



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE UN SISTEMA DE BOMBEO DE AGUA
POR EXCITACIÓN PARAMÉTRICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

FÍSICO

P R E S E N T A

JOSÉ ALFREDO MORALES PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. ARTURO OLVERA CHÁVEZ



2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente	Dr. Ramón Peralta y Fabi.
Vocal	Dr. Steven Peter Czitrom Baus.
Secretario (Tutor)	Dr. Arturo Olvera Chávez.
1 ^{er} . Suplente	Dr. Carlos Málaga Iguiñiz.
2 ^{do} . Suplente	Dra. Clara Eugenia Garza Hume.

Lugar donde se realizó la tesis:

Ciudad Universitaria, México D. F., Junio de 2011.

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. ARTURO OLVERA CHÁVEZ

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Morales
Pérez
José Alfredo
55 20 94 68 19
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
09111286-6
2. Datos del tutor
Dr
Arturo
Olvera
Chávez
3. Datos del sinodal 1
Dr
Ramón
Peralta y
Fabi
4. Datos del sinodal 2
Dr
Steven Peter
Czitrom
Baus
5. Datos del sinodal 3
Dr
Carlos
Málaga
Iguñiz
6. Datos del sinodal 4
Dra
Clara Eugenia
Garza
Hume
7. Datos del trabajo escrito
Estudio de un Sistema de Bombeo de Agua
por Excitación Paramétrica.
64p
2011

Dedicatoria

A León, Skarleth y Belen con todo mi amor.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México.

A la Facultad de Ciencias.

A todos mis profesores.

A mi asesor Arturo Olvera Chávez.

Al honorable jurado.

Índice general

Capítulo

1.	Introducción	1
2.	Modelo Matemático	3
2.1.	Teoría	3
2.1.1.	Hipótesis de Medio Continuo	3
2.1.2.	Clasificación de fluidos	4
2.1.3.	Fluido Newtoniano y no Newtoniano	4
2.1.4.	Flujos compresibles e incompresibles	5
2.1.5.	Descripción Lagrangiana y Euleriana	5
2.1.6.	Flujo unidimensional. Teorema de Bernoulli	6
2.1.7.	Fuerzas conservativas	6
2.1.8.	Teorema de Bernoulli	6
3.	Columna de Agua Oscilante	10

3.1. Fase de Oscilación	10
3.1.1. Estudio Numérico	13
3.1.2. Experimento	15
4. Sistema de Bombeo	19
4.1. Descripción	19
4.1.1. Fase de no bombeo	20
4.1.2. Fase de Bombeo.	26
5. Estudio Numérico	30
5.1. Características	31
5.1.1. Ecuaciones de NO bombeo.	32
5.1.2. Ecuaciones de bombeo.	32
5.1.3. Resultados Numéricos.	35
6. Experimentos	41
6.1. Descripción del Dispositivo Experimental	41
6.1.1. Particularidades del dispositivo experimental	41
6.1.2. Calibración de los Sensores.	45
6.1.3. Adquisición de datos	47
7. Conclusiones	53
 Bibliografía	 55

Resumen

El sistema de bombeo de agua por excitación paramétrica será descrito a continuación. Este trabajo es una contribución en el estudio del sistema de bombeo por energía de oleaje (SIBEO). En este sistema describiremos las oscilaciones de las masas de agua expuestas en los tubos de resonancia y desagüe, acopladas por una tercera oscilación proporcionada por un pistón o fuelle en la cámara de compresión, al cual podemos manipular su amplitud y frecuencia. El funcionamiento del sistema se optimiza variando el volumen dentro de la cámara de compresión, sintonizando la frecuencia de excitación del fuelle con la frecuencia natural de excitación del agua. Este sistema de bombeo fue montado en el laboratorio a escala del modelo original. Los resultados serán estudiados bajo ciertas condiciones iniciales, con las cuales obtendremos la descripción del sistema con un método numérico y los resultados experimentales.

Capítulo 1

Introducción

En años recientes se han hecho estudios para la utilización de energías alternativas. Algunos dispositivos particulares son los llamados OWC¹ (Salter [1] y McCormick [2]), los cuales se basan en el aprovechamiento de la energía de oleaje. Esta energía transmite una variación periódica de la presión en la parte baja de un tubo llamado resonante, que a su vez genera un movimiento oscilatorio de su columna de agua. La oscilación comprime y descomprime el aire en una cámara de compresión que impulsa una turbina conectada a un generador eléctrico. La mayoría de estos sistemas aprovechan la amplificación en la oscilación debida a la frecuencia resonante de la ola para aumentar su efecto a la salida en las turbinas. Cuando el OWC está fuera de resonancia, estos dispositivos pueden sintonizarse a la frecuencia resonante a través del cambio del volumen de aire dentro de la cámara de compresión. Este es el mecanismo común en la optimización y rendimiento del sistema, aunque la eficiencia es significativamente reducida por la conversión de energía **cinética - eléctrica**. Una manera sencilla de resolver este problema e incrementar sustancialmente la eficiencia del dispositivo, es evitando la conversión de energía, por lo tanto, si se utiliza toda la energía mecánica en el cambio, el producto final será energía del tipo **cinética-cinética**.

Otra clase de mecanismo basado en este principio y en el aprovechamiento de la energía de oleaje es el SIBEO,² desarrollado por Czitrom [3], el cual utiliza la energía mecánica de las olas del mar para bombear agua. Al no haber cambio en el tipo de energía, estos sistemas son mas eficientes. Entre las aplicaciones del SIBEO se encuentra la recuperación y saneamiento de lagunas y esteros contaminados. Además, al no tener partes móviles, los organismos que viajan a través del ducto no son dañados, lo que permite el manejo biológico y la recuperación de los cuerpos de agua. En la siguiente figura se describen las partes básicas del SIBEO.

¹ Por sus siglas en ingles Oscillating Water Column.

² Sistema de Bombeo por Energía de Oleaje.

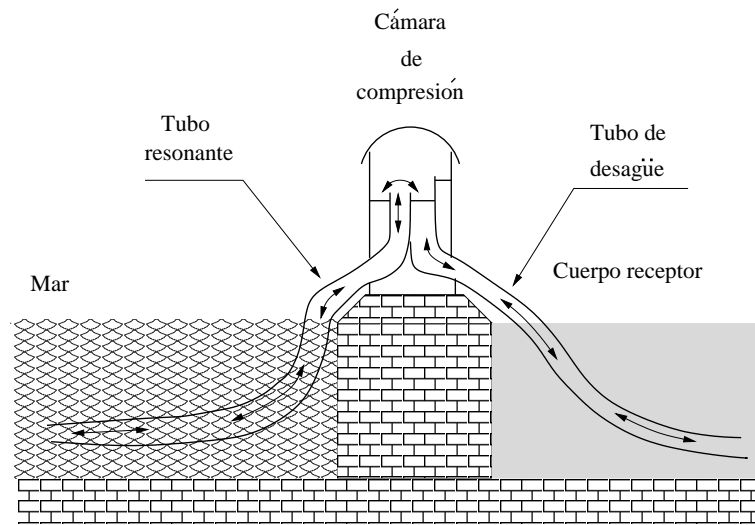


Figura 1.1: Diagrama del sistema de bombeo por energía de oleaje.

Este sistema se basa principalmente en aprovechar la señal de presión en la boca del tubo resonante; debido a la energía de oleaje que provoca un flujo de agua oscilante, el cual, con cada ola, derrama un cierto volumen de agua dentro de la cámara de compresión y posteriormente al cuerpo de agua receptor. El flujo neto de agua es unidireccional del mar a la laguna.

Para poder desarrollar un nuevo dispositivo que nos permita bombear de manera bidireccional en el sistema de bombeo, se ha propuesto cambiar el punto de excitación del sistema, ya que en vez de tomar la señal de presión en la parte baja de la boca del tubo resonante, se propone, variar periódicamente el volumen de la cámara de compresión por medio de un pistón o fuelle. El objetivo particular de este trabajo es encontrar la dependencia que existe entre la amplitud de excitación del fuelle y el mayor gasto hidráulico obtenido, para lo cual, es necesario estudiar el comportamiento del sistema de bombeo excitado paraméricamente mediante la variación periódica del volumen dentro de la cámara de compresión. Este estudio sobre el comportamiento de estos dispositivos permitirá obtener un modelo numérico del sistema, para así determinar las condiciones de bombeo, comparando los resultados numéricos y los resultados obtenidos en el dispositivo experimental.

Antes de empezar con la descripción del sistema de bombeo (Capítulo 4), se hace una revisión de los conceptos de mecánica de fluidos que se utilizarán (Capítulo 2), además de una breve introducción a trabajos realizados anteriormente sobre la columna de agua oscilante, que sirven de base para este estudio (Capítulo 3). Se incluye una descripción del algoritmo utilizado en el método numérico (Capítulo 5) y el desarrollo de los experimentos realizados en el dispositivo montado en el laboratorio (Capítulo 6).

Capítulo 2

Modelo Matemático

Para la deducción de las ecuaciones básicas que describen el movimiento de los fluidos es necesario introducir un marco de referencia desde el cual se pueda describir la cinemática del fluido. Estas ecuaciones se derivan de las leyes de conservación de la masa, el momento y la energía. En el desarrollo de éstas se asumirá la validez de la hipótesis del medio continuo, el cual supone que en cada instante el fluido ocupa de forma continua una cierta región del espacio sobre la que se tienen definidas funciones continuas y derivables de la posición y del tiempo. Conviene indicar que existen casos excepcionales donde la descripción del fenómeno mediante un modelo continuo no es adecuada. Por ejemplo: el movimiento de gases a densidades extremadamente bajas, el vuelo de un misil o un satélite a grandes alturas por encima de la superficie de la tierra; por lo que no se tomarán en cuenta efectos cuánticos ni relativistas, cuya descripción pertenece al campo de la teoría cinético molecular.

2.1 Teoría

2.1.1 Hipótesis de Medio Continuo

La mecánica pretende describir el comportamiento de los cuerpos (sólidos, líquidos, gases y plasmas) y apoya por tanto su formulación matemática en la experiencia y la teoría. Un fluido es una sustancia que se deforma, es un agregado que se mueve en forma continua al transcurrir el tiempo t y forma un todo en el espacio $x = (x, y, z)$. Por tanto, desde el punto de vista continuo la resolución de un problema fluido-mecánico consiste en el cálculo de las tres componentes de la velocidad local del fluido $v(x, t)$, la densidad $\rho(x, t)$ y la energía interna $e(x, t)$ como funciones de la posición y del tiempo aplicadas a cualquier porción (infinitesimal o finita) del medio fluido continuo. En particular la mecánica de fluidos supone que los fluidos verifican las siguientes leyes:

- Hipótesis del medio continuo.
- Conservación de la masa.

- Conservación de la cantidad de movimiento.
- Conservación de la energía.

Puesto que el fenómeno que estudiaremos es macroscópico, un fluido lo consideramos como un medio continuo. Esto significa que no importando que tan pequeño sea el elemento de volumen en el fluido que estudiemos, éste contendrá un número muy grande de partículas, pero suficientes para que su comportamiento sea insensible a dicho número. En otras palabras, nuestro elemento de volumen será pequeño comparado con el sistema que estemos estudiando, pero, grande comparado con las distancias que hay entre las moléculas y el número de ellas que componen el sistema. La distancia característica de este movimiento, recibe el nombre de camino libre medio (l), el cual es mucho menor que las longitudes experimentales, de tal forma que sólo percibimos un cierto promedio de las partículas individuales, es por ello que esta aproximación del medio continuo resulta ser tan efectiva que se olvida con frecuencia de que se trata de un modelo.

Una vez establecido que trabajamos a escalas muy superiores al camino libre medio de las partículas, podemos olvidar el fino detalle de su movimiento individual y ver en torno a cada punto en el espacio (x, y, z) para cada instante t , un volumen elemental.

2.1.2 Clasificación de fluidos

La capacidad para deformarse indefinidamente bajo la acción de fuerzas exteriores (gravedad, presión, etc.) es la propiedad fundamental que distingue a los fluidos, líquidos y gases, de los sólidos. Un trozo de sólido posee una forma definida que cambia únicamente cuando lo hacen las condiciones externas que actúan sobre él. Por el contrario, una misma porción de fluido carece de forma definida, pudiendo adquirir formas diferentes bajo unas mismas condiciones externas. Así un gas tenderá a llenar completamente el recipiente que lo contiene, independientemente de la forma de este, y un líquido se deformará bajo la acción de su propio peso hasta llenar una parte del espacio determinado por el recipiente, también independientemente de la forma de este último. Se deduce, por tanto, que un fluido no presenta resistencia a la deformación misma, aunque sí la presenta, como se verá más adelante, a la velocidad con que se deforma. Dicha resistencia está directamente relacionada con una propiedad del fluido denominada viscosidad [4].

Un fluido que no tiene viscosidad se conoce como fluido ideal. En realidad todos los fluidos presentan algo de viscosidad, siendo el modelo de viscosidad nula una aproximación bastante buena para ciertas aplicaciones.

2.1.3 Fluido Newtoniano y no Newtoniano

Es bien conocido que el proceso de verter cierto volumen de agua desde un recipiente a otro es mucho más rápido que el de verter el mismo volumen de miel entre los mismos

recipientes. Al final del proceso los dos fluidos habrán experimentado la misma deformación, mientras que la velocidad de deformación habrá sido muy distinta en uno y otro caso debido a las diferentes viscosidades de ambos fluidos.

Un fluido newtoniano es un fluido con viscosidad, donde la resistencia a la deformación es directamente proporcional al gradiente de velocidades. Un buen número de fluidos comunes (agua, aire, gasolina) se comportan como fluidos newtonianos bajo condiciones normales de presión y temperatura.

Un fluido no newtoniano, es aquel cuya viscosidad varía con la resistencia a la deformación que se le aplica. Como resultado, un fluido no newtoniano no tiene un valor definido y constante para la viscosidad, a diferencia de un fluido newtoniano.

2.1.4 Flujos compresibles e incompresibles

Todos los flujos son compresibles. La compresibilidad de un flujo es básicamente una medida en el cambio de la densidad. Los gases son en general muy compresibles, en cambio los líquidos tienen una compresibilidad muy baja. En un flujo usualmente hay variaciones en la presión, asociados con cambios en la velocidad; en general, estas alteraciones en la presión inducirán modificaciones de la densidad, las cuales influyen en el flujo. Aunque los cambios de densidad en éste pueden ser muy importantes, hay una gran cantidad de situaciones prácticas en la que estos cambios pueden ser despreciables.

Un flujo se clasifica en compresible e incompresible dependiendo del nivel de variación de la densidad del fluido. La incompresibilidad es una aproximación y se dice que el flujo es incompresible si la densidad permanece constante a lo largo de todo el flujo, por lo tanto, el volumen de todas las porciones del fluido permanece inalterado sobre el curso de su movimiento. En esencia, las densidades de los líquidos son constantes y así el flujo de ellos es típicamente incompresible.

2.1.5 Descripción Lagrangiana y Euleriana

Existen dos puntos de vista para describir el movimiento de un fluido. Una primera forma de hacerlo es seguir a cada volumen de fluido en su movimiento, de manera que buscaremos funciones que proporcionen las propiedades del volumen del fluido, así como su posición en cada instante. Esta es la descripción *lagrangiana*.

Una segunda forma es asignar a cada punto del espacio y en cada instante un valor para las propiedades del fluido, sin importar la partícula fluida que ocupa un punto en dicho instante. Esta es la descripción *euleriana*, que no está ligada a las partículas fluidas sino a los puntos del espacio ocupados por el fluido.

2.1.6 Flujo unidimensional. Teorema de Bernoulli

Sí se estudia la cinemática de los fluidos, podemos ver cómo su movimiento puede describirse mediante el concepto de líneas de corriente y cómo el conocimiento de éstas permite determinar el campo de velocidades en la mayoría de los casos. Cabe entonces preguntarse, si además se podría también averiguar la variación de la presión a lo largo de la línea de corriente. En efecto, los conceptos de línea de corriente y de tubo de corriente sirven como modelos para el estudio del flujo en tuberías y en otros conductos utilizados en la técnica (la industria y la ingeniería). Un tubo de corriente es en realidad la idealización de una tubería, a través de cuyas paredes no pasa el fluido. Entonces las leyes que se deducen para una línea de corriente y que se generalizan para un tubo de corriente, son directamente aplicables a los problemas concretos de tuberías.

2.1.7 Fuerzas conservativas

Sea un campo de fuerzas $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r})$ de componentes $\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$. El trabajo elemental de esta fuerza cuando su punto de aplicación se desplaza en $d\vec{r}$ está dado por

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{r} = f_x dx + f_y dy + f_z dz. \quad (2.1)$$

En el caso de que el campo de fuerzas cumpla con la condición $\nabla \times \vec{f} = 0$, la diferencial de trabajo es una diferencial total exacta. Las fuerzas se llaman entonces *conservativas* y en este caso se puede escribir

$$dW = f_x dx + f_y dy + f_z dz = -d\Omega, \quad (2.2)$$

donde $\Omega = \Omega(x, y, z)$ es la energía potencial. Recordando la expresión de $d\Omega$:

$$d\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz \quad (2.3)$$

entonces

$$f_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, f_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, f_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

es decir, $\vec{f} = -\nabla\Omega$; en esta ecuación notamos que para fuerzas conservativas, el vector fuerza se puede expresar como el negativo del gradiente de la energía potencial.

