



# **UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

## **FACULTAD DE QUÍMICA**

**PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL CURSO DE  
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I DEL PLAN DE BACHILLERATO  
DE CCH**

**TESIS  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERO QUÍMICO**

**PRESENTA**

**ALEJANDRO SEGOVIA HERNÁNDEZ**



**México, D. F.**

**AÑO 2011**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

**PRESIDENTE:**                   **Profesor: CESAR ALEJANDRO RINCÓN ORTA**

**VOCAL:**                           **Profesor: EUGENIO LEÓN FAUTSCH TAPIA**

**SECRETARIO:**                   **Profesor: MANUEL VÁZQUEZ ISLAS**

**1er. SUPLENTE:**                   **Profesor: OSCAR JESÚS RENDON GÓMEZ**

**2° SUPLENTE:**                   **Profesor: INGRID ESCOBEDO ESTRADA**

**SITIO DONDE SE DESARROLLÓ EL TEMA: FACULTAD DE QUÍMICA Y  
CENTRO DE INTEGRACIÓN EDUCATIVA A.C. MÉXICO D.F.**

**ASESOR DE TEMA:**

**MANUEL VÁZQUEZ ISLAS**

\_\_\_\_\_

**SUSTENTANTE:**

**ALEJANDRO SEGOVIA HERNÁNDEZ**

\_\_\_\_\_

**Propuesta didáctica para  
el curso de  
Cálculo Diferencial e Integral I  
Del Plan de bachillerato de CCH**

**Alejandro Segovia Hernández  
Asesor: Manuel Vázquez Islas  
Facultad de Química UNAM  
México, 2011**

## Índice

<b>Introducción .....</b>	<b>5</b>
<b>Capítulo I: Fundamento pedagógico.....</b>	<b>6</b>
<b>Capítulo II: Teoría de Vigotsky .....</b>	<b>19</b>
<b>Capítulo III: Mapas Conceptuales .....</b>	<b>32</b>
<b>Capítulo IV: Evaluación .....</b>	<b>42</b>
<b>Capítulo V: La educación en el aula .....</b>	<b>52</b>
<b>Capítulo VI: Propuesta Didáctica .....</b>	<b>59</b>
<b>Conclusiones .....</b>	<b>96</b>
<b>Bibliografía .....</b>	<b>98</b>
<b>Anexo I.....</b>	<b>101</b>
<b>Anexo II .....</b>	<b>108</b>

## ***Educar es liberar gradualmente al individuo***

### Introducción

El mundo es dinámico, la educación también, aunque resulte de las actividades que menos cambia, y posea atributos permanentes como son la transmisión y la enseñanza, sabemos que se adapta, más o menos rápido, a las nuevas necesidades y las nuevas circunstancias. Cambia de acuerdo al país, al momento histórico, que se vive, por ello es necesario mantener una actitud de adaptación y de adecuación de la metodología.

—La educación es todo aquello que hacemos por nosotros y que los demás hacen por nosotros, con el objetivo de acercarnos a la perfección de nuestra naturaleza. En su expresión más amplia, comprende los efectos indirectos que norman el carácter como son: las facultades humanas congénitas y el medio ambiente que incluye: las formas de gobierno, las leyes, el arte, la ciencia, la industria, la vida social, la moda y los factores físicos: la posición geográfica y el clima” Stuart Mill, J.

En este momento, la enseñanza está al servicio de la educación y de la formación de individuos. Ya está superada la época en donde lo importante se centraba en la simple transmisión de información y conocimientos. El verdadero conocimiento se logra cuando los datos empíricos que se asimilan adquieran significado, pues únicamente cuando los hechos cobran sentido gracias a conceptos, principios, leyes y teorías generales, se puede hablar de un —conocimiento” verdadero. Las matemáticas son una de las materias que presentan un alto índice de reprobación, desencadenando la frustración en los alumnos y con ello el alejamiento de todo lo que tenga que ver con ellas. De ahí que los alumnos busquen carreras que no involucren a las matemáticas. Por ello la enseñanza de estas, debe ser una prioridad. En este trabajo propondremos algunas herramientas y técnicas específicas para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral. El siguiente trabajo es una propuesta para el curso de —CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I” correspondiente al plan 1996 modificado en 2003, del sistema de CCH incorporado a la UNAM, cuya clave es 1501 y corresponde a una materia optativa del último año del bachillerato.

En primer lugar describiremos los fundamentos teóricos y pedagógicos sobre los que descansa la propuesta didáctica del colegio; —Centro de Integración Educativa A.C.” desde las bases humanistas: Carl Rogers, hasta las últimas propuestas: construcción de mapas conceptuales y técnicas de competencias. En estas secciones se pondrá de manifiesto las estrategias empleadas para la construcción del conocimiento, detallando mecanismos y técnicas, también se enumerarán las características, las actitudes de los docentes, así como de los estudiantes respecto a las actividades académicas y su posterior evaluación y/o retroalimentación. Para finalizar presentaremos la propuesta para desarrollar el curso antes mencionado, acorde a la filosofía de la Institución y las corrientes expuestas. En la actualidad contamos con algunos aspectos que favorecen este trabajo, específicamente el uso de las computadoras y las calculadoras, así como a la investigación de las técnicas de enseñanza que se desarrolla día con día y que se encuentran tan a la mano, otro aspecto es el intercambio de experiencias educativas que se pueden tener gracias al Internet.

## Capítulo I

### Fundamento pedagógico

El Centro de Integración Educativa A.C. es una institución que se dedica a impartir educación sin fines de lucro desde 1971. Desde su fundación la educación es su único propósito, el modelo educativo que lo sustenta es la educación centrada en la persona.

Este modelo está basado principalmente en la Filosofía de Carl Rogers; Rogers es un Psicólogo egresado de la Universidad de Columbia, donde recibió su doctorado en 1928, y un doctorado en filosofía en 1931. En el año de 1940 su vida cambio radicalmente después de aceptar la cátedra de psicología en la Universidad Estatal de Ohio. Es en este lugar es donde empieza a desarrollar sus ideas acerca de la psicoterapia. Para el año de 1945 se muda a la Universidad de Chicago, donde aparte de impartir su cátedra de psicología dirige un centro de asesoramiento. Es en este periodo escribe uno de sus principales libros: "Client-centred therapy: its current practice, implications and theory". Se cree que en esta etapa empezó a esbozar su teoría de la personalidad. En 1957 se traslada a la Universidad de Wisconsin donde se desempeña como profesor de psicología y de psiquiatría. Finalmente en 1964 acepta el puesto como miembro residente del Western Behavioral Sciences Institute en La Jolla, California. Allí mismo crea el Centro de Estudios para la Persona, donde trabajó hasta su muerte. (Boeree, George. 2003)

Rogers murió en La Jolla, California el 4 de Febrero de 1987, visitaba frecuentemente México, especialmente Taxco, en donde vacacionaba regularmente. Fue por más de cuatro décadas la figura central de la corriente llamada psicología humanista, difundida principalmente en Estados Unidos y en México.

Sus obras más relevantes:

- 1942 "Counseling and psicoterapy"
- 1945 "Client-centred therapy: its current practice, implications and theory"
- 1961 "On becoming a person"
- 1969 "Freedom to learn"
- 1970 "Carl Rogers y los grupos de encuentro"
- 1972 "Convertirse en compañeros: el matrimonio y sus alternativas"
- 1977 "Carl Rogers on personal power" 1980 "A way of being"( Boeree, George. 2003)

Su teoría se basa en considerar a las personas como inicialmente buenas o saludables, o por lo menos no malas ni enfermas. En su teoría, considera la salud mental como la progresión normal de la vida, y entiende la enfermedad mental, la criminalidad y otros problemas humanos, como distorsiones de la tendencia natural. Se puede decir, que la teoría de Rogers es en principio simple e incluso ¡elegante! En toda su extensión, la teoría de Rogers está construida a partir de una sola fuerza de vida" a la que llama, la tendencia actualizante. La cual puede definirse como la motivación innata presente en

todo organismo, dirigida a desarrollar sus potenciales hasta el mayor límite posible. Aquí es necesario entender que no se trata del concepto de sobrevivencia: Rogers sostiene que todas las criaturas persiguen hacer lo mejor de su existencia, y si fallan en su propósito, no será por falta de deseo. (Rogers. 1972)

—Rogers resume en esta gran única necesidad o motivo, todos los otros motivos que los demás teóricos mencionan. Nos pregunta, ¿Por qué necesitamos agua, comida y aire?; ¿Por qué buscamos amor, seguridad y un sentido de la competencia? ¿Por qué, de hecho, buscamos descubrir nuevos medicamentos, inventar nuevas fuentes de energía o hacer nuevas obras artísticas? Rogers responde: porque es propio de nuestra naturaleza como seres vivos hacer lo mejor que podamos.”(Boeree, George. 2003), estas ideas se pueden trasladar a la educación, de tal forma que se puede acuñar el término —Educación centrada en la persona”, parafraseando el título del libro "Client-centred therapy: its current practice, implications and theory", que junto a la corriente pragmática se manifiesta en el proceso de terapia y el concepto de aprendizaje significativo. Sólo aprenderemos lo que nos es útil (Rogers, Carl R. 1980: 241-245).

Carl Rogers parte del hecho de que toda persona tiene fuerzas internas, que son constructivas de la personalidad y que necesitan manifestarse siempre y cuando se les deje operar. La persona tiene una tendencia innata al desarrollo y a la superación. En su libro "Psicoterapia centrada en el cliente", esboza su teoría psicológica. Las siguientes proposiciones:

- "El organismo tiene una tendencia o impulso básico a actualizar, mantener y desarrollar al organismo experienciante" (Rogers, Carl R. 1977: 414)
- La persona necesita crecer, no que se le cultive. Solamente requiere contar con las condiciones propicias para desarrollarse. No hay que desarrollar estas fuerzas; debemos permitir que se desarrollen.
- La tendencia a la actualización es inherente al hombre. Debido a ésta, el hombre se ve impulsado a ser lo que genéticamente está diseñado para ser.
- Otro supuesto de Rogers relativo a la naturaleza humana es la idea del que el hombre se encuentra en un continuo devenir. Todo cambia, tanto la persona misma como su entorno.
- "Todo individuo vive en un mundo continuamente cambiante de experiencias de las cuales es el centro" (Rogers, Carl R. 1977: 410).
- Se descartan del lenguaje los términos paciente, enfermo, curación, diagnóstico, etc., porque connotan dependencia, limitación y falta de respeto por la persona.

Rogers sostiene que el hombre, es positivo por naturaleza, y por ello requiere respeto absoluto, especialmente en lo que se refiere a sus aspiraciones de superación (Di Caprio, 1976). De aquí deducimos que está contraindicado para el docente/psicoterapeuta realizar todo tipo de conducción o dirección sobre el individuo; ya que cualquier tipo de diagnóstico o interpretación, constituye un atentado contra las posibilidades del sujeto y

contra su tendencia a la actualización. Por ello se recomienda, situarse en el punto de vista del cliente, asumir su campo perceptual y trabajar en base a ello como una especie de alter ego. —Incluso la palabra "cliente" es asumida de una manera especial: el cliente es aquella persona que responsablemente busca un servicio y participa del proceso terapéutico de la misma manera; aquella, consciente de su capacidad de desarrollo no utilizada, que no va "en busca de ayuda" sino que trata de ayudarse a sí misma" (Vásquez, 2002)

Es importante notar que en el lenguaje de Roger se descartan los términos: paciente, enfermo, curación, diagnóstico, etc., porque connotan dependencia, limitación y falta de respeto por la persona. Esta actitud debe ser borrada frente a la dignidad del paciente, la aceptación y respecto deben estar enraizados en la personalidad del terapeuta, formar parte esencial de su ser. —En resumen, la hipótesis central propone que el ser humano puede, si se le presentan las condiciones adecuadas, desarrollarse o actualizarse, ampliar sus capacidades y ser consciente de lo que experimenta a fin de poder auto controlarse." (Vásquez, 2002). "No se puede manejar eficazmente lo que no se percibe conscientemente", propone Rogers. De allí la necesidad de ampliar el concepto de sí mismo del cliente, su self, y de incluir en él todo (o casi todo) lo que vivencia. Pero no se pretende hacerlo actuando sobre él sino, como dice Kinget, "acompañándolo" en la experiencia, brindándole las condiciones requeridas y dándole seguridad (Rogers y Kinget, 1971).

Parafraseando a Claudio Naranjo (1991) cuando habla de la terapia gestáltica, la psicoterapia centrada en el cliente no está conformada básicamente por técnicas sino, esencialmente, por actitudes del terapeuta, las mismas que pueden ser instrumentalizadas de diversa manera. Se consideran así dos factores:

- 1) La actitud que tiene el terapeuta, su filosofía operacional básica frente a la dignidad y la significación del individuo (hipótesis básica), y
- 2) Su instrumentalización a través de métodos adecuados. Las actitudes del terapeuta deben ser transmitidas de manera indirecta, impregnadas en las comunicaciones pero no formuladas abiertamente en ninguna de ellas.

A veces esto no es comprendido plenamente y por esta razón algunos asumen que la actitud centrada en el cliente consiste en ser pasivos e indiferentes, en "no entrometerse". Pero ello es incorrecto y, más aún, es nocivo, porque la pasividad de hecho es asumida como rechazo; además, suele terminar por aburrir al sujeto al ver que no recibe nada. Si hay respeto sincero y absoluto, procurará más bien que sea el cliente quien dirija el proceso. En este caso las intervenciones del terapeuta se plantearán como posibilidades, casi como ecos del material expuesto, y no como juicios de valor, afirmaciones o interpretaciones. (Vásquez, 2002)

Según Rogers, cuando las condiciones terapéuticas están presentes y se mantienen, es decir que:

- Existe una relación de contacto entre cliente y terapeuta;

- Una situación de angustia y desacuerdo interno en el cliente;
- Una situación de acuerdo interno en el terapeuta;
- Sentimientos de respeto, comprensión, aceptación incondicional y empatía en el terapeuta; entonces se pone en marcha, motivada por la tendencia innata a la actualización, cierto proceso que podemos catalogar de terapéutico, el mismo que constaría de las siguientes características:
- Aumento en el cliente de la capacidad para expresar sus sentimientos de modo verbal y no verbal.
- Estos sentimientos expresados se refieren más al Yo.
- Aumenta también la capacidad de distinguir los objetos de sus sentimientos y de sus percepciones.
- Los sentimientos que expresa se refieren cada vez más al estado de desacuerdo que existe entre ciertos elementos de su experiencia y su noción del Yo.
- Llega sentir conscientemente la amenaza que lleva consigo este estado de desacuerdo interno. La experiencia de amenaza se hace posible gracias a la aceptación incondicional del terapeuta.
- Gracias a ello el cliente llega a experimentar plenamente (al convertir el fondo en figura) ciertos sentimientos que hasta entonces había deformado o no confesado.
- La imagen del Yo (sí mismo, self) cambia, se amplía, hasta permitir la integración de elementos de la experiencia que no se hacían consientes o se deformaban.
- A medida que continúa la reorganización de la estructura del Yo, el acuerdo entre esta estructura y la experiencia total aumenta constantemente. El Yo se vuelve capaz de asimilar elementos de la experiencia que antes eran demasiado amenazadores para que la conciencia los admitiera. La conducta se vuelve menos defensiva.
- El cliente/alumno es cada vez más capaz de sentir y admitir la aceptación del terapeuta sin sentirse amenazado por esta experiencia.
- El cliente/alumno siente una actitud de aceptación incondicional respecto a sí mismo.
- Se va dando cuenta que el centro de valoración de su experiencia es él mismo.
- La valoración de su experiencia se hace cada vez menos condicional, y se lleva a cabo sobre la base de experiencias vividas. El cliente evoluciona hacia un estado de acuerdo interno, de aceptación de sus experiencias.

Rosemberg sintetiza la participación y el rol del terapeuta en el proceso antes mencionado: "El terapeuta es la verdadera persona que realmente comprende las vacilaciones y debilidades del cliente/alumno y las acepta, sin intentar negarlas o corregirlas. Acepta, aprecia y valora al individuo íntegro, dándole, incondicionalmente, seguridad y estabilidad en las relaciones que necesita para correr el riesgo de explorar nuevos sentimientos, actitudes y conductas. El terapeuta respeta a la persona tal como es, con sus ansiedades y sus miedos, por lo que no le impone criterio alguno sobre cómo debe ser. La acompaña por el camino que ella misma se traza, y participa como elemento presente y activo en este proceso de auto creación, facilitando en todo

momento la percepción de los recursos personales, y de los rumbos seguidos en el camino, tal y como la persona los vive" (Rogers y Rosemberg, 1981; Págs. 75-76).

—Las características personales que Rogers considera necesarias en todo buen terapeuta que intente instrumentalizar su enfoque son las siguientes: a) Capacidad empática; b) Autenticidad; c) Consideración positiva incondicional. Los rasgos mencionados no son innatos o imposibles de aprender. Rogers y Kinget (1971) consideran que hasta una persona autoritaria puede desarrollar actitudes no directivas; lo principal, el inicio digamos, es el deseo real de querer adoptarlas. El proceso restante viene solo y se adquiere en la práctica terapéutica, aunque puede ser catalizado a través del entrenamiento" (Vásquez, 2002) Aquí tenemos que entender que el terapeuta será el maestro y el cliente, el alumno.

En la relación terapéutica el facilitador expresa y comunica las actitudes básicas a través de las siguientes habilidades:

Establecimiento del rapport (relación): es el clima de confianza básica que se le brinda al cliente, la calidez y apertura transmitida por medio de la voz, ritmo lenguaje no verbal, actitud y cercanía. Se inicia desde el primer contacto y se va consolidando conforme avanza el proceso.

Atención Física: Es estar presente para el otro e involucra:

- El ambiente que los rodea.
- La postura corporal del terapeuta con respecto al cliente:
- Sentarse frente a él y al mismo nivel, ni más arriba, ni más abajo.
- Inclinación hacia delante.
- Mirar a la cara.
- Mantener contacto visual.
- Mantener una postura abierta.
- Procurar mantenerse relajado.

Atención Psicológica: al igual que en la atención física es estar presente para el otro, pero en este caso involucra, además:

- Lo que uno hace mientras presta atención
- Atender la conducta no verbal y la conducta paralingüística del otro como el tono de voz, inflexiones, énfasis, pausas, etc.....
- Responder a la comunicación total del cliente
- Escuchar la conducta verbal del otro, no sólo las palabras y oraciones, también sus formas, sentimientos, contenidos, metáforas, su construcción y las imágenes que maneja así como la elección que hace de las palabras.
- La habilidad para entender al cliente desde su marco de referencia. El orientador no puede ser un oyente selectivo.

Escucha Activa, implica:

- Poner toda la atención, no distraerse
- No suponer, confirmar
- Resumir principales ideas o conceptos
- No distorsionar o bloquear la información
- No interrumpir a menos que sea necesario
- Hacer preguntas abiertas que ayuden a clarificar tu entendimiento.

Verbalización clara y concreta: las intervenciones del orientador son precisas, dirigidas a lo relevante. Cuida que se atienda a un solo tema a la vez. Plantea una sola pregunta a la vez y su lenguaje es claro.

- Captación del tema central: el orientador no puede divagar o dispersar la energía. Captar el tema central es indispensable para que el trabajo sea profundo.
- Comunicación de la comprensión empática: el orientador la comunica de manera verbal a través de las técnicas que utiliza y de manera no verbal a través de sus actitudes.
- Evitación de juicios o consejos: el orientador necesita tener la habilidad de comunicarse y orientar a través de un lenguaje carente de juicios o consejos.
- Evitación de actitudes condescendientes o manipuladoras: el orientador necesita tener la claridad de no proyectar sus intereses, expectativas o deseos en el cliente de manera que no –el eche porras ni lo pobrete” o lo manipule de ninguna manera. Es importante no confundir la compasión y la lástima. El primero es un sentimiento básico y necesario para poder dar orientación y/o terapia y el segundo es una devaluación del cliente y de sus recursos. Asimismo debe evitar manipular al cliente en cualquiera de sus formas, a través de la adulación y/o intimidación, para lograr que él haga lo que el orientador opina que es mejor para el cliente, para retenerlo en terapia o para cualquier otro fin.

Evitar las interpretaciones: Se corre el riesgo de reforzar las defensas del cliente/alumno o de fomentar la dependencia hacia el terapeuta

Estas actitudes están retomadas del proceso psicoterapéutico y como lo menciona Ana María González en su libro *La educación centrada en el niño* también son indispensables en la relación alumno-profesor.

“A. Congruencia (autenticidad): Es ser uno mismo, es no adoptar roles o máscaras. Es estar atento y abierto a sus sentimientos y actitudes que en ese momento están aflorando. Es ser genuino, auténtico, espontáneo y ser consistente. Significa, entonces, que en la relación terapéutica, los sentimientos que el facilitador esté experimentando sean accesibles a él, a su conciencia y sea capaz de vivirlas en la relación y comunicarlos si así fuera pertinente. La congruencia en el psicoterapeuta tiene que ver directamente con la veracidad de sus acciones y actitudes. La veracidad está entre su hacer-sentir-pensar, que se correlacionan y se corresponden entre sí”.

—La congruencia tiene una relación directa con un referente específico, con una convicción duradera respecto de los conocimientos específicos de la filosofía existencial y las teorías humanistas. Esta organización de cogniciones está estrechamente ligada a una carga afectiva que le da sentido a la vida. La congruencia no es un instante de reacción, se puede ser congruente y honesto con las limitaciones personales que van en contra de la visión del ser humano desde el humanismo. En este sentido la congruencia es un acto permanente que prevalece a pesar de las limitaciones personales del músico terapeuta; a fin de cuentas, cuando se decide trabajar con un modelo psicoterapéutico se aceptan no sólo las herramientas de trabajo, también se define una forma de vida y una visión del ser humano. La honestidad del músico terapeuta no sólo radica en relación consigo mismo, sino también en relación con sus convicciones.

La honestidad es consigo mismo, y si los fundamentos son parte de sí mismo debe asumirse que nuestras propias limitaciones son formas de contradecirnos y de ser incongruentes. Ser congruente significa estar en armonía interna con las distintas partes del ser. La congruencia viene de la integridad del terapeuta, por ello es importante asentar que la congruencia guarda una relación íntima entre componentes emotivos y cognitivos que se observan claramente en la conducta de la persona. La congruencia es más duradera que la reacción neurótica y, sobre todo, no genera pendientes con el paciente. Cuando se fluye auténticamente a través del afecto o cualquier otro sentimiento por un paciente, sin que haya enganches neuróticos, se puede experimentar la correspondencia de nuestro sentir con nuestro pensar y nuestro hacer. Se puede ser aparentemente congruente con alguna reacción personal del terapeuta con el paciente, pero esto va en contra de un cuerpo mayor a la individualidad del terapeuta, esto es, su sentido humanista. Las preguntas que pueden guiarnos son: ¿Con qué decido ser congruente? ¿A qué necesito serle fiel? ¿Desde cuál lugar interno estoy facilitando? Las respuestas serán una responsabilidad del terapeuta a ejercer [Muñoz, 2008: 139-140]”.

—B. Empatía: Es la capacidad para sumergirse en el mundo subjetivo del otro, participar en su experiencia, ver el mundo tal cual lo ve. Es comprender las experiencias de la persona tal como las vive y las siente, sin modificarlas ni agregarle significados propios. Es pues ponerse en los zapatos del otro como si fueran los nuestros, pero sólo como si lo fueran, sin apropiárselos. No perder la propia identidad.

C. Aceptación Positiva Incondicional (consideración positiva o aprecio positivo incondicional): Significa recibir a la persona cálidamente y con un profundo respeto y aceptación de su ser tal cual es en ese momento de su proceso, con sus sentimientos positivos y negativos, sin juzgar, imponer y/o aconsejar; aún cuando no se esté de acuerdo en la manera en que percibe el mundo, cómo piensa, siente, actúa o vive su vida. Es respetar al otro porque es valioso por ser humano. La consideración positiva incondicional es un valor expresado conductualmente por el orientador.”

La consideración positiva incondicional es un valor expresado conductualmente por el orientador, sus cimientos son la creencia y la fe en la

naturaleza humana, sobre las capacidades de cada individuo para desarrollar su potencia y auto realizarse. Víctor Muñoz define esta actitud, como tener confianza en el potencial humano:

—Si no consideráramos la fuerza de la naturaleza espiritual en las personas no habría nada que hacer en nuestra labor profesional. Los humanos permaneceríamos condenados a ser lo que fuimos en nuestra niñez. El desarrollo del potencial humano tiene que ver directamente con el crecimiento de nuestra conciencia. Esto justifica las distintas propuestas del humanismo por crear en la psicoterapia un espacio en donde el paciente se descubra a sí mismo y que sea él quien decida por su vida, ya que sólo él sabe mejor que nadie sobre sí mismo” [Muñoz, 2008: 139-140]

También se usan los modelos de ayuda y relación interpersonal de Gerard Egan, que aunque se utilicen en la psicología nos son muy útiles en el proceso Enseñanza- aprendizaje.

#### Fase de Pre ayuda

En esta fase, la meta del docente es prestar atención tanto física como psicológica; estar con el otro a través de la escucha activa, debe manifestar y promover que la persona experimente las actitudes de congruencia, empatía y valoración positiva. Esta fase se refiere solamente al orientador y las destrezas necesarias, se resume en una sola palabra atender. Esto se hace durante todo el tiempo que ambos están juntos y es por medio de la atención física y psicológica.

Los elementos básicos de la atención física:

- a) Dirigirse hacia el otro, verlo cara a cara: Se recomienda tomar una posición en la que se pueda estar frente al otro, tener una imagen visual del otro lo más completa que se pueda, otorgándole toda la atención física a él. El rostro se puede visualizar en dos cuadrantes: superior e inferior, donde el punto central es la nariz, y de allí intercalar visualizar hacia la boca y hacia los ojos promoviendo cada vez el mayor acercamiento sin amenazas a la comunicación directa.
- b) Adopción de una postura abierta: No adoptar una postura defensiva o cerrada, se recomienda no cruzar brazos ni piernas. Como signo de que el terapeuta está con la disponibilidad y el deseo de escuchar al otro y comprenderlo.
- c) Dirección del cuerpo hacia el otro: Se trata de que el terapeuta incline el cuerpo hacia el de la persona en proceso de una manera discreta que no amenace; es una señal de presencia, disponibilidad y entendimiento.
- d) Contacto ojo a ojo: Mantener un buen contacto ocular, que significa mirar directamente a los ojos, de una manera no rígida y amenazante. En este contacto, no se debe transmitir poder sino que sobresalga la atención que se está brindando.
- e) Posición relajada y cómoda: Mantenerse relativamente relajado, con una posición que denote el gusto de estar con la persona en proceso,

una posición tranquila, no rígida o donde se vea tenso nuestro cuerpo. No se trata de mostrar una posición de descanso, sino de atención y disponibilidad hacia el otro.

- f) Eliminar movimientos y muletillas innecesarios: Tratar de evitar movimientos repetitivos o de palabras como —es”, —bueno”, —aj”, etc. Que podrían distraer la atención del terapeuta; y que además pueden obstaculizar tanto la autoexploración como el auto entendimiento de la persona en proceso.

Los elementos de la atención psicológica:

- a) Cubrir los elementos de la atención física: Empieza desde identificar la comodidad y adecuación del espacio físico y el mobiliario, de manera que favorezcan prestar atención directa hacia la persona en proceso y que genere un clima propicio sin distractores muy evidentes dentro del espacio. Posteriormente cubrir los elementos de la atención física implica que el terapeuta: cuide la posición corporal ante la persona en proceso, la mire cara a cara, tenga contacto ocular, tenga una postura inclinada hacia ésta y que evite movimientos y muletillas innecesarios.
- b) Ser congruente ante la persona: Consiste en que el terapeuta sea coherente entre lo que siente y expresa verbalmente y de manera no verbal hacia la persona en proceso. Que concuerde lo que dice con sus gestos, ademanes, postura, posición, tono de voz entre otros elementos. Para ello es importante tener un contacto consigo mismo para estar en proceso de autoexploración frecuente y estar atento a su manera de expresarse.
- c) Ser empático, capaz de comprender al otro: Implica que el terapeuta comprenda a la persona en proceso desde su marco de referencia como si fuera él mismo. Reconocerlo como persona diferente y valiosa por el hecho de ser humano, y comunicarle esto a partir de las actitudes de respeto hacia su persona, sin juicios de valor ante los sentimientos, conductas y experiencias que expresa.
- d) Mostrar valoración positiva hacia la persona: Consiste en un interés auténtico hacia la persona en proceso sin evaluaciones ni condicionado su forma de ser, sino comprendiendo que es una persona y el interés del terapeuta no se modifica independientemente de lo que piense, sienta, diga o haga.
- e) Que la persona perciba estas actitudes, las cuales se manifestarán por parte del terapeuta de manera implícita en todo momento: No se deben tomar como técnicas sino formas de estar y percibir a la otra persona; si el terapeuta vive cada una de estas actitudes se podrá generar un clima psicoterapéutico de libertad, respeto y confianza, lo cual se verá reflejado en la disponibilidad de la otra persona en compartir su vida íntima.
- f) Atender las pistas no verbales y paralingüísticas de la persona: Es importante la conducta no verbal (movimientos corporales, gestos, expresiones faciales) y paralingüística (tono de voz, inflexiones, espacio entre palabras, énfasis, pausas, etc.). El terapeuta no solo debe centrarse en el contenido del discurso de la persona en

proceso, sino en la manera en que lo dice ya que esto brinda la posibilidad de comprender más ampliamente el mundo del otro; y sobre todo facilitar a la persona en proceso darse cuenta de algunos sentimientos que no puede expresar claramente.

### El aprendizaje significativo

Por principio daremos un breve recorrido por lo que se considera aprendizaje significativo, para empezar debemos definir lo que es el aprendizaje: El aprendizaje es un proceso por el cual se adquieren conocimientos, habilidades, valores, actitudes, aptitudes, siempre utilizando el estudio, la enseñanza o por medio de la experiencia. Se puede entender, desde el punto de vista de la psicología conductista, como los cambios observables en la conducta del sujeto. En general podemos distinguir, desde la psicología, varios tipos de aprendizaje: el aprendizaje receptivo; El sujeto comprende el contenido y lo puede reproducir sin embargo no descubre nada nuevo. El aprendizaje por descubrimiento; los contenidos no se reciben de manera pasiva sino que se van adhiriendo a la persona hasta hacerlos propios y adaptarlos al esquema cognitivo, el aprendizaje repetitivo; el que se produce cuando se memorizan los datos y contenidos sin comprender para aplicar posteriormente o para modificar y proponer una nueva idea. Y el aprendizaje significativo; aquel en el que el sujeto relaciona sus conocimientos previos y los interpreta a raíz de los nuevos para que se enriquezcan y construya una mayor estructura del concepto. (González, Órnelas, 2001)

Dentro de este modelo es importante considerar a la persona, ya que reconocemos que esta no solo es el pensamiento, sino que también una parte importante es la afectividad y cuando se considera a la persona de forma íntegra; pensamiento y afecto, en ese momento se puede lograr enriquecer el significado de su nuevo conocimiento. La práctica docente debe considerar los tres elementos del proceso: los docentes con sus particularidades y su forma de enseñar; por otro lado las propuestas curriculares así como la estructura de los conocimientos que los conforman y finalmente el momento histórico-social en el que se desarrolla el proceso.

Hoy el desarrollo de este proceso se estudia desde la perspectiva de un marco psicoeducativo, ello debido a que la Psicología, en el área educativa, ha tenido un importante papel en la explicación de la naturaleza del aprendizaje en todos los ámbitos, incluso en el salón de clases y los factores que lo influyen, con la ayuda de estos elementos psicológicos los profesores llegan a descubrir los métodos de enseñanza-aprendizaje más eficientes, para ello se puede necesitar una "teoría del aprendizaje" que ofrezca una explicación sistemática, coherente y unitaria del ¿cómo se aprende?, ¿Cuáles son las limitantes del aprendizaje?, por otro lado ¿Porqué se olvida lo aprendido?, para complementar estas teorías también se han desarrollado los "principios del aprendizaje", que se centran en estudiar los factores que influyen para que se dé el aprendizaje, en los que se fundamentará la labor educativa. Si un maestro se basa en lo anterior podrá dejar de usar las técnicas de prueba y error que son recurrentemente utilizadas y que pueden dar éxito después de muchos años de —experiencia—, si en vez de eso las clases están basadas en principios

de aprendizaje bien establecidos, los docentes serán capaces de discernir y elegir nuevas estrategias de enseñanza que le permitirán mejorar la efectividad de su labor. (Ausubel: 1983).

