



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

JAULAS Y GEOMETRIAS FINITAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

N A L L E L I S O L I S M O R A N



**DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO**

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Facultad de Ciencias

Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Jaulas y geometrías finitas

realizado por Solís Morán Nalleli con número de cuenta 0-9725062-5 quien ha decidido titularse mediante la opción de tesis en la licenciatura en Actuaría. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dr. Juan José Montellano Ballesteros

Propietario Dra. Isabel Alicia Hubard Escalera

Propietario Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo

Tutor

Suplente Dra. Mika Olsen

Suplente Mat. Gloria López Chávez

Atentamente,

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU ”

Ciudad Universitaria, D. F., a 21 de abril de 2009

EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN ACTUARÍA



FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

DR. LUIS ANTONIO RINCÓN SOLÍS

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

*mnl.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar gracias a Dios, ya que toda buena dádiva y todo don perfecto desciende de lo alto.

En segundo lugar a la UNAM por haberme albergado y así darme la oportunidad de forjarme como profesionista. A todos mis maestros por sus enseñanzas y consejos.

A Gaby mi asesora por su tiempo, paciencia, dedicación y amistad. Porque sin ella este trabajo no hubiera sido posible.

A mis padres, Mateo y Griselda por todo su amor, apoyo y esfuerzo ya que por ellos siempre trato de ser una mejor persona. Papá aquí concluyen tus años de acompañarme a Ciencias, gracias por darme el apoyo que siempre he necesitado. A mi mamá por ser la mejor mujer que conozco. Este trabajo es para los dos. LOS AMO.

A mis hermanos, Odeth y Ricardo, ya que son mis dos muros de apoyo en la vida.

A Dafne, mi sobrina, todo lo que desees en la vida lo puedes lograr.

A mis abuelos Ricardo Mateo y Paula por acompañarme en mis logros.

A Mamá Elena por el cariño que siempre me dio. Te quiero mucho abuelita, gracias por haberme dado la oportunidad de tenerte en mi vida.

A toda mi demás familia, sobrinos, primos y tíos, por todo el amor y apoyo con el que he contado de su parte.

Y a todos mis amigos y compañeros que siempre han estado a mi lado.

Índice general

Capítulo 1. Conceptos Básicos	7
Capítulo 2. Geometrías Finitas	19
Capítulo 3. Gráficas de Incidencia de las Geometrías Finitas	39
Capítulo 4. Jaulas	45
Bibliografía	59

Introducción

El objetivo de este trabajo es relacionar dos áreas de la combinatoria: las geometrías finitas y la teoría de gráficas. Concretamente estudiaremos como las gráficas de incidencia de algunas geometrías finitas resultan ser ciertas gráficas regulares de cuello fijo y orden mínimo llamadas jaulas.

Las geometrías finitas son configuraciones finitas de puntos y líneas. Existen relaciones de incidencia que vinculan a los puntos con las líneas, éstas son llamadas estructuras de incidencia. Un tipo de estructuras de incidencia son los denominados Polígonos Generalizados.

Los planos proyectivos finitos fueron los primeros polígonos que se dieron a conocer y surgieron dentro del área designada como "geometría proyectiva finita", la cual fue abordada en sus comienzos por Von Staudt (1798-1867).

Una gráfica $(k; g)$ -jaula es una gráfica k -regular con cuello g de orden mínimo. La primera vez que surge esta definición de modo formal fue en el artículo de Tutte llamado *A Family of Cubical Graphs*.

En el primer capítulo introducimos conceptos básicos de la teoría de gráficas que serán utilizados a lo largo del desarrollo de la tesis.

En el segundo capítulo estudiamos distintos tipos de geometrías finitas, las definimos y observamos algunas propiedades.

En el tercer capítulo definimos las gráficas de incidencia de las geometrías finitas definidas en el capítulo dos. Además estudiamos sus propiedades fundamentales: regularidad, orden, cuello y diámetro.

Finalmente, en el cuarto capítulo definimos el concepto de jaula, obtenemos cotas inferiores en el orden de las mismas y describimos determinadas familias conocidas de jaulas para varios parámetros de grado y cuello. Además, relacionamos a las gráficas de incidencia mencionadas en el capítulo tercero con las jaulas.

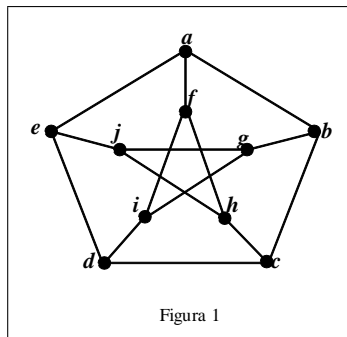
CAPÍTULO 1

Conceptos Básicos

En este capítulo a manera de introducción daremos definiciones y ejemplos de algunos conceptos básicos en la teoría de gráficas que son necesarios para el desarrollo de la tesis.

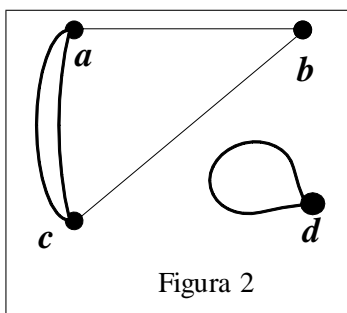
Definición : Una *gráfica finita* es un par ordenado $G = (V(G), A(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío de elementos llamados vértices y $A(G)$ es un conjunto finito de pares no ordenados de elementos de $V(G)$ llamados aristas.

Por ejemplo en la figura 1, se representa la gráfica conocida como Petersen. El conjunto de vértices está dado por $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y el conjunto de aristas está conformado por $A(G) = \{ab, bc, cd, de, ea, af, bg, ch, di, ej, fh, hj, jg, gi, if\}$.



Definición : Una gráfica G es llamada simple si en $A(G)$ todos los pares no ordenados son distintos y cada par está formado por dos elementos distintos de $V(G)$, es decir, no existen aristas múltiples ni lazos.

Por ejemplo la gráfica de Petersen es una gráfica simple, en cambio en la figura 2 damos un ejemplo de una gráfica que tiene aristas múltiples y lazos.



Definición : Un vértice v incide con una arista e si $v \in e$.

Además e es una arista incidente a v . Una arista $\{x, y\}$ puede ser escrita como xy ó yx .

Definición : En una gráfica G el número de vértices es el *orden* y el número de aristas es el *tamaño*.

Observando el ejemplo de la gráfica de Petersen, tenemos que es de orden 10 y tamaño 15.