2.1.8 Teorema de Bernoulli

Considérese ahora el flujo de un fluido ideal cualquiera. La ecuación básica de movimiento es la de Euler, que se escribirá suponiendo que las fuerzas de volumen son conservativas [4][5]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Omega, \quad (2.4)$$

donde \vec{u} es la velocidad del fluido, ρ es la densidad y p la presión, entonces utilizando la identidad vectorial $\nabla(\frac{1}{2}\vec{u} \cdot \vec{u}) = \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$, se puede reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \frac{u^2}{2} - \vec{u} \times \nabla \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Omega. \quad (2.5)$$

Sea $d\vec{r}$ un elemento de longitud medido a lo largo de una línea de corriente, esto es tal que $d\vec{r}$ y \vec{u} sean paralelos. Si multiplicamos la ecuación anterior por $d\vec{r}$ entonces tenemos:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{r} + d\vec{r} \cdot \nabla \frac{u^2}{2} - d\vec{r} \cdot \vec{u} \times \nabla \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho} d\vec{r} \cdot \nabla p - d\vec{r} \cdot \nabla \Omega. \quad (2.6)$$

Utilizando la expresión que da la diferencial de una función escalar cualquiera $\varphi = \varphi(x, y, z)$, entonces

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad (2.7)$$

y observando que el término $d\vec{r} \cdot \vec{u} \times \nabla \times \vec{u} = 0$, en el cual \vec{u} es paralelo a $d\vec{r}$ se tiene, a lo largo de una línea de corriente:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{r} + d\vec{r} \cdot \nabla \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega \right) = 0; \quad (2.8)$$

así

$$\int_C \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{r} + \left[\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega \right]_1^2 = 0.$$

Conviene ahora considerar varios casos particulares. Supongamos primero que el flujo sigue dependiendo del tiempo, pero que la línea de corriente mantiene fija su forma, entonces,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \vec{e}_t \quad (2.9)$$

y

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial u}{\partial t} ds \quad (2.10)$$

siendo ds el elemento de arco sobre la línea de corriente, por tanto :

$$\int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{u_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \Omega_2 = \frac{u_2^2}{2} + \Omega_1. \quad (2.11)$$

Por otra parte, si las fuerzas de volumen son las de la gravedad, entonces $\Omega = gz$ y si el fluido es de densidad constante:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1), \quad (2.12)$$

entonces la ecuación de *Bernoulli* se escribe como:

$$\int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1. \quad (2.13)$$

Finalmente, si el flujo es permanente o estacionario y además tomando en cuenta las hipótesis anteriores, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2. \quad (2.14)$$

La ecuación anterior es la ecuación de *Bernoulli*, que representa en realidad la conservación de la energía mecánica en un fluido ideal y cada uno de sus términos tiene dimensiones de [$\frac{Joule}{Kg}$], esto es, de energía por unidad de masa. Así, el término [$\frac{u^2}{2}$] representa la energía cinética de un elemento del fluido cuya masa es unitaria y gz es su energía potencial por unidad de masa. En cuanto al término $\frac{p}{\rho}$ representa la energía mecánica asociada a la presión a la que está sometido el fluido.

El teorema de *Bernoulli* establece que la energía mecánica del fluido $\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zy$ permanece constante sobre cada línea de corriente.

Esta interpretación tiene una importancia práctica considerable, ya que permite extender el teorema al caso de un fluido viscoso. La ecuación (2.13), constituye una primera generalización de la ecuación de *Bernoulli*, la cual determina que la energía mecánica total del fluido en el punto 2, es la energía mecánica total, en el punto 1.

El mecanismo interno de deformación y movimiento en el seno de un fluido real comparado con un fluido ideal, es inevitablemente la presencia de la viscosidad en todos los fenómenos de movimiento. Ello conduce, tanto experimental como analíticamente a una nueva gama de propiedades, inexistentes en el caso ideal.

Una característica importante del movimiento de un fluido real es la aparición de dos tipos de flujo completamente distintos.

En el primero, llamado *laminar*, se pueden fácilmente definir líneas de corriente, esto es, líneas envolventes del campo de las velocidades. El fluido se mueve, por así decir, en capas o laminas superpuestas que se “deslizan” unas sobre otras. Incluso cuando el flujo no es permanente, el campo de velocidades cambia de manera “ordenada” de un instante a otro.

En el segundo tipo de flujo, llamado “turbulento”, el movimiento es completamente desordenado y aunque aparezca un movimiento principal de conjunto, por ejemplo en una tubería, las velocidades de una partícula determinada se desvían de forma irregular e imprevisible del movimiento principal.

Físicamente lo que ocurre es que, partiendo de un flujo laminar y aumentando paulatinamente su velocidad, se alcanza un estado de inestabilidad dinámica. Las partículas ya no son estables en su trayectoria y tal como ocurre en otros campos de la dinámica, cualquier perturbación las aparta en forma creciente con el tiempo de su trayectoria prevista. El camino natural para estudiar los fluidos viscosos consiste en analizar primero el caso del flujo laminar, para establecer bajo qué condiciones se hace inestable y finalmente el flujo turbulento cuando ya está completamente establecido el flujo.

Si la inestabilidad es producida por las fuerzas de viscosidad, el parámetro que determina cuándo esa condición de inestabilidad se produce se llama número de *Reynolds*.

Capítulo 3

Columna de Agua Oscilante

Como un antecedente al trabajo realizado en esta tesis, queremos mostrar los resultados de la tesis de licenciatura de Francisco González [6] y [7] sobre el comportamiento de una columna de agua oscilante excitada paramétricamente mediante el cambio armónico del volumen dentro de la cámara de compresión, donde el principal objetivo, es encontrar la dependencia entre la amplitud de oscilación de la columna de agua con la amplitud y la frecuencia de excitación en el pistón. En este trabajo se utiliza el método asintótico de escalas múltiples para encontrar una aproximación a dicha dependencia. Se hacen simulaciones numéricas de la ecuación que se propuso para modelar el movimiento de la columna de agua y se comparan con los resultados obtenidos mediante el análisis asintótico del modelo junto con los resultados obtenidos en el experimento.

3.1 Fase de Oscilación

El análisis de la columna de agua excitada paramétricamente mediante el cambio periódico del volumen dentro de la cámara de compresión, es un trabajo realizado anteriormente. La teoría y el experimento se pueden consultar en [6] y [7] respectivamente.

Es importante recalcar que en este estudio las oscilaciones son sin bombeo, es decir, la columna de agua del tubo resonante no derrama agua dentro de la cámara de compresión. Además, en esta tesis sólo se trata el caso de un solo tubo, y podemos generalizar este estudio a un sistema con dos tubos, ya que el análisis y la teoría usada es exactamente la misma para ambos casos. Una diferencia importante que se da entre las fases de bombeo y no bombeo, radica principalmente en que en la fase de bombeo se toma en cuenta la velocidad del fluido, más un casquete en la altura de la columna de agua cuando ésta se derrama; en cambio para la fase de no bombeo, se toma en cuenta el movimiento de las superficies libres dentro del tubo resonante y de desagüe. Este proceso se explicará con más

detalle en el capítulo siguiente.

El dispositivo que estudiaremos consta principalmente de un tubo resonante, un depósito de agua, una cámara de compresión de volumen variable y un fuelle que es la manera alterna de suplir la energía del oleaje que se utiliza en los dispositivos OWC. En la siguiente figura se muestran las partes más importantes del dispositivo experimental.

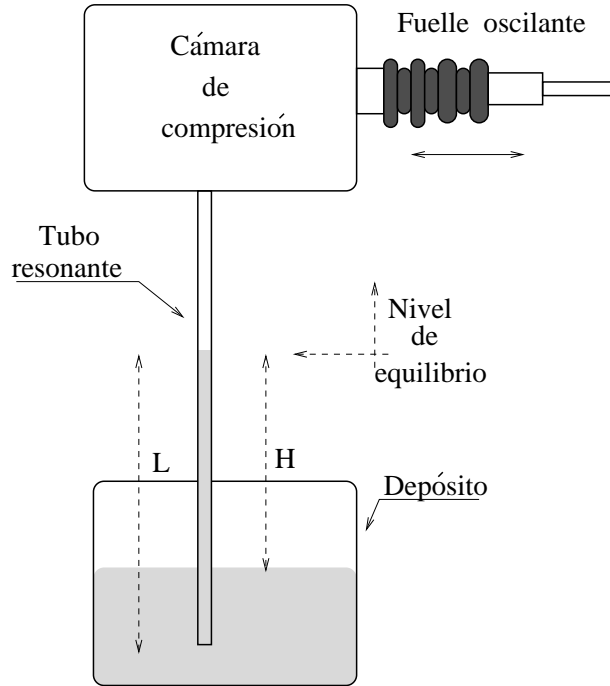


Figura 3.1: Montaje experimental usado en el estudio de la columna de agua oscilante.

En este caso, la columna de agua se considera como un oscilador mecánico cuya masa es la cantidad de agua que contiene el tubo. Esta masa está sometida a dos fuerzas, la gravitacional y la fuerza dedida a la diferencia de presión entre la cámara de compresión y la presión atmosférica. Como oscilador mecánico la masa es variable y su energía cinética está dada por:

$$T = (L + z)A_r\rho\frac{\dot{z}^2}{2};$$

donde L es la altura de equilibrio de la columna de agua, z es el desplazamiento vertical del borde superior de la columna de agua alrededor del punto de equilibrio, $(L + z)A_r\rho$ es la masa, y A_r es área del tubo resonante. La energía potencial $U(z)$ es tal que su gradiente es igual a la fuerza gravitacional y la fuerza debida a la diferencia de presiones, donde se considera que la compresión es de tipo adiabático (γ); además P_0 y V_0 son la presión y el

volumen en el nivel de equilibrio. Entonces:

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = \rho g A_r z + P_0 \left(\left(1 - \frac{A_c z}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right).$$

Si ahora, consideramos el efecto del fuelle o pistón oscilante en la fuerza debido a la presión, ésta queda escrita como:

$$\frac{P_a - \rho g H}{\rho} \left(\left(1 - \frac{A_c z + A_p b \cos(\Omega t)}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right).$$

Donde P_a , A_c y Ω son la presión atmosférica, el área de la cámara de compresión y la frecuencia respectivamente. Ahora, la *lagrangiana* para nuestro problema será:

$$\mathcal{L} = T + U;$$

utilizando la ecuación de *Euler – Lagrange* correspondiente entonces:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0.$$

Así llegamos al mismo resultado que se obtiene utilizando la ecuación de *Bernulli*, por lo que podemos partir de la siguiente ecuación siguiente, (vease [7]).

$$(z + L(1 + \eta)) \ddot{z} + \frac{\dot{z}^2}{2} + \left(\frac{K}{2} + f \frac{L}{D} \right) \dot{z} |\dot{z}| + g z + \frac{P_a - \rho g H}{\rho} \left(\left(1 - \frac{A_c z + A_p b \cos(\Omega t)}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right) = 0. \quad (3.1)$$

El término $\left(\frac{K}{2} + f \frac{L}{D} \right) \dot{z} |\dot{z}|$ son las pérdidas por formación de vórtices y fricción respectivamente, η es un incremento a la longitud efectiva debido a los efectos del borde, A_p es el área transversal del fuelle y $b \cos(\Omega t)$, la amplitud del desplazamiento del pistón. Si además asumimos que para oscilaciones pequeñas $\eta \ll 1$, $z \ll L$, y realizando los siguientes cambios de variable $\frac{A_p}{V_0} z \rightarrow z$, $\hat{\omega}^2 t \rightarrow t$, podemos escribir la ecuación anterior en forma adimensional, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{V_0}{L(1 + \eta)} z + 1 \right) \ddot{z} + \frac{V_0}{2L(1 + \eta)} \dot{z}^2 + \frac{V_0}{L(1 + \eta)} \left(\frac{K}{2} + f \frac{L}{D} \right) \dot{z} |\dot{z}| \\ & + \frac{g}{\hat{\omega}^2 L(1 + \eta)} z + \frac{(P_a - \rho g H) A_c}{\hat{\omega}^2 V_0 L(1 + \eta) \rho} \left(\left(1 - z + \beta \cos \frac{\Omega t}{\hat{\omega}} \right)^{-\gamma} - 1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $\beta = \frac{A_p b}{V_0}$. Si el volumen de aire comprimido por la columna durante las oscilaciones y el volumen desplazado por el pistón son pequeños comparados con el volumen de la cámara de compresión en el estado de equilibrio, es decir, $|z|, |\beta| \ll 1$, se puede aproximar la ecuación (3.1) como:

$$(Wz + 1)\ddot{z} + \frac{W}{2}\dot{z}^2 + \kappa\dot{z}|z| + \left(\omega_0^2 + \epsilon\alpha \cos \frac{\Omega t}{\hat{\omega}}\right)z + \lambda\epsilon^2 \cos \frac{\Omega t}{\hat{\omega}} + \nu z^2 = 0 \quad (3.3)$$

donde

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{V_0}{L(1+\eta)}\right) & \kappa &= \left(\frac{K}{2} + f\frac{L}{D}\right) \\ \epsilon &= \sqrt{\frac{\beta A_c}{V_0 L}} & \nu &= \frac{1}{2}\gamma\beta(\gamma+1)\frac{(P_a - \rho g H)A_c}{\hat{\omega}^2 V_0 L(1+\eta)\rho} \\ \lambda &= \gamma\beta\frac{(P_a - \rho g H)A_c}{\hat{\omega}^2 V_0 L(1+\eta)\rho} & \omega_0^2 &= 1 \end{aligned}$$

son las constantes involucradas en la ecuación (3.2). Esta ecuación diferencial es no lineal y tiene términos de forzamiento cuya amplitud es proporcional a (λ) . También se tienen términos no lineales debido a la velocidad, $\frac{W}{2}\dot{z}^2$ y a las pérdidas, $\kappa\dot{z}|z|$ y los términos de excitación paramétrica proporcionales a (α) . Como no se conoce un método para resolverla analíticamente, se utilizó el método asintótico de escalas múltiples para obtener ciertas propiedades de la solución (vease [6]).

Al aplicar el método asintótico a la ecuación (3.3), se obtuvo una relación entre la amplitud máxima de oscilación r_0 , en función del forzamiento (λ) , y de las pérdidas (κ) ;

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{\frac{4\lambda}{3\omega_0^2\kappa W}} \\ \theta &= \pm\pi. \end{aligned}$$

Una conclusión importante que nos brinda el método asintótico, es el hecho, de que la amplitud de oscilación (r_0) , con respecto a la amplitud de forzamiento (λ) , a primer orden, es aproximadamente $r_0 \sim \lambda^{\frac{1}{2}}$, es decir, la respuesta de la amplitud de oscilación es proporcional a la raíz cuadrada de la amplitud de excitación. Además, este estudio nos muestra a primera aproximación, que el coeficiente α no aparece en la expresión para r_0 , por lo que se puede concluir que a este orden no existe un efecto de resonancia paramétrica y esto puede ser debido a que la frecuencia de oscilación es igual a la frecuencia de excitación.

3.1.1 Estudio Numérico

El análisis asintótico hecho en la sección anterior permitió estimar algunas propiedades de la solución de la ecuación (3.3). En esta ecuación, fue necesario tomar en cuenta ciertas aproximaciones para poder aplicar el método de escalas múltiples. En [6] y [7] se hicieron simulaciones numéricas de la ecuación (3.2), para compararlas con los obtenidos en el análisis asintótico. El método numérico que se utilizó para calcular la solución numérica de la ecuación fue Runge-Kutta de orden 7-8.

La propiedad que se comparó fue la dependencia de la máxima amplitud de oscilación de la columna con respecto a la amplitud de excitación. Al variar la frecuencia de los desplazamientos del volumen de aire dentro de la cámara, las condiciones iniciales fueron $\dot{z} = 0$ y $z_0 = 0$, con un intervalo de tiempo de 5 minutos. En la ecuación diferencial (3.2) se tienen dos parámetros libres, por lo cual se tuvo que hacer un número considerable de simulaciones para poder, estimar los valores masa añadida $\eta = 0.1$ y la constante de disipación $\frac{K}{2} + f\frac{L}{D} = 0.45$ los cuales fueron los resultados que más se acercaron al experimento.

En la siguiente gráfica se muestra la amplitud máxima de oscilación (r_0) en función de la frecuencia de excitación, para distintas amplitudes de excitación (λ), que se obtuvieron a través de las simulaciones.

