



# Universidad Nacional Autónoma de México

## Facultad de Ingeniería

*Diseño y simulación de un microacelerómetro de  
torsión usando un proceso MUMPS.*

**TESIS**

Que para obtener el grado de:

**Ingeniero Eléctrico Electrónico**

**PRESENTA:**

**Luis Fernando García Martínez**



Director:

**Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar**

Ciudad Universitaria,  
México, D. F., 2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Jurado Asignado

Presidente	M.I. Luis Arturo Haro Ruiz
Vocal	Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar
Secretario	Ing. Rodolfo Peters Lammel
1er. Suplente	M.I. Lauro Santiago Cruz
2do. Suplente	Ing. José Salvador Zamora Alarcón

Ciudad Universitaria, México, D.F.

Tutor de Tesis

Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar

# Agradecimientos

A *mis padres, Irma y Vicente*, por su constante apoyo y amor que me han brindado a lo largo de toda mi vida, por todos los valores que me han inculcado, por estar conmigo en los momentos buenos y malos, por que sin ellos no hubiera logrado nada.

A *mis amigos y familiares*, por sus constantes muestras de afecto y aliento para culminar mis estudios y el presente trabajo.

Al *Dr. Pablo Pérez Alcázar*, por brindarme esta oportunidad, por sus acertados consejos y sugerencias, por su interés y contribución para realizar el presente trabajo, pero sobre todo por el tiempo y experiencia que me otorgo para concluir este trabajo de la mejor forma posible.

A *mis sinodales*, por su tiempo y dedicación en la revisión de esta tesis y por sus invaluable observaciones y comentarios para mejorar este trabajo.

A todas *aquellas personas* que han colaborado en mi formación profesional, por sus consejos, por compartir sus ideas y pensamientos.

De manera muy especial, a la *Universidad Nacional Autónoma de México*, mi alma mater, por permitirme ser parte de la comunidad universitaria, por todos los conocimientos que me brindo y por permitirme vivir experiencias que nunca olvidare.

*Luis Fernando García Martínez*

Los seres humanos no nacen para siempre  
el día en que sus madres los alumbran,  
sino que la vida los obliga a parirse a sí mismos una y otra vez.

*Gabriel García Márquez*

Dicen que soy héroe, yo débil, tímido, casi insignificante,  
si siendo como soy hice lo que hice,  
imagínense lo que pueden hacer todos ustedes juntos.

*Mahatma Gandhi*

La vida carece de valor si no nos produce satisfacciones.  
Entre éstas, la más valiosa es la sociedad racional,  
que ilustra la mente, suaviza el temperamento,  
alegra el ánimo y promueve la salud.

*Thomas Jefferson*

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 ¿Por que MEMS?	3
1.2 Mercados y Aplicaciones	4
1.3 Objetivo y Estructura de este Trabajo	6
<b>2. Aspectos Generales sobre Micromaquinado</b>	<b>8</b>
2.1 Definición de MEMS	8
2.2 ¿Qué es el Micromaquinado?	9
2.3 Materiales para la Fabricación de MEMS	9
2.3.1 Silicio	9
2.3.2 Oxido y Nitruro de Silicio	12
2.3.3 Películas delgadas de Metal	12
2.3.4 Polímeros	12
2.4 Procesos de Microfabricación	13
2.4.1 Técnicas de Micromaquinado	13
2.4.1.1 Deposición de Materiales	13
2.4.1.2 Transferencia de Patrones, Litografía	15
2.4.1.3 Atacado de Materiales, Grabado	16
2.4.2 Procesos de Micromaquinado	18
2.4.2.1 Micromaquinado de Superficie	18
2.4.2.2 Micromaquinado Volumétrico	19
2.5 Procesos Comerciales para Fabricación en MEMS	20
2.5.1 PolyMUMPs	20
2.5.2 MetalMUMPs	21
2.5.3 SOIMUMPs	21
2.5.3.1 Resumen del Proceso	23
<b>3. Micromecánica de un Acelerómetro</b>	<b>25</b>
3.1 Sistema para Medición de Vibraciones	25
3.1.1 Elemento de Inercia: Masa de Prueba	25
3.1.2 Elemento de Rigidez: Resorte Elástico	27
3.1.3 Elemento de Disipación: Amortiguamiento	29
3.1.3.1 Flujo de un Fluido Viscoso	30
3.1.3.2 Ecuaciones para Flujo Viscoso	32
3.1.3.3 Modelos de Amortiguamiento	33
3.1.3.4 Amortiguamiento por Película Comprimida	34
3.2 Esfuerzo y Deformación	40

3.2.1	Esfuerzo	40
3.2.2	Deformación	42
3.2.3	Ley de Hooke	44
3.2.4	Esfuerzo y Deformación en una Viga	45
3.2.4.1	Desplazamiento en una Viga	46
3.2.4.2	Momento Flexionante y Momento de Inercia de una Viga	47
3.2.5	Torsión de Vigas	49
3.2.6	Frecuencia de Vibración	51
3.3	Instrumentos Medidores de Vibraciones	52
3.3.1	Sismómetro	54
3.3.2	Acelerómetro	55
3.4	Escalamiento de Dispositivos Micromecánicos	56
3.4.1	Leyes de Escalamiento	57
3.4.2	Notación Vertical de Trimmer	58
<b>4.</b>	<b>Electrostática y Sensado Capacitivo</b>	<b>62</b>
4.1	Fuerza Electroestática	62
4.1.1	Fuerza Normal a la Placa del Electrodo	62
4.1.2	Fuerza Tangencial a la Placa del Electrodo	64
4.2	Desplazamiento de Estructuras Elásticas debido a Fuerzas Electroestáticas	66
4.2.1	Desplazamiento Normal y Efecto Pull-In	66
4.2.2	Desplazamiento Angular de una Barra de Torsión	67
4.3	Efectos de la Fuerza Electroestática sobre el Sensado Capacitivo	68
4.3.1	Control de un solo Lado (Single-Sided)	69
4.3.2	Control de dos Lados (Double-Sided)	71
4.3.3	Control de dos Lados con Retroalimentación	73
4.4	Sensado Capacitivo	76
4.4.1	Técnicas de Sensado Capacitivo	79
4.4.1.1	Integrador de Carga y Seguidor de Voltaje	79
4.4.1.2	Capacitores Conmutados	80
4.4.1.3	Puentes de AC	82
4.4.2	Capacitancias Parasitas	84
4.4.3	Amplitud Modulada	85
4.4.3.1	Demodulación de AM en Cuadratura	85
<b>5.</b>	<b>Diseño del Microacelerómetro</b>	<b>87</b>
5.1	Especificaciones de un Acelerómetro	87
5.2	Antecedentes de Microacelerómetros Capacitivos	88
5.2.1	Serie SCA de VTI Technologies	89
5.2.2	El Microacelerómetro Torsional, Capacitivo y Vertical	89

5.3	Diseño del Microacelerómetro	91
5.3.1	Selección del Proceso de Fabricación	91
5.3.2	Diseño Mecánico	92
5.3.3	Diseño Electrónico	96
<b>6.</b>	<b>Resultados y Conclusiones</b>	<b>102</b>
6.1	Resultados	102
6.1.1	Simulación Mecánica	103
6.1.1.1	Frecuencia Natural de Vibración y Factor de Amortiguamiento	104
6.1.1.2	Respuesta de la Estructura Mecánica a una Entrada Escalón	105
6.1.2	Simulación Electromecánica	110
6.1.2.1	Voltaje de Pull-In	110
6.1.2.2	Capacitancia Generada por la Aceleración	111
6.2	Conclusiones	114
	<b>Bibliografía</b>	<b>119</b>



## Introducción

La primera década del siglo XXI ha sido denominada por algunos como la “Década de los Sensores”. Con un incremento considerable en los sensores y sus aplicaciones desde hace 15 años aproximadamente, de cierta forma, estos dispositivos están al borde de una revolución similar a la experimentada por las microcomputadoras en los 80’s. Solo en los automóviles las necesidades de sensado han crecido a pasos agigantados y las tecnologías de sensado usadas son tan variadas como las aplicaciones. Enormes avances han sido desarrollados y muchos más están en el horizonte. [1]

Entender el diseño y operación de un sensor frecuentemente requiere de una formación multidisciplinaria, abarcando campos como lo son la ingeniería mecánica, la ingeniería eléctrica, la física, la química, la biología, etc; ya que las últimas tecnologías en sensores abarcan desde los piezo materiales hasta los micro y nanosensores.

Para el propósito de este trabajo, se considera que un *sensor* es un dispositivo que detecta variaciones en una magnitud física y las convierte en señales útiles, escaladas linealmente y con una sensibilidad específica, para un sistema de medida o control; donde dicha magnitud puede ser, por ejemplo: temperatura, distancia, aceleración, presión, fuerza, humedad, pH, etc. Como tal, un sensor representa la interfaz entre el mundo físico y el mundo de los dispositivos eléctricos, tales como las computadoras. [1]

Con el propósito de reducir costos, logrando una producción en grandes volúmenes, diversos investigadores proponen el uso de las técnicas de microfabricación de circuitos integrados basadas en el silicio para el desarrollo de sensores y actuadores. Esta propuesta se basa en las excelentes propiedades eléctricas, estudiadas desde hace años, y mecánicas del silicio. Así surgen los Sistemas Micro Electro-Mecánicos (MEMS), los cuales son la integración de elementos mecánicos y componentes electrónicos, que actúan como sensores y/o actuadores, sobre un sustrato de silicio simple o cualquier otro material compatible con las técnicas de microfabricación.

Los componentes electrónicos son fabricados usando secuencias de procesos de circuitos integrados (por ejemplo procesos CMOS, Bipolar o BICMOS), mientras que, los elementos mecánicos son fabricados usando un proceso de micromaquinado compatible, que selectivamente ataca una oblea de silicio, o cualquier otro material para maquinado, o permite agregar nuevas capas estructurales, para formar los dispositivos mecánicos y electromecánicos. Estos procesos de micromaquinado proporcionan mejores características en comparación con los dispositivos convencionales, sobre todo en relación a la reducción de dimensiones, costo, consumo de energía; a la mejora en el desempeño y confiabilidad; y a la facilidad de interconexión con múltiples sistemas.

Los productos MEMS poseen un gran número de características distintivas, entre ellas, el que son sistemas miniatura involucrando uno o mas componentes, o estructuras micromaquinadas, que van desde los micrometros hasta los milímetros. La operación de un transductor microelectromecánico esta basada en el movimiento de una estructura mecánica y el sistema para sensar el movimiento de la estructura. El resultado está, por lo general, dado como una señal eléctrica.

Las aplicaciones de los productos MEMS impactan una amplia gama de sectores, como el automotriz, la informática, las telecomunicaciones, la medicina y, en general, aquellos que utilizan sistemas de automatización como herramienta o producto. Es así como esta tecnología ha permitido la interacción entre campos no relacionados como la biología y la microelectrónica. De esta manera, muchas aplicaciones MEMS nuevas surgirán, expandiéndose más allá de aquellas que son actualmente conocidas.

La utilidad de un producto MEMS puede estar limitada si no se le instala en la situación adecuada; por ejemplo, un sensor de presión micromaquinado colocado en la mano es inútil, pero, dentro de una máquina, controla la mezcla de aire-combustible del motor de un auto. Los MEMS frecuentemente integran pequeñas funciones dentro de un encapsulado que tiene mayores utilidades (por ejemplo, unir un sensor de aceleración con un circuito electrónico para autodiagnósticos). Además, pueden traer beneficios en costo, ya sea, directamente a través de su precio unitario, o indirectamente reduciendo el costo del servicio y mantenimiento. [2]

Los sensores de presión de silicio fueron los primeros transductores microelectromecánicos en ser desarrollados. Desde su desarrollo inicial en los 60's han mejorado en su desempeño y las nuevas aplicaciones han llevado a su producción en grandes volúmenes. Actualmente, el número de microtransductores de presión vendidos en el mercado mundial es de varios millones de unidades al año.

Al día de hoy, entre los sistemas MEMS más utilizados se encuentran los sensores inerciales, los cuales están diseñados para convertir, o transducir, una fuerza inercial en una cantidad medible.

Uno de los sistemas inerciales micromaquinados de mayor éxito es el acelerómetro de silicio, el cual ha sido producido desde finales de los 80's y usado en grandes volúmenes en la industria automotriz. Debido a su gran impacto, los acelerómetros MEMS están reemplazando rápidamente a los acelerómetros convencionales para sistemas de despliegue de bolsas de aire en automóviles, llegando a ser la segunda aplicación de producción en volumen de ventas de esta tecnología. El uso convencional de acelerómetros macroscópicos hechos de componentes discretos, montados en la parte frontal del auto, con la electrónica separada, cerca de la bolsa de aire, tienen un costo aproximado por automóvil de \$ 50 dólares; sin embargo, la tecnología MEMS ha hecho posible integrar el acelerómetro y la electrónica dentro de un simple chip de silicio con un costo entre \$5 y \$10 dólares. Estos acelerómetros MEMS son mucho más pequeños, más funcionales, más ligeros, más confiables y producidos por una fracción del costo de los acelerómetros a escalas convencionales.

Otro transductor micromecánico, que esta bajo continuo desarrollo y producción en grandes volúmenes, es el sensor de velocidad angular (giroscopio).

La investigación y desarrollo de los transductores microelectromecánicos depende del conocimiento del comportamiento dinámico de la estructura micromecánica (o *microdinámica*), el tipo de sensado y la física de operación de los sensores. Si bien muchos de los principios requeridos no son nuevos, estos no son simples aplicaciones de las teorías existentes. [3]

## 1.1 ¿Por que los MEMS?

Como cualquier otra tecnología emergente con gran potencial, cualquier usuario que considere desarrollar una solución MEMS o incorporar una a un diseño irremediamente llegara a la pregunta de “¿Por qué los MEMS?”. Para aplicaciones que se benefician de los productos MEMS comerciales (sensores de presión o aceleración), la respuesta radica en el conocimiento de las especificaciones requeridas y el precio del diseño o solución. Pero la mayoría de las aplicaciones requieren soluciones únicas que, frecuentemente, necesitan de una evaluación o programa de desarrollo. Bajo tal situación es fácil establecer una respuesta.

En la práctica, una solución MEMS es atractiva si habilita una nueva función o provee una reducción de costo significativa o ambas, en el mejor de los casos. Por ejemplo, las aplicaciones médicas generalmente buscan agregar o habilitar funcionalidad e incrementar el desempeño, mientras que las aplicaciones automotrices frecuentemente buscan reducciones de costos. La reducción de dimensiones puede jugar un factor importante. Naturalmente, la confiabilidad es siempre un factor requerido. El proceso de toma de decisión es más complicado por el hecho de que los MEMS no son una simple tecnología, sino un conjunto de tecnologías (por ej. micromaquinado superficial contra micromaquinado volumétrico). Por tanto, es bueno que el usuario conozca las capacidades y limitaciones en particular de cualquier tecnología MEMS seleccionada para la aplicación en mente.

Las compañías que buscan soluciones MEMS frecuentemente contratan instalaciones especializadas para el diseño y manufactura del producto. Otras seleccionan primero la evaluación de diseños básicos a través de compañías especializadas, “foundries”.<sup>⊗</sup> Unas pocas deciden adentrarse al desarrollo completo del diseño. En el último de los casos, hay un riesgo considerable, resultando en grandes desafíos para la producción.

Ahora bien, la falta de un producto MEMS dominante (o familia de productos) y los requerimientos técnicos únicos de cada aplicación han resultado en el surgimiento de múltiples procesos de fabricación y ensamblado. Por lo tanto, los estándares son guiados por las necesidades de las aplicaciones a grandes volúmenes, las cuales son pocas en MEMS. Sucesivamente, la falta de estándares forma parte de la divergencia de demandas de las aplicaciones emergentes. [2]

---

<sup>⊗</sup> Un “foundry” es una compañía que facilita la fabricación de prototipos MEMS o de circuitos semiconductores. Además, los “foundries” ofrecen procesos de fabricación estandarizados y unos pocos cuentan con servicios de manufactura hechos a la medida del diseño del cliente.

A pesar de cuan excitante y prometedora pueda ser la tecnología MEMS, su realización es invariablemente dependiente de los éxitos económicos. El usuario debe justificar la tecnología en base al valor agregado, incremento de la productividad, o costos de competición, y la fabricación debe mostrar beneficios y utilidades.

No obstante a lo previamente mencionado, el presente trabajo esta motivado por la necesidad de adquirir experiencia en el campo de los MEMS y el interés por determinar posibles puntos de investigación básica en este campo; sin perder de vista el interés mostrado por diversas instituciones de la UNAM y del país para el desarrollo de estos sistemas.

## 1.2 Mercados y Aplicaciones

Actualmente los mercados principales son: los sensores de presión, los sensores inerciales, los sistemas de impresión vía inyección de tinta, dominado por Hewlett-Packard Company de Palo Alto, California, y las pantallas digitales de alta resolución desarrolladas por Texas Instruments de Dallas, Texas. Entre las aplicaciones relativamente nuevas se tienen los sensores de presión en neumáticos, la electrónica inalámbrica y de RF, los componentes de fibra óptica, y los dispositivos para procesamiento de fluidos y microanálisis químico, para diagnósticos médicos, y dosificación de medicamentos. En la tabla 1.1 se muestran ejemplos de aplicaciones para MEMS.

<p><b>Aplicaciones Comerciales</b></p>	<p>Sensores biomédicos invasivos y no-invasivos Instrumentos analíticos bioquímicos miniatura Sistemas cardiacos (marcapasos, catéteres) Sistemas para dosificación de medicinas (insulina, analgésicos) Seguridad en automóviles, frenos y sistemas de suspensión Componentes de fibra óptica e interruptores para telecomunicaciones Sistemas de almacenamiento de datos Electrónica inalámbrica y de RF Sensores distribuidos para mantenimiento y monitoreo Control distribuido de sistemas aerodinámicos e hidrodinámicos</p>
<p><b>Aplicaciones Militares</b></p>	<p>Sistemas inerciales para navegación personal Componentes integrados microoptomecánicos para sistemas de reconocimiento de individuos Dispositivos de baja potencia y alta densidad para almacenamiento de datos Procesamiento de señales electromecánicas para comunicaciones inalámbricas de baja potencia Sistemas miniatura de fluidos para una pronta detección de amenazas de agentes biológicos y químicos Superficies conformables para control aerodinámico, distribuido, de naves aéreas</p>

Tabla 1.1 Ejemplos de áreas de aplicaciones presentes y futuras para MEMS. [2]

Aunque los mercados para MEMS varían considerablemente, todos estos tienen un presente y un futuro en crecimiento, donde se estima un volumen de ventas en muchos billones de

dólares para este 2010. La expectativa de crecimiento es el resultado de las innovaciones técnicas y de la aceptación de esta tecnología por parte de los usuarios finales. Debido a la diversidad en los requerimientos técnicos del usuario final, no existe un solo mercado MEMS, dicho de otra forma, hay una diversidad de mercados, muchos de los cuales son considerados nicho de mercados,<sup>⊗</sup> comparado especialmente a sus parientes los semiconductores. Esta fragmentación de todos los mercados se refleja como un gran número de pequeñas y diversas compañías trabajando en MEMS, como se muestra en la Tabla 1.2.

Tipo de Producto	2002	2007
Microfluidos	1404	2241
MEMS ópticos	702	1826
RF MEMS	39	249
Otros actuadores	117	415
Sensores inerciales	819	1826
Sensores de presión	546	913
Otros sensores	273	830
<b>Total</b>	<b>3900</b>	<b>8300</b>

Tabla 1.2 Análisis y pronóstico del mercado mundial para MEMS (Cifras dadas en millones de dólares). [2]

Una investigación hecha a través de internet en Julio del 2003 revela que, geográficamente, los Estados Unidos y Europa lideran el mundo en la manufactura de productos MEMS, con Japón siguiéndolos, incluyendo corporaciones multinacionales como TRW Novasensor, Analog Devices, Motorola, Honeywell, SensoNor, Melexis, Infineon, y Mitsubishi, así como pequeñas compañías para pruebas, Tabla 1.3.

Región	Numero de Fabricas
Norte América	139
Alemania	34
Francia	20
Reino Unido	14
Benelux	17
Escandinavia	20
Suiza	14
Resto de Europa	10
Japón	41
Resto de Asia	31

Tabla 1.3 Distribución geográfica. [2]

No obstante, la humanidad siempre ha sido bastante cautelosa cuando se acerca a algo nuevo. Este comportamiento se traduce en una baja aceptación de las nuevas tecnologías y productos derivados, así como de su introducción dentro de la sociedad. La aceptación de MEMS no ha sido la excepción.

---

⊗ Por nicho de mercados se entiende como el hueco que se encuentra en un mercado, en relación a las necesidades, deseos, demanda y/o competidores.

En la actualidad, los MEMS y sus productos asociados generan mucho entusiasmo pero no sin escepticismo. Las compañías exploran por vez primera la incorporación de soluciones MEMS en sus sistemas con temor e inquietud. Con muchos sensores micromaquinados de silicio incrustados en muchos autos y en numerosos instrumentos médicos, y con más productos MEMS encontrando su campo dentro de nuestra vida diaria, la barrera psicológica parece ir desapareciendo.

### 1.3 Objetivo y Estructura de este Trabajo

El objetivo del presente trabajo es diseñar, modelar y simular un microacelerómetro, usando tecnología MEMS, para aplicaciones en diversos sectores de la industria y la investigación. La tarea primordial es tener un microdispositivo que cuente con altas prestaciones en cuanto a su desempeño; tales, como: un amplio ancho de banda útil, alta inmunidad al ruido, amplio rango dinámico, buena linealidad y gran versatilidad. Se propone la construcción utilizando un proceso de fabricación comercial MUMPs.

Primeramente, se seleccionará y optimizará una estructura particular para lograr el propósito deseado, siguiendo las reglas y consideraciones de diseño del proceso de fabricación empleado, con ayuda de una paquetería de cómputo para diseño de MEMS, siendo Coventor la que se utilizará. Se analizarán los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas en Coventor, para después determinar si estos satisfacen los objetivos. En caso de no satisfacer los objetivos planteados, se evaluarán los resultados obtenidos para determinar las modificaciones a realizar a la estructura.

Finalmente, la simulación, el análisis y la evaluación de los resultados se realizarán de forma iterativa hasta obtener un diseño que satisfaga de la mejor manera posible los objetivos planteados en el presente trabajo.

En este trabajo, el microacelerómetro a desarrollar será del tipo torsional, capacitivo y vertical, el cual detecta la aceleración aplicada a través del sensado de la capacitancia diferencial entre ambos lados de la masa de prueba. Un acelerómetro, del tipo de sensado de capacitancia diferencial, está compuesto de una masa de prueba, dos resortes torsionales y dos electrodos externos.

A continuación se mencionarán los puntos más importantes que se tratarán durante el desarrollo del presente trabajo, el cual consta de 6 capítulos.

Como se ha observado, en el primer capítulo se hace una breve revisión histórica de la tecnología MEMS, sus campos de aplicación, los productos más importantes, así como algunos de los principales factores que propician o justifican el diseño e implementación de estos dispositivos MEMS.

En el segundo capítulo se mencionan los materiales más utilizados en micromaquinado, así como algunas de las propiedades del silicio y de otros materiales comúnmente empleados en microfabricación; se describen las técnicas básicas para la construcción de este tipo de dispositivos y se abordan algunos procesos de fabricación comerciales o estándar; así como

algunas de las ventajas y desventajas de emplear un proceso de fabricación estándar y no estándar. Por último, se describe de forma amplia el proceso a utilizar en el diseño del microacelerómetro, el cual es el SOIMUMPs

El tercer capítulo se dedica al estudio del acelerómetro como un sistema masa, resorte y amortiguador; así como determinar los parámetros de diseño que debe satisfacer un acelerómetro para lograr un desempeño óptimo, como lo son: el primer modo de vibración, el ancho de banda y el factor de amortiguamiento de la estructura. Además, se revisan las leyes de escalamiento, las cuales son una guía que permite saber qué elementos son importantes en el microdominio.

En el cuarto capítulo se hace una revisión de la fuerza electrostática en las microestructuras, como lo es el efecto *pull-in*; además, se revisan las ventajas que ofrece el sensado capacitivo diferencial, así como algunas de las técnicas utilizadas en este tipo de sensado. También se propone y analiza un circuito electrónico para sensar los cambios en capacitancia del microdispositivo.

En el quinto capítulo, se mencionan las principales especificaciones de un acelerómetro y considerando la teoría vista en capítulos anteriores se define el proceso de fabricación a emplear y se diseña el microacelerómetro, tanto mecánicamente como electrónicamente, basándose en el TXL, previamente desarrollado.

Finalmente, en el sexto capítulo se presentan y comparan los resultados obtenidos durante el presente trabajo, tanto en Coventor como de la teoría previamente estudiada. Por último, se concluye acerca de este trabajo y se mencionan algunos puntos en los cuales habría la necesidad de profundizar.

# Aspectos Generales Sobre Micromaquinado

La primera mitad del siglo XX fue testigo del impacto causado por los dispositivos eléctricos y electrónicos en la vida diaria, aun cuando sus dimensiones eran grandes, consumían grandes cantidades de energía, eran poco confiables y muy costosos. Sin embargo, a mediados del siglo XX inicia *la revolución de la microelectrónica*, la cual, con el desarrollo de los procesos de microfabricación, permite producir dispositivos electrónicos cada vez más pequeños y mas baratos. Esta disminución de tamaño y costo continúa hasta nuestros días.

En 1960, el Dr. Richard Feynman presenta su artículo “There is Plenty of Room at the Bottom”, en el cual habla de las ventajas de producir micromaquinas y especula sobre algunos de sus posibles usos, además de motivar y desafiar a la sociedad para desarrollar micromáquinas. Es así como la tecnología de los *Sistemas Microelectromecánicos* (del ingles Microelectromechanical Systems, MEMS; en Europa es llamada *Tecnología de Microsistemas*, del inglés Microsystems Technology, MST), ha sido inspirada por el desarrollo de la microelectrónica y por la visión del Dr. Feynman.

## 2.1 Definición de MEMS

Si bien se carece de una definición universal para MEMS, todas tienen a la “miniaturización” como característica común. Pero tal divergencia aparente en las definiciones se sustenta en la diversidad de aplicaciones que esta tecnología abarca; sin embargo, se puede decir que la tecnología MEMS es simultáneamente una caja de herramientas, un producto físico, y una metodología, todo en uno: [2]

- Es un portafolio de técnicas y procesos para diseñar y crear sistemas miniatura.
- Es un producto físico frecuentemente especializado y único para una aplicación final; ocasionalmente se puede comprar un producto MEMS en alguna tienda de electrónica.
- La Oficina de Tecnología de Microsistemas de los Estados Unidos, Darpa, refiere: “MEMS es una manera de hacer cosas“. Estas cosas unen las funciones de sensado y actuación con el cálculo y comunicación para controlar físicamente parámetros en la microescala, que causa efectos en escalas grandes.

El proceso de diseño puede ser lento, especialmente si se trata de dispositivos complejos, por ejemplo: la primera demostración de un acelerómetro micromaquinado en silicio se realizó en la Universidad de Stanford en 1979, pero tomó cerca de 15 años antes de que llegara a ser aceptado para aplicaciones a gran escala. Naturalmente, éste fue diseñado y rediseñado, probado y calificado en laboratorios y campo antes de salir al mercado. [2]

Por tanto, la tecnología MEMS puede considerarse que surge de manera definitiva a principios de los 90's, cuando se presenta en el mercado, en grandes volúmenes de



producción, el sensor micromaquinado de presión absoluta para automóviles y el sensor de presión sanguínea. [4]

## 2.2 ¿Qué es el Micromaquinado?

El micromaquinado es un conjunto de herramientas para el diseño y fabricación que, precisamente, maquina y forma estructuras y elementos en una escala muy por debajo de nuestras facultades de percepción humana, la microescala. El micromaquinado es el fundamento básico en la fabricación de MEMS y se puede definir como la caja de herramientas de los MEMS. [2]

El micromaquinado es un proceso “en grupo”, mediante el cual se fabrican cientos o posiblemente miles de elementos idénticos sobre la misma oblea. La unidad de dimensión es la micra, un factor alrededor de 25 veces más pequeño que el que puede ser logrado con el maquinado convencional. [5]

La industria de los circuitos integrados (CI) ha jugado un papel importante en promover un ambiente adecuado para el desarrollo y crecimiento de las tecnologías de micromaquinado. Muchas herramientas usadas en el diseño y manufacturación de productos MEMS son tomadas de la industria de los circuitos integrados. Por tanto, no debe ser una sorpresa que el micromaquinado cuente con el silicio como material primario, aunque la tecnología ha sido demostrada usando otros materiales. Sin embargo, hay muchos procesos que no son derivados de la tecnología de los circuitos integrados.

## 2.3 Materiales para la Fabricación de MEMS

Uno de los objetivos de este capítulo es presentar las propiedades del silicio y algunos otros materiales, además de enfatizar que la elección final de los materiales esta determinada por el tipo de aplicación y el costo.

### 2.3.1 Silicio

El silicio es uno de los pocos materiales que es producido económicamente en sustratos de cristal simple. Su naturaleza cristalina brinda ventajas eléctricas y mecánicas importantes. La modulación precisa de la conductividad eléctrica usando impurezas, además de que, mecánicamente es un material elástico y fuerte son características que hacen del silicio un material adecuado para integrar funciones electrónicas, mecánicas, térmicas, ópticas e inclusive de fluidos. Hoy en día son comunes las obleas de silicio ultra puras. El bajo costo de estas obleas las hace aun más atractivas para la fabricación de sistemas y componentes micromecánicos.

El silicio, como elemento, existe en tres diferentes estructuras: cristalina, policristalina o amorfa. Para comprender cada tipo de estructura, debemos hacer referencia a la visualización de los planos cristalográficos. El silicio tiene una estructura cristalina en forma

de diamante-cúbico la cual puede ejemplificarse como un cubo simple. Así, la unidad más básica se representa como un cubo. Los tres ejes coordenados de mayor importancia son denominados como los ejes principales. Los planos y las direcciones específicas del cristal son designados en referencia a los ejes principales usando los “*índices de Miller*”, la cual es una notación especial para ciencia de materiales, que se compone de tres enteros encerrados por diferentes tipos de puntuación. Las direcciones se especifican con corchetes; por ejemplo,  $[100]$  es un vector en la dirección  $x$ , referida a los ejes principales  $(x,y,z)$  del cubo. El grupo de direcciones con propiedades equivalentes es denotado con signos de intercalación; por ejemplo,  $\langle 100 \rangle$  cubre las 6 direcciones con propiedades similares al vector  $[100]$  (especifica las direcciones  $+x, -x, +y, -y, +z, -z$ ). Los paréntesis denotan el plano que es perpendicular a una dirección; por ejemplo,  $(111)$  es un plano perpendicular a la dirección  $[111]$ , mientras que las llaves especifican el grupo de todos los planos equivalentes; por ejemplo,  $\{111\}$  representa el grupo de los 4 planos cristalográficos equivalentes a  $(111)$ . Estos aspectos son representados gráficamente en la Fig. 2.1.

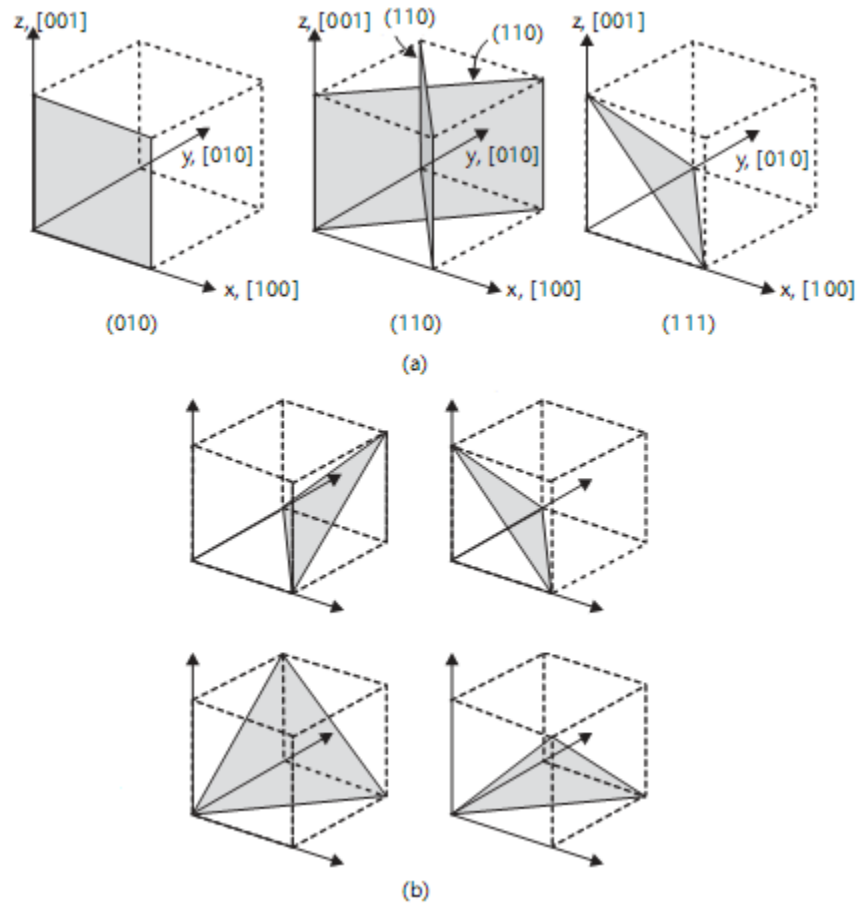


Fig. 2.1 a) Tres planos cristalográficos y sus índices de Miller para un cristal cúbico. Se identifican dos planos  $(110)$  equivalentes de la familia  $\{110\}$  y b) Los cuatro planos  $(111)$  equivalentes de la familia  $\{111\}$ . [2]

La equivalencia de determinados planos y direcciones se puede definir mediante las operaciones rotación de  $90^\circ$  y de reflexión (mirror) sobre los tres ejes principales del cubo. Por ejemplo, la dirección  $+x$  es equivalente a  $+y$  mediante una rotación de  $90^\circ$ ; la dirección  $+y$  es equivalente a  $-y$  con la operación de reflexión, y así sucesivamente. Por lo tanto,  $+x, -x, +y, -y, +z$  y  $-z$  son direcciones equivalentes.

El álgebra de vectores muestra que los ángulos de intersección entre los planos  $\{100\}$  y  $\{110\}$  son  $45^\circ$  o  $90^\circ$ , los ángulos entre los planos  $\{100\}$  y  $\{111\}$  son  $54.7^\circ$  o  $125.3^\circ$ . Mientras que, los planos  $\{111\}$  y  $\{110\}$  pueden interceptarse en  $35.3^\circ$ ,  $90^\circ$  o  $144.7^\circ$ . Estos últimos ángulos son de particular interés en el micromaquinado, debido a que muchas soluciones alcalinas, como el hidróxido de potasio (KOH), atacan selectivamente los planos  $\{100\}$  de silicio pero no los planos  $\{111\}$ . Esto se verá mas adelante con mayor detalle.

En microfabricación se cortan las obleas de silicio, delgadas y circulares, a lo largo de planos específicos. El plano de corte, cara superior de la oblea, es conocido como la *orientación del corte*. Las obleas  $\{100\}$  dominan las tecnologías MEMS y CMOS, pero también están disponibles las obleas con orientación  $\{111\}$ , y en menor grado las de orientación  $\{110\}$ . Es más común decir que una oblea tiene una orientación  $\{100\}$ , la cual comprende todo el grupo de direcciones posibles, en lugar de una oblea con una orientación (100).

Para las obleas  $\{100\}$  y  $\{111\}$  con dopado tipo  $n$  y  $p$ , existen otras dos especificaciones, como se muestra en la Fig. 2.2.

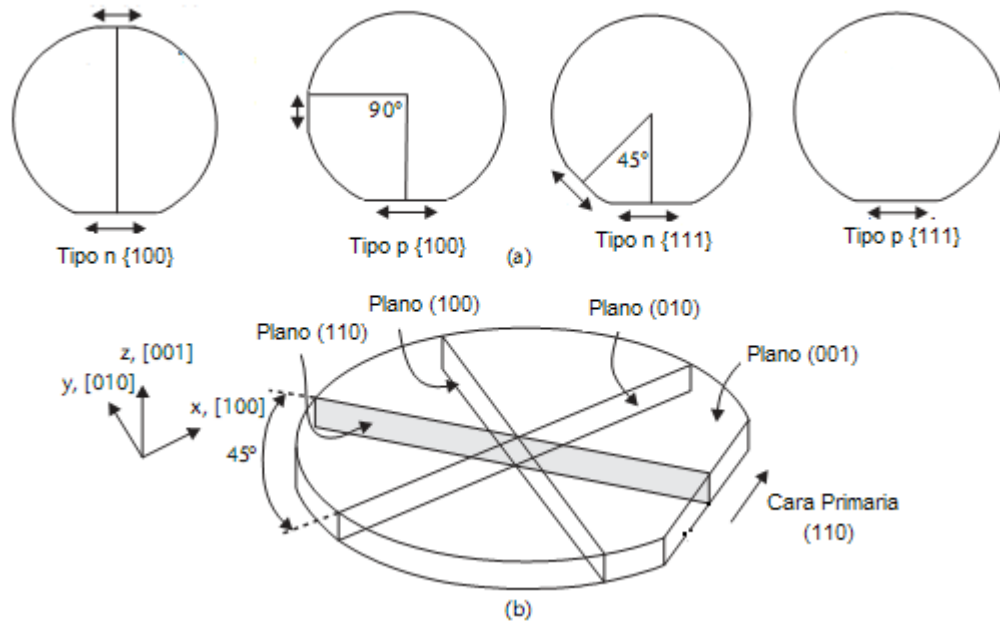


Fig. 2.2 a) Ilustración de los cortes primarios y secundarios de las obleas  $\{100\}$  y  $\{111\}$  para los dopados tipo  $n$  y  $p$  y b) Ilustración de varios planos en una oblea con orientación  $\{100\}$ . [2]

El silicio cristalino es un material frágil y fuerte, elásticamente deformable hasta que alcanza su punto de ruptura. Su módulo de Young depende de la orientación cristalográfica, siendo aproximadamente de 160 GPa. Debido a la naturaleza cristalina del silicio, sus propiedades mecánicas son uniformes en toda la oblea, por lo que las obleas están libres de tensiones intrínsecas. Los niveles de dopado del silicio cristalino no afectan a la mayor parte de las propiedades mecánicas, pero la tensión aumenta cuando las concentraciones de dopado alcanzan niveles de aproximadamente  $10^{20} \text{ cm}^{-3}$ .

El polisilicio es un material importante para MEMS. Es utilizado para estructuras micromecánicas, integrar interconexiones eléctricas, termoacopladores, diodos de unión  $p-n$ , y muchos otros dispositivos eléctricos con estructuras micromecánicas.

Las propiedades mecánicas del silicio policristalino y amorfo varían con las condiciones de deposición pero éstas son similares a las del silicio cristalino. Ambas tienen niveles muy altos de tensión intrínseca.

El silicio es también conocido por conservar su integridad mecánica en temperaturas de hasta 700 °C, aproximadamente. A temperaturas más altas, el silicio empieza a ablandarse y la deformación plástica puede suceder bajo carga. El comportamiento del silicio con gases, químicos, fluidos biológicos y enzimas sigue bajo estudio, pero para la mayor parte de estos materiales, se considera que el silicio es estable y resistente para las aplicaciones de hoy en día.

### **2.3.2 Oxido y Nitruro de Silicio**

Varias formas de óxidos de silicio ( $\text{SiO}_2$ ,  $\text{SiO}_x$ , entre otros) son ampliamente utilizadas en micromaquinado, debido a sus excelentes propiedades de aislamiento térmico y eléctrico. Estos también son usados como capas de sacrificio en procesos de micromaquinado de superficie, ya que pueden ser atacados con una gran selectividad utilizando ácido fluorhídrico (HF). Los óxidos de silicio tienden a ablandarse y fluir cuando están expuestos a temperaturas por arriba de los 700°. Una desventaja de los óxidos de silicio es su tensión intrínseca relativamente grande, la cual es difícil de controlar. Esto limita su uso como material para grandes vigas o diafragmas suspendidos.

Los nitruros de silicio son ampliamente usados como películas delgadas de aislamiento y son efectivos como barreras contra la difusión de iones móviles. Su módulo de Young es más grande que el del silicio y su tensión intrínseca puede ser controlada por los diferentes procesos de deposición. Además, son buenos materiales para hacer máscaras que pueden ser usadas en muchas soluciones alcalinas.

### **2.3.3 Películas delgadas de Metal**

La elección de una capa delgada de metal o metales compuestos depende de la aplicación final. Normalmente son depositados por sputtering, evaporación, o deposición química de vapor. Oro, níquel, cobre, titanio, tungsteno, plata, platino y unos cuantos metales más pueden ser electroplateados. Las bicapas de metal consisten de una capa de adhesión (por ej. cromo) y una capa intermedia de níquel o platino.

### **2.3.4 Polímeros**

Los polímeros, en la forma de poliamidas o fotoresist, pueden ser depositados con espesores que van desde unos cuantos nanómetros hasta cientos de micras. Debido a sus propiedades de absorción y adhesión, los polímeros han ganado aceptación en el sensado de gases y humedad.

## 2.4 Procesos de Microfabricación

La tecnología MEMS esta basada sobre un número de técnicas o metodologías. A continuación se presentan los métodos usados en la fabricación de MEMS.

### 2.4.1 Técnicas de Micromaquinado

De manera general, hay tres procesos básicos de construcción en tecnologías MEMS, los cuales son: la capacidad para depositar películas delgadas de material sobre un sustrato, aplicar un estampado (diseño) encima de las películas por litografía y atacar las películas de material selectivamente.

A continuación se presenta una breve descripción de las principales técnicas o métodos de fabricación, que son empleadas actualmente, para producir microdispositivos.

#### 2.4.1.1 Deposición de Materiales

Es la capacidad para depositar películas delgadas de material. Las tecnologías de deposición MEMS pueden ser clasificadas en dos grupos:

1 *Deposiciones que ocurren a causa de una reacción química.*

Estos procesos aprovechan la creación de materiales sólidos directamente de reacciones, en composiciones químicas en gas y/o líquidos o con el material del sustrato. El material sólido no es usualmente el único producto formado en la reacción. Los productos pueden incluir gases, líquidos, e inclusive otros sólidos.

➤ **Deposición Química de Vapor (CVD)**

El sustrato es ubicado dentro de un reactor, en el cual son suministrados un número de gases. Esta técnica trabaja bajo el principio de provocar una reacción química, bajo una atmósfera controlada, que da como resultado la deposición de un material reactante sobre un sustrato caliente. El proceso se desarrolla por encima de los 300 °C. Los materiales más comunes son el polisilicio, óxidos y nitruros de silicio, tungsteno, titanio y tantalio, así como sus nitruros.

➤ **Electroplateado (Blindaje)**

Esta restringido a materiales eléctricamente conductores, como cobre, oro y níquel. Las películas pueden tener espesores desde 1 μm hasta 100 μm. Básicamente hay 2 tecnologías para realizar el electroplateado o blindaje:

A) *Electroplating*: el sustrato es ubicado en una solución líquida (electrolito), de tal forma que, cuando es aplicado un potencial eléctrico entre un área conductora sobre el sustrato y un electrodo (usualmente platino) en el líquido, toma lugar un proceso químico de oxidación-reducción; resultando en la formación de una capa de material sobre el sustrato y la generación de algún gas en el electrodo.

B) *Electroless plating*: es utilizada una solución química más compleja, la cual

forma un potencial electroquímico suficientemente alto con la solución, de tal manera que la deposición ocurre espontáneamente sobre cualquier superficie. Este proceso es atractivo, ya que no requiere ningún potencial eléctrico externo y de ningún contacto con el sustrato durante el proceso. Por desgracia es muy difícil controlar el espesor y la uniformidad de las películas depositadas.

➤ **Crecimiento Epitaxial**

Es muy similar a lo que ocurre en los procesos CVD; no obstante, si el sustrato es un cristal semiconductor, cristalográficamente ordenado (es decir silicio, arseniuro de galio), entonces con este proceso es posible continuar construyendo sobre el sustrato con la misma orientación cristalográfica. El sustrato actúa como un cimiento para la deposición. Si es usado un sustrato policristalino/amorfo, la película también será policristalina/amorfa. Una ventaja de esta técnica es la alta velocidad de desarrollo del material, la cual permite la formación de películas con espesor considerable ( $> 100 \mu\text{m}$ ).

