



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

## INTERACCIONES MEDIADAS POR LA CURVATURA EN CURVAS Y SUPERFICIES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

PABLO AGUSTÍN VÁZQUEZ MONTEJO

DIRECTOR DE TESIS: DR. JEMAL GUVEN

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: DR. MARCELO SALGADO

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: DR. RICCARDO CAPOVILLA



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO D.F.

JUNIO, 2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres*

*María del Carmen y  
Juan Manuel,*

*y a mi novia  
Maribel*

# Agradecimientos

Quiero agradecer a las personas e instituciones que me ayudaron y apoyaron durante mi doctorado.

Primeramente quiero expresar mi más sincera gratitud a mi asesor el Dr. Jemal Guven, a quien le debo enormemente por sus enseñanzas, no sólo dentro del ámbito científico, principalmente de física y geometría, sino también por sus lecciones de la vida y del arte. Le agradezco mucho por el ánimo y la motivación para avanzar en la investigación presentada en esta tesis, la cual disfruté mucho.

Agradezco atentamente a los Dres. Riccardo Capovilla, Rolando Castillo, Jerónimo Cortéz, Chryssomalis Chryssomalakos, Hernando Quevedo y Marcos Rosenbaum por sus observaciones, sugerencias y correcciones que ayudaron a que esta tesis sea mejor.

A mis amigos y colaboradores Pavel Castro Villarreal y Martin Michael Müller les agradezco por la ayuda y las fructíferas discusiones sobre dos temas aquí presentados, así como por su hospitalidad durante mis visitas a Tuxtla Gutierrez, Chiapas, París y Metz, Francia.

A mi familia, a mis padres Juan Manuel y María del Carmen, por su cariño y afecto de toda la vida, por su apoyo total para lograr mis metas. A mis hermanos Juan y Carmen por su fraternidad y ayuda en todo momento.

A mi amada novia Maribel, le estoy sumamente agradecido por todo su amor y sus ánimos durante esta etapa de mi vida. De igual manera estoy agradecido a su familia por su amabilidad.

Finalmente agradezco a la UNAM el haberme ofrecido la oportunidad de cursar un doctorado de calidad internacional, al ICN por las facilidades otorgadas para la realización del mismo y al CONACyT por la beca de doctorado concedida.

# Resumen

Los modelos geométricos ocurren como aproximaciones de sistemas físicos en casi todas las escalas de energía; frecuentemente los únicos grados de libertad relevantes son aquellos asociados con la configuración geométrica del sistema y su comportamiento está completamente descrito por un Hamiltoniano o acción construida con las invariantes de esta geometría.

En la presente tesis se desarrolla, desde el punto de vista de teoría de campos y empleando el lenguaje de la geometría diferencial, un marco teórico para describir las propiedades físicas de ciertos sistemas físicos estudiados en la física de la materia condensada suave y la biología celular, tales como biopolímeros, membranas, interfaces y otras estructuras extendidas bidimensionales. Debido a las proporciones de sus dimensiones, estos sistemas físicos pueden ser considerados como uni o bidimensionales (curvas o superficies) y también poseen la propiedad que pueden ser descritos completamente en términos de sus grados de libertad geométricos, en particular sus energías son de carácter puramente geométrico.

Este marco teórico puede aplicarse a un conjunto de problemas tales como la caracterización de las morfologías en equilibrio de las membranas fluidas y otras membranas biológicamente relevantes y en la determinación de su estabilidad, así como en la identificación de la conexión entre estos estados y los esfuerzos subyacentes.

Una componente importante de la presente tesis de doctorado es explorar varias generalizaciones y adaptaciones de este marco teórico para superficies, así como realizar aplicaciones en diversos ámbitos. Estas adaptaciones tienen el propósito de poder extender el estudio del comportamiento de las membranas a problemas en lo que intervienen constricciones locales, tanto internas como externas. A continuación se detalla la forma en que está organizada.

En el capítulo 2 se desarrolla este marco teórico para polímeros semiflexibles modelados como curvas. Primero para curvas sin constricciones espaciales más que fijar su longitud y posteriormente se introduce la restricción de confinamiento por superficies. El principio variacional se efectúa introduciendo multiplicadores de Lagrange apropiados que imponen las definiciones de la base adaptada a la curva y también la constricciones del confinamiento. En el caso de curvas libres, las invariancias traslacional y rotacional de la energía de doblamiento de la curva permiten identificar los vectores de esfuerzos y de torcas en la curva. Para el caso en el que se incluye la constricción de confinamiento, se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange así como una expresión para la fuerza confinante en términos de la geometría local, tanto de la superficie como de la curva. Como aplicación se presenta el caso del confinamiento esférico.

En el capítulo 3 se desarrolla este marco teórico para superficies, el cual consiste en descomponer la variación de un funcional geométrico (que representa la energía asociada al sistema), en sus partes intrínseca y extrínseca, caracterizadas respectivamente por la métrica y la curvatura extrínseca de la superficie. El principio variacional se efectúa tratando a la métrica y a la curvatura como variables independientes por medio de la introducción de multiplicadores de Lagrange apropiados. Asimismo, por medio de las corrientes de Noether asociadas con las invariancias respecto de traslaciones y rotaciones se identifican los tensores de esfuerzos y torcas de la superficie. También se discute una ambigüedad en la definición del tensor de esfuerzos asociada con la condición de integrabilidad de Gauss-Codazzi.

---

En el capítulo 4 se adapta este mismo marco teórico dentro de la representación espinorial de la geometría de una superficie para estudiar las propiedades en equilibrio de una membrana o de una interfase. Esta es una generalización de la representación de Weierstrass-Enneper para superficies mínimas, introducida por matemáticos en los noventa, la cual permite liberar la restricción de la curvatura media nula. En esta representación la superficie está descrita por un campo espinorial que satisface una ecuación tipo Dirac bidimensional, acoplado a través de un potencial asociado con la curvatura media. Como aplicación, se describen el modelo para membranas fluidas tratadas como superficies descritas por la energía de Canham-Helfrich. Se construye explícitamente el tensor de esfuerzos conservado con valor en los complejos que caracteriza a estas superficies.

En el capítulo 5 estos tensores de esfuerzos serán estudiados principalmente en el contexto de superficies mínimas consideradas como membranas fluidas. La simetría conforme de la energía de doblamiento bidimensional se utiliza para construir estados de equilibrio constreñidos de vesículas de membranas fluidas con  $k$  puntos mantenidos en contacto. Estas geometrías esféricas desinfladas se generan por la inversión en una esfera de un  $k$ -noide, una superficie mínima con  $k$  cuellos con crecimiento exponencial. Las singularidades en la curvatura que se presentan en los puntos en contacto indican la presencia de fuerzas externas localizadas que previenen que la superficie se infle en una esfera, la única geometría sin restricción con topología esférica en equilibrio. Esta interpretación se ejemplifica examinando la distribución de esfuerzos en una vesícula de área fija y se determinan las fuerzas externas requeridas para mantenerla en equilibrio. Las vesículas deformadas así como algunos defectos localizados se describen en términos de estas fuerzas externas.

En el capítulo 6 se estudian deformaciones isométricas de superficies sujetas a restricciones locales. Se expande la energía de doblamiento de una superficie inextensible hasta segundo orden de las deformaciones alrededor de sus estados de equilibrio. Este resultado se utiliza para examinar la estabilidad de un defecto cónico en una superficie plana. Posteriormente se analiza el modo general de deformación de una hoja plana elástica e inextensible, descrita por una superficie desarrollable en su tangente, caracterizada por una curva espacial. Se determina la distribución de esfuerzos en la superficie en la parametrización adaptada a esta curva. Se identifican las condiciones de frontera sobre el borde libre, consistentes la deformación isométrica de la superficie. Como aplicación, se examina la deformación de un anulo circular en una rampa helicoidal.

Finalmente se presentan conclusiones generales de este trabajo.

# Abstract

Geometric models occur as approximations of physical systems in almost all energy scales; very often the only relevant degrees of freedom are the ones associated with the geometric configuration of the system and its behaviour is described completely by a Hamiltonian or action constructed with the geometry invariants.

In this thesis a framework is developed, from the field theoretical viewpoint and employing the language of differential geometry, to describe the physical properties of certain physical systems studied in condensed soft matter physics and in cellular biology, such as biopolymers, membranes, interfaces and other two-dimensional extended structures. On account of the proportions of their dimensions, these physical systems can be regarded as one or two-dimensional (curves or surfaces), they also possess the property that they can be described completely in terms of their geometric degrees of freedom, in particular, their energies have a pure geometric character.

This framework can be applied to a set of problems, such as the characterization of the equilibrium morphologies of fluid membranes and other membranes of biologic relevance, in the determination of their stability, and importantly in the identification of the connection between these states and the underlying stresses.

An important component of this doctoral thesis is to explore some specific generalizations and adaptations of this framework for surfaces, as well as to apply it in different contexts. These adaptations have the purpose to extend the study of the membranes behaviour to problems on which local constrictions are involved, both internal and external. This thesis is organized as follows:

In chapter 2 this framework is developed for semi-flexible polymers modeled as curves. First for free spatial curves only subject to fixed length constraint and afterwards a confinement constraint by surfaces is introduced. This constriction, as well as the definitions of the adapted basis to the curve, are implemented in the variational principle by introducing appropriate Lagrange multipliers. For the free curves, the translational and the rotational invariance of the curve bending energy permits one to identify the stress and torque vectors on the curve. For the constrained curves, the corresponding Euler-Lagrange equation is derived, and also an expression for the confining force in terms of the local geometry. As an application the spherical confinement is examined.

In chapter 3 a framework for surfaces is developed, in which conservation laws are exploited to describe their equilibrium configuration as well as the stresses and torques on them: the Noether currents associated with the translational and rotational invariance of the energy permits one to identify the stress and torque tensors on the surface. In this framework the variation of a geometric functional (representing the associated energy of the system), is decomposed in the intrinsic and extrinsic parts, characterized respectively by the metric and the extrinsic curvature tensors of the surface. In the variational principle these tensors are treated as independent variables by introducing appropriate Lagrange multipliers. Also, an ambiguity in the definition of the stress tensor, associated with the Gauss-Codazzi integrability condition, is discussed.

In chapter 4 this framework is adapted within the spinor representation of the surface geometry to study the equilibrium properties of a membrane or an interface. This is a generalization of the classical

Weierstrass-Enneper representation for minimal surfaces, introduced by mathematicians in the nineties, which permits to relax the constriction on the vanishing mean curvature. In this representation the surface is described by a spinor field satisfying a two-dimensional Dirac equation, coupled through a real potential associated with mean curvature. As an application, the fluid membrane model treated as surfaces described by the Canham-Helfrich energy is presented. The complex-valued conserved stress tensor characterizing these surfaces is constructed explicitly.

In chapter 5 these stress tensors will be studied principally in the context of minimal surfaces treated as fluid membranes. The conformal symmetry of the two-dimensional bending energy is exploited to construct constrained equilibrium states of deflated fluid membrane vesicles with  $k$  points held in contact. These deflated spherical geometries are generated by inversion in a sphere of a  $k$ -noid, a minimal surface with  $k$  necks growing exponentially. The singularities in the curvature appearing in the points in contact indicate the presence of localized external forces preventing the surface to inflate into a round sphere, the only geometry without constraint with spherical topology in equilibrium. This interpretation is substantiated by examining the distribution of stress in a vesicle of a fixed area and determining the external forces required to maintain it. Both globally deformed vesicles as well as isolated localized defects will be described.

In chapter 6 isometric deformations of unstretchable planar surfaces subject to local restrictions are studied. Furthermore, the bending energy of an unstretchable surface is expanded to second order in deformations about each of its equilibrium states. This will be used to examine the stability of a conical defect on a flat surface. Besides, the general mode of deformation of a planar unstretchable elastic sheet, described by a tangent developable surface, characterized by a space curve, is analysed. The distribution of stress in the surface is determined in a parametrization adapted to this curve. The boundary conditions on free edges consistent with the isometry of the surface geometry are identified. As an application, the deformation of a circular annulus into a helical ramp is examined.

Finally some general conclusions of this work are presented.



# Lista de publicaciones

## Capítulo 2

Jemal Guven y Pablo Vázquez-Montejo, Confinement of semi-flexible polymers, en preparación

## Capítulo 4

Jemal Guven y Pablo Vázquez-Montejo, Spinor representation of surfaces and complex stresses on membranes and interfaces, *Physical Review E* **82**, 041604 (2010)

## Capítulo 5

Pavel Castro-Villarreal, Jemal Guven y Pablo Vázquez-Montejo, Fluid vesicles with contact constraints, en preparación

## Capítulo 6

Jemal Guven, Martin Michael Müller y Pablo Vázquez-Montejo, Conical Instabilities on paper, enviado a *Physical Review E*

Jemal Guven y Pablo Vázquez-Montejo, Deformations of planar sheets into tangent developable surfaces, en preparación

# Símbolos y notación

$\partial_a$	$\equiv$	$\partial/\partial u^a$
$\mathbf{e}_a$	$\equiv$	$\mathbf{X}_a = \partial_a \mathbf{X}$ Vector tangente a lo largo de la coordenada local $u^a$ en la variedad
$\hat{\mathbf{e}}_a$	$=$	$\mathbf{X}_a/\ \mathbf{X}_a\ $ Vector tangente unitario en la dirección $\mathbf{X}_a$
$\mathbf{n}$	:	Vector unitario normal
$g_{ab}$	:	1era. forma fundamental, tensor métrico o métrica
$K_{ab}$	:	2da. forma fundamental o tensor de curvatura extrínseca
$g$	:	Determinante de la métrica
$ds$	:	Elemento de línea
$dA$	:	Elemento de área
$dV$	:	Elemento de volumen
$\in$	:	Pertenece a
$\partial M$	:	Frontera de la variedad $M$
$d$	:	Derivada exterior
$TM$	:	Haz tangente de la variedad $M$
$T^*M$	:	Haz cotangente de la variedad $M$
$\cdot$	:	Producto interior entre vectores en el espacio Euclidiano tridimensional
$\wedge$	:	Producto exterior entre formas
$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$	:	Derivada de Lie en la dirección (del flujo generado por) del campo vectorial $\mathbf{X}$
$\nabla_a$	:	Derivada covariante en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_a$
$\{ \}$	:	Simetrización
$[ \ ]$	:	Antisimetrización



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas físicos de carácter geométrico . . . . .	1
1.1.1. Energía de doblamiento: Hamiltoniano de Canham-Helfrich . . . . .	2
1.2. Principio variacional y el tensor de esfuerzos . . . . .	3
1.3. Nuevas soluciones a partir de superficies mínimas: Inversión . . . . .	5
1.4. Deformación de superficies planas . . . . .	6
<b>2. Esfuerzos y torcas en curvas</b>	<b>9</b>
2.1. Principio variacional para curvas usando variables auxiliares . . . . .	9
2.2. Identificación de los vectores de esfuerzos y torcas . . . . .	12
2.2.1. Modelo de Kuznetsov-Plyushchay . . . . .	14
2.2.2. Elástica de Euler . . . . .	15
2.3. Polímeros confinados por superficies . . . . .	17
2.3.1. Ec. de Euler-Lagrange en términos de las curvaturas . . . . .	20
2.3.2. Pérdida de invariancia rotacional . . . . .	20
2.4. Confinamiento esférico . . . . .	21
2.4.1. Confinamiento débil . . . . .	23
2.4.2. Confinamiento fuerte . . . . .	25
2.5. Confinamiento cilíndrico . . . . .	28
2.6. Conclusiones . . . . .	30
<b>3. Esfuerzos y torcas en superficies</b>	<b>33</b>
3.1. Invariancia traslacional y rotacional: tensores de esfuerzos y torcas . . . . .	36
3.2. Ejemplos de tensores de esfuerzos . . . . .	37
3.3. Tensores nulos . . . . .	39
3.3.1. Condición de integrabilidad de Gauss-Codazzi . . . . .	40
3.3.2. Variación de $\mathcal{R}^2$ . . . . .	41
3.4. Conclusiones . . . . .	42
<b>4. Representación generalizada de Weierstrass-Enneper</b>	<b>45</b>
4.1. Ecuación de Dirac para espinores de la superficie . . . . .	45
4.1.1. Geometría intrínseca de la superficie . . . . .	47
4.1.2. Geometría extrínseca de la superficie . . . . .	48
4.1.3. Ejemplos de superficies . . . . .	50
4.1.4. Representación espinorial de la energía de doblamiento . . . . .	51
4.2. Construcción del tensor de esfuerzos . . . . .	51
4.3. Esfuerzos y torcas conservados . . . . .	57
4.3.1. Ejemplos de tensores de esfuerzos . . . . .	58
4.4. Conclusiones . . . . .	60

<b>5. Esfuerzos en membranas fluidas con puntos en contacto</b>	<b>61</b>
5.1. Inversión de superficies . . . . .	61
5.1.1. Geometría intrínseca . . . . .	62
5.1.2. Geometría extrínseca . . . . .	64
5.1.3. Energía de doblamiento . . . . .	66
5.2. Geometría de los $k$ -noides . . . . .	66
5.2.1. Fuerzas en los $k$ -noides . . . . .	71
5.3. Geometría de los $k$ -noides inversos . . . . .	72
5.3.1. Vesículas desinfladas con dos puntos en contacto . . . . .	74
5.3.2. Trinoide invertido . . . . .	78
5.4. Tensor de esfuerzos en las superficies inversas . . . . .	79
5.4.1. Fuerzas y torcas en las superficies inversas . . . . .	81
5.4.2. Fuerzas en $k$ -noides inversos . . . . .	82
5.5. Conclusiones . . . . .	85
<b>6. Deformaciones de superficies planas inextensibles</b>	<b>93</b>
6.1. Doblamiento con constricciones locales: conos desarrollables . . . . .	94
6.2. Conos desarrollables . . . . .	95
6.3. Deformaciones isométricas de conos . . . . .	97
6.3.1. Condiciones de frontera para conos desarrollables . . . . .	98
6.4. Estabilidad de conos deformados . . . . .	99
6.5. Superficies desarrollables en su tangente . . . . .	103
6.6. Geometría de las superficies desarrollables en su tangente . . . . .	104
6.7. Energía de doblamiento, tensor de esfuerzos y ecuaciones de forma . . . . .	106
6.7.1. Esfuerzos conservados . . . . .	107
6.8. Deformaciones isométricas de SdT . . . . .	109
6.9. Condiciones de frontera en una SdT . . . . .	110
6.9.1. Condiciones de frontera a lo largo de curvas de $r$ constante . . . . .	111
6.10. Fuerzas y torcas transmitidas a lo largo de curvas de $r$ constante . . . . .	113
6.11. Fuerzas y torcas transmitidas a lo largo de curvas de $s$ constante . . . . .	116
6.12. Rampa Helicoidal . . . . .	117
6.13. Conclusiones . . . . .	120
<b>A. Geometría de curvas y superficies en <math>\mathbb{E}^3</math></b>	<b>125</b>
A.1. Curvas en $\mathbb{E}^3$ . . . . .	125
A.2. Superficies en $\mathbb{E}^3$ . . . . .	125
A.3. Condiciones de integrabilidad . . . . .	129
A.4. Marco de Darboux adaptado a una curva sobre una superficie . . . . .	130
A.5. Superficies axisimétricas . . . . .	132
<b>B. Variaciones de cantidades geométricas</b>	<b>135</b>
B.1. Variaciones de los vectores tangentes y normal . . . . .	135
B.2. Variación de la geometría intrínseca . . . . .	136
B.3. Variación de la geometría extrínseca . . . . .	137
<b>C. Superficies mínimas en la representación de Weierstrass-Enneper</b>	<b>139</b>
C.1. Fuerzas en una película de jabón . . . . .	140

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Sistemas físicos de carácter geométrico

Aunque algunos sistemas estudiados en física de materia condensada blanda presentan un comportamiento complejo a escalas microscópicas, a escalas mucho mayores que ésta, los grados de libertad relevantes son puramente geométricos. Si una dimensión del sistema es mucho menor que las otras, o dicho de manera más precisa, cuando el radio de curvatura característico es mucho mayor que su grosor, es apropiado tratar a dichos sistemas como superficies bidimensionales. En base a esto, es posible representar la energía de estas superficies con un funcional dependiente de sus invariantes geométricos: escalares construidos con sus primera y segunda formas fundamentales, así como posiblemente de sus derivadas [67, 77]. Algunos ejemplos importantes de este tipo de sistemas son:

*Polímeros semiflexibles* modelados como curvas en el espacio tridimensional y cuya energía asociada es cuadrática en la curvatura de Frenet-Serret (Elástica de Euler) [52].

*Superficies de curvatura media constante* cuya energía es proporcional a su área con una tensión superficial constante sujetas a la constricción global que su volumen encerrado es fijo, ejemplos físicos de éstas son las burbujas de jabón al igual que la interfase en la región de contacto de dos sustancias distintas [50]. Sin la constricción sobre el volumen, las superficies relevantes son las que poseen curvatura media nula, llamadas superficies mínimas [31, 81]. Los análogos relativistas de estas últimas son las membranas de Dirac-Nambu-Goto, cuya acción es proporcional al área de la hoja-mundo que describe su evolución en el espaciotiempo.

*Membranas fluidas* las cuales están constituidas por bicapas de moléculas fosfolípicas que se forman espontáneamente en un medio acuoso debido a la estructura *amfifílica* de las mismas moléculas: la cabeza, típicamente polar, se orienta hacia el agua mientras la cadena de hidrocarburos se esconde dentro de la bicapa [67]. Conforman las membranas celulares de todos los organismos, desde los más simples hasta los más complejos, están presentes por ejemplo en la capa exterior de los glóbulos rojos y en la membrana interior de las mitocondrias. A diferencia de un sólido elástico típico, en una primera aproximación, siempre que se conserve el área, no hay costo energético asociado con deformaciones tangenciales; las moléculas pueden difundir libremente dentro de cada una de las dos capas, de manera que la membrana actúa como un fluido bidimensional en su plano tangencial. La información microscópica está contenida en un número pequeño de parámetros físicos que caracterizan la rigidez de esta superficie, la tensión superficial asociada con el costo de incrementar su área y quizá otro que refleje la diferencia en el área de las dos capas. Dependiendo de las fuerzas externas o las constricciones geométricas a las que está sujeta, la membrana puede adoptar un intervalo impresionante de morfologías diferentes: por ejemplo la membrana interior de

la mitocondria, la cual está densamente empacada debido a la necesidad de maximizar el área disponible para la síntesis del adenosín trifosfato (ATP, del inglés Adenosine TriPhosphate); o el aparato de Golgi cuya geometría compleja desempeña un papel clave en su funcionamiento como terminal de transporte y central de abasto de la célula entera. [68]. Es importante tener en cuenta que ninguna de estas dos estructuras existe como configuración aislada de equilibrio; por este motivo es importante entender el papel sutil de las fuerzas externas y las constricciones geométricas sobre la membrana que hacen posible estas estructuras. En el caso de la mitocondria, la membrana interior está bajo enorme compresión debido a que la membrana exterior que la contiene, posee un área mucho menor. En el caso del Golgi, un sistema de filamentos (los microtúbulos) actúa como un amarre que estabiliza la estructura flácida de sus depósitos internos. En los dos casos la morfología particular de la membrana juega un papel clave en su función fisiológica.

No es obvio que la geometría desempeñe un papel fundamental en estructuras complejas de esta naturaleza. Sin embargo, aunque la composición bioquímica de la membrana sea complicada, los detalles microscópicos bioquímicos son esencialmente irrelevantes a escalas mesoscópicas, que son las escalas más relevantes para su papel fisiológico. Ésta se modela muy bien como una superficie bidimensional caracterizada por sus grados de libertad geométricos. El principal costo energético asociado con deformaciones de esta superficie es el costo de doblarlo, descrito en estas escalas por algún Hamiltoniano geométrico cuadrático en la curvatura extrínseca de la superficie de la membrana, el más empleado usualmente es el llamado Hamiltoniano de Canham-Helfrich [10, 40] que se describe a continuación.

### 1.1.1. Energía de doblamiento: Hamiltoniano de Canham-Helfrich

Para describir la energía de doblamiento de una superficie, en 1970 Canham originalmente propuso [10] una densidad Hamiltoniana con la característica que es cuadrático en las curvaturas principales de la superficie,  $C_1$  y  $C_2$ , dado por

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2}\kappa (K^2 - 2K_G) . \quad (1.1)$$

donde  $\kappa$  es el módulo de rigidez,  $K = C_1 + C_2$  es (el doble) la curvatura media y  $K_G = C_1 C_2$  es la curvatura Gaussiana de la superficie. Posteriormente, en 1973 Helfrich introdujo otra densidad Hamiltoniana que difiere ligeramente de la de Canham [40], la cual está dada por

$$\mathcal{H}_H = \frac{1}{2}\kappa (K - C_0)^2 + \kappa_G K_G . \quad (1.2)$$

donde  $\kappa_G$  es el módulo de rigidez Gaussiana y  $C_0$  es la curvatura espontánea que representa la tendencia de la superficie a curvarse en alguna dirección, de manera que sea asimétrica.

Aunque localmente ambas densidades aparentemente son distintas, globalmente coinciden debido al teorema de Gauss-Bonnet, el cual establece que la integral de la curvatura Gaussiana  $K_G$  sobre toda el área es equivalente a una constante topológica, más precisamente  $\int dA K_G = 2\pi\chi$ , donde  $\chi$  es la característica de Euler de la superficie [76], de manera que los términos por los cuales difieren no son relevantes en las ecuaciones de Euler-Lagrange resultantes de ambas densidades Hamiltonianas. Así, el Hamiltoniano que describe la energía de doblamiento de una superficie sin fronteras y sin curvatura espontánea, llamado de Canham-Helfrich, está definido por

$$H_{CH} = \frac{1}{2}\kappa \int dA K^2 . \quad (1.3)$$

el cual es invariante bajo reparametrizaciones y movimientos euclidianos. En adelante se considerará que el modulo de rigidez es igual a la unidad,  $\kappa = 1$ .

Este Hamiltoniano está relacionado también con el Hamiltoniano de Willmore [105], definido por

$$H_W = \int dA \tilde{K}^{ab} \tilde{K}_{ab} = \frac{1}{2} \int dA (c_1 - c_2)^2 = \frac{1}{2} \int dA K^2 - 2 \int dA K_G, \quad (1.4)$$

donde  $\tilde{K}_{ab} = K_{ab} - 1/2 g_{ab} K$  es la parte sin traza del tensor de curvatura, difiere como antes, únicamente por un múltiplo del invariante topológico de Gauss-Bonnet. Se observa que siempre es mayor o igual a cero, siendo cero si y solo si se trata de una esfera, de manera que la minimización de esta energía trata de hacer a la superficie resultante lo más “redonda” posible [6].

Una propiedad interesante que posee el Hamiltoniano de Willmore, es su invariancia respecto de transformaciones conformes del espacio ambiente en el cual está encajada la superficie (traslaciones, rotaciones, dilataciones y transformaciones especiales conformes).

La aplicabilidad del Hamiltoniano de Canham-Helfrich no está restringida sólo a escalas mesoscópicas, también se emplea ampliamente para representar a nivel macroscópico la energía de doblamiento de cualquier superficie, tal como una hoja de papel, una placa metálica o las hojas de una planta. Por ejemplo, en principio un modelo que describa las marcas de estrés en una hoja de papel arrugada dependería de las propiedades físicas del papel, sin embargo a escalas mucho mayores que su grosor, dicha estructura interna no es relevante, puesto que estas marcas pueden ser tratadas como puntos o curvas, siendo el módulo de rigidez el único parámetro relevante [75]. Debido a su amplio intervalo de aplicabilidad ha sido utilizado también en una gran variedad de problemas, desde la determinación de la inestabilidad de configuraciones icosaedrales que adoptan los virus cuando su tamaño es suficientemente grande, por Nelson et al. [66], hasta en la minimización de la energía de doblamiento de una esfera para encontrar la homotopía que conecta una esfera con la normal hacia afuera con la esfera que tiene la normal hacia adentro, es decir la inversión del interior y el exterior de una esfera, proceso denominado minimax eversion, el cual fue desarrollado por Kusner et al [28].

## 1.2. Principio variacional y el tensor de esfuerzos

Un problema fundamental desde el punto de vista físico es establecer la relación entre la geometría de la superficie y el estado de los esfuerzos subyacentes que hacen posible su realización física como estado de equilibrio. Para resolver este problema, es necesario primero saber cómo responde el Hamiltoniano a las deformaciones de la superficie. Aunque el problema es aparentemente sencillo, existe un número de sutilezas técnicas para su implementación. En particular, si el Hamiltoniano es invariante bajo reparametrizaciones, las deformaciones tangenciales en la superficie tienen un papel muy distinto a su contraparte normal. Por ejemplo, el carácter fluido de la membrana se manifiesta en la identificación de la deformación tangencial con una reparametrización, la respuesta del Hamiltoniano a la deformación tangencial se resume en una divergencia tal que su consecuencia se manifiesta solo en la frontera de la superficie. Únicamente la respuesta normal produce un cambio observable en el interior de la membrana.

Una superficie en equilibrio mecánico se describe por medio de un tensor de esfuerzos conservado. La descripción del equilibrio en términos de un tensor de esfuerzos geométrico ha sido discutido previamente. En las referencias [95] y [69]), Steigmann y Lomholt presentaron tratamientos físicos en los contextos de la mecánica de medios continuos y de la termodinámica respectivamente. El tratamiento dentro del contexto termodinámico se remonta al trabajo de Evans [27]. El concepto de tensores de esfuerzos geométricos en superficies también es familiar, si bien sólo implícitamente, en el contexto de superficies mínimas [42, 59] donde aparecen en la identificación de los pesos-fuerzas externas-que proporcionan la tensión que evita el colapso de la superficie. Revisiones recientes que resumen el papel de los esfuerzos geométricos en el contexto de la materia condensada suave y de biofísica, han sido presentadas por Deserno [26] y Powers [87].



En el contexto de una descripción parametrizada de la superficie, en la referencia [12] se presentó una expresión novedosa y simple para la respuesta del Hamiltoniano en términos de los esfuerzos actuando dentro de la superficie. Se mostró que el tensor de esfuerzos para la membrana fluida, a diferencia de su contraparte para un medio elástico, dependía sólo de la geometría de la superficie. Ésto hizo posible el estudio de los estados de equilibrio de las membranas fluidas en términos de la conservación de su tensor de esfuerzos. En este trabajo se enfatizó la importancia de la distinción entre los comportamientos de las geometrías intrínseca y extrínseca de la superficie bajo deformaciones. La geometría intrínseca, caracterizada por la métrica inducida, determina distancias a lo largo de curvas sobre la superficie; su contraparte extrínseca, caracterizada por la curvatura extrínseca, determina qué tan rápido cambia el vector normal conforme se mueve sobre la superficie, o sea, mide cómo se dobla la superficie en el espacio ambiente. Juntos, la métrica inducida y la curvatura extrínseca caracterizan completamente la geometría: en particular, los invariantes geométricos asociados con la superficie son escalares construidos con estos dos tensores; en particular, el Hamiltoniano de doblamiento depende sólo de estas variables. Existe un obstáculo técnico que complica esta identificación: la métrica y la curvatura no son variables matemáticamente independientes; están conectadas por un conjunto de condiciones de integrabilidad: las ecuaciones de Gauss-Codazzi y de Codazzi-Mainardi. La ecuación de Gauss-Codazzi, en particular, indica que el producto de las dos curvaturas principales (la máxima y la mínima) está determinado completamente por la métrica, y como consecuencia, la respuesta extrínseca está constreñida por la respuesta intrínseca.

Posteriormente en la referencia [37] se realizó una descomposición más precisa presentando un método novedoso, el cual consiste en realizar el principio variacional tratando a la métrica y a la curvatura como variables independientes, incorporando su interdependencia con la introducción de multiplicadores de Lagrange apropiados. Esta reformulación del principio variacional permite identificar de manera directa a uno de estos campos auxiliares como el tensor de esfuerzos de la superficie, proporcionando una construcción “canónica” y explícita del tensor de esfuerzos en términos de sus partes geométricas, intrínsecas y extrínsecas. La ventaja principal de este marco teórico es su generalidad admitiendo extensiones que nos permiten abordar aplicaciones inaccesibles con la formulación original.

En la presente tesis se aplica este marco teórico del tensor (vector) de esfuerzos a un conjunto de problemas de interés en la física de la materia condensada blanda, algunos con la característica que involucran constricciones locales. En estos problemas un logro importante es la determinación de la distribución de esfuerzos en los sistemas físicos en cuestión, así como la fuerza total que actúa sobre ellos estableciendo el estado de equilibrio. A continuación se describen los problemas abordados en esta tesis.

En el capítulo 2 se desarrolla una versión de este marco teórico para describir polímeros semiflexibles modelados como curvas. Primero se desarrolla en general para curvas sin constricciones espaciales más que fijar su longitud, y posteriormente se introduce la restricción de confinamiento por superficies. El principio variacional se efectúa introduciendo multiplicadores de Lagrange apropiados que imponen las definiciones de la base adaptada a la curva y también la constricciones del confinamiento. En el caso de curvas libres, las corrientes de Noether asociadas con las invariancias traslacional y rotacional de la energía de doblamiento de la curva se identifican con los vectores de esfuerzos y de torcas en la curva. Luego se adapta este marco teórico para incluir la restricción de confinamiento, dentro del cual se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange así como una expresión para la fuerza confinante en términos de la geometría local, tanto de la superficie como de la curva. También se obtienen las condiciones de frontera apropiadas que describen la geometría del polímero en los puntos de contacto. Como aplicación, se consideran los casos de confinamientos esférico y cilíndrico circular, obteniendo las primeras integrales de sus ecuaciones de Euler-Lagrange de manera que las configuraciones confinadas correspondientes se describen en términos de una cuadratura. Asimismo las configuraciones de equilibrio de un polímero semi-flexible confinado dentro de una esfera se identifican explícitamente y se discute su estabilidad para el caso de confinamiento débil.

En el capítulo 3, siguiendo las referencias [12] y [37] se presenta una revisión del marco teórico para describir esfuerzos en superficies. Dentro de este marco se obtiene que la primera variación de un Hamiltoniano geométrico dá como resultado la divergencia de un tensor. Este tensor conservado en equilibrio se identifica como el tensor de esfuerzos de la superficie por medio de la corrientes de Noether conservadas asociadas con la invariancia traslacional de la energía [12]. De igual manera, pero para el caso de invariancia rotacional, se identifica el respectivo tensor de torcas. Mediante la integración de las componentes de estos tensores a lo largo de curvas cerradas sobre la superficie, se pueden conocer tanto la fuerza como la torca totales a las que está sujeta dicha superficie.

Como se mencionó anteriormente, si el Hamiltoniano en consideración es invariante bajo reparametrizaciones, únicamente las deformaciones normales a la superficie producen cambios físicos. A nivel del tensor de esfuerzos, esto se refleja en el hecho que las proyecciones de su divergencia en las direcciones tangenciales corresponden únicamente a identidades que representan condiciones de consistencia de dicho tensor. En cambio la proyección a lo largo de la normal de la superficie proporciona la ecuación de Euler-Lagrange, llamada también “ecuación de forma”, y cuyas soluciones proveen las posibles configuraciones que (en equilibrio) pueden adoptar las superficies que minimizan la energía correspondiente. Por ejemplo, la primera variación del funcional de área es el producto de la curvatura media y la deformación normal integrada sobre toda el área, de manera que las superficies que extremizan esta energía son las que poseen curvatura media cero, llamadas superficies mínimas debido a que minimizan localmente el área. Para el caso de la energía de Canham-Helfrich la ecuación de forma refleja el balance entre el Laplaciano de la curvatura y un término cúbico de la misma, en particular tiene como soluciones a las esferas (con curvatura media constante) y también a las superficies mínimas.

En el capítulo 4 se adapta este marco teórico en la representación generalizada de Weierstrass-Enneper, en la cual una superficie de curvatura media arbitraria, se parametriza de manera conforme por un espinor de dos componentes que satisface una ecuación tipo Dirac bidimensional, acoplado por un potencial real relacionado con la curvatura media de la superficie. Se identifica el tensor de esfuerzos en esta representación espinorial de superficies y éste se aplica en la descripción de películas de jabón y membranas fluidas.

En general, en este tipo de problemas, se tiene una interdependencia entre los esfuerzos y la geometría de la superficie, específicamente de su curvatura extrínseca; dada una superficie que minimiza su energía de doblamiento se puede calcular los esfuerzos a los que está sometida y al contrario especificando los esfuerzos sobre una superficie se puede en principio determinar las posibles superficies que minimizan su energía de doblamiento con estas constricciones.

Estos modelos de carácter geométrico tienen una amplia gama de aplicabilidad y el marco teórico de tensores de esfuerzos provee una manera directa y sistemática para su estudio. A continuación se presentan dos aplicaciones importantes y relevantes a dos capítulos de esta tesis.

### 1.3. Nuevas soluciones a partir de superficies mínimas: Inversión

La forma de equilibrio de varias de las membranas interiores de una célula biológica sería inestable de no ser por la presencia de las fuerzas externas locales que actúan sobre la geometría. Como se mencionó antes, la estructura compleja del Golgi no existiría sin el sistema de microtúbulos que la amarre; la membrana interior arrugada de la mitocondria esta confinada por una membrana exterior de menor área.

En las referencias [17, 18] se exploraron los estados de equilibrio de una membrana esférica cuyo estado desinflado se mantiene debido a la acción de constricciones locales. Para construir estas geometrías se hizo uso de la simetría conforme de la energía de doblamiento bi-dimensional inducida del espacio Euclidiano

tridimensional. Como se mencionó anteriormente, la energía de doblamiento es invariante bajo transformaciones que preservan ángulos. Más aún, la ecuación de forma proveniente de este Hamiltoniano hereda la simetría bajo estas transformaciones conformes, lo que implica que las transformaciones conformes de sus soluciones también son soluciones. En particular, la invariancia bajo cambios de escala implica que si no fuera por las constricciones sobre el área, volumen interior, etc., dos configuraciones relacionadas únicamente por un cambio de escala tendrían la misma energía. Esto es cierto no sólo para transformaciones infinitesimales sino también para transformaciones finitas, en particular, dos geometrías relacionadas por escalamiento o inversión en una esfera también tienen la misma energía. Y si una de las dos es un estado de equilibrio, la otra también lo es.

Bajo inversión, una superficie no-compacta puede sufrir un cambio de topología. En la referencia [18] el punto de partida del análisis, fue el catenoide, la superficie mínima no-trivial más simple y qué consiste en un cuello cilíndrico que se abre exponencialmente en sus dos extremos. Estos cuellos están involucrados en la formación de vesículas: el costo energético local es cero; además, las geometrías mínimas con múltiples cuellos ocurren como componentes de la geometría complicada del aparato de Golgi. Sorpresivamente, las contrapartes invertidas de estas geometrías también tienen una interpretación física biológicamente relevante: bajo inversión en una esfera centrada en el origen, el catenoide se transforma en una geometría esférica desinflada con dos puntos (originados de las regiones asintóticas del catenoide) que se tocan, de manera que se asemeja bastante a la forma de discocito de los glóbulos rojos en la sangre. Mientras el catenoide es único salvo escalamiento, la morfología de su contraparte invertida depende sensiblemente del centro de inversión, de forma que moviendo el centro de inversión a lo largo del eje de simetría del catenoide se obtiene una familia uniparamétrica de geometrías desinfladas con simetría axial [18]. En [17] se exploró la integrabilidad de las ecuaciones de Euler-Lagrange para una geometría con simetría axial.

Se encontró que las geometrías invertidas exhiben un plano tangente en los dos puntos mantenidos en contacto. Sin embargo siempre exhiben singularidades de la curvatura en los puntos en contacto. Estas singularidades indican la presencia de un par de fuerzas opuestas y de igual magnitud dirigidas a lo largo del eje de simetría que forza a los polos a juntarse. De no ser por la presencia de estas fuerzas tal geometría no podría existir como configuración en equilibrio: sin ellas la geometría se inflaría en una esfera redonda, el único equilibrio de una membrana fluida topológicamente esférica en ausencia de fuerzas externas.

La magnitud de la fuerza que junta los polos puede ajustarse a través de la traslación del punto de inversión. Conforme se traslada este punto a lo largo del eje de simetría ocurre una transición continua entre el discocito y el estomatocito, una geometría que se asemeja a una copa, de manera que este modelo representa el primer ejemplo de una transición de forma descrito completamente desde el punto de vista analítico.

En el capítulo 5 se presenta una generalización de estos resultados. Primero se estudian las vesículas desinfladas que se obtienen cuando el centro de inversión está fuera del eje de simetría del catenoide. Luego, por medio de la inversión de las superficies mínimas presentadas por Jorge y Meeks [45], llamadas  $k$ -noides, que son la generalización natural del catenoide, pues poseen  $k$  cuellos catenoidales, se construyen geometrías que consisten en vesículas fluidas desinfladas con  $k$  puntos en contacto. En estas geometrías, las singularidades localizadas en estos puntos se relacionan con las  $k$  fuerzas que mantienen pegados estos puntos. Asimismo se presenta una expresión general, nueva y sumamente simple para estas fuerzas.

## 1.4. Deformación de superficies planas

Cómo se arruga una hoja de papel en la mano o la defensa de un coche en un accidente es un proceso sutil no local. Un tratamiento teórico confiable solo ha sido desarrollado en años recientes [106]. Es posible adoptar el marco teórico desarrollado para estudiar membranas fluidas en [37] en la formulación de un

principio variacional para identificar los estados de equilibrio de la hoja.

En una primera aproximación, es posible tratar la hoja como una superficie inextensible en casi todos sus puntos, es decir, en cualquier deformación de ésta, por ejemplo cuando se arruga, la distancia en la superficie entre puntos no cambia; no solo las expansiones sino también cortes de la superficie no están permitidos. En términos geométricos la métrica inducida en la superficie permanece fija, así que las únicas deformaciones de la superficie permisibles son isometrías. En el límite en el que el grosor superficial es mucho menor que el radio de curvatura, excepto en ciertas regiones minoritarias, esta aproximación proporciona una descripción excelente de cualquier hoja elástica, en particular de una hoja de papel.

En primer lugar es necesario abordar el reto técnico sutil: cómo resolver las ecuaciones de forma consistentes con una superficie desarrollable. Además es necesario identificar las condiciones de frontera relevantes consistentes con isometrías. Aplicando de manera ingenua las condiciones de frontera relevantes a una membrana fluida resulta en una identificación incorrecta de los esfuerzos dentro de la superficie, pues típicamente, la constricción local sobre la métrica no es consistente globalmente con las fuerzas externas impuestas sobre la hoja. Esta constricción limita drásticamente cómo se puede doblar la hoja; según el teorema Egregium de Gauss, la superficie deformada también tendrá curvatura Gaussiana cero. De acuerdo con esta restricción la hoja tratará de doblarse en una única dirección casi en todas partes para así preservar su curvatura Gaussiana nula. Pero debido también al hecho de que debe deformarse en una región más pequeña, resulta que la manera más eficiente de minimizar la energía almacenada y de mantener la condición de inextensibilidad en la mayor parte de la superficie, es por medio de una violación de la constricción en ciertas regiones: las deformaciones se distribuyen doblando la superficie en más de una dirección, por lo que en general además se estirará formando picos agudos conectados por dobleces bien definidos en donde está concentrado el esfuerzo, tal como puede observarse en una hoja de papel arrugada [20].

Así, las superficies resultantes de la deformaciones, además de minimizar la energía de doblamiento, deben estar constituidas por pedazos de superficies isométricas al plano. Las posibles superficies con curvatura Gaussiana cero, son los conos, cilindros y las superficies desarrollables en su tangente [34].

Como se verá en el capítulo 6, para identificar los estados de la hoja deformada, consistentes con una métrica fija, es necesario minimizar la energía de doblamiento bajo esta constricción local. En este contexto vale la pena enfatizar las diferencias entre este problema y su contraparte para una membrana fluida: en el primer caso las deformaciones tangenciales están prohibidas (costando una energía infinita); en el segundo las deformaciones tangenciales que preservan el área no implican un costo energético. En un caso la constricción es local en el otro es global. Ambos casos representan límites ideales opuestos del comportamiento de una superficie bajo doblamiento. Lo que tienen en común es el hecho que los dos límites involucran únicamente a los grados de libertad geométricos de la superficie.

En la referencia [36], se presentó una modificación del principio variacional para imponer la constricción sobre la métrica usando multiplicadores de Lagrange locales. Se demostró que estos multiplicadores se identifican en un estado de equilibrio con un esfuerzo tangencial adicional conservado sobre la superficie; la ecuación de Euler-Lagrange se modifica con la adición de un acoplamiento lineal entre este esfuerzo y la curvatura extrínseca.

El defecto más simple en una hoja inextensible es un pico aislado: en la vecindad de este pico la superficie es un cono. [5, 20]. A diferencia del *cono de helado* que tiene déficit de ángulo positivo, el cono formado en una hoja de papel plana después de la aplicación de una fuerza externa, siempre tiene un déficit de ángulo cero. En la referencia [75] se demostró que otro tipo de cono, con un exceso de ángulo, podría ocurrir como un defecto en las hojas planas. Morfologías parecidas surgen durante el crecimiento

de varias hojas biológicas caracterizada por una curvatura de Gauss negativa; en particular varias algas y flores asumen esta forma durante su crecimiento [75]. En este trabajo se realizó una caracterización rigurosa de estos defectos cónicos. Se demostró que existe un mapeo uno a uno entre estas morfologías y las configuraciones de equilibrio de la elástica de Euler definida sobre una esfera, un sistema discutido por matemáticos por primera vez en los años ochenta. Usando esta identificación, se encontró que existe una infinidad de estados de la hoja, etiquetado por un entero,  $n = 2, 3, 4, \dots$ . A partir de un cierto ángulo todas las configuraciones exhiben puntos de auto-contacto. La complejidad crece conforme aumenta el ángulo de exceso. En el capítulo 6 se analizará la estabilidad de estas configuraciones para ángulos de exceso pequeños.

Asimismo este mismo marco teórico del tensor de esfuerzos se aplicará para los modos de deformación más generales consistentes con isometría. El ápice del defecto cónico proporciona una constricción geométrica muy fuerte proporcionando estabilidad al estado base del cono. Cuando se corta un disco alrededor del ápice se encuentra que este estado se vuelve inestable; en la ausencia del ápice como centro de organización del cono, el anulo restante (sección comprendida entre dos fronteras circulares) se relaja en una superficie plana más general: una superficie desarrollable en su tangente. Aunque tales superficies han sido estudiadas desde el siglo XIX, nunca han sido estudiadas en este contexto físico. Estas superficies son generadas por las tangentes de una curva espacial, su llamado borde de regresión, que las describe completamente. La justificación principal para dedicar tiempo a este problema es porque representa una buena aproximación para varias membranas biológicas delgadas, entre ellas las hojas de plantas, cuyas propiedades elásticas en escalas macroscópicas son determinadas por las paredes celulares que envuelven las células. Explicar las morfologías observadas es un reto importante biofísico. Curiosamente, este problema tiene relevancia no sólo en la física de la materia condensada suave, la ingeniería y la biofísica, también resulta relevante en el trabajo de arquitectos contemporáneos que quieren explotar las propiedades especiales de las superficies desarrollables formadas por placas metálicas planas para crear formas estructurales novedosas; el museo Guggenheim en Bilbao, diseñado por Frank Gehry, proporciona un ejemplo bien conocido.

# Capítulo 2

## Esfuerzos y torcas en curvas

En este capítulo se desarrolla un marco teórico para estudiar configuraciones en equilibrio de curvas en  $\mathbb{E}^3$ , cuya energía asociada depende sólo de su curvatura y torsión de Frenet-Serret. La dependencia de estas cantidades de las funciones de encajamiento de las curvas se implementa introduciendo multiplicadores de Lagrange locales en el principio variacional y se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes. Este marco se extiende para tratar el problema en el cual la curva está constreñida a estar sobre una superficie prescrita. Estos resultados se especializan al caso de la elástica de Euler y como aplicación se consideran los casos de curvas de este tipo confinadas dentro de esferas.

### 2.1. Principio variacional para curvas usando variables auxiliares

Todo Hamiltoniano invariante bajo transformaciones euclidianas  $H[\mathbf{Y}]$  definido sobre una curva espacial  $\Gamma : s \rightarrow \mathbf{Y}(s)$  parametrizada por longitud de arco  $s$ , y que depende únicamente de la trayectoria misma, puede ser expresado en términos de la curvatura  $\kappa$  y torsión  $\tau$  definidas en el marco de Frenet-Serret (FS) adaptado a  $\Gamma$ , así como de sus derivadas, en la forma [3]

$$H[\mathbf{Y}] = \int ds \mathcal{H}(\kappa, \tau, \kappa', \tau', \dots), \quad (2.1)$$

donde  $'$  representa diferenciación con respecto a  $s$ .

Es posible hacer esto, pues una vez que las curvaturas están dadas, la curva misma siempre puede ser reconstruida salvo movimientos euclidianos (traslaciones y rotaciones) [92]. Esta relación permite reemplazar las funciones de encajamiento por las curvaturas y tratarlas como variables geométricas independientes.

Uno está interesado en los puntos críticos de  $H$ , pero para determinarlos correctamente se debe tomar en cuenta que existe una sutileza en mantener la relación de  $\kappa$  y  $\tau$  con  $\mathbf{Y}$  en el principio variacional: las ecuaciones de Frenet-Serret (FS), dadas por las ecuaciones (A.1), se deben preservar bajo deformaciones de la curva.

Una manera de hacer que esta condición se cumpla, es imponer este conjunto de ecuaciones como un conjunto de constricciones en el principio variacional. Esto se puede lograr con la introducción de multiplicadores de Lagrange de manera análoga a la presentada en la referencia [37]. Cuando esto se realiza,  $\kappa$ ,  $\tau$  y  $\mathbf{Y}$  están libres para ser variadas independientemente. Como el vector tangente y las normales a la curva aparecen en estas ecuaciones es natural también tratar estas variables independientemente.

Tres multiplicadores de Lagrange (dados como componentes de un vector  $\mathbf{F}$ ) son necesarios para

fijar las variaciones de las componentes del vector tangente  $\mathbf{T}$  para que sean la primera derivada de las funciones de encajamiento de la curva, otros seis  $(\lambda_{ab})$  para asegurar la ortonormalización del marco FS  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  y finalmente tres multiplicadores  $(\Lambda_{ab})$  para establecer las relaciones entre esta base y su derivada, mismas que definen las curvaturas y al mismo tiempo aseguran que su variación respeta las ecuaciones de FS. Teniendo en cuenta lo anterior, se construye el siguiente Hamiltoniano efectivo  $H_c(\mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa, \tau, \mathbf{F}, \lambda_{ab}, \Lambda_{ab})$ :

$$\begin{aligned}
H_c &= H(\kappa, \tau) + \int \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T} - \mathbf{Y}') ds \\
&+ \frac{1}{2} \int \lambda_{\mathbf{TT}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} - 1) ds + \frac{1}{2} \int \lambda_{\mathbf{NN}} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} - 1) ds + \frac{1}{2} \int \lambda_{\mathbf{BB}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - 1) ds \\
&+ \int \lambda_{\mathbf{TN}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} ds + \int \lambda_{\mathbf{NB}} \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} ds + \int \lambda_{\mathbf{BT}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} ds \\
&+ \int \Lambda_{\mathbf{TN}} (\mathbf{T}' \cdot \mathbf{N} - \kappa) ds + \int \Lambda_{\mathbf{NB}} (\mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} - \tau) ds + \int \Lambda_{\mathbf{BT}} \mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} ds.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

El multiplicador de Lagrange  $\lambda_{\mathbf{TT}}$  asegura que el parámetro  $s$  es longitud de arco.

El único lugar donde aparece  $\mathbf{Y}$  en el Hamiltoniano efectivo es en la restricción tangencial implementada por  $\mathbf{F}$ , de manera que la variación con respecto a  $\mathbf{Y}$  es

$$\delta H_c = \int ds \mathbf{F}' \cdot \delta \mathbf{Y}; \tag{2.3}$$

así, la ecuación Euler-Lagrange correspondiente está dada por la conservación de  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F}' = 0, \tag{2.4}$$

lo cual consecuencia directa de la invariancia traslacional de  $H$  como se mostrará más adelante.

De la variación de  $H_c$  con respecto a  $\kappa$  y  $\tau$  se determinan directamente los multiplicadores de Lagrange que implementan sus definiciones

$$\Lambda_{\mathbf{TN}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \kappa} \equiv \mathcal{H}_\kappa, \quad \Lambda_{\mathbf{NB}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} \equiv \mathcal{H}_\tau. \tag{2.5}$$

Finalmente  $H_c$  es estacionario con respecto a  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{B}$  respectivamente cuando

$$\mathbf{F} + \lambda_{\mathbf{TT}} \mathbf{T} + \lambda_{\mathbf{TN}} \mathbf{N} + \lambda_{\mathbf{BT}} \mathbf{B} + \Lambda_{\mathbf{BT}} \mathbf{B}' - (\Lambda_{\mathbf{TN}} \mathbf{N})' = 0, \tag{2.6a}$$

$$\lambda_{\mathbf{TN}} \mathbf{T} + \lambda_{\mathbf{NN}} \mathbf{N} + \lambda_{\mathbf{NB}} \mathbf{B} + \Lambda_{\mathbf{TN}} \mathbf{T}' - (\Lambda_{\mathbf{NB}} \mathbf{B})' = 0, \tag{2.6b}$$

$$\lambda_{\mathbf{BT}} \mathbf{T} + \lambda_{\mathbf{NB}} \mathbf{N} + \lambda_{\mathbf{BB}} \mathbf{B} + \Lambda_{\mathbf{NB}} \mathbf{N}' - (\Lambda_{\mathbf{BT}} \mathbf{T})' = 0. \tag{2.6c}$$

Sustituyendo las ecuaciones de FS en las ecuaciones (2.6), se obtiene

$$\mathbf{F} + (\lambda_{\mathbf{TT}} + \kappa \Lambda_{\mathbf{TN}}) \mathbf{T} + (\lambda_{\mathbf{TN}} - \tau \Lambda_{\mathbf{BT}} - \Lambda'_{\mathbf{TN}}) \mathbf{N} + (\lambda_{\mathbf{BT}} - \tau \Lambda_{\mathbf{TN}}) \mathbf{B} = 0, \tag{2.7a}$$

$$\lambda_{\mathbf{TN}} \mathbf{T} + (\lambda_{\mathbf{NN}} + \kappa \Lambda_{\mathbf{TN}} + \tau \Lambda_{\mathbf{NB}}) \mathbf{N} + (\lambda_{\mathbf{NB}} - \Lambda'_{\mathbf{NB}}) \mathbf{B} = 0, \tag{2.7b}$$

$$(\lambda_{\mathbf{BT}} - \kappa \Lambda_{\mathbf{NB}} - \Lambda'_{\mathbf{BT}}) \mathbf{T} + (\lambda_{\mathbf{NB}} - \kappa \Lambda_{\mathbf{BT}}) \mathbf{N} + (\lambda_{\mathbf{BB}} + \tau \Lambda_{\mathbf{NB}}) \mathbf{B} = 0. \tag{2.7c}$$

La independencia lineal del marco de FS implica que los seis coeficientes de las ecuaciones (2.7b) y (2.7c)

deben ser nulos

$$\lambda_{\mathbf{TN}} = 0, \quad (2.8a)$$

$$\lambda_{\mathbf{NN}} + \kappa\Lambda_{\mathbf{TN}} + \tau\Lambda_{\mathbf{NB}} = 0, \quad (2.8b)$$

$$\lambda_{\mathbf{NB}} - \Lambda'_{\mathbf{NB}} = 0, \quad (2.8c)$$

$$\lambda_{\mathbf{BT}} - \kappa\Lambda_{\mathbf{NB}} - \Lambda'_{\mathbf{BT}} = 0, \quad (2.8d)$$

$$\lambda_{\mathbf{NB}} - \kappa\Lambda_{\mathbf{BT}} = 0, \quad (2.8e)$$

$$\lambda_{\mathbf{BB}} + \tau\Lambda_{\mathbf{NB}} = 0. \quad (2.8f)$$

Resolviendo para los demás multiplicadores de Lagrange en términos de las cantidades conocidas  $\Lambda_{\mathbf{TN}}$  y  $\Lambda_{\mathbf{NB}}$ , dadas en la ecuación (2.5), se obtiene

$$\lambda_{\mathbf{NN}} = -\kappa\Lambda_{\mathbf{TN}} - \tau\Lambda_{\mathbf{NB}}, \quad (2.9a)$$

$$\lambda_{\mathbf{BB}} = -\tau\Lambda_{\mathbf{NB}}, \quad (2.9b)$$

$$\lambda_{\mathbf{NB}} = \Lambda'_{\mathbf{NB}}, \quad (2.9c)$$

$$\lambda_{\mathbf{BT}} = \kappa\Lambda_{\mathbf{NB}} + \left( \frac{\Lambda'_{\mathbf{NB}}}{\kappa} \right)', \quad (2.9d)$$

$$\Lambda_{\mathbf{BT}} = \frac{\Lambda'_{\mathbf{NB}}}{\kappa}. \quad (2.9e)$$

Sustituyendo los valores de todos estos multiplicadores en la ecuación (2.7a), se obtiene que  $\mathbf{F}$  está dado por

$$\mathbf{F} = (-\lambda_{\mathbf{TT}} - \kappa\mathcal{H}_\kappa)\mathbf{t} + \left( \frac{\tau}{\kappa}\mathcal{H}_\tau' + \mathcal{H}_\kappa' \right)\mathbf{n} + \left( \tau\mathcal{H}_\kappa - \kappa\mathcal{H}_\tau - \left( \frac{1}{\kappa}\mathcal{H}_\tau' \right)' \right)\mathbf{b}. \quad (2.10)$$

En este punto, sólo falta determinar  $\lambda_{\mathbf{TT}}$ . Esto se realiza a través de la ley de conservación para  $\mathbf{F}$ . Sustituyendo (2.10) en la ecuación (2.4) y tomando las proyecciones en el marco de FS, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\varepsilon_{\mathbf{T}} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{T} = 0 = -(\kappa\mathcal{H}_\kappa)' - \tau\mathcal{H}'_\tau - \kappa\mathcal{H}'_\kappa - \lambda'_{\mathbf{TT}}, \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{N}} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{N} = 0 = \mathcal{H}''_\kappa - (\kappa^2 + \tau^2)\mathcal{H}_\kappa + 2\tau \left( \frac{\mathcal{H}_\tau'}{\kappa} \right)' + \tau' \left( \frac{\mathcal{H}'_\tau}{\kappa} \right) + \kappa\tau\mathcal{H}_\tau - \kappa\lambda_{\mathbf{TT}}, \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{B}} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{B} = 0 = (\tau\mathcal{H}_\kappa)' - \left( \frac{\mathcal{H}_\tau'}{\kappa} \right)'' - (\kappa\mathcal{H}_\tau)' + \tau \left( \frac{\tau}{\kappa}\mathcal{H}_\tau' + \mathcal{H}'_\kappa \right). \quad (2.13)$$

Como  $H$  es un escalar bajo reparametrizaciones, la parte tangencial de la variación es una derivada total; la componente correspondiente de la ecuación de EL, dada por la ecuación (2.11), se debe satisfacer idénticamente [11]. Integrando la ecuación (2.11) se obtiene que  $\lambda_{\mathbf{TT}}$  está dado por

$$\lambda_{\mathbf{TT}} = \mathcal{H} - 2\kappa\mathcal{H}_\kappa - \tau\mathcal{H}_\tau + c, \quad (2.14)$$

donde  $c$  es una constante de integración asociada con la restricción de longitud fija <sup>1</sup>. Modulo esta constante, el vector  $\mathbf{F}$  está completamente determinado por la curva

$$\mathbf{F} = (\kappa\mathcal{H}_\kappa + \tau\mathcal{H}_\tau - \mathcal{H} - c)\mathbf{T} + \left( \mathcal{H}'_\kappa + \frac{\tau}{\kappa}\mathcal{H}'_\tau \right)\mathbf{N} + \left( \tau\mathcal{H}_\kappa - \kappa\mathcal{H}_\tau - \left( \frac{\mathcal{H}'_\tau}{\kappa} \right)' \right)\mathbf{B}. \quad (2.15)$$

<sup>1</sup>Uno podría usar el funcional  $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + c$  en lugar de  $\mathcal{H}$ , donde  $c$  actúa como un multiplicador de Lagrange que fija la longitud total.



Sustituyendo (2.14) en (2.12) (y manipulando la ecuación (2.13)), se obtienen las dos ecuaciones de EL que corresponden a los dos modos independientes de deformación de la curva

$$\varepsilon_{\mathbf{N}} = \mathcal{H}'_{\kappa} + (\kappa^2 - \tau^2) \mathcal{H}_{\kappa} + 2\tau \left( \frac{\mathcal{H}'_{\tau}}{\kappa} \right)' + \tau' \left( \frac{\mathcal{H}'_{\tau}}{\kappa} \right) + 2\kappa\tau\mathcal{H}_{\tau} - \kappa(\mathcal{H} + c) = 0, \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{B}} = 2(\tau\mathcal{H}_{\kappa})' - \tau'\mathcal{H}_{\kappa} - \left( \frac{\mathcal{H}'_{\tau}}{\kappa} \right)'' - (\kappa\mathcal{H}_{\tau})' + \frac{\tau^2}{\kappa}\mathcal{H}'_{\tau} = 0. \quad (2.17)$$

Estas dos ecuaciones coinciden con las ecuaciones (77) y (78) de la referencia [11]<sup>2</sup> en donde fueron obtenidas de manera algo más laboriosa, ya que se determinó explícitamente cómo responden las curvaturas a la deformación de la curva, lo cual aquí no fue necesario por la introducción de los multiplicadores de Lagrange que permitieron variar todas estas cantidades libremente.

## 2.2. Identificación de los vectores de esfuerzos y torcas

En esta sección se identifican los vectores de esfuerzos y de torcas que actúan sobre la curva. Esto se realiza analizando las cantidades conservadas asociadas con las invariancias respecto de traslaciones y rotaciones del Hamiltoniano.

Salvo las ecuaciones EL anteriores (que en equilibrio se anulan), la variación del Hamiltoniano es  $\delta H_c = \int ds Q'$ , donde  $Q$  es la carga Noether dada por

$$Q = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{Y} + \Lambda_{\mathbf{T}\mathbf{N}} \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{T} + \Lambda_{\mathbf{N}\mathbf{B}} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{N} + \Lambda_{\mathbf{B}\mathbf{T}} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{B}. \quad (2.18)$$

Usando las relaciones (2.5) y (2.9e),  $Q$  puede expresarse en términos de las cantidades geométricas de la curva

$$Q = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{Y} + \mathcal{H}_{\kappa} \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{T} + \mathcal{H}_{\tau} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{N} + \frac{\mathcal{H}'_{\tau}}{\kappa} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{B}. \quad (2.19)$$

Como  $H$  es invariante bajo transformaciones euclidianas, existen cantidades conservadas de acuerdo con el teorema de Noether, las cuales se analizan a continuación.

Para el caso de una traslación infinitesimal de curva  $\Gamma$  por un vector  $\delta \mathbf{Y} = \epsilon \mathbf{d}$  con  $\epsilon$  un parámetro infinitesimal, la base del marco de FS no cambia, así que la carga de Noether es simplemente  $Q = -\epsilon \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$ . Entonces, en equilibrio la variación de la energía es

$$\delta H_c = -\epsilon \mathbf{d} \cdot \int ds \mathbf{F}'. \quad (2.20)$$

Como el Hamiltoniano es invariante bajo traslaciones y el dominio de integración es arbitrario, se tiene que

$$\mathbf{F}' = 0. \quad (2.21)$$

Se observa entonces que la conservación de  $\mathbf{F}$  es consecuencia de la invariancia respecto de traslaciones de  $H$ . El módulo cuadrado de  $\mathbf{F}$  es el primer Casimir del grupo Euclidiano.

Considerando ahora el caso en que la curva  $\Gamma$  tiene fronteras en  $s_i$  y  $s_f$ , si cambia únicamente la frontera en  $s_f$ , manteniendo fija la otra, ahora la variación del Hamiltoniano es

$$\delta H_c = -\epsilon \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}(s_f), \quad (2.22)$$

<sup>2</sup>Excepto por la constante  $c$ , discrepancia debida a que en dicha referencia no se impuso la constricción sobre la longitud de arco y por lo tanto sobre la longitud total de la curva.

lo que establece que el cambio total en la energía de la curva es la proyección del vector  $\mathbf{F}$  en la dirección del desplazamiento  $\mathbf{d}$  de la frontera, lo cual permite identificar a  $\mathbf{F}$  como la tensión sobre  $\Gamma$  en  $s_f$ .

Para el caso de una rotación infinitesimal de la curva  $\delta\mathbf{Y} = \epsilon\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Y}$ , los vectores de base del marco de FS se transforman como

$$\delta\mathbf{T} = \epsilon\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T}, \quad \delta\mathbf{N} = \epsilon\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{N}, \quad \delta\mathbf{B} = \epsilon\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}. \quad (2.23)$$

Así, la carga de Noether es  $Q = \epsilon\boldsymbol{\omega} \cdot \left( -\mathbf{Y} \times \mathbf{F} + \mathcal{H}_\tau \mathbf{T} + \frac{\mathcal{H}'_\tau}{\kappa} \mathbf{N} + \mathcal{H}_\kappa \mathbf{B} \right)$ . Entonces, la variación del Hamiltoniano está dada por

$$\delta H_c = -\epsilon\boldsymbol{\omega} \cdot \int ds \mathbf{M}', \quad (2.24)$$

estableciendo que en equilibrio se conserva el vector definido por

$$\mathbf{M} = \mathbf{Y} \times \mathbf{F} + \mathbf{S} \quad (2.25)$$

donde

$$\mathbf{S} = - \left( \mathcal{H}_\tau \mathbf{T} + \frac{\mathcal{H}'_\tau}{\kappa} \mathbf{N} + \mathcal{H}_\kappa \mathbf{B} \right). \quad (2.26)$$

De forma similar a la identificación del vector de esfuerzos sobre la curva,  $\mathbf{M}$  se identifica como el vector de torcas con respecto al origen que actúa en un segmento de la curva. Éste consiste en dos partes, la primera depende del origen, pero la segunda, dada por  $\mathbf{S}$ , es de carácter intrínseco, pues posee invariancia traslacional.