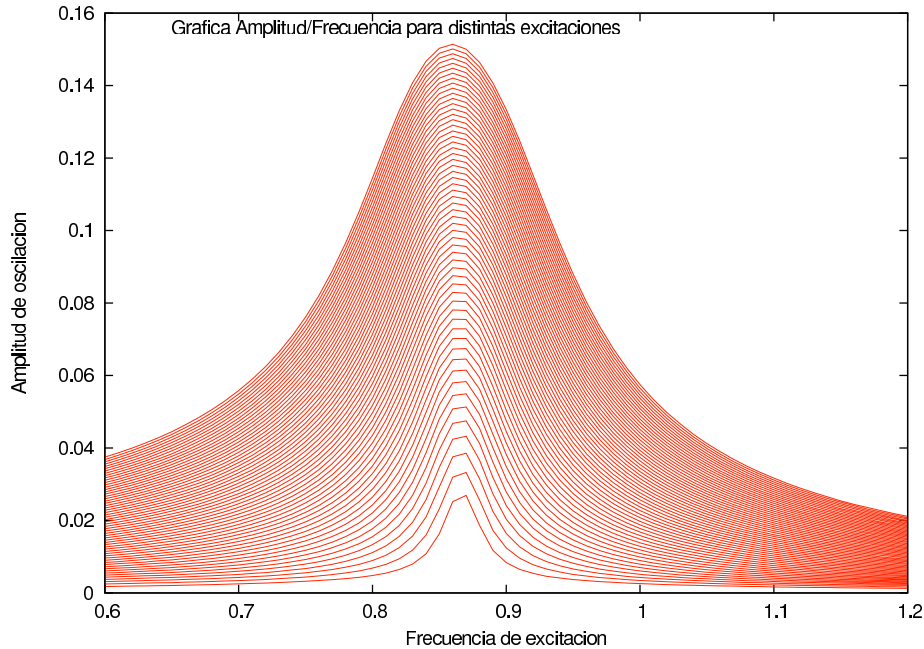


Figura 3.2: En la gráfica, cada curva corresponde a una amplitud de oscilación del fuelle distinta. En el eje horizontal representamos la frecuencia de oscilación del pistón, en el eje vertical la amplitud de oscilación de la columna de agua.

Comparando la máxima amplitud de oscilación (r_0), de cada curva de la figura (3.2), en función de la amplitud de excitación (λ), encontramos que los resultados obtenidos a partir de las simulaciones de la ecuación (3.2) se ajustan muy bien con el resultado obtenido

mediante el análisis asintótico, $r_0 \sim \lambda^{0.5}$.

3.1.2 Experimento

El procedimiento experimental está reportado en la tesis [6]. La manera de medir la amplitud promedio de las oscilaciones de la columna para una amplitud de excitación fija se realizó a través del siguiente procedimiento: se sube el nivel de la columna de agua hasta el nivel de equilibrio,⁴ se ajusta manualmente la amplitud del pistón, se enciende el motor de velocidad variable que mueve al pistón, y una vez que alcanza un movimiento periódico se comienza a capturar datos a través de los sensores del nivel de agua y posición del pistón, estos datos se promediaban y se interpolaban utilizando el método de interpolación de Lagrange, a partir de estos datos se obtiene la frecuencia promedio de excitación y la amplitud promedio de oscilación de la columna de agua para una amplitud del pistón dada. Este proceso se repitió diez veces, se promediaron las frecuencias de excitación y las amplitudes de oscilación para esa frecuencia. En la siguiente gráfica aparecen las curvas promedio para cada amplitud de oscilación.

⁴ El nivel de equilibrio es el mismo en todas las mediciones.

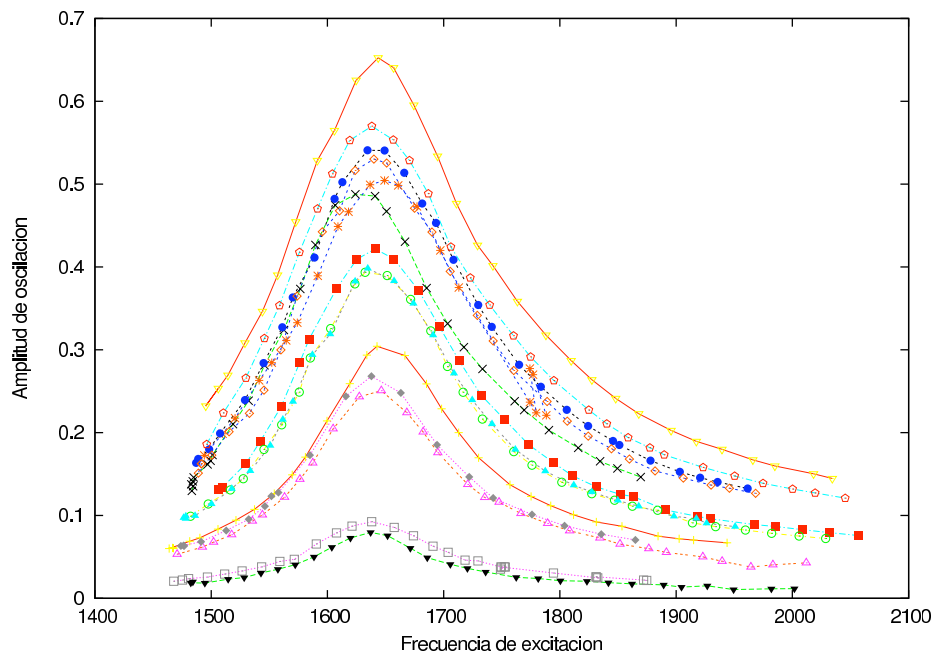


Figura 3.3: En la gráfica se muestran los resultados obtenidos experimentalmente de la amplitud de oscilación en el eje vertical, contra la frecuencia de excitación en el eje horizontal. Cada curva corresponde a una amplitud de oscilación del pistón dada.

Como se observa en la figura (3.3), la frecuencia de resonancia depende de la amplitud de excitación, sin embargo, su comportamiento no tiene una tendencia bien definida, ya que esta frecuencia de resonancia se encuentra en un intervalo muy pequeño. La dependencia de la amplitud de oscilación de la columna, respecto a la amplitud del cambio en el volumen de la cámara de compresión, se muestran en la gráfica (3.4), a una escala logarítmica en ambos ejes, con lo cual se observa que tiene dos comportamientos, para amplitudes de excitación baja se tiene $r \sim \lambda$ y conforme aumenta la amplitud de excitación la pendiente disminuye de 1 a 0.7, es decir, $r \sim \lambda^{0.7}$.

Si se consideran las incertidumbres de la medición en la altura de la columna de agua, se observa que se puede ajustar la curva de la misma forma que la que se obtuvo con el método asintótico. Ahora de la figura (3.2), si fijamos una frecuencia de oscilación cercana a la resonancia y se grafica la amplitud de oscilación correspondiente a esa frecuencia, contra la amplitud de la excitación y las comparamos con los datos experimentales, se observa que coinciden como se puede apreciar en la siguiente figura.

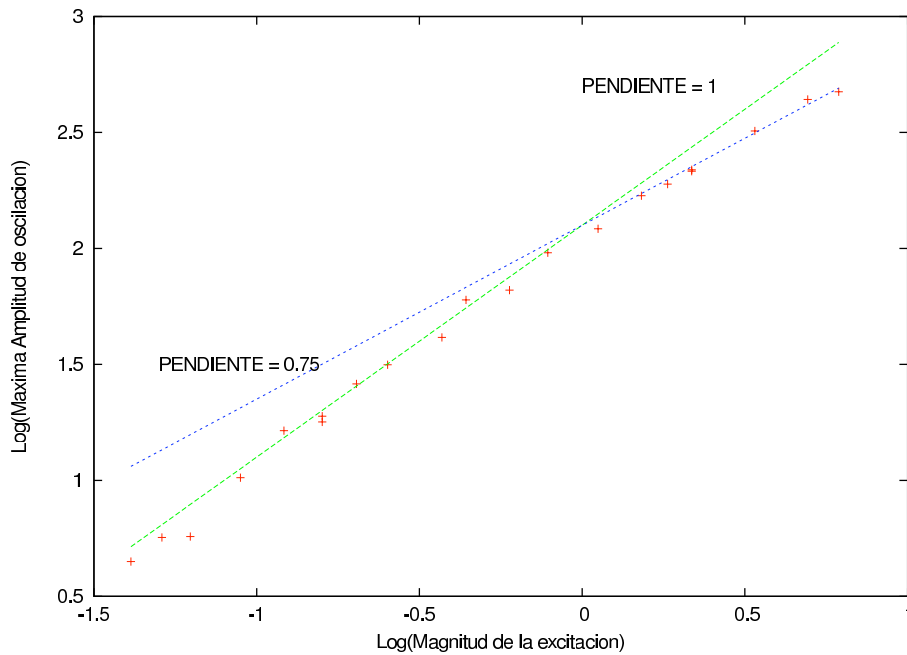


Figura 3.4: En la gráfica se muestra el logaritmo de la máxima amplitud contra el logaritmo de la amplitud de excitación. Donde se observan los distintos comportamientos de las amplitudes de excitación menores $r \sim \lambda$ y $r \sim \lambda^{0.7}$.

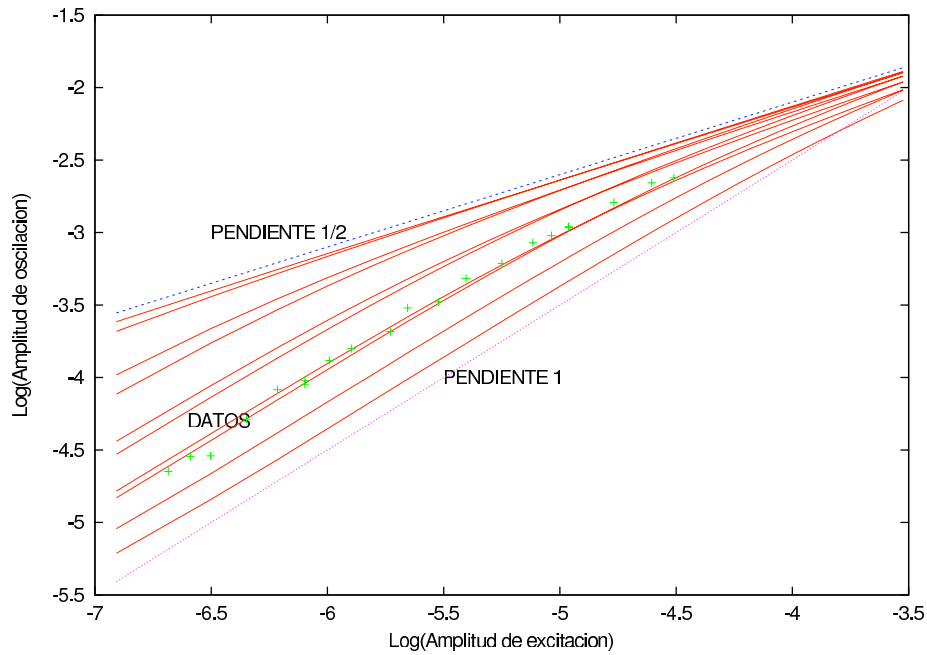


Figura 3.5: En esta gráfica log-log se muestra la amplitud de oscilación contra la amplitud de excitación en rojo, los puntos verdes son los datos obtenidos en el experimento y en azul los máximos obtenidos de la figura (3.2) que forman una recta de pendiente un medio.

A partir de la figura (3.5) se concluye que la discrepancia entre la razón de crecimiento de los resultados asintóticos y numéricos respecto a los experimentales, es la incapacidad de ajustar de forma precisa los máximos de las curvas experimentales representadas en la figura (3.3).

Sistema de Bombeo

4.1 Descripción

Para poder obtener una descripción clara del comportamiento del sistema de bombeo, debemos suponer un fluido ideal⁵, en el cual podemos construir un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, utilizando como coordenadas a z_1 y z_2 que indican los desplazamientos verticales de sus superficies libres alrededor de sus posiciones de equilibrio, dentro del tubo resonante y la cámara de compresión, tal como se ve en la figura (4.1).

Para ello debemos utilizar la ecuación de *Bernoulli* a través de dos líneas de corriente, una que une el nivel del agua del depósito principal con el nivel del agua dentro del tubo resonante y otra para el nivel del agua del depósito receptor y el nivel de agua dentro de la cámara de compresión.

En nuestro sistema de bombeo, el cambiar el volumen dentro de la cámara de compresión genera un cambio de presión dentro de la cámara, esta variación de volumen modifica la fuerza de presión, la cual sirve de acoplamiento en ambas ecuaciones diferenciales. Para que este sistema idealizado no se aleje demasiado de la realidad, es necesario agregarle términos que representan las diversas pérdidas que no se consideran al aplicar la ecuación de *Bernoulli* y que se debe esencialmente a los efectos por viscosidad, los cuales acarrearán pérdidas por fricción en las paredes del tubo, además de términos de vorticidad generados en la entrada del tubo resonante.

Para poder garantizar la efectividad del modelo debemos dividir el ciclo en dos fases, es decir, la fase en donde el agua oscila únicamente en los tubos sin intercambio del fluido (fase de no bombeo) y la fase de intercambio (fase de bombeo), en donde no resulta preciso

⁵ Es en el caso de movimientos de fluidos en los que carecen de importancia la conductividad térmica y la viscosidad.

hablar de la solución con este modelo, ya que la posición de la superficie del agua dentro del tubo resonante, ya no representa el desplazamiento del fluido dentro del tubo.

4.1.1 Fase de no bombeo

El movimiento del agua dentro del tubo resonante y de desagüe en nuestro sistema de bombeo se puede describir a través de sus líneas de corriente correspondientes a cada tubo, las cuales están representadas de manera esquemática en la figura (4.1).

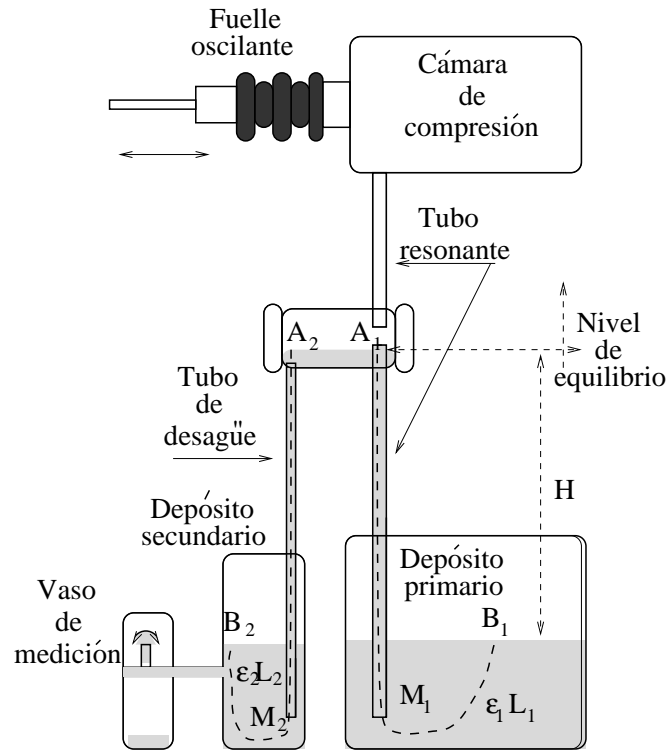


Figura 4.1: Diagrama del dispositivo experimental montado en el laboratorio que se usó en el estudio del sistema de bombeo excitado paramétricamente.

En el diagrama se han trazado líneas de corriente que damos por hecho que existen a lo largo de los dos tubos (ducto resonante y ducto de desagüe). Para cada una de estas líneas de corriente debemos considerar la forma dependiente del tiempo de la ecuación (2.17) que es la ecuación de *Bernoulli*, la cual nos dice que a lo largo de una línea de corriente C :

$$\int^c \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega = Constante.$$

A continuación, sustituiremos el potencial de las fuerzas volumétricas Ω , por el valor correspondiente para el campo gravitacional, que depende de la posición z_i , con $i = 1, 2$, del punto en cuestión sobre la posición de equilibrio que se encuentra a una altura H sobre el cuerpo de agua al que están conectados.

Consideremos los puntos en los extremos de cada una de las líneas de corriente que se indican en la figura como A_i y B_i , a partir de la ecuación de *Bernoulli* podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$\int_{B_1}^{A_1} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{s}_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{P_{A_1} - P_{B_1}}{\rho} + g(z_1 + H) = 0 \quad (4.1)$$

$$\int_{B_2}^{A_2} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{s}_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{P_{A_2} - P_{B_2}}{\rho} + g(z_2 + H) = 0 \quad (4.2)$$

En este sentido, la posición de estas superficies libres empiezan a oscilar alrededor del punto de equilibrio, acoplándose estas ecuaciones a través del volumen desplazado en la cámara de compresión, que actúa como un resorte, que al comprimirse y descomprimirse crea esta diferencia de volumen que nos arroja por tanto una diferencia de presión dentro de la cámara de compresión. Además $P_{B_1} = P_{B_2} = P_A$ es la presión atmosférica y $P_{A_1} = P_{A_2} = P_c$ es la presión de la cámara de compresión. Entonces, para obtener una expresión clara de P_c en términos de los desplazamientos de sus superficies libres z_1 y z_2 , debemos suponer que la compresión resultante de la oscilación del agua dentro de los tubos es adiabática, por lo que podemos utilizar la siguiente relación:

$$PV^{-\gamma} = \text{Constante}, \quad (4.3)$$

donde γ es la compresibilidad del aire, y dadas las condiciones iniciales para nuestro sistema de bombeo,⁶ obtenemos $P_0 = P_A - \rho g H$. Entonces el volumen se calcula sustrayendo el volumen desplazado al volumen inicial que se da al desplazarse el nivel del agua entre z_1 y z_2 , es decir, $V_c = V_0 - A_R z_1 - A_c z_2$, donde A_R y A_c son las áreas de las superficies libres en el tubo resonante y la cámara de compresión respectivamente. Aplicando entonces la expresión para la compresión adiabática obtenemos lo siguiente, $P_c V_c^{-\gamma} = P_0 V_0^{-\gamma}$, por lo que obtenemos una expresión más clara para la presión dentro de la cámara, es decir:

$$P_c = P_0 \left(1 - \frac{A_R z_1 + A_c z_2}{V_0} \right)^{-\gamma} \Rightarrow P_c = (P_A - \rho g H) \left(1 - \frac{A_R z_1 + A_c z_2}{V_0} \right)^{-\gamma}. \quad (4.4)$$

Podemos sustituir esta ecuación en la expresión para las líneas de corriente, y obtener:

$$\int_{B_i}^{A_i} \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} \cdot d\vec{s}_i + \frac{u_i^2}{2} + \frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[\left(1 - \frac{A_R z_1 + A_c z_2}{V_0} \right) - 1 \right]^{-\gamma} + g(z_i + H) = 0 \quad (4.5)$$

para $i = 1, 2$.