Una gráfica con un sólo vértice y sin aristas se llama *trivial*.

Definición : Dos vértices x, y de G son adyacentes o vecinos, si existe la arista xy en G .

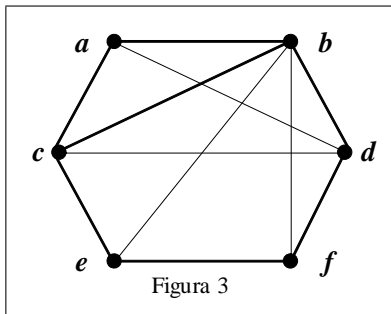
Definición : Dos aristas son adyacentes cuando ambas inciden en un mismo vértice.

En nuestro ejemplo anterior los vértices a, b son adyacentes ya que existe la arista ab . Y las aristas cd y de son adyacentes, ya que inciden en el vértice d .

Definición : El conjunto de vértices de G que son adyacentes a un vértice x se denomina *vecindad* de x en G y se denota como $N_G(x)$.

Definición : El *grado* o *valencia* de un vértice x en G es el número $|N_G(x)|$ y se denota como $gr_G(x)$.

A un vértice de grado cero se le denomina *vértice aislado*. El número $\delta(G) := \min\{gr_G(x)|x \in V(G)\}$ es el mínimo grado en G , el número $\Delta(G) := \max\{gr_G(x)|x \in V(G)\}$ es el máximo grado en G . Por ejemplo, en la gráfica de la figura 3 claramente $\delta(G) = 3$ y $\Delta(G) = 5$.



Definición : Cuando todos los vértices de G tienen el mismo grado decimos que G es una gráfica regular.

Si el grado de todos los vértices es igual a k entonces G es k -regular. Además si $k = 3$, G se denomina gráfica *cúbica*.

En nuestro ejemplo de la gráfica de Petersen, $N_G(a) = \{b, e, f\}$, $|N_G(a)| = 3$ y además nuestra gráfica es 3-regular.

Un conjunto de vértices o aristas de G es llamado *independiente* si ningún par de ellos es adyacente. Es decir, es un conjunto V de vértices (aristas, respectivamente) tal que para ningún par de ellos existe alguna arista que los conecte (vértice en común). En otras palabras, cada arista (vértice) en la subgráfica contiene a lo más un vértice en V (arista en A).

Un conjunto independiente maximal es un conjunto independiente tal que añadiendo cualquier otro vértice al conjunto, éste deja de ser independiente.

En nuestro ejemplo de la gráfica de Petersen, sea $V_1(G) = \{a, c, i, j\}$, $V_2(G) = \{b, f, e\}$ y $V_3(G) = \{d, h, g\}$ decimos que el conjunto V_1 es un conjunto independiente maximal y que los conjuntos V_2 y V_3 son independientes no maximales.

Definición : Una gráfica *completa* G es aquella en la que cada uno de los vértices es adyacente a todos los demás.

Si G es completa y tiene n vértices la denotamos por K_n .

A continuación mostramos en la figura 4 el ejemplo de la K_2 - gráfica y la K_4 -gráfica.

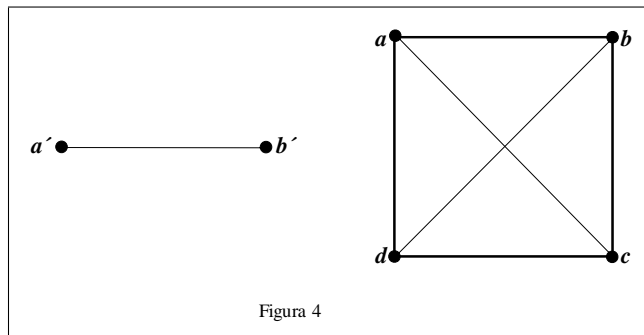


Figura 4

Una gráfica de orden n y sin aristas es una gráfica vacía y se denota por O_n . Por ejemplo en las gráficas de la figura 5 se representan O_1, O_3 y O_4 .

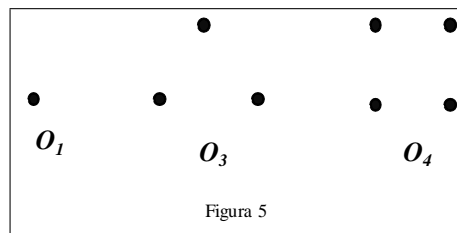


Figura 5

Dada una gráfica G , decimos que una *subgráfica* H de G , es una gráfica H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. Cuando $V(H) = V(G)$, H es una subgráfica generadora de G .

Definición : Un *camino* W en una gráfica G es una sucesión finita de vértices y aristas de G de manera alternada $W = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$ en la cual la arista a_i es igual a $v_{i-1}v_i$ para cada $i = 1, \dots, n$ ó simplemente escribimos $W = (v_0, v_1, \dots, v_n)$.

Definición : Un *paseo* es un camino en el que no se repiten aristas.

Definición : A un camino $W = (v_0, a_1, v_1, \dots, v_n)$ se le denomina *trayectoria* si todos sus vértices son distintos.

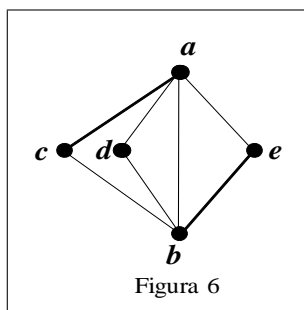
Además, se le llama *xy-trayectoria* si es una trayectoria con $v_0 = x$ y $v_n = y$.

Por ejemplo para la K_4 -gráfica de nuestra figura 4 un camino W quedaría de la siguiente manera $W = (a, b, c, d, a, c, b, d, a)$. Un paseo es (a, c, b, d, a, b) . Y una *ac*-trayectoria sería (a, b, c) .

Definición : Un *circuito* es un paseo en el cual el vértice inicial y final son el mismo.

Definición : Un *ciclo* es un camino en el que todos sus vértices son distintos exceptuando el primero y último.

En la gráfica de la figura 6 un circuito es (a, c, b, d, a, b, e, a) y un ciclo es (a, c, b, d, a) .