### Teoría Del Aprendizaje Significativo

Esta teoría del aprendizaje significativo fue propuesta y desarrollada por Ausubel, —Es una teoría psicológica porque se ocupa de los procesos mismos que el individuo pone en juego para aprender. Pero desde esa perspectiva no trata temas relativos a la psicología misma ni desde un punto de vista general, ni desde la óptica del desarrollo, sino que pone el énfasis en lo que ocurre en el aula cuando los estudiantes aprenden; en la naturaleza de ese aprendizaje; en las condiciones que se requieren para que éste se produzca; en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación” (Ausubel, 1976). Es una teoría de aprendizaje porque ésa es su finalidad. La Teoría del Aprendizaje Significativo aborda todos y cada uno de los elementos, factores, condiciones y tipos que garantizan la adquisición, la asimilación y la retención del contenido que la escuela ofrece al alumnado, de modo que adquiera significado para el mismo” (Rodríguez Palmero, 2004)

En este proceso de aprendizaje, es importante conocer la estructura cognitiva de los alumnos; no sólo hay que saber la cantidad y calidad de información que posee, sino cuales son los conceptos que maneja así como de su grado de estabilidad. El aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva del que aprende y de sus saberes anteriores de forma no arbitraria y sustantiva. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de ideas de anclaje (Ausubel, 1976, 2002; Moreira, 1997). —La presencia de ideas, conceptos o proposiciones inclusivas, claras y disponibles en la mente del aprendiz es lo que dota de significado a ese nuevo contenido en interacción con el mismo (Moreira, 2000 a). Pero no se trata de una simple unión, sino que en este proceso los nuevos contenidos adquieren significado para el sujeto produciéndose una transformación de ideas de anclaje de su estructura cognitiva, que resultan así progresivamente más diferenciados, elaborados y estables (ibíd.). Pero aprendizaje significativo no es sólo este proceso, sino que también es su producto. La atribución de significados que se hace con la nueva información es el resultado emergente de la interacción entre de ideas de anclaje claras, estables y relevantes presentes en la estructura cognitiva y esa nueva información o contenido; como consecuencia del mismo, esas ideas de anclaje se ven enriquecidos y modificados, dando lugar a nuevas ideas-ancla más potentes y explicativas que servirán de base para futuros aprendizajes. Para que se produzca aprendizaje significativo han de darse dos condiciones fundamentales:

- Actitud potencialmente significativa de aprendizaje por parte del aprendiz, o sea, predisposición para aprender de manera significativa.
- Presentación de un material potencialmente significativo. Esto requiere:

Por una parte, que el material tenga significado lógico, esto es, que sea potencialmente relacionable con la estructura cognitiva del que aprende de manera no arbitraria y sustantiva  
Y, por otra, que existan ideas de anclaje adecuadas en el sujeto que permitan la interacción con el material nuevo que se presenta. ”  
(Rodríguez Palmero, 2004)

Por ejemplo en Matemáticas, si los conceptos de factorización, simplificación de fracciones, operaciones de fracciones ya existen en la estructura cognoscitiva del alumno, estos servirán de anclajes para nuevos conocimientos referidos al Calculo, tales como limites y calculo de límites, para posteriormente darle un significado al concepto de derivada y área bajo la curva, la nueva información con la ya existente, produce una nueva modificación de los conceptos de anclaje (factorización, simplificación de fracciones, operaciones de fracciones.), esto implica que estos conceptos previos, pueden ser conceptos amplios, claros, estables o inestables. Pero que además siguiendo el espíritu con el que se construye la Ciencia son conceptos cambiantes, dinámicos y en constante renovación.

Ausubel resume este hecho en el epígrafe de su obra de la siguiente manera: "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente".

#### Aprendizaje Significativo contra el Aprendizaje Mecánico

Un aprendizaje se convierte en significativo cuando los contenidos, están relacionados con una estructura previamente existente y con un significado específico, como un símbolo, una proposición, un concepto o simplemente con una imagen (Ausubel; 1983). Esto quiere decir que en el proceso educativo, es importante considerar lo que el individuo ya sabe, de manera que establezca una relación con aquello que debe aprender. Este proceso tiene lugar si el educando tiene en su estructura cognitiva conceptos, estos son: ideas, proposiciones estables y definidas, con los cuales la nueva información puede interactuar. En el aprendizaje mecánico, las nuevas ideas y conceptos siempre son nuevos y rara vez se conectan con saberes anteriores. Sin embargo es necesario tener en algún momento el aprendizaje mecánico, ya que es necesario llamar a las cosas por su nombre (Rodríguez Palmero, 2004)

Las Ideas básicas del aprendizaje significativo se pueden resumir como:

1. Los conocimientos previos han de estar relacionados con aquellos que se quieren adquirir de manera que funcionen como base o punto de apoyo para la adquisición de conocimientos nuevos.
2. Es necesario desarrollar un amplio conocimiento meta cognitivo para integrar y organizar los nuevos conocimientos.
3. Es necesario que la nueva información se incorpore a la estructura mental y pase a formar parte de la memoria comprensiva.
4. Aprendizaje significativo y aprendizaje mecanicista no son dos tipos opuestos de aprendizaje, sino que se complementan durante el proceso

de enseñanza. Pueden ocurrir simultáneamente en la misma tarea de aprendizaje. Por ejemplo, la memorización de las tablas de multiplicar es necesaria y formaría parte del aprendizaje mecanicista, sin embargo su uso en la resolución de problemas correspondería al aprendizaje significativo.

5. Requiere una participación activa del alumno donde la atención se centra en el cómo se adquieren los aprendizajes.
6. Se pretende potenciar que el alumno construya su propio aprendizaje, llevándolo hacia la autonomía a través de un proceso de andamiaje. La intención última de este aprendizaje es conseguir que el alumno adquiriera la competencia de aprender a aprender.
7. El aprendizaje significativo puede producirse mediante la exposición de los contenidos por parte del docente o por descubrimiento del alumno.

El aprendizaje significativo trata de la asimilación y acomodación de los conceptos. Se trata de un proceso de articulación e integración de significados. En virtud de la propagación de la activación a otros conceptos de la estructura jerárquica o red conceptual, esta puede modificarse en algún grado, generalmente en sentido de expansión, reajuste o reestructuración cognitiva, constituyendo un enriquecimiento de la estructura de conocimiento del aprendizaje. (Wikipedia 2010)

Las diferentes relaciones que se establecen en el nuevo conocimiento y los ya existentes en la estructura cognitiva del aprendizaje, entrañan la emergencia del significado y la comprensión.

En resumen, aprendizaje significativo es aquel que:

- Es permanente: El aprendizaje que adquirimos es a largo plazo.
- Produce un cambio cognitivo, se pasa de una situación de no saber a saber.
- Está basado sobre la experiencia, depende de los conocimientos previos.

## Capítulo II

### Teoría de Vigotsky

—La enseñanza es buena sólo cuando es previa al desarrollo” Lev Vigotsky.

Lev Semenovich Vigotsky, nació en Bielorrusia en el año 1896 y vive de lleno la Revolución Rusa. Por ello su obra está impregnada por el contexto de la Rusia revolucionaria. Vigotsky estudió Psicología, filosofía y literatura, graduándose en leyes en la Universidad de Moscú en el año 1917. Para el año de 1924, cuando se lleva a cabo el Segundo Congreso de Psiconeurología en Leningrado, por primera vez expuso el núcleo central de su teoría, que manifiesta que sólo los seres humanos poseen la capacidad de transformar el medio para sus propios fines. Es esta capacidad, que los distingue de otras formas inferiores de vida.

Más tarde se une al Instituto de Psicología de Moscú donde escribe un extenso documento sobre la mediación social en el aprendizaje y la función de la conciencia. Sus obras fueron publicadas durante su breve existencia o en los años que siguieron después de su muerte. Debido a factores externos, como el hecho de que en la Unión Soviética, el partido comunista censuraba las pruebas y publicaciones psicológicas y además algunos de sus escritos resultaban contrarios a la filosofía del Partido, sus trabajos nunca fueron publicados. Falleció de tuberculosis en 1934. Pese a su corta existencia, la producción de Vigotsky fue extensa y hasta febril. La Guerra Fría mantuvo desconocido su trabajo en occidente. En los últimos 20 años, la psicología occidental ha redescubierto la obra de Vigotsky, debido, entre otras cosas, a la difusión de obras antes ignoradas. La psicología occidental aún no ha terminado el balance de la obra de Vigotsky y muchos de los textos publicados recientemente son reflejos de los debates despertados por este prolífico psicólogo. (Baquero, 1996)

A diferencia de la teoría de Piaget, que es más biológica, la teoría de Vigotsky se basa principalmente en el entorno sociocultural de cada individuo para determinar el aprendizaje. En su modelo de aprendizaje, el contexto o entorno, ocupa un lugar central. La interacción social es el motor del desarrollo, de ahí Vigotsky introduce el concepto de 'zona de desarrollo próximo' que se define como la distancia entre el nivel real de desarrollo y el nivel de desarrollo potencial, donde influyen mediadores que guían al niño a desarrollar sus capacidades cognitivas. A esto se refiere la ZDP (Zonas de Desarrollo Próximo). Lo que el niño pueda realizar por sí mismo, y lo que pueda hacer con el apoyo de un docente, la ZDP, es la distancia que exista entre uno y otro. Para comprender este concepto hay que tener presentes dos aspectos:

- a) La importancia del contexto social y la capacidad de imitación.
- b) Aprendizaje y desarrollo son dos procesos que interactúan.

De esta forma el aprendizaje debe ser congruente con el nivel de desarrollo del niño. El aprendizaje se produce más fácilmente en situaciones colectivas. La interacción con los padres facilita el aprendizaje. En su teoría, Vigotsky

sostiene que el ser humano tiene inherentemente un código genético o 'línea natural del desarrollo' el cual nombra como —código cerrado”, y que está en función del aprendizaje, en el momento que el individuo interactúa con el medio ambiente.

Para Vigotsky el ser humano es constructivista exógeno, es un sujeto activo, que construye su propio aprendizaje a partir del estímulo del medio social mediante un agente y ejecutado por el lenguaje. Por otra parte el Desarrollo cognitivo lo ve como el producto de la socialización del sujeto en el medio, este se da por condiciones entre las personas (interpsicológicas) que luego son asumidas por el sujeto como intrapsicológicas. El aprendizaje, está determinado por el medio en el cual se desenvuelve y su zona de desarrollo próximo o potencial. Por Influencias Ambientales se entiende a aquellas condiciones ambientales que dan paso a la formación de estructuras más complejas. Vigotsky rechaza totalmente los enfoques que reducen a la Psicología y el aprendizaje a una simple acumulación de reflejos o asociaciones entre estímulos y respuestas él lo denomina como: Origen del desarrollo.

Existen rasgos específicamente humanos no reducibles a asociaciones, tales como la conciencia y el lenguaje, que no pueden ser ajenos a la Psicología. A diferencia de otras posiciones (Gestalt, Piagetiana), Vigotsky no niega la importancia del aprendizaje asociativo, pero lo considera claramente insuficiente. En donde resulta verdaderamente revolucionarios es donde sostiene que el conocimiento no es un objeto que se pasa de uno a otro, sino que es algo que se construye por medio de operaciones y habilidades cognoscitivas que se inducen en la interacción social. Para Vigotsky, el desarrollo de las funciones psicológicas superiores se da primero en el plano social y después en el nivel individual.

En sus estudios sobre la formación de conceptos, Vigotsky parte de la idea que ésta no puede reducirse a meras conexiones asociativas, una idea contraria a las ideas de Pavlov que predominaron en la psicología durante muchas décadas. Vigotsky establece así una pirámide en la cual jerarquiza diferentes formas de conocimiento.

## Conceptos espontáneos y conceptos científicos



"Los Conceptos" espontáneos son:

1. Cúmulos no organizados (conglomeraciones sincréticas): agrupación de objetos dispares sin ninguna base común. La etapa se caracteriza por el uso de palabras como "nombres propios".
2. Pseudoconceptos: Agrupan objetos adecuadamente pero a partir de rasgos sensoriales inmediatos, sin que el sujeto tenga una idea precisa de los rasgos comunes de los objetos. Los pseudoconceptos no sólo aparecen en el pensamiento infantil, porque aunque a partir de la adolescencia, los sujetos ya son capaces de formar auténticos conceptos, los adultos conviven simultáneamente con ambas formas de pensamiento. En la medida en que los pseudoconceptos se basan en una generalización de rasgos generales, éstos son una vía en el camino de la formación de los conceptos genuinos, además de generar conceptos potenciales o la abstracción de un rasgo constante en una serie de objetos.

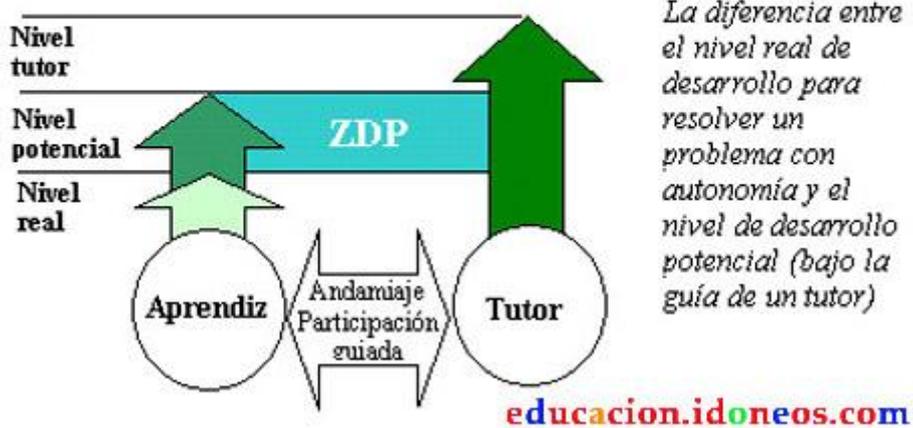
### Conceptos científicos

Conceptos: Estos son los conceptos científicos adquiridos a través de la instrucción. Se caracterizan por:

- a) Forman parte de un sistema
- b) Se adquieren a través de una toma de conciencia de la propia actividad
- c) Implican una relación espacial con el objeto basada en la internalización de la esencia del concepto.

Dado que los conceptos científicos son adquiridos mediante la instrucción, siguen el camino inverso seguido por los espontáneos, esto es mientras que los primeros van de lo abstracto a lo concreto, los segundos van de lo concreto a lo abstracto.

## Zona de desarrollo próximo (ZDP)



La ZDP es la distancia entre el nivel real de desarrollo determinado por la capacidad de resolver independientemente el problema y el nivel de desarrollo potencial determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz.

Los PPE (Procesos elementales) son comunes al hombre y a otros animales superiores, y se corresponden con la línea natural de desarrollo. Ejemplos de PPE son la memoria y la atención. Los PPS (Procesos superiores), que se caracterizan por ser específicamente humanos se desarrollan en los niños a partir de la incorporación de la cultura. Desde este punto de vista, las interacciones sociales y las formas de interpretación de los símbolos, son la unidad de análisis de base sobre la cual se explican los procesos de subjetivación individual. Diferentes experiencias culturales, pueden producir diversos procesos de desarrollo.



Los PPS a su vez se subdividirán en rudimentarios y avanzados. Mientras que los primeros se desarrollan tan solo por el hecho de participar en una cultura (lengua oral), los segundos requieren de la instrucción, lo cual supone un marco institucional particular: la escuela. La lengua escrita y los conceptos científicos son ejemplos de PPS avanzados.

La constitución de los PPS requiere la existencia de mecanismos y procesos psicológicos que permitan el dominio progresivo de los instrumentos culturales y la regulación del propio comportamiento. En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces, primero a nivel social (inter psicológica) y luego a nivel individual (intra psicológica). Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones psicológicas se originan como relaciones entre seres humanos. El lenguaje es el mejor ejemplo puesto que cumple el doble papel de ejemplificar los PPS y es el instrumento central de mediación para la interiorización de los PPS. El concepto de mediador y de aprendizaje mediado tiene su origen en la Teoría Sociocultural de Lev Vygotsky (1934), la cual operacionaliza a través de la llamada Zona de Desarrollo Potencial una forma de lograr aprendizajes duraderos y el desarrollo óptimo de un estudiante con la ayuda de los docentes.



Desde la óptica de la teoría, el profesor actúa como mediador de los aprendizajes del estudiante optimizando la evolución de sus capacidades. Esto ya que, el aprendizaje se realiza por medio de la socialización, sobre todo entre iguales. Esta socialización contribuye de manera decisiva a la incorporación de valores, actitudes, competencias y formas de percibir el mundo.

1. El sujeto humano actúa sobre la realidad para adaptarse a ella transformándola y transformándose a sí mismo a través de unos instrumentos psicológicos denominados "mediadores". Este fenómeno (Mediación instrumental), es llevado a cabo a través de "herramientas" (mediadores simples, como los recursos materiales) y de "signos" (mediadores más sofisticados, siendo el lenguaje el signo principal).
2. La actividad de aprendizaje es una "interactividad", un conjunto de acciones culturalmente determinadas y contextualizadas que se llevan a cabo en cooperación con otros.

Para Vygotsky existen dos niveles:

1. Nivel de Desarrollo Real (NDR): que es el conjunto de actividades que el sujeto puede hacer por sí mismo, de un modo autónomo, sin la ayuda de los demás. Y el
2. Nivel de Desarrollo Potencial (NDP): nivel de actividades que podría alcanzar el sujeto con la colaboración y guía de otras personas, es decir, en interacción con los otros.



Vigotsky plantea los siguientes principios del aprendizaje:

1. Tomar en cuenta el nivel de desarrollo de los alumnos.
2. Fomentar un rol activo del alumno en su aprendizaje.
3. Enfatizar la importancia de la interacción (con padres, profesores y otros alumnos).
4. Hacer énfasis en la reestructuración y reorganización del conocimiento.

Es así como la acción conjunta (interacción) del estudiante y de los que le rodean será el factor que hará posible que el mediador externo llegue a convertir las experiencias en procesos internos. En otras palabras, toda función psicológica aparecerá dos veces: primero entre las personas, inter psicológica, y después en el interior del propio estudiante, intra psicológica. Esta doble formación supone que el aprendizaje se logra por la internalización de los instrumentos externos, los cuales se transforman en procesos de desarrollo que hacen posible la reestructuración mental (Vigotsky, 1979).

Teoría de la Modificabilidad Cognitiva Estructural de Reuven Feuerstein o Modelo del Aprendizaje Mediado Reuven Feuerstein es un pedagogo de origen judío rumano. Nace en Bucarest, donde lo alcanza la Segunda Guerra Mundial. Realiza sus estudios psicopedagógicos en Jerusalén, París y en Ginebra, donde estudió con Rey y Piaget. Para el año de 1944 empieza a trabajar para Youth Aliyah, un servicio de la agencia estatal israelí encargado de recibir y reincorporar a los sistemas educativos, a los niños que habían quedado huérfanos o separados de sus padres durante la guerra, así como a todos aquellos judíos procedentes del norte de África que acudieron a Israel, en la segunda gran oleada de inmigración, en 1950. Pronto descubrió que

muchos de estos niños y adolescentes habían sufrido severos desórdenes emocionales y que además procedían de situaciones sociales, culturales y familiares desfavorecidas y precarias; especialmente, los que fueron víctimas de la guerra y de la persecución racista. (Sciaraffia, 2008)

Para comenzar, utiliza la psicometría tradicional e intenta evaluar los conocimientos y el potencial intelectual de estos adolescentes a fin de elaborar un adecuado programa de educación para su completa recuperación. Después de haberles aplicado las pruebas resulta que los niveles de estos estudiantes eran demasiado bajos. Sin embargo, cuando se les evalúa el IQ, se descubre que tienen un potencial normal. De la necesidad de ayudar a estos jóvenes surge su teoría de Aprendizaje Medido (1980), que resulta ser un planteamiento altamente práctico con características similares a la teoría de Vigotsky, aún cuando Feuerstein ha negado esta cercanía, en cambio sí acepta influencias de Piaget. (Sciaraffia, 2008)

—La Modificabilidad Cognitiva del niño o adolescente implica la capacidad de mejorar su inteligencia por medio de la ayuda de un adulto que hará la mediación oportuna. Feuerstein (1980) define el aprendizaje mediado como la forma en que los estímulos emitidos por el ambiente son transformados por un agente mediador (padre, madre, hermano, profesor u otro). El agente mediador, haciendo uso de sus intenciones, cultura y emociones, selecciona y organiza los estímulos más apropiados para el estudiante, de manera que en futuras situaciones este mismo logre identificar, clasificar y organizar los estímulos más relevantes que debe aprender en una situación, de otros menos importantes” (Sciaraffia, 2008)

Este modelo resulta a primera vista, un método contrario al conductismo en donde los comportamientos se producen independientemente del contexto a través de la confrontación directa con un estímulo (fórmula: Estímulo – Respuesta), la teoría de Reuven Feuerstein sostiene que el conocimiento se logra a través de un mediador (fórmula: estímulo - mediador humano – organismo - mediador humano - respuesta). El mediador humano se interpone entre el estudiante (organismo) filtrando los estímulos que recibe y tratando de interpretarlos y valorarlos con él. Así es como el proceso de mediación, centrado en la modificación cognitiva, afecta la estructura mental del estudiante permitiéndole adquirir nuevos comportamientos, vistos estos como estrategias de aprendizaje, habilidades y actitudes, (Román; Díez, 1988).

Desde esta nueva visión, el papel del docente, se transforma ya que ahora será poseedor de herramientas, habilidades y destrezas, para intervenir en el desarrollo del pensamiento y el aprendizaje, utilizando situaciones problemáticas diseñadas para la ejercitación de operaciones mentales, conductas estratégicas, enriquecimiento del vocabulario e integración de conocimientos en la vida cotidiana. Aunque en principio el concepto de mediación cognitiva se utilizó en el ámbito psicológico, específicamente en el tratamiento orientado a la potenciación de la inteligencia, los últimos años se ha introducido como parte fundamental de las prácticas docentes dentro del salón de clases, dándole al docente la posibilidad de intervenir intencionadamente en el desarrollo de todas y cada una de las facultades psicológicas individuales

y sociales de sus estudiantes, así como de utilizar a otros niños o adolescentes como herramientas para el aprendizaje de sus semejantes. (Sciaraffia, 2008)

Antiguamente el docente se dedicaba a ser un mediador entre el contenido programático de una asignatura y el aprendizaje de sus alumnos, por lo que el diseño de las unidades programáticas, importaba esencialmente la interacción entre esos tres elementos: profesor, programa y alumno. El docente se limitaba a ser el emisor de los conocimientos que habían sido previamente seleccionados, codificados y valorados, lo cual suponía que estos poseían un carácter de eternos e inamovibles. En la medida que dichos contenidos fueran explicados claramente, se suponía que había un aprendizaje de parte de los alumnos, pero si esto no sucedía, entonces era el alumno el que era incapaz de aprender (Román y Díez, 1988).

Gracias al modelo de mediación, el profesor no tiene como tarea transmitir información que él considera significativa para otros, sino más bien resulta ser un puente entre los conocimientos curriculares y una serie de procesos individuales y socioculturales (cognitivos, y emocionales), que darán como resultado aprendizajes válidos para el estudiante, que podrán ser valorados y aplicados en su realidad o contexto de desarrollo. El docente de hoy es un ayudante que sólo interviene entre el niño/ adolescente y el aprendizaje cuando es necesario, experimentando y aprendiendo junto con él. Para el profesor, el estudiante es el constructor de su propio aprendizaje, lo que el alumno puede aprender solo, no ha de ser explicado. De esta manera, el aprendiz moderno es considerado un investigador que se esfuerza para seleccionar, organizar, elaborar y construir sus propios aprendizajes. Estos aprendizajes incluyen conceptos, principios, procedimientos, destrezas, estrategias, actitudes y valores. (Román y Díez, 1988).

—El profesor mediador aportará poniendo en práctica estrategias de mediación en la presentación y abordaje de las tareas de aprendizaje, en la preparación del trabajo independiente, ayudara en la exploración de los procesos y estrategias, en la orientación espacial y direccional, en la producción del raciocinio reflexivo e interiorizado, en la enseñanza de elementos específicos, en la producción de andamiajes con otras áreas de contenido y de la vida cotidiana, facilitando la generalización y la abstracción” (Sciaraffia, 2008)

El proceso de mediación del aprendizaje también es posible entre semejantes, a través de lo que se podría llamar aprendizaje compartido, en donde la función de mediador (fórmula: estímulo - mediador humano - organismo - mediador humano - respuesta) la realizan los propios compañeros. Esta interacción, de hecho, es la que genera la situación de aprendizaje más oportuna (Román y Díez, 1988), dado que comúnmente facilita la solución de conflictos socio - cognitivos, lo que evidentemente hace más fácil la adquisición de nuevos conocimientos y la reestructuración de los esquemas mentales existentes. En definitiva, el trabajo compartido dentro de un grupo propicia la discusión, y esta la re elaboración de conceptos, la contrastación de experiencias, el desarrollo cognitivo (referido al uso adecuado de los procesos y operaciones cognitivas para el aprendizaje) y el desarrollo metacognitivo

(referido a la toma de conciencia y evaluación de las propias estrategias de aprendizaje). (Sciaraffia, 2008).

Este punto resulta muy conveniente ya que se puede utilizar para que los semejantes se ayuden y aprendan mutuamente, ya que al ser tan próximos se pueden entender mejor y además utilizan los mismos lenguajes. Es en ese instante cuando se hacen explícitas las estrategias de aprendizaje que se han utilizado hasta ese momento, de modo que pueden ser evaluadas y, eventualmente, cambiadas por otras que, a partir de la experiencia de los compañeros, podrían ser más eficaces. Tal decisión no se tomará en la medida que los nuevos procesos de comprensión o solución de un problema no sean claros y correctos desde la mirada social del grupo (Feuerstein 1980).

Para que la acción mediadora del profesor sea efectiva, se deben cumplir algunos parámetros relativos a su actuar dentro del aula. Estos pueden resumirse en los siguientes conceptos:

**Intencionalidad:** el docente debe lograr que el estudiante sea consciente de los cambios que se producen en la intencionalidad de su trabajo dependiendo de los estados emocionales y de las operaciones cognitivas que utiliza en cada momento. Si el centro de la mediación es el aprendizaje, a través de la observación, el registro, la comprensión y la experimentación, el estudiante debe llegar a un estado de funcionamiento que le permita distinguir las acciones que debe realizar en cada momento en pos del logro de sus objetivos, y a la vez darse cuenta ante qué factores su intención y motivación aumentan o decrecen, de manera que pueda establecer modificaciones en su manera de actuar.

**Mediación del significado:** la interacción continua y directa entre un mediador y un alumno, facilita la atribución de significados a conceptos, fenómenos o problemas de aprendizaje, ya sea en una fase de observación, registro, comprensión o experimentación. La atribución de significado es esencial en el proceso de aprendizaje, puesto que permite convertir una experiencia o un simple contenido en algo trascendente, al asociarlo con los conocimientos previos que se poseen y reestructurar desde ellos, los esquemas mentales de la persona, lo cual por supuesto, se traduce en aprendizajes más acabados y permanentes.

**Principio de trascendencia:** la calidad de la mediación que un profesor efectúe en un grupo de trabajo, estará en gran medida, determinada por la capacidad de realizar preguntas o desafiar al estudiante de manera tal que este deba ir más allá de la experiencia de aprendizaje mediante la transferencia del conocimiento situaciones diversas, es decir, el conocimiento debe ser aplicado, a través del razonamiento o la práctica, en escenarios en donde es necesaria la aplicación, aun cuando estos no correspondan al tema de estudio directo.

No hay que perder de vista que para llevar a cabo el proceso de mediación es necesario identificar la forma en que aprenden los estudiantes,

ya que el cómo aprenden es reflejo de sus habilidades y destrezas, en primer lugar, el desarrollo de las habilidades cognitivas relacionadas al razonamiento, se pueden dividir a partir de su complejidad, lo cual orientará a su vez el proceso de aprendizaje:

Habilidad cognitiva básica: observar, identificar, localizar, describir, discriminar, constatar, representar. Se ejecuta por medio de identificar el tema o tópico central, localizar informaciones, practicar la producción de textos, resumir.

Habilidad cognitiva operacional: clasificar, ordenar, componer, descomponer, conservar propiedades, hacer anticipaciones, calcular por estimaciones, interpretar, justificar. Sus procedimientos son relacionar una información identificada con otras informaciones, utilizar informaciones en la comprensión o interpretación, establecer relaciones sintácticas - semánticas en la progresión temática (temporalidad, causalidad, oposición, comparación), establecer articulaciones entre una información y otra, comparar informaciones, correlacionar términos, expresiones o ideas que tengan el mismo referente.

Habilidad cognitiva global: analizar, aplicar, evaluar, criticar, juzgar, explicar causas y efectos, presentar conclusiones, elaborar suposiciones, hacer pronósticos, hacer generalizaciones. Se opera de manera general al inferir el sentido de una idea o expresión considerando el contexto y el universo temático, analizar un fenómeno en función de sus efectos, evaluar la naturaleza argumentativa de una idea o razonamiento, deducir de una información explícita otras informaciones implícitas. (Araya Carrasco, 2008)

Por otro lado tenemos las habilidades meta cognitivas, a partir de las cuales se optimizarán los procesos de aprendizaje únicamente en la medida que el estudiante sea capaz de pensar sobre su propio aprendizaje, es decir, en la medida que pueda evaluar las estrategias que utiliza para aprender, para así poder modificarlas o integrarlas cuando sea necesario. En tercer lugar, las habilidades relacionadas a la motivación (iniciativa) y la afectividad (estados de ánimo, clima emocional del grupo de trabajo) resultará un factor que pondrá en marcha o detendrá cualquier proceso emprendido por un estudiante o por un grupo de estudiantes.

Así una vez identificadas estas habilidades y destrezas, y a través de ellas el cómo aprenden los estudiantes, el profesor deberá poner en práctica sus habilidades de mediador, las cuales, entre otras, son:

Capacidad de generar dudas en el estudiante motivándolo a comprender resolver problemas.

Capacidad de administrar los silencios.

Capacidad de orientar la acción mental sin interrumpirla.

Capacidad de facilitar la interiorización de conocimientos y su aplicación diversos contextos.

Capacidad de facilitar la cooperación en el aprendizaje

Capacidad de convertir soluciones individuales en soluciones grupales.

Capacidad de motivar al estudiante a pensar en voz alta.

Capacidad de estar atento a los bloqueos mentales del alumno.

Capacidad de identificar las estrategias cognitivas de aprendizaje del estudiante.

Capacidad de identificar las estrategias meta cognitivas del estudiante.

De esta manera, en una asignatura determinada, la mediación permitirá que un aprendiz desarrolle y ponga en práctica destrezas cognitivas como el representar, inducir, comparar, o elaborar. A su vez, gestionará la evaluación de los aprendizajes logrados y de las formas que se siguieron para conseguirlos. Finalmente, modelará la administración de las propias emociones como herramientas para obtener un mayor éxito académico. (Feuerstein 1980). Una herramienta importante para facilitar el trabajo del mediador es el conocimiento y manejo que tenga de los diferentes tipos de mediación, los cuales podrían ser utilizados en diferentes momentos del trabajo, estos son:

Según el estímulo: interpersonal (el mediador interactúa con un grupo de trabajo reducido intentando facilitar la resolución de problemas esencialmente a través del lenguaje verbal); objetal (el mediador interactúa a través de objetos o procedimientos físicos); intrapersonal (el mediador interactúa consigo mismo, utilizando la reflexión y el razonamiento personal para facilitar el abordaje de un problema).