➤ **Oxidación Térmica**

Es la técnica de deposición más básica y corresponde a la simple oxidación de la superficie del sustrato en una atmósfera rica en oxígeno. Esta es, también, la única tecnología de deposición que consume algo del sustrato en el proceso. A medida que el espesor de la capa oxidada se incrementa, la difusión de oxígeno al sustrato llega a ser más difícil, teniéndose una relación parabólica entre el espesor de la película y el tiempo de oxidación para grosores de películas de más de 100 nm. Este proceso está limitado a materiales que pueden ser oxidados.

2 *Deposiciones que ocurren a causa de una reacción física.*

Lo común para todas estas técnicas es que el material depositado sea físicamente movido sobre el sustrato. No hay reacción química que forme el material sobre el sustrato.

➤ **Deposición Física de Vapor (PVD)**

Abarca un número de tecnologías de deposición en las cuales el material es liberado desde una fuente y transferido al sustrato. Las dos tecnologías más importantes son evaporación y sputtering.

A) *Evaporación.* Involucra el calentamiento de un material fuente a temperaturas altas, generando un vapor que se condensará sobre el sustrato para formar una película. La evaporación es desarrollada en una cámara de vacío a una presión por debajo de  $10^{-4}$  Pa, para evitar contaminar la película de material. Casi cualquier elemento (por ej. aluminio, silicio, titanio, oro), incluyendo muchos metales (cromo, molibdeno, paladio, tantalio, platino, níquel) con punto de fusión alto pueden ser evaporados.

B) *Sputtering.* Emplea temperaturas más bajas que la tecnología de evaporación. El sustrato está ubicado en una cámara de vacío junto con el material a ser depositado, comúnmente llamado blanco. El material o blanco es físicamente bombardeado por un flujo de iones de un gas inerte (usualmente argón) a baja presión, entre 0.1-10 Pa. Los átomos o moléculas

del blanco son expulsados y depositados sobre la oblea o sustrato. Existen muchas clases de sputtering, las cuales se diferencian por los mecanismos de excitación de los iones.

➤ Casting

En este proceso, el material a ser depositado es disuelto, en forma líquida, en un solvente. El material puede ser aplicado sobre el sustrato rociándolo o inyectándolo. El solvente es evaporado quedando una película delgada del material depositado sobre el sustrato. Esta técnica es particularmente útil para polímeros y es el método común para aplicar la película de resist a los sustratos (en litografía).

### 2.4.1.2 Transferencia de Patrones, Litografía

La litografía, en el contexto MEMS, es la impresión de una imagen (patrón o diseño) a un material fotosensible por exposición selectiva a una fuente de radiación, tal como la luz. Existen diversas clases de litografía, tales como la óptica, de rayos X, atacado de partículas y nanolitografía.

De manera general, cualquier proceso de litografía inicia con la deposición de resist (un polímero que es sensible a la radiación) encima de la oblea, como se muestra en la Fig. 2.3a. A continuación, se expone selectivamente el resist a radiación a través de una máscara que contiene áreas transparentes (o regiones blancas) y áreas que absorben la radiación incidente (o regiones oscuras), como se observa en la Fig. 2.3b.

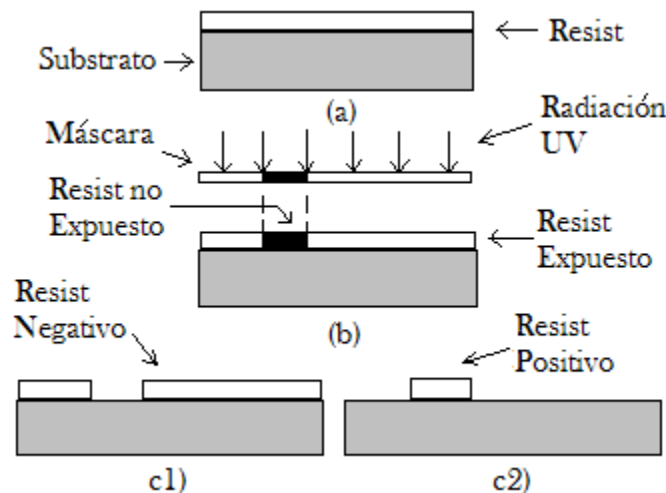


Fig. 2.3 Pasos litográficos: a)Deposición del resist, b)Exposición del resist, c1)Desarrollo del resist negativo y c2)Desarrollo del resist positivo. [6]

La máscara puede estar en contacto con la oblea (lo cual puede ocasionar problemas, tales como una mala alineación de la máscara y/o una deformación o tensión por el contacto), o a unos cuantos micrómetros de la oblea (con lo que se elimina la tensión por el contacto, pero hay limitaciones en la resolución debido a la difracción). Ambos métodos producen una imagen 1:1 de la máscara sobre el resist.

Las áreas expuestas y las no expuestas tienen diferentes solubilidades, siendo las regiones expuestas eliminadas a través de disolventes selectivos. Las regiones expuestas a radiación de *resist negativo* son más solubles que las no expuestas, mientras que, para *resist positivo* las áreas no expuestas son más solubles. En la Fig. 2.3c1 se muestra, como resultado del *resist negativo*, la presencia de una cavidad, mientras que la Fig. 2.3c2 muestra las partes laterales de una cavidad hecha con *resist positivo*.

### 2.4.1.3 Atacado de Materiales, Grabado

El grabado es producido por la exposición del sustrato a fluidos reactantes que pueden remover material a través de reacciones químicas. Las velocidades de atacado varían dependiendo del sustrato a ser atacado y de la temperatura y proporción de los ácidos en los fluidos reactantes. En general, hay dos clases de procesos de grabado:

#### 1 Grabado Húmedo

Es la tecnología de grabado o atacado más simple, la cual utiliza soluciones acuosas y tiene como ventaja su bajo costo, ya que de 25 a 50 obleas de 100 mm de diámetro pueden ser atacadas simultáneamente. Debido a la naturaleza de los materiales, puede ser de 2 tipos, grabado anisotrópico o isotrópico.

*A) Grabado Anisotrópico.* Está basado en las diferentes velocidades de atacado sobre los distintos planos cristalográficos, pero también resulta en pérdida de espacio, ya que estos planos no pueden ser verticales a la superficie cuando se atacan hoyuelos o cavidades. Uno de los atacantes más populares es el hidróxido de potasio (KOH), el cual presenta una velocidad de atacado sobre silicio de aproximadamente 0.5 a 2  $\mu\text{m}/\text{min}$ . Las Figs. 2.4 y 2.5 muestran ejemplos de atacado anisotrópico en algunas direcciones.

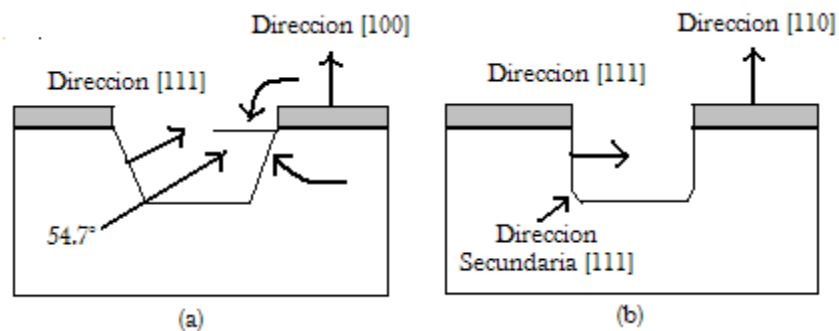


Fig. 2.4 Ejemplos de un: a) Grabado anisotrópico de una oblea de silicio (100) y b) Grabado anisotrópico de una oblea de silicio (110). [6]

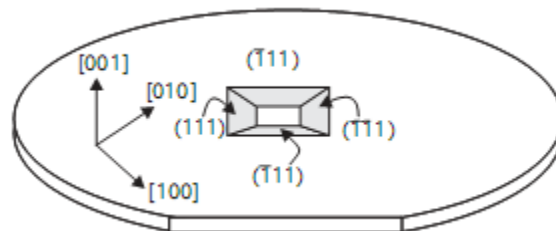


Fig. 2.5 Perspectiva de una oblea de silicio {100} atacada por KOH. [2]



*B) Grabado Isotrópico.* Produce una remoción de material a una velocidad uniforme sobre todas las direcciones cristalográficas y genera cavidades redondas como se muestra en la Fig. 2.6. El atacante más popular del silicio es el HNA, el cual consiste de una mezcla de ácido fluorhídrico (HF), ácido nítrico ( $\text{HNO}_3$ ) y ácido acético ( $\text{CH}_3\text{COOH}$ ). Las impurezas dopantes (tipo *n* o *p*) del silicio pueden ser empleadas para reducir la velocidad de atacado hasta 150 veces, aproximadamente. La Fig. 2.6 ejemplifica este tipo de atacado.

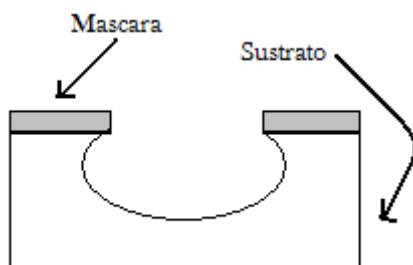


Fig. 2.6 Ejemplo del resultado de un grabado isotrópico. [6]

## 2 Grabado Seco

Esta tecnología involucra el uso de gases reactantes, usualmente en un plasma a baja presión. El equipo para grabado seco es especializado y requiere de una instalación ultra limpia para mantener en alta pureza a los gases reactantes dentro de una cámara de vacío. Esta tecnología de grabado seco puede dividirse en dos clases:

*A) Grabado en Fase Vapor.* Es producido por varios reactantes, entre los cuales esta el difluoruro de Xenón ( $\text{XeF}_2$ ). Este reactante es selectivo a una gran variedad de materiales, incluyendo oro, aluminio, dióxido de silicio y nitruro de titanio. El material a ser atacado es deshecho mediante una reacción química con las moléculas de los gases.

*B) Grabado en Fase Plasma.* Involucra la generación de reactivos químicos neutrales (por ej. flúor, cloro) e iones (por ej. fluoruros de azufre,  $\text{SF}_x^+$ ) que son acelerados, bajo el efecto de un campo eléctrico, hacia el sustrato. Las especies reactivas (neutrales o iones) son formadas por la colisión de moléculas en un gas reactante (por ej.  $\text{SF}_6$ ,  $\text{CF}_4$ ,  $\text{Cl}_2$ ,  $\text{CClF}_3$ ,  $\text{NF}_3$ ) con una nube de electrones excitados por un campo eléctrico de RF. Cuando el proceso de grabado es puramente químico, producido por la reacción espontánea de neutrones con silicio, es coloquialmente referido como grabado en fase plasma; pero si el bombardeo de iones de la superficie de silicio juega un rol sinérgico en la reacción de atacado químico, el proceso es denominado como atacado de iones reactivos (Reactive Ion Etching, RIE). En RIE, el movimiento de los iones a través del sustrato es casi vertical. Una variante de RIE es el proceso de atacado a profundidad (Deep Reactive Ion Etching, DRIE), el cual usa un plasma de alta densidad para producir grandes paredes verticales, donde son empleadas dos composiciones diferentes de gases. La primera composición de gases crea un polímero sobre la superficie del sustrato y la segunda composición ataca al sustrato, removiendo solo las superficies horizontales del sustrato, la Fig. 2.7 muestra este proceso. Su velocidad de atacado es de 3 a 4 veces mas alta que en los grabados húmedos.

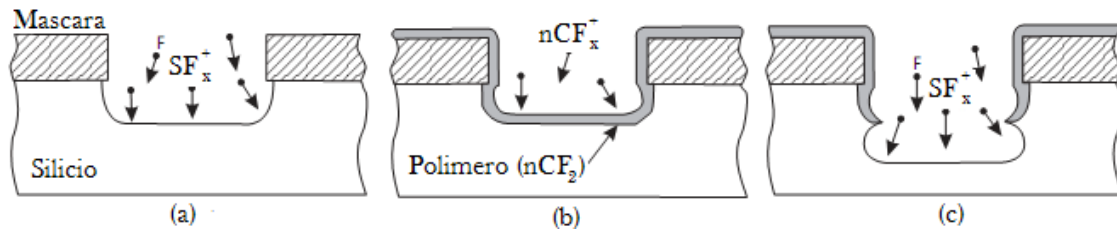


Fig. 2.7 Proceso DRIE: a)Atacado usando un gas, b)Deposición de un polímero y c)Atacado de las superficies horizontales. [2]

Ahora bien, la secuencia en la cual son combinadas varias técnicas o métodos de fabricación determina un proceso de fabricación único. Este puede ser específico para un diseño en particular, o puede ser lo suficientemente general, como para ser usado en la fabricación de un amplio rango de diseños diferentes.

## 2.4.2 Procesos de Micromaquinado

Básicamente, en MEMS, existen dos procesos de micromaquinado, como se muestra en la Fig. 2.8: los *procesos aditivos o micromaquinado de superficie* y los *procesos substractivos o micromaquinado volumétrico*. Cualquier proceso, ya sea comercial o particular existente ocupa cualquiera de estos dos procesos, o en el mejor de los casos una combinación de ambos procesos. [6]

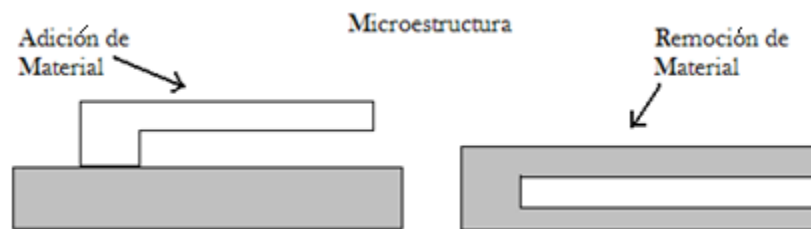


Fig. 2.8 Procesos básicos de fabricación en MEMS: a)Aditivos y b)Substractivos. [6]

La Fig. 2.8 muestra un ejemplo de un microcantiliver simple fabricado utilizando ambos procesos.

### 2.4.2.1 Micromaquinado de Superficie

Esta basado sobre la sucesiva deposición y atacado de diferentes capas estructurales sobre la superficie del sustrato. El proceso inicia con un material como sustrato. Las estructuras son construidas, encima del sustrato y no dentro de éste, por lo que las propiedades del sustrato no son tan importantes como en el micromaquinado volumétrico y por consiguiente las obleas de silicio costosas pueden ser reemplazadas por sustratos más baratos, tales como los cristales o plásticos. El tamaño de los sustratos puede ser mucho más grande que el de una oblea de silicio. El micromaquinado de superficie es usado para producir capas delgadas sobre un área grande de sustrato, pero el espesor pequeño de sus capas limita las aplicaciones, a aquellas que no requieren de un volumen muy grande.

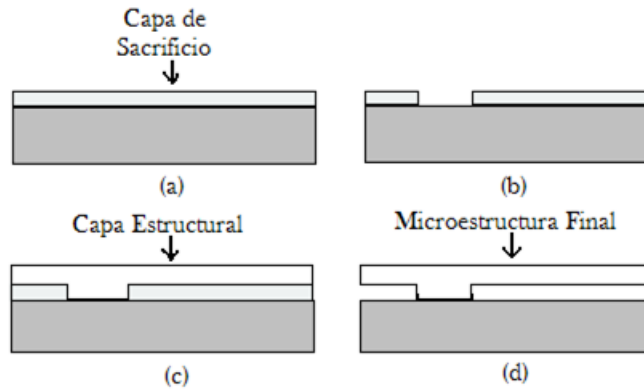


Fig. 2.9 Micromaquinado superficial: a)Deposición de la capa de sacrificio, b)Estampado de la capa de sacrificio, c)Deposición de la capa estructural y d)Atacado de la capa de sacrificio. [6]

La Fig. 2.9 ilustra los principales pasos que componen a un proceso de micromaquinado superficial típico.

#### 2.4.2.2 Micromaquinado Volumétrico

Define estructuras mediante la remoción o atacado selectivo de material que esta dentro del sustrato. Muchas veces las obleas de silicio son usadas como sustrato, por sus propiedades anisotrópicas, para este tipo de micromaquinado. Este proceso inicia con una oblea de silicio u otro sustrato, el cual es atacado selectivamente hasta obtener el microdispositivo deseado, usando atacado húmedo o seco, aunque el atacado mas común en silicio es el atacado húmedo anisotrópico.

La Fig. 2.10 muestra el proceso genérico para producir un microcantiliver, empleando micromaquinado volumétrico.

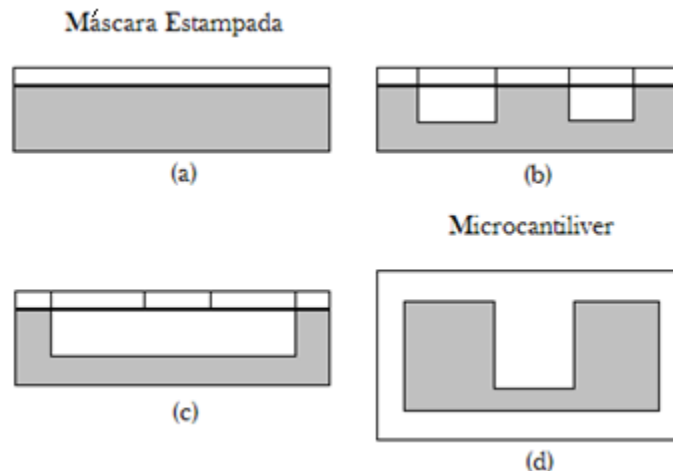


Fig. 2.10 Micromaquinado volumétrico de un microcantiliver: a)Deposición y estampado de una máscara, b)Atacado de los canales laterales, c)Socavado y liberación parcial del microcantiliver y d)Vista superior del microcantiliver. [6]

## 2.5 Procesos Comerciales para Fabricación en MEMS

Uno de los objetivos del presente trabajo es emplear un proceso de fabricación estándar y comercial; pero, “¿Por qué utilizar un proceso de fabricación estándar?”. Varias son las razones, a favor y en contra, que pueden facilitar la elección de un tipo de proceso. En la Tabla 2.1 se mencionan algunos de los puntos.

Proceso	Pros	Contras
Estándar	<ul style="list-style-type: none"> <li>No se tiene que desarrollar un proceso</li> <li>Es relativamente barato</li> <li>El desarrollo es rápido</li> <li>Trasladarlo a la industria es fácil</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Los procesos y materiales son fijos</li> <li>La flexibilidad es reducida</li> <li>Las aplicaciones son limitadas</li> <li>Las propiedades mecánicas de los materiales no pueden ser controladas</li> </ul>
No - Estándar	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se debe desarrollar un nuevo proceso</li> <li>Ganancia en experiencia</li> <li>Expansión de las habilidades del diseñador</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Difícil de trasladar a la industria</li> <li>Baja probabilidad de éxito en las primeras corridas (Proceso iterativo)</li> <li>Costo elevado</li> <li>Consumo de tiempo</li> </ul>

Tabla 2.1 Pros y contras de los procesos estándar y no-estándar para el desarrollo de MEMS.

Dado que nuestras posibilidades de establecer un proceso propio son muy limitadas se ha decidido utilizar un proceso ya definido y plenamente comprobado, por lo que a continuación se describen brevemente tres procesos de fabricación que son genéricos en su naturaleza y usados hoy en día en la manufactura de MEMS.

### 2.5.1 PolyMUMPs

Es un proceso de micromaquinado de superficie con tres capas de polisilicio, dos capas de sacrificio y una capa de metal. Ocho niveles de máscara crean siete niveles físicos. El tamaño de la característica mínima en PolyMUMPs es de 2  $\mu\text{m}$ . [7]

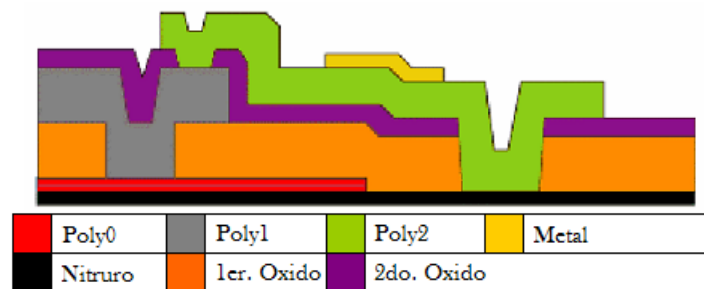


Fig. 2.11 Vista transversal que muestra las 7 capas del proceso PolyMUMPs. [8]

La Fig. 2.11 muestra la sección transversal del proceso PolyMUMPs. Las características generales de éste proceso de micromaquinado son: (1) el polisilicio es usado como el material estructural, (2) el óxido depositado (PSG) es utilizado como capa de sacrificio y (3) el nitruro de silicio es usado como un aislante eléctrico entre el polisilicio y el sustrato.

Algunos de los dispositivos que se pueden fabricar en PolyMUMPs incluyen: dispositivos acústicos (micrófonos), acelerómetros, microfluidos, robóticos y tecnología de displays. [8]

### 2.5.2 MetalMUMPs

En este proceso pueden construirse estructuras grandes de Níquel, entre 18-22  $\mu\text{m}$ , así como estructuras de polisilicio y nitruro y si el diseño lo requiere, también se pueden crear zanjas con cierta profundidad dentro del sustrato, atacadas con KOH. [7]

El níquel electroplateado es usado como material estructural primario y/o capa de interconexión eléctrica. El polisilicio dopado puede ser usado para elementos resistivos, estructuras mecánicas adicionales, y/o atravesar interconexiones eléctricas. El nitruro de silicio es usado como una capa de aislamiento eléctrico. El óxido depositado es usado para capas de sacrificio. La zanja en el sustrato de silicio puede ser incorporada para aislamiento térmico y eléctrico. Una capa de oro, de baja resistencia eléctrica, puede ser usada para cubrir las paredes laterales del níquel. El tamaño de la característica mínima en MetalMUMPs es de 5  $\mu\text{m}$ . Los dispositivos que se pueden fabricar en MetalMUMPs incluyen: relevadores, microfluidos, interruptores magnéticos y dispositivos de RF. La Fig. 2.12 muestra un microdispositivo fabricado con el proceso MetalMUMPs. [9]

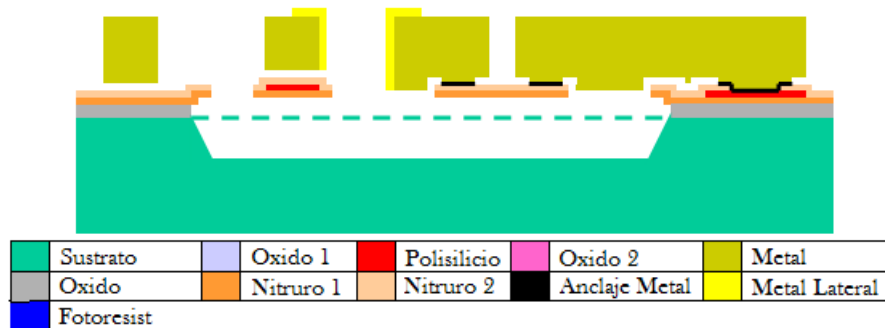


Fig. 2.12 Vista seccional de un microrelevador fabricado usando todas las capas del proceso MetalMUMPs. [8]

### 2.5.3 SOIMUMPs

La Fig. 2.13 muestra un dispositivo hecho en SOIMUMPs. El proceso tiene las siguientes características generales:

- Una oblea de silicio sobre aislante (Silicon-on Insulator, SOI) es utilizada como el sustrato de inicio. El usuario puede seleccionar entre dos tipos de sustratos:
  - Silicio con 10  $\mu\text{m}$  de espesor  
Espesor del Oxido:  $1 \pm 0.05 \mu\text{m}$   
Espesor del Sustrato:  $400 \pm 5 \mu\text{m}$
  - Silicio con 25  $\mu\text{m}$  de espesor  
Espesor del Oxido:  $2 \pm 0.1 \mu\text{m}$   
Espesor del Sustrato:  $400 \pm 5 \mu\text{m}$
- La capa de Silicio es dopada, después estampada y atacada hasta detenerse en la capa de Oxido. Esta capa puede ser usada para estructuras mecánicas, estructuras resistivas, y/o interconexiones eléctricas.

3. El Sustrato puede ser estampado por la parte inferior y atacarlo hasta la capa de Oxido. Esto permite crear hoyos sobre el Sustrato.
4. Un proceso de enmascaramiento (Shadow-Masked Metal) es empleado para generar características de Metal, como pads, interconexiones eléctricas, y superficies tipo espejos.
5. Una segunda capa de metal que permite desarrollar características más finas y de mayor precisión, pero limitadas a áreas no atacadas en la capa del Silicio.

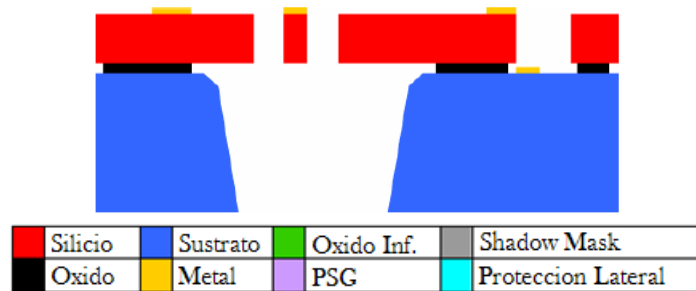


Fig. 2.13 Vista de la sección transversal que muestra todas las capas del proceso SOIMUMPs. No a escala. [10]

Dado que el proceso no fue optimizado con el propósito de fabricar un dispositivo en específico, los espesores de las capas fueron seleccionados para adaptarse a la mayoría de los usuarios y las reglas de diseño fueron desarrolladas con el objetivo de garantizar la realización de diferentes diseños.

La siguiente convención es empleada para nombrar los niveles del proceso: los niveles que corresponden a las máscaras de los procesos litográficos están escritos con letras mayúsculas. Los nombres de capas específicas de materiales, como por ejemplo el silicio, están escritas con letras minúsculas con la primera letra en mayúscula. Por ejemplo, SOI se refiere al nivel de máscara para definir la forma de la capa de silicio, denominada Silicio. En la Tabla 2.2 se resumen las características de cada capa de material.

Capa de Material	Espesor [μm]	Nivel Litográfico	Propósito del Nivel Litográfico	Comentarios
Pad Metal	0.52	PADMETAL	Provee metal para interconexiones eléctricas	20 nm Cr 500 nm Au
Silicio	10 o 25		Define estructuras en la capa de Silicio	
Oxido	1 o 2	SOI		
Sustrato	400	TRENCH	Define hoyos en la capa del Sustrato	
Blanket Metal	0.65	BLANKETMETAL	A través de una oblea define zonas donde se depositará una capa de Metal	50 nm Cr 600 nm Au

Tabla 2.2 Nombres de capas de material, espesores y niveles litográficos asociados. [10]

Las reglas de diseño definen el tamaño de las características mínimas y el espacio entre cada nivel litográfico. Las características mínimas de longitud y espacio son reglas obligatorias, las cuales son dadas para asegurar una correcta fabricación. La violación a estas reglas resulta en

estructuras demasiado grandes o pequeñas e incluso la pérdida de algunas características en el diseño. En la Tabla 2.3 se definen el tamaño de las características para cada nivel litográfico.

Nivel Litográfico	Característica Min [ $\mu\text{m}$ ]	Espacio Min [ $\mu\text{m}$ ]	Característica Max. [ $\mu\text{m}$ ]	Área estampada Max. [ $\text{mm}^2$ ]
PADMETAL	3	3	500	20
SOI	2	2	Ilimitada para un ancho $> 6 \mu\text{m}$	33
SOIHOLE	3	3	N/A	N/A
TRENCH	200	200	5000	20
BLANKETMETAL	100	100	5000	20

Tabla 2.3 Lista las reglas de diseño asociadas a cada nivel. [10]

### 2.5.3.1 Resumen del Proceso

SOIMUMPs es un proceso de estampado y atacado con 4 niveles de máscaras. Esta tecnología permite generar superficies altamente planas, aunque una de sus desventajas es que solo tiene una capa estructural, capa de Silicio, con lo cual se logra un diseño fácil pero limitado. A continuación se muestra una representación gráfica de los pasos del proceso.



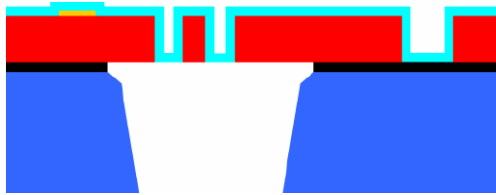
Una capa de cristal de fosfosilicato (PSG) es depositada y la oblea es recocida en Argón para transmitir el dopante, fósforo, a la superficie superior de la capa de Silicio. Después, el PSG es removido usando un ataque químico húmedo. Inicialmente hay una capa de Oxido en la parte inferior de la oblea.



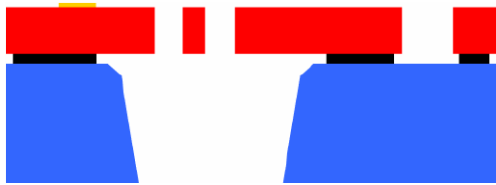
Las obleas son cubiertas con fotorresist negativo y un proceso litográfico desarrolla el primer nivel de máscara, PADMETAL. Una capa de Metal es depositada por evaporación, compuesta de 20 nm de Cr y 500 nm de Au, sobre el fotorresist estampado. En seguida el fotorresist es disuelto dejando el Metal en áreas abiertas.



Las obleas son cubiertas con fotorresist y un proceso litográfico desarrolla el segundo nivel de máscara, SOI. El fotorresist en áreas expuestas es removido, dejando un patrón para usar un DRIE y atacar el Silicio hasta detenerse en la capa de Oxido. Después del ataque, el fotorresist es removido químicamente.



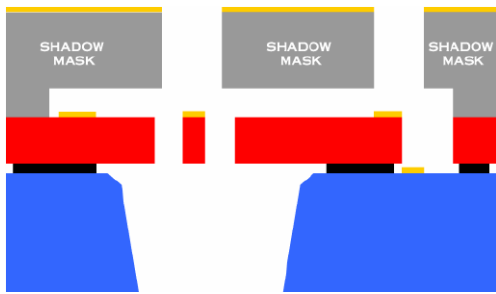
Un material para protección es aplicado sobre el Silicio. La parte inferior de las obleas es cubierto con fotoresist y es desarrollado el tercer nivel de máscara, TRENCH. Un RIE es usado para remover la capa de Oxido de la parte inferior de la oblea, entonces, un DRIE es usado para atacar completamente el Sustrato, deteniéndose en la capa de Oxido. Completado el atacado, el fotoresist es removido. Después, un proceso de atacado húmedo es empleado para remover la capa de Oxido en la regiones definidas por la máscara TRENCH.



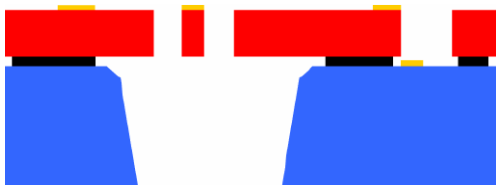
El material de protección es removido con un proceso de atacado seco. La capa de Oxido restante es removida usando un proceso HF de vapor. Esto permite un contacto eléctrico en la capa del Sustrato y genera un socavado en la capa de Oxido.



Una oblea de silicio es usada para fabricar una máscara de sombra para el estampado del Metal. Estas obleas son cubiertas con fotoresist y el cuarto nivel de máscara, BLANKETMETAL, es litográficamente estampado. Es usado un DRIE para atacar esta oblea, produciendo hoyos. Por último, el fotoresist es removido.



La máscara de sombra es alineada y temporalmente unida a la oblea SOI. La capa de Blanket Metal, 50 nm de Cromo y 600 nm de oro, es depositada a través de la máscara de sombra.



La máscara de sombra es removida, dejando una capa de Metal estampada sobre la oblea SOI. Finalmente, las obleas son cortadas en cubos, clasificadas, empaçadas y enviadas a los usuarios.

	Silicio		Sustrato		Oxido Inf.		Shadow Mask
	Oxido		Metal		PSG		Proteccion Lateral

Fig. 2.14 Flujo del proceso SOIMUMPS. No a escala. [10]

Finalmente, algunos de los dispositivos que se pueden fabricar en SOIMUMPs son: giroscopios, dispositivos ópticos y tecnología de displays.



# Micromecánica de un Acelerómetro

## 3.1 Sistemas para Medición de Vibraciones

En este capítulo se describen los elementos que permiten modelar un sistema para medición de vibraciones. En general, son cuatro los elementos que conforman a un sensor de este tipo: 1) uno o más elementos de inercia, o masa de prueba, para generar una fuerza debida a una aceleración o incluso una desaceleración; 2) elementos de rigidez, o una suspensión en forma de uno o varios resortes elásticos, para proveer a la masa un soporte mecánico y regresarla a su posición de equilibrio, una vez retirada la fuerza; 3) elementos de disipación, o amortiguamiento, para controlar el movimiento de la masa de prueba y poder obtener una respuesta en frecuencia favorable, usualmente es el volumen del aire o un ambiente controlado, dentro de la cavidad interna del dispositivo; y 4) un método para medir el desplazamiento de la masa, el cual convierte el desplazamiento mecánico a una salida eléctrica.

En este capítulo se tratarán a detalle solo los 3 primeros elementos antes mencionados y en el siguiente capítulo se estudiará a detalle el método de sensado.

Cada uno de estos elementos tiene características diferentes de excitación-respuesta; la excitación está en la forma de una fuerza o momento, y la respuesta correspondiente está en la forma de un desplazamiento, velocidad o aceleración. La naturaleza de estas relaciones puede ser lineal o no lineal. Además, deben considerarse las fuerzas y momentos aplicados externamente y las alteraciones provenientes de desplazamientos y/o velocidades iniciales. Las unidades asociadas con estos elementos y sus símbolos mas usados se muestran en la Tabla 3.1.

Movimiento	Nomenclatura	Unidades
Traslación	Masa, $m$	kg
	Rigidez, $k$	N/m
	Amortiguamiento, $c$	N*s/m
	Fuerza externa, $F$	N
Rotación	Momento de inercia de la masa, $I$	kg*m <sup>2</sup>
	Rigidez, $k_t$	N*m/rad
	Amortiguamiento, $c_t$	N*m*s/rad
	Momento externo, $M$	N*m

Tabla 3.1 Unidades de los elementos que constituye un sensor inercial y sus símbolos convencionales. [11]

### 3.1.1 Elemento de Inercia: Masa de Prueba

El movimiento de traslación de una masa se describe como el movimiento a lo largo de la trayectoria que sigue el centroide. La propiedad de inercia asociada depende solo de la masa

total del sistema y es independiente de la forma como se distribuye la masa en el sistema. Sin embargo, para un movimiento rotacional, la propiedad de inercia es una función de la distribución de la masa, momento de inercia de la masa, el cual se define con respecto a su centroide o a un punto fijo  $O$ . Cuando la masa oscila con respecto a un punto fijo  $O$ , su inercia rotatoria  $I_O$  es.

$$I_O = I_G + md^2 \quad 3.1$$

Donde  $m$  es la masa del elemento,  $I_G$  es el momento de inercia de la masa con respecto al centroide y  $d$  es la distancia desde el centro de gravedad hasta el punto  $O$ . Los momentos de inercia  $I_G$  e  $I_O$  de la Ec. 3.1 están definidos con respecto a los ejes normales al plano de la masa. Esta relación se deduce del *teorema de los ejes paralelos*.

A continuación se examina como las propiedades de inercia se relacionan con las fuerzas y como éstas afectan la energía cinética de un sistema. La Fig. 3.1 muestra una masa  $m$  que se traslada con una velocidad de magnitud  $v$  en el plano  $x$ - $y$ . Con base en el principio de la cantidad de movimiento lineal, el cual establece que en un marco de referencia inercial, la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal de un sistema es igual a la fuerza total que actúa en este sistema. Se define la fuerza como:

$$F = \frac{dp}{dt} \quad 3.2$$

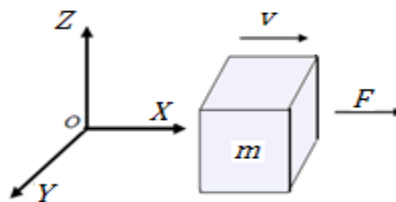


Fig. 3.1 Masa en traslación. [11]

Donde  $F$  representa la fuerza total que actúa sobre el sistema y  $p$  la cantidad de movimiento lineal total del sistema, la cual está definida como:

$$p = mv \quad 3.3$$

Donde  $m$  es la masa del sistema y  $v$  su velocidad. Si la masa  $m$  es constante, la Ec. 3.2 toma la forma conocida como *La Segunda ley de Newton del Movimiento*:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma \quad 3.4$$

De la Ec. 3.4 es evidente que para el caso de movimiento de traslación, *la propiedad de inercia m es la relación de la fuerza y la aceleración*. [11] La energía cinética de la masa  $m$  se expresa como:

$$T = \frac{1}{2} m (v * v) = \frac{1}{2} mv^2 \quad 3.5$$

Para un cuerpo rígido, que esta sometido a rotación en el plano con una velocidad angular  $\omega$ , el principio de la cantidad de movimiento angular expresa que la razón de cambio de cantidad de movimiento angular de un sistema con respecto al centroide o un punto fijo del sistema es igual al momento total con respecto a dicho punto y se establece como:

$$M = \frac{dH}{dt} \quad 3.6$$

Donde  $M$  es el momento neto sobre el punto fijo  $O$  y  $H$  es la cantidad de movimiento angular del sistema con respecto al punto  $O$ . La cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido que se desplaza en el plano, con respecto a un punto fijo  $O$ , es:

$$H_O = I_O \omega \quad 3.7$$

Por tanto:

$$M = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \quad 3.8$$

Donde  $\alpha$  es la aceleración angular del sistema. De la Ec. 3.8 se deduce que en el movimiento rotacional, *la propiedad de inercia  $I$  es la relación del momento y la aceleración angular  $\alpha$* . Esta propiedad de inercia se conoce como inercia rotatoria. [11] La energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad 3.9$$

### 3.1.2 Elemento de Rigidez: Resorte Elástico

Estos elementos almacenan y liberan energía potencial en un sistema, además, son requeridos para brindar un desplazamiento en el eje de mayor sensibilidad y deben ser lo suficientemente rígidos en los demás ejes para eliminar cualquier sensibilidad de movimiento en dichos ejes. Considerando la Fig. 3.2, donde un resorte se mantiene fijo en el extremo  $O$ , y en el otro extremo esta sometido por una fuerza de magnitud  $F$ ; entonces, bajo la acción de esta fuerza, el elemento se estira desde una longitud inicial  $L_0$  hasta una longitud  $L_0 + x$ . Al sufrir esta deformación, la relación entre  $F$  y  $x$  puede ser lineal o no lineal.

Si  $F_S$  representa la fuerza interna que actúa dentro del elemento de rigidez, como se muestra en la Fig. 3.2, entonces  $F_S$  es igual y de sentido contrario a la fuerza  $F$ , es decir,

$$F_S = -F$$

A medida que el elemento de rigidez se deforma, la energía se almacena en el, y conforme regresa a su configuración inicial se libera la energía. La energía potencial  $V$  se define como el trabajo efectuado para llevar al elemento de rigidez desde la posición deformada hasta la posición sin deformación. Lo anterior se expresa como:

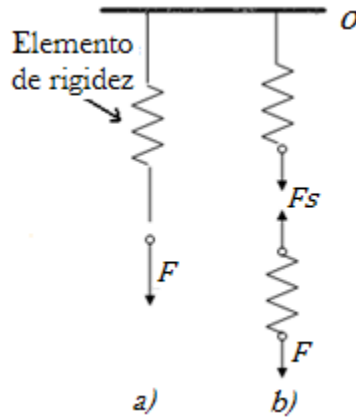


Fig. 3.2 a)Elemento de rigidez con una fuerza que actúa en el y b)Su diagrama de cuerpo libre. [11]

$$V(x) = \int_x^0 F_s dx = \int_x^0 -F dx = \int_0^x F dx \quad 3.10$$

Si se aplica una fuerza  $F$  a un resorte lineal, ya sea de traslación o rotación, como se muestra en la Fig. 3.2, esta fuerza produce una deflexión  $x$  tal que:

$$F(x) = kx \quad 3.11$$

Donde el coeficiente  $k$  se denomina *constante de resorte* y existe una relación lineal entre la fuerza y el desplazamiento. De acuerdo a las Ecs. 3.10 y 3.11, la energía potencial se expresa como:

$$V(x) = \int_0^x F(x) dx = \int_0^x kx dx = k \int_0^x x dx = \frac{1}{2}kx^2 \quad 3.12$$

Cuando se tienen 2 o más resortes en paralelo, como se muestra en la Fig. 3.3b, y la barra sobre la cual actúa la fuerza  $F$  permanece paralela a su posición original, los desplazamientos de ambos resortes son iguales, por tanto:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) = k_1x + k_2x = (k_1 + k_2)x = k_e x \quad 3.13$$

Donde  $k_e$  es la constante equivalente del resorte en paralelo dada por

$$k_e = k_1 + k_2 \quad 3.14$$

Cuando hay 2 o más resortes en serie, Fig. 3.3c, la fuerza sobre cada resorte es la misma y el desplazamiento total es:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)F = \frac{F}{k_e} \quad 3.15$$

Donde la constante equivalente del resorte  $k_e$  es:

$$k_e = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \quad 3.16$$

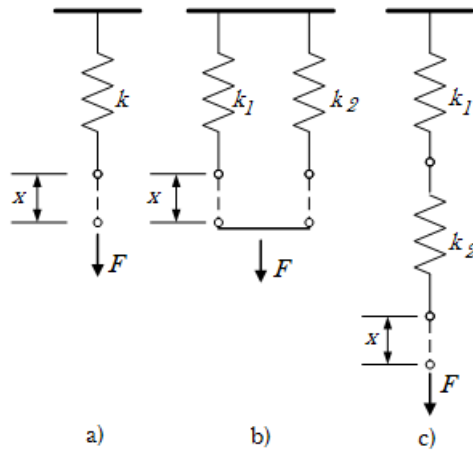


Fig. 3.3 Configuraciones de resortes: a)Resorte simple, b)Resortes en paralelo y c)Resortes en serie. [11]

Similarmente, para resortes de torsión, tenemos que para una combinación en paralelo la rotación  $\theta$  de cada resorte es la misma, por lo tanto:

$$\tau(\theta) = t_1(\theta) + t_2(\theta) = k_{t1}\theta + k_{t2}\theta = (k_{t1} + k_{t2})\theta = k_{te}\theta \quad 3.17$$

Donde  $k_{te}$  es la constante equivalente.

$$k_{te} = k_{t1} + k_{t2} \quad 3.18$$

Para resortes de torsión en serie, el par de torsión es el mismo, pero las rotaciones son desiguales, entonces:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\tau}{k_{t1}} + \frac{\tau}{k_{t2}} = \left( \frac{1}{k_{t1}} + \frac{1}{k_{t2}} \right) \tau = \frac{\tau}{k_{te}} \quad 3.19$$

Donde la rigidez  $k_{te}$  equivalente es:

$$k_{te} = \left( \frac{1}{k_{t1}} + \frac{1}{k_{t2}} \right)^{-1} \quad 3.20$$

Para determinar la constante de resorte de numerosos elementos estructurales elásticos se pueden usar las relaciones conocidas entre fuerza y desplazamiento. Dicha constante esta asociada con la geometría y las propiedades de los materiales usados. [11]

### 3.1.3 Elemento de Disipación: Amortiguamiento

Por amortiguamiento se hace referencia a la disipación de energía en un sistema mecánico. Existen muchos mecanismos de disipación de energía, como por ejemplo, el calentamiento de un metal bajo deformación mecánica constante; la radiación de sonido cuando una placa estructural es golpeada.

Como una primera aproximación, una fuerza de amortiguamiento,  $F_d$ , es proporcional a la velocidad del movimiento:

$$F_d = -c\dot{x}$$

Donde  $c$  es el coeficiente de la fuerza de amortiguamiento y el signo negativo indica que la fuerza es opuesta a la dirección del movimiento.