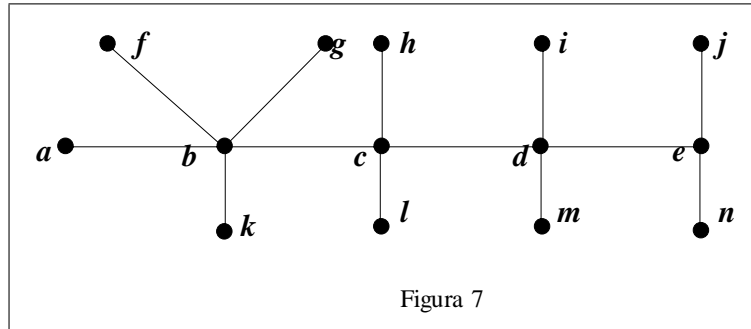


Definición : El número de aristas de un camino es la *longitud del camino*.

Si la longitud del camino es k se denota por W_k . Notemos que si k es cero; entonces, $W_0 \cong K_1$.

Definición : La *longitud de un ciclo* $C = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$ es el número de aristas (o vértices) que aparece en el ciclo.

Un ciclo de longitud k es llamado k -ciclo y es denotado por C_k . Cuando $n = 3$ también se llama *triángulo*. Una gráfica sin ciclos es llamada acíclica. Por ejemplo la gráfica de la figura 7 es acíclica.



Definición : La mínima longitud de un ciclo (contenido) en una gráfica G es el *cuello* $g(G)$ de G .

El cuello de una gráfica acíclica es infinito. La máxima longitud de un ciclo en G es la *circunferencia*.

Por ejemplo, en la figura 3 el cuello $g(G) = 3$ con el ciclo $C = \{a, b, c\}$ y la circunferencia de G es igual a 5 con el ciclo $C = \{a, b, d, e, c, a\}$.

Definición : La *distancia* entre dos vértices x, y de G es la *mínima longitud* de todas las *xy-trayectorias* en G y se denota como $d_G(x, y)$.

Si entre dos vértices x, y de G no existen *xy-trayectorias*, entonces $d_G(x, y) = \infty$.

Definición : La excentricidad de un vértice $x \in V(G)$ es definida por:

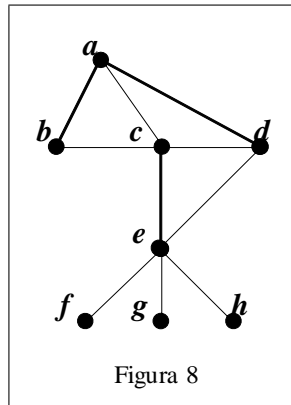
$$e(x) = \max \{d_G(x, y), y \in V(G)\}.$$

Definición : El máximo entre las excentricidades de los vértices de una gráfica G es el *diámetro* de G , denotado por $diam(G)$.

Definición : El mínimo entre las excentricidades de los vértices de una gráfica G es llamado el *radio* de G y se denota por $rad(G)$.

Cuando $e(x) = rad(G)$ el vértice x es llamado *vértice central* de G . El conjunto Z_G de todos los vértices centrales de una gráfica G es llamado el *centro* de G .

A continuación mostramos otra figura para ejemplificar todos las definiciones anteriormente expuestas.



En la figura 8, tenemos que los vértices de G son $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, las aristas son $A(G) = \{ab, ac, ad, bc, cd, ce, de, ef, eg, eh\}$. Por lo que esta gráfica es de orden 8 y tamaño 10. Donde el grado de cada uno de sus vértices son:

$$\begin{array}{ll} gr_G(a) = 3 & gr_G(e) = 5 \\ gr_G(b) = 2 & gr_G(f) = 1 \\ gr_G(c) = 4 & gr_G(g) = 1 \\ gr_G(d) = 3 & gr_G(h) = 1 \end{array}$$

De esta manera $\delta(G) := 1$ y $\Delta(H) := 5$. Ahora tomemos los conjuntos $V_1(G) = \{b, d, f, h\}$, $V_2(G) = \{a, e\}$ y $V_3(G) = \{c, g\}$. Entonces $V_1(G)$ es un conjunto independiente maximal y V_2 y V_3 son conjuntos independientes no maximales.

En nuestra gráfica tenemos el ejemplo de un camino $W = (a, d, c, e, f)$, un paseo (g, e, c, a, b, c) . Y una ah -trayectoria es (a, b, c, e, h) . De igual manera damos ejemplos de un circuito en G dado por (a, b, c, e, d, c, a) y de un ciclo en G dado por (a, b, c, e, d, a) .

Por otra parte, tenemos que el cuello de G es $g(G) = 3$ con el ciclo (c, d, e) . La circunferencia de G es 5, con el ciclo (d, a, b, c, e, d) .

Veamos ahora las excentricidades de los vértices en G :

$$\begin{array}{ll} e(a) = 3 & e(e) = 2 \\ e(b) = 3 & e(f) = 3 \\ e(c) = 3 & e(g) = 3 \\ e(d) = 2 & e(h) = 3 \end{array}$$

Por lo que los vértices d y e son vértices centrales en G . De esta manera tenemos que el $diam(G) = 3$ y el $rad(G) = 2$.

La distancia entre una arista xy y un vértice z en G se define como $\min\{d_G(x, z), d_G(y, z)\}$ y la distancia entre un vértice x y un subconjunto $S \subseteq V(G)$ se denota como $d_G(S, x)$ y se define como $\min\{d(x, y) \mid y \in S\}$.

Dado $S \subseteq V(G)$, $N_G(S)$ denotará el conjunto de vértices en $V(G) \setminus S$ que son adyacentes a algún vértice en S . La subgráfica M de G tal que

$V(M) = S$ y $A(M)$ es el conjunto de aristas de G contenidas en S se le denomina subgráfica inducida y se le denota como $G[S]$. Si M es una subgráfica de G , $N_M(S) = V(M) \cap N_G(S)$. $G \setminus S$ denota a la subgráfica de G resultante de eliminar de G los vértices de S y las aristas de G que contengan algún elemento de S . Si $S = \{x\}$, escribimos $G \setminus x$ en lugar de $G \setminus \{x\}$. Dado $A \subseteq A(G)$, $G \setminus A$ denota la subgráfica de G resultante de eliminar de G las aristas de A . Si $A = \{a\}$, escribimos $G \setminus a$ en lugar de $G \setminus \{a\}$. Dado A un conjunto de pares no ordenados de $V(G)$, $G + A$ denota la gráfica resultante de añadir a G las aristas definidas por los pares en A . Si $A = \{a\}$, escribimos $G + a$ en lugar de $G + \{a\}$. Dadas dos gráficas G' y G'' , la unión de G' y G'' denotada por $G' \cup G''$ es una gráfica G tal que $V(G) = V(G') \cup V(G'')$ y $A(G) = A(G') \cup A(G'')$.