Según la posición del mediador: directa (el mediador se encuentra físicamente presente, la actuación directa permite una interacción continua y permanente); invocada (el mediador adecua el contexto, acondicionándolo para aquellas ocasiones en las que no se encuentre presente físicamente); vicaria (el mediador fomenta la comprensión de un problema mediante la imitación de un modelo, el cual podría ser él mismo u otro integrante del grupo). (Sciaraffia 2008)

Según el método de enseñanza: modelo – vicario (el mediador expone el problema, enseña procesos o estrategias para llegar a una solución y da posibles respuestas); heurística (el mediador explica el proceso de solución, pero no da la respuesta); semipresencial (el mediador guía con un seguimiento el proceso de los alumnos (as)). (Feuerstein 1980)

—Finalmente, y parafraseando a Vygotsky, la herramienta fundamental del mediador será el lenguaje, y bajo este modelo la pregunta como estrategia principal. En este ámbito existen también tipologías, a saber:

Dirigidas al proceso: ¿Cómo lo has hecho?, ¿Qué estrategias has usado?, ¿Qué dificultades has encontrado?, ¿Cómo has resuelto las dificultades?, ¿Cómo has encontrado el resultado/la respuesta?

De precisión y exactitud: ¿De qué otra manera se podría haber hecho?, ¿Hay otras opciones?, ¿Estás seguro?, ¿Quieres precisar más tu respuesta?, ¿Qué has encontrado?, ¿En qué lugar del ejercicio?, ¿Puedes repetirlo con otras palabras?, ¿Puedes ponerme un ejemplo?

Abiertas y Divergentes: ¿Hay alguna otra solución?, ¿Cómo habéis resuelto cada uno la dificultad?, ¿Qué harías tu?, ¿Por qué cada uno tiene sus respuestas distintas?, ¿Alguien lo ha hecho de otra manera?, ¿Cuál es el mejor camino a seguir para llegar al final?

De elección de estrategias alternativas: ¿Por qué has hecho esto así y no de otra manera?, ¿Puede haber otras respuestas también válidas?, ¿Quieres discutir tu respuesta con la del compañero?, ¿Alguien ha pensado en una solución distinta?, ¿Alguien ha tomado otra estrategia?, ¿De cuántas formas podemos iniciar la resolución de este problema?

De razonamiento: ¿Por qué?, ¿Qué tipo de razonamiento has usado?, ¿Es lógico lo que dices?

Para comprobar hipótesis o insistir en el proceso: ¿Por qué no pruebas a pensarlo mejor?, ¿Qué sucedería si en lugar de ese dato tomaras...? ¿Qué funciones mentales hemos entrenado con este ejercicio? ¿Por qué has empezado por ese dato?, ¿Qué pasaría si empezaras por otro sitio?

Para estimular la reflexión y controlar la impulsividad: ¿Qué pasos hemos necesitado?, ¿A qué se ha debido tu error?, ¿Hubieras ido más rápido...? ¿Quieres repetir?, ¿Lo has solucionado?, ¿Te ha salido bien?, ¿Qué pasos has dado?

Para motivar la generalización: ¿Qué hacemos cuando comparamos...? ¿Cuándo se pone en práctica lo que hemos estudiado? ¿Qué criterios hemos usado para?, ¿Podemos deducir algún principio?

Para el conocimiento crítico: ¿Por qué dices eso?, ¿Qué razones tienes para hacer esa afirmación?, ¿Por qué te sientes así tras el esfuerzo realizado, el éxito o el fracaso?

De relación: ¿Cómo compararías esta forma de clasificar con la de tal página?, ¿Con qué otra situación, tema, etc., asocias esta cuestión?

De predicción: ¿A cuántas conclusiones o generalizaciones has llegado?, ¿Qué conseguiremos con esta estrategia o realizando tal acción?

De extrapolación: ¿En qué otras situaciones has repetido este proceso?, ¿Dónde pretendemos aplicar esta estrategia o este principio?

De resumen o síntesis: ¿Qué etapas has seguido en este trabajo?, ¿Qué es lo principal de cuanto has aprendido?, ¿Qué idea sintetiza mejor esta idea?, ¿Cuáles son los elementos esenciales de este tema?” (Araya Carrasco, 2008)

Feuerstein:

—Si los docentes no logran identificar la fuente específica de la debilidad cognitiva del alumno, todas las acciones correctivas que se intenten estarán destinadas al fracaso. Si aceptamos los límites de la herencia, entramos a la posición de la derrota. Por otro lado, si adoptamos la posición de la diferencia cultural, pensaríamos que variando simplemente el medio ambiente de aprendizaje se producirían los cambios deseados y se eliminaría el bajo desempeño”.

## Capítulo III

### Mapas conceptuales

Otra de las técnicas que actualmente se utilizan en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas son los mapas conceptuales; Los mapas conceptuales resultan ser un valioso medio para visualizar conceptos o ideas y establecer relaciones y propiedades jerárquicas entre estos. La elaboración de estos mapas permite que los conceptos sean vistos como una relación y consecución de otros, el reconocer las imágenes se produce una relación más significativa, facilitando el aprendizaje por recordar la imagen y no un texto. Es importante aclarar que los mapas no sirven para memorizar y no es una nemotecnia, sino más bien ayudan a establecer relaciones de jerarquía y parentesco entre los conceptos, así como secuencias de resolución de problemas, nos ayuda también, a organizar el contenido del material por estudiar. Esta técnica de elaboración de mapas conceptuales es un medio didáctico útil para organizar información, sintetizarla y presentarla gráficamente. Nos permite, también, apreciar en conjunto la información que contiene un concepto y las relaciones entre sus componentes, esto facilita su comprensión, y de ahí al aprendizaje. (Pichardo, 1999)

Otra ventaja de la elaboración de mapas, hechos tanto por el docente como por el estudiante, es la utilización de éstos en los salones de clase, para propiciar un aprendizaje de los contenidos de manera constructiva y significativa, así como también es útil en el almacenamiento de contenidos que serán utilizados cuando sean necesarios disponer de ellos. (Ausubel, 1988). Normalmente se habla de un aprendizaje significativo en las matemáticas, cuando los contenidos son utilizados de manera acertada así como también utilizarlas en el momento oportuno, al solucionar problemas específicos de matemáticas. La utilización de mapas conceptuales junto con otras estrategias didácticas, antes mencionadas, permite el desarrollo cognitivo del alumno, y a su vez permite que el alumno desarrolle una adecuada estructura cognitiva que desemboque en el desarrollo de la creatividad. En este sentido, la actuación del docente guiada por mapas conceptuales permite una intervención cognitiva. Las matemáticas y los mapas se consideran medios para lograr el desarrollo de capacidades y de destrezas cognitivas. (Pérez Flores, 2006)

Para empezar el proceso es el profesor, el que elabora sus mapas conceptuales del contenido de las matemáticas en donde deben aparecer conceptos con diferentes niveles de generalidad, gráficas o imágenes asociadas a los conceptos y ejemplos concretos de éstos. Según Guzmán, 1996, las gráficas o imágenes contribuyen a la visualización de los conceptos y con ello al aprendizaje de las matemáticas. Los mapas realizados por el profesor solo representaran una guía para las subsecuentes clases con los alumnos. Aquí se trata de ir presentando a los alumnos, poco a poco la información que aparece en los mapas, tratando llevar un proceso inductivo que vaya desde lo particular hasta lo general, para posteriormente ir ampliando y enriqueciendo la información. —En otras palabras, partir desde la información colocada en la parte inferior de los mapas hasta la información de la parte

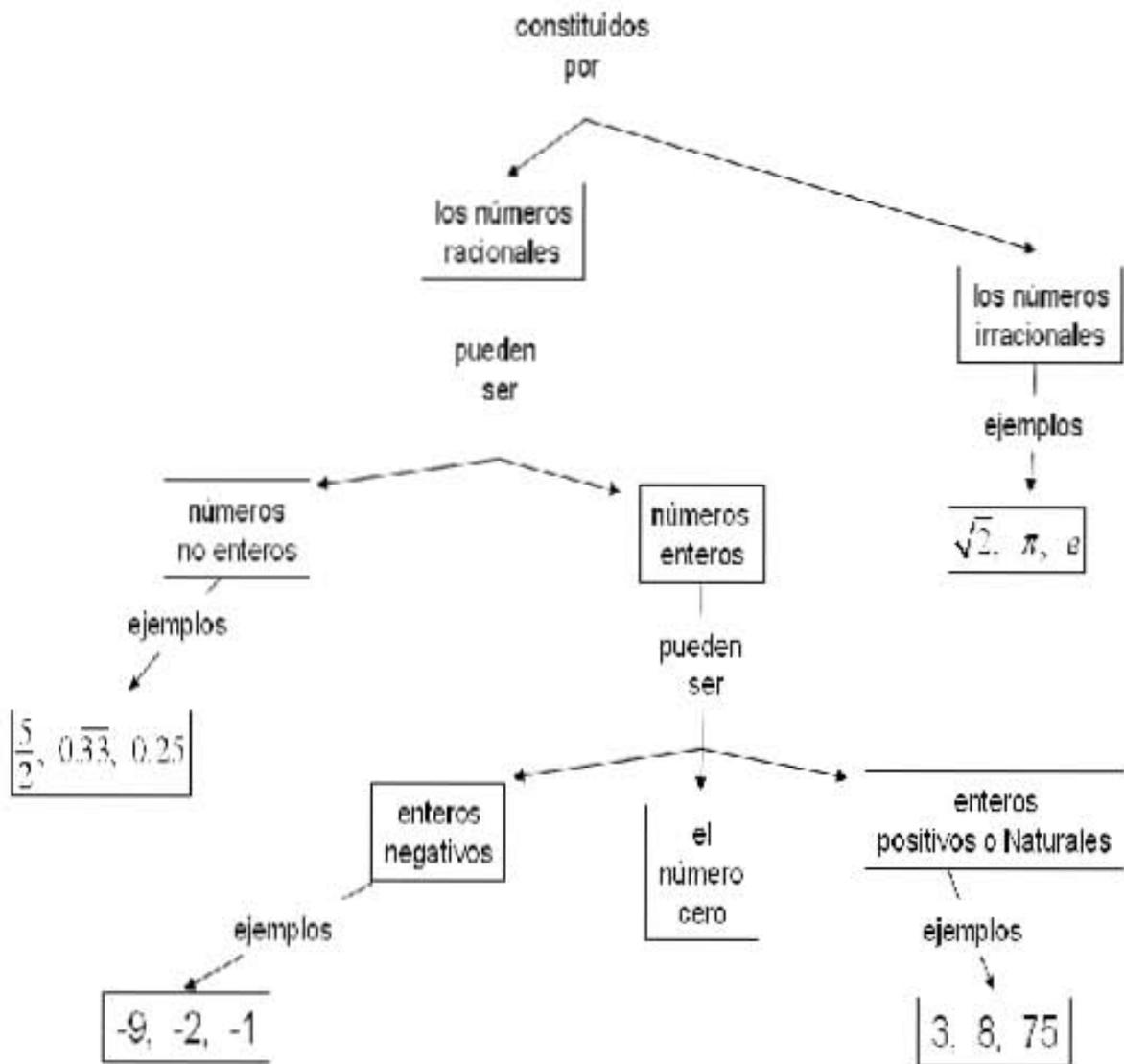
superior de éstos. La idea es presentar información particular accesible al intelecto de los alumnos para ser percibida; posteriormente, con el apoyo de imágenes y/o representaciones gráficas, llegar a la presentación de los conceptos. El partir desde lo particular hasta lo general promueve la realización de procesos de pensamiento inductivo lo que significa un desarrollo o intervención cognitiva” (Feuerstein, 1995).

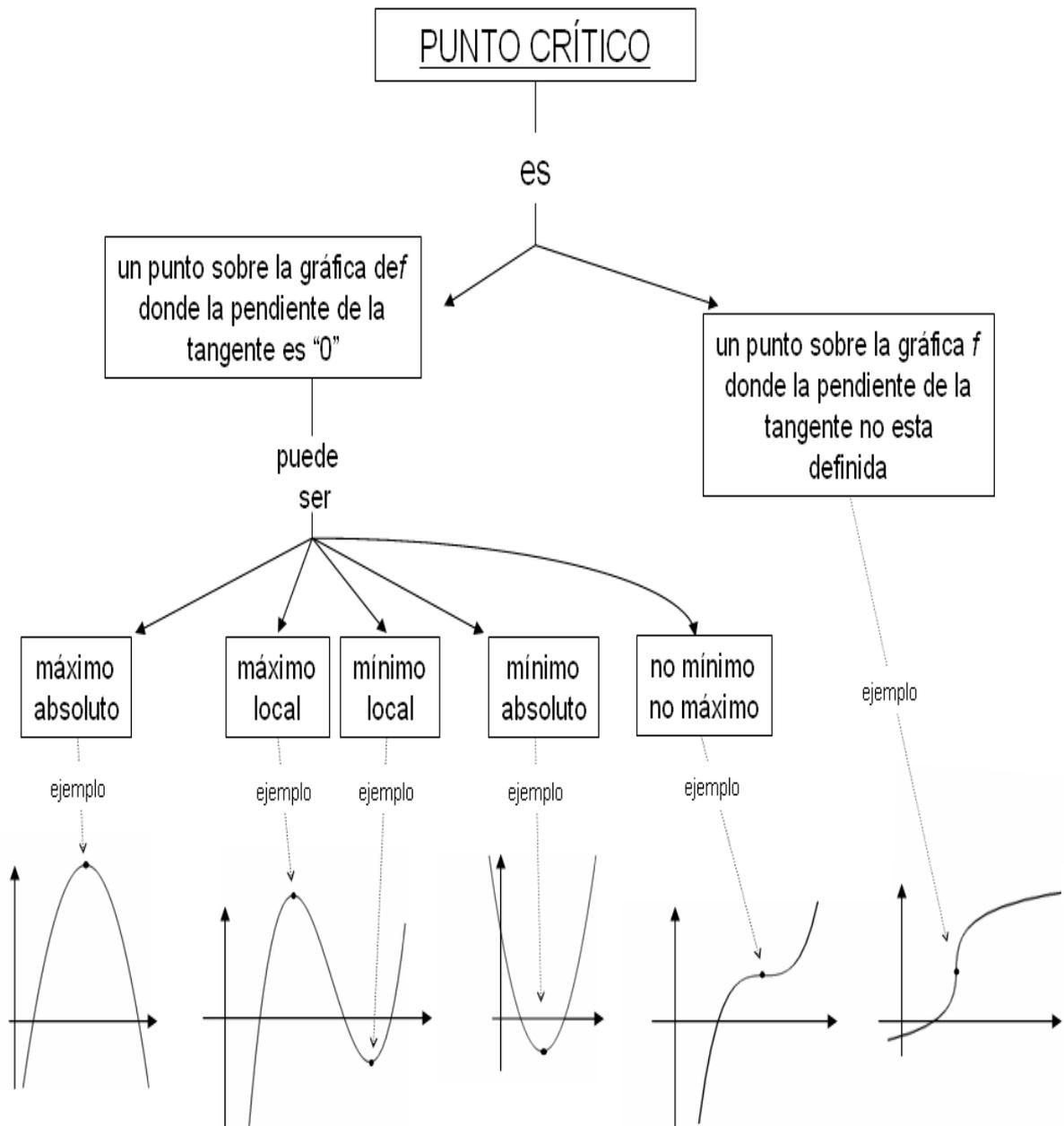
Al principio cuando el profesor realiza sus mapas conceptuales y los discute con el grupo, la actividad le permite llevar a cabo un proceso de retroalimentación, ya que podrá determinar la manera de pensar de los alumnos y la forma en que construyen sus conocimientos, de esta forma, el docente diseñara las estrategias adecuadas. Según Román, las etapas básicas del aprendizaje son: la percepción, representación y conceptualización, y resulta que la construcción de los mapas son una guía para propiciar dichas etapas en el salón de clase (Román, 1988). Al fomentar la percepción, la representación y la conceptualización, siguiendo este orden, se pone en práctica el pensamiento inductivo. (Pérez Flores, 2006)

Para la segunda parte se propone que los alumnos junto con el profesor construyan los mapas, esta actividad sirve para promover los procesos de pensamiento deductivo de los alumnos. De esta manera el siguiente paso, es que los propios alumnos elaboren sus mapas, que sean acordes a su proceso de aprendizaje, ello con la supervisión del profesor, para que actué como mediador del aprendizaje, favoreciendo el desarrollo del pensamiento (Vygotsky, 1979) y así manteniendo la mística del CCH permitiendo aprender a aprender (Novak, 1988). Ausubel explica que los procesos de pensamiento inductivo y deductivo son potenciados al disponer de la información respetando las jerarquías conceptuales, logrando aprendizajes subordinados y supra ordenados, partiendo desde lo particular hasta lo general y viceversa (Ausubel, 1976).

—Es importante mencionar que los mapas conceptuales (Novak, 1998) desempeñan en el aula una función clave para representar los conocimientos. Los mapas conceptuales también son un buen apoyo para el profesor. Ayudan a organizar el conocimiento para enseñarlo (Novak, 1998) pero también ayudan a los alumnos en su desempeño escolar al tener aprendizajes de calidad, no memorísticos. Las figuras 1 y 2 en las siguientes páginas muestran algunos ejemplos de mapas conceptuales construidos e integrados al proceso de enseñanza y aprendizaje de matemáticas durante un curso de cálculo. Por razones de espacio no se incluyen más mapas en este trabajo. Es importante señalar que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no sólo se centran en conceptos, también se debe prestar mucha atención a los ejercicios y problemas así como al desarrollo de habilidades para resolverlos”. (Pérez Flores, 2006)

# LOS NÚMEROS REALES





**Figura 1.** Mapas conceptuales —los Números Reales” y —Punto Crítico”

# UNA FUNCIÓN

puede tener

asintotas verticales

asintotas horizontales

se definen

se definen

se dice que recta  $x = a$  es una **asintota vertical** de la función  $f$  o de la curva  $y = f(x)$ , si ocurre al menos una de las condiciones siguientes

se dice que la recta  $y = a$  es una **asintota horizontal** de la función  $f$  o bien de la curva  $y = f(x)$  si ocurre algunos de los hechos siguientes:

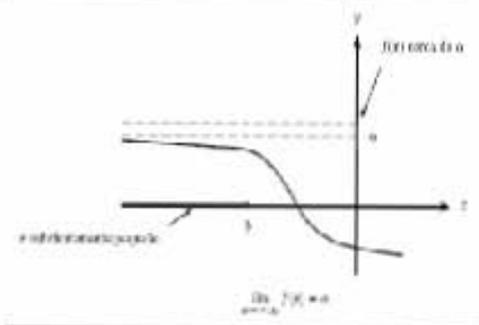
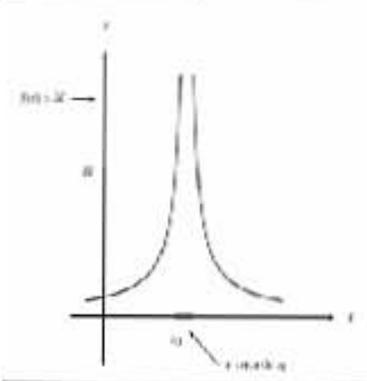
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty;$$

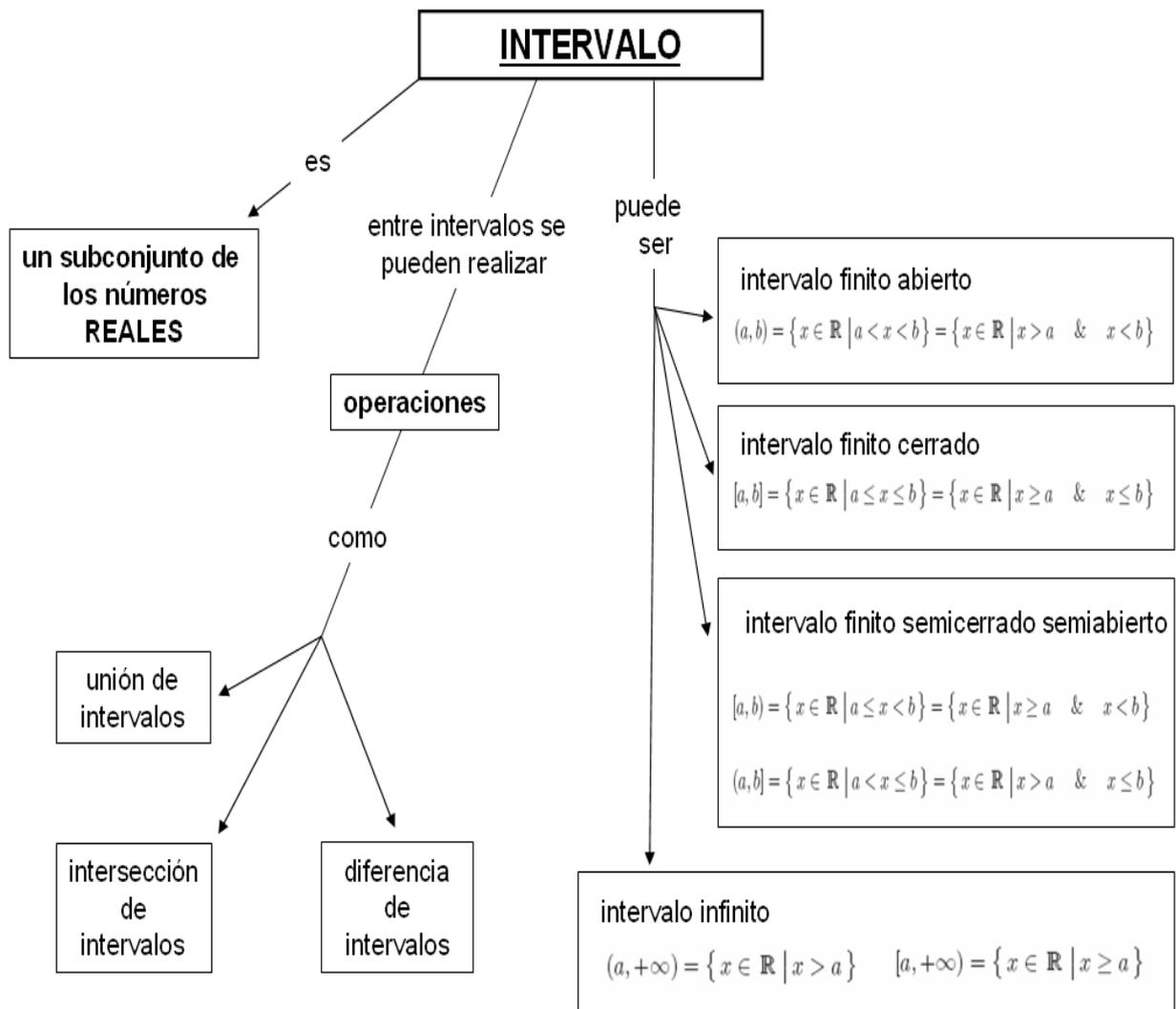
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty;$$

se representa

se representa





**Figura 2.** Mapas conceptuales: —Una Función” e —Intervalo”

De lo anterior, podemos observar que los mapas conceptuales no sólo contemplan conceptos, sino también son importantes los mapas que muestran aspectos sobre los procedimientos para resolver problemas. (Pérez Flores, 2006)

La utilización de mapas conceptuales favorece, el desarrollo cognoscitivo del alumno, se busca desarrollar las:

- 1) Las destrezas de Inducción y Deducción consideradas como parte de la capacidad de Razonamiento Lógico, así como
- 2) Las destrezas espaciales de situar, localizar y expresar gráficamente, ideas y concepto junto con sus relaciones y jerarquías. (De Guzmán, 1999).

Las técnicas que Pichardo propone para la realización de los mapas son muy sencillas pero complejas a la vez, porque requiere realizar varias operaciones mentales. Se puede utilizar didácticamente para desarrollar ideas y mostrar las relaciones que hay entre ellas. La técnica, simplificada para usarla con propósitos didácticos, consta de los siguientes pasos.

1. Leer cuidadosamente el texto y entenderlo claramente. En caso de haber palabras que los alumnos y/o el profesor, no comprendan o no conozcan, habrá que consultarlas en el diccionario y comprobar cómo funcionan en el contexto en que se encuentran.
2. Localizar y subrayar las ideas o palabras más importantes —palabras clave— con las que se construirá el mapa; por lo general, son nombres o sustantivos.
3. Determinar la jerarquización de dichas ideas o palabras clave.
4. Establecer las relaciones entre ellas
5. Utilizar correctamente la simbología:
  - Ideas o conceptos: cada una se presenta escribiéndola encerrada en un óvalo o en un rectángulo.
  - Conectores: la conexión o relación entre dos ideas se representa por medio de una línea inclinada, vertical u horizontal llamada conector o línea ramal que une ambas ideas.
  - Flechas: se pueden utilizar en los conectores para mostrar que la relación de significado entre las ideas o conceptos unidos se expresa primordialmente en un solo sentido; también se usan para acentuar la direccionalidad de las relaciones, cuando se considera indispensable.
  - Descriptores: son la palabra o palabras (1, 2 ó 3) que describen la conexión; se escriben cerca de los conectores o sobre ellos. Estos descriptores sirven para "etiquetar" las relaciones. Tiene gran importancia elegir la palabra correcta; o sea, la que mejor caracterice la relación de que se trate, de acuerdo con el matiz de significado que debe darse con precisión. (Pichardo, 1999)

Pichardo, propone seguir este procedimiento general para construir un mapa conceptual

- a) Primero: Lea un texto e identifique en él las palabras que expresen las ideas principales o las palabras clave. No se trata de incluir mucha información en el mapa, sino que ésta sea la más relevante o importante que contenga el texto.
- b) Segundo: Cuando haya terminado, subraye las palabras que identificó; asegúrese de que, en realidad, se trata de lo más importante y de que nada falte ni sobre. Recuerde que, por lo general, estas palabras son nombres o sustantivos comunes, términos científicos o técnicos.

- c) Tercero: Identifique el tema o asunto general y escríbalo en la parte superior del mapa conceptual, encerrado en un óvalo o rectángulo
- d) Cuarto: Identifique las ideas que constituyen los subtemas ¿qué dice el texto del tema o asunto principal? Escríbalos en el segundo nivel, también encerrados en óvalos.
- e) Quinto: Trace las conexiones correspondientes entre el tema principal y los subtemas.
- f) Sexto: Seleccione y escriba el descriptor de cada una de las conexiones que acaba de trazar.
- g) Séptimo: En el tercer nivel coloque los aspectos específicos de cada idea o subtema, encerrados en óvalos.
- h) Octavo: Trace las conexiones entre los subtemas y sus aspectos.
- i) Noveno: Escriba los descriptores correspondientes a este tercer nivel.
- j) Décimo: Considere si se requieren flechas y, en caso afirmativo, trace las cabezas de flecha en los conectores correspondientes.(Pichardo, 1999)

Finalmente el autor propone una serie de recomendaciones:

- 1) —Esconveniente revisar su mapa varias veces para comprobar si las conexiones son verdaderamente importantes. Al revisarlo es necesario que tome en cuenta lo siguiente:
  - Hay ocasiones en que es indispensable o conveniente ubicar juntos dos subtemas o aspectos específicos que lo requieran para no tener que "encimar" o superponer las líneas de conexión que deban figurar cruzadas en el mapa.
  - Las ideas pueden estar correctamente representadas en mapas de varias maneras diferentes. De hecho, es poco usual que dos personas construyan mapas idénticos y partir de un mismo texto; por eso no puede haber un modelo único de mapa conceptual aplicable a cualquier texto.
  - No obstante que su mapa no sea igual que los de sus compañeros, aunque todos hayan manejado la misma información, estará correcto si comprende las ideas o conceptos más importantes que aparecen en el texto, adecuadamente jerarquizados y con las relaciones entre ello bien caracterizadas.
  - El mapa conceptual también puede estar correctamente construido si tiene significado para quien lo realiza y le ayuda a entender el material analizado.
  - Un mapa conceptual será suficiente claro si cualquiera de sus términos —ideas o descriptores— fuera eliminado y pudiera ser repuesto siguiendo la lógica del mismo.
  - En todo caso, es necesario construir varias veces el mapa de un mismo texto para suprimir los defectos que hubiesen aparecido en la primera versión; por lo general, en la segunda versión aparecen las relaciones en forma más clara y explícita.
- 2) Además de la claridad, en una segunda e incluso en una tercera o cuarta versiones, se ganará en limpieza y corrección; se mejorará la distribución y se evitarán los "amontonamientos". Un mapa conceptual

es más claro si está bien distribuido y presentado armónica y equilibradamente”. (Pichardo, 1999)

En las últimas fechas y debido a los bajos rendimientos que presenta México en los niveles de comprensión de las matemáticas, la Secretaría de Educación Pública se ha interesado más en el problema de la enseñanza-aprendizaje y ha propuesto el constructivismo del conocimiento. Esta propuesta incluye gran parte de las corrientes anteriormente expuestas una de las cuales La Teoría del Aprendizaje Significativo es de las que más siguieron para trabajar; se ha desarrollado y consolidado a merced de diferentes investigaciones y elaboraciones teóricas en el ámbito del paradigma cognitivo, mostrando coherencia y efectividad. —La SEP sugiere: El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que sustentan los programas para la educación consiste en llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados” (Programas de estudio, 2006)

A partir de esta propuesta, tanto los alumnos como el maestro se enfrentan a nuevos caminos que resultan desconocidos y por ello no es fácil de asumir, estos retos exigen tener distintas actitudes frente a las ideas sobre lo que significa enseñar y aprender. Es importante notar que es una labor de ambas partes, no solo se trata de que el docente busque las explicaciones más sencillas y amenas, sino además, analice y proponga problemas interesantes, debidamente articulados, para que los alumnos aprovechen lo que ya saben y avancen en el uso de técnicas y razonamientos cada vez más eficaces.

Seguramente este planteamiento resultará extraño para muchos maestros compenetrados con la idea de que su papel es enseñar, en el sentido de transmitir información. Sin embargo, al intentarlo, se abren nuevos caminos para experimentar un cambio radical en el ambiente del salón de clases: los alumnos piensan, comentan, discuten con interés y aprenden, y el maestro revalora su trabajo docente. (Programas de estudio, 2006)

Este nuevo panorama no está exento de inconvenientes que se van dando a lo largo del camino:

- En primer lugar nos podemos encontrar con la natural resistencia de los alumnos, que también han sido educados en el antiguo método, a buscar por su cuenta la manera de resolver los problemas que se les plantean. Se sugiere que aunque habrá desconcierto y resistencia al principio, tanto de los alumnos como de los docentes, vale la pena insistir en que sean los estudiantes quienes encuentren las soluciones. Mas rápido de lo que se piensa, se empezará a notar un ambiente distinto en el salón de clases, esto es, los alumnos compartirán sus ideas, habrá acuerdos y desacuerdos, se expresarán con libertad y no habrá duda de que reflexionan en torno al problema que tratan de resolver.
- Por otro lado es muy común enfrentarnos a la dificultad para leer y por lo tanto para comprender los enunciados de los problemas. Se trata de una situación más común de lo deseado, cuya solución no corresponde

únicamente al área de Redacción, sino que se debe trabajar en todas las aéreas académicas, para que los alumnos adquieran esta habilidad lo más pronto posible. Muchas de las ocasiones el hecho de que los alumnos obtienen resultados diferentes, no se debe a que tengan mal el razonamiento matemático sino que se debe a que tienen una interpretación distinta del problema,

- Otro de los factores que no favorece este cambio es el desinterés por trabajar en equipo. Aquí debemos entender que el trabajo en equipo, no es lo mismo que la división del trabajo. El trabajo en equipo es importante, porque ofrece a los alumnos la posibilidad de expresar sus ideas y de enriquecerlas con las opiniones de los demás, porque desarrollan la actitud de colaboración y la habilidad para argumentar; además, de esta manera se facilita la puesta en común de los procedimientos que encuentran. Sin embargo, la actitud para trabajar en equipo debe ser fomentada por el maestro, quien debe insistir en que cada integrante asuma la responsabilidad de la tarea que se trata de resolver, no de manera individual sino colectiva.
- Otro de los obstáculos que se presentan es la falta de tiempo para concluir las actividades. Es muy importante poder controlar el manejo de los tiempos y saber qué tipo de actividad merece un extra de tiempo, esto no puede ser manejado de una manera estándar, porque depende de las distintas dinámicas que se presentan entre el docente y el grupo. Es muy común escuchar que algunos docentes comentan que si llevan a cabo este enfoque didáctico, en el que se propone que los alumnos resuelvan problemas con sus propios medios, discutan y analicen sus procedimientos y resultados, no les alcanza el tiempo para concluir el programa. Con este argumento, algunos optan por continuar con el esquema tradicional en el que el maestro da la clase mientras los alumnos escuchan, aunque no comprendan. La propuesta que se tiene es que independientemente que los tiempos parezcan no alcanzar o tengamos que sacrificar algunos subtemas mas, ante una situación como ésta habrá que recordar que más vale dedicar tiempo a que los alumnos adquieran conocimientos con significado y desarrollen habilidades que les permitan resolver diversos problemas y seguir aprendiendo, que a enseñar conocimientos que pronto serán olvidados.
- Por último consideremos que todos los maestros deben asumir esta actitud y que la Institución asuma también su responsabilidad de brindar una educación de calidad a todo el alumnado. Esto significa que no basta con que un maestro o una maestra propongan a sus alumnos problemas interesantes para que reflexionen, sino que la escuela toda debe reorientar su estrategia de enseñanza-aprendizaje así como las nuevas oportunidades que ofrece el de aprendizaje significativo. Por ello se sugiere que los profesores compartan experiencias, exitosas o no, hablar de ellas y escucharnos nos permitirá mejorar permanentemente nuestro trabajo. (Programas de estudio, 2006)

## Capítulo IV

### La evaluación

El tema de la evaluación es uno de los conceptos, que en el proceso de enseñanza–aprendizaje más polémica causa y sin embargo es uno de los momentos del proceso que más pueden significar.

