UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS PARA LA PROFESIÓN ACTUARIAL

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

JULIO ENRIQUE ARTEAGA NAVARRO

ASESOR: MTRO. VÍCTOR MANUEL ULLOA ARELLANO

MAYO 2011

A ustedes. Por su invaluable apoyo mi mayor gratitud, al haberme acercado con su propia excelencia a mi esencia.

Contenido

Presentación

Las matemáticas financieras tratan del valor del dinero en el tiempo, las tasas de interés implícitas en las operaciones financieras, los capitales, las transacciones y la sustitución de valores mediante la aplicación de modelos financieros. Así, las matemáticas financieras son una rama de las matemáticas aplicadas, en donde su conocimiento permite al estudioso tomar decisiones inteligentes.

Las empresas se enfrentan en la actualidad a dos grandes cuestiones financieras, siendo la primera la toma de decisiones en la asignación de pasivos y activos suficientes que maximicen el valor de dicha empresa; y la segunda, la obtención de recursos para financiar proyectos. Dicho de otra manera, la empresa busca individuos altamente capacitados, con alto nivel de responsabilidad, con excelente juicio y creatividad, un líder, el cual les indique la mejor forma de obtener, gastar e invertir el dinero.

La disolución de conflictos y la toma de decisión se vuelven procesos especialmente complicados cuando existe demasiada información la cual, no se encuentra precisamente agrupada y procesada, lo que crea una difícil interpretación de los datos y a su vez una participación somera en un vasto mercado financiero tanto nacional como internacional.

El directivo financiero es un intermediario entre los activos de la empresa y los inversores en activos financieros, a los cuales encontramos regularmente en mercados financieros. Así, el papel del director financiero dentro de la empresa se vuelve imprescindible en la toma de decisiones estratégicas y en la disolución de conflictos.

Una de las actividades medulares en el ámbito de las finanzas es el estudio de matemáticas financieras, de hecho, se considera la base para una buena práctica. Tal estudio incorpora métodos matemáticos, y financieros para la construcción de modelos que describen el comportamiento de un proyecto de inversión, permitiendo su valuación financiera.

Para estimar la viabilidad de un proyecto de inversión y su evolución a través del tiempo, debe construirse un modelo matemático financiero, en el que se integren los compromisos que adquieren las partes en el contrato de apertura expresados en fórmulas matemáticas del mismo y de las que dependen todos los cálculos del crédito.

La economía se considera como un cimiento fundamental sobre el que se constituyen las naciones. Toda economía de mercado requiere el funcionamiento de un sistema financiero que capte, equilibre, canalice, use y multiplique el dinero. Así, las matemáticas financieras están estrechamente relacionadas con la economía financiera, solo que su campo de estudio tiene un enfoque aun más abstracto.

El dinero es la base del funcionamiento de la economía de los países de libre mercado, como es el caso de México. El sistema financiero asume el estatus de receptor de las dos grandes fuerzas de la economía: la oferta y la demanda de dinero. Es decir, recibe el dinero de quienes lo tienen en exceso y a través de negociaciones los hace llegar a quienes carecen de él.

Formalmente se define al sistema financiero como el mecanismo cuya función sustantiva se encamina a equilibrar los recursos monetarios. En términos de economía, es el gran mercado en el cual se llevan a cabo las operaciones financieras de compra y venta de dinero, es por tal motivo que las matemáticas financieras son una herramienta imprescindible en la valuación, administración y en la toma de decisiones de las transacciones financieras.

Dado que el dinero es el actor central y motor de la economía, resulta fundamental preservar su equilibrio entre la oferta y la demanda, para permitir el sano desarrollo de la economía. Si este equilibrio se pierde, surgen graves problemas como el desempleo, la recesión o la inflación. Los organismos participantes del sector financiero se encargan de concentrar el dinero excedente de algunos sectores para su posterior dispersión entre los sectores que lo necesitan. Los organismos que vigilan y regulan éste proceso de concentración y dispersión de recursos son de carácter gubernamental y su tarea principal consiste en la implantación de lineamientos de actuación y medidas preventivas que buscan moderar el flujo de dinero a través de las variables económicas, con la finalidad de procurar el sano desarrollo y crecimiento de la economía.

Es el sistema financiero, escenario fundamental en el que se presentan graves controversias relativas a los métodos de cálculo de intereses y de la aplicación de las tasas apropiadas. En virtud de ello, el artículo 65 de la Ley de Instituciones de Crédito ordena a todas las instituciones financieras la ejecución de estudios de factibilidad antes de celebrar un contrato crediticio, lo que implica la obligación legal de realizar estudios especializados a través métodos matemáticos financieros para su valuación financiera.

La teoría del interés trata del estudio del comportamiento matemático de los capitales dentro del sistema financiero, considerando modelos exponenciales y logarítmicos, así como progresiones aritméticas y geométricas, para cálculos con ecuaciones de valor a efecto de cuantificar en términos generales, el valor presente, el valor futuro, amortizaciones y depreciaciones en el contexto del mercado de dinero, de capitales, divisas y derivados.

El objetivo de elaborar este material es el facilitar fundamentos teóricos a los estudiosos de las Matemáticas Financieras, asimismo, les ayudará a una comprensión de cómo el dinero gana, pierde o modifica su valor en el transcurso del tiempo, el cual será considerado un bien económico, que sin duda alguna les despertará una visión ventajosa hacia un futuro económico estable, dándoles las herramientas para aprovechar al máximo sus recursos monetarios y permitiéndoles resolver problemas financieros de la vida cotidiana. Si bien es cierto, las matemáticas financieras son una antesala a las Matemáticas Actuariales, el alumno encontrará una notación amigable en el que se preparará para estudios venideros en el ramo actuarial.

El principio básico que ha guiado el desarrollo de "Elementos de Matemáticas Financieras para la profesión Actuarial" es la teoría. Todo estudiante de las matemáticas financieras debe adquirir conocimientos sólidos y equilibrados sobre su teoría, de esta manera tendrá la posibilidad de valorar los aspectos más relevantes y sutiles que enfrenta el actuario en su profesión.

El material se ha estructurado en cuatro capítulos que representan los pilares del conocimiento vanguardista de las matemáticas financieras, buscando que fuese acorde con el principio básico, abordando temas de alta relevancia para el actuario, que fuese de comprensión viable y que pudiese ser utilizado como guía para el docente. Asimismo, se ha procurado mantener la notación matemática en un alto nivel, evitando ejemplos numéricos y procurando los algebraicos, de esta manera el estudiante encontrará la teoría detallada y relevante para su práctica, lo cual puede compaginar muy bien con alguna guía de ejercicios de su preferencia.

En el primer capítulo se definen los conceptos más importantes de las matemáticas financieras pasando por tasas de interés efectivas hasta llegar a la fuerza de interés, la cual será muy socorrida en estudios más especializados en ciencias actuariales.

En el segundo capítulo se explica uno de los fundamento de las finanzas desde la perspectiva de ecuación de valor y como se pueden resolver algunos problemas que involucran a sus componentes.

En el tercer capítulo se analizan las anualidades más comunes, se emplea una notación meramente actuarial y se propone una notación para el valor futuro de la anualidad diferida, asimismo, se propone una clasificación extendida y detallada para las anualidades.

El cuarto capítulo incluye una de las aplicaciones con mayor empleo en el sector financiero, el cual es la amortización de una deuda y se analizan algunas particularidades de las anualidades, como lo es el cálculo de las tasas de interés.

Aunque el material fue pensado y elaborado para la profesión actuarial, está diseñado para todo aquel alumno de licenciaturas afines, profesionistas o maestros que pretendan hacer de las matemáticas financieras parte de su desarrollo personal o profesional.

Capítulo 1

Medición del interés

1.1 Introducción

Se está acostumbrado a considerar el tiempo como una magnitud, según la naturaleza del fenómeno o evento financiero que en el momento se analiza. Por lo regular, en la economía se consideraba el tiempo como una medida que no influía sobre los fenómenos económicos o financieros, pero esto implicaba suponer que los fenómenos de dicha índole no cambiaban respecto al tiempo o eran estáticos. Más tarde, vienen los modelos dinámicos los cuales contemplan variables que se encuentran en función del tiempo. Asimismo, el tiempo se empieza a contemplar como un bien económico, un bien que junto a terceros es capaz de transformarse en nuevos bienes por medio de procesos beneficiosos.

Así, por ejemplo, si se cuenta con dos bienes que satisfacen la misma necesidad, pero en lapsos distintos, es preferible el bien más cercano. Es decir, para que un bien remplace al que se encuentra más próximo, se tiene que retribuir con una compensación en el aumento de valor del bien más lejano. Esto es, si un sujeto está dispuesto a sustituir 1 kilogramo de naranjas el día de hoy, por 1.100 kilogramos en un periodo más tarde, es dado que en su curva de indiferencia recibirá un aumento de valor de 100 gramos por el mismo bien y no por un decremento si fuese el caso en que las naranjas fuesen invariantes con el tiempo.

En consecuencia, se considera el tiempo como un bien financiero o una magnitud asociada a otros bienes y la necesidad de medir el incremento en el valor de dichos bienes es objeto de interés y protagonista de la materia. Por tal motivo, el primer paso a dar es asignar valores reales a dichos bienes y dimensionar las variables.

Lo expuesto con anterioridad conduce a las siguientes definiciones:

El capital financiero C o simplemente capital se puede definir como la medida bidimensional de un bien económico correspondiente a su disponibilidad o vencimiento en el tiempo t, donde $C \in \mathbb{R}^+$ y $t \in \mathbb{R}$. Comúnmente el Capital se expresa en unidades monetarias.

El interés I es el incremento o decremento que experimenta el valor de un capital financiero disponible en un instante t_0 (que comúnmente se sugiere como fecha focal), al posponer o adelantar correspondientemente su disponibilidad hasta un instante t_n.

Por tanto el interés I es el precio que se paga por disponer de un capital C_0 [1] durante un lapso determinado $n = t_n - t_0$. Así por lo contrario, la cantidad cobrada por invertir en un capital C_0 durante un lapso determinado $n = t_n - t_0$, es comúnmente denominada descuento *D*.

$$I = C_n - C_0 \tag{1.1.1}$$

$$D = C_n - C_0 \tag{1.1.2}$$

Asimismo, el interés se puede definir como la cuota que tiene que pagar la persona que recibe cierta cantidad de dinero (Capital) como compensación a otra persona que ha prestado dicho capital por el hecho de no poder utilizarlo en un intervalo determinado n. Cabe mencionar que el interés se expresa en unidades monetarias al igual que el capital.

$$C_0 + I = C_n \text{ [2]} \tag{1.1.3}$$

o en términos de descuento

$$C_0 + D = C_n \tag{1.1.4}$$

Gráficamente un capital se expresa como un punto en el plano cartesiano o más comúnmente en forma simplificada omitiendo el eje de las ordenadas, sobreentendiéndose como la distancia del punto al eje del tiempo (que mide el valor de la cantidad del capital C_t)

Bajo un escenario de certidumbre el interés depende del valor del capital C_0 y del periodo de tiempo n durante el cual estará trabajando el capital.

[1] También se denomina como Capital Inicial, Valor Presente, Valor Actual, Valor Descontado, Principal, entre otros.

[2] C_n también llamado Capital Final, Valor Futuro, Monto del Capital, Valor acumulado, entre otros.

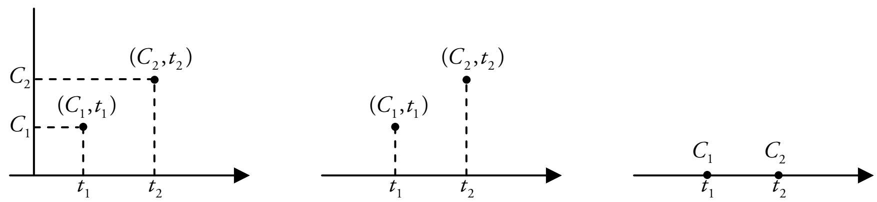


Figura 1.1

1.2 Tasas de interés efectiva

La tasa de interés efectiva es la razón de crecimiento entre el interés I que es pagado al final del periodo y el capital , cabe aclarar que dicha medida se basa en un periodo completo, el cual puede ser en días, quincenas, meses, años, etc.

$$i = \frac{I}{C_0} \tag{1.2.1}$$

Ej. El interés y la tasa de interés efectiva que se obtendría al trabajar[3] $1000um$ (unidades monetarias), durante un lapso de 4 años, se pude calcular conociendo el capital final que arrojaría esta transacción. Así, si $C_4 = 1500um$ se tiene que los intereses son: $I = 1500 - 1000 = 500um$.

En la operación anterior, la tasa de interés efectiva es igual a: $i = \frac{500}{1000} = 0.5$ que corresponde a una tasa de interés efectiva del 50% en el periodo comprendido en los cuatro años de inversión del dinero. En la práctica, es muy común citar la tasa efectiva como un porcentaje.

Para esquematizar la operación financiera que se realizo anteriormente se utilizará la forma simplificada de grafico, e.d. (es decir),

[3] Se deberá entender el término "trabajar" como una inversión financiera, transacción, préstamo, etc.

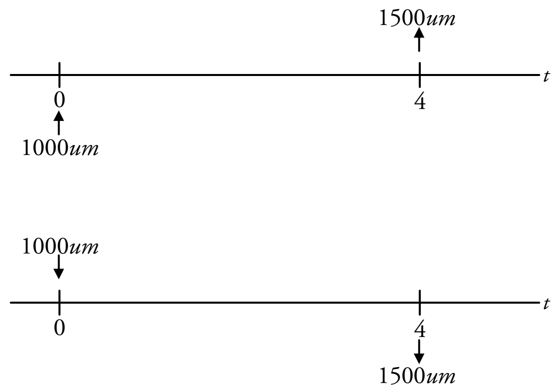


Figura 1.2

en donde las cantidades entrantes van ya sea por arriba de la recta y las cantidades resultantes de la operación colocadas por debajo de dicha recta o todo lo contrario.

Algunos autores no manejan este principio y esquematizan las operaciones de la siguiente forma:

Figura 1.3

Esto no debería de causar ninguna confusión en el estudiante, dado que si se comprende la operación financiera que se está realizando es de fácil lectura el gráfico. De lo anterior, se puede decir que es mejor contar con un grafico que nos ayude a valorar y comprender la operación financiera, que a no contar con él.

Al grafico que nos ayuda a esquematizar cualquier operación financiera se le conoce comúnmente como esquema de flujo de caja[4] o como grafica de valores en línea de tiempo.

La tasa de interés efectiva i también se puede definir como la "cantidad de dinero que una unidad monetaria invertida al principio de un periodo genera durante dicho periodo, donde el interés es pagado al final del periodo".[5]

[4] También como cash flow, diagrama de flujo de efectivo, entre otros.
[5] Kellison, S.G. (1991), The Theory of Interest, Second Edition, USA, Irwin/McGraw-Hill

Para ejemplificar la definición anterior, primero se tendrá que definir la función de acumulación.

La Función de Acumulación $a(t)$ es el valor acumulado (VA[6]) de una unidad monetaria invertida en un fondo desde el tiempo 0 al tiempo t. A la función $a(t)$ también se le conoce como factor de acumulación, factor de capitalización o factor de crecimiento.

Algunas de las funciones de acumulación más importantes son las de los modelos de interés compuesto y modelo de interés simple los cuales se analizarán más adelante. Las siguientes graficas muestran algunas de las funciones de acumulación antes mencionadas, las cuales se encuentran cotidianamente en algunas operaciones financieras, es importante mencionar que hay un cumulo de dichas funciones que pasan por los puntos cartesianos $(0,1)$ y $(1,1+i)$.

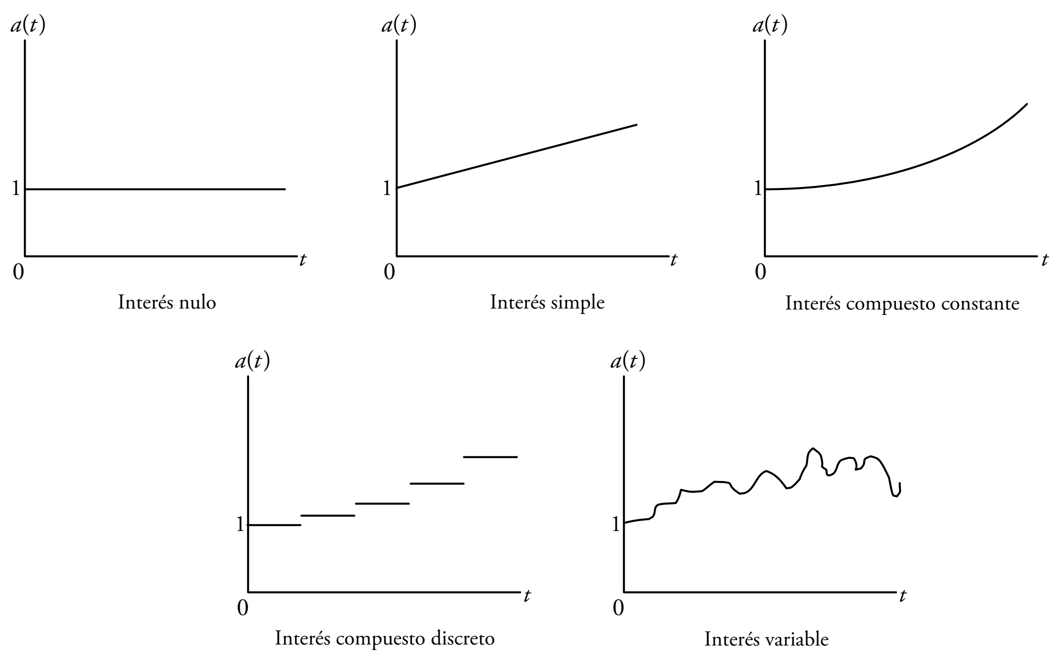


Figura 1.4

Algunas de las propiedades más relevantes de $a(t)$ son: por definición $a(0) \equiv 1$; la función de acumulación, generalmente es creciente y en ocasiones suele darse decrecimiento, lo anterior implicaría una tasa de interés negativa en el intervalo de

[6] AV por sus siglas en lengua inglesa

tiempo; y por último, si los intereses se acumulan continuamente, la función será continua.

Ahora que ya se tiene definida la función de acumulación y retomando la segunda definición de tasa de interés efectiva, se podrá entender y denotar de la siguiente manera a i en términos de $a(t)$:

$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} \tag{1.2.2}$$

Se debe observar que si $t = 1$ y sustituyendo en (1.2.2) se tiene:

$$i_1 = a(1) - 1$$

es decir,

$$a(1) = 1 + i_1 \tag{1.2.3}$$

La siguiente gráfica muestra una de las típicas funciones de $a(t)$ y el crecimiento en el intervalo $[t-1, t]$.

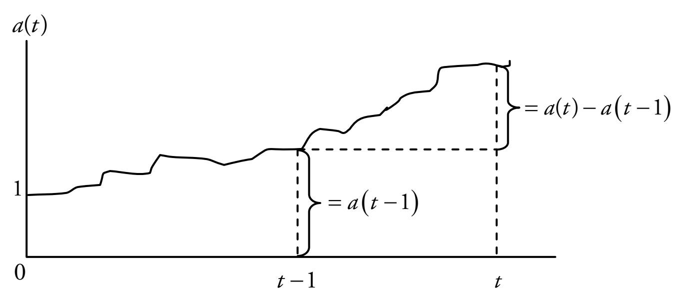


Figura 1.5

En la praxis, la cantidad invertida al comienzo de una operación financiera por lo regular es mayor a una unidad monetaria, es por esto, que surge la necesidad de definir una función que acumule cierta cantidad C invertida en tiempo 0 al tiempo t, a la que se llamará Función de Monto o Función de Cantidad y será denotada por $A(t)$, en donde $A(t)$ es igual a:

$$A(t) = Ca(t) \tag{1.2.4}$$

cabe aclarar lo siguiente

$$A(0) = Ca(0) = C \qquad (1.2.5)$$

por tanto sustituyendo (1.2.5) en (1.2.4)

$$A(t) = A(0)a(t) \qquad (1.2.6)$$

Contando con la función de monto también se puede obtener la tasa de interés efectiva de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} i_t &= \frac{A(t) - A(t-1)}{A(t-1)} \\ &= \frac{Ca(t) - Ca(t-1)}{Ca(t-1)} \\ &= \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} \end{aligned} \qquad (1.2.7)$$

Es importante notar que de la ecuación (1.2.7) se desprende la siguiente igualdad

$$A(t) = (1+i)A(t-1) \qquad (1.2.8)$$

La cual indica que el valor final después de un lapso es igual al valor del capital en el tiempo $t-1$ más el producto de dicho valor por la tasa de interés efectiva en el periodo.

Por lo regular, suelen tomarse periodos comprendidos de 1 año. Para tal efecto, se definirá la tasa de interés efectiva anual denotada por i, la cual para efectos de practicidad y mientras no se mencione lo contrario, deberá entenderse que cuando se cite la tasa i[7] será para referir a la tasa de interés efectiva anual.

