



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MOVIMIENTOS DE DAMAS EN
GRÁFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICA

PRESENTA:
ELIZABETH RODRÍGUEZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ



2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Apellido paterno	Rodríguez
Apellido materno	Sánchez
Nombre(s)	Elizabeth
Teléfono	57 48 38 28
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	406087759

2. Datos del tutor

Grado	M. en C.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz

3. Datos del sinodal 1

Grado	Mat.
Nombre(s)	Laura
Apellido paterno	Pastrana
Apellido materno	Ramírez

4. Datos del sinodal 2

Grado	Dra.
Nombre(s)	Hortensia
Apellido paterno	Galeana
Apellido materno	Sánchez

5. Datos del sinodal 3

Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan José
Apellido paterno	Montellano
Apellido materno	Ballesteros

6. Datos del sinodal 4 Grado

Grado	Dr.
Nombre(s)	Martín
Apellido paterno	Manrique
Apellido materno	Mansour

7. Datos del trabajo escrito.

Título	Movimientos de damas en gráficas
Número de páginas	64 p.
Año	2011

Con especial agradecimiento a mi familia —en particular a mi mamá y a mi hermana— por todo su apoyo y cariño; a Uziel González, por escucharme y hacerme entrar en razón cada vez que lo necesito; a mis compañeros y profesores de la licenciatura, por los momentos y conocimientos compartidos a lo largo de estos años; a mis sinodales, por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo y por sus valiosas observaciones; y por supuesto, a César Hernández Cruz, sin cuyo apoyo y motivación constantes no habría logrado llegar hasta aquí.

Índice general

Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. Gráficas	1
1.2. Trayectorias, ciclos	5
1.3. Distancia	7
1.4. Operaciones en gráficas	7
1.5. Conexidad e independencia	9
1.6. Árboles y bosques	10
1.7. Series y convergencia	11
2. Las bases de los movimientos de damas	13
2.1. Definiciones y resultados elementales	13
2.2. Multi-distribuciones	17
3. Trayectorias, ciclos y suma de gráficas	25
3.1. Gráficas completas	25
3.2. Ciclos	26
3.3. Trayectorias	29
3.4. Suma	31
4. Productos con gráficas completas	35
4.1. Preliminares	35
4.2. Resultados principales	37
5. Hipercubos	41
5.1. Preliminares	41
5.2. Resultado principal	44

6. Gráficas de diámetro vértice-arista pequeño	47
6.1. Preliminares	47
6.2. Resultados principales	54
7. Conclusiones	63

Introducción

A lo largo del tiempo, muchos juegos se han estudiado a través de su representación en teoría de gráficas. Juegos como el solitario (*peg solitaire*) y los soldados de Conway, donde se colocan fichas sobre un tablero y se permiten ciertos movimientos, ya habían generado diversos estudios, y son ahora el origen del desarrollo de los movimientos de damas en gráficas, o *graph pegging*.

Así pues, esta vez nos concentraremos en la representación de los movimientos del juego de damas, aquél en el que, teniendo dos fichas adyacentes entre sí y una casilla vacía junto a una de ellas, podemos hacer que la primera «coma» a la segunda, saltándola, y llegue así a la casilla vacía. Sin embargo, las reglas de nuestro juego serán distintas, pues no tendremos contrincante, y nuestro objetivo será poder llegar a cualquier parte del tablero (representado por una gráfica) a partir de la distribución original de las fichas.

Aunque el término *peg* en inglés nos remite a los tronquitos o estacas de madera que se usan en el solitario (*peg solitaire*), nosotros pensaremos cada *peg* como una canica. Además, pensaremos en cada vértice de una gráfica como un hueco donde se puede colocar una canica. Si tenemos canicas en dos vértices adyacentes, y alguno de ellos es adyacente a un vértice vacío, podemos realizar un movimiento de damas, que consistirá en quitar las dos canicas y colocar una de ellas en el vértice vacío. Así, también podemos ver a los movimientos de damas como «saltar» una canica y «comerla», como se hace al jugar a las damas. En efecto, fue esta idea la que sugirió la traducción de movimientos de damas, llamados originalmente *pegging moves* en inglés.

El presente trabajo sobre movimientos de damas en gráficas, se basa en el artículo *Graph pegging numbers* [1], publicado en 2009. Es justo en este artículo que se presentan los movimientos de damas en gráficas, o *graph pegging*. Al ser un tema reciente, se espera que pueda tener numerosas aplicaciones.

El concepto de *graph pegging* o movimientos de damas en gráficas fue introducido por David Petrie Moulton durante el programa de verano Research Experience for Undergraduates (REU) de la University of Minnesota Duluth en 1994. Anteriormente

se trabajaba ya sobre graph pebbling. De hecho, algunas veces nos ayudaremos de conceptos y resultados de la teoría de graph pebbling, que introduciremos oportunamente.

Es así que, después de haber hecho un breve recordatorio de los conceptos básicos de la Teoría de Gráficas que necesitaremos a lo largo de este trabajo, definiremos los movimientos de damas.

Enseguida, presentaremos un par de conceptos básicos asociados a los movimientos de damas: el número de damas (pegging number) y el número de damas óptimo (optimal pegging number), creados de manera análoga a los ya existentes pebbling number y optimal pebbling number. Es sobre ellos que nos concentraremos durante el resto del trabajo. De hecho, nuestro objetivo central será calcular estas magnitudes para distintas clases de gráficas.

Así, en el tercer capítulo, buscaremos el número de damas de las trayectorias, los ciclos y la unión de dos gráficas.

En el siguiente capítulo veremos el comportamiento de los números de damas cuando se hacen productos con gráficas completas.

A partir de esos resultados, en el capítulo cinco analizaremos el caso de los hiper-cubos.

Para terminar, definiremos el diámetro vértice-arista de una gráfica, y dedicaremos un capítulo al estudio de los números de damas de las gráficas de diámetro vértice-arista pequeño, en el que, entre otros resultados, obtendremos una cota superior para los números de damas de gráficas con esas características. Además, para este tipo de gráficas, presentaremos la relación entre el número de damas y cierta estructura contenida como subgráfica.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Gráficas

Como el título lo indica, a lo largo de este trabajo utilizaremos gráficas, así que, para empezar, presentamos una definición formal de gráfica:

Definición 1.1.1. Una *gráfica* es una terna ordenada $(V(G), E(G), \Psi_G)$, formada por un conjunto no vacío de vértices $V(G)$, un conjunto de aristas $E(G)$, ajeno a $V(G)$, y una función de adyacencia que asocia cada arista de $E(G)$ con un par de vértices (no necesariamente distintos) de $V(G)$. Si e es una arista, y u, v son vértices tales que $\Psi_G(e) = uv$, entonces decimos que e une a u y a v , y que u y v son los extremos de la arista e .

Para facilitar la comprensión de esta definición de gráfica, podemos recurrir a la representación gráfica de ésta, de donde se deriva su nombre. Para esto, representaremos cada vértice por un punto, y cada arista como una línea que une los puntos que representan sus extremos. Para evitar confusiones, asumiremos que una línea no pasa por ningún punto que no represente alguno de sus extremos, y que ninguna línea se intersecta a sí misma.

Decimos que los extremos de una arista inciden en ella, y viceversa. Los dos vértices extremos de una arista son adyacentes, o vecinos. Dos aristas que inciden en un mismo vértice son adyacentes.

Una arista cuyos extremos son iguales es un lazo. Si una gráfica tiene más de una arista uniendo el mismo par de vértices, decimos que tiene aristas múltiples.

Definición 1.1.2. Una gráfica sin lazos y sin aristas múltiples es llamada *gráfica simple*.

Observemos que una gráfica simple queda completamente determinada por su conjunto de vértices y de aristas. Así, en ese caso, podemos simplificar nuestra definición inicial, omitiendo la función de adyacencia Ψ y etiquetando a cada arista mediante los nombres de sus extremos, quedando:

Definición 1.1.3. Una *gráfica* es una pareja ordenada $(V(G), E(G))$ de conjuntos, tales que los elementos de $E(G)$ son subconjuntos de $V(G)$ con 2 elementos. Los elementos de $V(G)$ son los vértices de G , mientras que $E(G)$ es el conjunto de las aristas de G .

A partir de ahora, utilizaremos la definición 1.1.3 de gráfica, con el fin de simplificar la notación.

Definición 1.1.4. Una gráfica es *finita* si su conjunto de vértices y el de sus aristas son ambos finitos.

Definición 1.1.5. El *orden* de una gráfica G es su número de vértices, y se denota por $|G|$.

En matemáticas siempre es importante saber cuándo dos objetos son «esencialmente el mismo», es decir, cuándo son tan parecidos que podemos trabajar con uno solo de ellos. Es por esta razón que surge la siguiente definición.

Definición 1.1.6. Dos gráficas G y H son *isomorfas* ($G \cong H$) si existe una biyección $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$, con $uv \in E(G)$ si y sólo si $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$. A θ se le denomina isomorfismo entre G y H .

Muchas veces no haremos distinción entre gráficas isomorfas, y diremos que $G = H$ en lugar de $G \cong H$.

A veces, para indicar que trabajamos sobre toda una clase de gráficas isomorfas, omitiremos las etiquetas de los vértices. En otras ocasiones, para referirnos a los vértices de una gráfica, los etiquetaremos. Así, por ejemplo, en una gráfica simple, conviene referirnos a la arista con extremos etiquetados por u y v como la arista uv .

Ahora definiremos algunas clases particulares de gráficas.

Definición 1.1.7. Una *gráfica completa* es una gráfica simple en la que todo par de vértices está unido por una arista.

Nótese que, salvo isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{N}$ hay sólo una gráfica completa con n vértices, a ésta se le denota por K_n .

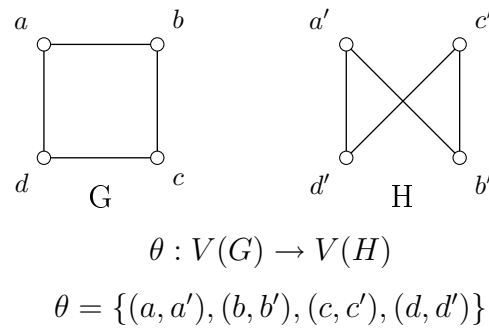


Figura 1.1: Ejemplos de gráficas isomorfas.

Definición 1.1.8. Una *gráfica vacía* es una gráfica sin aristas.

Y finalmente,

Definición 1.1.9. Una gráfica G es *bipartita* si existe una partición (X, Y) de su conjunto de vértices $V(G)$ de modo que toda arista tenga un extremo en X y otro en Y . La partición (X, Y) es una bipartición de la gráfica G .

En particular,

Definición 1.1.10. Una gráfica *bipartita completa* es una gráfica simple bipartita con bipartición (X, Y) en la que todo vértice de X es adyacente a cada uno de los vértices de Y . Si $|X| = m$ y $|Y| = n$, esta gráfica se denota por $K_{m,n}$.

De modo más general, podemos definir las gráficas multipartitas:

Definición 1.1.11. Dado un entero $r \geq 2$, una gráfica G es llamada r -partita si existe una partición de sus vértices en r clases, de modo que cada arista tiene sus extremos en diferentes clases de la partición, es decir, de modo que los vértices de una misma clase de la partición no sean adyacentes. Si una gráfica es r -partita para algún r , entonces es llamada *multipartita*.

Por lo general, para las gráficas 2-partitas, se prefiere el término gráfica bipartita.

Definición 1.1.12. Una gráfica multipartita en la que cualesquiera dos vértices de diferentes clases de la partición son adyacentes es una gráfica *multipartita completa*.

Definición 1.1.13. Una gráfica H es *subgráfica* de G (denotado por $H \subseteq G$) si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

Si $H \subseteq G$ pero $H \neq G$, escribimos $H \subset G$ y decimos que H es una *subgráfica propia* de G .

Además, si H es subgráfica de G , entonces G es *supergráfica* de H .

Definición 1.1.14. Una *subgráfica* (o *supergráfica*) *generadora* de G es una subgráfica (o supergráfica) H con $V(H) = V(G)$.

Definición 1.1.15. Dado $V' \subseteq V(G)$ no vacío, la subgráfica de G cuyo conjunto de vértices es V' y cuyo conjunto de aristas es el conjunto de aristas de G con ambos extremos en V' es llamada la subgráfica de G inducida por V' y se denota por $G[V']$; decimos que $G[V']$ es una *subgráfica inducida* de G .

Definición 1.1.16. El *grado* de un vértice $v \in V(G)$ es el número de aristas de G que inciden en v , contando cada lazo como dos aristas, y se le denota $d_G(v)$. En particular, un vértice de grado cero es un vértice aislado. Denotamos por δ_G y Δ_G el grado mínimo y el grado máximo, respectivamente, del conjunto de los vértices de G .

Definición 1.1.17. Una gráfica G es *k-regular* si $d_G(v) = k$ para todo $v \in V(G)$; una gráfica regular es una gráfica *k-regular* para algún k .

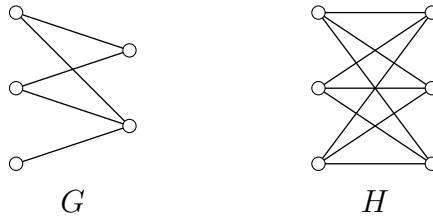


Figura 1.2: Ejemplos de gráficas bipartitas. G es una gráfica bipartita con $\delta_G = 2$ y $\Delta_G = 3$, mientras que H es la gráfica bipartita completa $K_{3,3}$, una gráfica 3-regular. Nótese además que $G \subset H$.

Recordemos que dos vértices son vecinos si están unidos por una arista.

Definición 1.1.18. El conjunto de vecinos de un vértice $v \in V(G)$ se denota por $N(v)$ o $\Gamma(v)$. En general, si $U \subseteq V(G)$, el conjunto de los vecinos de los vértices de U en $V(G) \setminus U$ se denota por $N(U)$ o $\Gamma(U)$.

1.2. Trayectorias, ciclos

Veremos ahora varias maneras de recorrer los vértices de una gráfica.

Definición 1.2.1. Un *camino* en una gráfica G es una sucesión no nula $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ cuyos elementos son, alternadamente, vértices y aristas de G , donde los extremos de cada e_i son v_{i-1} y v_i , para todo $1 \leq i \leq k$. En ese caso, nos referiremos a W como un camino de v_0 a v_k (o entre v_0 y v_k), o como un v_0v_k -camino.

A v_0 se le llama el origen de W , los vértices v_1, v_2, \dots, v_{k-1} son los vértices interiores de W , v_k es su vértice final y k su longitud.

Si trabajamos con gráficas simples, un camino queda totalmente determinado por la sucesión de sus vértices, así pues, escribiremos $W = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$.

Ahora presentaremos algunas clases particulares de caminos en una gráfica G .

Definición 1.2.2. Una *trayectoria* es un camino que no repite vértices. El número de aristas de una trayectoria es su longitud, una trayectoria de k vértices se denota por P_k .

Dados dos conjuntos de vértices A, B , decimos que $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ es una AB -trayectoria si $\{x_0\} = P \cap A$ y $\{x_k\} = P \cap B$.

Decimos que un camino es cerrado si su longitud es positiva y su origen coincide con su vértice final.

Definición 1.2.3. Un *ciclo* es un camino cerrado que no repite vértices, salvo su origen. La longitud de un ciclo está dada por su número de aristas (o de vértices). Un ciclo de longitud k , o k -ciclo, se denota por C_k . Además, un k ciclo es par o impar si k es par o impar, respectivamente.

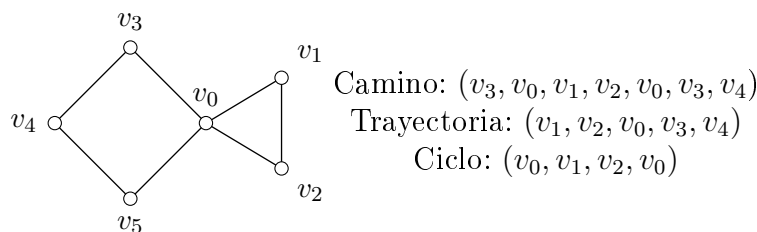


Figura 1.3: Ejemplos de recorridos en una gráfica simple.

Ya con estas definiciones, nos interesará saber si, en una gráfica dada, es posible encontrar un recorrido de algún vértice hacia algún otro. En particular, nos interesará saber si, a partir de cualquiera de sus vértices es posible llegar a cualquier otro. Es por eso que a continuación definimos una propiedad importante en gráficas: la conexidad.

Definición 1.2.4. Dada una gráfica G , decimos que es *conexa* si para cualesquiera dos de sus vértices u, v , existe una uv -trayectoria. Si una gráfica no es conexa, diremos que es *disconexa* o *inconexa*.

Cuando una gráfica sea inconexa, trabajaremos sobre sus componentes conexas, las que definiremos a continuación.

Definición 1.2.5. Una subgráfica conexa, máxima por contención con esa propiedad, es una *componente conexa* de G . Una gráfica conexa tiene exactamente una componente conexa.

La siguiente es una propiedad importante de los recorridos en gráficas:

Teorema 1.2.6. *Todo uv -camino contiene una uv -trayectoria.*

Demostración. Sea W el uv -camino, de longitud k . La demostración se hará por inducción sobre la longitud del camino.

Base $k=1$.

En este caso, el camino no repite vértices, por lo que ya es una uv -trayectoria.

Hipótesis Inductiva

Supongamos que si W es de longitud $k = n$, entonces contiene una uv -trayectoria.

Paso Inductivo

Sea $W = (u = u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1} = v)$ un uv -camino de longitud $k = n + 1$. Sea $W' = (u = u_0, u_1, \dots, u_n)$. Por hipótesis inductiva, W' contiene una uu_n -trayectoria, a la que llamaremos T' .

Si $v \notin T'$, entonces $T = T' \cup (u_n, v)$ es una uv -trayectoria contenida en W . En cambio, si $v \in T' = (u = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v = v_k, v_{k+1}, \dots, u_n)$, tomamos $T = (u = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = v)$. Entonces T es una uv -trayectoria contenida en W . ■

Una magnitud asociada a la longitud de los ciclos de una gráfica es el cuello:

Definición 1.2.7. El cuello o cintura de una gráfica G es la longitud de su ciclo más corto, si G no tiene ciclos, definimos su cuello como infinito.

1.3. Distancia

Sea G una gráfica.

Definición 1.3.1. La *distancia* en G entre dos de sus vértices u, v , es la longitud de la trayectoria más corta entre u y v en G , y se denota por $d(u, v)$. Si no existe tal trayectoria, diremos que la distancia entre u y v es infinita.

Definición 1.3.2. El diámetro de G , $diam(G)$, es el máximo de las distancias entre cualesquiera dos vértices de G .