Definición : Una gráfica G se dice que es conexa si para todo par de vértices x y y de G existe una xy -trayectoria en G .

Dada una gráfica G cualquiera entonces las componentes conexas de G son las subgráficas conexas maximales de G .

Definición : Una gráfica G es *bipartita* si el conjunto de sus vértices se puede partir en dos subconjuntos cada uno independiente, es decir, $V(G) = X \cup Y$, X y Y independientes y $A(G) \subseteq \{xy | x \in X, y \in Y\}$.

Una gráfica bipartita G es completa si $A(G) = \{xy | x \in X, y \in Y\}$. Si $|X| = n$ y $|Y| = m$, denotamos a G como $K_{n,m}$; por lo que $K_{n,m}$ tiene $n + m$ vértices y mn aristas.

Definición : Un *árbol* es una gráfica conexa y sin ciclos.

Un árbol de orden n tiene tamaño $n - 1$.

En la figura 9 tenemos dos ejemplos de gráficas bipartitas. En la primera figura observamos la gráfica bipartita completa $K_{3,3}$. Con bipartición $X = \{a, b, c\}$ y $Y = \{d, f, e\}$. Mientras que en la segunda figura vemos un árbol de orden 5 y tamaño 4 con bipartición $X = \{b', d', f'\}$ y $Y = \{a', c'\}$.

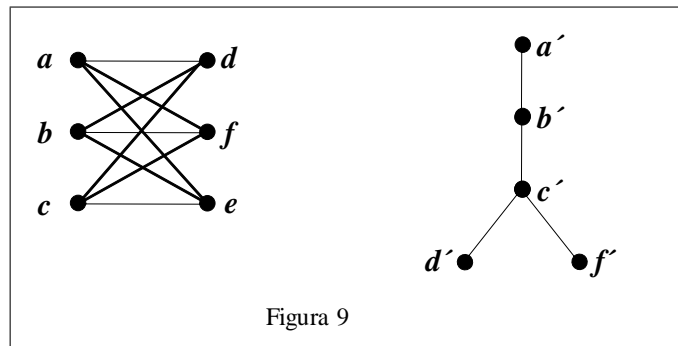


Figura 9

CAPÍTULO 2

Geometrías Finitas

En este capítulo conoceremos a las geometrías finitas. Estaremos dando definiciones, lemas, proposiciones y un teorema interesante para conocer como están estructuradas. También hablaremos de la dualidad. Y en todos los casos nos referiremos a conjuntos finitos de puntos y líneas.

Definición : Un *espacio* $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es un sistema de puntos \mathcal{P} y líneas \mathcal{L} donde cada $l \in \mathcal{L}$ está formada por elementos de \mathcal{P} .

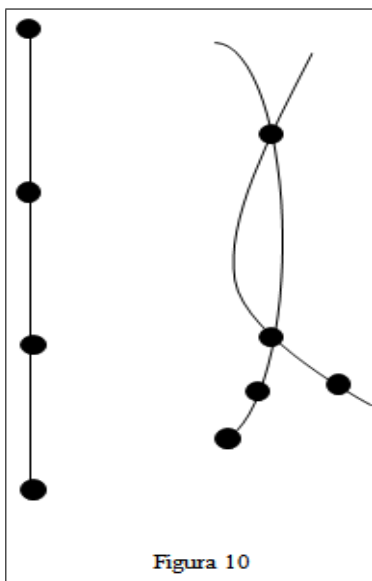
Definición : Un *espacio parcialmente lineal* es un espacio $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ de puntos \mathcal{P} y líneas \mathcal{L} tal que satisface los siguientes axiomas:

PL1 Toda línea tiene al menos dos puntos.

PL2 Cualesquiera dos puntos determinan a lo más una línea.

En la Figura 10 tenemos 2 ejemplos de espacios, el primero es un espacio parcialmente lineal ya que satisface ambos axiomas. En cambio en el segundo ejemplo, vemos claramente que no satisfacen el segundo axioma, por lo tanto no es un espacio parcialmente lineal.

Observemos que si p y q son puntos distintos que están en una línea, entonces PL2 nos dice que esa línea es única . Denotaremos esa única línea por pq . Además, si r y s son cualesquiera puntos distintos de la línea pq , entonces $pq = rs$.



La definición de espacio parcialmente lineal no asume que existan puntos, en este caso por PL1 tampoco hay líneas; el espacio parcialmente lineal es vacío y lo denotamos por \emptyset . Observemos que también puede darse el caso en el cual un espacio parcialmente lineal contenga puntos pero $\mathcal{L} = \emptyset$. Este espacio es distinto al espacio parcialmente lineal \emptyset .

Lema 1. Sea $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ un espacio parcialmente lineal. Dos líneas distintas en \mathcal{S} se intersectan en a lo más un punto.

Demostración. Sean l_1 y l_2 dos líneas distintas de \mathcal{S} , si $|l_1 \cap l_2| \geq 2$, entonces dos o más puntos estarían determinando más de una línea, lo que contradice a PL2. \square

Lema 2. Sean l_1 y l_2 dos líneas de un espacio parcialmente lineal \mathcal{S} tales que $l_1 \subseteq l_2$, entonces $l_1 = l_2$.

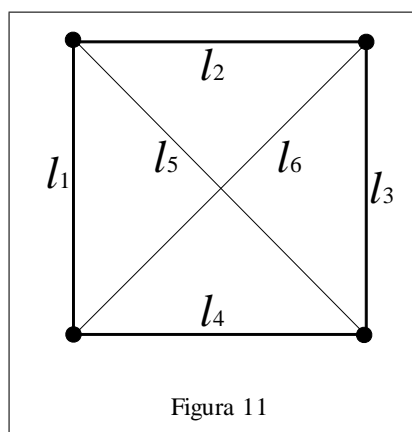
Demostración. Sea $l_1 = pq$ y $l_2 = rs$. Como $l_1 \subseteq l_2$, p y q son puntos distintos de la línea l_2 así que $l_1 = l_2$ \square .

Definición : Un *espacio lineal* es un espacio $\bar{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ de puntos \mathcal{P} y líneas \mathcal{L} tal que satisface los siguientes axiomas:

L1 Toda línea tiene al menos dos puntos.

L2 Por cualesquiera dos puntos pasa una única línea.

La figura 11 es un ejemplo de espacio lineal.



Definición : Un *plano proyectivo finito* es un espacio lineal $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ que satisface los siguientes axiomas:

P1 Cualesquiera dos líneas se intersectan en exactamente un punto.