En primer lugar para adentrarnos en el tema es necesario recurrir a algunas definiciones; En el diccionario la palabra Evaluación se define como: señalar el valor de algo, estimar, apreciar o calcular el valor de algo. De esta manera más que exactitud lo que busca la definición es establecer una aproximación cuantitativa o cualitativa. Atribuir un valor, un juicio, sobre algo o alguien, en función de un determinado propósito, recoger información, emitir un juicio con ella a partir de una comparación y así, tomar una decisión. La toma de decisiones se hace permanentemente evaluando y eligiendo lo que consideramos más acertado. Una definición más técnica sería: "La etapa del proceso educativo que tiene como finalidad comprobar, de manera sistemática, en qué medida se han logrado los objetivos propuestos con antelación. Entendiendo a la educación como un proceso sistemático, destinado a lograr cambios duraderos y positivos en la conducta de los sujetos, integrados a la misma, en base a objetivos definidos en forma concreta, precisa, social e individualmente aceptables." (Lafourcade, 1979) o "La Evaluación es el acto que consiste en emitir un juicio de valor, a partir de un conjunto de informaciones sobre la evolución o los resultados de un alumno, con el fin de tomar una decisión. " (B. Maccario)

Para nosotros la Evaluación, es un proceso dinámico, continuo y sistemático, enfocado hacia los cambios de las conductas y rendimientos, mediante el cual verificamos los logros adquiridos en función de los objetivos propuestos. La Evaluación adquiere sentido en la medida que comprueba la eficacia y permite el perfeccionamiento de la acción docente, es decir, cuando la evaluación cumple con el papel de la retroalimentación de un proceso. En este caso del proceso de enseñanza aprendizaje, lo que identifica un elemento clave de la concepción actual de la evaluación: no hay que evaluar por evaluar, sino evaluar para mejorar, implementar o cambiar las estrategias, los programas, la organización de las tareas y la transferencia a una más eficiente selección metodológica. (Lafourcade, 1979)

En esta época más que en ninguna otra, la enseñanza está al servicio de la educación, y por lo tanto, como ya hemos mencionado anteriormente, el objetivo de los programas de la simple transmisión de información y conocimientos ha dejado de ser el centro de la actividad. Hoy es más importante el proceso formativo y no el resultado, en donde el objetivo del alumnado está centrado en el auto aprendizaje, como proceso de desarrollo personal. Es por esto que, la evaluación debe adquirir una nueva dimensión, con la necesidad de personalizar y diferenciar la labor docente. Desde la filosofía de Rogers, Cada alumno es un ser único, e irreplicable con una realidad en desarrollo y cambiante de acuerdo a sus circunstancias personales y

sociales. Por ello en este modelo que proponemos este debe centrarse en la persona, junto con los objetivos y las exigencias sociales.

Dentro del ámbito educativo se evalúan varios aspectos: instituciones, planes y programas de estudios, profesores, alumnos, problemas políticos, académicos, administrativos, etc. En cada caso, son muchos los elementos que se incluyen en la evaluación. Por ejemplo, en las instituciones se pueden evaluar desde sus instalaciones, hasta la eficiencia con la cual se ejerce el presupuesto y la calidad de los servicios que se ofrecen. —En cada una de estas sub categorías, se tienen diferentes niveles de evaluación, según el propósito que se persiga. Se tiene el nivel o ámbito singular, el regional, el nacional y el transcultural o internacional. Se puede realizar la evaluación de una sola institución, o la evaluación de las instituciones similares en una zona o región, o la de todas las instituciones de un mismo tipo en el país, o bien las de todo el país junto con las de otros países. Para cada situación del proceso evaluativo se puede optar por distintas modalidades metodológicas. Las posibilidades de evaluación que surgen al combinar los casos, atributos, niveles y modalidades metodológicas son, en realidad, innumerables y complejas. Todo este campo intrincado y diverso es el que subyace y está contenido bajo un sólo término: evaluación educativa”. (Quesada, 1988)

Desde épocas remotas se ha practicado la evaluación; la evaluación y la medición. La evaluación es un componente importante del proceso de enseñanza-aprendizaje, toda actividad humana supone evaluación porque interviene en una función esencial: la regulación de la actividad. La evaluación de aprendizajes, no están asociadas a necesidades pedagógicas, sino necesidades de control y regulación social. La mayoría de las críticas se centran en la utilización del examen. El examen, como lo conocemos no surge, en el ámbito educativo. Aparece como un instrumento de selección creado por la burocracia china en el 2375 A.C., y se utiliza para decidir quienes podían ocupar determinados cargos públicos y constituían una jerarquía de erudición. Pero en la sociedad occidental los exámenes eran desconocidos en la Antigüedad y en los primeros tiempos de la Edad Media. Según (Díaz Barriga, 1994), aparecen en la universidad del siglo XIX como producto de la organización corporativa de los maestros para su admisión, constituyen instrumentos para determinar las condiciones de los aspirantes a tal fin. El examen resulta como un remedio a una serie de conflictos sociales y políticos y como técnica —educativa” donde se depositan una infinidad de expectativas. —En cierto sentido cuando la sociedad no puede resolver problemas de orden económico (asignación de presupuesto), de orden social (justicia en la distribución de satisfactores), de orden psicopedagógico (conocer y promover los procesos de conocimiento en cada sujeto) transfiere esta impotencia a una excesiva confianza de «elevar la calidad de la educación», sólo a través de racionalizar el empleo de un instrumento: el examen.” (Díaz Barriga, 1994)

Existen algunos conceptos asociados con la evaluación entre ellos pueden citarse: Evaluación y calificación. Desde que la psicología ha intentado reconocer los procesos de aprendizaje los ha querido convertir en números, y esto trae consigo un reduccionismo frecuente, es la identificación de la evaluación con la calificación que se expresa en una nota final. Sin embargo es

fácil ver qué este sentido no tiene nada de pedagógico ni formativo, ya que la nota juzga de manera sumaria y concluyentemente un proceso continuo y no da cuenta de las fortalezas y las debilidades del aprendizaje del alumno, y de lo más importante: de su potencialidad para aprender. La nota traduce de manera simple una información pobre sobre un proceso complejo. La nota se basa en determinados indicadores y criterios: aquellos que han sido seleccionados para tal efecto y que no pueden todo el proceso de enseñanza-aprendizaje. La nota no representa necesariamente el saber. Actualmente las notas también están siendo utilizadas para calificar el trabajo decente, y la inconveniencia de su uso es el mismo que acabamos de describir, porque los docentes también tienen un proceso de educadores que no se puede reducir a la asignación de una nota, como se pretende en la SEP con los exámenes —Elae”— de manera resumida, la nota es parte de la evaluación, uno de sus momentos cruciales y problemáticos, pero no el todo.

Otro de los conceptos asociados a la evaluación es la medición; este hecho es un equívoco. En algunos casos se les identifica como iguales, y en otros se intenta una diferenciación extrema que las coloca como ajenas una de la otra. Ambas posiciones son imprecisas. La medición es el proceso de asignar una cantidad al atributo medido, esto es por medio de la comparación con un patrón previamente establecido y aceptado. Generalmente se usa como es el caso de la Física, un patrón numérico de tal forma que pueden tener una escala de intervalo o de razón. La primera tiene un cero arbitrario como punto de partida de la medición y la segunda un cero absoluto. En la educación, se puede tener mediciones de ambos tipos. En primer lugar debemos enfatizar que la medición no es la evaluación, porque no proporciona juicios de valor. Sirve de base para la evaluación. Aunque cabe aclarar que no todas las evaluaciones se basan en una medición, pero no la comprenden. La medición es una etapa de la evaluación. (Quesada, 1988)

—La evaluación y la medición entonces no representan los mismos procesos (el segundo conforma una fase del primero), pero tampoco son procesos independientes. En educación se pueden hacer evaluaciones sin una medición previa, como puede ser el caso de obras creativas, originales, en arte, o bien, la evaluación hecha por compañeros, o la autoevaluación, las cuales se basan en una opinión crítica. En estos casos la evaluación puede prestarse a juicios infundados, pero es factible de realizar. Lo contrario, no tiene sentido, hacer mediciones sin evaluación” (Quesada, 1988)

Otro de los conceptos asociados a la evaluación es el control, Este término está asociado con: monitoreo, conocimiento, reflexión sobre cualquier proceso y sus resultados de modo que permita su autorregulación. En este sentido la evaluación se puede considerar una manifestación del control. Pero desde la otra perspectiva, el control es una de las funciones de la evaluación: El control al igual que la evaluación comparan la información sobre el objeto o proceso de que se trate con un modelo o un patrón de referencia. Este resultado contiene un juicio, una valoración, con independencia de las formas concretas en que se exprese. Tanto al control como a la evaluación se le asocian funciones de regulación de la actividad por parte del o los sujetos

implicados en la misma; a su vez repercute sobre los sujetos confiriendo significaciones de lo que hacen o de lo que pueden hacer. Es aquí donde el término —control” no denota suficientemente el aspecto valorativo, el término control toma fuerza en el ámbito educativo, cuando se traslada al ámbito laboral. Su contenido sostiene dos ideas: la técnica y la de poder o ejercicio de autoridad. En síntesis, ambos términos son válidos. Desde una visión amplia de la evaluación, el control es una de sus funciones. (Díaz Barriga, 1994)

En la actualidad se tiene una tendencia a lo que se conoce como competencias que tiene más de métodos de control que métodos de evaluación. La idea del trabajo educativo por competencias se utilizaba desde el campo de la psicología, de la lingüística y de las teorías de la comunicación. En 1957 Chomsky define el término competencia como "capacidades y disposiciones para la interpretación y la actuación". Posteriormente, fue redefinido desde el punto de vista empresarial, tratando de usar para favorecer los intereses de la empresa, como ocurrió también con la formación de la inteligencia emocional. La idea de competencia en el mundo empresarial está íntimamente ligada a la eficacia y la rentabilidad productiva. Es decir, se trata de definir y adquirir destrezas y saberes que hagan a las empresas competitivas. El auge, de modelos educativos basados en competencias aparece como respuesta a las demandas que la sociedad hace a la escuela para que forme ciudadanos capaces de integrarse con éxito en la sociedad actual y responder a sus necesidades empresariales y económicas. La educación se vuelve, así, en dependiente de las demandas de un tipo de sistema social y económico determinado. Al término —competencia en educación” se le atribuyen muchos significados que generan confusión, al no quedar claro cómo se concibe la competencia y qué diferencias existen con un desarrollo basado en capacidades y habilidades.

Para dejar en claro lo que se pretende algunas instituciones e inclusive la SEP respecto a las competencias, se transcriben los conceptos vertidos al respecto por la Comunidad Europea.

-Competencias clave para el aprendizaje permanente

***Las competencias clave, en tanto que combinación de conocimientos, capacidades y actitudes adecuados para una determinada situación, son fundamentales para todo individuo en una sociedad basada en el conocimiento. Estas competencias comportan un valor añadido en el mercado laboral, en el ámbito de la cohesión social y de la ciudadanía activa al aportar flexibilidad, adaptabilidad, satisfacción y motivación. Puesto que todos los ciudadanos deberían adquirirlas, la presente recomendación propone a los Estados miembros una herramienta de referencia para asegurar que dichas competencias clave se integren plenamente en las estrategias e infraestructuras de los Estados miembros y, particularmente, en el marco del aprendizaje permanente.***

ACTO

Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente [Diario Oficial L 394 de 30.12.2006].

En este documento se plasma claramente que este modelo que responde a los intereses mercantiles, de control y no a intereses pedagógicos.

El carácter que debería tener la evaluación es el de la neutralidad, sin embargo ya lo decía Paulo Freire en una de sus obras titulada Educación y Sociedad —la primera afirmación que quisiera hacer es de que, así como es imposible pensar la educación en forma neutra, es igualmente imposible pensar en una evaluación neutral de ella. No hay cualidades por las que luchemos en el sentido de asumirlas, de recalificar con ellas la práctica educativa, que puedan ser consideradas como absolutamente neutras, en la medida misma en que, como valores son vistas desde diferentes ángulos, en función de intereses de clases o de grupos” (Freire, 1998). Debemos reconocer que no hay evaluación neutral. Evaluar implica formular un juicio de valor. Cuando lo evaluado es el aprendizaje de los estudiantes el resultado depende en gran medida del sujeto del mismo, de la relación sujeto-sujeto (evaluado-evaluador), tanto como de la relación sujeto-objeto (entendida como estudiante- materia de enseñanza). Todas estas relaciones están preñadas de prejuicios y de concepciones valorativas sobre lo que se evalúa, sobre el evaluado y sobre el evaluador. (Ruiz Mulet, 2009)

La evaluación del aprendizaje la debemos entender como el proceso que permite emitir juicios de valor acerca del grado cuantitativo y cualitativo de lo aprendido. Representa la evaluación de sólo uno de los atributos evaluables y, como en muchos otros atributos, amerita, para realizar la evaluación, explicitar lo que se entiende por aprendizaje. —Si se acepta como aprendizaje la internalización de pautas de conducta, que resulta de un proceso intencionado de enseñanza-aprendizaje, su evaluación consistirá en el proceso a través del cual se puede observar una muestra de la cantidad y calidad de las pautas de conducta internalizadas, para tomar una decisión al respecto. Algunas personas hablan de evaluación del aprendizaje para referirse al análisis de los obstáculos que se interponen y dificultan aprender. Esto crea confusión, ya que dicho análisis se dirige al proceso de enseñanza-aprendizaje, y no a la evaluación del aprendizaje. La evaluación que hacemos los maestros del aprendizaje de nuestros alumnos se ubica en el nivel singular. Evaluamos a nuestros estudiantes y nuestra decisión afecta a cada uno de ellos en lo individual.” (Quesada, 1988)

—La medición del aprendizaje es compleja y relativa, entre otras razones, porque el aprendizaje no tiene nunca un valor cero, por poco que se sepa, algo se sabe, el cual representa el punto de partida para cualquier medición. Además, es difícil tener un patrón válido de comparación. Con frecuencia se usa como patrón el número de preguntas de las pruebas y, con base en él, se efectúa la medición. Por ejemplo, se obtuvieron 20 respuestas correctas de un total de 25 preguntas.

Con todas sus limitaciones, la medición del aprendizaje proporciona una base para la evaluación y, si se realiza con fundamento, llega a ser una base bastante firme

Evaluar el aprendizaje cumple varias funciones, siendo algunas de ellas:

- a) Retroalimentar a profesores y alumnos acerca de las deficiencias del aprendizaje y sentar las bases para su superación.
- b) Motivar el estudio.
- c) Calificar el aprendizaje.” (Quesada, 1988)

De lo anterior podemos establecer patrones para realizar la evaluación

Uno de los puntos equívocos del sistema tradicional de evaluación, y que han deformado el sistema educativo, es la importancia concedida al resultado y no al proceso, por ello el alumno justifica al proceso educativo como una forma de alcanzar el mismo, es muy común escuchar ¿Esto va a venir en el examen? —La asignación de una calificación es un problema de la institución educativa y de la sociedad; no es una cuestión intrínseca a la pedagogía. El problema de las calificaciones no se puede abordar desde la perspectiva de objetividad y justicia. Las relaciones pedagógicas se dan siempre en la interacción de sujetos, no de máquinas. Lo subjetivo (no subjetivismo) es inherente a esta relación, como a múltiples relaciones profesionales que no por ello dejan de ser menos científicas” (Díaz Barriga, 1994)

La gran mayoría de los autores (R. Tyler, B. Bloom, G. De Landsheere, B. Maccario) agrupan los diferentes objetivos y funciones de la evaluación en tres grandes categorías:

- La Evaluación Predictiva o Inicial (Diagnóstica), se realiza para predecir un rendimiento o para determinar el nivel de aptitud previo al proceso educativo. Busca determinar cuáles son las características del alumno previo al desarrollo del programa, con el objetivo de ubicarlo en su nivel, clasificarlo y adecuar individualmente el nivel de partida del proceso educativo.
- La Evaluación Formativa, es aquella que se realiza al finalizar cada tarea de aprendizaje y tiene por objetivo informar de los logros obtenidos, y eventualmente, advertir donde y en qué nivel existen dificultades de aprendizaje, permitiendo la búsqueda de nuevas estrategias educativas más exitosas. Aporta una retroalimentación permanente al desarrollo del programa educativo.
- La Evaluación Sumativa, es aquella que tiene la estructura de un balance, realizada después de un período de aprendizaje en la finalización de un programa o curso.

Sus objetivos son calificar en función de un rendimiento, otorgar una certificación, determinar e informar sobre el nivel alcanzado a todos los niveles (alumnos, padres, institución, docentes, etc.).

La evaluación del aprendizaje ofrece la base para retroalimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero esta es solo una de las funciones que cumple. Tenemos que aclarar que tampoco la retroalimentación no es la evaluación. Por otra parte, la calificación es otra de las funciones de la evaluación del aprendizaje; es más, se recomienda que cada vez que se evalúe el aprendizaje, se retroalimente el proceso de enseñanza-aprendizaje, además de servir como base de calificación. Es decir, un mismo proceso de evaluación desempeña ambas funciones, la retroalimentación y la calificación. (Quesada, 1988)

El carácter que debe tener el proceso de evaluación es:

- La evaluación, vista como proceso, contiene la obtención sistemática de información o evidencias sobre el objeto y la emisión de un juicio fundamentado sobre dicho objeto
- Posiciones en torno al proceso de evaluación:
  - a) Una posición defiende que la evaluación debe consistir, fundamentalmente, en la recogida de datos sobre el objeto en cuestión y que no concluya con la emisión de un juicio valorativo. En este caso la información es base para la toma de decisiones.
  - b) Otra posición incluye el juicio valorativo como parte del proceso de evaluación, juicio que debe estar fundamentado para que sirva a la toma de decisiones pertinente.
  - c) Algunos autores optan por considerar a la evaluación, como un momento o eslabón final del proceso docente, cuya función es la de comprobar la consecución de los objetivos (Tyler, 1977; Alvarez, 1999).

La importancia que tiene la evaluación para el proceso de enseñanza-aprendizaje es que es un indicador ya que la evaluación debe estar presente en todo el proceso, no solo al final o en un momento determinado. No obstante, es sabido que una evaluación continua puede fácilmente manifestarse como una serie de “evaluaciones sumativas”.

Esto es observable porque la evaluación se realiza en espacios específicos y luego la clase continúa como si nada; en muchas ocasiones sin siquiera una retroalimentación de los resultados y mucho menos una regulación en correspondencia con dichos resultados. Existe, por otro lado, la práctica antigua de determinar los períodos de exámenes. Esto responde casi siempre a agentes externos que demandan la asignación de la nota, por parte de la propia institución o del sistema educativo, que las urgencias que puedan sentir los profesores y estudiantes por someter a crítica, reflexión y regular el proceso de enseñanza aprendizaje durante su desarrollo. Las decisiones sobre cuando evaluar, depende de las necesidades que el proceso requiere así como de lo que “sienten” los estudiantes y los profesores respecto a la evaluación. “Existen investigaciones que muestran la conveniencia de realizar evaluaciones del aprendizaje en determinados momentos, a instancia del propio estudiante, aun cuando la información que se dispone sobre el desempeño del mismo resulte suficiente para valorar y conducir el proceso de aprendizaje (Kulic, 1973, citado por Talízina, 1983). Se trata, en estos casos, de la necesidad del estudiante de precisar o de reafirmar su situación en el proceso o los logros que alcanza, de recibir la valoración de otros y, también, de sentir el reconocimiento social de sus compañeros y profesores. En cuanto a la dimensión espacial la práctica tradicional predominante sigue ubicando a la evaluación en el aula, como lugar privilegiado, porque, a criterio de los profesores facilita el control de las condiciones de ejecución (trabajo individual, sin material de consulta, control del tiempo)” (Ruiz Mulet, 2009)

—La determinación de los tipos, de las formas y los instrumentos y procedimientos a utilizar en la evaluación está condicionada por: los objetivos o finalidades que se persigan con la evaluación, los aspectos que serán objeto de

evaluación, las fases o momentos del proceso de enseñanza aprendizaje, las posibilidades o potencialidad de cada instrumento, las condiciones (sociales, físicas, de disponibilidad de recursos, de preparación de los profesores y otras), las concepciones sobre la evaluación. La tendencia predominante es a la diversificación, a la combinación racional de tipos, instrumentos y procedimientos, que acerque la evaluación a las condiciones naturales del proceso de aprendizaje y al contenido del mismo, a la apertura en la participación de los sujetos; en definitiva, a la subordinación del cómo a las demandas pedagógicas y regularidades del proceso de enseñanza aprendizaje. La multiplicidad de factores que intervienen en las decisiones sobre cómo llevar a efectos la evaluación, con qué instrumentos y procedimientos, explica el carácter relativo de los mismos y la insistencia de que no existen tipos y medios instrumentales que tengan un valor universal; esto es, que se ajusten a todas las finalidades, aspectos y circunstancias. Sin desconocer que hay vías más potentes o de más amplio espectro que otras” (Ruiz Mulet, 2009)

La evaluación es un punto medular en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es un mecanismo formativo, si la evaluación, así como el examen, no aportan nuevos elementos, que nos ayuden a discriminar, a estructurar, a asumir actitudes de responsabilidad, de juicio crítico, de toma de decisiones, etc. Como sostiene Stenhouse (1984), "para evaluar hay que comprender. Cabe afirmar que las evaluaciones convencionales del tipo objetivo no van destinadas a comprender el proceso educativo. Lo tratan en términos de éxito y de fracaso, el profesor debería ser un crítico, y no un simple calificador". Actuando como crítico y no sólo como calificador, "la valiosa actividad desarrollada por el profesor y los estudiantes tiene en sí niveles y criterios inminentes y la tarea de apreciación consiste en perfeccionar la capacidad, por parte de los estudiantes, para trabajar según dichos criterios, mediante una reacción crítica respecto al trabajo realizado. En este sentido, la evaluación viene a ser la enseñanza de la autoevaluación".

En la Institución se han adoptado las siguientes estrategias respecto a la evaluación, La evaluación un proceso educativo. La evaluación integral, nos demanda la adaptación de los programas educativos a las características personales e individuales del alumno, debemos detectar sus puntos débiles para poder trabajarlos y tener un conocimiento real de cada uno de ellos. La evaluación debe considerar en primer lugar al sujeto, como ente, así como a los objetivos, las metas, las habilidades, las destrezas, los métodos, el modelo pedagógico, el entorno, el medio ambiente que lo rodea, las fuerzas mediáticas, etc. con ello lograremos que la evaluación sea un método de regulación y de retroalimentación del proceso enseñanza-aprendizaje. Sin un buen proceso de evaluación el maestro no logrará una buena enseñanza y el alumno no logrará un aprendizaje.

La Evaluación Diagnóstica o también conocida como correctiva, la utilizaremos no en un —cuándo” concreto, sino a un —para qué” determinado, esto nos indica que debe ser realizada en el momento que sea necesaria. Como inicio se procede a realizar una evaluación que nos sirve para ubicar tanto al grupo, como a cada alumno, y de esta manera detectar fortalezas,

debilidades, motivaciones e interés, de ahí partiremos para realizar una planeación o programación del curso que sea lo suficientemente flexible. En este proceso de debe dar prioridad de los contenidos fundamentales o básicos de los accidentales o complementarios. Se deberá de esta forma obtener una retroalimentación acerca de los alumnos que presentan un rezago, para poder ofrecerles actividades de refuerzo, así como un acercamiento, con ello agrupar a los alumnos de acuerdo con su grado de comprensión. Y finalmente detectando a los alumnos con seria deficiencia, los cuales serán canalizados por medio de los tutores, para que realicen un trabajo extramuros. (Mahillo, 1997. p 216)

La Evaluación continua o formativa, se debe realizar en todo momento, debe entenderse que no consiste en realizar continuamente exámenes, sino mas bien se debe tener una actitud observadora y evaluadora, considerando cada una de las actividades que se realizan dentro y fuera de la aula, para detectar logros y limitaciones y así tomar medidas para superarlos. En este punto no hay que caer en el error de solo se va a evaluar al alumno, ya que se evalúa al proceso y con ello a los docentes y los alumnos. Para que el docente participe se debe ser reflexivo y con ello ser juez y parte; el docente debe actuar y al mismo tiempo reflexionar sobre su actuación. Una evaluación continua permite una corrección continua, y con ello una ganancia de tiempo, ya que al tener una actitud reguladora se evitara que el problema de aprendizaje crezca y se vuelva insalvable, se aportaran, de inmediato, nuevas estrategias que permitan alcanzar los objetivos.

Finalmente la Evaluación Final o Sumativa, es aquella que se realiza al final del proceso, aunque este sea parcial, teniendo en cuenta todas las evaluaciones previas otorgándoles un cierto porcentaje. Esta es la evaluación que nos permite otorgar una nota, o una certificación, además es la que informa de manera general el rendimiento alcanzado, a todos los niveles: alumnos, padres, institución, docentes, etc. (B. Bloom, 1977)

Criterios y procedimientos de evaluación.

Para evaluar correctamente es necesario tener muy claros los criterios, que están establecidos por los diseños curriculares, es necesario tener siempre presente: —~~qué~~ queremos evaluar, para qué queremos hacerlo, cuando lo vamos a intentar y qué estrategias metodológicas son las más apropiadas”. (Mahillo, 1997. p 220). Para evaluar es necesario tener qué criterio:

- Comparando el aprendizaje de cada alumno con el de sus compañeros, con una escala comparativa.
- Comparando lo que ha aprendido con lo que debería haber aprendido. Relación: Aprendizaje/contenido a aprender
- Comparando lo aprendido con lo que sabía al empezar. Progresos personales independientes de lo que hayan alcanzado el resto de los alumnos. (Mahillo, 1997)

Para finalizar es necesario, mencionar un último elemento de la evaluación; la Autoevaluación. Como ningún humano nace sabiendo, es necesario que alguien le guíe y emplee la evaluación para indicarle cuáles son los errores y aciertos del proceso. Pero en algún momento es importante que el alumno se independice y logre detectar por si mismo su progresos y sus errores, con la mayor objetividad posible. Lo que a la larga permitirá que la persona alcance la madurez de la autocrítica. Este proceso es largo y difícil para ambas partes, puesto que se puede presentar el abuso de cualquier parte, sin embargo no hay que dejarlo de lado, ya que su desuso puede conducir a un adulto incapaz de ver sus errores y corregirlos.

Respecto a la asignación de la nota es necesario hacer un alto y reflexionar que efectos tiene sobre los padres, los alumno, los maestros y principalmente la sociedad. Si la asignación de la nota solo tuviera el propósito de informar al educando su situación de progreso, en el proceso enseñanza aprendizaje, esta resultaría inútil, puesto que toda evaluación debe ser informada de inmediato para que se corrija lo antes posible, por ello no es necesario pasar a un numero la observación anterior. Lo malo es que el sistema educativo nos obliga a informar a los padres y finalmente a la sociedad, mediante la asignación de una "nota", el rendimiento del alumno, para con ello promoverlo o para que realice estudios superiores en una Universidad específica, resultando de esto un proceso selectivo, contrario a la filosofía de la evaluación. Aquí sugerimos que se asigne la nota y se anexe una serie de comentarios breves que indiquen su desarrollo en el proceso.

## Capítulo V

### La educación en el aula

La educación es un proceso dinámico, aunque muchos especialistas coinciden con modelos teóricos, la experimentación resulta en muchas ocasiones desastrosa, ya que el trabajo en el aula puede desembocar en una situación que puede salirse de cauce. El quehacer educativo se elabora día a día en el salón de clases, por ello es necesario adaptarse rápidamente a las circunstancias que el mismo grupo determina, con su ritmo, su compromiso, su disponibilidad, sus aptitudes y sus actitudes. Por ello es necesario mantener una actitud abierta, de cambio y adecuación de la metodología, ante los posibles escenarios que se presentan en el aula.

Hoy día, la enseñanza está al servicio de la educación, de la formación de individuos. Ya está superada la época en donde lo importante se centraba en la simple transmisión de información y conocimientos. El verdadero conocimiento se logra cuando los datos empíricos que se asimilan adquieren significado, pues únicamente cuando los hechos cobran sentido gracias a conceptos, principios, leyes y teorías generales, se puede hablar de un —conocimiento” verdadero. Todos los profesores somos buenos o malos educadores. Es imposible manejarse en un término medio.

Enseguida enumeramos una serie de características que pueden resultar en una mejor labor docente

#### Claves para dar clases sin hacerse el —simpático”

1. Captar la atención de nuestros alumnos
2. Hacerles ver la actualidad e importancia de lo que estamos haciendo
3. Fomentar en todo momento su participación
4. Dosificar el esfuerzo que han de realizar para lograr cada objetivo
5. Estimular su iniciativa, creatividad y toma de decisiones
6. Indicar desde el principio el proceso a seguir y el objetivo a lograr
7. Estimular su natural espíritu de superación y cooperación
8. Proponer y convencer. Nunca imponer
9. Predicar con el ejemplo
10. Emplear distintas dinámicas de clase (Mahillo, 1997, p 86)

Existen una serie de factores que ayudan a captar la atención:

- Intensidad
  - a) Hablar con voz clara y con un volumen suficiente
  - b) En caso de utilizar audiovisuales, utilizar una pantalla grande con un volumen suficiente
  - c) Ver a todos los alumnos y asegurarse que ellos ven perfectamente el pizarrón
- Repetición
  - a) Es necesario repetir las explicaciones tantas veces como sea necesarios, y de ser posible siempre buscando alternativas de explicación.
  - b) Evitar todo lo posible el ruido —ambiental”

- c) De vez en cuando volver a repasar los conceptos ya explicados con la finalidad de crear un todo
  - Novedad
- a) Comenzar la clase con una explicación que o enfrentando a una situación problemática que nos lleve a la solución creada por los alumnos.
- b) Renovar permanentemente nuestras explicaciones y la actualización de los problemas de entrada.
- c) Corregir con la ayuda de la retroalimentación la metodología empleada. Hacer esto cada que sea necesario.
  - Interés
- a) Plantear problemas para que intenten resolverlos en forma personal
- b) Comenzar la clase con algo curioso
- c) Enfrentar la información con la realidad, hacerles ver la utilidad práctica.
- d) Confrontar los conceptos vistos con la problemática mundial.
  - Expectación
- a) Mantener la expectativa y no dar la solución a un problema planteado
- b) No es conveniente dar el resumen de la clase que se va a explicar.
- c) Reservar una sorpresa para el final de la clase.