La tasa de interés efectiva anual devengada por una inversión durante un periodo de un año es "el cambio porcentual en el valor de la inversión desde el principio hasta el final del año, sin tomar en cuenta el comportamiento de la inversión en puntos intermedios del año".[8]

La definición anterior es la pauta fundamental en las finanzas y para su comprensión, se aplicará en los siguientes ejemplos.

---

[7] Para otro tipo de capitalización de intereses se utilizaran otras consonantes como j, k, r, etc., para denotar las tasas de interés.

[8] Broverman, Samuel A. (2008), Mathematics of investment and credit, 4th ed., USA, ACTEX

Ej. Si se asume que una función de monto es igual a $A(t)=100+5t$, ¿Cuál será la tasa de interés efectiva al quinto año?

Para encontrar la solución al ejercicio, se tendría que utilizar (1.2.7) de la siguiente forma:

$$i_5=\frac{A(5)-A(4)}{A(4)}=\frac{125-120}{120}=0.04166$$

Es decir, la tasa efectiva de interés anual para el quinto año es del 4.66%.

Ej. Supóngase que $A(t)=100(1.1)^t$. Calculando la tasa de interés efectiva anual para el año 7 se tendrá:

$$i_7=\frac{A(7)-A(6)}{A(6)}=\frac{194.87-177.16}{177.16}=0.10$$

que corresponde a una tasa de interés efectiva anual del 10%.

1.3 Capitalización Simple o Modelo de Interés Simple

El modelo de interés simple se define como aquel modelo en donde los intereses de un lapso cualquiera son proporcionales a la duración del mismo u al capital en juego. Se llama de capitalización simple porque los intereses generados en un periodo no se acumulan (no se suman al capital) para volver a generar intereses del siguiente periodo. Por tanto el interés en un periodo t-ésimo es igual a:

$$I_t=A(0)j_t \tag{1.3.1}$$

donde j es la tasa de interés efectiva en el periodo t-ésimo.

1.3.1 Función de acumulación

La función de acumulación de interés simple es aquella que acumula una unidad monetaria desde el tiempo 0 hasta el tiempo t a una tasa de interés con capitalización simple, en donde los periodos y la tasa de interés simple corresponden a la misma frecuencia de tiempo, esto es:

$$a(t) = 1 + jt \tag{1.3.2}$$

para toda t que pertenece a los enteros extendidos.

En caso de que la tasa de interés simple genere intereses por un año, entonces, se estará refiriendo a una tasa de interés simple anual j, de tal forma que en la igualdad (1.3.2) la frecuencia de la tasa y el tiempo tienen comportamiento anual.

Es muy común que esta capitalización se utilice en escenarios menores a un año, dado su crecimiento respecto a la capitalización compuesta.

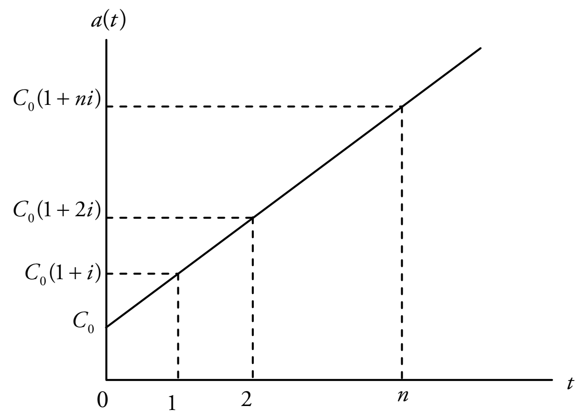


Figura 1.6

Se deberá comprender que aunque la tasa de interés simple es constante, esto no implica una tasa de interés efectiva simple constante. Es por esta razón que no se utilizo la vocal i para denotar a la tasa de interés simple anual. A continuación, se detalla el porqué.

Sea i_t la tasa de interés efectiva en el t-ésimo periodo y sea j la tasa de interés simple, por definición se construye lo siguiente:

$$\begin{aligned} i_t &= \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} \\ &= \frac{[1 + jt] - [1 - j(t-1)]}{1 - j(t-1)} \end{aligned}$$

$$i_t = \frac{j}{1 - j(t-1)} \tag{1.3.3}$$

en donde i_t decrece tanto como t se incremente y decrece de forma hiperbólica.

En la definición de la función de acumulación de interés simple se especifica que la función es válida para toda t que pertenece a los enteros extendidos, sin embargo, en la práctica el tiempo no siempre es un entero. Por tal motivo, es necesario extender la definición para toda $t \geq 0$.

Sea $t \geq 0$ y $s \geq 0$, utilizando la definición de la función de acumulación de interés simple (1.3.2), se tiene que:

$$\begin{aligned} a(t+s) &= 1+i(t+s) \\ &= 1+it+is \\ &= a(t)+a(t)-1 \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Por otro lado, si se asume que $a(t)$ es diferenciable y se utiliza la definición de derivada se sigue que

$$a'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{a(t+s)-a(t)}{a(s)} \tag{1.3.5}$$

Sustituyendo (1.3.4) en (1.3.5) se obtiene

$$a'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{a(s)-1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{a(s)-a(0)}{s} = a'(0)$$

$$a'(t) = a'(0) \tag{1.3.6}$$

en donde $a'(0)$ es constante y corresponde por definición a la derivada de $a(0)$.

Ahora, si se sustituye t por n e integrando ambos lados de (1.3.6)

$$\int_0^t a'(n)dn = \int_0^t a'(0)dn$$

$$a(t)-a(0) = ta'(0)$$

$$a(t) = 1+ta'(0) \tag{1.3.7}$$

si el valor de $t=1$ entonces se tiene

$$a(1) = 1+a'(0) \tag{1.3.8}$$

recordando que $a(1)=1+i$ y sustituyendo en (1.3.8) se tiene que:

$$a'(0)=i$$

sustituyendo la igualdad anterior en (1.3.7)

$$a(t)=1+it \quad \forall t \in [0,\infty)$$

1.4 Capitalización Compuesta o Modelo de Interés Compuesto

El modelo de interés compuesto es aquel en que los intereses de un periodo cualquiera se acumulan al capital, para que la suma de ambos genere intereses en el periodo o los periodos subsecuentes. Es decir, el interés se reinvierte para ganar intereses adicionales, es por el anterior motivo que se le conoce como capitalización compuesta.

1.4.1 Función de acumulación

La función de acumulación de interés compuesto es aquella que acumula una unidad monetaria desde el tiempo 0 hasta el tiempo t con capitalización compuesta a una tasa de interés efectiva i por periodo, en donde la frecuencia de la capitalización de los intereses y el tiempo son iguales.

$$a(t)=(1+i)^t \tag{1.4.1}$$

válido para toda t que pertenece a los enteros extendidos.

Para tener una mejor comprensión de la definición previa, se expondrá el siguiente razonamiento. Supóngase que 1um genera intereses a una tasa de interés efectiva i por periodo t-ésimo, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
a(1)&=1+i\\
a(2)&=(1+i)+i(1+i)=(1+i)^2\\
a(3)&=(1+i)^2+i(1+i)^2=(1+i)^3\\
&\vdots\\
a(t)&=(1+i)^t
\end{aligned}$$

valido para una tasa de interés invariante, e.d., una tasa de interés efectiva por periodo igual para toda t que pertenece a los enteros extendidos.

Cabe señalar que una tasa de interés compuesta constante implica una tasa de interés efectiva constante.

Sea i_t la tasa de interés efectiva por periodo t-ésimo y sea i la tasa de interés compuesta, por definición se tiene

$$\begin{aligned} i_t &= \frac{a(t)-a(t-1)}{a(t-1)} \\ &= \frac{(1+i)^t-(1+i)^{t-1}}{(1+i)^{t-1}} \\ &= i \end{aligned}$$

Se puede apreciar que el valor i no depende del tiempo en contraste con el modelo de Interés Simple (*M.I.S.*).

Por tal motivo, la tasa de interés efectiva es la misma que la tasa de interés compuesta. Recordando la definición de i, para el caso en que no se mencione lo contrario, la tasa efectiva de interés anual se denotará como i para periodos comprendidos de un año.

Dado que la definición de la función de acumulación es válida para toda t que pertenece a los enteros extendidos, habrá que ampliar la definición de $a(t)$ para valores de $t \in [0,\infty)$, así se procederá como se realizó en el *M.I.S.,* a comprobar que la función es válido para dicho intervalo.

Supóngase qué $t \geq 0$ y $s \geq 0$, utilizando (1.4.1) se tiene

$$\begin{aligned} a(t+s) &= (1+i)^{t+s} \\ &= (1+i)^t(1+i)^s \\ &= a(t)a(s) \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

asumiendo que $a(t)$ es diferenciable, de la definición de derivada se sigue

$$a'(t) = \lim_{s\to 0}\frac{a(t+s)-a(t)}{a(s)} \tag{1.4.3}$$

sustituyendo en (1.4.2)en (1.4.3)

$$a'(t)=\lim_{s\to 0}\frac{a(t)a(s)-a(t)}{s}=a(t)\lim_{s\to 0}\frac{a(s)-a(0)}{s}=a(t)a'(0)$$

$$\frac{a'(t)}{a(t)}=a'(0) \tag{1.4.4}$$

se sabe que el producto de la derivada de una función por el reciproco de la misma es igual a la derivada del logaritmo neperiano de la función, por tanto,

$$\frac{a'(t)}{a(t)}=\frac{d\ln a(t)}{dt}$$

$$\frac{d\ln a(t)}{dt}=a'(0) \tag{1.4.5}$$

remplazando t por n en (1.4.5) e integrando ambos lados de la igualdad desde 0 hasta t

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d\ln a(n)}{dn}dn &= \int_0^t a'(0)dn \\ \ln a(t)-\ln a(0) &= ta'(0)\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

recordando las propiedades de la función de acumulación donde $a(0)=1$ y si $t=1$ en (1.4.6) se tiene que

$$\ln a(1)=a'(0)$$

donde $a(1)=1+i$, por tanto

$$\ln(1+i)=a'(0) \tag{1.4.7}$$

sustituyendo (1.4.7) en (1.4.6)

$$\begin{aligned}\ln a(t) &= t\ln(1+i) \\ &= \ln(1+i)^t\end{aligned}$$

$$a(t)=(1+i)^t \quad \forall t\geq 0 \tag{1.4.8}$$

La ecuación (1.4.8) también es válida si se rescribe en términos de función de monto, es decir,

$$A(t)=A(0)a(t)=A(0)(1+i)^t\,. \tag{1.4.9}$$

Como ya se explico, la tasa de interés en el Modelo de Interés Compuesto (*M.I.C.*) refiere a una tasa de interés efectiva por periodo medible constante para cualquier periodo, es decir, son tasas de interés niveladas. Sin embargo, habrá flujos de efectivo en los cuales la tasa de interés no sea la misma para todos los periodos, es más, se puede dar el caso en el cual se involucre un flujo de efectivo en especifico con tasas de interés diferentes para todos los periodos.[9]

1.4.2 Tasas de interés no niveladas

La función de acumulación en términos de i_t es la pauta a seguir en este tema. Existe la posibilidad de que en algún momento surja la necesidad de calcular el monto de una unidad monetaria desde el tiempo 0 hasta el tiempo t, bajo tasas de interés distintas para cada t-ésimo de periodo. Así, para calcular el monto correspondiente, la siguiente ecuación refleja el producto de las primeras t funciones de acumulación con distintas tasas de interés, esto es:

$$a(t) = (1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\cdots(1+i_t) \qquad (1.4.10)$$

es decir

$$a(t) = \prod_{k=1}^{t}(1+i_k) \qquad (1.4.11)$$

Se debe notar que si i_k es la misma tasa para todos los intervalos t-ésimos, entonces se cuenta con el caso particular de la función de acumulación de interés compuesto.

1.4.3 Valor presente y factor de descuento

Se ha discutido el tema relacionado al Valor Futuro, esto es, se supone un capital invertido en tiempo cero y se calcula el monto o la cantidad resultante pasados t periodos. La cuestión al tratar en el Valor Presente es exactamente lo opuesto, e.d., dado una cantidad futura (un monto de capital) en tiempo t, la pregunta que se debe formular es ¿Cuál sería el Valor Presente (V.P.) o Valor Actual del capital en

[9] Un ejemplo de tasas no niveladas son los bonos stripped

tiempo 0, de tal manera que al invertir este de cómo resultado el V.F.? Para responder a tal cuestionamiento, es necesario definir una función que permita calcular dicho V.P. Así, primero se determinara que es un factor de descuento y posteriormente la definición de función de descuento.

Supóngase que pasando un año a partir de hoy, el valor acumulado de cierta cantidad X invertida a una tasa de interés efectiva anual i en el tiempo 0 es de 1um, esto es $Xa(1)=X(1+i)=1$, por tanto $X=\frac{1}{(1+i)}$, donde $\frac{1}{(1+i)}$ es el valor presente de una unidad monetaria a un año.

Si la tasa de interés para un periodo es i, "el valor presente de un monto de 1um hecha en un periodo desde hoy es $(1+i)^{-1}$. El factor $(1+i)^{-1}$ es frecuentemente denotado como v en notación actuarial y es llamado factor de valor presente o factor de descuento".[10]

$$v=\frac{1}{(1+i)}=(1+i)^{-1} \tag{1.4.12}$$

Considerando la función de monto, para reflejar la notación previa se tiene

$$A(1)=A(0)a(1)$$

$$A(0)=\frac{A(1)}{a(1)}=A(1)a^{-1}(1)=A(1)(1+i)^{-1}$$

$$A(0)=A(1)v \tag{1.4.13}$$

Generalizando, en el *M.I.C.* se tienen que

$$A(0)=A(t)a^{-1}(t)=A(t)\frac{1}{a(t)} \tag{1.4.14}$$

$$A(0)=A(t)v^{t} \tag{1.4.15}$$

en donde la función $\frac{1}{a(t)}$ es llamada la función de descuento que es el reciproco de la función de acumulación.

$$a^{-1}(t)a(t)=1 \tag{1.4.16}$$

[10] Broverman, Samuel A. (2008), Mathematics of investment and credit, 4th ed., USA, ACTEX

El factor de descuento v es muy recurrido en las Matemáticas Financieras, Actuariales, Teoría del Riesgo, Finanzas, Administración del Riesgo, entre otras asignaturas en la licenciatura en Actuaría.

$$v^t = \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t} \tag{1.4.17}$$

El factor de descuento citado en (1.4.17) y anteriores, son definidos para el *M.I.C.*, sin embargo, para el M.I.S. la función de descuento se define de la siguiente forma:

$$a^{-1}(t) = \frac{1}{1+it} = (1+it)^{-1} \tag{1.4.18}$$

Se debe notar que definida la función de descuento, se extiende la definición de la función de acumulación para valores negativos de t. La siguiente grafica muestra el comportamiento de la función de acumulación para toda $t \in \mathbb{R}$.

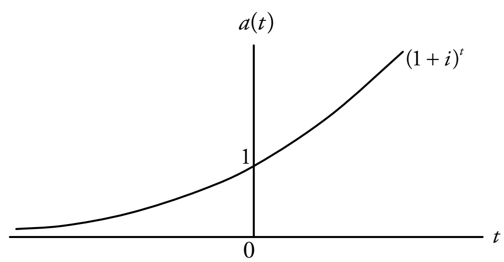


Figura 1.7

1.4.4 Tasa de interés nominal

La tasa de interés nominal (también conocida como intensidad de interés) es aquella que nos indica que los intereses se han capitalizado m veces por periodo medible. Existen muchos términos para referir a una tasa de interés nominal, entre los principales se encuentran tasa de interés pagable o convertible o compuesta m veces por periodo medible, así, la frecuencia con que el interés es pagado y reinvertido es llamado el periodo de conversión del interés m.

Como se ha tratado anteriormente, en la práctica es muy común utilizar como periodo medible estándar un año, por tal se desprende la siguiente definición de tasa de interés nominal anual.

Cuando se cita a una tasa de interés nominal anual $i^{(m)}$ convertible m veces al año, no necesariamente es para referir una tasa de interés efectiva. Las instituciones crediticias suelen citar las tasas de interés anuales de esta forma, dando con ello a entender que el interés se cobrará más de una vez por año, es decir, dada una tasa de interés nominal por una institución esta deberá entenderse como el producto de una tasa efectiva i' por periodo m-ésimo de un año por el número de periodos m comprendidos en un año.

$$i^{(m)} = i'm \tag{1.4.19}$$

en donde m es la frecuencia de capitalización de los intereses al año. La notación en (1.4.19) es conocida como la notación actuarial de la tasa de interés nominal anual capitalizable m-veces en un año.

Se debe notar que el superíndice de la tasa de interés nominal anual $i^{(m)}$ no es un exponente y solo indica el número de veces que el interés se capitaliza al año.

De la definición de la igualdad en (1.4.19) se deriva lo siguiente:

$$i' = \frac{i^{(m)}}{m} \tag{1.4.20}$$

Una definición alternativa para la tasa de interés nominal anual es la siguiente: una tasa de interés nominal anual compuesta m veces por año refiere a un periodo de capitalización de intereses de $\frac{1}{m}$ de año, donde el interés para el $\frac{1}{m}$ periodo es igual al cociente de la tasa de interés nominal anual citada entre la frecuencia de conversión del interés m.

Cabe aclarar que la tasa de interés nominal anual tiene efectos informativos y meramente indicativos y permite el cálculo de la tasa de interés efectiva en el m-ésimo periodo o de la tasa de interés efectiva anual equivalente, las cuales se utilizan para los cálculos financieros.

A continuación se verá un razonamiento general para el crecimiento de una unidad monetaria invertida en tiempo 0 hasta el tiempo 1, a una tasa de interés nominal anual capitalizable m veces al año.

Supóngase una inversión inicial de 1um a una tasa de interés nominal anual $i^{(m)}$, al final de un año la cantidad acumulada será la siguiente:

Tabla 1.1

Periodo m-ésimo	*Valor acumulado*
0	1
$1/m$	$(1+i') = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)$
$2/m$	$(1+i')^2 = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2$
$3/m$	$(1+i')^3 = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$
$(m-1)/m$	$(1+i')^{m-1} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m-1}$
$m/m = un\ año$	$(1+i')^m = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

Con lo anterior, es evidente que después de un año el valor acumulado de 1um es $(1+i')^m$, esto no solo sucede si se cuenta con a una tasa de interés nominal anual capitalizable m-veces al año $i^{(m)}$, es decir, supóngase que se cuenta con una tasa de interés efectiva anual i, la cual, genera el mismo valor acumulado a un año que se genero con la tasa de interés nominal anual $i^{(m)}$, entonces se estaría hablando de una equivalencia entre tasas que generan montos equivalentes.

1.4.5 Tasas de interés equivalentes

Son aquellas que aplicadas al mismo capital inicial, durante el mismo periodo de tiempo, producen idéntico valor acumulado bajo un mismo modelo financiero. Así, una tasa de interés nominal anual capitalizable m-veces al año $i^{(m)}$ es equivalente a una tasa de interés efectiva anual i si y solo si se cumple lo siguiente:

$$(1+i) = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \tag{1.4.21}$$

Si se conoce alguna de las tasas citadas i o $i^{(m)}$, entonces se puede saber la equivalencia entre ellas despejando a la que no se tiene

$$i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}-1 \qquad (1.4.22)$$

o bien

$$i^{(m)}=m\left[(1+i)^{1/m}-1\right] \qquad (1.4.23)$$

En general, cuando se pide encontrar tasas equivalentes en algún ejercicio dado, se toma como referencia el periodo de un año para igualar cantidades futuras o presentes en el tiempo y de este modo obtener las tasas equivalentes a la tasa efectiva anual implícita en un problema. La siguiente igualdad refleja la explicación anterior.

$$(1+i)=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{i^{(p)}}{p}\right)^{p} \qquad (1.4.24)$$

Cabe mencionar que existen tasas equivalentes las cuales son pagaderas una vez cada dos años, y más generalmente, existen aquellas en los que los intereses se capitalizan una vez cada q años, por tal motivo no se debe discriminar la posibilidad de tener equivalencias de este tipo

$$(1+i)=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{i^{(1/q)}}{1/q}\right)^{1/q} \qquad (1.4.25)$$

en donde $m=1/q$ e $i^{(1/q)}$ es la tasa de interés nominal compuesta una vez cada q años, así, el lado derecho de la igualdad (1.4.25) pudiese explicarse como el valor acumulado de 1um a una tasa de interés nominal compuesta solo $1/q$-tiempo (un q-ésimo de tiempo) cada año.

El siguiente ejemplo muestra la relación de equivalencia que existe entre la tasa de interés efectiva i y las tasas nominales con frecuencia de capitalización m.

Ej. Suponga que la tasa efectiva anual de interés es del 12.68250301%. Encuentra la equivalencia de las tasas de interés nominales y de las tasas de interés nominales anuales con las siguientes frecuencias de capitalización $m=\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ y $m=1,2,3,4,6,12,52,365,\infty$ respectivamente.

