = \partial p / \partial \epsilon$ . En contraste con el caso Newtoniano, aquí la velocidad del sonido está dividida por la entalpía específica.

Un caso interesante de analizar es un espacio-tiempo plano ( $\alpha = 0, \beta^i = 0, \gamma_{ij} = \delta_{ij}$ ), es decir, relatividad especial en una dimensión. Los eigenvalores se reducen, a:

$$\lambda_0 = v^x, \quad \lambda_\pm = \frac{v^x \pm c_s}{1 \pm v^x c_s}. \quad (3.69)$$

Observamos que en este caso los eigenvalores  $\lambda_\pm$  no son otra cosa mas que la composición relativista de las velocidades  $v^x$  y  $c_s$ .

Se puede mostrar que, a partir de los eigenvalores escritos arriba, obtenemos un conjunto completo de eigenvectores. El cálculo es un poco largo y no muy ilustrativo, por lo que no lo llevaremos a cabo. Lo importante es resaltar el hecho de que las ecuaciones de la hidrodinámica en el caso relativista son fuertemente hiperbólicas.





## Capítulo 4

# Métodos numéricos

### 4.1. Diferencias finitas

Las ecuaciones de Einstein en su forma más general son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden acopladas, que son imposibles de resolver analíticamente (salvo en casos muy sencillos). Para resolver algunos casos más interesantes (de las ecuaciones de Einstein y de ecuaciones diferenciales parciales en general), es necesario hacer uso de aproximaciones numéricas y de computadoras. Sin embargo, uno de los principales problemas a los que se enfrenta uno cuando desea hacer simulaciones numéricas es definir el espacio en el que le interesa trabajar.

Cuando uno trabaja analíticamente en un espacio-tiempo continuo, las ecuaciones diferenciales parciales involucran un número infinito de puntos en el espacio-tiempo. La solución de estas ecuaciones por tanto involucran un número infinito de variables, que son los valores del campo en cuestión en cada punto del espacio-tiempo. Sin embargo, cuando uno desea aproximar numéricamente dichas ecuaciones, se topa con el problema de la memoria computacional, una memoria finita; esto implica que lo primero que debe hacerse es reducir el número de variables desconocidas a un número finito.

La idea central en las diferencias finitas consiste en discretizar el espacio tiempo, esto significa sustituir el espacio continuo por una serie de puntos o “malla computacional”. Las distancias entre estos puntos son constantes (así lo asumimos aquí, aunque en general no tiene porque serlo). Denominamos  $\Delta t$  al intervalo de tiempo entre dos niveles sucesivos de tiempo, este intervalo de tiempo suele llamarse “paso” de tiempo. La distancia entre dos puntos adyacentes en el mismo paso de tiempo se denomina  $\Delta x$ .

Una vez definida nuestra malla el siguiente paso es reemplazar las ecuaciones diferenciales por un sistema de ecuaciones algebraicas. Para lograr esto debemos poder aproximar nuestros operadores diferenciales por diferencias finitas entre valores de las funciones en puntos cercanos de la malla. Obtenemos entonces una ecuación algebraica por cada punto de la malla por cada ecuación diferencial.

Para hacer las aproximaciones necesitamos saber cuál es el número mínimo de puntos que debemos tener en nuestra malla. Si deseamos aproximar una derivada de orden  $n$ , el mínimo de puntos que debemos de tener (para formar nuestro esquema de diferencias finitas) es  $n + 1$ .

Sea  $f$  una función sobre la malla, introducimos la siguiente notación:

$$f_m^n = f(n\Delta t, m\Delta x) . \quad (4.1)$$

Deseamos ahora hacer la aproximación en diferencias finitas para la primera derivada de  $f$ . Para hacer la aproximación vamos a utilizar la expansión de Taylor.

Comenzamos haciendo la expansión de Taylor para los puntos  $(n, m + 1)$  y  $(n, m - 1)$ . Asumimos que en este momento estamos sobre un mismo nivel de tiempo, por lo que  $f_m^n \equiv f_m$

$$f_{m+1} = f_m + \Delta x f'_m + f''_m \frac{\Delta x^2}{2} + f'''_m \frac{\Delta x^3}{6} + f^{iv}_m \frac{\Delta x^4}{24} + \dots \quad (4.2)$$

donde  $f'_m$  denota la derivada con respecto a  $x$ , y así sucesivamente. También,

$$f_{m-1} = f_m - \Delta x f'_m + f''_m \frac{\Delta x^2}{2} - f'''_m \frac{\Delta x^3}{6} + f^{iv}_m \frac{\Delta x^4}{24} + \dots \quad (4.3)$$

De la ecuación (4.2) podemos ver inmediatamente que, para la primera derivada tenemos:

$$f'_m = \frac{f_{m+1} - f_m}{\Delta x} + \vartheta(\Delta x) . \quad (4.4)$$

A esta aproximación se le denomina “diferencia hacia adelante”. De la misma manera, tomamos (4.3) y resolvemos para  $f'_m$ ,

$$f'_m = \frac{f_m - f_{m-1}}{\Delta x} + \vartheta(\Delta x) . \quad (4.5)$$

A esta aproximación se le llama “diferencia hacia atrás”. Si ahora restamos (4.2) a (4.3), y resolvemos para  $f'_m$  obtenemos:

$$f'_m = \frac{f_{m+1} - f_{m-1}}{2\Delta x} + \vartheta(\Delta x^2) . \quad (4.6)$$

Esta aproximación se conoce como “diferencias centradas”<sup>1</sup>.

¿Cómo sabemos qué tan buenas son las aproximaciones? Esta pregunta tiene respuesta: depende. Y depende en general de varios factores, el primero de ellos tiene que ver con el tamaño de nuestra malla. Si  $\Delta x$  es pequeño (que la función no cambia bruscamente de punto a punto), podemos tener una buena aproximación. Sin embargo, hay aproximaciones que son mejores que otras. Esto tiene que ver con lo siguiente:

---

<sup>1</sup>Es importante señalar aquí que, aunque en este caso hemos hecho las diferencias para la coordenada  $x$ , las aproximaciones para las derivadas con respecto a  $t$  se hacen exactamente de la misma manera.

En las aproximaciones hechas arriba, ecuaciones (4.4) y (4.5) podemos observar que no escribimos todos los términos de la expansión en Taylor (pues esta se convierte en una suma infinita de términos), sino que los encerramos dentro de algo que llamamos  $\vartheta(\Delta x)$  ó  $\vartheta(\Delta x^2)$ . El error que cometemos en esta aproximación se llama “error de truncado” y es precisamente el error debido a que cortamos nuestra aproximación a un cierto orden. El error de truncado es proporcional a la potencia más alta de  $\Delta x$  del término que sigue a la aproximación, pues es claro que si  $\Delta x \rightarrow 0$ , el error tenderá a cero como  $\Delta x^n$ , con  $n$  la mayor potencia.

Por tanto vemos que las aproximaciones (4.4) y (4.5) son a primer orden, mientras que (4.6) es a segundo orden. De esta manera podemos asegurar que si las diferencias finitas las escogemos como diferencias centradas en vez de diferencias hacia adelante o hacia atrás, tendremos una mejor aproximación a nuestra ecuación diferencial.

## 4.2. Consistencia, convergencia y estabilidad

Como pudimos observar en la sección anterior, la aproximación en diferencias finitas dista mucho de ser única, por el contrario existen un número infinito de maneras para hacer las aproximaciones, aún cuando se busque que las aproximaciones sean del mismo orden. Desafortunadamente no hay una regla que nos diga que aproximación es mejor que otra, sin embargo existen algunas propiedades que deben de cumplir estas aproximaciones, estas propiedades son la consistencia, la convergencia y la estabilidad, y nos sirven para poder decidir que aproximación funciona mejor que otra en casos particulares.

Cuando hablamos de consistencia hacemos referencia a la coherencia a la hora de hacer la aproximación a la ecuación diferencial parcial. Digamos que se trata esencialmente de comprobar si el esquema numérico utilizado es un esquema razonable para aproximar la ecuación diferencial parcial en cuestión, o si corremos el riesgo de aproximar a una ecuación diferencial parcial diferente. Dicho de otro modo, queremos que en el límite continuo nuestra aproximación numérica se acerque a la ecuación diferencial original y no a otra.

En la convergencia, el problema se reduce a verificar si, en un tiempo finito, cuando reducimos el tamaño de la malla (aumentamos la resolución, o lo que es lo mismo  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ ) las soluciones del problema discreto se aproximan a la solución analítica (en el caso continuo). Es decir, la diferencia entre la solución exacta y la numérica a un tiempo finito debe tender a cero en el límite continuo.

Es importante señalar que por lo general es muy complicado verificar analíticamente si una aproximación numérica es convergente o no, sin embargo numéricamente es fácil saber si nuestra aproximación converge a algo o no. Aunque recordemos, lo importante es saber si la solución numérica converge a la solución analítica y no a otra cosa.

La propiedad de estabilidad consiste en asegurarse que los esquemas discretos, en su evolución temporal (discreta), no amplifiquen los errores iniciales o, al menos, no lo hagan de manera creciente y descontrolada a medida que se refina la malla.

Hay un resultado muy importante en cuanto a las aproximaciones numéricas, este resultado se conoce como el teorema de Lax:

*Dado un problema de valores iniciales bien planteado matemáticamente y una aproximación en diferencias finitas a él que satisface la condición de consistencia, entonces la condición de estabilidad es condición necesaria y suficiente para la convergencia.*

Este resultado es fundamental ya que involucra el objetivo final de toda aproximación en diferencias finitas, la convergencia a la solución exacta, mediante una propiedad más sencilla de probar: la estabilidad.

Vamos a presentar a continuación un método para probar la estabilidad.

Las ecuaciones en diferencias finitas pueden escribirse de forma general de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{v}^n \quad (4.7)$$

donde  $\mathbf{v}^n$  es el vector en el nivel de tiempo  $n$  y  $\mathbf{B}$  es una matriz. Si esta matriz tiene un conjunto completo de eigenvectores, el vector  $\mathbf{v}^n$  se puede escribir como una combinación lineal de ellos. La condición de estabilidad requiere que la matriz  $\mathbf{B}$  no amplifique ninguno de sus eigenvalores; el mayor valor que puede tomar un eigenvalor es, por tanto, 1. El siguiente método para el análisis de la estabilidad, desarrollado originalmente por von Newman, consiste en descomponer la solución en series de Fourier

$$\mathbf{v}^n(x) = \sum_k \tilde{\mathbf{v}}^n(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (4.8)$$

donde  $\tilde{\mathbf{v}}$  representa los coeficientes de Fourier y la suma es sobre todos los vectores de onda  $\mathbf{k}$  en la malla. Sustituyendo esto en la ec (4.7), obtenemos:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{v}}^n . \quad (4.9)$$

La matriz  $\tilde{\mathbf{B}}$  se obtiene de la transformada de Fourier de la matriz original  $\mathbf{B}$  y recibe el nombre de matriz de amplificación. Para que la condición de estabilidad sea válida, es necesario que ninguno de los modos de Fourier se amplifique, es decir, el radio espectral de  $\tilde{\mathbf{B}}$  debe ser menor o igual que uno. En otras palabras, si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los eigenvalores de la matriz de amplificación  $\mathbf{B}$ ,  $|\lambda_i| \leq 1$  es la condición de estabilidad de von Newmann.

Sin embargo, para que esta condición de estabilidad sea válida, debemos suponer que se cumple lo siguiente: 1) Las condiciones de frontera deben ser periódicas, es decir,  $u_0^n = u_N^n$ , ya que si esto no sucede, es imposible hacer la expansión en serie de Fourier. 2) Los coeficientes de la matriz  $\mathbf{B}$  deben ser constantes, de no ser así no podemos separar los distintos modos de Fourier. Una revisión más detallada de la estabilidad de von Newman puede encontrarse en [19].

En la siguiente sección, se aplica esta condición de estabilidad para mostrar que no cualquier aproximación en diferencias finitas puede ser utilizada de manera que se cumplan los criterios

estudiados aquí, dicho de otro modo, el método de la estabilidad nos proporciona un buen criterio para saber cuando una aproximación en diferencias finitas puede ser utilizada y cuando no.

### 4.3. Algo de métodos numéricos

Al momento de realizar nuestra evolución numérica es importante verificar la estabilidad de nuestros métodos numéricos, esto nos garantiza que la evolución pueda llevarse a cabo.

Vamos a estudiar el caso más sencillo de esta ecuación, la ecuación de advección. Esta ecuación tiene la forma:

$$\partial_t u + v \partial_x u = 0, \quad (4.10)$$

donde  $u$  es la función de onda y  $v$  es la velocidad (constante) de propagación de la onda. Esta ecuación tiene solución analítica dada por  $u = f(x - vt)$  la cual representa una onda moviéndose en la dirección  $x$  positiva.

La manera más sencilla de aproximar esta ecuación con diferencias finitas es hacerlo con diferencias centradas en el espacio y hacia adelante en el tiempo, es decir:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + v \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2\Delta x} = 0. \quad (4.11)$$

La cual resolvemos para  $u_m^{n+1}$  obteniendo:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{v\rho}{2}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n), \quad (4.12)$$

donde  $\rho = \Delta t / \Delta x$  es el “parámetro de Courant”. Esta aproximación recibe el nombre de aproximación explícita, ya que permite obtener explícitamente la solución en el paso de tiempo  $n + 1$  en términos del paso anterior. Observamos que el método numérico es de dos niveles ( $n, n + 1$ ).

Esta aproximación sin embargo, tiene un serio problema. Al desarrollar el criterio de estabilidad, se encuentra que es incondicionalmente inestable, esto quiere decir que es inestable para cualesquiera valores de  $\Delta t$  y  $\Delta x$ .

Consideramos un modo de Fourier de la forma:

$$u_m^n = \xi^n e^{imk\Delta x} \quad (4.13)$$

entonces:  $u_m^{n+1} = \xi^{n+1} e^{imk\Delta x}$ ,  $u_{m+1}^n = \xi^n e^{i(m+1)k\Delta x}$ ,  $u_{m-1}^n = \xi^n e^{i(m-1)k\Delta x}$ ,

Sustituyendo esto en la ecuación de diferencias finitas (4.12) encontramos, después de un poco de álgebra, la siguiente ecuación para  $\xi$ :

$$\xi + iv\rho \operatorname{sen}(k\Delta x) - 1 = 0, \quad (4.14)$$

es decir,

$$\xi = 1 - iv\rho \operatorname{sen}(k\Delta x) . \quad (4.15)$$

De aquí que

$$|\xi|^2 = 1 + [v\rho \operatorname{sen}(k\Delta x)]^2 > 1 . \quad (4.16)$$

Por tanto el esquema de diferencias finitas (4.12) es incondicionalmente inestable, como se había señalado anteriormente.

Vamos ahora a reescribir la ecuación de advección (4.10) en términos de diferencias finitas centradas, tanto en el tiempo como en el espacio, es decir:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\Delta t} + v \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2\Delta x} = 0 . \quad (4.17)$$

El método sigue siendo explícito, sin embargo es ahora de tres niveles ( $n - 1, n, n + 1$ ), lo cual lo hace más complicado.

De manera análoga como en el caso anterior, vamos a tomar los modos de Fourier de la forma  $u_m^n = \xi^n e^{imk\Delta x}$ ; obteniendo después de un álgebra sencilla la siguiente ecuación cuadrática para  $\xi$ :

$$\xi^2 + 2iv\rho \operatorname{sen}(k\Delta x) - 1 = 0 \quad (4.18)$$

cuyas raíces son:

$$\xi = -iv\rho \operatorname{sen}(k\Delta x) \pm \sqrt{1 - (v\rho \operatorname{sen}(k\Delta x))^2} . \quad (4.19)$$

Si  $(v\rho \operatorname{sen}(k\Delta x))^2 < 1$ , entonces

$$|\xi|^2 = (v\rho \operatorname{sen}(k\Delta x))^2 + \left[ \sqrt{1 - (v\rho \operatorname{sen}(k\Delta x))^2} \right]^2 = 1 . \quad (4.20)$$

Entonces, el esquema es estable si se cumple que

$$v\rho |\operatorname{sen}(k\Delta x)| < 1 \quad (4.21)$$

y, puesto que  $|\operatorname{sen}(k\Delta x)| \leq 1$ , se garantiza la estabilidad si

$$v\Delta t < \Delta x . \quad (4.22)$$

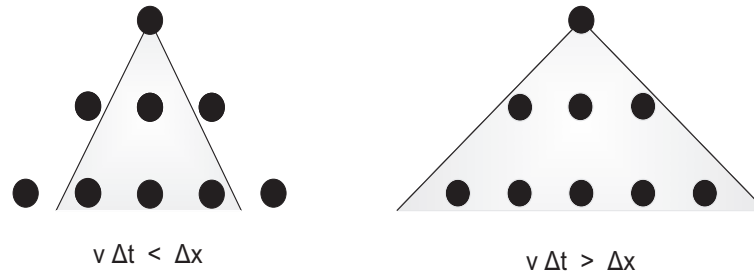


Figura 4.1: Condición de estabilidad de Courant-Friedrich-Lewy. En el caso  $v\Delta t < \Delta x$  el dominio de dependencia numérico (los puntos de la malla) es mayor que el dominio de dependencia físico (la región sombreada). El sistema es estable y por tanto converge a la solución deseada. En el caso  $v\Delta t > \Delta x$  hay información física que se pierde y por tanto el sistema es inestable, lo que implica la pérdida de convergencia.

Esta condición se conoce como condición de estabilidad de Courant-Friedrich-Lewy (CFL). La condición CFL tiene una interpretación geométrica, la cual se observa en la figura 4.1: el dominio de dependencia numérico debe ser mayor que el dominio de dependencia físico. De no ser así se perdería información física relevante al refinar la malla, ocasionando que la solución numérica no converja a la solución exacta y debido a esto el sistema se vuelve inestable.

### 4.3.1. Métodos de líneas

En la sección anterior notamos que no cualquier aproximación en diferencias finitas nos da los resultados deseados. Existen muchos y diferentes métodos empleados para resolver ecuaciones diferenciales parciales, en este trabajo mencionaremos sólo dos de ellos (por ser estos los que utilizamos en nuestro código numérico), el método de Runge-Kutta y el método ICN (Crank-Nicholson iterado).

Estos dos métodos pertenecen a los denominados métodos de líneas. Empezamos por discretizar la parte espacial de las ecuaciones manteniendo continua la parte temporal. Asumimos que la ecuación la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\partial_t u = S(u) , \tag{4.23}$$

con  $S$  algún tipo de operador en diferencias finitas espacial (el procedimiento es análogo si la ecuación anterior es un sistema de ecuaciones). Entonces la ecuación se puede ver como una ecuación diferencial ordinaria y podemos utilizar los métodos conocidos para resolver este tipo de ecuaciones.

Una de las ventajas de este método es que tanto las componentes espaciales como las temporales son independientes una de otra, así que, podemos cambiar el orden de una sin alterar la otra.

Veremos primero el método de Runge-Kutta. Si tenemos una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{du}{dt} = S(u) ,$$

podemos encontrar la solución usando una serie de pasos intermedios que ayudan a disminuir el error.

La idea es básicamente construir un paso intermedio entre los dos extremos del intervalo a partir de encontrar los valores de las fuentes en el paso inicial, para después, con los valores del paso intermedio recalculamos las fuentes, volver al paso inicial y dar el paso completo de todo el intervalo. Esquemáticamente, definimos las variables auxiliares:

$$k_1 = S(u^n) , \tag{4.24}$$

$$k_2 = S(u^n + k_1\Delta t/2) , \tag{4.25}$$

entonces la solución es:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t k_2 . \tag{4.26}$$

Podemos pensar que el valor de  $k_2$  es la estimación del cambio de  $u$  cuando avanzamos en  $t$  por  $\Delta t/2$ .

A este método se le conoce con el nombre de Runge-Kutta de segundo orden, ya que converge a segundo orden. Sin embargo este método resulta ser inestable bajo algunas condiciones por lo que no es muy utilizado.

Un método estable es el Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). La idea es exactamente la misma que en el método anterior, aunque este es más elaborado: Calculamos las fuentes en un paso de tiempo inicial y usamos estas para elaborar una serie de pasos intermedios. Recalculamos las fuentes y, junto con el paso inicial, damos finalmente el paso completo.

Definimos nuevamente nuestras variables auxiliares:

$$k_1 = S(u^n) , \tag{4.27}$$

$$k_2 = S(u^n + k_1\Delta t/2) , \tag{4.28}$$

$$k_3 = S(u^n + k_2\Delta t/2) , \tag{4.29}$$

$$k_4 = S(u^n + k_3\Delta t) . \tag{4.30}$$

Aquí  $k_1$  es la fuente evaluada en el paso inicial de tiempo.  $k_2$  es la fuente evaluada en el paso intermedio de tiempo (el punto medio) usando a  $k_1$  como estimación del valor de  $u$  en el punto medio  $t_n + \Delta t/2$ .  $k_3$  es nuevamente la fuente evaluada en el paso intermedio, solo que ahora se usa a  $k_2$  como la estimación de  $u$  en el punto medio. Finalmente  $k_4$  es la fuente evaluada en el paso de tiempo final, tomando a  $k_3$  como estimación de  $u$ .



Para obtener el valor de la solución en el paso de tiempo futuro, retomamos el valor de la solución en el paso inicial y hacemos un promedio de las fuentes, dándole mayor peso a las que están evaluadas en el paso intermedio. Entonces aproximamos la solución como:

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (4.31)$$

Este método es estable, y converge a cuarto orden. Es de notar que se necesitan calcular las fuentes 4 veces antes de poder avanzar un paso.

Otro método muy utilizado en la relatividad numérica es el “método de Crank-Nicholson iterado” (ICN). Antes de hablar un poco de este método, abordaremos el método del cual deriva, “Crank-Nicholson”.

Como mencionamos anteriormente, los métodos tales como (4.12) y (4.17) se denominan métodos explícitos. Estos involucran un solo valor de la función en el nivel de tiempo futuro  $u^{n+1}$ , es decir, conociendo los valores de la función  $u$  en el tiempo  $n$ , entonces las ecuaciones (4.12) y (4.17) nos dan la solución en el tiempo futuro de una manera directa. Sin embargo, como observamos al aplicar el criterio de estabilidad, en algunas ocasiones este tipo de métodos presentan problemas al no ser estables.