Derivando con respecto a  $s$  la relación (2.26) se tiene que la torca diferencial intrínseca está dada por

$$\mathbf{S}' = \left( \tau \mathcal{H}_\kappa - \kappa \mathcal{H}_\tau - \left( \frac{\mathcal{H}'_\tau}{\kappa} \right)' \right) \mathbf{N} - \left( \mathcal{H}'_\kappa + \frac{\tau}{\kappa} \mathcal{H}'_\tau \right) \mathbf{B}. \quad (2.27)$$

Comparando esta expresión con la de  $\mathbf{F}$  dada en (2.15) se observa que

$$\mathbf{S}' = \mathbf{F} \times \mathbf{T}, \quad (2.28)$$

relación que se satisface independientemente de si la curva está en equilibrio, pues aun si  $\mathbf{M}$  está conservada, ni  $\mathbf{Y} \times \mathbf{F}$  ni  $\mathbf{S}$  están conservados por separado. Sin embargo, la proyección  $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{F}}$ , ( $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}/\|\mathbf{F}\|$ ) el segundo Casimir del grupo Euclidiano, si está conservado.

En suma, las cantidades conservadas, el primer y el segundo Casimir del grupo euclidiano definidos por  $F^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}$  y  $J = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{F}}$  están dados por las expresiones

$$F^2 = (\kappa \mathcal{H}_\kappa + \tau \mathcal{H}_\tau - \mathcal{H} - c)^2 + \left( \mathcal{H}'_\kappa + \frac{\tau}{\kappa} \mathcal{H}'_\tau \right)^2 + \left( \tau \mathcal{H}_\kappa - \kappa \mathcal{H}_\tau - \left( \frac{\mathcal{H}'_\tau}{\kappa} \right)' \right)^2. \quad (2.29)$$

$$J = -\frac{1}{F} \left( \mathcal{H}_\tau (\kappa \mathcal{H}_\kappa + \tau \mathcal{H}_\tau - \mathcal{H} - c) + \frac{\mathcal{H}'_\tau}{\kappa} \left( \mathcal{H}'_\kappa + \frac{\tau}{\kappa} \mathcal{H}'_\tau \right) + \mathcal{H}_\kappa \left( \tau \mathcal{H}_\kappa - \kappa \mathcal{H}_\tau - \left( \frac{\mathcal{H}'_\tau}{\kappa} \right)' \right) \right). \quad (2.30)$$

En las siguientes subsecciones, se aplicarán estos resultados en dos ejemplos, a un modelo integrable introducido por Kuznetsov y Plyushchay [62] que posteriormente será relevante para el estudio de superficie desarrollables en su tangente en el capítulo 6 y también se aplicará a la elástica de Euler en  $\mathbb{E}^3$ .

### 2.2.1. Modelo de Kuznetsov-Plyushchay

En la referencia [62] Kuznetsov y Plyushchay, en el contexto de partículas relativistas introdujeron un modelo integrable con la siguiente densidad <sup>3</sup>

$$\mathcal{H}(\kappa, \tau) = \kappa f(\zeta), \quad \text{con} \quad \zeta = \frac{\tau}{\kappa}, \quad (2.31)$$

donde  $f(\zeta)$  es una función arbitraria.

Para este caso, las derivadas de  $\mathcal{H}$  son

$$\mathcal{H}_\kappa = f - \zeta f_\zeta, \quad \mathcal{H}_\tau = f_\zeta. \quad (2.32)$$

Su combinación da lugar a las siguientes identidades

$$\mathcal{H}_\kappa + \zeta \mathcal{H}_\tau = f, \quad \mathcal{H}'_\kappa + \zeta \mathcal{H}'_\tau = 0, \quad (2.33)$$

multiplicando ambas por  $\kappa$  se tiene que

$$\kappa \mathcal{H}_\kappa + \tau \mathcal{H}_\tau = \mathcal{H}, \quad \kappa \mathcal{H}'_\kappa + \tau \mathcal{H}'_\tau = 0. \quad (2.34)$$

Sustituyendo la relación (2.34) en las ecuaciones (2.16) y (2.17) se obtiene que  $\varepsilon_{\mathbf{N}}$  y  $\varepsilon_{\mathbf{B}}$  están dadas respectivamente por

$$\zeta \left( \left( \frac{\mathcal{H}'_\tau}{\kappa} \right)' - \tau \mathcal{H}_\kappa + \kappa \mathcal{H}_\tau \right) = c, \quad (2.35)$$

$$\left( \frac{\mathcal{H}'_\tau}{\kappa} \right)' - \tau \mathcal{H}_\kappa + \kappa \mathcal{H}_\tau = C_b, \quad (2.36)$$

donde  $C_b$  es una constante de integración. La combinación de ambas ecuaciones conduce a que  $\zeta$  es constante. Nótese que si se impone la condición de arco-longitud fija, i.e.  $c \neq 0$ , entonces ni  $C_b$  ni  $\zeta$  pueden ser cero. Entonces las curvas que extremizan este modelo satisfacen que su torsión es proporcional a su curvatura:  $\tau = \zeta \kappa$ . Mas aun, usando este hecho en la ecuación de EL (2.35), ésta se reduce a

$$\tau ((\zeta^2 + 1) f_\zeta - \zeta f) = c, \quad (2.37)$$

lo que implica que  $\tau$  y por lo tanto  $\kappa$ , son constantes, de forma que las únicas curvas extremales corresponden a hélices circulares. En la referencia [63], usando un formalismo Hamiltoniano, soluciones completamente análogas a estas fueron encontradas como trayectorias de partículas relativistas.

Usando (2.34) y (2.35) en la expresión de la fuerza (2.15) se obtiene que la fuerza está dirigida a lo largo del vector de Darboux definido por  $\mathbf{D} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$  [34], es decir

$$\mathbf{F} = -\frac{c}{\tau} \mathbf{D}. \quad (2.38)$$

Así, el primer Casimir está dado por

$$\zeta^2 F^2 = c^2 (1 + \zeta^2), \quad (2.39)$$

Su dependencia de la función  $f$  se da a través de la constante  $c$  definida en la ecuación (2.37). En particular, para superficies desarrollables en su tangente, la energía de doblamiento definida sobre su borde de regresión es cuadrática en  $\zeta$ :

$$f = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)^2 = \frac{\rho \zeta^2}{2}, \quad (2.40)$$

---

<sup>3</sup>Aquí se elige la razón  $\tau/\kappa$  en lugar de su inversa, utilizada en dicha referencia, debido a que, como se verá en el capítulo 6, es esta la razón que involucra la energía de las superficies desarrollables en su tangente.

donde  $\rho$  es una constante, por lo que

$$\mathcal{H}_\kappa = -\frac{\rho\zeta^2}{2}, \quad \mathcal{H}_\tau = \rho\zeta, \quad y \quad c = \rho\tau\zeta \left( \frac{\zeta^2}{2} + 1 \right). \quad (2.41)$$

Los vectores de esfuerzos y torca intrínseca están dados por

$$\mathbf{F} = -\rho\zeta \left( \frac{\zeta^2}{2} + 1 \right) \mathbf{D}, \quad \mathbf{S} = \rho\zeta \left( -\mathbf{T} + \frac{\zeta}{2} \mathbf{B} \right). \quad (2.42)$$

Ambos se anulan cuando  $\tau \rightarrow 0$ . Estos vectores de esfuerzos y de torca obtenidos tienen la misma forma que los presentados por Starostin y Heidjen en la referencia [94]<sup>4</sup>, en donde estudiaron fuerzas y torcas en bandas en forma de hélice, aunque utilizando un Hamiltoniano definido sobre una curva geodésica en la superficie, en lugar del borde de regresión.

El segundo Casimir está dado por

$$FJ = \frac{cf}{\zeta} = \frac{c\rho}{2}\zeta. \quad (2.43)$$

estableciendo una vez más que  $\zeta$  es constante. Usando la expresión (2.39) del primer casimir, se puede expresar  $J$  completamente en términos de  $\zeta$  como

$$J = \frac{\rho}{2} \frac{\zeta^2}{\sqrt{1 + \zeta^2}}, \quad (2.44)$$

Si la fuerza es ortogonal a la torca, i.e.  $J = 0$ , entonces  $\tau = 0$  y la curva está en un plano.

### 2.2.2. Elástica de Euler

En general para un funcional que depende sólo en la primera curvatura  $\kappa$ , se tiene que  $\mathcal{H}_\tau = 0$ , y las ecuaciones de EL se reducen a

$$\varepsilon_{\mathbf{N}} = \mathcal{H}_\kappa'' + (\kappa^2 - \tau^2) \mathcal{H}_\kappa - \kappa(L + c) = 0, \quad (2.45a)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{B}} = 2(\tau\mathcal{H}_\kappa)' - \tau'\mathcal{H}_\kappa = 0. \quad (2.45b)$$

Multiplicando la ecuación (2.45b) por el factor integrante  $\mathcal{H}_\kappa$  permite escribirla como una derivada total  $(\mathcal{H}_\kappa^2\tau)' = 0$ , lo que implica que

$$\tau\mathcal{H}_\kappa^2 = c_b, \quad (2.46)$$

con  $c_b$  una constante de integración. Esta relación permite determinar  $\tau$  como función de  $\kappa$ . Los dos Casimires para este caso son

$$F^2 = \left( \mathcal{H}_\kappa' \right)^2 + (\kappa\mathcal{H}_\kappa - \mathcal{H} - c)^2 + (\tau\mathcal{H}_\kappa)^2. \quad (2.47)$$

$$J = -\frac{\tau\mathcal{H}_\kappa^2}{F}. \quad (2.48)$$

Comparando las ecuaciones (2.46) y (2.48) se observa que la constante de integración  $c_b$  es precisamente la cantidad conservada  $-FJ$ , de manea que se tiene la siguiente expresión para  $\tau$

$$\tau = -\frac{FJ}{\mathcal{H}_\kappa^2}. \quad (2.49)$$

---

<sup>4</sup>Para demostrar esto en el caso de la torca se requiere hacer uso de la expresión (2.37)

Sustituyendo esta expresión en la del primer casimir (2.47) resulta en la cuadratura para  $\kappa$

$$\left(\mathcal{H}'_{\kappa}\right)^2 + (\kappa\mathcal{H}_{\kappa} - \mathcal{H} - c)^2 + \left(\frac{FJ}{\mathcal{H}_{\kappa}}\right)^2 = F^2. \quad (2.50)$$

Considerando a  $\mathcal{H}_{\kappa}$  como la coordenada radial  $r$  de una partícula ficticia de masa  $m = 2$ , la ecuación (2.50) puede reescribirse como

$$\frac{mv^2}{2} + V(r) + \frac{1}{2m} \left(\frac{l}{r}\right)^2 = F^2, \quad (2.51)$$

que representa el movimiento radial de una partícula con energía total  $F^2$  y momento angular  $l = 2FJ$  en un potencial central  $V(r) = (\kappa r - \mathcal{H} - c)^2$  [11].

En particular para la elástica de Euler, cuya energía asociada está dada por

$$H_B = \frac{1}{2} \int ds \kappa^2, \quad (2.52)$$

esta es la energía de doblamiento del modelo de la cadena tipo gusano (Worm-Like Chain model) que describe un polímero semiflexible inextensible [52].

En este caso  $\mathcal{H}_{\kappa} = \kappa$  y las ecuaciones de EL (2.45a) y (2.45b) se reducen a

$$\varepsilon_{\mathbf{N}} = \kappa'' + \kappa \left( \frac{\kappa^2}{2} - \tau^2 - c \right), \quad (2.53a)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{B}} = \frac{2}{\kappa} (\kappa^2 \tau)'. \quad (2.53b)$$

El segundo Casimir es  $J = -\tau\kappa^2/F$ , de donde se obtiene que la torsión es

$$\tau = -\frac{FJ}{\kappa^2}, \quad (2.54)$$

Sustituyendo esta expresión para  $\tau$  en la ecuación de Euler-Lagrange  $\varepsilon_{\mathbf{N}}$  se obtiene la siguiente ecuación diferencial para  $\kappa$

$$\varepsilon_N = \kappa'' + \kappa \left( \frac{1}{2}\kappa^2 - c \right) - \frac{F^2 J^2}{\kappa^3} = 0. \quad (2.55)$$

La condición para que una elástica de Euler plana ( $\tau \rightarrow 0$ ) es que  $J = 0$ , lo cual sucede cuando la torca intrínseca  $\mathbf{S}$  es ortogonal a la fuerza  $\mathbf{F}$ .

El vector de esfuerzos en la elástica de Euler está dado por

$$\mathbf{F} = \left( \frac{1}{2}\kappa^2 - c \right) \mathbf{T} + \kappa' \mathbf{N} + \kappa \tau \mathbf{B}. \quad (2.56)$$

Su cuadrado, el primer Casimir proporciona directamente la primera integral de esta ecuación<sup>5</sup>, la cual está dada por la siguiente cuadratura para  $\kappa$

$$F^2 = \left(\kappa'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\kappa^2 - c\right)^2 + \left(\frac{FJ}{\kappa}\right)^2. \quad (2.57)$$

<sup>5</sup>Se podría haber obtenido el mismo resultado multiplicando  $\varepsilon_N$  por el factor integrante  $\kappa'$  e identificando la constante de integración como  $(F^2 - c^2)/2$ .

Por medio del cambio de variable  $u(s) = 1/2\kappa(s)^2$ , esta ecuación se puede reexpresar en la forma

$$(u')^2 + 2u(u - c)^2 - 2F^2u + F^2J^2 = 0. \quad (2.58)$$

Las soluciones de esta ecuación diferencial están dadas en términos de funciones elípticas. Este tipo de curvas de longitud fija que minimizan la energía (2.52) han sido estudiados con enorme detalle. En la referencia [65] Langer y Singer presentaron una clasificación sistemática de estas soluciones en el espacio euclidiano tridimensional así como en la esfera con curvatura Gaussiana positiva constante y en el plano de Poincaré, que es isométrico a la pseudoesfera con curvatura Gaussiana negativa constante. Una revisión de estas soluciones se puede encontrar en la referencia [91].

En particular, de la ecuación (2.55) se tiene que para una curva plana de curvatura constante, el único equilibrio estable es un círculo de radio  $R$ . La constante  $c$  está dada por  $c = 1/2R^2$  y el vector constante  $\mathbf{F}$  se anula. Bajo la acción sola de la energía de doblamiento el lazo tendería a expandirse; pero la constricción de longitud fija se opone a esta tendencia.

A continuación se presenta una adaptación de este marco teórico para incluir la constricción de que la elástica de Euler esté confinada por una superficie.

### 2.3. Polímeros confinados por superficies

En esta sección se adapta el marco teórico desarrollado en la sección anterior para describir los estados de equilibrio de un polímero semi-flexible confinado a una superficie. Esta constricción de confinamiento se impone usando un multiplicador de Lagrange local. De esta manera se simplifican en gran medida los argumentos variacionales usados anteriormente en este problema en la referencia [78].

La motivación para estudiar este problema surge de la biofísica: en un amplio rango de sistemas biológicos se presenta el confinamiento o la adhesión de biopolímeros a membranas biológicas. El primero ocurre dentro de compartimentos celulares o en las cápsidas virales; el segundo en el empaquetamiento de ADN, ya sea en el enrollamiento alrededor de una histona cilíndrica (conjunto de proteínas con forma de bobina) o en la conformación de ADN u otros biopolímeros cuya transcripción y replicación está gobernada por la adhesión específica de ciertas proteínas [71, 80, 108].

Recientemente, este tipo de problemas ha recibido mucha atención, Bouè et al. consideraron el confinamiento de una hoja cilíndrica dentro de un cilindro circular [7], Frey et al. analizaron explícitamente el confinamiento de polímeros dentro de una esfera usando simulaciones de Monte Carlo, mientras que Katzav et al. hicieron lo mismo con un enfoque estadístico empleando una aproximación de campo medio [49].

En el marco teórico empleado aquí, se considera al polímero completamente desde el punto de vista geométrico, no se consideran efectos asociados con cargas electrostáticas ni fluctuaciones térmicas. Como antes el polímero se modela como una curva en el espacio tridimensional cuya energía de doblamiento está dada por la ecuación (2.52). En particular se considerarán curvas cerradas. En ausencia de constricciones externas, no hay mucho que decir: el único equilibrio estable es el círculo. Sin embargo si se confinan sobre una superficie en general estarán obligadas a adoptar una forma no circular siguiendo trayectorias que no son geodésicas. Esto incrementa su energía elástica de doblamiento y genera fuerzas en la dirección normal a la superficie confinante. La magnitud de estas fuerzas varía (incluso en el confinamiento esférico) a lo largo de la región de contacto.

Este problema variacional con constricción fue considerado por primera vez en una serie de artículos por Nickerson and Manning en la referencias [70, 78]. En su manera de tratar el problema, se concentraron

en los grados de libertad de la curva ligados a la superficie. Aunque esta manera aparentemente conduce directamente a los aspectos físicos relevantes, se pierde de vista información importante. La invariancia Euclidiana del problema sin restricción (invariancia con respecto a traslaciones y rotaciones) no se preserva debido a la restricción. La manera en la cual ésta se pierde no es arbitraria. Con el marco teórico utilizado aquí, se tiene seguimiento de esta simetría. Esto se realiza trabajando con los grados de libertad de la curva originales (sin restricción) e implementando la restricción por medio de un multiplicador de Lagrange local, como se detalla a continuación.

La membrana sobre la que se confina el polímero se modela como una superficie bidimensional descrita en forma paramétrica por el mapeo  $\Sigma : (u^1, u^2) \rightarrow \mathbf{X}(u^1, u^2)$ . Para introducir la condición de que  $\Gamma$  está sobre  $\Sigma$  se suma a la energía  $H[\mathbf{Y}]$  dada por la ecuación (2.52) el siguiente término que implementa esta restricción:

$$H_c[\mathbf{Y}, u^a] = H[\mathbf{Y}] + \int ds \boldsymbol{\lambda}(s) \cdot [\mathbf{Y}(s) - \mathbf{X}(u^a(s))] , \quad (2.59)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda}$  es un multiplicador de Lagrange con valor en vectores definido sobre la curva  $\Gamma$ . Es importante notar que esta restricción rompe manifiestamente la invariancia traslacional de la energía  $H$ . Así,  $\boldsymbol{\lambda}$  también cuantifica la pérdida de invariancia Euclidiana en el sistema restringido.

Este nuevo término contribuye en la variación de  $H_c$  a través de la variación de la curva  $\Gamma$  dos maneras: por una parte como una curva espacial tal como en el caso sin restricción y por otra parte como una curva sobre  $\Sigma$  (mediante la variación de las coordenadas  $u^a$  sobre  $\Sigma$ ).

La variación de  $H_c$  con respecto a las funciones de encajamiento  $\mathbf{Y}$  ahora está dada por

$$\delta_{\mathbf{Y}} H_c = \int ds (\mathbf{F}' + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta \mathbf{Y} . \quad (2.60)$$

En equilibrio, se encuentra que  $\mathbf{F}' = -\boldsymbol{\lambda}$ . Entonces, en presencia de la restricción, la tensión por unidad de longitud en la curva no está conservada; el multiplicador es la fuerza externa asociada con la restricción [64].

La variación correspondiente de  $H_c$  con respecto a  $u^a(s)$  está dada por

$$\delta_u H_c = - \int ds \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{e}_a \delta u^a , \quad (2.61)$$

donde  $\mathbf{e}_a$ ,  $a = 1, 2$  son los vectores tangentes a la superficie adaptados a la parametrización por las coordenadas  $u^a$ . En equilibrio,  $\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{e}_a = 0$ ; de manera que la fuerza en la curva asociada con la restricción siempre actúa ortogonalmente a la superficie:  $\boldsymbol{\lambda} = \lambda \mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a  $\Sigma$ . Combinando estos resultados se obtiene

$$\mathbf{F}' = -\lambda \mathbf{n} . \quad (2.62)$$

Para un lazo confinado por un cilindro, la invariancia traslacional a lo largo de su eje de simetría (el eje  $z$  por ejemplo) implica que la componente correspondiente de la fuerza,  $F_3 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{z}$ , está conservada.

Una condición de integrabilidad para curvas cerradas es consecuencia de la ecuación (2.62):

$$\oint ds \lambda \mathbf{n} = 0 . \quad (2.63)$$

Esto es válido independientemente de si el contacto es completo o no. Para una curva abierta, la integral correspondiente es una medida de la fuerza neta actuando sobre la curva.

A partir de la ecuación (2.62) se obtiene que la derivada de Euler-Lagrange tangencial  $\varepsilon_{\mathbf{T}} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{T}$  se anula idénticamente, peculiaridad que puede ser atribuida al hecho que los únicos grados de libertad relevantes son geométricos, esté o no confinada la curva. Entonces  $\mathbf{F}$  está dado nuevamente por la ecuación (2.56), cuya diferenciación con respecto a  $s$  es

$$\mathbf{F}' = \varepsilon_{\mathbf{N}}\mathbf{N} + \varepsilon_{\mathbf{B}}\mathbf{B}, \quad (2.64)$$

donde las derivadas de Euler-Lagrange de la energía de doblamiento  $\varepsilon_{\mathbf{N}}$  y  $\varepsilon_{\mathbf{B}}$  están dadas por las ecuaciones (2.53a) y (2.53b).

Se mostrará que la ecuación de Euler-Lagrange para la curva involucra que se anule una combinación lineal de las derivadas de Euler-Lagrange del problema sin restricción. La fuerza confinante se identifica como otra combinación lineal de estas derivadas; está por lo tanto también determinada completamente por la geometría local. Para esto es conveniente en este punto introducir sobre la curva el marco de Darboux adaptado a la superficie, conformado por el trihedro dextrógiro  $\{\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{l}\}$ , donde  $\mathbf{l} = \mathbf{T} \times \mathbf{n}$  es el vector normal a  $\Gamma$  que a su vez es tangente a  $\Sigma$  [23, 34]. Algunas propiedades relevantes de este marco se resumen en el apéndice A.4. En particular, las normales del marco de FS se relacionan con sus contrapartes del marco de Darboux por una rotación alrededor del vector tangente:

$$\mathbf{N} = \cos \omega \mathbf{n} + \sin \omega \mathbf{l}; \quad \mathbf{B} = -\sin \omega \mathbf{n} + \cos \omega \mathbf{l}. \quad (2.65)$$

La relación  $\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$  permite expresar el ángulo de rotación en términos la razón de las curvaturas:  $\sin \omega = -\kappa_g/\kappa$ , o  $\cos \omega = -\kappa_n/\kappa$ , donde  $\kappa_g$  y  $\kappa_n$  son respectivamente las curvaturas geodésica y normal a largo de  $\Gamma$ ,

$$\kappa_g = -\mathbf{T}' \cdot \mathbf{l}, \quad \kappa_n = -\mathbf{T}' \cdot \mathbf{n}. \quad (2.66)$$

Esto permite expresar  $\mathbf{F}'$  dado en la ecuación (2.64) en la forma

$$\mathbf{F}' = (\cos \omega \varepsilon_{\mathbf{N}} - \sin \omega \varepsilon_{\mathbf{B}}) \mathbf{n} + (\sin \omega \varepsilon_{\mathbf{N}} + \cos \omega \varepsilon_{\mathbf{B}}) \mathbf{l}. \quad (2.67)$$

La proyección de la ecuación (2.62) en  $\mathbf{l}$  proporciona la ecuación de Euler-Lagrange

$$\varepsilon_{\mathbf{l}} = \sin \omega \varepsilon_{\mathbf{N}} + \cos \omega \varepsilon_{\mathbf{B}} = 0. \quad (2.68)$$

Esta ecuación no involucra al multiplicador  $\lambda$ , pero la proyección en  $\mathbf{n}$  lo determina

$$\lambda = -\cos \omega \varepsilon_{\mathbf{N}} + \sin \omega \varepsilon_{\mathbf{B}}. \quad (2.69)$$

De esta forma, la fuerza normal está completamente determinada por la geometría local.

En esta aproximación, se observa explícitamente como ambas ecuaciones de Euler-Lagrange (2.68) y la fuerza confinante (2.69) se obtienen de las dos derivadas de Euler-Lagrange del problema original.

Se tiene así que las ecuaciones de Euler-Lagrange de la elástica de Euler sin restricción, dadas por  $\varepsilon_{\mathbf{N}} = 0$  y  $\varepsilon_{\mathbf{B}} = 0$ , se reemplazan por la única ecuación  $\varepsilon_{\mathbf{l}} = 0$ . Esta discrepancia en el número de ecuaciones refleja el hecho que una curva espacial posee dos modos independientes de deformación, mientras que una curva superficial posee sólo uno. En general, la integrabilidad del par original de ecuaciones se pierde cuando la restricción está presente.

El vector  $\mathbf{F}$  en la base de Darboux se descompone como

$$\mathbf{F} = \left( \frac{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}{2} - c \right) \mathbf{T} - (\kappa_g' + \kappa_n \tau_g) \mathbf{l} - (\kappa_n' - \kappa_g \tau_g) \mathbf{n}. \quad (2.70)$$



### 2.3.1. Ec. de Euler-Lagrange en términos de las curvaturas

Usando las identidades (A.55) y (A.56) la ecuación de Euler-Lagrange (2.68) se puede expresar completamente en términos de las curvaturas sobre la superficie

$$-\varepsilon_1 = \kappa_g'' + \kappa_g \left( \frac{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}{2} - \tau_g^2 - c \right) + \frac{(\kappa_n^2 \tau_g)'}{\kappa_n} = 0. \quad (2.71)$$

Esta expresión coincide con la presentada en la referencia [78],<sup>6</sup> donde fue derivada usando un método muy diferente. Es importante notar que involucra ambas curvaturas al igual que la torsión geodésica, por lo que en general la curva no será una geodésica; incluso si  $\kappa_g = 0$ , la curva no minimizará la energía de doblamiento, a menos que también cumpla algunos de los tres siguientes casos:  $\kappa_n^2 \tau_g$  es constante, es una curva asintótica o una curva principal de la superficie, condiciones que son poco probables que satisfaga una geodésica.

La magnitud de la fuerza normal  $\lambda$  dada por la ec. (2.69) es

$$\lambda = \kappa_n'' + \kappa_n \left( \frac{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}{2} - \tau_g^2 - c \right) - \frac{(\kappa_g^2 \tau_g)'}{\kappa_g}. \quad (2.72)$$

Esta expresión no fue presentada en la referencia [78]. Una consecuencia de la descomposición simétrica de la curvatura de FS en términos de sus partes geodésica y normal es el hecho  $\lambda$  tiene una expresión idéntica a la derivada de Euler-Lagrange  $\varepsilon_1$  dada por (2.71) bajo el intercambio de  $\kappa_g$  con  $\kappa_n$  (y un cambio de signo en el último término).

### 2.3.2. Pérdida de invariancia rotacional

La integrabilidad de las ecuaciones de Euler-Lagrange para una curva sin constricción se debe a la invariancia Euclidiana de su energía. En general, con el confinamiento, se pierde no sólo la invariancia traslacional, sino también la invariancia rotacional, por lo que la ecuación correspondiente a su contraparte constreñida en general no será integrable.

No obstante, en varios casos de interés, la geometría confinante respeta algún subgrupo del grupo Euclidiano. En particular, las leyes de conservación asociadas con la invariancia residual para dos casos especiales se examinarán: esferas (rotaciones) y cilindros (rotación alrededor y translación a lo largo de su eje de simetría) se presentarán. Como se verá más abajo, en ambos casos esta invariancia residual permite expresar la ecuación de Euler-Lagrange como una cuadratura que puede ser integrada directamente.

El vector de torcas alrededor del origen de la curva,  $\mathbf{M}$ , está dado por

$$\mathbf{M} = \mathbf{Y} \times \mathbf{F} + \mathbf{S}, \quad (2.73)$$

donde  $\mathbf{S} = -\kappa \mathbf{B}$ . Como se mostró en la sección anterior para una curva libre,  $\mathbf{M}' = 0$ , lo cual puede expresarse en la forma explícitamente invariante bajo translaciones  $\mathbf{S}' + \mathbf{T} \times \mathbf{F} = 0$  [64]. En el marco de Darboux, la parte intrínseca  $\mathbf{S}$  está dada por

$$\mathbf{S} = -\kappa_g \mathbf{n} + \kappa_n \mathbf{l}. \quad (2.74)$$

Derivando  $\mathbf{M}$  se tiene

$$\mathbf{M}' = \varepsilon_1 (\mathbf{Y} \times \mathbf{l}) - \lambda (\mathbf{Y} \times \mathbf{n}). \quad (2.75)$$

<sup>6</sup>Salvo signos debido a las diferentes convenciones adoptadas.

Entonces, en un equilibrio confinado con  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\mathbf{M}$  no está conservado, teniendo como fuente el momento de la fuerza asociado con la constricción. Sin embargo, si la geometría confinante es una esfera centrada en el origen, de manera que  $\mathbf{Y}$  está dirigida a lo largo del vector normal,  $\mathbf{M}$  sí está conservada. Por otra parte si la geometría es simétrica con respecto a un eje (por ejemplo el eje  $Z$ ) como se describe en el apéndice A.5, entonces la energía será invariante con respecto a rotaciones alrededor del eje de simetría; en este caso la cantidad conservada es la proyección correspondiente de  $\mathbf{M}$ , i.e.  $M_3 = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ . Usando la expresión (A.76) para una curva sobre una superficie axisimétrica así como las expresiones (A.57) y (2.74) para  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{S}$  en el marco de Darboux se obtiene que  $M_3$  está dado por

$$M_3 = -\sin \alpha (\rho (\kappa'_g - \kappa_n \tau_g) - \rho' \kappa_g) + \cos \alpha \rho \left( \frac{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}{2} - c \right) + \frac{1}{2} \sin 2\alpha Z' \kappa_n. \quad (2.76)$$

donde  $\rho$  y  $Z$  son respectivamente las coordenadas cilíndricas en las direcciones radial y a lo largo del eje de simetría.

Como aplicación de este marco teórico, se examina el confinamiento de un anillo de un polímero semiflexible sobre esferas y cilindro de radios menores que el del anillo. Aunque existe un marco teórico más sencillo adaptado a estas geometrías particulares, al tratar este problema en esta manera general, se está en mejor posición de entender el modelo y de refinarlo si es necesario.

## 2.4. Confinamiento esférico

Como primera aplicación, se considera una curva cerrada de longitud  $S = 2\pi R$  confinada dentro de una esfera de radio unitario. En la esfera, la curvatura normal es constante,  $\kappa_n = 1$  y la torsión geodésica se anula,  $\tau_g = 0$ . Ambas son consecuencia directa del hecho que el tensor de curvatura extrínseca es proporcional a la métrica,  $K_{ab} = g_{ab}$ . El vector  $\mathbf{F}$  dado por la ecuación (A.57) se simplifica a

$$\mathbf{F} = \left( \frac{\kappa_g^2}{2} + \sigma \right) \mathbf{T} + \kappa'_g \mathbf{l} \quad \text{donde} \quad \sigma = \frac{1}{2} - c. \quad (2.77)$$

en todo punto  $\mathbf{F}$  es tangente a la superficie, estando completamente determinado por la geometría intrínseca. La constante  $\sigma$ , se interpreta como una “tensión efectiva”, es la diferencia entre la tensión originada de la constricción de longitud total fija y de la compresión debida a la curvatura normal constante de la esfera. Es importante recordar que  $\mathbf{F}$  no está conservado, pero sí el vector de torca  $\mathbf{M}$ .

El vector de torcas definido por la ecuación (2.73) está dado por

$$\mathbf{M} = \kappa'_g \mathbf{T} - \left( \frac{\kappa_g^2}{2} + \sigma - 1 \right) \mathbf{l} + \kappa_g \mathbf{n}. \quad (2.78)$$

La invariancia rotacional de la energía de doblamiento confinada a la esfera implica que  $\mathbf{M}$  es un vector constante. La norma cuadrada de este vector permite identificar inmediatamente una cuadratura ( $M^2 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}$ ):

$$M^2 = (\kappa'_g)^2 + V(\kappa_g), \quad (2.79)$$

donde

$$V(\kappa_g) = \left( \frac{\kappa_g^2}{2} + \sigma - 1 \right)^2 + \kappa_g^2. \quad (2.80)$$

La derivada de esta ecuación con respecto a  $s$  reproduce la ecuación de Euler-Lagrange (2.71), que para una esfera toma la forma simple

$$\varepsilon_1 = \kappa_g'' + \kappa_g \left( \frac{\kappa_g^2}{2} + \sigma \right) = 0. \quad (2.81)$$

Esta ecuación es la misma que describe un curva elástica cerrada sobre una esfera con una densidad de energía,  $\kappa_g^2/2$ . Esto es consecuencia directa de la descomposición de la curvatura de FS en su partes geodésica y normal,  $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$  con  $\kappa_n$  constante. La esfera es la única geometría en la cual  $\kappa_n$  es constante. Las curvas elásticas sobre esferas fueron primeramente estudiadas por Langer y Singer [65]; posteriormente este problema fue estudiado con más detalle en [4].

$M$  está acotado inferiormente: la ecuación (2.79) puede expresarse en la forma definida positiva

$$(\kappa_g')^2 + \left( \frac{\kappa_g^2}{2} + \sigma \right)^2 = E^2, \quad (2.82)$$

donde  $E^2 = M^2 + 2\sigma - 1$  es manifiestamente positivo.

Igual que para la curva sin constricciones, tratando  $\kappa_g$  como la posición de una partícula ficticia y  $s$  como tiempo, la ecuación (2.82) describe el movimiento de una partícula de masa  $m = 2$  y energía total  $E^2$  en el potencial cuártico simétrico  $U(\kappa_g) = (\kappa_g^2/2 + \sigma)^2$ . Esta primera integral también puede ser integrada en términos de funciones elípticas [4, 65, 91].

El comportamiento cualitativo de este movimiento ficticio depende del signo de  $\sigma$ : si  $\sigma > 0$ , el potencial posee un único mínimo global en  $\kappa_g = 0$ ; si  $\sigma < 0$ , entonces posee a un máximo local en  $\kappa_g = 0$  y dos mínimos globales en  $\kappa_g = \pm\sqrt{-2\sigma}$ . Un anillo con  $R = 1$  forma un círculo grande (el ecuador) que satisface  $\kappa_g = 0$ . Si  $R > 1$ , se espera que la solución oscile simétricamente alrededor del ecuador de manera que  $\int ds\kappa_g = 0$ . Esto excluye el régimen  $\sigma < 0$ ,  $E < \sigma^2$  como solución física, en cuyo caso la trayectoria estaría confinada a un pozo del potencial con un signo definido de  $\kappa_g$ . De acuerdo con la ecuación (2.84) el anillo correspondiente estaría en un sólo hemisferio y es de suponerse que sería energéticamente favorable que el anillo se despegara de la esfera.

Se puede reconstruir la curva a partir de la curvatura geodésica [4, 75]. Sin pérdida de generalidad se puede alinear el vector  $\mathbf{M}$  en la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$ , de forma que  $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ . Tomando las proyecciones de  $\mathbf{M}$ , dadas por la ecuación (2.78) en el marco de Darboux es posible determinar las funciones de encajamiento de la curva sobre la esfera. El vector normal  $\mathbf{n}$  se parametriza en términos de las coordenadas esférica  $\vartheta$  y  $\varphi$ ,

$$\mathbf{n}(s) = (\sin \vartheta(s) \cos \varphi(s), \sin \vartheta(s) \sin \varphi(s), \cos \vartheta(s)). \quad (2.83)$$

La proyección de  $\mathbf{M}$  en  $\mathbf{n}$  determina el ángulo polar en términos de  $\kappa_g$ :

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = M \cos \vartheta = \kappa_g. \quad (2.84)$$

La proyección correspondiente en el vector tangente dado por  $\mathbf{T} = \mathbf{n}'$ , únicamente reproduce esta ecuación diferenciada. La proyección de  $\mathbf{M}$  en el vector normal  $\mathbf{l}$  determina el ángulo azimutal  $\varphi$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{l} = -M \sin^2 \vartheta \varphi' = - \left( \frac{\kappa_g^2}{2} + \sigma - 1 \right). \quad (2.85)$$

Combinando las ecuaciones (2.84) y (2.85) se obtiene

$$\varphi' = M \frac{\kappa_g^2/2 + \sigma - 1}{M^2 - \kappa_g^2}. \quad (2.86)$$

La simetría del potencial  $V(\kappa_g)$  implica una simetría dihedral de orden  $n$  para anillos suficientemente cortos tal que no ocurre auto-contacto. Si el anillo se cierra después de completar un número finito de periodos de  $\kappa_g$  en un recorrido del ecuador se tiene que  $\kappa_g(s + 2\pi R/n) = \kappa_g(s)$  y  $\varphi(s + 2\pi R/n) = \varphi(s) + 2\pi/n$ , donde  $n \geq 2$  es un entero. Entonces la cerradura impone una discretización del sistema. El caso  $n = 1$  se excluye por el teorema de los cuatro-vértices y la simetría del potencial. Estas dos condiciones de cerradura se pueden expresar en la forma

$$\frac{2\pi R}{4n} = \int_0^{\kappa_1} \frac{d\kappa_g}{\sqrt{M^2 - V(\kappa_g)}}, \quad (2.87)$$

y

$$\frac{2\pi}{4n} = \int_0^{\kappa_1} \frac{d\kappa_g}{\sqrt{M^2 - V(\kappa_g)}} M \frac{\kappa_g^2/2 + \sigma - 1}{M^2 - \kappa_g^2}, \quad (2.88)$$

donde  $\kappa_1$  es un punto de retorno del potencial,  $V(\kappa_1) = M^2$ <sup>7</sup>. En conjunto estas dos condiciones determinan las constantes de integración  $\sigma$  y  $M$  en términos del radio de anillo  $R$  y del entero  $n$ .

### 2.4.1. Confinamiento débil

A continuación primero se aplicará la teoría de perturbaciones usando métodos elementales para examinar anillos débilmente confinados, es decir, con un radio  $R$  ligeramente mayor que 1, o equivalentemente con  $\phi_0 \ll 1$  si se caracteriza la longitud en términos de un ángulo de exceso  $\phi_0$  definido por  $S = 2\pi R = 2\pi + \phi_0$ . En este caso los estados de equilibrio se describen por deformaciones pequeñas de un círculo grande de la esfera con  $\kappa_g = 0$ . Es entonces apropiado considerar la aproximación armónica de la cuadratura (2.82) alrededor de  $\kappa_g = 0$ :

$$(\kappa'_g)^2 + \sigma \kappa_g^2 = E^2 - \sigma^2. \quad (2.89)$$

Considerando la solución coseno

$$\kappa_g(s) = \kappa_0 \cos(ns/R) \approx \kappa_0 \cos n\varphi, \quad (2.90)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo a lo largo del ecuador. Las constantes  $\sigma$  y  $M$  se expanden como  $\sigma = \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)} + \dots$  y  $M = M^{(0)} + M^{(1)} + \dots$ . En el orden más bajo la cuadratura implica  $\sigma^{(0)} = n^2$  y  $M^{(0)} = n^2 - 1$ .

La longitud de arco sobre la esfera está dada por

$$s = \int d\varphi \left[ \left( \frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2 + \sin^2 \vartheta \right]^{1/2}, \quad (2.91)$$

Pero la ecuación (2.84) da

$$\sin^2 \vartheta = 1 - \frac{\kappa_0^2}{M^2} \cos n\varphi, \quad \text{y} \quad \frac{d\vartheta}{d\varphi} \approx \frac{1}{M} \frac{d\kappa_g}{d\varphi} = \frac{n\kappa_0}{M} \sin n\varphi. \quad (2.92)$$

Así, en la aproximación armónica

$$s = \varphi + \frac{1}{4} \frac{\kappa_0^2}{M^2} \left( (n^2 - 1)\varphi - \frac{(n^2 + 1)}{2n} \sin 2n\varphi \right). \quad (2.93)$$

lo cual permite expresar la amplitud de la curvatura  $\kappa_0$  en términos de  $\phi_0$ :

$$\kappa_0^2 = \frac{2\phi_0}{\pi} (n^2 - 1). \quad (2.94)$$

<sup>7</sup>Aunque aparentemente la integral diverge en este punto debido al denominador, como se verá más adelante, ésta posee un valor bien definido.

En el caso  $n = 1$ ,  $\kappa_0 = 0$ , solución a trivial que corresponde a una rotación del ecuador alrededor de un eje sobre su plano.

Integrando la ecuación (2.85) y comparando con la ecuación (2.93) se encuentra la siguiente relación entre las correcciones de primer orden de  $\sigma$  y  $M$

$$M^{(1)} - \sigma^{(1)} = \frac{\phi_0}{\pi} n^2. \quad (2.95)$$

Esta es toda la información que se puede obtener de la cuadratura. Para determinar la corrección de primer orden de  $\sigma$  y  $M$  es necesario recurrir a la condición de frontera para  $\kappa_g$  (2.87). En general  $M^2 - V(\kappa) = \frac{1}{4}(2(E - \sigma) - \kappa^2)(2(E + \sigma) + \kappa^2)$ , donde

$$2(E - \sigma) \approx \kappa_0^2, \quad 2(E + \sigma) \approx -4n^2 - \frac{2}{n^2}(\sigma^{(1)} - M^{(1)}) - 2(\sigma^{(1)} + M^{(1)}). \quad (2.96)$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\sqrt{M^2 - V(\kappa)}} \approx \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\kappa_0^2 - \kappa^2}} \left( 1 - \frac{1}{4n^4}(\sigma^{(1)} - M^{(1)}) - \frac{1}{4n^2}(\sigma^{(1)} + M^{(1)}) - \frac{1}{8n^2}\kappa^2 \right). \quad (2.97)$$

La condición (2.87) implica que

$$\frac{\phi_0}{\pi} = -\frac{1}{4n^4}(\sigma^{(1)} - M^{(1)}) - \frac{1}{4n^2}(\sigma^{(1)} + M^{(1)}) - \frac{1}{16n^2}\kappa_0^2. \quad (2.98)$$

Combinando las ecuaciones (2.95) y (2.98) y usando la expresión de  $\kappa_0$  (2.94) se encuentra que  $\sigma^{(1)}$  está dada por

$$\sigma^{(1)} = \frac{\phi_0}{4\pi} (3 - 7n^2). \quad (2.99)$$

La energía de doblamiento del anillo confinado por la esfera está dada por

$$H = \frac{1}{2} \oint ds (\kappa_g^2 + 1). \quad (2.100)$$

Que para el caso de confinamiento débil es la suma de la energía del anillo sin constricción  $H_{\text{loop}} = \pi/R$  y una corrección positiva que aumenta linealmente con  $\phi_0$

$$H = H_{\text{loop}} \left[ 1 + \frac{\phi_0}{\pi} n^2 \right], \quad (2.101)$$

Como se verá más adelante este crecimiento monótonico con el tamaño del anillo es válido sólo para confinamiento débil y no se mantiene para el caso en general.

Para un valor fijo de  $\phi_0$  la energía se incrementa con  $n^2$ . El estado base es el estado completamente pegado a la esfera con  $n = 2$ . Más adelante en el capítulo 6 se mostrará que todos los estados con  $n = 3, 4, \dots$  son inestables.

La fuerza transmitida a la esfera, dada en la ecuación (2.72) asume la forma particularmente simple

$$\lambda(s) = \frac{\kappa_g^2}{2} + \sigma, \quad (2.102)$$

de manera que es proporcional a la proyección tangencial de  $\mathbf{F}$  a lo largo de la dirección de la curva. Comparando las ecuaciones (2.100) y (2.102) se observa que en todo punto del anillo  $\lambda$  está linealmente relacionado con la densidad de energía local.

Usando las expresiones (2.90) y (2.99) se encuentra que a orden lineal en  $\phi_0$ ,  $\lambda$  está dado por

$$\lambda = n^2 + \frac{\phi_0}{4\pi} (3 - 7n^2 + 4(n^2 - 1) \cos^2 n\varphi) , \quad (2.103)$$

donde se ve que la fuerza confinante es manifiestamente positiva, teniendo valores que oscilan cerca de  $n^2$  (ver figura 2.1). En el límite  $\phi_0 \rightarrow 0$  se tiene que  $\lambda \neq 0$ . Es constante cuando  $n = 1$ . Esto se interpreta como una inestabilidad de Euler; el empaquetamiento del anillo circular en un estado de simetría  $n$  involucra una compresión crítica en el anillo que se transmite como una fuerza normal sobre la esfera.

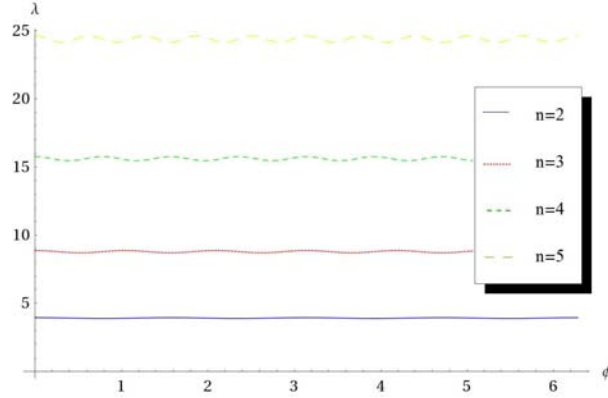


Figura 2.1: Magnitud de la fuerza normal  $\lambda$  en función del ángulo  $\varphi$ . Se ilustran los casos para los primeros valores de  $n$  con un pequeño exceso de ángulo  $\varphi_0 = \pi/50$ . En todos los casos la magnitud de la fuerza oscila ligeramente por debajo del valor  $n^2$ .

### 2.4.2. Confinamiento fuerte

Ahora se examinan las configuraciones que adopta un anillo confinado por una esfera para valores finitos de  $\phi_0$  pero no demasiado grandes tal que no ocurre autocontacto o intersecciones.

La ecuación (2.81) se puede integrar en términos de funciones elípticas para obtener  $\kappa_g$  como función de  $s$  [4, 65, 91]

$$\kappa_g(s) = \kappa_0 \operatorname{cn}[ks, m] , \quad \kappa_0 = 2\sqrt{mk} , \quad (2.104)$$

donde la función  $\operatorname{cn}[x, m]$  es el coseno elíptico de Jacobi [1], el número de onda angular  $k$  está dado en términos de la constante  $E$ -definida después de la ecuación (2.82)- por  $k = \sqrt{E}$ , el parámetro  $m$  está definido por

$$m = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sigma}{k^2} \right) . \quad (2.105)$$

La curvatura depende de los dos parámetros por determinar  $\sigma$  y  $M$  a través de los parámetros  $k$  y  $m$ . Estos pares de parámetros están relacionados por

$$\sigma = k^2 (1 - 2m) , \quad M^2 = (k^2 - 1)^2 + 4m\kappa^2 . \quad (2.106)$$

Si el valor de  $m$  se restringe al intervalo  $[0, 1]$ , entonces también  $\sigma$  está acotado:  $\sigma \in [-k^2, k^2]$ , de forma que cambia de signo en  $m = 1/2$ . A continuación se determinan  $k$  y  $m$  por medio del par de condiciones de frontera asociados con la condición de cerradura del anillo.

El anillo se cierra después de completar un número finito de períodos de  $\kappa_g$  al recorrer una vez el ecuador de forma que  $\kappa_g(s) = \kappa_g(s + S/n)$ , donde  $n \geq 2$  es un entero. Así, las soluciones están discretizadas por la cerradura y posee una simetría dihedral de orden  $n$ . Teniendo en cuenta que el período de  $\kappa_g$  es  $4\mathcal{K}[m]$ , donde  $\mathcal{K}[m]$  es la integral elíptica completa del primer tipo [1], esta condición se expresa en la forma  $k = 4n \mathcal{K}[m]/S$ .

En la reconstrucción del anillo, la ecuación (2.84) determina  $\vartheta$  en términos de  $\kappa_g$ , y la integración de la ecuación (2.86) proporciona

$$\varphi(s) = \frac{M}{2} \left( \frac{M^2 + 2(\sigma - 1)}{k(M^2 - \kappa_0^2)} \Pi \left[ \frac{\kappa_0^2}{\kappa_0^2 - M^2}, \text{am}[ks, m], m \right] - s \right), \quad (2.107)$$

donde  $\Pi[\eta, \text{am}[x, m], m]$  es la integral elíptica incompleta del tercer tipo y  $\text{am}[x, m]$  es la amplitud de Jacobi [1].

La cerradura de la curva,  $\varphi(S) = 2\pi$ , implica que

$$\frac{MS}{2} \left( \frac{M^2 + 2(\sigma - 1)}{\mathcal{K}[m](M^2 - \kappa_0^2)} \Pi \left[ \frac{\kappa_0^2}{\kappa_0^2 - M^2}, m \right] - 1 \right) = 2\pi, \quad (2.108)$$

relación que determina el valor de  $m$  implícitamente como función de  $S$ . Con esto se completa la identificación del anillo confinado. El estado  $n = 2$  con simetría de orden dos se ilustra en la Fig. 2.5 para diferentes valores de  $S$ . En la figura,  $S$  se expresa en términos del ángulo de exceso  $\phi_0$ :  $S = 2\pi + \phi_0$ .

Conforme  $\phi_0$  aumenta el anillo se distribuye más sobre la superficie de la esfera; en cierto punto, matemáticamente la curva se autointersecta. El valor crítico de  $\phi_0$  en el cual ocurre el autocontacto por primera vez depende de  $n$ . Para el estado  $n = 2$  está dado por  $\phi_0 = 2,253\pi$ . Este valor aumenta con  $n$ . Si se prohíben las auto-intersecciones, físicamente el anillo permanecerá en contacto en estos puntos si  $\phi_0$  se incrementa por arriba de este valor como fue señalado en el contexto de conos en la referencia [75].

Para cada  $n$ , la energía de doblamiento, ecuación (2.100) puede expresarse explícitamente como función de  $S$ :

$$H = 32n^2 \frac{\mathcal{K}[m]}{S} (\mathcal{E}[m] + (m - 1)\mathcal{K}[m]) + \frac{S}{2}, \quad (2.109)$$

donde  $\mathcal{E}[m]$  es la integral elíptica completa del segundo tipo [1], y  $m(S)$  se obtiene resolviendo la ecuación (2.108). En la Fig. 2.2 se grafica las energías de los anillos confinados con  $n = 2, 3, 4$  y  $5$  como función de  $S$ , para valores de  $S$  menores al valor donde ocurre autocontacto por primera vez.

La energía exhibe un máximo, el cual está asociado con el desarrollo de asas en el anillo que le permiten incursionar más de la superficie esférica. El crecimiento lineal con  $S$  debido al segundo término no cambia la energía de forma significativa antes de la aparición del auto-contacto. Pero si ocurre la auto-intersección, el término dominante en la energía es este término cuadrático en la curvatura normal que es independiente de  $n$ . En el límite en el cual la longitud del anillo es muy grande, las energías de los estados con diferente  $n$  convergen a un valor común.

Usando la ecuación (2.104), es posible expresar la fuerza transmitida a la esfera dada en la ecuación (2.102) explícitamente en función de  $s$ ,

$$\lambda(s) = k^2 (2 \text{dn}^2(ks, m) - 1), \quad (2.110)$$

donde  $\text{dn}^2(u, m) = 1 - m \text{sn}^2 u$  [1]. Esta fuerza transmitida depende del valor local de  $\kappa_g$ , pero a su vez  $\kappa_g$  depende de las condiciones de frontera asociadas con la cerradura. En la Fig. 2.3 se ilustra la magnitud

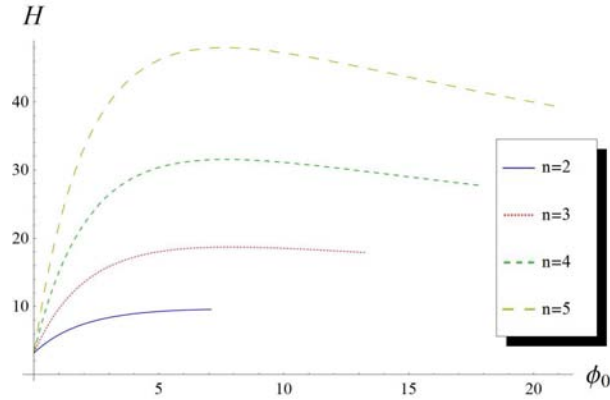


Figura 2.2: Energía de doblamiento  $H$  en función del ángulo  $\phi_0 = (S - 2\pi)/2\pi$  para los primeros valores de  $n$ . Las gráficas sólo incluyen valores de  $\phi_0$  hasta el punto en el cual ocurre autocontacto por primera vez.

de la fuerza  $\lambda$  para los estados  $n = 2, 3, 4, 5$ . Se observa que la amplitud varía con  $n$ . Para  $n$  grandes con ángulo de exceso también grandes, la magnitud de  $\lambda$  puede incluso cambiar de signo. Este comportamiento depende de  $\sigma$ .

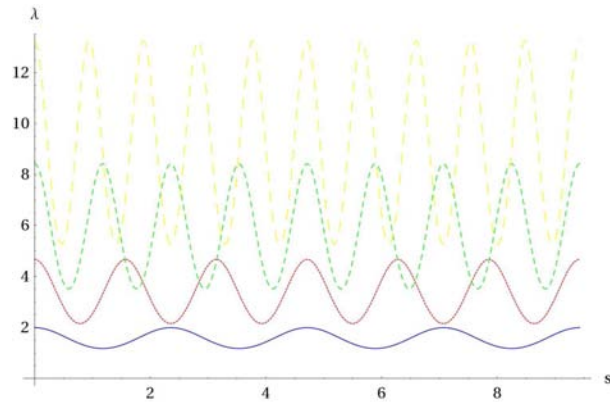


Figura 2.3:  $\lambda$  como función de  $s$ , para los casos  $n = 2, 3, 4, 5$  con un ángulo de exceso  $\phi_0 = \pi$ . A diferencia del régimen del confinamiento débil la amplitud de  $\lambda$  varía considerablemente al aumentar  $n$ .

Si  $\sigma > 0$ , entonces  $\lambda$  también es positiva; el anillo confinado presiona contra la esfera en toda su longitud. Por el contrario, si  $\sigma < 0$  entonces  $\lambda$  puede cambiar de signo a lo largo de la curva. Aunque intuitivamente no parecería que  $\lambda$  pudiera volverse negativa, debe recordarse que la tendencia a despegarse, igual que a adherirse, no es una propiedad local sino que está asociada con el comportamiento global del anillo. De cualquier forma, en tal región no existe fuerza transmitida. Esto no necesariamente significa que sea energéticamente favorable que se despegue de la esfera, lo cual dependerá de los valores relativos de la energía de los estados adheridos o despegados equilibrio.

Los estado inestables con  $n \geq 5$  presentan regiones en las cuales  $\lambda$  es negativa para valores de  $\phi_0$  menores al punto de auto-contacto. Para  $n = 5$ , esto ocurre cuando  $\phi_0 > 9,652$  [75], como se puede ver en la Fig. 2.4.



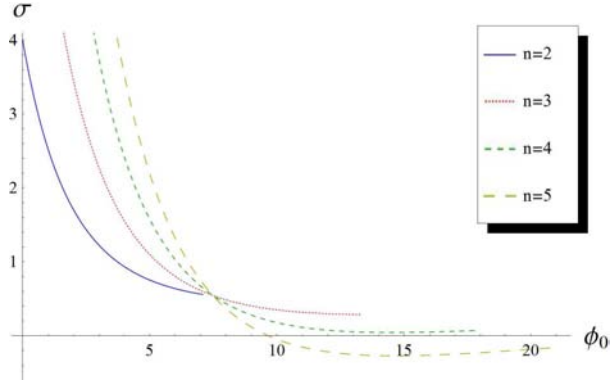


Figura 2.4:  $\sigma$  como función del exceso de ángulo  $\phi_0$ . Para cada  $n$ , los valores de  $\phi_0$  corresponden a curvas antes de que el auto-contacto ocurra.  $\sigma$  presenta un cambio de signo en el estado con  $n = 5$ , y en todo los estados de mayor  $n$ , antes de que ocurra el auto-contacto.

## 2.5. Confinamiento cilíndrico

Ahora se examina el confinamiento de un anillo circular dentro de un cilindro de radio 1 menor que el radio del anillo. A diferencia de la esfera, ya no es intuitivamente obvio que en el confinamiento débil se tendrá contacto completo.

La curvatura geodésica está dada por

$$\kappa_g = \alpha', \quad (2.111)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que hace el vector tangente a la curva con la dirección de los paralelos del cilindro. Las dos curvaturas principales son  $C_{\perp} = 0$  y  $C_{\parallel} = 1$ , de forma que la curvatura normal es

$$\kappa_n = \cos^2 \alpha; \quad (2.112)$$

la torsión geodésica está dada por

$$\tau_g = \frac{\sin 2\alpha}{2}. \quad (2.113)$$

Estas expresiones surgen como casos especiales de los resultados derivados para superficies axi-simétricas en el apéndice A.5. La ecuación de Euler-Lagrange (2.71) toma la forma

$$-\varepsilon_l = \alpha''' + \alpha' \left( \frac{\alpha'^2}{2} + \frac{3}{2} \cos^4 \alpha - 6 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - c \right) = 0. \quad (2.114)$$

Es posible aprovechar las invariancias traslacional y rotacional a lo largo y alrededor del eje de simetría del cilindro para obtener una cuadratura para  $\alpha$ .

La invariancia traslacional a lo largo de  $\hat{\mathbf{z}}$  implica que  $F_3 = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{z}}$  es constante. Proyectando la expresión (A.57) para  $\mathbf{F}$  en  $\hat{\mathbf{z}}$ , usando las definiciones de  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{l}$  dadas en (A.77) se identifica

$$F_3 = -\cos \alpha (\kappa'_g - \kappa_n \tau_g) + \sin \alpha \left( \frac{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}{2} - c \right). \quad (2.115)$$

Similarmente  $M_3 = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{z}}$  es constante. Para el cilindro, el vector de posición  $\mathbf{Y}$  puede expandirse con respecto al marco de Darboux como:

$$\mathbf{Y} = Z (\sin \alpha \mathbf{T} - \cos \alpha \mathbf{l}) + \mathbf{n}, \quad (2.116)$$

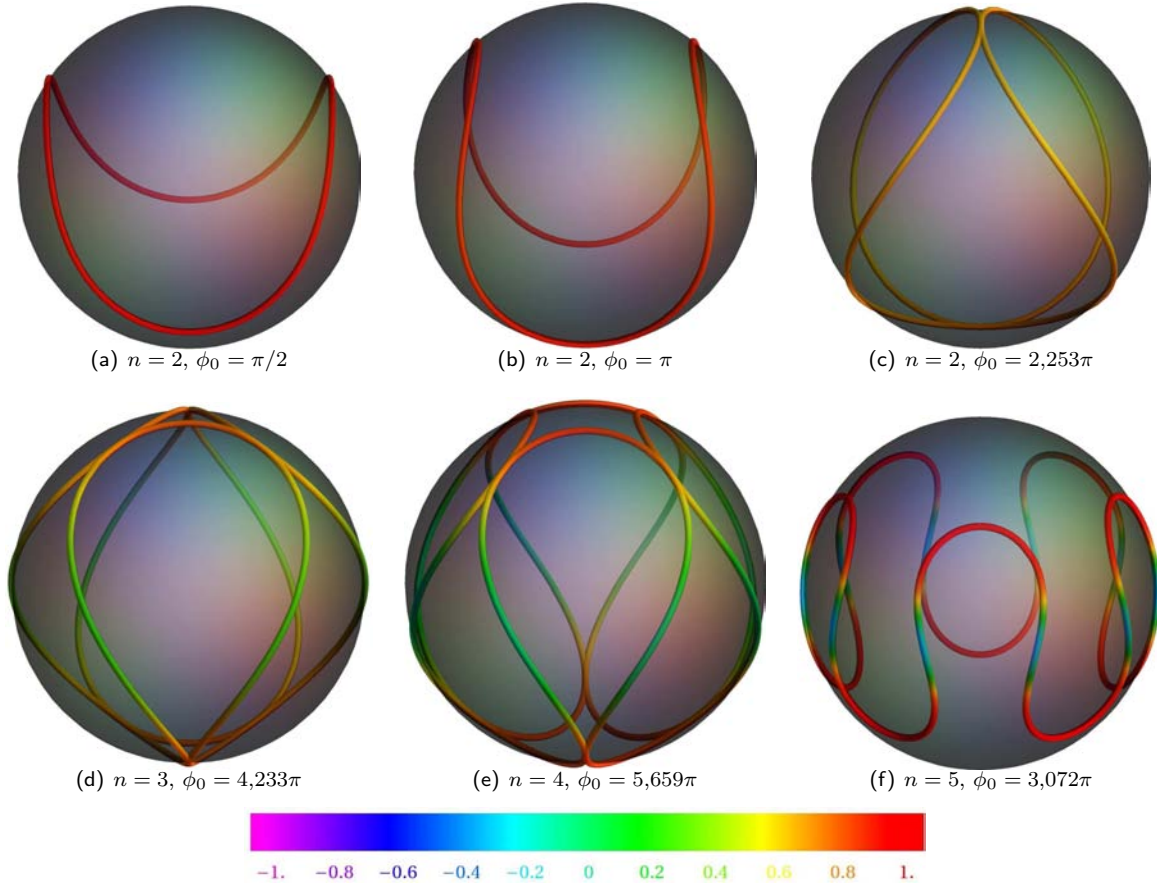


Figura 2.5: Ilustración del estado con simetría de orden 2 para tres valores diferentes de  $\phi_0 = \pi/2$  (a),  $\phi_0 = \pi$  (b) y  $\phi_0 = 2,254\pi$  (c). Los estados con  $n = 2, 3, 4$  en los respectivos ángulos de exceso donde ocurre el auto-contacto por primera vez se ilustran en (c), (d) y (e). No hay cambio de signo en  $\lambda$ . En (f) el estado con  $n = 5$  se ilustra para el valor de  $\phi_0$  en el cual  $\lambda$  cambia de signo y la curva tiende a despegarse de la esfera. El color representa la magnitud escalada de  $\lambda$  en el rango  $[-1, 1]$ .

por lo que

$$\mathbf{Y} \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \sin \alpha (\kappa'_g - \kappa_n \tau_g) + \cos \alpha \left( \frac{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}{2} - c \right). \quad (2.117)$$

Similarmente, usando la expresión (2.74) para  $\mathbf{S}$  se tiene que la torca intrínseca es

$$S_3 = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -\kappa_n \cos \alpha \quad (2.118)$$

Sumando (2.117) y (2.118) se obtiene la proyección de la torca en la dirección del eje de simetría

$$m_3 = M_3 = \sin \alpha (\kappa'_g - \kappa_n \tau_g) + \cos \alpha \left( \frac{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}{2} + \kappa_n - c \right). \quad (2.119)$$

Es sencillo verificar que  $F'_3 = \cos \alpha \varepsilon_1$  y  $m'_3 = \sin \alpha \varepsilon_1$ , de manera que tanto  $F_3$  como  $M_3$  están conservados en equilibrio.

Ambas ecuaciones (2.115) y (2.119) son de segundo orden en derivadas de  $\alpha$  (dependencia que entra por medio de  $\kappa'_g$ ). Tomando una combinación lineal apropiada se puede eliminar la segunda derivada:

$$F_3 \sin \alpha + m_3 \cos \alpha = \frac{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}{2} + \kappa_n \cos^2 \alpha - c. \quad (2.120)$$

Substituyendo  $\kappa_g$  y  $\kappa_n$  dadas en las ecuaciones (2.111) y (2.112), se obtiene la siguiente cuadratura para  $\alpha$ :

$$\frac{1}{2}(\alpha')^2 - \frac{\cos^4 \alpha}{2} - F_3 \sin \alpha - m_3 \cos \alpha = c. \quad (2.121)$$

Nuevamente, el análisis de las soluciones se facilita usando el análogo de una partícula en un potencial periódico. No es obvio, a nivel de la ecuación de Euler-Lagrange, que ésta pueda integrarse dos veces. Es debido a la simetría que esto es posible.

La otra combinación lineal de  $F_3$  y  $m_3$  es

$$-F_3 \cos \alpha + m_3 \sin \alpha = \kappa'_g - 2\kappa_n \tau_g, \quad (2.122)$$

$$\alpha'' + 2 \cos^3 \alpha \sin \alpha - F_3 \cos \alpha + m_3 \sin \alpha = 0. \quad (2.123)$$

Es sencillo confirmar que esta ecuación se obtiene diferenciando la ecuación (2.121).

La energía del anillo constreñido está dada por

$$H = \frac{1}{2} \int ds (\alpha'^2 + \cos^4 \alpha). \quad (2.124)$$

Salvo la cuadratura (2.121) puede se expresada en términos de  $\alpha$

$$H = \int ds (\cos^4 \alpha + F_3 \sin \alpha + m_3 \cos \alpha + c). \quad (2.125)$$

Similarmente la fuerza local confinante sobre el cilindro puede expresarse en términos de  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} -\lambda &= 6c \cos 2\alpha + 2 \cos^4 \alpha (6 \cos^2 \alpha - 5) \\ &+ 5m_3 \cos \alpha (3 \cos^2 \alpha - 2) + 3F_3 \sin \alpha (5 \cos^2 \alpha - 2). \end{aligned} \quad (2.126)$$

En un anillo libre de fuerza externas, es de esperarse que  $F_3 = 0$ . Con esta suposición el potencial que en la cuadratura (2.121) posee simetría arriba-abajo,  $\alpha \rightarrow -\alpha$ . Sin embargo, la constante  $m_3$  no se anula; esto rompe la simetría izquierda-derecha  $\alpha \rightarrow 2\pi - \alpha$ . No parece que exista una solución analítica para  $\alpha$  como función de  $s$  si  $m_3 \neq 0$ .<sup>8</sup> Por lo que se requiere realizar un tratamiento perturbativo de anillos débilmente confinados.

## 2.6. Conclusiones

Empleando el método de variables auxiliares en el principio variacional, se derivaron las ecuaciones de Euler-Lagrange que describen las configuraciones en equilibrio de curvas cuya energía es de carácter

<sup>8</sup>Multiplicando la ecuación (2.121) en ambos lados por  $\sec^4 \alpha$  se obtiene

$$\frac{1}{2} (\tan \alpha)'^2 - \frac{1}{2R^2} - F_3 \sec^3 \alpha \tan \alpha - m_3 \sec^3 \alpha = c \sec^4 \alpha. \quad (2.127)$$

Si tanto  $F_3$  como  $m_3$  se anulan, es posible resolver la cuadratura en términos de funciones elípticas.

puramente geométrico. Asimismo, se derivaron los vectores que describen los esfuerzos y torcas a lo que están sometidas dichas curvas. Este método de variables auxiliares tiene la virtud de evitar tener que calcular cómo varían las curvaturas como respuesta de la deformación de la curva.

En particular se analizó el caso de la Elástica de Euler cuya energía está asociada con el doblamiento de la curva y que describe a los polímeros semi-flexibles. Posteriormente se modificó este marco teórico para estudiar las configuraciones de equilibrio de anillos semi-flexibles confinados a superficies. Se aprovecho la invariancia Euclidiana de la energía de la curva sin restricción.