Tabla 1.2

m	$i'=\frac{i^{(m)}}{m}$	$i^{(m)}=m\left[(1+i)^{1/m}-1\right]$
$1/4$	61.2226077%	15.3056519%
$1/3$	43.0768783%	14.3589594%
$1/2$	26.9734648%	13.4867324%
1	12.6825030%	12.6825030%
2	6.1520150%	12.3040301%
3	4.0604009%	12.1812030%
4	3.0300999%	12.1204000%
6	2.0100000%	12.0600000%
8	1.5037437%	12.0299501%
12	1.0000000%	12.0000000%
52	0.2298868%	11.9541164%
365	0.0327187%	11.9423502%
∞		$\lim_{m\to\infty} m\left[(1+i)^{1/m}-1\right]=\ln(1+i)$ $=11.9403970\%$

El límite en el último renglón de la Tabla 1.2 es consecuencia de la Regla de L'Hôpital, el cual se enuncia a continuación: Supóngase que $\lim_{x\to a} f(x)=0 \wedge \lim_{x\to a} g(x)=0$, y supóngase también que existe $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Entonces, existe $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)=\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$.

Siguiendo la Regla de L'Hôpital, para el caso en que la capitalización de los intereses sea $m=\infty$ se tendrá que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} m\left[(1+i)^{1/m}-1\right] &= \lim_{m\to\infty}\frac{\left[(1+i)^{1/m}-1\right]}{1/m}\\ &=\frac{(1+i)^{1/m}\ln(1+i)(-1/m^2)}{-1/m^2}\\ &=\ln(1+i)\end{aligned} \tag{1.4.26}$$

Al $\ln(1+i)$ se le llamará interés capitalizable continuo, y está relacionado con la fuerza de interés y el crecimiento instantáneo de una inversión, más adelante se analizará la fuerza de interés, la cual se denotará como δ.

En el ejemplo anterior, la tasa de interés anual capitalizable mensualmente $i^{(12)}$ que es igual a 12% refiere a una tasa de interés la cual paga al mes una tasa efectiva mensual i' igual a 1%, con lo que se pretende indicar que la equivalencia entre la tasa efectiva mensual y la tasa efectiva anual i es $(1+.12682503)=(1+.01)^{12}$.

1.4.6 Tasa de descuento efectiva

La tasa de descuento efectiva suele definirse como el precio que hay que pagar por disponer de un capital con vencimiento futuro en tiempo t_n en un instante t_0. En otras palabras se puede decir que es una medida de interés pagada al comienzo del periodo. En ocasiones se referirá a la tasa de descuento efectiva como la tasa de interés pagada por adelantado y será denotada como d y se deberá asumir que una tasa de descuento efectiva o descuento compuesto se determina sobre el MIC.

La tasa de descuento efectiva también puede definirse en términos de la función de acumulación. Así, se define a la tasa de descuento efectiva como la proporción de la cantidad de interés (algunas veces llamada la cantidad descontada o solo descuento) ganada durante cierto periodo entre la cantidad invertida al final de dicho periodo[11], es decir,

$$d=\frac{a(t)-a(t-1)}{a(t)}=\frac{I_t}{a(t)} \tag{1.4.27}$$

o en términos de función de monto

$$d=\frac{A(t)-A(t-1)}{A(t)} \tag{1.4.28}$$

más adelante se demostrará que una tasa de descuento compuesta constante implica una tasa de descuento efectiva constante.

[11] Kellison, S.G. (1991), The Theory of Interest, Second Edition, USA, Irwin/McGraw-Hill

La ecuación (1.4.28) puede ser reescrita de la siguiente forma, la cual es una pauta para determinar la función de monto en términos de la tasa de descuento efectiva

$$A(t) = A(t-1)(1-d)^{-1} \tag{1.4.29}$$

de forma análoga, se pude reescribir la ecuación anterior en términos de la función de acumulación

$$a(t) = a(t-1)(1-d)^{-1}. \tag{1.4.30}$$

Es importante aclarar que una de las principales diferencias entre la tasa de interés efectiva y descuento efectiva es la siguiente:

$$i = \frac{\text{el interés es pagado al final del periodo}}{\text{el balance es al inicio del periodo}}$$
$$d = \frac{\text{el descuento es pagado al inicio del periodo}}{\text{el balance es al final del periodo}}$$

Para tener una mejor comprensión sobre lo citado previamente se procederá a la solución del siguiente ejemplo.

Ej. La compañía ABC pide un préstamo a una institución crediticia de 1 millón de unidades monetarias con el objetivo de expandir su negocio. La empresa ABC pretende liquidar su deuda en un año a partir de que le otorguen el préstamo, el cual, será prestado por la institución crediticia a una tasa del 10% cobrada por adelantado. ¿Cuál será la tasa de interés efectiva implícita en la operación financiera?

Para encontrar la solución al problema, se debe determinar la cantidad descontada al inicio, esto es, $1{,}000{,}000(d) = 1{,}000{,}000(.10) = 100{,}000um$. Así, el crédito que otorgará la institución crediticia a la compañía ABC será de $900{,}000um$. Por otro lado, se sabe por la ecuación (1.2.7) que la tasa de interés efectiva i es igual a $\dfrac{A(1)-A(0)}{A(0)} = \dfrac{1{,}000{,}000-900{,}000}{900{,}000} = 11.11\%$, por tal motivo $i = 11.11\% \neq d$. Si se pidiese comprobar el resultado previo se tendría que realizar lo siguiente: $900{,}000(1+.1111) = 1{,}000{,}000um$, que es la cantidad que tendrá que pagar la compañía ABC a la institución crediticia después de un año por préstamo que le fue otorgado.

Como ya se ha mencionado con anterioridad, por lo regular, suelen tomarse periodos comprendidos de 1 año. Para tal efecto, se definirá la tasa de descuento efectiva anual denotada por d , la cual para efectos de practicidad y mientras no se mencione lo contrario, deberá entenderse que cuando se cite la tasa d será para referir a la tasa de descuento efectiva anual.

La tasa de descuento efectiva anual devengada por una inversión durante un periodo de un año es el cambio porcentual en el valor de la inversión desde el final hasta el principio del año, sin tomar en cuenta el comportamiento de la inversión en puntos intermedios del año. En términos de función de monto, desde el tiempo $t=1$ al tiempo t=0 es

$$d=\frac{A(1)-A(0)}{A(1)} \tag{1.4.31}$$

La ecuación (1.4.31) se puede reescribir en términos de la función de monto

$$A(1)=A(0)(1-d)^{-1} \tag{1.4.32}$$

o bien,

$$A(0)=A(1)(1-d) \tag{1.4.33}$$

La ecuación (1.4.33) se toma como pauta para redefinir el valor presente de una unidad monetaria o bien da la definición alternativa del factor de descuento.

Si la tasa de descuento para un periodo es d , el valor presente del monto de una unidad monetaria hecha en un periodo desde hoy es $(1-d)$, así el factor $(1-d)$ es denotado como v en notación actuarial y es llamado factor de descuento

$$v=(1-d)\,. \tag{1.4.34}$$

Recordando la definición que dio pauta a la ecuación (1.4.15) se tiene que

$$A(0)=A(t)v^t$$

en donde v^t se definió como $(1+i)^{-t}$. Ahora, si se sustituye v en la ecuación (1.4.15) por $(1-d)$ se tiene la siguiente definición de valor presente de cualquier cantidad en tiempo t a tiempo 0

$$A(0)=A(t)(1-d)^t \tag{1.4.35}$$

Debido a la ecuación previa, a los valores presentes se les conoce también como valores descontados.

De forma análoga se puede reescribir la ecuación (1.4.35) de la siguiente manera

$$A(t)=A(0)(1-d)^{-t} \tag{1.4.36}$$

o en términos de función de acumulación

$$a(t)=a(0)(1-d)^{-t}. \tag{1.4.37}$$

La cual es una forma alternativa a la ecuación (1.4.8) de calcular el valor presente, lo que hace valida la siguiente afirmación

$$(1+i)^{t}=(1-d)^{-t} \tag{1.4.38}$$

es decir, la tasa i es equivalente a la tasa de descuento d en la misma longitud de tiempo.

A continuación se enunciaran algunas de las relaciones más relevantes entre i, v y d. Se sabe que $1+i=(1-d)^{-1}$ entonces:

1) Tasa de interés efectiva en términos de d

$$\begin{aligned} 1+i &= \frac{1}{1-d} \\ i &= \frac{1-1+d}{1-d} \end{aligned}$$

$$i=\frac{d}{1-d} \tag{1.4.39}$$

2) Tasa de descuento efectiva en términos de i

$$\begin{aligned} d &= 1-\frac{1}{1+i} \\ &= \frac{1+i-1}{1+i} \end{aligned}$$

$$d=\frac{i}{1+i} \tag{1.4.40}$$

3) Tasa de descuento efectiva en términos de v

$$d=1-\frac{1}{1+i}$$

$$d = 1 - v \tag{1.4.41}$$

4) Tasa de descuento efectivo como producto de iv

$$\begin{aligned} d &= i\left(\frac{1}{1+i}\right) \\ &= i(1+i)^{-1} \end{aligned}$$

$$d = iv \tag{1.4.42}$$

5) La diferencia de las tasas igual al producto de las mismas

$$\begin{aligned} d &= iv \\ &= i(1-d) \\ &= i - id \end{aligned}$$

$$id = i - d \tag{1.4.43}$$

6) La diferencia de los cocientes de las tasas igual a la unidad

$$\begin{aligned} di &= i - d \\ 1 &= \frac{i-d}{di} \\ &= \frac{i}{di} - \frac{d}{di} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{i} = 1 \tag{1.4.44}$$

Se debe tener mucho cuidado cuando se use la tasa de descuento, en no caer en el error (muy frecuente) de usar exponentes positivos en la acumulación de principales.

Se puede demostrar que una tasa de descuento compuesta constante implica una tasa de descuento efectiva constante.

Sea d_t la tasa de interés efectiva por periodo t-ésimo y sea d la tasa de interés compuesta, por definición se tiene

$$
\begin{aligned}
d_t &= \frac{a(t)-a(t-1)}{a(t)} \\
&= \frac{(1-d)^{-t}-(1-d)^{-t+1}}{(1-d)^{-t}} \\
&= 1-(1-d) \\
&= d
\end{aligned}
$$

En el caso particular en donde se pida calcular el descuento simple de alguna transacción financiera la función de descuento estará definida por $a^{-1}(t)=1-dt$, con la cual se calcula el valor presente de los T-Bills y los CETES, entre otros instrumentos.

1.4.7 Tasa de descuento nominal

El tratamiento de estas tasas es muy similar al de las tasas de interés nominales. La tasa de descuento nominal es aquella que nos indica que los intereses se han pagado o descontado al inicio de cada m-ésimo de periodo con una frecuencia de m veces por periodo medible.

Como ya se ha mencionado anteriormente, en la práctica es muy común utilizar como periodo medible un año, por tal motivo, se desprende la siguiente definición de tasa de descuento nominal anual.

La tasa de descuento nominal anual $d^{(m)}$ pagable m veces al año, es el producto de una tasa efectiva d' por periodo m-ésimo de un año por el número de periodos m comprendidos en un año, así la tasa de descuento nominal anual es igual a

$$
d^{(m)} = d'm. \tag{1.4.45}
$$

La tasa de descuento nominal anual $d^{(m)}$ pagable m veces al año, también se puede entender como la medida del interés pagado al comienzo de los m-ésimos intervalos de un periodo de un año, en gran parte de la misma manera en que d es la medida de interés pagado al comienzo de cada año.

En general, una tasa de descuento anual y una tasa de descuento nominal anual pagada m-veces al año serán equivalentes si se cumple

$$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}=1-d \qquad (1.4.46)$$

en donde $\frac{d^{(m)}}{m}=d'$, es decir, la diferencia elevada a la frecuencia m de una unidad menos la tasa efectiva en un m-ésimo de periodo es igual al valor presente de 1um descontada a la tasa de descuento efectiva a un año.

Se debe hacer notar que la tasa de descuento nominal anual tiene efectos informativos y meramente indicativos y permite el cálculo de la tasa de descuento efectiva en el m-ésimo periodo o de la tasa de descuento efectiva anual equivalente, las cuales se utilizan para los cálculos financieros.

Enseguida se verá un razonamiento general para el descuento del monto de una unidad monetaria desde el tiempo 1 hasta el tiempo 0, a una tasa de descuento nominal anual pagable m veces al año.

Supóngase un monto de 1um a una tasa de descuento nominal anual $d^{(m)}$, al inicio de un año la cantidad descontada será la siguiente:

Tabla 1.3

Periodo m-ésimo	*Valor descontado*
$m/m = un\ año$	1
$(m-1)/m$	$(1-d')=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)$
$(m-2)/m$	$(1-d')^{2}=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{2}$
$(m-3)/m$	$(1-d')^{3}=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{3}$
$\vdots$	$\vdots$
$1/m$	$(1-d')^{m-1}=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m-1}$
0	$(1-d')^{m}=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}$

En general, si se supone una tasa de descuento nominal anual pagable m veces por periodo $d^{(m)}$, deberá entenderse que cada m-ésimo de año se aplicara una tasa del $\frac{d^{(m)}}{m}$ porciento. Por ejemplo, si la tasa de descuento $d^{(2)} = 6\%$, entonces la tasa que se aplicara cada semestre para descontar cantidades será del $\frac{d^{(2)}}{2} = \frac{.06}{2} = 3\%$. Si la tasa de descuento nominal anterior se aplica a obtener el valor presente de una unidad monetaria pagadera dentro de un año, como en la Tabla 1.3, entonces se tendrá $A(0) = 1\left(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\right)^2 = 0.9409$. De manera similar, si se pretendiese calcular el valor acumulado dentro de un año de 0.9409 um invertidos el día de hoy se tendrá $A(2) = 0.9409\left(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\right)^{-2} = 1$.

La equivalencia entre una tasa de descuento efectiva anual d y una tasa de descuento nominal anual capitalizable m veces al año $d^{(m)}$ está dada por la siguiente igualdad

$$\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m = 1 - d \tag{1.4.47}$$

así, si dada la tasa d se pretende encontrar $d^{(m)}$, entonces la igualdad (1.4.47) se resuelve para $d^{(m)}$ quedando

$$d^{(m)} = m\left[1 - (1 - d)^{1/m}\right] \tag{1.4.48}$$

Como ya se menciono cuando se toco el tema de tasas equivalentes, existen tasas de descuento en los que los intereses se descuentan una vez cada q años y las equivalencias de este tipo de tasas es la siguiente

$$(1 - d) = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m = \left(1 - \frac{d^{(1/q)}}{1/q}\right)^{1/q} \tag{1.4.49}$$

en donde $m = 1/q$ y $d^{(1/q)}$ es la tasa de descuento nominal pagable una vez cada q años, así, el lado derecho de la igualdad (1.4.49) pudiese explicarse como el valor descontado de 1um pagadera dentro de q años a una tasa de descuento nominal capitalizable solo $1/q$-tiempo cada año.

El siguiente ejemplo muestra la relación de equivalencia que existe entre la tasa de descuento efectiva d y las tasas de descuento nominales con frecuencia de capitalización m.

Ej. Suponga que la tasa de descuento efectiva anual es del 11.36151283%. Encontrar la equivalencia de las tasas de interés nominales y de las tasas de interés nominales anuales con las siguientes frecuencias de capitalización $m = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ y $m = 1, 2, 3, 4, 6, 12, 52, 365, \infty$ respectivamente.

Tabla 1.4

m	$d' = \dfrac{d^{(m)}}{m}$	$d^{(m)} = m\left[1-(1-d)^{1/m}\right]$
$1/4$	38.2709859%	9.5677464%
$1/3$	30.3586782%	10.1195594%
$1/2$	21.4321859%	10.7160929%
1	11.3615128%	11.3615128%
2	5.8519850%	11.7039701%
3	3.9403990%	11.8211970%
4	2.9701000%	11.8804000%
6	1.9900000%	11.9400000%
8	1.4962437%	11.9699498%
12	1.0000000%	12.0000000%
52	0.2316620%	12.0464279%
365	0.0330367%	12.0584107%
∞		$\lim_{m\to\infty} m\left[1-(1-d)^{1/m}\right] = -\ln(1-d)$ $= 12.0604030\%$

Siguiendo la Regla de L'Hôpital se obtiene el último renglón de la Tabla 1.4, en donde la capitalización de los intereses es $m = \infty$

$$\lim_{m\to\infty} m\left[1-(1-d)^{1/m}\right] = \lim_{m\to\infty} \frac{\left[1-(1-d)^{1/m}\right]}{1/m}$$

$$= \frac{-(1-d)^{1/m}\ln(1-d)(-1/m^2)}{-1/m^2} \tag{1.4.50}$$

$$= -\ln(1-d)$$

Al $-\ln(1-d)$ se le llamará interés capitalizable continuo, y está relacionado con la fuerza de interés y el crecimiento instantáneo de una inversión, más adelante se analizará la fuerza de interés, la cual se denotará como δ. Cabe hacer mención que, con un poco de algebra se puede demostrar que la tasa de descuento capitalizable continuamente es igual a la tasa de interés capitalizable continuamente, esto es

$$-\ln(1-d) = -\ln v = \ln(1+i)^{-(-1)} = \ln(1+i) = \delta \tag{1.4.51}$$

en general, para tasas equivalentes i y d se da siempre el caso en que $i^{(\infty)} = d^{(\infty)} = \delta$.

1.5 Fuerza de Interés

A continuación se analizaran las tasas instantáneas de interés, las cuales se utilizan cuando la capitalización de intereses en lugar de realizarse de forma discreta (tal cual se ha venido haciendo en el MIC y el MIS), se realizarán de forma continua, es decir en intervalos de tiempo infinitesimales como fue el caso de $i^{(\infty)}$ y $d^{(\infty)}$. Estas tasas suelen llamarse fuerza de interés, debido a que miden la fuerza con la que se remunerará el capital en cada instante.

La fuerza de interés puede ser constante como lo es en el MIC o variable como en el MIS, todo dependerá del modelo de crecimiento del capital asignado a una función de monto. Enseguida se analizara el caso general, es decir, la fuerza de interés variable en donde la tasa de crecimiento varia con el tiempo.

1.5.1 Crecimiento continuo de una inversión

Supóngase que la función de monto dada por $A(t)$ es el valor acumulado de $A(0)$ desde el tiempo 0 hasta el tiempo t, donde el tiempo es medido en años. Se sabe por (1.2.7) qué la tasa de interés efectiva por periodo se puede medir en cualquier punto en el tiempo por $i_t = \dfrac{A(t)-A(t-1)}{A(t-1)}$, pero ¿qué pasa si se pretendiese medir la razón de crecimiento en un intervalo menor a la longitud de un periodo medible?, es decir, lo que se pretende saber es cuanto crecerá el valor acumulado desde el tiempo t (si se deja un m-ésimo de año más en el fondo), hasta el tiempo $t+\dfrac{1}{m}$. Algebraicamente se verá que, la razón de crecimiento será medida por $\dfrac{A(t+1/m)-A(t)}{A(t)}$, la cual podrá ser vista como la medida de interés efectiva en un periodo m-ésimo, es decir, se tratará de una tasa nominal anual capitalizable m-veces al año por la fracción de capitalización $1/m$, esto es,

$$i' = i^{(m)}\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{i^{(m)}}{m} = \frac{A(t+1/m)-A(t)}{A(t)} \tag{1.5.1}$$

en donde la tasa efectiva es variable para todo periodo m-ésimo.

La ecuación anterior puede ser reformulada para su análisis en términos de la tasa de interés nominal

$$i^{(m)} = m\frac{A(t+1/m)-A(t)}{A(t)} \tag{1.5.2}$$

El objetivo de la igualdad (1.5.2) es el de analizar la medida de interés en un intervalo muy pequeño. Si la frecuencia de capitalización m tiende a infinito, entonces el intervalo de tiempo $\left[t, t+1/m\right]$ será un intervalo infinitesimal.

Como se trato a $i^{(\infty)}$ o a $d^{(\infty)}$ cuando se vieron tasas nominales, se retomará el procedimiento para determinar este tipo de tasas continuas, en el caso particular a $i^{(\infty)}$, por tal motivo se calculará el límite cuando m tiende a infinito en ambos lados de la ecuación (1.5.2).