El método de Crank-Nicholson es uno de los métodos denominados implícitos. En el caso de la ecuación de advección, el cociente de diferencias para la derivada del tiempo,  $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}$ , puede considerarse como una aproximación por diferencias centradas en el punto medio del paso de tiempo ( $n + 1/2$ ). Si tomamos esto como diferencias centradas, debemos empatarlo con una aproximación en diferencias centradas de la derivada espacial en el mismo punto medio del paso de tiempo. Podemos obtener esto al promediar dos aproximaciones para  $\partial_x u$ , una calculada en el tiempo  $n$  y otra para el tiempo  $n + 1$ , es decir:

$$\partial_x u = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2\Delta x} \right).$$

La ecuación de advección, queda:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = \frac{v}{4\Delta x} (u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} + u_{m+1}^n - u_{m-1}^n).$$

Notamos que esto se puede escribir en general de la siguiente manera:  $Au^{n+1} = Bu^n$  donde  $A$  y  $B$  son las matrices de los coeficientes, usualmente tridiagonales. Esto implica que ahora tenemos 3 valores diferentes de  $u$  en el último paso de tiempo, por lo que no se puede resolver explícitamente para  $u^{n+1}$ . Para poder encontrar la solución notamos que  $u^{n+1} = (A^{-1}B)u^n$ . ¡El problema se ha reducido a invertir una matriz tridiagonal!

En muchos casos (la ecuación de difusión, ecuación de difusión-advección, etc.) se ha encontrado que el método Crank-Nicholson es incondicionalmente estable; el precio que hay que pagar ahora es la inversión de la matriz tridiagonal.

La idea detrás del método Crank-Nicholson iterado es transformar un método implícito estable, Crank-Nicholson, en uno explícito mediante una serie de iteraciones. Si este método converge, obtendremos la solución del problema implícito.

Esquemáticamente este método puede verse de la siguiente manera:

$$u_j^{(1)} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} S(u_j^n), \quad (4.32)$$

$$u_j^{(i)} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} S(u_j^{(i-1)}), \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (4.33)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t S(u_j^{(N)}). \quad (4.34)$$

Se observa que el esquema consiste en una serie de pasos llamados de prueba, estos se van aproximando cada vez mejor al valor de la función en el tiempo  $t + \Delta t/2$ , y una vez hecha esta aproximación se da el paso completo hasta  $t + \Delta t$ . Algo que es importante mencionar, es que con este método sólo se necesitan dar tres pasos ( $N = 2$ ), el método se vuelve estable y además converge a segundo orden<sup>2</sup>. Es decir, obtenemos la misma convergencia que en el Crank-Nicholson, por lo que ya no hay que seguir iterando.

En el código numérico utilizado para las evoluciones, en esta tesis, se implementa este método.

#### 4.4. Un problema de prueba: El tubo de choques

Uno de los problemas más utilizados, a manera de prueba en la hidrodinámica relativista, es el problema conocido como “tubo de choques”. Este problema ha sido extensamente estudiado, tanto analíticamente, como numéricamente. En el caso Newtoniano, puede revisarse en [28], mientras que en el caso numérico, una referencia obligada es [24]. En el caso relativista, tanto analítico como numérico, puede consultarse [16].

El problema consiste en un tubo en el cual está contenido un gas separado en dos regiones (regiones 1 y 5) por una membrana a distintas presiones y densidades. Sin pérdida de generalidad, supongamos que en  $t = 0$ ,  $p_1 > p_5$  y  $\rho_1 > \rho_5$ , además  $v_1 = v_5 = 0$ , es decir los fluidos se encuentran en reposo. Este estado inicial se muestra en la figura 4.2.

Para  $t > 0$  la membrana se rompe propiciando el movimiento de ambas regiones del gas. La parte del gas de mayor presión comienza a moverse hacia la región de menor presión, es decir, se expande, lo que ocasiona una onda de rarefacción; además, puesto que el gas a mayor densidad penetra en la región menos densa, se produce un choque.

La figura 4.3 muestra el reacomodo de las variables hidrodinámicas en el gas debido a la ruptura de la membrana. Se observa que tanto la región 1 como la 5 permanecen en el mismo estado inicial. En la región 2, entre las rectas  $x = x_1$  y  $x = x_2$ , se forma la onda de rarefacción, que viaja hacia la izquierda. La recta perpendicular al eje  $x$  que pasa por  $x_3$  es una discontinuidad

---

<sup>2</sup>Hay que recalcar aquí que el método solo es estable si se cumple la condición CFL, es decir, si  $v\Delta t < \Delta x$ .

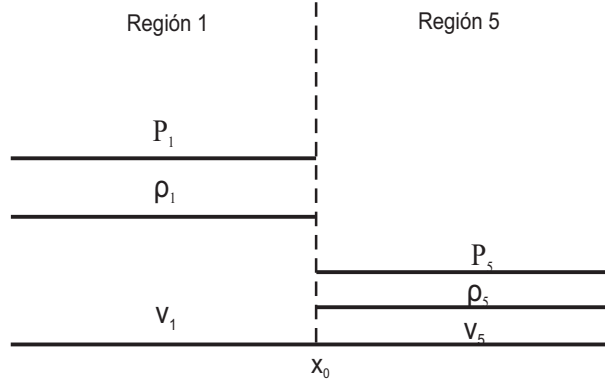


Figura 4.2: Estado inicial del tubo de choques.

de contacto; a través de esta, notamos que la presión y la velocidad se mantienen continuas, mientras que la densidad es discontinua. Finalmente, en la recta  $x = x_4$  se localiza la onda choque viajando hacia la derecha. Como era de esperarse, las variables hidrodinámicas entre la región 4 y la región 5 son discontinuas.

Debido a lo anterior, este problema servirá para poner un poco más en claro todas las ideas que hemos venido manejando, ya que utilizaremos la ecuaciones de la hidrodinámica en relatividad especial (ecs 3.19-3.21) y toda la parte de los métodos numéricos anteriormente estudiada, además de estudiar el tratamiento de los choques.

Vamos a resolver el problema empleando un código numérico que resuelve las ecuaciones de Euler relativistas en simetría esférica (*HydroSphere*). Este código fue desarrollado junto con Juan Carlos Degollado. El código utiliza diferencias finitas centradas en el espacio y el método Crank-Nicholson iterado (ICN) en el tiempo. Además está escrito con una métrica de fondo fija, por lo que solo se evolucionan los términos de materia. La métrica seleccionada puede ser Schwarzschild o Minkowski, esta última es la métrica usada en este problema. En este caso, el código resuelve las ecuaciones para datos iniciales discontinuos. Nuestro código numérico será omparado con la solución analítica, la cual puede verse (como dijimos anteriormente) en [16].

El estado inicial del fluido está especificado por la presión y la densidad, cuyos valores son:  $p_1 = 1,0$ ,  $\rho_1 = 1,0$  del lado izquierdo de la interface y  $p_5 = 0,2$ ,  $\rho_5 = 0,5$  en el lado derecho. Asumimos que el fluido se encuentra en reposo en ambos lados de la interface. La región de integración va desde 0 a 1, y a  $t = 0$  la interface se encuentra en  $x = 0,5$ . Vamos a utilizar la ecuación de estado para un fluido perfecto (2.25),  $p = (\gamma - 1)\rho_0\epsilon$ , con el valor de  $\gamma = 1,4$ .

La evolución se hace utilizando el método ICN hasta un tiempo  $t = 0,4$ , usando diferencias espaciales centradas. La resolución a la cual se llevó a cabo la simulación fue  $\Delta r = 0,001$ , usando un factor de Courant  $\Delta t/\Delta x = 0,4$ , y un número de pasos  $N_t = 1000$ .

Presentamos los resultados de la evolución numérica para un tiempo  $t = 0,4$  en las figuras 4.4, 4.5, 4.6. La línea sólida representa la solución analítica, mientras que la línea punteada representa la solución numérica de las diferentes variables primitivas: densidad presión y velocidad

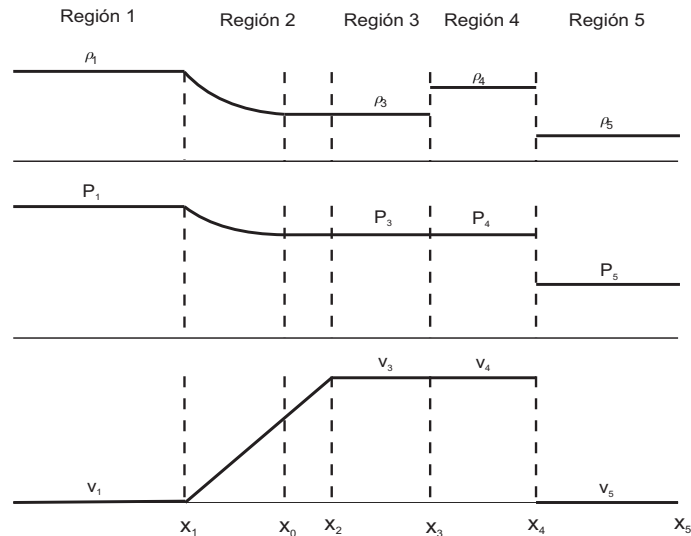


Figura 4.3: Diversas regiones del tubo de choques a un tiempo  $t > 0$  (las gráficas muestran de arriba hacia abajo: densidad, presión y velocidad). Región 1: Región sin perturbación. Región 2: Onda de rarefacción. Región 3: Discontinuidad de contacto, en donde la presión y la velocidad permanecen constantes. Región 4: Onda de choque. Región 5: Región sin perturbación alguna.

(en ese orden).

Observando las figuras, podemos concluir que la evolución numérica no es muy buena con respecto a la solución analítica. La zona de la onda de rarefacción no presenta ningún problema. Sin embargo, las zonas de la onda de choque y la discontinuidad de contacto (que sólo aparece en la densidad) presentan algunas oscilaciones espurias en la evolución de las 3 variables primitivas. Esto puede hacer que eventualmente el código deje de funcionar, o que los resultados obtenidos no sean los deseados.

#### 4.4.1. Viscosidad artificial y disipación artificial

Como se mencionó en la sección 2.4, en un fluido realista la propagación de las discontinuidades no aparece, sino que, en su lugar, aparecen gradientes muy grandes. En el caso numérico, sin embargo, el ancho del choque suele ser demasiado pequeño comparado con el tamaño de la malla, por lo que no se puede resolver numéricamente. Esto es precisamente lo que da lugar a las oscilaciones que aparecen en las figuras de la evolución de las variables primitivas.

Para tratar estos problemas se utiliza la viscosidad artificial.

La idea básicamente es introducir cierta disipación externa en el código numérico para amortiguar las oscilaciones espurias que aparecen en la formación de las discontinuidades. La introducción de los términos disipativos, sin embargo, no puede ser arbitraria. Por principio de cuentas, si añadieramos un término de disipación constante, este afectaría a la solución numérica en todos los puntos de la malla. Esta es la razón por la cual la viscosidad artificial debe

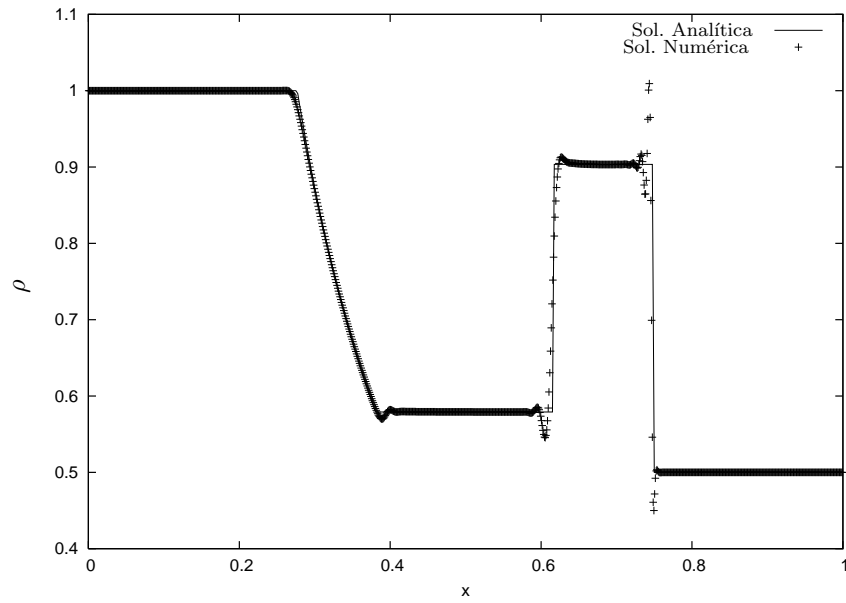


Figura 4.4: Solución analítica y numérica de la densidad. Observamos que la onda de rarefacción no tiene problemas, mientras que existen perturbaciones de tamaño considerable tanto en la discontinuidad de contacto, como en la onda de choque.

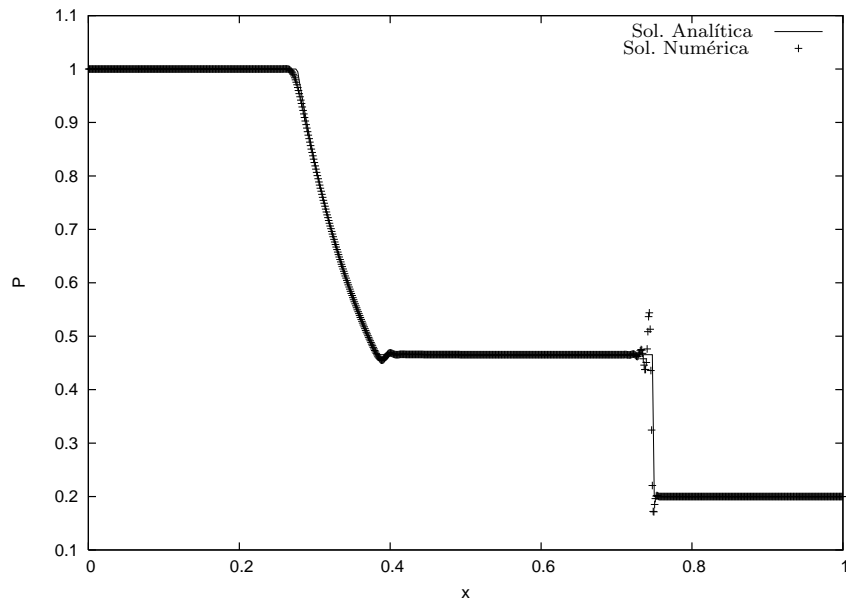


Figura 4.5: Solución analítica y numérica de la presión. Observamos que la onda de rarefacción no tiene problemas, mientras que existen algunas perturbaciones en la onda de choque.

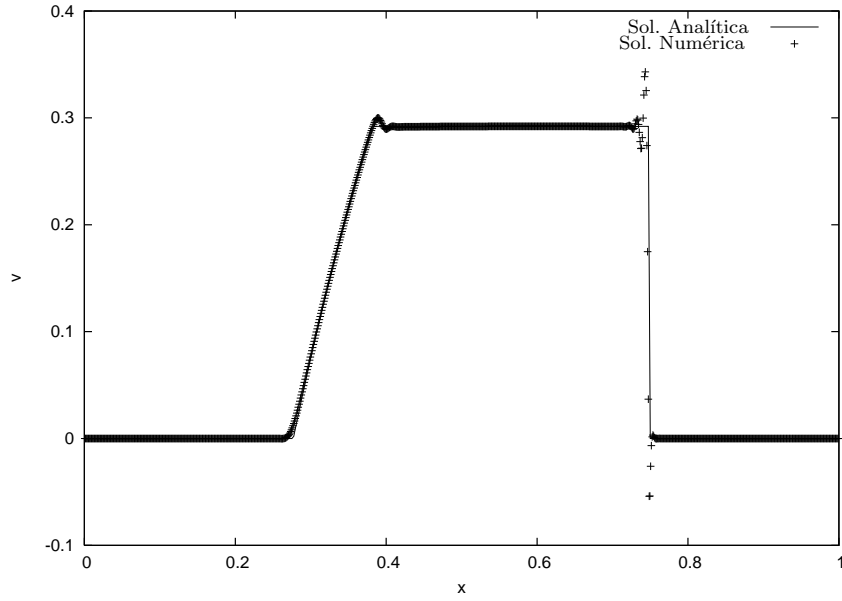


Figura 4.6: Solución analítica y numérica de la velocidad. Observamos que la onda de rarefacción no tiene problemas, mientras que existen algunas perturbaciones en la onda de choque.

aplicarse únicamente en las zonas donde se genera el choque y debe ser muy pequeña o cero en regiones suaves. Por otro lado, debemos asegurarnos que la energía cinética que se pierde debido al término disipativo no se pierda completamente, sino que se transforme en energía interna. Para lograrlo debemos imitar la situación física real de un fluido con viscosidad verdadera. Esto lo conseguimos al añadir un término de viscosidad  $Q$  en la presión:  $p \rightarrow p + Q$ ; haciendo este cambio, el tensor de energía momento puede representarse como:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p + Q)u^\mu u^\nu + (p + Q)g^{\mu\nu} , \quad (4.35)$$

separando los términos que tienen  $Q$  obtenemos:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} + Q(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) , \quad (4.36)$$

es decir, la viscosidad se introduce como si fuera viscosidad verdadera<sup>3</sup>. Puesto que se ha visto modificada la presión, y esta se incluye en las ecuaciones (3.20) y (3.21), estas ecuaciones se verán modificadas también. De este modo nos aseguramos que, si el término de viscosidad transforma la energía cinética en energía interna, la conservación de la energía se mantendrá, por lo que el término viscoso afectará (de manera favorable) la propagación de los choques.

<sup>3</sup>La ecuación 4.36 nos da la forma más simple para el tensor de energía momento de un fluido viscoso.

En nuestra simulación, la forma que toma la viscosidad artificial es<sup>4</sup>:

$$Q = \begin{cases} 0, & \partial_x v^x > 0 \\ c_{vis} \rho (\partial_x v^x \Delta x)^2, & \partial_x v^x < 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

Donde  $c_{vis}$  es un coeficiente distinto de cero (que en nuestro caso tiene un valor igual a:  $c_{vis} = 1,5$ ) solo en las regiones donde las líneas características del flujo son convergentes, es decir  $\partial_x v^x < 0$ . En cualquier otro lugar dicho coeficiente debe ser cero; es decir, el término de viscosidad artificial no se aplica en regiones suaves, sólo en aquellas para las cuales los gradientes en la velocidad son negativos. El valor del coeficiente se obtuvo mediante diversas pruebas, siendo el que mejor resultados arrojó. Aquí también hay que agregar el hecho de que la derivada introduce un error de segundo grado, el cual desaparece cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Además de este tipo de viscosidad artificial, en nuestra simulación numérica utilizamos disipación artificial.

Al trabajar con sistemas de ecuaciones no lineales, como en este caso, los métodos numéricos utilizados se vuelven inestables bajo ciertas condiciones. Esto tiene como consecuencia la aparición de oscilaciones espurias de alta frecuencia debidas a que el esquema numérico se vuelve inexacto al momento de aproximar la ecuación diferencial en cuestión, ya sea por que los coeficientes dependen de las variables dinámicas o por los términos de menor orden, ambos en el esquema de diferencias finitas. Este fenómeno se conoce como “el fenómeno de Gibbs”. Observamos algunas de estas oscilaciones espurias en las figuras 4.4–4.6, las cuales aparecen en las regiones cercanas a las discontinuidades. Las oscilaciones espurias pueden echar a perder la simulación numérica si crecen sin cota alguna; por tanto, es necesario encontrar un artilugio numérico que sea capaz de amortiguar o disipar dichas oscilaciones espurias.

Una manera de amortiguar la aparición de las oscilaciones espurias, es introducir disipación artificial en el esquema numérico. La forma estandar de hacerlo se conoce como *disipación de Kreiss-Oliger*. El procedimiento lo describiremos brevemente a continuación:

Partimos de un esquema de diferencias finitas que podemos escribir de la siguiente manera:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \Delta t S(u_m^n), \quad (4.38)$$

donde  $S(u_m^n)$  es algun operador de diferencias finitas espaciales. Vamos a modificar el esquema introduciendo un término de la forma:

$$-\epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} (-1)^N \Delta_x^{2N} (u_m^n), \quad (4.39)$$

---

<sup>4</sup>El significado físico de este término de viscosidad artificial proviene de considerar la pérdida de energía cinética cuando dos partículas del fluido chocan en una colisión completamente inelastica, y fue introducido originalmente por von Neumann y Richtmyer.

con  $\epsilon > 0$ ,  $N > 1$ , y donde  $\Delta_x^{2N} := (\Delta_x^+ \Delta_x^-)^N$  es el  $2N$  operador de diferencias centradas que aparece en los términos de orden superior de las derivadas espaciales  $\partial_x^{2N} u$ . Por ejemplo, para el caso  $N = 1$ , este operador es:

$$\Delta_x^2 = u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n.$$

El término  $(-1)^N$  en (4.39) garantiza que el término añadido es disipativo para el caso  $\epsilon > 0$ . Nuestro esquema queda entonces de la siguiente manera:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \Delta t S(u_m^n) - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} (-1)^N \Delta_x^{2N} (u_m^n). \quad (4.40)$$

Si asumimos por un momento que  $S(u_m^n) = 0$ , el esquema de diferencias finitas se vuelve

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} (-1)^N \Delta_x^{2N} (u_m^n). \quad (4.41)$$

Efectuando el análisis de estabilidad de Von Neumann se encuentra que este esquema es estable si se cumple:

$$0 \leq \epsilon \Delta t / \Delta x \leq 1/2^{2N-1}. \quad (4.42)$$

Si ahora tomamos  $\epsilon \Delta t / \Delta x = 1/2^{2N}$ , el factor disipativo se aproxima a una función escalón en el espacio de Fourier conforme se incrementa el valor de  $N$ . Esto significa que el esquema amortigua fuertemente los modos cuyas longitudes de onda son aproximadamente iguales al tamaño de la malla  $\Delta x$ , dejando las demás longitudes de onda sin afectar.

Volviendo al esquema completo se tiene que la estabilidad depende de la forma explícita del operador  $S$ , pero en general el término añadido sigue introduciendo disipación, mejorando la estabilidad del esquema original siempre que los valores de  $\epsilon$  sean pequeños y positivos. Si se quiere mejorar aun más la estabilidad debe añadirse tanta disipación como sea posible, sin volver el esquema inestable (tomar  $\epsilon$  muy grande) o sin estropear la precisión del esquema.