(Mahillo, 1997, p 90)

La disciplina es un factor necesario para mantener un nivel de respeto hacia la comunidad, de ello se desprende la necesidad de establecer ciertos criterios elementales que nos ayuden a lógrala, empezaremos con los elementos nocivos para realizar nuestra labor docente.

#### Como dar mal la clase

1. Comenzar dando el rollo de siempre; poco interesante
2. No lles un plan previsto para desarrollar la clase
3. Es fundamental que los alumnos no se den cuenta de lo que estás haciendo
4. Mantén un tono constante desde el principio de la clase hasta que toque el timbre
5. No animes a nadie a preguntar o pedir aclaraciones ni dejes la más mínima ocasión de hacerlo
6. Si no puedes ser el líder de la clase entonces erígete en el dictador
7. No se te ocurra poner ejemplos divertidos ni contar alguna anécdota interesante
8. No provoques ni animes a nadie a pensar por sí mismo
9. No es des la mas mínima confianza y mantén la máxima distancia posible.
10. Cuanto más desordenada impartas la materia, mas lio se harán y menos explicaciones te pedirán
11. No emplees los recursos didácticos si no es estrictamente imprescindible
12. Cuando te sientas incapaz de soportar por más tiempo el aburrimiento y la monotonía de tus propias clases, invéntate alguna manera, más o menos entretenida, de perder el tiempo. Verás cómo nadie protesta

13. Cuando ya no te quede tiempo y veas que se acerca la evaluación, mete el acelerador y termina el tema sin piedad.
14. De vez en cuando échales pleito para amansarlos

(Mahillo, 1997)

Por otro lado podemos lograr una clase dinámica si mantenemos las siguientes actitudes.

#### Actitudes del docente

1. Verdadera vocación docente
2. Espíritu juvenil
3. Ganas de hacer las cosas lo mejor posible
4. Poseer ciertas dotes dramáticas
5. Ordenar y planificar los medios didácticos
6. Distribución correcta y realista del tiempo
7. Respeto integro a la persona
8. Paciencia constancia y sentido del humor
9. Autoevaluación constante y crítica

Las dinámicas son estrategias y/o procedimientos que se siguen para alcanzar el trabajo grupal, constituyen una herramienta poderosa e indispensable para la labor docente. La finalidad es motivar la participación del alumno, que le permitan aprender a través de la experiencia personal. Las Dinámicas se pueden clasificar en:

1. Dinámicas individuales: Tareas específicas en las cuales se pide que el trabajo sea personal y en el cual no se intercambian ideas.
2. Dinámicas para pequeños grupos: Consisten en trabajos grupales, conformados por 3 o 4 alumnos, en los que se trata conjuntar a los alumnos con un mismo nivel de comprensión. Para que en conjunto logren una solución o comprensión del tema
3. Dinámicas para pequeños grupos, con un instructor. Es parecido al anterior caso, solo que en este existe un "experto" o líder que casi siempre es un compañero aventajado o es el mismo profesor, el cual guía al grupo para alcanzar sus objetivos
4. Dinámicas de grupo. Es la estrategia que se sigue con todo el grupo para alcanzar los objetivos que se pueden enumerar como:
  - a) Introducir y explicar
  - b) Practicar lo aprendido
  - c) Investigar o profundizar
  - d) Contrastar y valorar
  - e) Evaluar los resultados para retroalimentación
5. Dinámicas para introducir y explicar
  - a) Uso de debates: Es útil porque permite abordar el tema propuesto mediante un intercambio de ideas, previamente investigadas, que permiten construir un concepto general. Además sirve como resumen de algún trabajo colectivo realizado o como evaluación.

- b) Uso de diapositivas: Se presentan los puntos básicos del tema a tratar
- c) Uso de vídeo: Se presenta un vídeo, que de preferencia, que sea corto pero que presente aspectos interesantes del tema. Puede ser un documental, una película que no se vea en su totalidad, de preferencia se sugiere que se elabore una selección de escenas.
- d) Lluvia de ideas: Se trata de rescatar los elementos que los alumnos ya tiene sobre el tema, y se pueden identificar los puntos débiles.
- e) Foto-palabras: comentar acerca de un grupo de fotografías que siguieran de manera directa o indirecta aspectos relacionados con el tema.
- f) Presentación a cargo de un equipo de alumnos: Se les encarga con tiempo suficiente la presentación, permitiendo que al entender el tema lo presenten con la frescura, que les permita tener un canal de comunicación más apropiado, ya que utilizan el lenguaje común a sus compañeros.
- g) Phillips 6-6: se forman grupos de 6 alumnos, que discutirán 6 minutos elaborando preguntas en común sobre lo que se acaba de explicar.
- h) Rueda de prensa: Se comienza dejando unos 5 a 10 minutos para pensar en lo que se acaba de explicar, todos los alumnos someten al ponente a un bombardeo de preguntas que este debe de responder de manera sencilla y breve.

#### 6. Dinámicas para practicar lo aprendido

- a) Búsqueda de ejemplo concretos y lo más reales posibles.
- b) Resolver problemas aplicando lo visto en clase.
- c) Inducir leyes concretas o resumir el tema.
- d) Deducir aplicaciones a lo cotidiano.
- e) Comentar con espíritu crítico para descubrir causa y efecto.
- f) Encargar, por equipos, la realización de un examen de retroalimentación, para sus compañeros

#### 7. Dinámicas para investigar o profundizar

- a) Investigación personal, se asigna la tarea de investigar o profundizar sobre el tema para ello se recurre al: trabajo documental, investigación aplicada o experimental.
- b) Investigación de profundización conjunta de todo el grupo inclusive el maestro, ya sea en casa o en la biblioteca, usando revistas, libros, enciclopedias, e Internet, visitas a museos, centros de investigación, plantas de producción, o localidades urbanas o rurales, zonas marginales, zonas comerciales, etc. así como entrevistas y encuestas.
- c) Para finalizar se deben de presentar los resultados como un: Ensayo, un poster, un collage, una historieta, una colección de objetos, un reporte, una monografía, un montaje teatral, escénico, o audiovisual, o realizando una "película" así como preparar una presentación en "Power Point"

## 8. Dinámicas para evaluar o retroalimentar.

- a) Realización de una evaluación continua, en donde se asigne una calificación o nota diaria que refleje la comprensión y dominio del tema.
- b) Realizar un examen tipo:
  - Redacción tema
  - Preguntas breves
  - Problemas numéricos
  - Examen oral
  - Tipo prueba
- c) Organizar un concurso en clase para descubrir la profundidad del manejo del tema.
- d) Bombardeo de preguntas cortas a la mitad de la clase, en forma esporádica.
- e) Cuestionarios (Mahillo, 1997, p 190)

Para lograr que un curso sea exitoso se debe comenzar por la programación del curso. Toda programación educativa requiere:

- 1) Plantear claramente y del modo más concreto posible los objetivos que se pretenden lograr, estableciendo un orden didáctico
- 2) Decidir que contenidos queremos transmitir
- 3) Idear las estrategias para lograr alcanzar los objetivos, mediante el uso adecuado y a nuestro alcance.
- 4) Establecer la metodología correcta para cada tema o concepto.
- 5) Decidir el proceso de evaluación y por consiguiente el proceso de asignación de la nota o calificación.
- 6) Tener en cuenta el proceso grupal y de esta manera ser flexible con los alcances del curso
- 7) Aprender a adaptarse a las circunstancias cambiantes.  
(Mahillo, 1997. p 208)

A continuación proponemos los requisitos para enseñar y aprender los contenidos conceptuales:

Por parte del profesor:

- Exponerlos de un modo coherente y bien estructurados, definiéndolos, utilizando ejemplos, relacionándolos con otros y distinguiéndolos de aquellos conceptos similares con los que se pueden confundir
- Basar los conceptos nuevos en otros conceptos más simples ya comprendidos por nuestros alumnos, por ello es importante conocer los saberes previos que poseen los alumnos.
- Evaluar, mediante pruebas objetivas, el grado de comprensión de los nuevos conceptos, sin confundirlo con la repetición memorística, o literal, de la definición de los mismos.

Por parte de los alumnos:

- Disponer de una base conceptual adecuada, que posibilite la comprensión eficaz de los nuevos, que no presente grandes lagunas de conocimiento previo.
- Estar motivados internamente por el afán de saber y dispuestos a esforzarse a comprender el significado y alcance de los nuevos conceptos que el profesor va explicando, sin contenerse con memorizar los —tema que vienen en el examen”

Para educar en la libertad, en primer lugar el alumno debe sentir y entender progresivamente que es un ser libre, es decir, que se cuente con la posibilidad de elegir entre distintas opciones, y ser consciente que estas tendrán sus consecuencias, así como que la elección de estos dependerá de la realización personal. Para ello es necesario identificar y separa la acción de libertad de la de libertinaje, aclarando que ningún ser humano goza de amplios márgenes de libertad. Esto podemos aclararlo; ser libre no es simplemente elegir lo que te dé la gana, ni lo que te plazca, ni lo que esté de moda, sino optar por lo más conveniente en cada caso y no por coacción, sino por pura convicción. —Solo es responsable el que responde de sus propios actos libres”

En la Institución se pretende un aprendizaje activo, el cual se entiende no tanto a la actividad física como a la actividad mental: —una pedagogía activa, es la que estimula, a pensar, hacerse preguntas y a preguntar a investigar, a problematizar la información que recibe, a dudar a argumentar, a discutir, a sacar conclusiones, propias basadas en hechos y no en creencias, a identificar y resolver problemas, a pensar autónomamente, a esforzarse por entender y aprender.” (Torres, 1998. p 4). Es obvio que quien no juega un rol activo en el proceso de aprendizaje, sencillamente no aprende. Aprender implica descubrir, construir, crear. El ser humano aprende a través de su propio esfuerzo y sus propias acciones. Una pedagogía activa es una invitación a maravillarse, y confiar en la curiosidad innata que tiene el ser humano, ya no tanto el alumno, debemos ceder el rol protagónico de su propio proceso de aprendizaje a los alumnos, de esta forma el papel del educador se restringe a la guía, la facilitación estimulando y orientando. Por ello una pedagogía activa es enemiga del autoritarismo y paternalismo en la relación educativa del conductismo.

Este tipo de pedagogías respeta al alumno, apuesta al aprendizaje, reconoce y construye sobre lo diverso, se toma su tiempo, mira el error no como un fracaso sino como una señal de avance ya que posibilita la retroalimentación, para rectificar, reformular, rehacer, reintentar, avanzar y seguir aprendiendo. Esto propicia a la larga, seres humanos que son capaces de adaptarse mejor a los cambios vertiginosos de nuestra época, más flexibles, eficaces y autónomos, dotados de estrategias de aprendizaje y estilos motivacionales adecuados que fomenten en estas personas el desarrollo de capacidades transferibles, que sean adecuadas a las distintas problemáticas, que mas allá de la adquisición de conocimientos concretos, cambien su forma de enfrentarse a tareas y a los retos que les esperan en el futuro.

El desarrollo de las competencias Las competencias, las entendemos como una serie actividades que nos llevaran a lograr los objetivos pedagógicos y no desde el punto de vista empresarial que anteriormente se menciona. —Las competencias básicas, representan un grupo de conocimientos, habilidades y actitudes, valores éticos, y emociones, transferibles y multifuncionales. Son habilidades, competencias, que toda persona necesita para su desarrollo y satisfacción personal, integración y empleo. También deben contribuir a transformar el concepto tradicional de enseñanza basado en la adquisición de conocimientos, en un concepto moderno de aprendizaje basado en la capacidad de resolver situaciones problemáticas a lo largo de la vida. Las competencias básicas sustentan la realización personal, la inclusión social, y la ciudadanía activa y contribuyen a adaptar el proceso de enseñanza-aprendizaje a la sociedad actual”. (Díaz Barahona, J. 2008)

Por ello las nuevas necesidades formativas, deben dirigirse a fomentar la autonomía elaborar y construir las propias interpretaciones a reconstruirla la cultura. Las competencias matemáticas, se centran en principio en considerar a éstas no sólo como conocimientos instrumentales para el desarrollo de las ciencias y la tecnología, sino como los métodos y estrategias para desarrollar las capacidades de abstracción, razonamiento, análisis de relaciones y conexiones, discriminación de aspectos relevantes, establecimiento de conjeturas, construcción de argumentos, solución de problemas; que son la esencia de la capacidad humana y que es lo que nos distingue en el reino animal.

Las competencias científicas, son aquellas que propician el desarrollo de métodos sistemáticos de investigación y conocimientos para la comprensión e interpretación de los fenómenos de la naturaleza y de las sociedades. A la vez, desarrollan la curiosidad, la amplitud de criterio, el espíritu de aventura intelectual y el descubrimiento. (Ibarrola y Gallart, 1995)

## Capítulo VI

### Propuesta didáctica.

El proceso enseñanza –aprendizaje es una serie de pasos que no solo consisten en explicar conceptos o brindar nuevos significados, en este proceso se trata de planificar y promover situaciones en las que el alumno organice experiencias, estructure ideas, analice procesos y exprese pensamientos (Monereo y otros, 1995)

Los alumnos que cursan el último año del bachillerato, se enfrentan a varios problemas; recibir una educación encaminada a propiciar la adquisición de elementos formativos, así como las destrezas, las actitudes, las aptitudes y una gran cantidad de ingenio y creatividad, para de esta forma poder enfrentar su vida universitaria con éxito. Por otro lado uno de las asignaturas que le puede permitir adquirir estos elementos es el curso de Cálculo Diferencial e Integral, que por otro lado es una de las asignaturas con más alto índice de reprobación, lo cual trae consigo la frustración y la eventual deserción. Como docentes nuestra obligación es presentar un curso que los invite a trabajar y les provoque el gusto por la materia. Por otro lado es muy importante que este curso les pueda brindar los elementos antes mencionados.

Es por ello que la incorporación de estrategias didácticas innovadoras en el aula para el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral, es una preocupación constante para lograr una mejor calidad de la educación. Con el objeto de lograr una activa participación de los alumnos en las clases, se aplicaran distintas estrategias didácticas, que resultara una mezcla de las prácticas anteriormente mencionadas. Las técnicas participativas, que sugerimos, son recursos y procedimientos que permiten una práctica transformadora y creadora, en las que los estudiantes desempeñan un papel protagónico en cada una de las actividades. Estas técnicas se basan en la concepción del aprendizaje como un proceso activo, de creación y recreación del conocimiento, donde las actividades se solucionan en forma colectiva, en pequeños grupos, o en forma individual o como una mezcla de todos y se hace énfasis en el intercambio y la confrontación de ideas, opiniones, sugerencias y experiencias entre estudiantes y docentes

Como ya hemos visto y como lo sugieren los expertos, existe una relación entre la calidad del aprendizaje y la participación activa de los estudiantes, sustentada en las distintas tendencias pedagógicas que hemos revisado, ya que los conocimientos y habilidades son más sólidos cuando se logra una mayor interacción en clase. En esta propuesta utilizamos muchas de estas técnicas y no solo una. Los métodos participativos estimulan la resolución de problemas a través del trabajo en equipo, compartiendo el conocimiento individual, optimizando el conocimiento colectivo, estimulando una mayor actividad cognoscitiva de los alumnos, desarrollando su creatividad y su capacidad de auto aprendizaje.

El objetivo de esta propuesta es elaborar una estrategia didáctica en el aula, mostrando que se pueden alcanzar los objetivos académicos, de

desarrollo humano y social, sin que en ello les lleve la vida. Por otro lado también se pretende que descubran que el desarrollo conceptual del Cálculo Diferencial e Integral, es producto de una labor humana, lograda por muchas mentes, y que por ello está al alcance de cualquier ser humano. Comenzaremos presentando en primer lugar la propuesta didáctica para el curso de Calculo Diferencial e Integral I correspondiente al programa de CCH.

El programa operativo propuesto para la planeación didáctica, el programa se encuentra en el anexo 2

Datos de la asignatura: Cálculo Diferencial e Integral I

Clave: 1501, Optativa, Horas por semana: 4

Propósitos u objetivos generales del curso

- Incrementa la capacidad de resolver problemas al adquirir nuevas técnicas para representar e interpretar situaciones y fenómenos que involucran variación.
- Adquiere una visión del concepto de límite, a través del análisis de la representación tabular y gráfica de procesos infinitos, tanto discretos como continuos.
- Relaciona a la derivada de una función con un proceso infinito que permite estudiar las características de la variación y de la rapidez de cambio.
- Maneja de manera integrada las diversas interpretaciones de la derivada y las utiliza para obtener y analizar información sobre una función.
- Utiliza adecuadamente las técnicas de derivación y ubica a las fórmulas como un camino más eficaz de obtener la derivada de una función.
- Aplica la derivada de una función para resolver problemas de razón de cambio y de optimización.

La calendarización que propone la UNAM del programa operativo es la siguiente:

Unidad	Tiempo sugerido
1. Procesos infinitos y la noción de límite.	12 horas
2. La derivada: estudio de la variación y el cambio.	16 horas
3. Derivación de funciones algebraicas.	16 horas
4. Comportamiento gráfico y problemas de optimización.	20 horas
Total de horas	64 horas

Sin embargo nosotros proponemos

Unidad	Tiempo sugerido
I. Revisión algebra	8 horas
II. Procesos infinitos y la noción de límite.	6 horas
III. La derivada: estudio de la variación y el cambio.	16 horas
IV. Derivación de funciones algebraicas.	16 horas
V. Comportamiento gráfico y problemas de optimización.	18 horas
Total de horas	64 horas

Los temas y subtemas de cada unidad

Para el unidad I, estamos proponiendo una revisión de algunos tópicos de álgebra;

- Productos notables
- Factorización, con énfasis en trinomios, diferencia de cuadrados, factorización por agrupación y casos especiales.
- Simplificación de fracciones; suma, resta, multiplicación, división, fracciones complejas.
- Radicales y exponentes; simplificación y racionalización.

Para esta sección se propone una revisión de los elementos algebraicos, vistos en los cursos anteriores.

Numero de Clase	Tema y subtema	Estrategia
Primera	Productos notables	Resolver los ejercicios 1
Segunda	Factorización	Resolver los ejercicios 2
Tercera	Operaciones de fracciones	Resolver los ejercicios 3
Cuarta	Radicales y exponentes	Resolver los ejercicios 4

1. En la primera clase al principio se pregunta al grupo por las distintas fórmulas de los productos notables y se elabora una tabla que las contenga, se ejemplifican, ya sea por parte del maestro o por parte de algún alumno, se discuten los detalles y se centra el trabajo en los alumnos con alguna deficiencia. El resto trabaja sobre sus hojas de estrategia. Al final de la clase se quedan de tarea los ejercicios no resueltos en la clase.
2. En la segunda clase la dinámica es la misma, ahora se trabaja la hoja de estrategia por equipos, cada equipo tiene una sección de ejercicios, por ejemplo el equipo uno, realiza los ejercicios marcados con los múltiplos de 3, se presentan en el pizarrón los ejercicios más representativos o los que causaron mayor problema, al grupo. El trabajo debe ser de equipo, ya que las explicaciones de la resolución deben ser dadas por cualquier miembro del equipo. Los equipos se integran de manera voluntaria.
3. En la tercera clase se hacen equipos al azar, para propiciar el trabajo colectivo, y de nuevo se procede con la dinámica de la primera clase, para el trabajo de equipo se realiza de la misma manera que en la segunda clase. La variante es que los equipos son formados de manera azarosa y con ello se propicia el trabajo en equipo y conocimiento de nuevos compañeros.
4. En la cuarta sesión se utiliza la misma dinámica de introducción, pero ahora la hoja de estrategias se trabaja de manera individual. Lo que nos permite reconocer limitaciones y avances de cada uno de los alumnos.
5. La quinta sesión será la sesión de la evaluación, se puede realizar un trabajo grupal donde se forman equipos de trabajo identificando sus obstáculos y trabajando sobre ellos, los equipos pueden ser ayudados por sus mismos compañeros, dejando al equipo con mayores dudas para que lo trabaje el docente. Al final se realiza entre todos un mapa

conceptual de los temas. Este mapa es dirigido por el docente haciendo énfasis en los elementos que este debe tener.

Las hojas de estrategias, en algunos casos tienen las respuestas para que el mismo alumno pueda ver sus errores y así consultar con el docente. Para las distintas actividades se presentan:

#### Hoja de estrategia 1

Efectúe las operaciones indicadas, producto, y simplifica:

Ejercicio	Solución
1. $(x+3)(x+1)$	$x^2+4x+3$
2. $(x+6)(x+2)$	$x^2+8x+12$
3. $(x+5)(x-2)$	$x^2+3x-10$
4. $(x+3)(x-6)$	$x^2-3x-18$
5. $(x-1)(x+3)$	$x^2+2x-3$
6. $(x-7)(x+4)$	$x^2-3x-28$
7. $(x+1)(x-1)$	$x^2-1$
8. $(x-6)(x+6)$	$x^2-36$
9. $(x-1)(x-6)$	$x^2-7x+3$
10. $(2x+1)(x+3)$	$2x^2+7x+3$
11. $(2x+1)(x-5)$	$2x^2-9x-5$
12. $(4x-1)(x+7)$	$4x^2+27x-7$
13. $(2x-3)(x-4)$	$2x^2-11x+12$
14. $(2x+1)(3x+2)$	$6x^2+7x+2$
15. $(3x+1)(3x+4)$	$9x^2+9x-4$
16. $(3x+1)(3x+1)$	$12x^2+x-1$
17. $(4x+1)(2x-9)$	$8x^2-34x-9$

18. $(2x+1)(2x-1)$	$4x^2-1$
19. $(2x+5)(2x-5)$	$4x^2-25$
20. $(3x+1)(4x-3)$	$12x^2-13x+3$
21. $(x+3)^2$	$x^2+6x+9$
22. $(2x+3)^2$	$4x^2+12x+9$
23. $(x-4)^2$	$x^2-8x+16$
24. $(3x-2)^2$	$9x^2-12x+4$
25. $(2x+3y)^2$	$4x^2+12xy+9y^2$
26. $(2x^2-3y)^2$	$4x^4-12x^2y+9y^2$
27. $(2x^3+3y^2)^2$	$4x^6+12x^3y^2+9y^4$
28. $(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{5}y)^2$	$\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{5}x^2y + \frac{9}{25}y^2$
29. $(x^2+yz)(x^2-yz)$	$x^4-y^2z^2$
30. $(2x^2+x-2)(x^2+3x+5)$	$2x^4-5x^3+5x^2+11x-10$
31. $(h^2+hk-k^2)(h^2-hk+k^2)$	$h^4+h^2k^2+k^4$
32. $(x+1)(2x^2-2x+3)$	$2x^3+x+3$
33. $(x-2)(x^2+2x-4)$	$x^3-8x+8$
34. $(x+1)(x^2-x+1)$	$x^3+1$
35. $(2x+1)(4x^2+2x+1)$	$8x^3-1$
36. $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$	$1x^3-8y^3$
37. $(y+5)^3$	$y^3+15y^2+75y+125$
38. $(x+1)^3$	$x^3+3x^2+3x+1$
39. $(x+y)^3$	$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

40. $(x-1)^3$	$x^3-3x^2+3x-1$
41. $(2x-1)^3$	$8x^3-12x^2+6x-1$
42. $(5m^2-4n^3)^3$	$125m^6-300m^4n^3+240m^2n^6-64n^9$
43. $(m^2-2n)^3$	$m^6-6m^4n+12m^2n^2-8n^3$
44. $(5x+4)^2+(3x+2)^2$	$34x^2+52x+20$
45. $(4x-6)^2-(3x+2)(3x-2)$	$7x^2-48x+40$
46. $5x^2+2(4x+8)^2$	$37x^2+128x+128$
47. $(7x+3)(7x-3)-2(x+5)^2$	$47x^2-20x-59$
48. $(2+4x)^2+(5-3x)^2$	$25x^2-14x+29$
49. $(5+2x)^2-(7-3x)^2$	$-5x^2+62x-24$
50. $(3-2x)(3+2x)+2(3x-4)^2$	$14x^2-48x+41$
51. $(2x-4)(3x+2)-4x(2x+6)$	$-2x^2-32x-8$
52. $(3x-5)(3x+5)-(-6x+3)(2x-4)$	$21x^2-30x-13$
53. $(2x-3)(3x-4)+(x+6)(x-2)$	$7x^2-13x$
54. $(x+1)(x-2)-(x+2)(x-3)$	4
55. $(x-2)(x+8)+(x-3)^2$	$2x^2-7$
56. $(3x+1)(x+4)-(x+2)^2$	$2x^2+9x$
57. $(2x-3)(x+4)-2(x+3)^2$	$-7x-30$
58. $(x-6)^2-(x+6)^2$	$-24x$
59. $(x^2+2x-1)(x^2-2x+1)$	$x^4-4x^2+4x-1$
60. $(3x^2-x+2)(2x^2+x-3)$	$6x^4+x^3-6x^2+5x-6$

61. $(x^2-x+2)^2$	$x^4-2x^3+5x^2-4x+4$
62. $(x^2-2x-1)^2$	$x^4-4x^3+2x^2+4x+1$
63. $(2x+3y^2)^4$	$16x^4+96x^3y^2+216x^2y^4+216xy^6+81y^8$
64. $(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x})^5$	$\frac{1}{x^5} - \frac{10}{x^{7/2}} + \frac{40}{x^2} - \frac{80}{x^{1/2}} + 80x - 32x^{5/2}$
65. $(a+b)^6$	$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
66. $(a-b)^8$	$a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$
67. $(3x-5y)^4$	$81x^4-540x^3y+1350x^2y^2-1500xy^3+625y^4$
68. $(2x+3y+4)(2x+3y-4)$	$4x^2+12xy-9y^2-16$
69. $(x+1)(x-1)(x^2+1)$	$x^4-1$

## Hoja de estrategia 2

### Factoriza

Ejercicios	Solución
1. $y^2-5y$	$y(y-5)$
2. $6y^2+3y$	$3(2y+1)$
3. $x^3+8x^2$	$x^2(x+8)$
4. $5x^2-5x+15$	$5(x^2-x+3)$
5. $8y^2+4y^4$	$4y^2(2+y^2)$
6. $8xy+10xz-14xw$	$2x(4y+5z-7w)$
7. $5x^2y^3+15x^3y^2$	$5x^2y^2(y+3x)$
8. $y^4-y^3+y^2+y$	$y(y^3-y^2+y+1)$
9. $10a^4+15a^2-25a-30$	$5(2a^4+3a^2-5a-6)$
10. $x^2+16-8x$	$(x-4)^2$

11. $x^2+16x+64$	$(x+8)^2$
12. $x^2+1-2x$	$(x-1)^2$
13. $a^2-4a+4$	$(a-2)^2$
14. $y^2+36+12y$	$(y+6)^2$
15. $24a^2+a^3+144a$	$a(a+12)^2$
16. $32x^2+48x+18$	$5(2y+5)^2$
17. $64+25y^2-80y$	$2(4x+3)^2$
18. $y^2-9$	$(y+3)(y-3)$
19. $4a^2-49$	$(2a+7)(2a-7)$
20. $100y^2-81$	$(10y+9)(10y-9)$
21. $8x^2-8y^2$	$8(x+y)(x-y)$
22. $5x^4-5y^4$	$5(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
23. $9a^4-a^2b^2$	$a^2(3a+b)(3a-b)$
24. $x^2-2xy+y^2-25$	$(x-y-5)(x-y+5)$
25. $c^2+4cd+4d^2-9p^2$	$(c+2d-3p)(c+2d+3p)$
26. $12x^2+12x+3-3y^2$	$3(2x+1-y)(2x+1+y)$
27. $16-(x^2-2xy+y^2)$	$(4-x+y)(4+x-y)$
28. $xy+xz+wy+wz$	$(x+w)(y+z)$
29. $y^3-y^2+3y-3$	$(y^2+3)(y-1)$
30. $t^2+6t-2t-12$	$(t-2)(t+6)$
31. $2xy-x^2y-6+3x$	$(xy-3)(2-x)$
32. $36x^2-36+9$	$9(2x-1)^2$
33. $25-20x+4x^2$	$(2x-5)^2$
34. $9x^2-15x+25$	$3x(3x-5)+25$
35. $16x^2+16x-4$	$4(4x^2+4x-1)$
36. $16a^2+16-32a$	$16(a-1)^2$
37. $25b^2+36-60b$	$(5b-6)^2$
38. $(5x+2)(4x-3)+(5x+2)(6x+4)$	$(5x+2)(10x+1)$
39. $(8x-3)(3x+7)+(8x-3)(5x-4)$	$(8x-3)(8x+3)$
40. $(4x+7)(3x-2)+(3x-2)(5x+3)$	$(3x-2)(9x+10)$
41. $(9r-3)(7r+2)+(2r-4)(7r+2)$	$(7r+2)(11r-7)$
42. $(6x+7)(7x-2)+(6x+7)$	$(6x+7)(7x-1)$
43. $(9r-3)(4r-2)+(9r-3)^2$	$3(3r-1)(13r-5)$

44. $(6m-3)^2-(6m-3)(4m+2)$	$3(2m-5)(2m-1)$
45. $x^2-1$	$(x-1)(x+1)$
46. $x^2-9$	$(x-1)(x+3)$
47. $x^2-16$	$(x-4)(x+4)$
48. $x^2-36$	$(x-6)(x+6)$
49. $x^2-49$	$(x-7)(x+7)$
50. $x^2-64$	$(x-8)(x+8)$
51. $x^2-100$	$(x-10)(x+10)$
52. $x^2-144$	$(x-12)(x+12)$
53. $x^2+25$	$(x-5i)(x+5i)$
54. $x^2+81$	$(x-9i)(x+9i)$
55. $4-x^2$	$(2-x)(2+x)$
56. $25-x^2$	$(5-x)(5+x)$
57. $64x^2-1$	$(8x-1)(8x+1)$
58. $81x^2-1$	$(9x-1)(9x+1)$
59. $4x^2-9$	$(2x-3)(2x+3)$
60. $4x^2-81$	$(2x-9)(2x+9)$
61. $9x^2-25$	$(3x-5)(3x+5)$
62. $16x^2-9$	$(4x-3)(4x+3)$
63. $16x^2-81$	$(4x-9)(4x+9)$
64. $9x^2-4y^4$	$(3x-4y^2)(3x+4y^2)$
65. $16x^4-y^2$	$(4x^2-y)(4x^2+y)$
66. $4a^4-9b^2c^2$	$(2a^2-3bc)(2a^2+3bc)$
67. $12x^2y^2-75a^2$	$3(2xy+5a)(2xy-5a)$
68. $4x^6-64x^2$	$4x^2(x^2+4)(x+2)(x-2)$
69. $28b^2c^3-63b^4c$	$-7b^2c(3b-2c)(3b+2c)$
70. $20x^2y-45y^3$	$5y(2x-3y)(2x+3y)$
71. $144x^2y^4-81a^4b^2$	$-9(3a^2b-4xy^2)(3a^2b+4xy^2)$
72. $(x+1)^2-y^2$	$(x-y+1)(x+y+1)$
73. $(x+3)^2-4y^2$	$(x+3+2y)(x+3-2y)$
74. $(x-1)^2-16y^2$	$(x-1+4y)(x-1-4y)$
75. $4x^2-(y+3)^2$	$(2x+y+3)(2x-y-3)$
76. $16x^2-(y+5)^2$	$(4x+y+5)(4x-y-5)$

77. $x^2 - (y-2)^2$	$(x+y-2)(x-y+2)$
78. $9x^2 - (2y-1)^2$	$(3x+2y-1)(3x-2y+1)$
79. $x^4 - x^2(y+1)^2$	$x^2(x+y+1)(x-y-1)$
80. $2x^2 - 32(2y+1)^2$	$2(x+8y+4)(x-8y-4)$
81. $x^2y^2 - y^2(y-4)^2$	$y^2(x+y-4)(x-y+4)$
82. $(x+3)^2 - (2y+1)^2$	$(x+2y+4)(x-2y+2)$
83. $(2x-1)^2 - (y-2)^2$	$(2x+y-3)(2x-y+1)$
84. $(3x-1)^3 + y^2(1-3x)$	$(3x-1)(3x-1+y)(3x-1-y)$

Hoja de estrategia 3

Realiza las siguientes operaciones

Ejercicio	Solución
$\frac{x^3 + x}{x^4 - x}$	$\frac{x}{x^2 - 1}$
$\frac{x^2 - 9}{9x - x^3}$	$\frac{-1}{x}$
$\frac{ax + by}{ax^2 - bxy}$	$\frac{1}{x}$
$\frac{x^2 - 9x}{x^3 - 6x^2 + 9x}$	$\frac{x + 3}{x - 3}$
$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x - 15}$	$\frac{x^2}{x^2 + 5}$
$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+1} + \frac{4}{x^2+1}$	$\frac{x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 2x - 1}{x^4 - 1}$
$\frac{x-1}{x+2} + \frac{3}{x-2} - \frac{3x+4}{(x+2)^2} + \frac{x+2}{x^2-4}$	$\frac{x^3 - x^2 + 10x + 24}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$
$\frac{x^2-2x+3}{x-2} * \frac{2x+3}{x+5}$	$\frac{2x^3 - x^2 + 9}{x^2 + 3x - 10}$
$\frac{x+2}{x} / \left( \frac{x-1}{3} * \frac{x}{2x+1} \right)$	$\frac{6x^2 + 15x + 6}{x^3 - x^2}$
$\left( \frac{1}{x+1} \right) * \left( x - \frac{1}{x} \right)$	$\frac{x - 1}{x}$

Hoja de estrategia 4

Ejercicio	Solución
$\sqrt[3]{54}$	$3\sqrt[3]{2}$
$7\sqrt[5]{1024}$	28
$\frac{6\sqrt[3]{8}}{3\sqrt[3]{4}}$	$2\sqrt[3]{2}$
$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{10}$
$\sqrt[4]{2}\sqrt{5}$	$\sqrt[4]{50}$
$2\sqrt{27} - 4\sqrt{12}$	$-2\sqrt{3}$
$\sqrt{175} + \sqrt{243} - \sqrt{63} - 2\sqrt{75}$	$2\sqrt{7} - \sqrt{3}$
$\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{12} - \left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{18} + \left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{48} + \left(\frac{1}{6}\right)\sqrt{72}$	$4\sqrt{3}$
$\frac{3 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$	$4\sqrt{2} - 5$
$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$	$\frac{2\sqrt{10} - 7}{3}$
$\frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}$	$\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$
$(3a^{-5})^2(-2a^{12})^3$	$-72a^{26}$
$(3a^2b)^{-1}(-1/3*a^{-3}*b^5)^{-3}$	$-9a^7/b^{16}$
$(81/20)^{-3} : (25/24)^2$	$2^{12}/(3^{10}*5)$
$((8a^6)^{-3} * 6/a^{-2})^{-1}$	$(2^8*a^{16})/3$
$\frac{(3a^2b)^{-3} (2a^2b)^{-1} a}{(2a^{-2}b)^2 (6ab)^{-2} b}$	$\frac{1}{6ab^5}$
$a^{1/2} * \left(\frac{a^{-2/3} * (ab)^{5/3}}{b}\right)^{-1/2}$	$\frac{1}{b^{1/3}}$

Para la unidad II;

### PROCESOS INFINITOS

Numero de Clase	Tema y subtema	Estrategia
Primera	El infinito	Lectura y debate
Segunda	Sucesiones	Resolver los ejercicios 1
Tercera	Representación gráfica	Resolver los ejercicios 2 y 3
Cuarta	Representación simbólica	Resolver los ejercicios 4 y 5

- Al principio de la primera clase se pregunta al grupo lo que sabe y cree acerca del infinito. Se anotan las ideas en el pizarrón, posteriormente se entrega una lectura —El infinito” (anexo 1), con la que se responde el siguiente cuestionario
  - ¿En qué consisten las paradojas de Zenón y por qué ello nos lleva al concepto intuitivo del infinito?
  - ¿Por qué se dice que el conjunto de los números naturales tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los números pares?
  - ¿Cómo formalizó Cantor la definición de conjunto infinito?
  - ¿Por qué crees que es muy difícil entender el concepto de infinito?
  - ¿Entenderlo está en los límites del razonamiento humano?