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = i^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} m\frac{A(t+1/m)-A(t)}{A(t)} \tag{1.5.3}$$

El límite anterior se puede reformular si se hace una sustitución de variable. Sea $h=\frac{1}{m}$ tal que cuando $m\to\infty$, entonces $h\to 0$, entonces, sustituyendo h por m en (1.5.3) se tiene

$$\begin{aligned} i^{(\infty)} &= \lim_{h\to o}\frac{1}{h}\left[\frac{A(t+h)-A(t)}{A(t)}\right] \\ &= \frac{1}{A(t)}\lim_{h\to o}\frac{A(t+h)-A(t)}{h} \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

por definición de derivada la igualdad (1.5.4) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} i^{(\infty)} &= \frac{1}{A(t)}\frac{dA(t)}{dt} \\ &= \frac{A'(t)}{A(t)} \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

el cociente anterior es una medida de crecimiento instantáneo, el cual se puede interpretar como la tasa nominal de interés capitalizable continuamente, es decir, una tasa de crecimiento por unidad monetaria invertida en el tiempo *t*. Sin embargo a dicha tasa, resultado del cociente de la derivada de la función de monto entre la misma función de monto, se le define como la fuerza de interés.

La fuerza de interés en el tiempo t es denotada actuarialmente como δ_t, o bien como $\delta(t)$ y se define en términos de la función de monto o en términos de la función de acumulación

$$\delta(t) = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)} \tag{1.5.6}$$

Es importante hacer la observación que dada la definición de la fuerza de interés, se pide que la función de monto $A(t)$ sea diferenciable en t.

1.5.2 Obtención de la función de monto basado en la fuerza de interés

Es posible obtener una expresión de la ecuación (1.5.6) que refleje el monto de una cantidad invertida desde el tiempo 0 hasta el tiempo t utilizando la fuerza de interés δ_t, lo que se necesita para la conseguir dicha expresión serán algunos elementos del Cálculo, los cuales se mencionarán en un instante conforme se vayan necesitando.

Del Cálculo se sabe que $\frac{d}{dx}\ln f(x) = \left(\frac{1}{f(x)}\right)\frac{d}{dx}f(x)$, de esta manera se puede reescribir la ecuación (1.5.6) de la siguiente forma

$$\delta_t = \frac{d}{dt}\ln A(t) \tag{1.5.7}$$

ahora, se deberá integrar ambos lados de la ecuación desde el tiempo 0 hasta el tiempo t y remplazar la variable t por n, así,

$$\begin{aligned}\int_0^t \delta_n dn &= \int_0^t \frac{d}{dn}\ln A(n)dn \\ &= \ln A(n)\Big|_0^t \\ &= \ln A(t) - \ln A(0) \\ &= \ln\frac{A(t)}{A(0)}\end{aligned}$$

aplicando la función exponencial en ambos lados de la igualdad previa

$$e^{\int_0^t \delta_n dn} = \frac{A(t)}{A(0)} \tag{1.5.8}$$

resolviendo la igualdad (1.5.8) para $A(t)$

$$A(t) = A(0)e^{\int_0^t \delta_n dn} \tag{1.5.9}$$

en donde $e^{\int_0^t \delta_n dn}$ es el factor de acumulación desde el tiempo 0 hasta el tiempo t, a una fuerza de interés variable δ_n, el cual multiplicado por el principal $A(0)$ da como resultado el valor futuro $A(t)$ en tiempo t.

La definición del factor de acumulación utilizando la fuerza de interés variable, acumula el principal sobre un intervalo de tiempo $(0,t)$, si se pretendiese conocer el valor acumulado del principal pero solo en el intervalo $[t_1,t_2]$, es necesario expresar una ecuación que refleje el dicho valor desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2, de esta forma, utilizando el teorema fundamental del Cálculo se tiene que una expresión general para calcular $A(t_2)$ es

$$A(t_2)=A(t_1)e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta_n dn} \tag{1.5.10}$$

de lo anterior se deriva que el factor de acumulación para un intervalos $[t_1,t_2]$ es

$$\frac{A(t_2)}{A(t_1)}=\frac{e^{\int_0^{t_2}\delta_n dn}}{e^{\int_0^{t_1}\delta_n dn}}=e^{\int_0^{t_2}\delta_n dn-\int_0^{t_1}\delta_n dn}=e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta_n dn}. \tag{1.5.11}$$

De la misma forma en que se obtuvo la función de monto dada una fuerza de interés variable, se puede calcular el valor presente de tal monto, es decir, la ecuación (1.5.8) se puede resolver para $A(0)$

$$A(0)=\frac{A(t)}{e^{\int_0^{t}\delta_n dn}}=A(t)e^{-\int_0^{t}\delta_n dn} \tag{1.5.12}$$

y la forma general para el descuento del monto en tiempo t_2 al tiempo t_1 se obtiene de resolver la ecuación (1.5.10) para $A(t_1)$

$$A(t_1)=A(t_2)e^{-\int_{t_1}^{t_2}\delta_n dn} \tag{1.5.13}$$

A continuación, las ecuaciones (1.5.7), (1.5.8), (1.5.9), (1.5.10), (1.5.12) y (1.5.13) serán reescritas en términos de la función de acumulación:

$$\delta_t=\frac{d}{dt}\ln a(t) \tag{1.5.14}$$

$$e^{\int_0^{t}\delta_n dn}=\frac{a(t)}{a(0)}=a(t) \tag{1.5.15}$$

$$a(t)=e^{\int_0^{t}\delta_n dn} \tag{1.5.16}$$

$$a(t_2) = a(t_1)e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta_n dn} \qquad (1.5.17)$$

$$\frac{1}{a(t)} = e^{-\int_0^t \delta_n dn} \qquad (1.5.18)$$

$$a(t_1) = a(t_2)e^{-\int_{t_1}^{t_2}\delta_n dn} \qquad (1.5.19)$$

Para ejemplificar una fuerza de interés variable habrá que suponer una tasa de interés simpe i, la cual, para calcular la fuerza de interés δ_t se tomara la igualdad (1.5.6), quedando de la siguiente manera

$$\delta_t = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{\frac{d}{dt}(1+it)}{(1+it)} = \frac{i}{1+it}$$

ahora, supóngase que se pretende conocer la función de monto con respecto a la fuerza de interés que se obtuvo, esto es

$$\begin{aligned} A(t) &= A(0)e^{\int_0^t \frac{i}{1+in}dn} \\ &= A(0)e^{\ln(1+in)\big|_0^t} \\ &= A(0)(1+it) \end{aligned}$$

como era de esperarse, y si se pretende encontrar el monto en t_2 dada una cantidad $A(t_1)$ entonces

$$\begin{aligned} A(t_2) &= A(t_1)e^{\int_{t_1}^{t_2} \frac{i}{1+in}dn} \\ &= A(t_1)e^{\ln(1+in)\big|_{t_1}^{t_2}} \\ &= A(t_1)e^{\ln(1+it_2)-\ln(1+it_1)} \\ &= A(t_1)\frac{(1+it_2)}{(1+it_1)} \end{aligned}$$

1.5.3 Fuerza de interés constante

Al inicio del tema fuerza de interés, se menciono que existe la fuerzas de interés variable como fue el caso de estudio de la sección anterior, por otro lado, también se halla comúnmente en la práctica la fuerza de interés constantes la cual, no dependen del punto en el tiempo donde se calcule, sino más bien, dependen de la longitud del tiempo de inversión. De esta manera, se pude decir que la fuerza de interés constante es un caso particular de la forma general vista previamente.

Si la fuerza de interés es constante, entonces $\delta(t)$ deja de depender de la variable t y de hecho se puede prescindir de dicha notación y se puede optar por solo dejar δ. Por tanto, la expresión para la ecuación (1.5.6) es

$$\delta = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)}. \tag{1.5.20}$$

Para obtener la expresión de la función de monto y la función de cantidad se seguirá la misma línea que en la fuerza de interés variable, esto es

$$\delta = \frac{d}{dt}\ln A(t) = \frac{d}{dt}\ln a(t) \tag{1.5.21}$$

integrando ambos lados de la ecuación desde el tiempo 0 hasta el tiempo t y remplazando la variable t por n

$$\begin{gathered}\int_0^t \delta dn = \int_0^t \frac{d}{dn}\ln A(n)dn \\ \delta t = \ln\frac{A(t)}{A(0)}\end{gathered} \tag{1.5.22}$$

aplicando la función exponencial en ambos lados de la igualdad (1.5.22) y resolviendo la ecuación para $A(t)$ se tiene

$$A(t) = A(0)e^{\delta t} \tag{1.5.23}$$

o en términos de función de acumulación

$$a(t) = e^{\delta t} \tag{1.5.24}$$

Si se cuenta con que $a(t)$ es la función de acumulación del MIC entonces se tendrá que

$$(1+i)^t = e^{\delta t} \tag{1.5.25}$$

lo que es lo mismo que

$$1+i = e^{\delta} \tag{1.5.26}$$

es más, se puede calcular la fuerza de interés constante en función de la tasa de interés efectiva anual, esto es

$$\delta = \frac{\frac{d}{dt}(1+i)^t}{(1+i)^t} = \frac{(1+i)^t \ln(1+i)}{(1+i)^t} = \ln(1+i) \tag{1.5.27}$$

que es el mismo resultado obtenido cuando se trato la equivalencia entre tasas. Entonces, se puede afirmar que la tasa de interés nominal compuesta continuamente es igual a la fuerza de interés constante. Lo anterior es congruente con la tasa de interés efectiva la cual también es constante.

Si se pretendiese calcular la función de monto dada la fuerza de interés constante utilizando la ecuación (1.5.23) se tiene

$$A(t) = A(0)e^{t\ln(1+i)} = A(0)(1+i)^t \tag{1.5.28}$$

se pude notar que es exactamente la función de monto en el MIC.

Por lo anterior, se puede afirmar que

$$i^{(\infty)} = \delta = d^{(\infty)}. \tag{1.5.29}$$

Cabe resaltar que es más sencillo calcular el valor acumulado de cierta cantidad desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2, en comparación con el caso de la fuerza de interés variable.

$$\begin{aligned} A(t_2) &= A(t_1)e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta dn} \\ &= A(t_1)e^{\delta t\big|_{t_1}^{t_2}} \\ &= A(t_1)e^{\delta(t_2-t_1)} \end{aligned} \tag{1.5.30}$$

Para calcular valores presentes lo único que habrá que hacer es resolver la ecuación (1.5.23) para $A(0)$

$$A(0) = A(t)e^{-\delta t} \tag{1.5.31}$$

1.6 Aproximaciones por polinomios

En las matemáticas financieras es muy importante contar con herramientas que auxilien en la solución y comprensión de ciertos planteamientos, es el caso de este tema, el cual ayudará a tener una mejor conceptualización de las tasas y de algunas relaciones entre ellas. Asimismo, auxiliará en su debido momento en el cálculo de temas más avanzados como son la duración, la convexidad, entre otros, los cuales no serán objeto de estudio por el momento.

El método que se utilizará a continuación consiste en aproximar una función por el polinomio de Taylor, de esta manera y sin más preámbulo se empezara a desarrollar la función exponencial e^x, la cual se tomara como base para posteriormente desarrollar otras más.

Del Cálculo se sabe que el polinomio de Taylor es $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$, entonces utilizando dicho polinomio se procederá a expresar la función e^x con $n=3$ y $a=0$, es decir, se aproximará la función con un polinomio de tercer grado y se valuará en cero.

Entonces el polinomio de Taylor grado 3 generado por e^x en cero es dado por

$$e^x=\sum_{k=0}^{4}\frac{f^k(0)}{k!}x^k+E_4(x)$$

en donde $E_n(x)$ se le denomina el resto, el cual se omitirá por practicidad en los cálculos y se remplazara por puntos suspensivos.

De esta manera se obtiene

$$e^x=e^{(0)}+e^{(0)}x+\frac{e^{(0)}x^2}{2!}+\frac{e^{(0)}x^3}{3!}+\ldots$$

lo que implica que

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \tag{1.5.32}$$

Si se sustituye x por δ en la ecuación (1.5.32) se obtiene una de la primeras expresiones que serán de ayuda en materia de matemáticas financieras, esta es

$$e^{\delta}=1+\delta+\frac{\delta^2}{2!}+\frac{\delta^3}{3!}+\ldots \tag{1.5.33}$$

Asimismo se sabe que $e^{\delta}=1+i$, entonces, se si se sustituye en (1.5.33) y se resuelve para i se tiene que

$$i=\delta+\frac{\delta^2}{2!}+\frac{\delta^3}{3!}+\ldots \tag{1.5.34}$$

Siguiendo con la idea, se sustituirá x por $-\delta$ en la ecuación (1.5.32), obteniéndose

$$e^{-\delta}=v=1-\delta+\frac{\delta^2}{2!}-\frac{\delta^3}{3!}+\ldots \tag{1.5.35}$$

los signos alternados en (1.5.35) son consecuencia de aplicar la regla de la cadena. Por otra parte hay que recordar que $v=\frac{1}{(1+i)}=\frac{1}{e^{\delta}}$

Ahora si $v=1-d$ entonces de (1.5.35) se obtiene

$$d=\delta-\frac{\delta^2}{2!}+\frac{\delta^3}{3!}-\ldots \tag{1.5.36}$$

Se puede notar que todas las igualdades anteriores están en función de la fuerza de interés, enseguida se verán algunas que estarán en función de la tasa de interés y de la tasa de descuento.

Primero, se desarrollará la función logarítmica para posteriormente reescribirla de acuerdo a las necesidades que surjan.

$$\ln(1+x)=\ln(1+0)+\frac{x}{1+0}-\frac{x^2}{2!(1+0)^2}+\frac{2x^3}{3!(1+0)^3}-\ldots$$

así la ecuación queda como

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots \tag{1.5.37}$$

Si se hace $x=i$ en la igualdad (1.5.37) entonces, se tiene

$$\ln(1+i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \ldots \qquad (1.5.38)$$

asimismo, se sabe que $\ln(1+i) = \delta$ por tanto

$$\delta = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \ldots \qquad (1.5.39)$$

Por otro lado, si se sustituye x por $-d$ en la ecuación (1.5.37) se tiene que

$$\ln(1-d) = -d - \frac{d^2}{2} - \frac{d^3}{3} - \ldots \qquad (1.5.40)$$

ahora, si se multiplica ambos lados de la igualdad anterior por (-1) y se sustituye $-\ln(1-d)$ por δ se obtiene

$$\delta = d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \ldots \qquad (1.5.41)$$

1.7 Relación y equivalencia entre tasas

Para finalizar el capítulo se dará a conocer las relaciones y la equivalencia más importantes entre la tasa de interés, la tasa de descuento y la fuerza de interés dentro del Modelo de Interés Compuesto, MIC.

Tabla 1.5

Monto de 1um en tiempo t	Tasa de interés efectiva	Tasa de interés nominal capitalizable m-veces al año	Tasa de interés nominal capitalizable una vez cada q-años	Tasa de descuento efectiva	Tasa de descuento nominal capitalizable m-veces al año	Tasa de descuento nominal capitalizable una vez cada q-años	Factor de descuento	Fuerza de interés
$a(t)$	$= (1+i)^t$	$= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{tm}$	$= \left(1+qi^{(1/q)}\right)^{t/q}$	$= (1-d)^{-t}$	$= \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-tm}$	$= \left(1-qd^{(1/q)}\right)^{-t/q}$	$= v^{-1}$	$= e^{t\delta}$

Capítulo 2

Ecuación de Valor y las variables que involucra

Al inicio del Capítulo 1 se señaló que el capital financiero no era el mismo mientras transcurría el tiempo. Esto obedece al principio de equivalencia financiera[12], el cual explica que en toda operación financiera con activos y obligaciones, estos deberán ser financieramente equivalentes a una determinada tasa de interés, ambos valorados en el mismo instante de tiempo.

Se puede decir que la gran mayoría de problemas financieros se pueden resolver planteando una ecuación de valor, en la cual se equilibre cantidades entrantes y salientes esquematizados en un diagrama de flujo de efectivo. Por tal motivo, es de extrema relevancia se ponga especial atención al desarrollo de la ecuación de valor en análisis de las operaciones financieras.

2.1 Ecuación de valor

Como ya se mencionó, en la mayoría de transacciones financieras existen flujos de efectivo con condiciones específicas de capitales (activos) y obligaciones (pasivos), en las que se ven inmersos por lo regular dos entes, que comúnmente se denominan acreedor y deudor.

Para esquematizar de manera grafica dichas transacciones, se utiliza el ya conocido diagrama de flujo de efectivo (cash flow). Asimismo, existe una expresión matemática que tiene como función igualar en punto determinado en el tiempo los flujos de entrada y los flujos de salida con sus respectivas particularidades de la transacción, a la que se conoce como ecuación de valor.

Así, la ecuación de valor, es una relación que mantiene en equilibrio (balance) un conjunto de obligaciones y capitales adquiridos en distintos puntos en el tiempo y trasladados a un punto especifico en el tiempo para su valuación llamado fecha

---

[12] Boedo, Lucia. (2008), Las fuentes de financiación y sus coste, Primera Edición, España, Netbiblo, S.L.

focal[13]. Es importante resaltar que dos o más cantidades se pueden comparar, si y solo si, están situadas en el mismo punto en el tiempo.

Las aplicaciones más comunes de las ecuaciones de valor serán las anualidades, las cuales serán objeto de estudio del siguiente capítulo. Algunas otras aplicaciones son: comparación de proyectos de inversión, compra de activos tangibles, amortización de deudas, valuación de inversiones, etc.

La solución que arroga la ecuación de valor es la misma sin importar la fecha focal que se elija, siempre y cuando el enfoque de crecimiento del interés sea con un MIC, lo que no pasara si se opta por utilizar el MIS.

El procedimiento general para obtener la ecuación de valor se puede resumir en cuatro factores importantes:

1. Esquematizar la transacción financiera en con un diagrama de flujo con sus respectivas entradas y salidas. Entre mayor sea el detalle del diagrama, será más adecuado el planteamiento de la ecuación de valor. A mayor pericia en la resolución de problemas financieros, se podrá prescindir del diagrama

2. Elegir la fecha focal más adecuada, esto es, optar por una fecha en la cual se encuentren la mayor cantidad de flujos o en su defecto la fecha que ahorre la realización de operaciones

3. Trasladar a la fecha focal los valores acumulados de todas las obligaciones ya pagadas más los valores presentes de todas las obligaciones pendientes de realizar

4. Por último, trasladar a la fecha focal los valores acumularos de todos los capitales ya recibidos más los valores presentes de todos los capitales pendientes de recibir

Como se ha podido notar, la gran mayoría de problemas financieros precisan 4 cantidades básicas, en las que si se conocen al menos tres, se puede resolver la ecuación de valor para determinar la cuarta. Estas cantidades son: el valor inicial, el valor final, la tasa de crecimiento y la longitud del tiempo de inversión.

[13] También conocida como fecha de valuación, punto de valuación, fecha de comparación o fecha de referencia, entre otros.

Básicamente, a lo largo del Capítulo 1 se fueron obteniendo distintas ecuaciones las cuales podrían considerarse ecuaciones de valor, en donde si no se conocía el valor actual de cierta cantidad la ecuación se resolvía para esta y lo mismo con el valor acumulado. La pregunta que se tiene que plantear a continuación es ¿Qué pasa si se desconoce la longitud de tiempo o la tasa de interés en un problema financiero? La solución a dicho cuestionamiento se estudiara en las siguientes secciones.

2.2 El tiempo como variable

Como lo menciona el titulo de la sección, se determinará el tiempo de la ecuación de valor, para esto, es necesario conocer la tasa de interés inmiscuida en el problema, así como el monto y el valor presente de cierta cantidad.

Hay ecuaciones de valor muy sencillas, pero también existen problemas de alto grado de complicación, en donde el método utilizado anteriormente no sería posible aplicarlo de manera inmediata, así se tendrá que realizar algunas aproximaciones para el cálculo del tiempo. La aproximación más socorrida y sencilla está dada por el método del tiempo equivalente el cual se utiliza cuando se pretende calcular fechas equivalentes, esto es, cuando un conjunto de obligaciones se desea solventar con un único pago igual a la suma de todas las deudas en un punto específico llamado fecha equivalente.

Supóngase una serie de cantidades $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ pagadas en el tiempo $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ respectivamente. La aproximación del tiempo $\bar{t}$ por el método del tiempo equivalente está dada por un promedio ponderado de las diversas cantidades pagadas, esto es, es el cociente de la suma de todos los productos de la cantidad c_k por el tiempo t_k entre la suma de todas las cantidades c_k

$$\bar{t} = \frac{c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 + \cdots + c_n t_n}{c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} c_k} \qquad (2.1.1)$$

Este promedio ponderado del tiempo se utiliza en el cálculo de la duración de los bonos, entre muchas otras aplicaciones. A continuación se verá el método exacto, que por ser más laborioso no suele utilizarse en la solución de problemas, sobre todo si son pruebas de examen contra reloj.