⁶ Valores correspondientes para el volumen V_0 y la presión P_0 que se tienen en la situación de equilibrio.

Como no conocemos en forma exacta a \vec{u}_i como función, ni del tiempo t ni de la longitud s_i , es necesario aproximar la integral que aparece como primer término en estas ecuaciones y que representa, en términos mecánicos, la contribución inercial de la masa *virtual*. Esta incluye, además de la masa real del fluido del tubo, una masa añadida por efectos del borde. Esta característica viene de suponer que la velocidad tiene una caída súbita en un punto específico de nuestra línea de corriente. Haremos un análisis de la forma que tiene $\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t}$ a lo largo de ambas líneas de corriente de tal manera que podamos separar la integral en varias partes. Debemos tomar en cuenta las siguientes suposiciones: primero el fluido es incompresible y el transporte a lo largo de cada sección del tubo es constante; y segundo, que la velocidad \vec{u}_i en el punto B_i es prácticamente nula y se irá incrementando a lo largo de la línea de corriente hasta alcanzar un valor con el cual se mantendrá independiente de s_i a partir del punto M_i , que se encuentra en la boca del tubo; en el caso del tubo resonante esta velocidad permanecerá constante hasta la superficie libre A_1 , por el contrario para el tubo de desagüe debemos tomar en cuenta que éste se abre al llegar a la cámara, y así, la velocidad de oscilación de la superficie A_2 será menor que aquella en el ducto resonante a razón de $\frac{A_D}{A_c}$ que son las áreas del ducto de desagüe y de la cámara de compresión respectivamente. Si consideramos las condiciones anteriores podemos separar la integral en dos partes para el tubo resonante y en tres para el tubo de desagüe. En la figura (4.2) se ilustra de una manera cualitativa la dependencia de $\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t}$ con s_i para ambos ductos, por lo tanto nuestra integral para el tubo resonante queda de la siguiente manera:

$$\int_{A_1}^{B_1} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \cdot d\vec{s}_1 = \int_{B_1}^{M_1} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \cdot d\vec{s}_1 + (L_R + z_1) \frac{du_1}{dt} \quad (4.6)$$

Para el tubo de desagüe obtenemos la siguiente expresión:

$$\int_{B_2}^{A_2} \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \cdot d\vec{s}_2 = \int_{B_2}^{M_2} \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \cdot d\vec{s}_2 + \left(L_D \frac{A_c}{A_D} + L_C + z_2 \right) \frac{du_2}{dt} \quad (4.7)$$

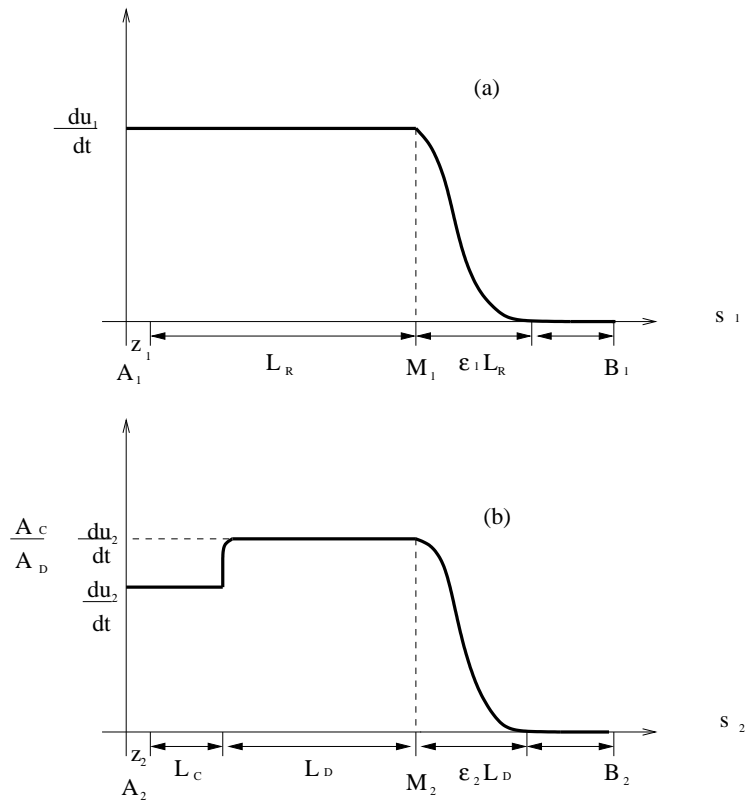


Figura 4.2: La función $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ a lo largo de la línea de corriente $A_i B_i$ para los tubos resonante y de desagüe respectivamente

De esta manera hemos reducido el problema a la parte de la línea de corriente fuera del tubo, y observando la figura anterior notamos que el área bajo la curva, que difícilmente podríamos calcular entre B_i y M_i , puede representarse como una fracción de área conocida y calculada entre M_i y A_i , por lo que podríamos interpretar lo anterior como un incremento en la longitud efectiva de cada ducto por los efectos del borde [8] [9]. Este incremento es llamado masa añadida a la contribución inercial y lo representaremos como ϵ , que es una fracción de longitud para cada ducto.

Con todo lo anterior nuestro sistema de ecuaciones (4.5), queda completamente definido, sólo falta considerar un término de forzamiento que habíamos dejado de lado. Este forzamiento es debido a la energía que se le proporciona al sistema por medio de las oscilaciones de un pistón dentro de la cámara de compresión. Con el movimiento de este pistón se genera una diferencia de volumen y presión dentro de la cámara que a su vez hace oscilar las masas de agua expuestas en los tubos de resonancia y desagüe. En este sistema una de las variables que podemos manipular y mantener fija para diferentes frecuencias, es la amplitud de oscilación del pistón. En este sentido, vale la pena mencionar que existe una proporcionalidad directa entre la diferencia del volumen dentro de la cámara y la amplitud del pistón. Así, podemos obtener una relación entre la amplitud de oscilación del pistón y

la amplitud de oscilación de las columnas de agua, a través de la relación lineal que existe en el desplazamiento del volumen dentro de la cámara de compresión, por lo que se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & ((1 + \epsilon_1)L_r + z_1)\frac{du_1}{dt} + \frac{u_1^2}{2} + \\ & + \frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[\left(1 - \frac{A_R z_1}{V_0} + \frac{A_c z_2}{V_0} + \frac{A_p b \cos(\Omega t)}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + g z_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & ((1 + \epsilon_2)L_D \frac{A_c}{A_D} + L_c + z_2)\frac{du_2}{dt} + \frac{u_2^2}{2} + \\ & + \frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[\left(1 - \frac{A_R z_1}{V_0} + \frac{A_c z_2}{V_0} + \frac{A_p b \cos(\Omega t)}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + g z_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde A_p es el área transversal del pistón y $b \cos(\Omega t)$, la amplitud del desplazamiento del mismo pistón.

Para finalizar sólo falta introducir los términos correspondientes a las pérdidas por fricción y formación de vórtices. La primera de ellas resulta específicamente por los esfuerzos cortantes entre las partículas del fluido que se mueven en trayectorias paralelas con distintas velocidades y el desplazamiento entre las distintas capas del fluido con las paredes del tubo, de ahí que la pérdida de presión se deba a la fricción con las paredes. Cuando tenemos un flujo turbulento, la presencia de vórtices en todo el fluido incrementa los esfuerzos viscosos entre las distintas capas y, por tanto, las pérdidas de presión por fricción son mayores que en el caso laminar.

La otra pérdida que consideramos es generada por la formación de anillos en la entrada de los tubos. Estos anillos son producidos a través del vaivén del flujo oscilante dentro de los tubos y se forman periódicamente como ya se dijo en la boca del tubo, de forma semejante a los aros de humo que produce un fumador. La geometría en la boca de los tubos juega un papel muy importante en la magnitud de las pérdidas por formación de vórtices.

Ahora bien, para visualizar las ecuaciones anteriores de una manera más clara y sencilla tomemos a $u_i = \dot{z}_i$ y $\frac{du_i}{dt} = \ddot{z}_i$, además de que las expresiones asociadas a las pérdidas de presión por vorticidad y la fricción con las paredes del tubo son proporcionales a $\dot{z}|\dot{z}|$, con esta expresión podremos garantizar que la pérdida de presión actúe en el sentido correcto durante todo el ciclo, es decir, en contra del movimiento, por lo tanto la ecuación que se propone para modelar el movimiento en cada uno de los tubos será de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & ((1 + \epsilon_1)L_R + z_1)\ddot{z}_1 + \frac{\dot{z}_1^2}{2} + \left(\frac{K}{2} + f \frac{L}{D_1} \right) \dot{z}_1 |\dot{z}_1| + g z_1 + \\ & + \frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[\left(1 - \frac{A_R z_1}{V_0} + \frac{A_c z_2}{V_0} + \frac{A_p b \cos(\Omega t)}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
 & ((1 + \epsilon_2)L_D \frac{A_c}{A_D} + z_2)\ddot{z}_2 + \frac{\dot{z}_2^2}{2} + \left(\frac{K}{2} + f\frac{L}{D_2}\right)\dot{z}_2|z_2| + gz_2 + \\
 & + \frac{P_A - \rho gH}{\rho} \left[\left(1 - \frac{A_R z_1}{V_0} + \frac{A_c z_2}{V_0} + \frac{A_p b \cos(\Omega t)}{V_0}\right)^{-\gamma} - 1 \right] = 0 \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

donde K es el coeficiente asociado a las pérdidas por vorticidad, f a las pérdidas por fricción dentro del tubo y D_1 y D_2 los diámetros del tubo resonante y de desagüe respectivamente.

Otra manera sencilla y práctica que utilizaremos para la descripción del movimiento de las masas de agua dentro del tubo resonante y de desagüe, es utilizando una aproximación importante en la conducta principal del sistema, gobernada por los términos lineales. Este resultado es muy importante ya que nos permite pensar en analizar un sistema linealizado para obtener información básica del sistema, por lo tanto, podemos recurrir a un modelo mecánico como el de la figura (4.3) para interpretar el comportamiento básico del sistema de bombeo. Las masas corresponden al agua dentro de cada tubo, el resorte del lado izquierdo a la fuerza gravitacional en el tubo resonante, el resorte que acopla las masas a la cámara de compresión y los amortiguadores, corresponden a las pérdidas de presión debido a los términos no lineales. La pérdida en el ducto resonante se debe principalmente a la generación de vórtices en la boca del tubo, en tanto que la pérdida en el tubo de desagüe es debida a la fricción. Una información importante que obtenemos al linealizar nuestras ecuaciones es la frecuencia natural de oscilación del sistema, por lo tanto, las ecuaciones linealizadas quedan de la siguiente manera:

$$(1 + \epsilon_1)L_R\ddot{z}_1 + gz_1 - \frac{P_A - \rho gH}{\rho}\gamma \left(\frac{A_R}{V_0}z_1 + \frac{A_c}{V_0}z_2 + \frac{A_p b}{V_0}\cos(\Omega t)\right) = 0 \quad (4.12)$$

$$(1 + \epsilon_2)L_D\ddot{z}_2 + gz_2 - \frac{P_A - \rho gH}{\rho}\gamma \left(\frac{A_R}{V_0}z_1 + \frac{A_c}{V_0}z_2 + \frac{A_p b}{V_0}\cos(\Omega t)\right) = 0 \quad (4.13)$$

Este es un sistema lineal forzado. La frecuencia natural de oscilación $\omega_{0\pm}$ es :

$$\omega_{0\pm} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - cb)^2}}{2} \quad (4.14)$$

con

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{g - \frac{P_A - \rho gH}{\rho}\gamma \frac{A_R}{V_0}}{(1 + \epsilon_1)L_R}, \quad b = \frac{g - \frac{P_A - \rho gH}{\rho}\gamma \frac{A_c}{V_0}}{(1 + \epsilon_1)L_R}. \\
 c &= \frac{g - \frac{P_A - \rho gH}{\rho}\gamma \frac{A_R}{V_0}}{(1 + \epsilon_2)L_D}, \quad d = \frac{g - \frac{P_A - \rho gH}{\rho}\gamma \frac{A_c}{V_0}}{(1 + \epsilon_2)L_D}.
 \end{aligned}$$

Como podemos ver en las ecuaciones anteriores los términos a, cyb, d , sólo difieren en las dimensiones de los ductos de resonante y desagüe, por lo tanto la solución de la parte

homogénea es la misma. La frecuencia más alta ω_0^+ corresponde a la oscilación que determina un ciclo de compresión-descompresión dentro de la cámara (representado por el resorte de acoplamiento en la figura 4.3), mientras la frecuencia baja ω_0^- está asociada a una oscilación del centro de masa con respecto a su posición de equilibrio. Para bombear agua buscamos que el sistema esté en resonancia con la frecuencia más alta ω_0^+ de manera que las superficies libres en ambos ductos oscilen en fase hacia arriba y hacia abajo.

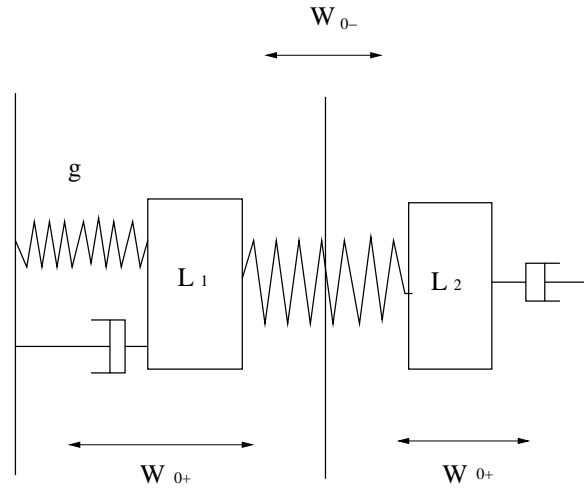


Figura 4.3: Modelo utilizado para simplificar el comportamiento del sistema de bombeo.

4.1.2 Fase de Bombeo.

En el proceso de bombeo se opera en dos fases⁷ que se acoplan para formar un ciclo; a primera vista la manera para encontrar una solución al problema completo sería encontrando soluciones analíticas para cada parte, consiguiendo acoplarlas en las interfases para describir un comportamiento cíclico del sistema, pero un impedimento importante para encontrar una solución analítica global, es debido a la discontinuidad que existe en las ecuaciones cuando hay bombeo.

El procedimiento correspondiente para obtener las ecuaciones en la fase de bombeo es muy similar al que utilizamos en la fase de no bombeo, es decir, debemos utilizar nuevamente la ecuación de *Bernoulli* para cada una de las líneas de corriente, sólo que en esta situación, el punto A_1 de la figura (4.1), se encuentra un poco más arriba de la boca del tubo resonante debido a la columna de fluido que se forma sobre la boca del tubo cuando el agua se derrama dentro de la cámara de compresión, conectada al tubo de desagüe. De esta manera y para poder utilizar la ecuación de *Bernoulli*, debemos suponer que la línea de corriente en el tubo resonante es perpendicular a la superficie del agua, aún y cuando ésta rebasa la boca del tubo y el flujo ya no está confinado dentro del mismo. La altura de

⁷ Fase de bombeo y Fase de no bombeo.

la columna de agua que crece hasta que el agua se derrama durante el bombeo, varía en función de la velocidad del flujo dentro del tubo resonante. Este es un estudio experimental realizado en [10] [3], donde se discute este fenómeno y se explica el procedimiento que se utilizó para obtener esta expresión para la altura X de la columna de agua sobre la boca del tubo (ver figura 4.4):

$$X(u) \simeq \sqrt[3]{\frac{Du^4}{g^2}} \quad (4.15)$$

donde D es el diámetro del tubo resonante, u la velocidad del flujo y g la gravedad. En la figura (4.4) se trata de representar el interior de la cámara de compresión durante la fase de bombeo.