Definición 1.3.3. La excentricidad de un vértice v en una gráfica conexa G es el máx $d(u, v)$ para todos los $u \in V(G)$. El radio de G , $rad(G)$, es el mínimo de las excentricidades de los vértices de una gráfica.

Así, dada una gráfica de radio r , existe un vértice que está a distancia a lo más r de cualquier otro vértice de la gráfica.

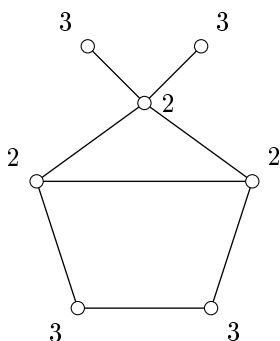


Figura 1.4: Ejemplo de una gráfica con cuello=3, diámetro =3 y radio=2. Junto a cada vértice se indica su excentricidad.

1.4. Operaciones en gráficas

Sean G y H dos gráficas simples. Veremos algunas formas de obtener nuevas gráficas a partir de éstas.

Definición 1.4.1. La *unión* de G y H , $G \cup H$, es la gráfica simple definida por $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ y $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

Análogamente,

Definición 1.4.2. La *intersección* de G y H , $G \cap H$, es la gráfica simple definida con $V(G \cap H) = V(G) \cap V(H)$ y $E(G \cap H) = E(G) \cap E(H)$.

Si dos gráficas no tienen vértices en común, diremos que son ajenas. Supongamos ahora que G y H son ajenas. En este caso, $G \cup H$ es llamada la unión ajena de G y H .

Definición 1.4.3. Si $V(G) \cap V(H) = \emptyset$, la *suma* de G y H , denotada $G + H$, es la gráfica que tiene como conjunto de vértices a $V(G) \cup V(H)$ y cuyo conjunto de aristas es $E(G) \cup E(H) \cup \{(g, h) : g \in V(G), h \in V(H)\}$.

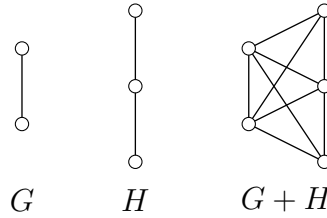


Figura 1.5: Un ejemplo de suma de dos gráficas.

Definición 1.4.4. El *producto cartesiano* de G y H , denotado $G \times H$, tiene por conjunto de vértices a:

$$V(G \times H) = V(G) \times V(H) = \{(g, h) : g \in V(G), h \in V(H)\},$$

y además,

$$(g, h)(g', h') \in E(G \times H) \Leftrightarrow \begin{cases} g = g' \text{ y } hh' \in E(H), \text{ o} \\ h = h' \text{ y } gg' \in E(G). \end{cases}$$

El producto cartesiano $G \times H$ puede verse como $|H|$ copias de G con aristas adicionales entre distintas copias, que forman $|G|$ copias de H . Esto es, dejando fija la primera coordenada y variando la segunda se obtiene una copia de H , mientras que si se deja fija la segunda coordenada y se varía la primera se obtiene una copia de G .

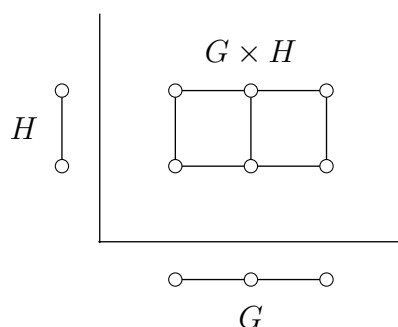


Figura 1.6: El producto cartesiano de dos gráficas.

1.5. Conexidad e independencia

Definición 1.5.1. Sea G una gráfica. Un subconjunto $S \subseteq V(G)$ es un *conjunto independiente* de G si no hay dos vértices de S adyacentes en G .

Definición 1.5.2. El número de vértices en un conjunto independiente de cardinalidad máxima en una gráfica G es el *número de independencia* de G , y se denota $\alpha(G)$.

Es fácil ver, por ejemplo, que $\alpha(K_n) = 1$, para toda $n \in \mathbb{N}$, pues si tomamos cualquier conjunto con dos o más vértices de K_n , todos ellos serán adyacentes entre sí. Ahora veamos cuál es el número de independencia del producto de dos gráficas completas.

Lema 1.5.3. Para cualesquiera n, m enteros positivos, se tiene que $\alpha(K_m \times K_n) = \min\{m, n\}$

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $\min\{m, n\} = n$. Sea S un subconjunto de los vértices de $K_m \times K_n$, con $|S| = \min\{m, n\} + 1 = n + 1$. Dado que $K_m \times K_n$ está compuesta por n copias de K_m , y $n \leq m$, entonces hay una copia de K_m , llamémosla K , que contiene al menos dos vértices de S , sin embargo, estos dos vértices son adyacentes en K , y por consiguiente lo son también en $K_m \times K_n$. Entonces S no es independiente. Por lo tanto $\alpha(K_m \times K_n) \leq \min\{m, n\}$.

Sigamos suponiendo que $\min\{m, n\} = n$. Consideremos el subconjunto I de vértices de $K_m \times K_n$, compuesto por los vértices de la diagonal de $V(K_m) \times V(K_n)$. Entonces, el conjunto I tiene exactamente un vértice en cada una de las n copias de K_m . Además, por la elección de I , no hay dos vértices de I en la misma copia de K_n . Por la definición de $K_m \times K_n$, no hay aristas entre los vértices de I , entonces, I es independiente. Por lo tanto, podemos concluir que $\alpha(K_m \times K_n) = \min\{m, n\}$. ■

1.6. Árboles y bosques

A continuación definimos dos clases de gráficas que nos serán de utilidad.

Definición 1.6.1. Una gráfica acíclica, es decir, sin ciclos, es llamada *bosque*.

Definición 1.6.2. Un *árbol* es una gráfica conexa y acíclica. Los vértices de grado 1 de un árbol son sus hojas; a los vértices que no son hojas los llamaremos vértices interiores.

Podemos observar que un bosque es una gráfica cuyas componentes conexas son árboles. además, si quitamos una hoja a un árbol, lo que obtenemos es de nuevo un árbol.

Una propiedad importante de los árboles está dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.6.3. *En un árbol, para cualesquiera dos vértices u, v , existe una única uv -trayectoria.*

Demostración. Haremos la demostración por contrapositiva. Sea G una gráfica, y supongamos que existen dos uv trayectorias distintas, P_1 y P_2 . Esto implica que existe un arista $e = xy$ que pertenece a P_1 pero no a P_2 . Observemos que la gráfica $(P_1 \cup P_2) - e$ es conexa. En particular, contiene una xy -trayectoria, P . Entonces, $P + e$ es un ciclo en G , por lo tanto, G no es un árbol. ■

Algunas veces, es conveniente fijar uno de los vértices del árbol como su raíz.

Definición 1.6.4. Un árbol *con raíz* o árbol *arraigado* es un árbol en el que uno de sus vértices se designa como raíz.

Definición 1.6.5. Dados un árbol A , arraigado en r , y una trayectoria $T = (r = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$, decimos que:

- v_{n-1} es el padre de v_n .
- v_n es hijo de v_{n-1} .
- v_0, v_1, \dots, v_{n-1} son los ancestros de v_n .
- Si u es un ancestro de w , entonces w es descendiente de u .
- Las hojas de T no tienen hijos.

- Si y no es una hoja, lo llamamos vértice interior.

Por lo general, representaremos un árbol arraigado dibujando su raíz arriba del resto de los otros vértices, y los descendientes debajo de sus ancestros.

Definición 1.6.6. Un árbol binario es un árbol con raíz en el que cada vértice interior tiene exactamente dos hijos.

Para distinguir a los dos hijos de un vértice interior de un árbol binario, llamaremos a uno hijo derecho y al otro hijo izquierdo.

1.7. Series y convergencia

Definición 1.7.1. Una *función* es una colección de parejas ordenadas con la siguiente propiedad: si (a, b) y (a, c) están en la colección, entonces $b = c$, es decir, la colección no puede contener dos parejas distintas con el mismo primer elemento.

Así pues, una función es una relación entre elementos de dos conjuntos.

Definición 1.7.2. Si f es una función, el *dominio* de f es el conjunto de todas las a tales que existe alguna b tal que (a, b) está en f . Si a está en el dominio de f , se sigue de la definición de función que existe un *único* b tal que (a, b) está en f . A este b se le llama la *imagen* de a y se denota por $f(a)$. El *contradominio* de f contiene al conjunto de las imágenes de los elementos del dominio de f .

Para este trabajo, nos interesará un cierto tipo de funciones, a las que llamaremos sucesiones.

Definición 1.7.3. Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio es \mathbb{N} , y cuyas imágenes están contenidas en \mathbb{R} .

Dada una sucesión a , casi siempre nos referiremos a los valores $a(0), a(1), a(2), \dots$ por a_0, a_1, a_2, \dots , mientras que la sucesión se denotará por $\{a_n\}$.

Definición 1.7.4. Una sucesión $\{a_n\}$ converge a l si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$, se tiene que $|a_n - l| < \varepsilon$. En ese caso escribiremos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

También decimos que $\{a_n\}$ tiende a l , o que el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es l .

Diremos que una sucesión es convergente si existe l tal que la sucesión converge a l . Si la sucesión no converge, diremos que diverge.

Ahora nos interesará el comportamiento de la suma de los términos de una sucesión $\{a_n\}$, es decir, queremos ver qué sucede con $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$. Para ello, estudiaremos primero las sumas parciales, es decir:

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

Estas sumas parciales nos son útiles porque entre más grande sea n , más se aproximan a la suma que nos interesa. Así, la suma $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ tiene que ser igual al $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Sin embargo, es posible que la sucesión $\{s_n\}$ no tenga límite, lo que hace que la «suma» de la sucesión quede indefinida. Por supuesto, nos interesan aquellas sucesiones cuyas sumas sí convergen, para las cuales tenemos la siguiente:

Definición 1.7.5. Si la sucesión $\{s_n\}$ converge, el $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ se denota por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, y se le llama la suma de la sucesión $\{a_n\}$.

En general, decimos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es una serie infinita, y que converge o diverge si la sucesión s_n converge o diverge, respectivamente.

Entre todas las series infinitas, tenemos las series geométricas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

que son particularmente importantes y que nos serán de mucha utilidad un poco más adelante. Nos concentraremos en los casos $|r| < 1$. Así, podemos evaluar fácilmente

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + r + r^2 + \dots + r^n \\ r \cdot s_n &= r + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1}. \end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\begin{aligned} s_n(1 - r) &= 1 - r^{n+1}, \text{ entonces} \\ s_n &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

Notemos que no tenemos problemas al dividir entre $(1 - r)$, pues $r \neq 1$. Y dado que el $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad |r| < 1 \\ &= \frac{1}{1 - r}, \quad |r| < 1. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Las bases de los movimientos de damas

2.1. Definiciones y resultados elementales

Como ya mencionamos en la introducción, a lo largo de este trabajo, pensaremos a cada vértice de una gráfica como un hueco donde colocar una canica. Podremos realizar un movimiento de damas cuando tengamos canicas en dos vértices adyacentes y haya un tercero, adyacente a uno de los dos primeros, vacío. Este movimiento colocará una de las canicas en el tercer vértice y dejará vacíos a los dos primeros, como haría un movimiento del conocido juego de damas. Formalicemos ahora esas definiciones.

Definición 2.1.1. Una *distribución* D de canicas en una gráfica G es un subconjunto cualquiera de $V(G)$.

Definición 2.1.2. Dada una distribución D en una gráfica G , si $u, v \in D$ son distintos y adyacentes, y $w \in V(G)$ es un vértice adyacente a v que no está en D , el *movimiento de damas* $m = u \xrightarrow{v} w$, reemplaza a la distribución D por la distribución $m(D) = D \setminus \{u, v\} \cup w$.

En ocasiones, para hacer énfasis en que las condiciones para u, v y w se cumplen, llamamos a m un *movimiento de damas válido*.

El conjunto $\{u, v\}$ es la fuente u origen de m , y el vértice w es el destino u objetivo de m .

Definición 2.1.3. Si M es una sucesión de movimientos de damas que inicia en D , denotamos por $M(D)$ a la distribución obtenida después de aplicar M a D .

Definición 2.1.4. Decimos que un vértice t es alcanzable desde una distribución D si existe M , sucesión finita de movimientos de damas, tal que $t \in M(D)$. El *alcance* de una distribución D , denotado $Reach(D)$, es el conjunto de todos los vértices alcanzables desde D .

Una herramienta útil para probar que un vértice no está en el alcance de una distribución es el peso:

Definición 2.1.5. Dada una distribución D en una gráfica G y $t \in V(G)$, se define el *peso* de D con respecto a t como;

$$wt_t(D) = \sum_{u \in D} \sigma^{d(u,t)}$$

donde $\sigma = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ es la raíz positiva de $x^2 + x = 1$ y $d(u, t)$ es la distancia de u a t en G .

Observemos que si D es infinita, entonces se incrementa el número de sumandos, por lo que $wt_t(D)$ puede ser infinito. explicar, detallar

Lema 2.1.6 (Monotonía del peso). *Sea D una distribución en una gráfica G y sea D' la distribución obtenida a partir de D después de realizar una sucesión finita de movimientos de damas. Entonces, para todo $t \in V(G)$ se tiene:*

$$wt_t(D') \leq wt_t(D)$$

Además, si $wt_t(D) < 1$, entonces $t \notin Reach(D)$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $D' = m(D)$, con $m = u \xrightarrow{v} w$, . Para todo $t \in V(G)$ tenemos:

$$d(u, t) \leq d(w, t) + 2 \tag{2.1}$$

$$d(v, t) \leq d(w, t) + 1 \tag{2.2}$$

pues, si $d(w, t) < \infty$, entonces existe T una wt -trayectoria de longitud n , entonces $\{u, v, w\} \cup T$ es una ut -trayectoria de longitud $n + 2$, mientras que $vw \cup T$ es una vt -trayectoria de longitud $n + 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} wt_t(D') &= wt_t(D) - \sigma^{d(u,t)} - \sigma^{d(v,t)} + \sigma^{d(w,t)} && \text{por la definición de } wt_t(D') \\ &\leq wt_t(D) - \sigma^{d(w,t)+2} - \sigma^{d(w,t)+1} + \sigma^{d(w,t)} && \text{pues } \sigma < 1 \text{ y tenemos (2.1)} \\ &= wt_t(D) - (\sigma^2 + \sigma - 1)\sigma^{d(w,t)} && \text{y (2.2),} \\ &= wt_t(D) && \text{y como } \sigma \text{ es raíz de } x^2 + x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, si $t \in \text{Reach}(D)$, entonces t está en alguna distribución D' obtenida a partir de D mediante una sucesión finita de movimientos de damas. En ese caso,

$$\begin{aligned}
 wt_t(D') &= \sum_{u \in D'} \sigma^{d(u,t)} \\
 &= \sum_{u \in D' \setminus \{t\}} \sigma^{d(u,t)} + \sigma^{d(t,t)} \\
 &= \sum_{u \in D' \setminus \{t\}} \sigma^{d(u,t)} + 1 \\
 &\geq 1
 \end{aligned}$$

■

A partir de ahora sólo consideraremos gráficas simples finitas.

Definición 2.1.7. Dada una gráfica G , su *número de damas* $P(G)$ es el menor entero positivo d tal que toda distribución de tamaño d en G tiene alcance $V(G)$. Por otro lado, el *número de damas óptimo* $p(G)$ de G es el menor entero positivo d tal que alguna distribución de tamaño d en G tiene alcance $V(G)$.

A partir de la definición anterior podemos hacer la siguiente observación que nos será de gran utilidad:

Observación 2.1.8 (Monotonía del alcance). Sean $D' \subset D$ dos distribuciones en una gráfica G . Entonces $\text{Reach}(D') \subseteq \text{Reach}(D)$.

Si D es una distribución de tamaño d y $\text{Reach}(D) \neq V(G)$ entonces $P(G) > d$.

Si $\text{Reach}(D) \neq V(G)$ para toda distribución D de tamaño d , entonces $p(G) > d$.

Observación 2.1.9. Sea G una gráfica, entonces:

- $p(G) \leq P(G)$, esto se tiene a partir de la definición anterior, pues cualquier distribución de tamaño $P(G)$ tiene alcance $V(G)$.

- Si $|G|$ es el orden de G y G es inconexa:

(i) $P(G) = |G| - \min_C (|C| - P(C))$, y

(ii) $p(G) = \sum_C p(C)$

donde la suma y el mínimo se toman sobre todas las componentes conexas de G .

La observación (i) resulta de que, dada una distribución D con $P(G)$ canicas, y una componente conexa C de G necesitamos tener al menos $P(C)$ canicas de la distribución D en C para asegurar que $V(C) \subseteq \text{Reach}(D)$, pues ningún movimiento nos permite mover canicas de una componente a otra. Así, el mayor número de vértices que pueden quedar vacíos en la componente C , de modo que aún podamos alcanzar cualquiera de sus vértices es $|C| - P(C)$. Entonces, si C' es la componente de G con $|C'| - P(C') = \min_C(|C| - P(C))$, y dada una distribución D con $|G| - \min_C(|C| - P(C)) - 1$ canicas, de modo que los $\min_C(|C| - P(C)) + 1$ vértices vacíos están en C' , entonces existe un vértice $v \in V(C')$ tal que $v \notin \text{Reach}(D)$, esto es $\text{Reach}(D) \neq V(G)$. Por lo tanto $P(G) \geq |G| - \min_C(|C| - P(C))$.

Por otra parte, sea D una distribución con $|G| - \min_C(|C| - P(C))$ canicas. Si $\min_C(|C| - P(C)) = 0$, entonces D no deja vértices vacíos y ya terminamos. Supongamos entonces que hay al menos un vértice vacío u , y sea \widehat{C} la componente a la que pertenece. Sabemos que D deja exactamente $\min_C(|C| - P(C))$ vértices vacíos, y dado que por definición de mínimo $\min_C(|C| - P(C)) \leq |\widehat{C}| - P(\widehat{C})$, entonces en \widehat{C} hay a lo más $|\widehat{C}| - P(\widehat{C})$ vértices vacíos. Dicho de otro modo, D coloca al menos $P(\widehat{C})$ canicas en \widehat{C} , con lo que, por definición de número de damas, es posible alcanzar a u mediante movimientos de damas en \widehat{C} . Por lo tanto $\text{Reach}(D) = V(G)$, lo que a su vez implica que $P(G) \leq |G| - \min_C(|C| - P(C))$.

La observación (ii) se tiene porque no es posible pasar canicas de una componente a otra con movimientos de damas, así, tenemos que asegurar que $\text{Reach}(D \cap V(C)) = V(C)$ para toda C componente conexa.