Supóngase una serie de cantidades $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ pagadas en el tiempo $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ respectivamente. La ecuación de valor que refleja el balance en la fecha focal (tiempo 0) estará dada por, la suma todas y cada una de las cantidades c_k descontadas a la fecha focal igualada al producto de la suma de cada una de las cantidades c_k por solo un factor de descuento desde el tiempo t hasta la fecha focal, esto es

$$c_1 v^{t_1} + c_2 v^{t_2} + c_3 v^{t_3} + \cdots + c_n v^{t_n} = \left(c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n\right) v^t \qquad (2.1.2)$$

ahora, se resolverá la ecuación para t tomando logaritmos en ambos lados de (2.1.2)

$$t = \frac{\ln\left(\sum_{k=1}^{n} c_k v^{t_k}\right) - \ln\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right)}{\ln v} \qquad (2.1.3)$$

2.3 La tasa de interés como variable

Cuando se sabe el monto, el valor presente y el tiempo en una ecuación de valor y lo que se pide calcular es la tasa de interés, este tipo de problemas puede ser uno de los más demandantes si no se cuenta con una calculadora financiera que deduzca, y no precisamente para todos los problemas planteados, dicha tasa de interés. De los casos sencillos en la solución de problemas de interés son cuando se cuenta con expresiones en las que no se tienen polinomios de n grados, es decir, si se cuenta con la igualdad $A(t) = A(0)(1+i)^t$ será relativamente sencillo resolver la ecuación para i. El problema comienza cuando se tienen distintos flujos de efectivo, esto complicará la ecuación de valor resultante para la solución de la tasa de interés.

Por lo regular, cuando se pide deducir tasas de interés en problemas financieros será para compararlas entre otras tasas ya sea del mismo o de otros proyectos. El conocer la tasa de interés ayuda a tener un campo de visión relativamente amplio de las transacciones financieras, sobre todo a la hora de la toma de decisiones.

Se sabe que los métodos numéricos apoyan en la solución de este tipo de problemas, por citar algunos están el método de interpolación lineal, el método de bisección sucesiva, el método de Newton-Raphson, entre mucho otros más.

Se utilizará el método de interpolación lineal por su simplicidad, en la solución de este tipo de problemas, de esta forma se encontrará una expresión que facilite el cálculo de la tasa de interés.

La técnica de interpolación lineal es muy útil para aproximar funciones y valores intermedios de dicha función, la hipótesis se funda en que un segmento pequeño de curva puede sustituirse por un segmento rectilíneo sin que esto genere un error considerable. La ventaja que tiene es que entre más pequeña la longitud del segmento mayor acierto en la aproximación.

Primero se esquematizará mediante una grafica en un plano cartesiano y posteriormente se procederá a encontrar el punto medio, para esto se necesitará conocer dos puntos para determinar una recta, esto es

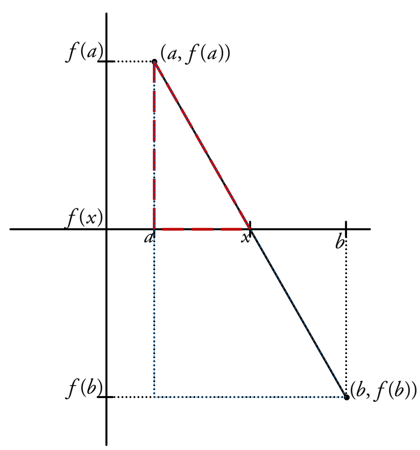


Figura 2.1

ahora, se necesitará encontrar una expresión que refleje el valor de la variable x en términos de los dos puntos cartesianos, los cuales son conocidos. Para iniciar se puede calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ e igualarla a la pendiente del segmento de recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$, de esta forma se tiene que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{2.2.1}$$

resolviendo la ecuación (2.2.1) para x se tiene

$$x = a + \frac{f(x) - f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) \tag{2.2.2}$$

Una de las desventajas de esta técnica es que habrá que utilizar ensayo y error para encontrar la raíz, es decir, habrá que asignar los primeros valores de a y de b y valorar si estos valores asignados son los adecuados para calcular la primera aproximación, dado que puede haber más de una iteración para llegar al resultado que se considere correcto.

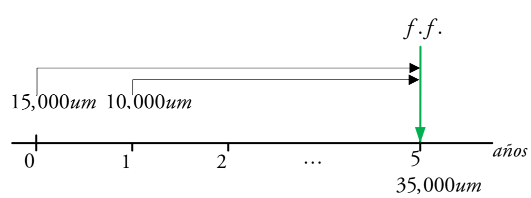
Se tendrá que reescribir la ecuación (2.2.2) con variables distintas con el propósito de que sea útil para solucionar problemas financieros. De este modo, a se sustituirá por i_1 al cual se le asignará el primer valor arbitrario (ensayo y error) correspondiente a la primera tasa de interés; b se sustituirá por i_2 al cual se le asignará el segundo valor arbitrario correspondiente a la segunda tasa de interés; $f(a)$ se sustituirá por el balance uno B_1, resultado de la primera ecuación de valor al asignarle la primer tasa de interés i_1; $f(b)$ se sustituirá por el balance dos B_2, resultado de la segunda ecuación de valor al aplicarle la segunda tasa de interés i_2; por último $f(x)$ se sustituirá por B, que es el valor real de la ecuación de valor original valuada en i, donde $i = x$.

De lo anterior, se puede reescribir la ecuación (2.2.2) como

$$i = i_1 + \frac{B - B_1}{B_2 - B_1}(i_2 - i_1). \tag{2.2.3}$$

Ej. Calcular la tasa de interés nominal convertible semestral, a la que habrá que invertirse 15,000um ahora y 10,000 en un año, para acumular 35,000 en un fondo de ahorro dentro de 5 años.

Para resolver el ejercicio y tener una mejor comprensión, se realizará el cash flow.



La fecha focal es en el año 5, cabe señalar que se pide la tasa de interés capitalizable semestral, entonces será necesario manejar semestres en los cálculos. La ecuación de valor será la siguiente

$$15,000\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{10}+10,000\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{8}=35,000$$

que es lo mismo que

$$15,000(1+i')^{10}+10,000(1+i')^{8}=35,000$$

en donde $B=35,000$.

Asignando los primeros valores a las tasas efectivas por semestre, $i'_1=3.6\%$ e $i'_2=3.9\%$

$$\begin{aligned}B_1&=15,000(1+.036)^{10}+10,000(1+.036)^{8}\\&=34,634.52\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}B_2&=15,000(1+.039)^{10}+10,000(1+.039)^{8}\\&=35,571.86\end{aligned}$$

Se puede notar que, el valor de la tasa que se está buscando se encuentra entre los valores de $i'_1=3.6\%$ e $i'_2=3.9\%$, por tal motivo se procederá a realizar la primera iteración de la interpolación

$$\begin{aligned}i'&=0.036+\frac{35000-34,634.52}{35571.86-34,634.52}(0.039-0.036)\\&=0.037169728\\&=3.7169728\%\end{aligned}$$

Entonces la primera aproximación a 9 decimas de la tasa de interés efectiva cada semestre es $i'=.037169728$

Si se sustituye la tasa que se encontró en la ecuación de valor con el fin de valorar la aproximación, se tendrá

$$15,000(1+.037169728)^{10}+10,000(1+.037169728)^{8}=34,997.31$$

Con lo que se puede notar que, el valor de la tasa de interés que se busca está muy próxima a la tasa encontrada en la primera iteración. Para una mejor estimación se procederá a realizar una segunda iteración, reasignando el valor la primera tasa por el valor encontrado anteriormente, así , $i'_1 = 3.7169728\%$ e $i'_2 = 3.9\%$, dado que entre esos dos valores se encuentra la tasa de interés que hace cierta la ecuación de valor original con $B = 35,000$. Cabe señalar que, podría elegirse otro valor más cercano para i_2, pero esto implicaría mas cálculos.

Entonces, tomando $B_1 = 34,997.31$ y $B_2 = 35,571.86$, se tiene

$$\begin{aligned} i' &= 0.03769728 + \frac{35000 - 34,997.31}{35571.86 - 34,997.31}(0.039 - 0.03769728) \\ &= 3.7178283\% \end{aligned}$$

Con el resultado anterior se procederá a valuar en la ecuación de valor para valorar la aproximación

$$15,000(1+0.037178283)^{10} + 10,000(1+0.037178283)^{8} = 34,999.98$$

La aproximación es buena hasta seis decimales ya que siguiendo con las iteraciones al llegar a la sexta se tiene una aproximación muy razonable para cálculos financieros $i' = 3.71783463\%$, esto se debe a que se tomarán 7 decimales para cálculos, por las cantidades tan grandes que se pueden manejar.

Para terminar con el ejercicio, la tasa que se obtuvo fue una tasa de interés efectiva por semestre, habrá que multiplicarla por los periodos de capitalización para obtener la tasa de interés nominal anual capitalizable cada semestre

$$\begin{aligned} i^{(2)} &= i'(2) \\ &= 0.037178283(2) \\ &= 0.074356566 \\ &= 7.44\% \end{aligned}$$

y la solución al ejercicio es $i^{(2)} = 7.44\%$ aproximadamente.

Como se comento anteriormente, algunos ejercicios en las matemáticas financieras se pedirán que mientras se tengan periodos anuales los cálculos se realicen con el MIC y que cuando se tengan periodos anuales con fracciones de año se utilicen ambos modelos, es decir, el MIC para los periodos enteros y el MIS para realizar los cálculos de los periodos fraccionarios, esto se indicará explícitamente en la redacción de cada problema. Lo anterior se pude justificar gráficamente, dado que el crecimiento del MIC es más lento dentro del año que el MIS. Sin embargo, se puede demostrar que el comportamiento de una interpolación lineal entre dos periodos enteros dentro del MIC da como resultado un punto medio entre los dos factores de acumulación, en donde el periodo fraccional se calcula con un MIS.

Sea $a(t)$ y $a(t+1)$ los factores de acumulación de 1um en tiempo t y $t+1$ respectivamente, donde t pertenece a los enteros no negativos, para encontrar un punto intermedio $a(t+k)$, donde k es una fracción de periodo, entre los dos factores de acumulación anteriormente citados se ocupará la interpolación lineal.

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{t+k} &= (1+i)^t + \frac{(1+i)^{t+1}-(1+i)^t}{(t+1)-t}\left[(t+k)-t\right] \\
&= (1+i)^t k\left[(1+i)-1+1/k\right] \\
&= (1+i)^t (1+ki)
\end{aligned}
$$

Claramente se aprecia que los periodos enteros se calculan con un MIC y que la fracción de periodo se calcula con un MIS. A menos que se indique explícitamente se tomará este método híbrido para resolver problemas.

Capítulo 3

Anualidades

Por lo regular, en muchas transacciones financieras cotidianas se encuentran las anualidades, estas son utilizadas para la valoración de principales o montos dado que facilitan los cálculos financieros. Algunos ejemplos en donde destaca el uso de las anualidades son: las inversiones, los fondos de ahorro, las pensiones, las hipotecas, la amortización de deudas en general, los seguros, los pagos de servicios, las nominas empresariales, entre muchos otros.

Las anualidades son un conjunto de pagos o cobros (dependiendo del enfoque: deudor o acreedor respectivamente) por lo general iguales, que se realizan en periodos sucesivos de tiempo comúnmente equidistantes.

Se puede decir que las anualidades son el eje central en la formación del actuario, estas se verán en distintas asignaturas y es uno de los temas principales en las matemáticas financieras, es así que el estudio y análisis de las mismas es trascendental.

Dado que las anualidades son una serie de pagos, se tendrá que utilizar algunas técnicas matemáticas para su valoración, la cual dependerá en gran medida de la fecha focal.

3.1 Clasificación de las anualidades

A continuación, se presenta una tabla que resume la clasificación más relevante de las anualidades atendiendo a distintos criterios, los cuales no son excluyentes entre sí.

Tabla 3.1

Criterio	Clasificación	Descripción
Fecha de inicio y término	Ciertas	Los pagos y la duración son conocidos con certeza
	Contingentes	Alguno de sus componentes no son conocidos con certeza
Inicio de la anualidad	Inmediatas	Para calcular el valor presente el primer pago se realiza un periodo después de la fecha focal y para calcular el valor futuro el último pago coincide con la fecha focal
	Diferidas	Para calcular el valor presente el primer pago se encuentra al menos dos periodos posteriores a la fecha focal y para el valor futuro el último pago se encuentra al menos 2 periodos antes de la fecha focal
Pagos	Vencidos	Los pagos ocurren al final del periodo
	Anticipados	Los pagos ocurren al inicio del periodo
Cantidad en los pagos	Niveladas	La cantidad en los pagos no varía, es decir, los pagos son iguales para todos los periodos
	Variable Aritmética	Los pagos varían uno de otro a razón de una distancia, es decir, los pagos varían en progresión aritmética
	Variable Geométrica	Los pagos varían uno de otro a razón de un porcentaje, es decir, los pagos varían en progresión geométrica
	Variable General	Los pagos no varían ni en progresión geométrica ni en progresión aritmética

continuación Tabla 3.1

Criterio	Clasificación	Descripción
Duración de los Pagos	Temporales	El plazo de la anualidad es acotado en el tiempo
	Perpetuas	El plazo de la anualidad es infinito
Frecuencia de los pagos	Pagaderas	Los pagos se realizan con mayor o con menor frecuencia que los intereses
	Continuas	La frecuencia de los pagos es infinita
Capitalización de los intereses	Simples	Los intereses se capitalizan con la misma frecuencia que los pagos
	Generales	La capitalización de los intereses es distinta de la frecuencia de los pagos

Serán objeto de estudio las anualidades ciertas y las posibles combinaciones con las demás categorías. Las anualidades contingentes por su naturaleza, se estudian en las matemáticas actuariales y otras asignaturas.

Se analizarán las anualidades por sus criterios principales, en las cuales se indicará la clasificación más relevante y común en la práctica.

3.2 Anualidades Inmediatas

Comúnmente denominadas ordinarias, estas anualidades entran en la clasificación de anualidades niveladas, vencidas o anticipadas, temporales y simples. Son las más comunes en la práctica y su valuación es relativamente sencilla.

Supóngase un conjunto de n pagos nivelados de 1um cada uno, hechos al final de cada periodo los cuales son equidistantes entres sí. La tasa de interés implícita en la operación será i, que deberá entenderse como una tasa efectiva nivelada (igual) para todos los periodos. El valor presente de dicha anualidad, un periodo antes de que el primer pago se realice, se denotará actuarialmente como $a_{\overline{n}|i}$ y estará constituida por la suma de todos los pagos descontados hasta el tiempo 0, el cual se toma como fecha focal.

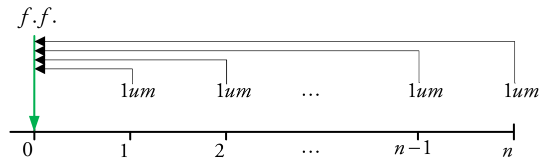


Figura 3.1

Entonces, el valor presente de los n pagos en la fecha focal es igual a

$$a_{\overline{n|}i} = 1um(1+i)^{-1} + 1um(1+i)^{-2} + \cdots + 1um(1+i)^{-(n-1)} + 1um(1+i)^{-n} \quad (3.2.1)$$

la expresión anterior se pude reducir, de esta manera se abstendrá de citar *um*, se sustituirá v por $(1+i)^{-1}$ y se entenderá que, mientras no se diga lo contrario, la tasa de interés será i la cual también se omitirá

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n \quad (3.2.2)$$

El manejo de la ecuación (3.2.2) no es muy adecuado cuando el tiempo de la anualidad n es muy grande, lo que orilla a reescribirla de forma en que los cálculos sean menos complicados. Es de importancia notar que la serie crece de forma geométrica, esto es, la razón de crecimiento entre un término y otro de la suma en (3.2.2) es v. Se puede construir una expresión resumida de dicha serie, aplicando la fórmula para hallar la suma de los primeros términos de una progresión geométrica, o se puede llegar a la ecuación siguiendo la metodología para formular ecuaciones de sumas de los primeros términos de progresiones.

A continuación se verán las dos metodologías para hallar la expresión resumida de (3.2.2) y posteriormente en casos particulares, se utilizará la versión más larga para desarrollar las expresiones restantes.

La fórmula de la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica para $r < 1$ es

$$S_n = a\frac{(1-r^n)}{1-r} \quad (3.2.3)$$

factorizando v en la ecuación (3.2.2) y aplicando la fórmula (3.2.3) se tiene

$$a_{\overline{n}|} = v(1+v+v^2+\cdots+v^{n-1}) = v\frac{1-v^n}{1-v} = v\frac{1-v^n}{d} = v\frac{1-v^n}{iv} = \frac{1-v^n}{i} \quad (3.2.4)$$

Ahora se procederá a determinar la misma expresión que en la ecuación (3.2.4) sin usar la formula (3.2.3); así, se multiplicarán ambos lados de la igualdad (3.2.2) por un factor de acumulación

$$\begin{aligned}(1+i)a_{\overline{n}|} &= \left[v+v^2+\cdots+v^{n-1}+v^n\right](1+i)\\ &= 1+v^2+\cdots+v^{n-2}+v^{n-1}\end{aligned} \quad (3.2.5)$$

el siguiente paso es realizar la diferencia de (3.2.5) menos (3.2.2)

$$\begin{aligned}(1+i)a_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|} &= \left[1+v+\cdots+v^{n-2}+v^{n-1}\right]-\left[v+v^2+\cdots+v^{n-1}+v^n\right]\\ ia_{\overline{n}|} &= 1-v^n\\ a_{\overline{n}|} &= \frac{1-v^n}{i}\end{aligned} \quad (3.2.6)$$

como se esperaba, la expresión es la misma.

Como ya se menciono, $a_{\overline{n}|}$ es la el valor presente de una anualidad unitaria inmediata.

Por otro lado, el valor futuro de una anualidad inmediata estará dado por la suma de todos los pagos de 1um acumulados hasta el tiempo n, el cual se toma como fecha focal y será denotado como $s_{\overline{n}|i}$. Es importante señalar que, la suma de los pagos acumulados contempla el último pago que se encuentra en el tiempo n. La expresión que refleja la suma es

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{t-1} + (1+i)^{t-2} + \cdots + (1+i)^1 + 1 \quad (3.2.7)$$

y el diagrama de flujo de efectivo es

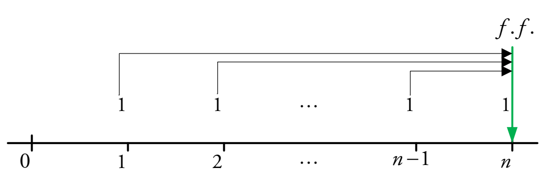


Figura 3.2

la ecuación (3.2.7) se puede reescribir empezando a expresarla de derecha a izquierda, para posteriormente utilizar la fórmula de la suma de una progresión geométrica cuando $r > 0$

$$S_n = a\frac{(r^n - 1)}{r - 1} \tag{3.2.8}$$

y se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} s_{\overline{n}|} &= 1 + (1+i)^1 + \cdots + (1+i)^{t-2} + (1+i)^{t-1} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

De lo anterior se puede deducir que una de las relaciones más cercanas que existe entre el valor presente y el valor futuro de una anualidad es que el valor futuro es el valor acumulado del valor presente, es decir,

$$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n \tag{3.2.10}$$

asimismo, se puede observar que

$$a_{\overline{n}|} = v^n s_{\overline{n}|}. \tag{3.2.11}$$

Si los pagos fuesen diferentes de 1um, es decir, pagos periódicos P equidistantes y nivelados durante todo el plazo de la anualidad entonces, el valor presente de todos los pagos descontados a tiempo 0, valuados a la tasa efectiva de interés i será el producto de los pagos por el valor presente de la anualidad unitaria, esto es

$$VP = Pv + Pv^2 + \cdots + Pv^{n-1} + Pv^n = Pa_{\overline{n}|}. \tag{3.2.12}$$

De manera similar, el valor futuro de una anualidad con pagos periódicos P equidistantes y nivelados durante todo el plazo de la anualidad valuados a la tasa efectiva interés i será el producto de los pagos por el valor futuro de la anualidad unitaria, así

$$VF = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-2} + \cdots + P(1+i)^2 + P = Ps_{\overline{n}|} \tag{3.2.13}$$

Aplicando las relaciones entre $a_{\overline{n}|}$ y $s_{\overline{n}|}$ mostradas en (3.2.10) y (3.2.11) a las igualdades (3.2.13)y (3.2.12) correspondientemente se obtiene

$$VF = Pa_{\overline{n}|}(1+i)^n \tag{3.2.14}$$

y

$$VP = Ps_{\overline{n}|}v^n \tag{3.2.15}$$

Otra relación entre $a_{\overline{n}|}$ y $s_{\overline{n}|}$, la cual tiene una empleo fundamental en fondos de ahorro (sinking fund), es derivada de igualar las expresiones y resueltas para P, así la igualdad (3.2.14) puede reescribirse como $P = \dfrac{VF}{a_{\overline{n}|}(1+i)^n}$ y por otro lado la ecuación (3.2.15) será $P = \dfrac{VP}{s_{\overline{n}|}v^n}$, entonces igualando estas ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{VF}{a_{\overline{n}|}(1+i)^n} &= \frac{VP}{s_{\overline{n}|}v^n} \\
\frac{VF(1+i)^{-n}}{a_{\overline{n}|}} &= \frac{VP}{s_{\overline{n}|}v^n} \\
\frac{VP}{a_{\overline{n}|}} &= \frac{VP}{s_{\overline{n}|}v^n} \\
\frac{1}{a_{\overline{n}|}} &= \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Se puede verificar, con algunos artificios matemáticos que $\dfrac{1}{s_{\overline{n}|}v^n} = \dfrac{1}{s_{\overline{n}|}} + i$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s_{\overline{n}|}v^n} &= \frac{1+(1+i)^{-n}-1}{s_{\overline{n}|}} \\
&= \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + \frac{(1+i)^{-n}-1}{s_{\overline{n}|}} \\
&= \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + \frac{\left[(1+i)^{-n}-1\right]i}{(1+i)^{-n}-1} \\
&= \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i
\end{aligned}$$

3.3 Anualidades Anticipadas

Las anualidades anticipadas son aquellas en que los pagos se realizan al inicio del periodo y no al final, como fue el caso de las anualidades inmediatas vencidas. El valor presente de una anualidad anticipada se calcula en el momento del primer pago, el cual es incluido junto a la suma de todos los pagos descontados y es denotado por $\ddot{a}_{\overline{n}|}$.