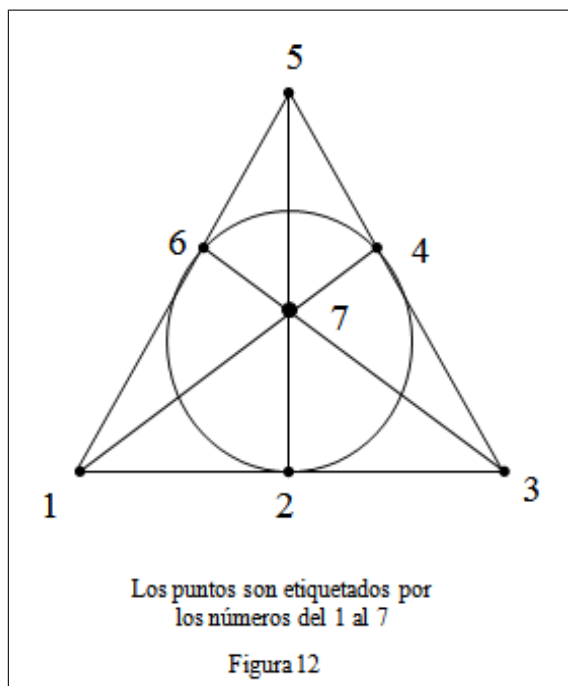
P2 Existe un conjunto de cuatro puntos de los cuales cualesquiera tres no son colineales.

Nótese que P2 es equivalente a decir que existe un conjunto de cuatro elementos $P \subseteq \mathcal{P}$, tal que $|L \cap P| \leq 2$ para todo elemento $L \in \mathcal{L}$.

Observemos que todo plano proyectivo es un espacio lineal y por lo tanto es un espacio parcialmente lineal, ya que los axiomas de un plano proyectivo cumplen los axiomas de estos dos espacios.

La figura 11 no es ejemplo de plano proyectivo finito ya que existen líneas que no se intersectan, por ejemplo l_2 y l_4 , contradiciendo el axioma P1.

El plano proyectivo finito más pequeño que existe por construcción se conoce como el Plano de Fano (ver figura 12). Tiene 7 puntos y 7 líneas, cada línea tiene 3 puntos y por cada punto pasan 3 líneas y es único salvo isomorfismo; es decir, existe una función biyectiva que preserva incidencias entre cualquier otro plano proyectivo con los mismos parámetros y el plano de Fano. Esto no lo probaremos en esta tesis porque nuestro trabajo tiene otros objetivos, la prueba de esto la podemos encontrar en [2].



Proposición 1. Sea $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ un plano proyectivo finito. Entonces todas las líneas tienen el mismo número de puntos. Esto es, $|l| = |l'|$ para cualesquiera dos líneas $l, l' \in \mathcal{L}$.

Para probar la proposición anterior es necesario probar antes el siguiente lema:

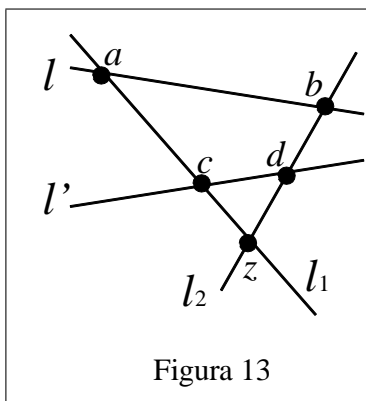
Lema 3. Dadas dos líneas cualesquiera l y l' existe un punto $z \in \mathcal{P}$ tal que z no está ni en l ni en l' .

Demostración. Consideremos un conjunto $P = \{a, b, c, d\} \subseteq \mathcal{P}$ que satisface las condiciones del axioma P2, entonces tenemos que $|l \cap P| \leq 2$ y $|l' \cap P| \leq 2$. Si existe un punto en P que no está contenido en $l \cup l'$ ya terminamos.

Supongamos que $P \subset l \cup l'$. Entonces l interseca a P en dos puntos, porque si lo interseca en un punto entonces l' lo interseca en tres puntos y esto no es posible por el axioma P2, por lo tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que $l \cap P = \{a, b\}$ y de la misma manera $l' \cap P = \{c, d\}$.

Consideremos las líneas $l_1 = ac$ y $l_2 = bd$. Sea z la intersección de l_1 y l_2 . Podemos afirmar que $z \notin l \cup l'$ ya que si suponemos, sin pérdida de generalidad, que $z \in l$ entonces $z \in l \cap l_1$ y sabemos que $a \in l \cap l_1$ entonces $z = a$, porque cualesquiera dos líneas se intersectan en un sólo punto y entonces l_2 contiene a los puntos $z = a, b$ y d , contradiciendo la elección de P . (ver figura 13)

Por lo tanto $z \notin l \cup l'$. \square



Ahora sí estamos en condiciones de probar la Proposición 1. Demostraremos que para todo $l, l' \in \mathcal{L}$ entonces $|l| = |l'|$, es decir l y l' tienen el mismo número de puntos.

Sea z un punto fijo tal que $z \notin l \cup l'$ y sea $\varphi : l \rightarrow l'$ una función tal que la imagen $\varphi(x)$ de un punto $x \in l$ es el punto donde se intersectan las líneas zx y l' . El punto $\varphi(x)$ está bien definido ya que el axioma P1 dice que cualesquiera dos líneas se intersectan en exactamente un punto.

Probaremos que φ es una biyección. Sea $y \in l'$ un punto arbitrario, consideremos la línea zy y sea x la intersección de esta línea l . Como las líneas zy y zx coinciden, tenemos que $\varphi(x) = y$. Por lo que la función φ es una función suprayectiva \square (ver figura 14)

Claramente φ es una función inyectiva porque si $\varphi(x) = \varphi(y)$ como por dos puntos pasa una única línea $z\varphi(x)$ entonces $l \cap z\varphi(x) = \{x\} = l \cap z\varphi(y) = \{y\}$, entonces $x = y$. Por lo tanto φ es biyectiva y $|l| = |l'|$.

Definición : El *orden* de un plano proyectivo finito $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es igual a $|l| - 1$, donde l es cualquier línea en \mathcal{L} .