Proposición 2.1.10. *Sea G una gráfica de diámetro d . Entonces $P(G) \geq d$.*

Demostración. Consideremos vértices u_0 y u_d tales que $d(u_0, u_d) = d$. Sean $T = (u_0, u_1, \dots, u_d)$ una $u_0 u_d$ -trayectoria de longitud d y $D = \{u_2, u_3, \dots, u_d\}$ una distribución. Notemos que $d(u_0, u_i) = i$ para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, pues (u_0, u_1, \dots, u_i) es una $u_0 u_i$ -trayectoria de longitud i , que además es de longitud mínima, pues si hubiera T' una $u_0 u_i$ -trayectoria más corta, tendríamos la $u_0 u_d$ -trayectoria $T' \cup (u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_d)$ de longitud menor que la de T , lo que contradiría la elección de T .

Así pues, podemos calcular el peso de D con respecto a u_0 :

$$wt_{u_0}(D) = \sum_{t \in D} (\sigma^{d(u_0, t)}) = \sigma^2 + \sigma^3 + \dots + \sigma^d = \sum_{i=0}^d \sigma^i - 1 - \sigma < \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i - 1 - \sigma.$$

Por otro lado, sabemos que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} (\sigma^i)$ converge a $\frac{1}{1-\sigma}$, pues es una serie geométrica de razón $\sigma < 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
wt_{u_0}(D) < \frac{1}{1-\sigma} - 1 - \sigma &= \frac{1 - (1-\sigma) - \sigma(1-\sigma)}{1-\sigma} \\
&= \frac{1 - 1 + \sigma - \sigma + \sigma^2}{1-\sigma} \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\sigma}.
\end{aligned}$$

Recordemos que el valor de σ es $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, sustituyendo en la desigualdad anterior obtenemos:

$$wt_{u_0}(D) < \frac{\sigma^2}{1-\sigma} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{10-4\sqrt{5}+2}{12-4\sqrt{5}} = \frac{12-4\sqrt{5}}{12-4\sqrt{5}} = 1.$$

Así, $wt_{u_0}(D) < 1$; entonces, por el lema 2.1.6 tenemos que $u_0 \notin \text{Reach}(D)$ y por lo tanto $P(G) \geq d$. ■

2.2. Multi-distribuciones

Para lograr calcular el número de damas y el número de damas óptimo de ciertas gráficas haremos uso de tres nuevos tipos de movimientos que presentaremos a continuación. Para definirlos necesitamos numerar las canicas, de modo que podamos distinguir una de otra y no se confundan si hay más de una en un vértice. Así, dada una gráfica G , utilizaremos u_i para indicar que la canica i está en el vértice u .

Sea G una gráfica:

Definición 2.2.1. Sea $S_G = \{u_i : u \in V(G), i \in \mathbb{Z}\}$. Definimos una *multi-distribución* D de canicas sobre G como un subconjunto finito de S_G con la propiedad de que si $u_i, v_i \in D$, entonces $u = v$, (es decir, una canica no puede estar en más de un vértice al mismo tiempo).

Definición 2.2.2. Si u, v y w son vértices distintos de G tales que v es adyacente a u y a w , y tenemos $u_i, v_j \in D$, el *apilamiento* $m = u_i \xrightarrow{v_j} w_i$ sustituye la multi-distribución D por la multi-distribución $m(D) = D \setminus \{u_i, v_j\} \cup \{w_i\}$.

Observemos que el vértice objetivo de un apilamiento podría ya estar ocupado, así que al hacer el movimiento «apilaremos» una canica sobre la que ya había.

Definición 2.2.3. Si u y w son vértices distintos y adyacentes de G , y $u_i, u_j \in D$ con $i \neq j$, entonces el movimiento pebbling $m = u_i \xrightarrow{u_j} w_i$ cambia la multi-distribución D por la multi-distribución $m(D) = D \setminus \{u_i, u_j\} \cup \{w_i\}$.

Definición 2.2.4. Si $u_i \in D$, la remoción o retiro m reemplaza a la multi-distribución D por la multi-distribución $m(D) = D \setminus \{u_i\}$.

De manera natural, veremos a las distribuciones (con canicas numeradas) como multi-distribuciones. Del mismo modo veremos a los movimientos de damas como apilamientos.

Para hacer énfasis en que una multi-distribución es también una distribución (esto es, que no hay más de una canica en cada vértice), nos referiremos a ella como una *distribución propia*.

Demostremos que, partiendo de una distribución propia, el uso de los tres tipos de movimientos recién definidos no modifica su alcance. Para esto, definiremos una nueva herramienta, con la que trabajaremos en lo que resta de este capítulo: los bosques de movimientos. Éstos son una representación gráfica de los movimientos pebbling y apilamientos, y una vez construídos, nos ayudarán a encontrar nuevas sucesiones de movimientos. Habiendo demostrado esto, podremos usar los tres tipos de movimientos para obtener cotas superiores del número de damas y del número de damas óptimo de una gráfica, al demostrar que el alcance de cierta distribución usando todos los movimientos es $V(G)$.

Definición 2.2.5. Sea G una gráfica. Si D es una distribución propia sobre los vértices de G , definimos $Reach_a(D)$ como el conjunto de vértices de G alcanzables desde D al usar cualquier tipo de movimientos (apilamientos, pebbling y remociones).

Si pensamos en los movimientos de damas como apilamientos, podemos notar lo siguiente:

Observación 2.2.6. Dada una distribución propia D , se tiene que $Reach(D) \subseteq Reach_a(D)$

A continuación definiremos los bosques de movimientos, que nos serán indispensables para demostrar que la contención anterior es, de hecho, una igualdad.

Definición 2.2.7. Dada una multi-distribución D , un *bosque de movimientos* de D es un bosque binario con vértices etiquetados, es decir, una unión ajena de árboles binarios con vértices etiquetados, con las siguientes tres propiedades:

- (1) La etiqueta de cada vértice es un elemento de S_G . Varios vértices pueden tener la misma etiqueta.

- (2) La etiqueta de cada hoja es un elemento de D . Dos hojas no pueden tener la misma etiqueta.
- (3) Cada vértice interior tiene un hijo izquierdo y un hijo derecho. Si un vértice interior está etiquetado como w_i , entonces:
- sus hijos izquierdo y derecho tienen etiquetas de la forma u_i y v_j , respectivamente, donde u, v y w son vértices distintos, v es adyacente a u y a w y además $i \neq j$, o bien
 - sus hijos izquierdo y derecho tienen etiquetas de la forma u_i y u_j , donde u y w son vértices distintos y adyacentes, y se tiene $i \neq j$.

Notemos que la condición (1) indica que se puede pasar más de una vez por un mismo vértice. La condición (2) asegura que cada canica de la distribución D esté representada sólo una vez en el bosque de movimientos. Finalmente, podemos observar que los dos casos de la condición (3) corresponden a la representación, en el bosque de movimientos de un apilamiento y de un movimiento pebbling, respectivamente.

Definición 2.2.8. Una *travesía* de un bosque de movimientos es un orden de los vértices interiores de modo que cada vértice interior precede a sus ancestros. Cada travesía $N = (n_1, n_2, \dots)$ de un bosque de movimientos corresponde a una sucesión de movimientos pebbling y apilamientos válidos $M = (m_1, m_2, \dots)$ en D , con $m_r = u_i \widehat{v_j} w_i$ si el vértice n_r , sus hijos izquierdo y derecho están etiquetados, respectivamente, w_i, u_i y v_j , y $m_r = u_i \widehat{u_j} w_i$ si el vértice n_r , sus hijos izquierdo y derecho están etiquetados, respectivamente, w_i, u_i y u_j .

Antes de demostrar la siguiente proposición, conviene observar un par de ejemplos de bosques de movimientos, ilustrados en la Figura 2.1

Proposición 2.2.9. *Dada una multi-distribución D , existe una biyección entre las sucesiones de movimientos pebbling y apilamientos válidos y las travesías de bosques de movimientos de D .*

Demostración. Sea M_a el conjunto de sucesiones de movimientos pebbling y apilamientos válidos sobre D , y sea T el conjunto de travesías de bosques de movimientos sobre D . Propondremos dos funciones, $\varphi : M_a \rightarrow T$ y $\psi : T \rightarrow M_a$, tales que $\varphi \circ \psi = Id = \psi \circ \varphi$. Primero, definamos $\varphi : M_a \rightarrow T$. Cada movimiento válido es de la forma $m_i = l_i \widehat{r_i} n_i$ de modo que l_i y r_i son hijos izquierdo (left) y derecho (right), respectivamente, de n_i . En particular, si nos fijamos en las etiquetas de los

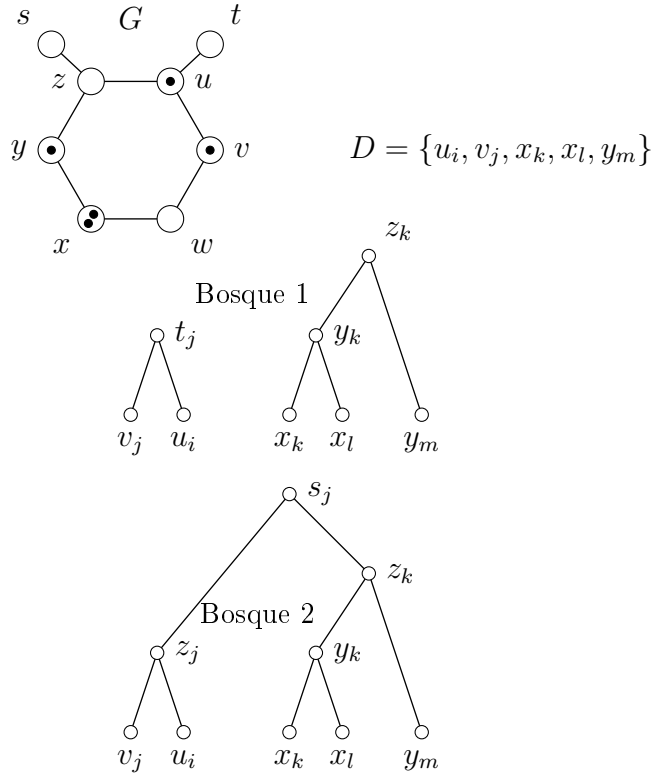


Figura 2.1: Dos ejemplos de bosques de movimientos para la gráfica G y la distribución D .

vértices y la numeración de las canicas, $m_{i_r} = u_{i_r} \widehat{v_{j_r}} w_{i_r}$ si es un apilamiento, o bien $m_{i_r} = u_{i_r} \widehat{u_{j_r}} w_{i_r}$ si se trata de un movimiento pebbling.

Definimos entonces $\hat{\varphi}(m_i) = n_i$. Dada $M \in M_a$, de la forma $M = (m_1, m_2, \dots)$, con cada $m_i = l_i \widehat{r_i} n_i$, definimos

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= (\hat{\varphi}(m_1), \hat{\varphi}(m_2), \dots) \\ &= (n_1, n_2, \dots). \end{aligned}$$

Veamos que $N = (n_1, n_2, \dots)$ es efectivamente una travesía de algún bosque de movimientos. Como n_i es el vértice objetivo de algún movimiento válido, a saber m_i , entonces es un vértice interior. Así pues, N es una sucesión de vértices interiores. Ahora necesitamos demostrar que cada vértice precede a sus antecesores. Para lograrlo, construyamos el bosque de movimientos a partir de M , de manera recursiva:

1. Primero, colocamos los vértices correspondientes a l_1, r_1 y n_1 , con sus etiquetas, y agregamos las aristas $n_1 l_1$ y $n_1 r_1$.
2. Una vez que se tienen los vértices l_i, r_i, n_i y las aristas $n_i l_i$ y $n_i r_i$, nos fijamos en $m_{i+1} = l_{i+1} \xrightarrow{r_{i+1}} n_{i+1}$. Si alguno de los vértices $l_{i+1}, r_{i+1}, n_{i+1}$ corresponde a un vértice u_j que no está todavía en el árbol, lo agregamos. Sean, sin pérdida de generalidad, $l_{i+1} = u_a, r_{i+1} = u_b, n_{i+1} = u_c$, entonces agregamos las aristas $u_a u_c$ y $u_b u_c$.

Así, por la construcción del bosque, cada n_i precede a sus antecesores, por lo que N es una travesía del bosque de movimientos que acaba de ser construido.

Ahora, sea n_i un vértice interior de un bosque de movimientos.

- Si n_i , su hijo izquierdo y su hijo derecho están etiquetados, respectivamente, como w_i, u_i, v_j , entonces consideramos el movimiento pebbling $m_i = u_i \xrightarrow{v_j} w_i$.
- Si n_i , su hijo izquierdo, su hijo derecho están etiquetados, respectivamente como w_i, u_i, u_j , entonces consideramos el apilamiento $m_i = u_i \xrightarrow{u_j} w_i$.

Y definimos $\hat{\psi}(n_i) = m_i$. De este modo, definimos la función $\psi : T \rightarrow M_a$ por

$$\begin{aligned} \psi(N) &= (\hat{\psi}(n_1), \hat{\psi}(n_2), \dots) \\ &= (m_1, m_2, \dots) \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(M) &= \psi(\varphi(M)) \\ &= \psi(\hat{\varphi}(m_1), \hat{\varphi}(m_2), \dots) \\ &= (\hat{\psi}(\hat{\varphi}(m_1)), \hat{\psi}(\hat{\varphi}(m_2)), \dots) \\ &= (m_1, m_2, \dots) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(N) &= \varphi(\psi(N)) \\ &= \varphi(\hat{\psi}(n_1), \hat{\psi}(n_2), \dots) \\ &= (\hat{\psi}(\hat{\psi}(n_1)), \hat{\psi}(\hat{\psi}(n_2)), \dots) \\ &= (n_1, n_2, \dots) \end{aligned}$$

lo que demuestra el resultado. ■

Teorema 2.2.10. *Sea D una distribución propia en una gráfica G . Entonces:*

$$\text{Reach}_a(D) = \text{Reach}(D).$$

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre $|D|$.

Base

Si $|D| = 1$, el único tipo de movimiento posible es remoción, el cual no nos permite llegar a otro vértice, por lo tanto $\text{Reach}_a(D) = \text{Reach}(D)$.

Hipótesis inductiva

Supongamos que toda distribución de tamaño menor que d cumple el teorema.

Paso inductivo

Sea D una distribución tal que $|D| = d$. Sea $t \in \text{Reach}_a(D) \setminus D$. Por la hipótesis inductiva, basta demostrar que existe un movimiento de damas válido m' tal que $t \in \text{Reach}_a(m'(D))$, pues $m'(D)$ es una distribución de tamaño $d - 1$, entonces $\text{Reach}_a(m'(D)) = \text{Reach}(m'(D))$. Así, una vez probado esto, tendremos que $t \in \text{Reach}(m'(D))$ y por lo tanto $t \in \text{Reach}(D)$.

Sea entonces M una sucesión de movimientos (apilamientos, remociones y pebbling) que coloca una canica en el vértice t . Si quitamos las remociones de M , tenemos una nueva sucesión de movimientos pebbling y apilamientos que sigue siendo válida, con la única diferencia de que algunos movimientos de damas dejarán de serlo y se convertirán en apilamientos. Entonces, supongamos que M no tiene remociones, sino únicamente pebbling y apilamientos. Sea F el bosque de movimientos correspondiente a M . Observemos que M tiene un vértice etiquetado t_a para algún $a \in \mathbb{Z}$. Ahora veamos que también podemos suponer que M no tiene movimientos pebbling. Para esto, supongamos que $m = u_i \xrightarrow{u_j} w_i$ es un movimiento pebbling de M . Sea n el vértice de F correspondiente a w_i . El hijo izquierdo de n está etiquetado u_i , y su hijo derecho tiene la etiqueta u_j . Como D es propia, u_i y u_j no son ambos hojas de F .

Caso 1 El hijo derecho de n no es una hoja.

Intercambiamos los subárboles izquierdo y derecho de n y cambiamos cada ocurrencia de i en las etiquetas de n y sus ancestros por j . Así, obtenemos un nuevo árbol que coloca una canica en t y en el que el hijo izquierdo de n no es una hoja, y nos encontramos en el Caso 2.

Caso 2 El hijo izquierdo de n no es una hoja.

Llamemos n' al hijo izquierdo de n .

- Si el hijo derecho de n' está etiquetado como v_k para algún $v \neq w$, reemplazamos el subárbol izquierdo de n por el subárbol derecho de n' , y cambiamos todas las ocurrencias de i en las etiquetas de n y sus ancestros por k .

- Si el hijo derecho de n' está etiquetado w_k , sustituimos n y su subárbol por el subárbol derecho de n' , y cambiamos las ocurrencias de i en las etiquetas de los ancestros de n en F por k .

En ambos casos, obtenemos un nuevo bosque \overline{F} que coloca una canica en t y que tiene menos movimientos pebbling que F , así que podemos hacer esto hasta eliminar todos los movimientos pebbling, y por lo tanto, podemos asumir que M no tiene movimientos pebbling.

Entonces, sea m el primer movimiento de M cuyo vértice final no está en D . Sea $m = u_i \xrightarrow{v_j} w_i$. Por la elección de m' , $u, v \in D$; esto implica que existen $u_k, v_l \in D$ y, como D es propia, entonces $u_k \xrightarrow{v_l} w_k$ es un movimiento de damas válido.

Demostraremos que $t \in Reach_a(m'(D))$, al construir un nuevo árbol F' con un nuevo vértice t_b para algún $b \in \mathbb{Z}$, y un vértice interior etiquetado w_k cuyos hijos izquierdo y derecho, etiquetados u_k y v_l respectivamente, son hojas.

Entonces, cualquier travesía de F' que empiece en w_k coloca una canica b en el vértice t , lo que demuestra que $t \in Reach_a(m'(D))$.

Sea n el vértice de F correspondiente a w_i . Sea A el subárbol izquierdo de n , sea B el subárbol derecho de n y sea C el conjunto de las hojas de F que no son hojas ni de A ni de B .

Entonces reemplazamos A por u_k y B por v_l . Con el fin de obtener un nuevo bosque de movimientos, debemos asegurarnos de que éste cumpla las propiedades (1), (2) y (3). Es por esta razón que en algunos casos, tendremos que volver a pegar A , B o ambos, en otro lugar del bosque, ya que, en particular, el bosque que obtengamos no puede tener dos hojas con la misma etiqueta.

Si $u_k \in C$, entonces u_k no es hoja ni de A ni de B , pues el bosque F cumple la propiedad (2). Así, sustituimos u_k por A . Si en A o en C hay una hoja v_l , entonces en B no hay hoja v_l , así que reemplazamos esta hoja por B .