Correspondientemente, el valor futuro de una anualidad unitaria valuada un periodo después del último pago es conocido como valor futuro de una anualidad anticipada y es denotado por $\ddot{s}_{\overline{n}|}$. A diferencia de una anualidad vencida, el valor futuro de la anualidad anticipada no contempla en sus cálculos el último pago. El siguiente diagrama muestra el comportamiento de una anualidad unitaria anticipada y las fechas focales del cálculo de $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ y $\ddot{s}_{\overline{n}|}$.

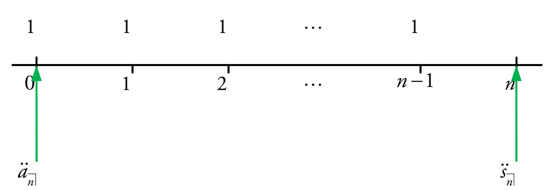


Figura 3.3

El valor presente de la anualidad anticipada es expresado por la siguiente ecuación, tomando en cuenta que su comportamiento es geométrico

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} \\ &= \frac{1-v^n}{1-v} \\ &= \frac{1-v^n}{d}\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

También es posible expresar $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ en términos de una anualidad inmediata $a_{\overline{n}|}$, reconociendo que se puede calcular como la suma de una anualidad inmediata con un plazo de $n-1$ periodos más 1um, esto es

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + \underbrace{v + v^2 + \cdots + v^{n-1}}_{a_{\overline{n-1|}}}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + a_{\overline{n-1|}}\,. \tag{3.3.2}$$

Por otro lado, el valor futuro de una anualidad anticipada está dado por

$$\begin{aligned}
\ddot{s}_{\overline{n|}} &= (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \cdots + (1+i)^2 + (1+i) \\
&= (1+i)\left[1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right] \\
&= \frac{(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i) - 1} \\
&= \frac{(1+i)^n - 1}{iv} \\
&= \frac{(1+i)^n - 1}{d}
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Se puede observar que $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ se puede expresar en términos de una anualidad inmediata $s_{\overline{n|}}$ de la siguiente forma

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = (1+i)\left[\underbrace{1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}}_{s_{\overline{n|}}}\right]$$

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = (1+i)s_{\overline{n|}}\,. \tag{3.3.4}$$

En realidad, las anualidades anticipadas e inmediatas calculan el valor presente y el valor acumulado del mismo conjunto de pagos, la única diferencia es la fecha focal de valuación en donde cada una es calculada. El siguiente diagrama muestra la idea anterior y da pauta a la presentación de otras relaciones también de relevancia entre anualidades anticipadas e inmediatas.

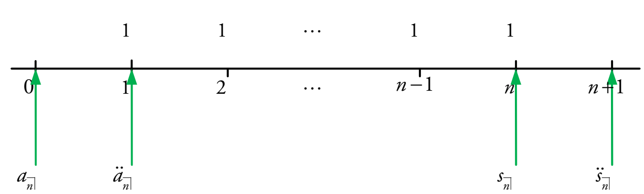


Figura 3.4

Supóngase que se pretende calcular la anualidad anticipada una vez que ya se ha se obtuvo el valor presente de la anualidad inmediata, se puede expresar una relación con base en la Figura 3.4, donde el valor presente de la anualidad inmediata se multiplica por un factor de acumulación para llevar el valor al tiempo 1 y de esta forma obtener el valor de la anualidad anticipada. La siguiente expresión refleja esta relación

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)a_{\overline{n}|} \tag{3.3.5}$$

Asimismo, con base en la Figura 3.4 se puede determinar otra expresión para relacionar $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ con $s_{\overline{n}|}$, calculando el valor futuro en tiempo $n+1$. Supóngase que se cuenta con una anualidad de $n+1$ pagos vencidos, es decir, se tendrá un pago ficticio en el periodo $n+1$ de 1um, entonces el valor futuro de dicha anualidad inmediata, tomando como fecha focal el tiempo $n+1$, estará dado por $s_{\overline{n+1}|}$. Pero como la unidad monetaria en el tiempo $n+1$ es ficticia, habrá que restarla de los cálculos para la obtención del valor futuro de la anualidad anticipada. Así, se tiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{\overline{n}|} &= s_{\overline{n+1}|} - 1 \\ &= \left[1+(1+i)+\cdots+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n}\right]-1 \\ &= (1+i)+\cdots+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n} \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Por otro lado, existen relaciones entre $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ y $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ similares a las ecuaciones (3.2.10) y (3.2.16) para las anualidades anticipadas, esto es

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^{n} \tag{3.3.7}$$

y

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d \tag{3.3.8}$$

Es importante notar que si el pago de la anualidad anticipada es diferente de la unidad monetaria entonces el valor presente estará dado por

$$VP = P\ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{3.3.9}$$

y el valor futuro es

$$VF = P\ddot{s}_{\overline{n}|} \tag{3.3.10}$$

Cabe señalar que de las aplicaciones más importantes de las anualidades anticipadas se encuentran los seguros de vida, daños, accidentes y enfermedades, entre muchos más.

3.4 Anualidades diferidas

El valor presente de una anualidad diferida denotado por m es el flujo descontado de todos los pagos realizados hasta el tiempo 0 (fecha focal), en donde el primer pago se realiza hasta cierta fecha posterior de la valuación, es decir, el primer pago se difiere durante m periodos hasta m+1 en donde empieza la serie de pagos. El siguiente diagrama muestra el comportamiento del planteamiento.

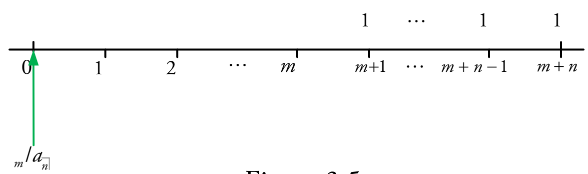


Figura 3.5

La ecuación que describe el valor de ${}_{m}/a_{\overline{n}|}$, es resultado de obtener el valor presente de una anualidad inmediata correspondiente a los n pagos unitarios hasta el tiempo m y trasladados a tiempo 0 con un factor de descuento m periodos

$$ {}_{m}/a_{\overline{n}|} = v^{m} a_{\overline{n}|} \tag{3.4.1} $$

asimismo, se pueden obtener los mismos resultados con el siguiente planteamiento. Supónganse pagos ficticios de 1um desde el tiempo 0 hasta el tiempo m (figura 3.6), aunados a los existentes de $m+1$ hasta $m+n$, entonces el balance de la ecuación en tiempo 0 sería la diferencia entre una anualidad compuesta por $m+n$ pagos menos la anualidad ficticia con m pagos, esto es

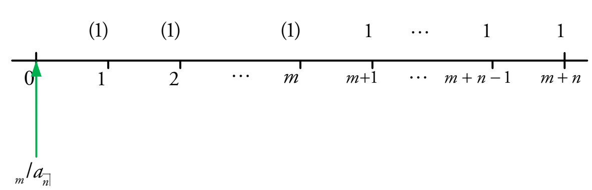


Figura 3.6

$$ {}_{m}/a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|} \tag{3.4.2} $$

Se puede demostrar que la ecuación (3.4.2) es igual a (3.4.1), esto es

$$ \begin{aligned} {}_{m}/a_{\overline{n}|} &= \frac{1-v^{m+n}}{i} - \frac{1-v^{m}}{i} \\ &= v^{m}\,\frac{1-v^{n}}{i} \\ &= v^{m} a_{\overline{n}|} \end{aligned} $$

El valor presente de las anualidades diferidas se pude expresar en términos de anualidades anticipadas de la siguiente forma

$$ {}_{m}/a_{\overline{n}|} = {}_{m+1}/\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{m+n+1}|} - \ddot{a}_{\overline{m+1}|} = v^{m+1}\ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{3.4.3} $$

El valor futuro de una anualidad diferida también conocida como anualidades con pago de intereses futuros, es igual al valor acumulado de una serie de n pagos calculados k periodos después del último pago (Figura 3.7) y se denotará como ${}_{k}/s_{\overline{n}|}$[14]. El valor acumulado se calcula como el producto del valor futuro de una anualidad inmediata por un factor de acumulación k periodos, así se tiene que

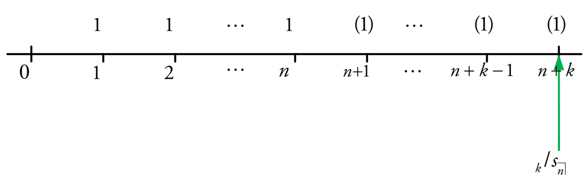


Figura 3.7

$$ {}_{k}/s_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|}(1+i)^{k} \tag{3.4.4} $$

En la Figura 3.7 se muestran unidades monetarias entre paréntesis, los cuales se tendrán que suponer ficticias para intuir la siguiente ecuación, la cual se pude comprobar que es consecuencia de (3.4.4), entonces, habrá que suponer k unidades monetarias que aunadas a las n unidades previas se acumularán hasta el

[14] No existe un símbolo oficial para el valor acumulado de una anualidad diferida.

tiempo $n+k$, para después sustraer una anualidad ficticia futura por k pagos, esto es

$$ {}_{k}/s_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+k}|} - s_{\overline{k}|}\,. \tag{3.4.5} $$

Se puede demostrar, como ocurrió con el valor presente de las anualidades diferidas que, la ecuación (3.4.5) es igual a (3.4.4), así,

$$ \begin{aligned} s_{\overline{n+k}|} - s_{\overline{k}|} &= \frac{(1+i)^{n+k}-1}{i} - \frac{(1+i)^{k}-1}{i} \\ &= \frac{(1+i)^{n+k}-(1+i)^{k}}{i} \\ &= \frac{(1+i)^{n}-1}{i}(1+i)^{k} \\ &= s_{\overline{n}|}(1+i)^{k} \end{aligned} $$

El valor futuro de las anualidades diferidas también se pude expresar en términos de anualidades anticipadas, esto es

$$ {}_{k}/s_{\overline{n}|} = \ddot{s}_{\overline{n}|}(1+i)^{k-1} = \ddot{s}_{\overline{n+k-1}|} - \ddot{s}_{\overline{k-1}|} = {}_{(k-1)}/\ddot{s}_{\overline{n}|}\,. \tag{3.4.6} $$

3.5 Anualidades Perpetuas

Comúnmente denominadas perpetuidades y se denotarán como $a_{\overline{\infty}|}$. Se caracterizan por un sinfín número de pagos, es decir, calculan el valor presente de un conjunto de pagos hechos a un plazo de tiempo infinito. En la práctica, es difícil que una transacción financiera dure por siempre, pero la hipótesis de n tendiendo a infinito se mantendrá para la valuación, esto es $a_{\overline{\infty}|} = v^{1} + v^{2} + v^{3} + \cdots$.

De las aplicaciones más comunes de las perpetuidades son la valuación de acciones de una empresa, administración de fondos caritativos, proyectos de inversión, proyectos gubernamentales, entre otros.

Para obtener el valor presente de una perpetuidad vencida se tendrá que aplicar el límite a la fórmula del valor presente de una anualidad inmediata cuando $n \to \infty$

$$ a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} \tag{3.5.1} $$

De similar forma, el valor presente de una perpetuidad anticipada estará expresada por

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{d} = \frac{1}{d} \tag{3.5.2}$$

La relación más significativa entre $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ y $a_{\overline{\infty}|}$ es la siguiente

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = (1+i)a_{\overline{\infty}|} = 1 + a_{\overline{\infty}|} \tag{3.5.3}$$

de la ecuación anterior se puede asegurar que la diferencia entre la perpetuidad anticipada menos la inmediata es igual a la unidad, es así que

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} - a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d} - \frac{1}{i} = 1 \tag{3.5.4}$$

3.6 Anualidades Variables Aritméticas

Hasta ahora se han analizado anualidades en donde los pagos son los mismos para todos los periodos, es decir, pagos nivelados. A continuación se estudiarán anualidades en donde los pagos varían de forma específica y con las cuales se puede expresar una ecuación para calcularlas rápidamente. Cabe señalar que existen casos en donde no será posible obtener una fórmula que sea igual a la suma de los pagos, en este caso se tendrán que descontar los pagos o los bloques de ciertas anualidades hasta la fecha focal.

Las anualidades con variación de pagos en forma aritmética se distinguen del resto por su crecimiento aritmético (Figura 3.8), en donde cada pago se obtiene a partir del pago anterior sumándole una cantidad constante. Supóngase que el primer pago de la anualidad es P y que la cantidad de crecimiento entre los pagos subsecuentes es Q (distancia o razón de crecimiento aritmético), entonces si la tasa de interés efectiva es i, la ecuación de valor presente para los n primeros pagos será

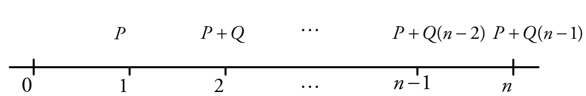


Figura 3.8

$$VP = Pv + \left[P + Q\right]v^2 + \cdots + \left[P + Q(n-2)\right]v^{n-1} + \left[P + Q(n-1)\right]v^n \quad (3.6.1)$$

Para facilitar el cálculo de (3.6.1) se tendrán que utilizar algunos artificios matemáticos y posteriormente se descompondrá la anualidad variable en el valor actual de n rentas niveladas más la suma de los valores actuales de las distancias. Primero se multiplicara (3.6.1) por un factor de acumulación, esto es

$$VP + iVP = P + \left[P + Q\right]v + \cdots + \left[P + Q(n-2)\right]v^{n-2} + \left[P + Q(n-1)\right]v^{n-1} \quad (3.6.2)$$

seguido, se obtendrá la diferencia de (3.6.2) menos (3.6.1)

$$\begin{aligned} VP + iVP &= P + \left[P + Q\right]v + \cdots + \left[P + Q(n-2)\right]v^{n-2} + \left[P + Q(n-1)\right]v^{n-1} \\ -VP &= -Pv - \left[P + Q\right]v^2 - \cdots - \left[P + Q(n-2)\right]v^{n-1} - \left[P + Q(n-1)\right]v^n \quad (3.6.3) \\ iVP &= P + Qv + Qv^2 + \cdots + Qv^{n-1} - Pv^n - Q(n-1)v^n \end{aligned}$$

agrupando términos y resolviendo para VP se obtiene el valor presente de la anualidad variable aritmética vencida, esto es

$$\begin{aligned} VP &= \frac{P - Pv^n + Q(v + v^2 + \cdots + v^n) - nQv^n}{i} \\ &= Pa_{\overline{n}|} + Q\frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Para obtener el valor presente de una anualidad variable aritmética anticipada se tendrá que multiplicar la ecuación (3.6.4) por un factor de acumulación, así se tiene que

$$\ddot{VP} = (1+i)VP = P\ddot{a}_{\overline{n}|} + Q\frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{d} \quad (3.6.5)$$

De forma similar se puede obtener el valor futuro vencido y anticipado de la anualidad variable aritmética multiplicando por los factores de acumulación correspondientes las ecuaciones (3.6.4) y (3.6.5), esto es

$$VF = (1+i)^n VP = Ps_{\overline{n}|} + Q\frac{s_{\overline{n}|} - n}{i} \quad (3.6.6)$$

y

$$\ddot{VF} = (1+i)^n \ddot{VP} = P\ddot{s}_{\overline{n}|} + Q\frac{s_{\overline{n}|} - n}{d} \quad (3.6.7)$$

El valor presente de la perpetuidad de una anualidad aritmética se obtiene de forma muy similar al de la perpetuidad inmediata o anticipada, esto es, se tendrá que aplicar el límite cuando $n \to \infty$ a cada una de los valores presentes para obtener una expresión que represente estas anualidades, las cuales son las siguientes

$$\begin{aligned} VP_\infty &= \lim_{n\to\infty}\left(Pa_{\overline{n|}} + Q\frac{a_{\overline{n|}} - nv^n}{i} \right) \\ &= \frac{P}{i} + \frac{Q}{i^2} \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

por otro lado, la perpetuidad de la anualidad aritmética anticipada es

$$\ddot{VP}_\infty = \frac{1}{d} + \frac{1}{id}. \tag{3.6.9}$$

De las anualidades variables aritméticas se deprenden algunos casos en particular como son las anualidades crecientes, las decrecientes y la combinación de ambos comúnmente llamados arcoíris, de este modo se procederá a la obtención de cada una.

3.6.1 Anualidades Crecientes[15]

El primer caso particular es cuando $P = Q = 1$, de esta manera los pagos forman la sucesión aritmética $1, 2, 3, 4, \ldots, n$. El valor presente de los pagos vencidos denotado por $(Ia)_{\overline{n|}}$ se calculará sustituyendo los valores de P y Q en la ecuación (3.6.4).

$$\begin{aligned} (Ia)_{\overline{n|}} &= a_{\overline{n|}} + \frac{a_{\overline{n|}} - nv^n}{i} \\ &= \frac{(1+i)a_{\overline{n|}} - nv^n}{i} \\ &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i} \end{aligned} \tag{3.6.10}$$

[15] La notación I de $(Ia)_{\overline{n|}}$ y de todas las anualidades crecientes corresponde al término en inglés Increasing

multiplicando la ecuación anterior por un factor de acumulación se obtiene la anualidad creciente anticipada, esto es

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{d} \tag{3.6.11}$$

Los valores futuros se pueden obtener del producto de $(1+i)^n$ por $(Ia)_{\overline{n}|}$ y $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$, quedando de la siguiente forma

$$(Is)_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - n}{i} \tag{3.6.12}$$

$$(I\ddot{s})_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - n}{d} \tag{3.6.13}$$

El valor presente de las perpetuidades crecientes vencidas y anticipadas será

$$(Ia)_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i} = \frac{1}{id} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} \tag{3.6.14}$$

y

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{d} = \frac{1}{d^2} \tag{3.6.15}$$

3.6.2 Anualidades Decrecientes[16]

Otro caso particular de anualidades aritméticas es el de anualidades decrecientes y se da cuando $P = n$ y $Q = -1$, es decir, la progresión de los pagos estará formada por $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$, en donde el valor presente de pagos vencidos se denotará como $(Da)_{\overline{n}|}$ y la formula será

[16] La notación D de $(Da)_{\overline{n}|}$ y de todas las anualidades decrecientes corresponde al término en inglés Decreasing

$$
\begin{aligned}
(Da)_{\overline{n}|} &= na_{\overline{n}|} - \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \\
&= \frac{n(1-v^n) - a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \\
&= \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}
\end{aligned}
\qquad (3.6.16)
$$

El valor presente de una anualidad decreciente anticipada se obtiene del producto de $(1+i)$ por la ecuación (3.6.16), de esta manera se tienen que

$$
(D\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{d} \qquad (3.6.17)
$$

De forma similar, el valor futuro de las anualidades vencidas y anticipadas se obtendrá de la multiplicación del factor de acumulación $(1+i)^n$ y los respectivos valores presentes

$$
(Ds)_{\overline{n}|} = (1+i)^n (Da)_{\overline{n}|} \qquad (3.6.18)
$$

por otro lado se tiene

$$
(D\ddot{s})_{\overline{n}|} = (1+i)^n (D\ddot{a})_{\overline{n}|} \qquad (3.6.19)
$$

3.7 Anualidades Geométricas

Las anualidades variables con crecimiento de pagos geométricos son aquellas en que cada pago se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante llamada razón de crecimiento geométrico. Suelen utilizarse en inversiones, acciones y en cualquier proyecto en donde se tome en cuenta la inflación monetaria. No cuentan con una notación específica y se puede calcular su valor presente, su valor futuro y la perpetuidad con expresiones sencillas.