Para saber el efecto que provoca el uso de un término disipativo sobre la precisión del esquema numérico reescribimos (4.40) como

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = S(u_m^n) - \epsilon \frac{1}{\Delta x} (-1)^N \Delta_x^{2N} (u_m^n). \quad (4.43)$$

En el límite de  $\Delta t$  y  $\Delta x$  pequeños, esta ecuación puede ser reemplazada por

$$\partial_t u = S(u) - \epsilon (-1)^N (\Delta x)^{2N-1} \partial_x^{2N} u. \quad (4.44)$$

De donde se ve que hemos añadido un término nuevo a la ecuación diferencial original que desaparece en el límite continuo como  $(\Delta x)^{2N-1}$ . Dicho de otro modo, si el esquema numérico



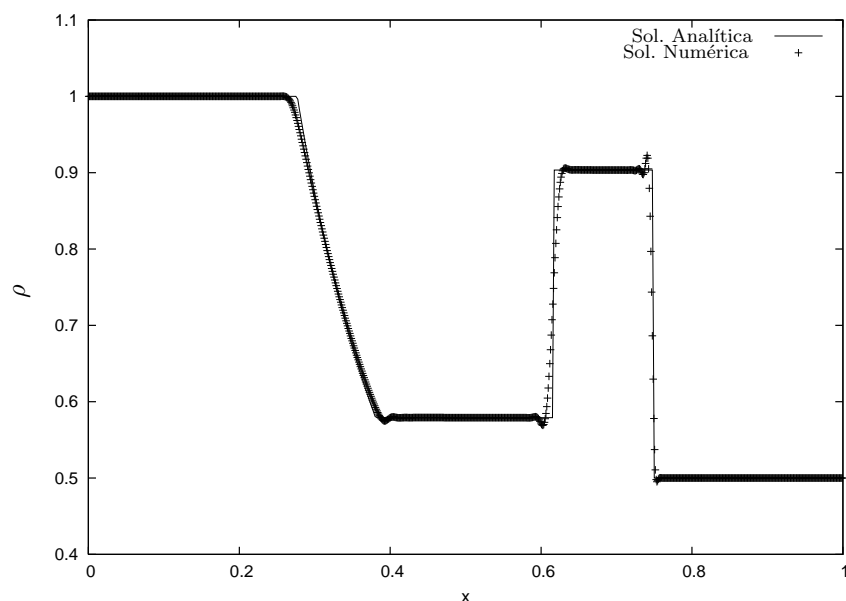


Figura 4.7: Solución analítica y numérica de la densidad utilizando viscosidad artificial. Las partes de la solución no presentan problemas, solo una pequeña perturbación en la onda de choque.

original tiene una precisión de orden  $m$ , se debe utilizar un término disipativo para el cual  $2N - 1 > m$ . Esto permite tener la certeza que no se estropeará la precisión del esquema numérico. Típicamente, el orden del término disipativo está dado por el orden de la derivada, es decir  $2N$ . Así que, puesto que nuestro esquema original es de segundo orden (tanto en el tubo de choques como en la evolución de la estrella TOV), necesitamos añadir disipación de cuarto orden ( $4 - 1 = 3 > 2$ ) para no alterar la precisión del método ICN. Como veremos más adelante, la disipación artificial será fundamental en la evolución de nuestra estrella TOV.

Las figuras 4.7, 4.8, 4.9 muestran la misma evolución numérica de las variables primitivas (densidad, presión y velocidad en orden) presentada anteriormente, sólo que en este caso las simulaciones se hacen utilizando viscosidad artificial. Nuevamente la línea sólida indica la solución analítica y la línea punteada la solución numérica.

Podemos observar que las diferentes partes de la solución coinciden razonablemente con la solución analítica. No se presentan problemas en la zona de la onda de rarefacción, una leve perturbación en la discontinuidad de contacto, así como también una leve perturbación en la onda de choque. Estas pequeñas perturbaciones obedecen al tipo de viscosidad artificial utilizado en este problema, pero de manera general podemos decir que hemos logrado contener la formación de perturbaciones debidas a las ondas de choque (hemos manejado los choques adecuadamente). Afirmamos por tanto que nuestro problema planteado aquí está resuelto de forma satisfactoria.

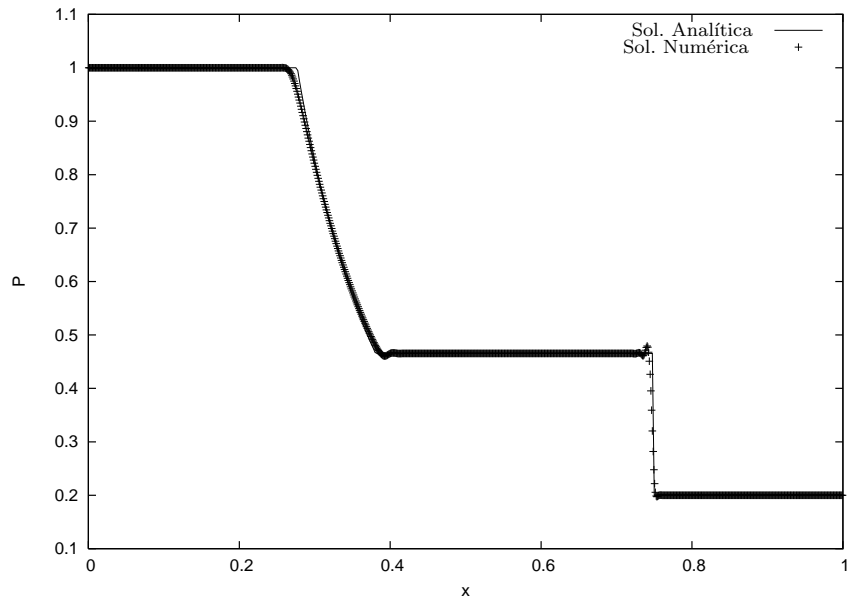


Figura 4.8: Solución analítica y numérica de la presión utilizando viscosidad artificial. Las partes de la solución no presentan problemas, solo una pequeña perturbación en la onda de choque.

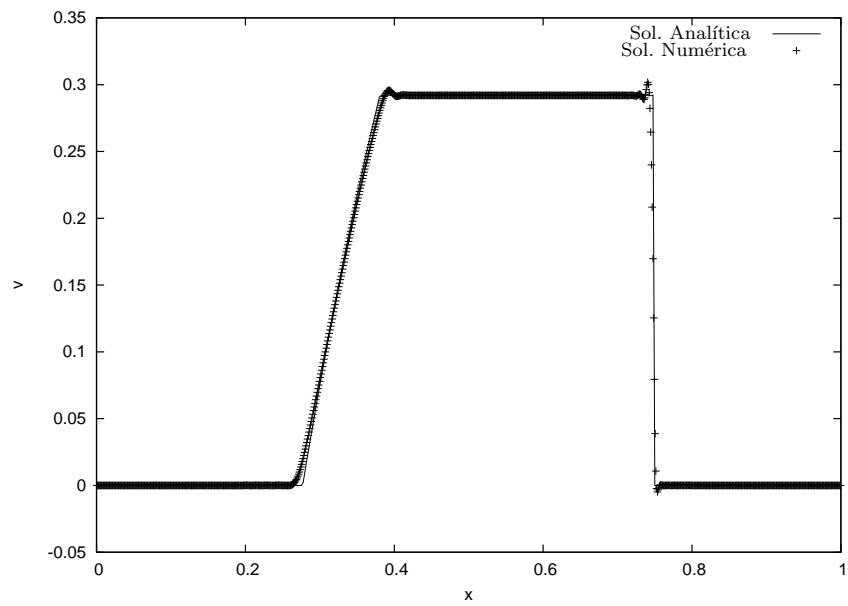


Figura 4.9: Solución analítica y numérica de la velocidad utilizando viscosidad artificial. Las partes de la solución no presentan problemas, solo unas perturbaciones mínimas en la onda de choque.

# Capítulo 5

## Simetría esférica

### 5.1. Soluciones esféricas de estrellas

Vamos a estudiar el comportamiento de campos gravitacionales intensos en el caso de sistemas que tienen simetría esférica. Estos son relativamente sencillos, pero no por eso dejan de ser importantes. De hecho existen muchos sistemas astrofísicos importantes en los cuales la simetría es prácticamente esférica. El desarrollo de las ecuaciones, está basado en [17] y [20].

#### 5.1.1. Coordenadas y métrica de un sistema esférico estático

Partimos entonces de modificar la métrica en relatividad especial en simetría esférica (que sea simetría esférica significa que cualquier proceso que se describa utilizando coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , puede describirse en su totalidad usando solo la coordenada  $r$ , dicho de otro modo, el fenómeno en cuestión solo depende de  $r$ ):

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (5.1)$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  es el elemento de ángulo sólido.

Una métrica más general es:

$$ds^2 = -g_{00}dt^2 + 2g_{0r}drdt + g_{rr}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (5.2)$$

con  $g_{00}$ ,  $g_{rr}$  y  $g_{0r}$  funciones de  $r$  y  $t$ .

La situación física más simple que podemos describir es el caso de una estrella estática. Antes de continuar, vamos a detenernos un poco en el significado de la palabra estática.

Definimos un espacio-tiempo estático como aquél en donde se puede encontrar un tiempo coordenado tal que:

- todos los componentes métricos son independientes de  $t$ , y
- la geometría no se altera cuando hacemos un cambio  $t \rightarrow -t$

Un espacio-tiempo con la propiedad 1, pero no necesariamente la 2 se dice que es estacionario.

De la condición 2 vemos que al hacer la transformación de coordenadas  $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (-t, r, \theta, \phi)$  tenemos que  $\Lambda_{\bar{0}}^{\bar{0}} = -1$ ,  $\Lambda_j^i = \delta_j^i$  y por tanto

$$g_{\bar{0}\bar{0}} = g_{00} , \quad (5.3)$$

$$g_{\bar{0}r} = -g_{0r} , \quad (5.4)$$

$$g_{\bar{r}\bar{r}} = g_{rr} . \quad (5.5)$$

Puesto que la geometría no debe cambiar ( $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ ), tenemos que  $g_{0r} = 0$ . Por tanto la métrica de un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático es:

$$ds^2 = -g_{00}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2 . \quad (5.6)$$

con  $g_{00}$  y  $g_{rr}$  funciones de  $r$  solamente.

Sin embargo, se acostumbra escribir esta métrica de una forma un poco diferente:

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2d\Omega^2 , \quad (5.7)$$

donde  $\Phi$  y  $\Lambda$  son funciones que dependen únicamente de  $r$ . Además se cumple que  $g_{00} < 0$  y  $g_{rr} > 0$  automáticamente.

En el caso particular de una estrella, tenemos que pedir que lejos el espacio-tiempo sea plano. Esto significa imponer la condición:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Lambda(r) = 0 . \quad (5.8)$$

### 5.1.2. Ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto estático

Empezamos por calcular las componentes distintas de cero del tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R . \quad (5.9)$$

.

En el caso de la métrica (5.7) obtenemos:

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2\Phi} \frac{d}{dr} [r (1 - e^{-2\Lambda})] , \quad (5.10)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \Phi , \quad (5.11)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\Lambda} \left[ \Phi'' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \Phi' \Lambda' - \frac{\Lambda'}{r} \right] , \quad (5.12)$$

$$G_{\phi\phi} = \text{sen}^2 \theta G_{\theta\theta} . \quad (5.13)$$

donde  $\Phi' = d/dr \Phi$ , etc.

Ahora vamos a calcular las componentes del tensor de energía momento. Para ello usamos un fluido tal que

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} , \quad (5.14)$$

donde nuevamente  $\rho = \rho_0(1 + \epsilon)$ .

Entonces, necesitamos conocer la 4-velocidad del fluido. Como estamos interesados en estrellas estáticas, la única componente que no es cero de  $\vec{u}$  es  $u^0$ . Utilizando la normalización de la 4-velocidad, tenemos

$$-1 = \vec{u} \cdot \vec{u} = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{00} u^0 u^0 = -e^{2\Phi} (u^0)^2$$

Por tanto,

$$u^0 = e^{-\Phi}, u_0 = -e^\Phi . \quad (5.15)$$

Las componentes del tensor de energía momento distintas de cero son entonces:

$$T_{00} = \rho e^{2\Phi} , \quad (5.16)$$

$$T_{rr} = p e^{2\Lambda} , \quad (5.17)$$

$$T_{\theta\theta} = r^2 p , \quad (5.18)$$

$$T_{\phi\phi} = \text{sen}^2 \theta T_{\theta\theta} . \quad (5.19)$$

La componente 00 de las ecuaciones de Einstein la obtenemos de (5.10) y (5.16), quedando:

$$\frac{d}{dr} [r (1 - e^{-2\Lambda})] = 4\pi r^2 \rho ,$$

Esta ecuación la podemos escribir de otra manera, si hacemos el cambio de variable

$$m(r) = \frac{1}{2}r (1 - e^{-2\Lambda}) ,$$

ó

$$g_{rr} = e^{-2\Lambda} = \frac{1}{1 - 2m(r)/r} .$$

Con este cambio la ecuación queda:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho . \quad (5.20)$$

Esto se puede integrar para obtener:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr + m(0) , \quad (5.21)$$

donde  $m(r)$  es la “función de masa”. El valor  $m(0) = 0$  es un valor para el cual la solución se comporta de manera suave en el origen, de otro modo, la solución presentaría una singularidad. Cabe aclarar que en el caso esféricamente simétrico,  $m(r)$  es la masa total  $M$  dentro de un radio  $r$  una vez alcanzado el vacío. Dentro de la esfera pierde todo significado físico (en relatividad general la energía total no está bien definida de punto a punto dentro de una estrella, sólo en este caso se puede escoger una distribución de la energía total físicamente razonable).

La componente  $rr$  la obtenemos a partir de (5.11) y (5.17), y queda como:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m(r)]} . \quad (5.22)$$

Finalmente, vamos a utilizar las ecuaciones de conservación de energía–momento  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ . Es importante señalar el hecho de que debido a la simetría sólo hay una componente no trivial en las ecuaciones de conservación, esta es ( $\mu = r$ ):

$$(\rho + p) \frac{d\Phi}{dr} = - \frac{dp}{dr} . \quad (5.23)$$

Como podemos ver, la estructura de la estrella está determinada completamente por las ecuaciones de Einstein y la ecuación de estado  $p = p(\rho_0)$ <sup>1</sup>.

Para finalizar esta sección, expondremos las razones por las cuales no hace falta incluir las otras componentes de las ecuaciones de Einstein. Observando detalladamente encontramos que en esencia, las ecuaciones (5.12), (5.13), (5.18), (5.19) son las mismas. Además, puede probarse que las ecuaciones obtenidas por las otras componentes son consecuencia de las anteriores.

---

<sup>1</sup>Recordemos que la densidad de energía en reposo la podemos relacionar con la energía interna en el caso de un proceso adiabático mediante la ecuación (2.31). Puesto que en este caso la relación politrópica es equivalente a la ecuación de estado del gas ideal, será la primera la que se utilice en los datos iniciales.

Escribimos las ecuaciones finales que describen el comportamiento de un fluido estático en relatividad general:

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{d\Phi}{dr}, \quad (5.24)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (5.25)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m]}. \quad (5.26)$$

A las ecuaciones (5.24)-(5.26) se les conoce como las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV), y fueron encontradas por primera vez por Tolman [25] e independientemente por Oppenheimer y Volkov [18] en 1939.

En el caso Newtoniano, tenemos que la densidad en reposo es mucho mayor que la presión y la energía interna; también  $\rho \gg p$ , por lo que  $m \gg 4\pi r^3 p$ . Además, la métrica debe ser localmente plana, por lo que el coeficiente métrico  $g_{rr}$  debe ser aproximadamente 1. Esto significa que  $r \gg m$ . Con estas simplificaciones observamos que, la ecuación (5.24) se reduce a:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho_0 \frac{d\Phi}{dr}. \quad (5.27)$$

La ecuación (5.25) se queda idéntica al caso relativista. Mientras que (5.26) se convierte en

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m}{r^2}, \quad (5.28)$$

con  $\Phi$  el potencial Newtoniano.

### 5.1.3. Solución interior de la estrella

Dentro de la estrella tenemos que la presión y la densidad toman valores distintos de cero, de esta manera podemos dividir la ecuación (5.23) por  $(\rho + p)$  y sustituir el valor de  $d\Phi/dr$  en la ecuación (5.22), al hacer esto obtenemos una nueva ecuación en la cual ya no tenemos el término  $d\Phi/dr$ . Esta ecuación toma la forma:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r[r - 2m]}. \quad (5.29)$$

En la práctica, se acostumbra trabajar con las ecuaciones (5.29), (5.25), (5.26) y la relación politrópica (2.29) para las estrellas estáticas. Una vez resueltas estas ecuaciones, sustituimos el valor de  $dp/dr$  en la ecuación (5.23) y resolvemos esta. En la sección 6.1 daremos una visión general de como se resuelven estas ecuaciones numéricamente.

En el caso Newtoniano, la ecuación 5.29 se reduce a:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho_0 m}{r^2} \quad (5.30)$$

La expresión relativista para el gradiente de la presión es mucho mayor que en el caso Newtoniano. Esto se debe a las correcciones hechas en el caso relativista. Por tanto, si un fluido permanece estático, las fuerzas internas debidas a la relatividad general son mucho más intensas que aquellas dadas por la gravedad Newtoniana.

#### 5.1.4. La solución exterior

En la región fuera de la estrella, tenemos que la presión y la densidad se vuelven cero, las ecuaciones (5.20) y (5.22) son ahora:

$$\frac{dm}{dr} = 0, \quad (5.31)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m}{r(r-2m)}, \quad (5.32)$$

cuyas soluciones son

$$m(r) = M = \text{constante}, \quad r > R; \quad (5.33)$$

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad r > R. \quad (5.34)$$

con  $R$  el radio de la estrella,  $m(R) = M$  la masa total de la estrella y donde hemos aplicado la condición  $\Phi \rightarrow 0$  si  $r \rightarrow \infty$ .

Según los resultados anteriores, la métrica en el exterior de la estrella es:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (5.35)$$

que es precisamente la solución de Schwarzschild.

Puesto que el comportamiento de las variables es continuo en la superficie de la estrella, la solución interior y la exterior se empalman en la frontera. Por tanto, fuera de la estrella, la solución del campo gravitacional está dada por la métrica de Schwarzschild para un objeto de masa  $m(R) = M$ .



## 5.2. Formalismo 3+1 en simetría esférica

La métrica espacial de un espacio-tiempo esféricamente simétrico puede ser escrita en general de la siguiente manera:

$$dl^2 = A(r, t)dr^2 + r^2B(r, t)d\Omega^2 ,$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones positivas y  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2$  es el elemento de ángulo sólido. La factorización del término  $r^2$  de la métrica angular es sólo para facilitar la regularización de las ecuaciones cerca del origen.

En forma matricial tenemos:

$$\gamma_{ab} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & r^2B & 0 \\ 0 & 0 & r^2B \sin^2(\theta) \end{bmatrix} .$$

Puesto que nos interesa escribir las ecuaciones de Einstein como un sistema de ecuaciones a primer orden, necesitamos introducir algunas variables auxiliares. Definimos entonces:

$$D_A := \partial_r \ln A , \quad D_B := \partial_r \ln B .$$

$$K_A := K_r^r , \quad K_B := K_\theta^\theta = K_\phi^\phi . \quad (5.36)$$

Las ecuaciones ADM escritas en simetría esférica son entonces<sup>2</sup>:

$$\partial_t A = -2\alpha A K_A , \quad (5.37)$$

$$\partial_t B = -2\alpha B K_B , \quad (5.38)$$

$$\partial_t D_A = -2\alpha [K_A D_\alpha + \partial_r K_A] , \quad (5.39)$$

$$\partial_t D_B = -2\alpha [K_B D_\alpha + \partial_r K_B] , \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_A = & -\frac{\alpha}{A} \left[ \partial_r (D_\alpha + D_B) + D_\alpha^2 - \frac{D_\alpha D_A}{2} + \frac{D_B^2}{2} - \frac{D_A D_B}{2} \right. \\ & \left. - AK_A (K_A + 2K_B) - \frac{1}{r} (D_A - 2D_B) \right] + 4\pi\alpha M_A , \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = & -\frac{\alpha}{2A} \left[ \partial_r D_B + D_\alpha D_B + D_B^2 - \frac{D_A D_B}{2} - \frac{1}{r} (D_A - 2D_\alpha - 4D_B) \right. \\ & \left. - \frac{2(A-B)}{r^2 B} \right] + \alpha K_B (K_A + 2K_B) + 4\pi\alpha M_B , \end{aligned} \quad (5.42)$$

---

<sup>2</sup>Las ecuaciones presentadas aquí, fueron escritas por primera vez por M. Alcubierre y J. A. Gonzáles en [3].

donde introducimos la variable auxiliar  $D_\alpha := \partial_r \ln \alpha$ , y además los términos de materia incluidos son  $M_A$  y  $M_B$ , donde

$$M_A = 2S_B - S_A - \rho_{ADM}, \quad M_B = S_A - \rho_{ADM}, \quad (5.43)$$

con  $\rho_{ADM}$  la densidad de energía,  $S_{ADM}^{ij}$  el tensor de esfuerzos, y donde definimos  $S_A := S_r^r$  y  $S_B := S_\theta^\theta$ .

Las constricciones Hamiltoniana y de momento son respectivamente:

$$\begin{aligned} H &= -\partial_r D_B + \frac{1}{r^2 B} (A - B) + AK_B(2K_A + K_B) \\ &+ \frac{1}{r} (D_A - 3D_B) + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4} + 8\pi A \rho_{ADM} = 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$M = -\partial_r K_B + (K_A - K_B) \left[ \frac{1}{r} + \frac{D_B}{2} \right] - 4\pi j_A = 0, \quad (5.45)$$

en donde  $j_A^{ADM} := j_r$  es la densidad de momento en la dirección radial.