En esta sesión se realiza una síntesis de la lectura de manera individual. La tarea consiste en buscar la definición de paradoja y posteriormente las paradojas de Bertrand Russell, construyendo un mapa con las ideas principales.

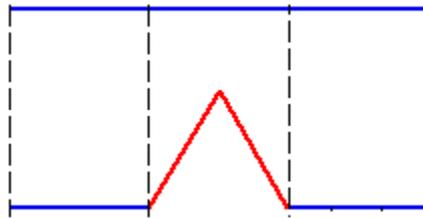
- En la segunda clase se escriben las siguientes secuencias y se pide que se encuentre una —fórmula” el trabajo es por equipos formados por el azar.
 

a) 1, 4, 10, 13, 16, 19, 22, 25...	Respuesta $3n-2$
b) 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38,...	Respuesta $5n-2$
c) 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187,...	Respuesta $3^n$
d) 4, 2, 1, 0.5, 0.25,...	Respuesta $4 \cdot 2^{-n}$
e) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45...	Respuesta $n(n+1)/2$
f) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81...	Respuesta $n^2$
g) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...	Respuesta $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

La Tarea consiste en investigar qué es una serie y encontrar las series de las sucesiones anteriores, desde  $n = 1$  hasta  $n = 20$

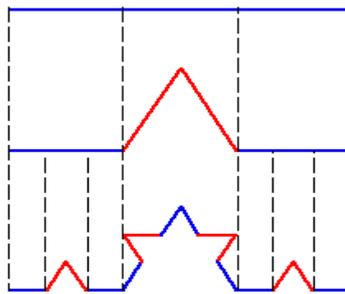
- Tercera clase en forma individual ir al laboratorio de cómputo y mediante el programa de Excel, graficar las sucesiones anteriores, para analizar su comportamiento en cuanto a: cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, qué tan parecidos son y a la larga, cómo son éstos. Entregar por escrito. Tarea investigar qué es a) un fractal y qué es el conjunto de Mandelbrot,
- En la cuarta clase se hacen equipos al azar, para propiciar el trabajo colectivo, se resuelve la siguiente actividad:

- Consideremos un segmento de recta, el cual para comenzar lo consideramos de longitud 12 cm
- Reemplaza el segmento inicial por cuatro segmentos de recta cada uno de longitud de  $\frac{1}{3}$  de la longitud del segmento inicial, como muestra la figura



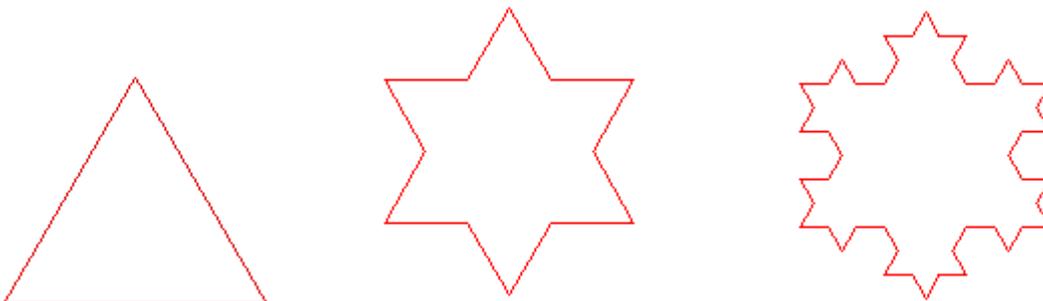
Obteniendo, así una poligonal formada por cuatro segmentos de longitud  $\frac{1}{3}$ , por lo tanto la longitud de la poligonal es  $4 * \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

- Repita el proceso de reemplazar cada segmento de la poligonal obtenida en la etapa anterior por cuatro segmentos cada uno de longitud  $\frac{1}{3}$  de la longitud del segmento considerado, El procedimiento es ilustrado en la figura abajo



En esta nueva poligonal cada segmento tiene longitud  $\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$  y como hay 16 segmentos, entonces la longitud del polígono es de  $16/9 = (\frac{4}{3})^2$

- Repita el paso anterior. Comprobando que en este paso la longitud de la poligonal es de  $(\frac{4}{3})^3$
- Si repitiéramos este proceso de forma indefinida cual será la longitud de la poligonal final. ¿Por qué?
- Si a la construcción de reemplazar cada segmento por otros cuatro, cada uno de longitud  $\frac{1}{3}$  de la longitud del segmento considerando en la etapa anterior se puede aplicar, por ejemplo, a los lados del triángulo equilátero de lado 1. Dibuja las figuras que se obtendrían. Calcula de igual forma el perímetro de estas.



Etapa 0, Longitud de la poligonal igual a 3	Etapa 1, Longitud de la poligonal igual a $12/3 = 3 \cdot (4/3)$	Etapa 1, Longitud de la poligonal igual a $48/9 = 3 \cdot (4/3)^2$
---	--	--

- g) Investiga de tarea por qué las figuras anteriores se conocen como curva de Koch, y copo de nieve de Koch.
- h) Dibuja un triángulo equilátero de lado 12 cm, y Dividimos el área del triángulo en cuatro regiones de igual área, como muestra la figura, lo puedes lograr si cálculos los puntos medios de cada lado, ahora elimina el triángulo interior



- i) En cada triángulo restante, repite el proceso de división-eliminación, repite de nuevo para obtener estas dos figuras



- j) Tarea: Investiga quién fue el primero que hizo este fractal
5. La quinta sesión: Será la sesión de la evaluación, se puede realizar un trabajo grupal donde se forman equipos de trabajo identificando sus obstáculos y trabajando sobre ellos, los equipos pueden ser ayudados por sus mismos compañeros, dejando el equipo con mayores dudas para que lo trabaje el docente. Al final se realiza entre todos un mapa conceptual de los temas. Este mapa se realizara por equipos entregando el producto final.

### NOCIÓN DE LÍMITE

Numero de Clase	Tema y subtema	Estrategia
Primera	Funciones	Resolver los ejercicios 1
Segunda	Dominio y contra dominio	Resolver los ejercicios 2
Tercera	Traslación de funciones	Resolver los ejercicios 3
Cuarta	Concepto intuitivo de limite	Resolver los ejercicios 4
Quinta	Limites unilaterales y bilaterales	Resolver los ejercicios 5
Sexta	Calculo algebraico de Limites	Resolver los ejercicios 6
Séptima	Calculo algebraico de Limites	Resolver los ejercicios 6

1. Primera clase. Se retoma la definición de Función, se clasifican de acuerdo a funciones: Algebraicas, racionales, irracionales. trascendentes, logarítmicas, trigonométricas.

a) En el laboratorio de computo se grafican las siguientes funciones clasificándolas

- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
- $f(x) = \ln(x+2)$
- $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$
- $f(x) = x^4 - 4x^2$
- $f(x) = \frac{3x^2+x-1}{6}$
- $f(x) = \sqrt{x-1}$
- $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
- $f(x) = \ln(x^2-4)$

2. Segunda clase. Se pide a los alumnos que escriban el concepto de dominio y de rango,

a) Se utilizan las graficas de las funciones vistas en la clase anterior e ~~cl~~ "identifica" el dominio y el rango por medio de la grafica.

b) Se describe el método algebraico para encontrar el dominio y el rango, verificando que el método grafico es acertado.

c) Se forman equipos al azar y calcula el dominio de las siguientes funciones

Ejercicio	Solución
$f(x) = \frac{x}{x-1}$	Dom f = $\mathbf{R} - \{1\}$
$f(x) = \frac{2}{x^2+2x+1}$	Dom f = $\mathbf{R} - \{-1\}$
$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$	Dom f = $\mathbf{R}$
$f(x) = \sqrt{x+1}$	Dom f = $[-1, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$	Dom f = $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$
$f(x) = \log(x^2 - 6x + 8)$	Dom f = $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$
$f(x) = \log(x+1)$	Dom f = $(-1, \infty)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$	Dom f = $(-1, \infty)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$	Dom f = $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
$f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$	Dom f = $(-\infty, -3] \cup (2, \infty)$

- d) Tarea: Se grafican las funciones anteriores y se verifican los Dominios.
3. Tercera clase: En el laboratorio de computo, utilizando Excel, se pide graficar las siguientes funciones
- $f(x) = x^2$
  - $f(x) = 3x^2$
  - $f(x) = (x - 2)^2$
  - $f(x) = x^2 + 5$
  - $f(x) = -x^2$

Describe qué papel juegan las letras, A, h y k en la función  $f(x) = A(x-h)^2 + k$   
 Se bosquejan las graficas de las siguientes funciones, en papel milimétrico

- $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 5$
- $f(x) = -4(x-2)^2 - 3$

Graficar las siguientes funciones en Excel

- $f(x) = x^3$
- $f(x) = 3x^3$
- $f(x) = (x - 2)^3$
- $f(x) = x^3 + 5$
- $f(x) = -x^3$

Describe qué papel juegan las letras, A, h y k en la función  $f(x) = A(x-h)^3 + k$

Se bosquejan las graficas, en papel milimétrico las siguientes funciones

- $f(x) = 5(x-6)^3 - 3$
- $f(x) = -\frac{1}{2}(x+5)^3 + 4$

Graficar las siguientes funciones en Excel

- $f(x) = 1/x$
- $f(x) = 3/x$
- $f(x) = \frac{x}{x+2}$
- $f(x) = \frac{1}{x-1} - 5$

Describe qué papel juegan las letras, A, h y k en la función  $f(x) = A/(x-h) + k$

Elabora por equipos un mapa conceptual donde se plasme el concepto de bosquejo de funciones recalcando el papel que juegan las letras, A, h y k para cualquier tipo de función.

Tarea: Realizar el bosquejo de la función  $f(x) = 4x^2 + 3x - 22$ , sugerencia: completa cuadrados. Posteriormente gráfica con Excel y compara.

4. Cuarta clase:

Realiza la tabulación de las siguientes funciones

- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

x	f(x)
0.9	
0.99	
0.999	
0.999	
0.9999	
1.1	
1.01	
1.001	
1.0001	
1.00001	

- $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$

x	f(x)
-1.9	
-1.99	
-1.999	
-1.999	
-1.9999	
-2.1	
-2.01	
-2.001	
-2.0001	
-2.00001	

- $f(x) = \frac{x}{x-1}$

x	f(x)
0.9	
0.99	
0.999	
0.999	
0.9999	
1.1	
1.01	
1.001	
1.0001	
1.00001	

- $f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-6}$

x	f(x)	x	f(x)
-1.9		2.9	
-1.99		2.99	
-1.999		2.999	
-1.999		2.999	
-1.9999		2.9999	
-2.1		3.1	
-2.01		3.01	
-2.001		3.001	
-2.0001		3.0001	
-2.00001		3.00001	

- $f(x) = \frac{6x^2+9x-3}{2x^2-8x-6}$

x	f(x)
10	
1000	
10000	
100000	
100000	
$1 \cdot 10^7$	
$1 \cdot 10^{12}$	
$1 \cdot 10^{20}$	
$1 \cdot 10^{30}$	
$1 \cdot 10^{40}$	

- $f(x) = \frac{8x^3+5x-2}{5x^2-4x-7}$

x	f(x)
10	
1000	
10000	
100000	
100000	
$1 \cdot 10^7$	
$1 \cdot 10^{12}$	
$1 \cdot 10^{20}$	
$1 \cdot 10^{30}$	
$1 \cdot 10^{40}$	

- $f(x) = \frac{6x^2+9x-3}{8x^3+5x-2}$

x	f(x)
10	
1000	
10000	
100000	
1000000	
$1 \cdot 10^7$	
$1 \cdot 10^{12}$	
$1 \cdot 10^{20}$	
$1 \cdot 10^{30}$	
$1 \cdot 10^{40}$	

Si notamos en cada caso que la variable dependiente se —acera” mucho a un valor  $f(x)$  que se conoce como  $L$  lo llamaremos el valor —límite”. Supongamos que la variables  $x$  se acerca al valor numérico  $a$ , entonces la imagen o el valor de la variable dependiente  $f(x)$  se acerca al valor numérico  $L$  se puede escribir

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow L$$

ó más formalmente

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

y se lee —el límite de la función  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  es igual a  $L$

Para los casos anteriores escribe los límites de cada una de las funciones, así como lo hicimos anteriormente, define intuitivamente los siguientes límites.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

5. Quinta clase. Realiza la tabulación de las siguientes funciones

- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x < 3 \\ 2x - 1, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

x	f(x)
2.9	
-2.99	
2.999	
2.999	
2.9999	
3.1	
3.01	
3.001	
3.0001	
3.00001	

- $f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

x	f(x)
0.9	
0.99	
0.999	
0.999	
0.9999	
1.1	
1.01	
1.001	
1.0001	
1.00001	

- $f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{si } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2}, & \text{si } -5 \leq x \leq 5 \\ 3 - x, & \text{si } x > 5 \end{cases}$

x	f(x)	x	f(x)
-4.9		4.9	
-4.99		4.99	
-4.999		4.999	
-4.999		4.999	
-4.9999		4.9999	
-5.1		5.1	
-5.01		5.01	
-5.001		5.001	
-5.0001		5.0001	
-5.00001		5.00001	

Tarea: Investiga lo que son los límites unilaterales, como se escriben y cuál es el teorema de límites bilaterales, aplícalos a cada caso. Dando las definiciones intuitivas.

Busca también el concepto de continuidad, discontinuidad permanente y discontinuidad removible.

6. Sexta clase: La clase comienza con la siguiente exposición:

- a) Supongamos que  $a = b$
- b) Ahora multiplicamos por  $b$  ambos lados;  $ab = b^2$
- c) Restamos de ambos lados  $a^2$ ;  $ab - a^2 = b^2 - a^2$
- d) Factorizamos;  $a(b-a) = (b+a)(b-a)$
- e) Dividimos entre  $(b-a)$  ambos lados;  $a = b+a$
- f) Pero como desde el inciso (a)  $a = b$  entonces;  $a = 2a$
- g) Dividimos entre  $a$ ;  $1 = 2$ , lo cual es una contradicción!.

Identifica en dónde está la falla de la secuencia.

La respuesta es por dividir entre cero en el inciso (e) ya que como  $a = b$  entonces  $b-a = 0$ .

La siguiente actividad es resolver algebraicamente el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Al sustituir  $x = 2$  se tiene el cociente  $0/0$ , los textos sugieren que se factorice;

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Si vemos se está dividiendo entre  $x-2$  y cuando calculamos el límite hacemos  $x = 2$  ¿por que esto sí es válido si se parece al caso de la contradicción?

Séptima clase; se explican los “pasos” algebraicos para calcular los límites de las indeterminaciones  $0/0$  así como los del infinito, ahora se piden que se formen equipos de dos personas y se resuelvan los siguientes casos:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 1}{-8x^3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^5 + 1}{-8x^3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)^3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{(x - 2)^3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{(x - 2)^3}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2}{(x - 2)^3}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x^2 + 2x + 1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - x - 3x^2}{x^2 + 4x^2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x - 9}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{9x - 9}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-36}{\sqrt{x}-6}$$

$$\text{c) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ si } f(x) = 3x^2 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - x - 15}{x^3 - 27}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow} \frac{3x^2 - 18x - 11}{-5x^2 + 9x - 17}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow} \frac{12x^2 - 17x - 5}{3x^2 + 34x - 7}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow -6} \frac{5x^3 + 30x^2 - 20x - 120}{2x^2 + 10x - 48}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 7}}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{30-x} - 5}{\sqrt{8x-4} - 6}$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$$

$$\text{l) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$\text{m) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ si } f(x) = \sqrt[2]{x}$$

### La unidad III

Numero de Clase	Tema y subtema	Estrategia
Primera y segunda	Estudio de la variación	Resolver los ejercicios 1
Tercera y Cuarta	Problemas con modelos de funciones polinomiales de 1°, 2° y 3° grado.	Resolver los ejercicios 2
Quinta y sexta	Comparación de la razón de los cambios en intervalos del mismo tamaño	Resolver los ejercicios 3
Séptima y octava	Razón de cambio, medición de la variación.	Resolver los ejercicios 3
Novena y decima	Razón de cambio promedio en intervalos del mismo tamaño de funciones polinomiales de segundo y tercer grado	Resolver los ejercicios 3
Onceava y doceava	La razón de cambio promedio e instantánea	Resolver los ejercicios 3
Treceava y decimocuarta	Concepto y notación de derivada	Resolver los ejercicios 3

#### Actividades

##### 1. Primera sesión:

Se plantea el siguiente problema: Una Pastelería solo elabora pasteles de chocolate, cuyo precio de venta es de \$ 450.00. En la pastelería se tienen costos fijos por \$ 800.00 y el costo variable de cada pastel es de \$ 170.00

- ¿Cuál es el costo que tiene la pastelería si solo hace un pastel?
- ¿Cuál es el costo que tiene la pastelería si solo hace 10 pasteles?
- ¿Cuál es el costo que tiene la pastelería si solo hace 100 pasteles?
- ¿Cuál es la ganancia que tiene la pastelería si solo hace un pastel?
- ¿Cuál es la ganancia que tiene la pastelería si solo hace 10 pasteles?
- ¿Cuál es la ganancia que tiene la pastelería si solo hace 100 pasteles?
- ¿Cuántos pasteles deben vender para que no existan perdidas? Este punto se llama el punto de equilibrio.

Llena la siguiente tabla

Pasos	Numero de pasteles (x)	Costo (y)	$\Delta x$ ( $x_i - x_{i-1}$ )	$\Delta y$ ( $y_i - y_{i-1}$ )
1	0	800		
2	5	1650	5-0=5	1650-800=850
3	10			
4	15			
5	20			
6	25			
7	30			

- Grafica  $x$  vs  $y$  en papel milimétrico, ¿Qué curva resulta? Encuentra una expresión algebraica para ella. ¿Qué representa  $\Delta y$  en la ecuación?

b) Para las siguientes tablas realiza los mismos pasos que en el inciso anterior

Pasos	(x)	(y)	$\Delta x$ ( $x_i - x_{i-1}$ )	$\Delta y$ ( $y_i - y_{i-1}$ )
1	-2	-0.5		
2	0	2		
3	2	4.5		
4	4	7		
5	6	9.5		
6	8	12		
7	10	14.5		

Pasos	(x)	(y)	$\Delta x$ ( $x_i - x_{i-1}$ )	$\Delta y$ ( $y_i - y_{i-1}$ )
1	-5	-10		
2	10	-20		
3	25	-50		
4	40	-80		
5	55	-111		
6	70	-140		
7	85	-165		

Pasos	(x)	(y)	$\Delta x$ ( $x_i - x_{i-1}$ )	$\Delta y$ ( $y_i - y_{i-1}$ )
1	-3	4.8		
2	1	0.8		
3	5	-3.2		
4	9	-7.2		
5	13	-11.2		
6	17	-15.2		
7	21	-19.2		

2. Segunda sesión: Se plantea el siguiente problema: Los expertos en mercadotecnia para fijar los precio de un bien o servicio, que les de la máxima ganancia, utilizan los datos del precio que tendría el bien o servicio contra su demanda. Un grupo de asesores de mercado encontraron que la ecuación que determina la ganancia en función de la demanda( artículos vendidos ) es:  $G(x) = -x^2 + 140x - 1875$

Pasos	Numero de objetos vendidos (x)	Ganancia (y)	$\Delta x$ ( $x_i - x_{i-1}$ )	$\Delta y$ ( $y_i - y_{i-1}$ )	$\Delta_2 y$ ( $\Delta y_i - \Delta y_{i-1}$ )
1	0	-1875			
2	5	-1200	5-0=5	-1200+1875=675	
3	10	-575	10-5 = 5	-575+1200= 625	625-675= -50
4	15				
5	20				
6	25				
7	30				

Pasos	(x)	(y)	$\Delta x$ ( $x_i - x_{i-1}$ )	$\Delta y$ ( $y_i - y_{i-1}$ )	$\Delta_2 y$ ( $\Delta y_i - \Delta y_{i-1}$ )
1	-2	3			
2	0	-1			
3	2	3			
4	4	15			
5	6	35			
6	8	63			
7	10	99			

- a) Grafica  $x$  vs  $y$  en papel milimétrico, ¿Qué curva resulta? Encuentra una expresión algebraica para ella. Utiliza la expresión  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , utiliza tres punto y resuelve el sistema que resulte.
- b) Para las siguientes tablas realiza los mismos pasos que en el inciso anterior

Pasos	(x)	(y)	$\Delta x$ ( $x_i - x_{i-1}$ )	$\Delta y$ ( $y_i - y_{i-1}$ )	$\Delta_2 y$ ( $\Delta y_i - \Delta y_{i-1}$ )
1	-3	5.8			
2	1	1.8			
3	5	-2.2			
4	9	-6.2			
5	13	-10.2			
6	17	-14.2			
7	21	-18.2			

Pasos	(x)	(y)	$\Delta x$ ( $x_i - x_{i-1}$ )	$\Delta y$ ( $y_i - y_{i-1}$ )	$\Delta_2 y$ ( $\Delta y_i - \Delta y_{i-1}$ )
1	2	4			
2	6	108			
3	10	308			
4	14	604			
5	18	996			
6	22	1484			
7	26	2068			

3. Tercera sesión: Se propone el siguiente problema; Un meteorólogo encontró que la temperatura en una ciudad en un día de invierno, la temperatura está dada en °F y el  $t$  en horas  $t = 0$  corresponde a las 6:00 am, la función está dada por  $T = 0.05t(t - 12)(t - 24)$ . Completa la siguiente tabla.

Pasos	Tiempo (t)	Temperatura (T)	$\Delta t$ ( $t_i - t_{i-1}$ )	$\Delta T$ ( $T_i - T_{i-1}$ )	$\Delta_2 T$ ( $\Delta T_i - \Delta T_{i-1}$ )	$\Delta_3 T$ ( $\Delta_2 T_i - \Delta_2 T_{i-1}$ )
1	0					
2	5					
3	10					
4	15					
5	20					
6	25					
7	30					

- a) Grafica  $t$  vs  $T$  en papel milimétrico, ¿Qué curva resulta? Encuentra una expresión algebraica para ella. Utiliza la expresión  $f(x) = at^3 + bt^2 + ct + d$ , utiliza cuatro puntos y resuelve el sistema que resulte.
- b) Para las siguientes tablas realiza los mismos pasos que en el inciso anterior

Pasos	(x)	(y)	$\Delta x$ ( $x_i - x_{i-1}$ )	$\Delta y$ ( $y_i - y_{i-1}$ )	$\Delta_2 y$ ( $\Delta y_i - \Delta y_{i-1}$ )	$\Delta_3 y$ ( $\Delta_2 y_i - \Delta_2 y_{i-1}$ )
1	0	-9				
2	5	101				
3	10	911				
4	15	3171				
5	20	7631				
6	25	15041				
7	30	26151				

Pasos	(x)	(y)	$\Delta x$ ( $x_i - x_{i-1}$ )	$\Delta y$ ( $y_i - y_{i-1}$ )	$\Delta_2 y$ ( $\Delta y_i - \Delta y_{i-1}$ )	$\Delta_3 y$ ( $\Delta_2 y_i - \Delta_2 y_{i-1}$ )
1	0	-0.8				
2	2	3.2				
3	4	79.2				
4	6	323.2				
5	8	831.2				
6	-2	-28.8				
7	-4	-176.8				

- c) Realiza un mapa conceptual en donde se indique cuales son los pasos a seguir cuando tengamos una tabla y queramos encontrar la expresión algebraica que la gobierna.
4. Cuarta sesión: Razón de cambio. La razón de cambio es la razón o cociente de los dos incrementos;  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , su significado es intuitivamente *“cuánto cambia y (en promedio) por cada unidad que cambia x, en el intervalo de  $x_1$  a  $x_2$ ”*
- a) Para los problemas de las sesiones pasadas, encuentra esta razón, por pares. Interpreta

- b) Problema 1: El polinomio de Legendre de tercer grado, sirve para resolver problemas de transferencia de calor, su expresión está dada por:

$$P(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

- Calcula la razón promedio de transferencia desde  $x = 0$  hasta  $x = 10$
- c) Problema 2: Una persona se encuentra sobre un edificio de 23m de alto y lanza un objeto directamente hacia arriba con una velocidad de 15 m/s. La altura del objeto  $s(t)$ , medida en metros, a los  $t$  segundos que fue lanzada está dada por la expresión  $s(t) = -4.905t^2 + 15t + 23$ .
- ¿Cuál es la velocidad promedio del objeto desde  $t = 0$  hasta  $t = 1$
  - ¿Cuál es la velocidad promedio del objeto desde  $t = 0$  hasta  $t = 2$
  - ¿Cuál es la velocidad promedio del objeto desde  $t = 0$  hasta  $t = 3$ . Grafica, interpreta, y escribe una conjetura.

5. Quinta sesión: Encontrar las razones de cambio promedio para las siguientes funciones

$f(x) = \frac{x}{x-1}$	Desde $x = -1$ hasta $x = 3$
$f(x) = \frac{2}{x^2+2x+1}$	Desde $x = 0$ hasta $x = 5$
$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$	Desde $x = -1$ hasta $x = 1$
$f(x) = \sqrt{x+1}$	Desde $x = -1$ hasta $x = 5$
$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$	Desde $x = 1$ hasta $x = 6$
$f(x) = \log(x^2 - 6x + 8)$	Desde $x = 2$ hasta $x = 5$
$f(x) = \log(x+1)$	Desde $x = 2$ hasta $x = 9$
$f(x) = -\frac{1}{2} (x+5)^3 + 4$	Desde $x = 3$ hasta $x = 8$
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$	Desde $x = -4$ hasta $x = 3$
$f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$	Desde $x = 6$ hasta $x = 8$

6. Sexta sesión: Se propone el siguiente problema; Una persona se encuentra sobre un edificio de 23m de alto y lanza un objeto directamente hacia arriba con una velocidad de 15 m/s. La altura del objeto  $s(t)$ , medida en metros, a los  $t$  segundos que fue lanzada está dada por la expresión:  $s(t) = -4.905t^2 + 15t + 23$ .

- Encuentra la velocidad promedio desde el punto  $t = 1$  y  $t = 1.1$
- Encuentra la velocidad promedio desde el punto  $t = 1$  y  $t = 1.01$

- Encuentra la velocidad promedio desde el punto  $t = 1$  y  $t = 1.001$
- Encuentra la velocidad promedio desde el punto  $t = 1$  y  $t = 1.0001$
- ¿Qué patrón de comportamiento percibes?
- Como esto tiene semejanza con el concepto de limite, calculemos el siguiente límite para  $t = 1$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Tarea resolver el siguiente problema: Un meteorólogo encontró que la temperatura en una ciudad en un día de invierno, la temperatura está dada en °F y el  $t$  en horas  $t = 0$  corresponde a las 6:00 am, la función está dada por  $T = 0.05t(t - 12)(t - 24)$ .

- Encuentra la temperatura promedio desde el punto  $t = 1$  y  $t = 1.1$
- Encuentra la temperatura promedio desde el punto  $t = 1$  y  $t = 1.01$
- Encuentra la temperatura promedio desde el punto  $t = 1$  y  $t = 1.001$
- Encuentra la temperatura promedio desde el punto  $t = 1$  y  $t = 1.0001$
- ¿Qué patrón de comportamiento percibes?
- Como esto tiene semejanza con el concepto de limite, calculemos el siguiente límite para  $t = 1$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

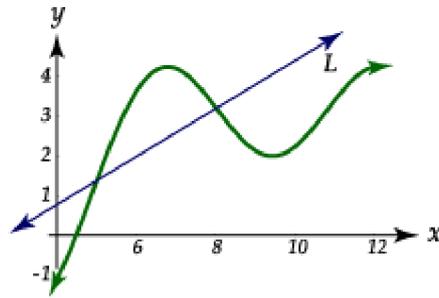
La Unidad IV: Cálculo de derivadas de funciones algebraicas y racionales  
Temas

- Derivada de funciones del tipo  $f(x) = cx^n$ .
- Reglas de derivación:
  - Constante por una función
  - Suma
  - Producto.
  - Cociente.
  - De la cadena con funciones del tipo  $(f(x))^n$  con  $f(x)$  un polinomio.
- Notación.
- Problemas de aplicación.
  - Cálculo de tangentes.
  - Cálculo de velocidades.