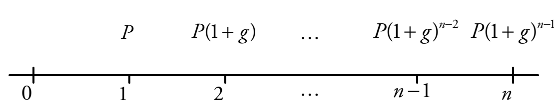


Figura 3.9

Suponga una anualidad en donde el primer pago es P y el siguiente pago es el primero multiplicado por un factor de crecimiento $(1+g)$, es decir $P(1+g)$, y así consecutivamente hasta n, la Figura 3.9 muestra el planteamiento. Entonces, el valor presente de la anualidad variable geométrica será la suma de todos los flujos descontados hasta el tiempo 0, a una tasa de interés efectiva i, tal que

$$PV = vP + v^2 P(1+g) + \cdots + v^{n-1}P(1+g)^{n-2} + v^n P(1+g)^{n-1} \qquad (3.7.1)$$

Se puede obtener una expresión condensada para (3.7.1) factorizando Pv y aplicando la fórmula para la suma de la serie geométrica, esto es

$$VP = Pv\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)}\right] = P\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g} \qquad (3.7.2)$$

El valor futuro es consecuencia del producto del valor presente por $(1+i)^n$, así

$$VF = VP(1+i)^n = P\left[\frac{(1+i)^n-(1+g)^n}{i-g}\right] \qquad (3.7.3)$$

y el valor de la perpetuidad será

$$VP_\infty = P\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g} = P\frac{1}{i-g} \qquad (3.7.4)$$

siempre y cuando $i > g$.

3.8 Anualidades Pagaderas

Estas anualidades se utilizan cuando el periodo de pagos no coincide con la frecuencia de la capitalización de los intereses, ya sea que los periodos de pagos sean menores que la frecuencia de capitalización de intereses (es el caso más común), o que los periodos de pagos sean mayores que la frecuencia en que se pagan los intereses.

El método más común para el cálculo de este tipo de anualidades es el método de conversión de las tasas de interés por tasas que se ajusten a la frecuencia de los pagos; otro método consiste en obtener funciones que dependan de la tasa de interés dada en el problema y empatar la frecuencia de pagos e intereses. Este último método se divide en dos “fisión” que se utiliza cuando los pagos ocurren con menor frecuencia que la capitalización de los intereses y “fusión” que se emplea cuando los pagos son más frecuentes que la capitalización del interés.

3.8.1 Método Fisión

El método fisión consiste en aproximar el valor de una anualidad, bajo la hipótesis de que los pagos son hechos cada k (donde k es un entero) periodos de capitalización de interés, es decir que entre cada pago hay k periodos de capitalización de intereses, a través de n periodos de capitalización de interés (n es un múltiplo de k), donde la tasa de interés es i por periodo de capitalización. Así, el valor presente de una anualidad inmediata unitaria con n/k número de pagos es, el valor descontado de los n/k pagos hasta el tiempo 0, esto es

$$\begin{aligned} VP &= v^k + v^{2k} + \cdots + v^{(n/k)k} \\ &= v^k \frac{1-v^n}{1-v^k} \\ &= \frac{1-v^n}{(1+i)^k - 1} \\ &= \frac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}} \end{aligned} \tag{3.8.1}$$

Lo anterior tiene un argumento que explica el cociente de la ecuación (3.8.1), esto es, se puede calcular los pagos equivalentes para cada periodo de capitalización de los intereses y posteriormente traerlos a valor presente. La Figura 3.10 muestra el comportamiento de estas anualidades, posteriormente se hace un acercamiento a un segmento del diagrama para explicar la idea previa.

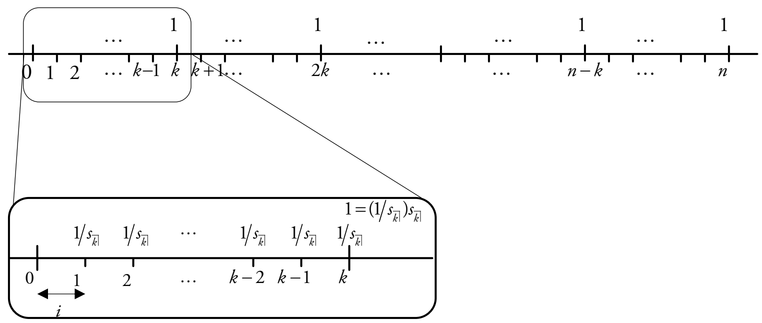


Figura 3.10

Lo que se pretende es cambiar la anualidad dada (en la que los pagos son cada k periodos) por una anualidad equivalente con pagos por cada periodo de capitalización de los intereses. Si se toma el primer segmento del diagrama, es decir, los primeros k periodos de capitalización y se toma como fecha focal el periodo k, entonces la ecuación de valor es $1 = Ps_{\overline{k|}}$, en donde el valor futuro los pagos es igual a 1um. Si se resuelve dicha ecuación de valor para P se tiene que, $P = 1/s_{\overline{k|}}$ que son los pagos que se ven reflejados en la Figura 3.10. Así, la ecuación de valor que resolvería el valor presente para una serie de pagos durante n periodos será $PV = \left(\frac{1}{s_{\overline{k|}}}\right) a_{\overline{n|}}$.

Por otro lado, el valor presente de una anualidad anticipada pagable 1 vez cada k periodos de capitalización de la tasa de interés para un total de n periodos es

$$\begin{aligned} \ddot{VP} &= \frac{1-v^n}{1-v^k} \\ &= \frac{a_{\overline{n|}}}{a_{\overline{k|}}} \end{aligned} \tag{3.8.2}$$

El valor futuro de la anualidad cuando tiene pagos vencidos es el producto de la ecuación (3.8.1) por el factor de acumulación $(1+i)^n$, así se tiene

$$VF = \frac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}}(1+i)^n = \frac{s_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}} \tag{3.8.3}$$

y el valor futuro cuando los pagos son anticipados está dado por

$$\ddot{VF} = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}(1+i)^n = \frac{s_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}. \tag{3.8.4}$$

La perpetuidad con pagos anticipados y la perpetuidad con pagos vencidos se calcularán aplicando el límite a las ecuaciones de valores presentes respectivas, dando lo siguiente

$$VP_\infty = \frac{1}{is_{\overline{k}|}} \tag{3.8.5}$$

y

$$\ddot{VP} = \frac{1}{ia_{\overline{k}|}} \tag{3.8.6}$$

3.8.2 Método Fusión

El método fusión es aquel en que los pagos son hechos m veces cada periodo de capitalización de intereses a través de n periodos de interés, en donde el valor presente de una anualidad vencida denotado por $a_{\overline{n}|}^{(m)}$,con nm número de pagos iguales a $1/m$, a una tasa de interés efectiva por periodo de capitalización i, es igual a

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \cdots + \frac{1}{m}v^{n-\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^n \\ &= \frac{v^{1/m}}{m}\left(\frac{1-v^n}{1-v^{1/m}}\right) \\ &= \frac{1-v^n}{m\left[(1+i)^{1/m}-1\right]} \\ &= \frac{1-v^n}{i^{(m)}} \\ &= \frac{i}{i^{(m)}}\frac{1-v^n}{i} \\ &= \frac{i}{i^{(m)}}a_{\overline{n}|} \end{aligned} \tag{3.8.7}$$

Por lo regular la igualdad anterior se expresa como $a_{\overline{n}|}^{(m)} = \left(1-v^n\right)/i^{(m)}$, la razón de llegar hasta la expresión en términos de la anualidad vencida es porque, antes no existían las calculadoras financieras como las que existen en la actualidad, por tal motivo se ocupaban tablas financieras para aproximar los valores.

El diagrama de flujo de una anualidad unitaria pagadera m veces sobre periodo de capitalización de los intereses es el siguiente

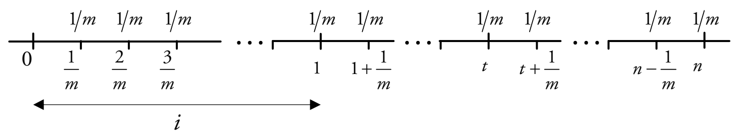


Figura 3.11

de este modo, será más fácil visualizar las ecuaciones de valor futuro con pagos vencidos, el valor presente y futuro con pagos anticipados y la perpetuidad, tanto para pagos vencidos como anticipados.

Así el valor futuro de la anualidad pagadera m veces en un periodo de capitalización durante n periodos será

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}} = \frac{i}{i^{(m)}} s_{\overline{n}|} \qquad (3.8.8)$$

El valor presente de la anualidad pagadera con pagos anticipados es

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}} = \frac{i}{d^{(m)}} a_{\overline{n}|} \qquad (3.8.9)$$

y en consecuencia el valor futuro será

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} = \frac{i}{d^{(m)}} s_{\overline{n}|} \qquad (3.8.10)$$

La perpetuidad con pagos vencidos y con pagos futuros correspondientemente estarán dados por

$$a_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \frac{1}{i^{(m)}} \qquad (3.8.11)$$

y

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} \tag{3.8.12}$$

Es importante hacer notar, que la frecuencia de capitalización de intereses más usual en las anualidades pagaderas es de un año, por tal motivo, la tasas que comúnmente se observarán en los problemas son tasas de interés efectivas anuales, con esto, la anualidad toma el nombre de anualidades pagaderas m veces al año, en donde los pagos anuales son de 1um y el plazo de la anualidad es igual n años. Asimismo, es de considerarse que si el pago anual es P, entonces los pagos cada m-ésimo de año serán iguales a P/m y por la ecuación (3.8.7) se sabe que el valor presente de la anualidad pagadera m veces al año será

$$\begin{aligned} VP &= \frac{P}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{P}{m}v^{\frac{2}{m}} + \cdots + \frac{P}{m}v^{n-\frac{1}{m}} + \frac{P}{m}v^{n} \\ &= P\frac{v^{1/m}}{m}\left(\frac{1-v^n}{1-v^{1/m}}\right) \\ &= P\frac{1-v^n}{m\left[(1+i)^{1/m}-1\right]} \\ &= P\frac{1-v^n}{i^{(m)}} \\ &= Pa_{\overline{n}|}^{(m)} \end{aligned} \tag{3.8.13}$$

entonces, remarcando, las cantidades que se emplean para utilizar las ecuaciones de anualidades pagadera son las cantidades anuales, es decir los pagos anuales.

3.9 Anualidades Continuas

Las anualidades continuas se pueden analizar como un caso particular de las anualidades pagaderas m veces al año, es decir, supongamos que los pagos se hacen m veces al año y que m crece cada vez más, hasta llegar a infinito, esto se puede observar en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2

Valor Presente	Cantidad de los pagos cada *m*-ésimo de año	Cantidad del pago anual
$a_{\overline{n}\rceil}$	$1um$ cada año	$1um$
$a_{\overline{n}\rceil}^{(2)}$	$\frac{1um}{2}$ cada semestre	$1um$
$a_{\overline{n}\rceil}^{(4)}$	$\frac{1um}{4}$ cada trimestre	$1um$
$a_{\overline{n}\rceil}^{(6)}$	$\frac{1um}{6}$ cada bimestre	$1um$
$a_{\overline{n}\rceil}^{(12)}$	$\frac{1um}{12}$ cada mes	$1um$
$a_{\overline{n}\rceil}^{(365)}$	$\frac{1um}{365}$ cada día	$1um$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{\overline{n}\rceil}^{(\infty)}$	$dt\ \ um$ cada instante	$1um$

Para calcular el valor presente de la anualidad pagadera continuamente $a_{\overline{n}\rceil}^{(\infty)}$ se tomará el límite de $a_{\overline{n}\rceil}^{(m)}$ cuando $m \to \infty$, esto es

$$\lim_{m\to\infty} a_{\overline{n}\rceil}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-v^n}{i^{(m)}} \tag{3.9.1}$$

recordando la ecuación (1.5.29), se tiene que

$$a_{\overline{n}\rceil}^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} a_{\overline{n}\rceil}^{(m)} = \frac{1-v^n}{\delta} \tag{3.9.2}$$

donde el valor presente de una anualidad pagadera continuamente $a_{\overline{n}\rceil}^{(\infty)}$ se denotará como $\bar{a}_{\overline{n}\rceil}$. Asimismo, se puede expresar (3.9.2) en términos de una anualidad inmediata multiplicándola por i/i, esto es

$$\bar{a}_{\overline{n}\rceil} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}\rceil} \tag{3.9.3}$$

La anualidad continua, también se puede obtener calculando la integral de los pagos dt, los cuales son realizados cada instante por el factor de acumulación v^t, así se tiene que

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{\overline{n}|} &= \int_o^n v^t \, dt \\
&= \left. \frac{v^t}{\ln v} \right|_o^n \\
&= \frac{v^n - 1}{\ln v}
\end{aligned}
\tag{3.9.4}
$$

recordando que $\ln v = -\delta$ y sustituyendo en la igualdad anterior, se reescribe la ecuación se la siguiente forma

$$
\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{\delta} \tag{3.9.5}
$$

La ecuación anterior también se puede reescribir en términos de fuerza de interés esto es, si se sustituye v^n por $e^{-\delta n}$, entonces

$$
\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} \tag{3.9.6}
$$

Capítulo 4

Aplicaciones y particularidades de las anualidades

Las anualidades tienen muchas aplicaciones prácticas y teóricas, así como sus particularidades que facilitan los cálculos de algunos problemas, a continuación se verán las aplicaciones de mayor significancia sobre las anualidades inmediatas, esto no quiere decir que no se apliquen a las demás anualidades, sin embargo será más sencillo la explicación con anualidades inmediatas y, como ya se ha explicado, por lo regular las demás anualidades se pueden obtener de forma sencilla si los conceptos de la anualidad inmediata son claros y firmes, de esta manera se iniciará con algunas particularidades y aplicaciones.

4.1 Tasa de interés como variable en las anualidades

Si la tasa de interés es desconocida en un problema que envuelve anualidades, se podrá utilizar una calculadora financiera que nos revele el valor exacto de la tasa de interés, sin embargo, es importante que se conozca al menos un método numérico con el cual se calcule dicha tasa.

La tasa de interés se podrá determinar aplicando la técnica de interpolación lineal, para esto, existe una aproximación que nos acerca al valor real de la tasa de interés implícita en el problema con la finalidad de no tardar tanto con ensayo y error. Se necesitará de utilizar el teorema de Taylor para expresar una anualidad como un polinomio de grado n y posteriormente utilizar los dos primeros términos que, mediante una técnica algebraica, exprese una ecuación que aproxime a la tasa buscada.

Se sabe que $\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}} = \dfrac{1}{v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n}$, para expresar el reciproco de la anualidad como un polinomio se utilizará el teorema de Taylor, cabe aclarar que se utiliza el reciproco de la anualidad dado que el radio de convergencia es mayor que el de la anualidad, de esta manera se tiene que

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(0)}{k!} i^k + E_3(i)$$

en donde $f(i) = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$, entonces

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2n} i + \frac{n^2-1}{12n} i^2 + \cdots \tag{4.1.1}$$

tomando los dos primeros términos del polinomio y resolviendo para i se tiene

$$\begin{aligned} i &\approx \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{n} \right) \frac{2n}{n+1} \\ &\approx \frac{2(n - a_{\overline{n}|})}{a_{\overline{n}|}(n+1)} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

esta aproximación dará una idea del valor de la tasa de interés, posteriormente se tendrá que aplicar la interpolación lineal para encontrar un valor de la tasa de interés más certera.

Se ejemplificará con un ejercicio que ayudará a la toma de decisión a la que muchos mexicanos se enfrentan a la hora de realizar una compra, sobre todo cuando no se cuenta con el capital suficiente como para pagar en efectivo, el cuestionamiento que se plantea es ¿Conviene comprar a plazos? este cuestionamiento se podrá resolver si se conoce la tasa específica involucrada en la operación financiera, que en la gran mayoría de los establecimientos no la mencionan.

Ej. Supóngase que la Sra. Sánchez tiene la necesidad de cambiar su refrigerador de 9 pies por uno de 12 pies, el cual ya cotizó en la tienda de pagos chiquitos. El precio del refrigerador es de \$5,999.00 si lo paga en efectivo, y si lo prefiere, puede pagar con crédito a 78 semanas con pagos de \$196.33 semanales. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva anual implícita en la transacción financiera si decide comprarlo a crédito?

La ecuación de valor del problema al inicio de la compra estará dada por

$$5,999 = 196.33 a_{\overline{78}|i}.$$

lo que significa que $a_{\overline{78}|i'} = \dfrac{5999}{196.33} = 30.55$. Aplicando la ecuación (4.1.2) para encontrar una primera aproximación de la tasa efectiva por semana se tiene que

$$i \approx \frac{2(78 - a_{\overline{78}|i'})}{a_{\overline{78}|i'}(79)} = 0.039309$$

entonces, se podrá empezar con la interpolación utilizando la ecuación (2.2.3) dando valores a la tasa de interés cercanos al 3.9%.

Asignando los primeros valores a las tasas efectivas por semana, $i'_1 = 4\%$ e $i'_2 = 2.5\%$

$$B_1 = a_{\overline{78}|4\%} = 23.82$$

y

$$B_2 = a_{\overline{78}|2.5\%} = 34.17$$

Se puede notar que, el valor de la tasa que se está buscando se encuentra entre los valores de $i'_1 = 4\%$ e $i'_2 = 2.5\%$, por tal motivo se procederá a realizar la primera iteración de la interpolación

$$\begin{aligned} i' &= 0.04 + \frac{30.55 - 23.82}{34.17 - 23.82}(0.025 - 0.04) \\ &= 3.0242496\% \end{aligned}$$

Entonces la primera aproximación de la tasa de interés efectiva cada semana es $i' = .030242496$

Si se sustituye la tasa que se encontró en la ecuación de valor con el fin de valorar la aproximación, se tendrá

$$a_{\overline{78}|3.0242496\%} = 29.83$$

Con lo que se puede notar que, el valor de la tasa de interés que se busca está muy próxima a la tasa encontrada en la primera iteración. Se procederá a una segunda iteración para mejorar la estimación con los valores $i'_1 = 3.02\%$ e $i'_2 = 2.5\%$,

$$\begin{aligned} i' &= 0.030242495 + \frac{30.55 - 29.82}{34.17 - 29.82}(0.025 - 0.030242495) \\ &= 2.9365416\% \end{aligned}$$

Con el resultado anterior se procederá a valuar en la ecuación de valor para valorar la aproximación

$$a_{\overline{78|}2.9365416\%} = 30.49$$

Lo que podría considerarse una buena aproximación de la tasa de interés efectiva por semana. Si la tasa efectiva semanal se multiplica por los periodos de capitalización se obtiene la tasa de interés nominal anual capitalizable semanalmente, esto es

$$\begin{aligned} i^{(52)} &= i'(52) \\ &= 0.029365416(52) \\ &= 152.7\% \end{aligned}$$

Lo que equivale a una tasa efectiva anual $i = 350.42\%$ aproximadamente, lo que significa que después de un año de estar pagando el refrigerador, ya habrá dado el equivalente a tres veces su costo original, por tal motivo no le convendría comprarlo a pagos chiquitos.

4.2 Tiempo como variable en las anualidades

En problemas que conllevan anualidades es muy común analizar el tiempo que durará la los depósitos en la inversión o cuánto tiempo debe transcurrir para que los pagos cubran cierta deuda, entre otras consideraciones. Por lo regular, el tiempo en las anualidades siempre es un múltiplo de periodos de conversión de interés o periodos de frecuencia de pagos. En este apartado se estudiará el tema del tiempo cuando este no se conoce, es decir, el cuestionamiento es ¿Por cuánto tiempo se tendrán que realizar los pagos para cubrir ciertas obligaciones o llegar a ciertas metas?, el problema se presenta cuando después de calculado el tiempo este no es un entero.

Para resolver este tipo de problemas existen tres métodos los cuales se detallan a continuación y se sigue con un ejemplo en donde se utilizarán dichos métodos.

1) Método del pago global. Consiste en realizar un pago mayor a los demás al final del plazo, en donde n es un entero

2) Método del pago reducido. Consiste en realizar un pago menor a los demás en el tiempo $n+1$

3) Método del pago en tiempo exacto. Consiste en realizar un pago menor a los demás en el tiempo exacto, es decir, en el tiempo $n+k$ en donde n es entero y k es una fracción de periodo

Ej. ¿Cuántos pagos son requeridos para liquidar una deuda de $5,000.00 a una tasa efectiva del 10%, mediante pagos anuales de $1,000?

La ecuación de valor que resuelve el problema es la siguiente:

$$\begin{aligned} 5,000 &= 1,000 a_{\overline{n}|10\%} \\ &= 1,000\left(\frac{1-(1+0.10)^{-n}}{0.10}\right) \end{aligned}$$

resolviendo la ecuación para n se tiene

$$n = \frac{\ln(5)}{\ln(1.1)} = 7.2725$$

Entonces, habrá que realizar 7 depósitos de $1,000.00 nivelados, ya que $7 < n < 8$, lo que significa que habrá que hacer un pago irregular por la cantidad C. Ahora, hay que decantarse por uno de los métodos mencionados con anterioridad. A continuación se verá la solución con los tres métodos, no sin antes mostrar el diagrama de flujo el cual será de gran ayuda.