El análisis del confinamiento esférico de un anillo confirma que el estado de equilibrio menor a cierta longitud está completamente pegado a la membrana con una simetría de orden 2. Se obtuvo una descripción analítica exacta de estos estados así como su energía y la fuerza transmitida a la esfera confinante. Esta fuerza es positiva en todo punto. Como se verá en el capítulo 6 los estados de equilibrio con energías mayores y simetría de orden  $n$ , con  $n \geq 3$ , son inestables en el régimen analizado. Después de cierta longitud crítica del anillo ocurren auto-contacto o auto-intersecciones. La determinación de si las configuraciones semi-pegadas (con regiones sin contacto con la esfera) son favorables energéticamente requiere un estudio detallado adicional.

El confinamiento dentro de un cilindro circular se ha discutido brevemente. Debido a que la cuadratura obtenida es complicada se planea empezar con el estudio de sus soluciones en el régimen de anillos débilmente confinados.

En general, una dirección posible de trabajo futuro sería incluir el efecto de adhesión del anillo a la superficie agregando a la energía un término proporcional a la longitud de contacto.



## Capítulo 3

# Esfuerzos y torcas en superficies

En las referencias [12] y [37] se introdujeron las cantidades físicas que proveen una manera sistemática de estudiar y entender la relación entre la geometría de una superficie y las fuerzas a las cuales se encuentra sometida. En este capítulo se hace una derivación de estas cantidades siguiendo la referencia [37]. Asimismo se estudia una ambigüedad en la definición de una de ellas, relacionada con las condiciones de integrabilidad. En principio no es necesario implementar estas condiciones en el principio variacional, pero como se verá luego, éstas dan lugar a esfuerzos nulos, por medio de los cuales se explican discrepancias aparentes en la comparación de los resultados obtenidos de las variaciones de un mismo Hamiltoniano cuando se emplea sólo la geometría intrínseca o cuando también interviene la geometría extrínseca de la superficie.

Considerando un funcional invariante bajo reparametrizaciones que representa la energía asociada a la superficie, por medio del teorema de Noether, se identificaron las corrientes conservadas asociadas a las invariancias traslacional y rotacional de la energía con los tensores que capturan los esfuerzos y torcas sobre la superficie.

Todas las derivadas relevantes de las funciones de encajamiento  $\mathbf{X}$  de una superficie en  $\mathbb{E}^3$  se encuentran contenidas en las dos formas cuadráticas fundamentales: la métrica  $g_{ab}$  y el tensor de curvatura extrínseca  $K_{ab}$ . Así, todos los invariantes geométricos de una superficie pueden ser expresados como funcionales que dependen de escalares construidos con ellos, incluyendo al funcional que representa la energía asociada a la superficie: el Hamiltoniano.

Teniendo esto en cuenta, es posible considerar cualquier Hamiltoniano invariante bajo reparametrizaciones  $\mathcal{H}$  como función únicamente de la primera y de la segunda formas fundamentales,  $g_{ab}$  and  $K_{ab}$

$$H[\mathbf{X}] = \int dA \mathcal{H}(g_{ab}, K_{ab}, \nabla_a K_{bc}, \dots) \quad (3.1)$$

donde  $dA = \sqrt{g}d^2u$  es el elemento de área,  $g = \det g_{ab}$  y  $\nabla_a$  es la derivada covariante sobre la superficie compatible con  $g_{ab}$ .

Igual que como se hizo para el caso de curvas, para poder calcular la variación  $H$  sin tener que tomar en cuenta explícitamente cómo varían  $g_{ab}$  y  $K_{ab}$  como consecuencia de la variación de las funciones de encajamiento,  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} + \delta \mathbf{X}$ , se deben introducir campos auxiliares que actúen como multiplicadores de Lagrange generalizados que impongan las constricciones relevantes sobre las derivadas de  $\mathbf{X}$ , teniéndose

al final el Hamiltoniano efectivo

$$\begin{aligned}
H_c = H(g_{ab}, K_{ab}, \dots) &+ \int dA \mathbf{f}^a \cdot (\mathbf{e}_a - \partial_a \mathbf{X}) \\
&+ \int dA \lambda^a \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} \int dA \lambda_n (\mathbf{n}^2 - 1) \\
&+ \frac{1}{2} \int dA \lambda^{ab} (g_{ab} - \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b) + \int dA \Lambda^{ab} (K_{ab} - \mathbf{e}_a \cdot \partial_b \mathbf{n}) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{e}_a$  y  $\mathbf{n}$  son los vectores tangentes y normal a la superficie. Los multiplicadores  $\lambda^{ab}$  y  $\Lambda^{ab}$  son tensores superficiales simétricos que implementan las definiciones de  $g_{ab}$  y  $K_{ab}$ , los  $\lambda^a$  son las componentes de un vector superficial asegurando que el vector normal esté fuera del espacio tangente de la superficie y  $\lambda_n$  es un escalar imponiendo la normalización del vector normal.

Se debe tener en cuenta que ahora el Hamiltoniano original  $H$  se considera como dependiente únicamente de la métrica y del tensor de curvatura extrínseca, siendo independiente de las variables de campo auxiliares, es decir, ahora  $g_{ab}$  y  $K_{ab}$  no dependen de  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{e}_a$  o de  $\mathbf{n}$ , pudiendo variarse cada uno por separado.

Por construcción las derivadas de EL con respecto a las variables auxiliares proporcionan las definiciones de las cantidades geométricas

$$\frac{\delta H_c}{\delta \mathbf{f}^a} = \mathbf{e}_a - \partial_a \mathbf{X}, \quad (3.3a)$$

$$\frac{\delta H_c}{\delta \lambda^a} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}, \quad (3.3b)$$

$$\frac{\delta H_c}{\delta \lambda_n} = \mathbf{n}^2 - 1, \quad (3.3c)$$

$$\frac{\delta H_c}{\delta T^{ab}} = g_{ab} - \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b, \quad (3.3d)$$

$$\frac{\delta H_c}{\delta \Lambda^{ab}} = K_{ab} - \mathbf{e}_a \cdot \partial_b \mathbf{n}. \quad (3.3e)$$

Éstas se deben satisfacer en cada orden de la expansión del Hamiltoniano, por lo que las derivadas de estas derivadas de EL se deben anular también.

Cabe mencionar que estas definiciones también permiten reconstruir las ecuaciones que definen la conexión de Gauss-Weingarten, que establecen cómo cambia la base adaptada a la superficie sobre ésta en términos de la base adaptada misma

$$\partial_a \mathbf{e}_b = \Gamma^c_{ab} \mathbf{e}_c - K_{ab} \mathbf{n}, \quad (3.4)$$

$$\partial_a \mathbf{n} = K_a^b \mathbf{e}_b, \quad (3.5)$$

donde los coeficientes de la conexión,  $\Gamma^c_{ab}$  corresponden a los símbolos de Christoffel del segundo tipo.

Primero, de la variación del único término que involucra  $\mathbf{X}$  es

$$\begin{aligned}
- \int dA \mathbf{f}^a \cdot \delta \partial_a \mathbf{X} &= - \int dA \mathbf{f}^a \cdot \partial_a \delta \mathbf{X} = - \int d^D u \sqrt{g} \mathbf{f}^a \cdot \partial_a \delta \mathbf{X} \\
&= \int d^D u (\partial_a (\sqrt{g} \mathbf{f}^a) \cdot \delta \mathbf{X} - \partial_a (\sqrt{g} \mathbf{f}^a \cdot \delta \mathbf{X})) \\
&= \int dA (\nabla_a \mathbf{f}^a \cdot \delta \mathbf{X} - \nabla_a (\mathbf{f}^a \cdot \delta \mathbf{X})), \quad (3.6)
\end{aligned}$$

donde se ha usado la expresión (A.20) para la divergencia<sup>1</sup>. Así, se obtiene que la derivada de EL con respecto a  $\mathbf{X}$  es una divergencia

$$\frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \mathbf{X}} = \nabla_a \mathbf{f}^a, \quad (3.7)$$

por lo que en equilibrio, este multiplicador de Lagrange se conserva.

El correspondiente término de frontera es

$$Q_{\mathbf{X}}^a = - \int dA \nabla_a (\mathbf{f}^a \cdot \delta \mathbf{X}) = - \int ds l_a \mathbf{f}^a \cdot \delta \mathbf{X}, \quad (3.8)$$

donde se ha utilizado el teorema de la divergencia de Gauss para convertir la integral superficial en una integral de línea a lo largo de la frontera de la superficie.  $ds$  es el elemento de línea sobre este contorno y  $l_a$  son las componentes del covector asociado al vector perteneciente al marco de Darboux adaptado a la frontera, el cual es normal a ésta pero tangente a la superficie.

La variación de los términos que involucran a los vectores tangentes  $\mathbf{e}_a$  está dada por

$$\delta_{\mathbf{e}_a} H_c = \int dA (\mathbf{f}^a + \lambda^a \mathbf{n} - \lambda^{ab} \mathbf{e}_b - \Lambda^{ab} \partial_b \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{e}_a. \quad (3.9)$$

Entonces la derivada de EL con respecto a  $\mathbf{e}_a$  permite expresar a  $\mathbf{f}^a$  como combinación lineal de los vectores de la base adaptada a la superficie

$$\mathbf{f}^a = (\lambda^{ab} + \Lambda^{ac} K_c^b) \mathbf{e}_b - \lambda^a \mathbf{n}. \quad (3.10)$$

En cuanto a la variación con respecto a  $\mathbf{n}$  se tiene

$$\delta_{\mathbf{n}} H_c = \int dA (\lambda^a \mathbf{e}_a + \lambda_n \mathbf{n} + \nabla_a (\Lambda^{ab} \mathbf{e}_b)) \cdot \delta \mathbf{n} - \int dA \nabla_a (\Lambda^{ab} \mathbf{e}_b \cdot \delta \mathbf{n}). \quad (3.11)$$

Usando las ecuaciones de Gauss-Weingarten y la independencia lineal de la base  $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{n}\}$  se obtiene que

$$\lambda^a = -\nabla_b \Lambda^{ab}, \quad \lambda_n = \Lambda^{ab} K_{ab}, \quad (3.12)$$

con el término de frontera

$$Q_{\mathbf{n}}^a = - \int dA \nabla_a (\Lambda^{ab} \mathbf{e}_b \cdot \delta \mathbf{n}) = \int ds l_a \Lambda^{ab} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{e}_b. \quad (3.13)$$

Así, únicamente restan por determinar  $\lambda^{ab}$  y  $\Lambda^{ab}$ . De la variación con respecto a  $g_{ab}$  y  $K_{ab}$  se tiene respectivamente que  $\lambda^{ab} = T^{ab}$  y  $\Lambda^{ab} = -H^{ab}$  donde

$$T^{ab} = -\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta(\sqrt{g}\mathcal{H})}{\delta g_{ab}}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{H}^{ab} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta K_{ab}}. \quad (3.15)$$

Finalmente, habiendo determinado todos los multiplicadores de Lagrange se tiene que el tensor de esfuerzos está dado por

$$\mathbf{f}^a = f^{ab} \mathbf{e}_b + f^a \mathbf{n}, \quad (3.16)$$

donde

$$f^{ab} = T^{ab} - \mathcal{H}^{ac} K_c^b, \quad \text{y} \quad f^a = -\nabla_b H^{ab},$$

<sup>1</sup>Estrictamente, es la expresión análoga para un tensor.



Tomando la divergencia del tensor de esfuerzos se halla que

$$\begin{aligned}
\nabla_a \mathbf{f}^a &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} \mathbf{f}^a), \\
&\stackrel{(A.6)}{=} (\partial_a f^{ab} + \partial_a (\ln \sqrt{g}) f^{ab}) \mathbf{e}_b + f^{ab} (\Gamma_{ab}^c \mathbf{e}_c - K_{ab} \mathbf{n}) \\
&+ (\partial_a f^a + \partial_a (\ln \sqrt{g}) f^a) \mathbf{n} + f^a K_a^b \mathbf{e}_b, \\
&\stackrel{(A.15)}{=} (\partial_a f^{ab} + \Gamma_{ac}^c f^{ab} + \Gamma_{ac}^b f^{ac} + K_a^b f^a) \mathbf{e}_b \\
&+ (\partial_a f^a + \Gamma_{ac}^c f^a - K_{ab} f^{ab}) \mathbf{n},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

así, su divergencia es

$$\nabla_a \mathbf{f}^a = (\nabla_a f^{ab} + K_a^b f^a) \mathbf{e}_b + (\nabla_a f^a - K_{ab} f^{ab}) \mathbf{n} = 0. \tag{3.18}$$

La proyección de esta ecuación a lo largo del vector normal proporciona la ecuación de forma

$$\varepsilon = \nabla_a f^a - K_{ab} f^{ab} = 0. \tag{3.19}$$

la cual es la única deformación física relevante para Hamiltonianos invariantes bajo reparametrizaciones. En cuanto a las proyecciones sobre el espacio tangente

$$\nabla_a f_a^b + K_{ab} f^a = 0. \tag{3.20}$$

en general se reducen a identidades geométricas relativas a condiciones de consistencias sobre las componentes del tensor de esfuerzos.

### 3.1. Invariancia traslacional y rotacional: tensores de esfuerzos y torcas

De acuerdo con el teorema de Noether, cada simetría continua de la acción implica la conservación de una corriente. Como  $g_{ab}$  y  $K_{ab}$  son invariantes bajo transformaciones euclidianas, entonces también  $\mathcal{H}[g_{ab}, K_{ab}, \dots]$  lo es. A continuación se identifican las cantidades asociadas con estas simetrías.

Usando teorema de Gauss en el cambio en la energía se tiene

$$\delta H_c = \int dA \nabla_a \mathbf{f}^a \cdot \delta \mathbf{X} - \int ds l_a (\mathbf{f}^a \cdot \delta \mathbf{X} - H^{ab} \mathbf{e}_b \cdot \delta \mathbf{n}) \tag{3.21}$$

Para una traslación se tiene  $\delta \mathbf{X} = \delta \mathbf{a}$ , donde  $\delta \mathbf{a}$  es un vector constante infinitesimal, la base adaptada no varia, es decir  $\delta \mathbf{e}_a = 0$  y  $\delta \mathbf{n} = 0$ . Como el cambio en la energía es cero se tiene que

$$0 = \delta \mathbf{a} \cdot \int dA \nabla_a \mathbf{f}^a \tag{3.22}$$

por lo que en equilibrio,  $\mathbf{f}^a$  está conservado como consecuencia de la simetría bajo traslaciones.

Considerando ahora una región de la superficie delimitada por un conjunto de fronteras. Para determinar el cambio de la energía bajo la traslación de una de sus fronteras, por ejemplo una curva cerrada  $\Gamma$ , se considera la deformación  $\delta \mathbf{X}$  que se reduce a la traslación  $\delta \mathbf{a}$  de esta curva y que se anula en las demás fronteras. Así el cambio infinitesimal en la energía asociada al sistema está dado por

$$\delta H_c = -\delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}, \tag{3.23}$$

donde el vector  $\mathbf{F}$  está definido por la integral de línea

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} ds l_a \mathbf{f}^a, \quad (3.24)$$

con  $ds$  el elemento de línea a lo largo de  $\Gamma$ . La ecuación (3.23) representa el cambio en la energía cuando se desplaza la frontera una distancia  $\delta \mathbf{a}$ , lo que permite identificar al vector  $\mathbf{F}$  como la fuerza que actúa sobre la frontera  $\Gamma$  [73]. La cantidad  $l_a \mathbf{f}^a$  representa la fuerza local actuando sobre el elemento de línea  $ds$ , por lo que la corriente conservada asociada con la invariancia traslacional  $\mathbf{f}^a$  está identificada correctamente como el tensor de esfuerzos en la superficie. Su conservación describe el balance de fuerzas a lo largo de este contorno [37].

Similarmente, para el caso de una rotación infinitesimal constante  $\delta \mathbf{X} = \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}$  que produce un cambio del vector normal dado por  $\delta \mathbf{n} = \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}$ , el cambio en la energía es

$$\delta H_c = -\delta \boldsymbol{\omega} \cdot \int ds l_a \mathbf{m}^a = -\delta \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}, \quad (3.25)$$

donde

$$\mathbf{m}^a = (\mathbf{X} \times \mathbf{f}^a + H^{ab} \mathbf{e}_b \times \mathbf{n}). \quad (3.26)$$

Como este cambio en la energía está dado por el producto escalar entre el vector  $\mathbf{M}$  y el ángulo de rotación infinitesimal  $\delta \boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{M}$  se identifica como la torca total que actúa sobre la frontera de la superficie, de manera que  $\mathbf{m}^a$  es el tensor de torcas de la superficie [74]. Éste consiste en una parte involucrando al tensor de esfuerzo y que depende del origen, al igual que de otra parte de carácter intrínseco que tiene su origen en términos de curvatura.

Estos tensores son los que permiten entender la relación entre la geometría de las superficies y las fuerzas a las que están sometidas, ya que la integral de línea (3.24) captura cualquier fuente de fuerzas sobre la superficie: por medio de la integración alrededor de un contorno arbitrario se obtiene directamente la fuerza o la torca total que actúa sobre la región que encierra. Esta fuerza es constante para contornos que son homotópicamente equivalentes, en particular cuando el contorno puede contraerse a un punto este vector se anula, pero pueden haber otro tipo de obstrucciones como por ejemplo para una curva no contractible sobre el toro o en el caso bastante más interesante cuando la superficie presenta singularidades en su curvatura, la cuales están asociadas con la acción de fuerzas externas [18], como se revisará en el capítulo 5. Una analogía electrostática se encuentra en la ley de Gauss, de la misma manera que no es necesario conocer en detalle la distribución de las cargas dentro de un volumen de interés para determinar la carga total contenido en su interior –que se calcula por medio de una integral de superficie sobre su frontera– para determinar la fuerza  $\mathbf{F}$  no se necesita conocer con detalles lo que ocurre dentro de la región limitada por la curva  $\Gamma$ .

## 3.2. Ejemplos de tensores de esfuerzos

En algunas aplicaciones de la física de la materia condensada suave, la energía de una membrana depende típicamente de la suma de la energía de doblamiento cuadrática en la curvatura extrínseca, un término lineal en  $K$  que refleja la asimetría entre los dos lados de la membrana y de un término de área asociado con la constricción o penalización sobre el área total o que puede también representar la energía de una interfase fluida o una película de jabón [90]. La densidad Hamiltoniana que reúne todas estas contribuciones es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \kappa \mathcal{H}_2 + \beta \mathcal{H}_1 + \sigma \mathcal{H}_0, \quad (3.27)$$

donde  $\mathcal{H}_n = K^n$ . En general para la densidad Hamiltoniana  $\mathcal{H}_n$ , se tiene que

$$T^{ab} = K^{n-1} (2nK^{ab} - Kg^{ab}), \quad H^{ab} = nK^{n-1}g^{ab}. \quad (3.28)$$

Con esto se encuentra que el tensor de esfuerzos está dado por

$$\mathbf{f}_n^a = K^{n-1}(nK^{ab} - Kg^{ab})\mathbf{e}_b - n\nabla^a K^{n-1}\mathbf{n}, \quad (3.29)$$

La correspondiente ecuación de Euler-Lagrange es [12]

$$\mathcal{E}_n = -n\Delta K^{n-1} + K^{n-1}(n\mathcal{R} - (n-1)K^2). \quad (3.30)$$

A continuación se especializan estos resultados para los casos de interés mencionados anteriormente.

### Películas de jabón: funcional de área

Para el caso de una densidad Hamiltoniana constante  $\mathcal{H} = \sigma$ , que corresponde a una energía proporcional al área de una superficie bajo tensión superficial constante  $\sigma$ , asociada a las películas de jabón, se tiene

$$T^{ab} = -\sigma g^{ab}, \quad H^{ab} = 0 \quad (3.31)$$

por lo que el tensor de esfuerzos es de carácter puramente intrínseco

$$\mathbf{f}^a = -\sigma g^{ab}\mathbf{e}_b. \quad (3.32)$$

Su divergencia es proporcional a la curvatura media, por lo que la ecuación de forma es simplemente

$$\varepsilon = \sigma K = 0, \quad (3.33)$$

y las superficies que satisfacen esta ecuación son las superficies mínimas con curvatura media nula,  $K = 0$ .

### Funcional de curvatura media

Para una energía proporcional a la curvatura media, cuya densidad es  $\mathcal{H} = K$ , el tensor de esfuerzos es también tangencial

$$\mathbf{f}_n^a = (nK^{ab} - Kg^{ab})\mathbf{e}_b, \quad (3.34)$$

y la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange es

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{R} = 0. \quad (3.35)$$

de forma que las superficies que minimizan esta energía son las que tiene curvatura escalar nula o equivalentemente las que tienen curvatura Gaussiana nula de acuerdo con la identidad  $\mathcal{R} = 2K_G$ . Estas superficies son llamadas desarrollables y son isométricas al plano. Se estudiarán con más detalle en el capítulo 6

### Membranas fluidas: Hamiltoniano de Canham-Helfrich

El tensor de esfuerzos que corresponde a la energía de doblamiento cuya densidad es  $\mathcal{H} = 1/2 K^2$  está dado por

$$\mathbf{f}^a = K(K^{ab} - Kg^{ab})\mathbf{e}_b - \nabla^a K\mathbf{n}. \quad (3.36)$$

La ecuación de forma resultante es

$$\varepsilon = -\Delta K + K \left( 2K_G - \frac{1}{2}K^2 \right) = 0. \quad (3.37)$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace-Beltrami definido como  $\Delta = g^{ab}\nabla_a\nabla_b$ . Soluciones obvias de esta ecuación son las superficies mínimas con curvatura media cero, pero también la esfera de radio  $r$  con  $K = 2/r$  y  $K_G = 1/r^2$  son soluciones.

Se observa que el papel del tensor  $\mathbf{f}^a$  es muy importante, ya que contiene toda la información de los esfuerzos sobre la superficie. Aunque su inclusión en el principio variacional –implementando la definición de los vectores tangentes– puede parecer innecesaria, a fin de cuentas, no lo es. Para ilustrar esto se exploran las consecuencias de omitir esta restricción, de forma que  $\mathbf{f}^a = 0$ ; las configuraciones obtenidas están libres de esfuerzos. En el caso de doblamiento puro, fijando  $\mathbf{f}^a = 0$  en (3.36) implica que  $K = 0$  o que  $K_{ab} = g_{ab}K/2$ ; la segunda posibilidad implica una geometría esférica. Así, según esto, las únicas soluciones sin esfuerzos son las superficies mínimas o las esferas, lo cual no es cierto, pues se tienen otras soluciones distintas a estas, por ejemplo el toro de Clifford, de manera que, con esta suposición, las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes no describen correctamente los puntos críticos de la energía en cuestión.

### 3.3. Tensores nulos

En la referencia [12], donde el tensor de esfuerzo fue derivado primeramente usando el teorema de Noether, se hizo notar que teniendo divergencia nula en equilibrio, existe una ambigüedad inherente a su definición. Como fue presentado con mayor detalle en la referencia [38], esto se debe a que siempre es posible sumar al tensor de esfuerzos cualquier otro tensor con divergencia nula de manera que la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange queda sin modificar. Esto es, para cualquier tensor  $\mathbf{W}^a$  cuya divergencia es cero, siempre se puede construir otro tensor de esfuerzo  $\tilde{\mathbf{f}}^a = \mathbf{f}^a + \mathbf{W}^a$ , tal que  $\nabla_a \tilde{\mathbf{f}}^a = \nabla_a \mathbf{f}^a = \varepsilon \mathbf{n}$ . En general estos vectores son de la forma  $\mathbf{W}^a = \nabla_a \mathbf{A}^{ab}$ , donde  $A^{ab}$  es potencial antisimétrico, es decir,  $\mathbf{A}^{ab} = -\mathbf{A}^{ba}$ , de manera que así  $\nabla_a \mathbf{W}^a = 0$ . En dos dimensiones el potencial antisimétrico  $A^{ab}$  puede factorizarse como el producto del tensor bidimensional antisimétrico de Levi-Civita  $\varepsilon^{ab}$  y un potencial vectorial espacial  $\mathbf{A}$ , es decir,  $\mathbf{A}^{ab} = \varepsilon^{ab} \mathbf{A}$ . Como  $\nabla_a \varepsilon^{bc} = 0$  es posible expresar el tensor nulo en la forma

$$\mathbf{W}^a = \varepsilon^{ab} \nabla_a \mathbf{A}. \quad (3.38)$$

Mas aún, estos tensores, debido a su característica de divergencia cero, no transmiten fuerzas. Esto es porque su contribución a la fuerza sobre una región de la superficie está dada por la integral de línea  $\int ds l_a \mathbf{W}^a$ , que al transformarla a una integral de superficie se anula.

Un ejemplo interesante de este tipo de tensores presentado en [38] está relacionado con el campo vectorial normal a la superficie  $\mathbf{n}$ . Se introdujo una expresión del campo vectorial normal a una superficie encajada en un espacio 3-dimensional en términos de la divergencia superficial de otro vector que lo involucra en la forma

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} \nabla_a \mathbf{N}^a \quad (3.39)$$

donde  $\mathbf{N}^a = \mathbf{X} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{e}^a)$ . Bajo una traslación  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} + \mathbf{a}$ , este vector se transforma como  $\mathbf{N}^a \rightarrow \mathbf{N}^a + \mathbf{h}^a$  con  $\mathbf{h}^a = \mathbf{a} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{e}^a)$ . Puede demostrarse que este es un vector nulo expresando  $\mathbf{h}^a$  en la forma

$$\mathbf{h}^a = \varepsilon^{ab} \mathbf{a} \times \mathbf{e}_b = \varepsilon^{ab} \nabla_b (\mathbf{a} \times \mathbf{X}), \quad (3.40)$$

donde se identifica el potencial vectorial  $\mathbf{A} = \mathbf{a} \times \mathbf{X}$ .

En esa misma referencia se planteó la cuestión de que si estos tensores nulos podrían proporcionar un método para obtener configuraciones en equilibrio sin tener que resolver explícitamente la correspondiente ecuación de Euler - Lagrange. Esto podría realizarse sumando al tensor de esfuerzo un tensor nulo apropiado, de forma tal que el tensor de esfuerzos resultante se anulara sobre toda la superficie, facilitando la tarea de encontrar relaciones entre la curvatura y la configuración en equilibrio.

### 3.3.1. Condición de integrabilidad de Gauss-Codazzi

Un ejemplo interesante de este tipo de tensores de esfuerzos, surge naturalmente de la condición de integrabilidad de Gauss-Codazzi. Ésta, junto con la de Codazzi-Mainardi son condiciones se obtienen de las relaciones que debe satisfacer las derivadas de los vectores tangentes de la base adaptada a la superficie,  $\mathbf{e}_{a,bc} = \mathbf{e}_{a,cb}$ , de las cuales se obtienen las siguientes ecuaciones (en el apéndice A.3 se presenta una derivación)

$$R_{abcd} = K_{ac}K_{bd} - K_{ad}K_{bc}, \quad (\text{Gauss-Codazzi}), \quad (3.41)$$

$$\nabla_a K_{bc} = \nabla_b K_{ac}, \quad (\text{Codazzi-Mainardi-Peterson}). \quad (3.42)$$

Las cuales son condiciones de integrabilidad que los tensores  $g_{ab}$  y  $K_{ab}$  deben satisfacer para que representen la primera y la segunda formas fundamentales de una superficie en  $\mathbb{E}^3$ .

Como se menciona en la referencia [37], en principio no es necesario implementarlas en el principio variacional (3.2), porque éstas se satisfacen una vez que las constricciones que imponen las definiciones de  $\mathbf{e}_a$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $g_{ab}$  y  $K_{ab}$  han sido implementadas. Sin embargo tienen una relevancia sutil en la aplicación del principio variacional; la condición de Gauss-Codazzi relaciona la geometría intrínseca y extrínseca de la superficie, por lo que no se pueden variar de manera independiente. Por lo tanto, cuando se realiza la variación de un funcional geométrico se pueden escoger dos caminos: intrínsecamente o extrínsecamente. Resulta ser que en algunos casos, cuando se elige tratar las variaciones intrínsecamente se obtiene un tensor de esfuerzos aparentemente diferente del obtenido cuando se elige tratarlas extrínsecamente. Pero ambos resultados deben ser consistentes, así que deben diferir a lo más por tensor de esfuerzos nulo, explicando estas discrepancias aparentes.

Para estudiar los tensores nulos asociados con esta ambigüedad se considera el siguiente Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{4} \int dA \lambda^{abcd} (R_{abcd} - (K_{ac}K_{bd} - K_{ad}K_{bc})), \quad (3.43)$$

donde  $\lambda^{abcd}$  es un multiplicador de Lagrange que implementa la condición de Gauss-Codazzi respectivamente, el cual posee las mismas simetrías que el tensor de Riemann. Usando la expresión para la variación del tensor de Riemann covariante (B.20) derivado en el apéndice B, se obtiene que la variación de los términos relevantes está dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int dA \lambda^{abcd} \delta R_{abcd} &= \frac{1}{4} \int dA (\lambda^{aecd} R^b_{ecd} - 2\nabla_c \nabla_d \lambda^{abcd}) \delta g_{ab} \\ &+ \int dA (\nabla_c (\nabla_d \lambda^{abcd} \delta g_{ab}) - \nabla_d (\lambda^{abcd} \nabla_c \delta g_{ab})) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\frac{1}{4} \int dA \lambda^{abcd} \delta (K_{ac}K_{bd} - K_{ad}K_{bc}) = \int dA \lambda^{abcd} K_{cd} \delta K_{ab}. \quad (3.45)$$

Entonces de la variación con respecto a  $g_{ab}$  se obtiene el siguiente tensor de segundo rango

$$\Upsilon^{ab} = \nabla_c \nabla_d \lambda^{abcd} - \frac{1}{2} \lambda^{aecd} R^b_{ecd}, \quad (3.46)$$

con el correspondiente término de frontera dado por

$$Q_{\mathbf{g}}^a = \nabla_b \lambda^{abcd} \delta g_{cd} - \lambda^{abcd} \nabla_b \delta g_{cd}. \quad (3.47)$$

Similarmente, de la variación con respecto a  $K_{ab}$  se obtiene el tensor

$$\Xi^{ab} = -\lambda^{abcd} K_{cd} \quad (3.48)$$

Con estos resultados se obtiene que el tensor de esfuerzos  $\mathbf{W}_G C^a$  proveniente de esta condición de integrabilidad dado por

$$\mathbf{W}^a = (\Upsilon^{ab} - \Xi^{ac} K_{cd} g^{db}) \mathbf{e}_b + \nabla_b \Xi^{ab} \mathbf{n}, \quad (3.49)$$

se puede expresar como

$$\mathbf{W}_{GC}^a = \left( \nabla_c \nabla_d \lambda^{abcd} - \frac{1}{2} \lambda^{abcd} R_{ecd}^b + \lambda^{aecd} K_c^b K_{ed} \right) \mathbf{e}_b - \nabla_b (\lambda^{abcd} K_{cd}) \mathbf{n}. \quad (3.50)$$

Es posible demostrar que este tensor es un tensor nulo. Primero, nótese que el tercer término cancela al segundo

$$\lambda^{aecd} K_c^b K_{ed} = \frac{1}{2} \lambda^{aecd} (K_c^b K_{ed} - K_d^b K_{ec}) = \frac{1}{2} \lambda^{aecd} R_{ecd}^b. \quad (3.51)$$

Además, el primer término se puede escribir como

$$(\nabla_d \nabla_b \lambda^{adcb}) \mathbf{e}_c = \nabla_d (\nabla_b \lambda^{adcb} \mathbf{e}_c) - \nabla_b (\lambda^{adcb}) K_{cd} \mathbf{n}, \quad (3.52)$$

por lo que

$$\mathbf{W}_{GC}^a = \nabla_b (\nabla_d \lambda^{abcd} \mathbf{e}_c) - \lambda^{abcd} \nabla_b K_{cd} \mathbf{n}. \quad (3.53)$$

Usando las simetrías del multiplicador de Lagrange  $\lambda^{abcd}$  y las ecuaciones de Codazzi-Mainardi, el último término se anula

$$\lambda^{abcd} \nabla_b K_{cd} = \frac{1}{2} \lambda^{abcd} (\nabla_b K_{cd} - \nabla_d K_{cb}) = 0, \quad (3.54)$$

con esto,  $\mathbf{W}_{GC}^a$  se reduce a

$$\mathbf{W}_{GC}^a = \nabla_b (\nabla_d \lambda^{abcd} \mathbf{e}_c) \quad (3.55)$$

el cual es un tensor nulo debido a la antisimetría en  $a$  y  $b$ .

### 3.3.2. Variación de $\mathcal{R}^2$

Como ejemplo de esta ambigüedad en el tensor de esfuerzos (asociada con la condición de integrabilidad de Gauss-Codazzi), se calcula la variación del funcional del cuadrado de la curvatura escalar  $H = \int dA \mathcal{R}^2$ .

$$T^{ab} = (4R^{ab} - g^{ab} \mathcal{R} + 4(g^{ab} \nabla^c \nabla_c - \nabla^a \nabla^b)) \mathcal{R}, \quad (3.56)$$

$$H^{ab} = 0, \quad (3.57)$$

con el término de frontera

$$Q^a = 2(g^{ac} g^{bd} - g^{ad} g^{bc}) (\mathcal{R} \nabla_d - \nabla_d \mathcal{R}) \delta g_{bc}. \quad (3.58)$$

Así, el tensor de esfuerzos “intrínseco” es puramente tangencial

$$\mathbf{f}_{Int}^a = (4R^{ab} - g^{ab} \mathcal{R} + 4(g^{ab} \nabla^c \nabla_c - \nabla^a \nabla^b)) \mathcal{R} \mathbf{e}_b. \quad (3.59)$$

Por otra parte, realizando la variación extrínsecamente se tiene

$$T^{ab} = (8R^{ab} - g^{ab} \mathcal{R}) \mathcal{R}, \quad (3.60)$$

$$H^{ab} = 4(g^{ab} K - K^{ab}) \mathcal{R}. \quad (3.61)$$

Por lo que el tensor de esfuerzos “extrínseco” es

$$\mathbf{f}_{Ext}^a = (4R^{ab} - g^{ab} \mathcal{R}) \mathcal{R} \mathbf{e}_b + 4(g^{ab} K - K^{ab}) \nabla_b \mathcal{R} \mathbf{n}, \quad (3.62)$$

donde se ha utilizado la ecuación de Codazzi-Mainardi contraída en el último término.

Tomando la diferencia de ambos tensores se obtiene

$$\mathbf{W}^a \equiv \frac{1}{4} (\mathbf{f}_{Int}^a - \mathbf{f}_{Ext}^a) = (g^{ab} \nabla^c \nabla_c - \nabla^a \nabla^b) \mathcal{R} \mathbf{e}_b - (g^{ab} K - K^{ab}) \nabla_b \mathcal{R} \mathbf{n}. \quad (3.63)$$

Puede ver que este tensor es nulo, primero se reexpresa el primer término como

$$\begin{aligned} (g^{ac} \nabla^b \nabla_b - \nabla^a \nabla^c) \mathcal{R} \mathbf{e}_c &= (g^{ac} g^{bd} - g^{ad} g^{bc}) \nabla_b \nabla_d \mathcal{R} \mathbf{e}_c \\ &= (g^{ac} g^{bd} - g^{ad} g^{bc}) [\nabla_b (\nabla_d \mathcal{R} \mathbf{e}_c) - \nabla_d \mathcal{R} K_{bc} \mathbf{n}] \\ &= (g^{ac} g^{bd} - g^{ad} g^{bc}) \nabla_b (\nabla_d \mathcal{R} \mathbf{e}_c) + (g^{ab} K - K^{ab}) \nabla_b \mathcal{R} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

con lo cual, se tiene que  $\mathbf{W}^a$  se reduce a

$$\mathbf{W}^a = (g^{ac} g^{bd} - g^{ad} g^{bc}) \nabla_b (\nabla_d \mathcal{R} \mathbf{e}_c). \quad (3.65)$$

En particular, para 2 dimensiones

$$\mathbf{W}^a = \varepsilon^{ab} \nabla_b \mathbf{W}. \quad (3.66)$$

donde  $\mathbf{W} = \varepsilon^{cd} \nabla_d \mathcal{R} \mathbf{e}_c$ . Este es precisamente el mismo resultado que se obtiene de la ecuación (3.55) si  $\lambda^{abcd} = R^{abcd}$ . En esta forma es evidente que es un tensor nulo, su divergencia es cero y por lo tanto no contribuye en la ecuación de EL.

Para completar la comparación entre ambos caminos ahora se analiza la diferencia entre los términos de frontera que usualmente se desprecian, pero que son importantes, por ejemplo cuando se estudia el cambio en la energía de la frontera de una superficie bajo una dilatación  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} + \lambda \mathbf{X}$ . Esta energía debe ser la misma independientemente de qué camino se use, lo cual aparentemente no sucede si no se tiene en cuenta el término de frontera obtenido en la variación de la manera intrínseca.

La diferencia en los términos de frontera obtenidos de ambas maneras es

$$\begin{aligned} \Delta \delta S \equiv \delta S_{Int} - \delta S_{Ext} &= \int dA \nabla_a (-\mathbf{W}^a \cdot \delta \mathbf{X} + Q^a) \\ &= \int dA (g^{ac} g^{bd} - g^{ad} g^{bc}) [4 \nabla_b (\nabla_d \mathcal{R} \mathbf{e}_c) \cdot \delta \mathbf{X} - 2(\mathcal{R} \nabla_d - \nabla_d \mathcal{R}) \delta g_{bc}], \end{aligned} \quad (3.67)$$

para una dilatación  $\delta \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$  la métrica cambia como  $\delta g_{ab} = 2\lambda g_{ab}$ . Con esto se tiene

$$\begin{aligned} \Delta \delta S &= 4\lambda \int dA (g^{ac} g^{bd} - g^{ad} g^{bc}) \nabla_a [\nabla_b (\nabla_d \mathcal{R} \mathbf{e}_c) \cdot \lambda \mathbf{X} - (\mathcal{R} \nabla_d - \nabla_d \mathcal{R}) g_{bc}] \\ &= 4\lambda \int dA (g^{ac} g^{bd} - g^{ad} g^{bc}) \nabla_a [\nabla_b (\nabla_d \mathcal{R} \mathbf{e}_c \cdot \mathbf{X}) - \nabla_d \mathcal{R} \mathbf{e}_c \cdot \nabla_b \mathbf{X} + \nabla_d \mathcal{R} g_{bc}] \\ &= 4\lambda \int dA (g^{ac} g^{bd} - g^{ad} g^{bc}) \nabla_a \nabla_b (\nabla_d \mathcal{R} \mathbf{e}_c \cdot \mathbf{X}) = 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

El último paso es debido a la antisimetría en el intercambio de los índices  $a$  y  $b$ . Como se mencionó antes, de no ser por el término de frontera, en el segundo paso no se hubiera cancelado el segundo término y la variación de las dos maneras no sería consistente.

### 3.4. Conclusiones

Se presentó la revisión del marco teórico en el cual se identifican las leyes de conservación asociadas con la invariancia bajo transformaciones Euclidianas de Hamiltonianos geométricos. La cantidad geométrica asociada con la invariancia traslacional se identifica como el tensor de esfuerzos sobre la superficie. Para

una Hamiltoniano invariante bajo reparametrizaciones, la proyección normal de su ley de conservación proporciona la ecuación de Euler-Lagrange que describe las configuraciones en equilibrio de las superficies de interés. Adicionalmente, por medio de su integración a lo largo de un contorno cerrado se puede determinar la fuerza total que actúa sobre la región encerrada.

Dentro de este marco, las definiciones de las cantidades geométricas relevantes se implementan en el principio variacional por medio de variables auxiliares locales que cumplen una función de multiplicadores de Lagrange. Este método tiene la ventaja considerable, que permite tratar de manera independiente la variación de cada una de las variables geométricas, evitando tener que determinar cómo cambian éstas como consecuencia de la deformación de la superficie original.

Se analizó la ambigüedad en la definición del tensor de esfuerzos que surge de la condición de integridad de Gauss-Codazzi. Se demostró que la diferencia entre los tensores de esfuerzos que aparece al tratar el Hamiltoniano tanto de forma intrínseca como extrínseca, es nulo, por lo que se confirma que ambos caminos son consistentes.





## Capítulo 4

# Representación generalizada de Weierstrass-Enneper

Desde el punto de vista matemático las superficies mínimas son muy especiales: sus funciones de encajamiento en el espacio euclidiano tridimensional son armónicas, de forma tal que en una parametrización apropiada, estas superficies estarán descritas por funciones analíticas. Esta característica es el elemento esencial de la representación clásica de Weierstrass-Enneper (WE) para superficies mínimas, introducida hace 150 años y que ha tenido un papel central en el desarrollo de este tema desde entonces [30, 34, 81]. Aunque físicamente a veces es adecuado un tratamiento en términos de una función de altura para gradientes pequeños, donde se pueden emplear métodos más simples, la representación de WE de la superficie proporciona una herramienta indispensable para tratar las características globales de las superficies mínimas; la superficie P de Schwartz conocida como la pesadilla del plomero [88], que describe fases líquido-cristalinas de membranas fluidas, proporciona un buen ejemplo [101]. Incluso, si uno está interesado en interfases, se tiene que considerar una diferencia de presión a través de la superficie y con esto la superficie en cuestión ya no es mínima sino que se trata de curvatura media constante. También al considerar la estabilidad o fluctuaciones, su descripción cae fuera del alcance de la representación de WE.

Existe una generalización de la representación de WE que puede aplicarse a cualquier superficie. En 1979 Kenmotsu mostró cómo podía modificarse la representación clásica para describir superficies con curvatura media prescrita [50]. Una década después, en los noventa, esta representación fue extendida para incluir superficies con curvatura media no nula, [54, 61]. Como indicaron Konopelchenko y Taimanov en [55], no era necesario considerar la curvatura media como prescrita. La representación de WE fue reformulada en términos de un campo espinorial con dos componentes [97, 60] para describir superficies de curvatura media arbitraria. Siguiendo las referencias [6] y [99] a continuación se presenta una revisión de esta generalización.

### 4.1. Ecuación de Dirac para espinores de la superficie

En la representación generalizada de WE las tres funciones que describen el encajamiento de una superficie  $\Sigma$  en el espacio tridimensional Euclidiano  $\mathbb{E}^3$  se expresan en términos de un campo espinorial de 2 componentes  $\psi(z, \bar{z}) = (\psi_1(z, \bar{z}), \psi_2(z, \bar{z}))^T$  definido en un dominio simplemente conexo  $D$  del plano complejo  $\mathbb{C}$  (la barra encima denota el complejo conjugado). El espinor es una solución de la ecuación tipo Dirac

$$\mathcal{D}\psi = 0, \tag{4.1}$$

donde  $\mathcal{D}$  es el operador diferencial de primer orden,

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{V} & 0 \\ 0 & \mathcal{V} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

involucra un potencial real  $\mathcal{V}$ . Este potencial se acopla a las componentes del espinor; la ecuación (4.1) se descompone como

$$\partial_z \psi_2 = -\mathcal{V} \psi_1, \quad \partial_{\bar{z}} \psi_1 = \mathcal{V} \psi_2. \quad (4.3)$$

El espinor  $\xi$  definido por  $\xi = (-\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_1)^T$  también satisface la ecuación de Dirac:

$$\mathcal{D}\xi = 0. \quad (4.4)$$

Este espinor está relacionado con el complejo conjugado de  $\psi$  por  $\xi = \zeta \bar{\psi}$ , donde

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

El espinor  $\xi$ , a diferencia de  $\bar{\psi}$ , se transforma como  $\psi$  bajo la acción de  $SU(2)$ .

La ecuación de Dirac no es invariante bajo la acción del grupo  $SU(2)$ . Tampoco se realizan las rotaciones de la superficie de la forma aparentemente “obvia” por la acción de  $SU(2)$  en el espinor  $\psi$  usando el isomorfismo local  $SO(3) = SU(2)$ . La combinación lineal de  $\psi$  y  $\xi$  corresponde a una rotación de la superficie. Primero cabe señalar que la superficie que corresponde al espinor  $\xi$  es la misma que se obtiene de  $\psi$  bajo la rotación por un ángulo  $\pi$  alrededor del eje  $\hat{\mathbf{x}}_2$ , i.e. bajo la sustitución  $\psi \rightarrow \xi$  las componentes de  $\mathbf{X}$  cambian como  $X^1 \rightarrow -X^1, X^2 \rightarrow X^2, X^3 \rightarrow -X^3$ . Con mayor generalidad, el espinor transformado  $\tilde{\psi} = \bar{a}\psi + b\xi$ , donde  $a$  y  $b$  son dos números complejos, también satisface la ecuación de Dirac por lo que, también, describe una superficie  $\tilde{\mathbf{X}}$ . Si  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ,  $\tilde{\psi}$  está relacionado indirectamente con  $\psi$  por un elemento  $U$  de  $SU(2)$  dado por

$$U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

que también puede representarse como  $U = e^{-i\frac{\vartheta}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}}}$ , donde  $\hat{\mathbf{r}}$  es un vector unitario en  $\mathbb{E}^3$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  es el vector en  $\mathbb{E}^3$  con las matrices de Pauli como sus componentes. Debido al isomorfismo local  $SO(3) = SU(2)$  se identifica al elemento  $\mathbf{R}$  de  $SO(3)$  dado por  $\mathbf{R} = e^{i\vartheta\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{r}}}$ , donde  $\mathbf{J}$  es el vector en  $\mathbb{E}^3$  con los generadores infinitesimales de rotaciones

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

como sus componentes, de manera que  $\mathbf{R}$  describe una rotación antihoraria por un ángulo  $\vartheta$  alrededor de la dirección  $\hat{\mathbf{r}}$ . Evidentemente  $\tilde{\psi} \neq U\psi$ , por lo tanto la manera en la cual  $U$  relaciona a  $\tilde{\psi}$  con  $\psi$  no es a través de la acción usual de  $SU(2)$ , sino por medio de la rotación asociada  $R$  que relaciona las funciones de encajamiento de ambos espinores, en otras palabras, las funciones de encajamiento  $\tilde{\mathbf{X}}$  describen un rotación de  $\mathbf{X}$ , i.e.  $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{R}\mathbf{X}$  [99]. Si  $|a|^2 + |b|^2 \neq 1$ , la transformación  $\psi \rightarrow \bar{a}\psi + b\xi$  describe una rotación acompañada de un escalamiento.

La inmersión de  $D$  en  $\mathbb{E}^3$  definida por  $\psi(z, \bar{z})$  está dada por

$$\mathbf{X}(z, \bar{z}) = \int_{\gamma} \boldsymbol{\phi}(w, \bar{w}), \quad (4.8)$$

donde  $\phi(z, \bar{z})$  es la 1-forma con valor en vectores en  $\mathbb{E}^3$  cuyas componentes son<sup>1</sup>

$$\phi^1(z, \bar{z}) = \text{Re} [(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2)dz], \quad (4.9a)$$

$$\phi^2(z, \bar{z}) = \text{Re} [i(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2)dz], \quad (4.9b)$$

$$\phi^3(z, \bar{z}) = 2\text{Re} [\psi_1\bar{\psi}_2dz]; \quad (4.9c)$$

$\gamma$  es una curva en el plano complejo que termina en el punto  $z$ . Es evidente de la definición que las funciones de encajamiento son invariantes bajo conjugación compleja,  $\psi \rightarrow \bar{\psi}$ .

Es simple mostrar que las 1-formas (4.9) son cerradas en el plano complejo, i.e.  $d\phi^i = 0$ : se usa el hecho que el espinor  $\psi$  satisface la ecuación de Dirac, (4.1) y que  $\mathcal{V}$  es real. No se necesitan evaluar las derivadas  $\partial_z\psi_1$  y  $\partial_{\bar{z}}\psi_2$  en este argumento. Cabe señalar que las 1-formas construidas con la parte imaginaria de la ecuación (4.9) no son cerradas.

La cerradura y el teorema de Stokes junto implican que la definición de las funciones de encajamiento (4.8) son independientes de la elección de la trayectoria  $\gamma$  y son por lo tanto bien definidos. Vale la pena señalar que la ecuación tipo Dirac (4.1) parece ser la ecuación lineal más general para un espinor consistente con cerradura.

#### 4.1.1. Geometría intrínseca de la superficie

Los vectores tangentes a la superficie adaptados a esta parametrización son  $\mathbf{e}_z = \partial_z \mathbf{X}$  y  $\mathbf{e}_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \mathbf{X}$ ; en términos de las componentes de espinor  $\mathbf{e}_z$  están dados por

$$\mathbf{e}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2 \\ i(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2) \\ 2\psi_1\bar{\psi}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

La 1-forma con valor en vectores  $\phi$  definida en la ecuación (4.9) puede ser expresada en la forma alternativa  $\phi = 2\text{Re}(\mathbf{e}_z dz)$ .

Los dos vectores tangentes son nulos con respecto al producto escalar en  $\mathbb{E}^3$  (denotado por  $\cdot$ ), en otras palabras, sus normas se anulan:  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 0 = \mathbf{e}_{\bar{z}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{z}}$ . Sin embargo no son ortogonales:  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{\bar{z}} = 1/2 |\psi|^4$ , donde  $|\psi|^2 = \psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$  y  $|\psi_i|^2 = \bar{\psi}_i \psi_i$ .

Esta parametrización es isotérmica (o conforme): el elemento de línea es

$$ds^2 = |\psi|^4 |dz|^2; \quad (4.11)$$

la métrica inducida en la superficie toma la forma

$$g_{ab} = \frac{|\psi|^4}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Por lo que el tensor métrico es un reescalamiento de Weyl de su contraparte Euclidiana en el plano complejo, i.e., es conformemente plano. La cuarta potencia de la norma del espinor proporciona el factor conforme. La geometría intrínseca de la superficie está determinada completamente por  $|\psi|$ .

<sup>1</sup>Aquí se intercambian  $\phi^1$  y  $\phi^2$  con respecto a las definiciones usuales en la literatura, por ejemplo [99], esto es por el motivo que así se facilita la conexión con la representación clásica de WE. Además también se reducen el número de signos menos en los cálculos.

La libertad residual en la reparametrización consistente con la forma isotérmica de la métrica está capturada por funciones analíticas u holomórfas<sup>2</sup>. Bajo la transformación holomorfa  $z \rightarrow w(z)$ ,  $\bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z})$ , se encuentra que

$$\psi_1(z, \bar{z}) \rightarrow w'(z)^{1/2} \psi_1(w, \bar{w}), \quad \psi_2(z, \bar{z}) \rightarrow \bar{w}'(\bar{z})^{1/2} \psi_2(w, \bar{w}), \quad \mathcal{V}(z, \bar{z}) \rightarrow |w'(z)| \mathcal{V}(w, \bar{w}). \quad (4.13)$$

Entonces estas variables son densidades escalares.

El determinante de la métrica es  $g = -1/4|\psi|^8$ , por lo que  $\sqrt{g} = i/2|\psi|^4$  es imaginario. El área está dada por

$$A = \frac{i}{2} \int dz \wedge d\bar{z} |\psi|^4. \quad (4.14)$$

A pesar de las apariencias, es una forma real:  $d\bar{A} = -i/2|\psi|^4 d\bar{z} \wedge dz = dA$ .

El operador de Laplace-Beltrami  $\Delta$  en el plano complejo está dado por

$$\Delta = \frac{4}{|\psi|^4} \partial_z \partial_{\bar{z}}. \quad (4.15)$$

Los símbolos de Christoffel no nulos construidos con la métrica  $g_{ab}$  son

$$\Gamma_{zz}^z = g^{z\bar{z}} \partial_z g_{z\bar{z}} = \partial_z \ln g_{z\bar{z}} = 2 \partial_z \ln |\psi|^2, \quad (4.16)$$

junto con su complejo conjugado  $\Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}}$ . De forma similar, las únicas componentes no nulas del tensor de Riemann en la parametrización conforme son

$$R_{z\bar{z}z}^z = \frac{|\psi|^4}{2} \Delta \ln |\psi|^2 = R_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}}. \quad (4.17)$$

EL tensor de Ricci (proporcional a la métrica) y el escalar de Ricci son

$$R_{z\bar{z}} = -\frac{|\psi|^4}{2} \Delta \ln |\psi|^2, \quad \mathcal{R} = -2\Delta \ln |\psi|^2. \quad (4.18)$$

#### 4.1.2. Geometría extrínseca de la superficie

El vector normal a la superficie  $\Sigma$  definido por  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{\bar{z}} / \sqrt{g}$ , en términos de las componentes del espinor está dado por

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\psi|^2} \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re}(\psi_1 \psi_2) \\ 2 \operatorname{Im}(\psi_1 \psi_2) \\ |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Se pueden obtener identidades para los vectores tangentes de la definición del vector normal. Tomando el producto exterior de  $\mathbf{n}$  con  $\mathbf{e}_z$  y  $\mathbf{e}_{\bar{z}}$  se obtiene

$$\mathbf{e}_z = i \mathbf{e}_{\bar{z}} \times \mathbf{n}. \quad (4.20)$$

expresión que es algo inusual desde una perspectiva Euclidiana: el producto vectorial con la normal devuelve el vector tangente multiplicado por  $i$ , sin embargo, la multiplicación por  $i$  representa una rotación por  $\pi/2$ .

La segunda forma fundamental o tensor curvatura extrínseca definido por  $K_{ab} = -\mathbf{n} \cdot \partial_a \mathbf{e}_b$ , está dado por

$$K_{ab} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{V} |\psi|^2 \\ \mathcal{V} |\psi|^2 & \bar{\mathcal{A}} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

<sup>2</sup>Funciones cuyas partes reales e imaginarias satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann [31].

donde  $\mathcal{A}$  denota al Wronskiano de  $\psi_1$  y  $\bar{\psi}_2$ ,  $\mathcal{A} = \bar{\psi}_2 \partial_z \psi_1 - \psi_1 \partial_z \bar{\psi}_2$ . [99].  $\mathcal{A}$  es invariante bajo rotaciones, como lo son la norma de  $\psi$  y  $\mathcal{V}$ . Bajo reparametrización,  $z \rightarrow w(z)$ ,  $\mathcal{A}$  se transforma como densidad escalar:

$$\mathcal{A}(z, \bar{z}) \rightarrow w'(z)^2 \mathcal{A}. \quad (4.22)$$

Además del potencial y de la norma del espinor, el Wronskiano es la otra función del espinor y sus derivadas que aparece naturalmente en esta representación.

Los valores propios del operador de forma  $K^a_b = g^{ac} K_{cb}$  son las dos curvaturas principales,  $C_1$  y  $C_2$ . El doble de la curvatura media  $K = C_1 + C_2$  y la curvatura Gaussiana  $K_G = C_1 C_2$  están dadas respectivamente por

$$K = \frac{4}{|\psi|^2} \mathcal{V}, \quad (4.23)$$

$$K_G = \frac{4}{|\psi|^8} (\mathcal{V}^2 |\psi|^4 - |\mathcal{A}|^2). \quad (4.24)$$

Si  $\mathcal{V} = 0$  la superficie es mínima ( $K = 0$ ). Definiendo las componentes del espinor  $\psi$  en términos de las dos funciones analíticas  $f(z)$  y  $g(z)$  como  $\psi_1 = f^{1/2} g / \sqrt{2}$  y  $\psi_2 = \bar{f}^{1/2} / \sqrt{2}$  se obtiene el espinor  $\phi$  que corresponde a la representación original de WE para superficies mínimas [30, 34] dado por

$$\phi = Re \left[ \frac{f}{2} (1 - g^2, 1 + g^2, 2g)^T dz \right]. \quad (4.25)$$

La condición de integrabilidad de Gauss-Codazzi (A.41) identifica al doble de la curvatura Gaussiana (4.24) con el escalar de Ricci definido intrínsecamente por la ecuación (4.18). Entonces  $|\mathcal{A}|$  está determinado completamente una vez que  $\mathcal{V}$  y  $|\psi|$  son conocidos; es una medida de la diferencia de las curvaturas principales:

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{(C_1 - C_2)^2}{16} |\psi|^8. \quad (4.26)$$

La fase de  $\mathcal{A}$  captura la direcciones principales;  $\mathcal{A}$  se anula en puntos umbílicos.

Los dos escalares de la curvatura dependen de  $\psi$  sólo a través de las combinaciones  $|\psi|^2$  y  $\mathcal{A}$ . Es útil tener las identidades para las derivadas parciales faltantes,  $\partial_z \psi_1$  y  $\partial_z \bar{\psi}_2$ , en términos de estas variables.

Diferenciando  $|\psi|^2$  con respecto a  $z$  y usando el hecho que  $\psi$  satisface la ecuación tipo Dirac se obtiene

$$\partial_z |\psi|^2 = \psi_2 \partial_z \bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1 \partial_z \psi_1. \quad (4.27)$$

Multiplicando por  $\psi_1$  y sumando  $\psi_2 \mathcal{A}$

$$\psi_2 \mathcal{A} + \psi_1 \partial_z |\psi|^2 = |\psi|^2 \partial_z \psi_1, \quad (4.28)$$

de donde se obtiene la identidad

$$\partial_z \psi_1 = \psi_1 \partial_z \ln |\psi|^2 + \frac{1}{|\psi|^2} \psi_2 \mathcal{A}. \quad (4.29)$$

Multiplicando la ecuación (4.27) por  $\bar{\psi}_2$  y restando  $\bar{\psi}_1 \mathcal{A}$

$$\bar{\psi}_2 \partial_z |\psi|^2 - \bar{\psi}_1 \mathcal{A} = |\psi|^2 \partial_z \bar{\psi}_2, \quad (4.30)$$

se obtiene la segunda identidad

$$\partial_z \bar{\psi}_2 = \bar{\psi}_2 \partial_z \ln |\psi|^2 - \frac{1}{|\psi|^2} \bar{\psi}_1 \mathcal{A}. \quad (4.31)$$

Con estos resultados, todas derivadas de  $\psi$  se pueden expresar en la forma compacta,

$$\partial_z \psi = \begin{pmatrix} \partial_z \ln|\psi|^2 & |\psi|^{-2} \mathcal{A} \\ -\mathcal{V} & 0 \end{pmatrix} \psi, \quad \partial_{\bar{z}} \psi = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{V} \\ -|\psi|^{-2} \bar{\mathcal{A}} & \partial_{\bar{z}} \ln|\psi|^2 \end{pmatrix} \psi. \quad (4.32)$$

Las ecuaciones de Gauss-Weingarten,  $\partial_a \mathbf{e}_a = \Gamma^c_{ab} \mathbf{e}_c - K_{ab} \mathbf{n}$  y  $\partial_a \mathbf{n} = K_a^b \mathbf{e}_b$ , describen cómo cambia el marco adaptado  $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{n}\}$  sobre la superficie. En la representación generalizada de WE, escribiendo la base adaptada a la superficie como  $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\bar{z}}, \mathbf{n}\}$ , estas ecuaciones se pueden expresar de forma compacta [6]

$$\partial_z \mathbf{E} = \mathbf{M} \mathbf{E} \quad \partial_{\bar{z}} \mathbf{E} = \mathbf{N} \mathbf{E}, \quad (4.33)$$

donde las transformaciones lineales  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  están dadas por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2\partial_z \ln|\psi|^2 & 0 & -\mathcal{A} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}K|\psi|^4 \\ \frac{1}{2}K & \frac{2}{|\psi|^4}\mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4}K|\psi|^4 \\ 0 & 2\partial_{\bar{z}} \ln|\psi|^2 & -\bar{\mathcal{A}} \\ \frac{2}{|\psi|^4}\bar{\mathcal{A}} & \frac{1}{2}K & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

La condición de integrabilidad  $\mathbf{E}_{z\bar{z}} = \mathbf{E}_{\bar{z}z}$  conduce a  $\mathbf{M}_{\bar{z}} - \mathbf{N}_z + [\mathbf{M}, \mathbf{N}] = 0$ . De esta condición y de la independencia lineal de la base  $\mathbf{E}$  se obtienen las siguientes relaciones

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln|\psi|^2 = \frac{|\mathcal{A}|^2}{|\psi|^4} - \mathcal{V}^2 = \frac{|\mathcal{A}|^2}{|\psi|^4} - \frac{|\psi|^4}{16} K^2, \quad (4.35a)$$

$$\partial_{\bar{z}} \mathcal{A} = |\psi|^2 \partial_z \mathcal{V} - \mathcal{V} \partial_z |\psi|^2 = \frac{|\psi|^4}{4} \partial_z K, \quad (4.35b)$$

que cumplen los espinores y el potencial que satisfacen la ecuación de Dirac (4.1).

La ecuación (4.35a) representa la condición de Gauss-Codazzi porque es equivalente a la ecuación

$$\mathcal{R} = K^2 - K_{ab}K^{ab} = K^2 - (K_{zz}K^{z\bar{z}} + 2K_{z\bar{z}}K^{z\bar{z}} + K_{\bar{z}\bar{z}}K^{\bar{z}z}). \quad (4.36)$$

De forma similar, la ecuación (4.35b) y su complejo conjugado representa la condición de Codazzi-Mainardi ya que son equivalentes al par de ecuaciones

$$\nabla_a K_{bc} = \nabla_b K_{ac} \quad \text{o} \quad \nabla_{\bar{z}} K_{zz} = \nabla_z K_{\bar{z}\bar{z}} \quad \text{y sus c.c.} \quad (4.37)$$

La condición de Gauss-Codazzi implica la identificación de la curvatura escalar con el doble de la curvatura Gaussiana; la sustitución de sus expresiones dadas por las ecuaciones (4.18) y (4.24) en la condición de Gauss-Codazzi (4.35a) proporciona la identidad  $\mathcal{R} = 2K_G$  y por lo tanto se tiene que

$$K_G = -\Delta \ln|\psi|^2. \quad (4.38)$$

### 4.1.3. Ejemplos de superficies

En esta representación un plano cuyo vector normal es  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$  se representa por un espinor constante  $\psi = (a, b)^T$ , donde  $a$  y  $b$  dos números complejos dados por

$$a = -\frac{i}{\sqrt{2}}(n_z + 1), \quad b = \frac{i}{\sqrt{2}}(n_x + i n_y). \quad (4.39)$$

En particular, el plano  $Z = 0$  está dado simplemente por el espinor  $\psi = (-\sqrt{2}i, 0)^T$ .

La esfera unitaria  $x^i x_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , se representa por el espinor cuyas componentes son

$$\psi_1 = -\frac{i\sqrt{2}}{|z|^2 + 1}, \quad \psi_2 = \frac{i\sqrt{2}z}{|z|^2 + 1}, \quad (4.40)$$

donde la variable compleja  $z$  está definida por  $z = X + iY$  y  $(X, Y)$  son las coordenadas estereográficas definidas por la proyección desde el polo sur, dadas por

$$X = \frac{x^1}{1 + x^3}, \quad Y = \frac{x^2}{1 + x^3}. \quad (4.41)$$

#### 4.1.4. Representación espinorial de la energía de doblamiento

Una característica interesante de esta representación espinorial es que la energía de Canham-Helfrich asume una forma notablemente simple [10, 40]

$$H_{CH} = \frac{1}{2} \int dA K^2 = 4i \int dz \wedge d\bar{z} \mathcal{V}^2, \quad (4.42)$$

depende sólo del potencial y se anula para una superficie mínima.

La energía de Willmore, que es invariante conforme, en esta representación toma la forma [105]

$$H_W = \frac{1}{2} \int dA (C_1 - C_2)^2 = 4i \int dz \wedge d\bar{z} \frac{|\mathcal{A}|^2}{|\psi|^4}, \quad (4.43)$$

que involucra el módulo del Wronskiano  $\mathcal{A}$ .

## 4.2. Construcción del tensor de esfuerzos

Igual que antes, se está interesado en examinar las propiedades variacionales de varios funcionales energía físicamente relevantes de la geometría de la superficie dentro de esta representación espinorial. Este puede ser el área, la energía de doblamiento o algún otro invariante geométrico. Tales invariantes en general están dados por alguna densidad escalar,  $\mathcal{H}$ , construida con el espinor y el potencial real  $\mathcal{V}$ , integrada sobre la superficie<sup>3</sup>

$$H = i \int dz \wedge d\bar{z} \mathcal{H}(\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_2, \bar{\psi}_2, \mathcal{V}). \quad (4.44)$$

$\mathcal{H}$  también puede incluir derivadas. Las derivadas de  $\psi$ , si aparecen, se pueden expresar en términos de  $\psi$  mismo y de derivadas de  $\ln|\psi|^2$ ,  $\mathcal{V}$ , y  $\mathcal{A}$ . Si se involucran derivadas de mayor orden no sencillo en esta representación identificar combinaciones escalares de las variables que aparecen en el argumento de  $\mathcal{H}$ ; sin embargo esto se facilita, tomando en cuenta las propiedades de transformación de las densidades  $\psi$ ,  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{A}$  dada por la ecuaciones (4.13) y (4.22), para formar productos con peso cero.

Para calcular la variación de este funcional se empleará un marco espinorial análogo al principio variacional para superficies parametrizadas en términos de la métrica inducida y la curvatura extrínseca introducido en el capítulo anterior siguiendo la referencia [37]. La manera aparentemente obvia de realizar el principio variacional resulta estar llena de dificultades técnicas: si se tratan a los espinores y al potencial como variables fundamentales, la relación que conecta sus variaciones con la de las funciones de encajamiento de la superficie es no local; tal como la métrica y la curvatura extrínseca no son variables independientes, el espinor y el potencial también están constreñidos (por la ecuación tipo Dirac). Realizando ingenuamente la variación del potencial aparentemente implica que los únicos puntos críticos de la energía de doblamiento son las superficies mínimas, conclusión manifiestamente incorrecta. Teniendo en cuenta lo anterior, hay dos conjuntos de constricciones que necesitar ser implementadas cuando  $H$  se varia con respecto a estas variables: la ecuación tipo Dirac (4.1) implica que las variaciones del espinor y del potencial no son independientes; también se debe especificar cómo reconstruir la superficie en términos

<sup>3</sup>Es conveniente usar una densidad escalar  $\mathcal{H}$ , es lugar de un escalar  $H$ ; los dos están relacionados por  $\mathcal{H} = \frac{1}{2}|\psi|^4 H$ .



del espinor. Estas constricciones se implementan en el principio variacional introduciendo un conjunto de multiplicadores de Lagrange. Así, se construye el siguiente funcional:

$$H_c = H + i \int dz \wedge d\bar{z} \lambda^\dagger \mathcal{D}\psi + i \int dz \wedge d\bar{z} \lambda^T \mathcal{D}\xi \\ + i \int dz \wedge d\bar{z} \mathbf{f}^z \cdot (\mathbf{e}_z - \partial_z \mathbf{X}) + i \int dz \wedge d\bar{z} \mathbf{f}^{\bar{z}} \cdot (\mathbf{e}_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} \mathbf{X}), \quad (4.45)$$

donde  $\mathcal{D}$  está definido por la ecuación (4.2) y  $\mathbf{e}_z$  por la ecuación (4.10). Los multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  y  $\mathbf{f}^z$  implementan respectivamente la ecuación tipo Dirac y la identificación de los vectores tangentes<sup>4</sup>. Con esto, ahora es legítimo tratar a  $\mathbf{X}$ ,  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  y a  $\mathcal{V}$  como variables independientes. El multiplicador  $\lambda$  es un espinor de 2 componentes definido por  $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)^T$ <sup>5</sup>. Los multiplicadores  $\mathbf{f}^z$  constituyen un vector en  $\mathbb{E}^3$  definido por  $\mathbf{f}^z = (f^1, f^2, f^3)^T$ . Estos multiplicadores  $\mathbf{f}^z$ , como se verá más adelante, se identifican con el tensor de esfuerzos en la superficie.