Para máquinas convencionales, si la velocidad de sus partes móviles no es muy alta, los efectos de amortiguamiento causados por el aire circundante pueden ser ignorados, debido a que la razón de energía disipada por amortiguamiento de aire es mucho mas pequeña que la energía suministrada al sistema. Sin embargo, en el microdominio es vital considerar los efectos del amortiguamiento por aire, debido a que éste se relaciona con el área de las partes móviles. [12]

Para algunos dispositivos micromecánicos la energía consumida vía amortiguamiento por aire debe minimizarse para que el movimiento de las partes mecánicas pueda maximizarse con una fuente de energía finita. Para otros casos el amortiguamiento por aire debe controlarse para que la energía del sistema se consuma de forma apropiada, logrando con esto que el sistema tenga un óptimo desempeño dinámico.

### 3.1.3.1 Flujo de un Fluido Viscoso

Aunque un fluido en reposo es incapaz de resistir que un esfuerzo cortante modifique su forma, fuerzas viscosas aparecen para oponerse al movimiento relativo entre las diferentes capas de un fluido. Por tanto, la viscosidad es una fricción interna entre las capas adyacentes moviéndose con diferentes velocidades.

Las fuerzas cortantes internas de un fluido viscoso son proporcionales al gradiente de velocidad. Si el flujo esta en la dirección  $x$  y su velocidad esta distribuida en la dirección  $y$ ; es decir, la velocidad del flujo en el eje  $x$ ,  $u$ , es una función de  $y$ , la fuerza cortante  $\tau_{yx}$  es:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du(y)}{dy} \quad 3.21$$

Donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad del fluido y tiene unidades de pascales por segundo,  $\text{Pa}\cdot\text{s}$ . Para un gas, si el flujo es estable, el coeficiente de viscosidad es constante. Para muchos líquidos puros su coeficiente de viscosidad también es constante y son llamados líquidos Newtonianos. Aunque ambos, líquidos y gases, tienen viscosidad, estos tienen diferentes propiedades para diferentes mecanismos.

En un líquido estable, la posición relativa de las moléculas adyacentes en la misma capa están estables, pero las posiciones relativas de las moléculas en capas adyacentes de un fluido laminar cambian debido al flujo. La Fig. 3.4 muestra el cambio de la posición relativa entre las moléculas  $A$  y  $B$  en capas adyacentes con diferentes velocidades de flujo, donde la molécula  $A$  tiene una velocidad más alta que la molécula  $B$ . Una aproximación entre  $A$  y  $B$

es acompañada por un decremento de energía potencial intermolecular y un incremento en la energía cinética molecular, produciéndose una unión temporal entre ambas placas. Una fuerza externa debe actuar para separar las moléculas, realizando un trabajo que corresponde a una energía aleatoria.

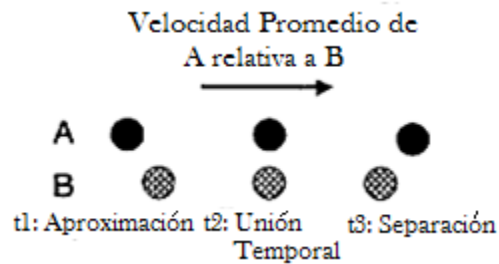


Fig. 3.4. Mecanismo de viscosidad de un fluido. [3]

Acorde al mecanismo mostrado para un líquido, un incremento en la temperatura significa que se necesita de menos energía para separar las moléculas. Por tanto, la viscosidad de muchos líquidos decrece con la temperatura.

Para los gases, el movimiento térmico de una molécula es mucho más grande que su movimiento de deriva relacionado al flujo del gas. En la Fig. 3.5, la molécula *A*, con una velocidad de deriva más pequeña, cruza la frontera *CD* (debido al movimiento térmico) adquiriendo una velocidad de deriva más grande, junto con un momento de deriva, y experimentando una fuerza hacia la derecha; por lo tanto, la molécula ejerce una fuerza a la izquierda de la capa más alta, lo cual tiende a retardar la capa más rápida.

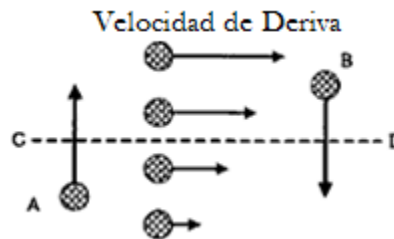


Fig. 3.5. Mecanismo de viscosidad en un gas. [3]

De forma similar, la molécula *B* en la capa más rápida cruza la frontera *CD* (debido al movimiento térmico) efectuando una fuerza a la derecha sobre la capa más lenta en la cual se mueve.

Debido al mecanismo descrito, un incremento en la temperatura ocasiona que las moléculas tenga una velocidad térmica más grande, lo cual incrementa la razón a la cual las moléculas cruzan las capas. De esta manera, la viscosidad de un gas se incrementa con la temperatura. Un análisis cuantitativo de un modelo simple sobre la teoría cinética de gases predice que:

$$\mu = \frac{1}{3} \rho \tilde{v} \lambda \quad 3.22$$

Donde  $\rho$  es la densidad,  $\tilde{v}$  es la velocidad promedio de las moléculas y  $\lambda$  es la distancia libre media de viaje de una molécula (mean free path). De acuerdo a la teoría cinética de los gases tenemos:

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_m}}, \quad \lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{2}nd^2} \quad \text{y} \quad \rho = n \frac{M_m}{N_{av}}$$

Donde  $R$  es la constante Universal Molar,  $M_m$  es la masa molar,  $d$  el diámetro molecular efectivo del gas,  $T$  es la temperatura absoluta y  $N_{av}$  es la constante de Avogadro. Sustituyendo, tenemos:

$$\mu = \frac{2\sqrt{R}}{\pi nd^2} \sqrt{M_m T} \quad 3.23$$

La Ec. 3.23 muestra que  $\mu$  es independiente de la presión,  $P$ . Experimentos hechos por Maxwell confirman este hecho, sobre un amplio rango de presiones, asumiendo que la presión no sea muy pequeña. Además, la Ec. 3.23 indica que  $\mu$  aumenta en proporción directa con  $\sqrt{M_m}$  y  $\sqrt{T}$ . Experimentos han confirmado que  $\mu$  se incrementa con la temperatura pero la potencia excede ligeramente el  $1/2$ .

La dependencia de  $\mu$  con respecto a la temperatura puede expresarse por una relación empírica conocida como la Ecuación de Sutherland:

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + T_s/T_0}{1 + T_s/T} \sqrt{\frac{T}{T_0}} \quad 3.24$$

Donde  $T_0 = 273.16\text{K}$ ,  $\mu_0$  es el coeficiente de viscosidad en  $T_0$  y  $T_s$  es una constante.  $\mu_0$  y  $T_s$  son dependientes del gas considerado. Usualmente, el coeficiente de viscosidad de un líquido es mucho más sensible a la temperatura que el de un gas.

### 3.1.3.2 Ecuaciones para Flujo Viscoso

Considérese un elemento cúbico en un fluido, como el de la Fig. 3.6. Hay 6 componentes de fuerza cortante sobre su superficie, causados por el gradiente de velocidad del flujo  $\tau_{xy}(x_0)$ ,  $\tau_{xy}(x_0 + dx)$ ,  $\tau_{yz}(y_0)$ ,  $\tau_{yz}(y_0 + dy)$ ,  $\tau_{zx}(x_0)$ ,  $\tau_{zx}(z_0 + dz)$ . También hay 6 componentes de fuerza normal sobre su superficie, causadas por la presión:  $P(x)dydz$ ,  $P(x + dx)dydz$ ,  $P(y)dxdz$ ,  $P(y + dy)dxdz$ ,  $P(z)dxdy$ ,  $P(z + dz)dxdy$ .

Asumiendo que el peso del fluido estable es despreciable, el balance de fuerzas para el cubo en la dirección  $z$  es:

$$[P(z) - P(z + dz)]dxdy + [\tau_{xz}(x + dx) - \tau_{xz}(x)]dydz + [\tau_{yz}(y + dy) - \tau_{yz}(y)]dxdz = 0 \quad 3.25$$



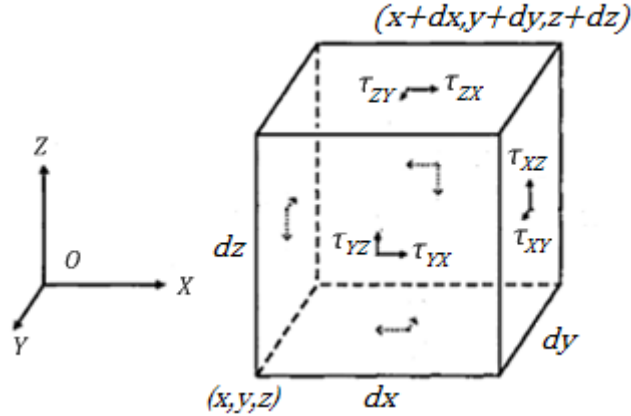


Fig. 3.6 Esfuerzos cortantes sobre la superficie de un cubo. [3]

Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad 3.26$$

Como  $\tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}$ , tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad 3.27$$

Donde  $w$  es la componente de la velocidad en la dirección  $z$ . De igual forma, para  $u$  y  $v$ , las componentes de la velocidad en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente, tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad 3.28$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad 3.29$$

Las Ec. 3.27, 3.28 y 3.29 son las ecuaciones para el flujo viscoso de un fluido ocasionado por una presión,  $P$ .

### 3.1.3.3 Modelos de Amortiguamiento

Para superficies MEMS móviles que interactúan con gases o líquidos, hay dos modelos básicos para disipación de energía: *amortiguamiento por película deslizante*, la cual se presenta cuando dos superficies están moviéndose de forma paralela entre si, cortando el flujo entre las superficies, como se ilustra en la Fig. 3.7a, y *amortiguamiento por película comprimida*. En aplicaciones MEMS, uno o ambos tipos de amortiguamiento pueden ocurrir; sin embargo, para el presente trabajo solo se tomará en consideración el amortiguamiento por película comprimida, el cual se trata a continuación.

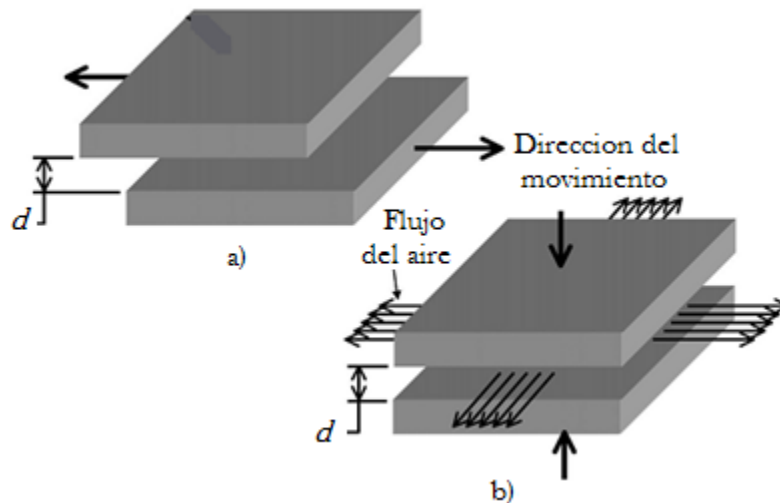


Fig. 3.7 a) Amortiguamiento por película deslizante y b) Amortiguamiento por película comprimida para dispositivos MEMS. [12]

### 3.1.3.4 Amortiguamiento por Película Comprimida

Cuando una placa está paralela a una pared y se mueve hacia la pared, la película de aire entre la placa y la pared se comprime, por lo que parte del flujo de aire es expulsado del gap. Por tanto, se desarrolla una presión  $\Delta p$  en el gap debido al flujo viscoso del aire, Fig 3.7b. De manera contraria, cuando la placa se aleja de la pared, la presión se reduce dentro del gap para mantener el flujo del aire dentro del gap.

En ambos casos, las fuerzas sobre la placa, causadas por la concentración de presión, siempre están en contra del movimiento de la placa. Así, el trabajo hecho por la placa es consumido por el flujo viscoso del aire y transformado en calor. La película de aire funciona como un amortiguador y este efecto es llamado *amortiguamiento por película comprimida*. Para amortiguamiento por película comprimida, la fuerza de amortiguamiento depende de la distancia del gap; para un gap pequeño, la fuerza de amortiguamiento es grande y viceversa. Por tanto, la fuerza de amortiguamiento puede controlarse mediante la distancia del gap de aire, o cualquier otro fluido, y así poder obtener un nivel de amortiguamiento esperado para microestructuras.

### Ecuaciones Básicas

Supóngase un par de placas paralelas sobre el plano  $x$ - $y$ , Fig 3.8, con dimensiones mucho más grandes que la distancia entre ellas, de manera que el flujo del gas entre las placas, causado por su movimiento relativo, es lateral (sobre los ejes  $x$  y  $y$ ). Además, considérese una columna,  $h dx dy$  (donde  $h = h_2 - h_1$ ), como se muestra en la Fig. 3.8, donde  $q_x$  es la razón del flujo en la dirección  $x$ , por unidad de longitud en la dirección  $y$ , y  $q_y$  es la razón del flujo en la dirección  $y$ , por unidad de longitud en la dirección  $x$ .

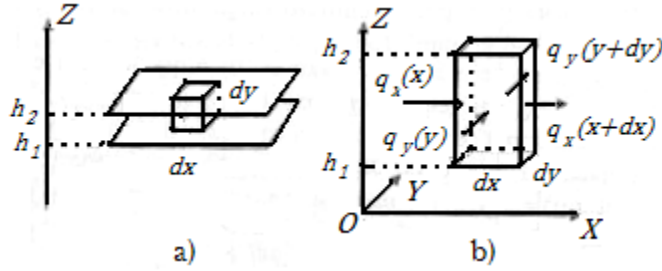


Fig. 3.8 Flujo de masa. a)Columna elemental y b)Definición de la razón del flujo. [3]

El balance para la masa del flujo es:

$$(\rho q_x)_x dy - (\rho q_x)_{x+dx} dy + (\rho q_y)_y dx - (\rho q_y)_{y+dy} dx = \left( \frac{\partial \rho h_2}{\partial t} - \frac{\partial \rho h_1}{\partial t} \right) dx dy \quad 3.30$$

Ocupando las relaciones siguientes:

$$(\rho q_x)_{x+dx} = (\rho q_x)_x + \frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} dx, \quad (\rho q_y)_{y+dy} = (\rho q_y)_y + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} dy$$

Tenemos:

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad 3.31$$

Para hallar \$q\_x\$ y \$q\_y\$, es necesario encontrar la distribución de la velocidad en la dirección \$z\$. Para hacer esto, se corta un elemento de la columna entre \$z\$ y \$z+dz\$, Fig 3.9. El balance de fuerzas en la dirección \$x\$, es:

$$P(x) dy dz + T_{zx}(z + dz) dx dy = P(x + dx) dy dz + T_{zx}(z) dx dy \quad 3.32$$

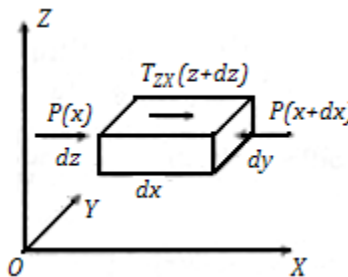


Fig. 3.9 Balance de fuerzas sobre una columna elemental. [3]

Por lo tanto:

$$\frac{\partial T_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad 3.33$$

Acorde a la Ec. 3.21, tenemos:

$$T_{zx} = \mu \frac{du}{dz} \quad 3.34$$

Donde  $u$  es la componente de la velocidad en la dirección  $x$ , por tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad 3.35$$

Para un gap pequeño,  $P(x,y)$  no es función de  $z$ ; así, integrando 2 veces la ecuación, tenemos:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} z^2 + C_1 \frac{1}{\mu} z + C_2 \quad 3.36$$

Si las placas no se mueven lateralmente, se fija el origen de coordenadas en la parte inferior y las condiciones de frontera para la Ec. 3.36 son  $u(0) = 0$  y  $u(h) = 0$ , tenemos:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} z(z-h) \quad 3.37$$

La razón del flujo en la dirección  $x$  por unidad de longitud en la dirección  $y$  es:

$$q_x = \int_0^h u dz = -\frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad 3.38$$

De forma similar:

$$q_y = -\frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad 3.39$$

El signo negativo indica que la dirección del flujo va con el decremento de la presión. Sustituyendo las Ecs. 3.38 y 3.39 en 3.31, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{d(h\rho)}{dt} \quad 3.40$$

La Ec. 3.40 es conocida como la Ecuación de Reynolds. De la Ec. 3.40, si  $h$  es uniforme en  $x$  y  $y$ , tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{12\mu}{h^3} \frac{d(h\rho)}{dt} \quad 3.41$$

Para una película isotérmica, la densidad del aire,  $\rho$ , es proporcional a la presión  $P$ , es decir;  $\rho = \frac{P}{P_0} \rho_0$ , así, la Ec. 3.41 puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} P^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} P^2 = \frac{24\mu}{h^3} \frac{d(h\rho)}{dt} \quad \text{o} \quad \nabla^2 P^2 = \frac{24\mu}{h^3} \frac{d(h\rho)}{dt} \quad 3.42$$

Además, la Ec. 3.42 puede desarrollarse como:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + P\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}P^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}P^2\right) = \frac{12\mu}{h^3}\left(P\frac{dh}{dt} + P\frac{dP}{dt}\right) \quad 3.43$$

Asumiendo que  $h = h_0 + \Delta h$  y  $P = P_0 + \Delta P$ , para pequeños movimientos, tenemos  $\Delta h \ll h_0$  y  $\Delta P \ll P_0$ . Bajo estas condiciones, la Ec. 3.43 se aproxima a:

$$P_0\left(\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2}\right) = \frac{12\mu}{h^3}P_0h_0\left(\frac{1}{h_0}\frac{d\Delta h}{dt} + \frac{1}{P_0}\frac{d\Delta P}{dt}\right) \quad 3.44$$

Si  $\frac{\Delta P}{P_0} \ll \frac{\Delta h}{h_0}$ , tenemos:

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h^3}\frac{d\Delta h}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h^3}\frac{dh}{dt} \quad 3.45$$

En las ecuaciones anteriores,  $P$  es equivalente a  $\Delta P$  y  $h$  es equivalente a  $\Delta h$ .

### Placa Rectangular

Considérese una placa rectangular, con longitudes en las direcciones  $x$  y  $y$  dadas por  $B=2a$  y  $L=2b$ , respectivamente, como se muestra en la Fig. 3.10. La ecuación diferencial para la presión de la película de aire es la Ec. 3.45, con las condiciones de frontera:

$$P(\pm a, y) = 0, P(x, \pm b) = 0 \quad 3.46$$

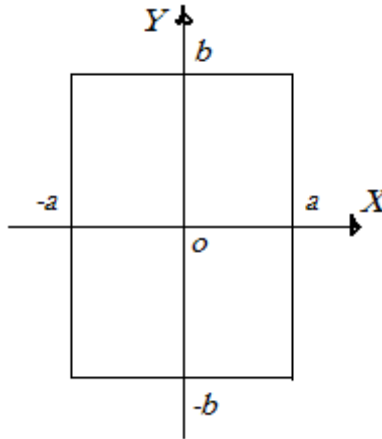


Fig. 3.10 Placa rectangular. [3]

La solución a la Ec. 3.45 puede dividirse en 2 partes:  $P = p_1 + p_2$ , donde  $p_1$  es la solución específica y  $p_2$  es una solución general a la ecuación de Laplace.

Para encontrar  $p_1$ , se asume que es de la forma:  $p_1 = A + Bx + Cx^2$ . Conociendo la condiciones de frontera,  $p_1(\pm a) = 0$ , se tiene:

$$p_1 = -\frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (a^2 - x^2) \quad 3.47$$

Para  $p_2$ , de la definición de  $P = p_1 + p_2$  y las condiciones de frontera  $p(\pm a, y) = 0$ , tenemos:

$$p_1(\pm a, y) + p_2(\pm a, y) = 0 \quad 3.48$$

Acorde a la Ec. 3.47, las condiciones de fronteras para  $p_2$  en  $x = \pm a$  puede ser:

$$p_2(\pm a, y) = 0 \quad 3.49$$

Acorde a la Ec. 3.46, las condiciones de frontera para  $P$  en  $y = \pm b$  debe ser  $P(x, \pm b) = 0$ , es decir:

$$p_1(x) + p_2(x, \pm b) = 0 \quad 3.50$$

Por lo tanto, las condiciones de frontera para  $p_2$  en  $y = \pm b$  son:

$$p_2(x, \pm b) = -p_1(x) = \frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (a^2 - x^2) \quad 3.51$$

Así las condiciones de frontera para  $p_2$  son las Ecs. 3.50 y 3.51. Para hallar la solución de  $p_2$ , separamos las variables suponiendo que:  $p_2 = X(x)Y(y)$ . Sustituyendo esta ecuación en la Ec. 3.52, obtenemos la Ec. 3.53:

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} = 0 \quad 3.52$$

$$\ddot{X}(x)Y(y) + \ddot{Y}(y)X(x) = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{Y}(y)}{Y(y)} = \lambda \quad 3.53$$

Por lo tanto, se tienen 2 ecuaciones independientes:  $\ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0$  y  $\ddot{Y}(y) - \lambda Y(y) = 0$ . Para  $X(x)$  se asume que:

$$X(x) = A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x \quad 3.54$$

Como  $X(\pm a) = 0$ , tenemos  $A_2 = 0$  y  $\alpha = \frac{2n\pi}{a}$  para  $n = 1, 3, 5, \text{etc.}$

$$X(x) = A_1 \cos \frac{2n\pi x}{a} \quad 3.55$$

Para  $Y(y)$  se asume que:

$$Y(y) = C_1 \cosh \gamma y + C_2 \sinh \gamma y \quad 3.56$$

Donde  $\gamma = \frac{2n\pi}{a}$  y  $n = 1, 3, 5, \text{etc.}$  Usando las condiciones de frontera para  $Y(y)$ , es decir,  $Y(b) = Y(-b)$ , se encuentra que  $C_2 = 0$ . Por lo tanto:

$$Y(y) = C_1 \cosh \frac{2n\pi y}{a} \quad 3.57$$

De las Ecs.  $p_2 = X(x)Y(y)$ , 3.55 y 3.57, tenemos que:

$$p_2(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

Para satisfacer las condiciones de frontera de la Ec. 3.51, tenemos:

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a} = \frac{6\mu}{h^3} \dot{h}(a^2 - x^2) \quad 3.58$$

Las constantes  $a_n$ 's están definidas por:

$$a_n = \frac{\int_{-a}^a \frac{6\mu}{h^3} \dot{h}(a^2 - x^2) \cos \frac{n\pi x}{2a} dx}{\cosh \frac{n\pi b}{2a} \int_{-a}^a \cos^2 \frac{n\pi x}{2a} dx} = \frac{192\mu \dot{h} a^2 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^3 h^3 \cosh \frac{n\pi b}{2a}}, n = 1,3,5, etc. \quad 3.59$$

Por lo tanto:

$$p_2(x, y) = \frac{192\mu a^2}{\pi^3 h^3} \dot{h} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3 \cosh \frac{n\pi b}{2a}} \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad 3.60$$

Así, la solución final para la presión es:

$$P = p_1 + p_2 = -\frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (a^2 - x^2) + \frac{192\mu a^2 \dot{h}}{\pi^3 h^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3 \cosh \frac{n\pi b}{2a}} \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad 3.61$$

La fuerza de amortiguamiento ejercida por la placa rectangular es:

$$\begin{aligned} F_{rec} &= \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b P(x, y) dy = \frac{16a^3 b \mu}{h^3} \dot{h} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \left(\frac{a}{b}\right) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right\} \\ &= -\frac{\mu L B^3}{h^3} \dot{h} \beta \left(\frac{B}{L}\right) \end{aligned} \quad 3.62$$

Donde el factor  $\beta \left(\frac{B}{L}\right)$  es una función de la razón de aspecto  $\left(\frac{B}{L}\right)$ , es decir:

$$\beta \left(\frac{B}{L}\right) = \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \left(\frac{B}{L}\right) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi L}{2B} \right\} \quad 3.63$$

En la Fig. 3.11 se muestra la relación entre  $\beta\left(\frac{B}{L}\right)$  y  $\left(\frac{B}{L}\right)$ . Donde, para una placa muy larga,  $\beta=1$ , y para una placa cuadrada,  $(a = b)$ ,  $\beta=0.42$ . Así, el coeficiente de amortiguamiento es:

$$c_{rec} = \frac{\mu L B^3}{h^3} \beta\left(\frac{B}{L}\right) \quad 3.65$$

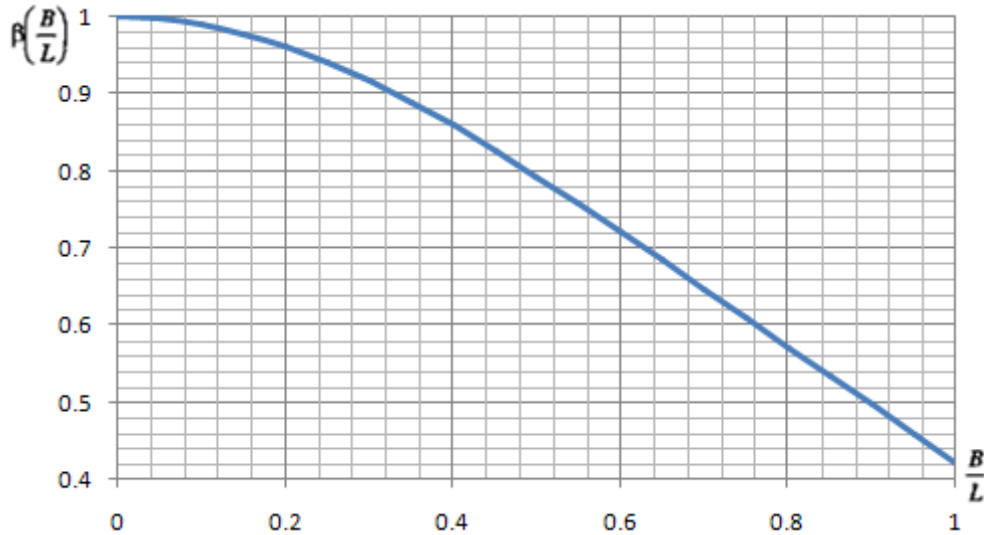


Fig. 3.11 Dependencia del factor  $\beta(B/L)$  sobre la razón de aspecto  $(B/L)$ . [3]

## 3.2 Esfuerzo y Deformación

Como el silicio es un excelente material de estado sólido, sus propiedades mecánicas están gobernadas por la teoría clásica de la elasticidad en un amplio rango de temperaturas. Cuando la geometría de una estructura mecánica de estado sólido es miniaturizada sus propiedades mecánicas pueden cambiar, sin embargo, no se han observado cambios significativos en las “micromáquinas de silicio”. Por tanto, se asume que las propiedades mecánicas de una microestructura de silicio son idealmente elásticas. El silicio, ya sea en su forma cristalina o policristalina no es mecánicamente homogéneo, es decir, sus características mecánicas no son las mismas en todas las direcciones; pero, si se asume que sus propiedades mecánicas son homogéneas, se simplifica el análisis, obteniéndose errores insignificantes en los resultados finales. En muchos casos, los resultados finales son afectados por la variación en los procesos de fabricación, más que por las aproximaciones.

### 3.2.1 Esfuerzo

Acorde a la teoría de la elasticidad; las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo de estado sólido producen fuerzas internas entre las porciones del cuerpo y provocan deformación. Si las fuerzas externas no exceden cierto límite, la deformación desaparece una vez que las fuerzas son removidas. Para describir las fuerzas internas, se introduce el tensor<sup>7</sup>



de esfuerzo. Matemáticamente, el esfuerzo es un tensor de segundo orden, el cual tiene 9 componentes, como se muestra por la matriz:

$$T = \begin{bmatrix} T_{XX} & T_{XY} & T_{XZ} \\ T_{YX} & T_{YY} & T_{YZ} \\ T_{ZX} & T_{ZY} & T_{ZZ} \end{bmatrix} \quad 3.66$$

Donde las 3 componentes de la diagonal principal son referidas como esfuerzos normales, y los 6 restantes, como esfuerzos cortantes. En la Fig. 3.12 se muestra un cubo elemental, parte diminuta, de un cuerpo. Las 6 caras del cubo son nombradas como  $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z$  y  $\bar{z}$  acorde a la dirección normal de las caras.

Una componente del tensor esfuerzo esta definida como la fuerza por unidad de área sobre una superficie especifica del cubo elemental.  $T_{XX}$  es la fuerza normal por unidad de área de la cara  $x$ ,  $T_{XY}$  es la fuerza en la dirección  $y$  aplicada sobre una unidad de área de la cara  $x$ ,  $T_{XZ}$  es la fuerza en la dirección  $z$  aplicada sobre una unidad de área de la cara  $x$ , y así sucesivamente.

Los signos de las componentes del tensor están definidos acorde a la regla de la mano derecha del sistema de coordenadas.

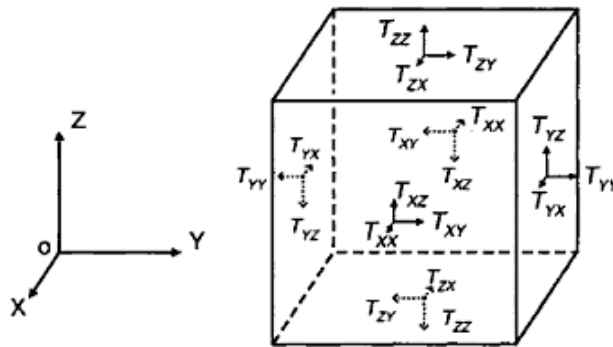


Fig. 3.12 Componentes del Tensor de Esfuerzo. [3]

De acuerdo a las condiciones de equilibrio, los  $T_{XX}$  en dos planos paralelos opuestos ( $x$  y  $\bar{x}$ ) deben ser iguales en cantidad y signo. Lo mismo ocurre para  $T_{YY}$  y  $T_{ZZ}$ . De las condiciones de equilibrio, también se cumple que:

$$T_{XY} = T_{YX}, T_{YZ} = T_{ZY}, T_{XZ} = T_{ZX} \quad 3.67$$

Esto significa que el tensor de esfuerzo es simétrico y solo tiene 6 componentes independientes. Por lo que se puede reducir la notación del sistema.

$$T_1 = T_{XX}, T_2 = T_{YY}, T_3 = T_{ZZ}, T_4 = T_{YZ}, T_5 = T_{XZ}, T_6 = T_{XY} \quad 3.68$$

### 3.2.2 Deformación

Acorde a la teoría de la elasticidad, la deformación dentro de un material será producida por los esfuerzos. Si las componentes del desplazamiento para un punto  $P(x,y,z)$  son  $u(x,y,z)$ ,  $v(x,y,z)$  y  $w(x,y,z)$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Entonces, el desplazamiento incremental entre el punto  $P(x,y,z)$  y  $P'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$  pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad 3.69
 \end{aligned}$$

Si el material de estado sólido no tiene movimiento rotacional, el último término del lado derecho de la Ec. 3.69 es cero y la ecuación se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad 3.70$$

Los componentes de la diagonal principal en la Ec. 3.70 son denominados componentes normales de la deformación.

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad 3.71$$

Las cantidades de la Ec. 3.71 son unidades de elongación a lo largo de los 3 ejes coordenados. Las 6 componentes fuera de la diagonal principal son referidas como las componentes cortantes de la deformación.

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad e_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad 3.72$$

Por lo tanto, la deformación puede describirse por un tensor de segundo orden, el tensor deformación,  $e$ , que relaciona el desplazamiento con la distancia así:

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = (e) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad 3.73$$

Como el tensor deformación ( $e$ ) es simétrico con solo 6 componentes independientes, puede ser simplificado a:  $e_1=e_{xx}$ ,  $e_2=e_{yy}$ ,  $e_3=e_{zz}$ ,  $e_4=e_{yz}=e_{zy}$ ,  $e_5=e_{zx}=e_{xz}$ ,  $e_6=e_{xy}=e_{yx}$ . Las 3 componentes de la deformación cortante están relacionadas con la distorsión angular del material. Para explicar esto, consideremos la distorsión de un ángulo en un elemento de sección  $PA = dx$  y  $PB = dy$  en el plano  $x$ - $y$ , Fig. 3.13. Si  $u$  y  $v$  son los desplazamientos en las direcciones  $x$  y  $y$  para un punto  $P(x,y)$  respectivamente, el desplazamiento del punto  $A$  en  $y$  y el desplazamiento del punto  $B$  en  $x$  son  $v = v(x+dx, y) = v(x, y) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx$  y  $u = u(x, y+dy) = u(x, y) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy$ , respectivamente. La nueva dirección  $P'A'$  ahora esta inclinada respecto a su dirección inicial,  $PA$ , por un pequeño ángulo  $\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$ . De igual forma, la nueva dirección  $P'B'$  esta inclinada un pequeño ángulo  $\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$ . Ahora, el ángulo inicial  $APB$  esta distorsionado por un ángulo  $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ . Por lo tanto, la deformación cortante  $e_6=e_{xy}$  es la mitad de la distorsión angular,  $e_6 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ . Los componentes  $e_4$  y  $e_5$  tienen el mismo significado.

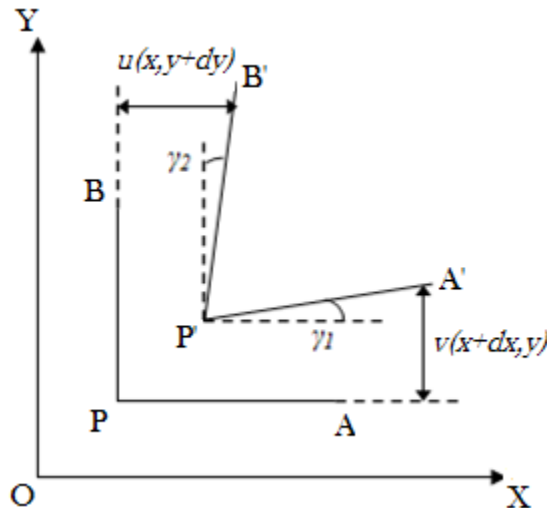


Fig. 3.13 Deformación angular debida a esfuerzo cortante. [3]

Sin embargo, en ingeniería, la deformación en un material está definida como:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad 3.74$$

Las componentes de la Ec. 3.74 son  $\varepsilon_1=e_1$ ,  $\varepsilon_2=e_2$ ,  $\varepsilon_3=e_3$ ,  $\varepsilon_4=2e_4$ ,  $\varepsilon_5=2e_5$  y  $\varepsilon_6=2e_6$ . Acorde a la definición en ingeniería, la componente cortante  $e_6 = \gamma_1 + \gamma_2$ , es igual a la distorsión angular entre el plano z-x y el plano z-y en el material, y así sucesivamente.

La deformación es una cantidad adimensional, sin embargo, por conveniencia se usa una unidad llamada microdeformación,  $\mu\varepsilon$ , definida como una deformación de  $10^{-6}$ . Así, una deformación de  $10^{-4}$  es nombrada como 100  $\mu\varepsilon$ .

### 3.2.3 Ley de Hooke

La relación lineal entre el esfuerzo y la deformación es conocida como *Ley de Hooke*. Para un material homogéneo y considerando un paralelepípedo rectangular, con sus lados paralelos a los ejes coordenados; si un par de lados opuestos del paralelepípedo, paralelos al eje x, son sometidos a la acción de un esfuerzo normal  $T_{XX}$ , la elongación relativa del elemento esta dada por:

$$e_{XX} = \frac{T_{XX}}{E} \quad 3.75$$

Donde  $E$  es una constante relacionada con el material llamada módulo de Young.  $E$  es usualmente muy grande en comparación con los esfuerzos permitidos por lo que la unidad de elongación  $\varepsilon_{ii}$  es menor a 1000  $\mu\varepsilon$ . Por lo tanto, la superposición puede utilizarse para deformaciones en muchas aplicaciones sin causar errores significativos.

La extensión del elemento en la dirección x siempre va acompañada por una contracción en sus direcciones laterales.

$$e_{YY} = -\nu e_{XX}, \quad e_{ZZ} = -\nu e_{XX} \quad 3.76$$

Donde  $\nu$  es otra constante relacionada con el material llamada *razón de Poisson*. Para cualquier material esta razón varía entre 0.25 y 0.3.

Si el elemento es sometido simultáneamente a la acción de esfuerzos normales  $T_{XX}$ ,  $T_{YY}$  y  $T_{ZZ}$ , las componentes resultantes de deformación pueden obtenerse de las Ecs. 3.75 y 3.76 por superposición:

$$\begin{aligned} e_{XX} &= [T_{XX} - \nu(T_{YY} + T_{ZZ})]/E \\ e_{YY} &= [T_{YY} - \nu(T_{XX} + T_{ZZ})]/E \\ e_{ZZ} &= [T_{ZZ} - \nu(T_{XX} + T_{YY})]/E \end{aligned} \quad 3.77$$

De las Ecs. 3.77, el módulo de Young,  $E$ , y la razón de Poisson,  $\nu$ , definen las relaciones entre deformación normal y esfuerzo normal.

Para materiales homogéneos, las relaciones para deformación cortante y esfuerzo cortante están definidas como:

$$e_{XY} = \frac{T_{XY}}{2G}, e_{YZ} = \frac{T_{YZ}}{2G}, e_{ZX} = \frac{T_{ZX}}{2G} \quad 3.78$$

Donde  $G$  es el módulo cortante, definido como:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad 3.79$$

Las Ecs. 3.78 indican que una componente de la deformación cortante solo depende de la correspondiente componente del esfuerzo cortante. Si se utiliza la definición de ingeniería para deformación,  $\epsilon$ , la Ec. 3.78 puede expresarse como:

$$\epsilon_{XY} = \frac{T_{XY}}{G}, \epsilon_{YZ} = \frac{T_{YZ}}{G}, \epsilon_{ZX} = \frac{T_{ZX}}{G} \quad 3.80$$

### 3.2.4 Esfuerzo y deformación en una Viga

Considere una viga recta y delgada con una sección transversal rectangular de ancho  $b$  y espesor  $h$  y un sistema de coordenadas con origen en el centro de la sección transversal, el eje  $x$  a lo largo de la longitud de la viga, y el eje  $z$  apuntando hacia abajo y sobre el espesor de la viga, Fig. 3.14. Si la viga se flexiona hacia arriba, sobre el plano  $x$ - $z$ , debido a un momento flexionante,  $M$ , Fig. 3.15, la parte superior (lado cóncavo) de la viga se comprime y la parte inferior (lado convexo) se alarga. Sin embargo, existe un plano neutral, el cual no se comprime ni se alarga por el doblamiento. Se comprobará que el plano neutral está justo a la mitad de la viga rectangular para flexión pura (por flexión pura se entiende que no hay fuerza pura axial sobre la sección transversal de la viga).

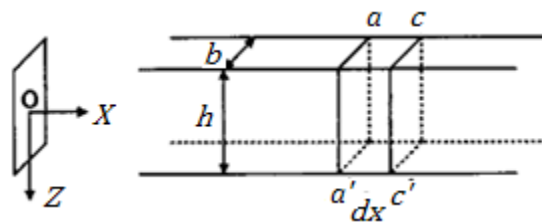


Fig. 3.14 Elemento  $dx$  de la viga. [3]

Considérese un elemento,  $dx$ , de la viga entre 2 planos verticales,  $aa'$  y  $cc'$ . El desplazamiento en la dirección  $z$  de la viga,  $w$ , es una función de la posición,  $x$ , es decir,  $w = w(x)$ . Dicha función es referida como la función de desplazamiento de la viga. Si el radio de curvatura del elemento  $dx$  es  $r$ , Fig. 3.15, para una sección horizontal del plano central ( $z = 0$ ), tenemos  $dx = r d\theta$ . Sin embargo, para una capa de la viga más allá del plano central ( $z \neq 0$ ), el material es comprimido o alargado en la dirección  $x$  debido al doblamiento. Esta elongación del material en la dirección  $x$  de la capa en  $z$  es:

$$\Delta(dx) = (r + z)d\theta - rd\theta = zd\theta \quad 3.81$$

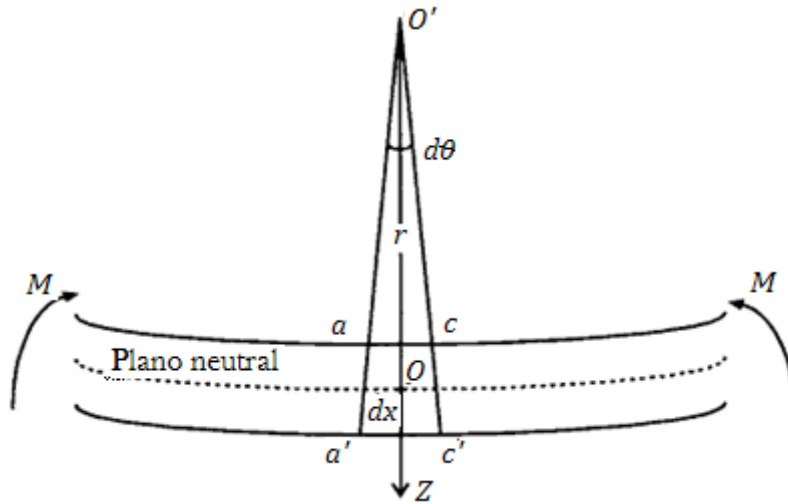


Fig. 3.15 Doblamiento bajo un momento flexionante. [3]

La deformación de la capa es la elongación relativa del material, es decir:

$$\epsilon(z) = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{zd\theta}{rd\theta} = \frac{z}{r} \quad 3.82$$

Acorde a la ley de Hooke, el esfuerzo de la capa en z es:

$$T_{xx}(z) = \frac{Ez}{r} \quad 3.83$$

El signo del esfuerzo o deformación es positivo para alargamiento y negativo para compresión. Como se asume que la viga es delgada, entonces se tiene un problema unidimensional, por tanto, no se consideran los demás esfuerzos normales y cortantes.

### 3.2.4.1 Desplazamiento de una Viga

Para una curva, el recíproco del radio de curvatura es el valor absoluto de la segunda derivada, es decir:

$$\frac{1}{r} = |w''(x)| \quad 3.84$$

De las Ec. 3.83 y 3.84 tenemos:

$$|T(z)| = Ez|w''(x)| \quad 3.85$$

Para una flexión en  $z > 0$  (por debajo del plano neutral, como la mostrada en la Fig. 3.15), la capa es alargada, es decir,  $T > 0$ , y viceversa. Por lo que, se puede establecer la siguiente relación:

$$T(z) = -Ezw''(x) \quad 3.86$$

### 3.2.4.2 Momento Flexionante y Momento de Inercia de una Viga

La definición de flexión pura dice que la fuerza axial total sobre la sección transversal es cero. De la Ec. 3.86, la fuerza axial total sobre la sección transversal es:

$$F = \int T(z)bdz = -Ebw''(x) \int_{-h/2}^{h/2} z dz \quad 3.87$$

La condición de  $F = 0$ , nos permite determinar el plano neutral de cualquier sección transversal. Como ya se mencionó, para una sección transversal rectangular el plano neutral está en  $z = 0$ .

Dentro de una viga flexionada hay fuerzas internas a través de sus secciones transversales. El momento que provoca la flexión es la integral de los momentos de dichas fuerzas a través de la sección transversal de la viga:

$$M(x) = \int z dF = \int zT(z)dA = - \int Ez^2w''(x)dA \quad 3.88$$

Notar que para la integración, el origen del eje  $z$  debe tomarse sobre el plano neutral. Si el origen no está en el plano neutral y la posición del plano está en  $z = a$ , entonces debe reemplazarse  $z$  por  $z - a$  en la Ec. 3.88. Además, si el ancho de la sección transversal no es uniforme,  $b = b(z)$ , tenemos  $dA = b(z)dz$ , y:

$$M(x) = -Ew''(x) \int z^2b(z)dz \quad 3.89$$

La integral de la Ec. 3.89 es conocida como el momento de inercia de la viga,  $I$ , es decir,  $I = \int_{-h/2}^{h/2} z^2b(z)dz$ . Para una viga con sección transversal rectangular de ancho  $b$  y espesor  $h$ , su momento de inercia es:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad 3.90$$

La Ec. 3.89 puede escribirse como:

$$M(x) = -EIw''(x) \quad 3.91$$

De las Ecs. 3.86 y 3.91, tenemos:

$$T(z) = \frac{zM(x)}{I} \quad 3.92$$

Las 2 ecuaciones anteriores son útiles para encontrar la función del desplazamiento,  $w(x)$ , y el esfuerzo en la viga si se conoce el momento flexionante.