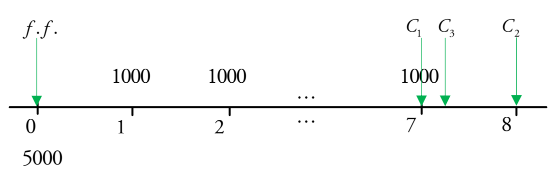


Figura 4.1

Por el método de pago global se tendrá que calcular la ecuación de valor presente trasladando todos los pagos a la fecha focal en tiempo 0, asimismo, se tendrá que sumar un pago final C_1 que también será trasladado desde el tiempo 7 hasta la fecha focal, de esta manera se obtendrá un pago por la cantidad C_1, el cual sumado al pago nivelado en el tiempo 7 compondrá el pago global (Figura 4.1). Así se tiene que

$$5000 = 1000a_{\overline{7}|10\%} + C_1 v^7$$

los que implica que $C_1 = 256.41$, es decir, el último pago tendrá que realizarse por la cantidad de $1,256.41 para liquidar la deuda en siete años.

Para el método de pago reducido se tendrá que descontar los pagos nivelados hasta la fecha focal más un último pago C_2, el cual se descontará desde el año 8 hasta la fecha focal, así la ecuación de valor es la siguiente

$$5,000 = 1,000a_{\overline{7}|} + C_2 v^8$$

entonces, se tendrá que realizar siete pagos nivelados de $1,000.00 y un pago adicional por $282.05, en al año 8 para liquidar la deuda.

Es importante notar la relación entre el pago C_1 y el pago C_2, esto es $C_2 = C_1(1.10)$.

Para calcular el pago menor C_3 por el método del pago exacto, se tendrá que resolver la ecuación de valor de la misma forma que en los métodos anteriores, sin embargo habrá que descontar el pago C_3 desde el tiempo 7.2725 hasta la fecha focal, así se tiene que

$$5,000 = 1,000a_{\overline{7}|10\%} + C_3 v^{7.2725}$$

de este modo el resultado obtenido es $C_3 = 263.16$. El tercer método no suele usarse en la práctica, dado que tendría que pagarse la cantidad C_3 en el tiempo 7.2725, es decir, el pago menor a los pagos nivelados se tendrá que realizar a la 8:52 hrs. del día 8 de marzo del séptimo año. Cabe señalar que C_3 se puede obtener del producto del valor de C_1 por el factor de acumulación elevado a la fracción de año, esto es, $C_3 = C_1(1.10)^{0.2725}$.

4.3 Anualidades niveladas por bloques

Son anualidades en donde los pagos varían cada conjunto de periodos, es decir, durante k periodos se tienen pagos P_k, posteriormente durante los siguientes m periodos los pagos son P_m, los siguientes q periodos los pagos son P_q y así consecutivamente hasta llegar al último bloque de pagos realizados P_t, en donde $k+m+q+\cdots+t=n$. Para calcular el valor presente o el valor futuro se podrá utilizar el método largo que también es conocido como bloque por bloque o se pude utilizar el método corto, el cual ahorra tiempo considerable en la resolución de este tipo de problemas.

Para calcular el valor presente utilizando el método bloque por bloque se tendrá que descontar cada bloque de pagos hasta la fecha focal, de hecho se pueden realizar los cálculos como si fuesen un conjunto de anualidades diferidas, esto se explicará partiendo de la siguiente figura y posteriormente se tendrá una expresión algebraica que refleje el valor presente, así se tiene que

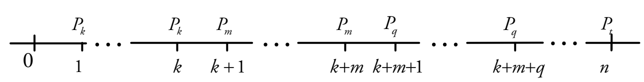


Figura 4.2

la expresión para el valor presente será

$$VP = P_k a_{\overline{k}|} + P_m\left(a_{\overline{k+m}|} - a_{\overline{k}|}\right) + P_q\left(a_{\overline{k+m+q}|} - a_{\overline{k+m}|}\right) + \cdots + P_t\left(a_{\overline{n}|} - a_{\overline{n-t}|}\right) \quad (4.3.1)$$

El método corto se puede obtener de la ecuación previa haciendo un poco de álgebra, esto es

$$\begin{aligned} VP &= P_k a_{\overline{k}|} + P_m a_{\overline{k+m}|} - P_m a_{\overline{k}|} + P_q a_{\overline{k+m+q}|} - P_q a_{\overline{k+m}|} + \cdots + P_t a_{\overline{n}|} - P_t a_{\overline{n-t}|} \\ &= \left(P_k - P_m\right) a_{\overline{k}|} + \left(P_m - P_q\right) a_{\overline{k+m}|} + \cdots + P_t a_{\overline{n}|} \end{aligned}$$

la ecuación anterior se puede reescribir como

$$VP = P_t a_{\overline{n}|} + \cdots + \left(P_m - P_q\right) a_{\overline{k+m}|} + \left(P_k - P_m\right) a_{\overline{k}|} \qquad (4.3.2)$$

lo que se puede explicar con dos reglas que a continuación se detallan:

a) Se comienza la valuación con el pago más alejado de la fecha focal y se multiplica por la anualidad desde el tiempo n

b) Posteriormente, se hacen ajustes conforme la fecha focal se vaya acercando, es decir la diferencia del pago del último bloque con respecto al pago del penúltimo bloque multiplicado por la anualidad desde el tiempo donde ocurre el cambio de pago, y se prosigue hasta llegar a la última variación de pago (el bloque contiguo a la feche focal)

El siguiente ejemplo resume los dos métodos y explica el método corto con las reglas mencionadas anteriormente.

Ej. Encontrar una expresión para el valor presente de los siguientes pagos en bloque: 7um para los primeros 5 años, 15um para los siguientes 8 años, 4um para los siguientes 7 años y 18um para los últimos 6 años.

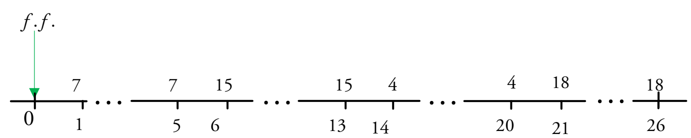


Figura 4.3

Por el método largo se tendrá que:

$$VP = 7a_{\overline{5}|} + 15\left(a_{\overline{13}|} - a_{\overline{5}|}\right) + 4\left(a_{\overline{20}|} - a_{\overline{13}|}\right) + 18\left(a_{\overline{26}|} - a_{\overline{20}|}\right)$$

o haciendo álgebra se obtendrá lo mismo que por el método corto

$$\begin{aligned} VP &= 7a_{\overline{5}|} + 15a_{\overline{13}|} - 15a_{\overline{5}|} + 4a_{\overline{20}|} - 4a_{\overline{13}|} + 18a_{\overline{26}|} - 18a_{\overline{20}|} \\ &= (7-15)a_{\overline{5}|} + (15-4)a_{\overline{13}|} + (4-18)a_{\overline{20}|} + 18a_{\overline{26}|} \\ &= 18a_{\overline{26}|} - 14a_{\overline{20}|} + 11a_{\overline{13}|} - 8a_{\overline{5}|} \end{aligned}$$

es decir, el pago más alejado de la fecha focal (Figura 4.3) es el realizado en el tiempo 26 por 18um el cual se multiplica por $a_{\overline{26}|}$ y será colocado en la ecuación de valor. Mientras se avanza por la línea de tiempo hacia la fecha focal se nota una disminución del pago, del tiempo 21 al 20, es decir, en el tiempo 20 existe una disminución del pago en -14um (desde 18um hasta 4um), el cual será multiplicado por $a_{\overline{20}|}$ y se sumará a la ecuación. Así, mientras se sigue avanzando por la línea de tiempo, se nota otro cambio en el punto en el tiempo 13, en el cual el pago sufre un incremento de 11um que será llevado a la fecha focal por $a_{\overline{13}|}$ y se sumará a la ecuación de valor. Finalmente, el último cambio se registra en el tiempo 5, con un decremento del pago por -8um, por tanto el último termino de la ecuación de valor será $-8a_{\overline{5|}}$, de este modo la ecuación de valor para el cálculo del valor presente será $VP = 18a_{\overline{26|}} - 14a_{\overline{20|}} + 11a_{\overline{13|}} - 8a_{\overline{5|}}$ que es el mimo que se obtuvo por el método bloque por bloque.

Cabe señalar que para encontrar el valor futuro de anualidades en bloques se tendrá que seguir la misma metodología del método corto pero con la fecha focal en el tiempo n. Así en el ejemplo anterior, la ecuación para el valor futuro estará dada por

$$VF = 7s_{\overline{26|}} + 8s_{\overline{21|}} - 11s_{\overline{14|}} + 14s_{\overline{7|}}.$$

4.4 Amortización de una deuda

En la vida cotidiana, adquirir bienes por medio de créditos otorgados por instituciones crediticias o casas de préstamo es muy frecuente. Asimismo, es usual liquidar o saldar la deuda mediante abonos periódicos, los cuales contienen una parte de los intereses y del capital. Así, al comprar a plazos una casa, un automóvil o cualquier otro bien estaremos hablando de la amortización de una deuda. Cuando se comprende bien el método de amortización de deudas, se pueden tomar sanas decisiones financieras y con esto evitar el derroche de dinero ocasionados por deudas cada vez más elevadas e interminables.

La palabra amortizar proviene del latín mortis, mortus, muerte. En las finanzas el término amortizar es muy utilizado y significa extinguir una deuda con sus respectivos intereses mediante una serie de pagos periódicos iguales o variables, comúnmente denominados abonos, que por lo regular se realizan en lapsos iguales. Es decir, cuando una deuda se liquida mediante una serie de pagos periódicos, generalmente de igual valor, en los que se incluye el pago de capital e intereses y son efectuados en intervalos de tiempo, por lo regular iguales, se está hablando de la amortización de una deuda.

La amortización de una deuda puede llevarse a cabo con un modelo de interés simple o con interés compuesto. En la práctica, lo que más se utiliza es la amortización de una deuda con un modelo de interés compuesto, en específico la amortización gradual (amortización con pagos nivelados) que es el que se estudiará a continuación.

Cabe mencionar, que una de tantas aplicaciones de las anualidades se ve reflejada en la amortización de una deuda, dado que se refiere a la extinción de la misma mediante pagos periódicos. Así, considérese una deuda que se adquiere el día de hoy por la cantidad L, la cual se liquidará en n periodos realizando pagos periódicos nivelados por la cantidad PMT, es decir $L = PMTa_{\overline{n|}}$.

Los pagos PMT deberán contener la parte proporcional a los intereses I generados por la deuda y una parte del pago PR que se destinará a ir liquidando la deuda comúnmente llamado principal pagado, principal contenido en el pago o amortización. Esto es, si el valor acumulado de la deuda en un periodo después de haberse adquirido es $L(1+i) = L + Li$, en donde L corresponde a la deuda original y $Li = I_1$ corresponde a los intereses generados en un periodo, entonces el balance o saldo insoluto después de realizar el primer pago será

$$OB_1 = L(1+i) - PMT \tag{4.4.1}$$

reformulando la ecuación anterior se tienen que

$$OB_1 = L - (PMT - Li) = L - (PMT - I_1) \tag{4.4.2}$$

lo que significa que el pago PMT contiene los intereses de la deuda, los cuales si se descuentan queda el pago del principal, esto es

$$PR_1 = PMT - I_1 \tag{4.4.3}$$

por tanto, la ecuación (4.4.2) se puede reescribir como

$$OB_1 = L - PR_1 \tag{4.4.4}$$

Nótese que el balance de la deuda en tiempo 0 es igual a la deuda original L, de este modo, si se sustituye L por OB_0 en la ecuación (4.4.4) se tiene

$$OB_1 = OB_0 - PR_1 \tag{4.4.5}$$

Este proceso puede continuar hasta el final del segundo periodo en donde un siguiente pago es realizado, donde el balance hasta antes de realizar el segundo pago será de $OB_1(1+i)$ el cual se verá reducido por el segundo pago PMT y el balance para el periodo 2 será

$$\begin{aligned} OB_2 &= OB_1(1+i) - PMT \\ &= OB_1 - (PMT - OB_1 i) \\ &= OB_1 - (PMT - I_2) \\ &= OB_1 - PR_2 \end{aligned} \qquad (4.4.6)$$

Este proceso continua de un periodo de pago a otro, hasta el pago n-ésimo, en donde la deuda deberá quedar liquidada, es decir, $OB_n = 0$.

Nótese que el balance justo después de que el t-ésimo pago es realizado es OB_t, de esto se desprende que el cálculo del siguiente balance es

$$\begin{aligned} OB_{t+1} &= OB_t(1+i) - PMT \\ &= OB_t - (PMT - OB_t i) \\ &= OB_t - (PMT - I_{t+1}) \\ &= OB_t - PR_{t+1} \end{aligned} \qquad (4.4.7)$$

en donde los intereses del periodo $t+1$ se calculan sobre el saldo insoluto[17] de la deuda en tiempo t.

$$I_{t+1} = OB_t i \qquad (4.4.8)$$

y el principal contenido en el pago en el periodo $t+1$ son

$$PR_{t+1} = PMT - I_{t+1} \qquad (4.4.9)$$

La mejor manera de llevar la administración de los pagos, los intereses y del balance (saldo insoluto) de una deuda es mediante un registro, el cual será llamado tabla, cédula, cuadro o simplemente registro de amortización. Así, la siguiente tabla muestra la amortización de una deuda en general.

Tabla 4.1

t	*Pago*	*Interés*	*Amortización*	*Saldo Insoluto*
0				$L = OB_0$
1	PMT	$I_1 = OB_0 i$	$PR_1 = PMT_1 - I_1$	$OB_1 = OB_0 - PR_1$
2	PMT	$I_2 = OB_1 i$	$PR_2 = PMT_2 - I_2$	$OB_2 = OB_1 - PR_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t				OB_t

[17] Saldo insoluto significa lo que aun no se ha pagado

t+1	PMT	$I_{t+1} = OB_t i$	$PR_{t+1} = PMT_{t+1} - I_{t+1}$	$OB_{t+1} = OB_t - PR_{t+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	PMT	$I_n = OB_{n-1} i$	$PR_n = PMT_n - I_n$	$OB_n = OB_{n-1} - PR_n = 0$

Si los pagos son iguales a 1 y la deuda es igual a $L = a_{\overline{n}|}$, entonces la tabla anterior se puede reescribir de la siguiente forma

Tabla 4.2

t	*Pago*	*Interés*	*Amortización*	*Saldo Insoluto*
0				$L = a_{\overline{n}|}$
1	1	$I_1 = ia_{\overline{n}|} = 1 - v^n$	$PR_1 = 1 - (1 - v^n) = v^n$	$OB_1 = a_{\overline{n}|} - v^n = a_{\overline{n-1}|}$
2	1	$I_2 = 1 - v^{n-1}$	$PR_2 = v^{n-1}$	$OB_2 = a_{\overline{n-2}|}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	1	$I_t = 1 - v^{n-t+1}$	$PR_t = v^{n-t+1}$	$OB_t = a_{\overline{n-t}|}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	1	$I_n = 1 - v$	$PR_n = v$	$OB_n = 0$

Para ejemplificar la amortización de una deuda, se procederá al planteamiento y la resolución del siguiente problema.

Ej. Un automóvil nuevo tiene un precio de contado de \$110,000. Se puede adquirir sin enganche y 48 pagos mensuales iguales. Si la tasa de interés implícita en el crédito es del 14% capitalizable mensualmente, para realizar la tabla de amortización se tendrá que calcular primero el pago mensual, de esta manera se tiene que

$$PMT = \frac{110,000}{a_{\overline{48}|1.167\%}} = \$3,005.91$$

y la tabla de amortización será

Tabla 4.3

t	*Pago*	*Interés*	*Amortización*	*Saldo Insoluto*
0				$ 110,000.00
1	$3,005.91	$1,283.33	$ 1,722.58	$ 108,277.42
2	$3,005.91	$1,263.24	$ 1,742.68	$ 106,534.75
3	$3,005.91	$1,242.91	$ 1,763.01	$ 104,771.74
4	$3,005.91	$1,222.34	$ 1,783.58	$ 102,988.16
5	$3,005.91	$1,201.53	$ 1,804.38	$ 101,183.78
6	$3,005.91	$1,180.48	$ 1,825.43	$ 99,358.34
7	$3,005.91	$1,159.18	$ 1,846.73	$ 97,511.61
8	$3,005.91	$1,137.64	$ 1,868.28	$ 95,643.34
9	$3,005.91	$1,115.84	$ 1,890.07	$ 93,753.26
10	$3,005.91	$1,093.79	$ 1,912.12	$ 91,841.14
11	$3,005.91	$1,071.48	$ 1,934.43	$ 89,906.70
12	$3,005.91	$1,048.91	$ 1,957.00	$ 87,949.70
13	$3,005.91	$1,026.08	$ 1,979.83	$ 85,969.87
14	$3,005.91	$1,002.98	$ 2,002.93	$ 83,966.94
15	$3,005.91	$ 979.61	$ 2,026.30	$ 81,940.64
16	$3,005.91	$ 955.97	$ 2,049.94	$ 79,890.70
17	$3,005.91	$ 932.06	$ 2,073.85	$ 77,816.85
18	$3,005.91	$ 907.86	$ 2,098.05	$ 75,718.80
19	$3,005.91	$ 883.39	$ 2,122.53	$ 73,596.27
20	$3,005.91	$ 858.62	$ 2,147.29	$ 71,448.99

continuación Tabla 4.3

t	*Pago*	*Interés*	*Amortización*	*Saldo Insoluto*
21	$3,005.91	$ 833.57	$ 2,172.34	$ 69,276.64
22	$3,005.91	$ 808.23	$ 2,197.68	$ 67,078.96
23	$3,005.91	$ 782.59	$ 2,223.32	$ 64,855.64
24	$3,005.91	$ 756.65	$ 2,249.26	$ 62,606.37
25	$3,005.91	$ 730.41	$ 2,275.50	$ 60,330.87
26	$3,005.91	$ 703.86	$ 2,302.05	$ 58,028.81
27	$3,005.91	$ 677.00	$ 2,328.91	$ 55,699.91
28	$3,005.91	$ 649.83	$ 2,356.08	$ 53,343.82
29	$3,005.91	$ 622.34	$ 2,383.57	$ 50,960.26
30	$3,005.91	$ 594.54	$ 2,411.38	$ 48,548.88
31	$3,005.91	$ 566.40	$ 2,439.51	$ 46,109.37
32	$3,005.91	$ 537.94	$ 2,467.97	$ 43,641.40
33	$3,005.91	$ 509.15	$ 2,496.76	$ 41,144.64
34	$3,005.91	$ 480.02	$ 2,525.89	$ 38,618.75
35	$3,005.91	$ 450.55	$ 2,555.36	$ 36,063.39
36	$3,005.91	$ 420.74	$ 2,585.17	$ 33,478.21
37	$3,005.91	$ 390.58	$ 2,615.33	$ 30,862.88
38	$3,005.91	$ 360.07	$ 2,645.85	$ 28,217.04
39	$3,005.91	$ 329.20	$ 2,676.71	$ 25,540.32
40	$3,005.91	$ 297.97	$ 2,707.94	$ 22,832.38
41	$3,005.91	$ 266.38	$ 2,739.53	$ 20,092.85

continuación Tabla 4.3

t	*Pago*	*Interés*	*Amortización*	*Saldo Insoluto*
42	$3,005.91	$ 234.42	$ 2,771.50	$ 17,321.35
43	$3,005.91	$ 202.08	$ 2,803.83	$ 14,517.52
44	$3,005.91	$ 169.37	$ 2,836.54	$ 11,680.98
45	$3,005.91	$ 136.28	$ 2,869.63	$ 8,811.34
46	$3,005.91	$ 102.80	$ 2,903.11	$ 5,908.23
47	$3,005.91	$ 68.93	$ 2,936.98	$ 2,971.25
48	$3,005.91	$ 34.66	$ 2,971.25	$ 0.00

Bibliografía

Boedo, Lucia. (2008), Las fuentes de financiación y sus coste, Primera Edición, España, Netbiblo, S.L.

Broverman, Samuel A. (2008), Mathematics of investment and credit, 4th ed., USA, ACTEX

Canada, Jhon R. et al. (1997), Análisis de la inversión de capital para ingeniería y administración, Segunda Edición, México, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

Cherry, H.& Gorvett, R. (2009), A.S.M. study manual for Exam FM/Exam 2, Tenth Edition, USA, Actuarial Study Materials

Cissell, R. et al. (1999), Matemáticas financieras, Décimo Tercera Reimpresión, México, CECSA

De la Cueva, Benjamín. (1986), Matemáticas financieras, Sexta Edición, México, Porrúa

Donald, D. W. A. (1963), Compound Interest and Annuities Certain, Third Edition, N.W., Cambridge

Gil, Lorenzo. (1993), Matemática de las operaciones financieras, Segunda Edición, España, Editorial AC

Hassett, M.J. et al. (2010), ACTEX study manual: SOA exam FM, CAS exam 2, USA, ACTEX Publications

Kellison, S.G. (1991), The Theory of Interest, Second Edition, USA, Irwin/McGraw-Hill