En componentes, el funcional  $H_c$  asume la forma<sup>6</sup>

$$H_c = H + i \int dz \wedge d\bar{z} \bar{\lambda}^1 (\partial_z \psi_2 + \mathcal{V} \psi_1) + i \int dz \wedge d\bar{z} \bar{\lambda}^2 (\partial_{\bar{z}} \psi_1 - \mathcal{V} \psi_2) + c.c. \\ + i \int dz \wedge d\bar{z} \left( \frac{f^1}{2} (\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2) + i \frac{f^2}{2} (\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2) + f^3 \psi_1 \bar{\psi}_2 - \mathbf{f}^z \cdot \partial_z \mathbf{X} \right) + c.c.. \quad (4.46)$$

Comenzando con la variación de las funciones de encajamiento  $\mathbf{X}$ , después de una integración por partes para agrupar las derivadas de  $\mathbf{f}^z$  y  $\mathbf{f}^{\bar{z}}$  en una divergencia, se encuentra

$$\delta_{\mathbf{X}} H_c = i \int dz \wedge d\bar{z} (\partial_z \mathbf{f}^z \cdot \delta \mathbf{X} - \partial_z (\mathbf{f}^z \cdot \delta \mathbf{X})) + c.c.. \quad (4.47)$$

Entonces, la derivada de Euler-Lagrange con respecto a  $\mathbf{X}$ ,  $\varepsilon_{\mathbf{X}} \equiv \delta H_c / \delta \mathbf{X}$  está dada por

$$\varepsilon_{\mathbf{X}} = \partial_z \mathbf{f}^z + \partial_{\bar{z}} \mathbf{f}^{\bar{z}}. \quad (4.48)$$

Los puntos críticos de  $H_c$  satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange,  $\varepsilon_{\mathbf{X}} = 0$ , cuyas soluciones se describen en términos del tensor de esfuerzos conservado con valor en los complejos,  $\mathbf{f}^z$ <sup>7</sup>. Aún falta construir explícitamente  $\mathbf{f}^z$ . Esto involucrará resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange para la variables  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  y  $\mathcal{V}$ .

Variando  $H_C$  con respecto al potencial  $\mathcal{V}$  da

$$\delta_{\mathcal{V}} H_C = i \int dz \wedge d\bar{z} \left( \frac{\delta L}{\delta \mathcal{V}} + \bar{\lambda}^1 \psi_1 + \lambda^1 \bar{\psi}_1 - \bar{\lambda}^2 \psi_2 - \lambda^2 \bar{\psi}_2 \right) \delta \mathcal{V}; \quad (4.49)$$

cuya ecuación de Euler-Lagrange correspondiente es

$$\varepsilon_{\mathcal{V}} = \lambda^\dagger \sigma_3 \psi + \lambda^T \sigma_3 \bar{\psi} + \frac{\delta L}{\delta \mathcal{V}} = 0. \quad (4.50)$$

Aquí  $\sigma_3$  es la matriz de Pauli con 1 y  $-1$  en la diagonal. Como  $\mathcal{V}$  es real, esta ecuación también es real. El espinor  $\lambda$  satisface una ecuación algebraica lineal e inhomogénea en un espacio vectorial complejo bidimensional. Una solución de esta ecuación está dada por

$$\lambda_i = -\frac{1}{2|\psi|^2} \frac{\delta L}{\delta \mathcal{V}} \sigma_3 \psi. \quad (4.51)$$

<sup>4</sup>Tal como están definidos, tanto  $\lambda$  como  $\mathbf{f}^z$  son densidades.

<sup>5</sup>El hecho que la ecuación tipo Dirac (4.4) es el complejo conjugado de (4.1) se refleja en el hecho que los multiplicadores que implementan estas condiciones también son complejos conjugados uno del otro. En adición,  $\mathbf{f}^{\bar{z}} = \mathbf{f}^z$ .

<sup>6</sup>c.c. representa la expresión compleja conjugada.

<sup>7</sup>Con el tensor de esfuerzos densitizado la diferenciación covariante se reemplaza por la diferenciación parcial.

Sin embargo, esta solución no es única. La ecuación (4.50) se puede reescribir en la forma  $Re(\lambda^\dagger \sigma_3 \psi) = -\delta L / \delta \mathcal{V}$ . Cualquier espinor  $\lambda$  cuya proyección en  $\sigma_3 \psi$  es imaginaria es evidentemente solución de la ecuación homogénea  $Re(\lambda^\dagger \sigma_3 \psi) = 0$ . Esta ecuación tiene dos soluciones. La primera es de la forma

$$\lambda_h^r = ir \sigma_3 \psi, \quad (4.52)$$

donde  $r$  es una función arbitraria con valores reales. Esto es debido a que  $\lambda_h^r \dagger \sigma_3 \psi = -i|\psi|^2 r$  es manifiestamente imaginario. La segunda solución, que involucra al espinor  $\xi$ , está dada por

$$\lambda_h^c = \bar{c} \sigma_3 \xi, \quad (4.53)$$

donde  $c$  es una función arbitraria con valores complejos. Esta solución satisface  $\lambda_h^\dagger \sigma_3 \psi = 0$  debido a la ortogonalidad de  $\psi$  y  $\xi$ .

Entonces la solución completa  $\lambda = \lambda_i + \lambda_h$  está dada por

$$\lambda = \left( -\frac{1}{2|\psi|^2} \frac{\delta L}{\delta \mathcal{V}} + ir \right) \sigma_3 \psi + \bar{c} \sigma_3 \xi, \quad (4.54)$$

cuyas componentes son

$$\lambda^1 = \left( -\frac{1}{2|\psi|^2} \frac{\delta L}{\delta \mathcal{V}} + ir \right) \psi_1 - \bar{c} \bar{\psi}_2, \quad \lambda^2 = \left( \frac{1}{2|\psi|^2} \frac{\delta L}{\delta \mathcal{V}} - ir \right) \psi_2 - \bar{c} \bar{\psi}_1. \quad (4.55)$$

Esta solución posee 3 grados de libertad por punto: uno para  $r$  y dos para  $c$ . Para justificar esta cuenta, nótese que en términos de las variables reales, la solución de la ecuación (4.50) describe un hiperplano tridimensional en un espacio vectorial tetradimensional equipado con producto interno (no-degenerado) con signatura  $(+, +, -, -)$ . Mas adelante se mostrará que esta ambigüedad reflejada en la funciones  $r$  y  $c$  es una libertad de norma asociada con la parametrización.

Introduciendo la cantidades  $f^+ = f^1 + if^2$  y  $f^- = f^1 - if^2$ . Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el espinor  $\psi$  están dada por<sup>8</sup>

$$\varepsilon_{\psi_1} = -\psi_1 f^- + \bar{\psi}_2 f^3 + T^1 = 0, \quad (4.56a)$$

$$\varepsilon_{\psi_2} = \psi_2 f^+ + \bar{\psi}_1 f^3 + T^2 = 0, \quad (4.56b)$$

donde

$$T^1 = \frac{\delta L}{\delta \psi_1} - \partial_{\bar{z}} \bar{\lambda}^2 + \bar{\lambda}^1 \mathcal{V}, \quad T^2 = \frac{\delta L}{\delta \psi_2} - \partial_z \bar{\lambda}^1 - \bar{\lambda}^2 \mathcal{V}. \quad (4.57)$$

junto con sus complejos conjugados.

Para facilitar la resolución de este conjunto de ecuaciones para  $\mathbf{f}^z$  primero se expresan las componentes Cartesianas  $f^+$ ,  $f^-$  y  $f^3$  en términos de sus contrapartes geoméricamente más relevantes con respecto a la base de los vectores tangentes adaptados a la superficie  $\{\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\bar{z}}, \mathbf{n}\}$ . Esta descomposición de  $\mathbf{f}^z$  está dada por

$$\sqrt{g} \mathbf{f}^z = i(\mathbf{f}^z \cdot \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z + \mathbf{f}^z \cdot \mathbf{e}_{\bar{z}} \mathbf{e}_{\bar{z}}) + \sqrt{g} \mathbf{f}^z \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}. \quad (4.58)$$

Las tres proyecciones puede expresarse en términos de las componentes Cartesianas,  $f^+$ ,  $f^-$ ,  $f^3$ , como sigue

$$f_z^z = \mathbf{f}^z \cdot \mathbf{e}_z = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_2^2 f^+ - \psi_1^2 f^-) + \psi_1 \bar{\psi}_2 f^3, \quad (4.59a)$$

$$f_{\bar{z}}^z = \mathbf{f}^z \cdot \mathbf{e}_{\bar{z}} = -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_1^2 f^+ - \psi_2^2 f^-) + \bar{\psi}_1 \psi_2 f^3, \quad (4.59b)$$

$$f^z = \mathbf{f}^z \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{|\psi|^2} (\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 f^+ + \psi_1 \psi_2 f^- + (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) f^3); \quad (4.59c)$$

<sup>8</sup>Las componentes del complejo conjugado del espinor,  $\bar{\psi}_1$  y  $\bar{\psi}_2$ , se varían independientemente de  $\psi_1$  y  $\psi_2$ .

estas tres ecuaciones se puede invertir en favor de  $f^+$ ,  $f^-$  y  $f^3$  para obtener

$$f^+ = \frac{2}{|\psi|^4} (\psi_2^2 f_z^z - \psi_1^2 f_{\bar{z}}^z + |\psi|^2 \psi_1 \psi_2 f^z), \quad (4.60a)$$

$$f^- = \frac{2}{|\psi|^4} (-\bar{\psi}_1^2 f_z^z + \bar{\psi}_2^2 f_{\bar{z}}^z + |\psi|^2 \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 f^z), \quad (4.60b)$$

$$f^3 = \frac{2}{|\psi|^4} (\bar{\psi}_1 \psi_2 f_z^z + \psi_1 \bar{\psi}_2 f_{\bar{z}}^z) + \frac{1}{|\psi|^2} (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) f^z. \quad (4.60c)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de EL (4.56a) y (4.56b) se obtiene

$$\varepsilon_{\psi_1} = \frac{2}{|\psi|^2} \bar{\psi}_1 f_z^z - \bar{\psi}_2 f^z + T^1 = 0, \quad (4.61)$$

$$\varepsilon_{\bar{\psi}_2} = \frac{2}{|\psi|^2} \psi_2 f_z^z + \psi_1 f^z + \bar{T}^2 = 0. \quad (4.62)$$

En particular, las ecuaciones de EL para  $\psi_1$  y  $\bar{\psi}_2$  (y los complejos conjugados de estas ecuaciones) involucran  $f_z^z$  y  $f^z$  (y sus complejos conjugados) pero no  $f_{\bar{z}}^z$  (o su complejo conjugado). La proyección tangencial  $f_{\bar{z}}^z$  permanece sin determinar a este nivel. A nivel algebraico, esto está relacionado con la identidad  $\mathbf{e}_z = i\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}$ .

La combinación  $\psi_1 \varepsilon_{\psi_1} + \bar{\psi}_2 \varepsilon_{\bar{\psi}_2}$  determina  $f_z^z$ :

$$\psi_1 \varepsilon_{\psi_1} + \bar{\psi}_2 \varepsilon_{\bar{\psi}_2} = 2f_z^z + \psi_1 T^1 + \bar{\psi}_2 \bar{T}^2 = 0. \quad (4.63)$$

Usando las expresiones (4.57) para  $T^1$  y  $T^2$  en esta ecuación y resolviendo para  $f_z^z$  se encuentra

$$f_z^z = -\frac{1}{2} \left( \psi_1 \frac{\delta L}{\delta \psi_1} + \bar{\psi}_2 \frac{\delta L}{\delta \bar{\psi}_2} \right) + \frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} (\lambda^1 \bar{\psi}_2 + \bar{\lambda}^2 \psi_1) - i\mathcal{V} \text{Im}(\lambda^\dagger \psi). \quad (4.64)$$

Ahora, sustituyendo en esta última ecuación las expresiones de  $\lambda^1$  y  $\lambda^2$  dadas en (4.55) se obtiene finalmente

$$f_z^z = -\frac{1}{2} \left( \psi_1 \frac{\delta L}{\delta \psi_1} + \bar{\psi}_2 \frac{\delta L}{\delta \bar{\psi}_2} \right) + i\psi_1 \bar{\psi}_2 \partial_{\bar{z}} r - \frac{1}{2} (\bar{\psi}_2^2 \partial_{\bar{z}} \bar{c} + \psi_1^2 \partial_z c). \quad (4.65)$$

Similarmente  $f^z$  se determina por la combinación  $\bar{\psi}_1 \varepsilon_{\bar{\psi}_2} - \psi_2 \varepsilon_{\psi_1}$ :

$$\bar{\psi}_1 \varepsilon_{\bar{\psi}_2} - \psi_2 \varepsilon_{\psi_1} = |\psi|^2 f^z + \bar{\psi}_1 \bar{T}^2 - \psi_2 T^1 = 0. \quad (4.66)$$

La substitución de las expresiones de  $T^1$  y  $T^2$  en esta ecuación y resolviendo para  $f^z$  da

$$f^z = \frac{1}{|\psi|^2} \left( \psi_2 \frac{\delta L}{\delta \psi_1} - \bar{\psi}_1 \frac{\delta L}{\delta \bar{\psi}_2} + \partial_{\bar{z}} (\lambda^1 \bar{\psi}_1 - \bar{\lambda}^2 \psi_2) \right) \quad (4.67)$$

$$+ \frac{1}{|\psi|^2} (\bar{\lambda}^2 \partial_{\bar{z}} \psi_2 - \lambda^1 \partial_z \bar{\psi}_1 + \mathcal{V}(\bar{\lambda}^1 \psi_2 + \lambda^2 \bar{\psi}_1)). \quad (4.68)$$

Usando una vez mas las expresiones (4.55) de  $\lambda^1$  y  $\lambda^2$  junto con las expresiones (4.29) y (4.31) para las derivadas de  $\psi_1$  y  $\psi_2$  se obtiene

$$f^z = -\partial_{\bar{z}} \left( \frac{1}{2|\psi|^2} \frac{\delta L}{\delta \mathcal{V}} \right) + \frac{1}{|\psi|^2} \left( \psi_2 \frac{\delta L}{\delta \psi_1} - \bar{\psi}_1 \frac{\delta L}{\delta \bar{\psi}_2} \right) \\ + \frac{i}{|\psi|^2} (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) \partial_{\bar{z}} r + \frac{1}{|\psi|^2} (\psi_1 \psi_2 \partial_{\bar{z}} c - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \partial_z \bar{c}). \quad (4.69)$$

La única ambigüedad en las componentes  $f^z_z$  y  $f^z$  del tensor de esfuerzos es consecuencia de la solución de la ecuación (4.50).

Como se mencionó anteriormente, la ecuaciones de Euler-Lagrange para el espinor y el potencial no determinan las componentes fuera de la diagonal  $f^z_z$  de la parte tangencial de tensor de esfuerzos. A primera vista, esto parece sugerir que faltó algo. Sin embargo, debe recordarse, que al representar la superficie en forma isotérmica, necesariamente se pierde la invariancia bajo reparametrizaciones. Esta característica se manifiesta en la proyecciones tangenciales de la ley de conservación del tensor de esfuerzos. Mientras que estas ecuaciones se satisfacen idénticamente para cualquier marco completamente invariante bajo reparametrizaciones, en este sólo proporcionan las ecuaciones diferenciales que determinan la componentes faltantes de la parte tangencial del tensor de esfuerzos.

Tomando las proyecciones de la ley de conservación  $\varepsilon_{\mathbf{X}} = 0$ , donde  $\varepsilon_{\mathbf{X}}$  está dado por la ecuación (4.48), en los vectores tangentes proporciona la ecuación

$$\varepsilon_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{e}_z = \partial_{\bar{z}} f^z_z + |\psi|^4 \partial_z \left( \frac{1}{|\psi|^4} f^z_z \right) + \mathcal{A} f^z + |\psi|^2 \mathcal{V} f^{\bar{z}} = 0, \quad (4.70)$$

junto con su expresión compleja conjugada. Hasta este punto, no ha sido necesario especificar explícitamente la forma funcional de  $\mathcal{H}$ . Para resolver la ecuación (4.70), se supondrá por simplicidad que  $\mathcal{H}$  depende sólo de  $|\psi|^2$  y  $\mathcal{V}$ , sin diferenciar. Estas ecuaciones diferenciales se pueden resolver para las componentes faltantes del tensor de esfuerzos. La solución más general está dada por

$$f^z_{\bar{z}} = \frac{\bar{\mathcal{A}}}{2|\psi|^2} \frac{\delta L}{\delta \mathcal{V}} + i\bar{\psi}_1 \psi_2 \partial_{\bar{z}} r + \frac{1}{2} (\psi_2^2 \partial_z c + \bar{\psi}_1^2 \partial_z \bar{c}) + \bar{h}(\bar{z}), \quad (4.71)$$

donde  $h(z)$  es una función arbitraria.

La proyección en el vector normal proporciona la ecuación de forma

$$\varepsilon_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{n} = \partial_z f^z + \partial_{\bar{z}} f^{\bar{z}} - \frac{K}{2} (f^z_z + f^{\bar{z}}_{\bar{z}}) - \frac{2}{|\psi|^4} (\mathcal{A} f^z_{\bar{z}} + \bar{\mathcal{A}} f^{\bar{z}}_z) = 0. \quad (4.72)$$

Ahora se está en posición de examinar las diferentes ambigüedades que surgieron en la construcción del tensor de esfuerzos. La primera se origina en la solución de la ecuación de Euler-Lagrange para el potencial.

La contribución del esfuerzos originado en la solución homogénea  $\lambda_h^c$  está dada por

$$\begin{aligned} |\psi|^4 \mathbf{f}_c^z &= \partial_{\bar{z}} c \left( \psi_2^2 \mathbf{e}_z - \psi_1^2 \mathbf{e}_{\bar{z}} + |\psi|^2 \psi_1 \psi_2 \mathbf{n} \right) \\ &+ \partial_z \bar{c} \left( \bar{\psi}_1^2 \mathbf{e}_z - \bar{\psi}_2^2 \mathbf{e}_{\bar{z}} - |\psi|^2 \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \mathbf{n} \right). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Descomponiendo la función compleja  $c$  en sus partes real e imaginaria,  $c = c_x + ic_y$ , es posible expresar esta contribución como la derivada parcial de un vector espacial

$$\mathbf{f}_c^z = i\partial_{\bar{z}} (c_y \hat{\mathbf{x}}_1 + c_x \hat{\mathbf{x}}_2), \quad (4.74)$$

donde se ha empleado el hecho que la base canónica de vectores de  $\mathbb{E}^3$  es constante. Con respecto a la base adaptada a la superficie estos tres vectores están dados por

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{|\psi|^4} \left( (\psi_2^2 - \bar{\psi}_1^2) \mathbf{e}_z + (\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2) \mathbf{e}_{\bar{z}} + |\psi|^2 (\psi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2) \mathbf{n} \right), \quad (4.75a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \frac{i}{|\psi|^4} \left( -(\psi_2^2 + \bar{\psi}_1^2) \mathbf{e}_z + (\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2) \mathbf{e}_{\bar{z}} - |\psi|^2 (\psi_1 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2) \mathbf{n} \right), \quad (4.75b)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_3 = \frac{2}{|\psi|^4} \left( \bar{\psi}_1 \psi_2 \mathbf{e}_z + \psi_1 \bar{\psi}_2 \mathbf{e}_{\bar{z}} + \frac{1}{2} |\psi|^2 (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) \mathbf{n} \right). \quad (4.75c)$$

Similarmente, la contribución al tensor de esfuerzos que se origina en  $\lambda_h^r$  está dada por

$$\mathbf{f}_r^z = i\partial_{\bar{z}}(r\hat{\mathbf{x}}_3), \quad (4.76)$$

de manera que la contribución total al tensor de esfuerzos que surge de la solución homogénea se puede expresar como la derivada parcial de un vector espacial con componentes reales  $\mathbf{V}$ ,

$$\mathbf{f}_h^z = i\partial_{\bar{z}}\mathbf{V}, \quad (4.77)$$

donde  $\mathbf{V}$  está dado por  $\mathbf{V} = (c_y\hat{\mathbf{x}}_1 + c_x\hat{\mathbf{x}}_2 + r\hat{\mathbf{x}}_3)$ . Como  $\mathbf{V}$  es real,  $\mathbf{f}_h^z$  tiene divergencia nula:  $\partial_z\mathbf{f}_h^z + \partial_{\bar{z}}\mathbf{f}_h^{\bar{z}} = 0$ . Es un tensor nulo que está automáticamente conservado y no contribuye a la ecuación de forma (4.72). Por lo tanto, como se mencionó antes, es legítimo despreciar esta contribución al tensor de esfuerzos y sólo considerar la parte que surge de la solución inhomogénea  $\lambda_i$ .

A diferencia del tensor de esfuerzos canónico en la descripción parametrizada de una superficie, su contraparte en esta parametrización isotérmica no es única.

La ambigüedad asociada con la función arbitraria  $h(z)$  que aparece en la solución de la ecuación (4.70) dada por (4.71) es de naturaleza mas seria. Contribuye a la ecuación de forma con un término

$$\approx \frac{2}{|\psi|^4} (\mathcal{A}\bar{h}(\bar{z}) + \bar{\mathcal{A}}h(z)). \quad (4.78)$$

Sin embargo, la proyección normal de la derivada de Euler-Lagrange  $\varepsilon_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}$  asociada con cualquier funcional de energía invariante bajo reparametrizaciones debe ser una densidad escalar. Bajo una transformación holomorfa  $z \rightarrow w(z)$  el factor  $\mathcal{A}/|\psi|^4$  se transforma como

$$\frac{\mathcal{A}(z, \bar{z})}{|\psi(z, \bar{z})|^4} \rightarrow \frac{w'(z)}{\bar{w}'(\bar{z})} \frac{\mathcal{A}(w, \bar{w})}{|\psi(w, \bar{w})|^4}. \quad (4.79)$$

Para formar un escalar  $h(z)$  se debe transformar como  $h(z) \rightarrow w'(z)/\bar{w}'(\bar{z})h(w)$ , lo cual no es una función holomorfa. La consistencia requiere entonces que  $h$  se anule.

En resumen, para un funcional que depende sólo de  $|\psi|$  y  $\mathcal{V}$ , los componentes del tensor de esfuerzos asume la forma simple

$$f_z^z = -\frac{1}{2} \left( \psi_1 \frac{\partial L}{\partial \psi_1} + \bar{\psi}_2 \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_2} \right), \quad (4.80a)$$

$$f_{\bar{z}}^z = \frac{\bar{\mathcal{A}}}{2|\psi|^2} \frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}}, \quad (4.80b)$$

$$f^z = -\partial_{\bar{z}} \left( \frac{1}{2|\psi|^2} \frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}} \right). \quad (4.80c)$$

Para un funcional que depende de derivadas de  $\psi$  no mayores que la primera, la componentes relevantes del tensor de esfuerzos son

$$f_z^z = -\frac{1}{2} \left( \psi_1 \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_1} - \partial_z \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_z \psi_1)} \right) \right) + \bar{\psi}_2 \left( \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_2} - \partial_z \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_z \bar{\psi}_2)} \right) \right) \right), \quad (4.81a)$$

$$f_{\bar{z}}^z = \frac{\bar{\mathcal{A}}}{2|\psi|^2} \frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}} + \mathcal{V} \left( \psi_2 \frac{\partial L}{\partial (\partial_z \psi_1)} - \bar{\psi}_1 \frac{\partial L}{\partial (\partial_z \bar{\psi}_2)} \right), \quad (4.81b)$$

$$f^z = -\partial_{\bar{z}} \left( \frac{1}{2|\psi|^2} \frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}} \right) + \frac{\psi_2}{|\psi|^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_1} - \partial_z \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_z \psi_1)} \right) \right) - \frac{\bar{\psi}_1}{|\psi|^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_2} - \partial_z \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_z \bar{\psi}_2)} \right) \right). \quad (4.81c)$$

Para funcionales que involucran derivadas de orden superior, las correspondientes derivadas funcionales contendrán términos extra que surgen de integraciones por partes.

A continuación se discute la invariancia Euclidiana de la energía y la identificación de  $\mathbf{f}^z$  como el tensor de esfuerzos dentro de esta representación.

### 4.3. Esfuerzos y torcas conservados

La corriente asociada con la variación de la funciones de encajamiento, denotada por  $Q_{\mathbf{X}}$ , está dada por el término de frontera en la variación del funcional  $H_c$  con respecto a  $\mathbf{X}$

$$Q_{\mathbf{X}} = -i \int dz \wedge d\bar{z} (\partial_z(\mathbf{f}^z \cdot \delta\mathbf{X}) + \partial_{\bar{z}}(\mathbf{f}^{\bar{z}} \cdot \delta\mathbf{X})) . \quad (4.82)$$

La corriente asociada con las variaciones del campo espinorial es

$$Q_{\psi_1} = i \int dz \wedge d\bar{z} \partial_{\bar{z}}(\bar{\lambda}^2 \delta\psi_1), \quad Q_{\psi_2} = i \int dz \wedge d\bar{z} \partial_z(\bar{\lambda}^1 \delta\psi_2), \quad (4.83)$$

junto con sus expresiones complejas conjugadas.

El potencial no da origen a alguna corriente. Entonces la variación completa de  $H_c$  está dada por

$$\delta H_c = i \int dz \wedge d\bar{z} \varepsilon \cdot \delta\mathbf{X} + Q, \quad (4.84)$$

donde la corriente total es  $Q = Q_{\mathbf{X}} + (Q_{\psi_1} + Q_{\psi_2} + c.c.)$ . Cuando se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange,  $\delta H_c = Q$ .

Igual que en el capítulo anterior, se considera una región de la superficie limitada por un conjunto de fronteras cerradas. Para determinar el cambio en la energía bajo la translación de una de sus fronteras, denotada por  $\Gamma$ , se considera la deformación  $\delta\mathbf{X}$  que se reduce a la translación  $\delta\mathbf{a}$  de esta curva y que no modifica las demás fronteras. El campo espinorial se transforma trivialmente bajo traslaciones. Usando el teorema de Gauss, el cambio en la energía se puede expresar como

$$\delta H_c = -\delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}, \quad (4.85)$$

donde el vector  $\mathbf{F}$  está definido por la integral de línea

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} ds l_z \mathbf{f}^z + c.c.. \quad (4.86)$$

donde  $ds$  es el elemento de línea a lo largo de  $\Gamma$ ,  $l_z$  y su c.c. son las componentes del covector asociado con el vector del marco de Darboux adaptado a  $\Gamma$  y que es la normal exterior tangente a la superficie. La ecuación (4.85) identifica al vector  $\mathbf{F}$  como la fuerza que actúa en la frontera  $\Gamma$  [73]. También, la cantidad  $l_z \mathbf{f}^z$  representa fuerza local que actúa sobre el elemento de línea  $ds$ , de manera que la corriente conservada asociada con la invariancia traslacional  $\mathbf{f}^z$  se identifica como el tensor de esfuerzos en la superficie.

La invariancia rotacional es un poco más complicada debido a que las propiedades de transformación del campo espinorial no son triviales. Usando la identidad (4.19) para el vector normal  $\mathbf{n}$  en términos del campo espinorial, es sencillo ver que la variación del campo espinorial induce una variación en  $\mathbf{n}$  dada por

$$\delta\mathbf{n} = \frac{2}{|\psi|^4} ((\bar{\psi}_1 \delta\psi_2 - \psi_2 \delta\bar{\psi}_1)\mathbf{e}_z + (\psi_1 \delta\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_2 \delta\psi_1)\mathbf{e}_{\bar{z}}). \quad (4.87)$$

Usando las expresiones (4.55) de  $\lambda$  y (4.87) de  $\delta\mathbf{n}$  en las expresiones de las corrientes presentadas arriba, se obtiene que  $Q$  para este caso está dado por

$$Q = -i \int dz \wedge d\bar{z} \partial_z (\mathbf{f}^z \cdot \delta\mathbf{X} + \mathbf{c}^z \cdot \delta\mathbf{n}) + c.c. , \quad (4.88)$$

donde  $\mathbf{c}^z = \frac{1}{2|\psi|^2} \frac{\delta L}{\delta \bar{\mathcal{V}}} \mathbf{e}_{\bar{z}}$ .

Considerando ahora una rotación infinitesimal por un ángulo constante  $\delta\boldsymbol{\omega}$ , las funciones se transforman como  $\delta\mathbf{X} = \delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}$ ; el vector normal también rota,  $\delta\mathbf{n} = \delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}$ . Entonces el cambio en la energía es

$$\delta H_c = -i \delta\boldsymbol{\omega} \cdot \int dz \wedge d\bar{z} \partial_z \mathbf{m}^z + c.c. , \quad (4.89)$$

donde  $\mathbf{m}^z = \mathbf{X} \times \mathbf{f}^z + 1/2|\psi|^{-2} \delta L / \delta \mathcal{V} \mathbf{n} \times \mathbf{e}_{\bar{z}}$ . Usando un argumento idéntico al usado en la identificación de la fuerza sobre la frontera  $\Gamma$ , se identifica el cambio en la energía asociado con la rotación de esta curva

$$\delta H_c = -\delta\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M} , \quad (4.90)$$

donde

$$\mathbf{M} = \int_{\Gamma} ds l_z \mathbf{m}^z + c.c. . \quad (4.91)$$

Entonces el vector  $\mathbf{M}$  se identifica como la torca total que actúa en esta frontera.  $\mathbf{m}^z$  y su c.c. se identifican como las componentes del tensor de torcas en la superficie [74]. Usando la identidad  $\mathbf{e}_z = i\mathbf{e}_{\bar{z}} \times \mathbf{n}$ , la componente del tensor de torcas se puede reescribir de la forma

$$\mathbf{m}^z = \mathbf{X} \times \mathbf{f}^z - \frac{i}{2|\psi|^2} \frac{\delta L}{\delta \bar{\mathcal{V}}} \mathbf{e}_{\bar{z}} . \quad (4.92)$$

### 4.3.1. Ejemplos de tensores de esfuerzos

Para una densidad Hamiltoniana  $\mathcal{H}_n = 1/2|\psi|^4 K^n$  se obtiene que

$$\frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \psi_i} = (1 - \frac{n}{2}) |\psi|^2 K^n \bar{\psi}_i \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \bar{\mathcal{V}}} = 2n |\psi|^2 K^{n-1} . \quad (4.93)$$

De las ecuaciones (4.80) se obtiene que las componentes del tensor de esfuerzos están dadas por:

$$f_n^z{}_z = \frac{(n-2)}{4} |\psi|^4 K^n , \quad (4.94a)$$

$$f_n^z{}_{\bar{z}} = n \bar{\mathcal{A}} K^{n-1} , \quad (4.94b)$$

$$f_n^z{}_{\bar{z}} = -n \partial_{\bar{z}} K^{n-1} . \quad (4.94c)$$

Es simple confirmar que estas expresiones reproducen el resultado de la ecuación 3.29 en esta parametrización particular, la cual recordando es

$$\mathbf{f}_n^a = K^{n-1} (nK^{ab} - Kg^{ab}) \mathbf{e}_b - n \nabla^a K^{n-1} \mathbf{n} , \quad (4.95)$$

También es sencillo mostrar que la contribución que corresponde a la componente normal de la derivada de Euler-Lagrange (4.72) está dada por

$$\mathcal{E}_n = -n \Delta K^{n-1} + K^{n-1} (2nK_G - (n-1)K^2) . \quad (4.96)$$

que es precisamente la ecuación (3.30) obtenida en el capítulo anterior.

**n=0: Funcional de área**

Para un término de área, correspondiente a  $\mathcal{H}_0 = 1/2|\psi|^4$ , sólo la diagonal de la parte tangencial del tensor de esfuerzos no se anula:

$$f_z^z = -\frac{1}{2}|\psi|^4, \quad f_{\bar{z}}^z = 0, \quad f^z = 0. \quad (4.97)$$

La derivada de Euler-Lagrange está dada por  $\mathcal{E}_0 = K$ ; los puntos críticos del área son superficies mínimas que satisfacen  $K = 0$  o  $\mathcal{V} = 0$ .

**n=1: Funcional de curvatura media**

Para una energía proporcional a la curvatura media, correspondiente a  $\mathcal{H}_1 = 1/2|\psi|^4 K$ , las componentes del tensor de esfuerzo tangencial son

$$f_z^z = -\frac{1}{4}|\psi|^4 K, \quad f_{\bar{z}}^z = \bar{\mathcal{A}}, \quad (4.98)$$

y el esfuerzo normal se anula,  $f^z = 0$ . La derivada de de Euler-Lagrange  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{R}$ ; los puntos críticos son las superficies desarrollables con curvatura Gaussiana nula.

**n=2: energía de doblamiento o de Canham-Helfrich  $\mathcal{H}_B = 4\mathcal{V}^2$** 

Las componentes del tensor de esfuerzos son

$$f_z^z = 0, \quad f_{\bar{z}}^z = \bar{\mathcal{A}}K, \quad f^z = -\partial_{\bar{z}}K, \quad (4.99)$$

y la derivada de Euler-Lagrange está dada por

$$\mathcal{E}_B = -\Delta K + K \left( 2K_G - \frac{1}{2}K^2 \right). \quad (4.100)$$

El hecho que  $f_z^z$  se anula en este caso es una manifestación de la invariancia escala.

El Hamiltoniano de Canham-Helfrich difiere de la energía de Willmore  $H_W$ , definida por la ecuación (4.43) por una energía topológica proporcional al invariante de Gauss-Bonnet  $H_{GB} = \int dA K_G$ . Por lo tanto las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes coinciden; de hecho, los esfuerzos locales correspondientes también coinciden. Es instructivo demostrar esto explícitamente usando la forma funcional de  $H_W$  en términos de  $|\mathcal{A}|$ .

Las derivadas parciales requeridas son

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_1} = -\frac{4}{|\psi|^4} \left( \bar{\mathcal{A}}\partial_z \bar{\psi}_2 + 2\frac{|\mathcal{A}|^2}{|\psi|^2} \bar{\psi}_1 \right), \quad \frac{\partial L}{\partial (\partial_z \psi_1)} = \frac{4}{|\psi|^4} \bar{\mathcal{A}}\bar{\psi}_2, \quad (4.101a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_2} = \frac{4}{|\psi|^4} \left( \bar{\mathcal{A}}\partial_z \psi_1 - 2\frac{|\mathcal{A}|^2}{|\psi|^2} \psi_2 \right), \quad \frac{\partial L}{\partial (\partial_z \bar{\psi}_2)} = -\frac{4}{|\psi|^4} \bar{\mathcal{A}}\psi_1. \quad (4.101b)$$

Usando la condición de Codazzi-Mainardi dada en la ecuación (4.35b) se tiene que las derivadas funcionales correspondientes son

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta \psi_1} = -\bar{\psi}_2 \partial_{\bar{z}} K, \quad \frac{\delta \tilde{L}}{\delta \bar{\psi}_2} = \psi_1 \partial_z K, \quad \frac{\delta \tilde{L}}{\delta \mathcal{V}} = 0. \quad (4.102)$$

Sustituyendo estas identidades en la expresiones (4.65) y (4.69) para las componentes del tensor de esfuerzos reproduce el mismo tensor obtenido para la energía de Canham-Helfrich en la ecuación (4.99). Los dos tensores de esfuerzos no necesariamente tenían que coincidir: podrían haber diferido por un tensor nulo.



## 4.4. Conclusiones

Se desarrolló un marco teórico para principios variacionales, adaptado a la representación de la geometría de una superficie en términos de un campo espinorial que interactúa por medio de un potencial, para describir las propiedades de equilibrio de la superficie. Con esto se está en posición de aprovechar las técnicas del análisis complejo para examinar varios problemas de naturaleza inherentemente no lineal en la física de la materia condensada suave. Incluso si se está interesado en superficies mínimas descritas por la representación de WE con  $\mathcal{V} = 0$ , se necesita introducir un potencial en la variación.

## Capítulo 5

# Esfuerzos en membranas fluidas con puntos en contacto

Las membranas biológicas –el retículo endoplásmico, el aparato de Golgi, la membrana interior de las mitocondrias– presentan geometrías complejas; modelarlas de forma realista requiere refinaciones de la descripción simple del modelo Canham-Helfrich [84]. Esto puede involucrar la introducción de fuerzas locales externas que constriñen la geometría de la membrana [85]. Estas fuerzas pueden operar mediante filamentos jalando o empujando la membrana; pueden originarse también debido al confinamiento dentro de los compartimentos celulares. Tales constricciones localizadas difieren de una manera fundamental de las constricciones más familiares de naturaleza global–área y volumen encerrado fijos–asociados con el modelado de la membrana plásmica.

La energía de doblamiento de una superficie es invariante bajo transformaciones conformes del espacio Euclidiano tridimensional. Entonces la energía es invariante no sólo bajo transformaciones Euclidianas del espacio ambiente tridimensional, como se esperaría; también es invariante bajo deformaciones que preservan ángulos en la superficie, y en particular bajo escalamiento e inversión en esferas [86, 89, 105]. En particular, dado un cierto estado de equilibrio, cualquier superficie obtenida de su inversión en alguna esfera será también un estado de equilibrio. Ninguno de los dos estados se asemeja al otro necesariamente. Esto se debe a que el proceso de inversión, no sólo involucra distorsión geométrica, también puede involucrar un cambio de topología si la superficie involucra regiones que son distantes del centro de inversión. El cambio de topología asociado con la compactificación de estas regiones a un punto, en general, produce singularidades geométricas en la superficie invertida [17, 18]. Como se verá en este capítulo, estas singularidades son de interés físico porque indican la presencia de fuentes de esfuerzos externos locales.

### 5.1. Inversión de superficies

Primeramente se presenta una revisión de las propiedades de transformación de la geometría de una superficie bajo inversión en una esfera. Una introducción elemental pero útil de inversión en esferas se puede encontrar en el capítulo final del libro de Gray [34].

Una superficie  $\Sigma$  parametrizada por coordenadas locales  $u^1$  y  $u^2$ , se describe por el vector de posición en el espacio Euclidiano tridimensional  $\mathbf{X}(u^1, u^2)$ . Uno está interesado en describir la superficie  $\tilde{\Sigma}$  obtenida por la inversión de  $\Sigma$  en una esfera de radio  $R$  centrada en un punto, el centro de inversión, que se elige que coincida con el origen<sup>1</sup>. Usando una tilde para denotar las cantidades geométricas relacionadas con

---

<sup>1</sup>Esto siempre se puede hacer trasladando la superficie apropiadamente. Por ejemplo si la superficie está centrada en

$\tilde{\Sigma}$ , la inversión en esta esfera induce el mapeo  $\Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$  definido por

$$\mathbf{X} \rightarrow \tilde{\mathbf{X}} = \frac{R^2}{|\mathbf{X}|^2} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \neq \mathbf{0}. \quad (5.1)$$

Los puntos  $\mathbf{X}$  y  $\tilde{\mathbf{X}}$  satisfacen  $|\mathbf{X}||\tilde{\mathbf{X}}| = R^2$ . La inversión en cualquier esfera satisface  $\mathcal{I}^2 = \mathbb{1}$ , donde  $\mathbb{1}$  es el mapeo identidad en  $\mathbb{E}^3$ . Es por lo tanto una involución.

La superficie  $\tilde{\mathbf{X}}$  se parametrizará usando las mismas coordenadas que se usan en  $\mathbf{X}$ . Sin embargo, en general, esta parametrización no será adaptada a la superficie inversa.

La geometría de la superficie tiene propiedades intrínsecas, caracterizadas por la métrica  $g_{ab}$ , así como extrínsecas, caracterizadas por el tensor de curvatura extrínseca  $K_{ab}$ . En lo siguiente se determina cómo se transforman estos dos tensores bajo inversión.

### 5.1.1. Geometría intrínseca

Para determinar la métrica en  $\tilde{\Sigma}$  se examina cómo se transforman bajo inversión los dos vectores tangentes a  $\Sigma$  adaptados a la parametrización por  $u^1$  y  $u^2$ , definida por  $\mathbf{e}_a = \partial_a \mathbf{X}$ ,  $a = 1, 2$ . El mapeo de los vectores tangentes es

$$\mathbf{e}_a \rightarrow \tilde{\mathbf{e}}_a = \left( \frac{R}{|\mathbf{X}|} \right)^2 \mathbf{R} \mathbf{e}_a, \quad (5.2)$$

donde la transformación lineal  $\mathbf{R}$ , dada por

$$\mathbf{R} = \mathbb{1} - 2\hat{\mathbf{X}} \otimes \hat{\mathbf{X}}, \quad (5.3)$$

representa una reflexión de los puntos de la superficie en el plano que pasa por el origen y que es ortogonal a  $\mathbf{X}$ .  $\hat{\mathbf{X}}$  denota el vector unitario correspondiente.  $\mathbf{R}$  tiene 2 vectores propios con valor propio  $+1$  que corresponde a vectores que están sobre el plano ortogonal, y un vector propio con valor propio  $-1$  que corresponde a  $\mathbf{X}$  mismo. Entonces  $\det \mathbf{R} = -1$ . En particular, como  $\tilde{\mathbf{e}}_a$  involucra una reflexión de  $\mathbf{e}_a$ , la paridad de la base adaptada  $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{n}\}$  se revierte bajo inversión. Si  $\mathbf{n}$  es la normal a  $\Sigma$ , en general no será la normal a  $\tilde{\Sigma}$ , i.e.  $\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_a \neq 0$ .

Las componentes de la métrica inducida en  $\Sigma$  están dados por  $g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b$ . Bajo inversión, se transforman como

$$g_{ab} \rightarrow \tilde{g}_{ab} = \frac{R^4}{|\mathbf{X}|^4} g_{ab}. \quad (5.4)$$

Entonces la inversión induce un mapeo conforme de la superficie, con el factor conforme  $(R/|\mathbf{X}|)^4$ . El determinante  $g$  de la métrica se transforma multiplicativamente,

$$g \rightarrow \tilde{g} = \frac{R^8}{|\mathbf{X}|^8} g. \quad (5.5)$$

Usando la ecuación (5.5), se encuentra que el área de la superficie invertida está dada por

$$\tilde{A} = R^4 \int \frac{dA}{|\mathbf{X}|^4}. \quad (5.6)$$

---

el origen y se desea invertir en la esfera centrada en  $\mathbf{x}_0$ , basta con considerar las funciones de encajamiento trasladadas  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} - \mathbf{x}_0$

Entonces, la energía de una superficie debida a la tensión superficial, asociada con una película de jabón por ejemplo, se transforma en la energía de una superficie cargada uniformemente que interactúa con una carga puntal localizada en el origen, a través de un potencial central  $1/|\mathbf{X}|^4$ , escalada por un factor  $R^4$ .

El operador de Laplace-Beltrami construido con  $g_{ab}$ , definido por  $\Delta = g^{ab} \nabla_a \nabla_b$  bajo inversión  $\Delta$  se transforma como

$$\tilde{\Delta} = \left( \frac{|\mathbf{X}|}{R^2} \right)^2 (|\mathbf{X}|^2 \Delta). \quad (5.7)$$

Salvo un factor de escalamiento, este operador es invariante bajo inversión.

La función de distancia inversa está dada por  $|\tilde{\mathbf{X}}|^2 = R^4/|\mathbf{X}|^2$ . Su gradiente satisface la siguiente identidad

$$\nabla_a |\tilde{\mathbf{X}}|^2 = - \left( \frac{R}{|\mathbf{X}|} \right)^4 \nabla_a |\mathbf{X}|^2. \quad (5.8)$$

Entonces los puntos críticos no nulos de  $|\mathbf{X}|^2$  se mapean a puntos críticos de  $|\tilde{\mathbf{X}}|^2$ ; la superficie invertida hereda los puntos críticos de la superficie original. Los puntos al infinito se mapean a puntos críticos en el origen. No se generan otros puntos críticos. Los puntos críticos no nulos se determinan de la siguiente ecuación

$$2\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_a = 0. \quad (5.9)$$

Así, los puntos de la superficie que corresponden al vector de posición ortogonal a la superficie son puntos críticos de la función de distancia. La localización de estos puntos en la superficie depende de la posición relativa del centro de inversión.

El Hessiano se transforma de una manera un poco más complicada. El Hessiano definido en  $\Sigma$  de la función inversa de distancia está dado por

$$\nabla_a \nabla_b |\tilde{\mathbf{X}}|^2 = - \left( \frac{R}{|\mathbf{X}|} \right)^4 \left( \nabla_a \nabla_b |\mathbf{X}|^2 - \frac{2}{|\mathbf{X}|^2} \nabla_a |\mathbf{X}|^2 \nabla_b |\mathbf{X}|^2 \right). \quad (5.10)$$

El Hessiano en  $\tilde{\Sigma}$  de un escalar  $f$  se relaciona con su contraparte en  $\Sigma$  por  $(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b - \nabla_a \nabla_b) f = -(\tilde{\Gamma}_{ab}^c - \Gamma_{ab}^c) \nabla_c f$  donde el tensor de la diferencia de los símbolos de Christoffel está dado por la identidad de Palatini,

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c - \Gamma_{ab}^c = -\frac{1}{|\mathbf{X}|^2} (\delta_a^c \nabla_b |\mathbf{X}|^2 + \delta_b^c \nabla_a |\mathbf{X}|^2 - \nabla^c |\mathbf{X}|^2 g_{ab}). \quad (5.11)$$

Entonces, cuando se trata de la función distancia, usando las ecuaciones (5.8), (5.10) y (5.11) se obtiene

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b |\tilde{\mathbf{X}}|^2 = - \left( \frac{R}{|\mathbf{X}|} \right)^4 \left( \nabla_a \nabla_b |\mathbf{X}|^2 - \frac{1}{|\mathbf{X}|^2} \nabla_c |\mathbf{X}|^2 \nabla^c |\mathbf{X}|^2 g_{ab} \right). \quad (5.12)$$

En un punto crítico no nulo,  $\nabla_a |\mathbf{X}|^2 = 0$  con  $\mathbf{X} \neq 0$ , se reduce a  $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b |\tilde{\mathbf{X}}|^2 = -(R/|\mathbf{X}|)^4 \nabla_a \nabla_b |\mathbf{X}|^2$ . También, de la contracción (con  $\tilde{g}^{ab}$ ) de esta expresión se obtiene que el operador de Laplace-Beltrami en  $\Sigma$  actuando sobre la función inversa de distancia da

$$\tilde{\Delta} |\tilde{\mathbf{X}}|^2 = -\Delta |\mathbf{X}|^2 + 2 \nabla_a |\mathbf{X}|^2 \nabla^a |\mathbf{X}|^2. \quad (5.13)$$

Este mismo resultado se obtiene aplicando directamente  $|\tilde{\mathbf{X}}|^2$  el resultado de la expresión (5.7) de  $\tilde{\Delta}$ .

### 5.1.2. Geometría extrínseca

El vector unitario normal a la superficie se transforma bajo inversión como

$$\mathbf{n} \rightarrow \tilde{\mathbf{n}} = -R\mathbf{n}. \quad (5.14)$$

Esto se sigue de las ecuaciones (5.2) y de la identidad para vectores espaciales  $(R\mathbf{v}) \times (R\mathbf{w}) = -R(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ . Entonces, si  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} = 0$ , entonces también  $\tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{X}}$  es nulo debido a que  $R$  es auto-adjunto y al hecho que  $R\tilde{\mathbf{X}} = -\hat{\mathbf{X}}$ . La normal exterior a una superficie que encierra al centro de inversión se mapea a la normal exterior de la superficie inversa. Por ejemplo, considerando la esfera unitaria centrada en el origen con  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{X}}$ , se tiene que la inversión de su normal exterior es también la normal exterior, i.e.  $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{r}$ .

El volumen contenido por una superficie cerrada  $\Sigma$  está dado por la expresión

$$V = \frac{1}{3} \int dA \mathbf{X} \cdot \mathbf{n}. \quad (5.15)$$

Entonces el volumen contenido por  $\tilde{\Sigma}$  está dado por

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \frac{1}{3} \int \tilde{dA} \tilde{\mathbf{X}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = \frac{1}{3} \int dA \frac{R^6}{|\mathbf{X}|^6} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{3} \int dV \operatorname{div} \cdot \left( \left( \frac{R}{|\mathbf{x}|} \right)^6 \mathbf{x} \right) = - \int dV \frac{R^6}{|\mathbf{x}|^6}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Aquí  $dV$  denota el elemento de volumen en  $\mathbb{E}^3$  y  $\mathbf{x}$  el vector de posición de un punto dentro de una superficie cerrada con respecto al centro de inversión. El signo menos aparece debido a que el volumen es una pseudo 3-forma, la cual cambia de signo bajo un cambio de orientación. En la última línea, se usó la identidad

$$\operatorname{div} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^6} \right) = -\frac{3}{|\mathbf{x}|^6}. \quad (5.17)$$

La definición del tensor de curvatura extrínseca  $K_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \partial_b \mathbf{n}$  implica que

$$\tilde{K}_{ab} = -(R/|\mathbf{X}|)^2 R \mathbf{e}_a \cdot \partial_b (R\mathbf{n}) = -(R/|\mathbf{X}|)^2 (K_{ab} + \mathbf{e}_a \cdot R((\partial_b R)\mathbf{n})). \quad (5.18)$$

Para evaluar  $\partial_a R$  nótese que  $\partial_a \hat{\mathbf{X}} = P \mathbf{e}_a / |\mathbf{X}|$ , donde  $P = \mathbb{1} - \hat{\mathbf{X}} \otimes \hat{\mathbf{X}}$  es la proyección en el plano ortogonal a  $\hat{\mathbf{X}}$ . Con estos se tiene que

$$\partial_a R = -2/|\mathbf{X}| \left( \hat{\mathbf{X}} \otimes P \mathbf{e}_a + (P \mathbf{e}_a) \otimes \hat{\mathbf{X}} \right). \quad (5.19)$$

Entonces (usando  $RP = P$ ), se tiene que

$$R((\partial_b R)\mathbf{n}) = -2 \left( \mathbf{n} \times (P \mathbf{e}_b \times \hat{\mathbf{X}}) \right) / |\mathbf{X}|. \quad (5.20)$$

Tomando la proyección en  $\mathbf{e}_a$ , se obtiene una expresión simple proporcional a  $g_{ab}$ :

$$\mathbf{e}_a \cdot R((\partial_b R)\mathbf{n}) = -2/|\mathbf{X}|^2 (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n}) g_{ab}. \quad (5.21)$$

Sustituyendo la ecuación (5.21) en la ecuación(5.18) se obtiene que bajo inversión,  $K_{ab}$  se transforma como

$$K_{ab} \rightarrow \tilde{K}_{ab} = -\frac{R^2}{|\mathbf{X}|^2} \left( K_{ab} - \frac{2}{|\mathbf{X}|^2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} g_{ab} \right). \quad (5.22)$$

El tensor de curvatura extrínseca inverso involucra sólo los dos tensores,  $g_{ab}$  y  $K_{ab}$ . De esto se sigue que el operador de forma inverso definido por  $\tilde{K}^a_b = \tilde{g}^{ac} \tilde{K}_{cb}$ , se transforma como

$$K^a_b \rightarrow \tilde{K}^a_b = - \left( \frac{|\mathbf{X}|}{R} \right)^2 \left( K^a_b - \frac{2}{|\mathbf{X}|^2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} \delta^a_b \right). \quad (5.23)$$

Es una combinación lineal de  $K^a_b$  y  $\delta^a_b$ . En consecuencia, las curvas principales se mapean a curvas principales [34]: Sean  $C_1$  y  $C_2$  las curvaturas principales y  $\mathbf{V}_1 = V_1^a \mathbf{e}_a$ ,  $\mathbf{V}_2 = V_2^a \mathbf{e}_a$  las correspondientes direcciones, tal que  $K^a_b V_i^b = C_i V_i^a$ . Entonces  $\tilde{K}^a_b V_i^b = \tilde{C}_i V_i^a$ , donde

$$\tilde{C}_i = - \frac{|\mathbf{X}|^2}{R^2} \left( C_i - \frac{2}{|\mathbf{X}|^2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} \right). \quad (5.24)$$

Debido a esta relación (5.24), la diferencia de las dos curvaturas principales se preserva bajo inversión, salvo un factor de escalamiento proporcional a la función de distancia

$$\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 = - \frac{|\mathbf{X}|^2}{R^2} (C_1 - C_2); \quad (5.25)$$

no depende explícitamente de  $\mathbf{n}$ . El signo menos implica que, después de la inversión, la dirección principal de curvatura máxima se mapea a la dirección principal de curvatura mínima y viceversa. Por ejemplo, si  $C_2 > C_1$  tal que  $\mathbf{V}_2$  es la dirección principal de curvatura máxima, entonces  $\tilde{C}_1 > \tilde{C}_2$ , y por lo tanto  $\tilde{\mathbf{V}}_2$  corresponderá a la dirección principal con curvatura mínima en la superficie inversa. Cairns y Sharpe presentaron una discusión útil del comportamiento de la curvatura bajo inversión en la referencia [9]. Si  $C_1 = C_2$ , entonces  $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2$ , de forma que puntos umbílicos se mapean a puntos umbílicos.

Los dos invariantes simétricos fundamentales del operador de forma  $K^a_b$  son su traza (el doble de la curvatura media)  $K = C_1 + C_2$  y su determinante (la curvatura Gaussiana)  $\mathcal{K}_G = C_1 C_2$ . Usando la ecuación (5.24) las contrapartes transformadas en  $\tilde{\Sigma}$  se determinan fácilmente:

$$\tilde{K} = - \frac{|\mathbf{X}|^2}{R^2} \left( K - \frac{4}{|\mathbf{X}|^2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} \right), \quad (5.26)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_G = \frac{|\mathbf{X}|^4}{R^4} \left( \mathcal{K}_G - \frac{2}{|\mathbf{X}|^2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} K + \frac{4}{|\mathbf{X}|^4} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n})^2 \right). \quad (5.27)$$

En particular, en la contraparte invertida de una superficie mínima (con  $K = 0$ ), se tiene que  $\tilde{K} = 4/R^2 \mathbf{X} \cdot \mathbf{n}$ . Equivalentemente, una superficie que satisface

$$K = \frac{4}{|\mathbf{X}|^2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} \quad (5.28)$$

es la inversión de alguna superficie mínima.

Usando la condición de integrabilidad de Gauss-Codazzi

$$\mathcal{R}_{abcd} = K_{ac} K_{bd} - K_{ad} K_{bc}, \quad (5.29)$$

para determinar las propiedades de transformación del tensor de Riemann, la ecuación (5.22) implica el tensor de Riemann transformado  $\tilde{\mathcal{R}}_{abcd}$  está dado por

$$\tilde{\mathcal{R}}_{abcd} = \left( \frac{R}{|\mathbf{X}|} \right)^4 \left[ \mathcal{R}_{abcd} - 2 \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{X}|^2} (K_{ac} g_{bd} + g_{ac} K_{bd} - K_{ad} g_{bc} - g_{ad} K_{bc}) + 4 \left( \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{X}|^2} \right)^2 (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) \right]. \quad (5.30)$$

Se observa que hay una mezcla no trivial de la geometría intrínseca con la extrínseca. De este resultado se sigue que la curvatura escalar se transforma como

$$\tilde{\mathcal{R}} = \frac{1}{R^4} (|\mathbf{X}|^4 \mathcal{R} - 4(\mathbf{X} \cdot \mathbf{n})|\mathbf{X}|^2 K + 8(\mathbf{X} \cdot \mathbf{n})^2). \quad (5.31)$$

### 5.1.3. Energía de doblamiento

Combinando las ecuaciones (5.6) y (5.25) se identifica inmediatamente la energía de Willmore de una superficie bidimensional, invariante bajo inversión [105],

$$H_W[\mathbf{X}] = \frac{1}{2} \int dA (C_1 - C_2)^2. \quad (5.32)$$

Evidentemente  $H_W$  también es invariante bajo transformaciones conformes inducidas del espacio tridimensional. Como se mencionó antes, salvo la contribución proporcional al invariante de Gauss-Bonnet

$$H_{GB}[\mathbf{X}] = \int dA K_G, \quad (5.33)$$

coincide con la energía de doblamiento de Canham-Helfrich [10, 40]

$$H_B[\mathbf{X}] = \frac{1}{2} \int dA K^2, \quad (5.34)$$

La energía de Willmore implica que la energía de doblamiento de una superficie inversa está dada por

$$\tilde{H}_B = H_B + 2(\tilde{H}_{GB} - H_{GB}). \quad (5.35)$$

Entonces la energía de doblamiento de una superficie obtenida por la inversión en una esfera de una superficie mínima es proporcional a la diferencia de dos contribuciones topológicas y es por lo tanto constante. En general, a diferencia de la energía de doblamiento de una superficie mínima, no será cero. Esto es debido a que la topología puede cambiar bajo inversión si la superficie es infinita o si el punto de inversión está sobre la superficie.

Como las dos energías  $H_W$  y  $H_B$  difieren por una contribución topológica, sus puntos críticos satisfacen la misma ecuación de “forma” de Euler-Lagrange

$$\varepsilon_{\perp} = -\nabla^2 K + \frac{1}{2} K(K^2 - 2K_{ab}K^{ab}) = 0. \quad (5.36)$$

Esta ecuación hereda la invariancia conforme de la energía de Willmore. Así, las superficies que satisfacen la ecuación (5.28) también son soluciones. Mas aun, la inversión de cualquier superficie que satisface la ecuación (5.36) es también una solución.

## 5.2. Geometría de los $k$ -noides

En esta sección se resumen algunos aspectos relevantes de la geometría de los  $k$ -noides, una familia de superficies mínimas con simetría discreta de orden  $k$ , introducida por Jorge y Meeks en los ochentas [45]. Estas superficies poseen  $k$  cuellos con crecimiento exponencial y proporcionan una generalización natural del catenoide. [45].

Los datos de Weierstrass-Enneper están dados por las dos funciones complejas [45]

$$f(z) = \frac{1}{\rho_k (z^k - 1)^2}, \quad g(z) = z^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.37)$$

$g(z)$  es holomorfa, es decir, está definida en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$ .  $f(z)$  es meromorfa, es decir, está definida en el plano complejo  $\mathbb{C}$  excepto en un conjunto de puntos aislados, que para el caso de los  $k$ -noides, corresponden a las  $k$  raíces de la unidad, de manera que su dominio es  $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} | z^k - 1 = 0\}$ . La geometría de  $k$ -noide se escalará por un factor  $\rho_k$  (que depende de  $k$ ) determinado por la ecuación (5.51) como se discute más adelante.

La construcción de las funciones de encajamiento a partir de los datos de Weierstrass involucra la evaluación de las tres integrales  $I_1$ ,  $I_2$  y  $I_3$ , definidas por

$$I_1 = \frac{1}{2} \int dz f \quad I_2 = \frac{1}{2} \int dz f g^2, \quad I_3 = \int dz f g. \quad (5.38)$$

En términos de estas integrales las funciones de encajamiento están dadas por  $\mathbf{X} = \text{Re} \{I_1 - I_2, i(I_1 + I_2), I_3\} + \mathbf{X}_0$ .

Empezando con  $I_1(z)$ , una manera de evaluarla es introduciendo la función auxiliar

$$B(z, \mu) = \frac{1}{2\rho_k} \int dz \frac{1}{z^k - \mu}. \quad (5.39)$$

En términos de  $B$ ,  $I_1(z) = \partial B(z, \mu) / \partial \mu |_{\mu=1}$ . Su evaluación involucra la expansión del integrando como una suma de términos usando el método de fracciones parciales. Expandiendo el denominador en términos de las raíces de la unidad,

$$z^k - 1 = \prod_{j=0}^{k-1} (z - r_j), \quad (5.40)$$

donde  $r_j = e^{\frac{2\pi i j}{k}}$ ; un cálculo simple da

$$\frac{1}{z^k - 1} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{r_j}{z - r_j}. \quad (5.41)$$

Usando la identidad (5.41), se obtiene

$$B(z, \mu) = \frac{\mu^{\frac{1-k}{k}}}{2k\rho_k} \sum_{j=0}^{k-1} r_j \log \left( \frac{z}{\mu^{1/k}} - r_j \right), \quad (5.42)$$

de donde sigue que

$$I_1(z) = -\frac{1}{2k\rho_k} \left( \frac{z}{z^k - 1} + \frac{k-1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} r_j \log(z - r_j) \right). \quad (5.43)$$

Para evaluar  $I_2$ , se realiza una integración por partes para expresarla en la forma

$$I_2 = \frac{1}{2k\rho_k} \left( -\frac{z^{k-1}}{z^k - 1} + (k-1) \int dz \frac{z^{k-2}}{z^k - 1} \right). \quad (5.44)$$



Expandiendo el argumento del logaritmo en términos de las raíces de la unidad (5.40), el término segundo puede ser escrito como

$$\int dz \frac{z^{k-2}}{z^k - 1} = \frac{1}{k} \int \frac{1}{z} d \log (z^k - 1) \stackrel{(5.40)}{=} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{r_j} \log \left( \frac{z - r_j}{z} \right). \quad (5.45)$$

Teniendo en cuenta que  $r_j^{-1} = \bar{r}_j$  y así como que la suma de las raíces es cero, se tiene que el término proporcional a  $\log z^{-1}$  se anula. Por lo tanto

$$I_2(z) = \frac{1}{2k \rho_k} \left( -\frac{z^{k-1}}{z^k - 1} + \frac{k-1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \bar{r}_j \log (z - r_j) \right). \quad (5.46)$$

La última integral  $I_3$  es elemental si se hace el simple cambio de variable  $z \rightarrow z^k$ :

$$I_3(z) = -\frac{1}{k \rho_k (z^k - 1)}. \quad (5.47)$$

Usando estos resultados se tiene que las funciones de encajamiento son

$$X(z, \bar{z}) - X_0 = \operatorname{Re} (I_1 - I_2) = \frac{1}{k \rho_k} \operatorname{Re} \left( \frac{z}{2} \frac{z^{k-2} - 1}{z^k - 1} - \frac{k-1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \cos \frac{2\pi j}{k} \log (z - r_j) \right), \quad (5.48a)$$

$$Y(z, \bar{z}) - Y_0 = \operatorname{Re} (i(I_1 + I_2)) = \frac{1}{k \rho_k} \operatorname{Re} \left( \frac{z}{2i} \frac{z^{k-2} + 1}{z^k - 1} + \frac{k-1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \sin \frac{2\pi j}{k} \log (z - r_j) \right), \quad (5.48b)$$

$$Z(z, \bar{z}) - Z_0 = \operatorname{Re} I_3 = -\frac{1}{k \rho_k} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{z^k - 1} \right), \quad (5.48c)$$

Sea  $z$  una coordenada compleja parametrizada por las coordenadas polares  $\rho$  y  $\phi$ ,  $z = \rho e^{i\phi}$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$  y  $\rho \in (0, \infty)$ . Se elige  $\mathbf{X}_0 = \{0, 0, -1/(2k r_0)\}$ , de forma que el  $k$ -noide está centrado en el origen. Con esto, su vector de encajamiento está dado entonces por

$$X = \frac{1}{2k \rho_k} \left( \frac{(\rho^{2k-1} + \rho) \cos \phi - (\rho^{k+1} + \rho^{k-1}) \cos (k-1) \phi}{P_k(\rho, \phi)} - \frac{k-1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \cos \frac{2\pi j}{k} \log P_1 \left( \rho, \phi - \frac{2\pi j}{k} \right) \right), \quad (5.49a)$$

$$Y = \frac{1}{2k \rho_k} \left( -\frac{(\rho^{2k-1} + \rho) \sin \phi + (\rho^{k+1} + \rho^{k-1}) \sin (k-1) \phi}{P_k(\rho, \phi)} + \frac{k-1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \sin \frac{2\pi j}{k} \log P_1 \left( \rho, \phi - \frac{2\pi j}{k} \right) \right), \quad (5.49b)$$

$$Z = \frac{1}{2k \rho_k} \frac{1 - \rho^{2k}}{P_k(\rho, \phi)}. \quad (5.49c)$$

Aquí  $P_k(\rho, \phi)$  es la función definida por

$$P_k(\rho, \phi) = \rho^{2k} - 2 \rho^k \cos k\phi + 1; \quad (5.50)$$

$\rho_k$  es una constante introducida para normalizar el  $k$ -noide. La geometría de los  $k$ -noides es única salvo movimientos Euclidianos y escalamiento. La geometría para cada  $k$ , está caracterizada por una única

escala de longitud: la distancia mínima desde el origen a su curva perfil en  $\rho = 1$ . De las ecuaciones (5.49) se encuentra el factor  $\rho_k$  que hace esta escala de longitud es unitaria es

$$\begin{aligned} \rho_k^2 &= \frac{(k-1)^2}{k^4} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} \cos \frac{2\pi}{k}(j-l) \log \left| \sin \frac{\pi}{k} \left( \frac{1}{2} - l \right) \right| \log \left| \sin \frac{\pi}{k} \left( \frac{1}{2} - j \right) \right| \\ &- \frac{k-1}{k^3} \sum_{l=0}^{k-1} \cos \frac{\pi}{k}(1-2l) \log \left| \sin \frac{\pi}{k} \left( \frac{1}{2} - l \right) \right| + \frac{1}{4k^2}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Los puntos críticos de la función de distancia de la curva perfil ocurren en  $\phi_j = \pi(1+2j)/k$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . Esta curva perfil es por lo tanto tangente al círculo unitario en estos puntos críticos.

En particular, el catenoide está descrito por las funciones

$$\mathbf{X}(\rho, \phi) = \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\rho^2 + 2\rho \cos \phi + 1}{\rho^2 - 2\rho \cos \phi + 1} \right|, -\frac{2\rho(\rho^2 + 1) \sin \phi}{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\phi + 1}, \frac{1 - \rho^4}{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\phi + 1} \right), \quad (5.52)$$

El catenoide con  $k = 2$  y el trinoide con  $k = 3$  se ilustran en la figura 5.1.