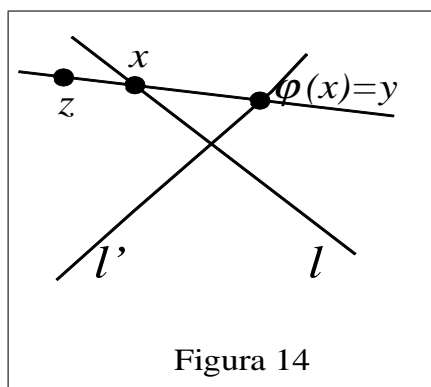


Figura 14

Por ejemplo el Plano de Fano es de orden 2 ya que $|l| = 3$ para todo $l \in \mathcal{L}$. En adelante denotaremos un plano proyectivo finito de orden n por π_n .

Proposición 2. Sea $\pi_n = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ un plano proyectivo finito de orden n , entonces se cumple que:

- i) Por cada punto pasan exactamente $n + 1$ líneas.
- ii) $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$.
- iii) $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$.

Demostración

(i) Probaremos que siempre existe una línea l y un punto x tal que $x \notin l$.

Sea $x \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{P} = \{a, b, c, d\}$ el conjunto en π_n que satisface el axioma P2.

Entonces analizaremos dos casos distintos que $x \in \mathcal{P}$ y que $x \notin \mathcal{P}$. El caso dos se subdividirá en dos subcasos.

Caso 1) Si $x \in \mathcal{P}$. Supongamos que $\mathcal{P} = \{x, a, b, c\}$. Observemos que existe una línea l que no contiene a x ya que si $\mathcal{P} = \{x, a, b, c\}$ es un conjunto que satisface el axioma P2, entonces xa y xb son dos líneas distintas y

entonces la línea ab no contiene a x ya que si $x \in ab$ tenemos que $xa = xb$ lo cual es falso.

Caso 2) Si $xa \neq xb$, x no es un punto del conjunto $\mathcal{P} = \{a, b, c, d\}$, entonces de la misma manera $x \notin ab$ y se analiza como en el caso 1.

Caso 2.2) Si $xa = xb$, entonces $x \in ab$ y $x \notin bc$, ya que $a \notin bc$. Y en este caso es bc la línea l que no contiene a x .

Sea l una línea fija tal que $x \notin l$. Por cada punto $y \in l$ consideremos la línea xy ; como $|l| = n + 1$, estas son $n + 1$ líneas pasando por x . Por otra parte, cualquier línea l' que pasa por x intersecta a l en un cierto punto y y por lo tanto es una de las $n + 1$ líneas anteriores. Entonces, hay exactamente $n + 1$ líneas que pasan por x .

(ii) Elijamos cierta $l = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathcal{L}$ y sea a un punto tal que $a \notin l$. Sea l_i la línea ax_i , $i = 0, 1, \dots, n$. De acuerdo con el axioma P1 cualesquiera de estas dos líneas, l_i y l_j , se intersectan en un sólo punto, el punto a . Las líneas l_0, l_1, \dots, l_n tienen n puntos además de a , y por lo tanto tenemos en total $(n + 1)n + 1 = n^2 + n + 1$ puntos distintos. Demostraremos que cualquier punto $x \in \mathcal{P} \setminus \{a \cup l\}$ pertenece a alguna de las líneas l_i . Sabemos, por el axioma P1, que la línea ax intersecta a la línea l en algún punto, x_i , y entonces la línea ax coincide con l_i quedando demostrado (ii).

Para demostrar (iii) necesitamos introducir el concepto de dualidad, el cual es básico en el estudio de los planos proyectivos.

DUALIDAD

El concepto de dualidad en planos proyectivos se refiere al intercambio del conjunto de puntos por el de líneas, preservando las propiedades de incidencia.

Sea $\pi_n = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ un plano proyectivo de orden n . Entonces el dual de π_n es $\pi'_n := (\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ donde $\mathcal{P}' := \mathcal{L}$ y $\mathcal{L}' := \mathcal{P}$.

Proposición 3. El dual de un plano proyectivo finito es un plano proyectivo finito.

Demostración: Sea $\pi_n = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ un plano proyectivo finito y sea $\pi'_n = (\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ su dual.

Vamos a demostrar ahora que π'_n es un espacio lineal, es decir, que cumple L1 y L2.

L1) Tenemos que demostrar que por cada línea $p \in \mathcal{L}'$ pasan dos puntos $l, l' \in \mathcal{P}'$.

Como $p \in \mathcal{P}$ y π_n es un plano proyectivo entonces por cada punto pasan al menos tres líneas probando lo anterior.

L2) Demostraremos que por cada dos puntos $l, l' \in \mathcal{P}'$ pasa una única línea $p \in \mathcal{L}'$, nuevamente como $l, l' \in \mathcal{L}$ aplicando el axioma P1, el punto $l \cap l' \in \mathcal{L}'$ y pasa por l y l' .

Ahora debemos demostrar que las condiciones P1 y P2 se cumplen para $\pi'_n = (\mathcal{P}', \mathcal{L}')$.

P1) Tenemos que demostrar que para cualesquiera dos líneas $p, p' \in \mathcal{L}'$ existe un único punto $l \in \mathcal{P}'$ tal que $p \cap p' = l$.

Sean $p, p' \in \mathcal{L}'$, entonces $p, p' \in \mathcal{P}$. Pero sabemos que $\pi_n = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es un espacio lineal, por lo tanto se cumple que para cualesquiera dos puntos pasa una única línea, es decir, $pp' = l$. Esto implica que existe un único punto $l \in \mathcal{P}'$ tal que $l = p \cap p'$.

P2) Tenemos que demostrar que en $\pi'_n = (\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ existe un conjunto $P \subset \mathcal{P}'$ de cuatro puntos en los que cualesquiera tres son no colineales. Es decir, encontrar un conjunto $P \subset \mathcal{L}$ de cuatro líneas en los que cualesquiera tres de ellas no concurran en un mismo punto.

Sea $P = \{a, b, c, d\}$ tal que $P \subseteq \mathcal{P}$ como en la condición P2, ahora definamos $L_1 = ab$, $L_2 = bc$, $L_3 = cd$, $L_4 = da$. En la figura 15 se ve que estas líneas forman un cuadrángulo y por lo tanto no hay 3 colineales. Entonces, si seleccionamos cualesquiera 3 de estas 4 líneas, tenemos que dos de ellas parten de un punto P y este punto no está contenido en la tercera línea.