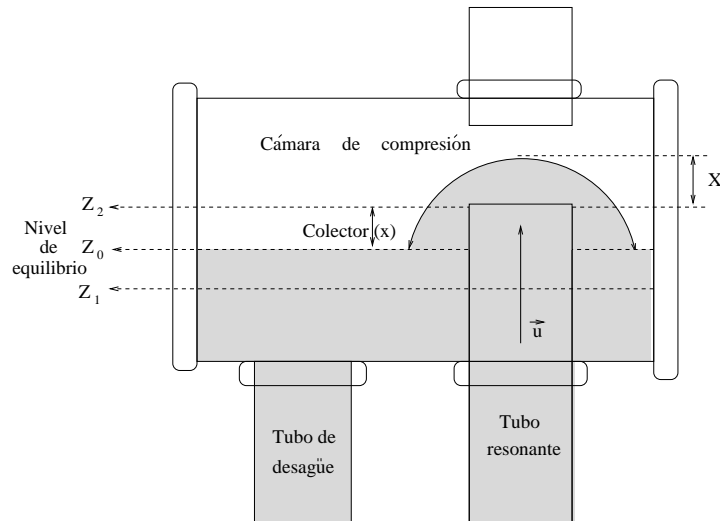


Figura 4.4: Esquema del interior de la cámara de compresión durante la fase de bombeo. La variable $X(u)$, representa la altura del menisco de agua en función de la velocidad del fluido.

Para expresar de manera correcta el desarrollo de las ecuaciones de bombeo, además de la altura de la columna (L_R), se deben considerar dos nuevas cantidades, la primera de ellas es el *colector* (x), el cual es una medida de longitud en la parte superior del tubo resonante, que se encuentra entre el nivel del agua en posición de equilibrio y la altura máxima del tubo resonante dentro de la cámara de compresión; la segunda cantidad que debemos tomar en cuenta es el cambio en el nivel de la superficie libre (A_R) en la cámara de compresión, ya que esta superficie, durante el bombeo, ya no es representativa del movimiento del fluido dentro del ducto debido al derrame de agua proveniente del tubo resonante. Podemos expresar esta diferencia en términos de la velocidad del flujo, en lugar de desplazamiento libre dentro de él, entonces debemos tomar en cuenta un incremento en

el nivel debido al bombeo (z_0):

$$A_c \frac{dz_0}{dt} = A_R \frac{dz_1}{dt}$$

entonces

$$z_0 = \frac{A_R}{A_c} \int_{t_0}^t \dot{z}_1 dt \quad (4.16)$$

donde t_0 es el momento en que comienza a derramarse el agua. Por lo tanto tomando en cuenta todo lo anterior, nuestro modelo para la fase de bombeo podrá escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \left(L_R + \epsilon_1 L_R + \frac{X(\dot{z}_1)}{2} \right) \ddot{z}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dX(\dot{z}_1)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{K}{2} + f \frac{L}{D_1} \right) \dot{z}_1 | \dot{z}_1 | + \\ & + \frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[\left(1 - \frac{A_R(x + X(\dot{z}_1))}{V_0} - \frac{A_c(z_2 + z_0)}{V_0} - \frac{A_p b \cos(\Omega t)}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + \\ & + g(x + X(\dot{z}_1)) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} & \left(L_D \frac{A_c}{A_D} + z_2 + z_0 \right) \ddot{z}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d(z_2 + z_0)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{K}{2} + f \frac{L}{D_1} \right) \dot{z}_2 | \dot{z}_2 | + \\ & + \frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[\left(1 - \frac{A_R(x + X(\dot{z}_1))}{V_0} - \frac{A_c(z_2 + z_0)}{V_0} - \frac{A_p b \cos(\Omega t)}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + \\ & + g(z_2 + z_0) = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde $X(\dot{z}_1)$ esta dado en la ecuación (4.15). Debemos mencionar que las ecuaciones anteriores son las correspondientes a la fase de bombeo y están en términos de otras variables independientes de las que se utilizaron en la fase de no bombeo. Esta diferencia radica principalmente en que la variable que se utiliza en la ecuación para el tubo resonante es la velocidad del fluido en lugar de los desplazamientos de las superficies libres dentro de la cámara de compresión. Esto es debido a que cuando hay bombeo, este desplazamiento ya no es representativo del movimiento del fluido dentro del ducto. A diferencia de la ecuación del tubo de desagüe, donde el cambio consiste en agregar a la posición del agua en la cámara (z_2), el incremento del nivel debido al bombeo (z_0).

Para la deducción de la ecuación del tubo resonante (4.17), debemos observar la figura (4.2), en la cual podemos ver una diferencia entre la gráfica del tubo resonante (4.2a) y la gráfica del tubo de desagüe (4.2b). Esto significa que durante el bombeo $\frac{\partial \dot{z}_1}{\partial t}$ debe comenzar cerca de cero en el origen (que corresponde a la parte superior de la columna de agua), para crecer rápidamente hasta alcanzar el valor de \dot{z}_1 a la altura del colector.

En este punto la integral en la ecuación de *Bernoulli* se puede aproximar como el área de un triángulo de altura \dot{z}_1 y de base $X(\dot{z}_1)$, lo que explica el término $\frac{X(\dot{z}_1)}{2}$ añadido a la

longitud L_R en la ecuación (4.17).

En la tabla (4.1) se muestran las diferencias más importantes entre las ecuaciones de bombeo y no bombeo para el tubo resonante y de desagüe.

Cuadro 4.1: Tabla de comparación de términos entre las ecuaciones de bombeo y no bombeo.

Fase de NO Bombeo	Fase de Bombeo
$((1 + \epsilon_1)L_R + z_1)\ddot{z}_1$	$\left(L_R + \epsilon_1 L_R + \frac{X(z_1)}{2}\right)\ddot{z}_1$
$\frac{1}{2}(z_1)^2$	$\frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dt}(z_1)\right)^2$
$\frac{A_R z_1}{V_0}$	$\frac{A_R(x+X(z_1))}{V_0}$
$\frac{A_c z_2}{V_0}$	$\frac{A_c(z_2+z_0)}{V_0}$

Capítulo 5

Estudio Numérico

Luego de ser definido el modelo diferencial, el problema que se presenta es obtener su solución, es decir, obtener la función que exprese el comportamiento cualitativo-cuantitativo de nuestro sistema. Si a esto agregamos que las ecuaciones que aparecen como resultado del proceso de modelación⁸ junto con las condiciones iniciales del sistema y los coeficientes que intervienen en la ecuación, son el resultado de procesos de mediciones experimentales, podemos llegar a la conclusión de que enfrentar el problema por medio de métodos analíticos, no sólo es una tarea compleja sino que no existen métodos analíticos razonablemente sencillos capaces de proporcionar soluciones al sistema. Esto se debe a que nuestras ecuaciones diferenciales son no lineales⁹. Además la ecuación es no diferenciable cuando pasa del modo oscilante al modo de bombeo. Los métodos analíticos y asintóticos no pueden aplicarse de manera sencilla para encontrar una solución a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales, siendo necesario recurrir a los métodos numéricos.

Un procedimiento alternativo para resolver el problema consiste en la integración numérica de las ecuaciones. El uso de los métodos numéricos es muy versátil en cuanto al acoplamiento de las fases de oscilación y bombeo a lo largo del ciclo, por lo tanto, es posible determinar la importancia de cada término, a partir de la explicación del comportamiento observado para así entender más claramente el papel que juegan los distintos factores que están involucrados.

El método que utilizaremos en la resolución numérica es el método explícito Runge-Kutta 7-8 de alta resolución, el cual permite resolver ecuaciones diferenciales asociadas a un problema físico sobre geometrías complicadas. A continuación describiremos las características y el algoritmo utilizado en la simulación numérica.

⁸ Idealización de un proceso real.

⁹ En los términos de disipación y de compresión adiabática.

5.1 Características

El diagrama de flujo del algoritmo utilizado para la descripción numérica de las ecuaciones del problema aparece en la figura (5.1), donde básicamente se usan en la integración numérica, las ecuaciones del tubo resonante para las fases de bombeo y no bombeo. Cuando se pasa de una fase a otra se usan como condiciones iniciales de la nueva fase los puntos calculados en la última iteración de la fase previa y se resuelven las ecuaciones convenientes a la nueva fase. Por otra parte, es necesario identificar los puntos donde se sitúan las interfases ya que en el caso del cambio de no bombeo a bombeo, este punto está regulado por el tamaño de la columna de agua caracterizada por X en la ecuación (4.12).

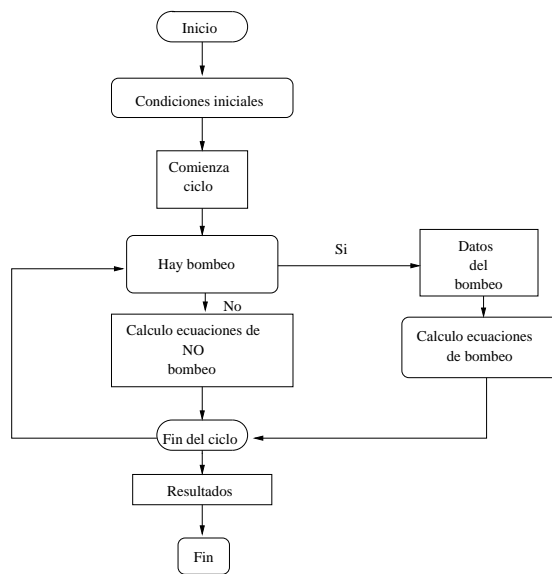


Figura 5.1: Diagrama del algoritmo

Para explicar el funcionamiento del esquema numérico se debe pensar en una escala de tiempo lo suficientemente larga para la simulación del experimento, por lo que se debe definir un tiempo máximo final t_{max} y un tamaño de paso de integración Δt , para las condiciones iniciales siguientes: la velocidad $\dot{z}_i = 0$, posición $z_i = 0$, con $i = 1, 2, \dots$, junto con la amplitud del desplazamiento máximo del fuelle (b) y su frecuencia (Ω). Entonces se deben resolver las ecuaciones diferenciales durante un tiempo apropiado en el cual se estabiliza y llega a la situación de régimen de bombeo estacionario .

Las ecuaciones que se utilizaron en la simulación numérica vienen de las ecuaciones (4.10)(4.14) y son las ecuaciones del ducto resonante para las fases de no bombeo y bombeo respectivamente y las escribiremos como si fueran un sistema de ecuaciones de primer orden, por lo que obtenemos las siguientes ecuaciones, donde el primer sistema pertenece al régimen de oscilación y el segundo al régimen de bombeo estacionario.

5.1.1 Ecuaciones de NO bombeo.

$$\dot{z}_1 = v_1 \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 = & \frac{\frac{v_1^2}{2} + \left(\frac{K}{2} + f\frac{L}{D_1}\right)v_1|v_1| + gz_1}{(1 + \epsilon_1)L_R + z_1} + \\ & + \frac{\frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[\left(1 - \frac{A_R z_1}{V_0} + \frac{A_c z_2}{V_0} + \frac{A_p b \cos(\Omega t)}{V_0}\right)^{-\gamma} - 1 \right]}{(1 + \epsilon_1)L_R + z_1} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\dot{z}_2 = v_2 \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_2 = & \frac{\frac{v_2^2}{2} + \left(\frac{K}{2} + f\frac{L}{D_2}\right)v_2|v_2| + gz_2 +}{((1 + \epsilon_2)L_D \frac{A_c}{A_D} + z_2)} \\ & + \frac{\frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[\left(1 - \frac{A_R z_1}{V_0} + \frac{A_c z_2}{V_0} + \frac{A_p b \cos(\Omega t)}{V_0}\right)^{-\gamma} - 1 \right]}{((1 + \epsilon_2)L_D \frac{A_c}{A_D} + z_2)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

El sistema de ecuaciones anterior pertenece al régimen de oscilación y el siguiente al régimen de bombeo para los ductos resonante y de desagüe.

5.1.2 Ecuaciones de bombeo.

$$\dot{z}_1 = v_1 \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 = & \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{dX(v_1)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{K}{2} + f\frac{L}{D_1}\right)v_1|v_1| + g(x + X(v_1))}{\left(L_R + \epsilon_1 L_R + \frac{X(v_1)}{2}\right)} + \\ & + \frac{\frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[\left(1 - \frac{A_R(x + X(v_1))}{V_0} - \frac{A_c(z_2 + z_0)}{V_0} - \frac{A_p b \cos(\Omega t)}{V_0}\right)^{-\gamma} - 1 \right]}{\left(L_R + \epsilon_1 L_R + \frac{X(v_1)}{2}\right)} \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\dot{z}_2 = v_2 \quad (5.7)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{d(z_2 + z_0)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{K}{2} + f\frac{L}{D_1}\right)v_2|v_2|}{\left(L_D \frac{A_c}{A_D} + z_2 + z_0\right)} +$$

$$+\frac{P_A-\rho gH}{\rho} \left[\left(1 - \frac{A_R(x+X(v_2))}{V_0} - \frac{A_c(z_2+z_0)}{V_0} - \frac{A_p b \cos(\Omega t)}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + g(z_2 + z_0) = 0 \quad (5.8)$$

$$(L_D \frac{A_c}{A_D} + z_2 + z_0)$$

donde X proviene de la ecuación (4.12). Usando esta ecuación calculamos la altura del menisco de agua que se forma en la boca superior del tubo resonante en la fase de bombeo, que es función de la velocidad de la columna de agua ($X(v)$). Así también debemos calcular $\frac{dX}{dt}$ que es necesaria en las ecuaciones (5.6),(5.8); esta relación está determinada de la siguiente forma:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{4 \frac{Dv^3}{g^2}}{3 \left(\sqrt[3]{\frac{Dv^4}{g^2}} \right)^2} \frac{dv}{dt}. \quad (5.9)$$

La siguiente figura muestra de forma esquemática el ciclo de bombeo y el acoplamiento en las fases que se modelaron para la simulación numérica.

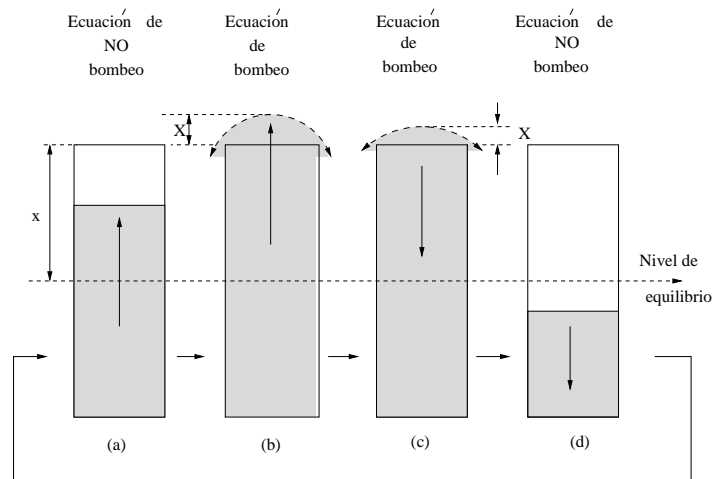


Figura 5.2: Esquema del flujo de agua a la salida del tubo resonante donde x es la altura del *colector* y X es la altura del casquete de agua que se forma a la salida del tubo debido a la velocidad del fluido. (ecuación (4.12)).

A continuación describiremos cómo es el ciclo de bombeo. En la figura (5.2a) empieza el ciclo con la velocidad de flujo hacia arriba donde $z < h_{max}$, así estamos en el ciclo de no bombeo. En la figura (5.2b) $z > h_{max}$ y $v_i > 0$ se comienza a formar el menisco de altura X , entonces estamos en el ciclo de bombeo. En la figura (5.2c) $z > h_{max}$ pero su velocidad es hacia abajo, es decir, $v < 0$ por lo que aún hay bombeo. Por último en la figura

(5.2d) $z < h_{max}$ su velocidad hacia abajo por lo tanto estamos en el ciclo de no bombeo y comienza con (5.2a) nuevamente el ciclo.

En la práctica nos interesa obtener una solución que sea comparable con los resultados experimentales, entonces es necesario tomar las dimensiones del modelo a escala que se probó en el laboratorio para realizar los experimentos, es decir, todas las variables involucradas y las dimensiones del dispositivo aparecen en la tabla (5.1) que se encuentra más adelante, por tanto la configuración utilizada para los experimentos numéricos corresponde a la del modelo que se utilizó:

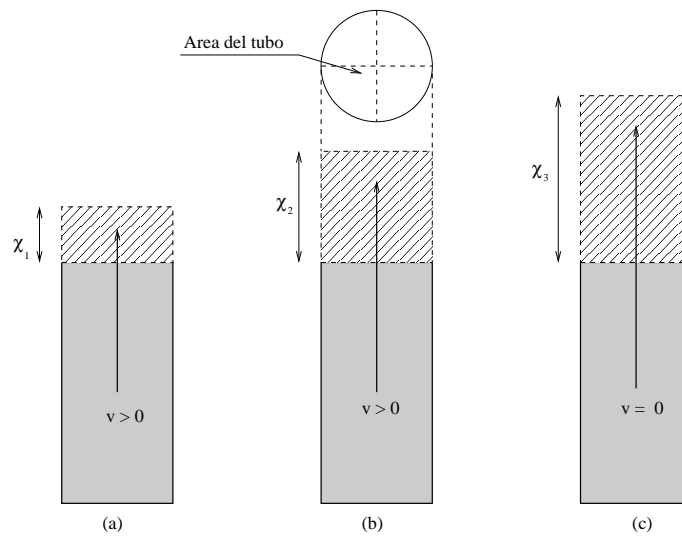


Figura 5.3: En la figura se trata de representar el *volumen virtual* χ , que se utiliza para la fase de bombeo en el estudio numérico, es decir, para la representación del fenómeno de manera virtual, se debe suponer el flujo desplazado como un sólido oscilante.