Acorde a la definición, el momento flexionante es positivo en signo si la viga se flexiona hacia arriba sobre ambos extremos del elemento, porque  $dF$  es positiva para  $z > 0$  y negativa para  $z < 0$ , como se observa en la Fig. 3.16. Para las fuerzas externas que crean los momentos flexionantes, la regla de los signos es: si observamos del lado izquierdo del elemento  $dx$ , el momento causado por una fuerza en sentido horario, es positivo. Sin embargo, si observamos del lado derecho el elemento  $dx$ , el momento causado por una fuerza en sentido anti horario, es positivo. Por el contrario, el momento flexionante es negativo si la viga se dobla hacia abajo en ambos lados.

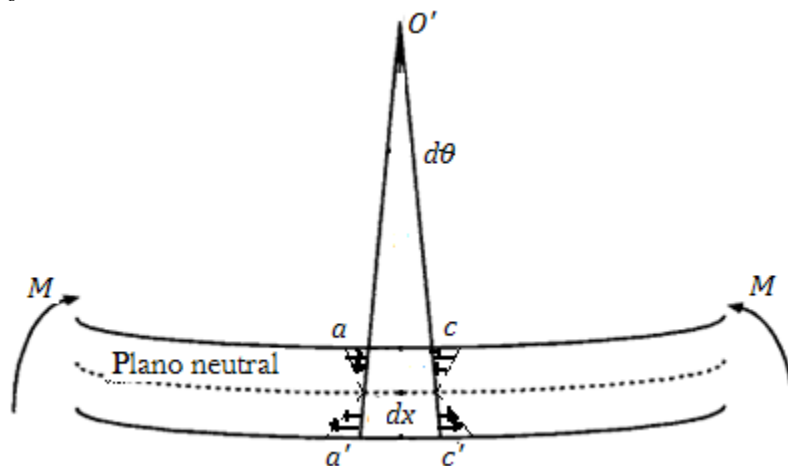


Fig. 3.16 Momento flexionante causado por las fuerzas. [3]

Considérese una viga cantiléver rectangular con una carga concentrada, Fig 3.17, con ancho  $b$ , espesor  $h$  y longitud  $L$ . Si  $F$  es la fuerza causada por una masa  $M$ , anclada en el extremo libre de la viga y la aceleración de la gravedad, es decir,  $F = Mg$ . Además, supóngase que la masa de la viga,  $M_b$ , es despreciable, con respecto a  $M$ . Para balancear la fuerza  $F$ , debe existir una fuerza  $F_0$ , actuando sobre la viga en el extremo que se encuentra fijo, por tanto en la dirección  $z$  tenemos  $F = F_0$ . Además, debe existir un momento,  $m_0$ , en el extremo fijo de la viga para balancear el momento,  $FL$  en sentido horario, causado por la fuerza  $F$ .

De la Fig. 3.17, el momento de lado izquierdo de la posición  $x$  es  $(-m_0 + F_0x)$  y el momento del lado derecho es  $-F(L - x)$ . Aplicando la condición de equilibrio se tiene que:

$$(-m_0 + F_0x) = -F(L - x) \quad 3.93$$

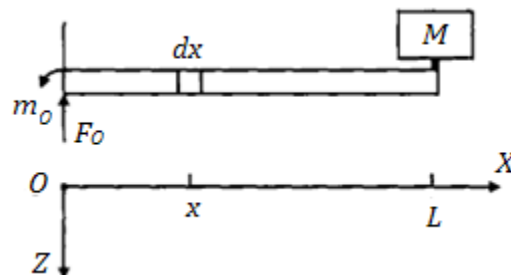


Fig. 3.17 Viga cantiléver con carga concentrada en su extremo libre. [3]

El momento flexionante de la izquierda es igual al momento flexionante de la derecha, es decir,  $M(x) = -F(L - x)$ , por tanto, la ecuación diferencial para  $w(x)$  es:



$$-EIw''(x) = -F(L - x) \quad 3.94$$

Y las condiciones de frontera para este problema son:

$$w(0) = 0, w'(0) = 0, w''(0) = 0 \quad 3.95$$

La solución a las Ecs 3.94 y 3.95 es:

$$w'(x) = \frac{F(2L - x)x}{2EI} = \frac{6F(2L - x)x}{Ebh^3} \quad 3.96$$

$$w(x) = \frac{F(3L - x)x^2}{6EI} = \frac{2F(3L - x)x^2}{Ebh^3} \quad 3.97$$

El máximo desplazamiento ( $x = L$ ) es:

$$w_{MAX} = \frac{FL^3}{3EI} = w(L) = \frac{4L^3}{Ebh^3} F \quad 3.98$$

Por lo tanto, la constante de rigidez de una viga de sección transversal rectangular es:

$$k = \frac{Ebh^3}{4L^3} = \frac{3EI}{L^3}, \text{ donde } I \text{ es el momento de inercia del área transversal.}$$

De la Ec. 3.86, el máximo esfuerzo sobre la parte superior de la viga ( $z = -h/2$ ) es:

$$T(x) = -E \left( -\frac{h}{2} \right) w''(x) = \frac{Fh(L - x)}{2I} = \frac{6F(L - x)}{bh^2} \quad 3.99$$

De la Ec. 3.99, el máximo esfuerzo en  $x = 0$  es:

$$T_{MAX} = \frac{FhL}{2I} = \frac{6FL}{bh^2} \quad 3.100$$

En el análisis anterior se analizaron las relaciones entre fuerza y desplazamiento para determinar la constante de rigidez de una viga de sección transversal. En la siguiente sección se determinará la constante de torsión de una viga, la cual esta bajo la acción de un torque.

### 3.2.5 Torsión de Vigas

Cuando un torque,  $T$ , es aplicado sobre el extremo libre de una viga cantiléver, la viga experimenta un desplazamiento angular (torsión) hasta que un torque de restauración balancea al torque aplicado. Dentro del rango elástico, como se revisó en la sección 3.1.2, la relación entre el ángulo de torsión,  $\Phi$ , y el torque es:

$$T = k_{\Phi} \Phi \quad 3.101$$

Donde  $k_\phi$  es denominada como la constante de torsión de la viga. Este tipo de vigas son llamadas barras de torsión.

Primero se tratará el caso de una barra de torsión con sección transversal circular. Para determinar la constante de torsión hay que considerar un cilindro sólido de radio  $a$  y longitud  $L$ , y seguir el siguiente análisis:

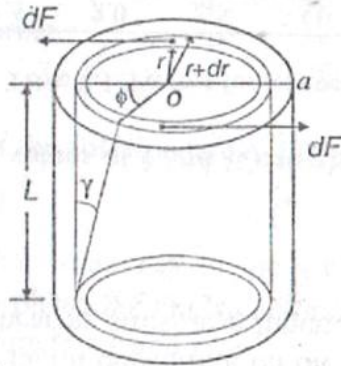


Fig. 3.18 Barra de torsión circular. [3]

Considerar un elemento cilíndrico entre  $r$  y  $r+dr$ . El área efectiva  $dA$  sobre la cual una fuerza tangencial,  $dF$ , se aplica es la mitad del área de la sección transversal, es decir,  $dA = \pi r dr$ . De acuerdo a la definición del módulo cortante (shear modulus)  $G$ , tenemos:

$$G = \frac{dF}{\gamma dA} \quad 3.102$$

Donde  $\gamma$  es el ángulo cortante como se muestra en la Fig. 3.18. Como  $\gamma = \Phi r/L$ , tenemos:

$$dF = \frac{\pi r^2 G \Phi}{L} dr \quad 3.103$$

El torque sobre la parte superior del cilindro es:

$$T = 2 \int_0^a r dF = \frac{\pi G a^4}{2L} \Phi = k_\phi \Phi \quad 3.104$$

Por tanto, la constante de torsión de un cilindro sólido es:

$$k_\phi = \frac{\pi G a^4}{2L} \quad 3.105$$

Ahora bien, el análisis de la constante de torsión para una barra de torsión con sección transversal rectangular es un poco más complicado. Según Bao [3] la relación teórica es:

$$T = \frac{1}{3L} G \Phi a^3 b \left( 1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) \quad 3.106$$

Donde  $\Phi$  es ángulo de torsión de la barra,  $a$  y  $b$  las longitudes del lado más corto y más largo de la sección transversal rectangular ( $b > a$ ). En general, esta relación puede ser expresada como:

$$T = \frac{k_1 G \Phi a^3 b}{L} \quad 3.107$$

$$k_\phi = \frac{T}{\phi} = \frac{k_1 G a^3 b}{L} \quad 3.108$$

Donde  $k_1$  es un factor numérico que depende de la relación  $a/b$ . Algunos valores son dados en la Tabla 3.1.

$b/a$	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	10	$\infty$
$k_1$	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312	0.333

Tabla 3.1 Factores para la relación de torsión. [3]

### 3.2.6 Frecuencia de Vibración

La vibración de una estructura mecánica puede simplificarse considerando un modelo masa-resorte, Fig. 3.19. El origen del eje  $x$  coincide con la posición de balance de la masa. Un desplazamiento  $x$  de la masa, desde su posición de balance, causa una fuerza de restauración sobre la masa debida al resorte,  $F = -kx$ ,  $k$  es la constante elástica del resorte, El signo negativo indica que la fuerza esta en dirección opuesta a la del eje  $x$ . Si no hay otra fuerza que actúe sobre la masa,  $M$ , la ecuación diferencial del sistema es:

$$M\ddot{x} = -kx \quad 3.109$$

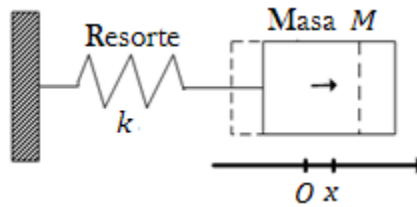


Fig. 3.19 Modelo masa-resorte. [3]

Si  $\omega^2 = k/M$ , tenemos:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad 3.110$$

La solución general para la Ec. 3.110 es una vibración de la masa;  $x = A \text{sen}(\omega t + \alpha)$ . Donde  $\omega$  es la frecuencia radial,  $A$  es la amplitud y  $\alpha$  el ángulo de desfase de la vibración. Como puede observarse, sólo los parámetros  $k$  y  $M$  determinan la frecuencia radial  $\omega$ .

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad 3.111$$

Este mismo método puede utilizarse para barras de torsión. Si consideramos una barra de torsión con una masa en su extremo libre. Esta estructura puede ser considerada como un sistema masa-resorte. Cuando la barra es torsionada un ángulo  $\Phi$  en su extremo libre, el torque de restauración que actúa sobre la masa es:

$$T = -k_{\phi}\phi \quad 3.112$$

Si para la rotación de una masa,  $I_{\phi}$  es el momento de inercia, por la Segunda Ley de Newton, tenemos la ecuación diferencial para el movimiento de torsión:

$$I_{\phi}\ddot{\phi} + k_{\phi}\phi = 0 \quad 3.113$$

La solución a la Ec. 3.113 es una oscilación angular;  $\phi = A \text{sen}(\omega t + \alpha)$ . Por lo que, la frecuencia radial de oscilación es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\phi}}{I_{\phi}}} \quad 3.114$$

Cabe mencionar que existen diversos métodos para calcular la frecuencia de vibración de un sistema mecánico, como el método de Rayleigh-Ritz, con los cuales se obtienen resultados similares, sin embargo dichos métodos requieren de un análisis más complejo.

### 3.3 Instrumentos Medidores de Vibraciones

El elemento básico de muchos instrumentos medidores de vibraciones es la unidad sísmica mostrada en la Fig. 3.20, la cual consiste de una masa, un resorte y un amortiguador. Dependiendo del rango de frecuencias que excitan al instrumento; el desplazamiento, la velocidad o la aceleración pueden ser registrados por el movimiento relativo de la masa suspendida, con respecto a la caja.

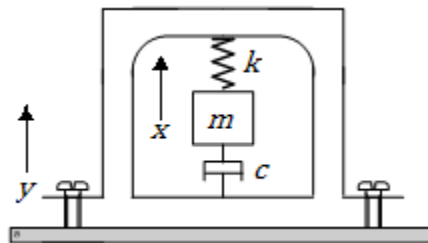


Fig. 3.20 Sistema masa-resorte-amortiguador. [13]

Para determinar el comportamiento de un instrumento medidor de vibraciones consideremos la ecuación de movimiento de  $m$ , que es:

$$m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y) \quad 3.115$$

Donde  $x$  y  $y$  son los desplazamientos de la masa sísmica y del cuerpo vibrante, respectivamente, medidos con respecto a una referencia inercial. Si nombramos el desplazamiento relativo de la masa  $m$  con respecto al del cuerpo vibrante como:

$$z = x - y \quad 3.116$$

Y se supone que el cuerpo vibrante tiene un movimiento senoidal, es decir,  $y = Y \text{ sen } \omega t$ , podemos obtener la ecuación:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\omega^2 Y \text{ sen } \omega t \quad 3.117$$

Tratándose de una ecuación diferencial de segundo grado, según Thompson [13] la solución estacionaria es de la forma:

$$z = Z \text{ sen } (\omega t - \varphi) \quad 3.118$$

Por lo que la amplitud y la fase de la ecuación anterior se calculan sustituyendo la Ec. 3.118 en la Ec. 3.117, así mismo mencionar que en el movimiento armónico las fases de velocidad y aceleración están adelante del desplazamiento en  $90^\circ$  y  $180^\circ$  respectivamente, donde  $Z$  queda definida como:

$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{Y \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad 3.119$$

$$\tan \theta = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad 3.120$$

Donde  $\omega_n$  y  $\xi$  son la frecuencia natural de oscilación y el factor de amortiguamiento del sistema, respectivamente, los cuales están dados por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 3.121$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad 3.122$$

De las Ecs. 3.119 y 3.120 los principales parámetros involucrados son la razón de frecuencias  $\omega/\omega_n$  y el factor de amortiguamiento  $\xi$ . Las Figs. 3.21 y 3.22 muestran un grafico de estas ecuaciones. El tipo de instrumento, sismómetro o acelerómetro, que se obtenga está determinado por el rango útil de frecuencias con respecto a la frecuencia natural  $\omega_n$  del instrumento.

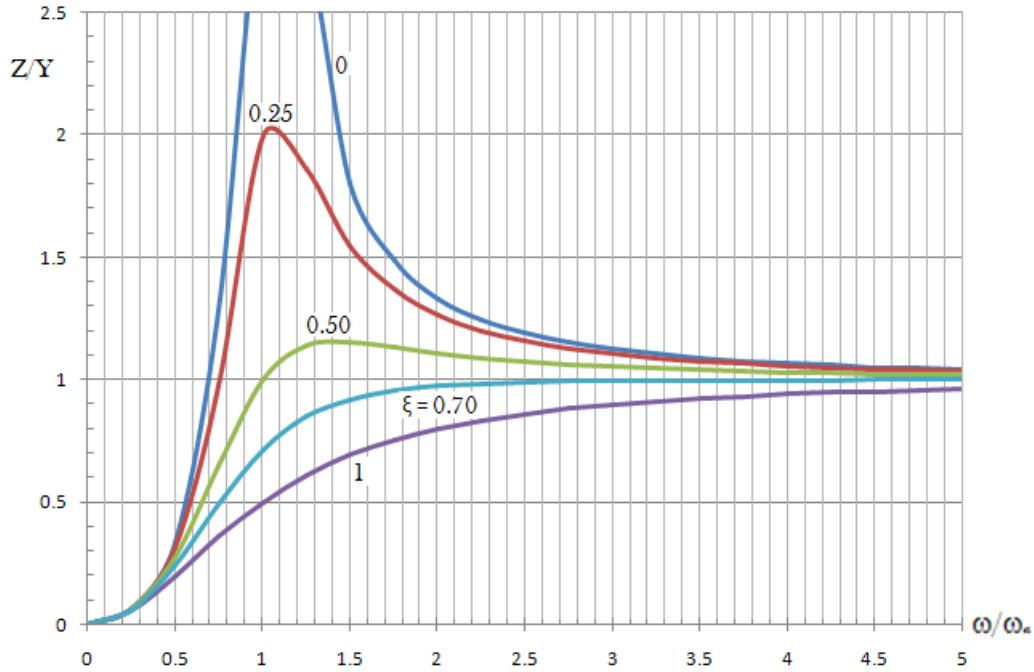


Fig. 3.21 Respuesta de un instrumento medidor de vibraciones,  $|Z/Y|$  vs  $\omega/\omega_n$ . [13]

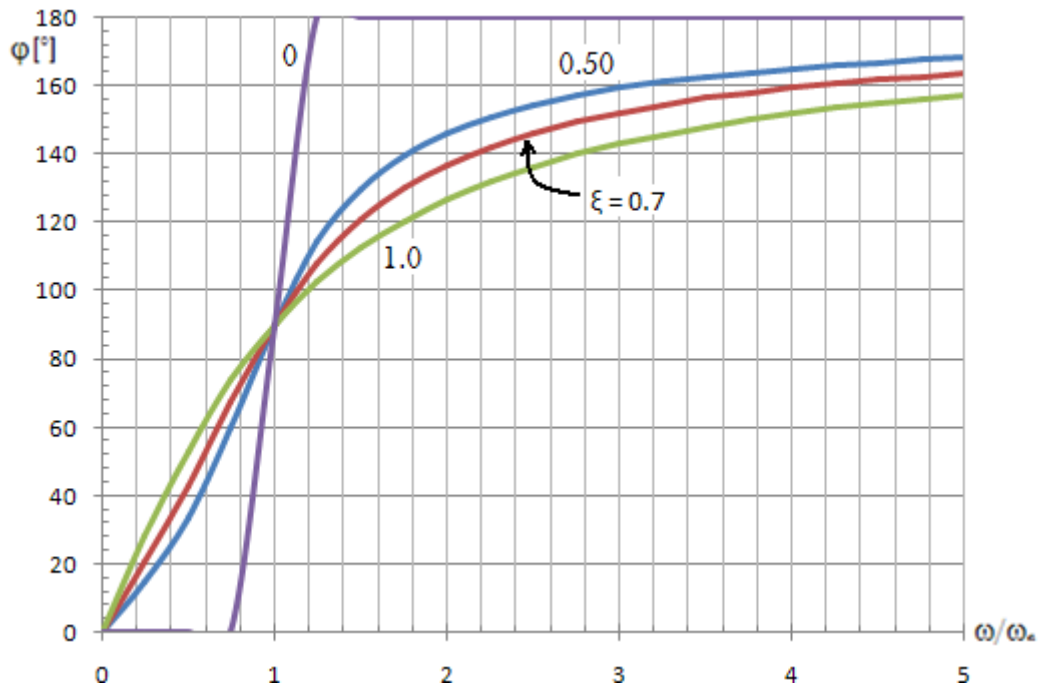


Fig. 3.22 Respuesta de un instrumento medidor de vibraciones, Angulo  $\phi$  vs  $\omega/\omega_n$ . [13]

### 3.3.1 Sismómetro

Cuando la relación  $\omega/\omega_n$  es un número muy grande, debido a que la frecuencia natural,  $\omega_n$ , del instrumento es baja con respecto a la vibración que se va a medir, el desplazamiento relativo  $Z$  se aproxima a  $Y$ , no importando el valor del amortiguamiento. Por lo que la masa

$m$  permanece estacionaria mientras que la carcasa se mueve junto con la base. A este tipo de instrumentos se les denomina sismómetros.

Una desventaja del sismómetro es su gran tamaño. Como  $Z = Y$ , el movimiento relativo de la masa sísmica debe ser del mismo orden de magnitud que el de la vibración que se va a medir, teniendo una frecuencia natural de 1 a 5 Hz y un rango útil de frecuencia de 10 a 2000 Hz.

### 3.3.2 Acelerómetro

Cuando la frecuencia natural es alta comparada con la vibración a ser medida, el instrumento registra aceleración. Examinando el denominador de la Ec. 3.119, se observa que el factor

$$\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Se aproxima a uno cuando la relación de  $\omega/\omega_n \rightarrow 0$ , de modo que

$$Z = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} Y = \frac{\text{Aceleracion}}{\omega_n^2} \quad 3.123$$

De manera que,  $Z$  es proporcional a la aceleración del movimiento que se va a medir, con un factor  $1/\omega_n^2$ . El rango útil del acelerómetro puede verse al graficar la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

La gráfica de la Fig. 3.23 muestra el rango de frecuencias útiles para diferentes factores de amortiguamiento del acelerómetro. Para el caso en que el amortiguamiento es nulo,  $\xi=0$ , su rango de operación es muy limitado. Sin embargo, con un factor de amortiguamiento de  $\xi = 0.7$ , el rango de frecuencia útil es  $0 \leq \omega/\omega_n \leq 0.2$ , con un error máximo menor al 0.01%. Así, un instrumento con una frecuencia natural de 100 Hz, tiene un rango de frecuencia útil entre 0 y 20 Hz, con un error despreciable. De manera que los diseñadores buscan obtener un factor  $\xi$  de 0.7 que no solo extiende el rango de frecuencia útil, sino que también evita distorsión de fase para ondas complejas, como se muestra a continuación.

Algo muy importante a considerar es que para reproducir una onda compleja sin cambiar su forma, la fase relativa de todas las componentes armónicas debe permanecer invariable con respecto a la fundamental. Esto requiere que el ángulo de desfaseamiento sea cero o que todas las componentes armónicas sean desplazadas igualmente.

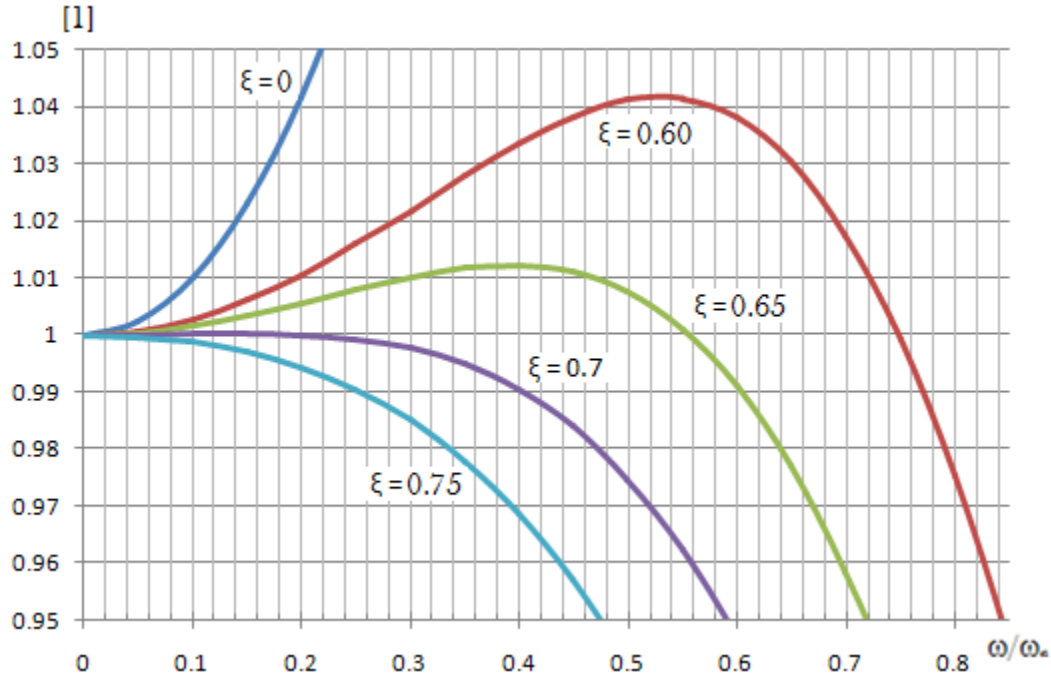


Fig. 3.23 Error de Aceleración vs Frecuencia ( $\omega/\omega_n$ ) con  $\xi$  como parámetro. [13]

El primer caso, de desplazamiento nulo de fase, corresponde a  $\xi = 0$  para  $\omega/\omega_n < 1$ . Para el segundo caso, de igual desfaseamiento en todas las componentes armónicas, casi se satisface para  $\xi = 0.7$  si  $\omega/\omega_n < 1$ , por lo que, en este caso el ángulo de fase puede expresarse como:

$$\varphi \cong \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_n} \quad 3.124$$

Así, para  $\xi = 0$  o  $\xi = 0.7$ , la distorsión de fase es prácticamente eliminada, sin embargo, en el primer caso el ancho banda decrece considerablemente, mientras que para  $\xi = 0.7$ , la distorsión de fase es aproximadamente cero y el ancho de banda se incrementa, un resultado que es de gran utilidad en las consideraciones de diseño.

### 3.4 Escalamiento de Dispositivos Micromecánicos

Una persona puede tener la sensación del tamaño de las cosas con solo observar a su alrededor. Las bacterias y los virus son de muchos órdenes de magnitud más pequeñas que las hormigas; el sistema de carreteras de algún país es varios órdenes de magnitud más grande que la ballena más grande; y la órbita de la Tierra es de muchos órdenes de magnitud más grande que el sistema carretero de cualquier país. Incrementando otros órdenes de magnitud llegamos a las distancias interestelares.

Cuando la escala, o tamaño, de un sistema cambia por muchos órdenes de magnitud, el sistema tiende a funcionar de forma muy diferente. Por ejemplo, considerar un recipiente de agua de aproximadamente 5 cm de lado. Al verter el agua en el vaso sobre una tabla, se observa como el agua fluye y se va a los bordes de la tabla. Si el tamaño del vaso de agua es



decrementado por un factor de 100, ahora el vaso es de 0.05 cm (0.5 mm) de cada lado. Al verter el agua contenida en el vaso sobre la tabla, se observa como la tensión superficial retiene el agua en una gota que se mantiene sobre la tabla. Si se gira la tabla sobre uno de sus lados se observa que es difícil hacer que la gota fluya a uno de los bordes de la tabla. Ahora bien, si se vuelve a decrementar el tamaño del vaso por otro factor de 100, ahora el vaso es de 0.0005 cm, o 5  $\mu\text{m}$ , de lado. Si se intenta verter una gota de este tamaño sobre la tabla, es muy probable que inclusive no alcance la tabla, alguna corriente de aire se presente y se lleve la gota lejos.

En cada caso, la sustancia es la misma, agua, y la tabla es la misma, pero el cambiar el tamaño de escala del agua provoca que su comportamiento sea muy diferente. Inclusive el hecho de verter el cristal sobre la tabla es diferente. En el primer caso el agua fluye, mientras que el agua en 0.05 cm y 0.0005 cm esta limitada por la tensión superficial.

Es así como, la teoría de escalamiento es una valiosa guía que permite saber que puede trabajar y que no podrá trabajar.

### 3.4.1 Leyes de Escalamiento

Cuando el tamaño de un sistema cambia, sus parámetros físicos también cambian, a veces de forma dramática. [14] Para entender estos cambios, considérese el factor de escala  $S$ . Este factor es similar a la notación de 1:10, usualmente usada en los dibujos técnicos, la cual indica que el objeto es 10 veces el tamaño del dibujo. En el microdominio, la escala debe ser 10:1, la cual significa que el objeto es 10 veces más pequeño que el dibujo. Cuando la escala cambia, todas las dimensiones del objeto cambian exactamente por la misma cantidad  $S$ , tal que 1: $S$ .

Este factor de escala  $S$  puede ser usado para describir como los fenómenos físicos cambian. Todas las longitudes de la escala de un dibujo se escalan por el factor  $S$ , pero otros parámetros como el volumen se escalan diferente. El volumen  $V$  es la longitud  $L$  por el ancho  $W$  y por la altura  $H$ , o también:

$$V = L * W * H$$

Cuando la escala cambia por 1/100 (decrece por un factor de 100), la longitud, el ancho y la altura cambian 1/100, y el volumen decrece por  $(1/100)^3$  o 1/1,000,000. El volumen decrece por un factor de un millón cuando la escala decrece por un factor de 100.

$$V = S^1 * S^1 * S^1 = S^3$$

Por tanto, el volumen es un ejemplo de un parámetro que se escala como  $S^3$ . De igual forma, la masa es un parámetro que se escala como el volumen, sabemos que la masa  $M$  de un objeto se define como la densidad  $\rho$  del material por su volumen  $V$ , o también:

$$M = \rho * L * W * H = \rho * V$$

Donde se asume que la densidad es constante ( $S^0$ ), por lo que la masa de un objeto se escala como:

$$M = \rho * V = S^0 * S^3 = S^3$$

### 3.4.2 Notación Vertical de Trimmer

Esta notación matemática captura las leyes del escalamiento en una forma conveniente. Este arreglo muestra diferentes leyes de escalamiento en una sola notación y puede utilizarse fácilmente para entender que ocurre a los diferentes términos y parámetros de una ecuación cuando el tamaño de la escala cambia.

En esta notación, por ejemplo, si se consideran 4 diferentes leyes de fuerza,  $F = S^1$ ,  $F = S^2$ ,  $F = S^3$ ,  $F = S^4$ , y se agrupan dentro de una matriz vertical:

$$F = \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \\ S^4 \end{bmatrix}$$

El elemento del primer renglón de este arreglo se refiere al caso en el que la fuerza se escala como  $S^1$ , el siguiente elemento cuando se escala la fuerza como  $S^2$ , y así sucesivamente.

Veamos como la aceleración y el tiempo de transición cambian para diferentes fuerzas. La aceleración  $a$  es igual a la fuerza  $F$  dividida por la masa  $m$ :

$$a = \frac{F}{m} = F * m^{-1}$$

Sabemos que la masa se escala como  $S^3$ , y  $m^{-1}$  se escala como  $S^{-3}$ , quedando:

$$a = \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \\ S^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^3 \\ S^3 \\ S^3 \\ S^3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \\ S^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{-3} \\ S^{-3} \\ S^{-3} \\ S^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{-2} \\ S^{-1} \\ S^0 \\ S^1 \end{bmatrix}$$

Este es un resultado interesante. Cuando la fuerza se escala como  $S^1$ , la aceleración se escala como  $S^{-2}$ . Si el tamaño de un sistema se decrementa por un factor de 100, la aceleración se incrementa por  $(1/100)^{-2} = 10,000$ . Por tanto, si el sistema es más pequeño, la aceleración se incrementa. Una de las fuerzas predominantes en el microdominio son las escaladas como  $S^2$ . Para estas fuerzas, la aceleración se escala como  $S^{-1}$ , si decrece el tamaño por un factor de 100, la aceleración se incrementa por un factor de 100, todavía existe un buen incremento de la aceleración. En general, los sistemas pequeños tienden a acelerarse rápidamente. Cuando la fuerza se escala como  $S^3$ , la aceleración permanece constante,  $(1/100)^0 = 1$ , y la aceleración decrece para fuerzas que se escalan como  $S^4$ . Es así como, en una sola notación se muestra el escalamiento para 4 diferentes leyes de fuerza.

El tiempo de transición  $t$  para mover un cuerpo desde  $A$  hasta  $B$  puede ser calculado como:

$$x = \frac{1}{2} at^2 \quad t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{2} * x^{0.5} * a^{-0.5}$$

$$t = \begin{bmatrix} S^0 \\ S^0 \\ S^0 \\ S^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^1 \\ S^1 \\ S^1 \\ S^1 \end{bmatrix}^{0.5} \begin{bmatrix} S^{-2} \\ S^{-1} \\ S^0 \\ S^1 \end{bmatrix}^{-0.5} = \begin{bmatrix} S^0 \\ S^0 \\ S^0 \\ S^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{0.5} \\ S^{0.5} \\ S^{0.5} \\ S^{0.5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{0.1} \\ S^{0.5} \\ S^0 \\ S^{-0.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{1.5} \\ S^1 \\ S^{0.5} \\ S^0 \end{bmatrix}$$

Para el caso donde la fuerza se escala como  $S^2$ , el tiempo de transición  $t$  se escala como  $S^1$ . Si el sistema decrece por un factor de 100, el tiempo de transición decrece por un factor de 100. De nueva cuenta, sabemos de forma intuitiva; las cosas pequeñas tienden a ser rápidas.

Dependiendo de la ecuación y las variables de interés, la notación vertical de Trimmer puede ser configurada de formas diferentes.

Veamos como se escala la fuerza gravitacional entre un objeto y la Tierra (la masa de la Tierra permanece constante y la masa del objeto se escala como su volumen,  $S^3$ ). La fuerza entre 2 objetos es:

$$F = G \frac{M_1 * M_2}{r^2}$$

Donde  $F$  es la fuerza;  $G$  es la constante gravitacional ( $G = 6.670 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ ), la cual no cambia con el tamaño de la escala;  $M_1$  y  $M_2$  son las masas de los objetos; y  $r$  es la separación. De esta forma, la fuerza gravitacional  $F$  se escala como:

$$F = S^0 \frac{S^3 * S^3}{S^2} = S^4$$

Ahora, suponiendo que la densidad no es constante con el tamaño de la escala. La densidad podría ser representada como:

$$\rho = \begin{bmatrix} S^0 \\ S^{-1} \\ S^{-2} \\ S^{-3} \end{bmatrix}$$

Entonces la fuerza gravitacional  $F$  queda como:

$$F = G \frac{M_1 * M_2}{r^2} = F = G \frac{\rho V_1 * \rho V_2}{r^2} = G * \rho^2 * V_1 * V_2 * r^{-1}$$

$$F = S^0 \begin{bmatrix} S^0 \\ S^{-1} \\ S^{-2} \\ S^{-3} \end{bmatrix}^2 S^3 S^3 S^{-2} = S^0 \begin{bmatrix} S^0 \\ S^{-2} \\ S^{-4} \\ S^{-6} \end{bmatrix} S^3 S^3 S^{-2} = \begin{bmatrix} S^4 \\ S^2 \\ S^0 \\ S^{-2} \end{bmatrix}$$

Del primer renglón, donde la densidad no cambia con la escala, la fuerza se escala como  $S^4$ , que es el mismo resultado obtenido en el análisis anterior. Del tercer renglón, cuando la densidad se escala como  $S^{-2}$ , la fuerza gravitacional permanece constante cuando el tamaño de la escala cambia. Esto es, si los objetos astronómicos llegaran a ser menos densos entonces llegarían a ser más grandes (ya que  $\rho = S^{-2}$ ), entonces la fuerza gravitacional entre los objetos permanece constante ( $F = S^0$ ).

Continuando, sabemos que el trabajo  $W$  es la fuerza  $F$  por la distancia  $D$ , o:

$$W = F * D$$

Aplicando la notación, tenemos;

$$W = F * D = \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \\ S^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^1 \\ S^1 \\ S^1 \\ S^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^2 \\ S^3 \\ S^4 \\ S^5 \end{bmatrix}$$

Sabemos que la fuerza gravitacional se escala como  $S^4$ , observando el último renglón, vemos que una fuerza escalada como  $S^4$ , que da trabajo o energía, es escalada como  $S^5$ . Si el tamaño del sistema decrece por un factor de 1000 (es decir, de 10 cm a 0.1 mm), la energía gravitacional requerida para mover un objeto del fondo de una máquina hasta la parte superior bajo consideración decrece por  $(1/1000)^5 = 1/1,000,000,000,000,000$ . El trabajo gravitacional decrece significativamente, Aunque esto se conoce intuitivamente, si se deja caer a una hormiga desde 10 veces su altura, esta sigue como si nada hubiera ocurrido.

$$F = \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \\ S^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Tensión superficial} \\ \textit{Electrostática, Presión, Biológicas, Magnéticas} (J = S^{-1}) \\ \textit{Magnéticas} (J = S^{-0.5}) \\ \textit{Gravitacional, Magnéticas} (J = S^0) \end{bmatrix}$$

El listado de arriba muestra como se escalan las diferentes fuerzas. La tensión superficial tiene el factor de escala  $S^1$  y se incrementa relativamente más rápido que otras fuerzas cuando un sistema llega a ser más pequeño; sin embargo, cambiar la tensión superficial usualmente requiere cambiar la temperatura, alterando algún parámetro que es difícil de controlar. Muchas fuerzas usadas por los microdiseñadores se escalan como  $S^2$ . Estas incluyen fuerzas electrostáticas, fuerzas generadas por presiones, y fuerzas biológicas. Las fuerzas magnéticas se escalan dependiendo de cómo se escala la densidad de corriente (corriente por unidad de área de las bobinas). Si la densidad de corriente  $J$  en las bobinas permanece constante ( $S^0$ ), la fuerza magnética entre 2 bobinas se escala como  $S^4$ , y en este caso las fuerzas magnéticas son débiles en el microdominio; sin embargo, se puede eliminar calor mas eficientemente de un volumen pequeño, y la densidad de corriente de una microbobina puede ser mucho mas

grande que el de una bobina grande. Si la densidad de corriente se escala como  $S^{-1}$  cuando el sistema decrece por un factor de 10, la densidad de corriente se incrementa por un factor de 10. En este caso, la bobina tiene mayores pérdidas resistivas, por lo que la fuerza con más ganancia es la que se escala como  $S^2$ .

Por último, el escalamiento provee una buena guía de cómo funcionan las cosas y ofrece ideas en los sistemas pequeños, pero el escalamiento es solo eso - una buena guía.

Usualmente no provee soluciones exactas. Por tanto, la creatividad e intuición son partes de un diseño excelente: *el escalamiento es una guía para entender cuales elementos de diseño son importantes.* [14]

# Electrostática y Sensado Capacitivo

El control por fuerza electrostática raramente es utilizado en máquinas convencionales, ya que, usualmente, la fuerza es muy pequeña como para poder desplazar o elevar una pieza mecánica, a menos que el voltaje empleado sea extremadamente grande. Sin embargo, con la miniaturización de las estructuras mecánicas, la fuerza electrostática es relativamente grande. De este modo, el control por fuerzas electrostáticas tiene amplias aplicaciones en microsensores y microactuadores.

Para máquinas convencionales, el sensado capacitivo tiene algunas aplicaciones, pero sufre de altas interferencias electromagnéticas, además, necesita de una circuitería sofisticada para la medición y linealización de las señales. Sin embargo, debido a las favorables propiedades del escalamiento, del incremento de las técnicas de sensado CMOS y, entre otras cosas, de la integración de micromáquinas y microelectrónica, el sensado capacitivo ha ganado popularidad en los microsistemas.

Como ya se mencionó en capítulos anteriores, la teoría empleada para microsistemas es la ya establecida para la fuerza electrostática y para el sensado capacitivo, sin embargo, deben considerarse algunos aspectos para su aplicación, entre otros los siguientes:

Para microestructuras, todas las fuerzas son comparables, por tanto deben considerarse al mismo tiempo, ya que la fuerza electrostática es comparable con la fuerza elástica de la estructura mecánica. Además, la acción conjunta de la fuerza electrostática y la fuerza elástica puede causar no-linealidades o problemas de estabilidad. Así mismo, la señal de control empleada para sensado capacitivo causa fuerzas electrostáticas, las cuales pueden ser lo suficientemente grandes y modificar la capacitancia medida, por lo tanto, este efecto debe ser eliminado, y como la distancia entre las partes mecánicas y las dimensiones de las estructuras mecánicas son muy cercanas, los efectos parásitos de la electricidad tienen que considerarse en muchos casos. [3]

## 4.1 Fuerza Electrostática

### 4.1.1 Fuerza Normal a la Placa del Electrodo

Supóngase que el voltaje  $V$  de una batería es aplicado a un capacitor, compuesto de un par de electrodos paralelos, como se muestra en la Fig. 4.1. El electrodo de la izquierda está fijo en  $x=0$  y el de la derecha es un electrodo móvil en  $x$ , el cual se mueve en su dirección normal. Si las dimensiones de los electrodos son mucho más grandes que la distancia  $x$  entre los electrodos, el efecto de los bordes provocado por el campo eléctrico puede despreciarse y la capacitancia puede calcularse como la de un capacitor de placas paralelas:

$$C = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{x} \quad 4.1$$

Donde  $A$  es el área de los electrodos,  $\varepsilon_0=8,854*10^{-12} \text{ F/m}$  es la permitividad del vacío y  $\varepsilon$  es la permitividad relativa del medio entre los electrodos, la cual es aproximadamente uno para el aire. La carga acumulada en el capacitor es:

$$Q_C = C(x)V \quad 4.2$$

Y la energía eléctrica almacenada en el capacitor es:

$$E_C = \frac{1}{2} C(x)V^2 \quad 4.3$$

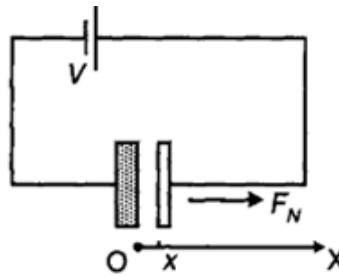


Fig. 4.1 Fuerza electrostática normal a la placa. [3]

Además, se sabe que existe una fuerza eléctrica entre los electrodos. Si se aplica una fuerza  $F_N$  sobre la placa móvil, que desplaza la placa una distancia  $\Delta x$ , la conservación de la energía del sistema, compuesto por la batería y el capacitor, es:

$$F_N \Delta x + \frac{dE_C}{dx} \Delta x + \frac{dE_B}{dx} \Delta x = 0 \quad 4.4$$

Donde  $E_B$  es la energía interna de la batería, por lo tanto:

$$F_N = -\frac{dE_C}{dx} - \frac{dE_B}{dx} \quad 4.5$$

De acuerdo a la Ec. 4.3:

$$\frac{dE_C}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\partial C(x)}{\partial x} V^2 \quad 4.6$$

Como el voltaje de la batería,  $V$ , es constante, el cambio de su energía,  $E_B$ , depende del flujo de carga, hacia o fuera de la batería, en el proceso. Por lo tanto:

$$\frac{dE_B}{dx} = -V \frac{\partial Q_C}{\partial x} \quad 4.7$$

Acorde a la Ec. 4.2:

$$\frac{dE_B}{dx} = -\frac{\partial C(x)}{\partial x} V^2 \quad 4.8$$

De las Ecs. 4.6, 4.7 y 4.8, obtenemos:

$$F_N = \frac{1}{2} \frac{\partial C(x)}{\partial x} V^2 \quad 4.9$$

De las Ecs. 4.1 y 4.9, tenemos:

$$F_N = -\frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{2x^2} V^2 \quad 4.10$$

El signo negativo de la Ec. 4.10 indica que la fuerza aplicada a la placa móvil es una fuerza de atracción hacia el electrodo fijo. Esto parece indicar que la fuerza electrostática sobre el electrodo móvil puede obtenerse por la relación:

$$F_N = -\frac{dE_C}{dx} \quad 4.11$$

De las Ec. 4.1, 4.3 y 4.11, tenemos:

$$F_N = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{2x^2} V^2 \quad 4.12$$

Si comparamos las magnitudes de las Ecs. 4.10 y 4.12 parecen ser las mismas, pero de signos opuestos. El signo positivo en la Ec. 4.12 indica que es una fuerza repulsiva, pero esto es incorrecto. Lo que sucede es que la batería, como parte del sistema, puede suministrar o recuperar energía hacia o del capacitor para mantener el voltaje constante. Por ejemplo, cuando la placa móvil es forzada a alejarse de la placa fija por una fuerza  $F$  una distancia  $\Delta x$ , el trabajo hecho por la fuerza externa es  $F\Delta x$ . La energía almacenada en el capacitor decrece debido al incremento en la distancia. Aparentemente el principio de conservación de la energía es violado si solo es considerado el capacitor. De hecho, con la distancia incrementada, parte de la carga es transferida del capacitor a la batería, ocasionando que la energía de la batería se incremente por una cantidad mayor que la energía transferida por el capacitor.

De acuerdo a la Ec. 4.10 y lo visto en la sección 3.4.2, referente a las leyes de escalamiento, la fuerza de atracción entre las dos placas paralelas permanece constante cuando se escala la distancia. Esta es una característica favorable de la fuerza electrostática para aplicaciones en micromecánica.