Si $v_l \in C$, entonces v_l no es hoja de A ni de B . Entonces sustituimos $v_l \in C$ por B . Si en B o en C hay una hoja u_k , entonces en A no hay hoja u_k , por lo que podemos reemplazar esta por A .

Ahora tomamos cualquier travesía del bosque \overline{F} que acabamos de obtener. Recorriendo los vértices en orden, cambiamos el subíndice de la etiqueta de cada vértice, haciéndolo coincidir con el subíndice de su hijo izquierdo (en caso de que sean diferentes). Al bosque obtenido al terminar de reetiquetar todos los vértices lo llamamos F' . Afirmamos que F' es un bosque de movimientos. Es fácil ver que cumple con la propiedad (1). Como en su construcción evitamos la repetición de las hojas u_k y v_l , F' cumple la propiedad (2). Finalmente, al reetiquetar sus vértices, aseguramos que F' cumpliera la propiedad (3).

Además, el vértice t_a estaba en \overline{F} , así que también está en F' , tal vez reetiquetado como t_b , y F' contiene un vértice w_k cuyos hijos izquierdo y derecho son las hojas u_k y v_l respectivamente.

Así, toda travesía de F' que empiece en w muestra que $t \in Reach(m'(D))$, lo que prueba el teorema. ■

Capítulo 3

Movimientos de damas en trayectorias, en ciclos y en suma de gráficas

En este capítulo calcularemos el número de damas y el número de damas óptimo de algunas clases de gráficas. Recordemos que usamos K_n para referirnos a la gráfica completa de n vértices, P_n para hablar de la trayectoria de n vértices n , y C_n si hablamos de un ciclo de n vértices. Además, etiquetaremos los vértices de P_n y C_n con v_1, v_2, \dots, v_n de modo que v_i sea adyacente a v_{i+1} para todo $1 \leq i \leq n-1$, y que además en el caso de C_n , v_1 sea adyacente a v_n .

3.1. Gráficas completas

Proposición 3.1.1. $P(K_n) = p(K_n) = 2$ para todo $n \geq 2$.

Demostración. Es claro que si $n \geq 2$ necesitamos al menos dos canicas, pues de otro modo no habría movimientos posibles.

Ahora bien, sea D una distribución con dos canicas i y j . Como se trata de una gráfica completa, las dos canicas de D están en vértices adyacentes u, v , los cuales además, son adyacentes a cualquier vértice w que no está en D . Así, $m = u_i \widehat{v_j} w_i$ es un movimiento de damas válido para cualquier $w \notin \{u, v\}$. Esto implica que para todo vértice $w \in V(K_n)$, $w \in Reach(D)$. Por lo tanto, $Reach(D) = V(K_n)$, de lo que concluimos que $P(K_n) = p(K_n) = 2$. ■

3.2. Ciclos

Para empezar veamos qué pasa con el número de damas de ciclos cortos, de tres y cuatro vértices.

Proposición 3.2.1. $P(C_3) = 2$ y $P(C_4) = 3$.

Demostración. Veamos que en C_3 cualquier distribución con dos canicas nos permite alcanzar el vértice vacío. Sea D una distribución con dos canicas, i y j , sobre $V(C_3) = \{u, v, w\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que w es el vértice que quedó vacío. Como w es adyacente a u y a v , y éstos a su vez son adyacentes entre sí, entonces $m = u_i \widehat{v_j} w_i$ es un movimiento de damas válido que nos lleva a w . Así $P(C_3) \leq 2$. Además cualquier distribución con una sola canica deja dos vértices vacíos, y no permite ningún movimiento, haciendo imposible alcanzar a éstos. Por lo tanto $P(C_3) = 2$.

Sea D' una distribución con tres canicas sobre los vértices de C_4 . Notemos que las canicas están en vértices consecutivos, sin pérdida de generalidad supongamos que están en v_1, v_2 y v_3 . Entonces $m = v_2 \widehat{v_3} v_4$ es un movimiento de damas válido que demuestra que $v_4 \in Reach(D')$. Por lo tanto $Reach(D') = V(C_4)$, así que $P(C_4) \leq 3$. Por otra parte, la distribución $\tilde{D} = \{v_1, v_3\}$ no permite ningún movimiento, así que podemos concluir que $P(C_4) = 3$. ■

Teorema 3.2.2. Para $n \geq 5$, $P(C_n) = n - 2$

Demostración. En toda distribución sobre los vértices de C_n con $n - 2$ canicas, para cada uno de los dos vértices vacíos existe un par de vértices adyacentes que sí tienen canica, uno de los cuales es adyacente a uno de los vacíos. Esto nos permite llegar a cualquiera de los vértices vacíos mediante un sólo movimiento de damas, por lo que $P(C_n) \leq n - 2$.

Ahora bien, consideremos la distribución $D = \{v_2, v_3, \dots, v_{n-2}\}$ con $n - 3$ canicas. Supongamos que $v_n \in Reach(D)$ y sea M una sucesión de longitud mínima de movimientos de damas, tal que $v_n \in M(D)$. Por la elección de M , su último movimiento es el primero que coloca una canica en v_n . Por la simetría de C_n y de D , podemos suponer que este último movimiento es $v_{n-2} \widehat{v_{n-1}} v_n$, esto implica que no utilizamos la arista $v_n v_1$, entonces M es una sucesión de movimientos válida para la distribución $D' = \{v_2, v_3, \dots, v_{n-2}\}$ sobre los vértices de la trayectoria P_n , entonces $v_n \in Reach(D')$. Sin embargo,

$$wt_{v_n}(D') = \sum_{v \in D'} \sigma^{d(u, v_n)} = \sum_{v \in D'} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{d(u, v_n)} = \sum_{i=2}^{n-2} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=2}^{n-2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^i < \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^i - 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$$

Recordemos que la serie geométrica $\sum_{i=0}^{\infty} r^i$ converge a $\frac{1}{1-r}$, si $|r| < 1$. Entonces, como $|\frac{\sqrt{5}-1}{2}| < 1$, la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^i$ converge a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^i &= \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{\frac{2-\sqrt{5}-1}{2}} \\ &= \frac{2}{3-\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{3-\sqrt{5}} \times \left(\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{9-5} \\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la desigualdad, tenemos:

$$\begin{aligned} wt_{v_n}(D) &< \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ &= \frac{6+2\sqrt{5}-4-2\sqrt{5}+2}{4} \\ &= 4/4 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Entonces $wt_{v_n}(D) < 1$ lo que contradice el lema 2.1.6, por lo tanto, $Reach(D) \neq V(C_n)$. De aquí concluimos que $P(C_n) > n-3$. Así, $P(C_n) = n-2$. ■

Teorema 3.2.3. Para $n \geq 3$, se tiene $p(C_n) = \lceil n/2 \rceil$.

Demostración. Sea la distribución

$$D = \begin{cases} \{v_2\} \cup \{v_3, v_5, v_7, \dots, v_n\} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \{v_2\} \cup \{v_3, v_5, v_7, \dots, v_{n-1}\} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Así, los vértices vacíos son v_1 y los vértices v_i con i par y distinta de 2, veamos ahora que todos ellos son alcanzables desde D .

Notemos que el movimiento $v_3 \xrightarrow{v_2} v_1$ es válido sin importar la paridad de n , lo que nos permite llegar a v_1 . Además, si i es par, distinto de 2, la sucesión de movimientos $M = m_4 m_6 m_8 \dots m_i$ con $m_j = v_{j-2} \xrightarrow{v_{j-1}} v_j$ para todo $j \in \{4, 6, \dots, i\}$, es una sucesión de movimientos válidos tal que $v_i \in M(D)$. Entonces $\text{Reach}(D) = V(C_n)$, así que $p(C_n) \leq \lceil n/2 \rceil$.

Supongamos ahora que hay una distribución D' con $\lceil n/2 \rceil - 1$ canicas tal que $\text{Reach}(D') = V(C_n)$. Entonces D' alterna bloques de vértices con canicas con bloques de vértices vacíos.

Si D' tuviera un bloque de 3 o más vértices vacíos, por la simetría de C_n podemos suponer que D' está contenida en la distribución $\{v_2, v_3, \dots, v_{n-2}\}$ cuyo alcance no es $V(C_n)$, como vimos en la prueba del teorema anterior. Esto contradice nuestra elección de D , por la propiedad de Monotonía del alcance 2.1.8. Entonces en D' los vértices vacíos aparecen en bloques de a lo más dos.

Como D' tiene estrictamente más vértices vacíos que canicas, entonces tiene que haber más bloques de dos vértices vacíos que bloques de dos o más canicas. Además, D' debe tener al menos un bloque de dos o más canicas para poder hacer algún movimiento, entonces hay al menos dos bloques de dos vértices vacíos en D' .

Afirmamos que existen vértices vacíos u, v, w, x tales que u es adyacente a v , w es adyacente a x y las canicas de una de las componentes (G_1, G_2) de $C_n \setminus \{uv, wx\}$ aparecen sólo en bloques de una canica.

Si no fuera así, entonces entre cualesquiera dos bloques de dos vértices vacíos habría al menos un bloque de 2 o más canicas. En particular, esto sucedería para dos bloques consecutivos de dos vértices vacíos. Esto significa que por cada bloque de dos vértices vacíos hay un bloque de al menos 2 canicas. Además, por cada bloque de vértices vacíos hay un bloque de canicas, entonces, por cada vértice vacío que no esté en un bloque de dos, hay un bloque de al menos una canica. Así pues, habría más canicas que vértices vacíos, lo que no es posible, dado que D' tiene $\lceil n/2 \rceil - 1$ canicas.

Supongamos entonces, sin pérdida de generalidad, que la componente G_1 es aquélla que sólo tiene bloques de una canica, y supongamos que los vértices v y w pertenecen a ella. Entonces, en G_1 no podemos hacer movimientos hasta que, mediante movimientos de las canicas en $\hat{D} = D' \cap G_2$ se coloque una canica en v o en

w .

Sin embargo, $wt_v(\hat{D}) < 1$ y $wt_w(\hat{D}) < 1$, esto implica, por el Lema de monotonía del peso 2.1.6, que $v, w \notin \text{Reach}(\hat{D})$. Por lo tanto, v y w no están en el alcance de D' , lo que contradice su elección. ■

Proposición 3.2.4. *Si H es una subgráfica generadora de G , entonces $p(G) \leq p(H)$ y $P(G) \leq P(H)$*

Demostración. Dado que H es subgráfica generadora de G , $E(H) \subseteq E(G)$. Así pues, cualquier movimiento hecho en una distribución en H se puede hacer a partir de la misma distribución en G . De aquí se sigue que dada una distribución D , el alcance de D en H está contenido en el alcance de D en G .

Si D es una distribución con $P(H)$ canicas, por definición de $P(H)$, el alcance de D en H es $V(H)$, ahora bien, $V(H) = V(G)$, entonces, el alcance de D en G es $V(G)$. Por lo tanto, $P(G) \leq P(H)$.

Ahora, sea D' una distribución sobre los vértices de H con $p(H)$ canicas tal que su alcance sea $V(H)$, entonces el alcance de D' en G es $V(G)$, por lo que $p(G) \leq p(H)$. ■

3.3. Trayectorias

Pasemos ahora al estudio del número de damas y del número de damas óptimo de las trayectorias. Veamos primero qué pasa con el número de damas de trayectorias cortas:

Proposición 3.3.1. *Para $1 \leq n \leq 3$, $P(P_n) = n$.*

Demostración. Si $n = 1$ necesitamos una canica para poder alcanzar al único vértice de P_1 , así que $P(P_1) = 1$.

Si $n = 2$ hay una única distribución con dos canicas sobre los vértices de P_2 , que consiste justamente en colocar una canica en cada uno de sus vértices. Por otro lado, con una sola canica tendríamos un vértice vacío y no podríamos hacer ningún movimiento para alcanzarlo. Por lo tanto, $P(P_2) = 2$.

Finalmente en caso de que $n = 3$, notamos que la distribución $\{v_1, v_3\}$ no permite ningún movimiento, lo que nos impide alcanzar a v_2 que queda vacío. De aquí se sigue que $P(P_3) > 2$. La única distribución con tres canicas es $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ y claramente, $\text{Reach}(D) = V(P_3)$. ■

Ahora analicemos la situación de las trayectorias más largas:

Teorema 3.3.2. *Si $n \geq 4$, $P(P_n) = n - 1$.*

Demostración. Sea D una distribución sobre los vértices de P_n con $n - 1$ canicas. De este modo, sólo hay un vértice vacío v , que es adyacente a algún vértice u que no es extremo de P_n ; a su vez, u es adyacente a $w \neq v$, con $w \in D$. Así, pues, $w \xrightarrow{u} v$ es un movimiento de damas válido, lo que implica que $v \in Reach(D)$, es decir, $Reach(D) = V(P_n)$.

Por otra parte, $diam(P_n) = n - 1$, pues $d(v_1, v_n) = n - 1$, entonces por la propiedad 2.1.10 tenemos $P(P_n) \geq n - 1$. Así, podemos concluir que $P(P_n) = n - 1$. ■

Pasemos ahora al estudio del número de damas óptimo de P_n . Empecemos por el caso particular de las trayectorias de uno o dos vértices.

Proposición 3.3.3. *Si $n = 1, 2$, se tiene $p(P_n) = n$.*

Demostración. Si $n = 1$ es necesaria al menos una canica para alcanzar al único vértice; la distribución $D = \{v_1\}$ funciona, así que $p(P_1) = 1$.

Si $n = 2$ es claro que si tomamos una distribución con una sola canica no podemos llegar al vértice que queda vacío, pues no hay movimientos posibles. Además, la distribución $D' = \{v_1, v_2\}$ tiene alcance $V(P_2)$, por lo que $p(P_2) = 2$. ■

Y ahora veamos el caso general.

Teorema 3.3.4. *Si $n \geq 3$, entonces $p(P_n) = \lceil n/2 \rceil$.*

Demostración. Como P_n es subgráfica generadora de C_n , entonces la proposición 3.2.4 nos da que $\lceil n/2 \rceil = p(C_n) \leq p(P_n)$.

Ahora, consideremos la distribución

$$D = \begin{cases} \{v_2, v_3, v_5, \dots, v_n\} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \{v_2, v_3, v_5, \dots, v_{n-1}\} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Entonces $v_3 \xrightarrow{v_2} v_1$ es un movimiento válido en ambos casos, y la sucesión de movimientos

$$m = \begin{cases} m_4 m_6 \dots m_{i-1} & \text{si } i \text{ es impar} \\ m_4 m_6 \dots m_i & \text{si } i \text{ es par} \end{cases}$$

con $m_j = v_{j-2} \xrightarrow{v_{j-1}} v_j$ para todo $j \in \{4, 6, \dots\}$ es una sucesión de movimientos válidos. Esto prueba que $v_1, v_i \in Reach(D)$ para todo $i \in \{4, 6, \dots\}$, esto es $Reach(D) = V(P_n)$ y por lo tanto $p(P_n) = \lceil n/2 \rceil$. ■

3.4. Suma

Ahora calcularemos el número de damas y el número de damas óptimo de la suma de dos gráficas. Recordemos que la suma de dos gráficas G y H , denotada $G + H$, es la gráfica que tiene como conjunto de vértices a $V(G) \cup V(H)$ y cuyo conjunto de aristas es $E(G) \cup E(H) \cup \{(g, h) : g \in V(G), h \in V(H)\}$.

La siguiente observación nos será de utilidad para el próximo teorema.

Observación 3.4.1. Dadas dos gráficas G y H con al menos un vértice cada una, su suma, $G + H$, cumple que $\alpha(G + H) = \max\{\alpha(G), \alpha(H)\}$.

Demostración. Notemos que si un subconjunto de $V(G + H)$ tiene un vértice $v \in V(G)$ y un vértice $w \in V(H)$, entonces la arista $vw \in E(G + H)$, así que el conjunto no es independiente. Así, todo conjunto independiente de $G + H$ está contenido en G o en H , y además debe ser independiente en G o en H , respectivamente. De aquí se sigue que $\alpha(G + H) \leq \max\{\alpha(G), \alpha(H)\}$.

Por otro lado, supongamos sin pérdida de generalidad que $\max\{\alpha(G), \alpha(H)\} = \alpha(G)$. Tomemos entonces un conjunto I_G independiente en G . Como la definición de $G + H$ no agrega aristas entre vértices de G , I_G también es independiente en $G + H$. Por lo tanto, $\alpha(G + H) \geq \max\{\alpha(G), \alpha(H)\}$.

Entonces podemos concluir que $\alpha(G + H) = \max\{\alpha(G), \alpha(H)\}$. ■

Teorema 3.4.2. Dadas dos gráficas G y H , con al menos un vértice cada una, se tiene que:

$$\begin{aligned} p(G + H) &= 2, y \\ P(G + H) &= \alpha(G + H) + 1 \\ &= \max\{\alpha(G), \alpha(H)\} + 1. \end{aligned}$$

Demostración. Como G y H tienen al menos un vértice cada una, entonces $G + H$ tiene al menos dos vértices. Esto implica que cualquier distribución cuyo alcance sea $V(G + H)$ tendría al menos dos canicas, ya sea para cubrir a los dos vértices o para realizar algún movimiento para llegar a alguno de los vértices vacíos. Así pues $p(G + H) \geq 2$.

Ahora consideremos la distribución $D = \{v, w\}$ en $G + H$, con $v \in V(G)$ y $w \in V(H)$. Entonces, por la construcción de $G + H$, v y w son adyacentes en $G + H$. Sea $u \in V(G + H) \setminus \{v, w\}$.

Caso 1 Si $u \in V(G)$.

Entonces, por la definición de $G + H$, $uw \in E(G + H)$, por lo que $v \xrightarrow{w} u$ es un movimiento válido en $G + H$.

Caso 2 Si $u \in V(H)$.

Entonces, por la definición de $G + H$, $uv \in E(G + H)$, por lo que $w \xrightarrow{v} u$ es un movimiento válido en $G + H$.

Por lo tanto, $u \in Reach(D)$, es decir, $Reach(D) = V(G + H)$, de lo que concluimos que $p(G + H) = 2$.

Ahora sea $a = \alpha(G + H) = \max\{\alpha(G), \alpha(H)\}$. Si tomamos una distribución D con $|D| = a$, tal que D sea independiente en $G + H$, entonces no habría movimientos posibles, pero sí vértices vacíos (pues si D contiene un vértice de G , no puede tener vértices de H , y H no es vacía, y análogamente si D contiene un vértice de G). Así pues, $Reach(D) \neq V(G + H)$, de donde se sigue que $P(G + H) \geq a + 1$.

Sea entonces D' una distribución con $|D'| = a + 1$.