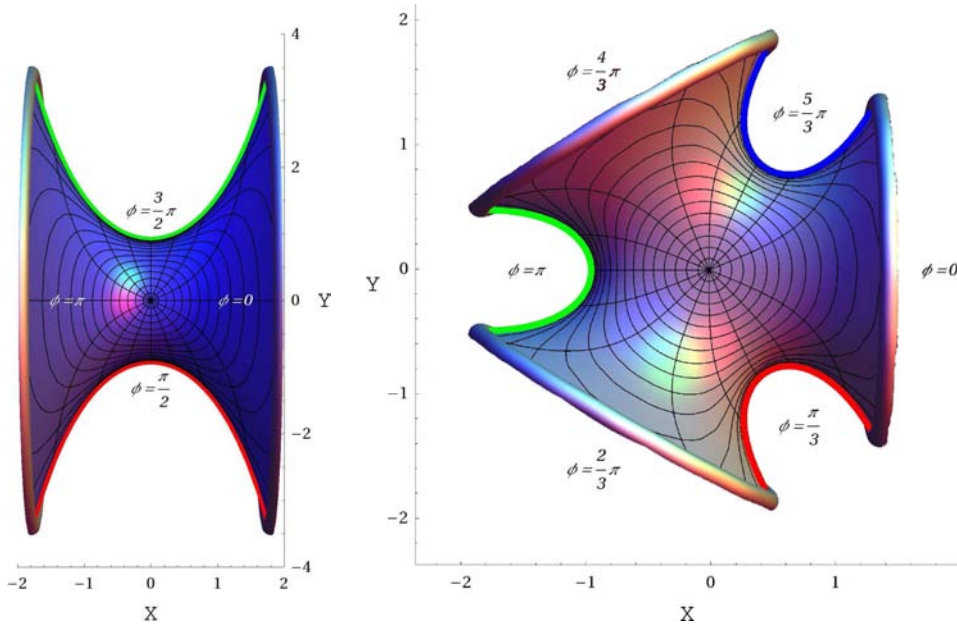


Figura 5.1: Catenoide y trinoide truncados. Las líneas radiales son curvas  $\rho$ -paramétricas, i.e. con  $\phi$  constante y  $\rho$  variable. De manera similar, las curvas cerradas que rodean el origen son curvas  $\phi$ -paramétricas. Las curvas coloreadas describen la intersección de la superficie con el plano que define la simetría especular.

La simetría axial del catenoide, está reemplazada en el  $k$ -noide por la simetría especular discreta  $\rho \rightarrow 1/\rho$ , dada por una reflexión en el plano “principal”,  $Z = 0$ , el cual bisecta los  $k$  cuellos catenoidales.<sup>2</sup> El origen  $\rho = 0$  de plano complejo se mapea al punto plano de la parte superior del  $k$ -noide (ver Fig. 5.1). Los valores de  $\rho$  en el intervalo  $[0, 1)$  describen la mitad superior ( $Z > 0$ ) del  $k$ -noide; el intervalo  $(1, \infty)$

<sup>2</sup>Nótese que la simetría axial del catenoide no es manifiesta en esta parametrización

describe la mitad inferior que resulta de la reflexión de la mitad superior. El punto al infinito se mapea al punto plano de esta mitad. La intersección de la superficie con el plano  $Z = 0$  dada por  $\rho = 1$  define un conjunto de curvas (su perfil), indicado en la Fig. 5.1) (en rojo y verde en el catenoide, y en rojo, verde, y azul en el trinoide). Estas curvas serán útiles para visualizar la geometría inversa.

La vecindad del polo que corresponde a la raíz  $r_j = e^{\frac{2\pi ij}{k}}$  se mapea al cuello con crecimiento exponencial dirigido a lo largo del vector  $\hat{\mathbf{E}}_\rho(-2\pi j/k)$ , donde

$$\hat{\mathbf{E}}_\rho(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi, 0) . \quad (5.53)$$

Nótese que el ángulo polar  $\phi$  en el plano complejo es también el ángulo polar en la superficie. Sin embargo, su orientación está revertida (ver Fig. 5.1).

El  $k$ -noide es invariante bajo la transformación discreta  $\phi \rightarrow \phi + 2\pi j/k$  para cada  $j = 1, \dots, k$ . La simetría discreta de orden 2 del catenoide con respecto a sus cuellos (reflexión en el plano  $X = 0$ ) está reemplazada por la simetría dihedral de orden  $k$  (que consiste en la rotación alrededor del eje  $Z$  así como por las reflexiones en los planos que pasan a través de este eje).

Se tiene entonces que los  $k$ -noides poseen a  $\mathbb{D}_k \times \mathbb{Z}_2$  como su grupo de isometría.

La expansión de gradientes pequeños de la geometría del  $k$ -noide en la vecindad de sus puntos planos  $\rho = 0$  y  $\rho = \infty$  para  $k > 2$  confirma que la geometría coincide con una silla de mono de orden  $k$ . Introduciendo las coordenadas polares  $\varrho$  y  $\Phi$  en el plano principal,  $\varrho^2 = X^2 + Y^2$  y  $\tan \Phi = Y/X$ , se encuentra que si  $\rho \ll 1$ , entonces  $\varrho \approx \rho/2\rho_k$  y  $\Phi = -\phi$ . El primer término relevante en la expansión de la función de altura  $Z$  en términos de  $\rho$  es de orden  $k$

$$Z(\varrho, \Phi) = \frac{1}{2\rho_k k} (1 + 2\text{Re } z^k) = \frac{1}{2\rho_k k} (1 + (2\rho_k \varrho)^k \cos(k\Phi)) , \quad (5.54)$$

que corresponde a una silla de mono de orden  $k$ . Esta aproximación para el catenoide y el trinoide en la vecindad de  $\rho = 0$  se ilustra en la Fig. 5.2

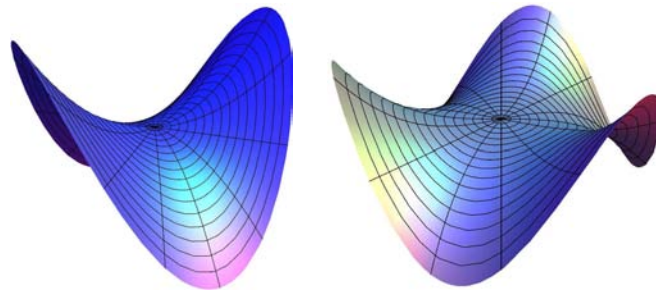


Figura 5.2: En la vecindad de  $\rho = 0$  el catenoide y el trinoide son sillas de mono de orden 2 y 3 respectivamente

Los vectores tangentes adaptados a esta parametrización  $\mathbf{e}_\rho$  y  $\mathbf{e}_\phi$  están dados por

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{2}{|z|} \text{Re}(z\mathbf{e}_z), \quad \mathbf{e}_\phi = -2\text{Im}(z\mathbf{e}_z) . \quad (5.55)$$

Usando los datos de Weierstrass (5.37), estos dos vectores se pueden expresar en las coordenadas polares como

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{1}{2\rho_k P_k^2(\rho, \phi)} (Q_c^+, Q_s^+, 2\rho^{k-1} ((\rho^{2k} + 1) \cos k\phi - 2\rho^k)), \quad (5.56a)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\rho}{2\rho_k P_k^2(\rho, \phi)} (Q_s^-, Q_c^-, 2\rho^{k-1} (\rho^{2k} - 1) \sin k\phi), \quad (5.56b)$$

donde  $Q_s^\pm$  y  $Q_c^\pm$  son dos funciones definidas por

$$Q_s^\pm = \rho^{2(k-1)} (\rho^2 \mp 1) \sin(2k-1)\phi + 2\rho^k (\pm\rho^{2(k-1)} - 1) \sin(k-1)\phi + (\pm\rho^{2(2k-1)} - 1) \sin \phi, \quad (5.57a)$$

$$Q_c^\pm = \rho^{2(k-1)} (\pm\rho^2 - 1) \cos(2k-1)\phi + 2\rho^k (\rho^{2(k-1)} \mp 1) \cos(k-1)\phi - (\rho^{2(2k-1)} \mp 1) \cos \phi. \quad (5.57b)$$

La normal exterior es

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{1 + \rho^{2(k-1)}} (2\rho^{k-1} \cos(k-1)\phi, 2\rho^{k-1} \sin(k-1)\phi, \rho^{2(k-1)} - 1). \quad (5.58)$$

Los elementos de línea y de área en el  $k$ -noide se determinan usando la fórmula (C.3):

$$ds^2 = \Omega^2(r, \phi) (dr^2 + r^2 d\phi^2), \quad dA = \Omega^2(\rho, \phi) \rho d\rho \wedge d\phi, \quad (5.59)$$

donde el factor conforme  $\Omega(r, \theta)$  está definido por

$$\Omega^2(r, \phi) = \left( \frac{1 + \rho^{2(k-1)}}{2\rho_k P_k(r, \phi)} \right)^2. \quad (5.60)$$

De la ecuación (C.9) se obtiene que las curvaturas principales en el  $k$ -noide son  $C_2 = C = -C_1$  donde

$$C = 4\rho_k (k-1) \frac{\rho^{(k-2)} P_k(\rho, \phi)}{(1 + \rho^{2(k-1)})^2}, \quad (5.61)$$

y de (C.10) se tiene que las correspondientes direcciones principales son

$$\hat{\mathbf{V}}^1 = \frac{1}{\rho \Omega \sqrt{P_k(\rho, \phi)}} \left( \cos\left(\frac{k\phi}{2}\right) (\rho^k - 1) \mathbf{e}_\phi - \sin\left(\frac{k\phi}{2}\right) \rho (\rho^k + 1) \mathbf{e}_\rho \right); \quad (5.62a)$$

$$\hat{\mathbf{V}}^2 = \frac{1}{\rho \Omega \sqrt{P_k(\rho, \phi)}} \left( \sin\left(\frac{k\phi}{2}\right) (\rho^k + 1) \mathbf{e}_\phi + \cos\left(\frac{k\phi}{2}\right) \rho (\rho^k - 1) \mathbf{e}_\rho \right). \quad (5.62b)$$

### 5.2.1. Fuerzas en los $k$ -noides

Usando la expresión (C.12) aquí se evalúan las fuerzas que se oponen a la tensión en un  $k$ -noide tratado como una película de jabón para mantenerlo en equilibrio. De manera análoga a la usada para determinar las funciones de encajamiento, se necesitan evaluar las siguientes tres integrales:

$$H_{1l} = \frac{1}{2} \oint_{\zeta_l} dz f \quad H_{2j} = \frac{1}{2} \oint_{\zeta_l} dz f g^2, \quad H_{3l} = \oint_{\zeta_l} dz f g; \quad (5.63)$$

donde  $\zeta_l$  es cualquier contorno sobre el plano complejo que rodea la  $l$ -ésima raíz de la unidad  $r_l$ , tal que se mapea a un contorno  $\gamma_l$  que encierra al cuello correspondiente. La libertad de elegir  $\zeta_l$  (sólo se necesita calcular el residuo del polo correspondiente  $r_l$ ) se traduce en la libertad de deformar  $\gamma_l$ . El contorno  $\gamma_l$  se recorre en sentido horario con la elección de la base dextrógira  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{l}\}$ ; debido a que la orientación del

ángulo polar  $\phi$  se revierte,  $\zeta_l$  se recorre en sentido antihorario. La fuerza en la frontera  $\gamma_l$  ahora está dada por  $\mathbf{F}_{0l} = \text{Im} \{H_{1l} - H_{2l}, i(H_{1l} + H_{2l}), H_{3l}\}$ .

Definiendo  $w = z/\mu^{\frac{1}{k}}$ , se encuentra que

$$\begin{aligned} H_{1l} &= \frac{1}{2r_0} \partial_\mu \left( \mu^{\frac{1}{k}-1} \oint_{\gamma_l} \frac{dw}{\prod_{j=0}^{k-1} (w - r_j)} \right) \Big|_{\mu=1} = i \frac{\pi}{r_0} \partial_\mu \left( \mu^{\frac{1}{k}-1} \frac{w - r_l}{w^k - 1} \Big|_{w=r_l} \right) \Big|_{\mu=1} \\ &= i \frac{\pi}{r_0} \frac{1}{k} \partial_\mu \mu^{\frac{1}{k}-1} \Big|_{\mu=1} r_l = i \frac{\pi}{r_0} \left( \frac{1-k}{k^2} \right) r_l. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Después de una integración por partes se obtiene

$$\begin{aligned} H_{2l} &= \frac{1}{2r_0} \frac{k-1}{k} \oint_{\gamma_l} dz \frac{z^{k-2}}{z^k - 1} = \frac{1}{2r_0} \frac{k-1}{k^2} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{r_j} \oint_{\gamma_l} dz \left( \frac{1}{z - r_j} - \frac{1}{z} \right) \\ &= i \frac{\pi}{r_0} \left( \frac{k-1}{k^2} \right) \bar{r}_l. \end{aligned} \quad (5.65)$$

El integrando de  $H_{3l}$  se puede expresar como una derivada total, por lo que se anula:

$$H_{3l} = -\frac{1}{kr_0} \oint_{\gamma_l} d \left( \frac{1}{z^k - 1} \right) = 0. \quad (5.66)$$

Combinando estos resultados, se encuentra que  $\mathbf{F}_{0l}$  está dado por

$$\mathbf{F}_{0l} = -\frac{2\pi}{r_0} \frac{k-1}{k^2} (\text{Re } r_l, -\text{Im } r_l, 0). \quad (5.67)$$

Entonces, la fuerza sobre un anillo debido una tensión superficial unitaria en la película de jabón está dirigida hacia el origen a lo largo del vector  $\hat{\mathbf{E}}_\rho (-2\pi j/k)$  (definido en la ecuación (5.53) sobre el plano principal. Su magnitud es  $2\pi(k-1)/(r_0 k^2)$ . Debido a que la suma de las raíces de la unidad se anula, la fuerza total también se anula:  $\sum_{l=0}^{k-1} \mathbf{F}_{0(l)} = \mathbf{0}$ , resultado que es consecuencia de la tercera ley de Newton.

### 5.3. Geometría de los $k$ -noides inversos

La construcción de los estados de equilibrio desinflados de vesículas fluidas con puntos en contacto se realizará mediante la inversión de los  $k$ -noides.

Evidentemente, la inversión en una esfera centrada en el eje  $Z$  preservará la simetría dihedral de orden  $k$ ; de igual manera la inversión en una esfera centrada en el plano  $Z = 0$  preservará la simetría especular (arriba-abajo).

Bajo inversión en una esfera, el  $k$ -noide se compactifica en una geometría desinflada de topología esférica con  $k$  puntos en contacto situados en el origen, los cuales tienen su origen en la compactificación de los finales con crecimiento exponencial. Las superficies obtenidas por la inversión en una esfera centrada en el origen del catenoide y del trinoide se muestran en la Fig. 5.3.

Primero se examinará la geometría local en la vecindad de uno de estos puntos en contacto. Notando que este crecimiento exponencial de los  $k$ -noides implica la existencia de un plano tangente en estos puntos. Para ver esto, se analiza el comportamiento de la superficie inversa en la vecindad del punto que se origina por la inversión de un cuello catenoidal, el cuello dirigido a lo largo del eje  $X$ , descrito por la vecindad del punto ( $\rho = 1, \phi = 0$ ). Es conveniente describir tanto al catenoide como a su contraparte inversa usando la

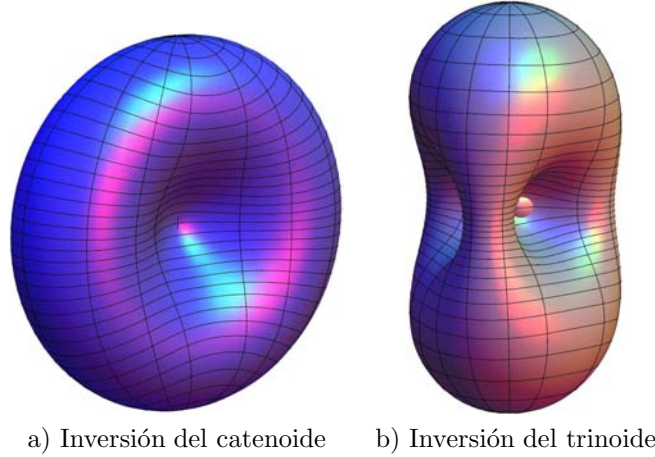


Figura 5.3: Superficies simétricas con dos y tres puntos en contacto

parametrización de Monge en términos de una función de altura sobre el plano  $X = 0$ . Introduciendo las coordenadas polares  $(\varrho, \Phi)$ , en este plano, se encuentra que  $\varrho \approx 1/(\rho - 1) \gg 1$  y  $X(\varrho) \approx \ln(2\varrho)$ , lo cual corrobora que el radio del cuello crece exponencialmente con  $X$ , *i.e.*,  $\varrho \approx 1/2 \exp(X)$ . Para un  $\mathbf{x}_0$  finito, la coordenada radial en la superficie inversa en la vecindad del polo está dada por  $\tilde{\varrho} \approx 1/\varrho \ll 1$ , de forma que la superficie inversa está descrita por

$$\tilde{X} \approx -\tilde{\varrho}^2 \left( \ln \frac{\tilde{\varrho}}{2} + x_0 \right). \quad (5.68)$$

La derivada de esta función de altura es proporcional a  $\tilde{\varrho}$ . Entonces se anula en el polo  $\tilde{\varrho} = 0$ ; entonces la superficie inversa es tangente al plano  $\tilde{X} = 0$  en este punto. No obstante, su segunda derivada, es proporcional a  $\ln \tilde{\varrho}$  de modo que diverge en este polo. Este comportamiento singular está contenido por las curvaturas de la superficie inversa. Usando la ecuación 5.24 se encuentra que

$$\tilde{C}_{1,2} \approx -\frac{2}{R^2} \left( \ln \frac{\tilde{\varrho}}{2} + x_0 \mp \frac{1}{2} \right). \quad (5.69)$$

Aunque las curvaturas divergen logarítmicamente en el polo, su diferencia permanece finita

$$\tilde{C}_2 - \tilde{C}_1 \approx -\frac{2}{R^2}, \quad (5.70)$$

por lo que la energía de Willmore—y en consecuencia la de doblamiento—es bien comportada en este punto.

A continuación se estudia el comportamiento bajo inversión de la energía de doblamiento de los  $k$ -noides.

Usando la fórmula (C.8), la curvatura Gaussiana  $\mathcal{K}_G$  está dada por

$$\mathcal{K}_G = -16\rho_k^2 (k-1)^2 \frac{\rho^{2(k-2)} P_k(\rho, \phi)^2}{(1 + \rho^{2(k-1)})^4}. \quad (5.71)$$

Depende únicamente de la función  $P_k(\rho, \phi)$  y por lo tanto hereda la simetría dihedral de orden  $k$  de la superficie. Cuando  $k \geq 3$ ,  $\mathcal{K}_G$  se anula en los puntos  $\rho = 0$  y  $\rho = \infty$ . Entonces, la superficie es plana en estos puntos.

La energía de Gauss-Bonnet  $H_{GB}$  está dada por

$$H_{GB} = \int dA \mathcal{K}_G = -4\pi(k-1). \quad (5.72)$$

este en un resultado particular del resultado para la curvatura total presentado en la Ref. [45, 81]. Cualquier superficie obtenida por la inversión de un  $k$ -noide posee topología esférica, por lo que  $\tilde{H}_{GB} = 4\pi$ . Con el resultado (5.72) se obtiene que la correspondiente energía de doblamiento (5.35) está dada por  $\tilde{H}_B = 8\pi k$ . En el caso excepcional donde el centro de inversión está sobre el  $k$ -noide (sin reescalamiento),  $(\mathbf{X}(\rho, \phi) = 0$  para algún valor de  $\rho$  y  $\phi$ ), de modo que la superficie inversa posee la topología de un plano, se pierde  $8\pi$  y  $\tilde{H}_B = 8\pi(k-1)$ .

El área no es invariante bajo inversión. El área de la superficie inversa dependerá del centro así como del radio de inversión. Para que las comparaciones tengan significado físico, las vesículas construidas deben poseer el mismo área. Por lo tanto será necesario reescalar el tamaño de la vesícula. Esto se hará eligiendo el radio de inversión apropiadamente.

No es obvio que fijar el área sea legítimo. Al menos intuitivamente, constreñir el área en el principio variacional aparentemente sería inconsistente con la invariancia de escala de la energía de doblamiento. Por este motivo vale la pena confirmar que no es inconsistente.

Considérese el problema de minimizar  $H_B$  en una vesícula cerrada con dos puntos en contacto (por ejemplo  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$ ) con la constricción que el área esté fija. Las dos constricciones pueden ser incorporadas en el principio variacional introduciendo multiplicadores de Lagrange,  $\sigma$  para fijar el área y  $\mathbf{F}$  para mantener juntos los puntos:

$$H[\mathbf{X}] = H_B[\mathbf{X}] + \sigma(A - A_0) + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2). \quad (5.73)$$

Bajo un escalamiento de la superficie por un factor  $\Lambda$ ,  $\mathbf{X} \rightarrow \Lambda\mathbf{X}$ , se encuentra que

$$H[\Lambda\mathbf{X}] = H_B[\mathbf{X}] + \sigma(\Lambda^2 A - A_0) + \Lambda\mathbf{F} \cdot (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2). \quad (5.74)$$

En un estado de equilibrio,  $\partial H/\partial\Lambda = 0$  cuando  $\Lambda = 1$ . Esto implica que  $\sigma$  se anula. Esto es una consecuencia de la invariancia de escala de la energía de doblamiento así como del hecho que la constricción de contacto no introduce otra escala. En ausencia de constricciones adicionales que introduzcan otra escala, siempre es posible fijar el área. Si los dos puntos se hubieran separado por una distancia finita, este no sería el caso.

Sin pérdida de generalidad se fija el área a ser  $4\pi$ . Esto proporcionará una relación funcional entre el radio de inversión  $R$  y ubicación  $\mathbf{x}_0$  del centro de inversión:

$$R(\mathbf{x}_0) = (4\pi/A_0(\mathbf{x}_0))^{1/4}, \quad \text{donde} \quad A_0(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\rho_k^2} \int d\rho \wedge d\phi \rho \left( \frac{1 + \rho^{2(k-1)}}{P_k(\rho, \phi) |\mathbf{X}|^2} \right)^2. \quad (5.75)$$

Aquí se ha utilizado la ecuación (5.6) para  $d\tilde{A}$  y la ecuación (5.59) para  $dA$ .

Antes de examinar  $k$ -noides de orden mayor, es conveniente examinar la inversión del catenoide. En [18] se estudió parcialmente este problema, analizando el caso cuando el centro de inversión está a lo largo del eje de simetría.

### 5.3.1. Vesículas desinfladas con dos puntos en contacto

Aunque la parametrización del catenoide dada por la expresión Eq.(5.52), es claramente menos transparente que la expresión familiar del radio polar como función de la posición a lo largo del eje de simetría,

es la parametrización natural generada por los datos de Weierstrass de los  $k$ -noides. Será útil examinar la inversión de la superficie con respecto a esferas centradas fuera del simetría.

El espacio de los estados de área fija obtenidos por la inversión del catenoide puede ser parametrizado por el centro de inversión,  $\mathbf{x}_0$ . La ecuación (5.75) determina el radio de inversión en términos de  $\mathbf{x}_0$ . Para identificar las geometrías que son físicamente distinta sólo se necesita considerar los vectores que pertenecen al primer cuadrante del plano  $X - Y$ ,  $\mathbf{x}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$ ,  $x_0, y_0 \geq 0$ . Las fronteras de interés en este espacio son las rectas  $x_0 = 0$  y  $y_0 = 0$ , así como la catenaria  $y_0 = \cosh x_0$ , obtenida por la intersección del catenoide con este plano. En la figura 5.4 se presenta este un esquema de este espacio de estados.

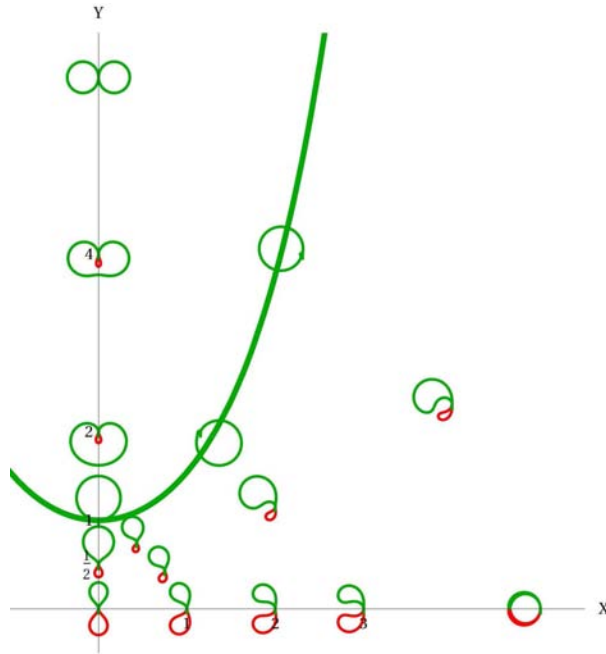


Figura 5.4: Espacio de estados parametrizado por el centro de inversión  $\mathbf{x}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$ . Las vesículas son simétricas con respecto a la reflexión en el plano  $Z = 0$ . Si  $y_0 = 0$ , la vesícula tiene simetría rotacional alrededor del eje  $X$  axis. El centro de inversión atraviesa al catenoide en  $y_0 = \cosh x_0$ . Si  $x_0 = 0$ , la vesícula posee simetría izquierda-derecha con respecto al plano  $X = 0$ .

Todos los estados poseen simetría especular,  $Z \rightarrow -Z$ . A lo largo de  $y_0 = 0$  los estados comparten la simetría axial del catenoide. A lo largo de  $x_0 = 0$ , se preserva la simetría especular del catenoide  $X \rightarrow -X$  con respecto a sus dos finales.

Para facilitar la visualización de los estados desinflados es útil examinar explícitamente los puntos críticos de la función de distancia. Estos puntos se relacionan con los puntos críticos en la superficie original por la ecuación (5.8). Los puntos al infinito en el catenoide se mapean al origen, y corresponden trivialmente a puntos críticos. En el perfil de la catenaria ( $\rho = 1$ ) sobre el plano  $X - Y$  ocurren en los ángulos  $\phi = 0$  y  $\pi$  que corresponden a los polos. La identidad (5.9) indica que todos los demás puntos críticos ocurren donde el vector de posición desde el centro de inversión son normales a la superficie. Es sencillo ver que estos puntos son aislados y que ocurren en las curvas perfil. En la Fig. 5.5 se presenta una demostración gráfica de la existencia de puntos críticos no triviales sobre la curva perfil.



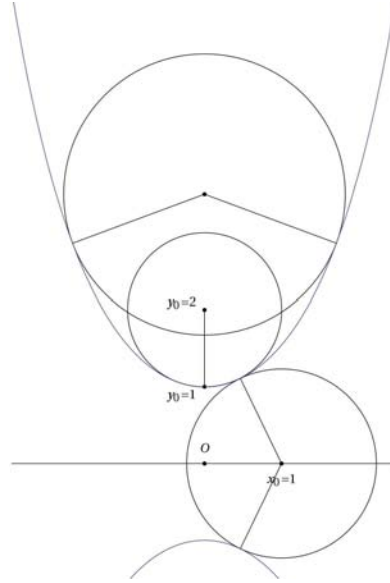


Figura 5.5: Puntos críticos de la función distancia en el perfil. Para centros de inversión sobre el eje  $X$ , se tienen dos puntos críticos, uno por cada rama. Para centros de inversión sobre el eje  $Y$  existe dos regímenes distintos: en el rango  $y_0 \in [0, 2]$  también se tienen dos puntos críticos; después de  $y_0 = 2$ , aparecen dos nuevos puntos críticos en la rama superior que se bifurcan a partir de punto crítico en  $y_0 = 2$ .

En general, los puntos críticos ocurren en el perfil cuando se satisface la ecuación,  $p_{\mathbf{x}_0}(\phi) = 0$ , donde  $p_{\mathbf{x}_0}$  está dada por

$$p_{\mathbf{x}_0}(\phi) = \sin(\phi) \left( \ln \left| \cot \frac{\phi}{2} - x_0 \right| - x_0 \right) + \cos \phi (\csc \phi + y_0) , \quad (5.76)$$

En la Fig. 5.6 se grafica  $p_{\mathbf{x}_0}(\phi)$  para tres diferente valores de  $\mathbf{x}_0$ .

Examinando primero la inversión en puntos sobre el eje de simetría,  $y_0 = 0$ . Físicamente, estos estados con simetría axial describen una vesícula esférica desinflada cuyos polos norte y sur están en contacto. En el origen ( $\mathbf{x}_0 = 0$ ), la geometría inversa es un discocito simétrico. Al aumentar  $x_0$ , se tiene una transición continua de este discocito simétrico hacia un estomatocito (ver Figs. 5.7 a y b). La geometría tiende asintóticamente a una esfera completamente desinflada dentro de otro esfera (Figs. 5.7c y 5.7d).

Cualitativamente, se tiene un comportamiento muy diferente cuando el centro de inversión está fuera del eje de simetría. Aunque los puntos en contacto se tocan en el espacio, su ubicación sobre la superficie depende de la localización del centro de inversión. Deja de ser apropiado considerarlos como los polo norte y sur de la vesícula.

Se considera a continuación la secuencia de geometrías generadas cuando el centro de inversión se está sobre la dirección ortogonal al eje de simetría,  $\mathbf{x}_0 = y_0 \mathbf{j}$ .

Dentro del rango  $[0, 1)$ , la geometría es una deformación continua del discocito simétrico; la mitad que se origina de la región del catenoide con  $Y < 0$  se desinfla mientras la otra se ( $Y > 0$ ) infla como se ilustra en las Figs. 5.8a y b (comparar con las Figs. 5.6 y 5.8a). Los dos puntos en contacto se aproximan sobre la superficie.

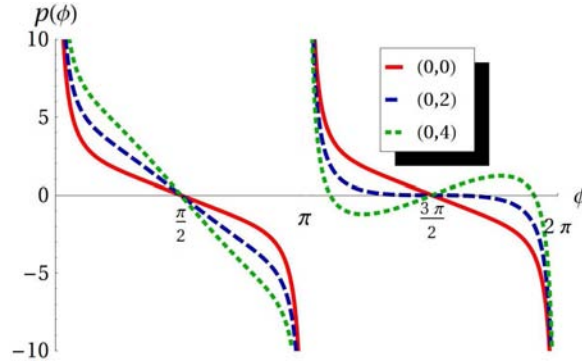


Figura 5.6: Gráfica de las funciones  $p_{\mathbf{x}_0}(\phi)$  que determinan los puntos críticos de la función de distancia sobre el eje de simetría y sobre una dirección perpendicular. (1)  $\mathbf{x}_0 = (0,0)$  y (2)  $\mathbf{x}_0 = (0,2)$ : se tienen dos puntos críticos no triviales  $\phi = \pi/2$  y  $3\pi/2$ . En este rango son respectivamente los puntos más cercanos puntos de ambas ramas del perfil al centro of inversión (ver Fig. 5.5). (3)  $\mathbf{x}_0 = (0,4)$ : cuando se aumenta  $y_0$  más allá de  $y_0 = 2$  aparece un nuevo par de puntos críticos en  $\phi = 3\pi/2$ , uno se mueve hacia  $\phi = \pi$ ; el otro hacia  $\phi = 2\pi$ . Ver Fig. 5.5.  $\pi/2$  permanece como el único punto crítico en la mitad del perfil con  $Y < 0$ .

En el límite en el que  $y_0$  se acerca a la superficie en  $y_0 = 1$ , la vecindad de este punto sobre la superficie se infla en una esfera grande con este punto como su polo. Los dos puntos en contacto se desplazan al polo opuesto de la esfera y forman un defecto localizado. En la Fig. 5.8c se muestra un acercamiento de la geometría desinflada en la vecindad del último polo cuando  $y_0$  se aproxima a 1 por abajo. El defecto centrado en el polo se asemeja a la arruga formada en la piel cuando se pellizca con los dedos pulgar e índice. Difiere en que el defecto forma una concavidad centrada en el polo. Como se verá más adelante, esta peculiaridad se debe a las fuerzas externas horizontales que actúan sobre la vesícula. Un defecto elevado requeriría fuerzas verticales.

La geometría esférica singular parece ser muy diferente cualitativamente si el centro de inversión se aproxima a la superficie por afuera. El defecto localizado ahora se asemeja a dos dedos tocándose elevados sobre una hendidura centrada en el polo. Ver Figs. 5.8e y 5.8f. Los dos defectos 5.8c y 5.8f describen un comportamiento genérico cuando los dos puntos están en contacto. Notablemente, se posee una expresión analítica exacta para ambos.

Desde una el punto de vista esférico estos dos defectos son muy diferentes. Sin embargo la geometría local es idéntica. El pellizco se vuelve los dos dedos cuando es visto desde abajo.

Para puntos suficientemente cercanos el área asociada con el defecto está completamente dominada por la esfera inflada (Fig 5.8d); por medio de la proyección estereográfica desde el polo antipodal de la esfera (una transformación conforme) se obtiene un defecto aislado en una membrana asintóticamente plana. la distinción entre afuera y adentro desaparece y los dos defectos son idénticos. Por lo tanto sólo hay un único defecto localizado en una membrana asintóticamente plana.

El inflamiento de la geometría esférica en el límite  $y_0 \rightarrow 1$ , implica que la normalización de su área para que posea un radio 1 involucra un reescalamiento por un valor muy pequeño de  $R$ . Esto contrasta con el límite axisimétrico de esfera dentro de esfera en el cual  $R$  diverge. Mas adelante se verá que, mientras que la fuerzas externas requeridas para mantener los puntos en contacto se anula en el límite axisimétrico, aquí divergen.

Cuando  $y_0$  está en la parte exterior del catenoide, los dedos en contacto se vuelven cada vez más deslocalizados. Cuando  $y_0$  se aproxima a  $y_0 = 2$ , los dos dedos se expanden y se extiende sobre la esfera. La geometría toma la forma de una salchicha que se dobla sobre sí misma (Fig.5.8g). Después de  $y_0 = 2$ , la geometría sufre otro cambio cualitativo. Esto observa con la aparición de dos nuevos puntos críticos en el perfil de la superficie como se ilustra en la Fig. 5.6 (línea punteada) y Fig. 5.5. La aparición de estos puntos indica el inicio de la constricción de la parte media de la salchicha y la consecuente formación de dos lóbulos esféricos en cada lado (ver Fig. 5.8h). Esto dos lóbulos se inflan subsecuentemente en dos esferas tangentes de radio  $1/\sqrt{2}$  conectadas por un cuello catenoidal infinitesimalmente pequeño (Fig. 5.8i). Esto también contrasta dramáticamente con la geometría límite en forma de copa que involucra una esfera dentro de otra esfera.

El comportamiento del parámetro de reescalamiento  $R$  para el catenoide, a lo largo de las dos direcciones discutidas arriba, se grafica en la figura 5.9. El valor de  $R$ , como se verá en la sección 5.4, determina la fuerza que actúa en la vesícula desinflada. en particular, donde diverge  $R$  la fuerza se anula y viceversa.

Cuando el centro de inversión se mueve a lo largo del eje de simetría, la geometría inversa mengua. Entonces  $R$  se incrementa monótonicamente a infinito. A lo largo de la dirección perpendicular la geometría inversa primero se infla en una geometría infinita el centro de inversión se aproxima a  $y_0 = 1$  y está sobre la catenaria, y por lo tanto  $R$  tiende a cero. Cuando  $y_0$  aumenta fuera de la catenaria, la geometría mengua otra vez y  $R$  aumenta monótonicamente a infinito.

En la sección 5.4 se mostrará que existe una relación inversa entre la distancia entre los puntos en contacto que están cercanos sobre la superficie y la fuerza requerida para mantenerlos en contacto. Cuando los puntos se unen se vuelve imposible determinar las fuerzas examinando la distribución de los esfuerzos en un contorno remoto.

### 5.3.2. Trinoide invertido

La principal diferencia entre el catenoide y  $k$ -noides de mayor orden es que, en éstos, sus cuellos –que crecen exponencialmente– se intersectan mutuamente. En el perfil del trinoide esto ocurre a una distancia radial  $\varrho = 4,4229$  en los ángulos  $\Phi = -\pi/3, -\pi, -5\pi/3$  así como en las rotaciones de estos puntos por  $2\pi/3$  y  $4\pi/3$ . Para obtener una superficie desinflada sin auto-intersecciones, se tiene que truncar el  $k$ -noide antes de que se presenten estas auto-intersecciones.

El espacio de configuración se representa por el primer sextante de  $\mathbb{R}^3$ , i.e. puntos  $\mathbf{x}_0$  dentro de las regiones  $x_0 \geq 0, y_0 \leq \sqrt{3}x_0$  y  $z_0 \geq 0$ .

La geometría simétrica desinflada correspondiente a la inversión centrada en el origen,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  se representa en la Fig. 5.10a. Esta geometría se asemeja al discocito simétrico discutido anteriormente pero con tres concavidades distribuidas simétricamente alrededor de su parte media. Las auto-intersecciones ocurren dentro de estas regiones cóncavas. Si se trunca el trinoide con tres anillos antes de que ocurran las auto-intersecciones, la geometría inversa fuera de estos anillos se parece a la superficie de Lawson. [43, 89]

Sólo se describirá la inversión del trinoide para  $\mathbf{x}_0 = z_0 \hat{\mathbf{k}}$ , de modo que se preserve la simetría dihedral de orden 3.

La transición es análoga a la descrita en la inversión del catenoide con el centro de inversión en la dirección perpendicular a su eje de simetría. Hay dos regímenes distintos: si  $z_0 < 1/(6\rho_k) = 0,5196$ , el centro de inversión está dentro del trinoide. Cuando  $z_0$  aumenta hacia este valor, el lóbulo superior se

infla mientras que el inferior se desinfla (Figs. 5.10b y 5.10c). Aparece un defecto localizado con forma de un pellizco doble (Fig. 5.10d). En el límite  $z_0 \rightarrow 0,5196$  la geometría normalizada tiende a una esfera de radio 1 con tres singularidades localizadas en su polo inferior (Fig. 5.10e). Para valores de  $z_0$  cercanos pero arriba de este valor, el defecto localizado toma la forma de tres dedos en contacto (Fig. 5.10f). Cuando  $z_0$  aumenta este defecto se deslocaliza (Fig. 5.10g) y los dedos se inflan en lóbulos esféricos. En  $z_0 = 2,0243$  (Fig. 5.10h) se presenta un cambio cualitativo: la geometría que conecta los dedos comienza a contraerse mientras que los lóbulos continúan inflándose. La geometría límite consiste en tres esferas de radio  $1/\sqrt{3}$  que se intersectan (Fig. 5.10i). El comportamiento de parámetro de reescalamiento  $R$  para el trinoide a lo largo de la dirección discutida arriba se grafica en la figura 5.9.

## 5.4. Tensor de esfuerzos en las superficies inversas

El esfuerzo tensor en la superficie  $\Sigma$  asociado con el Hamiltoniano  $H_B$  (5.34) dado por [12, 37]

$$\mathbf{f}^a = K \left( K^{ab} - \frac{1}{2} K g^{ab} \right) \mathbf{e}_b - \nabla^a K \mathbf{n}. \quad (5.77)$$

En equilibrio,  $\mathbf{f}^a$  está conservado

$$\nabla_a \mathbf{f}^a = 0. \quad (5.78)$$

De la expresión (5.77) se puede ver que una superficie mínima con  $K = 0$  tratada como membrana fluida no existen esfuerzos. Esto difiere con el comportamiento de las superficies mínimas que pueden adoptar la películas de jabón cuya energía es proporcional a su área. La película de jabón formada entre dos anillos circulares será parte de un catenoide. Existirán esfuerzos en la superficie y se debe aplicar una fuerza externa a lo anillos para evitar que se colapse. Por el contrario si el catenoide estuviera constituido por una membrana fluida, estaría libre de esfuerzos. Sin embargo, la membrana fluida física entre los anillos típicamente no será un catenoide y estarán presentes esfuerzos. Esto es debido a que las superficies mínimas tienden a ser inconsistentes con las condiciones de frontera y con la constricción sobre el área. Sin embargo, este hecho no representa un obstáculo, porque la geometría de interés no son las propias superficies mínimas sino sus contrapartes obtenidas por inversión. El único punto relevante es es hecho que las superficies mínimas representan estados de equilibrio sin esfuerzos.

Es sencillo expresar el tensor de esfuerzos transformado en términos de la geometría de la superficie original

$$\tilde{\mathbf{f}}^a = \left( \frac{|\mathbf{X}|}{R} \right)^6 \left( \mathbb{R} \mathbf{f}^a + \frac{4}{|\mathbf{X}|^2} \left( K^{ab} - \frac{1}{2} K g^{ab} \right) \mathbf{f}_{0b} \right), \quad (5.79)$$

donde [35, 38]

$$\mathbf{f}_{0a} = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_a) \mathbf{n} - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_a = \mathbf{X} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_a). \quad (5.80)$$

La derivada covariante  $\mathbf{f}_{0a}$  está dada por

$$\nabla_b \mathbf{f}_{0a} = g_{ab} \mathbf{n} + K_b{}^c \mathbf{X} \times (\mathbf{e}_c \times \mathbf{e}_a), \quad (5.81)$$

y en particular, su divergencia reproduce el vector normal,  $\nabla_a \mathbf{f}_0^a = 2 \mathbf{n}$ .

Descomponiendo el tensor de esfuerzos inverso en sus partes tangencial y normal como  $\tilde{\mathbf{f}}^a = \tilde{f}^{ab} \tilde{\mathbf{e}}_b + \tilde{f}^a \tilde{\mathbf{n}}$ , se encuentra que

$$\tilde{f}^{ab} = \frac{|\mathbf{X}|^8}{R^8} \left( K - \frac{4}{|\mathbf{X}|^2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} \right) \left( K^{ab} - \frac{1}{2} K g^{ab} \right); \quad (5.82a)$$

$$\tilde{f}^a = \frac{|\mathbf{X}|^6}{R^6} \left( \nabla^a K - 4 \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_b}{|\mathbf{X}|^2} \left( K^{ab} - \frac{1}{2} K g^{ab} \right) \right). \quad (5.82b)$$

Tomando la proyección de la parte tangencial en las direcciones principales  $\tilde{\mathbf{V}}_1$  y  $\tilde{\mathbf{V}}_2$  se obtiene

$$\tilde{f}_{22} = \frac{|\mathbf{X}|^4}{2R^4} (C_2 - C_1) \left( K - \frac{4}{|\mathbf{X}|^2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} \right) = -\tilde{f}_{11}, \quad \tilde{f}_{12} = 0, \quad (5.83)$$

donde se ha definido  $\tilde{f}_{ij} = \tilde{V}_{i_a} \tilde{V}_{j_b} \tilde{f}^{ab}$ . Las proyecciones del esfuerzo normal inverso son

$$\tilde{f}_1 = \frac{|\mathbf{X}|^4}{R^4} \left( \nabla_1 K + 2(C_2 - C_1) \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{V}_1}{|\mathbf{X}|^2} \right); \quad (5.84a)$$

$$\tilde{f}_2 = \frac{|\mathbf{X}|^4}{R^4} \left( \nabla_2 K - 2(C_2 - C_1) \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{V}_2}{|\mathbf{X}|^2} \right), \quad (5.84b)$$

con  $\tilde{f}_i = \tilde{V}_{i_a} \tilde{f}^a$ . También se ha definido  $\nabla_i = V_i^a \nabla_a$ .

A continuación se deriva cómo se transforma la divergencia del tensor de esfuerzos. Comenzando con la definición de la divergencia de un vector en términos del determinante de la métrica,

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{f}^a = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \partial_a \left( \sqrt{\tilde{g}} \tilde{f}^a \right) \stackrel{\text{Eq.(5.4)}}{=} |\mathbf{X}|^4 \nabla_a \left( \frac{\tilde{f}^a}{|\mathbf{X}|^4} \right) = \nabla_a \tilde{f}^a - 2 \frac{\nabla_a |\mathbf{X}|^2}{|\mathbf{X}|^2} \tilde{f}^a. \quad (5.85)$$

Sin pérdida de generalidad se puede considerar la inversión en la esfera unitaria.

Usando la identidad (5.81) que satisface  $\mathbf{f}_0^a$ , la condición de integrabilidad de Codazzi-Mainardi contraída

$$\nabla_b K^{ab} = \nabla^a K, \quad (5.86)$$

y la ecuación (5.19), se encuentra que el primer término de la derecha en (5.85) está dado por

$$\begin{aligned} \nabla_a \tilde{f}^a &= |\mathbf{X}|^6 R \nabla_a \mathbf{f}^a + 3|\mathbf{X}|^4 \nabla^a |\mathbf{X}|^2 R \mathbf{f}^a - 2|\mathbf{X}|^4 (\mathbf{P} \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{f}^a \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{f}^a \mathbf{P} \mathbf{e}_a) \\ &+ 2|\mathbf{X}|^2 \left( 4 \nabla_a |\mathbf{X}|^2 \left( K^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} K \right) + |\mathbf{X}|^2 \nabla^a K \right) \mathbf{f}_{0b} \\ &+ 4|\mathbf{X}|^4 K_a^c (K^{ab} - 1/2 g^{ab} K) \mathbf{X} \times (\mathbf{e}_c \times \mathbf{e}_b). \end{aligned} \quad (5.87)$$

El último término de la ecuación (5.87) se anula debido a que la matriz cuadrática en  $K_{ab}$  es simétrica en  $b$  y  $c$  mientras que el triple producto vectorial que multiplica es antisimétrico en estos índices. Además, usando la identidad  $\mathbf{P} \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{f}^a \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{f}^a \mathbf{P} \mathbf{e}_a = R \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{e}_a \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{f}^a \mathbf{e}_a$  en la primera línea en la ecuación (5.87), se obtiene la siguiente expresión:

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{f}^a \stackrel{\text{ec.(5.91)}}{=} |\mathbf{X}|^6 R \nabla_a \mathbf{f}^a + |\mathbf{X}|^4 \left( \nabla_a |\mathbf{X}|^2 R \mathbf{f}^a - 2 (R \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{e}_a \mathbf{X} + \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{X} \mathbf{e}_a) + 2 \nabla_a K \mathbf{f}_0^a \right). \quad (5.88)$$

Usando las definiciones (5.3) de  $R$  y (5.80) de  $\mathbf{f}_{a0}$  en el término entre paréntesis, éste se reduce a

$$\nabla_a |\mathbf{X}|^2 R \mathbf{f}^a - 2 (R \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{e}_a \mathbf{X} + \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{X} \mathbf{e}_a) + 2 \nabla_a K \mathbf{f}_0^a = -2 f_a^a \mathbf{X}. \quad (5.89)$$

Pero  $f_a^a = \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{e}_a$  se anula (como consecuencia de la invariancia de escala de la energía de doblamiento bidimensional) [35]. Así, se encuentra que bajo inversión la divergencia de tensor de esfuerzos transformado está dado por

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{f}^a = \frac{|\mathbf{X}|^6}{R^6} R \nabla_a \mathbf{f}^a. \quad (5.90)$$

Entonces, en general, el tensor de esfuerzos  $\tilde{\mathbf{f}}^a$  en la superficie inversa dado por la ecuación (5.79) está conservado siempre que  $\mathbf{f}^a$  lo esté, con la posible excepción de puntos al infinito se mapean al origen. Por lo tanto, la ley de conservación (5.78) es invariante bajo transformaciones conformes.

### 5.4.1. Fuerzas y torcas en las superficies inversas

Mientras que el tensor de esfuerzos  $\mathbf{f}^a$  se anula en una superficie mínima con  $K = 0$ , en general su contraparte inversa dada por

$$\tilde{\mathbf{f}}^a = 4 \frac{|\mathbf{X}|^4}{R^6} K^{ab} \mathbf{f}_{0b}. \quad (5.91)$$

no se anulará. Este esfuerzo estará concentrado en la vecindad de los puntos en contacto en  $\tilde{\mathbf{X}} = 0$ . Poseerá fuentes en estos puntos indicando la necesidad de tener fuerzas externas para mantener el equilibrio.

Aquí se está interesado en identificar estas fuerzas localizadas. La fuerza total que actúa en una región limitada por una curva cerrada  $\gamma$  está dada por [73]

$$\mathbf{F} = \oint_{\gamma} ds l_a \mathbf{f}^a. \quad (5.92)$$

donde  $s$  es longitud de arco y  $l_a = g_{ab} l^b$  son las componentes covariantes del vector  $\mathbf{l} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ .

Si la superficie posee alguna simetría es conveniente deformar el contorno de integración sobre la superficie para aprovechar dicha simetría. Esto siempre es posible en tanto que no se encuentre una fuente de esfuerzo. La conservación de  $\mathbf{f}^a$  en los contornos inicial y final asegura que proporcionan el mismo valor para  $\mathbf{F}$ . Si la ley de conservación también se cumple dentro del anillo y es contráctil a un punto, entonces  $\mathbf{F}$  se anula; equivalentemente, si  $\mathbf{F} \neq 0$  en el contorno, la ley de conservación se debe violar dentro del él, indicando la existencia de una fuente de esfuerzo adentro. El crecimiento exponencial de los cuellos de un  $k$ -noide dan lugar a singularidades en la curvatura en el origen de la superficie inversa. Esta singularidad en la curvatura será capturada por la integral que aparece en la ecuación (5.92).  $\mathbf{F}$  se interpreta como la fuerza externa que implementa la constricción de contacto y evita que la geometría se infle en una esfera.

Estas fuerzas fueron examinadas para la inversión de catenoide a lo largo de su eje de simetría en la referencia [18]. El método usado para calcularlas dependía explícitamente de esta simetría. De hecho, la complicada distribución de esfuerzos en la superficie inversa parecería sugerir que el cálculo se vuelve intratable tan pronto se pierde esta simetría. Sin embargo, como se verá, la distribución de esfuerzo y de las fuerzas que transmiten posee varias propiedades que son interesantes y útiles. En particular, se encuentra que las fuerzas dependen del centro de inversión de la misma manera que el reescalamiento de la geometría depende de la localización de este punto. Salvo este reescalamiento, la fuerza está completamente determinada por la superficie mínima original. Los detalles de la distribución de esfuerzos en la superficie resulta ser irrelevante.

Para determinar la fuerza total  $\tilde{\mathbf{F}} = \oint_{\tilde{\gamma}} d\tilde{s} \tilde{l}_a \tilde{\mathbf{f}}^a$ , es necesario conocer cómo se transforman las cantidades geométricas  $ds$  y  $\mathbf{l}$  asociadas con el contorno. La ecuación (5.4) implica que

$$ds \rightarrow \tilde{d}s = (R/|\mathbf{X}|)^2 ds; \quad (5.93)$$

Adicionalmente la ecuación (5.2) implica  $\mathbf{t} \rightarrow \tilde{\mathbf{t}} = R \mathbf{t}$  y similarmente para  $\mathbf{l}$ . Entonces

$$t_a \rightarrow \tilde{t}_a = (R/|\mathbf{X}|)^2 t_a, \quad l_a \rightarrow \tilde{l}_a = (R/|\mathbf{X}|)^2 l_a. \quad (5.94)$$

Usando las expresiones (5.93) y (5.94), se encuentra que  $\tilde{\mathbf{F}}$  está dado por

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{R^2} \oint_{\tilde{\gamma}} d\tilde{s} (|\mathbf{X}|^2 R (l_a \mathbf{f}^a) + 4 l_a (K^{ab} - 1/2K g^{ab}) \mathbf{f}_{0b}). \quad (5.95)$$

A pesar de que esta expresión no parece prometedora, se simplifica de forma significativa con la introducción de un tensor nulo apropiado como se describe en la referencia [38]. Construyendo el siguiente tensor de esfuerzos

$$\mathbf{g}^a = -\epsilon^{ab}\nabla_b(\mathbf{X} \times \mathbf{n}) = (K^{ab} - K g^{ab}) \mathbf{f}_{0b} - \mathbf{e}^a. \quad (5.96)$$

$\mathbf{g}^a$  es un tensor nulo, con divergencia nula por construcción,  $\nabla_a \mathbf{g}^a = 0$  debido a la antisimetría del tensor de Levi-Civita  $\epsilon^{ab}$ . Es fácil establecer la segunda igualdad usando la condición de integrabilidad de Codazzi-Mainardi (5.86) y la identidad (5.81) que satisface la derivada covariante de  $\mathbf{f}_{0a}$ . Es importante señalar que  $\mathbf{g}^a$  no transmite fuerzas:  $\oint_\gamma ds l_a \mathbf{g}^a = -\oint ds (\mathbf{X} \times \mathbf{n})' = 0$ , donde la prima indica diferenciación con respecto a  $s$ . Entonces se puede sumar cualquier múltiplo de  $l_a \mathbf{g}^a$  al integrando que aparece en la ecuación (5.95) sin alterar el valor de  $\tilde{\mathbf{F}}$ . Restando  $4/R^2 l_a \mathbf{g}^a$ , y usando la identidad  $l_a \mathbf{f}_0^a = \mathbf{X} \times \mathbf{l}$ , se obtiene que

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{R^2} \oint_\gamma ds (|\mathbf{X}|^2 R (l_a \mathbf{f}^a) + 2K \mathbf{X} \times \mathbf{t} + 4\mathbf{l}). \quad (5.97)$$

Entonces cuando la superficie original es mínima, se obtiene una expresión simple para la fuerza:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{4}{R^2} \oint_\gamma ds \mathbf{l} =: \frac{4}{R^2} \mathbf{F}_0. \quad (5.98)$$

Depende del centro de inversión únicamente a través de reescalamiento  $R$  discutido en la sección 5.3. Salvo este prefactor, la fuerza en  $\tilde{\gamma}$  está predeterminada por la superficie mínima original. De hecho, si se hubiera truncado la superficie mínima original con un conjunto de anillos, esta integral describiría la fuerza sobre el anillo  $\gamma$  requerida para mantener la película de jabón correspondiente con tensión superficial unitaria (ver C.1).

A diferencia de las fuerzas, en el proceso de inversión no se generan torcas, (si no existían previamente). La torca total en una frontera está dada por  $\mathbf{M} = \oint ds l_a \mathbf{m}^a$ , donde para el caso de la energía de doblamiento (5.34) el tensor de torcas  $\mathbf{m}^a$  está definido por [12, 74]

$$\mathbf{m}^a = \mathbf{X} \times \mathbf{f}^a + \mathbf{S}^a, \quad \text{donde} \quad \mathbf{S}^a = K \mathbf{e}^a \times \mathbf{n}. \quad (5.99)$$

Un calculo directo da la torca en la contraparte inversa

$$\tilde{\mathbf{M}} = \oint_\gamma ds \left( R(\mathbf{X} \times l_a \mathbf{f}^a) + \frac{4}{R^2} l_a \left( K^{ab} - \frac{K}{2} g^{ab} \right) \tilde{\mathbf{X}} \times \mathbf{f}_{0b} + \left( K - \frac{4\mathbf{X} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{X}|^2} \right) R\mathbf{t} \right). \quad (5.100)$$

Una vez más, esta expresión larga colapsa en una muy simple si se introduce un tensor nulo apropiado. Sea

$$\mathbf{h}^a = \epsilon^{ab}\nabla_b \left( \tilde{\mathbf{X}} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) \right) = \tilde{\mathbf{X}} \times \mathbf{e}^a - (K^{ab} - K g^{ab}) \tilde{\mathbf{X}} \times \mathbf{f}_{0b} + \tilde{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{e}^a) R\mathbf{n}. \quad (5.101)$$

Igual que antes, sumando  $4/R^2 l_a \mathbf{h}^a$  al integrando que aparece en la ecuación (5.100) y usando la identidad  $(\tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{t}) R\mathbf{n} - (\tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{n}) R\mathbf{t} = -\tilde{\mathbf{X}} \times \mathbf{l}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}$  se reduce a la forma compacta

$$\tilde{\mathbf{M}} = \oint_\gamma ds (R(\mathbf{X} \times l_a \mathbf{f}^a) - 2K\mathbf{t}). \quad (5.102)$$

En la inversa de una superficie mínima la torcas externas con respecto al centro de inversión siempre se anulan.

#### 5.4.2. Fuerzas en $k$ -noides inversos

La determinación de la fuerzas se ha reducido a un problema concerniente a la superficie mínima original. Usando la expresión (5.67) para la fuerza  $\mathbf{F}_0$  en la expresión (5.98) y tomando un contorno

que encierra el  $l$ -ésimo cuello de un  $k$ -noide, la fuerza que actúa en el polo asociado del  $k$ -noide inverso está dada por

$$\tilde{\mathbf{F}}_l = -\frac{8\pi}{r_0 R^2} \frac{k-1}{k^2} \hat{\mathbf{E}}_\rho \left( -\frac{2\pi l}{k} \right), \quad (5.103)$$

donde  $\hat{\mathbf{E}}_\rho(\phi)$  se definió en la ecuación (5.53). Esta fuerza yace sobre el plano principal y está dirigida radialmente hacia el origen donde se tocan los polos. Las fuerzas que actúan en el origen están balanceadas, *i.e.*  $\sum_{l=0}^{k-1} \tilde{\mathbf{F}}_l = \mathbf{0}$ .

### Catenoide y trinoide inversos

Para el catenoide inverso, la dos fuerzas están dadas por  $\tilde{\mathbf{F}}_{1,2} = \mp 8\pi/R^2 \hat{\mathbf{i}}$ . La magnitud de este vector de la fuerza  $\tilde{F}$  para las dos secuencias geométricas discutidas anteriormente está graficada en la Fig. 5.11. Cuando el centro de inversión está sobre el eje  $X$ , la fuerza en la superficie desinflada decrece monótonicamente desde un valor finito en  $x_0 = 0$  a cero. El límite de la esfera dentro de otra esfera (Fig. 5.7c) existe en ausencia de fuerzas externas.

Cuando el centro de inversión está sobre el eje  $Y$ , se encuentra que la fuerza diverge cuando el centro de inversión se aproxima al catenoide. Entonces el límite de la esfera de radio 1 (Fig.5.8d) tiene una singularidad en el origen.

Cuando el centro de inversión está fuera del catenoide la fuerza decrece, anulándose otra vez cuando el centro de inversión está muy lejos del origen, de manera que el límite de las dos esferas tangentes de radio  $1/\sqrt{2}$  conectadas por un pequeño catenoide (Fig. 5.8i) es también una geometría en equilibrio libre de fuerzas externas.

Las tres fuerzas que actúan sobre el trinoide inverso son  $\tilde{\mathbf{F}}_1 = -F/R^2 \hat{\mathbf{i}}$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_{2,3} = F/R^2 (\hat{\mathbf{i}} \pm \sqrt{3}\hat{\mathbf{j}})/2$  donde  $F = (3 + \ln 16)8\pi/81$ . La magnitud del vector fuerza cuando el centro de inversión está en la dirección  $\hat{\mathbf{k}}$  se grafica en la Fig. 5.11.

En los defectos localizados donde los puntos en contacto están cercanos sobre la superficie inversa,  $\tilde{F}$  varía inversamente con la distancia entre ellos. Como se vio anteriormente, tales geometrías se generan cuando el centro de inversión está próximo a la superficie mínima. Esto se demostrará explícitamente para el caso de dos puntos en contacto.

La distancia mínima sobre la superficie entre los polos,  $\tilde{S}$ , es la trayectoria que se origina por la inversión de la rama inferior del perfil del catenoide con  $\rho = 1$  y  $0 < \phi < \pi$ , indicada en rojo en las Figs. 5.8c y 5.8f. El elemento de línea en la curva inversa es  $d\tilde{s} = R^2/|\mathbf{X}|^2 ds$ , donde  $ds = \Omega d\phi$ , por lo que  $\tilde{S} = R^2 \int_0^\pi d\phi \Omega(\phi)/|\mathbf{X}|^2$ . La cantidades requeridas son el factor conforme

$$\Omega = \frac{2}{1 - \cos 2\phi}, \quad (5.104)$$

y la norma de las funciones de encajamiento de la curva

$$|\mathbf{X}|^2 = \frac{1}{4} \ln^2 \cot^2 \frac{\phi}{2} + (y_0 + \csc \phi). \quad (5.105)$$

Entonces, en forma explícita la longitud  $\tilde{S}$  está dada por

$$\tilde{S} = 2R^2 \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{d\phi}{(1 - \cos 2\phi) \left( (y_0 + \csc \phi)^2 + \frac{1}{4} \ln^2 \cot^2 \frac{\phi}{2} \right)}. \quad (5.106)$$



En general  $\tilde{S}$  se puede aproximar con buena precisión por la función

$$\tilde{S} = \frac{a}{y_0 + b}, \quad (5.107)$$

con  $a = 2,26146$  y  $b = 0,874017$ . Cuando  $y_0 = 1$ ,  $\tilde{S} = 1,20674R^2$ . Entonces, usando la expresión para la fuerza en esta vecindad se obtiene  $\tilde{F}\tilde{S} = 9,6539\pi$ .

Aunque las expresiones para las fuerzas son simples, la distribución de los esfuerzo no lo es. Para ilustrar este punto, se examinarán las proyecciones de los esfuerzos en las direcciones principales en los defectos simétricos locales con dos puntos en contacto que se obtienen cuando el centro de inversión está cerca del catenoide. En el catenoide la curvas principales son los meridianos con curvatura  $C_1$  (curvas negras con  $\Phi_X$  constante en la Fig. 5.12a) y los paralelos con curvatura  $C_2$  (curvas blancas de  $X$  constante en la Fig. 5.12a). En las Figs. 5.12b y 5.12c se ilustra el mapeo de estas curvas integrales en los defectos (del pellizco y sus reflexión, los dos dedos). Nótese que la curva principal con mayor curvatura se mapea a la curva principal de menor curvatura y viceversa, como se mencionó en la sección 5.1. Para una superficie mínima con  $C_2 = C = -C_1$  las proyecciones del tensor de esfuerzos en las direcciones principales  $\tilde{\mathbf{V}}_1$  y  $\tilde{\mathbf{V}}_2$ , dadas por las ecuaciones (5.83) y (5.84), se reducen a

$$\tilde{f}_{11} = 4C \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} \frac{|\mathbf{X}|^2}{R^4} = \frac{2}{R^4} (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2) \frac{\tilde{\mathbf{X}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}}{|\tilde{\mathbf{X}}|^2} = -\tilde{f}_{22}, \quad (5.108a)$$

$$\tilde{f}_1 = 4C \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{V}_1 \frac{|\mathbf{X}|^2}{R^4} = \frac{2}{R^4} (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2) \frac{\tilde{\mathbf{X}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_1}{|\tilde{\mathbf{X}}|^2}, \quad (5.108b)$$

$$\tilde{f}_2 = -4C \mathbf{X} \cdot \mathbf{V}_2 \frac{|\mathbf{X}|^2}{R^4} = -\frac{2}{R^4} (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2) \frac{\tilde{\mathbf{X}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_2}{|\tilde{\mathbf{X}}|^2}. \quad (5.108c)$$

De la ecuación (5.61), se encuentra que en particular, para el catenoide la curvatura principal está dada por

$$C(\rho, \phi) = \frac{P(\rho, \phi)}{(1 + \rho^2)^2}; \quad (5.109)$$

$\tilde{f}_{11}$  representa la fuerza en la dirección  $\tilde{\mathbf{V}}_1$  transmitida a lo largo del elemento de línea de la curva cuyo vector tangente es  $\tilde{\mathbf{V}}_2$  y similarmente para  $\tilde{f}_{22}$ . De manera similar,  $\tilde{f}_1$  es la fuerza a lo largo de la dirección normal a la superficie transmitida a lo largo de la curva cuyo vector tangente es  $\tilde{\mathbf{V}}_2$  y similarmente para  $\tilde{f}_2$ . En las Figs. 5.13 y 5.14 se representan estas proyecciones en los defectos localizados. se observa que los esfuerzos están localizados, la región cóncava en la vecindad de los polos está sujeta a tensión radial en respuesta a las fuerzas externas, mientras que el puente sobre él, está bajo compresión. Las proyecciones correspondientes del esfuerzo tangencial en la dirección de menor curvatura se obtienen con un cambio de signo, una consecuencia directa del carácter sin traza del tensor de esfuerzos. Entonces, por ejemplo, la tensión radial dentro del pellizco está acompañada por una compresión en la dirección ortogonal. En las Figs. 5.13b (c) y 5.14b (c) se representan las proyecciones del tensor de esfuerzos normal en las direcciones  $\tilde{\mathbf{V}}_1$  ( $\tilde{\mathbf{V}}_2$ ). También están localizadas en la región alrededor de los defectos. El cambio de signo a través de los respectivos ejes de simetría se puede interpretar en términos del balance de fuerzas en equilibrio.

En estas figuras se observa que lejos de los defectos –situados en el origen– los esfuerzos decaen, por lo que la superficie es flácida. Para ver esto se estudia el comportamiento de la proyección  $\tilde{f}_{11}$  como función de la distancia  $|\tilde{\mathbf{X}}|$  en la geometría de los defectos. Haciendo la expansión multipolar del término  $|\tilde{\mathbf{X}}| = |\tilde{\mathbf{X}}_0 - \mathbf{x}_0|$  en la expresión (5.108a) y tomando en cuenta que la diferencia entre las dos curvaturas  $\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2$  es siempre finita se encuentra que en la región lejana de los defectos el término dominante en la serie es el monopolo, por lo que la proyección  $\tilde{f}_{11}$  decae como  $\approx \cos \vartheta / |\tilde{\mathbf{X}}_0|$  donde  $\vartheta$  es el ángulo entre  $\tilde{\mathbf{X}}$  y la normal inversa

$\tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{X}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = |\tilde{\mathbf{X}}| \cos \tilde{\vartheta}$ . Además, para este caso de las proyecciones tangenciales, en este límite la superficie es asintóticamente plana, por lo que  $\tilde{\mathbf{X}}$  y  $\tilde{\mathbf{n}}$  son ortogonales y en consecuencia el factor  $\cos \vartheta$  contribuye al carácter nulo de esta proyecciones.

## 5.5. Conclusiones

Existen pocos resultados exactos en el régimen no lineal en los modelos de membranas fluidas. Sin embargo, la invariancia conforme de la energía de doblamiento permite acceder a este régimen de gran interés físico que de otra manera parece inaccesible de forma analítica. Aprovechando esta simetría se presentó una descripción exacta del comportamiento de los estados en equilibrio de vesículas desinfladas con área fija y que tienen  $k$  puntos en contacto.

Las constricciones típicamente introducen nuevos estados. Se encontró que existe un enorme intervalo de morfologías que son consistentes con las constricciones de contacto. Esto es notable si se recuerda que todas ellas se originan a partir de superficies mínimas muy simples.

Existen dos regímenes que son de interés particular. Por una parte está el régimen que consiste en las geometrías límite que se obtienen cuando el centro de inversión está muy lejos del origen. Para la inversión del catenoide, estas geometrías parece que siempre consisten en esferas que se tocan en un punto, conectadas por un cuello catenoidal pequeño en otro punto.

Por otra parte se tiene el régimen que describe defectos localizados finitos en una vesícula que se generan cuando el punto de inversión está cerca de la superficie.