El interés principal de este trabajo es determinar el gasto hidráulico en función de la amplitud y la frecuencia del fuelle. Supongamos que, dada una amplitud del fuelle, variamos su frecuencia, entonces podemos obtener la frecuencia para la cual existe el mayor bombeo o gasto hidráulico. El cálculo del gasto hidráulico bombeado lo podemos determinar de la siguiente forma. Definimos el gasto en el ciclo i -ésimo como Q_i donde utilizamos las ecuaciones (5.5),(5.6),(5.7) y (5.8). En este caso hacemos la idealización de que la columna de agua no se desborda hacia la cámara de compresión, de esta manera la columna de agua irá creciendo en forma vertical como en la figura (5.3), siendo (χ), la altura de la columna de agua *virtual*. Para determinar χ en el intervalo de tiempo t_i a t_f , tomamos a v la velocidad del flujo y A_R el área del tubo resonante, entonces:

$$\chi = \int_{t_i}^{t_f} v_1 dt; \quad (5.10)$$

donde t_i corresponde al tiempo cuando $z_1 = h_{max}$ y $v_1 > 0$. Si consideramos que el tiempo t_f corresponde a la condición que $v_1 = 0$, entonces el gasto del ciclo i -ésimo queda definido como:

$$Q_i = A_R \chi_i \quad (5.11)$$

El gasto total es la suma del gasto bombeado en cada ciclo¹⁰, por lo tanto el gasto total queda definido como:

$$Q_T = \Sigma Q_i. \quad (5.12)$$

Esta Q_T es lo más importante en nuestra simulación, ya que es la función que podemos comparar con el bombeo realizado y medido en el experimento, en el cual para cada amplitud de oscilación del fuelle (b) fija, junto con la variación de la frecuencia (Ω), se obtiene su Q_T correspondiente, es decir:

$$Q_T(\Omega, b).$$

Podemos recapitular la integración numérica de nuestro modelo siguiendo los pasos que se muestran a continuación:

- 1.- Ajuste del ciclo de medición:
 - (a).- Ajustar el valor de la amplitud de oscilación del pistón (b).
 - (b).- Ajustar el valor de la frecuencia de oscilación del pistón (Ω).
- 2.- Condiciones iniciales en $t_0 = 0$, $z = 0$ y $v = 0$.
- 3.- Fase de estabilización.¹¹ $t_0 \longrightarrow t_1$.
- 4.- Fase de medición.¹² $t_1 \longrightarrow t_2$.
- 5.- Determinamos $Q_T(\Omega, b)$.
- 6.- Regresamos al punto (1).

5.1.3 Resultados Numéricos.

En las ecuaciones de movimiento, tanto de no bombeo como de bombeo los coeficientes que se utilizaron tienen unidades de longitud en metros [m], de masa en kilogramos [kg] y tiempo en segundos [s], estos términos aparecen en la tabla (5.1).

¹⁰ Cuando la solución de la ecuación diferencial ha alcanzado su estado estacionario de bombeo.

¹¹ Se integran las ecuaciones sin medir el gasto hidráulico.

¹² El gasto hidráulico es calculado entre $t = t_1$ hasta $t = t_2$

Estos datos son tomados del dispositivo experimental que describiremos en el capítulo 6 y el propósito principal de este estudio es poder comparar los datos de la simulación numérica, con los datos obtenidos en el dispositivo experimental, para ver qué tan bien concuerdan estos resultados. Por consiguiente, gracias al estudio numérico aplicado a las ecuaciones diferenciales obtenidas en el dispositivo experimental, se trata de comparar el gasto hidráulico teórico obtenido numéricamente, con el gasto hidráulico obtenido en el montaje experimental.

Cuadro 5.1: Valores de los parámetros del dispositivo experimental.

Variable	Significado	Valor
A_R	Área del tubo resonante	0.0019 [m ²]
L_R	Largo del tubo resonante	0.878 + 0.1 [m]
V_c	Volumen de la cámara de compresión	0.025314 [m ³]
V_f	Volumen del fuelle en reposo	0.0002603 [m ³]
L_f	Longitud del fuelle	0.095 [m]
Ω	Período de excitación externa	0.25-1.62 [s]
ϵ	Masa añadida	0.08
x	Distancia del nivel de equilibrio al punto de desborde	0.01 [m]
H	Distancia del nivel de agua en el depósito al de equilibrio	0.89 - 0.01 [m]
g	Aceleración de la gravedad	9.81 [$\frac{m}{s^2}$]
ρ	Densidad del agua	1000 [$\frac{kg}{m^3}$]
γ	Compresibilidad del aire	1.4
P_a	Presión atmosférica	78.12 [KPa]
K	Pérdidas por vorticidad	0.1
f	Pérdidas por fricción	0.06064
D_R	Diametro del tubo resonante	0.05 [m]
D_D	Diametro del tubo de desagüe	0.025 [m]

La amplitud del fuelle (b) se varió de [0.5cm] a [5.0cm] haciendo un barrido de [0.25cm]. Para cada una de estas amplitudes se variaba el período [$\frac{2\pi}{\Omega}$] de 0.2 a 1.5 y $\Delta\frac{2\pi}{\Omega} = 0.01$ [s] y se calculaban 20000 puntos por cada ciclo.

Los tiempos de simulación para t_1 y t_2 son de 100 [s] y 200 [s] respectivamente, los cuales representan la fase de medición en nuestra simulación y Δt es del orden de 0.001[s].

En la siguiente gráfica se muestra el gasto hidráulico (Q) en función del período de oscilación [$\frac{2\pi}{\Omega}$] para diferentes amplitudes, es decir, cada una de estas curvas representa una amplitud determinada del fuelle, en la cual, se realiza un barrido de frecuencias, para determinar la frecuencia de resonancia ó la de mayor eficiencia en el bombeo.

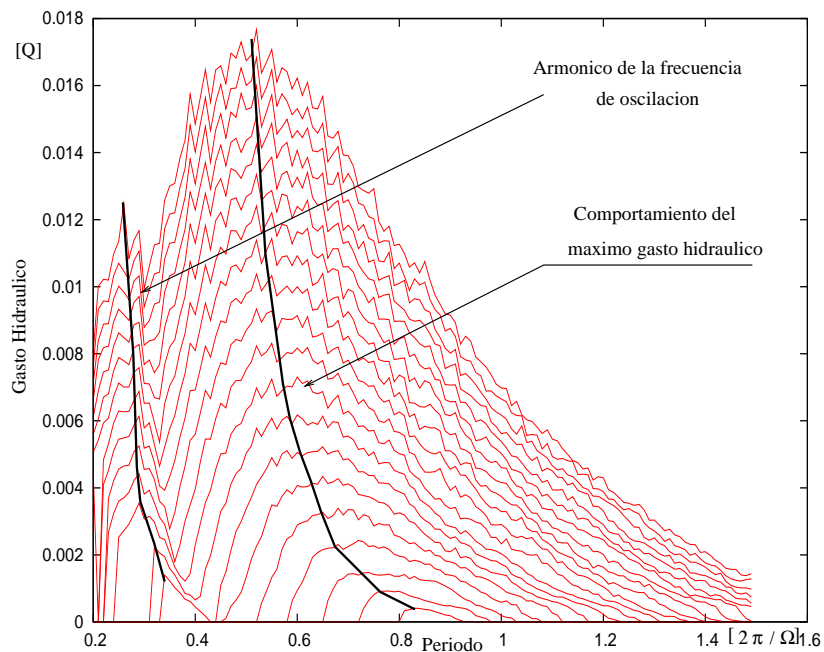


Figura 5.4: El eje vertical representa el gasto hidráulico Q medido en metros cúbicos $[m^3]$ y el eje horizontal el período de excitación $[\frac{2\pi}{\Omega}]$ en segundos $[s]$. Cada curva representa un valor determinado de la amplitud de oscilación del pistón o fuente.

En la gráfica anterior, podemos observar un pico principal, el cual representa el máximo gasto en la simulación. El proceso de medición se realiza de derecha a izquierda respecto a la gráfica, es decir, el proceso inicia con las frecuencias más altas del estudio, en ese sentido, se encuentra más adelante un segundo pico que representa el primer armónico en la frecuencia de excitación. Cabe resaltar que el pico principal tiene un corrimiento a la izquierda, que se manifiesta más claramente para amplitudes pequeñas y se estabiliza para amplitudes más grandes. En la siguiente gráfica en 3D, se intenta ilustrar la dependencia entre el gasto hidráulico $[Q]$, el período $[\frac{2\pi}{\Omega}]$ y la amplitud $[b]$.

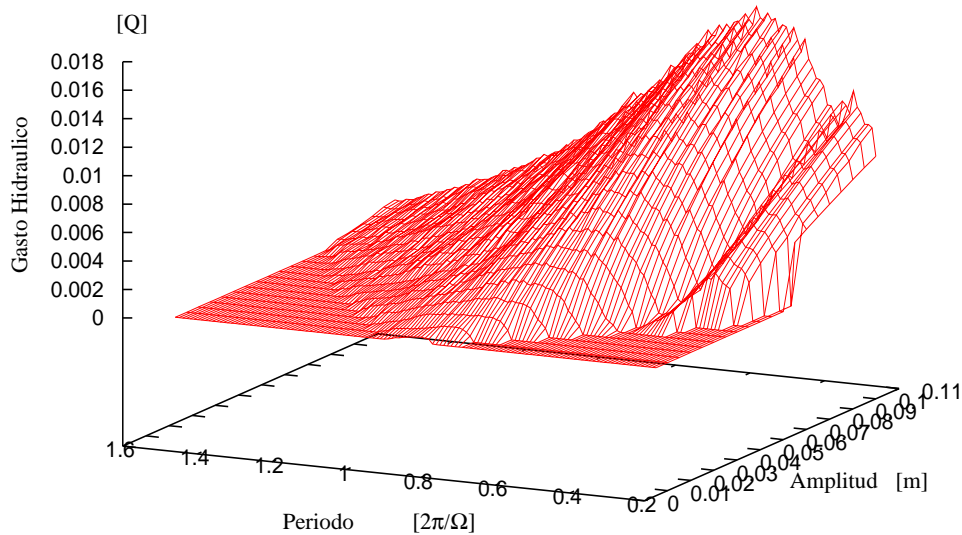


Figura 5.5: En la gráfica podemos observar el gasto hidráulico Q en función del período $\frac{2\pi}{\Omega}$ y la amplitud b .

En las gráficas anteriores se observa un comportamiento poco uniforme, con muchos picos, los cuales pueden atribuirse a las condiciones iniciales de cada ciclo en el que se variaba la frecuencia para una amplitud determinada. Esto es debido a que el bombeo se va dando por brotes, lo cual significa que, dependiendo de Ω y del intervalo de integración $[t_1, t_2]$, el cálculo del gasto hidráulico contiene brotes completos o no, lo cual complica la obtención de los gastos máximos en el bombeo por lo que debemos interpolar los datos con la finalidad de suavizar la curva y obtener de una manera más sencilla el mayor gasto hidráulico. En la siguiente gráfica se muestra un acercamiento a la cresta de una curva de la gráfica (5.4). Los valores obtenidos de Q no caen sobre una curva suave, por lo que podemos interpolar una parábola a dichos datos, y así obtener el máximo de Q en el vértice de la parábola.

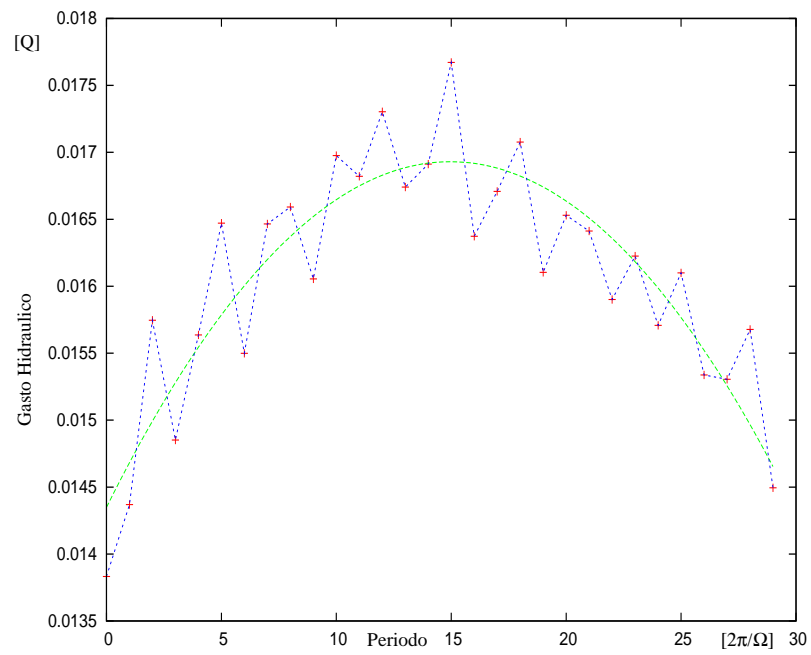


Figura 5.6: En la gráfica se ilustra el ajuste de las curvas por medio de interpolación.

Una vez obtenidos los máximos en el gasto hidráulico podemos graficarlos en función de la amplitud, por lo que obtenemos la siguiente gráfica.

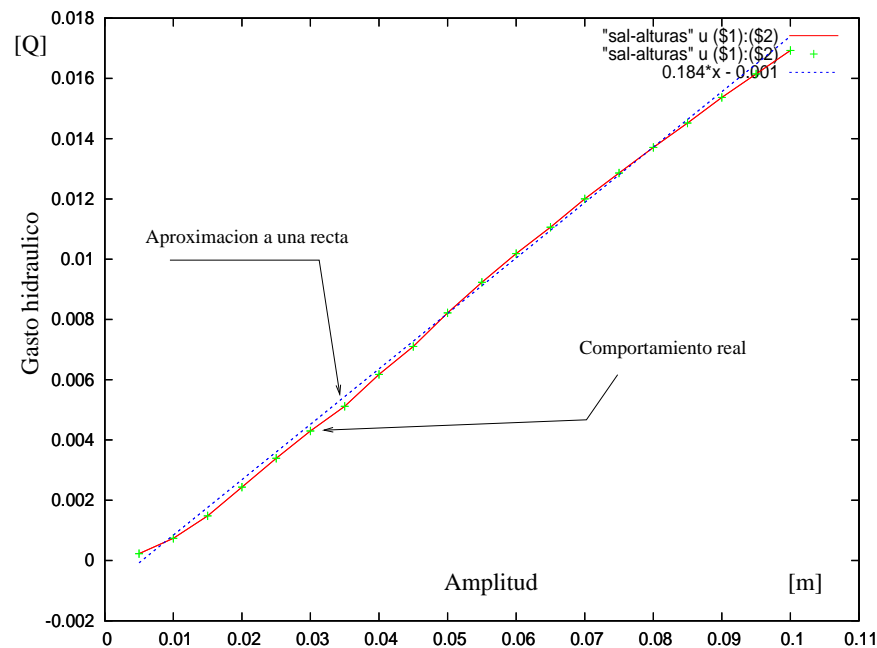


Figura 5.7: Gasto hidráulico Q en función de la amplitud b .

En la gráfica anterior se observa la dependencia lineal entre el gasto hidráulico (Q) y la amplitud (b), a la cual se le hizo un ajuste lineal al comportamiento, con lo que obtuvimos la ecuación de la recta:

$$Q = 0.284b - 0.001;$$

que representa teóricamente el comportamiento de las variables de estudio, entonces podemos concluir que existe una relación lineal entre estas variables, es decir, que a mayor amplitud en la frecuencia de excitación obtenemos un mayor bombeo.

Ahora, nos interesa averiguar si este comportamiento lineal entre el máximo gasto (Q), en función de la amplitud (b) del fuelle, tiene el mismo comportamiento que en el experimento.

Capítulo 6

Experimentos

6.1 Descripción del Dispositivo Experimental

En este capítulo se describirán las características más importantes del dispositivo experimental que se utilizó como modelo de nuestro sistema de bombeo. Este sistema excitado paraméricamente mediante la variación periódica del volumen dentro de la cámara de compresión, provoca un movimiento periódico de la columna de agua dentro del tubo resonante; estas oscilaciones de la columna de agua se maximizan cuando el sistema entra en resonancia con el forzamiento, lo cual se verá reflejado en el bombeo o gasto hidráulico (Q) obtenido, para diferentes amplitudes y frecuencias de oscilación del fuelle.

Se explicará brevemente la composición del dispositivo experimental montado en el laboratorio y el procedimiento de los experimentos realizados, junto con las variables involucradas y la dependencia de las mismas.