- (a) Si D' contiene tanto vértices de G como de H , se puede ver, con movimientos análogos a los que se realizaron para $p(G + H)$, que $Reach(D') = V(G + H)$, pues los movimientos realizados en la prueba son válidos para toda distribución con un vértice en G y uno en H .
- (b) Supongamos entonces que todos los vértices de D' están en $V(G)$ o bien en $V(H)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que están en $V(G)$.

Si $a = 1$, quiere decir que $\alpha(G) = 1 = \alpha(H)$, entonces G y H son gráficas completas, lo que a su vez implica que $G + H$ es completa. Además, si así fuera $|D'| = 2$, y ya sabemos que $P(K_n) = 2$ para todo $n \geq 2$. Así pues, $Reach(D') = V(G + H)$.

Si $a > 1$, entonces $|D'| \geq 3$ y $|D'| > \alpha(G)$, así que existen vértices de D' , u y v , adyacentes. Sea entonces $w \in V(H)$. Por la definición de $G + H$, $vw \in E(G + H)$, entonces $m = u \xrightarrow{v} w$ es un movimiento de damas válido. Entonces, en $m(D)$ hay un vértice, a saber w , en $V(H)$ y como $|D| \geq 3$ aún queda un vértice $x \in D'$ en $V(G)$. Así que, por (a), $Reach(m(D)) = V(G + H)$, lo que implica que $Reach(D) = V(G + H)$.

Así, $P(G + H) = \max\{\alpha(G), \alpha(H)\} + 1$. ■

Del teorema anterior se deriva el siguiente corolario acerca de gráficas multipartitas. Observemos primero que para toda gráfica multipartita G , su número de independencia α es igual a la cardinalidad del conjunto más grande de la partición de $V(G)$. Por otro lado, toda gráfica k -partita completa puede ser vista como la suma de un conjunto de vértices aislados y una gráfica $(k - 1)$ -partita completa, o bien, si $k = 2$, esto es, si G es bipartita, se puede ver como la suma de dos conjuntos de vértices aislados. Además, es claro que el número de independencia de un conjunto de vértices aislados es simplemente su cardinalidad, dado que él mismo es independiente.

Corolario 3.4.3. *Para toda gráfica G multipartita completa, $p(G) = 2$ y $P(G) = 1 + m$, donde m es el tamaño del conjunto más grande de la partición de $V(G)$.*

Demostración. Si vemos a G , una gráfica k -partita completa, como la suma de un conjunto de vértices aislados y una $(k - 1)$ -partita completa, o bien, como la suma de dos conjuntos de vértices aislados, el teorema anterior nos da el resultado. ■

Capítulo 4

Productos con gráficas completas

4.1. Preliminares

El producto cartesiano de dos gráficas G y H , denotado $G \times H$, tiene por conjunto de vértices a:

$$V(G \times H) = V(G) \times V(H) = \{(g, h) : g \in V(G), h \in V(H)\},$$

y además,

$$(g, h)(g', h') \in E(G \times H) \Leftrightarrow \begin{cases} g = g' \text{ y } hh' \in E(H), \text{ o} \\ h = h' \text{ y } gg' \in E(G). \end{cases}$$

Recordemos que el producto cartesiano $G \times H$ puede verse como $|H|$ copias de G con aristas adicionales entre distintas copias, que forman $|G|$ copias de H . Esto es, dejando fija la primera coordenada y variando la segunda se obtiene una copia de H , mientras que si se deja fija la segunda coordenada y se varía la primera se obtiene una copia de G .

Proposición 4.1.1. *Para cualesquiera n, m enteros positivos, con alguno de ellos distinto de 1,*

$$\begin{aligned} P(K_m \times K_n) &= \alpha(K_m \times K_n) + 1 \\ &= \text{mín}\{m, n\} + 1. \end{aligned}$$

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\text{mín}\{m, n\} = n$. Recordemos además, que por el lema 1.5.3 $\alpha(K_m \times K_n) = n$, esto implica que $P(K_m \times K_n) \geq$

$n + 1$, pues si consideramos la distribución D , con D un subconjunto de cardinalidad n independiente en $K_m \times K_n$, no podremos hacer ningún movimiento, y dado que $|V(G \times H)| = n \times m$, entonces hay vértices vacíos. De aquí se sigue que $Reach(D) \neq V(G \times H)$.

Entonces veamos que $P(K_m \times K_n) = n + 1$. Sea D una distribución con $|D| = n + 1$ en $K_m \times K_n$. Entonces hay una copia de K_m con al menos dos vértices de D . Sea $t \in (V(G \times H) \setminus D)$. Veamos que $t \in Reach(D)$. Sea A la copia de K_m que contiene a t .

(i) Si D tiene dos vértices, u, v , en A , entonces $u \widehat{v} t$ es un movimiento válido que prueba que $t \in Reach(D)$.

(ii) Si D tiene sólo un vértice u de A .

Sea B una copia de K_m en la que D tenga al menos dos vértices, v y w . Consideremos x el vértice en A que es adyacente a w , y el movimiento $v \widehat{w} x$ (que puede ser apilamiento, pues podría darse que $x = u$). Ahora, si $x \neq t$, realizamos el movimiento $u \widehat{x} t$ (que sería pebbling si $u = x$).

Por lo tanto, $t \in Reach_a(D) = Reach(D)$.

(iii) Si D no tiene vértices de A , tenemos dos casos:

- Hay dos copias de K_m , B_1 y B_2 con al menos dos vértices de D cada una. Sean $v, w \in V(B_1) \cap D$ y sea x el vértice de A adyacente a w , entonces el movimiento $v \widehat{w} x$ pone una canica en A y conserva a B_1 con al menos dos vértices de D , con lo que volvemos al caso (ii).
- Hay una copia de K_m , digamos B , con al menos tres vértices. Sea x el vértice de B adyacente a t , y sean $u, v, w \in V(B) \cap D$. Si u, v o w es x , entonces un movimiento coloca una canica en t . Si $u, v, w \neq x$, consideramos los movimientos $u \widehat{v} x$ y $w \widehat{x} t$, con lo que probamos que $t \in Reach(D)$.

Así pues, concluimos que $P(K_m \times K_n) = n + 1$ ■

4.2. Resultados principales

Proposición 4.2.1. *Para m y n enteros positivos, el número de damas óptimo de $K_m \times K_n$ es*

$$p(K_m \times K_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } mn = 1 \\ 2 & \text{si } mn > 1 \text{ y } \min\{m, n\} \leq 2 \\ 3 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\min\{m, n\} = n$.

- (a) Si $mn = 1$. Entonces $m = 1 = n$, y así $K_m \times K_n \cong K_1$ y $p(K_1) = 1$.
- (b) Si $mn > 1$ y $\min\{m, n\} \leq 2$. Tendremos entonces que $m > 1$ o $n > 1$ y $\min\{m, n\} = n \leq 2$.

- Si $n = 1$, tendremos que $K_m \times K_n \cong K_m$, por consiguiente, $p(K_m \times K_n) = p(K_m) = 2$.

- Si $n = 2$, una sola canica dejaría vértices vacíos y no permite ningún movimiento, por lo que $p(K_m \times K_n) \geq 2$.

Sean $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ los vértices de K_m y $\{u_1, u_2\}$ los de K_n . Sea D una distribución con $|D| = 2$ y tal que sus dos canicas están en la misma copia de K_n . Entonces $D = \{(v_i, u_1), (v_i, u_2)\}$ para algún $i \in \{1, \dots, m\}$.

Sea $t \in V(K_m \times K_n)$, $t \notin D$. Entonces $t = (v_j, u_k)$ con $j \neq i$, y

$k \in \{1, 2\}$. Si $k = 1$ entonces $(v_i, u_2) \xrightarrow{\quad} (v_i, u_1) \xrightarrow{\quad} (v_j, u_k)$ es un movimiento de damas válido que coloca una canica en t ; mientras que si $k = 2$,

$(v_i, u_1) \xrightarrow{\quad} (v_i, u_2) \xrightarrow{\quad} (v_j, u_k)$ lo es. Así, podemos concluir que $t \in \text{Reach}(D)$

- (c) Si $n \geq 3$, cualquier distribución con dos canicas deja vacíos a todos los vértices de una copia de K_m , a la que llamaremos $(K_m)_{u_i}$, y a los de una copia de K_n , digamos $(K_n)_{v_j}$, haciendo que el vértice $(v_j, u_i) \notin \text{Reach}(D)$. Por consiguiente, $p(K_m \times K_n) \geq 3$.

Consideremos entonces una distribución D con $|D| = 3$ y con canicas en los vértices (v_i, u_l) , (v_j, u_l) y (v_k, u_l) de una misma copia de K_m , a la que nos referiremos como $(K_m)_{u_l}$. Sea $t \in V(K_m \times K_n)$, y supongamos que $t \in (K_m)_{u_l}$. Entonces t es de la forma $t = (v_r, u_l)$, así que podemos alcanzar a t con el

movimiento $(v_i, u_l) \xrightarrow{\quad} (v_j, u_l) \xrightarrow{\quad} (v_r, u_l)$.

Ahora bien, si $t \notin V(K_m)_{u_l}$ pero es adyacente a (v_i, u_l) , (v_j, u_l) o (v_k, u_l) podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que es adyacente a (v_i, u_l) y que t es de la forma (v_i, u_s) . Entonces $(v_j, u_l) \xrightarrow{\quad} (v_i, u_l) \xrightarrow{\quad} (v_i, u_s)$ es un movimiento de damas válido que coloca una canica en t . Si no sucede ninguno de los casos anteriores, entonces t es de la forma (v_r, u_s) , y al realizar los movimientos $(v_i, u_l) \xrightarrow{\quad} (v_j, u_l) \xrightarrow{\quad} (v_r, u_l)$, $(v_k, u_l) \xrightarrow{\quad} (v_r, u_l) \xrightarrow{\quad} (v_r, u_s)$ se coloca una canica en el vértice t .

Por lo tanto, $p(K_m \times K_n) = 3$. ■

Supongamos ahora que tenemos cierto número de piedritas o guijarros (en inglés, pebbles) en cada vértice. Un movimiento pebbling consiste en quitar dos piedritas de un vértice y poner una en un vértice adyacente. El pebbling number $f(G)$ (respectivamente el 2-pebbling number, $f_2(G)$) de una gráfica G es el menor entero positivo m tal que para cualquier distribución con m piedritas y cualquier vértice t , existe una sucesión de movimientos pebbling que coloca una piedrita en t (respectivamente, dos piedritas en t). Si G es inconexa, $f(G)$ y f_2 son infinitos, por convención.

Observemos que $f(G) \geq |G|$, pues si consideramos la distribución con $|G| - 1$ guijarros, con a lo más un guijarro en cada vértice habría un vértice vacío, y no habría forma de hacer un movimiento pebbling para llegar a él.

A continuación veremos el resultado principal de esta sección, que nos da una cota del número de damas de una gráfica en función de su pebbling number.

Teorema 4.2.2. *Para cualquier gráfica G y cualquier entero positivo n , el número de damas de $G \times K_n$ satisface $P(G \times K_n) \leq f_2(G)$. Además, $P(G \times K_2) \leq \max\{f(G), |G| + 1\}$.*

Demostración. Si G es inconexa, $f_2(G)$ es infinito, sin embargo $P(G \times K_n) \leq |G \times K_n|$, que es finito, entonces $P(G \times K_n) \leq f_2(G)$. Además, en este caso $f(G)$ también es infinito, por lo que es claro que $P(G \times K_2) \leq \max\{f(G), |G| + 1\}$

Supongamos entonces que G es conexa. Sea v un vértice de G , denotaremos por K_{n_v} la copia de K_n obtenida al dejar fijo el vértice $v \in V(G)$ y recorrer los vértices de K_n . Recordemos que G_w denota la copia de G en $G \times K_n$ obtenida al dejar fijo $w \in V(K_n)$ y recorrer todos los vértices de G . Sea la proyección $\Pi : V(G \times K_n) \rightarrow V(G)$.

Sea D cualquier distribución con f_2 canicas sobre los vértices de $G \times K_n$. Sea $t \in V(G \times K_n)$ tal que $t \notin D$. Sea $u = \Pi(t)$ y consideremos a $\Pi(D)$ como una distribución de guijarros sobre G . Como en $\Pi(D)$ hay f_2 guijarros, por definición

existe una sucesión de movimientos pebbling en G que coloca un guijarro en u . Construyamos, a partir de ella, una sucesión de apilamientos y movimientos pebbling que coloque una canica en t , partiendo de la distribución D en $G \times K_n$.

Para esto, al movimiento pebbling que quita dos guijarros del vértice v de G y coloca uno en el vértice $w \in V(G)$ le asociamos un movimiento pebbling de un vértice de K_{n_v} a uno de K_{n_w} si la imagen inversa $\Pi^{-1}[\{v\}]$ es única, y un apilamiento que va de dos vértices de K_{n_v} hacia un vértice de K_{n_w} si no lo es. Mediante esta sucesión de movimientos, colocaremos dos canicas en K_{n_u} . Si éstas están en el mismo vértice x de K_{n_u} , hacemos un movimiento pebbling de x a t . En cambio, si las dos canicas están en vértices distintos de K_{n_u} , podemos llegar a t mediante un apilamiento. Por lo tanto, $t \in Reach_a(D)$, de donde se sigue que $t \in Reach(D)$. Así, pues, concluimos que $P(G \times K_n) \leq f_2(G)$.

Ahora, sea $p = \max\{f(G), |G| + 1\}$. Consideremos una distribución (propia) D sobre $G \times K_2$ con p canicas. Sea $t \in V(G \times K_2)$ tal que $t \notin D$. Sean v_1 y v_2 los vértices de K_2 . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $t \in V(G_{v_1})$. Consideremos a $\Pi(D)$ como una distribución de guijarros en G , y sea $u = \Pi(t)$.

Caso 1 K_{2_u} no tiene guijarros.

Como $|\Pi(D)| = |D| = p$ y $p \geq f(G)$, podemos llegar a $u \in V(G)$ a partir de $\Pi(D)$ mediante movimientos pebbling en G .

Asociando a cada uno de estos movimientos el correspondiente pebbling o apilamiento en $G \times K_2$, como hicimos anteriormente en esta demostración, podemos poner una canica en K_{2_u} partiendo de D . Además, haremos que el objetivo de cada uno de estos movimientos esté en G_{v_1} , la copia de G que contiene a t , esto es posible pues como partimos de una distribución propia en $G \times K_2$, podemos apilar canicas únicamente en vértices de G_{v_1} , así que no haremos pebbling a partir de dos vértices de G_{v_2} . Entonces, el último movimiento coloca una canica en t .

Caso 2 Hay una canica en K_{2_u} (que tiene que estar en x , el vértice de K_{2_u} distinto de t).

Como $|\Pi(D)| = p \geq |G| + 1$, en G hay al menos un vértice con dos canicas. Consideremos k , el vértice con dos canicas más cercano a u . Notemos que $u \neq k$.

Sea $T = (k = x_0, x_1, \dots, x_n = u)$ una trayectoria de longitud mínima de k a u en G . Observemos que en x_1, \dots, x_{n-1} hay a lo más un guijarro en cada uno.

- (a) Si x_1, \dots, x_{n-1} tienen exactamente un guijarro cada uno, entonces hacemos la sucesión de movimientos m_1, \dots, m_n , donde el movimiento m_i quita

dos guijarros del vértice x_{i-1} y coloca uno en el vértice i . Así, cualquier sucesión de movimientos correspondientes a los m'_i s en $G \times K_2$ coloca un guijarro en un vértice de K_{2u} . Si este no es t , entonces tendremos dos guijarros en x , y podemos hacer un pebbling para llegar a t .

- (b) Si algún x_j no tiene guijarros, consideramos el x_j sin guijarros con el mayor índice, es decir, más cercano a u . Como $|\Pi(D)| = p \geq f(G)$, es posible, mediante una sucesión de movimientos pebbling, poner un guijarro en x_j . Si en alguno de los movimientos pebbling de esta sucesión interviniera un vértice x_i con $n \geq i > j$, entonces, antes de ese movimiento se hizo uno que colocó un segundo guijarro en x_i , pues por la elección de x_j , en cada uno de los vértices $x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n$ hay exactamente un guijarro. Por esta misma razón, ninguno de ellos interviene para colocar la segunda piedrita en x_j . Así, en algún momento tendremos dos guijarros en x_j y uno en x_{j+1}, \dots, x_n , con lo que regresamos a (a).

Supongamos entonces que los vértices x_{j+1}, \dots, x_n no intervienen para poner el segundo guijarro en x_j . Consideramos la sucesión de movimientos pebbling y apilamientos correspondientes en $g \times K_2$ que coloque una canica en el vértice y de K_{2j} adyacente al vértice v_2 de K_{2j+1} que contiene una canica. Entonces podemos hacer el movimiento de damas $y \xrightarrow{z} w$ con $w \in V(K_{j+2})$ o $w = t$ si $z = x$. Tomando la proyección de la distribución así obtenida, tendremos dos guijarros en x_{j+2} y uno en x_{j+3}, \dots, x_n , con lo que volvemos al caso (a).

Así, en cualquier caso podemos poner una canica en t mediante movimientos pebbling y apilamientos a partir de D , entonces $t \in Reach_a(D)$, lo que implica que $t \in Reach(D)$. Podemos así concluir que $P(G \times K_2) \leq p$. ■

Capítulo 5

Hipercubos

5.1. Preliminares

Definición 5.1.1. Para cada entero positivo n , Q_n es el hipercubo definido por

$$\begin{cases} Q_1 = K_2 \\ Q_n = Q_{n-1} \times K_2 \end{cases}$$

Conviene etiquetar los vértices de K_2 con 0 y 1, y etiquetar los vértices de Q_n con su correspondiente n -ada. Así, dos vértices de Q_n serán adyacentes si y sólo si difieren exactamente en una coordenada.

Un resultado obtenido por Fan Chung [6] dice que el pebbling number de Q_n es 2^n . Usaremos esto y el teorema 4.2.2, para calcular el número de damas de los hipercubos.

Teorema 5.1.2. *Para todo n entero positivo, $P(Q_n) = 2^{n-1} + 1$*

Demostración. Tenemos, por definición, que $Q_n = Q_{n-1} \times K_2$. Y según el resultado de Fan Chung citado previamente, $f(Q_{n-1}) = 2^{n-1} = |V(Q_{n-1})|$. Entonces, del teorema 4.2.2 se sigue que $P(Q_n) \leq 2^{n-1} + 1$.

Por otro lado, si dos vértices u, w son adyacentes en Q_n , entonces la suma de las coordenadas de u difiere en uno de la suma de las coordenadas de w , pues sus coordenadas difieren exactamente en una entrada, que sólo puede ser 0 ó 1.