La invariancia conforme constriñe severamente las fuerzas en las geometrías transformadas. Las contrapartes inversas de los  $k$ -noides heredan la peculiaridad que las fuerzas tienen la misma magnitud y que están sobre un mismo plano. Esta última característica no necesariamente se mantendrá cuando se involucran cuatro o más puntos en contacto. En la literatura matemática, por ejemplo en las referencias [47] y [48], se han presentado generalizaciones de los  $k$ -noides regulares en las que no todos los ángulos entre los cuellos son iguales. También se han descrito superficies mínimas que, con mayor generalidad, la simetría dihedral de orden  $k$  sobre un plano se extiende para incluir simetrías tridimensionales, por ejemplo las de los sólidos platónicos. En estas geometrías los ángulos entre los cuellos catenoidales se pueden modificar, lo que permite la posibilidad de variar las fuerzas que mantienen en equilibrio a estas geometrías desinfladas.

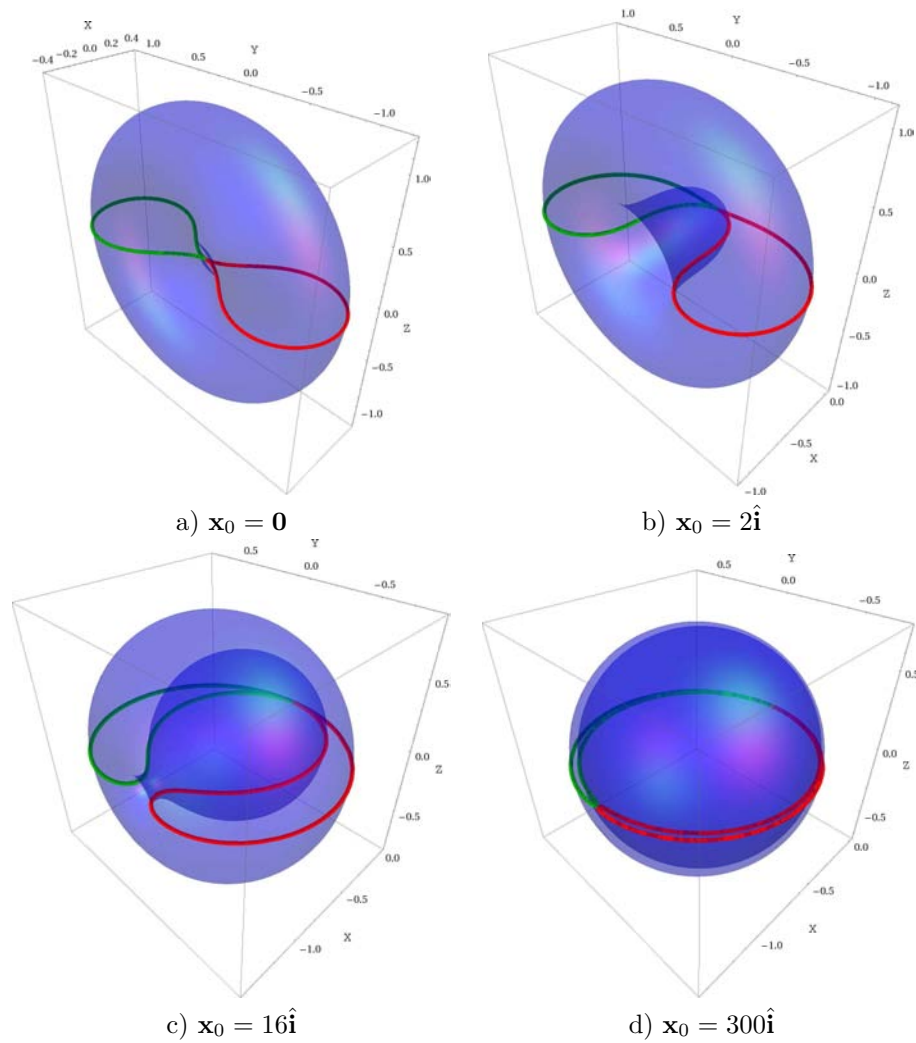


Figura 5.7: Transición de forma de las vesículas desinfladas con simetría axial; el centro de inversión se localiza en el eje  $\mathbf{x}_0 = x_0 \hat{\mathbf{i}}$ . Iniciando con el centro de inversión en el origen se obtiene una geometría tipo discocito a). Moviendo el centro de inversión fuera del origen, pero sobre el eje de simetría del catenoide, se obtienen geometrías en forma de una copa b). Conforme el centro de inversión se aleja del origen, la cavidad aumenta de tamaño c), tendiendo hacia el límite de una esfera dentro de otra cuando el centro de inversión está muy lejos del origen d).

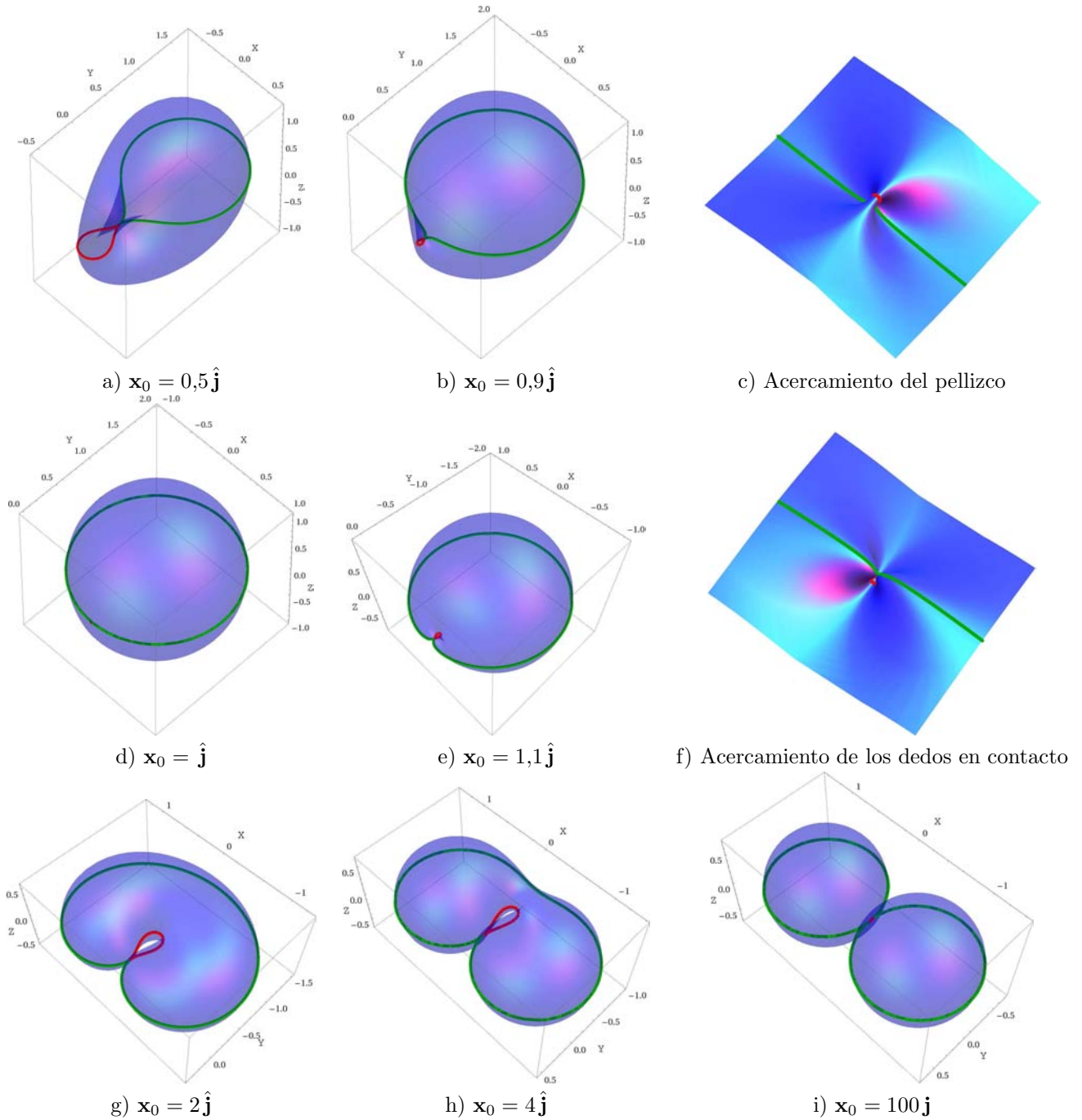


Figura 5.8: Transición de las superficies inversas obtenidas de la inversión del catenoide en esferas centradas en el eje  $x_0 = y_0\hat{j}$ . Las superficies resultantes poseen dos puntos en contacto así como simetría especular con respecto al plano  $Z = 0$ . Conforme el centro de inversión se mueve fuera del origen, un lóbulo aumenta de tamaño mientras que el otro disminuye a). En la proximidad del catenoide se obtienen superficies con defectos localizados b) y e). Dependiendo de si el centro de inversión está afuera o dentro del catenoide el defecto se asemeja a un pellizco c) o a dos dedos en contacto f). Cuando el centro de inversión está sobre el catenoide se obtiene una esfera de radio 1, d). Conforme el centro de inversión se aleja del catenoide, los defectos se esparcen sobre la superficie g) y h). En el límite que el centro de inversión está muy lejos del origen, la superficie tiende a dos esferas tangentes de radios  $1/\sqrt{2}$ .

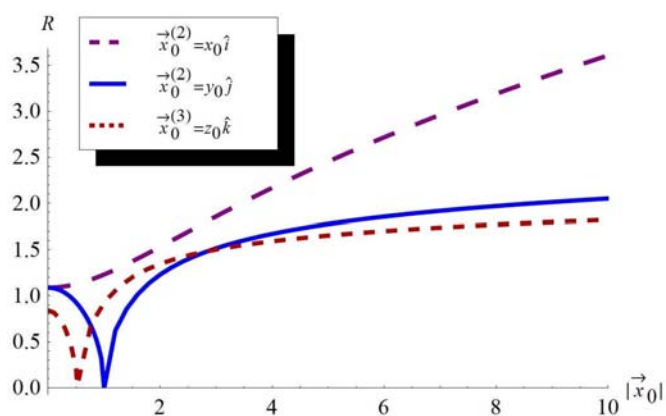


Figura 5.9: Radio de inversión como función del centro de inversión a lo largo del eje de simetría del catenoide (línea púrpura) y a lo largo de un eje perpendicular a éste (línea azul). También se grafica el radio de inversión para el trinoide cuando éste se invierte a lo largo del eje  $\mathbf{x}_0 = z_0 \hat{\mathbf{k}}$  (línea rojo carmín), de forma que se preserve la simetría dihedral de orden 3.

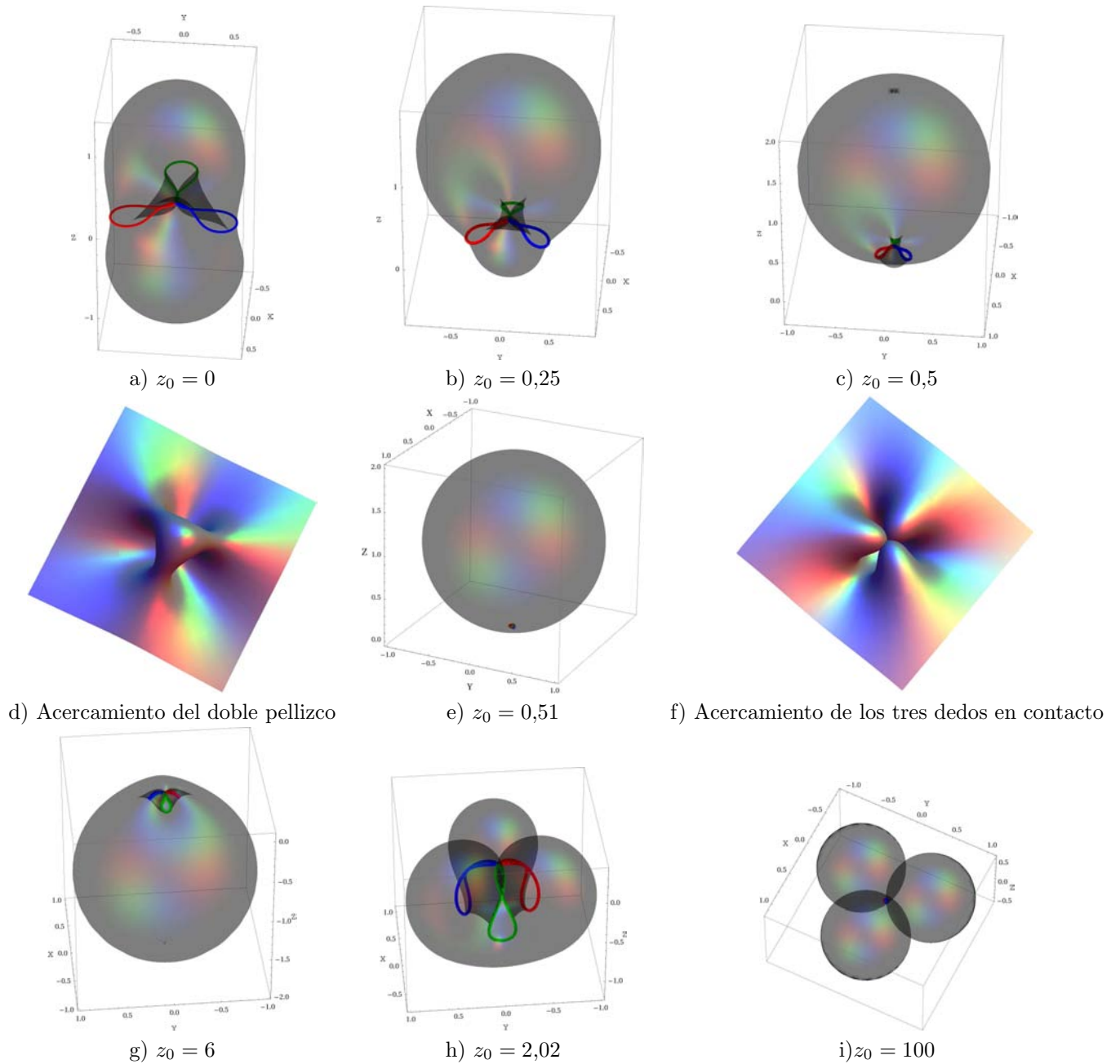


Figura 5.10: Transición de forma para superficies obtenidas a partir de la inversión del trinoide en esferas centradas a lo largo del eje  $\mathbf{x}_0 = z_0\mathbf{k}$ . Estas superficies inversas tienen tres puntos en contacto y poseen además simetría dihedral de orden 3. Comenzando con el centro de inversión en el origen se obtiene una superficie similar a la de Lawson a). Conforme el centro de inversión se aproxima al trinoide, el lóbulo superior se agranda y el inferior se encoge b) y c). Cuando el centro de inversión está próximo al trinoide se obtienen superficies con defectos localizados d) y f). Cuando está sobre el trinoide se obtiene una esfera unitaria e). Conforme el centro de inversión se aleja del trinoide el defecto se deslocaliza g) y h), tendiendo en el límite cuando está muy lejos del trinoide a tres esferas de radio  $1/\sqrt{3}$  que se autointersectan i).

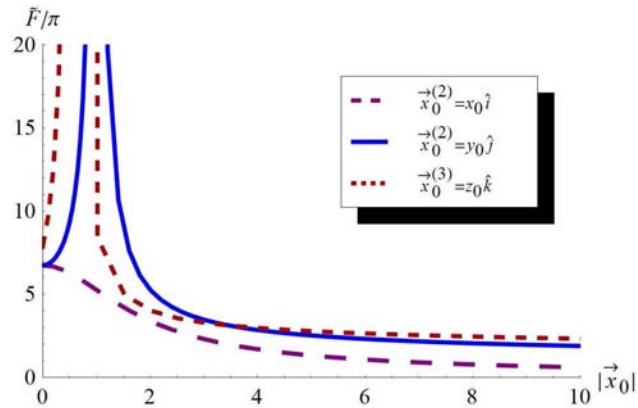


Figura 5.11: Magnitud de la fuerza vs.  $\mathbf{x}_0$  a lo largo del eje de simetría del catenoide (línea púrpura) y a lo largo de un eje perpendicular a éste (línea azul). También se muestra la magnitud de la fuerza como función del centro de inversión lo largo del eje  $Z$  del trinoide (línea rojo carmín). En general, la magnitud de la fuerza diverge conforme el centro de inversión se aproxima a las superficies y decae conforme éste se aleja de ellas.

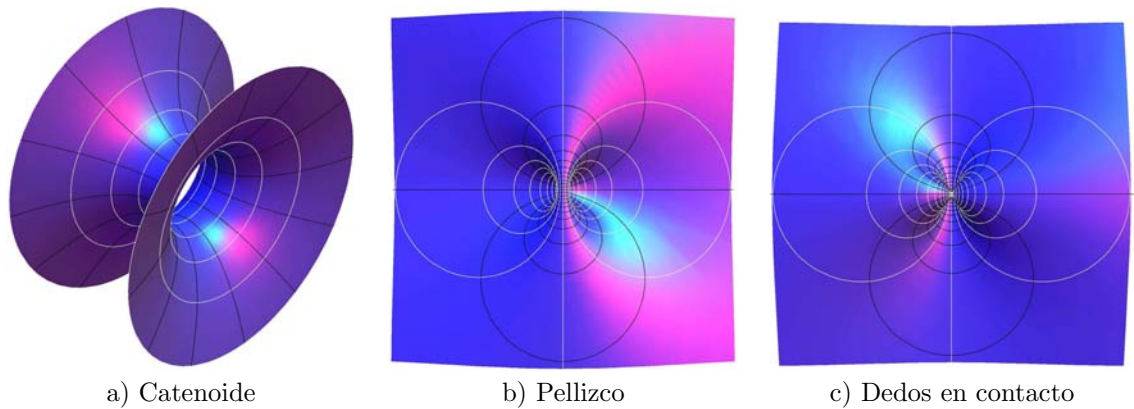


Figura 5.12: Curvas principales del catenoide, a) y de los defectos localizados sobre las superficies inversas obtenidas cuando el centro de inversión está próximo al catenoide b) y c). Los meridianos (catenarias mostradas en color negro en a)) se mapean a curvas que inician y terminan en los polos. Los paralelos (círculos mostrados en color blanco en a)) se mapean a curvas cerradas que rodean los polos.

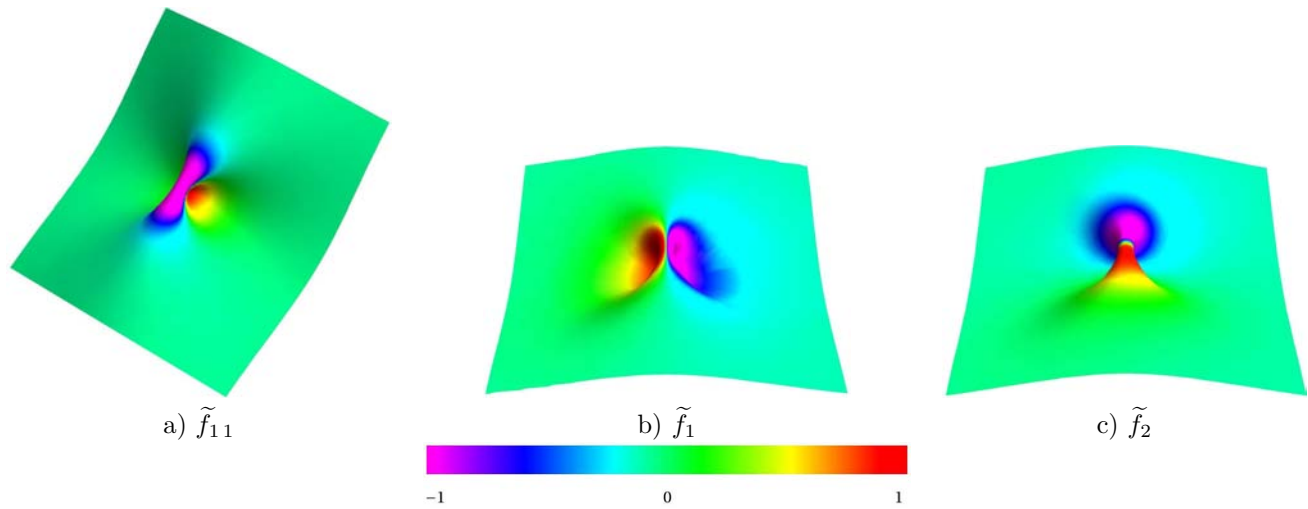


Figura 5.13: Distribución de esfuerzos en el defecto del pellizco. Los esfuerzos están concentrados en la región cercana a los polos.

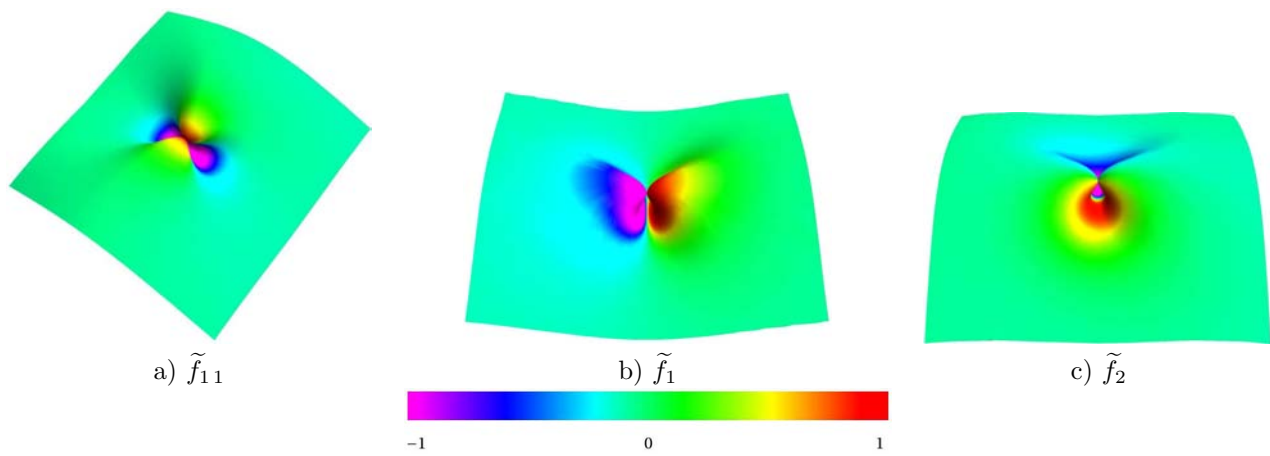


Figura 5.14: Distribución de esfuerzos en el defecto de los dos dedos en contacto.





## Capítulo 6

# Deformaciones de superficies planas inextensibles

Materiales como el papel o el aluminio son inextensibles, es decir, presentan gran resistencia a ser deformados por esfuerzos tangenciales, propiedad física que geoméricamente significa que la métrica inducida sobre la superficie, no cambia bajo deformaciones, por lo que las únicas deformaciones posibles son isometrías de la superficie original.

Esta restricción local sobre la geometría limita las maneras en las que la superficie puede ser deformada sin estirarla. Si la superficie original es plana, lo que implica que su curvatura Gaussiana es nula, se tiene que de acuerdo con el teorema Egregium de Gauss, las posibles deformaciones también poseerán curvatura Gaussiana cero. Así las únicas posibles deformaciones candidatas son partes de superficies desarrollables, las cuales están constituidas por líneas rectas llamadas generatrices, teniendo la característica de que todos los puntos pertenecientes a una de estas rectas poseen el mismo plano tangente. Las superficies que pertenecen a esta categoría son los conos, los cilindros y las superficies desarrollables en su tangente [34].

Teniendo en cuenta lo anterior, se encuentra que, energéticamente, la manera más efectiva de doblarse respetando la restricción de inextensibilidad es por medio de la formación de series de picos y líneas de estrés [20]. En la vecindad de uno de estos picos la superficie es un cono desarrollable, (excepto en el ápice donde presenta una singularidad). Este mismo tipo de conos se presenta de igual manera en la deformación que resulta de aplicar una fuerza en un punto de la superficie. Este tipo de defectos cónicos, llamados  $d$ -conos fueron descritos primero por Ben Amar y Pomeau [5] y luego por Cerda y Mahadevan [20].

En la referencia [36], se introdujo un enfoque variacional para analizar la deformación de una superficie plana inextensible, aplicándolo particularmente a la descripción de los patrones que resultan de doblar una hoja de papel, particularmente los de forma cónica descritos por los conos desarrollables. A continuación se realiza una revisión de los resultados presentados en dicha referencia, los cuales serán utilizados en la sección 6.3 para estudiar la deformación de los conos desarrollable. Posteriormente estos resultados serán generalizados en el contexto de las superficies desarrollables en sus tangentes en la sección 6.5.

## 6.1. Doblamiento con constricciones locales: conos desarrollables

Como se mencionó anteriormente, las configuraciones que son de interés en el contexto del doblamiento de superficies planas inextensibles, son aquellas que minimizan la energía elástica de doblamiento

$$H[X] = \frac{1}{2} \int dA K^2, \quad (6.1)$$

sujetas a la condición de que su métrica esté fija. Adaptando el marco teórico presentado en la referencia [37], esta restricción métrica se impone usando un tensor simétrico de segundo rango  $T^{ab}$ <sup>1</sup>, cuyas componentes actúan como multiplicadores de Lagrange locales, de forma tal que el Hamiltoniano efectivo ahora es

$$H_C[\mathbf{X}] = H[\mathbf{X}] - \frac{1}{2} \int dA T^{ab} (g_{ab} - g_{ab}^0) \quad (6.2)$$

donde  $g_{ab}^0$  es la métrica de la superficie original. El tensor de esfuerzo  $f_C^a$  obtenido de este Hamiltoniano es

$$\mathbf{f}_C^a = \mathbf{f}^a + T^{ab} \mathbf{e}_b \quad (6.3)$$

donde como antes  $\mathbf{f}^a = K(K^{ab} - Kg^{ab})\mathbf{e}_b - \nabla^a K \mathbf{n}$ . Se puede ver que la restricción sobre la métrica introduce esfuerzos tangenciales proporcionales al multiplicador  $T^{ab}$ , de manera que ahora se tiene una nueva tensión tangencial que compite con la que surge del doblamiento de la superficie: se introducirá tensión sobre la superficie siempre que la acción de la restricción sea antagónica al doblamiento. Estas expresiones son completamente generales.

Como antes, en ausencia de fuerzas externas el equilibrio se expresa con la conservación del tensor de esfuerzos,  $\nabla_a \mathbf{f}^a = 0$ . Su proyección en la dirección normal proporciona la ecuación de Euler-Lagrange

$$\varepsilon_{\perp} = -\Delta K - \frac{1}{2} K^3 - K_{ab} T^{ab} = 0 \quad (6.4)$$

Para este caso, la restricción introduce un término en el cual el esfuerzo tangencial  $T^{ab}$  se acopla linealmente a la curvatura extrínseca.

En cuanto a las ecuaciones de Euler-Lagrange tangenciales, éstas quedan como

$$\varepsilon_{\parallel}^b \equiv \nabla_a \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{e}^b = K(\nabla_a K^{ab} - g^{ab} \nabla_a K) + \nabla_a T^{ab}, \quad (6.5)$$

las cuales por medio de la condición de Codazzi-Mainardi contraída se reducen a

$$\varepsilon_{\parallel}^b = \nabla_a T^{ab} = 0 \quad (6.6)$$

mostrando que el tensor de esfuerzos tangencial se conserva.

Este marco teórico se aplicará primero a los defectos más sencillos que se observan en el doblamiento de una superficie plana, los conos desarrollables y posteriormente a la forma genérica de doblar una superficie de este tipo, descrita por las superficies desarrollables en su tangente.

---

<sup>1</sup>Aunque se usa la misma notación, este multiplicador cuya función es fijar la métrica para que después de la variación siga siendo igual a  $g_{ab}^0$ , no debe confundirse con el que fue empleado en el capítulo 3 y en la referencia [37] para implementar la definición de la métrica de forma que pueda variarse de forma independiente de  $\mathbf{X}$  al realizar la variación de  $\mathcal{H}_c$ .

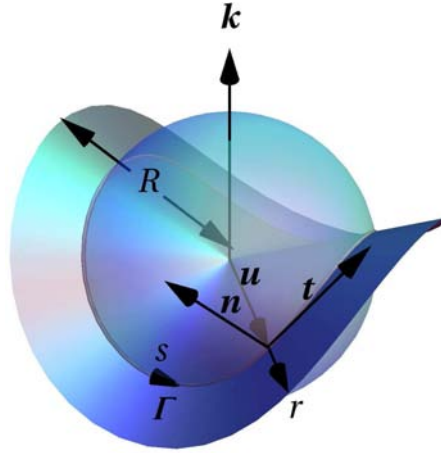


Figura 6.1: Geometría del cono desarrollable. Esta clase de superficies está descrita por una curva  $\Gamma$  sobre la esfera unitaria. El marco de Darboux adaptado a esta curva consiste en el trihedro  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{u})$ .

## 6.2. Conos desarrollables

Un cono desarrollable puede ser descrito por una curva cerrada  $\Gamma : s \rightarrow \mathbf{u}(s)$  sobre la esfera unitaria, donde  $s$  es el parámetro de longitud de arco. Denotando por  $r$  la distancia desde el ápice en la dirección  $\mathbf{u}(s)$  (ver Fig. 6.1), las funciones de encajamiento  $\mathbf{X}$  en el espacio Euclidiano tridimensional  $\mathbb{E}^3$  del cono desarrollable, están dadas por

$$\mathbf{X}(r, s) = r\mathbf{u}(s). \quad (6.7)$$

Los vectores tangentes y la normal exterior al cono adaptados a esta parametrización son

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{u}(s), \quad \mathbf{e}_s = r\mathbf{t}(s), \quad \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{t}. \quad (6.8)$$

donde  $\mathbf{t} = \mathbf{u}'$  es el vector tangente unitario y la prima representa diferenciación con respecto  $s$ . Así, los elementos de línea y de área sobre el cono son respectivamente

$$dl^2 = dr^2 + r^2 ds^2, \quad dA = r dr \wedge ds. \quad (6.9)$$

La única componente no nula del tensor de curvatura extrínseca es  $K_{ss} = r\kappa$ , donde  $\kappa = -\mathbf{t}' \cdot \mathbf{n}$  es la curvatura normal de la curva sobre el cono, pero también es la curvatura geodésica de la curva sobre la esfera. Por ser una curva sobre la esfera, su torsión geodésica es cero.

$\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{n}$  forman el marco de Darboux adaptado a la curva sobre el cono desarrollable. La conexión de esta base de Darboux es

$$\mathbf{u}' = \mathbf{t}, \quad \mathbf{t}' = -\mathbf{u} - \kappa\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = \kappa\mathbf{t}. \quad (6.10)$$

La curvatura media del cono es  $K = \kappa/r$ , por lo que su energía de doblamiento es

$$H = \frac{1}{2} \int dA \left( \frac{\kappa}{r} \right)^2. \quad (6.11)$$

Integrándola desde una distancia finita  $r_0$  hasta una distancia constante  $R$  se tiene

$$H = \frac{1}{2} \ln(R/r_0) \int ds \kappa^2, \quad (6.12)$$

se observa que diverge en el ápice situado en el origen.

La ecuación de forma para esta geometría es

$$\varepsilon_{\perp} = -\frac{1}{r^3}(\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 + \kappa) - \kappa r T^{ss} = 0. \quad (6.13)$$

Como esta ecuación de ser independiente de  $r$ , consistencia requiere que  $r^4 T^{ss}$  sea función de  $s$  únicamente, que se denotará por  $-C_{\parallel}(s)$ .

Las componentes del tensor de esfuerzos tangencial  $T^{ab}$ , se determinan de la ley de conservación (6.6). Tomando las proyecciones de esta ecuación en las direcciones tangencial y radial  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{u}$ , se obtienen las ecuaciones

$$\text{tangencial} \quad r \frac{\partial T_{\perp\parallel}}{\partial r} + 2T_{\perp\parallel} + T'_{\parallel} = 0, \quad (6.14)$$

$$\text{radial} \quad r \frac{\partial T_{\perp}}{\partial r} + (T_{\perp} - T_{\parallel}) + T'_{\perp\parallel} = 0. \quad (6.15)$$

donde las proyecciones de  $T^{ab}$  en las direcciones tangencial y radial están dadas por

$$T_{\perp} \equiv l_a T^{ab} l_b = T^{rr}, \quad T_{\perp\parallel} \equiv t_a T^{ab} l_b = r T^{rs}, \quad T_{\parallel} \equiv t_a T^{ab} t_b = r^2 T^{ss} = -\frac{1}{r^2} C_{\parallel}(s). \quad (6.16)$$

$T_{\perp\parallel}$  se obtiene multiplicando la primera ecuación por el factor integrante  $r$

$$T_{\perp\parallel} = \frac{1}{r^2} \left( C'_{\parallel}(s) \ln r + C_{\perp\parallel}(s) \right). \quad (6.17)$$

Usando este resultado en la segunda ecuación se obtiene  $T_{\perp}$

$$T_{\perp} = \frac{1}{r^2} \left( C''_{\parallel}(s) (\ln r + 1) + C_{\parallel}(s) + C'_{\perp\parallel}(s) \right) + \frac{1}{r} C_{\perp}(s). \quad (6.18)$$

En estas expresiones  $C_{\perp\parallel}(s)$  y  $C_{\perp}(s)$  son funciones arbitrarias que dependen únicamente de la longitud de arco. En el caso en el que la superficie es simétrica, por ejemplo para un disco circular, la componente no diagonal debe anularse,  $T_{\parallel\perp} = 0$ , de manera que la ecuación (6.14) se reduce a  $T'_{\parallel} = 0$  y por lo tanto  $C_{\parallel}$  es constante [36].

De esta manera se tiene que la dependencia radial de los esfuerzos tangenciales está fuertemente restringida por la geometría. Además, con estos resultados, las proyecciones  $\mathbf{f}_{\parallel} = \mathbf{f}^a t_a$  y  $\mathbf{f}_{\perp} = \mathbf{f}^a u_a$  del tensor de esfuerzos quedan determinadas

$$\mathbf{f}_{\parallel} = \frac{1}{r^2} \left( \left( \frac{1}{2} \kappa / r + r T_{\parallel} \right) \mathbf{t} + r T_{\perp\parallel} \mathbf{u} - \kappa' / r \mathbf{n} \right) \quad (6.19)$$

$$\mathbf{f}_{\perp} = \frac{1}{r^2} \left( r^2 T_{\perp\parallel} \mathbf{t} + (T_{\perp} - \frac{1}{2} \kappa^2) \mathbf{u} + \kappa \mathbf{n} \right) \quad (6.20)$$

Así se tiene ya la distribución completa de esfuerzos sobre la superficie, asociada con su doblamiento y consistente con la constricción de inextensibilidad.

Usando la expresión de  $T^{ss}$  y definiendo  $\sigma = 1 - C_{\parallel}$ , la ecuación de forma (6.13) queda finalmente como

$$\varepsilon_{\perp} = -\frac{1}{r^3} \left[ \kappa'' + \kappa \left( \frac{\kappa^2}{2} + \sigma \right) \right] = 0, \quad (6.21)$$

que salvo el factor irrelevante  $1/r^3$ , es precisamente la ecuación de Euler-Lagrange para la elástica de Euler sobre una esfera derivada en el capítulo 2. Por lo tanto posee mismas soluciones que fueron discutidas anteriormente. La única diferencia es la interpretación de la constante  $M$ . Para este caso de conos desarrollables,  $M$  es la magnitud de la torca por unidad de longitud a lo largo de la curva, es decir del vector resultante de la proyección tangencial del tensor de torcas sobre la superficie,  $\mathbf{M} = t^a \mathbf{m}_a$ , en lugar del vector de torcas sobre la curva [36]. En la figura 6.1 se ilustra el cono desarrollable generado por la solución con  $n = 2$ . En la siguiente sección se analiza la estabilidad de estos conos desarrollables.

### 6.3. Deformaciones isométricas de conos

En esta sección se examinan las deformaciones isométricas de los conos desarrollables. Los resultados obtenidos se utilizarán para analizar su estabilidad y de esta manera determinar si pueden tener una realización física.

La deformación de las funciones de encajamiento  $\delta\mathbf{X}$  se puede descomponer en sus partes tangencial y normal como  $\delta\mathbf{X} = \psi^a \mathbf{e}_a + \phi \mathbf{n}$ . De la expresión de la primera variación del tensor métrico (B.9), se obtiene que para una deformación isométrica, las componentes normal y tangenciales están relacionadas

$$\phi K_{ab} = -\frac{1}{2}(\nabla_a \psi_b + \nabla_b \psi_a). \quad (6.22)$$

Explícitamente, esta condición está dada por las siguientes tres ecuaciones

$$\dot{\psi}^{(1)r} = 0 \quad (6.23a)$$

$$r^2 \dot{\psi}^{(1)s} + \psi^{(1)r'} = 0 \quad (6.23b)$$

$$\kappa \phi^{(1)} + r \psi^{(1)s'} + \psi^{(1)r} = 0 \quad (6.23c)$$

donde  $\dot{\phantom{x}}$  y  $'$  denotan las derivadas parciales con respecto a  $r$  y a  $s$  respectivamente.

Resolviendo estas ecuaciones se encuentra que las deformaciones están dadas por dos funciones  $\chi(s)$  y  $\xi(s)$

$$\psi^r = \chi \quad (6.24a)$$

$$\psi^s = \frac{1}{r} \chi' + \xi \quad (6.24b)$$

$$\kappa \phi = -(\chi'' + \chi + r \xi') \quad (6.24c)$$

Descomponiendo la deformación normal como  $\phi = r\phi_C + \phi_T$  y agrupando en potencias de  $r$ , la deformación se puede expresar como la suma de dos partes independientes

$$\delta\mathbf{X} = \delta\mathbf{X}_C + \delta\mathbf{X}_T, \quad (6.25)$$

donde

$$\delta\mathbf{X}_C = r(\xi \mathbf{t} + \phi_C \mathbf{n}), \quad \kappa \phi_C + \xi' = 0, \quad (6.26a)$$

$$\delta\mathbf{X}_T = \chi \mathbf{u} + \chi' \mathbf{t} + \phi_T \mathbf{n}, \quad \kappa \phi_T + \chi'' + \chi = 0. \quad (6.26b)$$

Las relaciones para  $\phi_C$  y  $\phi_T$  dadas por (6.26) implican que la diferenciación  $'$  conmuta con la variación  $\delta$

$$\mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{X}' = r(\kappa \phi_C + \xi') + (\kappa \phi_T + \chi'' + \chi) = 0, \quad (6.27)$$

de manera que  $s$  continua siendo longitud de arco después de la deformación.

La integración de estas dos relaciones a lo largo de un contorno cerrado sobre el cono provee las condiciones adicionales

$$\oint \kappa \phi_C = 0, \quad \oint (\kappa \phi_T + \chi) = 0. \quad (6.28)$$

Reexpresando  $\delta \mathbf{X}_C$  como  $r \delta \mathbf{u}$ , se tiene que a primer orden, el cono deformado está dado por

$$\tilde{\mathbf{X}} = r(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) + \delta \mathbf{X}_T. \quad (6.29)$$

La parte  $\delta \mathbf{X}_C$  deforma el cono original en otro cono con el mismo ápice, ya que transforma la curva  $\mathbf{u}$  que representa al cono original, en otra curva  $\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$  sobre la esfera unitaria.

Por otra parte,  $\delta \mathbf{X}_T$  no depende de  $r$ , de modo que en general mapea el ápice del cono a una curva cerrada y dado que la superficie deformada continua siendo plana, esta parte de la deformación transforma el cono original en una superficie desarrollable en su tangente.

En lo subsecuente sólo se considerará la parte de la deformación cónica y se omitirá el subíndice  $C$ .

### 6.3.1. Condiciones de frontera para conos desarrollables

Habiendo determinado la deformaciones cónicas admisibles, se está en posición de identificar las condiciones de frontera consistentes con la condición de inextensibilidad. Esto se hará requiriendo que la energía sea estacionaria con respecto a deformaciones de las fronteras libres consistentes con isometría. Esta restricción modificará las condiciones de frontera con respecto a las correspondientes a doblamiento sin constricciones, por ejemplo las de la frontera de una membrana fluida. Se incurriría en un grave error si se aplican las condiciones de frontera de una membrana fluida sobre una superficie plana. Una membrana fluida sin curvatura espontánea necesariamente tiene curvatura media nula sobre su frontera, independientemente del valor de la tensión lineal sobre ella [15]. Ciertamente este no es el caso aquí considerado. El doble requerimiento de tener ambas curvaturas, la Gaussiana y la media implicaría que todo punto de la frontera de la superficie es plano.

En equilibrio el cambio en la energía asociado con la frontera de la superficie es [37, 73]

$$\delta H = - \int_{\partial \Sigma} dl (\mathbf{f}_\perp \cdot \delta \mathbf{X} - K \mathbf{l} \cdot \delta \mathbf{n}), \quad (6.30)$$

donde  $\mathbf{l}$  es la normal exterior a la frontera sobre la superficie,  $\mathbf{f}_\perp$  es la proyección de  $\mathbf{f}^a$  en este vector dada por  $\mathbf{f}_\perp = l_a \mathbf{f}^a$ ,  $dl$  es la longitud de arco en la frontera, y  $\delta \mathbf{n}$  es la deformación del vector normal inducida por  $\delta \mathbf{X}$ .

En términos la proyecciones de  $T^{ab}$  en las direcciones tangencial y radial, este cambio en la energía se puede expresar como

$$\delta H = - \int dl \left( \psi_\parallel T_{\parallel\perp} + \psi_\perp (T_\perp - \frac{1}{2} K^2) + K \nabla_\perp \phi - \nabla_\perp K \phi \right). \quad (6.31)$$

donde  $\psi_\parallel = \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{t}$  y  $\psi_\perp = \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{l}$ . Aquí se ha introducido la notación  $\nabla_\perp = l^a \nabla_a$  para la proyección de la derivada covariante.

Ahora se especializa este resultado para una curva situada a una distancia constante del ápice,  $r$ , de manera que el elemento sobre ella es  $dl = r ds$ . Usando las expresiones de las componentes tangenciales de la deformación (6.24) se obtiene que  $\psi_\parallel$  y  $\psi_\perp$  están dadas por

$$\psi_\parallel = \chi' + r \xi \quad \psi_\perp = \chi. \quad (6.32)$$

Sustituyendo (6.32) en (6.31) e integrando por partes para eliminar las derivadas de  $\chi$  y  $\xi$  se obtiene

$$\delta H = - \int ds \left( \frac{\chi'}{r} - r T_{\parallel\perp} \chi + 2\xi \right)' \quad (6.33)$$

$$- \int_c ds \left[ \left( r(T_{\perp} - T'_{\parallel\perp}) - \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\kappa^2}{2} \right) \right) \chi + r^2 T_{\parallel\perp} \xi \right] \quad (6.34)$$

Este cambio de la energía debe ser estacionario bajo deformaciones arbitrarias de la frontera. Entonces para la frontera con  $r = R$ , se tiene que  $\delta H_b|_{r=R} = 0$ . Considerando deformaciones periódicas  $\chi$  y  $\xi$ , dado que son arbitrarias, sus coeficientes deben ser cero, lo que posibilita determinar  $C_{\parallel\perp}$  y  $C_{\perp}$

$$C_{\parallel\perp} = -C'_{\parallel} \ln R, \quad R C_{\perp} = -C''_{\parallel} - C_{\parallel} + \frac{\kappa^2}{2} + 1. \quad (6.35)$$

Entonces  $T_{\parallel\perp}$  y  $T_{\perp}$  están dadas completamente en términos de  $C_{\parallel}$  y  $\kappa$

$$T_{\parallel\perp} = C'_{\parallel} \frac{1}{r^2} \ln \frac{r}{R}, \quad (6.36)$$

$$T_{\perp} = C''_{\parallel} \frac{1}{r^2} \left( \ln \frac{r}{R} + 1 - \frac{r}{R} \right) + C_{\parallel} \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{r}{R} \right) + \frac{1}{rR} \left( 1 + \frac{\kappa^2}{2} \right). \quad (6.37)$$

Con esto se puede determinar fuerza total que actúa sobre una curva de  $r$  constante, la cual está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}|_r &= \oint d\mathbf{l} \mathbf{f}_{\perp} = \oint ds r \mathbf{f}^r \\ &= \int ds \left[ \left( r T_{\perp} - \frac{\kappa^2}{2r} \right) \mathbf{u} + r T_{\parallel\perp} \mathbf{t} + \frac{\kappa_n}{r} \mathbf{n} \right]. \end{aligned} \quad (6.38)$$

En la frontera con  $r = R$  se tiene que  $T_{\parallel\perp} = 0$  y  $T_{\perp} = 1/R^2 (1 + \kappa_n^2/2)$ , de forma que de la evaluación de la expresión anterior resulta

$$\mathbf{F}|_{r=R} = \frac{1}{R} \oint ds (\mathbf{u} + \kappa_n \mathbf{n}) = -\frac{1}{R} \oint ds \mathbf{t}' = 0. \quad (6.39)$$

Así, se confirma que la fuerza total en la frontera es nula, como debe ser para un estado de equilibrio.

## 6.4. Estabilidad de conos deformados

Para examinar la estabilidad de los conos desarrollables se necesita evaluar la segunda variación de su energía de doblamiento 6.1. La expansión de este Hamiltoniano a segundo orden alrededor de sus configuraciones de equilibrio está dada por la expresión

$$\delta^2 H = \int dA \delta_{\mathbf{X}} \varepsilon_{\perp} \phi, \quad (6.40)$$

donde  $\delta_{\mathbf{X}} \varepsilon_{\perp}$  representa la primera variación de  $\varepsilon_{\perp}$  dada por la ecuación (6.4) bajo una isometría  $\delta \mathbf{X}$  manteniendo fijo  $T^{ab}$ . Usando el hecho que tanto el Laplaciano como la curvatura Gaussiana son invariantes bajo isometría se tiene que

$$\delta_{\mathbf{X}} \varepsilon_{\perp} = -\nabla^2 \delta K + 2K_G \delta K - \frac{3}{2} K^2 \delta K - T^{ab} \delta K_{ab}. \quad (6.41)$$

La contribución que proviene de la parte del doblamiento sólo requiere la evaluación de la curvatura media  $\delta K$ , pero además, también será necesario conocer la variación del tensor de curvatura extrínseca,  $\delta K_{ab}$



pues aparece como un término de fuente asociado con la constricción de isometría. Usando la expresión de la variación del tensor de curvatura extrínseca (B.23) junto con las expresiones de las componentes de la deformación cónica (6.24) se encuentra que la única componente no nula del tensor de curvatura deformado es

$$\delta K_{ss} = r\delta\kappa, \quad (6.42)$$

donde

$$\delta\kappa = -\mathbf{n} \cdot (\delta\mathbf{u}'' + \delta\mathbf{u}) = -\phi'' - \phi + (\kappa\xi)'. \quad (6.43)$$

$\delta\kappa$  es la variación de  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \kappa &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}', \\ \delta\kappa &= -\delta\mathbf{n} \cdot (-\kappa\mathbf{n} - \mathbf{u}) - \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{t}', \\ \delta\kappa &= -\mathbf{n} \cdot (\delta\mathbf{u}'' + \delta\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (6.44)$$

De manera similar, sustituyendo las expresiones de las componentes de la deformación (6.24) en la expresión de la variación de la curvatura media (B.26), se obtiene

$$\delta K = \frac{\delta\kappa}{r}. \quad (6.45)$$

Con estos resultados se obtiene que

$$\delta\mathbf{x}\varepsilon_{\perp} = -\frac{1}{r^3} \left( \delta\kappa'' + \left( \frac{3}{2}\kappa^2 + 1 - C_{\parallel} \right) \delta\kappa \right), \quad (6.46)$$

Sustituyendo esta expresión en (6.40) e integrando sobre  $r$  en el rango  $[r_0, R]$  (puesto que se consideran únicamente deformaciones cónicas de un disco circular),  $\delta^2 H$  se expresa como

$$\delta^2 H = -\ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \int ds \phi_C \left( \delta\kappa'' + \left( \frac{3}{2}\kappa^2 + 1 - C_{\parallel} \right) \delta\kappa \right) \quad (6.47)$$

Denotando  $a = \ln(R/r_0)$  y  $\sigma = 1 - C_{\parallel}$ , la segunda variación de  $H$  se puede reescribir como

$$\delta^2 H = -a \oint ds \phi \mathcal{L}_1 \delta\kappa, \quad (6.48)$$

donde  $\mathcal{L}_1$  es el operador auto-adjunto de segundo orden definido por

$$\mathcal{L}_1 = \partial_s^2 + \frac{3}{2}\kappa^2 + \sigma. \quad (6.49)$$

Como una consecuencia inmediata de la ecuación de EL (6.21),  $\mathcal{L}_1$  tiene como función propia nula (con valor propio cero) a la derivada de  $\kappa$ , lo cual se puede ver como sigue

$$\mathcal{L}_1 \kappa' = \kappa''' + \kappa' \left( \frac{3}{2}\kappa^2 + \sigma \right) = -(r^3 \varepsilon_{\perp})' = 0. \quad (6.50)$$

Tomando en cuenta que es auto-adjunto, se tiene que la deformación normal  $\phi = \kappa'$  es un modo cero debido a invariancia bajo reparametrizaciones del Hamiltoniano. Más adelante se verá que esta deformación corresponde a una rotación alrededor del eje de simetría dihedral de orden  $n$  que pasa por el ápice del cono. Expandiendo  $\delta\kappa$  en términos de  $\phi$  y  $\xi$  y usando condición de isometría (6.26), la segunda variación se puede reescribir como

$$\delta^2 H = a \oint ds \phi (\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \phi - \mathcal{L}_1(\kappa'\xi)), \quad (6.51)$$

donde nuevamente se ha introducido otro operador adjunto  $\mathcal{L}_2$  definido por

$$\mathcal{L}_2 = \partial_s^2 + \kappa^2 + 1. \quad (6.52)$$

Es directo demostrar que el conmutador de los operadores  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  es una derivada total

$$\phi[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]\phi = \frac{1}{2} ((\kappa^2)'\phi^2)' \quad (6.53)$$

por lo que conmutan como operadores en el espacio de Hilbert de funciones reales.

El segundo término en el integrando puede ser expresado como

$$-\phi\mathcal{L}_1(\kappa'\xi) = -\xi\mathcal{L}_1\kappa' + \left(\frac{1}{4}\phi^2\kappa^2\right)' + \frac{1}{2}\phi^2(3\kappa\kappa'' + (\kappa')^2), \quad (6.54)$$

de forma que, usando el hecho que  $\kappa'$  es función propia nula,  $\delta^2 H$  se reduce a

$$\delta^2 H = a \oint ds \phi \left( \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 + \frac{3}{2}\kappa\kappa'' + \frac{1}{2}(\kappa')^2 \right) \phi, \quad (6.55)$$

Expandiendo el término que involucra los dos operadores diferenciales se obtiene

$$\phi\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\phi = ((\kappa^2)'\phi^2)' + \phi \left( \phi'''' + \left(\frac{5}{2}\kappa^2 + \sigma + 1\right)\phi'' + \left(\frac{3}{2}\kappa^2 + \sigma\right)(\kappa^2 + 1)\phi \right). \quad (6.56)$$

Usando la ecuación de EL así como su primera integral en el segundo término, éste se puede expresar como

$$\frac{3}{2}\kappa\kappa'' + \frac{1}{2}(\kappa')^2 = \frac{1}{2}(J^2 - (1 - \sigma)^2) - \kappa^2 \left( \frac{7}{8}\kappa^2 + 2\sigma \right). \quad (6.57)$$

Sumando ambas expresiones se obtiene la expresión para la segunda variación del Hamiltoniano

$$\delta^2 H = a \oint ds \phi (\phi'''' + V_1\phi'' + V\phi), \quad (6.58)$$

donde las funciones  $V_1$  y  $V$  están definidas como

$$V_1 = \frac{5}{2}\kappa^2 + 1 + \sigma, \quad (6.59a)$$

$$V = \kappa^2 \left( \frac{5}{8}\kappa^2 + \frac{3}{2} - \sigma \right) + \frac{1}{2}(J^2 - (1 - \sigma)^2) + \sigma. \quad (6.59b)$$

El segundo término no es explícitamente auto-adjunto, para que sea manifiestamente así, se emplea la identidad (salvo derivadas totales)

$$\phi V_1 \phi'' = \phi(V_1 \phi')' + \frac{1}{2} V_1'' \phi^2. \quad (6.60)$$

Finalmente la segunda variación se expresa de la forma

$$\delta^2 H = a \oint ds \phi \mathcal{L} \phi \equiv \langle \phi | \mathcal{L} | \phi \rangle, \quad (6.61)$$

donde el operador diferencial auto-adjunto  $\mathcal{L}$  está definido por

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^4}{\partial s^4} + \frac{\partial}{\partial s} V_1 \frac{\partial}{\partial s} + V_2, \quad (6.62)$$

y el último término está dado por

$$V_2 = \frac{1}{2}V_1'' + V = \kappa^2 \left( -\frac{5}{4}\kappa^2 + \frac{3}{2} - 6\sigma \right) + 3(J^2 - (1 - \sigma)^2) + \sigma, \quad (6.63)$$

En  $V_2$  se han empleado nuevamente la ecuación de EL así como su primera integral para eliminar las derivadas con respecto a  $s$ .

Dado que  $\mathcal{L}$  es auto-adjunto, sus valores propios son reales. Si todos sus valores propios son positivos, entonces la configuración de equilibrio correspondiente será estable. En caso contrario, si alguno de ellos es negativo, esto indicará que existen deformaciones que podrían disminuir la energía de doblamiento, por lo que la configuración corresponde a un punto de silla de la energía y en consecuencia será inestable.

### Estabilidad de conos con exceso de ángulo pequeño

A continuación se analizará la estabilidad de conos con exceso de ángulo pequeño. En este límite el ángulo polar está dado por la longitud de arco,  $\phi = s$ . Así, se tiene que las soluciones con simetría dihedral de orden  $n$  son

$$\kappa(\phi) = \kappa_0 \cos n\phi, \quad \kappa_0 = \epsilon \frac{n^2 - 1}{n R_0}. \quad (6.64)$$

En esta aproximación  $\sigma = n^2$ , por lo que  $C_{\parallel} = 1 - n^2$ . Además  $M = n^2 - 1 = -C_{\parallel}$ . También, los operadores  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  se reducen a

$$\mathcal{L}_1 = \partial_s^2 + n^2, \quad \mathcal{L}_2 = \partial_s^2 + 1. \quad (6.65)$$

de forma que el operador auto-adjunto  $\mathcal{L}$  se factoriza como

$$\mathcal{L} = (\partial_s^2 + n^2)(\partial_s^2 + 1) \quad (6.66)$$

Como  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  conmutan los valores propios de  $\mathcal{L}$  están dados por el producto de sus valores propios, es decir, si  $\mathcal{L}_i \Phi = \lambda_i \Phi$ ,  $i = 1, 2$ , y  $\mathcal{L} \Phi = \lambda \Phi$ , entonces

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2. \quad (6.67)$$

La periodicidad implica que los modos de deformación admisibles están representados por una constante  $\Phi_0$  ( $l = 0$ ), así como por el conjunto  $\Phi_l \in \{\sin ls, \cos ls\}$ , ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ). En consecuencia, para un valor de  $n$  dado, los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  están indexados por un entero  $l = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_{1l} = n^2 - l^2, \quad \lambda_{2l} = 1 - l^2. \quad (6.68)$$

por lo tanto

$$\lambda_l = (n^2 - l^2)(1 - l^2). \quad (6.69)$$

En la figura 6.2 se muestran los valores propios para los casos  $n = 2, \dots, 5$  para valores de  $l = 0, \dots, 5$ . El modo constante con  $l = 0$  tiene valor propio positivo  $\lambda_0 = n^2$ . Debido a que por cada  $l$  hay un par de modos de deformación, todos los valores propios con  $l \geq 1$  son doblemente degenerados.

Existen 4 modos cero con  $\lambda_l = 0$ , lo cuales ocurren en  $l = 1$  y  $l = n$ . El modo  $\sin n\varphi \propto \kappa'$  corresponde a una rotación de la curva alrededor del eje de simetría dihedral de orden  $n$ . Los dos modos con  $l = 1$  corresponden a rotaciones alrededor de un eje ortogonal al eje de la rotación mencionado anteriormente. Estos tres modos son los modos cero debidos a la invariancia rotacional de la energía de doblamiento del cono. El cuarto modo cero  $\cos n\varphi$  es inconsistente con la restricción de isometría (6.26). Es también el único modo de deformación cónica inconsistente con isometría en este límite de exceso de ángulo pequeño.

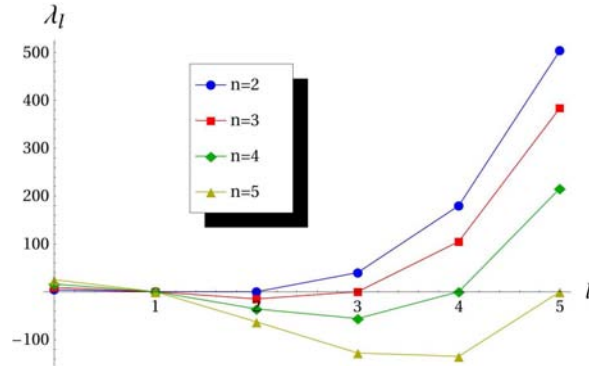


Figura 6.2: Valores propios de  $\mathcal{L}$  para  $n = 2, \dots, 5$  con  $l = 0, \dots, 5$

En la figura 6.2 se observa que sólo el estado base con  $n = 2$  es estable, pues todos sus valores propios son positivos. Todos los demás estados excitados con  $n \geq 3$  poseen algunos valores propios negativos por lo que son inestables. Existen  $2(n - 2)$  modos inestables de deformación que corresponden a  $l = 2, \dots, n - 1$  localizados entre los modos cero situados en  $l = 1$  y  $l = n$ . Todos los modos de deformación con  $l > n$  contribuyen con una energía positiva siendo en consecuencia estables.

El par de modos inestables dominantes son los que corresponden al menor de los valores propios negativos. El valor correspondiente de  $l$  es la parte entera de  $l_0 = (\sqrt{2n^2 + 1} + 1)/2$ . Para  $n = 3$  la única posibilidad es  $l = 2$ , para  $n = 4$ , el menor valor propio corresponde a  $l = 3$ . Para valores mayores de  $n$  se podría esperar una transición sucesiva de inestabilidades hasta alcanzar el estado estable con  $n = 2$ . Por ejemplo, la inestabilidad asociada con  $n = 10$  seguiría la secuencia  $10 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ , al menos para  $\phi_0$  pequeños. Es posible demostrar que estos resultados son válidos aun en el régimen no lineal [39].

## 6.5. Superficies desarrollables en su tangente

En esta sección se describe el modo de deformación de una superficie plana en superficie desarrollable en su tangente. Cualquier superficie desarrollable que no es plana en ningún punto (alguna de sus curvaturas es distinta de cero) puede ser descrita por esta clase de superficies, por lo que localmente representan la manera genérica de doblar una superficie plana [32].

Sus aplicaciones van desde explicar los patrones de una hoja de papel arrugada hasta la forma de algunos tejidos biológicos que siguen una ley de crecimiento lo más plano posible.

Este tema ha sido poco considerado anteriormente, sin embargo, se han estudiado casos especiales interesantes: Cerda, Mahadevan y Keller examinaron una banda de Moebius plana [19]; en analogía con el cono, la constricción topológica introduce esfuerzos en la hoja. Recientemente Starostin y Van der Heijden estudiaron también esta misma superficie en [93] y así como otras superficies con forma de lazos helicoidales en [94].

Estas superficies se obtienen a partir de una curva que no es plana en ningún punto, llamada borde de regresión (BdR), a lo largo de la cual la superficie es singular. La superficie se genera por las rectas tangentes a esta curva, las cuales forman las direcciones planas sobre la superficie. Físicamente, se presenta la situación inversa, se tiene una superficie plana y a partir de ella, en principio se puede encontrar el BdR extendiendo las líneas rectas sobre ella y determinando su envolvente [32] (ver Fig. 6.3). El problema es que usualmente esta curva no está físicamente sobre la hoja; las partes individuales de una

superficie desarrollable en su tangente, estarán truncadas por una dobles o una frontera antes de alcanzar la curva generadora correspondiente. Mas aún, esta curva frecuentemente exhibe singularidades. Las otras superficies desarrollables, los conos y los cilindros pueden ser considerados como casos degenerados de este tipo de superficie; el borde de regresión colapsa a un punto en el primer caso y en el segundo caso está en el infinito.

Igual que antes se está interesado en identificar las configuraciones de equilibrio de una hoja finita que es consistente con alguna especificación de fuerzas externas. Asimismo se necesitan identificar las condiciones de frontera apropiadas en los bordes libres de la hoja, consistentes con isometría. Con estas condiciones de frontera, en principio es posible resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange para el borde de regresión y la distribución de esfuerzos sobre la superficie.

## 6.6. Geometría de las superficies desarrollables en su tangente

Cualquier superficie plana puede ser descrita localmente por el desarrollo tangente de una única curva espacial, su borde de regresión (BdR). A continuación se presenta la construcción de una superficie en términos de esta curva.

Considerando una curva espacial  $\Gamma: s \rightarrow \mathbf{Y}(s)$  parametrizada por longitud de arco. Su vector tangente unitario es  $\mathbf{T} = \mathbf{Y}'$ . Se asume que  $\Gamma$  es regular de manera que su curvatura  $\kappa$  es positiva en todo punto,  $\kappa > 0$ .

La superficie desarrollable en su tangente (SdT) generada por  $\Gamma$  es la superficie definida por

$$\Sigma: (r, s) \rightarrow \mathbf{X}(r, s) = \mathbf{Y}(s) + r\mathbf{T}(s), \quad (6.70)$$

$-\infty < r < \infty$  [96, 34]. Esta superficie consiste de dos hojas que se unen a lo largo de  $\Gamma$ , cada una corresponde a un signo de  $r$ ;  $\Gamma$  es el BdR de  $\Sigma$ ; a menos que  $\Gamma$  sea plana, la superficie será singular en  $r = 0$ . Típicamente, en el doblamiento de una superficie, sólo una de estas hojas estará involucrada, por ejemplo sólo la obtenida de  $r > 0$  (ver Fig. 6.3).

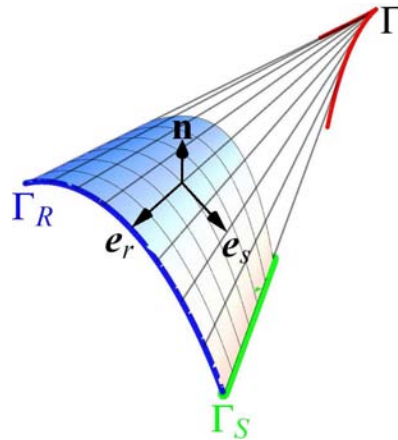


Figura 6.3: Superficie desarrollable en su tangente, la envolvente de todas las rectas generadoras es el borde de regresión  $\Gamma$  (línea roja). Incluso si la superficie es regular, típicamente el BdR es singular.

Los vectores tangentes a  $\Sigma$  adaptados a esta parametrización por  $s$  y  $r$  están dados

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{T}, \quad \mathbf{e}_s = \mathbf{T} + \kappa r \mathbf{N}. \quad (6.71)$$

Las componentes de tensor métrico  $g_{ab}$  así como de su inverso  $g^{ab}$  son

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \kappa^2 r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ab} = \frac{1}{\kappa^2 r^2} \begin{pmatrix} 1 + \kappa^2 r^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una propiedad de esta parametrización es que el área involucra únicamente a la curvatura de  $\Gamma$ . El determinante de la métrica,  $g = \det g_{ab}$ , es  $g = \kappa^2 r^2$ . Entonces el elemento de área  $dA = \sqrt{g} dr ds$  está dado por

$$dA = \kappa r dr ds. \quad (6.72)$$

En particular, el área de la hoja limitada por  $\Gamma$  y por una curva localizada a una distancia constante,  $r = R$  está dada por la curvatura total de  $\Gamma$

$$A = \frac{1}{2} R^2 \int ds \kappa. \quad (6.73)$$

Si  $\kappa$  es pequeña entonces también lo es el área generada; las líneas rectas no generan área. En el caso degenerado donde  $\Gamma$  es una curva plana cerrada, el área correspondiente a una región limitada por una  $r$  fija será proporcional a su número de rotación que es un invariante topológico [72]: Si  $\Gamma$  se recorre una vez,  $\int ds \kappa = 2\pi$ . Si  $\Gamma$  es un círculo de radio  $a$ , entonces la ecuación (6.73) proporciona correctamente el área de un anillo limitado por  $\Gamma$  y el círculo de radio  $\sqrt{a^2 + R^2}$ .

Como se necesitan calcular derivadas covariantes en la determinación de las componentes del tensor de esfuerzos tangencial, es necesario calcular los correspondientes símbolos de Christoffel, que se encuentra que son

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{rr} &= 0, & \Gamma^r_{sr} &= -\frac{1}{r} = \Gamma^r_{rs}, & \Gamma^r_{ss} &= -\left(r\kappa^2 + \frac{1}{r} + \frac{\kappa'}{\kappa}\right), \\ \Gamma^s_{rr} &= 0, & \Gamma^s_{sr} &= \frac{1}{r} = \Gamma^s_{rs}, & \Gamma^s_{ss} &= \frac{1}{r} + \frac{\kappa'}{\kappa}. \end{aligned} \quad (6.74)$$

El vector normal a  $\Sigma$  está dado por la binormal a  $\Gamma$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{B}$ ; en esta parametrización es independiente de  $r$ . Está definido en todo punto de  $\Sigma$  dado que se asume que  $\kappa \neq 0$ . Entonces las curvas de  $s$  constante corresponden a las direcciones asintóticas sobre  $\Sigma$ . Las componentes del tensor curvatura extrínseca  $K_{ab}$  así como las del operador de forma  $K^a_b$  están dadas por

$$K_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\kappa\tau r \end{pmatrix}, \quad K^a_b = \frac{\tau}{\kappa r} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.75)$$

Es evidente que una de las curvaturas principales es nula:  $C_1 = 0$ ; la dirección plana correspondiente está a lo largo de la dirección tangencial al BdR,  $\hat{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{T}$ . La curvatura no nula es proporcional a la razón entre la torsión y la curvatura y varía inversamente con la distancia del BdR a lo largo de los generadores,  $c_2 = -\frac{\tau}{\kappa r}$ ; su dirección correspondiente es a lo largo de la normal principal del BdR,  $\hat{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{N}$ .

La curvatura Gaussiana  $K_G$  es nula, i.e.  $K_G = 0$ , confirmando que la superficie es plana [31, 92].

El doble de la curvatura media está dada por la única curvatura principal no nula

$$K = -\frac{\tau}{\kappa r}. \quad (6.76)$$

Cabe señalar la relación inusual entre la curvatura de superficie y las del BdR: la curvatura de SdT está generada por la torsión; mientras más se curve la curva generadora más se curvará la superficie que desarrolla.