6.1.1 Particularidades del dispositivo experimental

La descripción del dispositivo experimental que se montó para el estudio de nuestro sistema de bombeo está constituido por las partes, que se muestran en la siguiente figura.

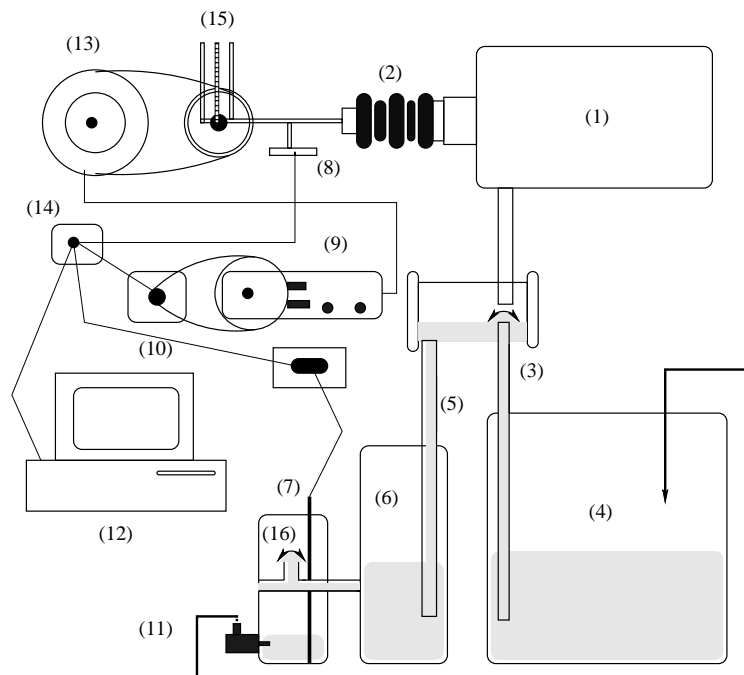


Figura 6.1: Diagrama del dispositivo experimental. 1.- Cámara de compresión. 2.- Fuelle que sustituye al pistón dentro de la cámara de compresión. 3.- Tubo resonante. 4.- Depósito primario ó del tubo resonante. 5.- Tubo de desagüe. 6.- Depósito secundario ó del tubo de desagüe. 7.- Dispositivo para medir el nivel del agua dentro del depósito secundario. 8.- Potenciómetro para medir la posición en la amplitud del fuelle. 9.- Fuente de voltage variable. 10.- Motor de pasos. 11.- Bomba de agua. 12.- Sistema de captura y almacenamiento de datos. 13.- Motor de velocidad variable. 14.- Tarjeta de adquisición de datos. 15.- Brazo de giro variable. 16.- Vaso de medición del gasto hidráulico.

Este dispositivo está formado básicamente por tubería de PVC y acrílico transparente, la tubería de PVC se utilizó únicamente en conexiones y para la construcción de la cámara de compresión. Las otras piezas son tubería de acrílico transparente las cuales fueron colocadas de manera estratégica en los lugares donde era necesario la visualización del flujo de agua debido a que es muy importante mantener siempre las mismas condiciones iniciales que es donde interviene el nivel de equilibrio de la columna de agua, además de que es útil para visualizar las burbujas en las pruebas de fugas en el dispositivo. Las piezas de acrílico y PVC están pegadas en algunos casos, con pegamento PVC, en otros con silicón y en otros con ambas.

La cámara de compresión se encuentra justamente arriba del tubo resonante, con la finalidad de que en la construcción del dispositivo se tuviera el menor número de piezas que conectar y por lo tanto, menos posibilidades de fugas, las cuales debían ser bajas durante un largo tiempo, es decir, para poder realizar el experimento debíamos de subir la columna de agua hasta un nivel de equilibrio, el cual debía permanecer en esa posición durante un

tiempo lo suficientemente largo para concretar el experimento.¹³

Para determinar las dimensiones del dispositivo se tuvo que considerar las siguientes condiciones: la primera fue el tamaño del laboratorio donde se construyó ya que la altura máxima del tubo resonante tenía que ser menor a la altura del laboratorio, esto es, por la posición vertical del tubo resonante, ya que si el tubo resonante se inclina, la superficie superior de la columna de agua al oscilar no es lo suficientemente plana, lo cual genera que se formen pequeñas ondas en su superficie, lo que hace inviable determinar el nivel del agua con la precisión deseada. El depósito primario debía tener un área transversal mucho mayor al área transversal del tubo resonante, ya que la variación del nivel de agua durante las oscilaciones de la columna, debe ser pequeña comparada con la altura de la columna. Esta variación está relacionada con la cantidad de agua que se desplaza durante la fase de bombeo, por lo tanto, el nivel de agua del depósito primario debe permanecer constante durante todo el experimento y así mantener con esto las condiciones iniciales; esto se logra también, con una bomba de agua que se utiliza en los limpiadores de los autos, esta bomba se encuentra en la parte inferior de el vaso de medición y su función es precisamente regresar el agua al depósito resonante durante cada ciclo del experimento y así mantener su nivel de agua. Este vaso se construyó con piezas de PVC y su volumen fue determinado a partir del volumen desplazado de agua en el máximo gasto hidráulico.

En la cámara de compresión se producen las oscilaciones de la columna de agua a través del cambio en el volumen, este cambio de volumen es generado por el movimiento periódico de un fuelle de automóvil. Este dispositivo es un elemento de plástico flexible como un acordeón y con un solo orificio parecido a un globo, el fuelle está sujeto con una abrazadera a una pieza de PVC la cual está sellada con silicón. Este material es muy flexible y se adhiere muy bien a las piezas de PVC. Este fuelle cumple con el mismo papel del pistón, solo que el fuelle es mucho más fácil de utilizar, además de asegurar una disminución de fugas en la cámara de compresión ya que como se había mencionado anteriormente, esta cámara de compresión debe de estar bien sellada, para poder mantener el nivel de equilibrio de la columna de agua, en un lapso de tiempo lo suficientemente largo como para poder medir el gasto hidráulico durante todo el experimento sin que haya variaciones importantes en las condiciones iniciales, es decir, poder medir la cantidad de agua bombeada a partir de una amplitud, una frecuencia de oscilación y un nivel de equilibrio fijo durante toda la fase del experimento.

¹³ Estos cambios de presión pueden deberse a fugas mínimas de aire dentro de la cámara de compresión o bien a las variaciones de la presión atmosférica. En particular el nivel de agua bajaba aproximadamente 2 mm en una hora, tiempo suficiente para realizar el experimento.

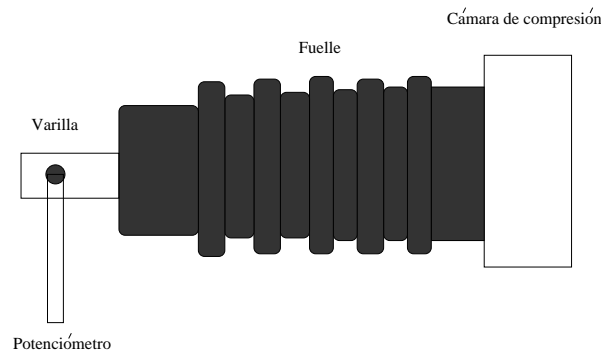


Figura 6.2: Diagrama del fuelle

El mecanismo de compresión del fuelle consta de una biela, un juego de poleas para reducir la velocidad angular del motor y un brazo de giro variable con el cual podemos controlar la amplitud de oscilación; el brazo de giro está conectado a un motor de corriente directa alimentado con una fuente de voltaje variable. Para controlar la velocidad del motor se variaba el voltaje suministrado por la fuente de voltaje variable. Como esta fuente tiene un control de voltaje mecánico y una perilla de ajuste fino, en esta perilla se colocó una polea con diámetro fijo, que está conectada por medio de una banda elástica, a un motor de pasos controlado por un programa de computadora. La adquisición de datos es a través de una tarjeta analógica-digital -DAQ6009 de National Instruments- la cual tiene tres canales analógicos de entrada, uno de salida y ocho canales digitales de entrada y salida. Estos canales digitales son utilizados para accionar el motor de pasos y los distintos relevadores para accionar otros dispositivos como la bomba de agua y la fuente de voltaje.

Para poder medir la amplitud en el movimiento del fuelle, se tuvo todo el tiempo una opción de medida visual la cual consistía en una señal¹⁴ que indica su posición y una regla fija, esta señal se movía alrededor de un punto de referencia. Para mejorar el control y reducir el error en la medición de esta variable, se usó un potenciómetro que estaba unido por medio de una patita de metal y una abrazadera a la biela conectada en el fuelle, que al variar su posición provocaba un cambio en su resistencia. La variación de la resistencia producía una variación de voltaje el cual era registrado por la tarjeta de adquisición de datos.

El dispositivo contaba también con un sensor de altura del agua dentro del depósito secundario. Este sensor está compuesto por una varilla de acrílico, la cual, a lo largo lleva tres cables, un par de ellos con recubrimiento y el otro sin recubrimiento, el cual funcionaba como un capacitor variable debido al cambio de altura en el agua. Se utilizó un sensor de capacitancia variable que está formado por dos circuitos resonantes RCL, uno de ellos tiene una frecuencia de resonancia fija $\sqrt{L_0 C_0}$ y el otro tiene una frecuencia de resonancia variable debido a que C depende de la altura del agua. La diferencia de frecuencias entre ambos osciladores se convierte en un nivel de voltaje, el cual refleja la altura de la columna

¹⁴ Una navaja colocada por medio de abrasaderas en posición vertical a la biela.

de agua debido al cambio de capacitancia producido por el movimiento del nivel del agua dentro del depósito secundario. Este cambio en el nivel del agua entre los cables del sensor genera un cambio en el dieléctrico entre ellos, provocando una variación de la capacitancia, por lo que podemos obtener una relación entre la diferencia de voltaje y la altura del agua.

6.1.2 Calibración de los Sensores.

En principio, para la calibración del sensor de posición colocado en la biela, se hicieron varias pruebas. La prueba consistía en darle vueltas al brazo de giro variable con lo que obteníamos el movimiento de la biela, la cual recorría la longitud máxima del fuelle, este brazo de giro se movía manualmente de tal forma que el desplazamiento de la biela fuera de aproximadamente de milímetro en milímetro en una longitud de 5cm , es decir, en cada milímetro se tomaba la diferencia de voltaje que arrojaba el potenciómetro y mediante un programa de computadora llamado LabView se tomaron los datos de la diferencia de voltaje entre la distancia recorrida, por lo que obtuvo la siguiente gráfica en la que se puede observar la proporcionalidad directa entre estas dos variables.

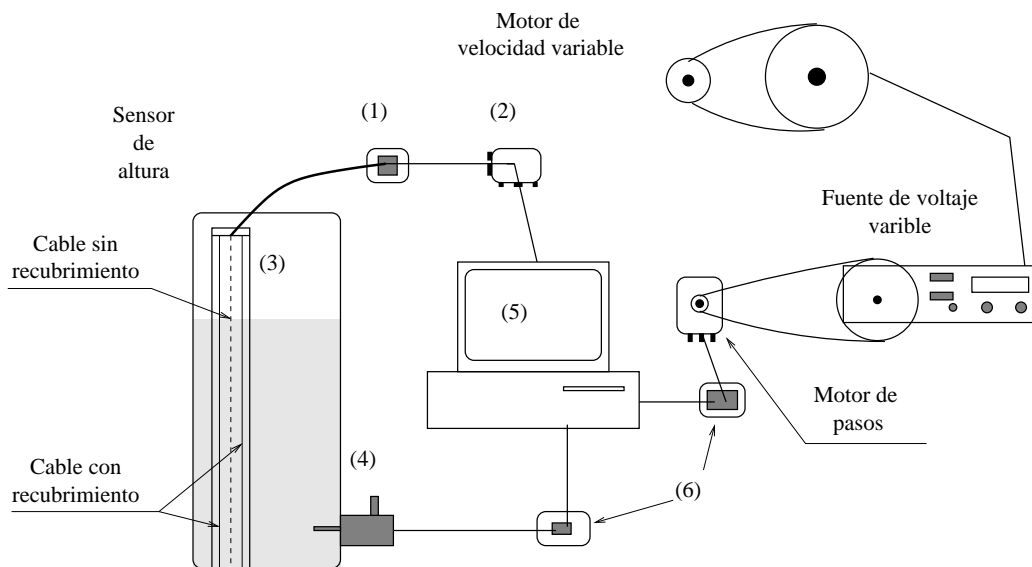


Figura 6.3: Diagrama del sensor de altura y el motor de pasos

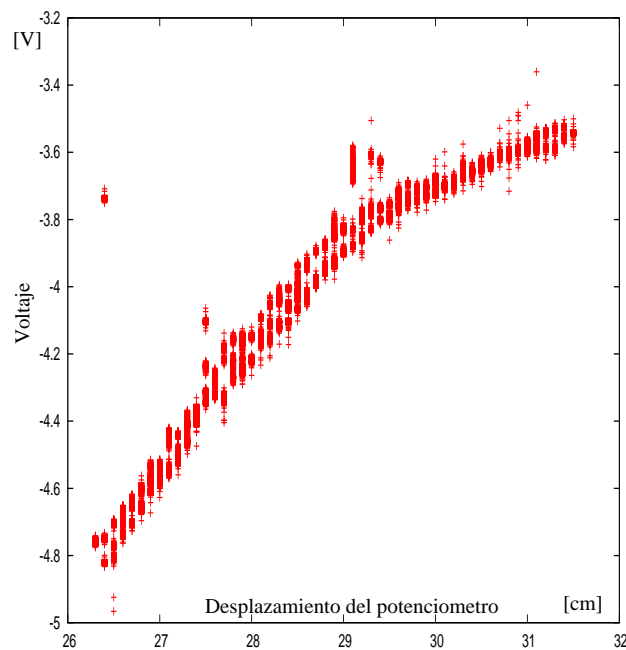


Figura 6.4: Curva de calibración del fuelle.

Para la calibración del sensor de altura en el nivel del agua basado en capacitancia variable, se usó un “gato” mecánico de automovil¹⁵, el cual tiene un movimiento vertical girando su manivela. Este elemento fue colocado en el depósito de desagüe de tal manera que al colocar en el gato el sensor de altura, se fuera sumergiendo en el agua y así al ir girando la manivela el sensor bajaba en el interior del depósito. Una vez armado el dispositivo la calibración fue sencilla, consistió básicamente en ir sumergiendo el sensor en el agua para que variara la capacitancia entre los cables; esta prueba se hizo varias veces para distintas longitudes de inmersión, es decir, cada giro de la manivela del “gato” el sensor de capacitancia se introducía en el agua aproximadamente $5mm$. De esta forma se hicieron varias pruebas de calibración dando una vuelta completa, media vuelta y un cuarto de vuelta a la manivela, entonces al ir bajando el sensor, el cambio en la capacitancia registraba una señal de salida que era amplificada por el circuito para que finalmente llegara a la tarjeta de adquisición de datos y procesada en el mismo programa de computadora que se usó en la calibración anterior, es decir, se usó el programa LabView en donde se graficó la diferencia de voltaje a la salida del dispositivo contra la distancia sumegida en el agua por el sensor.

En la siguiente gráfica podemos observar que existe una dependencia casi lineal entre estas dos variables, a esta gráfica se le ajustó un polinomio de cuarto orden para obtener la curva de calibración.

¹⁵ En particular es gato mecánico de automóvil utilizado en los autos Volkswagen.

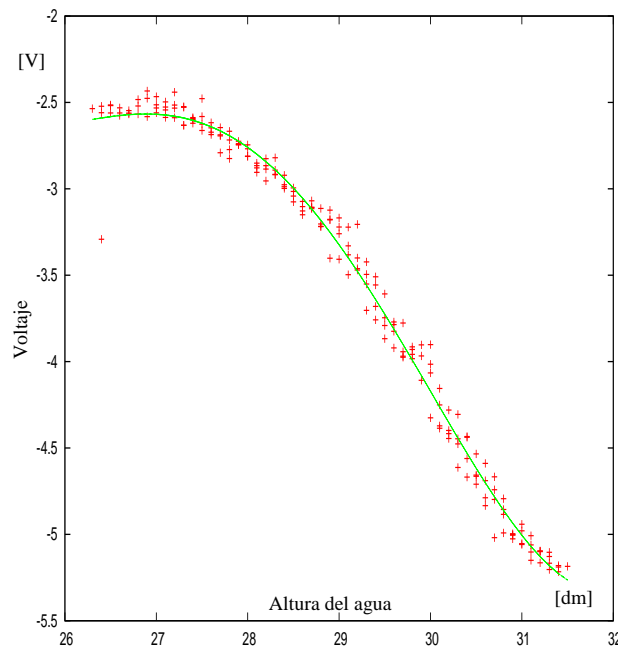


Figura 6.5: Curva de calibración del sensor de alturas.

6.1.3 Adquisición de datos

Una vez calibrados los sensores, se pueden medir las variables que nos interesan, es decir, podemos medir de una manera clara y sistemática la altura del nivel de agua del depósito secundario y la frecuencia de oscilación del fuelle.