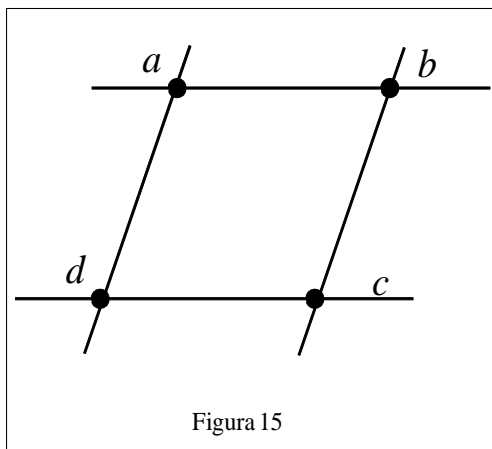


Figura 15

De esta manera cualesquiera 3 de las líneas L_1, L_2, L_3 ó L_4 tienen una intersección vacía, y así afirmamos la validez de la condición P2 para el conjunto dual.

Por lo tanto $\pi'_n = (\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ es un plano proyectivo finito. \square

Además π'_n es de orden n ya que fue por cada punto $l \in \mathcal{P}'$ pasan $n + 1$ líneas en \mathcal{L}' (ya que en cada línea $l \in \mathcal{L}$ hay $n+1$ puntos en \mathcal{P}).

Ahora bien, con la proposición 3 que acabamos de demostrar vamos a probar el inciso (iii) de la proposición 2.

Proposición 4. Sea $\pi_n = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ un plano proyectivo finito de orden n , entonces se cumple que:

$$\text{iii) } |\mathcal{L}| = n^2 + n + 1.$$

Demostración:

Sea $\pi'_n = (\mathcal{P}', \mathcal{L}')$.

Como π'_n es un plano proyectivo finito entonces por el inciso ii) de la proposición 2 tenemos que $|\mathcal{P}'| = n^2 + n + 1$ entonces $|\mathcal{L}'| = n^2 + n + 1$. \square

Definición : Un *cuadrángulo generalizado* $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es un espacio parcialmente lineal que satisface los siguientes axiomas:

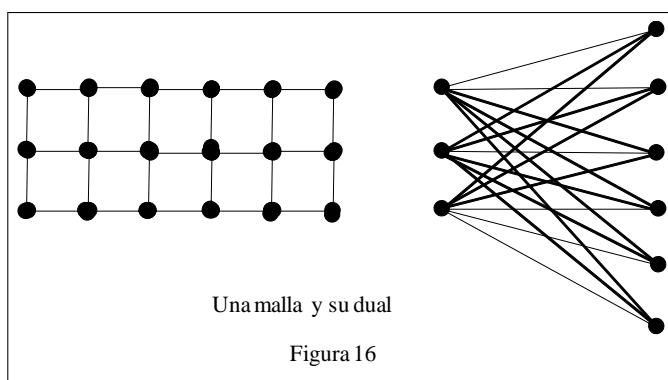
CG1 Dada cualquier línea l y un punto p que no está en l hay un único punto p' en l tal que p y p' son colineales.

CG2 Existen puntos no colineales y líneas no paralelas.

Notemos que el dual de un cuadrángulo generalizado también es un cuadrángulo generalizado ya que el axioma CG1 en el dual afirma que dado cualquier punto p y cualquier línea l no incidente a p existe una única línea

l' en p con l y l' concurrentes. Usando el axioma CG1 esta línea es la línea pp' la cual es única y el dual GC2 es inmediato.

Dos ejemplos simples de cuadrángulos generalizados son la conocida "malla" y su dual; en la malla por cada punto pasan dos líneas, mientras que en su dual cada línea contiene dos puntos. (ver figura 16)



A continuación enunciaremos un teorema importante de los cuadrángulos generalizados, el cual no probaremos ya que en esta tesis no estamos interesados en clasificar a los cuadrángulos generalizados (puede verse en [1]) sino en estudiar una clase específica de estos, la clase de los que se enuncian en el inciso (iii) de este teorema.

Teorema 1 : Sea $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ un cuadrángulo generalizado. Entonces uno de los siguientes enunciados es verdadero:

i) \mathcal{S} es una "malla" ($\mathcal{P} \neq \emptyset$) donde cada punto está en dos líneas y el conjunto de líneas las podemos dividir en dos conjuntos, \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 , para los cuales cada línea en uno de los dos subconjuntos intersecta a una y sólo

una línea del otro conjunto en un sólo punto. Además, las líneas de cada \mathcal{L}_i tienen el mismo número de puntos, para $i = 1, 2$.

ii) \mathcal{S} es el dual de una "malla".

iii) Existen enteros $s \geq 1$ y $t \geq 1$ tales que cada línea tiene $s + 1$ puntos y por cada punto pasan $t + 1$ líneas.

Algunas observaciones de este teorema son las siguientes:

Sea s_i el número de puntos que hay en las líneas de \mathcal{L}_i . Notemos que si \mathcal{S} es una malla de los descritos en *(i)* en la cual $s_1 = s_2 = s + 1$, entonces es un cuadrángulo generalizado descrito también en *(iii)* y cada línea tiene $s + 1$ puntos y por cada punto pasan $t + 1$ líneas con $t = 1$. Si \mathcal{S} es una malla dual con la bipartición P_1 y P_2 en los cuales $|P_1| = |P_2|$, entonces \mathcal{S} también cae dentro del caso *(iii)*.

Si \mathcal{S} es del tipo *(iii)* diremos que tiene parámetros s y t . Utilizaremos las letras $t(= 1)$ para una malla, y $s(= 1)$ para el dual de la malla, indistintamente.

A continuación daremos algunas propiedades de los cuadrángulos generalizados enunciados en el inciso *(iii)*.

Lema 4. Sean p y q puntos no colineales. Entonces existen exactamente $t + 1$ puntos colineales tanto con p como con q .

Demostración: Por CG1, q es colineal a un único punto en cada una de las $t + 1$ líneas de p . Así obtenemos $t + 1$ puntos colineales con p y q . \square

Lema 5. En cualquier cuadrángulo generalizado \mathcal{S} con parámetros s y t , tenemos que

$$|P| = (s + 1)(st + 1) \text{ y}$$

$$|L| = (t + 1)(st + 1)$$

donde P = total de puntos en \mathcal{S} y L = total de líneas en \mathcal{S} .

Demostración: Fijemos una línea l . Existen $P - (s + 1)$ puntos que no están en l . Cada punto que no está en l está en una única línea que toca a l . Por lo tanto, una alternativa para contar todos los puntos que no están en l es contar todos los puntos que están en las líneas que tocan a l . Existen $(s + 1)t$ de estas líneas (usando el Teorema 1) y cada línea tiene s puntos que no están en l .