Es importante hacer una mención importante acerca de las ecuaciones que acabamos de escribir. Podemos notar que existen algunos términos que se vuelven singulares al ser evaluados en el origen ( $r = 0$ ). Para evitar que dichas singularidades afecten nuestras ecuaciones, tenemos que fijar condiciones de regularidad de todas nuestras variables dinámicas (esto implica fijar también las variables hidrodinámicas). Como debemos exigir que nuestras variables estén bien definidas en el origen, debemos imponer las condiciones siguientes en el comportamiento de las variables para  $r$  pequeña:

$$A \sim A^0 + \vartheta(r^2), \quad B \sim B^0 + \vartheta(r^2),$$

$$D_A \sim \vartheta(r), \quad D_B \sim \vartheta(r)$$

$$K_A \sim K_A^0 + \vartheta(r^2), \quad K_B \sim K_B^0 + \vartheta(r^2),$$

con  $A^0, B^0, K_A^0, K_B^0$  funciones del tiempo pero no de  $r$ .

Las condiciones de simetría anteriores pueden imponerse fácilmente en una simulación numérica. La manera de hacerlo es utilizando una malla que salta sobre el origen, es decir, utilizar una malla que empiece en  $r = \Delta r/2$  y obteniendo datos en un punto ficticio de frontera en  $r = -\Delta r/2$ , pidiendo que  $\alpha, A, B, K_A, K_B$  sean funciones pares en  $r = 0$  y que  $D_A, D_B$  sean impares. Puesto que estas últimas son proporcionales a  $r$  cerca del origen, términos del tipo  $D_{A,B}/r$  son regulares.

Debemos señalar que existe otro problema de regularidad en nuestras ecuaciones. Este se encuentra tanto en la restricción hamiltoniana como en la ecuación de evolución para  $K_B$ , donde

existe un término de la forma  $(A - B)/r^2$ , mientras que en el caso de la constricción de momento el término es del tipo  $(K_A - K_B)/r$ . Para evitar que estos términos se vuelvan singulares cerca de  $r = 0$  debemos pedir condiciones extra de regularidad. Estas condiciones vienen dadas por:

$$A - B \sim \vartheta(r^2), \quad K_A - K_B \sim \vartheta(r^2),$$

es decir,  $A^0 = B^0, K_A^0 = K_B^0$ . Estas condiciones aparecen cerca del origen como consecuencia de que el espacio-tiempo debe ser localmente plano en  $r = 0$ . Es decir, debemos poder escribir la métrica de la siguiente forma:

$$dl_{R \sim 0}^2 = dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2), \quad (5.46)$$

con  $R$  la coordenada radial propia que mide la distancia desde el origen. Haciendo una transformación local de coordenadas de  $R$  a  $r$ , la métrica toma la forma:

$$dl_{r \sim 0}^2 = \left( \frac{dR}{dr} \right)_{r=0}^2 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2)], \quad (5.47)$$

lo cual implica que  $A^0 = B^0$ . Y como esto debe valer para todo tiempo, entonces también se debe tener  $K_A^0 = K_B^0$ .

El tratar de imponer todas estas condiciones numericamente no es sencillo, el sistema está sobredeterminado debido a la existencia de más condiciones de regularidad que variables. Analíticamente, si las condiciones se satisfacen inicialmente, se mantendrán así en todo tiempo. Numéricamente esto ya no es así, debido a los errores introducidos en las aproximaciones por diferencias finitas de las ecuaciones, por lo que se puede esperar que aunque inicialmente una condición se satisfaga, aún en un paso de tiempo pequeño los errores crezcan y el código falle.

Para resolver este problema se introduce una variable auxiliar  $\lambda$  (ver [3] por ejemplo) que definimos como:

$$\lambda := \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{A}{B} \right). \quad (5.48)$$

El que el espacio sea localmente plano, implica que cerca del origen  $\lambda \sim \vartheta(r)$ , es decir, pedimos que  $\lambda$  sea impar cerca del origen.

En términos de  $\lambda$ , la ecuación de evolución para  $K_B$  queda

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = & -\frac{\alpha}{2A} \left[ \partial_r D_B + D_\alpha D_B + D_B^2 - \frac{D_A D_B}{2} - \frac{1}{r} (D_A - 2D_\alpha - 4D_B) + \frac{2\lambda}{r} \right] \\ & + \alpha K_B (K_A + 2K_B) + 4\pi\alpha M_B, \end{aligned} \quad (5.49)$$

mientras que la constricción hamiltoniana queda

$$\begin{aligned}
H = & -\partial_r D_B - \frac{\lambda}{r} + AK_B(2K_A + K_B) \\
& + \frac{1}{r}(D_A - 3D_B) + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4} + 8\pi A\rho_{ADM},
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Observamos que los términos problemáticos ahora van como  $\lambda/r$  por lo que son completamente regulares en el origen, debido a que  $\lambda$  es impar en el origen. Ahora es necesario dar una ecuación de evolución para  $\lambda$ , a fin de no sobreespecificar el problema. Esta ecuación puede obtenerse directamente de la definición de  $\lambda$ .

$$\partial_t \lambda = \frac{2\alpha A}{B} \left( \frac{K_A - K_B}{r} \right). \tag{5.51}$$

Aparentemente tenemos problemas en el término donde aparece  $r$  en el denominador. Sin embargo, utilizando la constricción de momentos podemos eliminar este problema, quedando la ecuación anterior:

$$\partial_t \lambda = \frac{2\alpha A}{B} \left[ \partial_r K_B - \frac{D_B}{2}(K_A - K_B) + 4\pi j_A \right]. \tag{5.52}$$

De esta manera tenemos un sistema de ecuaciones regularizado.

Además del problema anterior, tenemos también el problema de la hiperbolicidad, pues hemos señalado con anterioridad que las ecuaciones ADM en simetría esférica no son fuertemente hiperbólicas. Sin embargo, se puede construir un sistema fuertemente hiperbólico utilizando las constricciones. Este es el sistema que vamos a utilizar en nuestras evoluciones, aunque la deducción de tales condiciones es un poco larga y nos desvía del tema principal a tratar. Para una revisión detallada, se puede consultar [2] nuevamente.

### 5.3. Hidrodinámica relativista en simetría esférica

Para realizar la evolución de nuestra estrella TOV, vamos a hacer uso de la formulación 3+1 de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista (sección 3.3). En este caso, el sistema tiene simetría esférica, por lo que debemos escribir dichas ecuaciones con tal simetría.

Vamos a utilizar la métrica espacial del sistema con simetría esférica dada en la sección anterior. Los símbolos de Christoffel distintos de cero correspondientes a dicha métrica son:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \frac{\partial_r A}{A}, \quad (5.53)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} \frac{2B + r\partial_r B}{rB}, \quad (5.54)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{2} \frac{2B + r\partial_r B}{rB}, \quad (5.55)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} \frac{r(2B + r\partial_r B)}{A}, \quad (5.56)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad (5.57)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{1}{2} \frac{r \sin^2(\theta) (2B + r\partial_r B)}{A}, \quad (5.58)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta. \quad (5.59)$$

El tensor de curvatura extrínseca se puede escribir de la siguiente manera

$$K_{ab} = \begin{bmatrix} K_A & 0 & 0 \\ 0 & r^2 K_B & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K_B \sin^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Definimos el vector de corrimiento:  $\beta^i = (\beta, 0, 0)$ , el vector de momento (con el índice abajo):  $S_i = (S_r, 0, 0)$  y el vector velocidad:  $v_i = (v, 0, 0)$ <sup>3</sup>.

Utilizando esto, la ecuación (3.58) escrita en simetría esférica es:

$$\partial_t D = (-\alpha v + \beta) \partial_r D - \alpha D \partial_r v - \left\{ \left[ D_\alpha + \frac{2\alpha}{r} + \frac{\alpha u}{2} - 2\alpha D_B \right] v - \alpha r K \right\} D, \quad (5.60)$$

donde  $u = D_A - 2D_B$ .

De la misma manera, recordando que  $\mathcal{L}_{\vec{v}} u_\alpha = v^\beta \partial_\beta u_\alpha + u_\beta \partial_\alpha v^\beta$ , la ecuación (3.57) queda:

$$\begin{aligned} \partial_t S_r &= (-\alpha v + \beta) \partial_r S_r + S_r \partial_r \beta - \alpha S_r \partial_r v - \alpha \partial_r p \\ &- \left[ \left( \frac{2\alpha}{r} + \alpha D_B + D_\alpha \right) v + \alpha r K \right] S_r - (p + D + E) D_\alpha. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Finalmente, la ecuación (3.55) queda:

---

<sup>3</sup>En el caso de simetría esférica, los vectores de momento, corrimiento y 3-velocidad solo poseen la entrada correspondiente a la coordenada radial, por lo que los valores para las coordenada  $\theta$  y  $\phi$  son cero. En este sentido y tratando de evitar confusiones por cuestiones de subíndices, salvo en el caso del vector de momento, denotamos las componentes sin índice alguno

$$\begin{aligned}
\partial_t E = & (-\alpha v + \beta) \partial_r E - \alpha v \partial_r p - \alpha(p + E) \partial_r v + \alpha A v^2 (p + D + E) (tr K - 2K_B) \\
& - \left\{ \left[ \left( \frac{2}{r} - \frac{u}{r} + 2D_B \right) \alpha + 2D_\alpha \right] E - \left( \frac{pu}{2} + 2pD_B + \frac{2p}{r} \right) \alpha - (D - 2p) D_\alpha \right\} v \quad (5.62) \\
& - \alpha tr K (E + p) .
\end{aligned}$$

## 5.4. El código numérico OLLINSPHERE

La evolución numérica del conjunto de las ecuaciones ADM, junto con las ecuaciones de constricción, ambas desarrolladas en la sección 5.2, son realizadas utilizando el código numérico “OLLINSPHERE”. Este fue escrito precisamente para resolver las ecuaciones de Einstein en simetría esférica. El código fue desarrollado originalmente por M. Alcubierre y J. A. González (ver [3]).

OLLINSPHERE está escrito en el lenguaje de programación FORTRAN 90 y se divide en una serie de subrutinas las cuales pueden ser modificadas.

En cuanto al espacio-tiempo, es posible adaptar diferentes condiciones de norma (lapso maximal, 1+log, etc.), así como también distintos tipos del vector de corrimiento. Del mismo modo, es posible escoger diversos tipos de materia. Es en este apartado donde hemos introducido las ecuaciones de la hidrodinámica relativista en simetría esférica desarrolladas en la sección 5.3. En la sección 6.1 describiremos la implementación de la rutina para calcular datos iniciales en el caso de la estrella TOV.

El código numérico resuelve las ecuaciones ADM utilizando diferencias finitas centradas, es decir, a segundo orden, en el espacio. Para la evolución numérica se utiliza el método ICN descrito en la sección 4.3, aunque también está disponible el método RK4. La regularización de las ecuaciones ADM, así como su hiperbolicidad se realizan según el procedimiento descrito en la sección 5.2.

Las variables principales que utiliza el código son:

1. Parte geométrica.  $\alpha$ ,  $\beta^i$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $K_A$  y  $K_B$ .
2. Parte hidrodinámica.  $\rho$ ,  $p$ ,  $v$ ,  $D$ ,  $\mathcal{E}$  y  $S_i$ .

Una vez introducidos los datos iniciales para las variables, tanto geométricas como de materia, el código calcula las fuentes de las ecuaciones de evolución, así como los términos de materia, el algoritmo para la obtención de las variables primitivas, etc. Luego avanza en un paso de tiempo, y así para cada paso de tiempo. Al final las variables calculadas se guardan en un archivo de datos y están listas para graficarse.

# Capítulo 6

## Estrellas TOV

### 6.1. Construyendo los datos iniciales

En el caso de la estrella TOV, como ya vimos anteriormente, las ecuaciones de Einstein se reducen a las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r[r - 2m]}, \quad (6.1)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (6.2)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m]}. \quad (6.3)$$

Las ecuaciones (6.1) y (6.2), junto con la ecuación de estado, nos dan básicamente la estructura de nuestra estrella. Sin embargo, a estas tenemos que añadirles la ecuación (6.3) y el coeficiente métrico  $A$  para determinar por completo la métrica del espacio-tiempo<sup>1</sup>. Como ya lo hemos señalado anteriormente, en las ecuaciones TOV  $\rho = \rho_0(1 + \epsilon)$ .

Para resolver las primeras dos ecuaciones es importante notar que, puesto que son ecuaciones diferenciales de primer orden, necesitamos conocer dos constantes de integración. Dicho de otro modo, para poder comenzar la integración de estas ecuaciones es necesario conocer dos condiciones iniciales, una para la  $m$  y otra para la  $p$  (esta última también podemos interpretarla como una condición sobre  $\rho_0$ , ya que gracias a la relación politrópica tenemos una manera de relacionar ambas).

Comenzamos definiendo la ecuación de estado y el valor para la presión en el centro de la estrella,  $p_c = p(r = 0)$  ( $\rho_c = \rho_0(r = 0)$ ). También introducimos el valor de la masa en el centro de la estrella,  $m_c = m(r = 0) = 0$ . Finalmente, escogemos un valor arbitrario para  $\Phi(r = 0) = \Phi_0$ ,

---

<sup>1</sup>Como vimos en el capítulo anterior, el valor del coeficiente métrico es  $A(r) = (1 - 2m/r)^{-1}$ .

puesto que (6.3) es lineal en  $\Phi$ , podemos sumar una constante arbitraria, por lo que usando el valor conocido para  $\Phi$  en  $r = R$ , encontramos la solución deseada<sup>2</sup>.

La ecuación (6.1) garantiza que la presión decrece monótonamente mientras  $r > 2m(r)$ . Además,  $p(r)$  debe ser continua en cualquier lugar dentro de la estrella, de otro modo existirían gradientes infinitos de presión y fuerzas infinitas en los elementos del fluido. Esto, junto con el hecho de que en el exterior de la estrella (vacío)  $p = 0$ , nos lleva a concluir que el punto en donde  $p(r) = 0$  corresponde a la superficie de la estrella, por lo que el valor de  $r$  ahí es el radio de la estrella  $R$  y el valor de  $m$  es la masa total de la estrella  $M$ .

Para encontrar numéricamente los datos iniciales de la estrella TOV, vamos a resolver las ecuaciones (6.1), (6.2) y (6.3) usando el método de Runge-Kutta de 4to. orden (RK4), además de la ecuación de estado (2.29)<sup>3</sup>. Debemos señalar aquí el hecho de que la superficie de la estrella no se encuentra en el lugar donde  $\rho = 0$  en el código numérico, sino que se introduce un valor pequeño para la densidad denominado usualmente “atmósfera” ( $\rho_{min}$ ), y es precisamente cuando la densidad toma dicho valor, que se ha alcanzado la superficie de la estrella. Una vez fuera de la estrella, los valores de la densidad para cualquier punto se igualan con la atmósfera. El porqué de la adición de esta “atmósfera” se aclarará un poco más adelante en la sección 6.2.

Otra cuestión importante a considerar aquí es que, puesto que la malla numérica en el código es tal que salta el origen no es posible tomar la condición  $\rho_c = \rho(r = 0)$ . Por tanto, el primer punto sobre el que estamos integrando las ecuaciones TOV no sería el centro de la estrella (recordemos que el primer punto en la malla numérica es  $\Delta r/2$ ). Esto tiene como consecuencia que la solución encontrada no corresponde a la estrella con densidad  $\rho_c$  dada inicialmente, sino a una solución ligeramente distinta.

Una manera de corregir esto es hacer una aproximación en serie de Taylor para la densidad y la masa cerca del origen. Recordando que en  $r = 0$ ,  $\rho_0 = \rho_c$ , la masa cerca del origen queda:  $m \sim c_m r^3$ , con  $c_m$  una constante. Sustituyendo en la ecuación de la masa (6.2), tenemos:

$$c_m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c (1 + \epsilon) ,$$

y con esto encontramos finalmente

$$m \sim \frac{4}{3} \pi r^3 \left( \rho_c + \frac{K \rho_c^\gamma}{\gamma - 1} \right) , \quad (6.4)$$

---

<sup>2</sup>Hay que recordar que las ecuaciones 6.1 y 6.2 no dependen de  $\Phi$ ; estas ecuaciones son suficientes para encontrar el radio de la estrella  $R$ , y la masa total de la estrella  $M$ . Por tanto, obtenemos el valor de  $\Phi$  en  $R$  empalmado con la solución de Schwarzschild:  $\Phi(r = R) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)$ .

<sup>3</sup>En el código utilizado en realidad se resuelve la ecuación (6.1) para la densidad. Usando la ecuación de estado politrópica esta ecuación queda como:  $\frac{d\rho}{dr} = - \left[ \frac{\rho^{2-\gamma}}{K} + \frac{\gamma\rho}{1-\gamma} \right] \left( \frac{m}{r^2} + 4\pi K \rho^\gamma r \right) / [\gamma(1 - 2m/r)]$ . Además la ecuación (6.3) se resuelve para la función de lapso  $\alpha$  y no para  $\Phi$ . No es difícil mostrar que la relación entre estas dos variables es:  $\Phi = \ln \alpha$ , por lo que, en el lado derecho de la ecuación (6.3) hacemos la sustitución  $\frac{d\Phi}{dr} = \frac{d}{dr}(\ln \alpha)$  o, lo que es lo mismo  $\frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr}$ . De esta manera la ecuación queda en términos de  $\alpha$ .



donde hemos hecho uso de la relación politrópica para expresar el resultado solo en términos de  $\rho_0$ .

Análogamente, la aproximación de la densidad cerca del origen es:  $\rho_0 \sim \rho_c + c_{\rho_0} r^2$ , con  $c_{\rho_0}$  una constante. Además, cerca del origen la ecuación (6.1) para  $\rho_0$  la podemos expresar como:  $d_r \rho_0 \sim -r S_{\rho_0}$ . Sustituyendo la aproximación para  $\rho_0$  en la derivada encontramos:  $c_{\rho_0} \sim -S_{\rho_0}/2$ . De este modo,  $\rho_0 \sim \rho_c - (r^2/2) S_{\rho_0}$ . Si ahora tomamos  $S_{\rho_0}$  como el límite de la parte derecha de la ecuación original para  $\rho_0$  dividida por  $r$ , obtenemos finalmente:

$$\rho_0 \sim \rho_c - \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\rho_c^{2-\gamma}}{K} + \frac{\gamma \rho_c}{1-\gamma} \right] \left( \frac{m}{r^3} + 4\pi K \rho_c^\gamma \right) / \gamma. \quad (6.5)$$

Este procedimiento implica que cerca del origen el uso de un método a segundo orden para resolver las ecuaciones TOV es inadecuado. La razón de esto se puede entender porque cerca del origen  $m \sim r^3$ , y en este caso  $\Delta r \sim r$ . Por tanto, la cantidad que deseamos calcular va como  $(\Delta r)^3$ , es decir los errores introducidos por el método de segundo orden son mayores que las cantidades a calcular. Es por esta razón que el método empleado debe ser a 4to. orden.

El valor de la densidad en el centro de la estrella se determina de acuerdo a las siguientes consideraciones: A cada valor de la densidad central  $\rho_c$  corresponde un valor de la masa total  $M$ . A medida que incrementamos el valor de  $\rho_c$  podemos observar que la masa  $M$  alcanza un valor máximo  $M_{max}$  para un valor específico de la densidad, llamada densidad crítica  $\rho_c^{crit}$ . Para valores mayores a la densidad crítica la masa  $M$  disminuye de nuevo. Este es un resultado bien conocido (ver [21]). Las estrellas para las cuales  $\rho_c < \rho_c^{crit}$  son dinámicamente estables, mientras que aquellas para las cuales  $\rho_c > \rho_c^{crit}$  son inestables y pueden llegar a colapsar en un agujero negro.

La figura 6.1 representa la relación entre la densidad central y la masa de la estrella. Los valores para las constantes en la ecuación de estado politrópica deben ser tales que representen un gas de neutrones completamente degenerados no relativistas<sup>4</sup>. De acuerdo con esto, los valores de las constantes son:  $K = 4,349$  y  $\gamma = 5/3$ .

De acuerdo a la convención de unidades utilizadas en este trabajo, observamos que el valor máximo para la densidad se alcanza en el punto  $\rho_c^{crit} = 0,0064 (3,874 \times 10^{15} \frac{g}{cm^3})$ , que corresponde a una masa total  $M_{max} \approx 0,7962 M_\odot$ <sup>5</sup>. Estos datos son completamente compatibles con una estrella de neutrones (ver [21]) y son muy similares a los reportados en [5]. Según lo dicho

<sup>4</sup>Como primera aproximación en la estructura de una estrella de neutrones se asume que el gas no degenerado consiste de partículas que no interactúan entre ellas. Se considera por tanto que la estructura de la estrella está basada completamente en una ecuación de estado de un gas ideal de neutrones. En la sección 2.3 de [22] se deduce la ecuación de estado de un gas ideal de Fermi completamente no degenerado, esto lleva a expresar la ecuación de estado como una ecuación politrópica. Obteniendo al final los valores de las constantes  $K$  y  $\gamma$ , en el caso de neutrones no relativistas, presentadas aquí.

<sup>5</sup> Siguiendo la convención de unidades establecida en este trabajo obtenemos:  $10^5 g/cm^3 \approx 0,00162, 10^3 s \approx 202,9$  y  $1 km \approx 0,6769$ . De acuerdo a esto, el valor correspondiente a  $K$ , en unidades *cgs*, es de  $K = 5,38 \times 10^9 \frac{cm^4}{g^{2/3} s^2}$ .

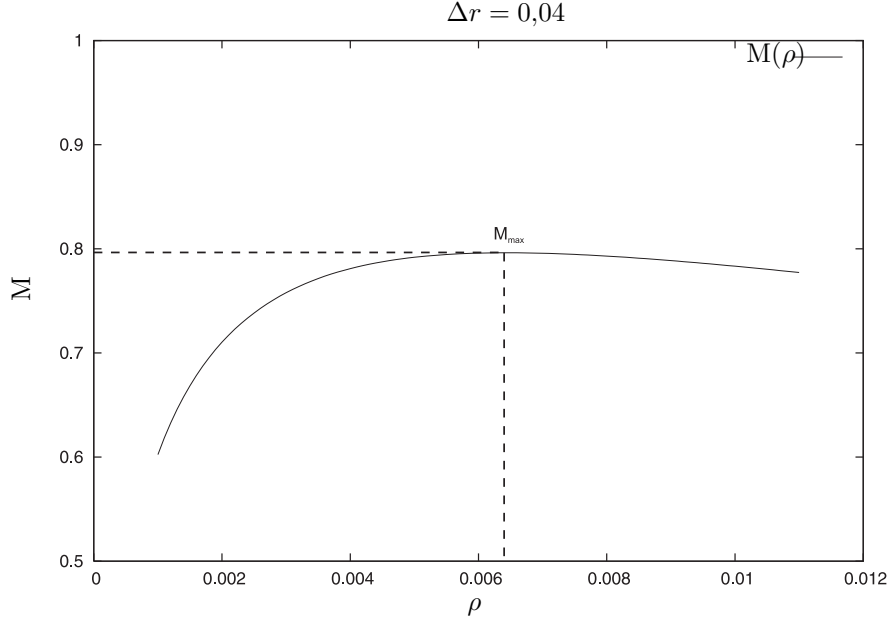


Figura 6.1: La masa como función de la densidad para el caso  $K = 4,349$  y  $\gamma = 5/3$ . El máximo valor  $M_{max} \approx 0,7962 M_{\odot}$  se obtiene para una densidad  $\rho_c^{crit} = 6,4 \times 10^{-3}$ . Valores a la izquierda de  $\rho_c^{crit}$  se encuentra en la rama estable, mientras que en el caso contrario pertenecen a la rama inestable.

anteriormente, los valores de la densidad en el lado izquierdo corresponden a estrellas estables y es este lado de la gráfica el que utilizaremos para nuestras evoluciones numéricas.