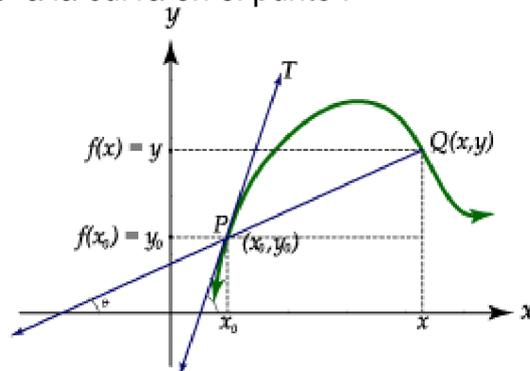
Numero de Clase	Tema y subtema	Estrategia
Primera	Definición de derivada	Resolver los ejercicios 1
Segunda y tercera	Deducción de fórmulas de derivadas	Resolver los ejercicios 2
De la Cuarta a la decima	Aplicación de las formulas para derivar	Resolver los ejercicios 3
Decimo primera	Calculo de rectas tangentes y normales	Resolver los ejercicios 4

1. Primera sesión: Tomar el siguiente problema: Se desea construir la pendiente de la recta tangente a un curva en un punto dada.

Sea  $f(x)$  una función continua en un intervalo cerrado, cuya grafica se muestra, junto con una recta secante (Busca la definición de recta secante)



Ahora consideremos la siguiente grafica donde aparece la misma secante y la tangente a la curva en el punto P



Observemos que la pendiente de la recta secante está dada por:  $m = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Si movemos el punto Q sobre la curva  $f(x)$  —acercándonos al punto P, la pendiente de la recta secante será más cercana al valor de la pendiente de la recta tangente que pasas por el punto P.

Para convencernos de esto consideremos un ejemplo: Sea  $f(x) = x^3 - 5x + 8$

- Grafica, en Excel, desde  $x = -5$  hasta  $x = 4$ , pega la grafica en tu cuaderno.
- Considera que el punto  $P = (0, f(0))$  y el punto  $Q = (3, f(3))$ , calcula la pendiente entre estos dos puntos
- Ahora mueve el punto Q sobre la curva —Acércalo— al punto P de la siguiente forma:

x	y	m
3	20	$\frac{20 - 8}{3 - 0}$
2.5		
2		
1		

0.5		
0.4		
0.1		
0.01		
0.001		
0.0001		

- ¿Podría el punto Q llegar a ser el punto P? ¿Cómo?
- Con el límite  $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- Podemos llegar a la definición: La pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(x_0, y_0)$  está dada por  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  siempre que el límite exista.
- Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación  $f(x) = x^2 - 3x$ , en el punto  $(1,-2)$ , encontrar la ecuación de la recta tangente,  $y = mx + b$ , realiza la grafica y colorea con distintos colores la grafica de la función y la de la recta tangente
- Ahora se procede a definir la Derivada de una función: derivada de la función  $f(x)$ , denotada por  $f'(x)$ , es la función:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
  - a)  $f(x) = 2x^2$
  - b)  $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 9$
  - c)  $f(x) = \frac{1}{x}$
- 2. Segunda sesión: aplicar la definición de derivada a las siguientes funciones generales y escríbelas como teoremas.
  - $f(x) = C$
  - $f(x) = x$
  - $f(x) = Kg(x)$
  - $f(x) = g(x) + h(x)$
  - $f(x) = g(x) - h(x)$
  - Con la ayuda de un libro de Calculo o en Internet, busca los procedimientos algebraicos para llegar a las formulas para derivar un producto de funciones;  $f(x) = u(x) * v(x)$ , así como un cociente de funciones;  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

- Con la ayuda de un libro de Calculo o en Internet, busca la fórmula para derivar la composición de funciones;  $f(x) = g(h(x))$
3. Tercera sesión: Calculo de función derivada de las siguientes funciones
- Recopila las formulas de las funciones derivadas que obtuviste en la sesión anterior y haz un formulario que te servirá para encontrar las siguientes derivadas

$$a) f(x) = \frac{6x^7}{3x^5}$$

$$b) f(x) = 7x^9 - 12x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 11x + 8$$

$$c) f(x) = 5 - 15x^{24} + 9x^{12} - 15x^8 - 69x + 13$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x^4}$$

$$e) f(x) = \sqrt[5]{x^2}$$

$$f) f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt[6]{x^7} - 5\sqrt[5]{x^3}}{x^2}$$

$$g) f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt[6]{x^7} - 5\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^2}}$$

$$h) f(x) = \frac{1}{x^7}$$

$$i) f(x) = \frac{17}{\frac{15}{x^9}}$$

$$j) f(x) = x^{-3} + x^2 + x^{-1} + 7$$

$$k) f(x) = 7x^{\frac{-3}{2}} + 4x^{\frac{2}{7}} + 8x^{\frac{-1}{3}} + 9x$$

$$l) f(x) = \frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{9}x^{\frac{2}{9}} + \frac{3}{4}x^{-6} + 17$$

$$m) f(x) = \left(\frac{5}{3}x^5 + \frac{4}{9}x^7\right) * \left(\frac{3}{4}x^4 + 7x\right)$$

$$n) f(x) = (9x^6 + 4x^5) * (2x^5 + 9x^3 - 7x)$$

$$o) f(x) = \frac{5x^2 - 13x^7}{3x^6 + 3x^3 - 9x}$$

$$p) f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 5x^5}{4x^4 + 7x^2 - 12x - 24}$$

$$q) f(x) = \frac{-2x^{-3} - 5x^2}{7x^4 + 7x^{\frac{2}{3}} - 8x - 2}$$

$$r) f(x) = (12x^5 + 5x^2 - 12x)^7$$

$$s) f(x) = \left(\frac{1}{3}x^4 + \frac{5}{11}x^2 - \frac{15}{17}x\right)^{13}$$

$$t) f(x) = \left(\frac{4}{7}x^{-6} + \frac{6}{7}x^{-4} - \frac{5}{7}x\right)^{-9}$$

$$u) f(x) = \left(\frac{5}{7}x^8 + \frac{7}{9}x^{-3} - \frac{9}{11}x\right)^{-12} * (5x^{-7} - 4x^2 - 17x)^{-2}$$

$$v) f(x) = \frac{(-6x^3 + 8x^2)^{-4}}{(3x^{-2} + 6x^{-8} - 5x - 21)^5}$$

$$w) f(x) = \sqrt[7]{\left(\frac{6x^4 + 7x^{-3} - 10x}{\frac{5}{7}x^3 + \frac{5}{9}x^{-3} - \frac{15}{4}x}\right)^3}$$

4. Cuarta sesión: Cálculo de rectas tangentes y normales a una curva en un punto dado

- Forma equipos de tres personas y resuelve los siguientes ejercicios, Dadas las siguientes funciones calcula las ecuaciones de las rectas tangentes y normales a ellas en el punto indicado, recuerda que si se te da solo la abscisa del punto es necesario calcular su imagen o sea su ordenada. Por otro lado recuerda que el producto de la pendiente de la recta tangente es y la pendiente de la recta normal es igual a

a)  $f(x) = 3x^{-2} + 5x^{-1} + 7x^2 + 8x$  en el punto  $x = -5$

b)  $f(x) = \frac{7x^{-3} + 5x^3}{2x^4 + 2x^2 - 4x}$  en el punto  $x = 3$

c)  $f(x) = \frac{-2}{3}x^2 + \frac{5}{8}x^{\frac{-2}{9}} + \frac{2}{5}x^6 + 3x$  en el punto  $x = 5$

d)  $f(x) = \left(\frac{-4}{7}x^6 + \frac{7}{8}x^{-2} - \frac{7}{11}x\right)^4 * (3x^{-9} - 6x^{-7} - 7x)^{-3}$   
en el punto  $x = 9$

5. Quinta sesión: Cálculo de velocidades y aceleraciones. Como se vio en la sesión VI de la unidad anterior la derivada también es la velocidad instantánea, es más, se puede decir en términos generales que la derivada de una función, mide la rapidez instantánea con la que cambia la variable dependiente ( $y$ ) cuando cambiamos la variable independiente ( $x$ ) esto en notación matemática quiere decir  $\frac{dy}{dx}$  que es otra notación de la derivada. Con lo anterior se puede calcular la velocidad de una partícula, si sabemos cuál es la función de desplazamiento  $s(t)$  donde  $s$  representa el desplazamiento de la partícula al tiempo  $t$ , solo debemos obtener la derivada y evaluarla en un punto. De la misma manera si recordamos que la aceleración solo es la rapidez de la velocidad, entonces sabemos que al derivar la función velocidad u obtener la segunda derivada del desplazamiento, entonces se puede obtener la expresión de la aceleración. Con lo anterior resuelve los siguientes problemas, formen los equipos de la actividad anterior.

- La relación entre la distancia recorrida en metros por una partícula y el tiempo en segundos es  $s(t) = 6t^2$ . Calcular:
  - a) La velocidad media entre  $t = 1$  y  $t = 4$ .
  - b) La velocidad instantánea en  $t = 1$ .
  - c) La aceleración instantánea en  $t = 1$  y  $t = 4$ .

- La ecuación de un movimiento rectilíneo esta dado por la expresión:  $s(t) = t^3 - 27t$ . ¿En qué momento la velocidad es cero? ¿En qué momento la aceleración es cero?
- Una persona se encuentra sobre un edificio de 23m de alto y lanza un objeto directamente hacia arriba con una velocidad de 15 m/s. La altura del objeto  $s(t)$ , medida en metros, a los  $t$  segundos que fue lanzada está dada por la expresión  $s(t) = -4.905t^2 + 15t + 23$ . Encuentra la velocidad y la aceleración a los  $t = 1$  seg, 2 seg, 3seg y 4 seg. ¿Cómo resultó la aceleración? ¿Es un movimiento uniformemente acelerado? ¿Es congruente con lo que sabes de tus cursos de Física? Explica con detalle.
- La ecuación de un movimiento parabólico está dado por la función  $\varphi(t) = \frac{1}{2} t^2$ . ¿Cuál es la velocidad y la aceleración después de 7 segundos?
- Realicen un mapa conceptual que contenga las secuencias para calcular: las derivadas usando la definición, las derivadas usando las formulas (teoremas), los problemas de rectas tangentes, normales y los de movimiento. Realicen otro mapa donde se explique qué es la función derivada.

## Unidad V

- Situaciones que propician el análisis de las relaciones entre la gráfica de una función y sus derivadas.
- Comportamiento gráfico de una función.
  - Crecimiento y decrecimiento de funciones
  - Puntos críticos
  - Concavidad
  - Máximos y mínimos, criterio de la 1ª y 2ª derivada
  - Puntos de inflexión
  - Gráfica de  $f(x)$  a partir de las gráficas de,  $f'(x)$  y  $f''(x)$  y viceversa

Problemas de optimización.

Numero de Clase	Tema y subtema	Estrategia
Primera y Segunda	Relaciones entre la gráfica de una función y sus derivadas.	Resolver los ejercicios 1
Tercera y cuarta	Comportamiento grafico de una función, bosquejo	Resolver los ejercicios 2
Quinta	Graficas a partir de la primera y segunda derivada	Resolver los ejercicios 3
Sexta y séptima	Optimización	Resolver los ejercicios 4

1. Primera sesión: Análisis gráfico de la función y sus derivadas.

- Considera la siguiente función:  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$ , grafica en Excel desde  $x = -7$  hasta  $x = 7$ . De los cursos anteriores recuerda que las posibles asíntotas verticales las encontraremos haciendo el denominador cero,  $(x^2 - x - 2 = 0)$  y las asíntotas horizontales encontrando los límites al infinito;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$ , encuentra las intersecciones de la curva con los ejes; con el eje X, para ello  $y = 0$ , y resuelve la ecuación que queda, para la intersección con el eje de las Y, ahora ponemos  $x = 0$  resuelve la ecuación que te queda. Verifica que tus cálculos sea acordes con la grafica.
- Calcula la primera y segunda derivadas de la función anterior y grafícalas en Excel, desde  $x = -7$  hasta  $x = 7$ , coloca las tres graficas una sobre otra de forma que estén alineadas, con respecto a los valores de  $x$ , en el siguiente orden: en la parte superior la función original  $f(x)$ , abajo la derivada:  $f'(x)$  y debajo de esta la segunda derivada,  $f''(x)$ . Anota tus conclusiones.
- Se realiza una acción semejante a la anterior con la función  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 8$ , además localiza donde es creciente, decreciente y dónde tiene puntos máximos y mínimos locales, (investiga estos términos en Internet o en un libro de Cálculo). Calcula las dos derivadas y grafica las tres en Excel comparando con la regla y determina cuales son las condiciones para que una función sea creciente, decreciente, tenga un máximo o mínimo local.

2. Segunda sesión: comportamiento grafico de las funciones

- Al principio de clase se unificaran en grupo los conceptos de la sesión anterior.
- Investiga en un libro de Cálculo o en Internet ¿Qué es la concavidad y qué es el punto de inflexión?, de la anterior función, localiza en la gráfica los puntos de inflexión y determina donde es cóncava hacia arriba y donde cóncava hacia abajo.
- De la función  $f(x) = x^2 - 2x - 2$ , realiza su grafica en Excel y trata de bosquejar cómo sería la función  $f(x)$
- De la función  $f(x) = 6x - 2$  realiza su grafica en Excel y trata de bosquejar cómo sería la función  $f'(x)$  y la función  $f(x)$
- Investiga en un libro de Cálculo o en Internet, problemas prácticos en donde se conoce la función derivada o la segunda derivada y se tiene que bosquejar la función original.

3. Tercera sesión bosquejo de funciones

- En grupo escribir las condiciones que se deben cumplir analíticamente para que una función tenga: Intersecciones con los ejes coordenados, los máximos y/o mínimos locales, valores

críticos donde la derivada no exista, puntos de inflexión, asíntotas verticales y horizontales así como oblicuas. intervalos de crecimiento, de decrecimiento, de concavidad positiva y concavidad negativa.

- De manera individual realizar un mapa conceptual donde se proporcione una secuencia para encontrar todos estos valores en una función dada.
- Compartir los mapas en grupo y elaborar el mapa del grupo
- Realizar en forma individual los siguientes ejercicios, utilizando el mapa anterior.

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 9$

b)  $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 5$

c)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

d)  $f(x) = x^3 - 12x$

e)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(8 - x)$

f)  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 8)$

g)  $f(x) = \frac{2x}{(2x-4)^2}$

#### 4. Cuarta sesión: problemas de optimización

- Consideremos el siguiente problema: La ganancia neta mensual, en millones de dólares, de una empresa que fabrica teléfonos celulares viene dado por la función:  $G(x) = 1.2x - (0.1x)^3$ , donde  $x$  es el número de teléfonos fabricados en un mes. Calcula la producción mensual que hace máxima la ganancia y la ganancia que se obtiene para esa producción. Resolver en equipos
- De la misma manera resolver el siguiente problema: En una cierta Isla se introdujeron 100 sujetos de una especie no nativa, si  $N(t)$  representa el número de animales al tiempo  $t$ , medido en años. Y sabemos que:  $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$ ; encuentra ¿En qué año la población será la máxima? ¿La población crecerá sin cota? ¿La población se extinguirá? De ser así ¿En qué año sucederá? Utiliza el mapa mental de la sesión anterior
- Resolver el siguiente problema en forma grupal: Se desea construir una lata en forma cilíndrica con una capacidad de  $355\text{ml} = 355\text{ cm}^3$ , y se desean utilizar la menor cantidad de aluminio posible, ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que esto sea posible? ¿Toma una Coca Cola de lata y verifica tus cálculos? ¿Por qué no coinciden? Junto con el profesor definan que es la función objetivo y cuál es la función restrictiva.
- En forma grupal se crea un mapa mental con la secuencia para resolver los problemas de optimización que incluya los siguientes pasos:
  - a) Identifica la o las incógnitas. Por lo general éstas son las cantidades que se preguntan en el problema.
  - b) Identifica la función objetivo. Ésta es la cantidad que se pide maximizar o minimizar.

- c) Identifica la o las restricciones. Éstas pueden ser ecuaciones que relacionen variables, o desigualdades que expresan limitaciones para los valores de las variables.
  - d) Enuncie el problema de optimización. Ésta tendrá la forma "Maximice [o minimice] la función objetivo sujeta a la o las restricciones."
  - e) Si la función objetivo depende de varias variables, resuelve las ecuaciones de restricción para expresar todas las variables en función de una sola. Sustituye esas ecuaciones en la función objetivo para expresarla como una función de una sola variable. Sustituye también esas ecuaciones en las desigualdades de restricción para ayudar a determinar el dominio de la función objetivo.
  - f) Calcula el máximo (o mínimo) absoluto de la función objetivo. Aplicando el mapa de la sesión anterior.
- Resolver los siguientes problemas:
    - a) Encontrar dos números que sumados nos den 44 y tal que el quintuplo del cuadrado del primero adicionado al séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.
    - b) Encontrar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles cuya base mide 10 cm y la altura 15 cm.
    - c) A partir de una hoja de cartón de 80cm \* 50cm. Se recortan esquinas de un tamaño para recortarlas y doblando hacia arriba se obtiene una caja de cartón. ¿De qué tamaño deben ser los cortes de la esquina, para que se obtenga una caja de volumen máximo?
    - d) Una hoja de papel debe tener 18cm<sup>2</sup> de texto impreso y márgenes superior e inferior de 2 cm, los márgenes laterales deben ser de 1 cm. Obtener las dimensiones que minimizan el área del papel.

#### Bibliografía recomendada para el curso

- Ayres y Mendelson, *Cálculo Diferencial e Integral*, Ed. Mc Graw-Hill México 2007
- Baldor, Aurelio *Álgebra*. Ed. Publicaciones Cultural, S.A .México 2009
- Hoffman, L. *Cálculo Aplicado*, Ed. Mc Graw-Hill , México 2001
- Kramer, A.D. *Fundamentos de Matemáticas, Un enfoque para técnicos*. Ed. Mc Graw-Hill México 1983
- Lehmann, C. *Geometría Analítica*. Ed. Limusa México 2008
- Leithold, L. *Cálculo, con Geometría Analítica* Ed Harla. México 2002
- Oteyza y otros. *Geometría Analítica con Trigonometría*. Ed. Prentice Hall, México 2001
- Smith y colaboradores *Álgebra*, Ed. Prentice Hall México 2004
- Swokowski, E.W. *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica. Segunda edición. México, 2000

## Conclusiones

Este trabajo, pretende contribuir al proceso enseñanza –aprendizaje en el área de la matemáticas, específicamente en el curso de Calculo Diferencial e Integral, el modelo que manejamos, está impregnado por la filosofía de la Institución, aunque contempla los últimos avances en la didáctica de las matemáticas. También hemos intentado contribuir con una serie de reflexiones acerca de cómo apunta la tendencia educativa de este siglo. En cada una de las teorías mencionadas, la intención no fue profundizar, sino simplemente señalar su existencia ya que la propuesta está sustentada en ellas.

El modelo que se presentó se basa en tres ejes; el docente, la Institución, y el alumno-familia, estos dos últimos lo englobamos, porque creemos que la familia como núcleo tiene una responsabilidad en la educación de sus miembros. También es cierto que el modelo en algunos momentos es un ideal, y que es muy probable que dependiendo del grupo y su dinámica particular, este sufra cambios que puedan ser muy notorios, en algunos casos podría empobrecerse y en otros enriquecerse. Por otro lado como ya mencionamos, depende de tres ejes para su ejecución, si alguno de ellos falla, es posible que el modelo no avance de la manera adecuada, por esto es necesario que se tenga un trabajo participativo y de compromiso con la educación. Este tipo de compromisos implica un cambio de mentalidad de todas las partes y por ello es necesario llevarlo como un proceso de cambio.

En el modelo el papel del docente es muy importante, ya que como se menciona anteriormente, el educar es un arte, porque propone siempre una buena dosis de creatividad, de empeño y de deseo de compartir. En gran parte de las técnicas y bases filosóficas que se describieron, se hace mención al trabajo del docente, como promotor del cambio y de la innovación en las estrategias educativas, de la innovación de las técnicas de enseñanza-aprendizaje. Por lo anterior el modelo que proponemos tiene que ser revisado permanentemente y enriquecido con las experiencias así como con las nuevas técnicas que se propongan. El uso de las nuevas tecnologías también debe ser adecuado constantemente, para que se usen los mejores recursos didácticos que nos permitan alcanzar los propósitos. Un aspecto igualmente importante es la capacitación de los docentes, la formación del docente debe responder al propósito de conocer, analizar y comprender la realidad educativa del país, abarcando con la mayor profundidad posible, las características de los alumnos, incluyendo su entorno emocional, político y social, para de ahí, elaborar un rol pertinente que nos permita lograr en unión las metas propuestas. Finalmente debemos tener en cuenta que los docentes deben poseer tres cualidades; la vocación de docente, los conocimientos de lo que se va a impartir y el manejo y el conocimiento de las distintas técnicas de enseñanza-aprendizaje

No hay que olvidar que el propósito final de todo docente es que el alumno se construya día a día, que sea el constructor de su propio conocimiento, el

alumno tiene que tener presente que él es el centro de toda actividad educativa y sobre él están basadas las técnicas y las estrategias, que fortalecerán el proceso de descubrimiento, conquista y dominio de sí mismo. Por ello el papel del docente es el de señalar el camino de la autoeducación que alimentara la autorrealización del individuo.

Finalmente se recomienda que este curso que tiene un carácter de materia optativa, sea obligatorio para todas las aspirantes que deseen ingresar al área de Físico Matemáticas o Químico biológicas.

## Bibliografía

- Araya Carrasco, F. —Aprendizaje mediado”. Mayo 2008. Disponible: <http://cognitivamediacion.blogspot.com/> Revisado el día 12 de Octubre de 2010.
- Ausubel, D. P.. *Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento*. En Elam, S. (Comp.) La educación y la estructura del conocimiento. Investigaciones sobre el proceso de aprendizaje y la naturaleza de las disciplinas que integran el currículum. Ed. El Ateneo. Buenos Aires. 1973 Págs. 211-239.
- Ausubel, D. P. *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Ed. Trillas. México. 1976
- Ausubel, D. P. *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Ed. Paidós. España. 2002
- Ausubel, D. P.; Novak, J.D., y Hanesian, H. *Psicología de la educación*. México: Trillas. 1988.
- Baquero, R. "Cap. 2: Ideas centrales de la teoría socio- histórica", en: Vigotsky y el aprendizaje escolar, Ed. Aique, Buenos Aires, Argentina 1996
- Baquero, R. (), "Tensiones y paradojas en el uso de la Psicología Sociohistórica en educación", en AAVV Debates constructivistas Ed. Aique, Argentina, 1998. pp. 123-145.
- Boeree, C. George. *Teoría de la personalidad Carl Rogers*. 2003 extraído el 7 Septiembre de 2010, de <http://webpace.ship.edu/cgboer/rogersesp.html>
- Bowen, James y Peter R. Hobson. *Teoría de la educación: innovaciones importantes en el pensamiento educativo occidental*. Ed. Limusa. México. 1979
- Bruner, J. *Desarrollo cognitivo y educación*. Ed. Morata. España. 1988
- Cañas, A. J.. Novak J. D & González F. M (Eds.), *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology, Proceedings of the 1st International Conference on Concept Mapping*. Pamplona, Spain: Universidad Pública de Navarra.
- Cersosimo P. L. Á. *Estudio sobre la metafísica del devenir y sus consecuencias filosóficas en educación*. Universidad Autónoma de Guadalajara. Tesis presentada para obtener el grado de doctor en educación. 1980
- De Guzmán, M. *El rincón de la pizarra*, Ed. Pirámide. España. 1996
- De Guzmán, M. *Para pensar mejor*. Ed. Pirámide. España 1999
- Di Caprio, Nicholas S. *Teoría de la personalidad*. Ed. Mc. Graw Hill México 1992
- Díaz Barahona, José. Campos Micó, María. Pérez Serrano, Carmen María. Guerras Martín, Adara Casado García, María Victoria. Feltrer Torres, José. Iranzo Giménezun, Salvador y Bilbao González, Ana *El desarrollo de las competencias básicas a través de la Educación Física*. Universitat de València. España. 2008
- Díaz Barriga, Ángel. *Una polémica en relación al examen*: Revista Iberoamericana de Educación. Número 5, Calidad de la Educación. México 1994
- Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006, Comisión Nacional de Libros Gratuitos, Primera Edición. SEP México. 2006
- Feroso, P. *Teoría de la educación: una interpretación antropológica*. Ed.

- Ceac España 1985
- Feuerstein, R. y Hoffman, M.B. *Programa de enriquecimiento instrumental*. Ed. Bruño. España 1995
  - Feuerstein, R.; Rand, Y.; Hoffman, M.; Miller, R. 1980. *Instrumental Enrichment: an intervention program for cognitive modifiability*. Baltimore: University Park Press
  - González Garza A.M. *El niño y su mundo*. Ed. Trillas, México (1999), 7a. Reimpresión.
  - González Garza A.M. *El niño y la educación*. México (1995): Ed. Trillas. 5a. Reimpresión
  - González, Órnelas, V. *Estrategias de enseñanza aprendizaje*, Ed. Pax México librería Carlos Ceserman, S.A. México 2001
  - Ibarrola, y Gallart "Educación Básica y formación para el trabajo" en *Básica*. Revista de la Escuela y el Maestro. México, Fundación SNTE, Número especial: Escuela y trabajo, 11/7: 26-30. Set-Oct. 1995.
  - Luria, A. R. "Introducción y cap. IV: Deducción y conclusión", en: *Desarrollo histórico de los procesos cognitivos*, Ed. Akal, España 1987, pp. 5-6 y 118-130.
  - Mahillo, J. *¿Sabes enseñar?* Editorial Espasa Calpe. España 1997
  - Monereo, Carles; Castelló, Montserrat; Clariana, Mercé; Palma, Monserrat, y Pérez, María Lluisa: *Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en la Escuela*. Barcelona. Editorial GRAÓ de Series Pedagógicas. España 1995
  - Moreira M. A. y Greca, I. M<sup>a</sup>. Cambio Conceptual: análisis crítico y propuestas a la luz de la Teoría del Aprendizaje Significativo. *Ciência & Educação*. Brasil 2003, vol. 9, nº 2, págs. 301-315.
  - Moreira, M. A. (). Aprendizagem Significativa: um conceito subyacente. En M.A. Y también, Moreira, C. Caballero Sahelices y M.L. Rodríguez Palmero, Eds. *Actas del II Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo*. Servicio de Publicaciones. Universidad de Burgos. España 1997. Págs. 19-44.
  - Muñoz, Víctor *Musicoterapia humanista, un modelo de psicoterapia musical*. Ed. Libra México 2008.
  - Newman D., Griffin P. y Cole M. (1991) "Cap. 4: Conceptos básicos para analizar el cambio cognitivo", en: *La zona de construcción del conocimiento*, Ed. Morata, Madrid, pp. 76- 89.
  - Novak, J. D. *Conocimiento y aprendizaje*. Ed. Alianza. España 1998
  - Novak, J. D. y Gowin, D.B. *Aprender a aprender*. Ed. Martínez Roca. España Barcelona, 1988
  - Patterson, C. H. *Orientación auto directiva y psicoterapia*. Ed. Trillas. México 1975.
  - Patterson, C. H. *Bases para una teoría de la enseñanza y psicología de la educación*. Ed. Manual Moderno. México 1982
  - Piaget, J. *Tratado de Lógica y conocimiento científico. Epistemología de la matemática*. Ed. Paidós. Argentina 1979
  - Pichardo, P. Juan. *Didáctica de los mapas conceptuales*. Ed. Jertalhum, México, 1999.
  - Pérez F, R, *Mapas conceptuales y Aprendizaje de Matemáticas*. UAM. Universidad Autónoma Metropolitana, México 2006. Concept Maps:

- Theory, Methodology, Technology Proc. of the Second Int. Conference on Concept Mapping A. J. Cañas, J. D. Novak, Eds. San José, Costa Rica, 2006
- Quesada Castillo, Rocío. *Conceptos básicos de la evaluación del aprendizaje*. En Perfiles Educativos, nos. 41-42, México 1988, pp. 48-52
  - Rodríguez Palmero, M<sup>a</sup> Luz. *La teoría del aprendizaje significativo*. Centro de Educación a Distancia (C.E.A.D.). C/ Pedro Suárez Hdez, s/n. C.P. n<sup>o</sup> 38009 Santa Cruz de Tenerife, publicado en la revista Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proc. of the First Int. Conference on Concept Mapping Cañas A. J., J. D. Novak, F. M. González, Eds. Pamplona, Spain 2004. Barcelona.
  - Rogers, Carl R. *El poder de la persona*. Ed. El Manual Moderno México 1980
  - Rogers, Carl R. *El proceso de convertirse en persona*. Ed. Paidós. Argentina 1961
  - Rogers, Carl R. *Psicoterapia centrada en el cliente*. Ed. Paidós. Argentina 1977
  - Román Pérez, M.; Díez López, E. *Inteligencia y potencial de aprendizaje evaluación y desarrollo: Una metodología didáctica centrada en los procesos*. Ed. Cincel. Madrid, España 1988.
  - Román, M. y Díez, E. *Inteligencia y potencial de aprendizaje*. Ed. Cincel. Madrid España 1988.
  - Ruiz Mulet, A.(2009) *Una aproximación a la evaluación integral de la actividad física en el entorno de la tecnología informática en la formación inicial del docente*, Edición electrónica gratuita. Texto completo en [www.eumed.net/libros/2009b/538/](http://www.eumed.net/libros/2009b/538/)
  - Stenhouse, L. *Investigación y desarrollo del currículo*, Ed. Morata. Madrid, España 1984.
  - Sternberg, R. J. *Las capacidades humanas*. Ed. Labor, España 1986
  - Talizina, N F. *Psicología de la enseñanza*. Editorial Progreso. Moscú, 1988
  - Torres, Rosa M. *Aprendizaje activo: ¿hay algún otro?* Itinerarios por la Educación Latinoamericana, Cuadernos de viajes. Editorial, Paidós Argentina 1998
  - Vásquez, Olcese César. *Aproximación a la psicoterapia de Carl Rogers*. 2002 Universidad César Vallejo, Psicología on line, extraído el 27 de Agosto de 2010 de <http://psicologia-online.com/colaboradores/cvasquez/rogers.htm>
  - Vigotsky, L. "Cap. IV: *Internalización de las funciones psicológicas superiores*", y "Cap. VI: *Interacción entre aprendizaje y desarrollo*", en: *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Crítica, Ed. Grijalbo, México 1988, pp. 87-94 y 123-140.
  - Vygotsky, L. 1934. *Comunicación y Lenguaje*. MIT Press. Cambridge. EUA 1986
  - Vygotsky, L. S. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Ed. Crítica. España. 1979
  - Vygotsky, L. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Ed. Grijalbo. España 1979.
  - Wertsch J. "Cap. 2: *El método de Vigotsky*", en: *Vigotsky y la formación social de la mente*, Ed. Paidós, España 1988, pp. 35-74.

# Anexo I

## Lectura 1

El infinito por Luís Eduardo Zamudio S(\*) tomado del sitio web:  
<http://universalia.usb.ve/antiores/universalia22/infinito.htm>

Entre todas las ideas creadas o descubiertas por el hombre a lo largo de la historia del pensamiento, la noción de Infinito sin duda es una de las más enigmáticas. Los intelectos más lúcidos de la filosofía, la teología y la matemática han aportado distintas interpretaciones de la infinitud, una idea rodeada —como veremos— de misticismo y locura a través de los siglos.