Entonces, si consideramos el conjunto de vértices de Q_n tales que la suma de sus coordenadas sea par, este sería un conjunto independiente con 2^{n-1} vértices, lo cual implica que $P(Q_n) > 2^{n-1}$. Por lo tanto, $P(Q_n) = 2^{n-1} + 1$. ■

Lema 5.1.3. *Dadas dos distribuciones D y E en gráficas G y H respectivamente, se tiene que:*

$$\text{Reach}(D) \times \text{Reach}(E) \subseteq \text{Reach}(D \times E),$$

donde $D \times E$ es tomada como una distribución sobre los vértices de $G \times H$.

Demostración. Sean $u \in \text{Reach}(D)$ y $w \in \text{Reach}(E)$. Queremos demostrar que $(u, w) \in \text{Reach}(D \times E)$. Para cada $v \in E$, repetimos en $G \times \{v\}$, usando $D \times \{v\}$, los movimientos hechos en G a partir de D para poner una canica en u . De esta forma, ponemos una canica en (u, v) . Entonces todos los vértices de $\{u\} \times E$ tienen canica, así que repetimos en $\{u\} \times H$ los movimientos hechos en H a partir de E para poner una canica en w , con lo que tendremos una canica en (u, w) . ■

Corolario 5.1.4. *Para cualesquiera dos gráficas G, H :*

$$p(G \times H) \leq p(G)p(H).$$

Demostración. Consideremos una distribución D sobre los vértices de G con $p(G)$ canicas, y tal que $\text{Reach}(D) = V(G)$, y sea E una distribución sobre H con $p(H)$ canicas, tal que $\text{Reach}(E) = V(H)$.

Entonces, por el lema anterior, tenemos que $\text{Reach}(D) \times \text{Reach}(E) \subseteq \text{Reach}(D \times E)$. De aquí se sigue que $V(G) \times V(H) \subseteq \text{Reach}(D \times E)$. A su vez, como $D \times E$ es una distribución sobre los vértices de $G \times H$, tenemos $\text{Reach}(D \times E) \subseteq V(G \times H) = V(G) \times V(H)$. Por lo tanto, $\text{Reach}(D \times E) = V(G) \times V(H) = V(G \times H)$, de donde se concluye que $p(G \times H) \leq |D \times E| = p(G)p(H)$. ■

Lema 5.1.5. *Dado $n \in \mathbb{N}$, cualesquiera dos vértices de Q_n están a distancia k si y sólo si sus coordenadas difieren exactamente en k entradas.*

Demostración. Base $k = 1$.

Por la forma en que asignamos las coordenadas a cada vértice, sabemos que dos de ellos están a distancia 1 (es decir, son adyacentes) si y sólo si sus coordenadas difieren exactamente en una entrada.

Hipótesis Inductiva

Supongamos que para todo $l \leq k$ cualesquiera dos vértices de Q_n están a distancia l si y sólo si sus coordenadas difieren en exactamente l entradas.

Paso Inductivo

Para demostrar una de las implicaciones, sean $u, v \in V(Q_n)$ tales que $d(u, v) = k+1$. Queremos demostrar que sus coordenadas difieren en exactamente $k+1$ entradas.

Como $d(u, v) = k + 1$, entonces existe $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_k, u_{k+1} = v)$ una uv -trayectoria de longitud $k + 1$.

Fijémonos en $u = u_0$ y u_k , como existe la uu_k -trayectoria $(u = u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k)$, podemos afirmar que $d(u, u_k) \leq k$. Además, si $d(u, u_k) < k$, existiría T' , una uu_k -trayectoria de longitud estrictamente menor que k , en cuyo caso $T' \cup (u_k, u_{k+1} = v)$ sería una uv -trayectoria de longitud estrictamente menor que $k + 1$, contradiciendo el hecho de que $d(u, v) = k + 1$, entonces $d(u, u_k) \geq k$, de donde se sigue que $d(u, u_k) = k$. Entonces, por hipótesis inductiva, las coordenadas de u y u_k difieren en exactamente k entradas. Como $d(u_k, v) = 1$, entonces por la definición de Q_n sus coordenadas difieren en exactamente una entrada. Además, en esta entrada difieren también las coordenadas de u y v , pues de otro modo sus coordenadas diferirían únicamente en $k - 1$ entradas, lo que, por hipótesis inductiva implicaría que $d(u, v) = k - 1$, contradiciendo la elección de u y v . Así pues, las coordenadas de u y v difieren en exactamente $k + 1$ entradas.

Para la implicación restante, tomemos $x, y \in V(Q_n)$ de modo que sus coordenadas difieran en exactamente $k + 1$ entradas. Sea i una de estas entradas. Sea $z \in V(Q_n)$ el vértice cuyas coordenadas difieren de las de y únicamente en la entrada i . Entonces, las coordenadas de z difieren de las de x en exactamente k entradas, de donde la hipótesis inductiva nos permite deducir que $d(x, z) = k$. De aquí se sigue que existe una xz -trayectoria T de longitud k . Entonces, $T \cup (z, y)$ es una xy -trayectoria de longitud $k + 1$, veamos que es de longitud mínima. Supongamos que existe T' una xy -trayectoria de longitud estrictamente menor que k , es decir, que $d(x, y) < k$. Entonces, por hipótesis de inducción, tendríamos que las coordenadas de x difieren de las de y en menos de k entradas, contradiciendo la elección de x y y . ■

Lema 5.1.6. *Para cualquier vértice $v \in V(Q_n)$ existen exactamente $\binom{n}{i}$ vértices de Q_n a distancia i de v para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Además, el diámetro de Q_n es n .*

Demostración. Sea v un vértice de Q_n . Por el lema anterior, sabemos que los vértices a distancia i de v son aquellos cuyas coordenadas difieren de las de v en exactamente i entradas. Ahora bien, las coordenadas de los vértices de Q_n son las n -adas ordenadas de ceros y unos, así pues, hay $\binom{n}{i}$ formas de elegir las i entradas en las que difieren, y cada una de estas determina un vértice a distancia i de v . Esto es, hay $\binom{n}{i}$ vértices a distancia i de v .

Por otro lado, es claro que las coordenadas de un vértice de Q_n pueden diferir de las de v en n entradas, es decir, en todas, y no en más. El vértice determinado por estas coordenadas está a distancia n de v , entonces el diámetro de Q_n es n . ■

5.2. Resultado principal

Teorema 5.2.1. *Para todo entero positivo n*

$$(\sqrt{5} - 1)^n \leq p(Q_n) \leq (2n)^{\frac{3}{2}}(\sqrt{5} - 1)^n$$

Demostración. Para la cota inferior, consideramos una distribución D sobre Q_n , tal que $\text{Reach}(D) = V(Q_n)$. Por el lema 2.1.6, tenemos que $wt_t(D) \geq 1$ para todo $t \in V(Q_n)$. Entonces, al sumar los pesos de D respecto a los 2^n vértices de Q_n obtenemos:

$$\begin{aligned} 2^n \leq \sum_{t \in V(Q_n)} wt_t(D) &= \sum_{t \in V(Q_n)} \sum_{v \in D} \sigma^{d(v,t)} \\ &= \sum_{t \in V(Q_n)} \sum_{v \in D} wt_t(v) \\ &= \sum_{v \in D} \sum_{t \in V(Q_n)} wt_t(v) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Así, cada vértice v de la distribución contribuye a la suma en:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in V(Q_n)} wt_t(v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{t \in V(Q_n) \\ d(v,t)=i}} wt_t(v) \quad , \text{ pues } \text{diam}(Q_n) = n. \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{t \in V(Q_n) \\ d(v,t)=i}} \sigma^i \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sigma^i \quad , \text{ por el lema anterior} \\ &= (1 + \sigma)^n \quad , \text{ por el teorema del binomio} \\ &= \left(1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \Phi^n. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la desigualdad (5.1), obtenemos que $2^n \leq |D|\Phi^n$, lo que implica que:

$$\begin{aligned} |D| &\geq \left(\frac{2}{\Phi}\right)^n = \left(\frac{2}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}\right)^n \\ &= \left(\frac{4}{\sqrt{5}+1} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}\right)\right)^n \\ &= \left(\frac{4(\sqrt{5}-1)}{5-1}\right)^n \\ &= (\sqrt{5}-1)^n \end{aligned}$$

con lo que obtenemos la cota inferior.

La demostración de la cota superior usa una técnica no constructiva, por lo que la omitiremos, pero puede ser consultada en [1]. ■

Capítulo 6

Gráficas de diámetro vértice-arista pequeño

6.1. Preliminares

Definición 6.1.1. La distancia entre un vértice v y una arista $e = (x, y)$ de una gráfica, es el mínimo de las distancias entre v y los extremos de e , es decir,

$$d(v, e) = \min\{d(v, x), d(v, y)\}$$

Definición 6.1.2. El diámetro vértice-arista de una gráfica G (no vacía), es el máximo de las distancias entre un vértice y una arista de G , y se denota por $d_{ve}(G)$.

Proposición 6.1.3. Sea G una gráfica no vacía con $d_{ve} \leq 1$. Entonces:

(i) $p(G) = 2$,

(ii) $P(G) = \alpha(G) + 1$.

Demostración. (i) Sea D la distribución obtenida al colocar dos canicas en vértices adyacentes u, v . Si $e = (u, v)$, entonces, para cualquier otro vértice t , se tiene que $0 < d(t, e) \leq d_{ve}(G) \leq 1$. Sabemos que $d(t, e) = \min\{d(t, u), d(t, v)\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $d(t, e) = d(t, u)$, esto implica que $d(t, u) \leq 1$. Como $t \neq u$, entonces $d(t, u) > 0$, por lo que $d(t, u) = 1$, es decir, existe la arista $e_1 = (t, u) \in E(G)$. Por lo tanto, $v \xrightarrow{u} t$ coloca una canica en t , lo que implica que $p(G) \leq 2$. Por otro lado, como G es no vacía, existe $e = (x, y) \in E(G)$, por lo que G tiene al menos dos vértices. Si colocamos una canica en cualquiera de los vértices de G no hay movimientos posibles para llegar a los otros vértices. Así pues, concluimos que $p(G) = 2$.

- (ii) Ahora bien, $P(G) > \alpha(G)$, pues si $|D| = \alpha(G)$ y D es un conjunto independiente en G , entonces no hay movimientos posibles. Como G es no vacía, existe $e = (x, y) \in E(G)$. Al ser D independiente, x o y no están en D , esto es, hay al menos un vértice vacío, y éste no está en el alcance de D .

Sea entonces D' una distribución con $\alpha(G) + 1$ canicas. Entonces en D' hay dos vértices adyacentes, u, v , lo que implica que la distribución D usada en (i) está contenida en D' . Por el lema de Monotonía del alcance 2.1.8, tenemos que $Reach(D) \subseteq Reach(D')$, de donde se sigue que $Reach(D') = V(G)$. Por lo tanto, $P(G) = \alpha(G) + 1$. ■

Proposición 6.1.4. *Sea G una gráfica de orden al menos 2 y radio 1. Entonces,*

(i) $p(G) = 2$,

(ii) $P(G) = \alpha(G) + 1$.

Demostración. (i) Como G tiene al menos dos vértices y su radio es 1, entonces existe $u \in V(G)$ tal que es adyacente a todos los demás vértices de G . Además, poner sólo una canica deja al menos un vértice vacío y no permite movimientos, así que $p(G) \geq 2$.

Sea entonces $D = \{u, z\}$ una distribución sobre los vértices de G . Si existiera un vértice $t \in V(G)$ tal que $t \notin D$, entonces $(u, t) \in E(G)$, por lo que $m = z \xrightarrow{u} t$ es un movimiento de damas válido que demuestra que $Reach(D) = V(G)$. Por lo tanto, $p(G) = 2$.

- (ii) Si G fuera una gráfica completa, tendríamos que $P(G) = 2 = \alpha(G) + 1$. Supongamos entonces que G no es completa, es decir, que $\alpha(G) \geq 2$. Sea D' una distribución con $\alpha(G) + 1$ canicas. Así, tenemos que D' pone canica en dos vértices adyacentes, digamos x y y , unidos por la arista e .

- (a) Si $u \notin D'$. Como u es adyacente a x y a y , $u \in Reach(D')$, pues se alcanza con un sólo movimiento de damas $m = x \xrightarrow{y} u$. Así, obtenemos $m(D')$, una distribución con $\alpha(G) \geq 2$ canicas, una de ellas en u , y otra en z , otro vértice de la gráfica. Así pues, $D = \{u, z\} \subseteq m(D')$, y por el lema de Monotonía del alcance 2.1.8, tenemos que $Reach(D) \subseteq Reach(m(D')) \subseteq V(G)$, y dado que $Reach(D) = V(G)$, podemos concluir que $Reach(m(D')) = Reach(D') = V(G)$.

- (b) Si $u \in D'$. En este caso podemos alcanzar a t en un solo movimiento, a saber $x \xrightarrow{u} t$

■

Proposición 6.1.5. *Sea G una gráfica. Si $d_{ve} = 2$ entonces $p(G) \leq 4$.*

Demostración. Sea G una gráfica con $d_{ve} = 2$. Entonces, es claro que G es conexa, pues de no serlo, la distancia entre un vértice y una arista de distintas componentes conexas sería infinita. En particular, G no tiene vértices aislados. Por la elección de G existen un vértice u y una arista e tales que $d(u, e) = 2$. De aquí se sigue que existen dos aristas ajenas (u, v) y $(w, x) = e$. Consideremos la distribución $D = \{u, v, w, x\}$. Sea t un vértice tal que $t \notin D$.

Si t es adyacente a u, v, w o x , entonces t se alcanza en un movimiento. Supongamos entonces que t no es adyacente a u, v, w, x .

Sea $e_1 = (u, v)$. Sabemos que $d(t, e_1) \leq d_{ve}(G) = 2$, y como t no es adyacente a u ni a v , $d(t, e_1) = 2$. Se sigue que existe un vértice y , vecino de t , que también es vecino de u o de v . Supongamos sin pérdida de generalidad que $y \in N(t) \cup N(u)$.

(a) Si y es adyacente a w o a x .

Supondremos sin pérdida de generalidad que $(y, w) \in E(G)$. Entonces la sucesión de movimientos $m_1 = v \xrightarrow{u} y$ $m_2 = w \xrightarrow{y} t$ coloca una canica en t , por lo que $t \in Reach(D)$.

(b) Si y no es adyacente ni a w ni a x .

Entonces existe, sin pérdida de generalidad, un vértice $z \in N(y) \cup N(w)$, en cuyo caso, la sucesión de movimientos $m_1 = v \xrightarrow{u} y$, $m_2 = x \xrightarrow{w} z$, $m_3 = z \xrightarrow{y} t$ coloca una canica en t , lo que demuestra que $t \in Reach(D)$.

Por lo tanto, $Reach(D) = V(G)$. Así pues, podemos concluir que $p(G) \leq 4$.

■

Además, la cota dada por la proposición anterior no puede ser mejorada. Para demostrar esto, nos serviremos de la gráfica de la Figura 6.1, que tiene $d_{ve} = 2$, pero número de damas óptimo 4. Esto se tiene porque la distribución que contiene a los vértices en negro de la Figura 6.1 tiene alcance $V(G)$. Sin embargo, ninguna distribución con tres canicas tiene alcance $V(G)$. A continuación damos la demostración de esta última afirmación, pero antes haremos un cálculo que nos será de gran utilidad durante la prueba.

Observación 6.1.6. $\sigma^2 + 2\sigma^3 < 1$.

Demostración. Recordemos que el valor de σ es $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Así, después de sustituir este valor y desarrollar las potencias, obtenemos:

$$\sigma^2 + 2\sigma^3 = \frac{3\sqrt{5}-5}{2} \approx 0,85 < 1.$$

■

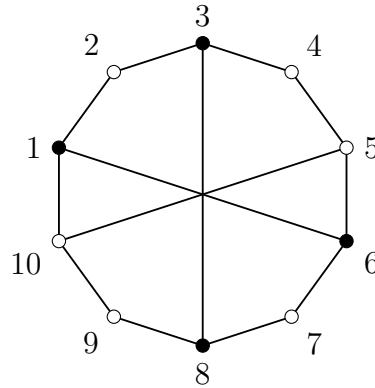


Figura 6.1: Gráfica con diámetro vértice-arista 2. La distribución dada por los cuatro vértices en negro permite alcanzar cualquier vértice de la gráfica, por lo que el número de damas óptimo es a lo más 4.

Verifiquemos que, efectivamente, con 3 canicas no se pueden alcanzar todos los vértices de la gráfica propuesta:

Demostración. Para empezar, notemos que dada una distribución de tres canicas, si no hay dos de ellas en vértices adyacentes, no podemos hacer ningún movimiento para alcanzar alguno de los vértices vacíos. Así pues, nos concentraremos únicamente en las distribuciones con al menos 2 canicas en vértices adyacentes. Veamos entonces, los casos posibles, salvo simetrías.

En cada caso encontramos distintos subcasos, cada uno de los cuales representamos mediante una figura para facilitar la comprensión. En cada representación de la gráfica sobre la que trabajamos, representamos la distribución D correspondiente mediante vértices coloreados en negro. Además, en muchos de los casos, nos serviremos del lema de Monotonía del peso 2.1.6. Para ello, calcularemos el peso de la distribución D con respecto al vértice t , que será aquél representado en la figura correspondiente por un rombo.

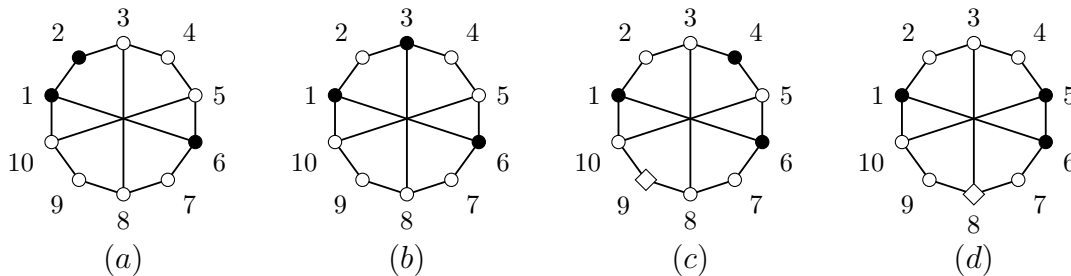


Figura 6.2: Caso A

Caso A(Figura 6.2)

Para este caso dejaremos fijos dentro de la distribución a los extremos de la arista 1,6. Para obtener los diferentes subcasos, recorreremos el resto de los vértices, seleccionando uno a la vez.