Vamos a construir nuestros datos iniciales. Utilizamos una densidad central  $\rho_c = 1,88 \times 10^{-3}$ , la cual se encuentra en la rama estable. Las demás cantidades utilizadas para resolver las ecuaciones TOV son las señaladas arriba:  $K = 4,349$  y  $\gamma = 5/3$ <sup>6</sup>. El valor inicial de la velocidad se toma igual a cero ( $v = 0$ ) sobre toda la malla, es decir, tanto en la región interior de la estrella como en la región exterior, esto es debido a que la solución es estática. La resolución que utilizamos en este caso corresponde a un intervalo espacial  $\Delta r = 0,04$  y el número total de puntos en la malla  $N_r = 400$ . Con estos datos encontramos que la masa total de la estrella es  $M = 0,7017$  y el radio  $R = 8,267$ . El valor utilizado para la densidad mínima es:  $\rho_{min} = 1,0 \times 10^{-8}$ .

Las figuras 6.2, 6.3, 6.4 y 6.5 muestran los datos iniciales para la densidad  $\rho$ , la función de masa  $m$ , el coeficiente métrico  $A$  y la función de lapso  $\alpha$  respectivamente. Observamos que, efectivamente, la densidad decrece monótonamente hasta alcanzar el valor de la densidad mínima. Por su parte la función de masa crece monótonamente y en la superficie de la estrella toma el valor  $M$ . Las cuatro cantidades se comportan de manera suave a lo largo de toda la malla y en la superficie el coeficiente métrico y la función de lapso se conectan de la forma deseada, continuando con el perfil suave.

Recordando que en las ecuaciones del formalismo 3+1, ecs. (5.37)–(5.42), las variables que in-

<sup>6</sup>Valores muy similares son utilizados también en [12].

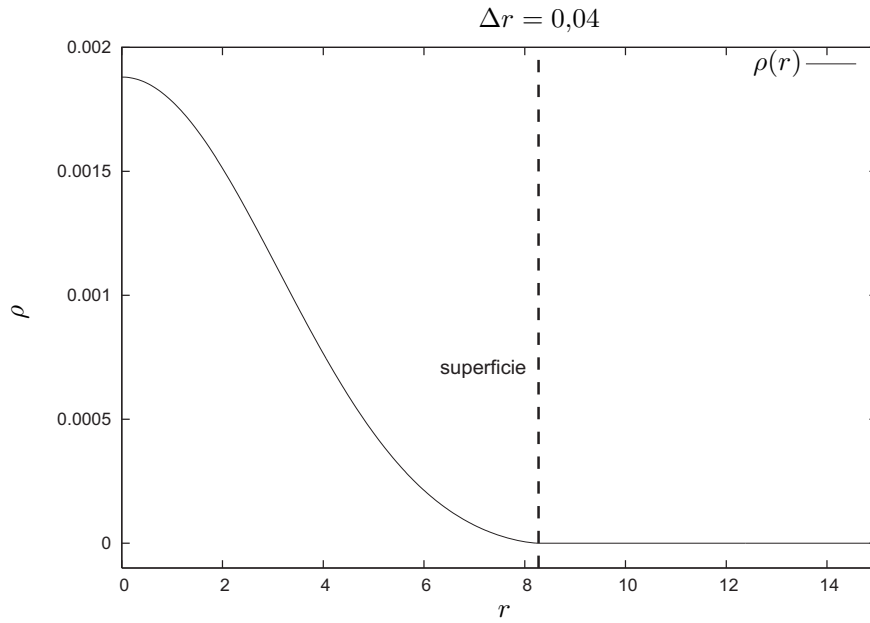


Figura 6.2: Datos iniciales para la densidad obtenidos al resolver las ecuaciones TOV, el valor de la densidad central es  $\rho_c = 1,88 \times 10^{-3}$ , el cual se encuentra en la rama estable. Observamos como la densidad decrece monótonamente y, en la superficie de la estrella ( $R = 8,267$ ), ajustamos el valor de la densidad al de la densidad mínima.

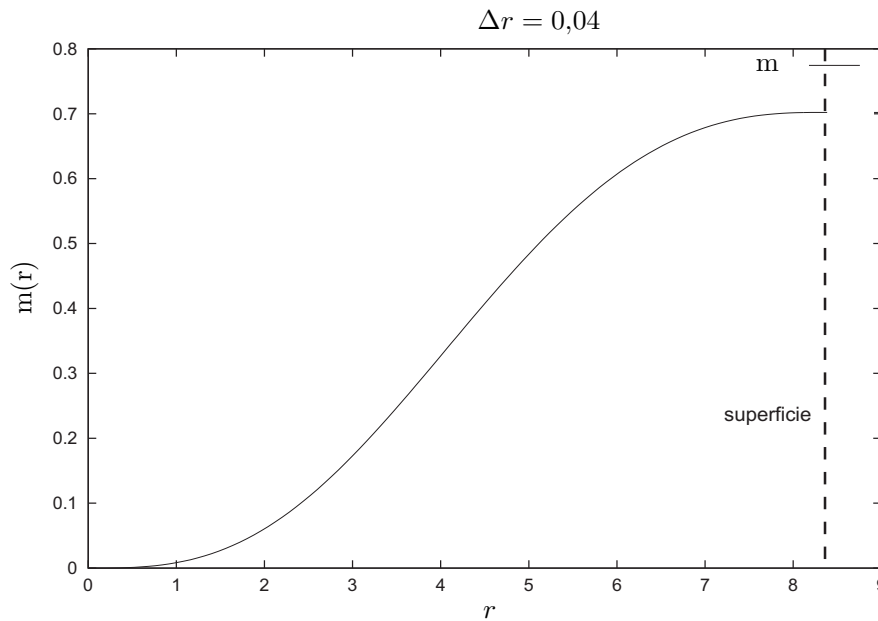


Figura 6.3: La función de masa calculada a partir de las ecuaciones TOV. El comportamiento es monótonamente creciente y en la superficie alcanza el valor de la masa total de la estrella  $M$ .

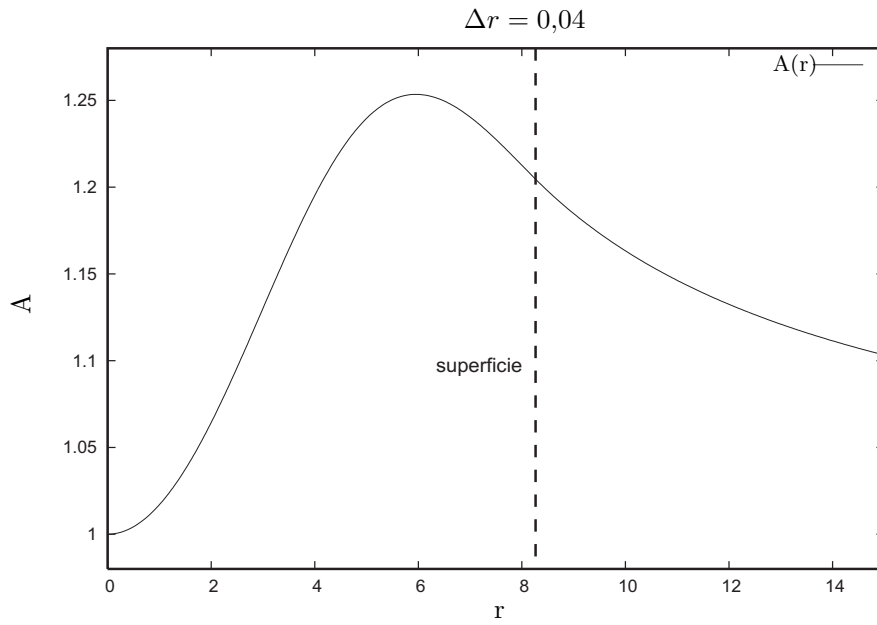


Figura 6.4: Datos iniciales correspondientes al coeficiente métrico  $A$ . Los valores utilizados son exactamente los mismos que en el caso de la densidad. Fuera de la superficie de la esfera, el coeficiente métrico  $A$  es el mismo que en el caso de Schwarzschild.

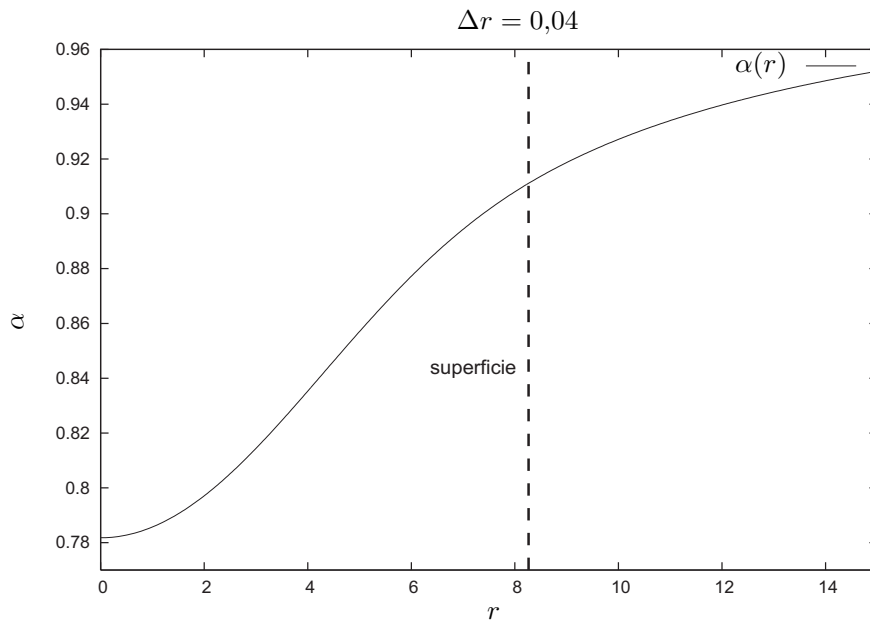


Figura 6.5: Datos iniciales para la función de lapso  $\alpha$ . En la región exterior, la función de lapso coincide con la de Schwarzschild.

tervienen en las fuentes son las variables ADM y no las variables dinámicas, debemos encontrar datos iniciales para las variables ADM. Esto lo hacemos utilizando las ecuaciones (3.49), por lo que en este caso, obtenemos:

$$\rho^{ADM} : = \mathcal{E} + D, \quad (6.6)$$

$$j_i^{ADM} : = S, \quad (6.7)$$

$$S_{rr}^{ADM} : = Sv + p, \quad (6.8)$$

$$S_{\theta\theta}^{ADM} : = p, \quad (6.9)$$

ya que en simetría esférica hay solo una componente independiente de la densidad de momento  $J_i$  ( $J_r$ ) y dos componentes independientes del tensor de esfuerzos  $S_{ij}$ :  $S_{rr}$  y  $S_{\theta\theta}$ . Para los valores iniciales, encontramos que  $\mathcal{E} = \rho\epsilon$ ,  $D = \rho_0$ ,  $S = 0$ .

Debemos asegurarnos que nuestros datos iniciales posean la convergencia adecuada, de otro modo estaríamos propagando un error muy grande a lo largo de toda la malla (y posteriormente, a lo largo de toda la evolución numérica). Puesto que el método numérico que utilizamos para resolver las ecuaciones TOV es un Runge-Kutta de 4to. orden, esperamos que la convergencia de nuestros datos iniciales sea a 4to. orden. Para checar esto utilizamos la constricción hamiltoniana. Analíticamente esta debería ser idénticamente cero, sin embargo, debido a los errores numéricos esto no sucede así. No obstante, los valores obtenidos distintos de cero deben converger a cero conforme se refina la malla, es decir, conforme se aumenta la resolución; y deben hacerlo al orden correcto. En este caso, aunque la solución de las ecuaciones TOV es a 4to. orden, el código *OllinSphere* calcula la constricción hamiltoniana a segundo orden, por lo que la convergencia de los datos iniciales será a lo más a este orden.

La figura 6.6, muestra la convergencia de la constricción hamiltoniana. Las diferentes líneas corresponden a las distintas resoluciones. Puesto que la convergencia es a segundo orden (como se esperaba), cada una de las líneas está multiplicada por su factor correspondiente (4, 16, 64, según corresponda) y, como se puede observar están prácticamente superpuestas unas con otras. aún para valores cerca del centro de la estrella ( $r = 0$ ) y de la superficie de esta.

Con estos datos, ya podemos comenzar la evolución de nuestro sistema.

### 6.1.1. Añadiendo el término perturbativo

Vamos ahora a construir los datos iniciales para una estrella con una pequeña perturbación radial. Para esto añadimos una perturbación en forma de gaussiana a la densidad, es decir,

$$\rho(r) = \rho(r) + \xi e^{-r^2/\sigma^2}, \quad (6.10)$$

con  $\xi \ll 1$  y  $\sigma$  una constante arbitraria.

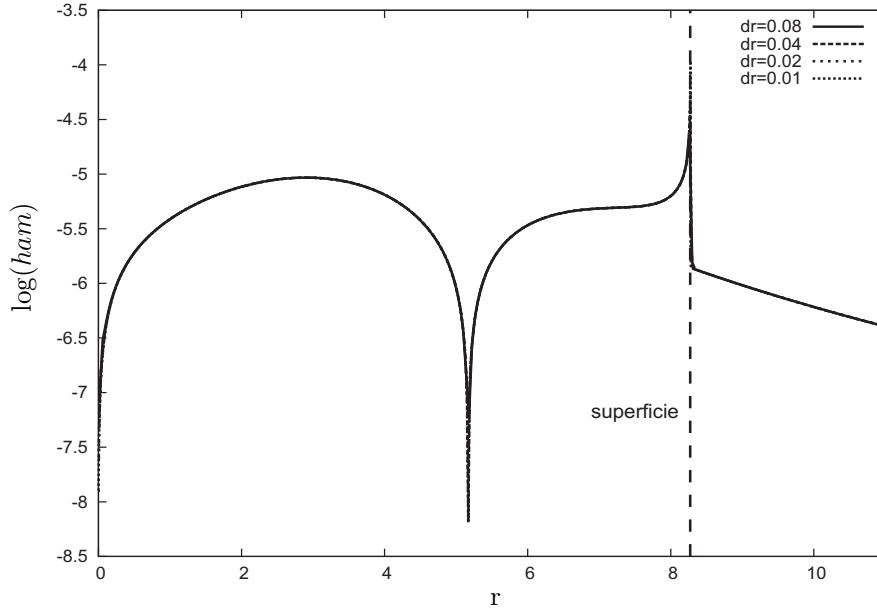


Figura 6.6: El logaritmo de la constricción hamiltoniana graficado a diferentes resoluciones. Al aumentar la resolución en  $\Delta r$  (al doble por ejemplo de la primera), hay un factor (de 4) entre la gráfica de cada resolución, por lo que multiplicando por este factor (4), las líneas se superponen, lo que indica la convergencia a segundo orden.

Debemos tomar en cuenta el hecho de que nuestras variables se van a ver modificadas. La nueva densidad (6.10) ya no es una solución de las constricciones y, por tanto, debemos resolver nuevamente la constricción hamiltoniana para garantizar que los datos iniciales satisfagan dichas ecuaciones. Sin embargo, puesto que la perturbación que se introduce es pequeña, los valores de las variables afectadas no cambiarán drásticamente.

La figura 6.7, muestra los datos iniciales en el caso de la densidad  $\rho$  una vez perturbada. El valor asignado al coeficiente perturbativo es  $\xi = 9,0 \times 10^{-5}$ , de este modo la densidad en el centro de la estrella es:  $\rho_c = 1,97 \times 10^{-3}$ . Los valores utilizados son los mismos que en el caso sin perturbar, es decir:  $K = 4,349$ ,  $\gamma = 5/3$ ,  $\Delta r = 0,04$ ,  $N_r = 400$  y  $\rho_{min} = 1,0 \times 10^{-8}$ . La masa total de la estrella así como el radio se ven modificados, aunque esta variación no es demasiado grande.

La figura 6.8 muestra los valores iniciales para la función de lapso  $\alpha(r)$ , estos valores coinciden exactamente con los valores del caso sin perturbar. Los valores iniciales para la velocidad nuevamente son cero a lo largo de toda la malla.

En el caso del coeficiente métrico  $A(r)$ , los valores si se verán modificados, por lo que debemos resolver la constricción hamiltoniana para encontrar los nuevos valores de  $A(r)$ . Partimos de la ecuación:

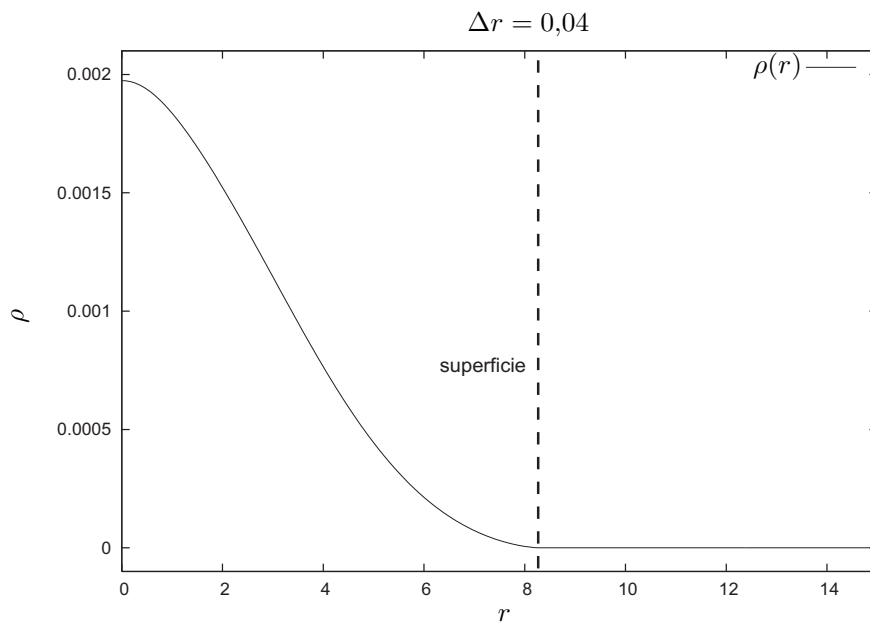


Figura 6.7: La densidad se ve modificada debido al término perturbativo añadido. La densidad central toma el valor  $\rho_c = 1,97 \times 10^{-3}$ . La superficie y masa de la estrella se ven modificadas, aunque no de manera muy notoria.

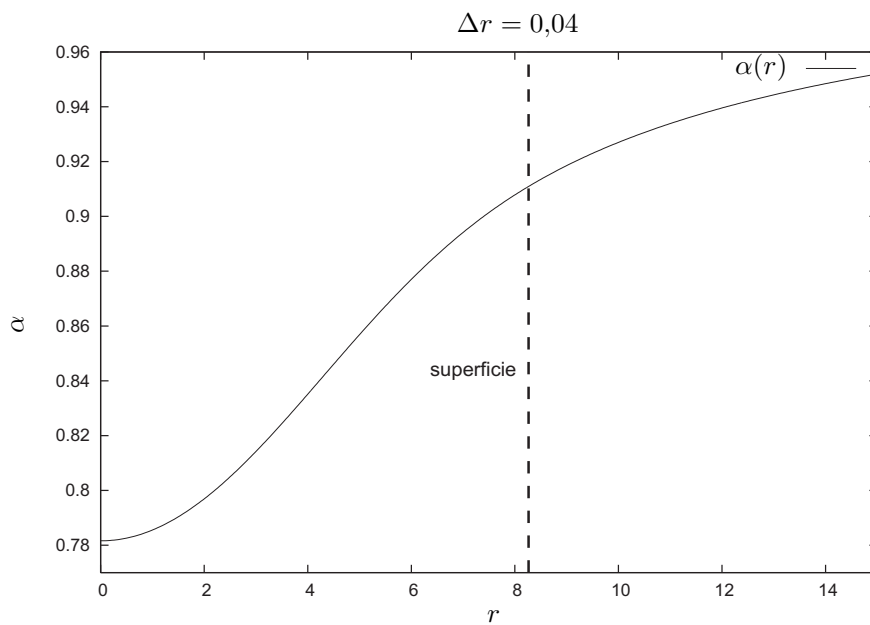


Figura 6.8: La función de lapso conserva los mismos valores que en el caso sin perturbar.

$$\begin{aligned}
0 = & -\partial_r D_B - \frac{\lambda}{r} + AK_B(2K_A + K_B) \\
& + \frac{1}{r}(D_A - 3D_B) + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4} + 8\pi A \rho_{ADM},
\end{aligned} \tag{6.11}$$

tomando en cuenta que el coeficiente métrico  $B(r)$  no se modifica, tenemos  $B = 1$ ,  $D_B = 0$ ,  $K_B = 0$ ,  $K_A = 0$ ,  $D_A \neq 0$ . La ecuación anterior se reduce a:

$$0 = -D_A + \frac{(1 - A)}{r} + 8\pi A \rho_{ADM}, \tag{6.12}$$

recordando que  $D_A := \partial_r \ln A$  y que además  $\rho_{ADM} = \rho h W^2 - p = \rho(1 + \epsilon)$ , obtenemos:

$$\partial_r A = 8\pi r A^2 \rho(1 + \epsilon) + \frac{A(1 - A)}{r}, \tag{6.13}$$

que es la ecuación a resolver para encontrar los valores iniciales de  $A(r)$  en este caso. Al igual que en el caso de las ecuaciones TOV, usamos un RK4 para obtener dichos valores. Para encontrar el valor de  $A$  en el primer punto de la malla, utilizamos la aproximación de la masa cerca del origen (6.4) y la sustituimos en el coeficiente métrico. Con esto encontramos que:

$$A = \left(1 - \frac{8}{3}\pi\rho(1 + \epsilon)r^2\right)^{-1}. \tag{6.14}$$

Una vez dado este valor, podemos hallar  $A(r)$  para el resto de la malla. En la figura 6.9 se muestran los valores iniciales resultantes para el coeficiente métrico. Aunque el perfil del coeficiente métrico  $A$  perturbado es muy similar al caso sin perturbar, esperamos una pequeña variación entre ambos, como se mencionó anteriormente. En la figura 6.10 observamos esta diferencia ( $\Delta A$ ) entre el coeficiente métrico en el caso de la estrella perturbada ( $A_{pert}$ ) y el no perturbado ( $A$ ).