#### 4.1.2 Fuerza Tangencial a la Placa del Electrodo

Considérese un capacitor compuesto de un par de placas paralelas separadas por una distancia constante  $d_0$ , una placa esta fija y la otra se mueve sobre su plano, como se muestra en la Fig. 4.2. Supóngase que la distancia que se superponen las placas,  $y$ , es mucho más grande que la distancia,  $d_0$ , entre las placas. La capacitancia entre las placas es:



$$C = \frac{by\varepsilon\varepsilon_0}{d_0} \quad 4.13$$

Donde  $b$  es el ancho de las placas. La carga y la energía acumuladas en el capacitor son respectivamente:

$$Q_C = C(y)V \quad 4.14$$

$$E_C = \frac{by\varepsilon\varepsilon_0}{2d_0}V^2 \quad 4.15$$

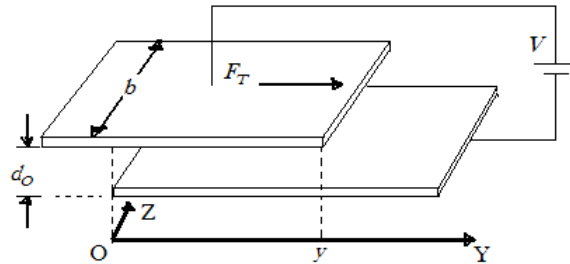


Fig. 4.2 Fuerza electrostática tangencial a la placa. [3]

Si la fuerza aplicada sobre la placa móvil es  $F_T$ , para un desplazamiento  $\Delta y$ , la relación para la conservación de la energía es:

$$F_T\Delta y + \frac{dE_C}{dy}\Delta y + \frac{dE_B}{dy}\Delta y = 0 \quad 4.16$$

Donde  $E_B$  es la energía de la batería. Usando las relaciones:

$$\frac{dE_C}{dy} = \frac{b\varepsilon\varepsilon_0}{2d_0}V^2 \quad y \quad \frac{dE_B}{dy} = -V\frac{dQ_C}{dy} = -\frac{b\varepsilon\varepsilon_0}{d_0}V^2$$

Obtenemos:

$$F_T = \frac{b\varepsilon\varepsilon_0}{2d_0}V^2 \quad 4.17$$

Refiriéndonos a la Fig. 4.2, el signo positivo en la Ec. 4.17 indica que la fuerza aplicada sobre la placa móvil jala al electrodo, resultando en un área mayor de superposición. Además, la Ec. 4.17 indica que la fuerza es independiente de la distancia de superposición,  $y$ , por lo que, la fuerza es constante con el movimiento de la placa y la fuerza tangencial es constante cuando las dimensiones del capacitor son escaladas con la distancia,  $d_0$ .

Si comparamos las magnitudes de  $F_N$  y  $F_T$ , de las Ec. 4.10 y 4.17, tenemos  $\frac{F_N}{F_T} = \frac{y_0}{d_0}$ , donde  $y_0$  es la distancia de superposición en el momento. De la relación anterior, es obvio que  $F_N$  es mucho más grande que  $F_T$ , ya que  $y_0$  es usualmente más grande que  $d_0$ .

## 4.2 Desplazamiento de Estructuras Elásticas debido a Fuerzas Electroestáticas

### 4.2.1 Desplazamiento Normal y Efecto Pull-In

Considerar una estructura con una masa suspendida por vigas elásticas sobre ambos lados de manera que la masa solo pueda moverse en su dirección normal, Fig. 4.3a. La masa se utiliza como un electrodo y un electrodo fijo esta localizado debajo de la masa, separados por una distancia  $d_0$ . Cuando se le aplica una diferencia de voltaje a los electrodos,  $V$ , una fuerza electrostática es aplicada a la masa, atrayéndola hacia el electrodo fijo, Fig. 4.3b. Una vez que la masa ha sido desplazada una fuerza de restauración, generada por las vigas elásticas, tiende a jalar la masa a su posición original. La posición de balance de la masa puede calcularse mediante un balance de fuerzas. Sin embargo, no es un problema sencillo debido a la naturaleza no lineal de la fuerza electrostática, la cual puede causar problemas de estabilidad bajo algunas condiciones.

Supóngase que el desplazamiento de la masa es  $y$ . Debido a la acción conjunta de la fuerza electrostática y elástica, la condición de balance de fuerzas es:

$$F = F_e + F_k = 0$$

Donde  $F_e$  es la fuerza electrostática y  $F_k = -ky$  es la fuerza de restauración elástica, por lo tanto:

$$\frac{A\epsilon\epsilon_0 V^2}{2(d_0 - y)^2} - ky = 0 \quad 4.18$$

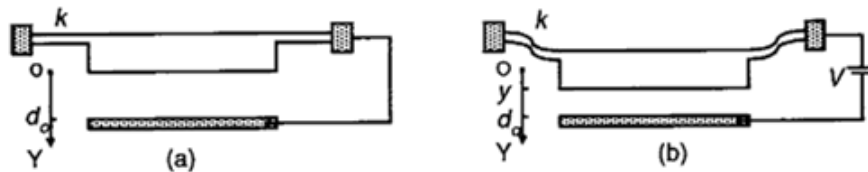


Fig. 4.3 Desplazamiento de la estructura elástica por fuerza electrostática. a) Sin fuerza electrostática y b) Con fuerza electrostática. [3]

Así de la Ec. 4.18 puede encontrarse el desplazamiento balanceado, utilizando un método grafico.

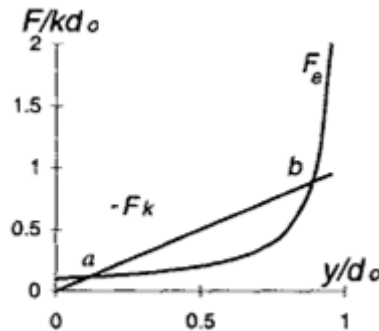


Fig. 4.4 Dependencia de  $F_e$  y  $|-F_k|$  sobre la distancia. [3]

Las curvas de  $F_e$  y  $|F_k|$ , como funciones del desplazamiento  $y$  están dibujadas de forma separada en la Fig. 4.4. La curva de  $F_e$  es una hipérbola, mientras que la curva de  $F_k$  es una línea recta que inicia en el origen de coordenadas. Si  $k$  es lo suficientemente grande, las 2 curvas se intersecan en los puntos  $a$  y  $b$  de la Fig. 4.4. La solución del punto  $b$  no es estable, ya que, si una pequeña perturbación regresa la masa un poco, la fuerza de restauración  $F_k$  será más grande que la fuerza de atracción electrostática en cantidad y moverá a la masa hasta el punto  $a$ . Por otro lado, si una pequeña perturbación mueve a la masa más allá de su posición original  $b$  la fuerza electrostática será más grande que la fuerza de restauración elástica y la masa se moverá hasta tocar el electrodo fijo. Sin embargo, la solución correspondiente al punto  $a$  si es estable, ya que la masa siempre regresará a su posición de balance después de que una fuerza perturbadora aleje a la masa del punto  $a$ .

Matemáticamente, la condición para un estado estable es  $\frac{\partial F}{\partial y} < 0$ , esto es:

$$\frac{A\epsilon\epsilon_0V^2}{(d_0 - y)^3} - k < 0 \quad 4.19$$

De las Ecs. 4.18 y 4.19, tenemos:

$$y < \frac{1}{3}d_0 \quad 4.20$$

Esto significa que el desplazamiento balanceado es estable cuando al menos este sea de un tercio de la distancia original entre los electrodos,  $d_0$ .

Para una estructura mecánica,  $k$  es constante. De la Fig. 4.4 y la Ec. 4.19, puede verse que  $F_e$  incrementa con un incremento en el voltaje  $V$ ; por lo tanto, los puntos  $a$  y  $b$  se acercarán cuando se incremente  $V$ . Es de esperar que, para un voltaje crítico  $V_{po}$ , los puntos  $a$  y  $b$  coincidirán. Para cualquier voltaje mayor a  $V_{po}$  no habrá intersección entre las dos curvas y la masa siempre estará en contacto con el electrodo fijo, ya que  $F_e$  siempre será más grande que  $|F_k|$  para  $V > V_{po}$ . Por lo tanto  $V_{po}$  es referido como el voltaje de *pull-in*.

## 4.2.2 Desplazamiento Angular de una Barra de Torsión

Un estructura con barras de torsión consiste de un par de barras de torsión y una placa rectangular, Fig. 4.5. Un electrodo esta debajo de la placa, como se indica en la figura por las líneas punteadas. La placa tendrá un desplazamiento angular  $\varphi$  si un torque  $T_e$  es aplicado por una fuerza electrostática:

$$\varphi = \frac{1}{k_\varphi} T_e \quad 4.21$$

Donde  $k_\varphi$  es la constante de torsión de las dos barras, de acuerdo a la sección 3.2.5:

$$k_\varphi = \frac{2k_1bh^3G}{l} \quad 4.22$$

El torque de restauración de las barras de torsión es:

$$T_k = -k_\varphi \varphi \quad 4.23$$

Si el voltaje aplicado entre la placa y el electrodo de la parte inferior es  $V$ , el torque causado por la fuerza electrostática es:

$$T_e = \int_{a_1}^{a_2} \frac{B \varepsilon \varepsilon_0 V^2 x dx}{2(d_0 - \varphi x)^2} \quad 4.24$$

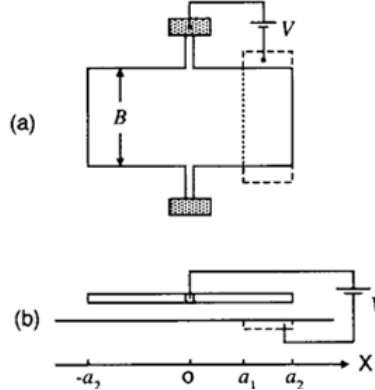


Fig. 4.5 Estructura con barras de torsión y un electrodo debajo. a) Vista superior y b) Vista sección transversal. [3]

Usando las notaciones  $\tilde{a}_1 = a_1/d_0$  y  $\tilde{a}_2 = a_2/d_0$ , tenemos:

$$T_e = \frac{B \varepsilon \varepsilon_0 V^2}{2\varphi^2} \left[ \ln \frac{1 - \varphi \tilde{a}_2}{1 - \varphi \tilde{a}_1} + \frac{\varphi(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1)}{(1 - \varphi \tilde{a}_2)(1 - \varphi \tilde{a}_1)} \right] \quad 4.25$$

De las Ecs. 4.23 y 4.25 y la ecuación para el balance de torques,  $T_k + T_e = 0$ , tenemos la ecuación para  $\varphi$ . Así para un valor específico de  $V$  y  $k_\varphi$  se puede obtener  $\varphi$  por un método iterativo.

$$\frac{B \varepsilon \varepsilon_0 V^2}{2} \left[ \ln \frac{1 - \varphi \tilde{a}_2}{1 - \varphi \tilde{a}_1} + \frac{\varphi(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1)}{(1 - \varphi \tilde{a}_2)(1 - \varphi \tilde{a}_1)} \right] - k_\varphi \varphi^3 = 0 \quad 4.26$$

### 4.3 Efectos de la Fuerza Electroestática sobre el Sensado Capacitivo

Como se vio en 4.2, el voltaje de control causa una fuerza electrostática sobre el electrodo móvil, donde esta interfiere con el movimiento, por lo que la exactitud de la medición o inclusive la operación normal de la medición es afectada por el voltaje de control utilizado para la medición.

Generalmente el voltaje de control consiste de una componente de DC y una componente de AC. Una forma comúnmente empleada es  $\pm V_0 \pm V_1 \text{ Sen } \omega t$ , donde la frecuencia de control  $\omega$  (del orden de  $10^6$ ) es usualmente mucho más grande que la frecuencia de la señal a medir y de la frecuencia de vibración natural de la estructura mecánica (ambas son del orden

de  $10^3 - 10^5$ ). Por lo tanto, la fuerza aplicada sobre el electrodo móvil es el promedio del voltaje de control de la fuerza electrostática. La fuerza promedio es:

$$F_e = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2(d_0 - x)^2} (V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2)$$

Si definimos un voltaje efectivo,  $V_{eff} = \sqrt{(V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2)}$ , tenemos la forma general de la fuerza electrostática sobre el electrodo causada por el voltaje de control:

$$F_e = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2(d_0 - x)^2} V_{eff}^2 \quad 4.27$$

Algunas veces, la componente de alterna de la señal de control es una onda cuadrada con un ciclo de trabajo del 50% y una amplitud de  $\pm V$ . En este caso, la Ec. 4.27 aun aplica si el voltaje efectivo es definido como  $V_{eff} = \sqrt{(V_0^2 + V_1^2)}$ .

Ahora consideraremos las condiciones para un control de un solo lado, de dos lados y un control de dos lados con retroalimentación electromecánica para un acelerómetro capacitivo. Para el siguiente análisis, por comodidad, utilizaremos  $V$  en lugar de  $V_{eff}$ .

### 4.3.1 Control de un solo Lado (*Single-Sided*)

La estructura de la Fig. 4.6 tiene un control de un solo lado. La Ec. 4.28 determina el desplazamiento de la placa móvil.

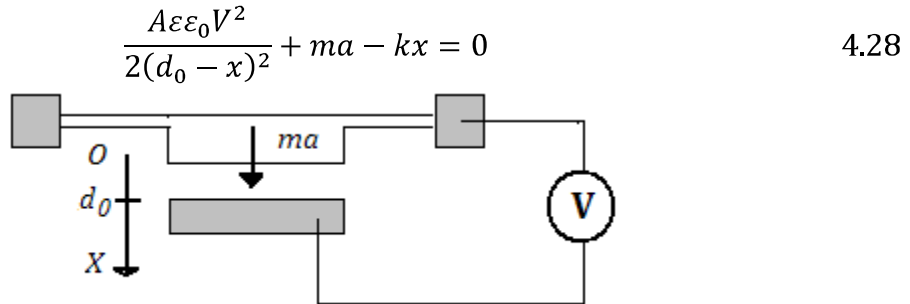


Fig. 4.6 Estructura de un control single-sided para un acelerómetro. [3]

Donde  $ma$  es la fuerza inercial en la dirección  $x$  y  $d_0$  es la distancia original entre los dos electrodos. Usando las siguientes notaciones  $\tilde{x} = \frac{x}{d_0}$  y  $F_{eo} = \frac{A\epsilon\epsilon_0 V^2}{2d_0^2}$  la Ec. 4.28 puede escribirse como:

$$\frac{F_{eo}}{kd_0(1 - \tilde{x})^2} + \frac{ma}{kd_0} - \tilde{x} = 0 \quad 4.29$$

Además, si definimos dos parámetros adimensionales  $p = \frac{F_{eo}}{kd_0}$  y  $q = \frac{ma}{kd_0}$ , la Ec. 4.29 puede reescribirse como:

$$q = \tilde{x} - \frac{p}{(1 - \tilde{x})^2} \quad 4.30$$

Tomando en consideración la Ec. 4.30, se discutirán las siguientes condiciones:

1) Voltaje cero, es decir  $p = 0$ .

En este caso, tenemos  $\tilde{x} = q$ , la relación entre el desplazamiento y la aceleración es lineal.

2) Voltaje diferente de cero, es decir  $p \neq 0$ .

Para una  $\tilde{x}$  pequeña, la Ec. 4.30 puede aproximarse como:

$$3p\tilde{x}^2 - (1 - 2p)\tilde{x} + (p + q) = 0 \quad 4.31$$

Para  $p$  y  $q$  pequeñas, la solución a la Ec. 4.31 puede aproximarse como:

$$\tilde{x} = \frac{p(1 - 4p + 7p^2)}{(1 - 2p)^3} + \frac{1 - 4p + 10p^2}{(1 - 2p)^3} q \left[ 1 + \frac{3p}{1 - 4p + 10p^2} q \right] \quad 4.32$$

Donde podemos concluir que:

a) El voltaje de control causa un desplazamiento cuando ninguna aceleración es aplicada a la estructura, como se indica por el primer término del lado derecho de la Ec. 4.32. Además, el valor más grande de  $p$  genera el desplazamiento más grande.

b) La sensibilidad del acelerómetro es proporcional a  $\frac{1-4p+10p^2}{(1-2p)^3}$ , la cual depende del voltaje de control. Aquí, el valor más grande de  $p$  ofrece la mayor sensibilidad en el acelerómetro.

c) El voltaje de control causa una no linealidad entre el desplazamiento y la aceleración. Acorde a la Ec. 4.32, la no linealidad es:

$$NL = -\frac{3pq_{max}}{4(1 - 4p + 10p^2)} \quad 4.33$$

Donde  $q_{max}$  es el valor de la  $q$  correspondiente a la máxima aceleración en el rango de operación.

3) Situación General.

Para esta condición, la ecuación puede solucionarse usando un método gráfico. Definiendo una función  $f(\tilde{x}, p)$ :

$$f(\tilde{x}, p) = \tilde{x} - \frac{p}{(1 - \tilde{x})^2} \quad 4.34$$

Así, la solución a la Ec. 4.34 para un conjunto de valores  $p$  y  $q$  puede encontrarse por la intersección entre una línea horizontal paralela al eje  $x$  y una curva específica de  $p$  de la Fig. 4.7. Por ejemplo, para  $p=0.05$  y la línea correspondiente a  $q=0.2$  hay dos puntos de intersección,  $A$  y  $B$ . El desplazamiento correspondiente al punto  $A$  ( $x \approx 0.3d_0$ ) corresponde a

una solución estable, pero el desplazamiento correspondiente al punto B ( $x \approx 0.67d_0$ ) corresponde a una solución inestable. También, podemos encontrar que para un valor específico de  $p$ , hay un valor de  $f$  máximo,  $f_{max}$ , que corresponde con la aceleración crítica,  $a_c$ :

$$a_c = \frac{f_{max} k d_0}{m}$$

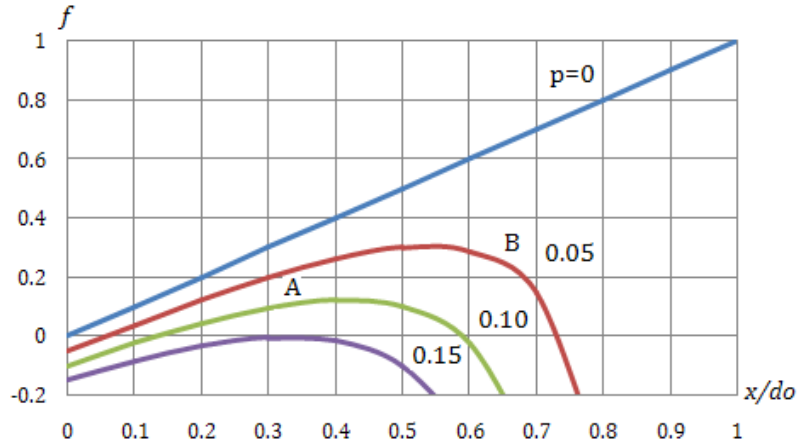


Fig. 4.7 Solución gráfica para un control de un solo lado. [3]

Para un valor de  $q$  más grande que  $f_{max}$  (es decir para una aceleración,  $a$ , más grande que  $a_c$ ), no habría una solución estable para la ecuación. Esto significa que el efecto *pull-in* ocurre debido al efecto combinado de la fuerza electrostática y la fuerza inercial. El valor más grande de  $p$  (es decir un voltaje de control,  $V$ , más grande) corresponde con el valor más pequeño de  $f_{max}$ , así para una operación confiable,  $p$  debería ser tan pequeño como sea posible. Sin embargo, con un valor pequeño de  $p$  obtenemos la sensibilidad más pequeña en el circuito de sensado. Esta es una de las restricciones en el diseño de sensores capacitivos.

Por ejemplo, para  $p=0.05$ , tenemos que  $f_{max}=0.3$ ; así, la máxima aceleración que no causa el efecto de *pull-in* es  $0.3kd_0/m$ . Para  $p=0.01$ , la máxima aceleración es reducida a  $0.12kd_0/m$ , aproximadamente. Si  $p > 0.15$  no habría un desplazamiento estable.

### 4.3.2 Control de dos Lados (*Double-Sided*)

Para la estructura de la Fig. 4.8, la ecuación que da el desplazamiento de la placa móvil es:

$$\frac{A\epsilon\epsilon_0 V^2}{2d_0^2} \left[ \frac{1}{(1-\tilde{x})^2} - \frac{1}{(1+\tilde{x})^2} \right] + ma - kx = 0 \quad 4.35$$

Definiendo  $\tilde{x} = \frac{x}{d_0}$ ,  $F_{eo} = \frac{A\epsilon\epsilon_0 V^2}{2d_0^2}$ ,  $p$  y  $q$  como en el caso anterior, la Ec. 4.35 se reduce a:

$$\tilde{x} \left[ 1 - \frac{4p}{(1-\tilde{x}^2)^2} \right] = q \quad 4.36$$

De la Ec. 4.36, se observa que cuando:

1) El voltaje es cero, es decir  $p=0$ .

Entonces  $\tilde{x} = q$  y la relación entre el desplazamiento y la aceleración es lineal.

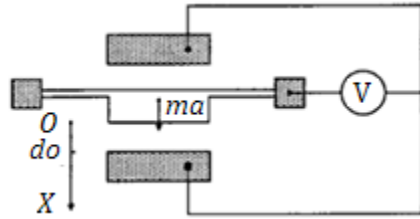


Fig. 4.8 Estructura de un control de dos lados para un acelerómetro. [3]

2) El voltaje es diferente de cero, es decir  $p \neq 0$ .

La Ec. 4.36 puede reescribirse como:

$$\tilde{x} = \frac{q}{1 - \frac{4p}{(1 - \tilde{x}^2)^2}} \quad 4.37$$

Donde podemos concluir que:

a) Cuando  $q = 0$ ,  $\tilde{x} = 0$ , significa que no hay desplazamiento causado por el voltaje de control a causa de la simetría de las fuerzas electrostáticas sobre la masa.

b) Para valores muy pequeños de  $q$  y  $\tilde{x}$ , la relación aproximada es:

$$\tilde{x} = \frac{q}{1 - 4p}$$

Por lo tanto, el valor más grande del voltaje de control da la mayor sensibilidad del acelerómetro y el valor máximo de  $p$  para una operación estable es 0.25.

3) Situación General

La Ec. 4.37 puede resolverse utilizando un método gráfico, si definimos una función:

$$f(\tilde{x}, p) = \tilde{x} \left[ 1 - \frac{4p}{(1 - \tilde{x}^2)^2} \right] \quad 4.38$$

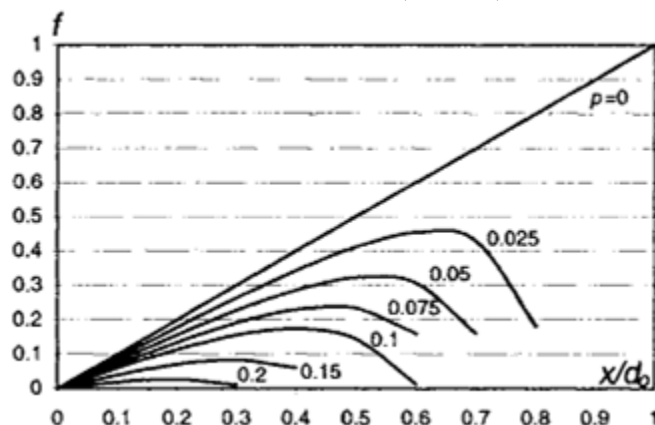


Fig. 4.9 Solución gráfica para un control de dos lados. [3]



La Fig. 4.9 muestra las curvas de  $f - \tilde{x}$  con  $p$  como parámetro. Las soluciones a la Ec. 4.38 pueden encontrarse por la intersección entre una línea horizontal paralela al eje  $x$ , para una  $q$  específica, y la curva para un valor específico de  $p$ .

Por ejemplo, para  $p=0.05$  hay dos puntos de intersección con la línea horizontal que pasa por  $q=0.3$ . El desplazamiento correspondiente a  $x \approx 0.43d_0$  es un desplazamiento estable, pero el desplazamiento correspondiente al punto  $x \approx 0.61d_0$  es una solución inestable. También podemos ver que, para una  $p$  específica, hay un valor máximo para la curva  $f(\tilde{x}, p)$ ,  $f_{max}$ . Para un valor de  $q$  más grande que  $f_{max}$ , no hay solución estable, esto significa que ocurrirá el efecto de *pull-in* a causa del efecto combinado de la fuerza inercial y la fuerza electrostática.

En base a lo anterior, observamos que el desempeño de la configuración de dos lados es mejor que el de la configuración de un solo lado; entre otras cosas porque no hay desplazamiento ocasionado por el voltaje de control, la linealidad es mejor y el voltaje de control puede ser más grande sin causar el efecto *pull-in*.

La Fig. 4.10 muestra la dependencia de  $f_{max}$  sobre las configuraciones de uno y dos lados. De acuerdo con estas curvas,  $f_{max}$  decrece rápidamente con un incremento en el valor de  $p$ . Por lo que, para una operación confiable,  $p$  debe ser muy pequeño. Sin embargo, el valor más pequeño de  $p$  da la sensibilidad más pequeña en el circuito de sensado, por lo tanto hay una restricción de diseño. Para muchas aplicaciones prácticas  $p$  debe ser menor de 0.05, aproximadamente. Esto involucra una restricción sobre la señal de control para esta configuración.

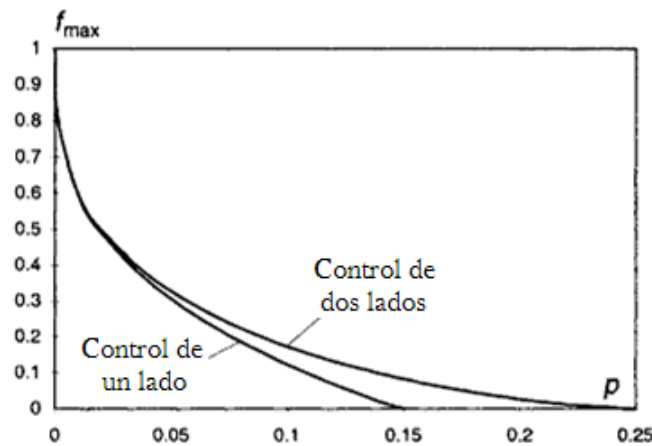


Fig. 4.10 Relación  $f_{max} - p$  para un control de uno y dos lados. [3]

### 4.3.3 Control de dos lados con Retroalimentación Electromecánica

La Fig. 4.11 muestra el modelo simplificado de un acelerómetro de fuerza balanceada con un voltaje,  $V_r$ , de retroalimentación. Para un desplazamiento pequeño, el voltaje de retroalimentación es proporcional al desplazamiento de la masa:  $V_r = gV_1\tilde{x}$ , donde  $g$  es una

constante relacionada con la intensidad de la retroalimentación.  $V_0$  y  $V_r$  están limitados por la fuente de voltaje,  $V_s$ , del sistema electrónico (es decir  $V_0, V_r \leq \frac{1}{2}V_s$ ).

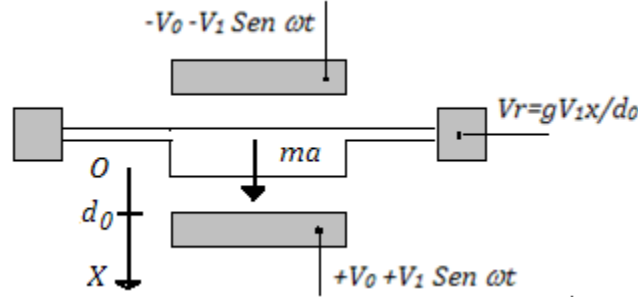


Fig. 4.11 Estructura de un control de dos lados retroalimentado para un acelerómetro. [3]

Con el voltaje de retroalimentación, la fuerza electrostática sobre la masa es:

$$F_e = \frac{C_0}{2d_0} \left[ \frac{(V_0 + V_1 \text{Sen } \omega t - V_r)^2}{(1 - \tilde{x})^2} - \frac{(V_0 + V_1 \text{Sen } \omega t + V_r)^2}{(1 + \tilde{x})^2} \right] \quad 4.39$$

o

$$F_e = \frac{C_0}{2d_0(1 - \tilde{x}^2)^2} \left[ -4V_r(V_0 + V_1 \text{Sen } \omega t)(1 + \tilde{x}^2) + 4\tilde{x}(V_0^2 + 2V_0V_1 \text{Sen } \omega t + V_1^2 \text{Sen}^2 \omega t + V_r^2) \right] \quad 4.40$$

Como la frecuencia de control,  $\omega$ , es mucho más grande que la frecuencia de la señal a medir y la frecuencia de vibración natural de la estructura mecánica, la fuerza promedio aplicada a la masa es:

$$\bar{F}_e = \frac{C_0}{2d_0(1 - \tilde{x}^2)^2} \left[ 4 \left( V_0^2 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \tilde{x} + 4V_r^2 \tilde{x} - 4V_r V_0 - 4V_r V_0 \tilde{x}^2 \right]$$

Y si se supone que  $V_1 = \alpha V_0$ , entonces:

$$\bar{F}_e = \frac{4F_{e0}}{(1 - \tilde{x}^2)^2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \tilde{x} - (\alpha g \tilde{x}) + (\alpha g \tilde{x})^2 \tilde{x} - (\alpha g \tilde{x}) \tilde{x}^2 \right] \quad 4.41$$

Donde  $F_{e0} = \frac{C_0 V_0^2}{2d_0}$ . Por lo tanto, la ecuación de balance de fuerzas para la masa, con una aceleración,  $a$ , es:

$$ma - kd_0 \tilde{x} + \frac{4F_{e0}}{(1 - \tilde{x}^2)^2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \tilde{x} - (\alpha g \tilde{x}) + (\alpha g \tilde{x})^2 \tilde{x} - (\alpha g \tilde{x}) \tilde{x}^2 \right] = 0 \quad 4.42$$

Usando la consideración anterior de que  $p = \frac{F_{e0}}{kd_0}$  y  $q = \frac{ma}{kd_0}$ , tenemos:

$$q = \tilde{x} - \frac{4p}{(1 - \tilde{x}^2)^2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \tilde{x} - (\alpha g \tilde{x}) + (\alpha g \tilde{x})^2 \tilde{x} - (\alpha g \tilde{x}) \tilde{x}^2 \right] \quad 4.43$$

De acuerdo a la Ec. 4.43, se puede concluir que:

1) Si el voltaje es cero, es decir  $p=0$ .

Entonces,  $q = \tilde{x}$  y la relación es lineal.

2) Si el voltaje es diferente de cero, es decir  $p \neq 0$ , y  $\tilde{x}$  es pequeña.

Entonces:

$$\tilde{x} = \frac{q}{1 - 4p \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2\right) + 4p\alpha g}$$

La relación de  $q$  con  $\tilde{x}$  depende del valor de  $g$ :

- a) Para  $g = 0$ ,  $\tilde{x} = \frac{q}{1 - 4p \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2\right)}$ . De esta forma, el valor más grande de  $p$  corresponde al desplazamiento más grande, para la misma aceleración, debido al efecto de la fuerza electrostática.
- b) Para  $g \neq 0$ , el valor más grande de  $g$  corresponde al desplazamiento mínimo, debido a la retroalimentación electromecánica, la cual es negativa.

3) Situación General

La relación de  $q$  con  $\tilde{x}$  puede resolverse utilizando un método gráfico, si definimos una función:

$$f(\tilde{x}, g, p, \alpha) = \tilde{x} - \frac{4p}{(1 - \tilde{x}^2)^2} \left[ \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2\right) \tilde{x} - (\alpha g \tilde{x}) + (\alpha g \tilde{x})^2 \tilde{x} - (\alpha g \tilde{x}) \tilde{x}^2 \right] \quad 4.44$$

En la Fig. 4.12a se muestran las curvas de la función  $f(\tilde{x}, g, p, \alpha)$  para diferentes valores de  $g$ , con valores específicos para  $p$  y  $\alpha$ , además,  $V_r \leq V_0$ . De la Fig. 4.12a se observa que, para una  $g$  pequeña, el valor máximo de la curva,  $f_{max}$ , es pequeño debido al efecto de la fuerza electrostática sobre la señal de control. Esto quiere decir que la aceleración crítica que causa el efecto *pull-in* es pequeña. Por otro lado,  $f_{max}$  se incrementa con  $g$  hasta que  $g$  es aproximadamente 5, que es cuando la curva tiene la linealidad más alta. Las curvas con  $g > 5$  convergen para valores grandes de  $\tilde{x}$  por que el voltaje de retroalimentación esta limitado a ser  $V_0$ .

Si comparamos las Figs. 4.12a y 4.12b, tenemos que, para una  $g$  pequeña, el valor más grande de  $p$  corresponde con una  $f_{max}$  pequeña, resultando en una aceleración crítica pequeña, debido a que la fuerza electrostática generada por la señal de control es muy grande. Sin embargo, si la retroalimentación es suficientemente grande ( $g > 5$ ),  $f_{max}$  se aproxima a 0.9, indicando que el efecto *pull-in* es prácticamente eliminado como efecto de la retroalimentación.

De esta forma se concluye que de las tres configuraciones consideradas, la configuración de control de dos lados con retroalimentación electromecánica es la menos afectada por la señal de control y ofrece el mejor desempeño.

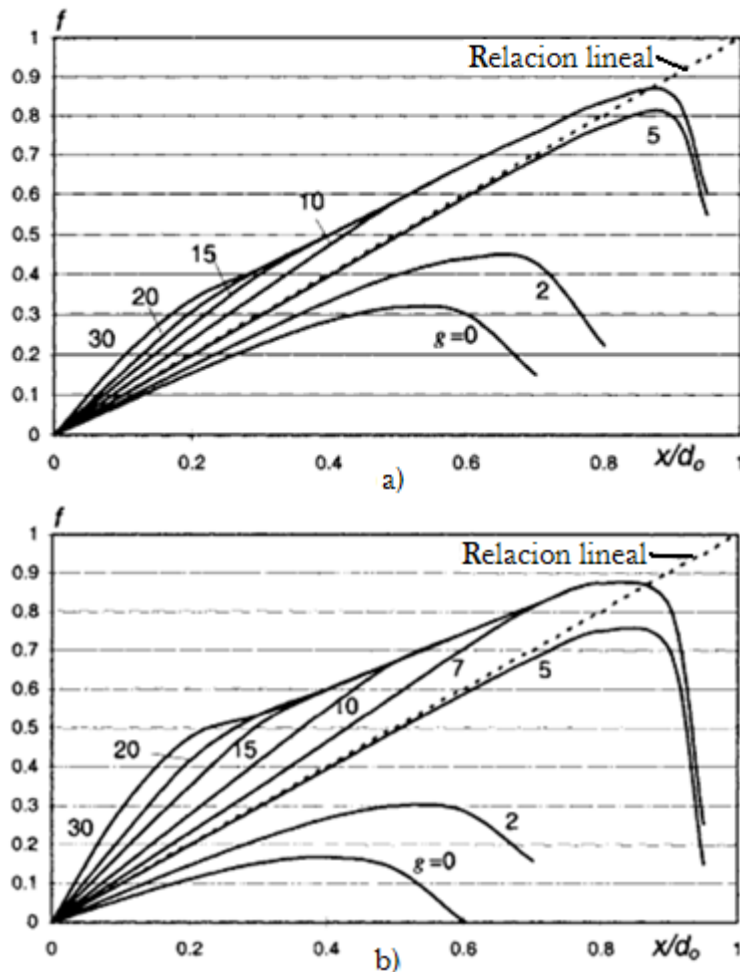


Fig. 4.12 Solución grafica para un control de dos lados con retroalimentación electromecánica: a)  $p=0.05$ ,  $\alpha=0.2$ ,  $V_r \leq V_0$  y b)  $p=0.1$ ,  $\alpha=0.2$  y  $V_r \leq V_0$ . [3]

#### 4.4 Sensado Capacitivo

El desplazamiento de una estructura mecánica en un microsensado tiene que ser sentido por algún método, ya sea para propósitos de adquisición únicamente o para tener un mejor control en el movimiento de la estructura mecánica. Uno de esos métodos es utilizar el efecto piezoresistivo del silicio. El sensado piezoresistivo tiene las ventajas de brindar una relación lineal con el desplazamiento, emplear una circuitería de acondicionamiento sencilla, proporcionar una baja impedancia y generar bajo ruido, pero con las desventajas de ser altamente dependiente de la temperatura, poca sensibilidad, además de que su aplicación esta limitada a microestructuras hechas de silicio cristalino por micromaquinado volumétrico.

Con el desarrollo de los procesos de microfabricación, como el micromaquinado superficial y el LIGA, se pueden producir fácilmente microplacas paralelas o microestructuras tipo peine que actúan como capacitores y emplearse para medir desplazamientos, los cuales son producidos por fuerzas, presiones, aceleraciones, etc.

Las ventajas del sensado capacitivo son: requerir estructuras mecánicas simples, un bajo consumo de energía, la compatibilidad con los procesos de fabricación de CI MOS, un rango dinámico amplio, la estabilidad frente a la temperatura y la posibilidad de desarrollar una retroalimentación de lazo cerrado. Sin embargo, la capacitancia de las microestructuras es muy pequeña (del orden de 1 pF) y cambios en capacitancia del orden de  $10^{-15}$  F, por lo que las capacitancias parásitas son relativamente grandes. Por esta razón, es preferible la integración de las microestructuras y de los circuitos de sensado. [3]

Por todo lo anterior, los sensores capacitivos son ampliamente empleados para medir desplazamientos y/o como bloques en otros sensores. El caso mas simple que se puede considerar es cuando el sensor esta formado por un par de placas paralelas. Como se vio en 4.1, el valor de la capacitancia puede calcularse como:

$$C = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{x}$$

Se observa que existen tres parámetros que se pueden modificar y permitirían medir una magnitud, tal como se ejemplifican en la Fig. 4.13. El primero es la permitividad,  $\varepsilon$ . Para ello se debe introducir entre las placas un material que modifique dicho parámetro en función de la magnitud que se desea medir. El siguiente parámetro que se puede utilizar es el área,  $A$ . Esto se consigue por medio de un desplazamiento lateral de los electrodos entre si, como se observa en la Ec. 4.45. En estos dos casos, la variación es lineal.

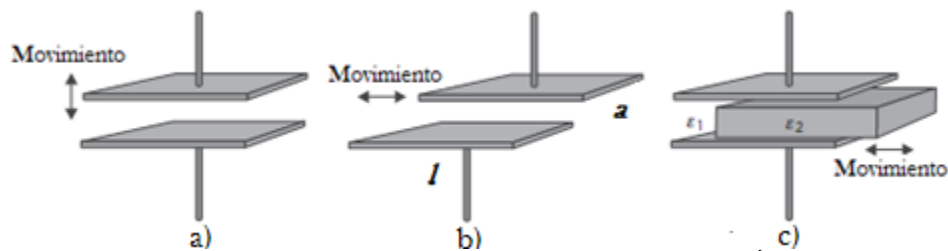


Fig. 4.13 Ejemplos de sensores de desplazamiento capacitivos: a)Placa móvil, b)Área variable y c)Dieléctrico móvil. [16]

$$C = \frac{(al)\varepsilon\varepsilon_0}{x} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{x}al = Kal \quad 4.45$$

Donde  $l$  y  $a$  son la longitud y el ancho de las placas, respectivamente. Se observa que se puede modificar, ya sea, la longitud o el ancho. [15]

Por último, se puede modificar la distancia entre las placas. Este suele ser el caso frecuentemente utilizado en sensores micromecánicos, ya que la distancia entre las placas suele ser de algunas micras, mientras que la longitud y el ancho de estas pueden tener valores de milímetros, por lo que el sistema es muy sensible a pequeñas variaciones de la distancia. En este caso la capacidad se rige por la siguiente ecuación:

$$C = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d - x} \quad 4.46$$

Donde  $d$  es la distancia original entre las placas y  $x$  es la variación del desplazamiento. De la Ec. 4.46 se observa que la variación es no lineal y, por lo tanto, precisará de un acondicionamiento posterior o haciendo trabajar al sensor en un rango pequeño que permita asegurar que el error cometido sea inferior al deseado.

Un sensor capacitivo puede ser monopolar (un capacitor), diferencial (dos capacitores) o emplearse un puente capacitivo (usando 4 capacitores). Cuando se utilizan dos o cuatro capacitores, uno o dos pueden ser fijos o variables. Un problema que aparece cuando se emplea un capacitor monopolar, es que la medida es absoluta y, por lo tanto, es necesaria una capacitancia de referencia para realizar la medición, lo cual obliga a efectuar una calibración previa, con los inconvenientes que esto conlleva.

Por este motivo, suelen realizarse mediciones con un sensor capacitivo diferencial. De esta manera, cualquier efecto común a ambos capacitores, como la temperatura o alguna otra interferencia, puede cancelarse entre sí, además, se evita la necesidad de utilizar una capacitancia de referencia, ya que esta se incluye dentro del propio sensor.

Considérese tres placas espaciadas una distancia  $d$ , cada una de área  $A$ , como se muestra en la Fig. 4.14. Las placas forman dos capacitores,  $C_1$  y  $C_2$ , cuyas capacitancias varían de forma inversa. La ecuación que describe a ambos capacitores es:

$$C_1 = \frac{A\epsilon}{d-x} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{A\epsilon}{d+x}$$

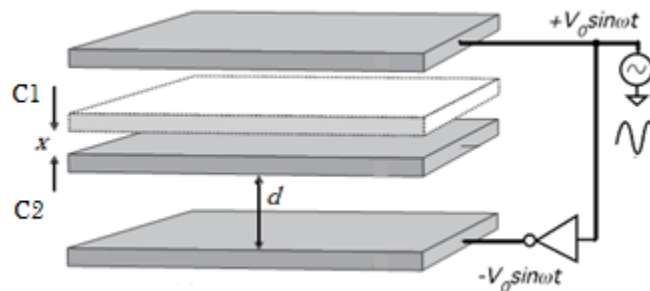


Fig. 4.14 Sensor capacitivo diferencial. [16]

En ambos casos la función es no lineal; pero, si calculamos la diferencia entre ambas se obtiene el siguiente resultado:

$$\Delta C = C_1 - C_2 = 2 \frac{A\epsilon}{d^2 - x^2} x \approx 2 \frac{A\epsilon x}{d^2} \quad 4.47$$

Se observa que la respuesta sigue siendo no lineal, pero, si  $x$  es mucho menor que  $d$ , es decir  $|x| \ll d$ , se puede considerar que el sistema es un sistema lineal y proporcional al valor de la capacitancia en equilibrio,  $x = 0$ . Esta configuración es capaz de detectar desplazamientos que ocasionan cambios en capacitancia de algunos cuantos femtofarads.

Cabe aclarar que, para esta configuración, las placas superior e inferior deben estar alimentadas con señales periódicas fuera de fase. Esto es, las fases están recorridas  $180^\circ$  una

de otra, como se muestra en la Fig. 4.14. De este modo, la fase de la señal de salida indica la dirección de la placa central, hacia arriba o hacia abajo, con lo cual se conserva el sentido de la aceleración. [17]

#### 4.4.1 Técnicas de Sensado Capacitivo

Hay una variedad de técnicas para medir cambios de capacitancia, entre las que podemos encontrar: los amplificadores de carga, las técnicas de balance de cargas, las mediciones de impedancias con puentes de AC y varias configuraciones con osciladores. A continuación se presentan algunas de las técnicas para sensado capacitivo. [16]

##### 4.4.1.1 Integrador de Carga y Seguidor de Voltaje

Dos configuraciones básicas para sensar cambios de capacitancia son: el seguidor de voltaje y el integrador de carga. Ambas configuraciones utilizan amplificadores operacionales, AO, como parte de su circuitería. Un AO es un circuito que amplifica la diferencia de voltaje entre sus dos entradas para producir una señal de salida,  $V_0 = A(V_2 - V_1)$ . Algunas de las características del AO ideal son:

- Ganancia diferencial muy alta ( $>10^5$ ).
- Impedancia de entrada infinita y por tanto su corriente de entrada es cero.
- Impedancia de salida cero, lo cual permite emular la salida de una fuente de voltaje ideal.
- Tiene un rechazo de modo común infinito y sólo la diferencia de  $V_1$  y  $V_2$  es amplificada.

La Fig. 4.15 muestra un seguidor de voltaje sensando las fluctuaciones de un capacitor diferencial formado por  $C_{S1}$  y  $C_{S2}$ .  $C_p$  es la capacitancia parásita equivalente presente en el sensor. Además,  $V_0$  es retroalimentado a la entrada inversora del AO. La Ec. 4.48 es una expresión de la conservación de carga en la entrada inversora. Reacomodando términos, la función de transferencia esta dada por la Ec. 4.49, como puede observarse de la ecuación, la ganancia es afectada por la capacitancia parásita y no puede exceder la unidad. Además, las capacitancias de sensado son una función no lineal del desplazamiento y la capacitancia parásita es una función no lineal del voltaje, lo que contribuye a la distorsión de la señal de salida.