La ecuación (6.76) también indica que, lejos de la curva,  $K$  se anula y la superficie se vuelve plana. Sin embargo, sobre la curva generadora misma,  $K$  diverge. En este contexto, es importante notar que las superficies desarrollables generadas por las hélices circulares de diferentes radios son distintas, tiene curvaturas extrínsecas que divergen a lo largo de diferentes curvas.

La singularidad en la geometría extrínseca aparentemente descalifica a las SdT como no físicas si se extienden hasta su BdR. Sin embargo, no son menos físicas que la divergencia de  $K$  en el ápice del cono. En cualquier caso, tales superficies se pueden construir usando una hoja de papel y tijeras [96].

## 6.7. Energía de doblamiento, tensor de esfuerzos y ecuaciones de forma

Usando las ecuaciones (6.72) y (6.76) se encuentra que la energía de doblamiento (6.1) en una SdT toma la forma

$$H[\mathbf{X}] = \frac{1}{2} \int dr ds \frac{\tau^2}{\kappa r}. \quad (6.77)$$

Si se restringe el rango de  $r$  a un intervalo constante  $[r_c, R]$ , se reduce a la expresión simple

$$H[\mathbf{X}] = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{R}{r_c} \right) \int ds \frac{\tau^2}{\kappa}. \quad (6.78)$$

Dado que se asume que  $\kappa \neq 0$ , la densidad de la energía de doblamiento será finita en todo punto excepto sobre el BdR,  $\Gamma$ . Se necesita introducir una distancia de corte  $r_c$ , del orden del grosor de la hoja para excluir una vecindad de  $\Gamma$ . Esto es análogo al corte para excluir el ápice introducido en [21] en la descripción de formas cónicas.

La densidad de energía se anula si y sólo si la torsión se anula en todo punto de  $\Gamma$ , de forma que es una curva plana y la superficie que genera está sobre el mismo plano: a diferencia de la curvatura extrínseca, la torsión involucra tres derivadas, por lo que la energía de doblamiento de una SdT hereda esta peculiaridad.

Si se fija el rango de  $r$ , la energía de doblamiento de la superficie (6.78) se reduce a la energía elástica torsional asociada con una curva espacial. Como se mencionó anteriormente en el capítulo 2, en la referencia [62], Kuznetsov y Plyuschay se introdujeron análogos relativistas de este modelo, con el espacio Euclidiano sustituido por el espaciotiempo de Minkowski, para describir trayectorias de partículas relativistas. Las únicas soluciones de la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange de este Hamiltoniano reducido son hélices circulares con  $\kappa$  y  $\tau$  constantes. La SdT correspondiente es una rampa helicoidal. Si bien estas configuraciones quirales simples son interesantes por sí mismas—se estudiarán más adelante en la sección 6.12—constituyen sólo un pequeño subconjunto de todas las SdT que minimizan su energía de doblamiento.

En general, no es legítimo fijar el rango físico de  $r$ ; ni tampoco es apropiado considerar este rango como función de  $s$ . El rango de  $r$  y  $s$  dependerá de las fuerzas externas aplicadas a la hoja. No es obvio cómo se debe adaptar este proceso de reducción para incluir esta libertad. Afortunadamente, esto no es

necesario, pues es posible trabajar directamente con la ecuación (6.1) y derivar las ecuaciones de forma que caracterizan las configuraciones de equilibrio como se hizo para el caso de conos desarrollables. Recordando, el tensor  $\mathbf{f}^a$  es la suma de dos términos [36]:

$$\mathbf{f}^a = \mathbf{f}_B^a + T^{ab} \mathbf{e}_b, \quad (6.79)$$

la contribución que surge del doblamiento está dada por

$$\mathbf{f}_B^a = K \left( K^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} K \right) \mathbf{e}_b - \nabla^a K \mathbf{n}, \quad (6.80)$$

y el esfuerzo tangencial proporcional al multiplicador  $T^{ab}$  que implementa la restricción sobre la métrica.

La ecuación de forma está dada por

$$\varepsilon_{\perp} = -\Delta K - \frac{1}{2} K^3 - K_{ab} T^{ab} = 0, \quad (6.81)$$

donde el primer término corresponde a la derivada de Euler-Lagrange de la energía de doblamiento.

$T^{ab}$  está conservado,

$$\varepsilon^a = \nabla_b T^{ab} = 0. \quad (6.82)$$

Igual que antes, se necesita resolver el sistema de ecuaciones acopladas (6.81) y (6.82) sujetas a condiciones de frontera apropiadas.

### 6.7.1. Esfuerzos conservados

El tensor de esfuerzos asociado con el doblamiento está dado completamente en términos de la geometría del BdR y de la distancia a lo largo de las rectas generadoras. Sus dos componentes son

$$\mathbf{f}_B^r = \frac{\tau^2}{2r^4\kappa^4} ((1 - r^2\kappa^2) \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_s) - \frac{1}{r^3\kappa^2} \left( \frac{(1 + r^2\kappa^2)\tau}{r\kappa} + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \right) \mathbf{n}, \quad (6.83)$$

$$\mathbf{f}_B^s = -\frac{\tau^2}{2r^4\kappa^4} (\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_s) + \frac{1}{r^3\kappa^2} \left( \frac{\tau}{r\kappa} + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \right) \mathbf{n}. \quad (6.84)$$

De forma notable, los esfuerzos tangenciales  $T^{ab}$  también estarán especificados completamente excepto por dos funciones arbitrarias relacionadas con las condiciones de frontera que restringen la superficie.

La ecuación de forma (6.81) para una SdT está dada por

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{\kappa r^3} \left( \left( \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right)' + \frac{\tau^3}{2\kappa^2} + \tau \right) + \frac{1}{\kappa r^4} \left( \frac{2}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \left( \frac{\tau}{\kappa^2} \right)' \right) + \frac{3\tau}{\kappa^3 r^5} + \kappa \tau r T^{ss} = 0; \quad (6.85)$$

en la base adaptada al BdR, involucra sólo una componente del tensor de esfuerzos tangencial. Si se conoce el BdR,  $\kappa$  y  $\tau$  serán dos funciones conocidas de  $s$  y sólo faltará determinar  $T^{ss}$ . La validez de esta ecuación para todos los valores de  $r$  restringe su dependencia de  $r$

$$T^{ss}(r, s) = \sum_{n=4}^6 \frac{C_n(s)}{r^n}. \quad (6.86)$$



$C_n, n = 4, 5, 6$  son tres funciones de  $s$ . Sustituyendo esta expresión en la ecuación (6.85), se encuentra que ( $\mathcal{E}_\perp = \sum_{n=4}^6 \varepsilon_n r^{1-n}$ ) estas tres funciones están completamente determinadas por las curvaturas del BdR:

$$\varepsilon_4 = \kappa\tau C_4 + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right)' + \frac{\tau^3}{2\kappa^3} + \frac{\tau}{\kappa} = 0, \quad (6.87a)$$

$$\varepsilon_5 = \kappa\tau C_5 + \frac{2}{\kappa^2} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa^2} \right)' = 0, \quad (6.87b)$$

$$\varepsilon_6 = \kappa\tau C_6 + \frac{3\tau}{\kappa^3} = 0. \quad (6.87c)$$

Entonces, una vez que el BdR se ha identificado,  $T^{ss}$  está completamente determinado. Esto reproduce el comportamiento identificado para los conos, con el BdR reemplazando la curva sobre la esfera unitaria que caracteriza al cono.

Igual que para el caso de conos, las otras dos componentes de  $T^{ab}$  se determinan de las ecuaciones de conservación (6.82). Denotando las derivadas parciales con respecto a  $r$  por un punto encima, se usan las expresiones (6.74) de los símbolos de Christoffel para expresar las proyecciones de estas ecuaciones a lo largo de las direcciones  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_s$  como

$$\dot{T}^{rr} + \frac{1}{r} T^{rr} + T^{rs'} + \left( \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{2}{r} \right) T^{rs} - \left( \frac{1}{r} + \frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa^2 r \right) T^{ss} = 0, \quad (6.88)$$

$$\dot{T}^{rs} + \frac{3}{r} T^{rs} + T^{ss'} + \left( \frac{2\kappa'}{\kappa} + \frac{1}{r} \right) T^{ss} = 0. \quad (6.89)$$

Sustituyendo la expresión para  $T^{ss}$  dada por (6.86) en (6.89), es posible identificar la forma más general de la componente  $T^{rs}$

$$T^{rs}(r, s) = \sum_{n=3}^6 \frac{C_n^{rs}(s)}{r^n} + D_3^{rs}(s) \frac{\ln r}{r^3}, \quad (6.90)$$

donde

$$\begin{aligned} C_3^{rs}(s) &= C^{rs}(s), \\ C_4^{rs}(s) &= C_4 + \frac{(\kappa^2 C_5)'}{\kappa^2}, \\ C_5^{rs}(s) &= \frac{1}{2} C_5 + \frac{1}{2} \frac{(\kappa^2 C_6)'}{\kappa^2}, \\ C_6^{rs}(s) &= \frac{1}{3} C_6, \\ D_3^{rs}(s) &= -\frac{(\kappa^2 C_4)'}{\kappa^2}. \end{aligned}$$

Nótese que aparece una nueva función arbitraria de  $s$ ,  $C^{rs}(s)$ , la cual tiene su origen como “constante” de integración con respecto a  $r$ . Ésta, es análoga a la función  $C_{\parallel\perp}$  introducida el caso cónico. La función  $C^{rs}(s)$  está asociada con el balance de torcas.

Usando (6.86) y (6.90) en (6.88) es posible resolverla para obtener  $T^{rr}$

$$T^{rr}(r, s) = \sum_{n=1}^6 \frac{C_n^{rr}(s)}{r^n} + \ln r \sum_{n=2}^3 \frac{D_n^{rr}(s)}{r^n}, \quad (6.91)$$

donde

$$\begin{aligned}
C_1^{rr}(s) &= C^{rr}(s) \\
C_2^{rr}(s) &= \frac{(\kappa C^{rs})'}{\kappa} - \frac{1}{\kappa} \left( \frac{(\kappa^2 C_4)'}{\kappa} \right)' - \kappa^2 C_4, \\
C_3^{rr}(s) &= -C^{rs} + \frac{(\kappa C_4)'}{\kappa} + \frac{1}{2\kappa} \left( \frac{(\kappa^2 C_5)'}{\kappa} \right)' - \frac{1}{2} \kappa^2 C_5, \\
C_4^{rr}(s) &= -C_4 - \frac{1}{2} \frac{(\kappa^3 C_5)'}{\kappa^3} + \frac{1}{6\kappa} \left( \frac{(\kappa^2 C_6)'}{\kappa} \right)' - \frac{1}{3} \kappa^2 C_6, \\
C_5^{rr}(s) &= -\frac{1}{2} C_5 - \frac{1}{6} \frac{(\kappa^4 C_6)'}{\kappa^4}, \\
C_6^{rr}(s) &= -\frac{1}{3} C_6, \\
D_2^{rr}(s) &= -\frac{1}{\kappa} \left( \frac{(\kappa^2 C_4)'}{\kappa} \right)', \\
D_3^{rr}(s) &= \frac{(\kappa^2 C_4)'}{\kappa^2}.
\end{aligned}$$

Similarmente, otra función arbitraria de  $s$ ,  $C^{rr}(s)$  aparece como “constante” de integración. Esta función es análoga a la función  $C_\perp$  del caso cónico, sin embargo, aquí será relevante, no sólo en el balance de fuerzas sino también para el de las torcas sobre la superficie.

Habiendo determinado las componentes de  $T^{ab}$ , su ley de conservación se puede reescribir como

$$\nabla_b T^{ab} = C^{rr} \frac{\delta(r)}{r} \delta_r^a + C^{rs} \frac{\delta(r)}{r^3} \delta_s^a. \quad (6.92)$$

donde  $\delta(r)$  es la delta de Dirac y  $\delta_b^a$  es la delta de Kronecker. Entonces, en equilibrio, el tensor de esfuerzos tangencial,  $T^{ab}$  está completamente determinado en términos del BdR, excepto por dos funciones de  $s$ ,  $C^{rs}$  y  $C^{rr}$  que actúan como fuentes en la ley de conservación de  $T^{ab}$ . En lo siguiente, se mostrará como las condiciones de frontera determinan estas dos funciones.

## 6.8. Deformaciones isométricas de SdT

Para identificar las condiciones de frontera apropiadas en los bordes libres de la superficie, primero se necesitan determinar las deformaciones pequeñas de la superficie que son consistentes con inextensibilidad. Por este motivo a continuación se identifican las isometrías infinitesimales de SdT.

Igual que como se hizo para el caso cónico, considerando la superficie deformada  $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \delta\mathbf{X}$ , descrita por el vector de deformación  $\delta\mathbf{X} = \psi^a \mathbf{e}_a + \phi \mathbf{n}$ , el correspondiente cambio en la métrica está dado por

$$\delta g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \partial_b \delta\mathbf{X} + \mathbf{e}_b \cdot \partial_a \delta\mathbf{X} = \nabla_a \psi_b + \nabla_b \psi_a + 2K_{ab} \phi, \quad (6.93)$$

donde  $\psi_a = g_{ab} \psi^b$ .

Para una SdT parametrizada in términos de su BdR, la condición de isometría,  $\delta g_{ab} = 0$ , impone las

siguientes constricciones sobre las componentes tangenciales y normal de la deformación

$$\dot{\psi}_r = 0, \quad (6.94a)$$

$$\psi'_r + \dot{\psi}_s + \frac{2}{r}(\psi_r - \psi_s) = 0, \quad (6.94b)$$

$$\psi'_s + r\kappa^2\psi_r + \left(\frac{1}{r} + \frac{\kappa'}{\kappa}\right)(\psi_r - \psi_s) + K_{ss}\phi = 0. \quad (6.94c)$$

La solución general de estas ecuaciones involucra dos funciones arbitrarias de  $s$ ,  $\chi(s)$  y  $\xi(s)$ :

$$\psi_r = \chi, \quad (6.95a)$$

$$\psi_s = r(\chi' + r\xi) + \chi, \quad (6.95b)$$

$$\tau\phi = \left(\frac{\chi' + r\xi}{\kappa}\right)' + \kappa\chi - \frac{\xi}{\kappa}. \quad (6.95c)$$

Las componentes del vector tangente  $\psi^r$  y  $\psi^s$  son

$$\psi^r = -\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{\chi'}{r} + \xi\right) + \chi, \quad (6.96a)$$

$$\psi^s = \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{\chi'}{r} + \xi\right). \quad (6.96b)$$

Entonces  $\delta\mathbf{X}$  posee una descomposición natural en dos términos, uno es independiente de  $r$  y el otro es lineal en  $r$ ,  $\delta\mathbf{X} = \delta\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}_1$  donde

$$\delta\mathbf{X}_0 = \chi\mathbf{T} + \frac{\chi'}{\kappa}\mathbf{N} + \phi_0\mathbf{B}, \quad \tau\phi_0 = \left(\frac{\chi'}{\kappa}\right)' + \kappa\chi - \frac{\xi}{\kappa}, \quad (6.97a)$$

$$\delta\mathbf{X}_1 = r \left(\frac{\xi}{\kappa}\mathbf{N} + \phi_1\mathbf{B}\right), \quad \tau\phi_1 = \left(\frac{\xi}{\kappa}\right)'. \quad (6.97b)$$

Mientras que  $\delta\mathbf{X}_0$  deforma el BdR de la superficie original,  $\delta\mathbf{X}_1$  no lo cambia.

La constricción sobre la métrica (6.93) implica la conservación de la longitud de arco a lo largo de cualquier curva sobre la superficie y en particular a lo largo de la frontera. Verificando esto para una curva de  $r$  constante, la deformación de la longitud de arco  $dl$  está dada por  $\delta dl = \mathbf{X}' \cdot (\delta\mathbf{X})' dl$ . Usando

$$\delta\mathbf{X}'_0 = \frac{\xi}{\kappa}\mathbf{N} + \left(\frac{\tau}{\kappa}\chi' + \phi'_0\right)\mathbf{B}; \quad (6.98a)$$

$$\delta\mathbf{X}'_1 = r \left(-\xi\mathbf{T} + \left(\frac{\tau}{\kappa}\xi + \phi'_1\right)\mathbf{B}\right), \quad (6.98b)$$

se confirma que  $\mathbf{X}' \cdot (\delta\mathbf{X})' = 0$ , de manera que la longitud de arco se preserva bajo isometría. En particular, el parámetro  $s$  sigue siendo el parámetro de longitud de arco a lo largo del BdR deformado. Las isometrías de esta curva inducida por las isometrías de la superficie representan un conjunto muy limitado de las isometrías que posee como curva espacial independiente de la superficie.

## 6.9. Condiciones de frontera en una SdT

Con los resultados anteriores se pueden identificar las condiciones de frontera apropiadas sobre el borde libre de la superficie.

El cambio en la energía de doblamiento de la frontera como respuesta de la deformación  $\delta\mathbf{X}$  está dado por

$$\delta H = - \int_{\partial\Sigma} dl (\mathbf{f}_\perp \cdot \delta\mathbf{X} - K\mathbf{l} \cdot \delta\mathbf{n}) . \quad (6.99)$$

Descomponiendo  $\delta\mathbf{X}$  con respecto al marco de Darboux  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{l}\}$  como  $\delta\mathbf{X} = \psi_\parallel \mathbf{t} + \psi_\perp \mathbf{l} + \phi \mathbf{n}$ , donde  $\psi_\parallel = \psi^a t_a$  y  $\psi_\perp = \psi^a l_a$ , se obtiene que el primer término en (6.99) se puede expresar como

$$\mathbf{f}_\perp \cdot \delta\mathbf{X} = (KK_{\parallel\perp} + T_{\parallel\perp}) \psi_\parallel + \left( K(K_\perp - \frac{1}{2}K) + T_\perp \right) \psi_\perp - \nabla_\perp K \phi , \quad (6.100)$$

Usando la identidad  $\delta\mathbf{n} = (-\nabla^a \phi + K^a_b \psi^b) \mathbf{e}_a$  [13, 16] (derivada en el B), se obtiene que el segundo término está dado por la expresión

$$-K\mathbf{l} \cdot \delta\mathbf{n} = K (\nabla_\perp \phi - K_{\parallel\perp} \psi_\parallel - K_\perp \psi_\perp) . \quad (6.101)$$

Sumando (6.100) y (6.101) se llega a la expresión general

$$\delta H = - \int d\sigma \left( T_{\parallel\perp} \psi_\parallel + (T_\perp - \frac{1}{2}K^2) \psi_\perp + K\nabla_\perp \phi - \nabla_\perp K \phi \right) . \quad (6.102)$$

Todavía falta restringir la deformación de la frontera a isometrías. Para una frontera general esto es sumamente complicado. Para propósitos de ilustración, se considerará sólo el caso de una frontera que coincide con una curva de  $r$  constante. Si bien esta elección representa una frontera muy particular, ésta resulta ser la relevante para la rampa helicoidal circular que se examinará en detalle.

### 6.9.1. Condiciones de frontera a lo largo de curvas de $r$ constante

Considerando una frontera dada por una curva  $\Gamma_R$ ,  $s \rightarrow \mathbf{Y}(s) + R\mathbf{T}(s)$ , localizada una distancia  $R$  constante a lo largo de las rectas generadoras de  $\Sigma$ . La longitud de arco  $dl$  sobre esta curve está relacionada de manera simple a la longitud de arco a lo largo del BdR,  $dl = \sqrt{1 + R^2\kappa^2} ds$ . Las componentes de los vectores unitarios  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{l}$  adaptados a  $\Gamma_R$  son

$$t^r = 0 \quad t^s = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2 R^2}} \quad (6.103a)$$

$$l^r = \frac{\sqrt{1 + \kappa^2 R^2}}{\kappa R} \quad l^s = -\frac{1}{\kappa R} \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2 R^2}} \quad (6.103b)$$

Las componentes  $v_a = g_{ab}v^b$  de sus covectores asociados son

$$t_r = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2 R^2}} \quad t_s = \sqrt{1 + \kappa^2 R^2} \quad (6.104a)$$

$$l_r = \frac{\kappa R}{\sqrt{1 + \kappa^2 R^2}} \quad l_s = 0 \quad (6.104b)$$

Con estas componentes se determinan las proyecciones de  $T^{ab}$  y  $K^{ab}$  a lo largo de  $\Gamma_R$

$$T_\parallel = (1 + R^2\kappa^2) T^{ss} + 2T^{rs} + \frac{1}{1 + R^2\kappa^2} T^{rr} , \quad K_\parallel = \frac{\kappa^2 R^2 K}{1 + R^2\kappa^2} , \quad (6.105a)$$

$$T_{\parallel\perp} = R\kappa \left( T^{rs} + \frac{1}{1 + R^2\kappa^2} T^{rr} \right) , \quad K_{\parallel\perp} = \frac{\kappa R K}{1 + R^2\kappa^2} , \quad (6.105b)$$

$$T_\perp = \frac{R^2\kappa^2}{1 + R^2\kappa^2} T^{rr} \quad K_\perp = \frac{K}{1 + R^2\kappa^2} . \quad (6.105c)$$

Usando estos resultados se evalúan los cuatro términos que aparecen en la expresión (6.102) del cambio en la energía. Para el primer término se obtiene

$$\int dl\psi_{\parallel}T_{\parallel\perp} = \int ds r\kappa (R(\chi' + \xi R) + \chi) \left( T^{rs} + \frac{T^{rr}}{1 + R^2\kappa^2} \right). \quad (6.106)$$

Para el segundo término

$$\int dl\psi_{\perp} \left( T_{\perp} - \frac{1}{2}K^2 \right) = \int ds R\kappa (R^2\kappa^2\chi - R(\chi' + R\xi)) \left( \frac{T^{rr}}{1 + R^2\kappa^2} - \frac{K^2}{2R^2\kappa^2} \right). \quad (6.107)$$

Sumando (6.106) y (6.107) e integrando por partes para eliminar las derivadas de  $\chi$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int dl \left( \psi_{\parallel}T_{\parallel\perp} + \psi_{\perp} \left( T_{\perp} - \frac{1}{2}K^2 \right) \right) = \\ \int ds \left\{ \left[ R\kappa \left( T^{rs} + T^{rr} - \frac{K^2}{2} \right) - \left( R^2\kappa T^{rs} + \frac{K^2}{2\kappa} \right)' \right] \chi + R\kappa \left( R^2T^{rs} + \frac{K^2}{2\kappa^2} \right) \xi \right\}. \end{aligned} \quad (6.108)$$

Para el tercer y cuarto términos se obtiene

$$\begin{aligned} \int d\sigma K\nabla_{\perp}\phi = \int ds \left\{ \frac{1}{R} \left[ \frac{\kappa}{\tau} \left( \frac{K}{\kappa} \right)' + \left( \frac{1}{\kappa} \left( \frac{1}{\tau} \left( \frac{K}{\kappa} \right)' \right)' \right) \right] \chi \right. \\ \left. - \frac{1}{R\kappa} \left[ \frac{1}{\tau} \left( \frac{K}{\kappa} \right)' + \left( \frac{R}{\tau} \left( \frac{K}{\kappa} \right)' \right)' + \left( \frac{K(1 + \kappa^2 R^2)}{\tau\kappa} \right)' \right] \xi \right\}, \end{aligned} \quad (6.109)$$

$$\begin{aligned} \int d\sigma\phi\nabla_{\perp}K = \int ds \left\{ \frac{1}{R} \left[ \left( \frac{1}{\kappa} \left( \frac{(1 + R^2\kappa^2)\dot{K} - K'}{\tau\kappa} \right)' \right)' + \frac{(1 + R^2\kappa^2)\dot{K} - K'}{\tau} \right] \chi \right. \\ \left. - \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{(1 + R^2\kappa^2)\dot{K} - K'}{\tau\kappa} \right)' + \frac{(1 + R^2\kappa^2)\dot{K} - K'}{\tau\kappa R} \right] \xi \right\}. \end{aligned} \quad (6.110)$$

Sustituyendo todos estos resultados en la ecuación, finalmente se encuentra que el cambio en la energía asociada con la frontera  $\Gamma_R$  se puede expresar como

$$\delta H = - \int ds (C_{\chi}\chi + C_{\xi}\xi), \quad (6.111)$$

donde las funciones  $C_{\chi}$  y  $C_{\xi}$  están definidas por

$$\begin{aligned} C_{\chi} = \kappa C^{rr} - \frac{1}{R} \left[ \frac{\kappa^2}{\tau}\varepsilon_4 + \left( \frac{(\kappa^2 C_4)'}{\kappa} \right)' - \frac{\kappa}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right)' \right] \\ - \frac{1}{R^2} \left[ \left( \frac{1}{2\kappa} \left( \frac{\kappa}{\tau}\varepsilon_5 + \frac{1}{\kappa\tau} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right)' \right)' + \frac{\tau^2}{2\kappa^3} \right)' + \frac{\kappa}{2} \left( \frac{\kappa}{\tau}\varepsilon_5 + \frac{1}{\kappa\tau} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right)' \right) \right] \\ - \frac{1}{R^3} \left[ \left( \frac{1}{3\kappa} \left( \frac{\kappa}{\tau}\varepsilon_6 \right)' \right)' + \frac{\kappa^2}{3\tau}\varepsilon_6 \right], \end{aligned} \quad (6.112)$$

$$\begin{aligned} C_{\xi} = \kappa^2 C^{rs} + \frac{1}{R} \left[ \frac{\kappa}{\tau}\varepsilon_4 - \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right)' + \left( \frac{\kappa}{\tau}\varepsilon_5 - \frac{1}{\kappa\tau} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right)' \right] \\ + \frac{1}{R^2} \left[ \frac{\kappa}{2\tau}\varepsilon_5 + \frac{1}{2\kappa\tau} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right)' + \left( \frac{\kappa}{\tau}\varepsilon_6 \right)' \right] + \frac{1}{R^3} \left[ \frac{\kappa}{3\tau}\varepsilon_6 \right] - \ln R (\kappa^2 C_4)'. \end{aligned} \quad (6.113)$$

La estacionariedad de la energía,  $\delta H = 0$ , requiere que este término de frontera sea nulo. Como las dos funciones  $\xi$  y  $\chi$  son independientes, sus coeficientes en el integrando se deben anular:  $C_\chi = 0$  y  $C_\xi = 0$ . Estas dos condiciones determinan las dos funciones  $C^{rs}$  y  $C^{rr}$  completamente en términos de la geometría del BdR y de la distancia  $R$  a lo largo de la dirección plana,

$$\begin{aligned} \kappa C^{rr} &= \frac{1}{R} \left[ \left( \frac{(\kappa^2 C_4)'}{\kappa} \right)' - \frac{\kappa}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right)' \right] \\ &+ \frac{1}{R^2} \left[ \left( \frac{1}{2\kappa} \left( \frac{1}{\kappa\tau} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right)' \right)' + \frac{\tau^2}{2\kappa^3} \right)' + \frac{\kappa}{2} \left( \frac{1}{\kappa\tau} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right)' \right) \right] \end{aligned} \quad (6.114)$$

$$\kappa^2 C^{rs} = \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right)' + \left( \frac{1}{\kappa\tau} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right)' \right] - \frac{1}{R^2} \left[ \frac{1}{2\kappa\tau} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right)' \right] + \ln R (\kappa^2 C_4)' . \quad (6.115)$$

Los términos proporcionales a  $R^{-3}$  y  $C_6$  en  $C_\chi$  y  $C_\xi$  se anulan debido a la ecuación de EL (6.87c). Nótese que en el límite  $\tau = 0$ , que describe una curva plana, estas dos funciones en general no se anulan a menos que  $\kappa$  sea constante. Esto es análogo a la manifestación de una inestabilidad de Euler en la compresión de una barra elástica.

En particular, se observa que si las fronteras libres coinciden con curva de  $r$  constante, los esfuerzos estarán completamente determinados. El resultado depende explícitamente de  $R$ . En particular, nótese que una superficie con dos fronteras libres, cada una a un valor constante de  $r$ , en general, resulta ser inconsistente con estas condiciones de frontera en equilibrio. Una frontera interior fija (no necesariamente coincidente con el BdR) proporciona condiciones de frontera consistentes. Sin embargo, si el BdR es una hélice circular, con curvatura y torsión constantes, los términos individuales de la derecha en las ecuaciones (6.114) y (6.115) se anulan y la obstrucción sobre las fronteras libres en dos valores distintos de  $r$  desaparece.

Para levantar la geometría fuera del plano se necesitan fuerzas externas. En la siguiente sección se demuestra que, en una geometría periódica, no se transmiten fuerzas a lo largo de curvas de  $r$  constante, si la frontera libre es también una curva de  $r$  constante.

## 6.10. Fuerzas y torcas transmitidas a lo largo de curvas de $r$ constante

Si  $\gamma$  es una curva cerrada, la fuerza total  $\mathbf{F}$  que actúa en la región que encierra está dada por la integral de línea de  $\mathbf{f}_\perp$  a lo largo de  $\gamma$ :

$$\mathbf{F} = \int_\gamma dl \mathbf{f}_\perp , \quad (6.116)$$

Para una curva  $\Gamma_r$ ,  $s \rightarrow \mathbf{Y}(s) + r\mathbf{T}(s)$ , la fuerza que actúa sobre el elemento  $dl$  depende sólo de la componente  $\mathbf{f}^r$ , i.e.  $d\mathbf{f}_\perp = ds\kappa r\mathbf{f}^r$ . El factor  $\kappa r\mathbf{f}^r$  puede ser escrito en una forma más conveniente para la evaluación de la fuerza. Esto se puede hacer multiplicando por  $\kappa r$  la expresión de  $\mathbf{f}^r$  (6.83), agrupando en potencias de  $r$  y usando las ecuaciones de Frenet-Serret, obteniéndose al final

$$\kappa r \mathbf{f}^r = \kappa C^{rr} \mathbf{T} + \mathbf{U}' + \left( \frac{1}{r} \varepsilon_4 + \frac{1}{2r^2} \varepsilon_5 + \frac{1}{3r^3} \varepsilon_6 \right) \kappa \mathbf{B} , \quad (6.117)$$

donde el vector espacial  $\mathbf{U}$  está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \frac{1}{r} \left( \left( C^{rs} \kappa - \frac{(\kappa^2 C_4)'}{\kappa} \right) \mathbf{T} + \left( \kappa^2 C_4 + \frac{\tau^2}{2\kappa^2} \right) \mathbf{N} + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \mathbf{B} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \kappa C_4 \mathbf{T} + \frac{1}{2\kappa} (\kappa^2 C_5 \mathbf{T})' + \frac{\tau}{2\kappa^2} \mathbf{B} \right) \\ & + \frac{1}{r^3} \left( \left( \frac{\kappa C_5}{2} + \frac{(\kappa^2 C_6)'}{6\kappa} \right) \mathbf{T} + \frac{\kappa^2 C_6}{3} \mathbf{N} \right) + \frac{1}{r^4} \left( \frac{\kappa C_6}{3} \mathbf{T} \right) - \frac{\ln r}{r} \left( \frac{(\kappa^2 C_4)'}{\kappa} \mathbf{T} \right). \end{aligned}$$

El tercer término que aparece en la parte derecha de la ecuación.(6.117) involucra las derivadas de Euler-Lagrange,  $\varepsilon_n$ ,  $n = 4, 5, 6$ , que se anulan en equilibrio.

Si el BdR es periódico, en el sentido que la base de FS y su curvaturas son periódicas, entonces esta periodicidad también la comparte  $\Gamma_r$  de forma que sobre un período se tiene que

$$\oint ds \mathbf{U}' = 0.$$

(6.116) Entonces, en equilibrio, a lo largo de tal curva, la fuerza total que actúa sobre  $\Gamma_r$  está dada por

$$\mathbf{F} = \int ds \kappa C^{rr} \mathbf{T}. \quad (6.118)$$

Más aun, usando las condiciones de frontera sobre el borde libre (6.114) para expresar  $C^{rr}$  en términos de la geometría del BdR y del radio,  $R$ , el integrando en (6.118) puede expresarse como una suma de términos proporcionales a las derivadas de Euler-Lagrange más una derivada total

$$\kappa C^{rr} \mathbf{T} = \mathbf{W}' + \left( \frac{1}{r} \varepsilon_4 + \frac{1}{2r^2} \varepsilon_5 + \frac{1}{3r^3} \varepsilon_6 \right) \kappa \mathbf{B}, \quad (6.119)$$

donde el vector  $\mathbf{W}$  está definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = & \frac{1}{r} \left[ \frac{(\kappa^2 C_4)'}{\kappa} \mathbf{T} - \left( \kappa^2 C_4 + \frac{\tau^2}{2\kappa^2} + 1 \right) \mathbf{N} - \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \mathbf{B} \right] \\ & + \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\kappa^2 C_5}{2} + \frac{2}{\kappa^2} \left( \ln \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right)' \right) + \frac{\tau^2}{2\kappa^3} \right) \mathbf{T} \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{\kappa^2 C_5}{2} + \frac{2}{\kappa^2} \left( \ln \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right)' \right) \mathbf{N} + \frac{\tau}{2\kappa^2} \mathbf{B} \right] \\ & + \frac{1}{r^3} \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\kappa^2 C_6}{3} + \frac{1}{\kappa^2} \right)' \mathbf{T} - \left( \frac{\kappa^2 C_6}{3} + \frac{1}{\kappa^2} \right) \mathbf{N} \right]. \end{aligned}$$

Para una superficie periódica, con esto es evidente que  $\mathbf{F} = 0$ . Incluso si existen esfuerzos dentro de la superficie, no hay una fuerza neta transmitida a lo largo de curvas de  $r$  constante. Esto se debe a que claramente no hay fuerza transmitida a lo largo de la frontera libre en  $r = R$ , la cual puede ser contraída a una curva con cualquier  $r$ .

Ahora se examina el balance de torques a lo largo de curvas de  $r$  constante. Recordando, la torca total que actúan sobre una región de la superficie encerrada por la curva  $\gamma$  está dada por la integral de línea

$$\mathbf{M} = \oint_{\gamma} dl \mathbf{m}_{\perp}, \quad (6.120)$$

donde  $\mathbf{m}_\perp$  es la proyección del tensor de torcas en el vector  $\mathbf{l}$  dada por

$$\mathbf{m}_\perp \equiv l_a \mathbf{m}^a = \mathbf{X} \times \mathbf{f}_\perp - K \mathbf{t} \quad (6.121)$$

Para este tipo de curva, el elemento de torca por unidad de longitud está dado por

$$d\mathbf{l}\mathbf{m}_\perp = ds (\mathbf{X} \times \kappa r \mathbf{f}^r - K \mathbf{e}_s). \quad (6.122)$$

Usando la ecuación (6.117), éste se expresa como

$$\mathbf{X} \times \kappa r \mathbf{f}^r - K \mathbf{e}_s = C^{rr} \kappa \mathbf{X} \times \mathbf{T} + \kappa^2 C^{rs} \mathbf{B} + \mathbf{V}' + \left( (1 + \ln r) \varepsilon_4 - \frac{1}{2r} \varepsilon_5 - \frac{1}{6r^2} \varepsilon_6 \right) \kappa \mathbf{N}, \quad (6.123)$$

donde el vector espacial  $\mathbf{V}$  está definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{X} \times \mathbf{U} + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \mathbf{N} - \left( \kappa^2 C_4 + \frac{\tau^2}{2\kappa^2} + 2 \right) \mathbf{B} + \frac{1}{2r} \left( -\frac{\tau}{\kappa^2} \mathbf{N} + \kappa^2 C_5 \mathbf{B} \right) \\ &+ \frac{1}{6r^2} (\kappa^2 C_6 \mathbf{B}) + \ln r \left( \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{T} + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \mathbf{N} - \left( \kappa^2 C_4 + \frac{\tau^2}{2\kappa^2} \right) \mathbf{B} \right). \end{aligned}$$

La torca total actuando sobre  $\Gamma_r$  está dada por

$$\mathbf{M} = \oint ds (C^{rr} \kappa \mathbf{Y} \times \mathbf{T} + \kappa^2 C^{rs} \mathbf{B}), \quad (6.124)$$

donde en el primer término se ha usado el hecho que  $\mathbf{X} \times \mathbf{T} = \mathbf{Y} \times \mathbf{T}$ . Nótese que la torca dependerá explícitamente del BdR  $\mathbf{Y}$  y, en contraste con el caso cónico, dependerá de ambas funciones  $C^{rs}$  y  $C^{rr}$ . Esto es consistente con el comportamiento cónico: en el límite que el BdR  $\mathbf{Y}$  se contrae a un punto, el primer término en el integrando de (6.124) se anula, recuperando el resultado presentado en [36]. Igual que en para el caso de conos, la torca total no depende de  $r$ .

Usando la ecuación (6.119) en el primer término en del integrando de la ecuación (6.124), salvo derivadas de total, éste se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} \times \kappa C^{rr} \mathbf{T} &= (\mathbf{Y} \times \mathbf{W})' + \frac{1}{r_b} \left[ -\frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \mathbf{N} + \left( \kappa^2 C_4 + \frac{\tau^2}{2\kappa^2} + 1 \right) \mathbf{B} \right] \\ &+ \frac{1}{r_b^2} \left[ \frac{\tau}{2\kappa^2} \mathbf{N} + \left( \frac{\kappa^2 C_5}{2} + \frac{2}{\kappa^2} \left( \ln \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right)' \right) \mathbf{B} \right] \end{aligned}$$

Usando esta expresión en la correspondiente para  $C^{rs}$  (6.115), se puede mostrar que el integrando completo en la ecuación (6.124) es una derivada total mas términos que involucran las derivadas de EL 6.87

$$\mathbf{Y} \times \kappa C^{rr} \mathbf{T} + \kappa^2 C^{rs} \mathbf{B} = \mathbf{Z}' + \left( \ln r_b \varepsilon_4 - \frac{1}{r_b} \varepsilon_5 \right) \kappa \mathbf{N} \quad (6.125)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{W} - \frac{1}{r_b} \left( \frac{\kappa^2 C_5}{2} + \frac{2}{\kappa^2} \left( \ln \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right)' \right) \mathbf{B} \\ &- \frac{1}{r_b^2} \left( \frac{1}{2\kappa^2} \mathbf{B} \right) - \ln r_b \left( \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{T} + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \mathbf{N} - \left( \kappa^2 C_4 + \frac{\tau^2}{2\kappa^2} \right) \mathbf{B} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto no existen torcas netas transmitidas a lo largo de curvas de  $r$  constante.

Teniendo en cuenta estos resultados, se concluye que las fuerzas y torcas totales deben estar localizadas sobre las rectas generadoras, que se determina más adelante. En la siguiente sección se relacionan estas fuerzas con la geometría de la superficie.



## 6.11. Fuerzas y torcas transmitidas a lo largo de curvas de $s$ constante

Considerando una recta de  $s$  constante,  $\Gamma_s : r \rightarrow \mathbf{Y}(s) + r\mathbf{T}(s)$ , su longitud de arco es simplemente la longitud de arco a lo largo del generador,  $d\sigma = dr$ .

Las componentes de los vectores unitarios  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{l}$  adaptados a  $\Gamma_s$  son

$$t^r = 1 \qquad t^s = 0 \qquad (6.126a)$$

$$l^r = \frac{1}{k_0 r} \qquad l^s = -\frac{1}{k_0 r}. \qquad (6.126b)$$

Las componentes de sus covectores asociados son

$$t_r = 1 \qquad t_s = 1 \qquad (6.127a)$$

$$l_r = 0 \qquad l_s = -\kappa r. \qquad (6.127b)$$

Las proyecciones de los tensores  $T^{ab}$  y  $K^{ab}$  son

$$T_{\parallel} = T^{rr} + 2T^{rs} + T^{ss} \qquad K_{\parallel} = 0 \qquad (6.128a)$$

$$T_{\parallel\perp} = -\kappa r (T^{rs} + T^{ss}) \qquad K_{\parallel\perp} = 0 \qquad (6.128b)$$

$$T_{\perp} = \kappa^2 r^2 T^{ss} \qquad K_{\perp} = K. \qquad (6.128c)$$

Usando estos resultado en la expresión (6.84) se tiene que la fuerza por unidad de longitud transmitida a lo largo de una recta generadora está dada por

$$\mathbf{f}_{\perp} = -\kappa r (T^{rs} + T^{ss}) \mathbf{T} - \left( \frac{\tau^2}{2\kappa^2 r^2} + \kappa^2 r^2 T^{ss} \right) \mathbf{N} - \frac{1}{\kappa r} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' + \frac{\tau}{\kappa r^2} \right) \mathbf{B}. \qquad (6.129)$$

Integrando entre una frontera interior en  $r = R_0$  y otra exterior en  $r = R$ , la fuerza total está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \left[ \left( \kappa C^{rs} - \frac{(\kappa^2 C_4)'}{\kappa} \right) \mathbf{T} + \left( \kappa^2 C_4 + \frac{\tau^2}{2\kappa^2} \right) \mathbf{N} + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \mathbf{B} \right] \\ &+ \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) \left[ \left( \kappa C_4 + \frac{(\kappa^2 C_5)'}{2\kappa} \right) \mathbf{T} + \frac{\kappa^2 C_5}{2} \mathbf{N} + \frac{\tau}{2\kappa^2} \mathbf{B} \right] \\ &+ \left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{R_0^3} \right) \left[ \left( \frac{\kappa C_5}{2} + \frac{(\kappa^2 C_6)'}{6\kappa} \right) \mathbf{T} + \frac{\kappa^2 C_6}{3} \mathbf{N} \right] \\ &+ \left( \frac{1}{R^4} - \frac{1}{R_0^4} \right) \frac{\kappa C_6}{3} \mathbf{T} - \left( \frac{\ln R}{R} - \frac{\ln R_0}{R_0} \right) \frac{(\kappa^2 C_4)'}{\kappa} \mathbf{T}. \end{aligned} \qquad (6.130)$$

A lo largo de una línea recta de  $s$  fija, el elemento de torca por unidad de longitud está dado por

$$\mathbf{m}_{\perp} = \mathbf{Y} \times \mathbf{f}_{\perp} + \frac{\tau}{\kappa r} \mathbf{T} + \left( \frac{\tau}{\kappa^2 r^2} + \frac{1}{\kappa r} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) \mathbf{N} - \left( \frac{\tau^2}{2\kappa^2 r} + \kappa^2 r^3 T^{ss} \right) \mathbf{B}, \qquad (6.131)$$

de forma que la torca total está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{Y} \times \mathbf{F} + \ln \frac{R}{R_0} \left( \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{T} + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \mathbf{N} - \left( \frac{\tau^2}{2\kappa^2} + \kappa^2 C_4 \right) \mathbf{B} \right) \\ &+ \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \left( -\frac{\tau}{\kappa^2} \mathbf{N} + \kappa^2 C_5 \mathbf{B} \right) + \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) \left( \frac{\kappa^2 C_6}{2} \right) \mathbf{B}. \end{aligned} \qquad (6.132)$$

A continuación la fuerza a lo largo de estas rectas se ejemplificará para una SdT generada por una hélice.

## 6.12. Rampa Helicoidal

Para ilustrar el marco teórico derivado anteriormente, se usa un ejemplo no trivial que es tratable analíticamente. Se considera la deformación de un ánulo circular plano en una rampa helicoidal. En particular, se determinará la fuerza requerida para levantar la superficie una cierta altura.

Aquí se describirán los esfuerzos sobre una superficie obtenida extendiendo la tangentes a una hélice circular (el correspondiente BdR). Esta superficie (o parte de ella) se puede obtener cortando un ánulo circular a lo largo de una línea que forma un ángulo  $\alpha$  con la frontera interior y levantando uno de los bordes que se forman una distancia  $h$  sobre el otro borde, de manera que el BdR es una hélice circular de radio  $a$  y período vertical  $h = 2\pi b$ . Usando su longitud de arco  $s$  para parametrizar la hélice circular se tiene que está descrita por la curva

$$\mathbf{Y}(s) = \left( a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{bs}{c} \right)^T, \quad \text{donde } c = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (6.133)$$

Su curvatura y torsión están dadas por  $\kappa = a/c^2$ , y  $\tau = b/c^2$ ,  $a$  es el radio del círculo obtenido proyectando la hélice en el plano  $x - y$ , de forma que  $a \geq 0$ . En general el eje alrededor del cual se enrolla la hélice, llamado eje helicoidal, está dado por  $\hat{\mathbf{v}} = \cos\omega\mathbf{T} + \sin\omega\mathbf{B}$ . Por simplicidad se ha definido este eje en la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$ . La razón  $\zeta = \tau/\kappa = b/a$  define el ángulo constante  $\omega$  que forma el vector tangente a la hélice con el eje helicoidal a través de la relación  $\zeta = \cot\omega$ . Adicionalmente, se eligen hélices con quiralidad izquierda al recorrer la dirección positiva del eje helicoidal, es decir con  $b \geq 0$  y  $s > 0$  ( $b < 0$  y  $s < 0$  corresponde a hélices con quiralidad derecha y cambiando el signo sólo de uno de estos parámetros cambia tanto la dirección en la que se recorre como la quiralidad)

La superficie desarrollable en su tangente cuyo BdR es la hélice circular (ver figura 6.4) tiene las funciones de encajamiento

$$\mathbf{X} = \left( a\lambda \cos\left(\frac{s}{c} + \phi\right), a\lambda \sin\left(\frac{s}{c} + \phi\right), \frac{b}{c}(s+r) \right)^T, \quad \text{donde } \phi = \arctan\frac{r}{c}, \quad \lambda = \sec\phi = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{c}\right)^2}. \quad (6.134)$$

De donde se puede ver que curvas  $\Gamma_R$  a una distancia constante  $R$  a lo largo de los generadores también son

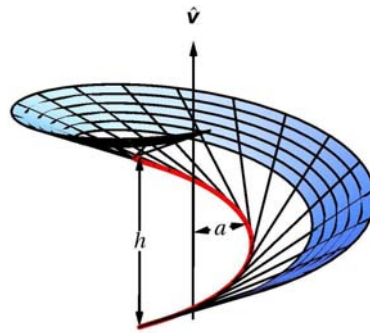


Figura 6.4: SdT generada por una hélice circular.

hélices escaladas por un factor  $\lambda$ , rotadas alrededor del eje  $z$  por un ángulo  $\phi$  y desplazadas una distancia  $z_0 = br/c$  a lo largo del mismo eje con respecto al BdR. Sus curvaturas y torsiones de Frenet-Serret están dadas por

$$\kappa_R = \frac{\kappa}{1 + \kappa^2 R^2} \sqrt{1 + R^2(\kappa^2 + \tau^2)}, \quad \tau_R = \frac{\tau}{1 + \kappa^2 R^2}. \quad (6.135)$$

Entonces este tipo de curvas sobre la SdT helicoidal se vuelven plana lejos del BdR.

Alternativamente es posible describir esta SdT en términos de una función de altura parameterizada por coordenadas polares  $\rho$  y  $\theta$ . Esto se puede hacer con el cambio de variables  $\rho = a\lambda$  y  $\theta = s/c + \phi$ . Entonces, los parámetros originales  $r$  y  $s$  en términos de  $\rho$  y  $\theta$  están dados por

$$\frac{r}{c} = \sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 1}, \quad \frac{s}{c} = \theta - \operatorname{arcsec}\left(\frac{\rho}{a}\right), \quad \rho \geq a. \quad (6.136)$$

Entonces, en la parametrización de Monge en términos de un función de altura  $z$  sobre el plano  $x - y$ , la superficie está dada por

$$z(\rho, \theta) = b \left( \theta - \operatorname{arcsec}\left(\frac{\rho}{a}\right) + \sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 1} \right) \quad (6.137)$$

En estas coordenadas, el elemento de área es  $dA = \sqrt{1 + \zeta^2} \rho d\rho d\theta$ , de modo que el área de la superficie entre dos hélices es el área del ánulo proyectado sobre el plano  $x - y$  escalado por un factor  $\sqrt{1 + \zeta^2}$ . Genéricamente el BdR de la superficie obtenida por el levantamiento del ánulo circular plano no estará físicamente sobre la hoja. Con estos datos se está en posición de identificar el BdR. Sea el borde interior un círculo de radio  $\rho_b$  cuya tangente forma un ángulo  $\alpha$  con el corte recto que será una frontera.

El ángulo  $\omega$  que forma esta frontera levantada con el helicoidal determina la curvatura del BdR en término de su torsión por medio de la relación

$$\kappa = \tau \tan \omega. \quad (6.138)$$

En un cierto punto  $(r, s)$  la dirección tangente está dada por la expresión (6.126a) y la dirección de la recta generadora es  $\mathbf{e}_r$ , entonces el ángulo  $\alpha$  determina el producto  $\kappa r$  a través de la relación

$$\kappa r = \tan \alpha. \quad (6.139)$$

La frontera interior formará una hélice de longitud  $2\pi\rho_b$  a una distancia  $R$  a lo largo de una curva generadora. En general la longitud de un período de la hélice es  $l = 2\pi/\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ , por lo que

$$\rho_b^2 = \frac{1}{\kappa_R^2 + \tau_R^2}. \quad (6.140)$$

Combinando las expresiones (6.135), (6.138), (6.139) y (6.140) se encuentra que el BdR es una hélice cuyas curvatura y torsión están dadas por

$$\kappa = \frac{\sin \omega}{\rho_b \cos \alpha} \quad \tau = \frac{\cos \omega}{\rho_b \cos \alpha}, \quad (6.141)$$

localizada a una distancia

$$R = \frac{\rho_b \sin \alpha}{\sin \omega}, \quad (6.142)$$

de la frontera interior a lo largo de la dirección plana. También, del valor de la torsión se obtiene que el corte se debe levantar una altura

$$H = 2\pi\rho_b \cos \alpha \cos \omega. \quad (6.143)$$

Las direcciones radiales del ánulo plano se mapean a las curvas integrales del vector  $\mathbf{I}$  adaptado a hélices con  $R$  constante. Estas curvas integral están dadas por la función  $r(s) = -\tan(\kappa s)/\kappa$ .

Finalmente, se analizan los esfuerzos sobre la hélice. En equilibrio, de las tres derivadas de Euler-Lagrange  $\varepsilon_4$ ,  $\varepsilon_5$  y  $\varepsilon_6$  (6.87), se encuentra que las tres funciones  $C_4$ ,  $C_5$  y  $C_6$  están dadas por

$$C_4 = -\frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{\zeta^2}{2} + 1 \right) \quad (6.144a)$$

$$C_5 = 0 \quad (6.144b)$$

$$C_6 = -\frac{3}{\kappa^4} \quad (6.144c)$$

$C_4$ ,  $C_5$  y  $C_6$  son constantes como se esperaría de acuerdo con la simetría rotacional de la hélice. Adicionalmente, se tiene que ambas funciones  $C^{rr}$  y  $C^{rs}$  se anulan cuando estas tres funciones toman los valores constantes dados en (6.144), de forma que la fuerza y la torca total transmitida a lo largo de curvas  $r$  constante se anulan idénticamente. Las componentes de tensor de esfuerzos tangenciales  $T^{ab}$  se reducen a

$$T^{ss} = -\frac{1}{\kappa^2 r^4} \left( \frac{\zeta^2}{2} + 1 + \frac{3}{\kappa^2 r^2} \right) \quad (6.145a)$$

$$T^{rs} = -\frac{1}{\kappa^2 r^4} \left( \frac{\zeta^2}{2} + 1 + \frac{1}{\kappa^2 r^2} \right) \quad (6.145b)$$

$$T^{rr} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\zeta^2}{2} + 1 \right) + \frac{1}{\kappa^2 r^4} \left( \frac{\zeta^2}{2} + 2 \right) + \frac{1}{\kappa^4 r^6} \quad (6.145c)$$

Las proyecciones del tensor de esfuerzos  $\mathbf{f}^a$  en la base tangente de Darboux  $\mathbf{t}, \mathbf{l}$  adaptada a curvas de  $R$  constante son

$$f_{\parallel} = t_a f^{ab} t_b = \frac{\zeta^2}{2R^2} \frac{(-1 + \kappa^2 R^2)}{(1 + \kappa^2 R^2)} + \frac{1}{1 + \kappa^2 R^2} T^{rr} + 2T^{rs} + (1 + R^2 \kappa^2) T^{ss}, \quad (6.146a)$$

$$f_{\parallel\perp} = t_a f^{ab} l_b = -\frac{\kappa \zeta^2}{R(1 + \kappa^2 R^2)} + \kappa R \left( \frac{1}{1 + \kappa^2 R^2} T^{rr} + T^{rs} \right), \quad (6.146b)$$

$$f_{\perp} = l_a f^{ab} l_b = \frac{\zeta^2}{2R^2} \frac{(1 - \kappa^2 R^2)}{1 + \kappa^2 R^2} + \frac{\kappa^2 R^2}{1 + \kappa^2 R^2} T^{rr}, \quad (6.146c)$$

donde  $f^{ab} = \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{e}^b$ . En la figura 6.5 se representan las magnitudes de estas proyecciones para una hélice con  $\zeta$  igual a la razón áurea, graficada desde su BdR. Evidentemente los esfuerzos están concentrados en la región cercana al BdR.

En cuanto a la fuerza total a lo largo de las rectas generadoras de  $s$  constante, en el rango de distancias  $r_0$  a  $R$ , se tiene que se reduce a

$$\mathbf{F}|_{s_c} = \left[ \frac{1}{r^2} \left( \kappa C_4 + \frac{\zeta^2}{2\kappa} \right) + \frac{\kappa C_5}{2r^3} + \frac{\kappa C_6}{3r^4} \right] \mathbf{e}_s \Big|_{r_0}^R - \frac{\zeta^2}{2\kappa r^2} \mathbf{e}_r \Big|_{r_0}^R + \frac{\zeta}{2\kappa r^2} \mathbf{n} \Big|_{r_0}^R$$

Sustituyendo (6.144) en esta expresión se obtiene

$$\mathbf{F}|_{s_c} = -\frac{\zeta^2}{2\kappa r^2} \mathbf{e}_r \Big|_{r_0}^R - \frac{1}{\kappa r^2} \left( 1 + \frac{1}{\kappa^2 r^2} \right) \mathbf{e}_s \Big|_{r_0}^R + \frac{\zeta}{2\kappa r^2} \mathbf{n} \Big|_{r_0}^R \quad (6.147)$$

Cuando  $b \rightarrow 0$  se tiene que  $\zeta \rightarrow 0$  y  $\kappa \rightarrow \frac{1}{a}$ . En este límite aun persiste un esfuerzo en la dirección a lo largo de curvas de  $r$  constante

$$\mathbf{F}|_{s_c} = \left( \frac{\kappa C_4}{r^2} + \frac{\kappa C_5}{2r^3} + \frac{\kappa C_6}{3r^4} \right) \mathbf{e}_s \Big|_{r_0}^R = -\frac{a}{r^2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \mathbf{e}_s \Big|_{r_0}^R.$$

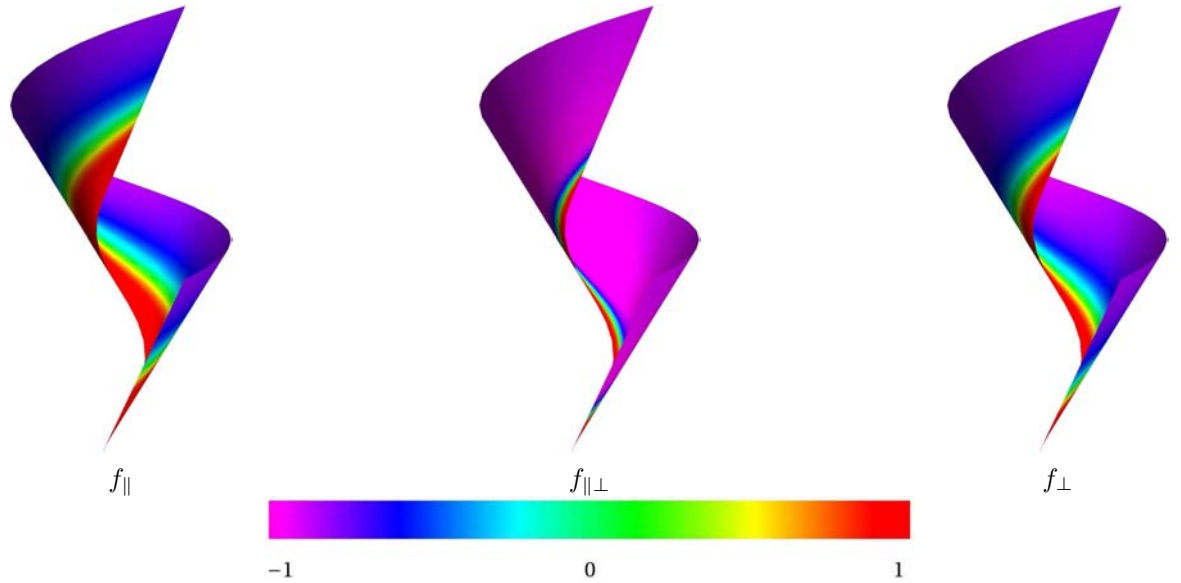


Figura 6.5: Magnitud escalada de las proyecciones del tensor de esfuerzos  $\mathbf{f}^a$  en la base tangente  $\{\mathbf{t}, \mathbf{l}\}$

Este esfuerzo se interpreta como un tipo de inestabilidad de Euler, en el sentido que es la fuerza necesaria para empezar a acomodar las líneas que generan la superficie, de manera que su envolvente sea efectivamente una hélice circular.

Tomando la proyección de la fuerza total a lo largo de un generador en el eje helicoidal se obtiene

$$F_z \equiv \mathbf{F}|_{s_c} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -a\zeta (\zeta^2 + 1)^{3/2} \left( \frac{1}{2r^2} + \frac{a^2 (\zeta^2 + 1)}{r^4} \right) \Bigg|_{r_0}^R \quad (6.148)$$

la cual se anula cuando  $\zeta \rightarrow 0$  y se comporta como  $\zeta^6$  cuando  $\zeta \gg 1$ . En la Fig. 6.6 se presenta la gráfica logarítmica de esta fuerza como función de la altura para una hélice particular.

### 6.13. Conclusiones

Se presentó un marco teórico para examinar el doblamiento de hojas inextensibles en una SdT, un paso en la descripción de los patrones de doblamiento genérico de tales hojas.

La geometría de esta clase de superficies está completamente determinada por su BdR. Los esfuerzos sobre esta geometría están restringidos por esta curva. La dependencia de los esfuerzos de la distancia desde el BdR a lo largo de la dirección plana está completamente fija; la libertad residual está capturada por dos funciones definidas a lo largo de esta curva. Sin embargo, en la práctica, tanto la forma del BdR como su ubicación dependerá de las fuerzas externas aplicadas a la hoja. La descripción aquí presentada es por lo tanto implícita excepto en los casos más simples.

La consistencia con isometría restringe las condiciones de frontera. Se realizaron cálculos explícitos para el caso ideal de frontera definida a una distancia fija del BdR a lo largo de las rectas generadoras de

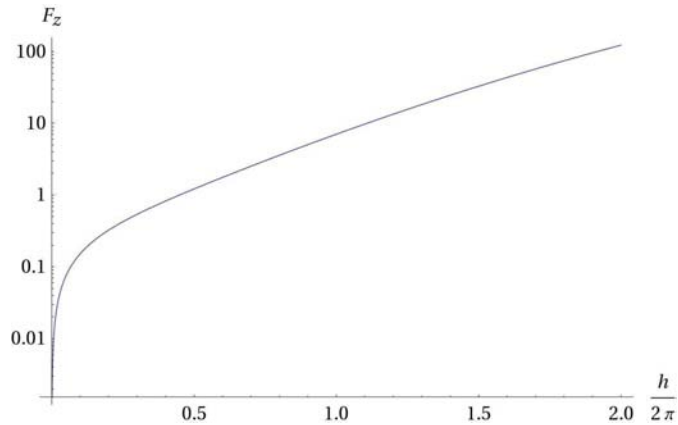


Figura 6.6: Gráfica logarítmica de la proyección en el eje helicoidal de la fuerza total a lo largo de la dirección plana como función de la altura para la hélice  $r_0 = 1$ ,  $R = 10$  y  $a = 1$

la superficie. Con más generalidad, la posición del BdR estará a una distancia arbitraria que se necesita determinar por las ecuaciones diferenciales.

Si el BdR forma parte de la frontera, la geometría de la superficie exhibirá singularidades en su curvatura sobre él. Esto se reflejará en el tensor de esfuerzos así como en el de torcas. Esto es análogo al comportamiento de la geometría cónica en la vecindad de su ápice [36]. En el ejemplo presentado de la rampa helicoidal, se evitaron algunas sutilezas; la fuerza en la singularidad es constante; en general no será constante.

En general las ecuaciones de Euler-Lagrange serán intratables analíticamente. Se resolvieron explícitamente para las SdT generadas por una hélice circular, lo que permitió determinar los esfuerzos en esta superficie para cualquier período de la hélice. En particular, se identificó la fuerza vertical necesaria para levantar la rampa. Asimismo se identificó una inestabilidad de Euler cuando la superficie es plana, indicando la necesidad de una fuerza mínima para empezar a levantar la rampa fuera del plano.



# Conclusiones

En esta tesis se presentaron diversos problemas de naturaleza geométrica. Una característica en común que comparten, es que involucran constricciones locales. Específicamente, se estudiaron algunas configuraciones que adoptan los polímeros semi-flexibles sujetos a la constricción que localmente están confinados por una superficie prescrita. Asimismo, aprovechando la invariancia conforme de la ecuación de forma de las membranas fluidas, se construyeron configuraciones de equilibrio sujetas a la constricción local que dos de sus puntos se mantienen en contacto. Finalmente, también se examinó el doblamiento de superficies planas e inextensibles, que debido a esta última propiedad están sujetas a la constricción local que su métrica se preserva bajo deformaciones.

Un logro importante de la presente tesis, fue que en todos estos casos fue posible analizar los esfuerzos sobre las curvas o superficies en cuestión, así como la determinación de las ecuaciones que las describen en equilibrio, proporcionando una caracterización física de estos sistemas estudiados. Para abordar estos problemas se aprovecharon las leyes de conservación de las cantidades geométricas asociadas con la invariancia bajo movimientos Euclidianos de la energía de los sistemas físicos estudiados. La cantidad conservada bajo traslaciones de la superficie resulta ser el multiplicador de Lagrange que implementa en el principio variacional la definición de los vectores tangentes en términos de las funciones de encajamiento. Este tensor, desempeña un papel central en el estudio de los sistemas físicos de carácter geométrico. Por una parte las proyecciones de su ley de conservación proporcionan las ecuaciones que estos sistemas deben satisfacer en equilibrio. Por otra parte, por medio de una integral de línea proporciona directamente las fuerzas que actúan sobre ellos. Esto representa un avance en la determinación de estas fuerzas, pues anteriormente la única forma de determinar las fuerzas en este tipo de sistemas era por medio de una diferenciación de la energía con respecto a un parámetro apropiado. Además, en general esta determinación de las fuerzas sólo podía realizarse de forma perturbativa, es decir en la aproximación de gradientes pequeños de las superficies. Por el contrario, en principio, mediante este tensor es posible determinar las fuerzas analíticamente fuera del régimen lineal. En particular, para el caso de los polímeros semiflexibles confinados, se presentó por primera vez una expresión para la fuerza confinante en términos de sus curvaturas locales. Adicionalmente, en el estudio realizado de las configuraciones de equilibrio desinfladas que exhiben morfologías complejas, obtenidas a partir de la inversión de las superficies mínimas con tres o más cuellos, fue posible determinar una expresión exacta y notablemente simple para las fuerzas que mantienen algunos de sus puntos en contacto, evitando que se inflen en una esfera redonda. En particular también fue posible describir un defecto local geométrico que corresponde a dos puntos cercanos en contacto, realizando un estudio a fondo de la distribución de esfuerzos dentro de este defecto.

De forma notable, en algunos casos, fue posible tratar las constricciones locales de igual manera, en el sentido, que con ellas se introducen nuevas cantidades conservadas. Por ejemplo, en el caso de la deformación de superficies planas e inextensibles, la segunda constricción introduce esfuerzos tangenciales conservados sobre la superficie. Es precisamente su ley de conservación –que proporcionan las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes– lo que permite determinarlos.



Aun cuando se pierde alguna invariancia, es posible que las invariancias residuales permitan resolver el problema completamente. Por ejemplo, en el caso de un polímero semiflexible confinado dentro de una esfera, aún cuando se pierden las invariancia traslacional del problema original sin restricción, la invariancia rotacional es suficiente para avanzar: la conservación del vector de torcas proporciona la cuadratura que determina directamente las configuraciones de equilibrio.

Este mismo marco teórico puede adaptarse no sólo para implementar las situaciones mencionadas anteriormente, sino que también se puede emplear para considerar estos problemas geométricos en otras parametrizaciones especiales, que de otra manera resulta complicado de realizar. Por ejemplo en la representación espinorial de superficies, sin el empleo de multiplicadores de Lagrange, no es trivial la implementación en el principio variacional de la ecuación de Dirac que satisfacen el espinor y el potencial, las relaciones entre éstos y las funciones de encajamiento de la superficie. Igual que antes las configuraciones de equilibrio y las esfuerzos sobre las superficies se representaron a través de leyes de conservación expresadas en términos de estas variables particulares. Debido a que la parametrización empleada es conforme, las tres proyecciones de la ley de conservación son necesarias para determinar el tensor de esfuerzos correspondiente, a diferencia del caso invariante bajo reparametrizaciones en donde sólo se necesita la proyección normal.

# Apéndice A

## Geometría de curvas y superficies en $\mathbb{E}^3$

En este apéndice se hace un resumen de algunos conceptos de la geometría de curvas y superficies en el espacio Euclidiano tridimensional  $\mathbb{E}^3$ , con el propósito de establecer la convenciones adoptadas en notación y signos así como también para facilitar la referencia a algunas identidades utilizadas en los capítulos de esta tesis.

### A.1. Curvas en $\mathbb{E}^3$

Sea  $\Gamma(s) : s \rightarrow \mathbf{Y}(s)$  una curva en  $\mathbb{E}^3$  parametrizada por longitud de arco  $s$ . La base ortonormal de Frenet-Serret adaptada a  $\Gamma$  consiste en el trihedro dextrógiro  $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ .  $\mathbf{T}$  es el vector tangente unitario a  $\mathbf{Y}(s)$ , es decir,  $\mathbf{T} = \mathbf{Y}'$  donde  $'$  significa diferenciación con respecto a  $s$ .  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{B}$  son respectivamente la normal principal y la binormal de  $\mathbf{Y}(s)$ . Las fórmulas de Frenet-Serret que establecen cómo cambia esta base a lo largo de la curva en términos de la base misma son [34, 79]

$$\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}, \quad \mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\kappa$  es la curvatura y  $\tau$  la torsión de la curva  $\Gamma$  definidas por

$$\kappa = \|\mathbf{Y}' \times \mathbf{Y}''\|, \quad \tau = \frac{(\mathbf{Y}' \times \mathbf{Y}'') \cdot \mathbf{Y}'''}{\|\mathbf{Y}' \times \mathbf{Y}''\|^2} \quad (\text{A.2})$$

La curvatura total de la curva en el intervalo  $I : [s_i, s_f]$  se define como  $\int_{s_i}^{s_f} ds \kappa$ . Para una curva plana, la curvatura total es un invariante topológico.