Como en el caso no perturbado, debemos checar la convergencia de los datos iniciales. Nuevamente usamos la constricción hamiltoniana para encontrar la convergencia. Al igual que en el caso no perturbado esperamos convergencia a segundo orden. La figura 6.11 muestra la convergencia de los datos iniciales. Observamos que el método utilizado cerca del origen funciona muy bien, pues los datos convergen más rápido que a segundo orden (las líneas punteadas van por debajo de la línea sólida, aun cuando se han multiplicado por sus respectivos factores).

Al igual que en el caso no perturbado, estamos listos para iniciar la evolución numérica.

## 6.2. Evolución numérica

Una vez encontrados los datos iniciales al resolver las ecuaciones TOV, estamos en condiciones de empezar la evolución numérica (recordemos que anteriormente sólo resolvimos las ecuaciones



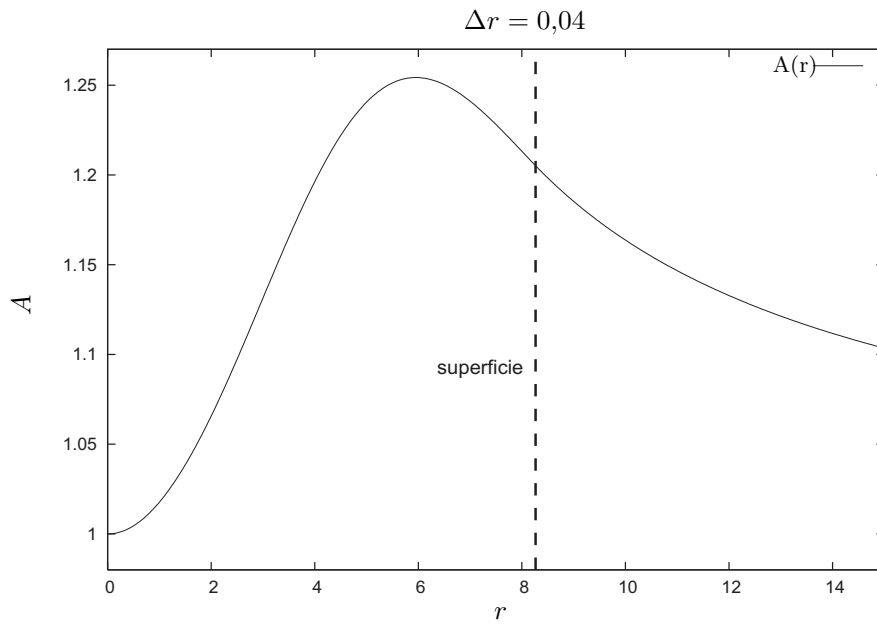


Figura 6.9: La métrica  $A$  después de haberse calculado mediante la ecuación (6.13). Hay una pequeña variación con respecto al caso sin perturbar. Esta es más notoria cerca del centro de la estrella.

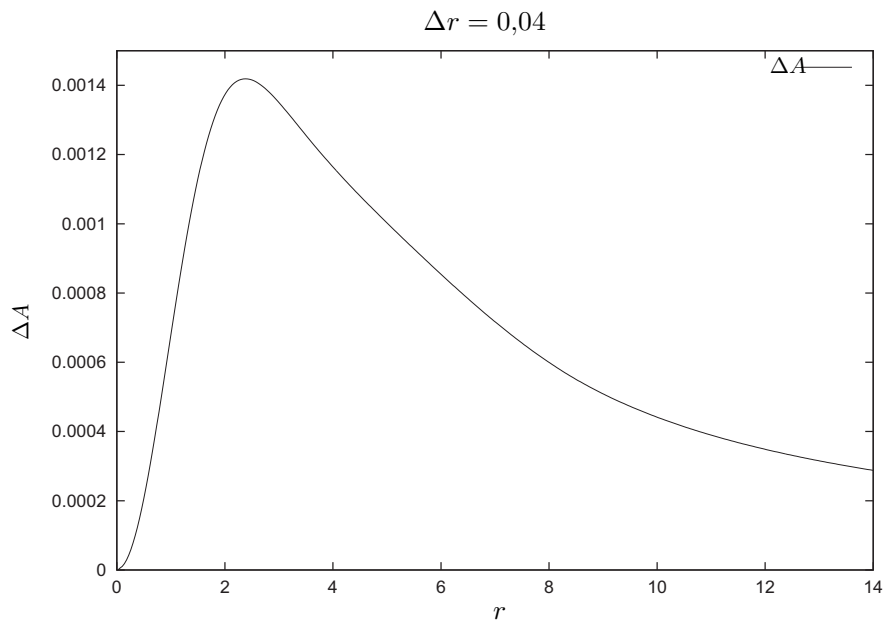


Figura 6.10: Diferencia entre los coeficientes métricos  $A$  en el caso perturbado y el no perturbado.

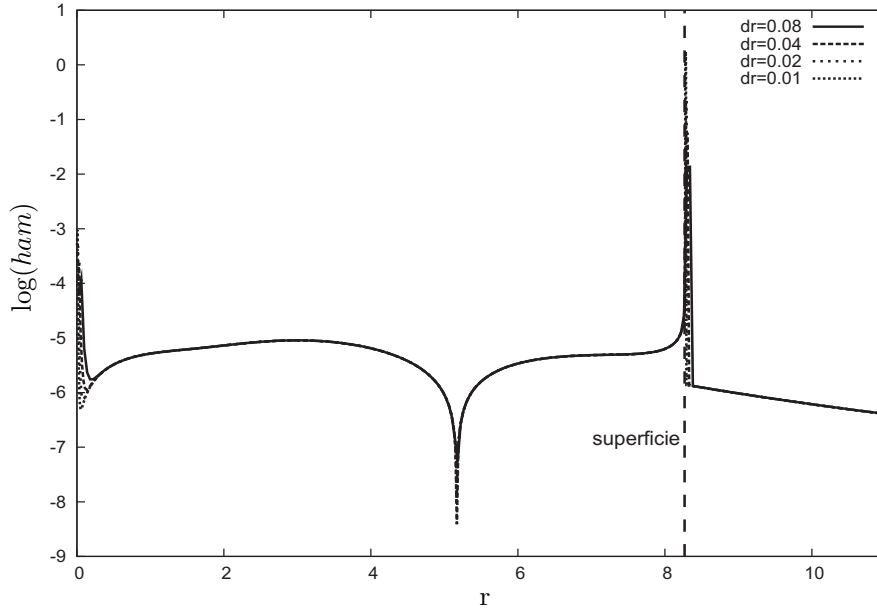


Figura 6.11: El logaritmo de la constricción hamiltoniana, en el caso de la estrella perturbada, a diferentes resoluciones. Nuevamente las gráficas están reescaladas por su correspondiente factor: 4, 16 y 64. De esta manera, se obtiene convergencia a segundo orden, como se esperaba.

para obtener los datos iniciales, no incluimos evolución alguna, ya que en ningún momento utilizamos el tiempo).

Para esto, vamos a hacer uso del código numérico *OLLINSPHERE*. Como mencionamos en la sección 5.4 este código hace la evolución de las ecuaciones ADM. Para tener la evolución completa debemos incluir los términos de materia, es decir las ecuaciones (5.60)–(5.62) a cada paso de tiempo para que las fuentes del conjunto completo de ecuaciones de evolución se actualicen. La ecuación de estado usada será  $p = (\gamma - 1)\rho_0\epsilon$ , recordando que el valor inicial para  $\epsilon$  lo podemos encontrar en los valores iniciales de  $\rho_0$ , ya que  $\epsilon = \frac{K}{\gamma-1}\rho_0^{\gamma-1}$ .

Es importante mencionar aquí el procedimiento descrito en 3.1.1 ya que es necesario actualizar las variables primitivas en cada paso de tiempo. La forma de realizar esto es implementando un algoritmo numérico que resuelve la ecuación (3.27) (la cual nos da la presión en el estado físico deseado) mediante el método de Newton-Raphson. Estas condiciones garantizan la actualización de los datos en las fuentes y, por tanto, la evolución confiable de nuestras ecuaciones.

Por otro lado, al igual que en el caso de los datos iniciales, es importante hacer mención del tratamiento hecho en la superficie de la estrella. Este punto es importante por lo siguiente: En la región exterior de la estrella tenemos vacío. Esto significa que la densidad debe ser idénticamente cero. Según se aproxime la densidad a este valor, la recuperación de las variables primitivas ( $\rho_0, p, v$ ) a partir de las variables dinámicas ( $D, S, \mathcal{E}$ ) se vuelve singular. La manera estándar de tratar este problema es mediante la adición de una cierta “*atmósfera*”, la cual mencionamos brevemente en la sección anterior. Usualmente esta cantidad es una densidad algunos órdenes de

magnitud menor que el valor de la densidad central y sus efectos no se notan en la dinámica del sistema ( $10^{-5}$  del valor de la densidad central  $\rho_c$ ). De esta manera se asegura que el sistema no sea singular en la superficie de la estrella permitiendo recobrar el valor de las variables primitivas a partir de las variables dinámicas. Así, puesto que el problema es sólo en una región de baja densidad, cercano a la superficie de la estrella, tiene un efecto despreciable en la dinámica del sistema.

En regiones donde el valor de la variable hidrodinámica  $D$  sea menor que la atmósfera, fijamos el valor  $D = \rho_{min}$ , como lo hicimos para los datos iniciales. Además, fijamos las demás cantidades hidrodinámicas de la siguiente manera:  $S = 0$ ,  $\mathcal{E} = K\rho_0^\gamma/(\gamma - 1)^7$ . Esto, junto con la adición de los términos de disipación y viscosidad artificial, llevan a nuestro código a evolucionar por un tiempo razonable.

## 6.3. Resultados

### 6.3.1. Estrella TOV estática (no perturbada)

Vamos a presentar aquí los resultados de la evolución numérica para el caso de la estrella TOV. Los valores utilizados son los mismos que en los datos iniciales. Además, agregamos los valores iniciales para el coeficiente métrico  $B = 1$ , y la curvatura extrínseca  $K_B = 0$ ,  $K = 0$ , y el factor de Courant  $\Delta t/\Delta x = 0,4$  (esto implica un paso de tiempo  $\Delta t = 0,016$ ) y un número total de pasos de tiempo  $N_t = 500$ . Esto significa un tiempo final  $t = 8$  ( $t \approx 40\mu s$ ).

La figura 6.12 muestra la evolución de la densidad. Encontramos que el comportamiento de la estrella es el esperado: los valores de la densidad de la estrella permanecen prácticamente igual a los valores de la condición inicial conforme avanza el tiempo. Para observar mejor la dinámica que sigue la densidad se grafica la diferencia  $\rho(t) - \rho_0$  entre la densidad a medida que avanza el tiempo  $\rho(t)$  y la densidad al tiempo inicial  $\rho_0$ . La razón por la cual los valores no son exactamente los iniciales, tiene que ver con la propagación del error numérico. Sin embargo, debemos esperar que la diferencia entre la densidad a cualquier tiempo y la densidad al tiempo inicial no crezca arbitrariamente.

En este caso, notamos que la diferencia es de varios órdenes de magnitud menor que los valores de la densidad, por lo cual no se altera visiblemente el comportamiento de la evolución de los datos iniciales. Esto se verifica al momento de calcular la convergencia en la simulación. El pico observado cerca de la superficie de la estrella se debe a que la superficie de la estrella no permanece constante, es decir, la estrella sufre una pequeña expansión provocando que el valor del radio, en el cual la densidad es igual a la atmósfera, se modifique conforme avanza el tiempo, dando lugar a los valores observados.

---

<sup>7</sup>El usar la condición sobre la densidad de energía es solo un recurso numérico que permite el mejor manejo de los gradientes en la velocidad, o sea, en la obtención de las variables primitivas. La forma planteada aquí es consistente con la presión y fue propuesta originalmente por Font *et al* en [11].

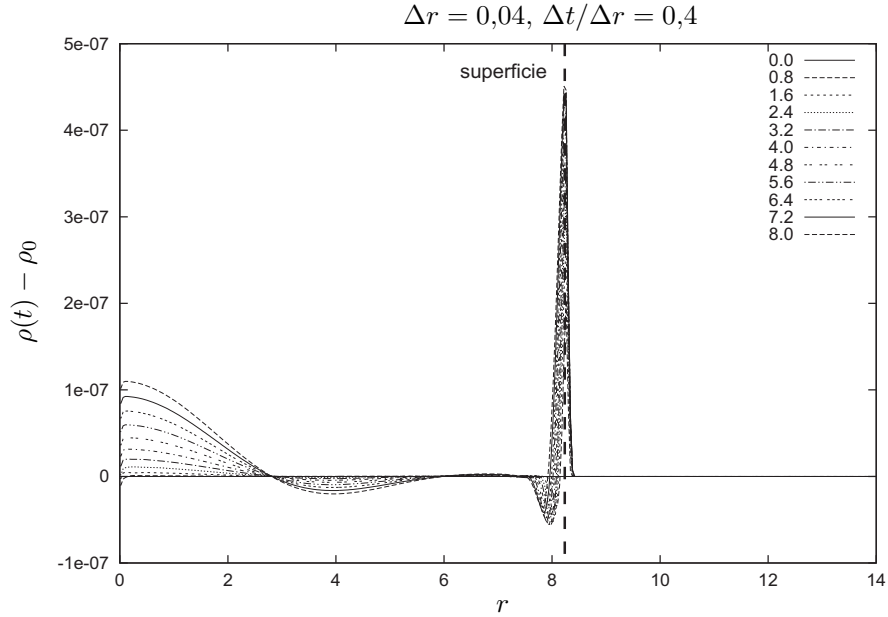


Figura 6.12: La densidad se mantiene prácticamente en los valores iniciales ( $t = 0$ ) conforme transcurre el tiempo. Esto se debe a que las ecuaciones TOV nos dan la solución de una estrella estática, es decir, una estrella cuya configuración no cambia con el tiempo. La conexión entre la superficie de la estrella y región exterior se da de manera suave.

Las figuras 6.13 y 6.14 muestran la evolución para el coeficiente métrico  $A$  y la función de lapso  $\alpha$ . Al igual que en el caso de la densidad, se grafica la diferencia de los valores a cada paso de tiempo menos los valores al tiempo inicial ( $A(t) - A_0$  y  $\alpha(t) - \alpha_0$  respectivamente). En ambos casos puede observarse que las variables permanecen casi invariantes conforme transcurre el tiempo, dicho de otro modo, las diferencias entre los valores a cada paso de tiempo y el valor inicial son de varios órdenes de magnitud menores, por lo cual no hay un cambio apreciable en estas variables.

En el caso de la velocidad, observamos en la figura 6.15 que se forman gradientes muy fuertes cerca de la superficie de la estrella. Para entender esto, debemos primero hacer una observación: Físicamente cerca de la superficie de la estrella el campo gravitacional es intenso y, puesto que la atmósfera no es parte de la solución en equilibrio de los datos iniciales, el campo gravitacional hace que esta vaya hacia la superficie de la estrella y colapse. Cuando la atmósfera colisiona con la superficie de la estrella se forma un choque, creando los altos gradientes que observamos. El signo negativo de la velocidad indica que hay fluido desplazándose hacia el interior de la estrella. Que el código evolucione satisfactoriamente o falle, depende en gran medida del tratamiento que se le de a la superficie, pues la evolución puede contaminarse debido a los valores tan grandes que toma la velocidad.

Finalmente, presentamos la convergencia de la constricción hamiltoniana en la figura 6.16 a un tiempo  $t = 8$ . Notamos que en la región cercana al origen, como en el interior de la estrella

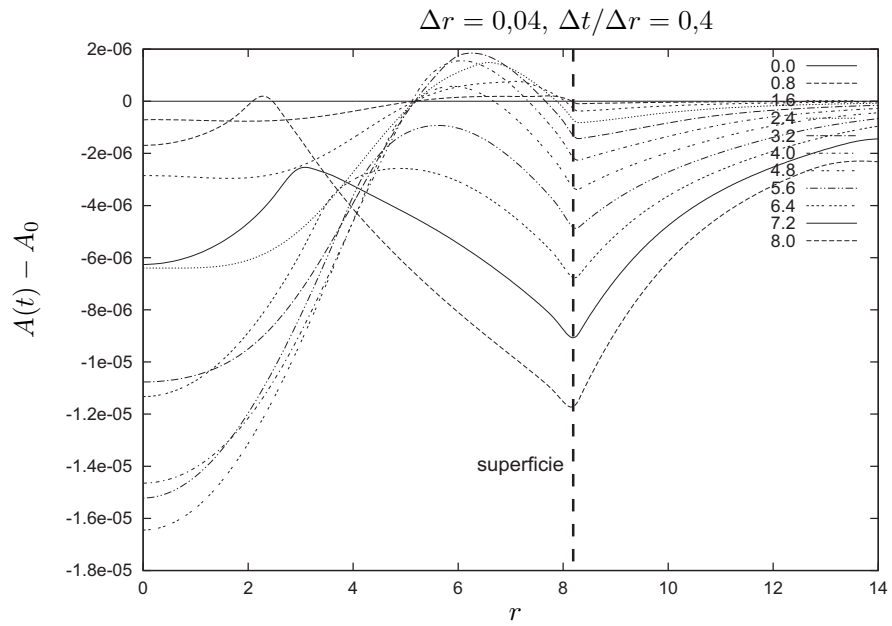


Figura 6.13: La métrica permanece muy cercana a los valores iniciales a medida que avanza el tiempo. La superficie se conecta de manera suave con la región exterior de la estrella.

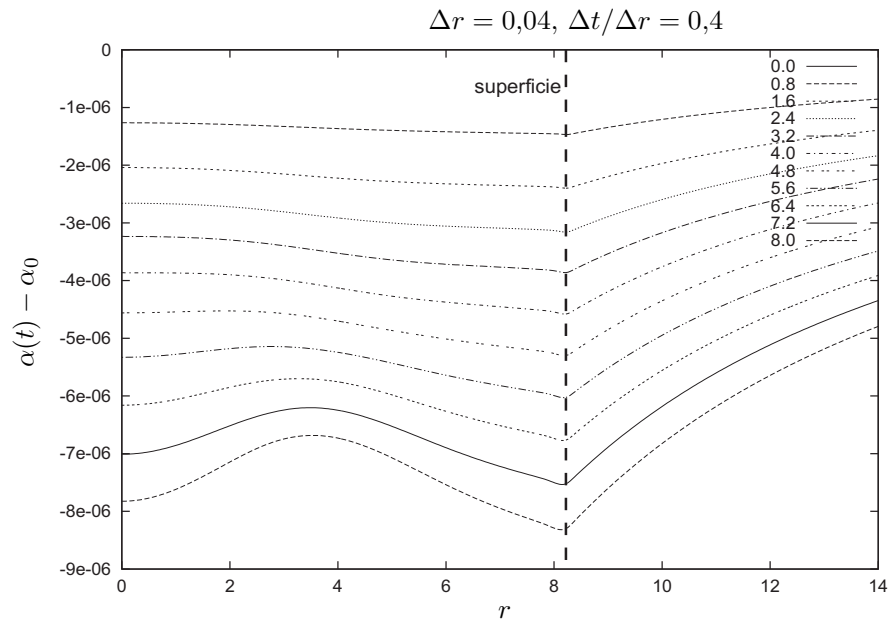


Figura 6.14: La función de lapso permanece prácticamente en los valores iniciales conforme se incrementa el tiempo. En la superficie de la estrella todo transcurre de manera normal, es decir, se da una transición de manera suave.

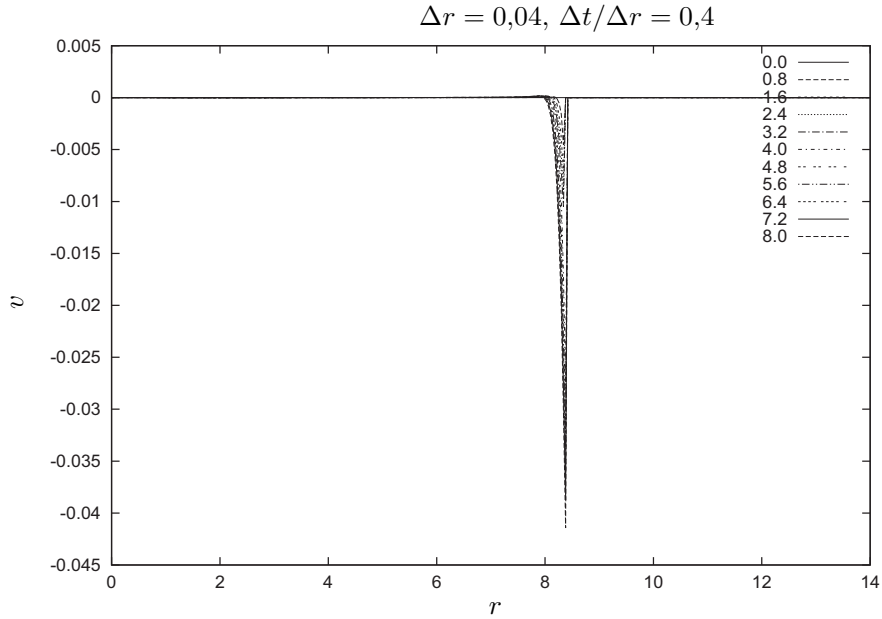


Figura 6.15: La velocidad desarrolla gradientes muy grandes cerca de la superficie de la estrella. En la región exterior de la estrella, la velocidad retoma su valor  $v = 0$  .

la convergencia es a segundo orden. En la región externa, la convergencia empeora debido a la propagación de fluido ocasionada por el choque en la superficie (altos gradientes de velocidad). El comportamiento visto anteriormente para las variables se mantiene aún para tiempos mayores a los presentados aquí, sin embargo, no hay que olvidar que la solución puede verse alterada un poco debido al error numérico producido por la frontera de la estrella.