Caso A.(a) Notemos que en un solo movimiento de damas, podemos alcanzar a los vértices 3, 5, 7 y 10. Sin embargo, no hay segundo movimiento posible, por lo que no es posible alcanzar los vértices 4 y 9.

Caso A.(b) En un primer movimiento podemos alcanzar los vértices 2, 5, 7 y 10. Para poder hacer un segundo movimiento tenemos que llegar al vértice 2 en el primer movimiento. Sin embargo, este segundo movimiento nos permite alcanzar únicamente los vértices 4, 8 y 1 (pero este pertenecía a la distribución inicial). Así pues, no habiendo más movimientos posibles, queda fuera del alcance de nuestra distribución el vértice 9.

Casos A.(c) y A.(d) Si calculamos el peso de la distribución D respecto al vértice t obtenemos $wt_t D = \sigma^2 + 2\sigma^3 < 1$, por lo que, según el lema 2.1.6 $t \notin \text{Reach}(D)$.

Caso B(Figura 6.3)

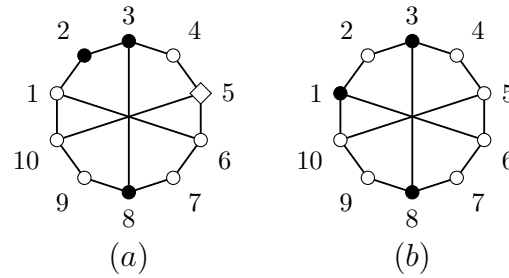
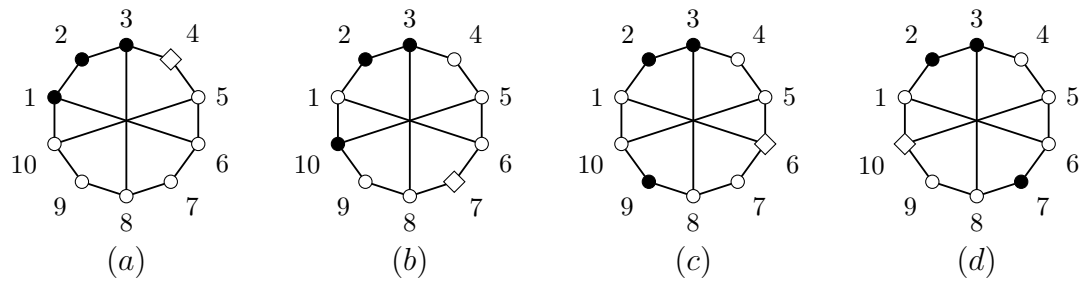
En este caso los vértices 3 y 8 estarán siempre en la distribución D .

Caso B.(a) De nuevo calculamos el peso de D respecto a t : $wt_t D = \sigma^2 + 2\sigma^3 < 1$, por lo que $t \notin \text{Reach}(D)$.

Caso B.(b) Con sólo un movimiento de damas podemos alcanzar los vértices 2, 4, 7 y 8. Sin embargo, sólo si nos movemos al vértice 2 podremos hacer un segundo movimiento, con el que alcanzaremos además al vértice 10. Aún así, no podemos alcanzar los vértices 5 y 6, pues ya no hay movimientos posibles.

Caso C(Figura 6.4)

Esta vez fijamos los vértices 2 y 3 como parte de la distribución.

Figura 6.3: Caso *B*

Casos C.(a)(b)(c)(d)(e)(f) Calculamos el peso de D respecto a t , $wt_t D = \sigma^2 + 2\sigma^3 < 1$, por lo que, según el lema 2.1.6, $t \notin \text{Reach}(D)$.

Caso C.(g) Con un primer movimiento podemos alcanzar los vértices 1, 4 y 8, pero sólo el llegar a 4 nos permite un segundo movimiento, con el que alcanzaremos también 6 y 10. Sin embargo, ya no quedan movimientos posibles, entonces 7 y 9 $\notin \text{Reach}(D)$.

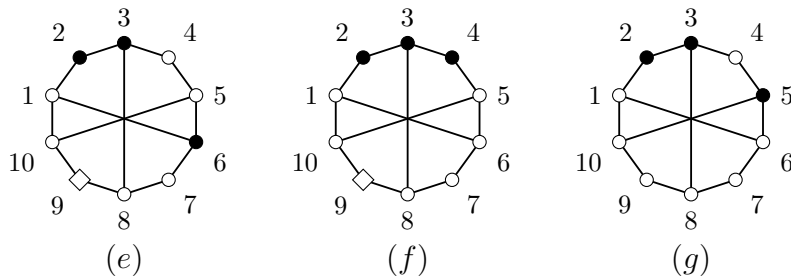
Caso D(Figura 6.5)

Dejamos los vértices 1 y 2 en la distribución D . En cada uno de los subcasos calculamos el peso de D respecto a t y obtenemos: $wt_t D = \sigma^2 + 2\sigma^3 < 1$, por lo que $t \notin \text{Reach}(D)$.

Caso E(Figura 6.6)

En este caso los vértices 1 y 10 formarán parte de la distribución.

Caso E.(a) Realizando un solo movimiento podemos alcanzar a los vértices 2, 5, 6 y 9. Para poder realizar un segundo movimiento necesitamos mover una canica a un vértice adyacente a 8. Esto se logra al mover una canica al vértice 9. Después, los movimientos posibles nos permiten alcanzar tanto 3 como 7, sin embargo, ya no hay más movimientos posibles, por lo que $4 \notin \text{Reach}(D)$.

Figura 6.4: Caso C

Caso E.(b) Una vez más, nos apoyaremos en el lema 2.1.6, pues $wt_t D = \sigma^2 + 2\sigma^3 < 1$, por lo que podemos concluir que $t \notin \text{Reach}(D)$.

Así pues, queda terminada la demostración, con lo que aseguramos que $p(G) > 3$.

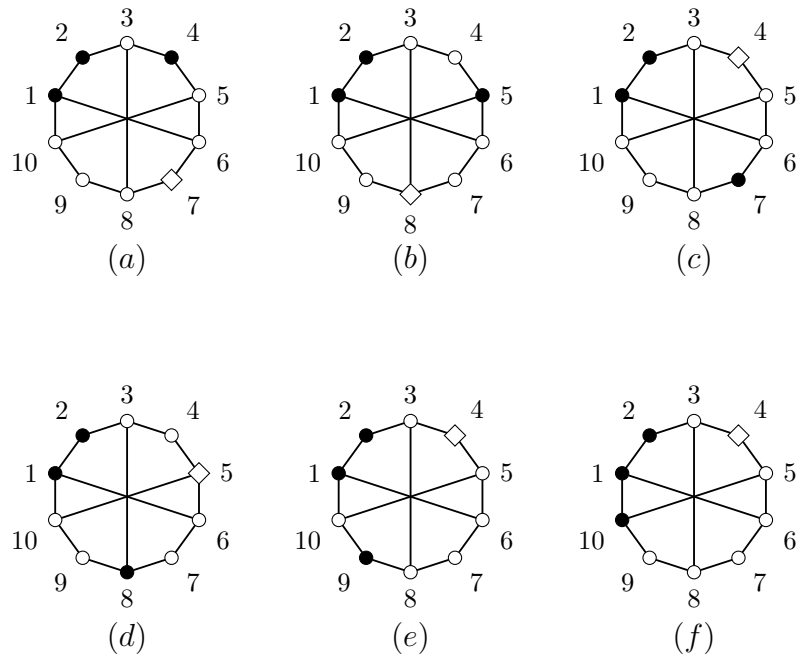
■

Por otra parte, al parecer, con $d = 2$ y $p(G) = 4$ no hay ejemplo simple. Sin embargo, tenemos la gráfica de Hoffman-Singleton, que es la única gráfica (salvo isomorfismos) 7-regular, de orden 50, con diámetro 2 y cuello 5.

Observemos que en esta gráfica cualquier par de vértices no adyacentes tienen exactamente un vecino en común. La existencia de éste surge de que $d(G) = 2$, entonces, si u y v no son adyacentes, $d(u, v) = 2$, entonces hay una uv -trayectoria de la forma (u, w, v) , donde w es el vecino común a u y v . Ahora bien, si hubiera más de uno, digamos w y x , tendríamos el ciclo (u, w, v, x) de longitud 4, lo que contradiría el hecho de que G tiene cuello 5. Además, si dos vértices son adyacentes, no tienen vecinos en común, pues se formarían ciclos de longitud 3, mientras que el cuello de G es 5.

Ahora tomemos una distribución de tres canicas sobre la gráfica de Hoffman-Singleton, $\{u, v, w\}$. Como queremos que el alcance de la distribución sea lo mayor posible, necesitamos al menos dos vértices adyacentes en la distribución, para permitir al menos un movimiento. Supongamos entonces, sin pérdida de generalidad que u es adyacente a v .

Entonces, salvo simetrías, tenemos dos casos. El primero es que w también sea adyacente a v . En este caso no es posible realizar más de un movimiento, pues el primero nos lleva forzosamente a un vecino de u , de w , o de v , que no es adyacente al vértice $(u, v$ o $w)$ que aún tiene canica. Entonces el alcance de esta distribución está dado por los 3 vértices u, v, w más los respectivos 6 vecinos restantes de u y de w , más los otros 5 vecinos de v . Entonces hay sólo 20 vértices en el alcance de esta

Figura 6.5: Caso D

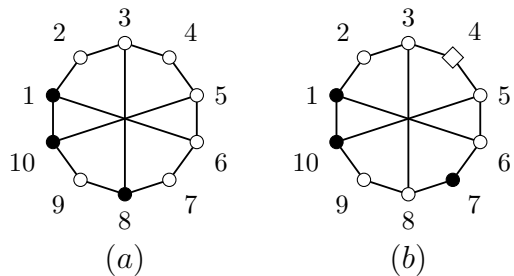
distribución.

El segundo caso es que w no sea adyacente a v , entonces existe x un único vecino en común para v y w . Además, w no es adyacente a u , pues en tal situación volveríamos al primer caso. Entonces existe y , un único vecino en común para u y w . Así, v, x, w, y, u , forman un ciclo de longitud 5. De este modo, podemos hacer dos movimientos seguidos, siempre y cuando el primero de ellos sea $u \xrightarrow{v} x$ o bien $v \xrightarrow{u} y$ pues son las únicas formas de poner una canica en un vértice adyacente a w .

Entonces el alcance de esta distribución está compuesto por los 5 vértices del ciclo (u, v, x, w, y) más los otros 5 vecinos de cada uno de ellos, lo que nos da un total de 30 vértices. Por lo tanto, el número de damas óptimo de la gráfica de Hoffman-Singleton es 4.

6.2. Resultados principales

Ahora bien, respecto al número de damas tenemos lo siguiente:

Figura 6.6: Caso E

Teorema 6.2.1. *Para cualquier entero $\alpha \geq 2$, el máximo número de damas de las gráficas de diámetro vértice-arista 2 y número de independencia α es $\alpha + 2$, y esta cota es alcanzada por una gráfica de diámetro 2.*

Además, dada una distribución con al menos $\alpha + 2$ canicas para tales gráficas, podemos llegar a cualquier vértice con a lo más tres movimientos.

Finalmente, cualquier gráfica así con número de damas exactamente $\alpha + 2$ y diámetro vértice-arista 2 (diámetro 2) contiene a la gráfica (a) (respectivamente (b)) de la Figura 6.7 como subgráfica inducida.

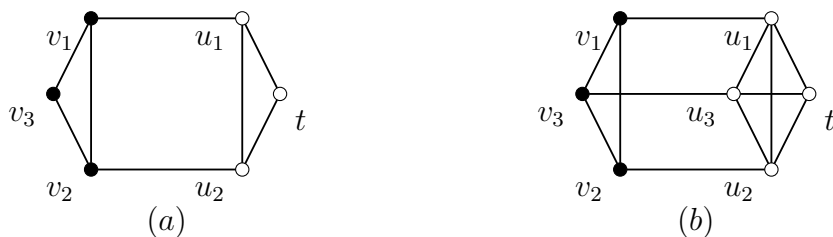


Figura 6.7:

Demostración. Para empezar, notemos que la gráfica de la Figura 6.8 tiene tanto diámetro como diámetro vértice-arista 2, además de número de independencia α . Sin embargo, su número de damas es al menos $\alpha + 2$. Para demostrar esto, consideremos la distribución D formada por los $\alpha + 1$ vértices coloreados en negro en la figura 6.8. A partir de ella, para poder realizar más de un movimiento, debemos mover un guijarro a v_0 . Luego, en un segundo movimiento podremos colocar un guijarro en

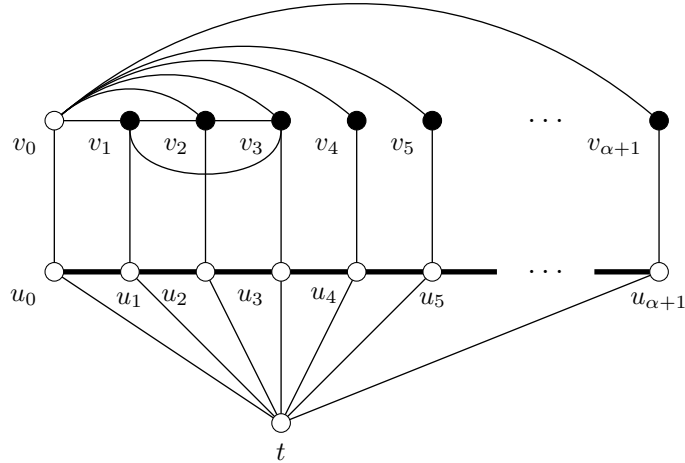


Figura 6.8: Los vértices u_i forman una gráfica completa de $\alpha + 2$ vértices (las líneas gruesas representan las numerosas aristas entre los vértices u_i). Es así que esta gráfica tiene tanto diámetro como diámetro vértice-arista 2, además de número de independencia α .

alguno de los u_i , pero ya no habrá más movimientos y t quedará fuera del alcance de D .

Supongamos que G es una gráfica con $d_{ve} = 2$. Sea t un vértice de G , y D una distribución con al menos $\alpha(G) + 2$ canicas sobre los vértices de G . Entonces, en D existen dos vértices u y v adyacentes, sea $e = uv$. Como $d_{ve}(G) = 2$, entonces $d(t, e) \leq 2$, es decir, uno de los extremos de e , digamos u , está a distancia a lo más 2 de t .

Si $d(u, t) = 1$, entonces alcanzamos a t en un movimiento, a saber $v \widehat{u} t$. Ahora, si $d(u, t) = 2$, entonces t y u tienen un vecino en común, w . Hacemos el movimiento $m = v \widehat{u} w$. La distribución $m(D)$ obtenida consta de al menos $\alpha + 1$ vértices, por lo que también tiene dos vértices adyacentes. Si uno de ellos es w , entonces el movimiento $x \widehat{w} t$ (donde x es el vértice de $m(D)$ adyacente a w) coloca una canica en t .

Si no, la distancia de alguno de estos dos vértices a w es 2, entonces, como hicimos antes, podemos colocar una canica en un vértice adyacente a w (en caso de que no hubiera una), digamos en el vértice y , mediante un sólo movimiento. En ese caso, un tercer movimiento, $y \widehat{w} t$ coloca una canica en t , que era lo que buscábamos, así que $P(G) \leq \alpha(G) + 2$.

Así pues, la gráfica de la Figura 6.8 tiene número de damas $\alpha + 2$.

Ahora supongamos que tenemos una gráfica G con $d_{ve} = 2$ y número de damas $\alpha(G) + 2$. Sea t un vértice objetivo, y D una distribución con $\alpha(G) + 1$ canicas cuyo alcance no contiene a t . Ningún vértice de D es t , y tampoco es adyacente a t , pues de serlo, alcanzaríamos a t a lo más en dos movimientos, como hicimos en el párrafo anterior. Además, no puede haber dos pares ajenos de vértices adyacentes, pues entonces podríamos llegar a t en a lo más tres movimientos, como se hizo en la demostración de la proposición anterior.

Sean entonces v_1 y v_2 dos vértices adyacentes de D , los cuales existen, pues $|D| = \alpha(G) + 1$. Entonces $(D \setminus \{v_1\}) \cup \{t\}$ tiene también $\alpha(G) + 1$ vértices, y por lo tanto contiene también dos vértices adyacentes. Como ningún vértice de D es adyacente a t , estos dos vértices están en $D \setminus \{v_1\}$, y como D no contiene pares ajenos de vértices adyacentes, entonces v_2 debe ser adyacente a algún vértice $v_3 \in D \setminus \{v_1\}$.

Análogamente, $(D \setminus \{v_2\}) \cup \{t\}$ contiene un par de vértices adyacentes que están en $D \setminus \{v_2\}$, y como éste no puede ser ajeno a $\{v_1, v_2\}$ ni a $\{v_2, v_3\}$, no puede ser más que $\{v_1, v_3\}$.

Entonces, v_1, v_2, v_3 son adyacentes. Cualquier otra adyacencia entre vértices de D , ya sea incluyendo estos vértices o no, nos llevaría a dos pares ajenos de vértices adyacentes, por lo que es imposible. Por consiguiente, v_1, v_2, v_3 son los únicos vértices adyacentes de D .

Como $d(t, e_1) \leq d_{ve}(G) = 2$, con $e_1 = v_1v_2$, entonces, sin pérdida de generalidad, v_1 y t tienen un vecino en común, al que llamaremos u_1 . Este no puede ser adyacente ni a v_2 ni a v_3 , pues en ese caso podríamos saltar de v_2 o de v_3 pasando por v_3 o por v_2 hacia u_1 , y luego de v_1 a t pasando por u_1 .

Análogamente, si consideramos la arista v_2v_3 , sin pérdida de generalidad v_2 tiene un vecino en común con t , al cual llamaremos u_2 , que no puede ser adyacente a ningún vértice de $D \setminus \{v_2\}$, ya que en ese caso podríamos saltar de v_1 (o de v_3 si $v = v_1$) hacia u_2 pasando por v_2 , y luego de v a t pasando por u_2 .

Ahora bien, $(D \setminus \{v_1, v_2\}) \cup \{u_1, u_2\}$ contiene un par de vértices adyacentes, y dado que las únicas adyacencias de D son entre v_1, v_2 y v_3 , tenemos que u_1 y u_2 son adyacentes. Así, la subgráfica inducida por $\{v_1, v_2, v_3, t, u_1, u_2\}$ es isomorfa a **(a)**.