La automatización del dispositivo facilitó mucho el trabajo ya que el experimento requiere de tomar un número considerable de datos, además de un barrido de frecuencias amplio para cada amplitud de oscilación del fuelle. De esta manera podemos encontrar la frecuencia de oscilación apropiada para una mayor eficiencia en la fase de bombeo, es decir, cuando la frecuencia de oscilación entra en resonancia con la frecuencia natural del tubo resonante se produce un gasto hidráulico mayor, el cual se traduce en mayor eficiencia en el bombeo. Por tal motivo se optó por crear un sistema de captura de datos y un sistema de control de frecuencias automático, ambos controlados por una computadora.

Para el sistema de captura de datos se utilizó una tarjeta analógica-digital que contiene puertos de entrada y salida, analógicos como digitales. Esta tarjeta es muy versátil, ya que sirvió también para controlar la frecuencia de oscilación del fuelle, por medio de un motor de pasos que regula el voltaje proporcionado por la fuente al motor. La adquisición de los datos provenientes de los sensores de altura del nivel del agua y de la posición del fuelle se capturaron a través de las entradas analógicas. Toda esta recopilación de datos era ejecutada con unos programas computacionales escritos en lenguaje C, los cuales ayudaron a la captura e interpolación de los datos provenientes de los sensores, además del control

del motor de pasos, el interruptor del motor de velocidad variable y la bomba de automóvil que regresa el agua del vaso de medición al depósito principal durante cada ciclo del experimento. La computadora que se usó es la herramienta principal para la automatización del dispositivo; contenía una distribución de Linux llamada Fedora Core 4 como sistema operativo.

Con todo lo anterior, únicamente falta mencionar el algoritmo que se requiere para la realización ordenada en la medición. Este experimento debe llevar un control en los pasos a seguir para un mayor control de las variables involucradas, estos pasos a seguir serán mencionados a continuación:

1.- Manualmente se toma el brazo con eje de giro y con la señal en la biela se coloca en su amplitud correspondiente.

2.- Se sube el nivel de agua en el tubo resonante hasta el nivel de equilibrio.

3.- Se inicia el programa que controla el dispositivo:

- (a) Número de muestras.
- (b) Pasos de avance.
- (c) Pasos iniciales.
- (d) Pasos finales.
- (e) Amplitud.
- (f) El programa verifica que todos los dispositivos estén encendidos y comienza el primer ciclo .

4.- Empieza la captura de datos de los sensores de posición del fuelle y de altura del nivel de agua en el depósito de desagüe.

5.- Interpolación de los datos obtenidos.

6.- Fin de ciclo.

7.- Se enciende la bomba de automóvil que regresa el agua del depósito de desagüe al depósito resonante.

8.- Se enciende el motor de pasos y gira los pasos correspondientes para variar la frecuencia del siguiente ciclo.

9.- Repetición del ciclo, regresando al paso 4.

Una vez obtenidos los datos experimentales del gasto hidráulico en función de la amplitud y la frecuencia, podemos estimar el flujo a partir de la frecuencia resonante para una amplitud fija, es decir para una amplitud determinada obtenemos su frecuencia resonante, para la cual se obtiene el mayor gasto hidráulico. En la figura (6.6), podemos observar, para

diferentes valores de amplitud y frecuencia, el gasto hidráulico obtenido experimentalmente.

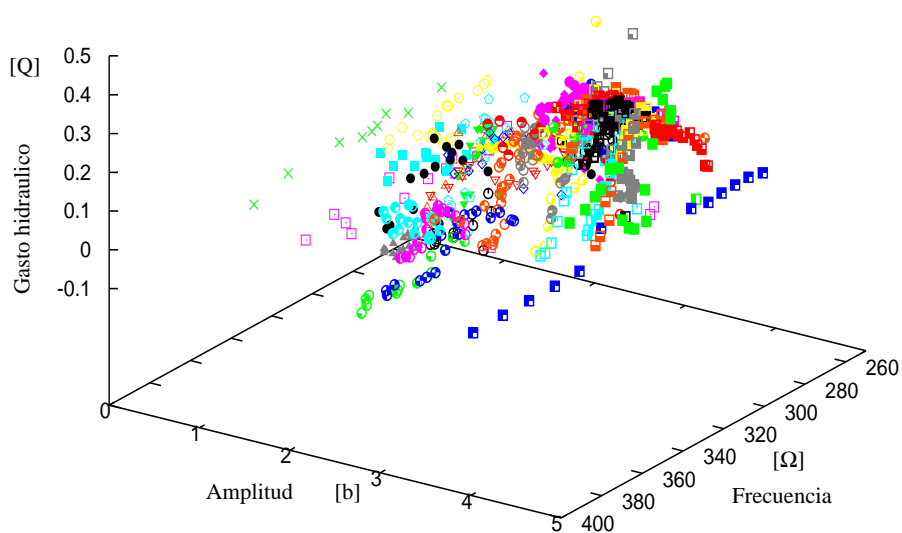


Figura 6.6: Gasto hidráulico $[Q] = \left[\frac{dl}{s}\right]$ en función de la amplitud $[b]$ dada en cm y la frecuencia $[\Omega] = \left[\frac{1}{s}\right]$, cada uno de los colores y figuras en la gráfica representa una amplitud distinta.

La gráfica anterior, no nos permite ver con claridad los valores para los cuales existe un mayor gasto, por lo que es necesario hacer una interpolación de los puntos por una función cuártica, la cual está representada por una superficie (ver figura 6.7). El ajuste se hizo haciendo mínimos cuadrados de los datos respecto a una función polinomial cuártica de la frecuencia y la amplitud del fuelle o pistón. Con la gráfica (6.7) podemos observar de una manera más clara el comportamiento del flujo con respecto a la amplitud y frecuencia, para poder compararlas con las obtenidas en el estudio numérico.

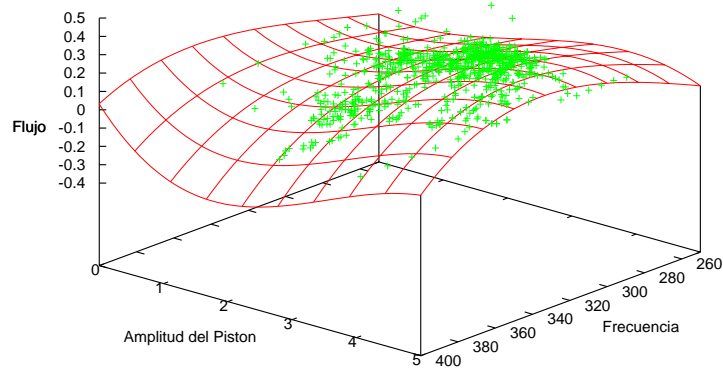


Figura 6.7: Esta gráfica representa la interpolación cuártica del los datos de la gráfica (6.6). Flujo $[Q]$ dado en decilitros por segundo, en función de la frecuencia $[\Omega]$ y la amplitud $[b]$.

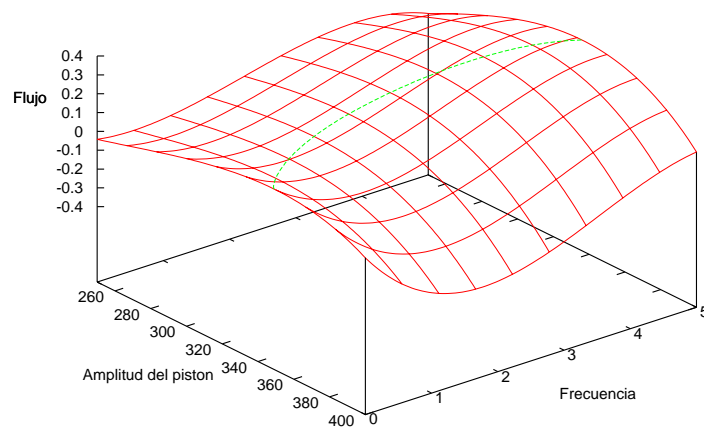


Figura 6.8: La gráfica representa la superficie cuártica sin la nube de puntos, tiene además una curva que representa el máximo flujo de bombeo para un una amplitud del piston dada. Flujo $[Q]$ dado en decilitros por segundo, en función de la frecuencia $[\Omega]$ y la amplitud $[b]$.

En las gráficas (6.7),(6.8) podemos observar gracias a la interpolación el efecto del mayor gasto hidráulico obtenido en función de la amplitud, sin tener hasta ahora un comportamiento claro de las funciones que nos interesan en el experimento, por lo que es

necesario recurrir a otro perfil de nuestra gráfica(6.8).

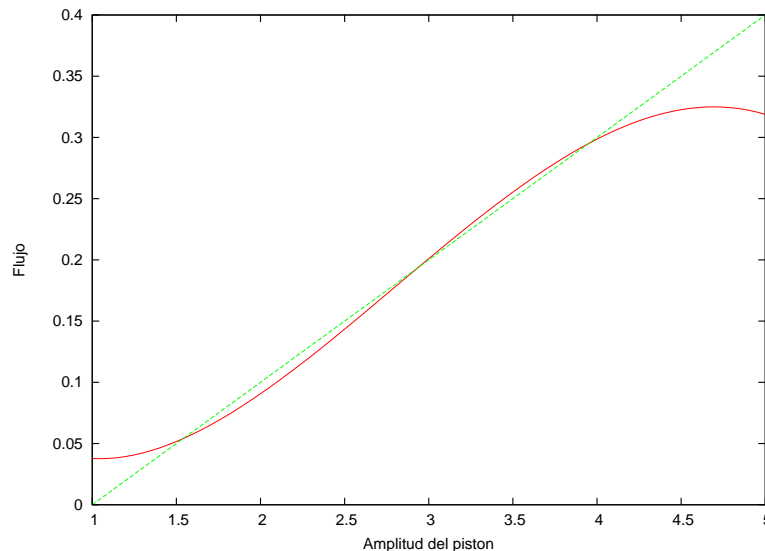


Figura 6.9: Esta gráfica, representa la curva de los máximos obtenidos en la gráfica anterior pero solo en las variables de amplitud del fuelle contra el máximo flujo de bombeo, además se compara con una línea recta, para hacer ver en que región trabajamos, el flujo máximo se comporta de forma lineal respecto a la amplitud del fuelle. Cabe mencionar que la interpolación no tiene un comportamiento adecuado cuando la amplitud del fuelle esta entre 0 y 1 *cm*, esto es porque no hay datos en esta región. Es decir, la interpolación tiene validez cuando la amplitud del fuelle esta entre 1 y 4 *cm*. Flujo en decilitros por segundo, en función de la amplitud en centímetros.

En este perfil de la gráfica se observa un comportamiento lineal entre el gasto hidráulico obtenido contra la amplitud del desplazamiento del fuelle. En la parte superior de la gráfica se observa una cresta, la cual se debe a que en esta fase de medición la amplitud del fuelle se encontraba en el límite de su máximo desplazamiento, es decir, en el límite de 4 a 5 [*cm*] de amplitud. El fuelle en su desplazamiento tenía un comportamiento diferente al del intervalo de 1 a 4 [*cm*], también la velocidad del motor no era constante en todo el ciclo y estas pequeñas variaciones no dejan claro el comportamiento expresado en la gráfica, además la cámara de compresión se saturaba en el límite de la amplitud del fuelle, en otras palabras, la cámara de compresión se llenaba de agua por arriba del nivel superior de la boca del tubo resonante, lo cual causaba que el agua dentro de la cámara regresara al depósito principal por el tubo resonante y con esto se reducía la medición del gasto hidráulico.

Con esta última gráfica podemos comparar los datos obtenidos experimentalmente con los resultados teóricos obtenidos mediante el estudio numérico, en lo que podemos

comprobar la dependencia lineal existente entre el gasto hidráulico y la amplitud del desplazamiento del fuelle, para un intervalo de amplitudes y frecuencias determinado.

Capítulo 7

Conclusiones

Esta tesis constituye una contribución al estudio del Sistema de Bombeo por Energía de Oleaje (SIBEO). El estudio se realiza desde el punto de vista teórico, mediante la simulación numérica y desde el punto de vista experimental, gracias al montaje del dispositivo realizado en el laboratorio; este trabajo explica la relación entre la amplitud de oscilación del fuelle y el gasto hidráulico obtenido.

Se describe el algoritmo utilizado en la solución numérica de las ecuaciones diferenciales empleadas en este estudio. En general estos métodos se aplican cuando se necesita un valor numérico como solución a un problema -físico-matemático- donde procedimientos exactos o analíticos no son capaces de dar respuesta, siendo imposible obtener una solución general. Pero a pesar de estas desventajas su utilización en el estudio del sistema de bombeo ha demostrado tener el alcance suficiente para dar una respuesta adecuada que satisfaga las exigencias impuestas por el problema de estudio.

Se ha diseñado un dispositivo experimental para generar un flujo oscilante con bombeo que nos permite realizar mediciones cuantitativas y cualitativas del flujo. La resonancia en el sistema de bombeo determina una condición óptima en su funcionamiento, y se consigue ajustando el volumen de aire en la cámara de compresión para una frecuencia de oscilación del fuelle dada.

Un punto importante es la automatización en el desarrollo del experimento, ya que el número de datos obtenidos por los sensores de altura y desplazamiento proporciona una buena aproximación en los resultados que debemos comparar. Los resultados obtenidos con la formulación numérica empleada en este estudio están en concordancia con los resultados experimentales, gracias a la interpolación de los datos por medio de una función polinomial cuártica, la cual representa gráficamente un resultado más claro que el que se tenía solo con los datos del experimento .

Los resultados de la simulación numérica dejan en claro que existe una dependencia lineal entre la amplitud de excitación del fuelle y el gasto hidráulico obtenido. En el análisis de las soluciones al modelo numérico propuesto, se evaluaron los efectos que tienen los distintos parámetros involucrados y como afectan al sistema. Al comparar los resultados numéricos contra los experimentales se puede observar que hay una pequeña discrepancia entre ellos cuando el gasto hidráulico es mayor. Esto es debido a que en el experimento, existen varios parámetros que no se pudieron controlar, como la velocidad del motor en la cual había pequeñas variaciones entre ciclo y ciclo, además de que la extensión del fuelle para su máxima amplitud generó en el límite de las mediciones algo de ruido, debido a las dimensiones del fuelle y del propio dispositivo. Otra causa importante por la cual los resultados experimentales no coinciden “exactamente” con el estudio numérico, es el hecho de que la cámara de compresión era demasiado pequeña para captar el agua bombeada en condiciones de máxima amplitud de oscilación, por lo que la cámara se saturaba y el agua bombeada regresaba por el tubo resonante al depósito principal.

A pesar de las dimensiones del dispositivo a escala montado en el laboratorio, se obtuvieron buenos resultados, ya que para amplitudes de oscilación pequeñas el gasto hidráulico obtenido fue mayor al esperado. Esto dio lugar a que en el límite de la amplitud de oscilación del fuelle, la cámara de compresión se saturara y no deja claro el comportamiento del fenómeno de bombeo. Se propone construir un dispositivo con mayores dimensiones, empezando con una cámara de compresión más grande, en general mayores dimensiones en los tubos resonante y desagüe, así como en los depósitos de agua, para conservar las condiciones iniciales que se requieren en el estudio del sistema de bombeo de agua excitado paramétricamente. Los resultados obtenidos servirán para construir un prototipo de un sistema de bombeo bidireccional.

Bibliografía

- [1] Salter, S., “Wave Power”, Nature.249:720-724.
- [2] McCormick M., “Ocean waves energy conversion ”, Wiley, New York 1981.
- [3] Czitrom S., R. Godoy, E. Prado, P. Pérez, R. Peralta-Fabi y C. Stern., “Hydrodynamics of an oscillating water column sea water pump. Part I : Theoretical Aspects”.
- [4] Arthur G. Hansen., “Mecánica de Fluidos”, (1971).89–102
- [5] Roca V., “Introducción a la Mecánica de los Fluidos”, Editorial Limusa México V (1980).77–123.
- [6] González M, F Estudio de una columna de agua oscilante, Tesis de Licenciatura en Física, UNAM, México D.F, 2007.
- [7] Olvera A. Prado E. and Czitrom S. “Parametric Resonance in an oscillating water column”, The Journal of Engineering Mathematics (2007), no. 57, 1–21.
- [8] Czitrom S., “Sea-Water Pumping by Resonance I”, Proceedings of the Second European Wave Power Conference, Lisboa ISBN 92-827-7492-9 (1996), 366–370.
- [9] Knott, G.F, y J.O. Flower., “Simulation studies of the basic non-linear effects of the wave-energy conversion by an overtopping water-column” Energy conversion. Vol.19(1980) 59–69.
- [10] Godoy D, R., Sintonización de un sistema de bombeo por energía de oleaje, Tesis de Maestría en Física, UNAM, México D.F, 2006.
- [11] L.D. Landau y E.M. Lifshitz ., Mecánica de Fluidos. 1–22.

- [12] Czitrom S, E. Prado, R. Godoy R. Rodríguez y R. Peralta-Fabi, “Sea-Water Pumping by Resonance II” Proceedings of the Second European Wave Power Conference, Lisboa ISBN 92-827-7492-9 (1996), 324–328.
- [13] Czitrom S., R. Godoy, E. Prado y A. Olvera, “Hydrodynamics of an oscillating water column sea water pump. Part II : Tuning to Monochromatic Waves”.