### 6.3.2. Estrella TOV perturbada

En esta sección presentamos los resultados en el caso de la estrella TOV perturbada. Los datos iniciales corresponden a los presentados en la sección 6.1.1. Los valores del paso del tiempo y el número de pasos de tiempo son los mismos que en el caso sin perturbación. Es decir, presentamos los resultados a un tiempo  $t = 8$ .

En la figura 6.17 se muestra la evolución de la densidad. Como puede observarse esta empieza a decrecer inicialmente. La razón de este comportamiento se debe a que, una vez introducida la perturbación, la solución inicial ya no es una solución estática de las ecuaciones de Einstein. Durante la evolución hay un reacomodo en el fluido de la estrella y esta busca una nueva condición de equilibrio, la cual posee una densidad central distinta a la original así como una masa y radio ligeramente distintos. El reacomodo se da mayormente en región cercana al centro de la estrella, como puede observarse en la figura 6.18 donde nuevamente hemos graficado la evolución de  $\rho(t) - \rho_0$ . Una vez alcanzada la configuración de equilibrio, la estrella debe mantenerse estable aún para tiempos mayores. Numéricamente este proceso no es tan simple debido a la

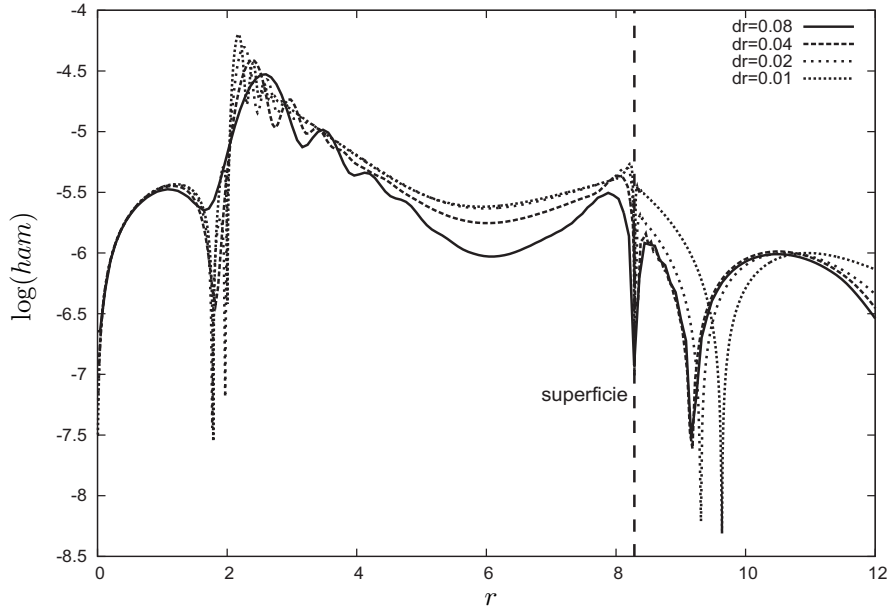


Figura 6.16: La convergencia del logaritmo de la constricción hamiltoniana se mantiene a segundo orden en el interior de la estrella a  $t = 8$ . Mientras que en la superficie la convergencia empeora debido al comportamiento de la velocidad en la superficie.

propagación del error numérico.

La figura 6.19 muestra la evolución de la densidad central ( $\rho_c$ ) hasta un tiempo  $t = 24$ . Observamos que aún para este tiempo, no se alcanza alguna configuración de equilibrio. Para tiempos relativamente cortos, la densidad disminuye rápidamente, luego comienza a crecer y para  $t > 15$  la tasa de crecimiento disminuye considerablemente, es decir, crece muy lentamente. A pesar de no alcanzar la densidad del estado de equilibrio, las diferencias mostradas en 6.18 no crecen arbitrariamente, ya que la convergencia se mantiene.

Las figuras 6.20 y 6.21 muestran la evolución de la métrica  $A$  y la función de lapso  $\alpha$  (donde nuevamente hemos graficado las diferencias  $A(t) - A_0$  y  $\alpha(t) - \alpha_0$  hasta un tiempo  $t = 8$ ). En ambos casos, al igual que en la densidad hay mayor movimiento que en el caso no perturbado (la diferencia entre los valores a medida que avanza el tiempo y el valor al tiempo inicial es mayor que en el caso sin perturbar). Esto es claro debido a que la perturbación introduce una solución no estática. Este movimiento disminuye en el interior de la estrella. El empalme en la superficie se da de manera suave.

En el caso de la velocidad, la figura 6.22 muestra su evolución. Observamos movimiento en la región interior de la estrella debido a la perturbación introducida. El aumento de la presión en el centro de la estrella provoca que los elementos del fluido rápidamente busquen acomodarse a lo largo del interior, para alcanzar nuevamente una configuración estable. Puesto que la presión es mayor en el centro, mayor es también la velocidad con la que el fluido se mueve en esta parte y menor en el interior. Conforme nos acercamos a la superficie, observamos que la velocidad

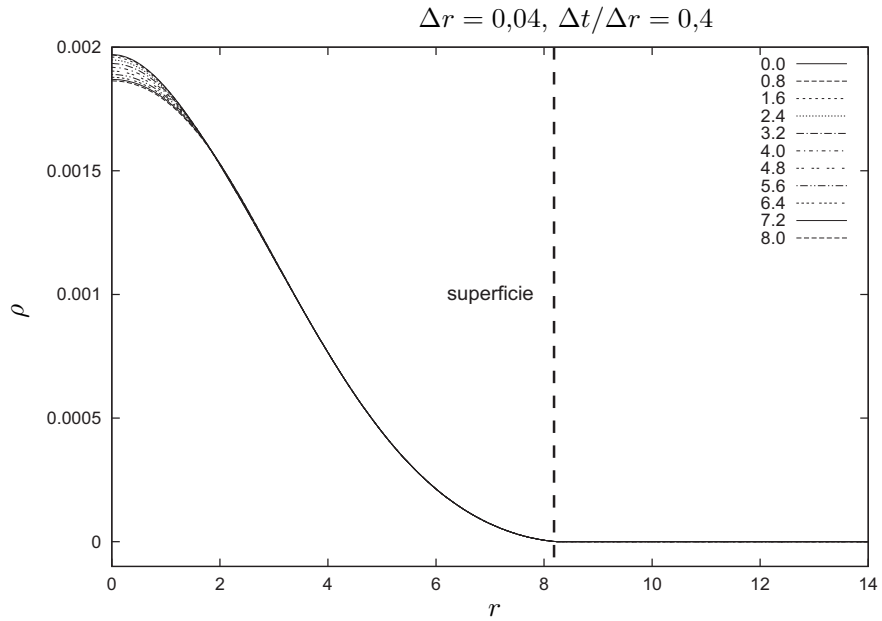


Figura 6.17: La evolución en el caso de la estrella perturbada cambia significativamente. A medida que el tiempo avanza la densidad comienza a decrecer hasta alcanzar un valor mínimo. Luego comienza a crecer lentamente. La superficie y la región interior se conectan suavemente.

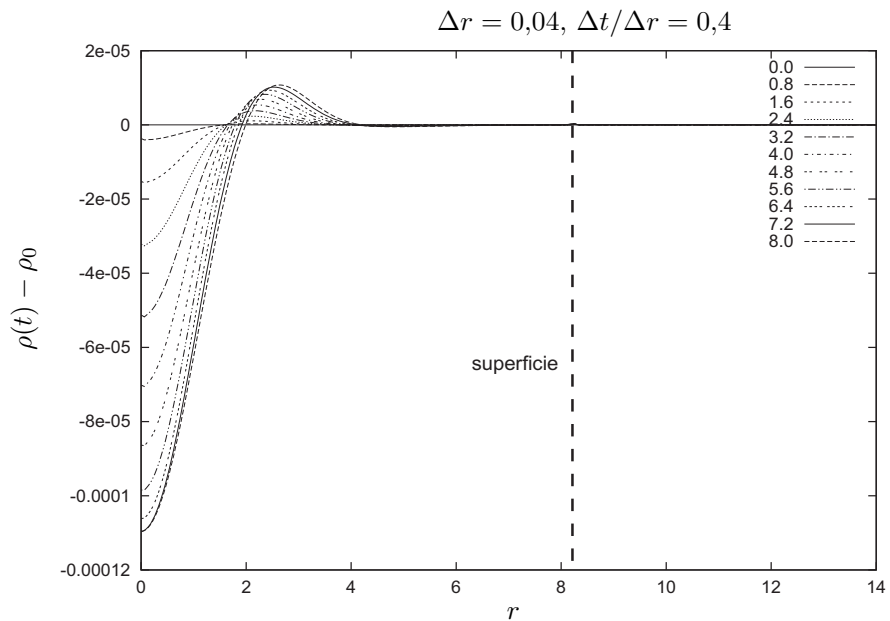


Figura 6.18: La diferencia  $\rho(t) - \rho_0$  en el tiempo. A medida que avanza el tiempo, esta diferencia se hace mayor, sin embargo esta diferencia no es arbitraria, pues al tiempo presentado aquí ( $t = 8$ ), la convergencia es como se espera. Notamos que el valor de la diferencia es mayor cerca del centro de la estrella y disminuye conforme nos movemos hacia el interior.



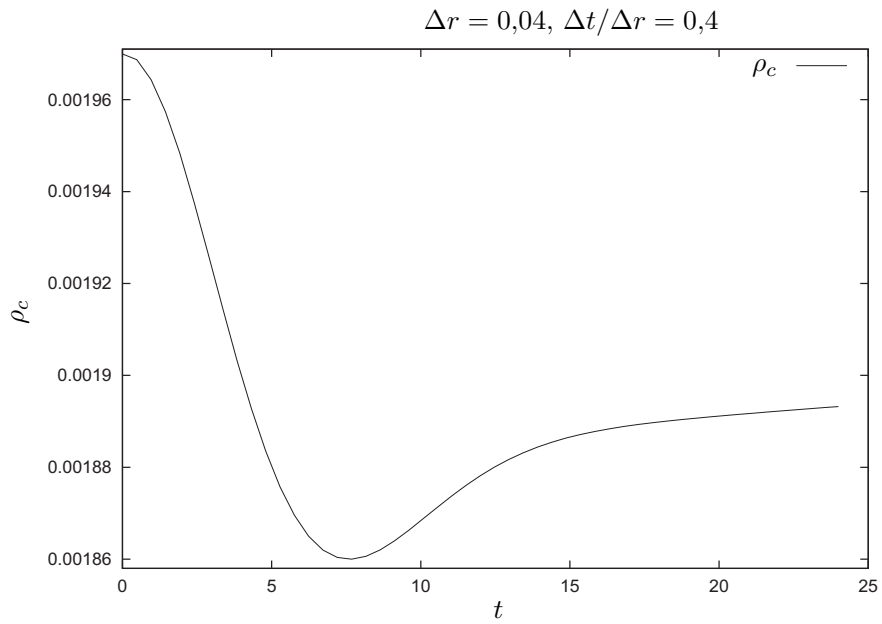


Figura 6.19: Evolución de la densidad central ( $\rho_c$ ) hasta un tiempo  $t = 24$ . A pesar de no alcanzar la condición de equilibrio mencionada en el texto, la convergencia se mantiene, lo cual significa que la evolución es consistente con los datos iniciales.

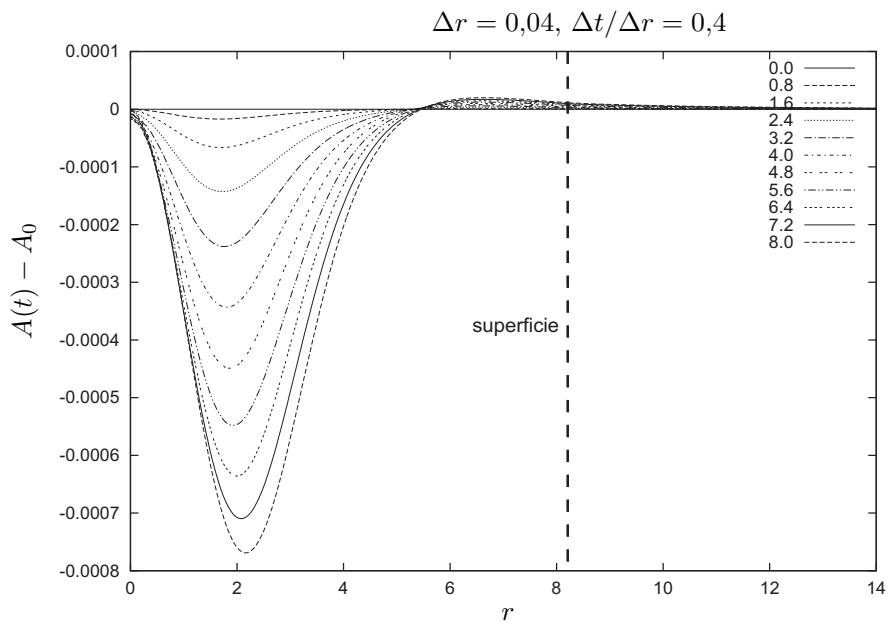


Figura 6.20: La evolución de la métrica  $A(t) - A_0$  en el tiempo. Notamos que los valores son mayores que en el caso estático ya que la solución en el caso perturbado induce una dinámica en el sistema. En la superficie todo transcurre de manera suave.

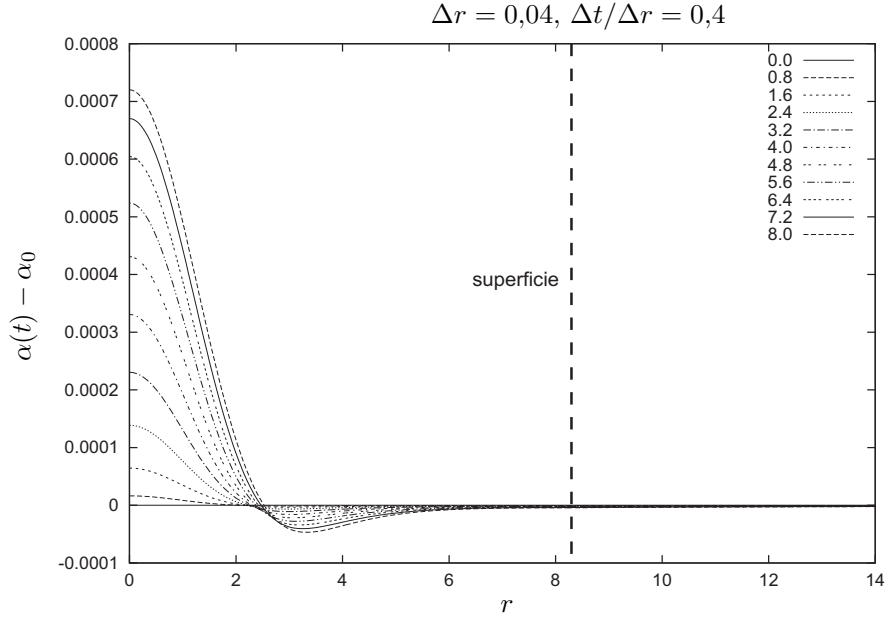


Figura 6.21: Los valores en las diferencias de la función de lapso  $\alpha(t) - \alpha_0$ , son mayores que en el caso no perturbado, provocando mayor movimiento. Este movimiento se hace menos notorio en la región interior de la estrella. En la superficie, todo se comporta de manera normal.

nuevamente crece (en valor absoluto). La razón es exactamente la misma que para el caso sin perturbar.

En la figura 6.23 observamos el logaritmo de la constricción hamiltoniana. Notamos que cerca del origen la convergencia no es buena. A pocos pasos de tiempo de iniciada la evolución aparecen oscilaciones de alta frecuencia en el intervalo (0,2) de la gráfica. Este hecho hace que la evolución de los datos iniciales no sea la esperada (explica el comportamiento de la densidad cerca del origen). Sin embargo, salvo en el caso de la peor resolución, en el resto de la estrella la convergencia es muy próxima a segundo orden. En el caso de la resolución más baja, se dice que esta no ha alcanzado el régimen de convergencia. Esto significa que el valor  $\Delta r = 0,08$  no es lo suficientemente bueno para garantizar que los errores debidos a las aproximaciones en las ecuaciones de evolución puedan despreciarse y el método numérico utilizado sea a segundo orden. Cerca de la superficie, en la región exterior, la convergencia empeora debido al manejo de la superficie.

El hecho mencionado en el párrafo anterior representa un problema grave. Como mencionamos en la sección 4.2 si nuestra solución no converge, no podemos estar seguros que el código está evolucionando correctamente. No obstante podemos esgrimir un argumento en favor de la evolución del código: Observamos la figura 6.24, la cual presenta el logaritmo de la constricción hamiltoniana a un tiempo  $t = 24$  (el triple del presentado en la gráfica anterior,  $t \approx 119\mu s$ ). Nuevamente aparecen las oscilaciones espurias de altas frecuencias que se han propagado una mayor distancia a lo largo del interior de la estrella. Sin embargo, estas oscilaciones no han explotado aún

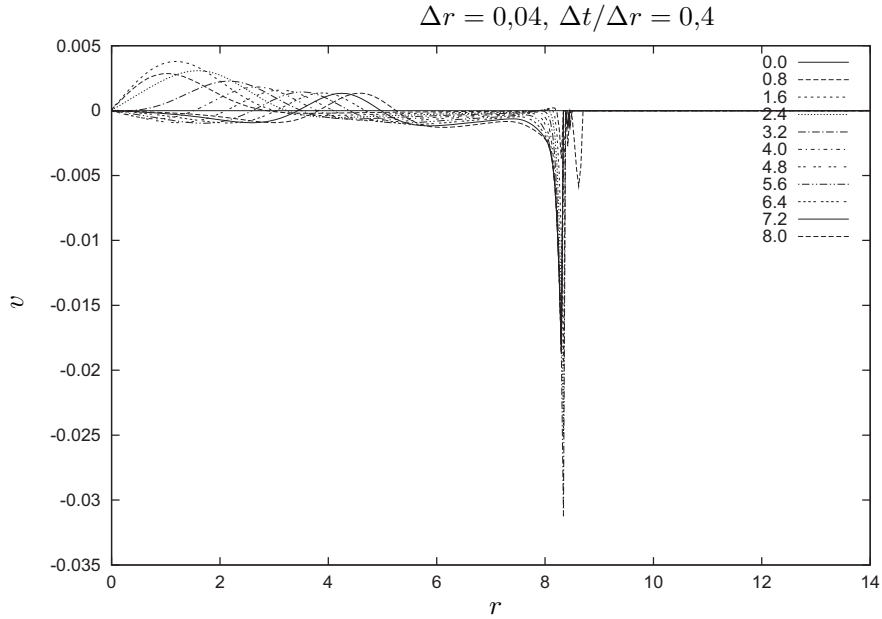


Figura 6.22: En el caso de la velocidad, observamos que desde el primer paso de tiempo hay variación en el interior de la estrella, este efecto se produce debido a la perturbación. Cerca de la superficie nuevamente ocurren gradientes muy intensos a medida que el tiempo avanza. En la región exterior, nuevamente (como en el caso TOV), retoma el valor  $v = 0$ .

(para buenas resoluciones), al contrario, al momento de evolucionar usando mejor resolución no aumentan, sino que disminuyen. Las figuras 6.25 y 6.26 muestran la evolución de la constricción hamiltoniana. Claramente observamos que cuando la resolución es mayor, las oscilaciones disminuyen su amplitud.

El perfil del coeficiente métrico así como del lapso siguen siendo prácticamente los mismos. En el caso de la velocidad, el comportamiento es muy similar al presentado anteriormente, salvo por la formación de pequeñas oscilaciones espurias en la región exterior cerca de la superficie. El caso de la densidad ya había sido comentado. Disminuye considerablemente, y luego vuelve a crecer lentamente. En las figuras 6.27 y 6.28 observamos el comportamiento de la densidad y la velocidad.

Este comportamiento de las variables permanece para tiempos mayores inclusive para la resolución más alta. Esto nos lleva a concluir que si bien hay un problema que se debe corregir, este no termina por echar a perder del todo la simulación numérica. Finalmente, puesto que los datos iniciales convergían al orden correcto y también la evolución en el caso sin perturbar, es muy probable que las inestabilidades se deban a la amplificación del error numérico debido a la perturbación en las ecuaciones de evolución. Es aquí en donde la disipación artificial (más que la viscosidad) juega un papel fundamental, ya que sin esta las oscilaciones espurias crecen sin control y hacen fallar el código aun para tiempos cortos.

No obstante, en este trabajo, se probaron diferentes valores para los coeficientes disipativos sin

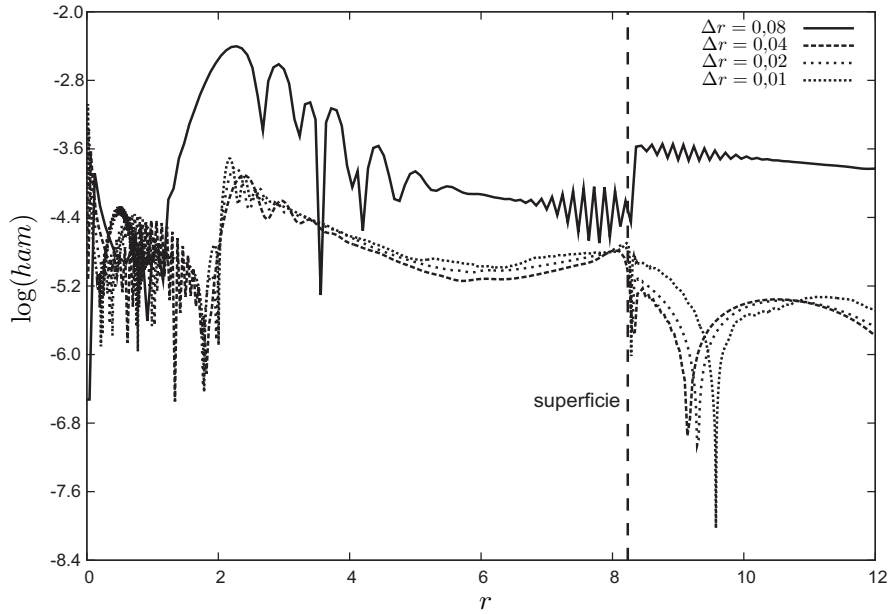


Figura 6.23: La convergencia del logaritmo de la constricción hamiltoniana se mantiene a segundo orden en el interior de la estrella a  $t = 8$  excepto para la resolución mas baja, la cual no ha alcanzado el régimen de convergencia. Sin embargo, cerca del origen existen oscilaciones. En la superficie la convergencia empeora debido al comportamiento de la velocidad ahí.

encontrar alguno que proporcionara un mejor resultado. Un punto importante en este sentido sería encontrar un método alternativo que permita manejar lo mejor posible las oscilaciones espurias, ya sea mediante el uso de la disipación artificial o algún otro artificio numérico para que, cerca del centro de la estrella, la convergencia en la evolución de los datos iniciales sea más limpia y la evolución numérica no se vea afectada por este problema.