Si, además, $d(G) = 2$, habrá un vértice u_3 adyacente a t y a v_3 , y análogamente, u_3 no es adyacente ni a v_2 ni a v_1 . Por otra parte, $(D \setminus \{v_1, v_3\}) \cup \{u_1, u_3\}$ es un conjunto con $\alpha(G) + 1$ vértices, por lo que contiene un par de vértices adyacentes, que deben ser u_1 y u_3 . De forma análoga, u_3 y u_2 deben ser adyacentes. Así, la subgráfica de G inducida por $\{v_1, v_2, v_3, t, u_1, u_2, u_3\}$ es isomorfa a **(b)**. ■

A continuación consideraremos gráficas con número de damas a lo más 3, y usaremos el teorema anterior para clasificar aquéllas cuyo número de damas sea ex-

actamente 3. Observemos, antes de seguir, que K_0 y K_1 son las únicas gráficas con número de damas 0 y 1, respectivamente, pues las distribuciones con una o ninguna canica no permite ningún movimiento.

Por otro lado, notemos que el número de damas de toda gráfica no vacía es mayor que su número de independencia, pues al considerar una distribución con canicas sobre los vértices de un conjunto independiente máximo no podemos realizar ningún movimiento. Por lo tanto, las únicas gráficas con número de damas 2 son $2K_1$ y K_n con $n \geq 2$.

Lema 6.2.2. *Una gráfica G tiene número de damas 3 si y sólo si G es isomorfa a $3K_1$, o bien, si su número de independencia es 2 y la siguiente condición falla:*

(\star) *G es generada por $C \cup D$, con C y D subgráficas completas de G , de modo que G es isomorfa a $2K_1$ o $2K_2$, o bien G tiene vértices $t \in C$ y $v_1, v_2, v_3 \in D$ tales que t no es adyacente a ningún vértice de D , y todo vértice de C es adyacente a lo más a uno de v_1, v_2, v_3 .*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos primero que G es una gráfica con $P(G) = 3$. Como sabemos que para toda gráfica su número de damas es mayor o igual que su número de independencia, entonces tenemos que $\alpha(G) \leq 3$. Además, $\alpha(G) \neq 1$, pues en tal caso tendríamos que $G \cong K_n$, pero $P(K_n) < 3$ para toda n .

Supongamos entonces que $\alpha(G) = 2$ y demostremos, por contrapositiva, que la condición (\star) falla. Así pues, supongamos que G cumple (\star). Si $G \cong 2K_1$ o $2K_2$ es claro que $P(G) \neq 3$, ya que $P(2K_1) = 2$ y $P(2K_2) = 4$. Ahora bien, si G tiene vértices $t \in C$ y $v_1, v_2, v_3 \in D$ y cualquier vértice de C es adyacente a lo más a uno de v_1, v_2, v_3 , consideramos la distribución $\{v_1, v_2, v_3\}$. Podemos ver que t no está en el alcance de ésta, pues primero tendríamos que colocar una canica en un vértice u adyacente a t , lo que implica que $u \in C$, pues no hay vértices de D adyacentes a t . Sin pérdida de generalidad, supongamos que el movimiento que nos permite esto es $v_2 \xrightarrow{v_3} u$ entonces, después de realizar este movimiento, tenemos la distribución $\{v_1, u\}$, y como $u \in C$ y además es adyacente a v_3 , entonces u no es adyacente a v_1 , por lo que ya no hay movimientos posibles. Por lo tanto, $P(G) \neq 3$. Es así que podemos concluir que (\star) falla, que es lo que buscábamos para demostrar que la primera implicación se cumple.

(\Leftarrow) Ahora, supongamos que G es isomorfa a $3K_1$, o bien, que su número de independencia es 2 y la condición (\star) falla. Queremos demostrar que $P(G) = 3$. Si G fuera isomorfa a $3K_1$, entonces es claro que $P(G) = P(3K_1) = 3$, como se quería.

Ahora bien, si $\alpha(G) = 2$ y (\star) falla, demostremos por contrapositiva que $P(G) = 3$. Supongamos entonces que $P(G) \neq 3$, queremos demostrar que (\star) se cumple. Como $P(G) \geq \alpha(G)$, entonces tenemos que $P(G) \geq 2$. Si $P(G) = 2$, podemos

considerar una distribución de dos canicas sobre un conjunto independiente máximo en G , por lo que no habrá movimientos posibles.

Supongamos entonces que $P(G) > 3$. Afirmamos que G es generada por una unión ajena de subgráficas completas.

Caso 1. Si $d(G) \geq 3$.

Sean $x, y \in V(G)$ tales que $d(x, y) \geq 3$. Esto implica que x y y no son adyacentes y no tienen vecinos en común. Como $\alpha(G) = 2$, entonces $\{x, y\}$ es conjunto independiente máximo en G , esto implica que todo vértice en $G \setminus \{x, y\}$ es adyacente exactamente a uno de los vértices x, y .

Veamos entonces que $G[x \cup N(x)]$ es una gráfica completa. Sean $u, v \in N(x)$, entonces u y v no son adyacentes a y , pero sí son adyacentes entre sí, ya que de otro modo, $\{u, v, y\}$ sería un conjunto independiente. Análogamente, $G[y \cup N(y)]$ es una gráfica completa.

Caso 2. Si $d(G) \leq 2$.

Por la demostración del teorema anterior, como $P(G) < 3 = \alpha(G) + 1$, sabemos que existen vértices v_1, v_2, v_3, t , tales que t no está en el alcance de $\{v_1, v_2, v_3\}$. Entonces, cada vecino de t es adyacente a lo más a un vértice de $\{v_1, v_2, v_3\}$, pues si $u \in N(t)$ fuera adyacente a v_1, v_2 (sin pérdida de generalidad), podríamos hacer $v_3 \xrightarrow{v_2} u$ seguido de $v_1 \xrightarrow{u} t$ lo que contradiría la suposición de que t no está en el alcance de $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Así pues, si $u, v \in N(t)$, existe un v_i con $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que u, v no son adyacentes a v_i , y dado que $|\{u, v, v_i\}| = \alpha(G) + 1$, entonces u y v son adyacentes entre sí, lo que implica que $G[t \cup N(t)]$ es gráfica completa. Análogamente, si $x, y \notin N(t)$, $|\{x, y, t\}| = \alpha(G) + 1$, por lo que x y y resultan adyacentes. De aquí se sigue que $G[V(G) \setminus (N(t) \cup t)]$ es gráfica completa, lo que prueba la afirmación.

Tenemos entonces que G es generada por una unión ajena de gráficas completas C y D , y que existen vértices t, v_1, v_2, v_3 tales que $t \notin \text{Reach}(\{v_1, v_2, v_3\})$. Supongamos que $t \in C$ y al menos dos vértices de $\{v_1, v_2, v_3\}$, digamos $v_1, v_2 \in D$, pues de otra forma alcanzaríamos a t en un movimiento.

(a) Supongamos que $v_3 \in D$. Si existe $x \in G$ tal que $x \in C$ y que sea adyacente a v_1 y a v_2 (sin pérdida de generalidad), o bien, tal que $x \in D$ y que sea adyacente a t , entonces $v_3 \xrightarrow{v_2} x$ seguido por $v_1 \xrightarrow{x} t$ contradicen la suposición de que $t \notin \text{Reach}(\{v_1, v_2, v_3\})$, por lo que ninguna de estas dos situaciones ocurre.

(b) Supongamos ahora que $v_3 \in C$. Si existe $x \in G$ tal que $x \in C$ y sea adyacente a v_1 (sin pérdida de generalidad), o bien, tal que $x \in D$ y sea adyacente a v_3 , entonces podemos hacer $v_2 \xrightarrow{v_1} x$ y luego $x \xrightarrow{v_3} t$, lo que contradiría que $t \notin \text{Reach}(\{v_1, v_2, v_3\})$. Por lo tanto, v_1 y v_2 no son adyacentes a ningún vértice de C , y v_3 no es adyacente a ningún vértice de D .

Si existiera $y \in D$, con $y \neq v_1, v_2$, sustituimos t por v_3 y v_3 por y y (\star) se cumple. Supongamos que D es de orden 2, entonces no hay aristas entre C y D . Si el orden de C también es 2, entonces $G \cong 2K_2$, mientras que si $|C| > 2$, al cambiar C por D , la condición (\star) se cumple con cualesquiera vértices $t \in C$ y $v_1, v_2, v_3 \in D$.

Así, en cualquier caso (\star) se cumple, lo que completa la prueba del lema. ■

Lema 6.2.3. *Sea G una gráfica conexa, con $|G| > 3$ y $|G| \geq 2\alpha(G) - 1$. Entonces G contiene una subgráfica isomorfa a la trayectoria P_4 .*

Demostración. Como G tiene al menos cuatro vértices, existe v un vértice de G de grado al menos 2, pues si todos los vértices tuvieran grado a lo más uno perderíamos la conexidad. Ahora bien, si todos los vecinos de v fueran de grado uno, dada la conexidad de G , ésta tendría que ser isomorfa a la gráfica bipartita completa $K_{1,|G|-1}$. En este caso, tendríamos:

$$|G| \geq 2\alpha(G) - 1 = 2(|G| - 1) - 1 = 2|G| - 3,$$

lo que implicaría que $|G| \leq 3$, contradiciendo la hipótesis de que $|G| > 3$.

Entonces, alguno de los vecinos de v tiene grado al menos 2. Sean u y w vecinos de v , con w de grado al menos dos. Si u es adyacente a w , entonces, como G es conexa y tiene al menos cuatro vértices, existe un cuarto vértice x adyacente a u, v o w . Supongamos, sin pérdida de generalidad que es adyacente a w , entonces (u, v, w, x) es subgráfica de G isomorfa a P_4 . Por otro lado, si u es adyacente a y , con $y \neq v$, entonces (u, v, w, y) es la subgráfica buscada. ■

Lema 6.2.4. *Sea G una gráfica con $d_{ve}(G) = 3$, sea t un vértice de G , y sea $D \subset G$ una distribución que no contiene a t , tal que D contiene a una subgráfica P isomorfa a P_4 . Entonces podemos alcanzar un vecino de t en a lo más 3 movimientos, usando únicamente las canicas de P .*

Demostración. Etiquetemos, en orden, a los vértices de P por u, v, w, x . Como $d_{ve}(G) = 3$, al considerar la arista vw y el vértice t , tenemos que v o w (digamos que v) están a distancia a lo más tres de t . Si $d(v, t) = 1$, tenemos lo que buscamos. Si $d(v, t) = 2$, saltamos desde w , sobre v , hacia algún vecino de t . Finalmente, si $d(v, t) = 3$, supongamos que v es adyacente a y , que a su vez es adyacente a z , vecino de t . Entonces realizamos la siguiente sucesión de movimientos $u \xrightarrow{v} y$, $x \xrightarrow{w} v$, $v \xrightarrow{y} z$. Y así, en a lo más tres movimientos, podemos alcanzar un vecino de t , usando únicamente las canicas de P . ■

Lema 6.2.5. *Sea G una gráfica con $d_{ve} = 3$. Sea t un vértice objetivo. Sea $D \subset G$ una distribución que no contiene a t y sea $S \subseteq G \setminus D$ un conjunto independiente que satisface las siguientes condiciones:*

- *Ningún vértice de S es adyacente a ningún vértice de D .*
- *Ningún vecino de un vértice de S cumple a la vez con estar a distancia 2 de t y ser adyacente a un vértice de una componente de D isomorfa a K_3 .*
- *Se tiene que $|D| + h + 2|S| \geq 2\alpha(G) + 1$, donde h es el número de vértices aislados de la subgráfica D de G .*

Entonces podemos alcanzar un vecino de t con a lo más tres movimientos, usando las canicas de D .

Demostración. Podemos suponer que cada vértice de D está a distancia por lo menos 2 de t , y que, en particular, los vértices no aislados en D están a distancia mayor o igual a 3, pues de otra forma, alcanzaríamos algún vecino de t en a lo más un movimiento.

Para cada componente C de D , si $C \cong K_3$, consideraremos v_C , un vértice de C a distancia 3 de t , y un vecino de v_C , al que llamaremos u_C , que pertenezca a $V(G) \setminus D$, y que esté a distancia 2 de t . Cuando $C \cong K_3$, denotaremos por \widehat{C} la subgráfica de G inducida por $C \cup \{u_C\}$, en cualquier otro caso, \widehat{C} denotará a C misma. Si $C \cong K_3$ nos referiremos a \widehat{C} por «subgráfica extendida».

Si hubiera algún u_C adyacente a algún w de D , además de v_C , podríamos saltar desde algún vértice de C , sobre v_C , hacia u_C , y luego desde w , sobre u_C hacia algún vecino de t . Supongamos entonces que no estamos en tal situación. Si u_C fuera adyacente a algún $u_{C'}$ correspondiente a alguna componente C' de D , podríamos saltar desde algún vértice de C , sobre v_C , hacia u_C , de igual modo, podemos saltar a $v_{C'}$ desde algún vértice de C' hacia $u_{C'}$, para finalmente, saltar de $u_{C'}$ hacia un vecino de t , pasando sobre u_C .

Supongamos entonces que esto tampoco sucede. Entonces las subgráficas extendidas tienen número de independencia 2, y las componentes de $E = D \cup \{u_C \mid C \text{ componente de } D, \text{ con } C \cong K_3\}$ son precisamente las \widehat{C} , con C componente de D .

Además, notemos que a partir de las hipótesis obtenemos que ningún vértice de S es adyacente a algún vértice de E , pues, por un lado, los vértices de S no son adyacentes a los de D , y por otro, los vecinos de S no pueden a la vez estar a distancia 2 de t (como es el caso de los u_C) y ser adyacentes a algún vértice de alguna componente $C \cong K_3$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
|D| &> 2\alpha(G) - h - 2|S| \\
&\geq 2\alpha(E \cup S) - h - 2|S| \\
&= 2\alpha(E) + 2|S| - h - 2|S| \\
&= 2\alpha(E) - h.
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\sum_{C \text{ componente de } D} |C| - 2\alpha(\widehat{C}) &= \sum_{C \text{ componente de } D} |C| - \sum_{C \text{ componente de } D} 2\alpha(\widehat{C}) \\
&= |D| - 2\alpha(E).
\end{aligned}$$

Se sigue entonces que :

$$\sum_{C \text{ componente de } D} |C| - 2\alpha(\widehat{C}) > -h;$$

y como h es el número de vértices aislados de D vista como subgráfica de G :

$$\sum_{\substack{C \text{ componente de } D \\ |C| > 1}} |C| - 2\alpha(\widehat{C}) > 0.$$

Por lo tanto, existe K una componente de D con $|K| > 1$ y $|K| > 2\alpha(\widehat{K})$. Ahora bien, K no puede ser isomorfa a K_3 , pues en ese caso tendría sólo tres vértices, mientras que $\alpha(\widehat{K}) = 2$. Entonces $K = \widehat{K}$ tiene orden al menos 4, entonces, por el lema 6.2.3 contiene una subgráfica isomorfa a P_4 , y por el lema 6.2.4, podemos colocar una canica en algún vecino de t en a lo más 3 movimientos, usando únicamente las canicas de $K \subseteq D$, lo que termina la prueba. ■

Para terminar, tenemos una buena cota superior del número de damas de las gráficas con diámetro vértice-arista 3.

Teorema 6.2.6. *Para cualquier entero $\alpha \geq 2$, el máximo número de damas de una gráfica con diámetro vértice-arista igual a 3 y número de independencia α , es $2\alpha + 1$, y esta cota es alcanzada por una gráfica de diámetro 3. Además, dada una distribución de al menos este tamaño para tal gráfica, siempre podemos alcanzar cualquier vértice objetivo en a lo más 7 movimientos.*

En la demostración de este teorema se emplean varias veces los tres lemas anteriores, además de algunas de las ideas utilizadas en las demostraciones de éstos. Sin embargo, debido a su extensión, y al no ser constructiva, la omitiremos, pero se encuentra en [1].

Capítulo 7

Conclusiones

La importancia de este trabajo reside en presentar este nuevo tema ante la comunidad matemática universitaria, estableciendo las bases de futuras investigaciones. Hemos presentado los movimientos de damas, e introducimos el número de damas y el número de damas óptimo de una gráfica, y calculamos estos últimos para distintas clases de gráficas. Algunas veces nos servimos de propiedades de los movimientos de damas, mientras que otras usamos resultados de pebbling obtenidos anteriormente.

Aún queda mucho por estudiar al respecto, por ejemplo, podemos preguntarnos acerca del comportamiento de los número pegging bajo distintas operaciones de gráficas, como productos y potencias, o bien, acerca de la relación entre número de damas y algunas características propias de la gráfica, como su cuello o su conexidad.

Por otro lado, recordemos que en el teorema 2.2.10 permitimos tanto movimientos de damas (pegging moves) como movimientos pebbling. Llamemos pegging moves al conjunto de ambos tipos de movimientos. Entonces podemos definir al pegging number (y respectivamente al optimal pegging number) de una gráfica, como el menor entero positivo d tal que toda (respectivamente, alguna) multi-distribución D de tamaño d tiene $Reach_a = V(G)$. Así, como el pegging permite más movimientos que el pebbling, los pegging y optimal pegging numbers de una gráfica estarán acotados superiormente por su pebbling number y su optimal pebbling number, respectivamente. Por otra parte, recordemos que el teorema 2.2.10 nos dice que, si partimos de una distribución propia, el permitir también movimientos pebbling permite alcanzar exactamente los mismos vértices que se alcanzan únicamente con movimientos de damas. La diferencia es que en pebbling se parte de una multi-distribución, así pues, el pegging number de una gráfica es mayor o igual que su número de damas, mientras que su optimal pegging number es a lo más su número de damas óptimo.

Aunque a partir de su definición podríamos esperar una gran similitud entre peg-

gling numbers y pegging o pebbling numbers, cabe destacar que las desigualdades antes mencionadas pueden ser estrictas. Por ejemplo, P_4 tiene pebbling number 8, número de damas 3 y pegging number 5; la gráfica obtenida al pegar un vértice y una arista a cada una de las hojas de $K_{1,3}$ tiene tanto optimal pebbling number como número de damas óptimo 4, pero optimal pegging number 3. Así, se vuelve interesante estudiar estas nuevas magnitudes, tomando en cuenta que en muchos casos serán útiles los resultados y propiedades de pebbling y de los movimientos de damas.

Bibliografía

- [1] Helleloid, G., Khalid, M., Moulton, D.P., Wood, P.M. “Graph pegging numbers” en *Discrete Mathematics*, vol.309 (2009), pp. 1971-1985.
- [2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. *Graph Theory with Applications*, Elsevier North Holland, 1976.
- [3] Harary, Frank *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [4] Diestel, Reinhard *Graph Theory*, Springer, 2005.
- [5] Spivak, Michael *Calculus*, Third Edition, Publish or Perish, Inc., 2006.
- [6] Chung, F.R.K. “Pebbling in hypercubes”, en *SIAM Journal on Discrete Math.* 2 (4), (1989), pp. 467-472.