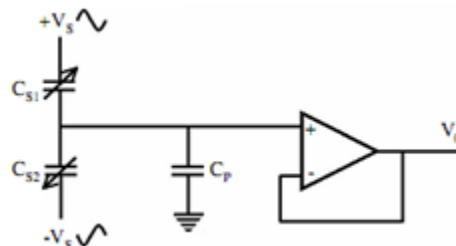


Fig. 4.15 Seguidor de voltaje. [12]

$$(V_S - V_0)C_{S1} - (V_0 + V_S)C_{S2} - V_0C_p = 0 \quad 4.48$$

$$\frac{V_0}{V_S} = \frac{C_{S1} - C_{S2}}{C_{S1} + C_{S2} + C_p} \quad 4.49$$

El integrador de carga, mostrado en la Fig. 4.16 y su función de transferencia en la Ec. 4.50, tiene mejor linealidad que el seguidor de voltaje y la capacitancia parásita no afecta a la función de transferencia. Para una implementación práctica del integrador de carga, un resistor en paralelo es utilizado para descargar rápidamente a  $C_1$ .

$$\frac{V_0}{V_S} = \frac{C_{S1} - C_{S2}}{C_1} \quad 4.50$$

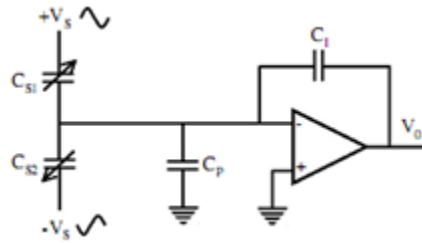


Fig. 4.16 Integrador de carga. [12]

#### 4.4.1.2 Capacitores Conmutados

Con la llegada de las técnicas de *capacitores conmutados*, ha crecido en popularidad un nuevo método de detección de capacitancia. La técnica de capacitores conmutados tiene algunas ventajas importantes sobre el seguidor de voltaje o el integrador de carga previamente mencionados.

En microelectrónica es posible hacer un conjunto de componentes casi iguales sobre silicio, pero es muy difícil hacer un componente con un valor preciso. De esta forma, la implementación de capacitores conmutados se basa sobre la razón entre dos capacitores y no sobre sus valores individuales. Además, los capacitores conmutados son fácilmente integrables e inmunes a las capacitancias parásitas.

Un ejemplo clásico en capacitores conmutados es la implementación de un resistor, como se muestra en la Fig. 4.17. Una resistencia de valor grande es costosa de implementar en microelectrónica, porque ésta es muy grande. Sin embargo, con la técnica de capacitores conmutados, un resistor puede implementarse con 2 interruptores MOS y un capacitor. Por ejemplo, los interruptores  $S_1$  y  $S_2$  están controlados por señales de reloj en contra fase, es decir, cuando  $S_1$  está cerrado,  $S_2$  está abierto, y así sucesivamente. Con  $S_1$  cerrado y  $S_2$  abierto, el capacitor es cargado. Cuando los interruptores conmutan, una carga  $\Delta q$  es transferida desde  $V_1$  hasta  $V_2$ . Cuando este proceso es repetido  $N$  veces en cierto tiempo, un flujo de carga,  $i$ , es establecido entre  $V_1$  y  $V_2$ , Ec. 4.51.

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = C_1(V_1 - V_2) \frac{N}{\Delta t} \quad 4.51$$



$$R = \frac{V_1 - V_2}{i} = \frac{1}{C_1 f_{clk}} \quad 4.52$$

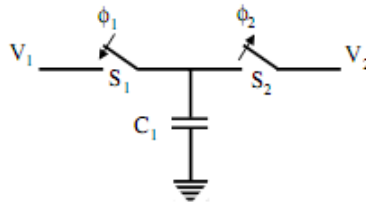


Fig. 4.17 Capacitor conmutado. [12]

Obsérvese que el lado izquierdo de la Ec. 4.51 es corriente,  $i$ , y el número de ciclos,  $N$ , por tiempo es la frecuencia del reloj,  $f_{CLK}$ . De esta forma, la ecuación puede reescribirse tal como se presenta en la Ec. 4.52. Donde, la resistencia,  $R$ , simulada por esta técnica es inversamente proporcional al valor del capacitor,  $C_1$ , y a la frecuencia del reloj,  $f_{CLK}$ . Además, el valor de  $R$  puede controlarse de forma externa con solo ajustar la frecuencia del reloj.

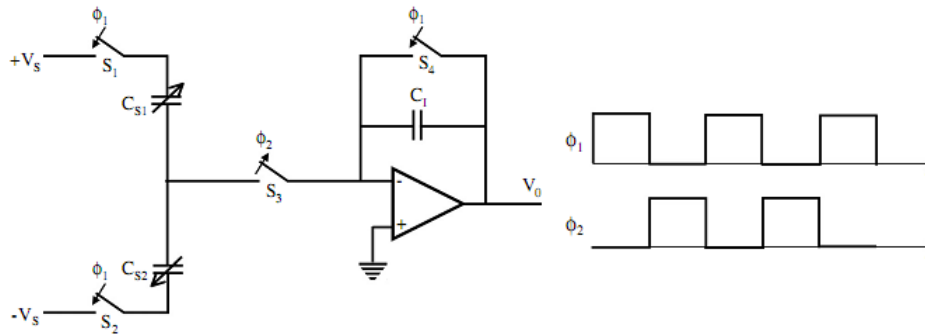


Fig. 4.18 Implementación de un integrador de carga con capacitores conmutados. [12]

La Fig. 4.18 muestra la implementación de un integrador con capacitores conmutados. La topología del circuito es la misma que la del integrador previamente discutido; sin embargo, el voltaje,  $V_S$ , es de DC y los cuatro interruptores operan sincronamente con dos señales de reloj en contrafase,  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ . Típicamente, las señales de reloj son generadas externamente y son aproximadamente 100 veces más grandes que las señales analógicas. A continuación se describe la operación del circuito:

- $\Phi_1$  esta en un nivel alto y  $\Phi_2$  esta en un nivel bajo:  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_4$  están cerrados y  $S_3$  esta abierto.  $V_0$  esta en 0 V y el capacitor  $C_1$  esta descargado. En esta fase, los capacitores  $C_{S1}$  y  $C_{S2}$  son cargados por las fuentes de voltaje  $+V_S$  y  $-V_S$ .
- $\Phi_1$  esta en bajo y  $\Phi_2$  en alto:  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_4$  están abiertos y  $S_3$  esta cerrado. Aquí,  $C_{S1}$  y  $C_{S2}$  son desconectados de las fuentes de voltaje y son conectados al AO. Como el AO no puede recibir corriente, las cargas en  $C_{S1}$  y  $C_{S2}$  son transferidas a  $C_1$ .

La función de transferencia para este circuito está dada por la Ec. 4.53, donde es fácil observar que la salida es lineal respecto al cambio de capacitancias. Además, para que el circuito sea inmune a las capacidades parásitas, entre la terminal inversora y tierra, el AO debe tener alta ganancia a bajas frecuencias.

$$V_0 = \left( \frac{C_{S1} - C_{S2}}{C_1} \right) V_s \quad 4.53$$

Una de las ventajas de esta técnica es la de generar una salida digital, mientras que la mayoría de las técnicas de detección de capacitancia generan una salida analógica. Sin embargo, el desarrollo anterior no es más que conceptual. La implementación de una medición con capacitores conmutados involucra una circuitería bastante complicada y de un control preciso en las señales del reloj para los interruptores.

#### 4.4.1.3 Puentes de AC

Además de las técnicas ya mencionadas, existen métodos habituales para sensores diferenciales tal como los puentes y los denominados pseudopuentes, recientemente desarrollados y basados en AO's. De la Fig. 4.19a, asumiendo que el detector es de alta impedancia, la función de transferencia del puente es:

$$T = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \quad 4.54$$

Si  $Z_2=Z_4$ , se dice que el puente está balanceado. Si la función está cercana al balance, puede considerarse como una función lineal de la impedancia responsable de la desviación del balance. Por otro lado, si se contemplan desviaciones grandes de la posición de balance es difícil alcanzar un comportamiento lineal. Pero, si reescribimos la función de transferencia como:

$$T = \frac{Z_2/Z_1}{1 + Z_2/Z_1} - \frac{Z_4/Z_3}{1 + Z_4/Z_3} \quad 4.55$$

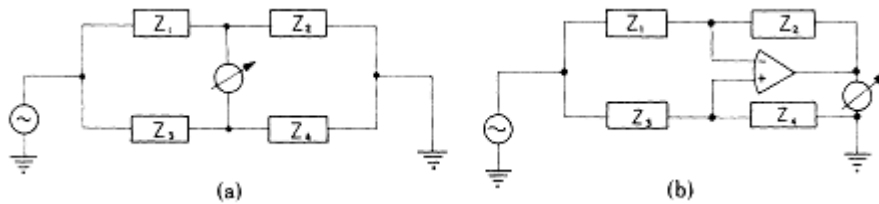


Fig. 4.19 a)Puente ordinario y b)Pseudopuente. [18]

Entonces, si se cumple que  $Z_2/Z_1 \ll 1$  y  $Z_4/Z_3 \ll 1$  es posible tener una función lineal para grandes desviaciones respecto del balance. En tal caso, la función de transferencia es:

$$T \cong \frac{Z_2}{Z_1} - \frac{Z_4}{Z_3} \quad 4.56$$

Sin embargo, la linealidad es lograda pero con una posible pérdida de sensibilidad, lo cual no es muy práctico. En contraste, la linealidad puede preservarse en el pseudopuente de la Fig. 4.19b, sólo si la relación  $Z_2/Z_1$  varía. Su función de transferencia es:

$$T = \frac{Z_4/Z_3 - Z_2/Z_1}{1 + Z_4/Z_3} \quad 4.57$$

Sin embargo, para una medición diferencial esta condición no se mantiene, inclusive es más pobre que en el caso de un puente simple.

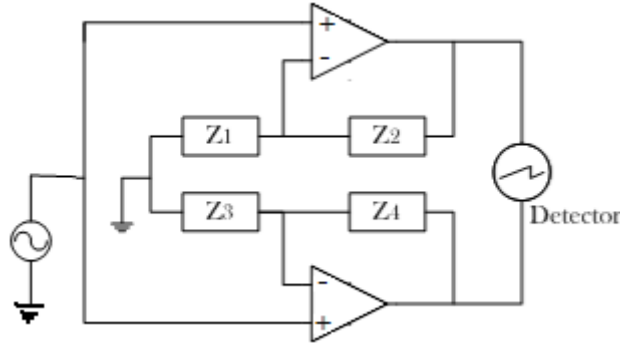


Fig. 4.20 Puente mejorado con salida lineal. [18]

En [18] se propone el arreglo de la Fig. 4.20, el cual es capaz de operar linealmente sobre un rango amplio de capacitancia diferencial. Esta posibilidad se observa por la simplicidad de su función de transferencia. El arreglo es simétrico y está basado en dos circuitos amplificadores que contienen un medio puente de AC cada uno. Las funciones de transferencia para el circuito superior e inferior son:

$$T_S = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1} \quad T_I = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_4} \quad 4.58$$

Esta relación es válida solo si los AO's tienen una alta ganancia en lazo abierto en la frecuencia utilizada. La función de transferencia del puente es:

$$T = T_S - T_I = \frac{Z_2}{Z_1} - \frac{Z_3}{Z_4} \quad 4.59$$

Si  $Z_1$  y  $Z_3$  representan a los capacitores variables, se tiene la ventaja de incorporar una terminal común aterrizada, con lo cual se pueden eliminar efectos parásitos. Si las impedancias  $Z_1$  y  $Z_3$  son puramente capacitivas, es decir  $1/j\omega C_1$  y  $1/j\omega C_3$ , y  $Z_2 = Z_4$ , entonces:

$$T = j\omega Z_2 (C_1 - C_3) \quad 4.60$$

La cual es proporcional a la diferencia de los capacitores. Así, tenemos un instrumento capacitivo lineal, ya sea para una operación monopolar o diferencial. Sin embargo, en [18] proponen algunas modificaciones en el sistema para evitar inestabilidades, debidas a oscilaciones y ruido. Una de estas es la adición de capacitores y resistencias, como se muestra en la Fig. 4.21. Donde, si las impedancias agregadas son iguales, la característica diferencial del puente no se ve alterada.

$$Z_2 = Z_4 = Z, \quad Z_1 = \frac{1}{1/R + j\omega C_1} \quad y \quad Z_3 = \frac{1}{1/R + j\omega C_3}$$

Por lo tanto:

$$T = Z \left[ \left( \frac{1}{R} + j\omega C_1 \right) - \left( \frac{1}{R} + j\omega C_3 \right) \right] = j\omega Z (C_1 - C_3) \quad 4.61$$

La cual preserva la forma de la Ec. 4.60. Además, se propone que  $C_1$  y  $C_3$  estén compuestos por dos capacitores en paralelo, uno de los cuales sea fijo para incrementar la estabilidad del sistema, mientras que el segundo sea de menor capacitancia, la contribuida por uno de los lados del sensor diferencial. También, en [18] se propone el uso de un trimmer para facilitar un balance extra en el circuito.

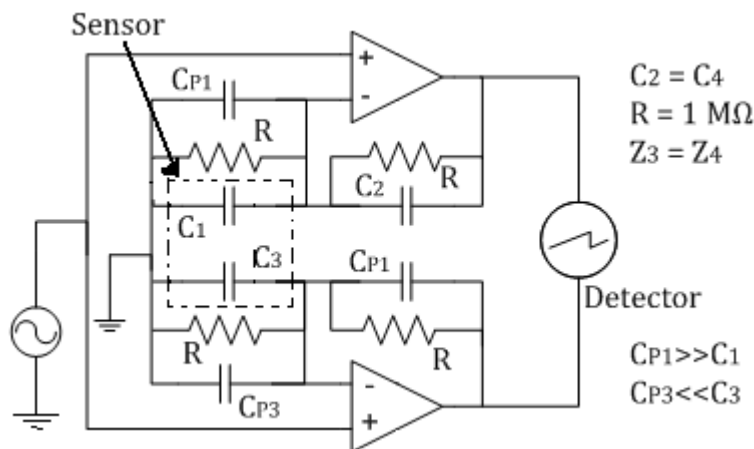


Fig. 4.21 Implementación del puente mejorado para medición de capacitancia. [18]

Entre las ventajas del arreglo, tenemos que, puede emplearse para sensores monopoles y diferenciales, construirse con componentes discretos y tiene sensibilidad muy alta: detecta cambios de capacitancias del orden de  $10^{-15}$  F.

#### 4.4.2 Capacitancias Parásitas

Frecuentemente, las magnitudes de las capacitancias parásitas son más grandes que la capacitancia nominal y dinámica del dispositivo. De este modo, las capacitancias parásitas pueden causar errores en el sensado. Las capacitancias parásitas pueden minimizarse mediante un buen diseño en la geometría de la estructura y/o la integración en uno solo chip del sensor y de la estructura mecánica.

Las capacitancias parásitas incrementan todas las constantes eléctricas de tiempo del dispositivo y limitan la frecuencia en la cual pueden cargarse y descargarse las capacitancias; ocasionando un efecto adverso sobre la interfaz del sensor. Por tanto, es vital considerar las capacitancias parásitas en el diseño de un sensor capacitivo.

### 4.4.3 Amplitud Modulada

Supóngase que un circuito detector de capacitancia es alimentado con una señal de AC de frecuencia  $\omega_c$ , como es el caso del puente de la Fig. 4.22. Si la frecuencia de excitación,  $\omega_c$ , es mucho más grande que la frecuencia,  $\omega$ , del cambio en capacitancia causado por la excitación física, tal como una aceleración o una presión, entonces la excitación, Ec. 4.62, combinada con el cambio de capacitancia,  $C + \Delta C \cos \omega t$ , producen una señal de salida modulada en amplitud, como se observa en la Ec. 4.63.

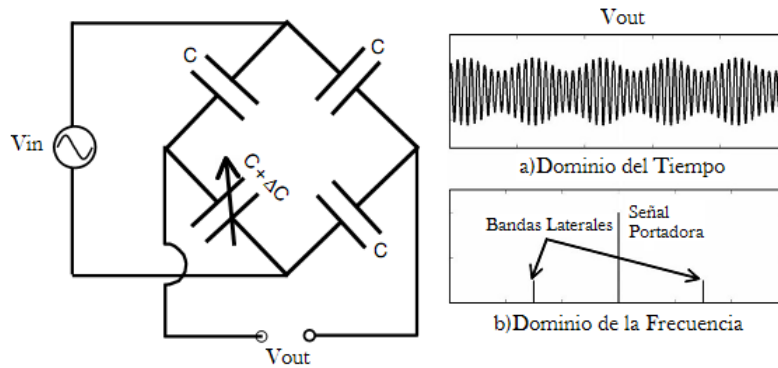


Fig. 4.22 Circuito puente de AC y modulación AM. [12]

$$V_{in} = A \cos \omega_c t \quad 4.62$$

$$V_{in}(C + \Delta C \cos \omega t) = AC \cos \omega_c t + \frac{A\Delta C}{2} \cos(\omega_c - \omega)t + \frac{A\Delta C}{2} \cos(\omega_c + \omega)t \quad 4.63$$

Por tanto, la modulación en amplitud, AM, en este tipo de sensores surge de la multiplicación entre la señal de excitación, señal portadora, y la señal del sensor, señal moduladora. Obviamente, un sensor de este tipo necesita demodular la señal de salida para obtener la señal causada por la excitación física.

De lo anterior se deduce que la señal de excitación debe ser muy estable, pues de lo contrario sus fluctuaciones se interpretarían como variaciones de la señal del sensor. Por otro lado, el ancho de banda del sensor debe ser al menos cinco o diez veces inferior a  $\omega_c$  para que la demodulación sea sencilla. De no ser así, los filtros paso bajo necesarios deberán ser de orden muy alto. Además, la demodulación debe ser síncrona; si no fuera así, se realizaría una mera detección de envolvente (rectificación y filtrado paso bajo) y se perdería el signo de la señal del sensor.

#### 4.4.3.1 Demodulación de AM en Cuadratura

En 4.4 vimos que un capacitor diferencial tiene un mejor desempeño que un simple capacitor, por tanto, a la salida se obtiene la diferencia de estas dos señales de AM. Por lo que necesitamos demodular estas dos señales de información empleando una demodulación de amplitud.

Lo anterior se logra utilizando una *AM en cuadratura*. En este esquema se generan dos portadoras a la misma frecuencia, pero con una separación de fase de  $90^\circ$ . Así, cada una es modulada por una señal de información separada y se suman las dos señales restantes. Para recuperar las señales de la información la suma de señales es multiplicada por dos portadoras de igual frecuencia, pero con una separación de fase de  $90^\circ$  y filtrando las señales resultantes con un filtro paso bajas, tal como se ejemplifica en la Fig. 4.23.

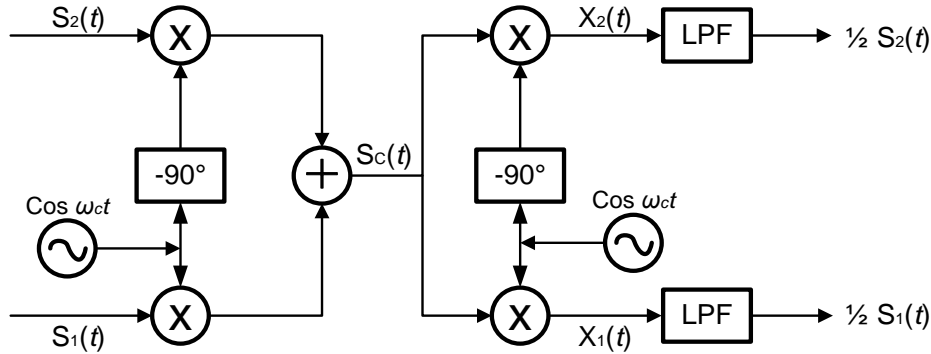


Fig. 4.23 Modulación y demodulación en cuadratura. [19]

Considerar dos señales  $S_1(t)$  y  $S_2(t)$ , si estas señales modulan a las portadoras  $\text{Cos } \omega_c t$  y  $\text{Sen } \omega_c t$ , respectivamente, la AM en cuadratura es de la forma:

$$S_c(t) = S_1(t) \text{Cos } \omega_c t + S_2(t) \text{Sen } \omega_c t \quad 4.64$$

Las dos señales tienen el mismo ancho de banda y son demoduladas por el detector síncrono, Fig. 4.23. La señal  $x_1(t)$  en la entrada del filtro pasa bajas (LPF) inferior es:

$$x_1(t) = S_c(t) \text{Cos } \omega_c t = (S_1(t) \text{Cos } \omega_c t + S_2(t) \text{Sen } \omega_c t) \text{Cos } \omega_c t \quad 4.65$$

$$x_1(t) = S_1(t) \text{Cos}^2 \omega_c t + S_2(t) \text{Sen } \omega_c t \text{Cos } \omega_c t \quad 4.66$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} S_1(t) + \frac{1}{2} S_1(t) \text{Cos } 2\omega_c t + \frac{1}{2} S_2(t) \text{Sen } 2\omega_c t \quad 4.67$$

Entonces, a la salida del filtro tenemos  $\frac{1}{2} S_1(t)$ . Los otros dos términos representan la portadora en cuadratura y son removidos por el LPF. Por otro lado, la entrada en el filtro superior es:

$$x_2(t) = S_c(t) \text{Sen } \omega_c t = S_1(t) \text{Cos } \omega_c t \text{Sen } \omega_c t + S_2(t) \text{Sen}^2 \omega_c t \quad 4.68$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} S_1(t) \text{Sen } 2\omega_c t - \frac{1}{2} S_2(t) \text{Cos } 2\omega_c t + \frac{1}{2} S_2(t) \quad 4.69$$

Por lo tanto, la salida del filtro superior es  $\frac{1}{2} S_2(t)$ . De esta forma, a la salida de cada filtro se tienen las señales de interés previamente demoduladas y con la información de fase, la cual da el sentido de la aceleración.

# Diseño del Microacelerómetro

Los acelerómetros son uno de los sensores más utilizados para detectar y medir movimientos. Los acelerómetros MEMS tienen su principal aplicación en los sistemas de sensado de impactos, para despliegue de bolsas de aire, en automóviles. En general el mercado de los microacelerómetros ha crecido de forma constante. El incremento en el volumen de ventas ha sido acompañado por un decremento constante en el precio para las aplicaciones automotrices.

## 5.1 Especificaciones de un Acelerómetro

Todos los acelerómetros tienen una estructura básica que consiste de una masa inercial suspendida de un resorte. Sin embargo, existen diversos tipos de acuerdo al método utilizado para sensar la posición de la masa inercial, cuando se desplaza bajo el efecto de una aceleración aplicada externamente. El sensado capacitivo es un método de sensado común, en el cual, la masa funge como una de las placas del capacitor.

Las principales especificaciones de un acelerómetro son:

- Rango, frecuentemente dado en G, la aceleración gravitacional de la Tierra que corresponde a  $1G = 9.8 \text{ m/s}^2$ .
- Sensibilidad, definida como el voltaje entre la gravedad (V/G).
- Ancho de Banda, dado en Hz.
- Sensibilidad de ejes cruzados.
- Inmunidad a los choques.

El rango y el ancho de banda varían significativamente, dependiendo de la aplicación. Los acelerómetros para sensado de impactos son estimados para un rango de  $\pm 50G$  y un ancho de banda de 1 kHz, aproximadamente. En contraste, los dispositivos para medir vibraciones tienen un rango de  $\pm 1G$ , aproximadamente, con un ancho de banda superior a los 10 kHz. Los dispositivos cardíacos modernos que incorporan acelerómetros multi-ejes, para monitorear el nivel de la actividad humana, tiene rangos de  $\pm 2G$  y un ancho de banda menor a 50 Hz, pero requieren un consumo mínimo de potencia, para un alto rendimiento de la batería. Los acelerómetros para aplicaciones militares frecuentemente exceden el rango de las 1000G. [2]

La sensibilidad a los movimientos de ejes cruzados evalúa la inmunidad del sensor a aceleraciones a lo largo de las direcciones perpendiculares al eje principal de movimiento. La razón de rechazo al movimiento de ejes cruzados debe ser casi nula, de manera que ésta no afecte el desempeño del microdispositivo. La inmunidad a los choques es una especificación importante pero un tanto subjetiva, para la protección durante la operación del dispositivo. Alguien esperaría que esta especificación se cuantificara en unidades de aceleración, pero

ésta es definida por una prueba peculiar, la cual consiste en dejar caer al dispositivo sobre concreto desde una altura de un metro; el impacto puede alcanzar un pico de hasta 10,000G.

En 3.3 se discutió la ecuación diferencial de segundo orden, Ec. 5.1, que modela a un sistema masa, resorte y amortiguador y se determinó que el diseño de un acelerómetro depende del amortiguamiento del sistema, ya que la cantidad de amortiguamiento determina la respuesta dinámica del sensor.

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = ma \quad 5.1$$

Como se vio, este tipo de sistemas tienen una respuesta muy rápida con un pequeño sobrepaso en su amplitud. Como los acelerómetros necesitan sensor señales que contienen una combinación de muchas frecuencias, deben considerarse dos aspectos importantes para el diseño de un acelerómetro, los cuales son la distorsión de amplitud y la distorsión de fase. Para evitar la distorsión de amplitud, la función de transferencia debe amplificar de igual forma señales de diferentes frecuencias. Esto significa que, la magnitud de la respuesta en frecuencia debe ser plana dentro del rango de operación, lo cual ocurre en bajas frecuencias, como se muestra en la Fig. 3.23. Para evitar la distorsión de fase, la fase de las componentes armónicas de la señal deben incrementarse linealmente con la frecuencia. De la sección 3.3, se concluyó que, con un factor de amortiguamiento de  $\xi \approx 0.7$ , prácticamente, se elimina la distorsión de fase, pero se restringe el rango de operación de  $0 \leq \omega/\omega_c \leq 0.2$  y también se minimiza la distorsión de amplitud. De este modo, los acelerómetros son diseñados para tener un factor de amortiguamiento de  $\xi \approx 0.7$ .

La sensibilidad mecánica de un acelerómetro,  $S_M$ , es la relación entre la deflexión relativa de la masa inercial,  $z$ , y la aceleración,  $a$ , aplicada a la masa. Como el rango de operación del acelerómetro es en bajas frecuencias, donde  $\omega \approx 0$ , aproximadamente, la aceleración aplicada puede aproximarse como una aceleración constante balanceada por la suspensión, Ec. 5.2. De esta manera la sensibilidad mecánica,  $S_M$ , de un acelerómetro esta dada por la Ec. 5.3:

$$kz = ma \quad 5.2$$

$$S_M = \frac{m}{k} \quad 5.3$$

## 5.2 Antecedentes de Microacelerómetros Capacitivos

Un acelerómetro (del tipo de sensado de capacitancia diferencial) esta compuesto de una masa de prueba o inercial, uno o más resortes de torsión y dos o más electrodos. Como se vio en 4.4, el tipo de sensado de capacitancia diferencial mide la diferencia en capacitancia producida en cada electrodo. Este tipo de sensado es superior al tipo de sensado de un solo capacitor, ya que tiene un mayor rango de salida lineal y no es afectado por factores externos como los cambios en temperatura, humedad, etc.



### 5.2.1 Serie SCA de VTI Technologies

Muchas compañías ofrecen sensores de aceleración capacitivos fabricados, entre otros, por micromaquinado volumétrico. La mayoría de estos son únicos en su diseño y proceso de fabricación. Por ejemplo, la serie SCA de VTI Technologies de Vantaa, Finlandia. El sensor esta compuesto de 3 obleas de silicio unidas, teniéndose en la oblea de en medio una viga cantiléver y una masa inercial. La masa inercial constituye el electrodo móvil de un capacitor variable. Las obleas de los extremos son idénticas y forman los electrodos fijos del capacitor diferencial, tal como se muestra en la Fig. 5.1.

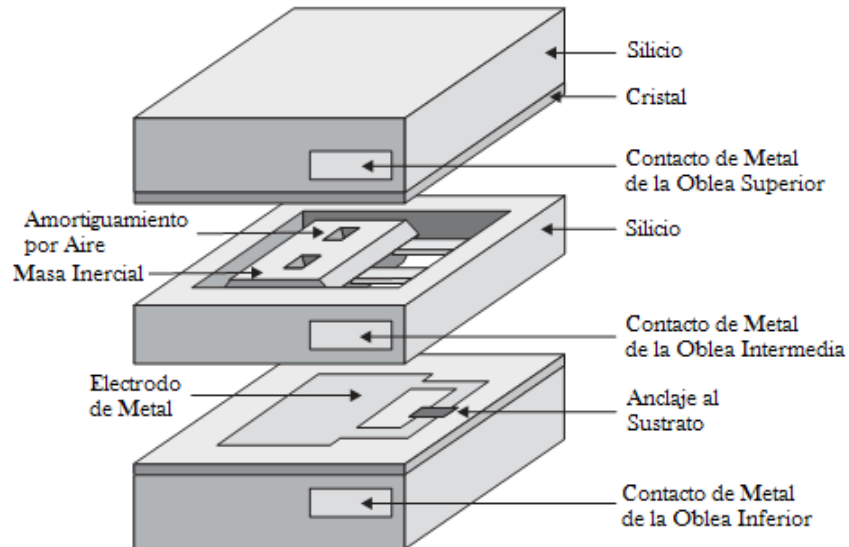


Fig. 5.1 Ilustración de un acelerómetro capacitivo micromaquinado producido por VTI Technologies de Vantaa, Finlandia. [2]

Las perforaciones de la masa inercial reducen el efecto del amortiguamiento por aire circundante en la cavidad, incrementando el ancho de banda del sensor. La serie SCA esta disponible en un rango de medición desde  $\pm 0.5G$  hasta  $\pm 12G$ , con un voltaje de salida entre 0 y 5V. Para el acelerómetro de  $\pm 12G$ , su ancho de banda es hasta de 400 Hz, la sensibilidad de ejes cruzados es menor al 5% de la salida y la inmunidad a los choques es de 20,000G. Los procesos de fabricación de VTI Technologies no están disponibles públicamente.

### 5.2.2 El Microacelerómetro Torsional, Capacitivo y Vertical

En 2004 fue publicado en Elsevier Sensors and Actuators A, Physical, el artículo: *Development and Analysis of the Vertical Capacitive Accelerometer*. En dicho artículo los autores reportan el proceso de fabricación utilizado para construir el acelerómetro, también referido como el TXL, mostrado en la Fig. 5.2, definen algunas variables de diseño para maximizar la sensibilidad y evitar el efecto *pull-in* del TXL. Después de fabricar el acelerómetro, los autores verifican la optimización del diseño midiendo la capacitancia y los modos de vibración del TXL con y sin fuerza eléctrica.

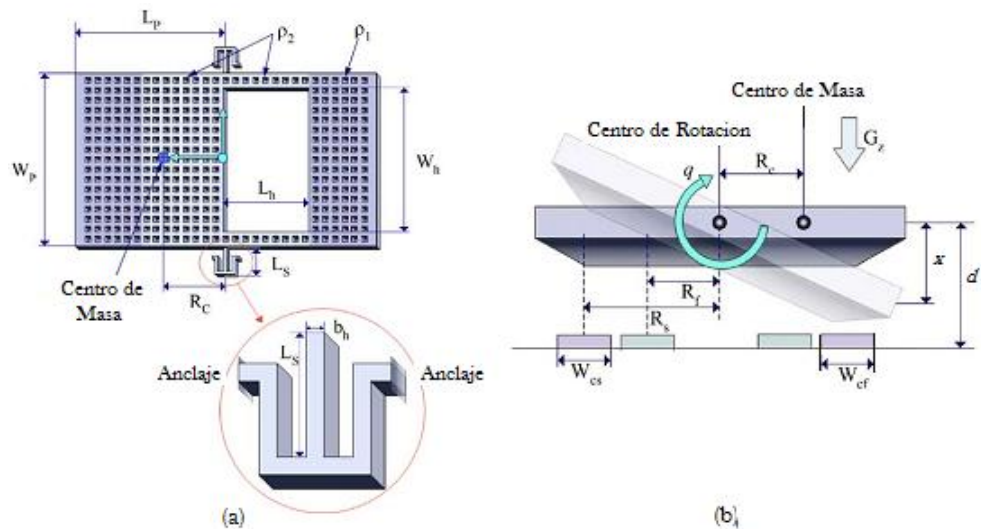


Fig. 5.2. a) Vista superior y b) Vista de la sección transversal del TXL. [20]

Para incrementar la sensibilidad del TXL, los autores deben maximizar el ángulo de torsión de las vigas cantiléver. Las variables que afectan la sensibilidad del sensor son: la longitud de las vigas ( $L_s$ ); el ancho ( $W_h$ ) y el largo ( $L_h$ ) de la perforación de la masa, la cual habilita el movimiento de torsión a las vigas cantiléver; y el ancho de los electrodos ( $W_{cs}$ ). Los resultados obtenidos son:

Variable de Diseño	Descripción	Valor Optimizado [ $\mu\text{m}$ ]
$L_h$	Longitud de la Perforación	349.5
$W_h$	Ancho de la Perforación	1399.5
$L_s$	Longitud de las Vigas Cantiléver	127.95
$W_{cs}$	Ancho de los Electrodos	199.5

Tabla 5.1 Resultados de la optimización de las variables de diseño del TXL. [20]

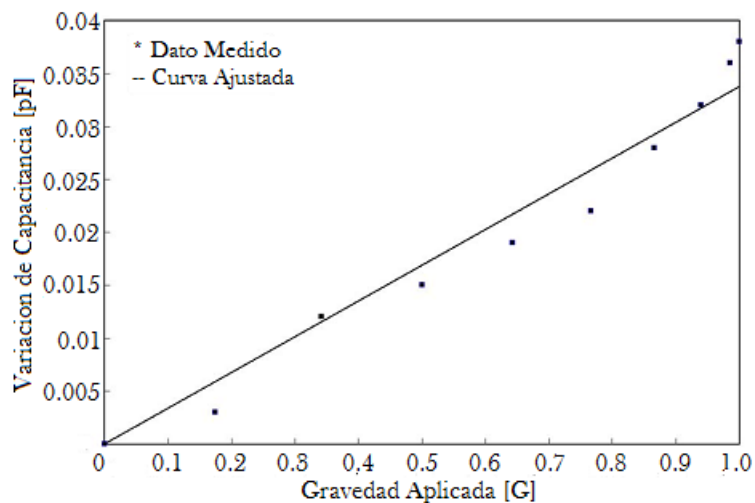


Fig. 5.3 Medición de capacitancia contra gravedad aplicada. [20]

Además, los autores presentan los resultados obtenidos en capacitancia contra la gravedad aplicada, Fig. 5.3, y comparan los modos de vibración naturales teóricos con los obtenidos experimentalmente:

Modo	Valor Teórico [Hz]	Valor Experimental [Hz]	Error [%]
1er.	1,346	1,463.4	8.72
2do.	17,060	14,588	14.49

Tabla 5.2 Modos de vibración sin fuerza eléctrica. [20]

Al aplicar un voltaje entre 0 y 6 V, con incrementos de 0.5 V, los autores observan que los modos de vibración decrecen rápidamente cuando se incrementa el voltaje de DC aplicado.

### 5.3 Diseño del Microacelerómetro

En las siguientes secciones se hace uso de la teoría ya establecida y de la herramienta Coventor, la cual es una paquetería de cómputo para diseño de MEMS, para obtener todos los parámetros que han sido tratados en el presente trabajo y, de esta forma, obtener un prototipo propio, basado en la estructura del TXL.

#### 5.3.1 Selección del Proceso de Fabricación

En 1.3 se expuso que uno de los objetivos del presente trabajo es utilizar un proceso de fabricación comercial para desarrollar el TXL. De la Ec. 5.3, para tener una sensibilidad alta, entre otras cosas, el TXL debe ser de masa considerable, lo cual se logra con una estructura grande o con un material estructural que tenga una densidad grande.

Considerando lo anterior y lo visto en 2.5, referente a los procesos de fabricación MUMPS, concluimos que los procesos SOIMUMPS y MetalMUMPS pueden ser factibles de utilizar, debido a que su capa estructural tiene un espesor considerable, 25  $\mu\text{m}$  y 40  $\mu\text{m}$ , respectivamente. Por otra parte, el proceso PolyMUMPS es descartado debido a que sus capas estructurales son de menor espesor. Respecto a la densidad del material, el cobre, utilizado en MetalMUMPS, es casi 4 veces más denso que el silicio, que es el material utilizado en SOIMUMPS. Por lo anteriormente expuesto, se decidió en principio utilizar el proceso MetalMUMPS para desarrollar el acelerómetro, aunado a que en MetalMUMPS es posible incorporar tanto la masa inercial como los electrodos, caso contrario a SOIMUMPS, donde no es posible construir la masa inercial y los electrodos en una misma oblea.

De esta forma, se realizaron pruebas en Coventor utilizando el proceso MetalMUMPS. Sin embargo, los resultados obtenidos no fueron satisfactorios. Una de las pruebas hechas fue aplicar distintos valores de aceleración a la estructura, entre 0 y 50 veces G. Para una gravedad de  $G=0$ , el resultado esperado era que la estructura se mantuviera plana y con un pequeño desbalance, debido al propio peso de la estructura y de la ubicación de su centro de

masa. Sin embargo, el resultado obtenido en  $G=0$  fue que, la estructura se alabeaba<sup>⊗</sup> o deformaba considerablemente, esta condición se mantiene hasta aplicar una fuerza mayor a  $20G$ , aproximadamente, lo cual no es práctico.

Al respecto, James Allen expone en [12] que, el comportamiento de un dispositivo MEMS es influido considerablemente por el esfuerzo residual del material. Este esfuerzo puede causar cambios significativos en la forma, además de modificar los parámetros de operación del dispositivo.

Cuando es depositada una película delgada de material sobre un sustrato, se presenta un esfuerzo residual, causado por los diferentes coeficientes de expansión térmica de los materiales y por las condiciones de deposición, entre otros.

El esfuerzo residual puede ser de compresión o de tensión. Una película delgada con esfuerzo residual de compresión depositada sobre una oblea se expandirá causando que la oblea se doble, tal como se muestra en la Fig. 5.4a. Sin embargo, una película delgada con esfuerzo residual de tensión depositada sobre una oblea se contraerá causando que la oblea se doble, tal como se ejemplifica en la Fig. 5.4b.

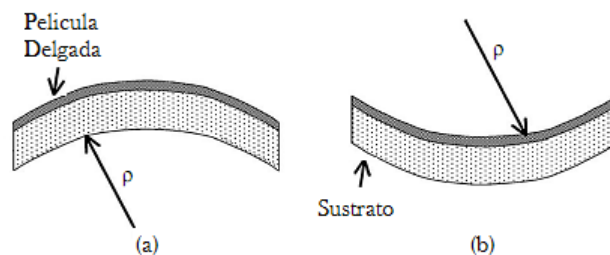


Fig. 5.4 Película delgada con esfuerzo residual de: a)Compresion y b)Tension. [12]

Por esta razón, el proceso MetalMUMPS no es adecuado para el desarrollo de nuestro diseño. En cambio, el proceso SOIMUMPS si es una buena opción, ya que los materiales empleados en este proceso tienen un esfuerzo residual menor que los utilizados en el proceso MetalMUMPS. Por lo que se determinó que, el acelerómetro se diseñará con el proceso SOIMUMPS.

### 5.3.2 Diseño Mecánico

El objetivo del diseño mecánico es obtener una estructura que tenga un movimiento lo más simétrico posible, respecto al eje de rotación de la estructura, y una sensibilidad alta, respecto a la fuerza aplicada, además de fijar las condiciones para que la estructura tenga un factor de amortiguamiento de  $\xi \approx 0.7$ , aproximadamente.

En 2.5.3 se revisaron las reglas de diseño del proceso SOIMUMPS, las cuales definen las capas de material empleadas, el tamaño de las características mínimas y el espacio entre cada

<sup>⊗</sup> Por alabeo se entiende como la torsión que sufre una tabla o cualquier superficie que no queda toda en un plano.

nivel litográfico para asegurar una correcta fabricación. Lo anterior restringe las dimensiones mínimas y máximas que se pueden utilizar en nuestro prototipo.

Debido a la naturaleza del proceso, tenemos la necesidad de emplear dos obleas para el diseño del acelerómetro, ya que el proceso solo tiene una capa estructural, por lo que no es posible fabricar un par de placas paralelas separadas. De esta forma, en una oblea se diseñará la masa inercial anclada por las dos barras de torsión junto con un revestimiento metálico en la parte inferior que funciona como una de las caras de los capacitores; mientras que en la otra oblea se diseñarán los electrodos, la otra cara de los capacitores. Una ventaja de utilizar dos obleas es el que nosotros podemos fijar la separación, gap, entre las placas paralelas de los electrodos.

Si utilizamos la capa de Silicio para fabricar la masa y las barras de torsión y la capa Pad Metal, capa metálica, para fabricar los electrodos sobre la masa, debemos fijar las dimensiones mínimas del diseño. Puesto que las dimensiones de la masa son grandes, solo es necesario fijar las dimensiones mínimas de las barras de torsión. Como regla de diseño obligatoria, de 2.5.3, la capa Pad Metal debe estar rodeada por la capa de Silicio al menos con  $3\ \mu\text{m}$  en cada lado, además, la característica mínima de la capa Pad Metal debe ser al menos de  $3\ \mu\text{m}$ . La característica mínima de la capa de Silicio es de  $2\ \mu\text{m}$  y para que la capa de Silicio quede anclada al Sustrato, la capa de Silicio debe extenderse  $50\ \mu\text{m}$  sobre el Sustrato. De lo anterior, concluimos que el ancho de las vigas debe ser al menos de  $9\ \mu\text{m}$  para asegurar una fabricación confiable, mientras que la longitud no está restringida y el espesor de la masa es fijo,  $25\ \mu\text{m}$ .

La Fig. 5.5 muestra una vista oblicua del acelerómetro. Este es una placa de Silicio de  $25\ \mu\text{m}$  de espesor (color verde) soportada por dos barras de torsión, con dos electrodos en la parte inferior, capa metálica de  $0.52\ \mu\text{m}$  de espesor (capa morada).

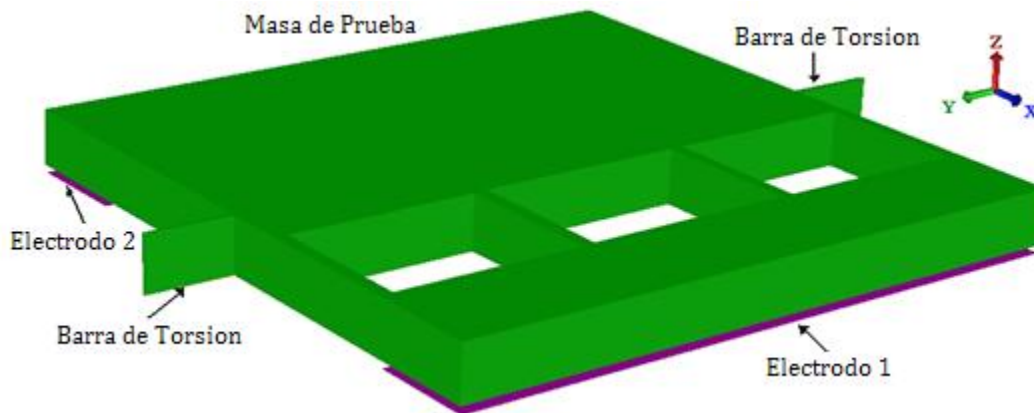


Fig. 5.5 Vista oblicua del microacelerómetro.

En 3.2.6 vimos que la frecuencia natural de la estructura está dada por la Ec. 3.114. Donde  $k_\phi$  está definida por las dimensiones de las barras de torsión e  $I_\phi$  por las dimensiones de la masa. Uno de los objetivos del presente trabajo es tener un microacelerómetro con un amplio ancho de banda útil, por lo que proponemos un ancho de banda entre 400-1000 Hz. De lo anterior y por lo visto al principio de esta sección, concluimos que la frecuencia natural de la estructura debe estar entre 2-5 kHz, aproximadamente.