### Breve recuento histórico

Los orígenes de la noción de Infinito en matemática se remontan hasta Pitágoras (aprox. 569 – 500 A.C.). Como es sabido, los pitagóricos practicaban filosofía, misticismo y matemática, tres áreas que para ellos estaban inextricablemente relacionadas, mientras sostenían la firme convicción de que todo conocimiento matemático revela un invisible ángulo de la Realidad.

Entre otras creencias defendidas por los pitagóricos sobre los significados de cada número particular destaca la función que para ellos jugaba el número uno como generador inductivo de todo el sistema numérico, lo cual permite deducir que tenían idea clara del llamado infinito potencial: dado cualquier número, por más grande que sea, siempre podemos obtener un número mayor simplemente sumándole la unidad.

Aproximadamente un siglo después Zenón de Elea (495 – 435 A.C.) promulgó las paradojas que lo han inmortalizado.(1) En ellas trató de probar la imposibilidad del movimiento partiendo de la premisa de un espacio infinitamente divisible. Cabe señalar que dichas paradojas pueden ser tratadas de forma natural (desde la formalización del concepto de límite) a través de la idea de convergencia de una serie infinita. Aquí también es la noción de infinito potencial la que juega el rol protagónico en contraposición al infinito actual, el cual tradicionalmente fue rechazado por matemáticos y filósofos hasta finales del siglo XIX de nuestra era. De hecho, la tradición matemática siempre había utilizado el infinito potencial en la forma que inauguraron Eudoxio (408 – 355 A.C.) y Arquímedes (287 – 212 A.C.), quienes para el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas aplicaban el carácter potencial del infinito, ya no sólo para manipular cantidades arbitrariamente grandes, sino también en la consideración de cantidades extremadamente pequeñas, aquellas que aún siendo positivas pueden hacerse tender a cero en el límite.

Con el propósito de enfatizar la distinción fundamental entre los infinitos potencial y actual, así como la percepción que tenía la tradición matemática respecto a lo inadecuado de éste último, veamos un pequeño fragmento de una carta que escribiera nada menos que el usualmente considerado matemático más grande de la historia, Carl F. Gauss (1777 – 1855), a su colega Heinrich Schumacher:(2) —~~Pro~~ refiriéndose a su demostración, protesto sobretodo contra el uso de una cantidad infinita [Gröse] como terminada, ya que en

matemáticas no está permitido. El infinito es solamente es una manera de hablar, utilizando el concepto de límite.

No obstante, mucho antes de Gauss se dio la primera aparición conocida — aunque tenue— del infinito actual por intermedio de uno de los científicos más completos que registra la historia, Galileo Galilei (1564 – 1642), quien se percató de la existencia de una correspondencia uno-a-uno entre los elementos del conjunto de números naturales {1, 2, 3, etc.} y aquellos llamados cuadrados perfectos {1, 4, 9, 16, 25, etc.}. Tal correspondencia puede ser representada por la función  $f(n) = n^2$ . De esta manera al número 1 le corresponde el mismo 1, al número 2 le corresponde el 4, al 3 el 9 y así sucesivamente. Quedaba demostrado un hecho en apariencia paradójico: existen tantos cuadrados perfectos (los cuales constituyen un subconjunto propio de los números naturales) como números naturales.

En términos de matemáticas actuales, la correspondencia uno-a-uno usada por Galileo cumple con dos propiedades fundamentales que de hecho sirven para definir e identificar a todas las correspondencias de este tipo, también llamadas funciones biyectivas. La primera de tales propiedades consiste en que para todo par de elementos  $n$  y  $m$  del dominio de la función (en el presente ejemplo, para todo par de números naturales) se cumple que: implica  **$f(n)$  diferente de  $f(m)$** . La segunda propiedad consiste en que todo elemento del conjunto de llegada de la función (que en nuestro ejemplo sería el conjunto de números cuadrados) es —alcanzado” por un elemento del dominio a través de la función. Esto significa en este caso que si  $m$  es un número cuadrado, existe un número natural  $n$  tal que aquí es evidente que  **$f(n)=n^2=m$**  dado  $m$  cuadrado, el número  **$n=raíz\ cuadrada\ de\ m$**  es el número natural que lo alcanza a través de la función f.

Cuando entre dos conjuntos, existe una función biyectiva se dice que ambos tienen la misma cardinalidad, indicando con esto que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos, como es intuitivo dada la definición de correspondencia uno-a-uno o función biyectiva.

Utilizando este lenguaje, lo que Galileo publicó en 1638 se traduce en la afirmación de que el conjunto de números naturales tiene la misma cardinalidad que un subconjunto propio. En otras palabras, se negaba el principio de que el todo es mayor que sus partes; principio no aplicable en realidad por estar lidiándose con un todo infinito. Pero quizá, cabe especular, para Galileo ya era suficiente con los problemas que sus teorías cosmológicas le habían acarreado con la Inquisición y finalmente decidió no acometer una investigación más profunda sobre el significado de su hallazgo, significado que inevitablemente lo hubiese llevado a declarar la existencia del infinito actual, una noción que para la época sólo podía ser asociada con la Divinidad. O tal vez, como lo afirman algunos entendidos (3), haya sido el poder del Infinito lo que detuvo a Galileo.

Sea como fuera, tan intrascendente fue la primera aparición del infinito actual que un gigante de la filosofía y la matemática, como lo fue Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716), escribió menos de un siglo después en sus *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano* (obra monumental que prácticamente

compendia todo el saber de la época), lo siguiente: *Propiamente hablando, es verdad que hay una infinidad de cosas, es decir, que siempre hay más de las que podemos designar. Pero si se les toma como auténticos todos, entonces no hay número infinito, ni línea ni cualquier otra cantidad que sea infinita, como es fácil demostrar. Las escuelas han querido o debido decir eso, al admitir un infinito sincategoremático [infinito potencial], pero no el infinito categoremático [infinito actual], por decirlo en su lenguaje. En rigor, el verdadero infinito sólo está en lo absoluto, que es anterior a toda composición y no está formado por adición de partes.* (4)

Aunque Leibniz en su creación del Cálculo Infinitesimal utilizó ampliamente —al igual que Newton y sus antecesores griegos— el infinito potencial, queda evidenciada su opinión con respecto al infinito actual, opinión que refleja el conocimiento establecido de su tiempo.(5)

Así pues, en matemática no se dio ningún otro acercamiento al concepto de Infinito hasta el siglo XIX, cuando el sacerdote y matemático Bernhard Bolzano (1781 – 1848), influenciado por los trabajos de Eudoxio y Galileo, vislumbró nuevas luces sobre la naturaleza de la infinitud.

Bolzano comenzó por preguntarse si la propiedad aparentemente paradójica que había descubierto Galileo con respecto a conjuntos discretos (tales como el conjunto de números naturales, en donde está determinado cuál es el sucesor de cada elemento) también podía darse en conjuntos continuos sobre la recta real. Encontró efectivamente que se podía establecer una correspondencia uno-a-uno entre un intervalo de la recta y un subintervalo incluido en el mismo. En este sentido definió la función  $f(x)=2x$ , sobre el dominio cerrado  $[0, 1]$ .(6) Es claro que dicha función es una biyección o correspondencia uno-a-uno entre su dominio y su conjunto de llegada, el intervalo cerrado  $[0, 2]$ , que a su vez contiene el dominio  $[0, 1]$  como un subconjunto propio.

Surgió así en 1851 la publicación póstuma Paradojas del Infinito donde Bolzano se convertía en el primer matemático en defender la existencia del infinito actual, expresando que éste podía ser introducido en matemática de manera consistente, libre de contradicciones. El destino se inclinó, sin embargo, a que el infinito actual se mantuviera alejado de la atención de los matemáticos por más de veinte años luego de la publicación de Bolzano, hasta que los trabajos revolucionarios de Georg Cantor (1845 – 1918) comenzaron a transformar casi todas las áreas de la matemática.

Entre sus primeras contribuciones Cantor formalizó la definición de conjunto infinito. Desde entonces se dice que un conjunto  $X$  es infinito si y sólo si existe una correspondencia uno-a-uno entre  $X$  y algún subconjunto propio  $S$  contenido en  $X$  ( $S \subset X$ ).

Se trata precisamente de la negación del principio de que el todo es mayor que sus partes, principio válido sólo en conjuntos finitos. (7) En estos términos, Galileo y Bolzano habían demostrado formalmente que el conjunto de números

naturales y el conjunto de números reales contenidos en cualquier intervalo de la recta real son conjuntos infinitos.

Pero en 1874, Cantor dio un decisivo paso adicional demostrando lo impensable hasta ese momento: la existencia de varios —tamaños” u órdenes de infinitud. En una muestra de penetrante lucidez Cantor probó que es imposible establecer una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de números naturales y el conjunto de números reales entre el cero y el uno. En otras palabras, los números reales de dicho intervalo (y de hecho, de cualquier intervalo) no pueden ser etiquetados en una lista indefinida hasta el infinito de la forma **A1, A2, A3, K**. Por lo tanto, la cardinalidad del continuum, la cantidad de puntos en cualquier segmento de recta real, es superior a la cantidad infinita de números naturales.

Este descubrimiento inevitablemente desencadenó consecuencias incluso más allá del territorio propiamente matemático (8), mientras Cantor acometía la defensa del infinito categórico (o actual) más grande que se haya dado en la historia del pensamiento occidental.

Al menos en el contexto matemático, la existencia de una entidad puede ser argumentada por su consistencia con el resto de las ideas y construcciones matemáticas ya establecidas. En este sentido, para Cantor era perfectamente consistente que el proceso de —contar” elementos de conjuntos finitos fuese extendido a elementos de conjuntos infinitos, como entidades completas y acabadas, a través de funciones biyectivas. Por ejemplo, el conjunto  $A = \{w, x, y, z\}$  de objetos cualesquiera (sean libros, casas, animales o lo que sea) diferentes entre sí, se puede considerar como una entidad total cuyo número cardinal es el número cuatro, ya que existe una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto  $A$  y el subconjunto de números naturales  $\{1, 2, 3, 4\}$ . De la misma manera, el conjunto de números cuadrados perfectos  $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$  de conjunto infinito, se puede considerar como una totalidad cuyo número cardinal es superior a cualquier número finito. Así pues, Cantor denotó con un aleph (primera letra del alfabeto hebreo) y un subíndice igual a cero al número cardinal transfinito de todos los conjuntos equivalentes en cantidad (susceptibles de biyectar) al conjunto de números naturales. (9)

En este orden de ideas, el descubrimiento de Cantor de que la cardinalidad del conjunto de números reales (el continuum) es mayor a la de los números naturales implica la existencia de otro número cardinal transfinito **Aleph 0**, digamos **Aleph 1**, superior a **Aleph 0**.

Pero, ¿cuál fue la reacción de la comunidad matemática a estos descubrimientos (10)? En principio, como muchos otros hallazgos que afectan los paradigmas establecidos, Cantor enfrentó una fuerte y persistente oposición, por un lado, y disfrutó de unos pocos partidarios, por otro. Sabiendo que la oposición a su trabajo provenía de distintos frentes, comenzó por determinar cuáles habían sido históricamente los argumentos en contra del infinito actual y se dispuso a refutarlos uno por uno armado con su nueva teoría de números transfinitos. En particular, criticó el clásico argumento aristotélico que consistía en usar principios de aritmética para contradecir la existencia del

infinito actual. Frente a esto Cantor estableció que para razonar el infinito matemáticamente había que crear una aritmética especial que él mismo se encargó de fundar.

Años de intensa investigación por parte de los mejores matemáticos del mundo entre finales del siglo XIX y principios del XX, demostraron que las ideas de Cantor se quedarían para siempre en el reino de la matemática. Mas, según su biógrafo Joseph Dauben, la profunda motivación que impregnaba el alma de Cantor, y que lo impulsaba a defender sus teorías en cualquier terreno mostrando una férrea convicción, era en gran parte religiosa.

*Cantor* no sólo encontró el estímulo y la ayuda de su fe en Dios, sino también creyó que lo destinaron para poner este conocimiento al servicio y para la mayor comprensión de Dios y de la naturaleza (11)

### **La consecución del fin del hombre en Occidente**

En 1884, en medio de sus investigaciones sobre la hipótesis del continuo,(31) —problema imposible de resolver como se demostró años después— Cantor sufrió su primer —mental breakdown— como lo llaman sus biógrafos. En razón de ello se lo mantuvo dos meses recluido en un centro de recuperación psicológica. No se tiene certeza sobre las causas de su crisis, aunque comúnmente se especula sobre una posible combinación de tendencia genética, extrema dificultad y frustración enfrentando la hipótesis del continuo y una prolongada oposición a sus ideas por parte de uno de sus ex – profesores más notables. Sea cual sea la verdadera combinación de causas, al matemático y escritor Amir Aczel le resultó inevitable imaginar que Cantor experimentó las consecuencias de haber pretendido asir un conocimiento inescrutable.

*El intentar entender el significado verdadero de los varios niveles de infinito, al intentar fraccionar el infinito inalcanzable y al sondar sus partes más íntimas parte, esto puedo haberle costado la cordura. (32)*

Efectivamente, conforme iba padeciendo numerosas crisis y recaídas intermitentes cada vez más prolongadas, Cantor fue deteriorándose mentalmente hasta que abandonó toda investigación matemática. Aparentemente sus pensamientos en los meses finales de su vida giraban en torno a la creencia de que a través de él, Dios había comunicado al mundo buena parte de la esencia del Infinito.

Basándose en la extraña coincidencia de que el sucesor natural de Cantor, el lógico matemático Kurt Gödel (1906 – 1978), (33) al enfrentarse al Infinito años después de su antecesor, también experimentó intermitentes episodios de locura, Aczel concluye que el infinito matemático entraña un misterio que se resiste a ser revelado. Sin embargo, Aczel no ofrece conjeturas sobre significados posibles de tal misterio. La locura de dos grandes indiscutibles de la matemática podría simbolizar los límites de la razón en su búsqueda del Infinito. No obstante, la ciencia occidental —hija legítima de la razón— tiene pendiente descifrar las verdaderas potencialidades de la mente humana. ¿Para

qué está allí esa capacidad cerebral que no utilizamos ni siquiera en nuestros momentos de mayor concentración?

A diferencia del devenir propio de Oriente, en Occidente el dominio de la naturaleza, y en general del mundo exterior, ha privado sobre el dominio del sí mismo. Mas, si nos atrevemos a confrontar radicalmente la práctica común de convertir a los simples medios en fines,(34) viviendo muchas veces al borde de la alienación a causa de ello, es probable que, a pesar de haber tomado el camino más largo, nos encontremos ante la noble y fundamental tarea de descubrir el infinito universo que palpita en nuestro interior.

### **Citas**

(1) Jorge Luis Borges proporciona una extraordinaria exposición de dichas paradojas y sus más afamadas pretendidas soluciones en sus ensayos Avatares de la tortuga y La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga, ambos publicados en su libro Discusión. Ver [3] en la bibliografía.

(2) Citado tal cual por Dauben en [5], p. 120.

(3) El matemático y escritor Amir D. Aczel afirma: —Galo stopped there, even though he had intended to write a book about infinity. Apparently, the power of the infinite was enough to deter him from this project”. [2], p. 55.

(4) Los corchetes son míos. Ver [8], p. 177.

(5) Sin embargo, veremos más adelante que la metafísica leibniziana, la cual el mismo Leibniz decía que estaba basada en conocimiento matemático, es uno de los sustentos de la hipótesis de carácter ontológico que motiva las presentes líneas, cuyo fundamento es la realidad del infinito categórico o actual.

(6) Todos aquellos números reales mayores o iguales que cero pero menores o iguales que uno.(7) Cabe señalar que Guillermo de Occam (aprox.1300 – 1349) fue capaz de llamar la atención sobre la correcta aplicación del mencionado principio exclusivamente en conjuntos finitos. Ver al respecto [1], p. 674.

(8) Hay evidencias de que incluso el Papa Leo XIII y diversos teólogos se interesaron por el trabajo de Cantor. Ver [2] p. 143. y [5] p.p. 140 – 144.

(9) En matemáticas la cardinalidad se refiere al número de elementos que tiene el conjunto

# Anexo II

## **Programa operativo del curso Cálculo Diferencial e Integral I (UNAM)**

### **PROGRAMA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I**

#### **UBICACIÓN DEL CURSO**

En el Cálculo Diferencial e Integral, los conceptos de aproximación y límite están inmersos en el estudio de la variación, de la medida de la rapidez de cambio y de la suma continua de cambios acumulados; por ello, en el programa de este curso que representa el primer contacto del alumno con esta rama de la matemática, rica fuente de aplicaciones en muy diversos ámbitos, se sientan las bases para la gestación de los conceptos de derivada e integral, sin llegar al aspecto formal de los mismos.

El inicio del curso está dedicado a explorar, mediante el tratamiento tabular y gráfico, varios ejemplos de situaciones en las que intervienen procesos infinitos para que a través del reconocimiento de patrones, el alumno pueda describir su comportamiento, empiece a construir para sí el significado del concepto de límite y comprenda y maneje su notación. Los procesos infinitos constituyen uno de los ejes temáticos, por lo que se retoman paulatinamente en el estudio de la derivada y posteriormente de la integral, en el siguiente semestre.

En la segunda unidad, se inicia el estudio de la derivada a partir del análisis de la variación de funciones polinomiales, enfatizando el significado de razón de cambio. Mediante un proceso infinito ligado al cociente de Fermat, se llega a la derivada como la función que proporciona la razón de cambio instantánea. La intención de presentar la construcción de la derivada con funciones lineales, cuadráticas y cúbicas, no sólo radica en que éstas son más sencillas y más conocidas por los alumnos, sino que a la vez, permiten avanzar en el estudio de la variación y del análisis gráfico. Así, en la función lineal, sobresale la invariabilidad de la pendiente (asociada a la razón de cambio) y el porqué su derivada es una función constante; en la cuadrática, la segunda variación permite analizar la concavidad; y la cúbica, se presta para estudiar los cambios de concavidad vinculados con la existencia de puntos de inflexión.

La tercera unidad está destinada a obtener las derivadas de funciones algebraicas por medio de las reglas y fórmulas de derivación. Éstas se introducen a través de ejemplos que permiten al estudiante entender cómo surgen y valorarlas como formas simplificadas de carácter general. Además, al integrar la algoritmia al estudio de la derivada como una función en sí misma, se amplían las posibilidades de aplicación a situaciones concretas y se enriquecen los recursos para recabar información sobre las características de la variación y la rapidez de cambio de la función que modela una situación o problema. Si bien, en todas las unidades se le da una presencia al manejo del registro algebraico, en ésta, cobra mayor relevancia ya que es necesario que el estudiante adquiera destreza en la aplicación de las fórmulas para obtener la derivada de funciones algebraicas.

La cuarta unidad representa un primer momento de síntesis. Recupera el aspecto algebraico y enriquece el análisis geométrico para profundizar en la comprensión de la relación existente entre una función y sus derivadas. Además, refuerza el concepto de derivada y permite extender el campo de sus aplicaciones a situaciones más complejas o nuevas, en particular, al campo de los problemas de optimización.

Con respecto al concepto de continuidad, éste subyace a lo largo del curso aún cuando no forma parte explícita de la temática; por lo cual debe trabajarse intuitivamente (sobre todo en las funciones que presentan discontinuidades) para propiciar la formulación de dicho concepto en cursos posteriores de cálculo.

Por último, no obstante que en el programa no existe una unidad destinada al estudio de la integral, en las dos últimas, se sientan las bases de este concepto, al utilizar la o las derivadas de una función para obtener información sobre la función misma.

### **PROPÓSITOS DEL CURSO**

Al finalizar el primer curso de cálculo, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- Incrementa su capacidad de resolver problemas al adquirir nuevas técnicas para representar e interpretar situaciones y fenómenos que involucran variación.
- Adquiere una visión del concepto de límite, a través del análisis de la representación tabular y gráfica de procesos infinitos, tanto discretos como continuos.
- Relaciona a la derivada de una función con un proceso infinito que permite estudiar las características de la variación y de la rapidez de cambio.
- Maneja de manera integrada las diversas interpretaciones de la derivada y las utiliza para obtener y analizar información sobre una función.
- Utiliza adecuadamente las técnicas de derivación y ubica a las fórmulas como un camino más eficaz de obtener la derivada de una función.
- Aplica la derivada de una función para resolver problemas de razón de cambio y de optimización.

### **CONTENIDOS TEMÁTICOS**

#### **Nombre de la unidad y Horas**

**I** Procesos Infinitos y la Noción de Límite (12 hrs)

**II** La Derivada: Estudio de la Variación y la Razón de Cambio (16 hrs)

**III** Derivación de Funciones Algebraicas (16 hrs)

**IV** Comportamiento Gráfico y Problemas de Optimización (20 hrs)

A continuación presentamos el programa operativo propuesto por la UNAM

**FORMATO SUGERIDO DE PROGRAMA OPERATIVO PARA LA PLANEACIÓN DIDÁCTICA  
(Colegio de Ciencias y Humanidades)**

**DATOS DE LA INSTITUCIÓN**

Nombre:		Clave	
---------	--	-------	--

**DATOS DEL PROFESOR**

Nombre:		Dictamen	
Fecha de elaboración		Fecha de revisión final y firma del Director Técnico	

**DATOS DE LA ASIGNATURA**

Nombre:	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I				
Clave:	1501	Optativa/obligatoria	Optativa	Ciclo lectivo:	
Horas por semana:		Horas teóricas		Horas prácticas	
Plan de estudios:	*	Grupo (s):		Clases por semana:	

**PROPÓSITOS U OBJETIVOS GENERALES DEL CURSO** (para consultar el programa indicativo oficial remítase a la Dirección Técnica de su institución, o bien, a la página electrónica del CCH.

- ✍ Incrementa su capacidad de resolver problemas al adquirir nuevas técnicas para representar e interpretar situaciones y fenómenos que involucran variación.
- ✍ Adquiere una visión del concepto de límite, a través del análisis de la representación tabular y gráfica de procesos infinitos, tanto discretos como continuos.
- ✍ Relaciona a la derivada de una función con un proceso infinito que permite estudiar las características de la variación y de la rapidez de cambio.
- ✍ Maneja de manera integrada las diversas interpretaciones de la derivada y las utiliza para obtener y analizar información sobre una función.
- ✍ Utiliza adecuadamente las técnicas de derivación y ubica a las fórmulas como un camino más eficaz de obtener la derivada de una función.
- ✍ Aplica la derivada de una función para resolver problemas de razón de cambio y de optimización.

\* Plan 1996 del CCH modificado en 2003.

**PLANEACIÓN GLOBAL**

CALENDARIZACIÓN DE UNIDADES Y CÁLCULO DE HORAS, CLASES Y PRÁCTICAS								
UNIDADES	HORAS			CLASES TEÓRICAS		CLASES PRÁCTICAS		
	TOTAL	TEÓRICAS	PRÁCTICAS	NÚMERO	FECHAS	NÚMERO	HRS.	FECHAS
1. PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE. 12 HORAS								
2. LA DERIVADA: ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO. 16 HORAS								
3. DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS. 16 HORAS								
4. COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN. 20 HORAS								
<b>TOTALES (64 HORAS)</b>								
<b>OBSERVACIONES</b>								

SISTEMA DE EVALUACIÓN	
ELEMENTOS	DESCRIPCIÓN
Factores por evaluar	
Periodos de evaluación y unidades por evaluar	
Criterios de exención	
Asignación de calificaciones	

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA Y DE CONSULTA	RECURSOS DIDÁCTICOS

**PLANEACIÓN DE UNIDAD**

Unidad/Tema	<b>PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE. (12 horas)</b>	<b>Número</b>	<b>I</b>	
<b>PROPÓSITO</b>	✍ Explorar diversos problemas que involucren procesos infinitos a través de la manipulación tabular, gráfica y simbólica para propiciar un acercamiento al concepto de límite.			
Aprendizajes	Temática	Fechas programadas	Estrategias	Fechas reales
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza procedimientos aritméticos para resolver problemas que involucren procesos infinitos.</li> <li>• Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones: material concreto, diagramas, gráficas, tablas o explicaciones verbales.</li> <li>• Reconoce un proceso como una acción que produce un resultado, este proceso será infinito cuando se pueda producir siempre un resultado más.</li> <li>• Distingue un proceso infinito de uno que no lo sea</li> <li>• Resuelve problemas de diversos contextos que involucren en su solución, procesos infinitos.</li> <li>• Utiliza las representaciones gráfica, tabular y algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanto <math>a</math>: cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, qué tan parecidos son y a la larga, cómo son éstos.</li> <li>• Distingue aquellos procesos infinitos que tienen un resultado límite de los que no lo tienen.</li> <li>• Interpreta la representación simbólica de procesos infinitos discretos y continuos como una forma de expresar la solución exacta de dichos procesos.</li> </ul>	<p style="text-align: center;"><b>PROCESOS INFINITOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Situaciones que dan lugar a procesos infinitos.</li> <li>• Comportamiento de un proceso infinito:</li> <li>• Representación tabular y gráfica.</li> <li>• Representación simbólica de procesos infinitos:                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>Discretos.</i></li> <li>- <i>Continuos.</i></li> </ul> </li> </ul> <p style="text-align: center;"><b>NOCIÓN DE LÍMITE</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Acercamiento al concepto de límite de una función.</li> <li>• Notaciones de límite:                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>f(x) \rightarrow L</math> <math>x \rightarrow \infty</math></li> <li>- <math>f(x) \rightarrow L</math> <math>x \rightarrow a</math></li> <li>- <math>\lim f(x) = L</math> <math>x \rightarrow a</math></li> </ul> </li> </ul>			

<b>Recursos didácticos</b>	<b>Bibliografía básica y de consulta</b>	<b>Sistema de evaluación</b>

Unidad/Tema	LA DERIVADA: ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO. (16 horas)			Número	II
PROPÓSITO	☞ Analizar la variación y la razón de cambio mediante problemas cuyos modelos sean funciones polinomiales de primer, segundo o tercer grado para construir el concepto de derivada con apoyo de procesos infinitos y la noción de límite.				
Aprendizajes	Temática	Fechas programadas	Estrategias	Fecha reales	
<p>Explica el significado de la pendiente de una función lineal en el contexto de un problema dado.</p> <p>Elabora una tabla, dibuja la gráfica y construye una expresión algebraica asociadas al estudio de problemas cuyos modelos sean funciones polinomiales de primero, segundo o tercer grado.</p> <p>Identifica que una función lineal tiene variación constante, en intervalos del mismo tamaño.</p> <p><input type="checkbox"/> Identifica que en una función cuadrática, el cambio del cambio es constante en intervalos del mismo tamaño.</p> <p>Infiere que el <math>n</math>-ésimo cambio es constante para funciones polinomiales de grado <math>n</math>.</p> <p><input type="checkbox"/> Calcula la razón de cambio de una función polinomial, en un intervalo dado.</p> <p><input type="checkbox"/> Utiliza procesos infinitos como un camino para obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpreta como un límite.</p> <p><input type="checkbox"/> Identifica a la derivada de una función polinomial de primer, segundo y tercer grado en un punto, como el límite de las razones de cambio promedio.</p> <p>Interpreta en el contexto de una situación o problema modelado por una función polinomial, la información que proporciona su derivada.</p> <p><input type="checkbox"/> Calcula la derivada de funciones polinomiales usando: polinomiales usando:</p> $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estudio de la variación <ul style="list-style-type: none"> <li>- Situaciones que se modelan con funciones polinomiales de 1°, 2° y 3° grado.</li> <li>- La representación de su variación en forma tabular, gráfica y algebraica.</li> <li>- Comparación de la razón de los cambios en intervalos del mismo tamaño.</li> <li>- Cambios de los cambios.</li> </ul> </li> <li>• Razón de cambio, medición de la variación. <ul style="list-style-type: none"> <li>- La pendiente de la función lineal como razón de cambio constante en el contexto del problema.</li> <li>- Razón de cambio promedio en intervalos del mismo tamaño de funciones polinomiales de segundo y tercer grado.</li> <li>- La razón de cambio promedio en el contexto del problema.</li> <li>- La razón de cambio instantánea en el contexto del problema.</li> <li>- Concepto y notación de derivada.</li> <li>- Representación algebraica: <math display="block">\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}</math> </li> </ul> </li> </ul>				

Recursos didácticos	Bibliografía básica y de consulta	Sistema de evaluación

Unidad/Tema	DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS. (16 horas)			Número	III
PROPÓSITO	Continuar el estudio del concepto de derivada a través del manejo de su representación algebraica, buscando que el alumno reconozca a las reglas de derivación como un camino más eficaz de obtener la derivada de una función.				
Aprendizajes	Temática	Fechas programadas	Estrategias	Fechas reales	
<ul style="list-style-type: none"> <li>Obtiene la derivada de una función polinomial de 1°, 2° o 3° grado usando la definición:  <math display="block">f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}</math> </li> <li>Identifica el patrón de comportamiento de las derivadas obtenidas con el límite del cociente de Fermat, y encuentra la fórmula de la derivada de funciones del tipo <math>f(x) = cx^n</math>.</li> <li>Calcula la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación.</li> <li>Reconoce la jerarquía de las operaciones involucradas en la regla de correspondencia de una función para aplicar correctamente las reglas de derivación.</li> <li>Identifica las relaciones existentes entre la gráfica de una función y la gráfica de su derivada.</li> <li>Obtiene la velocidad instantánea como la derivada de la función de posición y la aceleración como la derivada de la velocidad.</li> <li>Obtiene la ecuación de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función.</li> <li>Explica el significado a la derivada de una función en el contexto de un problema.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Derivada de funciones del tipo <math>f(x) = cx^n</math>.</li> <li>Reglas de derivación <ul style="list-style-type: none"> <li>- Constante por una función</li> <li>- Suma</li> <li>- Producto.</li> <li>- Cociente.</li> <li>- De la cadena con funciones del tipo <math>(f(x))^n</math> con <math>f(x)</math> un polinomio.</li> </ul> </li> <li>Notación.</li> <li>Problemas de aplicación. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Cálculo de tangentes.</li> <li>- Cálculo de velocidades.</li> </ul> </li> </ul>				

Recursos didácticos	Bibliografía básica y de consulta	Sistema de evaluación

Unidad/Tema UNIDAD IV	COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN. (20 horas)			Número	IV
PROPÓSITO	✍ Analizar las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizar dicha información para resolver problemas de optimización.				
Aprendizajes	Temática	Fechas programadas	Estrategias	Fechas reales	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Infiere a través de un análisis gráfico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas: signo de la primera derivada asociada con crecimiento o decrecimiento de la función, derivada nula con puntos críticos, signo de la segunda, con concavidad y segunda derivada nula con un posible cambio de concavidad.</li> <li>• Bosqueja la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de la misma.</li> <li>• Determina gráfica y algebraicamente los intervalos en donde una función es creciente, decreciente o constante.</li> <li>• Determina los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o inflexiones.</li> <li>• Analiza el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada.</li> <li>• Grafica una función analizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada.</li> <li>• Comprende que los criterios de la primera y segunda derivada, sintetizan el análisis realizado entre las gráficas de <math>f</math>, <math>f'</math> y <math>f''</math>.</li> <li>• Resuelve problemas que involucran máximos y mínimos de una función.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Situaciones que propician el análisis de las relaciones entre la gráfica de una función y sus derivadas.</li> <li>• Comportamiento gráfico de una función. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Crecimiento y decrecimiento de funciones</li> <li>- Puntos críticos</li> <li>- Concavidad</li> <li>- Máximos y mínimos, criterio de la 1ª y 2ª derivada</li> <li>- Puntos de inflexión</li> <li>- Gráfica de <math>f(x)</math> a partir de las gráficas de <math>f'(x)</math> y <math>f''(x)</math> y viceversa</li> </ul> </li> <li>• Problemas de optimización.</li> </ul>				

Recursos didácticos	Bibliografía básica y de consulta	Sistema de evaluación