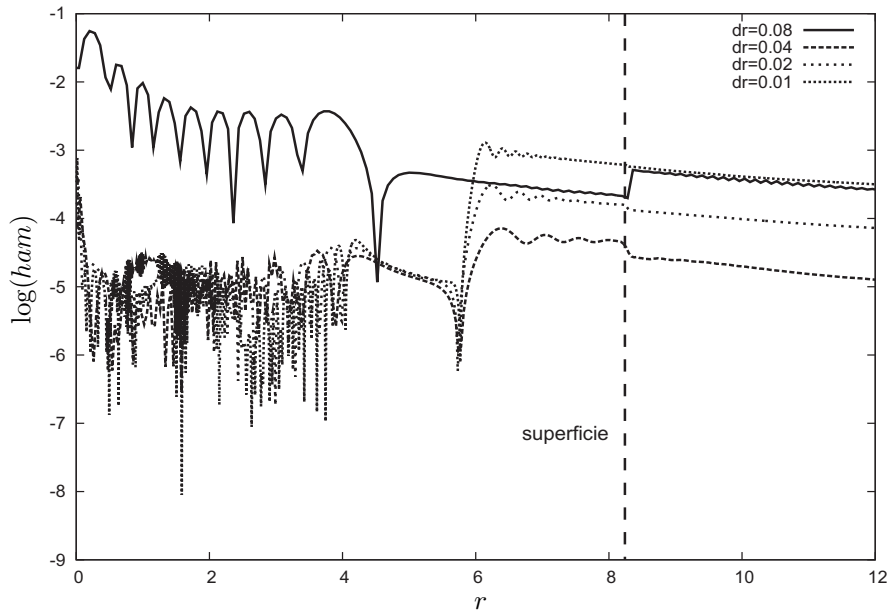


Figura 6.24: El logaritmo de la constricción hamiltoniana a  $t = 24$ . Las oscilaciones de alta frecuencia se propagan a lo largo del interior de la estrella, sin embargo no explotan. En el caso de la resolución más pobre, las oscilaciones han matado completamente la solución, hecho por el cual los valores difieren considerablemente aun en los primeros puntos de la malla.

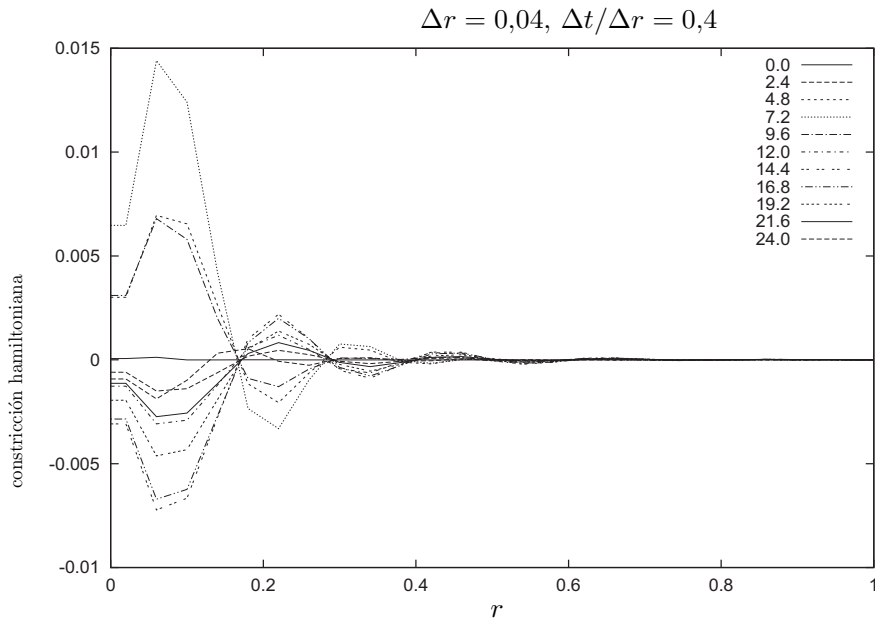


Figura 6.25: La evolución de la constricción hamiltoniana para una resolución  $\Delta r = 0,04$  hasta un tiempo  $t = 24$ . Conforme avanza el tiempo estas oscilaciones se atenúan.

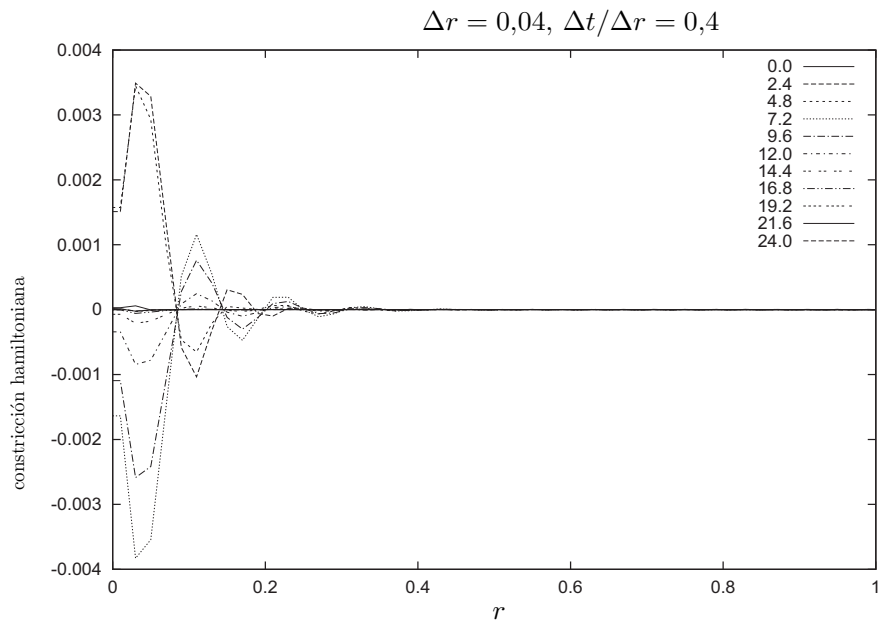


Figura 6.26: La evolución de la constricción hamiltoniana para una resolución  $\Delta r = 0,02$  hasta un tiempo  $t = 24$ . Notamos el hecho de que la amplitud de las oscilaciones ha disminuido en comparación con las que aparecen a una resolución más baja.

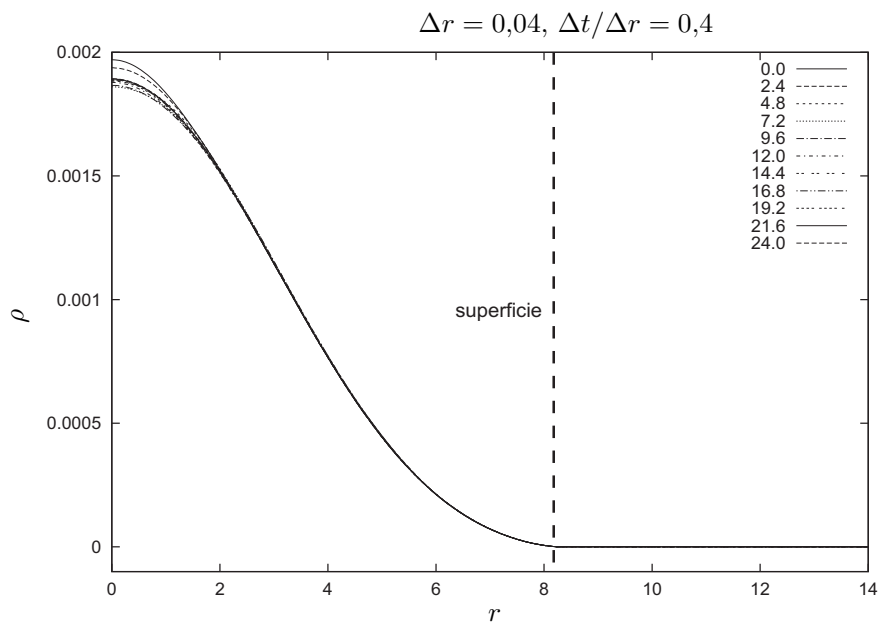


Figura 6.27: El comportamiento de la densidad es el esperado. Después de llegar a un punto mínimo, comienza a aumentar lentamente.

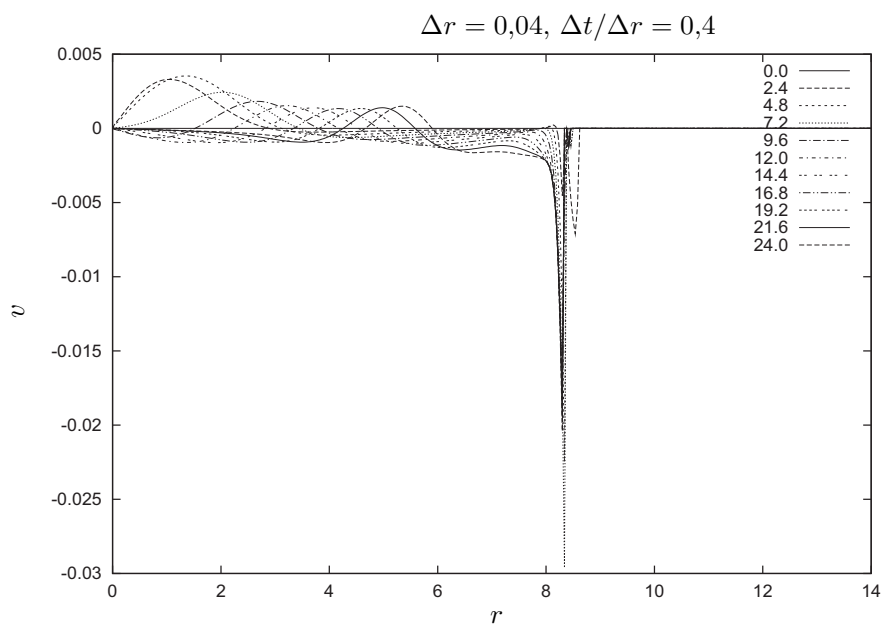


Figura 6.28: El perfil de la velocidad es muy similar al presentado anteriormente, el único cambio se presenta en la región exterior donde han aparecido pequeñas oscilaciones de alta frecuencia.





# Capítulo 7

## Conclusiones

De lo desarrollado en este trabajo, podemos sacar algunas conclusiones importantes:

Se hizo una revisión del formalismo 3+1 de la relatividad numérica, haciendo énfasis en los puntos principales como son: las variables ADM (lapso y vector de corrimiento), la métrica espacial y la curvatura extrínseca. Así mismo, se escribieron las ecuaciones de Einstein en este formalismo. Se discutieron las ecuaciones de constricción y la importancia de que, incluso antes de comenzar la evolución de las ecuaciones ADM, las constricciones deben satisfacerse. Este punto es de relevancia en el caso de la evolución de la estrella perturbada (ver sección 6.1.1), ya que, una vez que incluimos a perturbación a la densidad central, por definición ya no es una solución de las ecuaciones de Einstein y hay que resolver la constricción hamiltoniana para garantizar que lo sea de nuevo.

Además, se revisaron las condiciones de foliación y explicamos que las condiciones de lapso *maximal* y *1+log* son igualmente buenas en nuestra evolución numérica, debido principalmente a que evitan la presencia de singularidades, tanto físicas como de coordenadas. En la práctica, sólo por la simplicidad que presenta para evoluciones más complicadas, escogimos la condición *maximal*.

También se implementaron las ecuaciones de Euler de la hidrodinámica relativista, tanto en el caso de la relatividad especial como en el de la general. Esto nos permitió elaborar un código numérico (“HydroSphere”), el cual resuelve las ecuaciones de Euler en el caso de la relatividad general, usando una métrica de fondo fija. En particular, este código fue utilizado en la sección 4.4 para resolver el problema del tubo de choques, usando como métrica fila la métrica de Minkowski, lo cual permitió probar algunos puntos discutidos en la sección de métodos numéricos, y en particular, hacer la prueba numérica del código.

En este mismo problema, se diseñó un esquema de viscosidad artificial siguiendo [2] y [24]. Este término se introdujo como si fuera viscosidad verdadera (añadiendo el término de viscosidad a la presión en el tensor de energía momento) con la intención de manejar de forma más apropiada la aparición de ondas de choque en la solución (tanto en el tubo de choques como más adelante en la superficie de la estrella). Un dato a resaltar aquí es que, en general, hay que estar haciendo

ensayos diferentes para los valores del coeficiente de viscosidad artificial, ya que dependiendo del problema, puede funcionar uno y al momento de cambiar de problema, hay que encontrar otro coeficiente. Otro punto importante en este sentido es la adición de la disipación artificial para controlar las oscilaciones de alta frecuencia que aparecen en la evolución de los datos iniciales. Ambas cantidades nos permiten mantener estas evoluciones estables durante un tiempo razonable.

Además, utilizando la descripción de la hidrodinámica relativista en términos del formalismo 3+1, se fusionaron el código descrito en 4.4, que evoluciona la hidrodinámica (teniendo una métrica fija de fondo), con el código que evoluciona las ecuaciones de Einstein en simetría esférica (*OLLINSPHERE*). De este modo logramos acoplar los términos de materia con los términos de la geometría, lo cual nos permitió realizar la evolución de ambos. Para recobrar las variables primitivas se diseñó una subrutina en el código que resuelve el problema de invertir las variables conservadas y así obtener las variables primitivas a partir de estas. Este algoritmo usa el método de Newton-Raphson.

El código que evoluciona solamente la hidrodinámica puede ser utilizado para estudios más detallados como el de los choques. En este contexto, se pueden modificar y perfeccionar las técnicas de viscosidad artificial (utilizando una versión más general de la presentada en este trabajo) ó incluir la aplicación de los métodos de captura de choques de alta resolución (HRSC), los cuales permiten el mejor manejo de los choques hidrodinámicos. Inclusive, puede estudiarse la implementación de mejores condiciones de frontera que garanticen un mejor tratamiento de ellas, así como una mejor evolución, en el sentido de que los errores, debido a las fronteras, no contaminarán nuestra solución numérica conforme avanza el tiempo, este es uno de los temas importantes a tratar en un trabajo futuro<sup>1</sup>. También pueden hacerse pruebas para distintos tipos de fenómenos hidrodinámicos que posean una métrica fija de fondo y analizar sus propiedades.

Por otro lado, se resolvieron las ecuaciones TOV que nos dan la solución para una estrella estable; esta solución es aceptable ya que se verificó la convergencia a segundo orden de dichas ecuaciones en el interior de la estrella tanto para los datos iniciales, como para tiempos posteriores. Se utilizó una aproximación para la masa y la densidad del fluido cerca del origen a partir de las ecuaciones para encontrar el primer punto de la malla e iniciar la solución a lo largo de toda la malla. Al respecto se explicó la importancia de resolver estas ecuaciones utilizando un método de cuarto orden, debido a que de esta manera se garantiza que las cantidades que se quieren calcular no sean menores que los errores numéricos. Lo cual no sucede con un método a segundo orden.

En este mismo sentido, es importante analizar con un poco más de detalle el tratamiento de la superficie de la estrella, es decir, la manera en como se maneja la atmósfera para permitir

---

<sup>1</sup>En todas las simulaciones presentadas aquí, la frontera de la malla numérica se colocó lejos de la estrella, a una distancia aproximada de 3 veces el radio de la estrella. Esto se hizo de este modo ya que los errores en algunas de las cantidades se reflejan en la frontera introduciendo un error que puede echar a perder la simulación si la frontera de la malla y la superficie de la estrella están muy cercanas una de la otra. En realidad la frontera de la malla no es un asunto que preocupe demasiado en este caso, sin embargo, a modo de querer optimizar el código, es importante corregir este problema.

una evolución estable del código para tiempos mayores, y evitar los gradientes tan grandes que se presentaron en los resultados sección 6.3. En general, pueden estudiarse o revisarse las condiciones que permitan una evolución estable por más tiempo (HRSC, modificación de las ecuaciones de estado, etc.). En este sentido hay propuestas como las que aparecen en [11], sin embargo aún hay mucho que hacer en cuanto a evoluciones estables que sean más duraderas.

Se analizó también el caso de una estrella a la que se añadió una pequeña perturbación en la densidad central y se observó el comportamiento. Como se dijo anteriormente, se resolvieron las constricciones para garantizar la solución de las ecuaciones de Einstein. A diferencia de la estrella estática, la estrella perturbada sufre un reajuste de materia debido a la perturbación, por lo que se genera movimiento en el fluido. Conforme transcurre el tiempo, la configuración de la estrella perturbada tiende a una configuración estable y puede permanecer en este estado por un largo tiempo.

Es importante señalar el hecho de que en este caso se presentaron algunos problemas que ya fueron discutidos anteriormente como el hecho de que debido a la perturbación los errores se amplifican y para la resolución más baja el régimen de convergencia no se alcanza. También se mencionó la aparición de las oscilaciones de alta frecuencia en el interior de la estrella, que si bien es cierto no afectan demasiado la evolución de los datos iniciales para tiempos cortos, si podrían hacerlo para tiempos mayores. Lo más importante en este caso es estudiar y analizar de forma más detallada la aplicación de condiciones (ya sea de disipación o alguna otra condición sobre las ecuaciones de evolución de las variables hidrodinámicas) que introduzcan el menor error numérico posible. En el caso estable estos errores pueden pasar desapercibidos, sin embargo, cuando se añade la perturbación, los errores llegan a ser significativos.

Finalmente, y como la opción principal de este trabajo, es el entender la evolución de un sistema esféricamente simétrico para poderlo aplicar al caso del colapso de materia, es decir, la evolución de una estrella en la rama inestable que produzca la aparición de un agujero negro. En esta dirección, este sería el próximo paso a realizar y demostraría el eventual potencial del código para evoluciones posteriores en algún sistema de interés astrofísico.



# Bibliografía

- [1] M. Alcubierre. Hyperbolic slicings of spacetime: singularity avoidance and gauge shocks. *Class. Quant. Grav.*, 20(4):607–624, 2003.
- [2] M. Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Clarendon Press. Oxford, 2008.
- [3] M. Alcubierre and J. A. González. Regularization of spherically symmetric evolution codes in numerical relativity. *Computational Physics Comm.*, 167:76–84, 2005. gr-qc/0401113.
- [4] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. The Dynamics of General Relativity. In L. Witten, editor, *Gravitation: An introduction to Current Research*, pages 227–265, New York, 1962. John Wiley.
- [5] T. W. Baumgarte, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky. Computing supernova collapse to neutron stars and black holes. *The Astrophysical Journal*, 443:717–734, 1995.
- [6] C. Bona, E. Seidel, J. Massó, and J. Stela. New formalism for numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 75:600–603, 1995.
- [7] G. B. Cook. Initial data for numerical relativity. *Living Reviews in Relativity*, 3:4, 2000.
- [8] R. Courant and K. O. Friedrich. *Supersonic flows and shock waves*. Springer, Berlin, 1976.
- [9] J. C. Degollado. *Formulación 3+1 en simetría esférica: Aplicaciones Numéricas*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2003.
- [10] J. A. Font. Numerical hydrodynamics in general relativity. *Living Reviews in Relativity*, 6:4, 2003.
- [11] J. A. Font, T. Goodale, S. Iyer, M. Miller, L. Rezzolla, E. Seidel, N. Stergioulas, W. M. Suen, and M. Tobias. Three dimensional numerical general relativistic hydrodynamics II: Long-term dynamics of single relativistic stars. *Physical Review D*, 65:1–18, 2002.
- [12] J. A. Font, M. Miller, W. M. Suen, and M. Tobias. Three dimensional numerical general relativistic hydrodynamics I: Formulations, methods and code test. *Physical Review D*, 61:1–26, 2000.

- [13] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics, Course of Theoretical Physics, Volume 6*. Oxford: Pergamon, 1987.
- [14] R. J. Leveque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhauser Verlag, Basel, 1992.
- [15] J. M. Martí and E. Muller. Extension of the piecewise parabolic method to one-dimensional relativistic hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 123:1–14, 1996.
- [16] J. M. Martí and E. Muller. Numerical hydrodynamics in special relativity. *Living Reviews in Relativity*, 6:7, 2003.
- [17] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [18] J. R. Oppenheimer and G. Volkoff. On massive neutron cores. *Physical Review*, 55:374–381, 1939.
- [19] R. D. Richtmyer and K. Morton. *Difference Methods for Initial Value Problems*. Interscience Publishers, New York, 1967.
- [20] B. F. Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge University Press, 1985.
- [21] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. Gravitational collapse of neutron stars and black holes: computer generation of spherical spacetimes. *The Astrophysical Journal*, 235:199–215, 1980.
- [22] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [23] L. Smarr and J. W. York, Jr. Kinematical conditions in the construction of spacetime. *Phys. Rev. D*, 17(10):2529–2552, 1978.
- [24] G. A. Sod. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 27:1–31, 1978.
- [25] R. C. Tolman. Static solutions of Einstein’s field equations for spheres of fluid. *Physical Review*, 55:364–373, 1939.
- [26] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1999.
- [27] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [28] J. R. Wilson and G. J. Mathews. *Relativistic numerical hydrodynamics*. Cambridge University Press, 2003.
- [29] J. W. York, Jr. Kinematics and dynamics of general relativity. In L. Smarr, editor, *Sources of gravitational radiation*, pages 83–126, Cambridge, UK, 1979. Cambridge University Press.