Reescribiendo y comparando las Ecs. 3.108 y 3.114 de la sección 3.2, tenemos que:

$$k_{\phi} = \frac{T}{\phi} = \frac{k_1 G a^3 b}{L} \quad 5.4$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{\phi}}{I_{\phi}}} \quad 5.5$$

De la Ec. 5.4, si  $L$  y  $b$  se mantienen constantes y variamos el ancho de las barras,  $a$ , tenemos que la constante de torsión es proporcional al valor cúbico de  $a$  y como estamos trabajando en el microdominio, para una  $a$  pequeña  $k_{\phi}$  será pequeña, resultando en una estructura poco rígida y muy sensible; por el contrario si  $a$  es grande, la estructura será muy rígida y poco sensible a la aceleración aplicada. De la Ec. 5.5, si  $I_{\phi}$  se mantiene constante, tenemos que, para una  $k_{\phi}$  pequeña la frecuencia natural,  $\omega_n$ , será pequeña; por el contrario, si  $k_{\phi}$  es grande  $\omega_n$  será grande.

Tomando en consideración el análisis anterior y los resultados obtenidos para las variables de diseño en [20], se procede a establecer las dimensiones del microacelerómetro. Se utilizó Coventor para simular el comportamiento mecánico del acelerómetro. El objetivo era lograr un movimiento lo más simétrico posible, respecto al eje de rotación de la estructura, y una sensibilidad lo más alta posible. En base a lo anterior, en la Fig. 5.6 se muestra la estructura que cumple las condiciones anteriormente expuestas. De dicha figura, en color verde se muestra la capa de Silicio, con la cual se diseñó la masa de prueba anclada en dos de sus lados por dos barras de torsión, y en color amarillo se muestra la capa Pad Metal, anclada a la capa de Silicio, con la cual se diseñó la otra de las caras de los electrodos.

En la Tabla 5.3 se muestran los resultados obtenidos en Coventor:

Variable	Valor
Masa de la estructura, $M$	$108.66 \times 10^{-9}$ kg
Centro de masa, $(x,y,z)$	$(81.92, 0, 15.09)$ $\mu\text{m}$
Momento de inercia, $I_{\phi}$	$23.429 \times 10^{-15}$ kg m <sup>2</sup>
Frecuencia natural de vibración, $f_n$	2970.66 Hz

Tabla 5.3 Resultados obtenidos en Coventor.

De los resultados anteriores y de la Ec. 5.5 calculamos la constante de torsión:

$$k_{\phi} = I_{\phi} \omega_n^2 = 8.16243 \times 10^{-6} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

De esta forma, solo falta determinar las condiciones para lograr un factor de amortiguamiento  $\xi \cong 0.7$ . En 3.3 se determinó que el factor de amortiguamiento esta dado por la ecuación:

$$\xi = \frac{C}{2I_{\phi}\omega_n} \quad 5.6$$

Para las condiciones actuales de diseño y considerando  $\xi \cong 0.7$ , requerimos una constante de amortiguamiento  $C = 612.1 \times 10^{-12} \text{ Nms/rad}$ , aproximadamente.

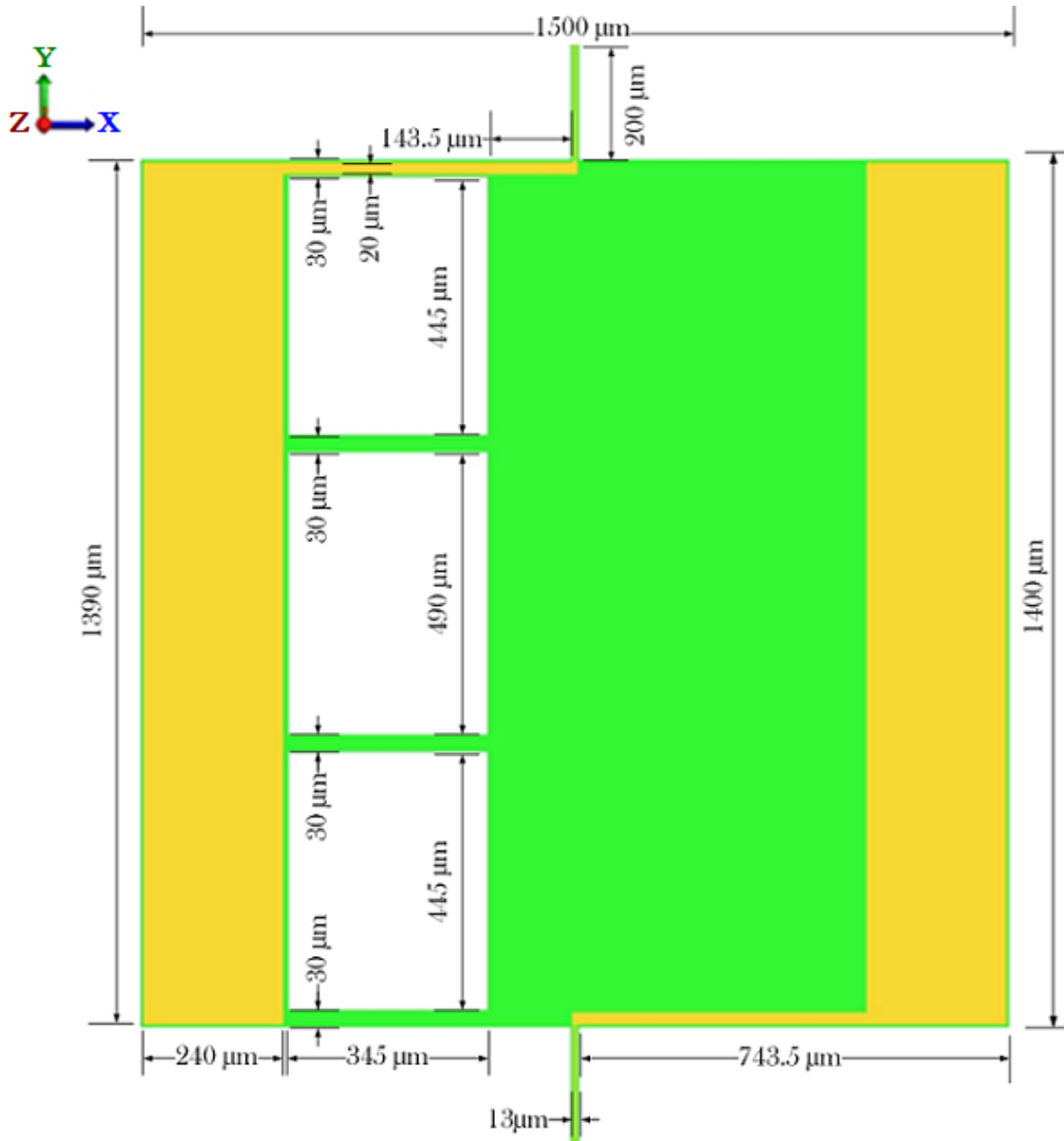


Fig. 5.6 Vista inferior del microacelerómetro.

Las dos vigas son excluidas del análisis porque su fuerza de amortiguamiento es insignificante comparada con la fuerza de amortiguamiento causada por el movimiento de la masa de prueba. En 3.1.3 se revisaron algunos modelos de amortiguamiento y debido a que la masa de prueba se mueve hacia los electrodos, se considera un amortiguamiento por película comprimida para una placa rectangular. Para este caso, se decidió que el espacio entre las placas (gap) sea  $2 \mu\text{m}$ . Sin embargo, a presión atmosférica ( $1 \text{ atm} = 106,300 \text{ Pa}$ ), el factor de

amortiguamiento es  $\xi \cong 35.1$ , aproximadamente, según el procedimiento descrito en 3.1.3.4, por lo tanto, esta estructura deberá encontrarse en un medio con una presión mucho menor.

Finalmente, la ecuación de movimiento que describe el comportamiento mecánico de la microestructura es:

$$I_\phi \ddot{\phi} + C\dot{\phi} + k_\phi \phi = R_C m G \quad 5.7$$

Donde,  $R_C$ ,  $m$  y  $a$  son la distancia del eje de rotación al centro de masa de la estructura, la masa de la estructura y la aceleración aplicada. La sensibilidad esta dada por la Ec. 5.8.

$$S_M = \frac{\phi}{G} = \frac{R_C m}{k_\phi} \quad 5.8$$

### 5.3.3 Diseño Electrónico

Los objetivos son obtener las dimensiones de los electrodos para sensar la capacitancia diferencial, establecer el rango de medición teórico del microdispositivo y definir el circuito electrónico para sensar los cambios de capacitancia.

Las dimensiones de los electrodos deben ser grandes para generar una capacitancia diferencial lo mas grande posible. Como ya se mencionó, una de las restricciones, debido al proceso de fabricación, es que la capa metálica debe estar rodeada por al menos  $3 \mu\text{m}$  de la capa de Silicio, por tanto, considerando lo anterior y la perforación en uno de los lados de la masa, las dimensiones máximas de los electrodos están limitadas a  $249 \mu\text{m} \times 1394 \mu\text{m}$ .

Utilizando Coventor, se realizaron pruebas con estas dimensiones. Sin embargo, los resultados obtenidos no eran satisfactorios, ya que, la capacitancia obtenida no tenía un comportamiento lineal respecto al desplazamiento entre las placas, sobre todo en los electrodos ubicados junto a la perforación. Este hecho lo atribuimos al efecto causado por los bordes de las perforaciones. Para corroborarlo, optamos por reducir las dimensiones de los electrodos, de este modo, se obtuvieron mejores resultados. Finalmente, en base a las pruebas realizadas en Coventor, las dimensiones máximas con las cuales se obtienen los mejores resultados son  $240 \mu\text{m} \times 1390 \mu\text{m}$ , aproximadamente.

En 4.3 se revisaron los efectos de la fuerza electrostática en el sensado capacitivo, donde se concluyó que el control de dos lados ofrece un mejor desempeño que el control de un solo lado. Si realizamos un análisis similar al hecho en 4.3.2 para el caso de una estructura con movimiento torsional, la ecuación para el desplazamiento de la placa móvil, considerando la fuerza electrostática y la fuerza mecánica, es:

$$\frac{B\epsilon\epsilon_0 V^2}{2\phi^2} \left[ \ln \frac{1 - \phi \tilde{a}_2}{1 - \phi \tilde{a}_1} + \frac{\phi(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1)}{(1 - \phi \tilde{a}_2)(1 - \phi \tilde{a}_1)} - \ln \frac{1 + \phi \tilde{a}_2}{1 + \phi \tilde{a}_1} - \frac{\phi(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2)}{(1 + \phi \tilde{a}_2)(1 + \phi \tilde{a}_1)} \right] + R_C m a - k_\phi \phi = 0 \quad 5.9$$



Si definimos  $F_{eo} = \frac{B\epsilon\epsilon_0 V^2}{2}$ ,  $p = \frac{F_{eo}}{k_\phi}$  y  $q = \frac{Rcma}{k_\phi}$ , la Ec. 5.9 puede reescribirse como:

$$q = \phi - \frac{p}{\phi^2} \left[ \ln \frac{1 - \phi \tilde{a}_2}{1 - \phi \tilde{a}_1} + \frac{\phi(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1)}{(1 - \phi \tilde{a}_2)(1 - \phi \tilde{a}_1)} - \ln \frac{1 + \phi \tilde{a}_2}{1 + \phi \tilde{a}_1} - \frac{\phi(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2)}{(1 + \phi \tilde{a}_2)(1 + \phi \tilde{a}_1)} \right] \quad 5.10$$

De esta forma tenemos tres condiciones:

- 1) El voltaje es cero, es decir  $p=0$ . La relación entre el desplazamiento y la aceleración es lineal, ya que  $q = \phi$ .
- 2) El voltaje es diferente de cero, es decir  $p \neq 0$ . Tenemos que, cuando  $q = 0$ ,  $\phi \neq 0$ , significa que si hay un desplazamiento causado por el voltaje de control, debido a la asimetría de la estructura.
- 3) Igual que en 4.3, la Ec. 5.10 puede resolverse utilizando un método gráfico definiendo una función:

$$f(\phi, p) = \phi - \frac{p}{\phi^2} \left[ \ln \frac{1 - \phi \tilde{a}_2}{1 - \phi \tilde{a}_1} + \frac{\phi(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1)}{(1 - \phi \tilde{a}_2)(1 - \phi \tilde{a}_1)} - \ln \frac{1 + \phi \tilde{a}_2}{1 + \phi \tilde{a}_1} - \frac{\phi(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2)}{(1 + \phi \tilde{a}_2)(1 + \phi \tilde{a}_1)} \right] \quad 5.11$$

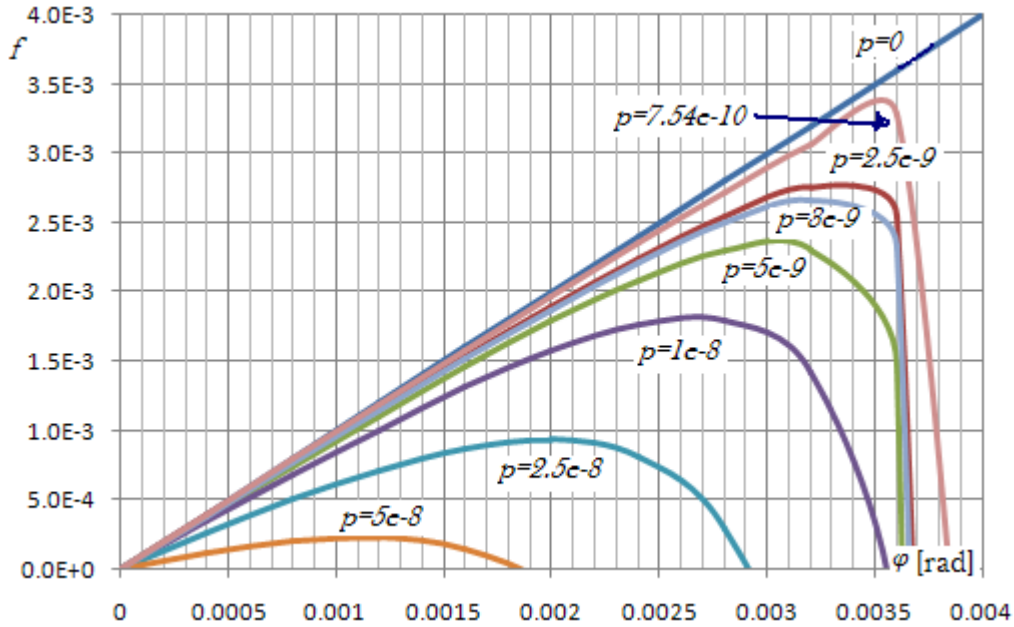


Fig. 5.7 Solución gráfica para un control de dos lados.

En la Fig. 5.7 se muestran algunas de las curvas de  $f - \phi$  con  $p$  como parámetro. En base a las dimensiones y la constante de torsión de la microestructura, tenemos que  $p = 7.54 \times 10^{-10} * V^2$ , donde,  $p$  esta en función del voltaje efectivo de control. Si  $V=1$ ,  $p = 7.54 \times 10^{-10}$  y el valor máximo para esta curva es  $f_{max} = 3.4 \times 10^{-3}$ , el cual da la aceleración crítica. Si consideramos que la aceleración gravitacional de la Tierra es  $1G = 9.8 \text{ m/s}^2$ , entonces la aceleración máxima teórica para la cual hay una solución estable a la Ec. 5.9 es  $a_c = 317.65 \text{ G}$ .

Si  $V=2$ ,  $p = 3 \times 10^{-9}$ , la aceleración crítica es  $a_c=252.26 G$ , pero si  $V=3.64$ ,  $p = 1 \times 10^{-8}$  la aceleración crítica es  $a_c=168.17 G$ . Por lo anterior, decidimos utilizar un voltaje efectivo de control de 1 V, de esta forma, tendremos un amplio rango de aceleración, pero posiblemente una sensibilidad baja. Además, debemos considerar que la aceleración crítica solo indica la aceleración máxima, en la cual el microacelerómetro tendrá un desempeño estable, es decir, en este rango de operación no ocurrirá el efecto *pull-in*.

Además, en 4.4 se revisó que, para un sensado de capacitancia diferencial la respuesta es lineal y proporcional al valor de la capacitancia en equilibrio, si  $|x| \ll d$ . De esto y lo visto en el párrafo anterior, se determina que, el rango de operación del sensor será inferior al ya determinado, esta es otra de las razones para emplear un voltaje de control de un volt; ya que si se utilizara un voltaje mayor, el rango de operación se reduciría considerablemente.

Finalmente, la ecuación dinámica que describe el movimiento de la microestructura es:

$$I_\phi \ddot{\phi} + C\dot{\phi} + k_\phi \phi = R_c m G + T_{FE} \quad 5.12$$

La cual considera la fuerza mecánica y la fuerza electrostática. Donde  $T_{FE}$  es la fuerza electrostática generada por el voltaje de control aplicado a la microestructura, definida como:

$$\frac{B\epsilon\epsilon_0 V^2}{2\phi^2} \left[ \ln \frac{1 - \phi \tilde{a}_2}{1 - \phi \tilde{a}_1} + \frac{\phi(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1)}{(1 - \phi \tilde{a}_2)(1 - \phi \tilde{a}_1)} - \ln \frac{1 + \phi \tilde{a}_2}{1 + \phi \tilde{a}_1} - \frac{\phi(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2)}{(1 + \phi \tilde{a}_2)(1 + \phi \tilde{a}_1)} \right] \quad 5.13$$

En 4.4.1 se analizó un circuito electrónico, para sensores diferenciales, basado en puentes y AO's; donde se concluye que, bajo ciertas condiciones, la salida es proporcional a la diferencia de capacitancia, inclusive para desviaciones grandes con la ventaja de que se puede implementar con componentes discretos.

El siguiente paso es determinar los valores de las componentes del circuito de sensado. Una de las condiciones de [18], para que el circuito preserve su característica, es que todas las resistencias sean iguales,  $R=1 M\Omega$  y  $C_2=C_4$ . Si solo analizamos uno de los circuitos amplificadores del medio puente de AC de la Fig. 4.20, tenemos que el amplificador representa una configuración no inversora.

En la Fig. 5.8 se muestra un amplificador no inversor, en el cual el voltaje de salida,  $V_o$ , tiene la misma polaridad que el voltaje de entrada,  $V_i$ . Para fines prácticos se tiene un voltaje de cero volts entre las terminales (+) y (-) del AO, entonces ambas están al mismo potencial  $V_i$ . Por tanto,  $V_i$  aparece a través de  $Z_1$ .

En párrafos anteriores, se determinó un voltaje efectivo de control de un volt, el cual en 4.3 se definió como:

$$V_{eff} = \sqrt{(V_0)^2 + \frac{1}{2}V_1^2} \quad 5.14$$

Donde  $V_0$  es la componente de DC y  $V_1$  es la componente de AC. Si sólo utilizamos un voltaje de AC, el voltaje efectivo queda entonces como:

$$V_{eff} = \frac{V_1}{\sqrt{2}} \quad 5.15$$

Además, como en el amplificador no inversor, el voltaje de entrada siempre aparece a través de  $Z_1$ , por tanto,  $V_i$  debe ser igual a  $\sqrt{2} V$ , aproximadamente.

La Ec. 5.16 muestra la función de transferencia de un amplificador no inversor, donde es evidente que la ganancia siempre es mayor a uno.

$$T = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1} \quad 5.16$$

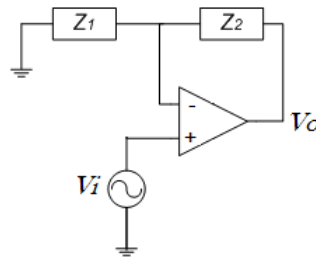


Fig. 5.8 Amplificador no inversor.

Para esta etapa no es necesario amplificar las señales de interés, lo que nos interesa es la diferencia en capacitancias y como  $Z_1$  y  $Z_3$  varían, la ganancia de cada amplificador también será modificada por las variaciones de los capacitores. De esta forma, si  $Z_1 \approx Z_2$ , la ganancia del circuito será de dos, aproximadamente.

Para los capacitores variables, cuando ninguna aceleración es aplicada al dispositivo, la capacitancia nominal es de 1.5 pF aproximadamente, por lo tanto,  $C_1 \approx C_2 \approx C_3 \approx C_4 \approx 1.5$  pF.

En 4.3 se menciona que, usualmente, la frecuencia de la señal de control es mucho más grande (del orden de  $10^6$  rad/s) que la frecuencia de la señal a medir y la frecuencia de vibración natural de la microestructura. Además, en 4.4.3 se menciona que el ancho de banda del sensor debe ser al menos cinco o diez veces inferior a la frecuencia de la señal de control para que la demodulación sea sencilla. Por lo anterior, si utilizamos una frecuencia de control  $f_c = 1$  MHz se cumplen todas las condiciones anteriormente expuestas. Asimismo, a una frecuencia de 1 MHz, la impedancia capacitiva es relativamente pequeña. Del circuito de sensado,  $Z_1 = R // \frac{1}{sC_1}$  y como  $R \gg \frac{1}{sC_1}$ , entonces,  $Z_1 \approx \frac{1}{sC_1}$ . De esta forma, cualquier variación de capacitancia es fácilmente detectable por el circuito sensor. En la Fig. 5.9 se muestra el circuito para sensar la capacitancia diferencial, donde el detector es sustituido por un amplificador sumador inversor. Así, la ecuación del circuito sensor es:

$$V_o = -j\omega_c Z(C_1 - C_3)V_i \text{ Sen } \omega_c t \quad 5.17$$

Finalmente, en 4.4.3 se menciona que es necesario demodular la señal resultante  $V_O$  para obtener la señal de excitación aplicada al sensor. Además, la demodulación debe ser síncrona para conservar el signo de la aceleración aplicada. Por lo que se propone una detección de AM en cuadratura o detección síncrona.

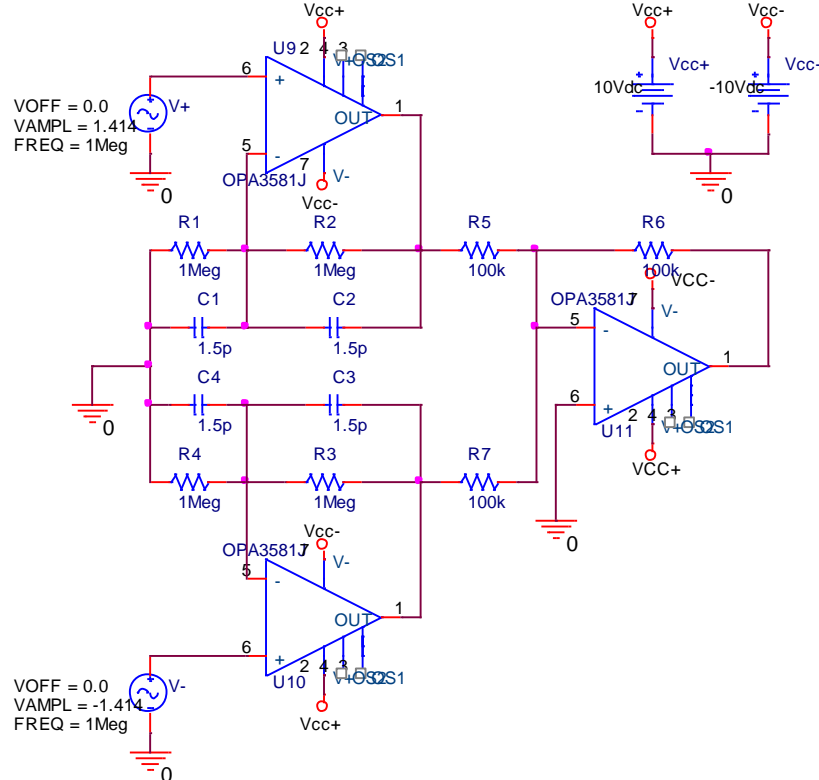


Fig. 5.9 Circuito sensor de capacitancia diferencial.

Si  $C_1 = C_{01} + \Delta C_{01} \cos \omega t$  y  $C_3 = C_{03} + \Delta C_{03} \cos \omega t$ , donde  $C_{01}$  y  $C_{03}$  son las capacitancias nominales del sensor y  $\Delta C_{01}$  y  $\Delta C_{03}$  son las capacitancias dinámicas, sustituyendo esto en la Ec. 5.17, tenemos:

$$V_O = -j\omega_c Z((C_{01} + \Delta C_{01} \cos \omega t) - (C_{03} + \Delta C_{03} \cos \omega t))V_i \text{Sen } \omega_c t \quad 5.18$$

Si  $A = -\omega_c Z j V_i$ ,  $S_1(t) = \Delta C_{01} \cos \omega t$ ,  $S_3(t) = \Delta C_{03} \cos \omega t$  y como  $C_{01} \approx C_{03}$ , entonces  $C_{01} - C_{03} = 0$ . La Ec. 5.18 puede reescribirse como:

$$V_O = (S_1(t) - S_3(t))A \text{Sen } \omega_c t \quad 5.19$$

Para recuperar las señales de información  $S_1(t)$  y  $S_3(t)$  utilizando la demodulación de AM en cuadratura, realizamos el mismo análisis hecho en 4.4.3.1. En la Fig. 5.10 se muestra un esquema general, para el filtro inferior tenemos:

$$X_1(t) = A[S_1(t)\text{Sen } \omega_c t - S_3(t)\text{Sen } \omega_c t]\text{Cos } \omega_c t \quad 5.20$$

$$X_1(t) = A[S_1(t)\text{Sen } \omega_c t \text{Cos } \omega_c t - S_3(t)\text{Sen } \omega_c t \text{Cos } \omega_c t] \quad 5.21$$

$$X_1(t) = \frac{A}{2} [S_1(t) \text{Sen } 2\omega_c t - S_3(t) \text{Sen } 2\omega_c t] \quad 5.22$$

De esta forma, a la salida del filtro paso bajas tenemos  $X_1(t) = 0$ . Y para el filtro superior si realizamos lo mismo, tenemos:

$$X_2(t) = A[S_1(t) \text{Sen } \omega_c t - S_2(t) \text{Sen } \omega_c t] \text{Sen } \omega_c t \quad 5.23$$

$$X_2(t) = \frac{A}{2} [(S_1(t) - S_1(t) \text{Cos } 2\omega_c t) - (S_3(t) + S_3(t) \text{Cos } 2\omega_c t)] \quad 5.24$$

Por lo tanto, a la salida del filtro paso bajas tenemos  $X_2(t) = \frac{A}{2}(S_1(t) - S_3(t))$ . De esta forma, a la salida del filtro superior se tiene la diferencia en capacitancia de los dos electrodos.

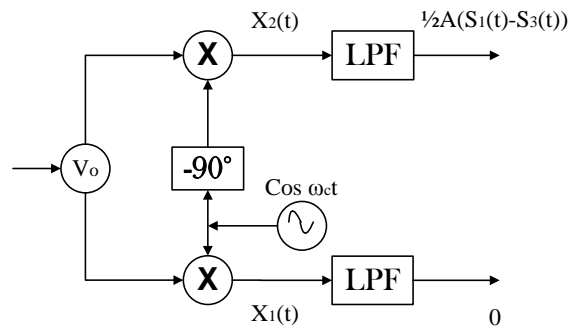


Fig. 5.10 Demodulación en cuadratura de AM. [19]

Finalmente, en la Fig. 5.11 se muestra de forma general cada bloque del microdispositivo.

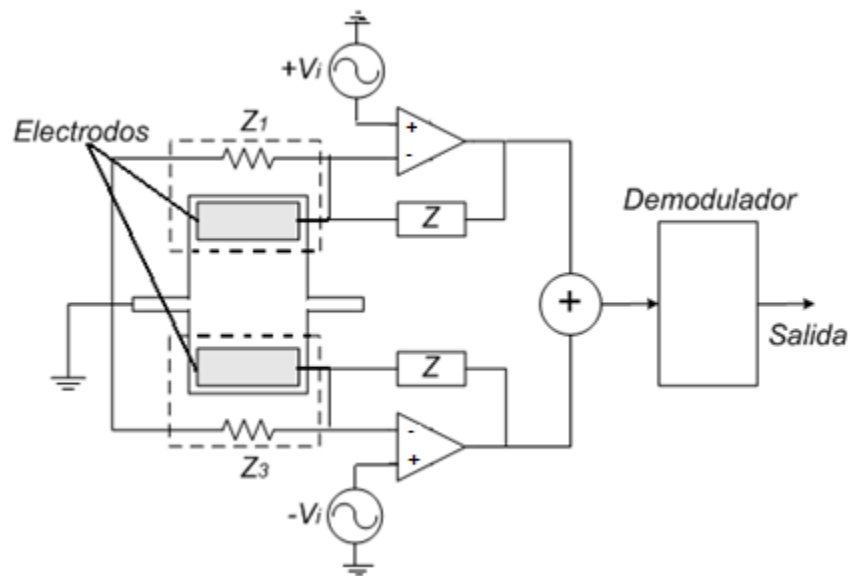


Fig. 5.11 Esquema del microacelerometro.

## Resultados y Conclusiones

El presente trabajo esta orientado al diseño, modelado y simulación de un microacelerómetro del tipo torsional, capacitivo y vertical utilizando el proceso de fabricación comercial SOIMUMPS.

### 6.1 Resultados

En el capítulo 2 se revisaron algunos materiales comúnmente utilizados en micromaquinado, así como las técnicas y procesos para la construcción de microdispositivos. En el capítulo 3 se trataron los principales parámetros mecánicos que debe satisfacer un acelerómetro para lograr un desempeño óptimo. En el capítulo 4 se revisaron los efectos causados por el sensado capacitivo y se propuso un circuito electrónico para sensar la capacitancia. En el capítulo 5, teniéndose en cuenta la teoría anteriormente expuesta y las especificaciones de un acelerómetro, se diseñó y modeló el microdispositivo. En el presente capítulo se exponen los resultados obtenidos del microacelerómetro y se hacen algunas sugerencias para mejorar este diseño.

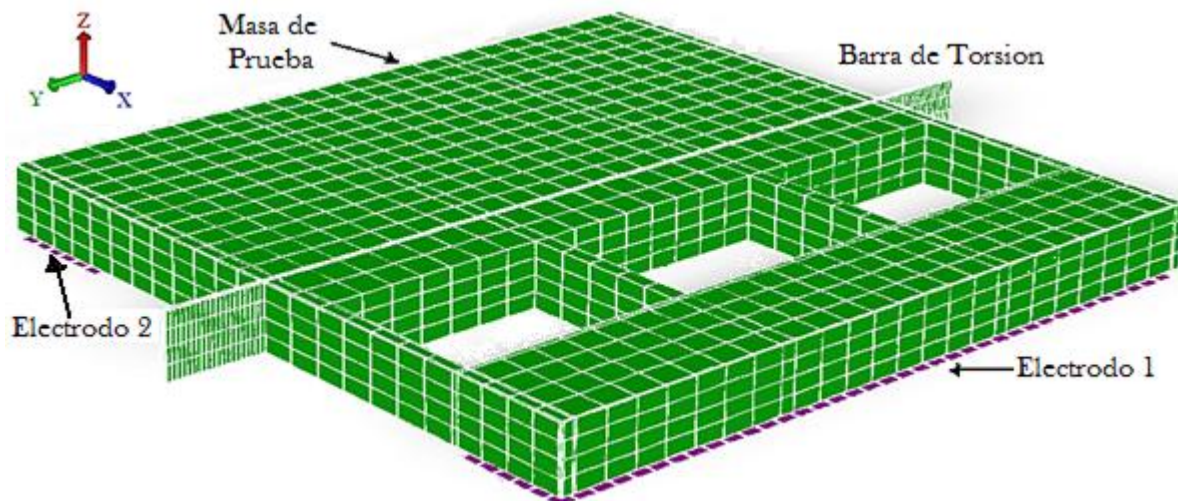


Fig. 6.1 Vista oblicua del microacelerómetro junto con el marco de referencia.

El microdispositivo debe ser mallado para poder realizar las simulaciones en Coventor, de esta forma, la estructura puede reducirse a un grupo de elementos finitos más simples, con el propósito de que Coventor pueda utilizar el análisis del elemento finito. El tipo de mallado aplicado a la estructura fue del tipo *Manhattan*, el cual utiliza elementos cúbicos. Este tipo de mallado es utilizado para modelos con geometría ortogonal, es decir, todas las caras del modelo son planas y se unen en ángulos de 90°. En la Fig. 6.1 se muestra el microacelerómetro con el mallado utilizado para realizar las simulaciones en Coventor. [21]

Para obtener mejores resultados, la microestructura se dividió en regiones, con el fin de poder aplicar distintos mallados en cada región. En las vigas de torsión se aplicó un mallado más fino que en las otras regiones, debido a la torsión que sufren las vigas por la aceleración aplicada, mientras que las otras regiones no requieren de un mallado tan fino. En la Tabla 6.2 se muestran las características de los mallados aplicados a cada una de las regiones de la microestructura.

Región	Eje X [ $\mu\text{m}$ ]	Eje Y [ $\mu\text{m}$ ]	Eje Z [ $\mu\text{m}$ ]
Masa	60	60	8
Vigas de Torsión	4	10	6
Electrodos	40	40	0.5

Tabla 6.1 Características del mallado.

### 6.1.1 Simulación Mecánica

En 5.3.2 se calculó la constante de torsión de las vigas usando Coventor y en 3.2.5 se obtuvo la expresión que permite calcular la constante de torsión de una viga. Para nuestro caso, debido a que son dos vigas y suponiendo que el ángulo de torsión es el mismo para ambas, se concluye que están en paralelo, por tanto la constante equivalente es:

$$k_{\phi} = k_{\phi_1} + k_{\phi_2} = \frac{2k_1 G h^3 b}{L} \quad 6.1$$

Donde el ancho, el espesor y la longitud de la viga son:  $h=13 \mu\text{m}$ ,  $b=25 \mu\text{m}$  y  $L=200 \mu\text{m}$ , respectivamente. El módulo cortante del silicio es  $G=65 \text{ GPa}$  y de acuerdo a la Tabla 3.1, para  $b/h=1.923$ ,  $k_1$  tiene el valor de 0.2251.

$$k_{\phi} = 8.03635 \times 10^{-6} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

Además, utilizando Coventor se calculó el momento de inercia de la estructura respecto al eje de rotación de la estructura. Por otra parte, para calcular el momento de inercia teórico de la masa de prueba es necesario descomponer el cuerpo en formas sencillas, cuyos momentos de inercia sean fáciles de calcular. De esta forma, el momento de inercia total será igual a la suma de los momentos de inercia de las distintas partes de la estructura. Sin embargo, en [22] se menciona que cuando una de las partes componentes sea un hueco, su momento de inercia deberá restarse del momento de inercia de la parte total para obtener el momento de inercia del cuerpo compuesto. De este modo, si calculamos el momento de inercia de la masa de prueba como el de una placa rectangular y le restamos los momentos de inercia de las perforaciones, respecto al eje de movimiento, obtendremos el momento de inercia total de la masa de prueba.

En la Tabla 6.2 se muestran los valores obtenidos en Coventor y los teóricos de la constante de torsión y del momento de inercia de la microestructura.

Parámetro	Coventor	Teórico	Error [%]
Constante de Torsión, $k_\phi$ [Nm/rad]	$8.16243 \times 10^{-6}$	$8.03635 \times 10^{-6}$	1.545
Momento de Inercia, $I_\phi$ [ $kg \cdot m^2$ ]	$23.429 \times 10^{-15}$	$23.69359 \times 10^{-15}$	1.129

Tabla 6.2 Constante de torsión y momento de inercia.

### 6.1.1.1 Frecuencia Natural de Vibración y Factor de Amortiguamiento

Haciendo uso de Coventor se obtuvieron los cuatro primeros modos de vibración de la estructura. En la Tabla 6.3 se muestran los resultados obtenidos con Coventor y el teórico obtenido con la Ec. 5.6 para el primer modo. Además, en la Fig. 6.2 se muestran los resultados de forma gráfica para cada uno de los modos obtenidos en Coventor.

Modo	Frecuencia Coventor [Hz]	Frecuencia Teórica [Hz]	Error [%]
1 <sup>er</sup>	2970.66	2931.12	1.331
2 <sup>do</sup>	20082.64	-----	-----
3 <sup>er</sup>	23556.61	-----	-----
4 <sup>to</sup>	30127.32	-----	-----

Tabla 6.3 Modos de vibración de la estructura.

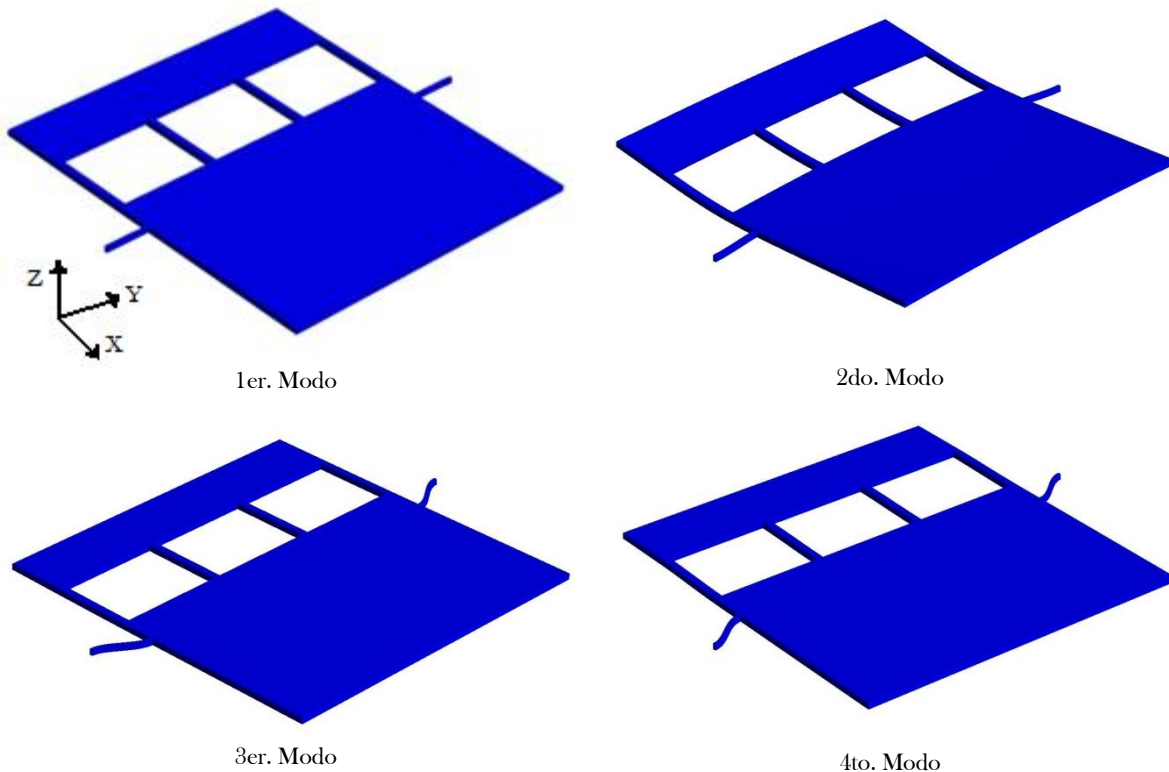


Fig. 6.2 Primeros 4 modos de vibración obtenidos en Coventor.

En 5.3.2 se determinó que la estructura deberá encontrarse en un medio con una presión mucho menor a la presión atmosférica para lograr un factor de amortiguamiento de  $\xi \approx 0.7$ , aproximadamente. Realizando pruebas en Coventor, obtuvimos que para un gap de  $2 \mu\text{m}$  y en un medio con una presión de 636 Pa, aproximadamente, obtenemos un coeficiente de



amortiguamiento  $C=591.9 \times 10^{-12} \text{ Nms/rad}$  y un factor de amortiguamiento de  $\xi \cong 0.677$ . Sin embargo, si aumentamos el gap a  $3 \mu\text{m}$  y a una presión de  $1150 \text{ Pa}$ , aproximadamente, se obtiene un coeficiente de amortiguamiento de  $C=586.98 \times 10^{-12} \text{ Nms/rad}$  y un factor de amortiguamiento de  $\xi \cong 0.671$ , aproximadamente. Como puede observarse, ambos resultados se aproximan a  $\xi \cong 0.7$ , sin embargo, existe una diferencia considerable entre las presiones necesarias para lograr dicho factor de amortiguamiento, casi el doble de presión para un gap de  $2 \mu\text{m}$ . En la práctica, es más difícil lograr un ambiente con una presión menor a la atmosférica. Considerando lo anterior y que con un gap de  $3 \mu\text{m}$  obtendríamos un rango mayor de aceleración que utilizando un gap de  $2 \mu\text{m}$ , optamos por fijar el gap en  $3 \mu\text{m}$ .

### 6.1.1.2 Respuesta de la Estructura Mecánica a una Entrada Escalón

La entrada en escalón a un sistema vibratorio se expresa como:

$$f(t) = R_C m G u(t) \quad 6.2$$

Donde  $u(t)$  es la función escalón unitaria. Sustituyendo la Ec. 6.3 en la Ec. 5.7 para determinar la respuesta del sistema a una entrada escalón se obtiene:

$$\phi(t) = \frac{R_C m G}{k_\phi} \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{sen}(\omega_d t + \varphi) \right] u(t) \quad 6.3$$

Donde  $\omega_d$  es la frecuencia natural amortiguada, definida como  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ , y  $\theta$  es el ángulo de desfase, definido como  $\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$ . Si definimos un tiempo adimensional  $\tau = \omega_n t$ , la Ec. 6.3 puede reescribirse como:

$$\phi(t) = \frac{R_C m G}{k_\phi} \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \tau}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{sen}(\tau \sqrt{1 - \xi^2} + \theta) \right] u(t) \quad 6.4$$

La respuesta obtenida mediante la Ec. 6.4 consiste de un término constante  $\frac{R_C m G}{k_\phi}$  y una senoide que decrece en forma exponencial. Esta respuesta oscila con respecto a la posición de estabilización final antes de quedar fija. La posición de estabilización, llamada valor en régimen permanente, puede hallarse por medio de la Ec. 6.5:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(t) = \frac{R_C m G}{k_\phi} \quad 6.5$$

En base a lo anterior, en esta sección se comparan los resultados en régimen permanente obtenidos con Coventor y la Ec. 6.5. Se aplicaron diferentes valores desde  $0\text{G}$  hasta  $50\text{G}$  en ambos sentidos, sobre el eje  $z$ . Es de esperar que en los extremos libres de la masa de prueba se registren los desplazamientos máximos.

En la Tabla 6.4 se muestran los resultados de los desplazamientos. Cabe aclarar que en la tabla solo se incluyen valores positivos de aceleración, debido a que el movimiento de la masa de prueba es simétrico respecto a la aceleración aplicada, es decir, si se aplican aceleraciones de  $\pm G$  obtendremos prácticamente los mismos resultados.

Aceleración [G]	Desplazamiento Electrodo 1 [ $\mu\text{m}$ ]	Desplazamiento Electrodo 2 [ $\mu\text{m}$ ]	Desplazamiento Teórico [ $\mu\text{m}$ ]	Error [%]
0	-0.026876	0.019298	0.00802	58.463
1	-0.031968	0.027687	0.01604	42.099
2	-0.037496	0.036077	0.02405	33.347
5	-0.056385	0.061246	0.04809	21.476
8	-0.077114	0.086416	0.07214	16.521
10	-0.090933	0.103195	0.08817	14.560
15	-0.125481	0.145145	0.12825	11.642
20	-0.160029	0.187094	0.1683	10.032
25	-0.194577	0.229044	0.20840	9.013
30	-0.229126	0.270994	0.24848	8.309
40	-0.298223	0.354895	0.32864	7.399
50	-0.367321	0.438797	0.40879	6.839

Tabla 6.4 Desplazamientos de la microestructura debidos a una aceleración aplicada.

De los datos de la Tabla 6.4, si solo consideramos los desplazamientos del Electrodo 2, obtenidos en Coventor, y los teóricos, se observa que el error entre estos desplazamientos es muy grande, en particular para aceleraciones pequeñas, llegando a ser de casi el 60% cuando ninguna aceleración es aplicada al microacelerómetro. De cualquier forma, cuando ninguna aceleración es aplicada a la estructura es de esperar un ligero desplazamiento o desbalance, debido al propio peso de la microestructura y de la asimetría de la estructura respecto al eje de rotación. Además de este ligero desbalance se presenta un ligero alabeo de la masa de prueba. En base a lo anterior y lo visto en 5.3.1 es posible inferir que, a pesar de que los materiales empleados tienen un esfuerzo residual pequeño existe un alabeo en la masa de prueba. Por otro lado, el error entre los datos obtenidos en Coventor y los calculados con la Ec. 6.5 tiende a disminuir conforme se incrementa la aceleración aplicada a la estructura. Por lo tanto, para aceleraciones grandes, los resultados obtenidos en Coventor tienden a coincidir con los calculados por la Ec. 6.5.