### A.2. Superficies en $\mathbb{E}^3$

#### Primera y segunda formas fundamentales

Una superficie parametrizada por las coordenadas locales  $\{u^1, u^2\}$  encajada en el espacio Euclidiano tridimensional,  $\Sigma : u^a \rightarrow \mathbb{E}^3$ , se describe por las funciones  $\mathbf{X} = (X^1(u^a), X^2(u^a), X^3(u^a))$ ,  $a = 1, 2$ .

Los vectores tangentes y la normal a la superficie se definen por las relaciones

$$\mathbf{e}_a = \partial_a \mathbf{X} \quad \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{n}^2 \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad (\text{A.3})$$

Las componentes de la primera forma cuadrática fundamental, tensor métrico o simplemente métrica inducida sobre la superficie por la métrica del espacio ambiente tridimensional se definen por [31]

$$g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b. \quad (\text{A.4})$$

Este tensor describe la geometría intrínseca de la superficie, pues contiene toda la información de las distancias entre puntos sobre la superficie. La componentes de la matriz inversa de  $g_{ab}$  se denotan por  $g^{ab}$  y su determinante por  $g$ .

Por otra parte, las componentes de la segunda forma cuadrática fundamental o tensor de curvatura extrínseca de la superficie se define por [31]

$$K_{ab} = -\mathbf{e}_{ab} \cdot \mathbf{n}. \quad (\text{A.5})$$

Este tensor describe la geometría extrínseca de la superficie, pues contiene la información de cómo rota el vector unitario normal a la superficie a lo largo de una cierta dirección sobre la superficie,  $K_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \partial_b \mathbf{n}$  y por lo tanto captura la manera en la cual la superficie está encajada en el espacio ambiente tridimensional. Desde el punto de vista físico, su importancia reside en el hecho que la energía asociada con el doblamiento de una superficie es cuadrática en este tensor.

El operador de forma de la superficie que es la transformación lineal asociada con el tensor  $K_{ab}$ , el cual se define por  $K^a_b = g^{ac} K_{cb}$ . Este operador actuando sobre un vector  $\mathbf{e}_a$  proporciona la derivada del vector normal en la dirección de este vector:

$$K^b_a \mathbf{e}_b = \partial_a \mathbf{n}. \quad (\text{A.6})$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Weingarten. Algunos autores tradicionalmente definen esta relación con un signo menos con el propósito de reducir el número de signos menos en los cálculos, pero aquí se adopta esta convención porque así se obtiene que la curvatura media de la esfera es a positiva cuando se orienta positivamente usando el vector normal hacia afuera.

Los dos valores propios de  $K^a_b$  corresponden a las curvaturas normales máxima y mínima, llamadas curvaturas principales, denotadas por  $C_2$  y  $C_1$ , con  $C_1 < C_2$ . Asimismo sus dos vectores propios corresponden a las direcciones de máxima y mínima curvatura normal, llamadas direcciones principales.

Los dos invariantes de  $K^a_b$  son su traza que corresponde al doble de la curvatura media,  $K = \text{tr} K^a_b = C_1 + C_2$  y su determinante que corresponde a la curvatura Gaussiana  $K_G = \det K^a_b = C_1 C_2$ .

Para una superficie, su curvatura media se define por

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(\theta) d\theta, \quad (\text{A.7})$$

Sustituyendo la fórmula de Euler para la curvatura normal  $\kappa(\theta) = \kappa_1 \cos^2(\theta) + \kappa_2 \sin^2(\theta)$  se obtiene

$$H = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} K \quad (\text{A.8})$$

De la desigualdad de las medias aritmética y geométrica se obtiene que

$$K_G = \kappa_1 \kappa_2 \leq \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)^2}{4} = H^2 \quad (\text{A.9})$$

Entonces  $H^2 = \frac{1}{4} K^2 \geq K_G$ , donde la igualdad se cumple sólo cuando tanto  $H$  como  $K_G$  son constantes, es decir, cuando la superficie es una esfera [29].

### Teorema de Gauss-Bonnet

El teorema de Gauss-Bonnet establece que la curvatura Gaussiana total de una superficie sin fronteras es un invariante topológico dado por

$$\frac{1}{2\pi} \int dAK_G = 2(1 - g) \quad (\text{A.10})$$

donde  $g$  es el género de la superficie.

### Fórmula de Gauss y símbolos de Christoffel

La derivada espacial del vector tangente  $\mathbf{e}_a$  en la dirección  $\hat{\mathbf{e}}_b$  está dada por la fórmula de Gauss

$$\mathbf{e}_{ab} \equiv \partial_b \mathbf{e}_a = \Gamma^c_{ab} \mathbf{e}_c - K_{ab} \cdot \mathbf{n}. \quad (\text{A.11})$$

donde los coeficientes de la conexión están dados por los símbolos de Christoffel definidos por

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}). \quad (\text{A.12})$$

Son simétricos en los dos índices covariantes.

Contrayendo el índice contravariante con un índice covariante se obtiene

$$\Gamma^b_{ba} = \frac{1}{2} g^{bc} \partial_a g_{bc} \quad (\text{A.13})$$

lo cual, teniendo en cuenta que la derivada del determinante del tensor métrico  $g$  es

$$\partial_a g = g g^{bc} \partial_a g_{bc} \quad (\text{A.14})$$

puede escribirse como

$$\Gamma^b_{ba} = \frac{1}{2} \frac{\partial_a g}{g} = \frac{1}{2} \partial_a \log g. \quad (\text{A.15})$$

### Derivada covariante

La derivada covariante es una modificación de la derivada ordinaria, de forma tal que el proceso de diferenciación produzca una cantidad tensorial. Geométricamente, es el resultado de eliminar la parte normal de la derivada de cualquier cantidad, dejando únicamente su parte tangencial, es decir, la parte que está definida sobre la variedad a la que pertenece la cantidad original. Las componentes de la derivada covariante en la dirección  $\hat{\mathbf{e}}_b$  de un vector  $V = V^a \mathbf{e}_a$  es

$$(\nabla_b V)^a = \partial_b V^a + \Gamma^a_{bc} V^c. \quad (\text{A.16})$$

Y las componentes de la derivada covariante de un covector  $W = W_a \sigma^a$

$$(\nabla_b W)_a = \partial_b W_a - W_c \Gamma^c_{ba}. \quad (\text{A.17})$$

En general, las componentes de la derivada covariante de un tensor tipo  $(q, p)$  en la dirección  $\hat{\mathbf{e}}_c$  are

$$\begin{aligned} (\nabla_c T)^{a_1 \dots a_q}_{b_1 \dots b_p} &= \partial_c t^{a_1 \dots a_q}_{b_1 \dots b_p} + \sum_{r=1}^q \Gamma^{a_r}_{cd} t^{a_1 \dots d \dots a_q}_{b_1 \dots b_p} \\ &\quad - \sum_{s=1}^p t^{a_1 \dots a_q}_{b_1 \dots d \dots b_p} \Gamma^d_{cs}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Por definición la derivada covariante de un escalar  $S$  es igual a la derivada parcial ordinaria

$$\nabla_a S = \partial_a S \quad (\text{A.19})$$

Usando la identidad (A.15) es posible expresar la divergencia de un vector únicamente en términos de la métrica sin usar los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned} \nabla_a f^a &= \partial_a f^a + \Gamma^a_{ac} f^c = \partial_a f^a + \frac{1}{2} \frac{\partial_a g}{g} f^a \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} \partial_a f^a + \partial_a \sqrt{g} f^a) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} f^a) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

La derivada covariante del tensor métrico es cero

$$\nabla_c g_{ab} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Debido a esta propiedad, se dice que la derivada covariante construida con la conexión de Levi-Civita (donde los coeficientes de conexión son los símbolos de Christoffel) es compatible con la métrica.

### Tensor de Riemann-Christoffel

El tensor de Riemann cuantifica el grado en el que la derivada covariante no conmuta. Esto puede verse aplicando sucesivamente la derivada covariante al vector  $V^\gamma$  a lo largo de dos direcciones, por ejemplo  $\mathbf{e}_\gamma$  y  $\mathbf{e}_\delta$  y tomando la diferencia del resultado obtenido invirtiendo el orden de las derivadas, obteniendo

$$[\nabla_c, \nabla_d] V^a = V^b R^a_{bcd} \quad (\text{Identidad de Ricci}). \quad (\text{A.22})$$

Similarmente para un covector  $V_c$

$$[\nabla_c, \nabla_d] V_b = -V_a R^a_{bcd}. \quad (\text{A.23})$$

donde  $R^a_{bcd}$  es el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel definido por

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} + \Gamma^a_{ce} \Gamma^e_{bd} - (c \leftrightarrow d), \quad (\text{A.24})$$

( $c \leftrightarrow d$ ) significa el intercambio de  $c$  y  $d$  en los dos primeros términos. Entonces, se observa que es antisimétrico en los dos últimos subíndices:

$$R^a_{bcd} = -R^a_{bdc} \quad (\text{A.25})$$

Bajando el primer índice se tiene

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} (\partial_a \partial_d g_{bc} - \partial_b \partial_d g_{ac}) + \left( \Gamma^e_{ad} \Gamma^f_{bc} \right) g_{ef} - (c \leftrightarrow d), \quad (\text{A.26})$$

por lo que también es antisimétrico en el intercambio de los 2 primeros subíndices

$$R_{abcd} = -R_{bacd}, \quad (\text{A.27})$$

además se tiene que es simétrico en el intercambio de pares de subíndices

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad (\text{A.28})$$

En particular para una variedad bidimensional, el tensor de RC puede expresarse en términos de la métrica  $g_{ab}$  como [76, 103]

$$R_{abcd} = K_G (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) \quad (\text{A.29})$$

El tensor de RC satisface las dos siguientes relaciones, llamadas identidades de Bianchi [31, 76],

$$R^d_{abc} + R^d_{bca} + R^d_{cab} = 0 \quad (\text{Bianchi I}). \quad (\text{A.30})$$

$$\nabla_\alpha R^e_{dbc} + \nabla_b R^e_{dca} + \nabla_c R^e_{dab} = 0 \quad (\text{Bianchi II}). \quad (\text{A.31})$$

### Tensor y curvatura escalar de Ricci

El tensor de Ricci se define como la contracción del tensor de Riemann

$$R_{ab} = g^{cd} R_{cadb} = R^c{}_{acb} \quad (\text{A.32})$$

Debido a la propiedad de simetría (A.28) del tensor de Riemann, el tensor de Ricci también es simétrico

$$R_{ab} = R_{ba} \quad (\text{A.33})$$

y cualquier otra contracción del tensor de Riemann se anula.

Contrayendo otra vez el tensor de Ricci se obtiene la curvatura escalar de Ricci

$$\mathcal{R} = g^{ab} R_{ab} = R^a{}_a. \quad (\text{A.34})$$

En términos de los símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci está dado por

$$R_{ab} = \partial_c \Gamma^c{}_{ab} - \partial_a \Gamma^c{}_{cb} + \Gamma^e{}_{ab} \Gamma^c{}_{ec} - \Gamma^e{}_{bc} \Gamma^c{}_{ea}.$$

Puede notarse que a excepción del segundo término, todos los demás son simétricos en el intercambio de  $a$  con  $b$ , sin embargo puede verse que también dicho término es simétrico teniendo en cuenta la relación (A.15).

Contrayendo un índice de las permutaciones en la 2da. identidad de Bianchi (A.31) con el índice contravariante del tensor de Riemann se tiene

$$-\nabla^a R_{adcb} - \nabla_b R_{cd} + \nabla_c R_{bd} = 0.$$

Contrayendo  $b$  con  $d$  se llega a que

$$-2\nabla_a R^a{}_b + \nabla_b \mathcal{R} = 0, \quad (\text{A.35})$$

lo cual puede expresarse también como

$$\nabla_a \mathcal{G}^{ab} = 0 \quad (\text{A.36})$$

donde  $\mathcal{G}^{ab}$  es el tensor de Einstein definido por

$$\mathcal{G}^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} \mathcal{R} \quad (\text{A.37})$$

Para una superficie bidimensional, usando (A.29) se obtiene

$$R_{ab} = K_G g_{ab}, \quad (\text{A.38a})$$

$$\mathcal{R} = 2K_G. \quad (\text{A.38b})$$

por lo tanto el tensor de Einstein se anula idénticamente. Esto concuerda con el hecho que, como se derivó en el capítulo 3, el tensor de Einstein tensor es la derivada de Euler-Lagrange de la acción de Hilbert-Einstein, la cual para el caso bidimensional, teniendo en cuenta la relación (A.38b) el teorema de Gauss-Bonnet (A.10), se encuentra que la acción es constante y por lo tanto tiene una variación nula.

### A.3. Condiciones de integrabilidad

Las derivada de los vectores tangentes de la base adaptada a la superficie debe satisfacer la siguiente condición

$$\mathbf{e}_{c[ab]} \equiv (\partial_b \partial_a - \partial_a \partial_b) \mathbf{e}_c = 0, \quad (\text{A.39})$$

donde  $[a, b]$  representa la antisimetrización en estos índices. El primer término está dado por

$$\mathbf{e}_{cab} = (\partial_b \Gamma_{ca}^d + \Gamma_{ca}^e \Gamma_{eb}^d - K_{ca} K_b^d) \mathbf{e}_d + (\partial_b K_{ca} + \Gamma_{ca}^d K_{db}) \mathbf{n}. \quad (\text{A.40})$$

Para el segundo término, intercambiando  $a$  y  $b$  se tiene

$$\mathbf{e}_{cba} = (\partial_a \Gamma_{cb}^d + \Gamma_{cb}^e \Gamma_{ea}^d - K_{cb} K_a^d) \mathbf{e}_d + (\partial_a K_{cb} + \Gamma_{cb}^d K_{da}) \mathbf{n}.$$

De la diferencia de estas dos expresiones así como de la independencia lineal de la base  $\{\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{n}\}$ , se obtienen las siguientes ecuaciones

$$R_{abcd} = K_{ac} K_{bd} - K_{ad} K_{bc}, \quad (\text{Gauss-Codazzi}), \quad (\text{A.41})$$

$$\partial_a K_{bc} - \Gamma_{ac}^d K_{bd} = \partial_b K_{ac} - \Gamma_{bc}^d K_{ad}, \quad (\text{Codazzi-Peterson}). \quad (\text{A.42})$$

Restando el término  $\Gamma_{ab}^d K_{cd}$  en ambos lados de la ecuación de Codazzi-Peterson, ésta puede escribirse en forma covariante como

$$\nabla_{[a} K_{b]c} \equiv \nabla_a K_{bc} - \nabla_b K_{ac} = 0, \quad (\text{Codazzi-Mainardi}). \quad (\text{A.43})$$

Estas son la condiciones de integrabilidad, es decir, condiciones que los tensores  $g_{ab}$  y  $K_{ab}$  deben satisfacer para que representen la primera y la segunda formas fundamentales de una superficie in  $\mathbb{E}^3$ . Bonnet demostró lo inverso, que estas condiciones son suficientes para asegurar localmente la existencia de una superficie en  $\mathbb{E}^3$  para algunos tensores  $g_{ab}$  y  $K_{ab}$  dados.

Empleando la ecuación de Gauss-Codazzi se tiene que el tensor y el escalar de Ricci pueden ser expresado de manera extrínseca como

$$R_{ab} = K K_{ab} - K_\alpha^c K_{cb}, \quad (\text{A.44})$$

$$\mathcal{R} = K^2 - K_{ab} K^{ab}. \quad (\text{A.45})$$

#### A.4. Marco de Darboux adaptado a una curva sobre una superficie

Sea  $\Gamma : s \rightarrow \mathbf{Y}(s)$  una curva parametrizada por longitud de arco  $s$  sobre una superficie bidimensional orientable y encajada en el espacio Euclidiano tridimensional, descrita en forma paramétrica por el mapeo  $\Sigma : (u^1, u^2) \rightarrow \mathbf{X}(u^1, u^2)$ . El vector tangente a lo largo de  $\mathbf{Y}$  es una combinación lineal de los vectores  $\{\mathbf{e}_\alpha\}$  de la base adaptada a  $\Sigma$  a lo largo de las coordenadas  $u^a$ , es decir  $\mathbf{Y}' = \mathbf{T} = T^a \mathbf{e}_a$ , con  $T^a = \partial u^a / \partial s$ .

El vector de curvatura  $\boldsymbol{\kappa}$  de  $\mathbf{Y}$  está dado por su aceleración  $\mathbf{Y}'' = \mathbf{T}'$ . Con respecto al marco de FS  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  está dado por

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}. \quad (\text{A.46})$$

Como  $\mathbf{Y}$  es una curva en el espacio Euclidiano, en general  $\boldsymbol{\kappa}$  tendrá componentes tangente y normal a  $\Sigma$ . Esta descomposición de la curvatura en estos dos subespacios se hace apropiadamente en el marco de Darboux adaptado a  $\mathbf{Y}$ , el cual está constituido por el vector tangente  $\mathbf{T}$  y por la base del espacio ortogonal a  $\mathbf{Y}$  dada por el vector normal a la superficie y por un vector del espacio tangente de la superficie  $T\Sigma$ . Es decir consiste en el triedro dextrógiro  $\{\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{l}\}$  donde el vector  $\mathbf{l}$  está definido por  $\mathbf{l} = \mathbf{T} \times \mathbf{n} = l^a \mathbf{e}_a$ . En este marco el vector de curvatura se descompone en dos partes, una tangente y otra normal a la superficie<sup>1</sup>

$$\boldsymbol{\kappa} = -\kappa_g \mathbf{l} - \kappa_n \mathbf{n}, \quad (\text{A.47})$$

<sup>1</sup>Los dos signos menos son debidos a que aquí se ha definido el vector  $\mathbf{l}$  como la normal hacia afuera y a la convención de signo en las ecuaciones de Weingarten (A.6).

relación que proporciona directamente una descomposición de la curvatura de FS en sus partes intrínseca y extrínseca:  $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$ . La componente tangencial está dada por  $k_g = -\mathbf{T}' \cdot \mathbf{l} = k_g^a l_a$  y

$$\kappa_g^a = \frac{\partial T^a}{\partial s} + \Gamma^a_{bc} T^b T^c = \frac{\partial^2 u^a}{\partial s^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{\partial u^b}{\partial s} \frac{\partial u^c}{\partial s}. \quad (\text{A.48})$$

Entonces, las curvas que satisfacen la ecuación  $\kappa_g^a = 0$ , llamadas geodésicas, no tienen proyección en el espacio tangente  $T\Sigma$ .

En cuanto a la componente normal de la curvatura, está dada por la proyección

$$\kappa_n = -\mathbf{T}' \cdot \mathbf{n} = T^a T^b K_{ab}. \quad (\text{A.49})$$

Además de esta proyección, la derivada del vector normal a lo largo de la curva involucra la proyección no diagonal de  $K_{ab}$ , la cual se define como la torsión geodésica dada por

$$\tau_g = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{l} = T^a l^b K_{ab}, \quad (\text{A.50})$$

El nombre de torsión geodésica proviene del hecho que es precisamente la torsión de la geodésica que pasa por un mismo punto de  $\Gamma$  y con la misma dirección [57]. Para demostrar esto, comparando las ecuaciones (A.46) y (A.47) se tiene que para  $\kappa_g = 0$ , en el caso en el cual se orienta la superficie de forma que la normal principal está alineada con la normal a la superficie,  $\mathbf{N} = \mathbf{n}$  (y la curvatura de FS es igual menos la curvatura de normal,  $\kappa = -\kappa_n$ ), el vector binormal también lo está con la normal exterior:  $\mathbf{B} = \mathbf{l}$ . Diferenciando esta relación se obtiene que  $\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{n} = \mathbf{l}'$ , por lo tanto  $\tau = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{l}$ , tal como en la relación (A.50).

A partir de las curvaturas principales se pueden determinar tanto la curvatura normal y la torsión geodésica para cualquier otra curva. Sean  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  la curvaturas principales de la superficie y  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  las respectivas direcciones principales, es decir, la direcciones en las que se satisface que  $K^a_b V_i^b = \kappa_i V_i^a$ ,  $i = 1, 2$ . Si la curva  $\Gamma$  forma un ángulo  $\alpha$  con  $\mathbf{v}_1$ , de manera que el vector tangente es  $\mathbf{T} = \cos \alpha \mathbf{V}_1 + \sin \alpha \mathbf{V}_2$ , entonces la curvatura normal de  $\Gamma$  está dada por la fórmula de Euler [23, 31]

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha. \quad (\text{A.51})$$

Adicionalmente, se tiene que  $\mathbf{l} = \sin \alpha \mathbf{V}_1 - \cos \alpha \mathbf{V}_2$ , por lo que la torsión geodésica de  $\Gamma$  está dada por

$$\tau_g = \frac{1}{2} (\kappa_1 - \kappa_2) \sin 2\alpha, \quad (\text{A.52})$$

que, en particular se anula en puntos umbilicales y en general en las direcciones principales, así la curvatura geodésica es una medida de cómo difiere la curva de una curva principal.

De las definiciones de  $\kappa_g$ ,  $\kappa_n$  y  $\tau_g$  se obtiene la conexión de este marco (análogo a las ecuaciones de FS) es

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{l} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & -\kappa_g \\ \kappa_n & 0 & \tau_g \\ \kappa_g & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{l} \end{pmatrix} \quad (\text{A.53})$$

Adicionalmente es posible, relacionar este marco con el marco de FS. Para hacer esto se debe tener en cuenta que las normales del marco de FS se relacionan con sus contrapartes del marco de Darboux por una rotación alrededor del vector tangente:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{l} \end{pmatrix} \quad (\text{A.54})$$



Combinando las relaciones (A.46) y (A.47) para  $\kappa$  y empleando la relación para  $\mathbf{N}$  así como su derivada con respecto a  $s$ , permite expresar las razones de las distintas curvaturas así como la diferencia de las 2 torsiones en términos del ángulo de rotación:

$$\kappa_g/\kappa = -\sin \omega, \quad \kappa_n/\kappa = -\cos \omega, \quad \tau - \tau_g = \omega'. \quad (\text{A.55})$$

En particular, si  $\mathbf{Y}$  es una curva principal con torsión no nula, entonces la torsión es simplemente el cambio del ángulo de rotación a lo largo de la curva, i.e.  $\tau = \omega'$ .

Las identidades (A.55) implican las siguientes identidades:

$$\kappa'_g = \frac{\kappa'}{\kappa} \kappa_g + \kappa_n (\tau - \tau_g), \quad \kappa'_n = \frac{\kappa'}{\kappa} \kappa_n - \kappa_g (\tau - \tau_g). \quad (\text{A.56})$$

las cuales permiten expresar al vector de esfuerzos para una Elástica de Euler dado por la ecuación (2.56) en términos de  $\kappa_g$ ,  $\kappa_n$  y  $\tau_g$  así como de sus derivadas

$$\mathbf{F} = \left( \frac{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}{2} - c \right) \mathbf{T} - (\kappa'_g + \kappa_n \tau_g) \mathbf{l} - (\kappa'_n - \kappa_g \tau_g) \mathbf{n}. \quad (\text{A.57})$$

Las restricciones de las dos formas cuadráticas fundamentales a la curva pueden ser expresadas en esta base, pues  $\{\mathbf{T}, \mathbf{l}\}$  proporcionan una base para los vectores tangentes a  $\Sigma$  en  $\Gamma$ , de manera que se pueden expresar como  $\mathbf{e}_a = T_a \mathbf{T} + l_a \mathbf{l}$ , relación que permite expresar a la métrica como

$$g_{ab} = T_a T_b + l_a l_b, \quad (\text{A.58})$$

reflejando la completitud de la base ortonormal tangente adaptada a  $\Gamma$ . Tomando la derivada covariante de esta relación, y usando el hecho que la métrica es compatible, ecuación (A.21), se obtiene la identidad

$$\nabla \cdot \mathbf{T} T^a + \nabla_{\parallel} T^a + \nabla \cdot \mathbf{l} l^a + \nabla_{\perp} l^a = 0. \quad (\text{A.59})$$

proyectando esta identidad en  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{l}$  se obtienen las dos siguientes identidades

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{l} = 0, \quad (\text{A.60a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l} \cdot \nabla_{\parallel} \mathbf{T} = 0, \quad (\text{A.60b})$$

que proporcionan las divergencias de  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{l}$  en términos de las proyecciones de sus derivadas covariantes.

Utilizando la ecuación (A.60b), la curvatura geodésica dada por  $\kappa_g = -\mathbf{T}' \cdot \mathbf{l} = -\mathbf{l} \cdot \nabla_{\parallel} \mathbf{T}$  puede ser expresada como la divergencia de  $\mathbf{l}$

$$\kappa_g = \nabla \cdot \mathbf{l}. \quad (\text{A.61})$$

Esta expresión se puede considerar como el análogo bidimensional de la expresión para la curvatura media en términos de la divergencia espacial del vector normal a la superficie,  $K = \nabla \cdot \mathbf{n}$ .

## A.5. Superficies axisimétricas

En esta sección se especializan algunos resultados derivados anteriormente para superficies de revolución o axisimétricas.

Una superficie axisimétrica  $\Sigma$  puede ser parametrizada en términos de la longitud de arco  $l$  a largo de un generador y del ángulo azimutal  $\varphi$  en la forma

$$\mathbf{X}(l, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho(l) \cos \varphi \\ \rho(l) \sin \varphi \\ Z(l) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.62})$$

Dado que  $l$  es longitud de arco se cumple que  $\dot{\rho}(l)^2 + \dot{Z}(l)^2 = 1$  donde el punto representa diferenciación con respecto a  $l$ . Los vectores tangentes adaptados a esta parametrización son

$$\hat{\mathbf{e}}_l = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \cos \varphi \\ \dot{\rho} \sin \varphi \\ \dot{Z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.63})$$

Entonces el elemento de línea sobre la superficie está dado por

$$ds^2 = dl^2 + \rho^2 d\varphi^2 \quad (\text{A.64})$$

y la métrica toma la forma conformemente plana

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.65})$$

El vector normal exterior  $\mathbf{n} = g^{-1/2} \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_l$  es

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \dot{Z} \cos \varphi \\ \dot{Z} \sin \varphi \\ -\dot{\rho} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.66})$$

El tensor de curvatura extrínseca y el operador de forma son diagonales

$$K_{ab} = \begin{pmatrix} \ddot{\rho}/\dot{Z} & 0 \\ 0 & \rho\dot{Z} \end{pmatrix}, \quad K^a_b = \begin{pmatrix} \ddot{\rho}/\dot{Z} & 0 \\ 0 & \dot{Z}/\rho \end{pmatrix}. \quad (\text{A.67})$$

Entonces los vectores propios del operador de forma están a lo largo de los meridianos (curvas generadoras con  $\varphi$  constante) y de los paralelos (curvas de  $l$  constante); además las curvaturas principales que corresponden a los valores propios son

$$C_\perp = -\ddot{\rho}/\dot{Z}, \quad C_\parallel = \dot{Z}/\rho. \quad (\text{A.68})$$

Así la curvatura media  $K$  y la curvatura Gaussiana  $K_G$  están dados por

$$K = -\frac{\ddot{\rho}}{\dot{Z}} + \frac{\dot{Z}}{\rho}, \quad K_G = -\frac{\ddot{\rho}}{\dot{\rho}}. \quad (\text{A.69})$$

Otra manera alternativa de expresar estas cantidades es en términos del ángulo  $\Theta$  que forma el vector  $\hat{\mathbf{e}}_l$  con el vector unitario radial  $\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T$ . En esta parametrización se tiene que

$$\dot{\rho} = \cos \Theta, \quad \dot{Z} = \sin \Theta, \quad (\text{A.70})$$

y las curvaturas  $C_\perp$  a lo largo de los meridianos y  $C_\parallel$  a lo largo de los paralelos están dadas por

$$C_\perp = \dot{\Theta}, \quad C_\parallel = \frac{\sin \Theta}{\rho}. \quad (\text{A.71})$$

$K$  y  $K_G$  se expresan como

$$K = \dot{\Theta} + \frac{\sin \Theta}{\rho}, \quad K_G = -\frac{\cos \Theta}{\rho}. \quad (\text{A.72})$$

En 1841 Delaunay propuso otra sustitución adicional, que consiste en considerar a  $\dot{Z}$  como una función de  $\rho$ ,  $\dot{Z} = f(\rho)$ , de manera que

$$\dot{\Theta} = \partial_\rho f. \quad (\text{A.73})$$

Esta relación que permite reexpresar a  $K$  y  $K_G$  en términos de  $\rho$  y  $f(\rho)$  en la forma

$$K = \frac{\partial_\rho(\rho f)}{\rho}, \quad K_G = \frac{\partial_\rho f^2}{2\rho}. \quad (\text{A.74})$$

Para una superficie de curvatura media constante  $f$  se obtiene directamente que

$$f = \frac{K\rho}{2} + \frac{a}{\rho}, \quad (\text{A.75})$$

donde  $a$  es una constante. En particular para una superficie mínima,  $f$  es proporcional al inverso de  $\rho$ ,  $f = a/\rho$ .

Considerando una curva  $\Gamma_\Sigma$  parametrizada por  $\varphi(l)$  sobre la superficie, ésta puede ser expresada en el marco de Darboux  $\{\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{l}\}$  como

$$\mathbf{Y}(l) = 1/2(\rho^2 + Z^2) \cdot (\sin \alpha \mathbf{T} + \cos \alpha \mathbf{l}) + \rho^2 (Z/\rho) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.76})$$

donde los vectores tangentes de la base de Darboux,  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{l}$  están dados

$$\mathbf{T} = \cos \alpha \hat{\mathbf{e}}_\phi + \sin \alpha \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{l} = \sin \alpha \hat{\mathbf{e}}_\phi - \cos \alpha \mathbf{e}_l. \quad (\text{A.77})$$

de manera que  $\alpha$  es el ángulo que  $\Gamma_\Sigma$  forma con la dirección principal  $\hat{\mathbf{e}}_\phi = 1/\rho \mathbf{e}_\varphi$ . La comparación de la primera relación con la expresión (A.62) de las funciones de encajamiento se obtiene las siguientes relaciones que definen  $\alpha$

$$\sin \alpha = l', \quad \cos \alpha = \rho \varphi'. \quad (\text{A.78})$$

Estas relaciones permiten, de forma más conveniente, definir las cantidades geométricas sobre la curva en términos de su propia longitud de arco  $s$ . Como es usual, se denota la derivada con respecto la longitud de arco con una prima,  $' \equiv \partial_s$ . Usando las relaciones (A.77) y (A.78) se obtiene que la aceleración de  $\Gamma$  está dada por

$$\mathbf{T}' = - \left( \alpha' - \frac{\rho'}{\rho} \cot \alpha \right) \mathbf{l} - (\sin^2 \alpha C_\perp + \cos^2 \alpha C_\parallel) \mathbf{n} \quad (\text{A.79})$$

Entonces la curvatura geodésica definida como  $\kappa_g = -\mathbf{T}' \cdot \mathbf{l}$  está dada por

$$\kappa_g = \alpha' - \frac{\rho'}{\rho} \cot \alpha. \quad (\text{A.80})$$

La curvatura normal definida por  $\kappa_n = -\mathbf{T}' \cdot \mathbf{n}$  está dada por la ecuación de Euler (A.51), para este caso toma la forma

$$\kappa_n = \sin \alpha \dot{\Theta} + \cos^2 \alpha \frac{\sin \Theta}{\rho} = \sin^2 \alpha \left( \partial_\rho f + \cot^2 \alpha \frac{f}{\rho} \right). \quad (\text{A.81})$$

Finalmente, la torsión geodésica definida por la ecuación (A.52) se expresa como

$$\tau_g = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left( \frac{\sin \Theta}{\rho} - \dot{\Theta} \right) = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \rho \partial_\rho \left( \frac{f}{\rho} \right). \quad (\text{A.82})$$

## Apéndice B

# Variaciones de cantidades geométricas

En este apéndice se derivan en detalle las variaciones de algunas cantidades geométricas de curvas y superficies con el propósito de servir como referencia en los capítulos principales.

### Deformaciones Locales de superficies

Sean  $\mathbf{X} : u^a \rightarrow \mathbb{E}^3$ ,  $a = 1, 2$ , las funciones de encajamiento de una superficie bidimensional en el espacio Euclidiano tridimensional. La variación de  $\mathbf{X}$  con respecto a un parámetro  $t$  está dada por

$$\mathbf{X}(u^a, t) = \mathbf{X}(u^a) + t\delta\mathbf{X}(u^a), \quad (\text{B.1})$$

donde

$$\mathbf{X}(u^i) \equiv \mathbf{X}(u^i, 0), \quad \delta\mathbf{X}(u^i) = \partial_t \mathbf{X}(u^i, t) |_{t=0} \delta t. \quad (\text{B.2})$$

La variación con respecto a  $t$  y la diferenciación con respecto a las coordenadas locales  $u^a$  son independientes uno del otro, es decir, ambos procesos conmutan:

$$\delta\partial_a = \partial_a\delta. \quad (\text{B.3})$$

Descomponiendo  $\delta\mathbf{X}$  en sus partes tangencial y normal a la superficie se obtiene

$$\delta\mathbf{X} = \psi^a \mathbf{e}_a + \phi \mathbf{n}. \quad (\text{B.4})$$

### B.1. Variaciones de los vectores tangentes y normal

La variación de los vectores tangentes está dada por

$$\delta\mathbf{e}_a = \partial_a\delta\mathbf{X} = (\nabla_a\psi^b + \phi K_a^b)\mathbf{e}_b + (\nabla_a\phi - K_{ab}\psi^b)\mathbf{n}. \quad (\text{B.5})$$

Para calcular la variación del vector normal, teniendo en cuenta que  $\delta\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$  y  $\delta\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_a = -\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{e}_a$  se obtiene que está dada por

$$\delta\mathbf{n} = -g^{ab} \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{e}_a \mathbf{e}_b = (-\nabla^a\phi + K^a_b\psi^b)\mathbf{e}_a. \quad (\text{B.6})$$

La derivada covariante de la variación de los vectores tangentes está dada por

$$\begin{aligned} \nabla_a\delta\mathbf{e}_b = \nabla_a\nabla_b\delta\mathbf{X} &= \left( \nabla_a\nabla_b\psi^c - K^c_a K_{bd}\psi^d + K^c_{\{a}\nabla_b\}\phi + \phi\nabla^c K_{ab} \right) \mathbf{e}_c \\ &+ \left( \nabla_a\nabla_b\phi - K_{ac}K^c_b\phi - K_{c\{a}\nabla_b\}\psi^c - \psi^c\nabla_c K_{ab} \right) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

donde  $a, b$  significa el doble de la simetrización en estos índices, es decir  $A_{ab} = A_{ab} + A_{ba}$ . Contrayendo esta expresión se obtiene el Laplaciano de  $\delta\mathbf{X}$

$$\begin{aligned}\Delta\delta\mathbf{X} \equiv \nabla_a \nabla^a \delta\mathbf{X} &= (\Delta\psi^a - K^{ab} K_{bc} \psi^c + 2K^{ab} \nabla_b \phi + \phi \nabla^a K) \mathbf{e}_a \\ &+ (\Delta\phi - K_{ab} K^{ab} \phi - 2K_{ab} \nabla^a \psi^b - \psi^a \nabla_a K) \mathbf{n}.\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

## B.2. Variación de la geometría intrínseca

### Variaciones del tensor métrico, su inverso y su determinante

La variación de tensor métrico está dada por [13, 16]

$$\begin{aligned}\delta g_{ab} &= \partial_a \delta\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \cdot \partial_b \delta\mathbf{X} \\ &= \nabla_a \psi_b + \nabla_b \psi_a + 2\phi K_{ab}.\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

Para el inverso del tensor métrico, de  $g_{cd} g^{db} = \delta_c^b$

$$0 = \delta(g_{cd} g^{db}) = \delta g_{cd} g^{db} + g_{cd} \delta g^{db},$$

lo cual, multiplicando por  $g^{ac}$  da

$$\delta g^{ab} = -g^{ac} g^{bd} \delta g_{cd}.\quad (\text{B.10})$$

Esto implica que la variación del inverso de la métrica bajo un cambio en la métrica es

$$\begin{aligned}\frac{\delta g^{ab}}{\delta g_{ef}} &= -g^{ac} g^{bd} \frac{\delta g_{cd}}{\delta g_{ef}} \\ &= -\frac{1}{2} g^{ac} g^{bd} (\delta_c^e \delta_d^f + \delta_d^e \delta_c^f) \\ &= -\frac{1}{2} (g^{ae} g^{bf} + g^{af} g^{be}).\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

Para la variación de  $g = \det(g_{ab})$  con respecto a  $g_{ab}$ , a partir de la identidad  $\ln(\det g_{ab}) = \text{tr}(\ln g_{ab})$  (la cual se puede demostrar diagonalizando  $g_{ab}$ ), se tiene

$$\begin{aligned}\delta \ln g &= \text{tr}(\delta \ln g_{ab}), \\ g^{-1} \delta g &= g^{ab} \delta g_{ab}.\end{aligned}$$

entonces

$$\delta g = g g^{ab} \delta g_{ab}.\quad (\text{B.12})$$

En particular para  $\sqrt{g}$

$$\delta \sqrt{g} = \frac{\sqrt{g}}{2} g^{ab} \delta g_{ab}.\quad (\text{B.13})$$

### Variación del tensor de Riemann-Christoffel

Para la variación del tensor de Riemann se necesita conocer la variación de los coeficientes de la conexión, lo cual se encuentra empleando la relación (B.10)

$$\begin{aligned}\delta \Gamma_{ab}^c &= \frac{1}{2} [-g^{cd} g^{ef} \delta g_{df} (\partial_a g_{eb} + \partial_b g_{ae} - \partial_e g_{ab}) + g^{ce} (\partial_a \delta g_{eb} + \partial_b \delta g_{ae} - \partial_e \delta g_{ab})] \\ &= -g^{cd} \Gamma_{ab}^f \delta g_{df} + \frac{1}{2} g^{ce} (\partial_a \delta g_{eb} + \partial_b \delta g_{ae} - \partial_e \delta g_{ab})\end{aligned}$$

En particular, en el sistema de coordenadas normales, en el cual  $\Gamma = 0$ , las derivadas direccionales pueden ser reemplazadas por derivadas covariantes, y la expresión anterior puede ser escrita como

$$\delta\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{ce}(\nabla_a\delta g_{eb} + \nabla_b\delta g_{ae} - \nabla_e\delta g_{ab}) \quad (\text{B.14})$$

Teniendo en cuenta que  $\delta\Gamma = \tilde{\Gamma} - \Gamma$  es un tensor de tipo (1,2), se tiene que las expresiones de ambos lados son tensores y por lo tanto (B.14) es válida en cualquier sistema de coordenadas. Esta expresión se conoce como la identidad de Palatini.

La variación el tensor de Riemann es

$$\delta R^a_{bcd} = \partial_c\delta\Gamma^a_{bd} + \delta\Gamma^a_{ce}\Gamma^e_{bd} + \Gamma^a_{ce}\delta\Gamma^e_{bd} - \partial_d\delta\Gamma^a_{bc} - \delta\Gamma^a_{de}\Gamma^e_{bc} - \Gamma^a_{de}\delta\Gamma^e_{bc}, \quad (\text{B.15})$$

lo cual reordenando, sumando y restándole el término  $\Gamma^e_{cd}\delta\Gamma^a_{be}$ , se convierte en

$$\begin{aligned} \delta R^a_{bcd} &= \partial_c\delta\Gamma^a_{bd} + \Gamma^a_{ce}\delta\Gamma^e_{bd} - \Gamma^e_{bc}\delta\Gamma^a_{de} - \Gamma^e_{cd}\delta\Gamma^a_{be} \\ &\quad - (\partial_d\delta\Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{de}\delta\Gamma^e_{bc} - \Gamma^e_{bd}\delta\Gamma^a_{ce} - \Gamma^e_{cd}\delta\Gamma^a_{be}) \\ &= \nabla_c\delta\Gamma^a_{bd} - \nabla_d\delta\Gamma^a_{bc}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

A partir de esto, la variación del tensor de Ricci es

$$\delta R_{ab} = \nabla_c\delta\Gamma^c_{ab} - \nabla_b\delta\Gamma^c_{ca}. \quad (\text{B.17})$$

A partir de esto y de la identidad (B.14) se puede calcular la variación del escalar de Ricci

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{R} &= \delta(g^{ab}R_{ab}) \\ &= -R^{ab}\delta g_{ab} + g^{ac}g^{bd}\nabla_c\nabla_d\delta g_{ab} - g^{ab}g^{cd}\nabla_c\nabla_d\delta g_{ab}, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

lo cual empleando la definición  $\nabla^a \equiv g^{ab}\nabla_b$  se puede reescribir como

$$\delta\mathcal{R} = -R^{ab}\delta g_{ab} + \nabla^a\nabla^b\delta g_{ab} - g^{ab}\nabla^c\nabla_c\delta g_{ab}, \quad (\text{B.19})$$

Variación del tensor de RC covariante

$$\begin{aligned} \delta R_{abcd} &= \delta g_{ae}R^e_{bcd} + g_{ae}\delta R^e_{bcd} \\ &= \frac{1}{2}(R^e_{bcd}\delta g_{ae} - R^e_{acd}\delta g_{be}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\nabla_c\nabla_b\delta g_{ad} - \nabla_c\nabla_a\delta g_{bd} - \nabla_d\nabla_b\delta g_{ac} + \nabla_d\nabla_a\delta g_{bc}) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

### Variación del área

Para calcular la variación del área, empleando las relaciones (B.9) y (B.13) se obtiene

$$\delta dA = \delta(\sqrt{g} du^a) = \frac{1}{2}dA g^{ab}\delta g_{ab} = dA(\nabla_a\psi^a + K\phi) \quad (\text{B.21})$$

## B.3. Variación de la geometría extrínseca

La variación del tensor curvatura extrínseca está dada por la proyección normal de la derivada covariante de la variación de los vectores tangentes

$$\begin{aligned} \delta K_{ab} &= -\delta(\mathbf{e}_{ba} \cdot \mathbf{n}) = -\partial_a\delta\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{n} - \partial_a\mathbf{e}_b \cdot \delta\mathbf{n} \\ &\stackrel{(\text{A.11})}{=} -\partial_a\delta\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{n} - \Gamma^c_{ab}\mathbf{e}_c \cdot \delta\mathbf{n} = -\partial_a\delta\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{n} + \Gamma^c_{ab}\delta\mathbf{e}_c \cdot \mathbf{n} \\ &= -\nabla_a\delta\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Empleando la expresión de  $\nabla_a \delta \mathbf{e}_b$  dada en la ecuación (B.7), se obtiene que en términos de las componentes tangencial y normal del vector de deformación vector  $\delta K_{\alpha\beta}$  está dado por

$$\delta K_{ab} = -\nabla_a \nabla_b \phi + \phi K_{ac} K_b^c + \nabla_c K_{ab} \psi^c + K_{ac} \nabla_b \psi^c + K_{bc} \nabla_a \psi^c, \quad (\text{B.23})$$

La primera variación del operador de forma es

$$\delta K_b^a = \delta g^{ac} K_{cb} + g^{ac} \delta K_{ac} \stackrel{(\text{B.10})}{=} g^{ac} (-K_b^d \delta g_{cd} + \delta K_{cb}). \quad (\text{B.24})$$

en particular para una isometría es simplemente  $\delta K_b^a = g^{ac} \delta K_{cb}$ .

Contrayendo la ecuación (B.24) se obtiene que la variación de la curvatura media es

$$\delta K = -K^{ab} \delta g_{ab} + g^{ab} \delta K_{ab}. \quad (\text{B.25})$$

Usando las relaciones (B.9) y (B.23) se obtiene que en términos de descomposición tangencial y normal es

$$\delta K = -\Delta \phi - \phi K_{ab} K^{ab} + \psi^a \nabla_a K. \quad (\text{B.26})$$

La variación de  $K^{ab}$  está dada por

$$\begin{aligned} \delta K^{ab} &= \delta(g^{ac} g^{bd} K_{cd}) \\ &= -(g^{ac} K^{bd} + g^{bc} K^{ad}) \delta g_{cd} + g^{ac} g^{bd} \delta K_{cd}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

La variación del escalar de Ricci también se puede obtener extrínsecamente por medio de la condición de Gauss-Codazzi (A.41)

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R} &= \delta(K^2 - K_{ab} K^{ab}) \\ &= -2R^{ab} \delta g_{ab} + 2(g^{ab} K - K^{ab}) \delta K_{ab}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

## Apéndice C

# Superficies mínimas en la representación de Weierstrass-Enneper

Las superficies mínimas minimizan su área localmente, geoméricamente esto significa que su curvatura  $K$  media es nula. De la definición  $K = g^{ab}K_{ab} = -\nabla^a \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}$  y de la ecuación de Gauss  $\nabla_a \mathbf{e}_b = -K_{ab} \mathbf{n}$ , se puede ver que esto es equivalente a la condición que sus funciones de encajamiento son armónicas. Sean  $(u, v)$  coordenadas isotérmicas sobre la superficie (de forma el tensor métrico es proporcional a la matriz identidad). Se define también la coordenada compleja  $z = u + iv$ . Dado que  $\mathbf{X}$  es armónico, el vector tangente complejo  $\mathbf{e}_z = \partial_z \mathbf{X}$  es holomórfico; la condición de que  $u$  y  $v$  son isotérmicas implica que  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 0$ . En consecuencia, es posible representar  $\mathbf{e}_z$  en términos de dos funciones compleja  $f$  y  $g$  [34, 30, 100]

$$\mathbf{e}_z(z) = \frac{f(z)}{4} (1 - g^2(z), i(1 + g^2(z)), 2g(z)) . \quad (\text{C.1})$$

Las dos funciones  $f$  y  $g$  proporcionan la información de Weierstrass de la superficie. Están definidas en un dominio  $\mathbb{D}$  del plano complejo. Mientras que  $g$  es holomórfica, *i.e.* está definida en todo el plano  $\mathbb{C}$ ,  $f$  es meromórfica. Estas funciones deben satisfacer también que la función  $f(z)g^2(z)$  es holomórfica.

El segundo vector tangente es  $\mathbf{e}_{\bar{z}} = \bar{\mathbf{e}}_z$ .

En esta representación, las funciones de encajamiento están dadas por

$$\mathbf{X}(z, \bar{z}) = 2\text{Re} \int^z dz \mathbf{e}_z + \mathbf{X}_0 . \quad (\text{C.2})$$

Es sencillo expresar las cantidades geométricas de la superficie en términos de  $f$  y  $g$ . La métrica inducida está dada por

$$ds^2 = \Omega^2(z, \bar{z}) dz d\bar{z} , \quad (\text{C.3})$$

donde el factor conforme está dado por

$$\Omega(z, \bar{z}) = \frac{|f|}{2} (|g|^2 + 1) . \quad (\text{C.4})$$

El vector normal exterior a la superficie mínima está dado en términos de la función  $g$ ,

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{1 + |g|^2} (2 \text{Re } g, 2 \text{Im } g, |g|^2 - 1) . \quad (\text{C.5})$$



El producto cruz de  $\mathbf{e}_z$  y  $\mathbf{n}$  está en la dirección de  $\mathbf{e}_z$  mismo:

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{n} = i\mathbf{e}_z. \quad (\text{C.6})$$

Las componentes no nulas de tensor de curvatura extrínseca y el operador de forma son

$$K_{zz} = \mathcal{A}, \quad K_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{2}{\Omega^2} \bar{\mathcal{A}}, \quad (\text{C.7})$$

donde el diferencial de Hopf  $\mathcal{A}$  se define por  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} f \partial_z g$ . La curvatura Gaussiana  $\mathcal{K}_G$  es negativa para superficie mínimas

$$\mathcal{K}_G = -\frac{4}{\Omega^2} \partial_z \partial_{\bar{z}} \ln \Omega = -\frac{|f|^2 |\partial_z g|^2}{\Omega^4}. \quad (\text{C.8})$$

Las dos curvaturas principales están dadas por

$$C_1 = -2 \frac{|\mathcal{A}|}{\Omega^2} = -\frac{|f| |\partial_z g|}{\Omega^2} = -C_2; \quad (\text{C.9})$$

que corresponden a las direcciones principales

$$\hat{\mathbf{V}}_1 = -2 \text{Im} \left( \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{|\mathcal{A}|}{\mathcal{A}}} \mathbf{e}_z \right), \quad \hat{\mathbf{V}}_2 = 2 \text{Re} \left( \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{|\mathcal{A}|}{\mathcal{A}}} \mathbf{e}_z \right). \quad (\text{C.10})$$

A continuación, usando estos resultados se derivan las fuerzas en una superficie mínima dentro de esta representación.

## C.1. Fuerzas en una película de jabón

La energía en una película de jabón es proporcional a su área  $A$ ,  $H_{SF} = \sigma_0 A$  con una tensión superficial constante  $\sigma_0$  y el esfuerzo establecido toma la forma simple  $\mathbf{f}_{\text{soap}}^a = -\sigma_0 \mathbf{e}^a$  [12, 37]. Típicamente, una película de jabón estará limitada por un conjunto de fronteras. La fuerza en una cierta frontera  $\gamma$  está dada por

$$\mathbf{F}_0 = \oint_{\gamma} ds \mathbf{l}. \quad (\text{C.11})$$

El vector  $\mathbf{l}$  es la normal exterior a  $\gamma$  tangente a la superficie. La toca correspondiente está dada por  $\mathbf{M}_0 = \oint_{\gamma} ds \mathbf{X} \times \mathbf{l}$ . En la literatura matemática estos conceptos fueron estudiados por Kusner en [59]. Una discusión relevante se puede encontrar en [42]. En este contexto  $\mathbf{F}_0$  se conoce como el vector de flujo a través de  $\gamma$ .

El vector  $\mathbf{F}_0$  tiene una expresión muy simple en la representación de Weierstrass de la superficie. Empezando con la identidad  $\mathbf{l} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ , descomponiendo  $\mathbf{t}$  con respecto a la base compleja tangente,  $\mathbf{t} = t^z \mathbf{e}_z + t^{\bar{z}} \mathbf{e}_{\bar{z}}$ , donde  $t^z = z'$  y usando la identidad (C.6) se obtiene

$$\mathbf{F}_0 = i \oint_{\gamma} ds (t^z \mathbf{e}_z - t^{\bar{z}} \mathbf{e}_{\bar{z}}) = -2 \text{Im} \left( \oint_{\zeta} dz \mathbf{e}_z \right), \quad (\text{C.12})$$

donde  $\zeta$  es el contorno en  $\mathbb{C}$  que se mapea a  $\gamma$ , es decir  $\gamma = \mathbf{X}(\zeta)$ . Entonces  $\mathbf{F}_0$  está determinado completamente por la parte imaginaria de la integral del vector complejo  $\mathbf{e}_z$ . Comparando este resultado con la expresión (C.2) de las funciones de encajamiento, se observa que coincide con el negativo del período de la superficie conjugada  $\mathbf{X}^*$  obtenida de los datos de Weierstrass  $(if, g)$  [42].

# Bibliografía

- [1] Abramowitz M and Stegun I A, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Dover Publications, New York, 1965)
- [2] Arreaga G, Capovilla R and Guven J 2000 Noether currents for bosonic brane *Annals of Phys* **279**, 126;
- [3] Arreaga G., Capovilla R. and Guven J., “Frenet-Serret dynamics”, *Class. Quantum Grav.* **18** (2001) 5065.
- [4] J Arroyo, O J Garay and J Mencía Elastic circles in 2-Spheres *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 2307 (2006)
- [5] Ben Amar M and Pomeau Y 1997 Crumpled Paper *Proc. R. Soc. Lond. A* **453**, 729
- [6] Bobenko A I 2008 Exploring Surfaces through Methods from the Theory of Integrable Systems: The Bonnet Problem, in *Surveys on Geometry and Integrable Systems, Advanced Studies in Pure Mathematics*, Mathematical Society of Japan, Tokyo, Vol **51**, p. 1; arXiv:math.DG/9909003
- [7] L Boué, M Adda-Bedia and A Boudaoud Confinement isotrope d’un cylindre élastique, in *Proceedings of Rencontres du non-linéaire* Edited by R. Ribotta (Paris Onze Editions) (2006)
- [8] Bracken P 2007 The generalized Weierstrass system inducing surfaces of constant and non-constant mean curvature in Euclidean three space *Journal of Computational and Applied Mathematics* **202** 122
- [9] Cairns G, Sharpe R and Webb L 1994 *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **24** 933
- [10] Canham P.B. *J. Theor. Biol.* 26 61. (1970).
- [11] Capovilla R, Chryssomalakos C. and Guven J. “Hamiltonian for curves”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 6571.
- [12] Capovilla R. and Guven J., “Stresses in lipid membranes”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 6233.
- [13] Capovilla R., Guven J. y Santiago J. A., Deformation of the geometry of lipid vesicles *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 6281.
- [14] R Capovilla and J Guven “Geometry of lipid vesicle adhesion” *Phys. Rev. E*66 (2002) 041604
- [15] Capovilla R, Guven J and Santiago J A 2002 Lipid Membrane with an edge *Phys. Rev. E* **66** 021607
- [16] Capovilla R and Guven J 2004 Second variation of the Helfrich-Canham Hamiltonian and reparametrization invariance *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 5983.

- [17] Castro-Villarreal P and Guven J 2007 Axially symmetric membranes with polar tethers, *J. Phys. A: Math. and Theor.* **40** 4273; preprint cond-mat/0608230
- [18] Castro-Villarreal P y Guven J., *Phys. Rev. E.* **76** 011922 (2007)
- [19] Cerda, Mahadevan L and Keller J B 1993 The shape of a Möbius band *Proc. R. Soc. Lond. A* **440** 149
- [20] Cerda E and Mahadevan L 1998 Conical surfaces and crescent singularities in crumpled sheets *Phys. Rev. Lett.* **80** 2358
- [21] Cerda E, Mahadevan L and Pasini J M 2004 The elements of drapping *PNAS* **101** 1806
- [22] Cerda E and Mahadevan L 2005 Confined developable elastic surfaces: cylinders, cones and the Elastica *Proc. R. Soc. A* **461** 671
- [23] Do Carmo M. *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, (1976)
- [24] Deserno M, Müller M M and Guven J *Phys. Rev. E* **76** 011605 (2007)
- [25] Deserno M, Müller M M and Guven J *Phys. Rev. E* **76** 011605 (2007)
- [26] Deserno M 2009 Membrane elasticity and mediated interactions in continuum theory, in *Biomedical Frontiers: Nanostructures, Models, and the Design of Life*, Handbook of Modern Biophysics, edited by R. Faller, T. Jue, M. Longo, and S. Risbud Humana Press, New York, Vol. **2**, p. 41-74
- [27] Evans E 1974 Bending Resistance and Chemically Induced Moments in Membrane Bilayers *Biophys. J.* **14** 923
- [28] Francis G., Sullivan J. M., Kusner R. B., Brakke, K. A., Hartman C. and Chappell, G., Visualization and Mathematics: experiments, simulations and environments, eds. Hege and Polthier, Springer-Verlag New York, Inc., 1997, pp. 3-20.
- [29] Flanders H. *Differential forms with applications to physical sciences* Dover Publication Inc. New York. (1989)
- [30] Fomenko A T and Tuzhilin A A 1991 *Elements of the Geometry and Topology of Minimal Surfaces in Three-Dimensional Space* Translations of Mathematical Monographs Vol. **93**, Amer. Math. Soc.
- [31] Frankel T. *The Geometry of physics, an introduction*, 2nd. Ed. Cambridge University Press.
- [32] Fuchs D. y Tabachnikov S., “*Mathematical Omnibus: Thirty Lectures on Classical Mathematics*” Providence, RI American Mathematical Society.
- [33] Ginsparg P. “*Applied Conformal Field Theory*” Les Houches, Session XLIX, 1988, Champs, Cordes et Phénomènes Critiques/ Fields, Strings and Critical Phenomena, ed. by E. Brézin and J. Zinn-Justin, c. Elsevier Science Publishers B.V. (1989).
- [34] Gray A. “Modern Differential Geometry of curves and surfaces with Mathematica” London/Boca Raton, FL Chapman and Hall/ CRC Press (2006)
- [35] Guven J 2005 *J. Phys. A: Math and Gen.* **38** 7943
- [36] Guven J. y Müller M. M. “*How paper folds: bending with local constraints*”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **41** (2008) 055203.

- [37] Guven J. “*Membrane geometry with auxiliary variables and quadratic constraints*”, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004) L313.
- [38] Guven J. “*Laplace pressure as a surface stress in fluid membranes*”, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) 3771.
- [39] Guven J, Müller M M y Vázquez-Montejo P, Conical Instabilities on paper, enviado a *Physical Review E*
- [40] Helfrich W. Naturforsch C 28 693 (1973).
- [41] Hilbert D y Cohn-Vossen S 1990 *Geometry and the Imagination* 2nd edn (Providence, Rhode Island: Chelsea: American Mathematical Society)
- [42] Hoffman D A and Karcher H 1997 Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature *Geometry V. Encyclopaedia of Math. Sci.* Vol **90** p. 5 (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg)
- [43] Hsu L, Kusner R and Sullivan JM 1992 *Experimental Math.* **1** 191
- [44] T A Ivey and D A Singer, *Proc. Lond. Math. Soc.* **79** 429 (1999)
- [45] Jorge L P and Meeks W H 1983 The Topology of complete minimal surfaces of finite total gaussian curvature *Topology* **22** No. 2 203 (1983)
- [46] Karcher H. “*Construction of minimal surfaces*” Surveys in Geometry, 196, (1989) University of Tokyo y Lecture Notes No. 12, SFB256, Bonn, 1989.
- [47] H Karcher 1989 *Construction of Minimal Surfaces* (Unpublished lecture notes given at Kanazawa University, Tokyo)
- [48] S. Kato 1995 Construction of n-end catenoids with prescribed flux *Kodai Math. J.* **18** 86
- [49] E. Katzav, M. Adda-Bedia, y A. Boudaoud “A statistical approach to close packing of elastic rods and to DNA packaging in viral capsids” PNAS Vol. **103** 18900 (2006)
- [50] Kenmotsu K 1979 Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature *Math. Ann.* **245** 89; 2003 *Surfaces with constant mean curvature* Translations of Mathematical Monographs v. **221**, Amer. Math. Soc.
- [51] Kenmotsu K 1979 Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature *Math. Ann.* **245** 89;
- [52] Kierfeld J, Baczynski K., Gutjahr P y Lipowsky R. “Semiflexible Polymers and Filaments: From Variational Problems to Fluctuations” en *Proceedings of Curvature and Variational Modelling in Physics and Biophysics*, Edited by O J Garay, E García-Río and R Vázquez-Lorenzo, (American Institute of Physics) **1002** 151
- [53] Kobayashi S. Nomizu K. *Foundations of differential geometry* New York, Interscience, (1969)
- [54] Konopelchenko B G 1996 Induced surfaces and their integrable dynamics *Stud. Appl. Math.* **96** 9
- [55] Konopelchenko BG and Taimanov I A 1996 Constant mean curvature surfaces via integrable dynamical system. *J. Phys. A* **29** 1261
- [56] Krantz S. G. “*Geometric function theory, Explorations in complex analysis*” Birkhäuser (2006)
- [57] Kreyszig E. *Differential Geometry*, (Dover Publications, New York, 1991)

- [58] Kulic I M, Andrienko D and Deserno M, *Europhys. Lett.* **67**, 418 (2004)
- [59] Kusner R 1988 *Global geometry of extremal surfaces in three-space*. PhD thesis, (University of California, Berkeley); 1991 Bubbles, Conservation laws and balanced diagrams *Geometric Analysis and Computer Graphics* in Mathematical Sciences and Research Institute Publications, edited by P. Concus, R. Finn, and D. Hoffman Springer, New York, Vol. **17**.
- [60] Kusner R and Schmidt N 1993 The spinor representation of minimal surfaces in space *GANG Preprint* III.27
- [61] Kusner R and Schmidt N 1996 The spinor representation of surfaces in space *GANG Preprint* IV.18
- [62] Kuznetsov Y. A., Plyushchay M. S., “*Tachyonless models of relativistic particles with curvature and torsion*”, *Phys. Lett. B* **297** (1992) 49.
- [63] Kuznetsov Y. A. and Plyushchay M. S., “*(2+1)-Dimensional models of relativistic particles with curvature and torsion*”, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 2772.
- [64] Landau L and Lifschitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon Press, Oxford, 1970)
- [65] Langer J and Singer D A 1984 The total squared curvature of closed curves, *J. Diff. Geom.* **20** 1–22.
- [66] Lidmar J., Mirny L. y Nelson D. *Phys. Rev. E* **68**, 051910 (2003).
- [67] Lipowsky R. y Sackmann E. *Handbook of Biological Physics* (Elsevier Science, New York, 1995), Vols. 1 y 2
- [68] H. Lodish, A. Berk, S. L. Zipursky, P. Matsudaira, D. Baltimore and J. Darnell, *Molecular Cell Biology* (W. H. Freeman & Company, New York, 2000).
- [69] Lomholt M A and Miao L 2006 Descriptions of membrane mechanics from microscopic and effective two-dimensional perspectives *J. Phys. A: Math. and Gen.* **39** 10323
- [70] Manning G S, *Quart. Appl. Math.* **45** 515 (1987)
- [71] Marky N L and Manning G S, *Biopolymers* **31**, 1543 (1991)
- [72] Montiel S and Ros A 2005 *Curves and Surfaces* (American Mathematical Society)
- [73] Müller M M, Deserno M and Guven J 2005 Geometry of surface mediated interactions *Euro. Phys. Lett.* **69** 482; 2005 Interface-mediated interactions between particles: A geometrical approach *Phys. Rev. E* **72** 061407
- [74] Müller M M, Deserno M and Guven J 2007 Balancing torques in membrane-mediated interactions: exact results and numerical illustrations *Phys. Rev. E* **76** 011921
- [75] Müller M M, Ben Amar M y Guven J, *Phys. Rev. Lett.* 101 156104 (2008)
- [76] Nakahara M. *Geometry, Topology and Physics* Institute of Physics Publishing, London, (1990)
- [77] Nelson D, Piran T y Weinberg S. *Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces* 2nd Ed. World Scientific, Singapore, (2004)
- [78] Nickerson H. K. and Manning G. *Intrinsic equations for a relaxed elastic line on an oriented surface Geometriae Dedicata* **27**, (1988) 127
- [79] O’Neill B. *Elementos de Geometría Diferencial*, Editorial Limusa, México D.F. (1990)

- [80] Ostermeir K, Alim K and Frey E, *preprint* arXiv:1004.4574v1 [cond-mat.soft] (2010)
- [81] Osserman R 1986 *A Survey of minimal surfaces*, second ed. (New York: Dover Publications Inc.)
- [82] Kim K S, Neu J and Oster G 1998 Curvature-mediated interactions between membrane proteins *Biophys. J.* **75** 2274
- [83] Palmer B, 2007 *Variational problems for surfaces which are quadratic in their curvatures* in conference Proceedings Vol. **1002** Curvature and Variational Modeling in Physics and Biophysics, Santiago de Compostela Edited by Garay O J, García-Río E and Vázquez-Lorenzo R (American Institute of Physics)
- [84] Phillips R, Kondev J and Theriot J 2008 *Physical Biology of the Cell* (Garland Science, Taylor and Francis group, London)
- [85] Lee HJ, Peterson EL, Phillips R, Wiggins P 2008 Membrane shape as a reporter for applied forces *PNAS* **105** 19253
- [86] Polyakov A M 1987 *Gauge Fields and Strings* (Harwood Academic Publishers)
- [87] Powers T R 2010 Dynamics of filaments and membranes in a viscous fluid *Rev. Mod. Phys.* **82** 1607
- [88] Schwarz A 1890 *Gesammelte Mathematische Abhandlungen* **1** Springer Verlag, Berlin
- [89] Seifert U 1991 *J. Phys. A:Math and Gen.***24** L573; Jülicher F, Seifert U and Lipowsky R 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 452
- [90] Seifert U 1997 Configurations of fluid membranes and vesicles *Advances in Physics* **46** 13
- [91] D A Singer “Lectures on Elastic Curves and Rods”, en *Proceedings of Curvature and Variational Modelling in Physics and Biophysics*, Edited by O J Garay, E García-Río and R Vázquez-Lorenzo, (American Institute of Physics) **1002** 3
- [92] Spivak M. “*A Comprehensive introduction to Differential Geometry*”, Vol. 1-5, 3rd Ed. Publish or Perish Inc, Houston Texas, 1999.
- [93] Starostin E L and van der Heijden G H M 2007 The shape of a Möbius strip *Nature Materials* **6** 563
- [94] Starostin E. L. and Van der Heijden G. H. M. “*Tension-Induced Multistability in Inextensible Helical Ribbons*”, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 084301.
- [95] Steigmann D J 1999 Fluid Films with Curvature Elasticity *Arch. Rational Mech. Anal.* **150** 127
- [96] Struik D. J. *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, New York, (1988)
- [97] Sullivan D 1989 The spinor representation of minimal surfaces in space *Unpublished notes*
- [98] S Svetina Adhesion paper
- [99] Taimanov I A 2006 Two-dimensional Dirac operator and surface theory *Russian Mathematical Surveys* **61** 79; arXiv:2006 math.DG/0512543
- [100] Taimanov I A 2008 *Lectures on Differential Geometry* (European Mathematical Society)
- [101] Tate MW, et al. 1991 Nonbilayer phases of membrane lipids *Chemistry and Physics of Lipids* **57** 147

- 
- [102] G.H.M. Van der Heijden, M.A. Peletier and R. Planqué, Self-contact for rods on cylinders, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **182** 471 (2006)
- [103] Wald R. M. *General Relativity*, University Of Chicago Press, (1984)
- [104] Weinberg S. *The Quantum Theory of fields*, Vol. **1** Cambridge University Press, (1995)
- [105] Willmore T. J. “*Total Curvature in Riemannian Geometry*”, Chichester: Ellis Horwood, (1982)
- [106] Witten T. “Stress focusing in elastic sheets”, *Reviews of Modern Physics* **79** 643 (2007)
- [107] Lobhovskiy A, Gentges S, Li H, Morse D and Witten T 1995 Scaling Properties of Stretching Ridges in a Crumpled Elastic Sheet *Science* 270 1482
- [108] Zandi R and Rudnick J, *Phys. Rev. E* **64**, 051918 (2001)
- [109] Zhong Can O. Y. y Helfrich W. 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 2486 (1987)
- [110] Zhong Can O. Y. y Helfrich W. 1987 *Phys. Rev. A* **39** 5280 (1989)