En la Fig. 6.3 se muestra una grafica con los desplazamientos obtenidos en cada extremo libre de la estructura contra aceleración aplicada. Aunque los desplazamientos de los extremos libres de la estructura no son simétricos, estos si son lineales respecto a la aceleración aplicada.

Cabe mencionar que, la Ec. 6.5 es solo una aproximación que describe el movimiento de la microestructura, y a pesar de no considerar varios factores, tal como las propiedades de los materiales, es una buena aproximación, la cual nos permite conocer el comportamiento del microdispositivo.

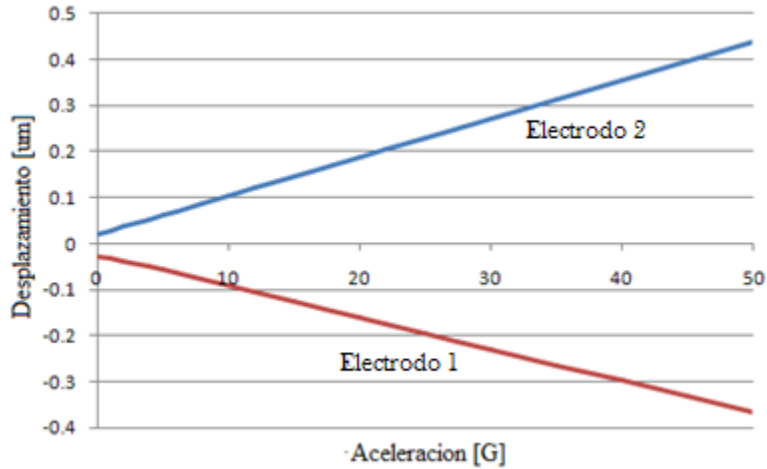


Fig. 6.3 Desplazamiento de la estructura contra aceleración aplicada.

Para revisar el factor de amortiguamiento del microacelerómetro se obtuvo la respuesta de la estructura ante una entrada de tipo escalón, la Fig. 6.4 muestra los resultados obtenidos cuando se aplica una aceleración de 50G. De la gráfica es evidente que la respuesta ante una entrada escalón oscila respecto a la posición de estabilización final, además, esta se asemeja a la respuesta de un sistema con un factor de amortiguamiento  $\xi \approx 0.7$ , aproximadamente, como se puede ver en la Fig. 3.21.

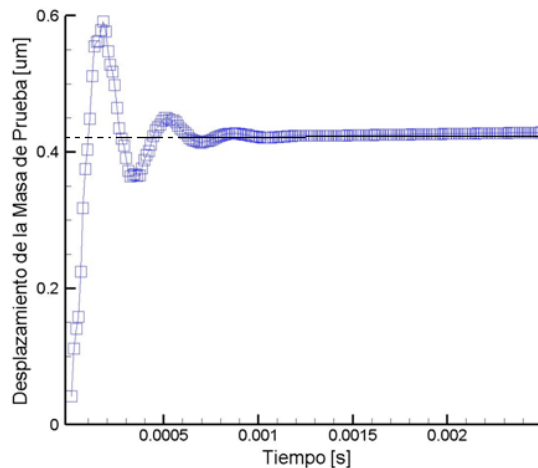


Fig. 6.4 Respuesta en el tiempo ante una entrada escalón.

También se obtuvo la respuesta en frecuencia de la microestructura ante una entrada escalón. En la Fig. 6.5 se muestran los resultados obtenidos utilizando Coventor. La respuesta en magnitud muestra que la amplitud se mantiene plana en el rango 0 a 700 Hz, aproximadamente, el cual es mayor al  $0.2\omega_n$ . De igual forma, la distorsión de fase se incrementa linealmente con la frecuencia dentro de un rango de 0 a 3000 Hz, aproximadamente, de esta forma ambos resultados satisfacen lo visto en 3.3. Por lo tanto, el microacelerómetro tiene un rango de operación de 700 Hz, aproximadamente, es decir, dentro de este rango la distorsión de amplitud es prácticamente nula y la distorsión de fase es lineal con la frecuencia, requisitos necesarios en el diseño de un acelerómetro.

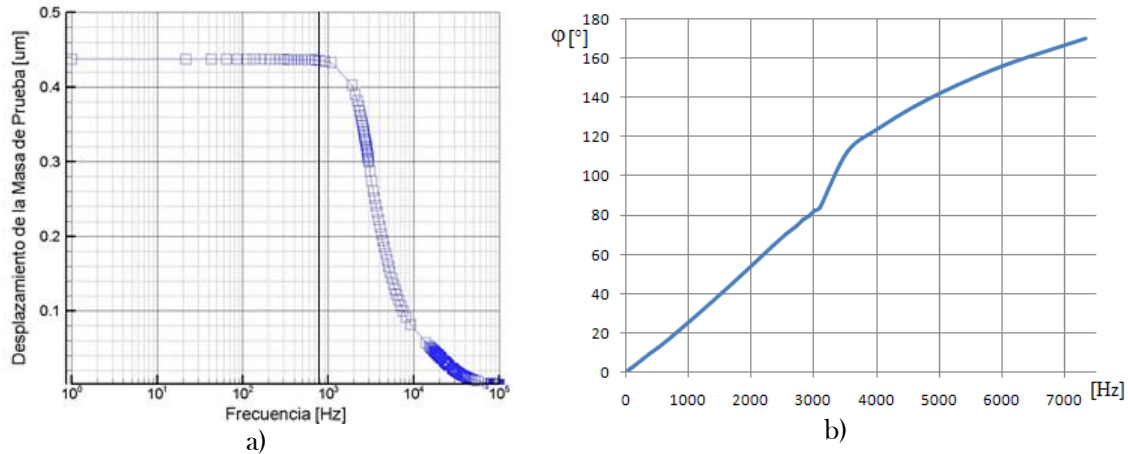


Fig. 6.5 Respuesta en frecuencia ante una entrada escalón: a) Magnitud y b) Fase

En 5.1 se mencionaron las principales especificaciones de un acelerómetro, entre ellas la sensibilidad a los movimientos de ejes cruzados. Por esto es importante determinar que tan sensible es el instrumento a aceleraciones aplicadas en los ejes  $x$  y  $y$ , según nuestro marco de referencia, y de este modo determinar los efectos de estas sobre la aceleración en el eje de medición, eje  $z$ .

Cabe aclarar que, debido al tipo de estructura utilizada, es de esperar cierto grado de sensibilidad sobre el eje  $x$ , debido a que la estructura rota sobre un eje paralelo al eje  $y$ . Para apreciar la sensibilidad a los movimientos de ejes cruzados, utilizando Coventor, se han aplicado aceleraciones de 50G en las direcciones de los ejes  $x$  y  $y$ . En las Figs. 6.6 se muestran los desplazamientos en  $x, y$  y  $z$  cuando se aplica una aceleración en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente.

Eje de la aceleración Aplicada [50G]	Dirección del Desplazamiento	Desplazamiento Máximo [ $\mu\text{m}$ ]	Sensibilidad [%]
X	X	0.02277	5.191
X	Y	$5.435 \times 10^{-6}$	0.0025
X	Z	0.00371	0.8467
Y	X	0.00158	0.3593
Y	Y	0.00226	0.5143
Y	Z	$4.01 \times 10^{-5}$	0.0091

Tabla 6.5 Desplazamientos máximos debidos a aceleraciones de 50G sobre los ejes  $x$  y  $y$ .

En la Tabla 6.5 se muestran los resultados obtenidos para aceleraciones aplicadas en los ejes  $x$  y  $y$ . Analizando estos datos tenemos que, cuando se aplica una aceleración en la dirección del eje  $x$ , observamos que el máximo desplazamiento ocurre en la dirección de  $x$ . Este movimiento podría repercutir en la respuesta del microacelerómetro. Para reducir este efecto se puede realizar lo siguiente: aumentar el ancho de las vigas de torsión, ya que el espesor es un parámetro que no se puede modificar, o bien reduciendo la longitud de las vigas. Sin embargo, si se aumenta el ancho o se reduce la longitud de las vigas de torsión, la frecuencia natural del sistema aumenta a cambio de una pérdida en la sensibilidad en el eje

de movimiento. Por otra parte, para el caso de una aceleración aplicada en la dirección del eje  $y$ , se observa que los movimientos producidos son mínimos, casi nulos.

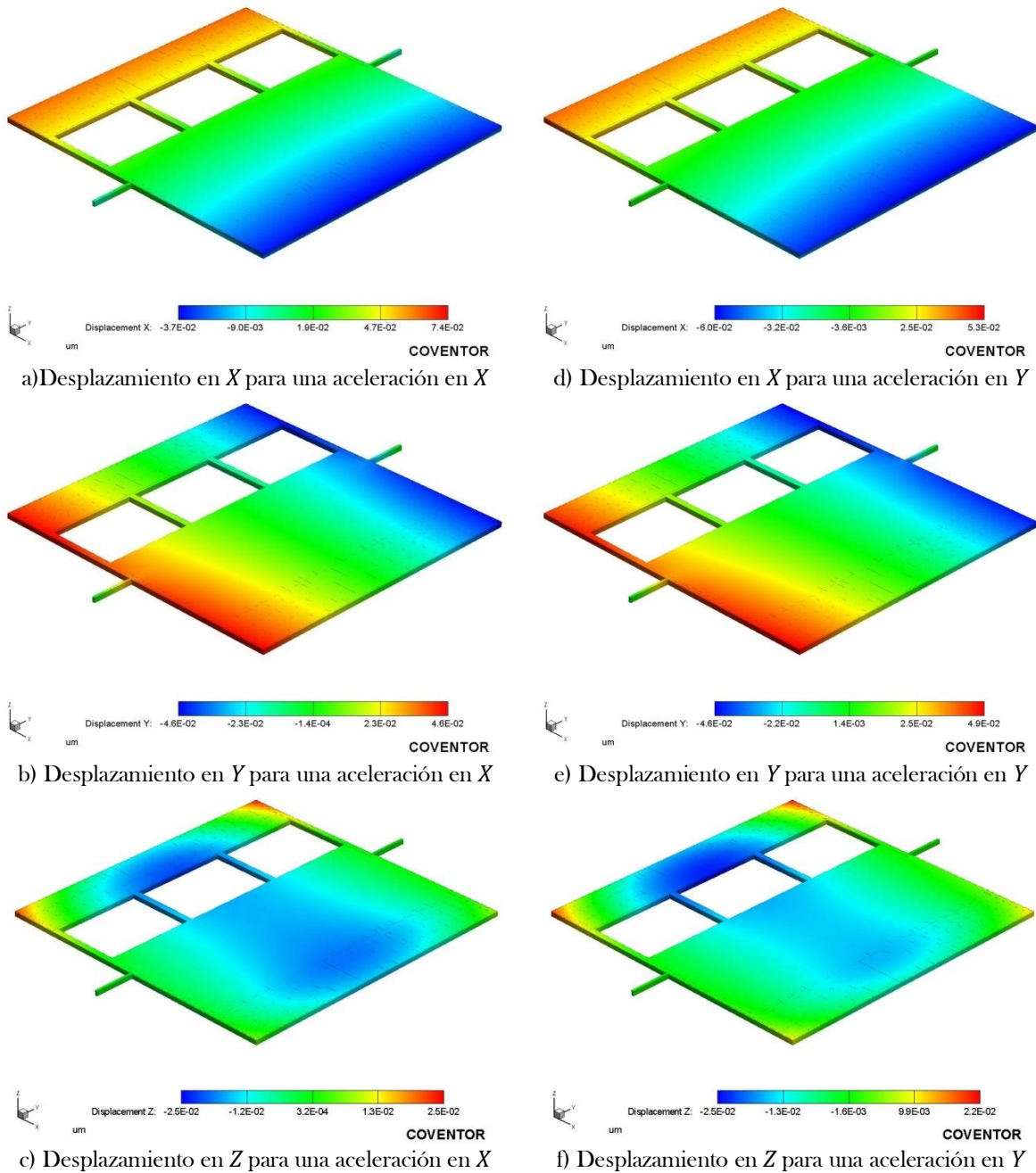


Fig. 6.6 Sensibilidad de ejes cruzados de la estructura para aceleraciones de 50 G.

La columna de sensibilidad, dada en porcentajes, de la Tabla 6.5, se entiende como el porcentaje de movimiento máximo en un eje respecto a una aceleración de 50G aplicada en dirección del eje  $z$ . Por ejemplo, cuando una aceleración de 50G fue aplicada en la dirección del eje  $z$  el desplazamiento máximo sobre ese mismo eje fue de  $0.43877 \mu\text{m}$ , mientras que, para una aceleración de 50G aplicada en dirección del eje  $x$ , el máximo desplazamiento en ese mismo eje fue de  $0.02277 \mu\text{m}$ , por lo tanto la sensibilidad del eje  $x$  respecto al eje  $z$  es de

5.19%, aproximadamente. Para los otros casos, la sensibilidad es pequeña, menor al 1%, por lo que se considera que, bajo estas condiciones de diseño, el microacelerómetro tendría una *sensibilidad baja* a aceleraciones aplicadas en cualquier dirección que no sea la del eje z.

En la Fig. 6.6b,c,e y f es posible visualizar el alabeo que sufre la estructura a causa del esfuerzo residual de los materiales empleados. En 6.6c y f el color azul indica que las estructuras sufren un ligero hundimiento respecto al origen del sistema de coordenadas, apenas de  $2.5 \times 10^{-8}$  m, y las zonas en rojo indican que la estructura se eleva  $2.2 \times 10^{-8}$  m como máximo.

## 6.1.2 Simulación Electromecánica

En la sección anterior se revisaron y compararon los resultados obtenidos en Coventor con los calculados mediante la teoría para un comportamiento mecánico. En esta sección se revisan los resultados del voltaje de pull-in, la capacitancia entre los electrodos, debida a una aceleración y una fuerza eléctrica aplicada y, finalmente, se determina el rango de operación y la sensibilidad del instrumento.

### 6.1.2.1 Voltaje de Pull-In

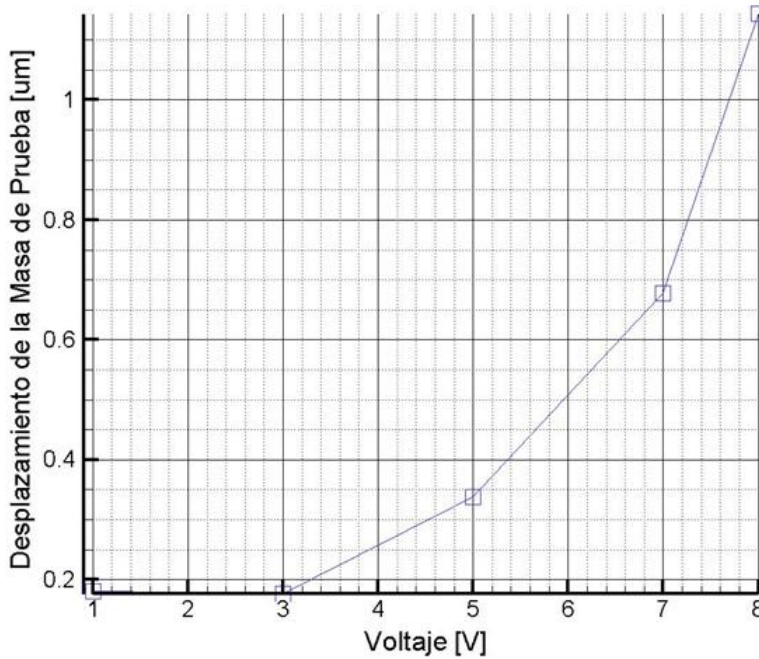
Se utilizó Coventor para simular la torsión mecánica de la masa de prueba debida a la fuerza electrostática, producida por la diferencia de potencial entre un electrodo y la masa de prueba. El procedimiento para realizar esta simulación consistió en aplicar a la estructura un voltaje en forma de rampa.

Para determinar el voltaje de pull-in teórico, en 4.2.2 se revisó el caso del desplazamiento angular de una barra de torsión causado por una fuerza electrostática, donde se llegó a la Ec. 4.26. Para obtener el voltaje de pull-in solo tenemos que despejar  $V$  y entonces calcular el voltaje de pull-in para un desplazamiento angular de aproximadamente  $1/3$  del gap.

$$\frac{B\varepsilon\varepsilon_0V^2}{2} \left[ \ln \frac{1 - \phi\tilde{a}_2}{1 - \phi\tilde{a}_1} + \frac{\phi(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1)}{(1 - \phi\tilde{a}_2)(1 - \phi\tilde{a}_1)} \right] - k_\phi\phi^3 = 0 \quad 6.6$$

Si las dimensiones de la estructura son:  $B=1.4$  mm,  $a_2=745$   $\mu$ m,  $a_1=505$   $\mu$ m,  $d_0=3$   $\mu$ m, la constante de torsión teórica es  $k_\phi=8.03635 \times 10^{-6}$  y  $G=65$  GPa. De este modo, el máximo desplazamiento angular corresponde al desplazamiento hecho por el centro del electrodo ( $x=625$   $\mu$ m). Si  $\tilde{a}_1 = a_1/d_0 = 168.33$  y  $\tilde{a}_2 = a_2/d_0 = 248.33$ , tenemos que el máximo desplazamiento angular estable es de  $1.6 \times 10^{-3}$  rad para un voltaje de pull-in de  $V_{po}=7.359$  V.

En la Tabla 6.6 se muestran los resultados obtenidos, donde se observa que Coventor da un rango de voltaje donde ocurrirá el efecto pull-in. Además, revisando la Fig. 6.7 encontramos que el voltaje aplicado para lograr un desplazamiento de  $1$   $\mu$ m o  $1.6 \times 10^{-3}$  rad en la masa de prueba es de  $V_{po} \approx 7.7$  V, aproximadamente, el cual es muy cercano al voltaje de pull-in calculado mediante la Ec. 6.6.



	Voltaje de Pull-In [V]
Coventor	8 - 8.25
Teórico	7.359

Tabla 6.6 Voltaje de pull-in.

Fig. 6.7 Voltaje aplicado contra desplazamiento de la masa de prueba.

### 6.1.2.2 Capacitancia Generada por la Aceleración

En los siguientes párrafos se muestran los resultados obtenidos en capacitancia. Utilizando Coventor se aplicó un voltaje de  $\pm 1$  V a cada electrodo, mientras que la masa de prueba fue puesta a cero volts. Además, se aplicaron diferentes valores de aceleración, desde 0G hasta 200G, para obtener la respuesta en capacitancia del microdispositivo debida a una entrada electromecánica.

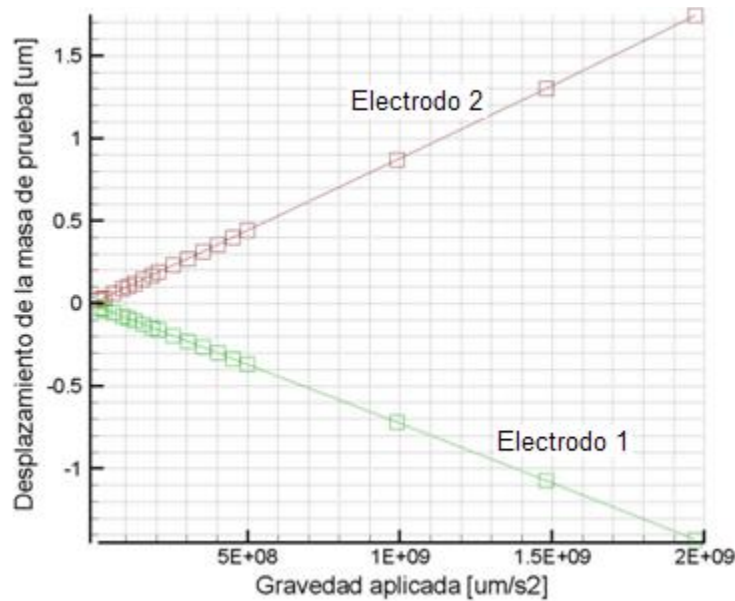


Fig. 6.8 Aceleración aplicada contra desplazamiento.

En la Fig. 6.8 se muestra los resultados de los desplazamientos en cada extremo de la masa debidos a la aceleración aplicada. De la gráfica se observa que, a pesar del efecto no lineal de la fuerza electrostática, el desplazamiento tiene un comportamiento lineal respecto a la aceleración aplicada al dispositivo.

Aunque el desplazamiento del microdispositivo es lineal, la capacitancia no será lineal respecto a la aceleración aplicada. Sin embargo, de lo visto en 4.4 la salida de capacitancia se considerara lineal dentro de un rango pequeño. En la Fig. 6.9 se muestran los resultados de capacitancia en cada electrodo contra desplazamiento debido a una aceleración. En ella, es evidente la respuesta no lineal de la capacitancia del microdispositivo, en particular aquella donde los electrodos se aproximan entre si.

Sin embargo, de la Fig. 6.9, si solo consideramos el rango entre 0-0.5  $\mu\text{m}$ , podemos considerar que la capacitancia tiene un comportamiento casi lineal respecto a la aceleración aplicada. La Fig. 6.10, la cual solo considera el rango lineal, muestra la gráfica de capacitancia contra aceleración de cada electrodo junto con su función lineal. Según la  $R^2$  obtenida, para cada caso, los puntos se ajustan casi al 100% a la función. Por tanto, si consideramos la capacitancia diferencial, es decir  $\Delta C = C_1 - C_2$ , la función que determina el comportamiento del microdispositivo es:

$$\Delta C = 0.00493G + 0.0063 [pF] \quad 6.7$$

Donde  $G$  es la aceleración aplicada al microdispositivo y se afirma que en un rango de 0-50G la capacitancia del sensor se comporta linealmente con la aceleración. De la Ec. 6.7 se observa que el microdispositivo tiene una sensibilidad de 4.93 fF/G y el porcentaje de error es menor al 2%.

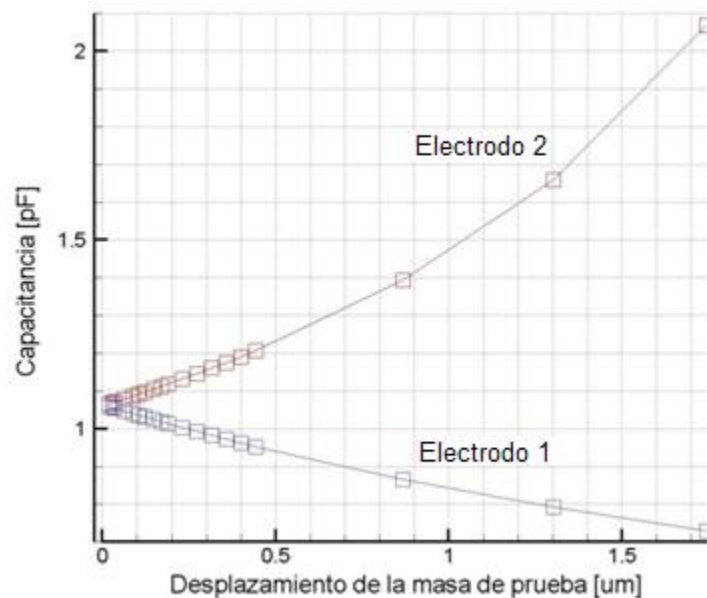


Fig. 6.9 Respuesta de desplazamiento contra capacitancia.

Finalmente, con estos resultados se realizaron pruebas en el circuito electrónico revisado en 5.3.3, el cual se encarga de convertir los cambios de capacitancia en voltaje.



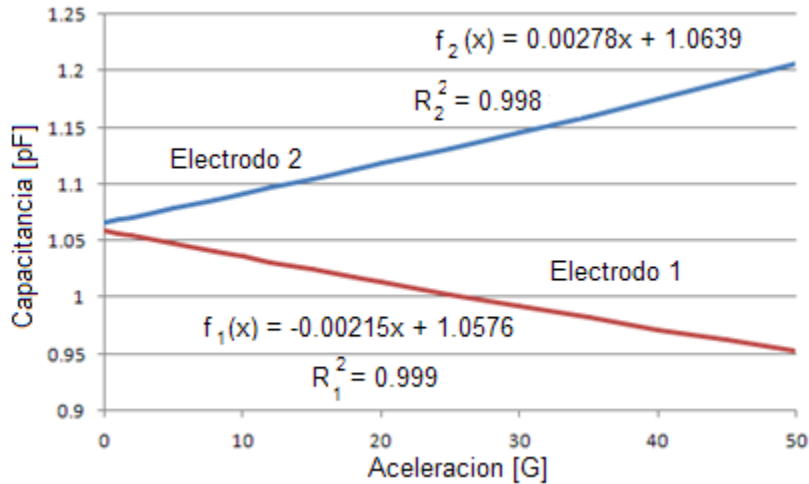


Fig. 6.10 Respuesta de aceleración contra capacitancia.

En la Fig. 6.11 se muestra una gráfica con los resultados obtenidos al simular el circuito electrónico con los cambios en capacitancia para las distintas aceleraciones aplicadas a la microestructura. En esta figura es fácil observar que el circuito se comporta linealmente con respecto a la capacitancia diferencial y a su vez con la aceleración aplicada. Además, se muestra la ecuación que relaciona la aceleración,  $G$ , aplicada con el voltaje del microsensor y el coeficiente de correlación lineal el cual es  $R^2=0.9999$  indicando que los puntos si se ajustan a la recta.

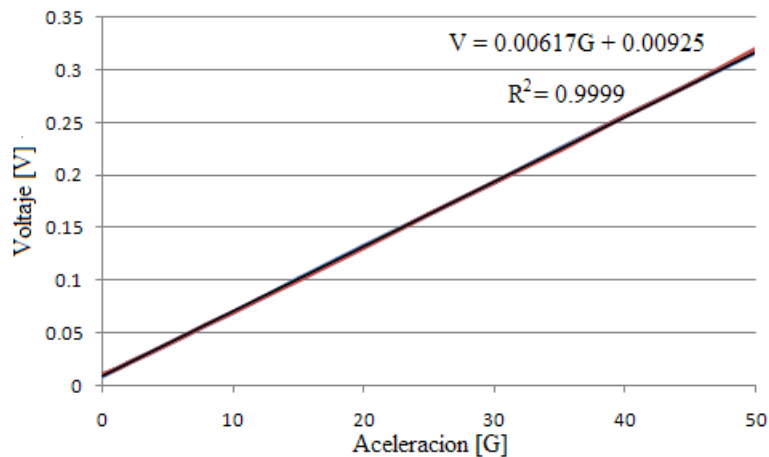


Fig. 6.11 Respuesta de aceleración contra voltaje.

Adicionalmente, se realizaron pruebas en Coventor para obtener la frecuencia natural de vibración considerando la fuerza eléctrica. En el análisis hecho en 4.2 se definió que cuando se aplica una diferencia de potencial a los electrodos de la estructura, una fuerza electrostática, en forma de torque, es aplicada a la masa jalándola hacia el electrodo fijo. Considerando el torque de restauración de las vigas e ignorando el efecto de amortiguamiento, la ecuación para el balance de torques es  $T_k - T_e = 0$ , donde se deduce que existe un coeficiente de rigidez eléctrica,  $k_{fe}$ ; por tanto la rigidez total de la estructura queda definida como  $k_{ef} = k_{\phi} - k_{fe}$ . De donde se deduce que la frecuencia natural del sistema se modifica en presencia de la fuerza eléctrica. Con ayuda de Coventor se encontró dicho

coeficiente de rigidez eléctrica para un voltaje efectivo de  $\pm 1V$ ,  $k_{fe} = 0.16081 \frac{Nm}{rad}$ , con lo cual se obtuvo una frecuencia natural menor a la ya calculada.

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{ef}}{I_\phi}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_\phi - k_{fe}}{I_\phi}} = 2941.25 \text{ Hz}$$

Cabe mencionar que el coeficiente de rigidez eléctrica es proporcional al cuadrado del voltaje, por lo que, al incrementar el voltaje de control  $k_{fe}$  crece rápidamente, ocasionando que la frecuencia natural disminuya hasta ser cero en el voltaje de pull-in.

Finalmente, en la Tabla 6.7 se presenta un resumen con las especificaciones del microacelerómetro desarrollado en el presente trabajo.

Especificación	Valor
Rango	$\pm 50 \text{ G}$
Sensibilidad	$6.17 \text{ mV/G}$
Sensibilidad de ejes cruzados	Baja
Ancho de banda	$\approx 700 \text{ Hz}$

Tabla 6.7 Especificaciones del microacelerómetro.

En la tabla solo se mencionan 4 de las 5 especificaciones revisadas en 5.1, debido a que la inmunidad a los choques es una especificación que se determina experimentalmente, por tanto en este trabajo no es posible cuantificar dicha característica del microacelerómetro.

## 6.2 Conclusiones

El objetivo del presente trabajo fue diseñar, modelar y simular un microacelerómetro del tipo capacitivo, utilizando un proceso de fabricación comercial para MEMS. Durante el desarrollo de este trabajo se estudió la forma en como opera un microsensor de aceleración.

En 2.5 se revisaron tres procesos de fabricación estándar y en 5.3.1 se seleccionó el proceso con el que se fabricará el microacelerómetro. Se realizaron diversas pruebas en Coventor con dos de los tres procesos de fabricación y se determinó que el proceso estándar más adecuado para fabricar el acelerómetro es el SOIMUMPS, debido a las propiedades mecánicas favorables de los materiales utilizados en este proceso. Aunque este proceso tiene la desventaja de contar con una sola capa estructural, por lo que es necesario emplear dos obleas para el diseño, en una se construye la masa con las vigas ancladas y en la otra los electrodos.

En 3.1 se estudió el acelerómetro como un sistema masa, resorte y amortiguador y se determinó que con un factor de amortiguamiento de  $\xi \approx 0.7$  prácticamente se elimina la distorsión de amplitud y fase, todo esto dentro de un rango de  $0 \leq \omega/\omega_n \leq 0.2$ , donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural de vibración de la estructura mecánica.

Como parte del capítulo 3 se estudió la forma de calcular el primer modo de vibración natural de la estructura y la constante de torsión de una viga. En 6.1.1 se obtuvieron los primeros cuatro modos de vibración de la masa. Se comparó el primer modo obtenido por ambos métodos y el resultado en Coventor estuvo por arriba del teórico por apenas el 1.33%. Por otra parte la constante de torsión y el momento de inercia obtenidos en Coventor difieren no más de 1.55%, respectivamente, de los calculados mediante la teoría. Considerando los cálculos hechos mediante la teoría vista en el capítulo 3 y los resultados obtenidos en Coventor, se puede afirmar que esta teoría es útil para hacer aproximaciones, además de que son expresiones sencillas.

En 5.3.2 se determinó que el factor de amortiguamiento a presión atmosférica es de  $\xi \cong 35.1$ , aproximadamente, el cual no es el ideal; para reducir este factor puede realizarse lo siguiente:

- Reducir la presión del aire dentro del dispositivo, de tal forma que decrezca el factor de amortiguamiento. Las desventajas de este método son: la dificultad para encapsular a una presión reducida, la variación en el desempeño del dispositivo y la determinación experimental de la presión exacta.
- Perforar la masa de prueba con una serie de hoyos distribuidos uniformemente a lo largo de la estructura, de tal forma que se reduzca el factor de amortiguamiento. La desventaja de este método es la reducción de la masa total de la estructura ocasionando una pérdida en la sensibilidad de la microestructura. Considerando lo anterior y los resultados obtenidos en Coventor, se determinó que lo mejor sería reducir la presión del aire e incrementar el gap, de tal forma que no se requiera una presión muy pequeña.

Utilizando Coventor se realizaron pruebas para determinar la respuesta del dispositivo en el dominio del tiempo y de la frecuencia, ante una entrada de tipo escalón. La respuesta en el tiempo indica que el sistema oscila respecto a la posición de estabilización final y en 1 ms prácticamente se estabiliza el sistema, aunque tiene un sobrepaso del 30%, aproximadamente. La respuesta en la frecuencia indica que entre 0-700 Hz la magnitud se mantiene plana, fuera de este rango la magnitud se atenúa conforme se incrementa la frecuencia; respecto a la fase de la respuesta se observó que en el rango de 0-3000 Hz, aproximadamente, la distorsión de fase varía linealmente con la frecuencia. Por tanto, el ancho de trabajo en el cual se evita la distorsión de amplitud y de fase, es de 0-700 Hz, aproximadamente, siendo mayor a la definida teóricamente en la sección 3.3.

Se debe tener en cuenta que, en el caso de este tipo de sistemas, con un momento de inercia  $I_\phi$  y una frecuencia natural de vibración  $\omega_n$ , algunos parámetros como el ancho de banda están en función del factor de amortiguamiento  $\xi$ , por tanto, la selección de  $\xi$  para ajustar cualquiera de las características afecta a las otras. Por ejemplo, un incremento en la rigidez de las vigas o un decremento en el momento de inercia de la masa aumentan la frecuencia natural; en cambio, una disminución en la rigidez de las vigas o aumento del momento de inercia de la masa, o ambas, reducen la frecuencia natural. Además, al aumentar la sensibilidad mecánica de la estructura se reduce la frecuencia natural.

Con ayuda de Coventor se obtuvo la sensibilidad del instrumento a aceleraciones ortogonales al eje principal de medición, eje z. Se aplicaron aceleraciones de 50G a la estructura en las direcciones x y y. Cuando se aplica una aceleración ortogonal, el desplazamiento de la estructura en el eje x es mayor que en cualquier otro caso, por lo tanto, el instrumento podría

ser sensible a aceleraciones aplicadas a dicho eje. Para reducir esto, se propuso incrementar el ancho de las vigas o reducir su longitud, aunque esto disminuirá la sensibilidad de la microestructura. Considerando lo anterior, el microacelerómetro tendrá una sensibilidad baja a los movimientos de ejes cruzados.

Básicamente, el proceso de optimización de la estructura mecánica consistió en variar las dimensiones físicas de las partes que conforman la estructura, debido a que su diseño está restringido al proceso SOIMUMPS. De manera general, con vigas de torsión cortas, ya sean angostas o anchas, se tiene una frecuencia natural grande pero con una baja sensibilidad al movimiento; en cambio, con vigas de torsión largas, ya sean angostas o anchas, la frecuencia natural decrece lo cual aumenta la sensibilidad a los movimientos del instrumento.

Uno de los principales objetivos de optimizar la estructura mecánica era lograr un movimiento lo más simétrico posible en los extremos libres de la masa, con respecto al eje de rotación. Esto se logró subdividiendo la perforación en 3, respecto del diseño presentado en [20], con lo cual se obtuvo un movimiento con mayor simetría y un aumento en la linealidad de los movimientos respecto a la aceleración aplicada.

En 3.4 se revisaron las leyes de escalamiento y se determinó que en el microdominio las fuerzas electrostáticas son comparables con la fuerza elástica de la microestructura. Por lo tanto, en el capítulo 4 se revisaron los efectos causados por la fuerza electrostática. Se obtuvo el voltaje de pull-in, el cual, según Coventor, ocurre entre 8-8.25 V. Sin embargo, utilizando la ecuación presentada en 4.2, se obtiene que este voltaje es de 7.359 V, aproximadamente, obteniéndose una diferencia de casi el 11%. Una opción para incrementar el voltaje de pull-in, es incrementar el ancho de la masa de prueba, con lo cual, también, se incrementaría la sensibilidad del dispositivo a costa de reducir la frecuencia natural de vibración y por consecuencia reducir el ancho de banda útil del acelerómetro.

En 4.3 se mostró que una estructura con un control de dos lados es mejor que una con un control de un solo lado, porque la linealidad del desplazamiento es mejor y el voltaje de control puede ser mayor sin causar el efecto pull-in. Además, se concluyó que un control de dos lados retroalimentado es mejor que uno de dos lados, debido a que el control retroalimentado prácticamente elimina el efecto pull-in y ofrece el mejor desempeño. Sin embargo se decidió emplear un control de dos lados porque emplear un control retroalimentado obligaba a profundizar en el tema, lo cual extendería este trabajo, y la no posibilidad de comprobar la teoría con algún programa de cómputo disponible en ese momento. En 5.3.3 se determinó teóricamente que, utilizando un control de dos lados y un voltaje efectivo de control de  $\pm 1V$ , la aceleración máxima a la cual existe un desplazamiento estable es de 317.65G; después de este valor es factible que ocurra el efecto pull-in, debido a la acción conjunta de la fuerza electrostática y la aceleración aplicada. Utilizando Coventor solo se pudo validar que dentro de un rango de 0-200G el desplazamiento mantiene una relación lineal con la acción conjunta de la aceleración y la fuerza electrostática.

Además, en 4.4 se revisó que un sensado del tipo capacitivo diferencial es mejor que uno monopolar y que en el diferencial la respuesta es lineal y proporcional a la aceleración sólo si los desplazamientos son pequeños, es decir  $|x| \ll d$ , donde  $x$  es el desplazamiento de la masa y  $d$  el gap entre las placas. Mediante Coventor se obtuvieron los resultados de

capacitancia contra aceleración aplicada y se determinó que dentro de un rango de  $\pm 50G$ , la respuesta en capacitancia mantiene una relación lineal con la aceleración, de esta forma se determinó el rango de operación del circuito.

En 4.4.1 se analizó un circuito electrónico para sensar los cambios de capacitancia, compuesto de dos circuitos amplificadores que contienen un medio puente de AC cada uno. Entre sus ventajas están el que puede implementarse con componentes discretos y la sencillez de su función de transferencia. Con base en los resultados obtenidos en capacitancia, se simuló el circuito sensor y se obtuvo una salida en voltaje proporcional a la aceleración aplicada; la sensibilidad del microsensor es de 6.17 mV/G. Aunque es una sensibilidad pequeña, ésta puede incrementarse si se agrega una etapa de amplificación a la salida del demodulador de la señal, aspecto que se decidió no realizar en este trabajo.

A lo largo del desarrollo del presente trabajo han quedado temas pendientes, que pueden ser tratados en trabajos posteriores, los cuales podrían ampliar los resultados obtenidos y quizás utilizarlos para optimizar este trabajo. A continuación se mencionan algunos de los temas pendientes.

- Profundizar en lo relacionado al amortiguamiento, ya que el desarrollo de modelos de amortiguamiento apropiados para cada aplicación involucra la utilización de la teoría desarrollada en mecánica de fluidos para escalas convencionales, pero se puede cuestionar la validez de estas teorías en aplicaciones de dispositivos MEMS. Al respecto, la literatura menciona que algunos trabajos experimentales realizados sobre amortiguamiento por película comprimida corresponden en un 66%, aproximadamente, con los modelos estimados utilizando el método de elemento finito.
- En el capítulo 4 se habla de las capacitancias parásitas en los microdispositivos, donde su magnitud es más grande que las capacitancias a medir. En este trabajo no se consideraron dichas capacitancias, debido a que es un trabajo meramente teórico, y se tendría que, determinar, mediante la experimentación si están en serie y/o en paralelo con la capacitancia del sensor y el orden de magnitud de estas capacitancias.
- En 4.4.1 se mencionó que uno de los métodos para medir capacitancia es la técnica de capacitores conmutados, así como algunas de sus ventajas. Quizá utilizar esta técnica podría resultar en una mejora al microdispositivo, además de que esta técnica considera las capacitancias parásitas.
- De igual forma, en el capítulo 4 también se revisó que cuando un dispositivo es alimentado con una señal de AC, a la salida de este se tiene una señal de AM, por lo que es importante demodular dicha señal. En ese mismo capítulo se propuso una técnica de demodulación, la demodulación de AM en cuadratura, aunque no es la única técnica útil, esta se propuso solo con el fin de enfatizar el hecho de demodular la señal de salida. Se considera que dependiendo de la posible aplicación final del microacelerómetro desarrollado sería mejor tal o cual técnica de demodulación.
- La conveniencia de analizar un sistema de control con retroalimentación electromecánica. Como se vio en 4.3, este tipo de control ofrece un mejor desempeño y prácticamente elimina el efecto pull-in.
- Coventor ofrece la herramienta Saber, con la cual es posible determinar el comportamiento electrodinámico de un microdispositivo. Sin embargo, durante el tiempo de desarrollo de este trabajo no fue posible tener acceso a esta herramienta, ya

que hubiera sido interesante comparar los resultados obtenidos en Coventor con los del Saber. Por tanto, queda pendiente realizar pruebas en este programa de cómputo.

- Por último, el punto más importante sea el de validar toda la teoría aquí planteada mediante la experimentación.

Finalmente, concluimos que el diseño desarrollado resultó en un microdispositivo aceptable. Sus ventajas son: un amplio rango,  $\pm 50G$ , el cual es común en microacelerómetros comerciales; un ancho de banda considerable, 700 Hz, aproximadamente; y una buena linealidad. Una de las desventajas es la sensibilidad, debido en parte, a las restricciones del proceso de fabricación estándar. Lo más importante, al utilizar un proceso de fabricación estándar, es la factibilidad de su fabricación, así como su experimentación y la posibilidad de crecimiento en su desarrollo.

# Bibliografía

- 1) Wilson Jon, *"Sensor Technology Handbook"*, Elsevier Inc., USA, 2005.
- 2) Maluf Nadim, Williams Kirt, *"An Introduction to Microelectromechanical Systems Engineering"*, Artech House Inc, USA 2000.
- 3) Min-Hang Bao, *"Micro Mechanical Transducers: Pressure Sensors, Accelerometers and Gyroscopes"*, Elsevier Science, 2000.
- 4) Kovacs, *"Micromachined Transducers Handbook"*, McGraw-Hill, USA, 1998.
- 5) Romero Oscar, Lopez Rogelio, *"Análisis, Diseño y Simulación de Interruptores MEMS para Aplicaciones en Alta Frecuencia"*, Memoria UNAM, México, 2005.
- 6) Lobontiu Nicolae, Garcia Ephraim, *"Mechanics of Microelectromechanical Systems"*, Kluwer Academic Publishers, USA, 2005.
- 7) MEMSCAP, [www.memscap.com](http://www.memscap.com)
- 8) MEMSCAP Inc., *"PolyMUMPs Design Handbook, a MUMPS ® process"*, Revision 11.0, USA, 2005.
- 9) MEMSCAP Inc., *"MetalMUMPs Design Handbook, a MUMPS ® process"*, Revision 1.0, USA, 2002.
- 10) MEMSCAP Inc., *"SOIMUMPs Design Handbook, a MUMPS ® process"*, Revision 5.0, USA, 2008.
- 11) Balachandran Balakumar, Magrab Edward, *"Vibraciones"*, Thomson, México, 2006.
- 12) Allen James, *"Micro Electro Mechanical System Design"*, Taylor & Francis Group, USA, 2005.
- 13) Thomson William, *"Teoría de Vibraciones: Aplicaciones"*, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1982.
- 14) Gad-el-Hak Mohamed, *"The MEMS Handbook: MEMS Applications, 2<sup>nd</sup> Ed."*, Taylor & Francis Group, USA, 2006.
- 15) Gómez José, *"Diseño de Moduladores Delta-Sigma en Tecnología CMOS VLSI: Aplicación al Desarrollo de Circuitos de Interfaz para Sensores Capacitivos"*, Memoria, Universitat de Barcelona, Department d'Electronica, España, 2000.
- 16) Beeby Stephen, Ensell Graham, *"MEMS Mechanical Sensors"*, Artech House Inc, USA, 2004.
- 17) Fraden Jacob, *"Handbook of Modern Sensors: Physics, Design and Applications, 3<sup>rd</sup> Ed."*, Springer, USA, 2004.
- 18) Kaplan Ben, Sagy Ysiah, Jacobson David, *"An Instrument for Continuously Measuring Capacitance Changes"*, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. IM-27, No. 1, Marzo, 1978.
- 19) Kumar Pradip, *"Principles of Electronic Communications Analog and Digital"*, CRC Press, USA, 2004.
- 20) Lee Innam, Ho Gil, Park Jungyul, Seok Seonho, Chun Kukjin, Lee Kyo-Il, *"Development and Analysis of the Vertical Capacitive Accelerometer"*, *Sensors and Actuators A Physical* 119 (2005) 8-18, Elsevier, Noviembre, 2004
- 21) Coventor Inc., *"MEMS Design and Analysis Tutorials: Physical and System-Level Design"*, Coventor Ware™, USA, 2008.
- 22) Riley William, Sturges Leroy, *"Ingeniería Mecánica: Dinámica"*, Ed. Reverté, España, 1996.