Entonces,

$$|P| - (s + 1) = st(s + 1)$$

$$|P| = st(s + 1) + (s + 1)$$

$$|P| = (s + 1)(st + 1).$$

De manera análoga obtenemos que $|L| = (t + 1)(st + 1)$. \square

En este trabajo estudiaremos cuadrángulos generalizados en los que $s = t$, es decir, el número de puntos en una línea es igual al número de líneas por cada punto. Entonces si l es una línea y $|l|$ es el número de puntos en ella, tenemos que $|l| = s + 1 = t + 1$ y el orden del cuadrángulo generalizado será denotado por n y $n = s = t$. Como en los planos proyectivos, llamaremos al número $n = |l| - 1$ al orden del cuadrángulo generalizado con parámetros $s = t$, denotaremos a este cuadrángulo generalizado de orden n por $CG(n)$.

Notemos que el número de puntos de $CG(n)$ es $|P| = (n+1)(n^2+1) = n^3 + n^2 + n + 1$.

A continuación daremos un ejemplo de un cuadrángulo generalizado en el que $s = t = 2$ y por lo tanto $|P| = |L| = 15$.

En $CG(2)$ cada línea tiene 3 puntos y por cada punto pasan 3 líneas y utilizando el resultado del Lema 5 sabemos que $|P| = 15$ y $|L| = 15$.

Ahora construiremos $CG(2)$ a partir de la gráfica completa K_6 de la siguiente manera.

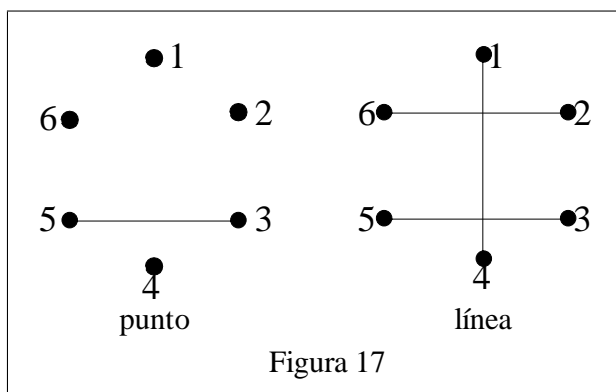
El conjunto de puntos de $CG(2)$ será el conjunto de aristas de K_6 , que son

$$\begin{aligned} P(CG(2)) = A(K_6) = \{ & (12), (13), (14), (15), (16), \\ & (23), (24), (25), (26), (34), \\ & (35), (36), (45), (46), (56) \}. \end{aligned}$$

Y el conjunto de líneas de $CG(2)$ será el conjunto de 1-factores de K_6 , es decir,

$$\begin{aligned} L(CG(2)) = \{ & \{12, 36, 45\}, \{12, 34, 56\}, \{12, 35, 46\}, \\ & \{13, 25, 46\}, \{13, 24, 56\}, \{13, 26, 45\}, \\ & \{14, 23, 56\}, \{14, 25, 36\}, \{14, 26, 35\}, \\ & \{15, 23, 46\}, \{15, 24, 36\}, \{15, 26, 34\}, \\ & \{16, 23, 45\}, \{16, 24, 35\}, \{16, 25, 34\} \}. \end{aligned}$$

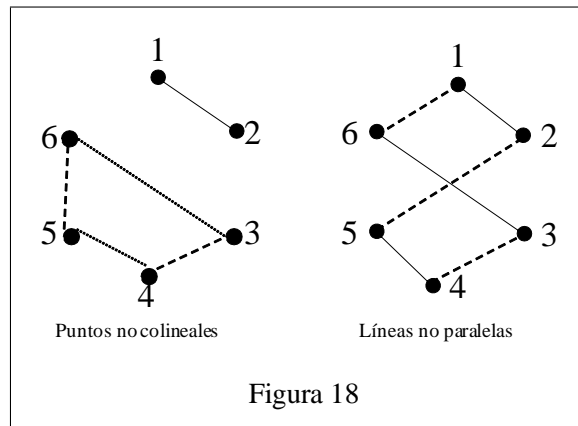
Por ejemplo, en la figura 17 tenemos el punto (35) y la línea $\{14, 26, 35\}$ en $CG(2)$ a partir de la K_6 .



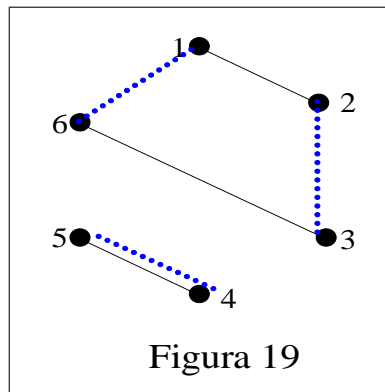
Ahora bien, para demostrar que este es un ejemplo de cuadrángulo generalizado es necesario probar los axiomas $CG1$ y $CG2$. Es fácil ver que se cumple el $CG2$ ya que hay puntos no colineales que corresponden a aristas de K_6 incidentes en un punto (ya que aristas incidentes en un punto pertenecen a 1-factores distintos). Por ejemplo, en la primera gráfica de la figura 18, el punto 12 y el punto 13 no son colineales porque no están contenidos ambos en 1-factor.

Y hay líneas no paralelas (1-factores que no tienen aristas en común). Como se muestra en la segunda gráfica de la figura 18, con la línea (12,36,45) y la línea (16,25,34).

Para probar $CG1$ mostraremos que dada una línea F de $CG(2)$ (un 1-factor) y un punto e fuera de esta (una arista e en K_6 que no pertenece a F) existe una única línea F' (un único 1-factor) por e que interseca a F en un sólo punto (en una sola arista). Claramente existe un único 1-factor F' que contiene a e y a una arista de F y esta es la línea buscada.



Por ejemplo, sea $F = \{(12), (36), (45)\}$ y sea $e = (16)$; entonces tenemos que $F' = \{(16), (23), (45)\}$. (ver figura 19)



Por lo tanto la gráfica completa K_6 construida como se describió anteriormente es un $CG(2)$.

Definición : Un *hexágono generalizado* $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es un espacio parcialmente lineal que satisface los siguientes axiomas:

HG1 Existen puntos no concurrentes y líneas no paralelas.

HG2 No contiene k-gonos para $2 \leq k < 6$.

HG3 Cualesquiera dos elementos de $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ están contenidos en algún hexágono.

Ahora bien, para concluir los conceptos en geometrías finitas vamos a dar la definición de *polígono generalizado*.

Definición : Sea $n \geq 1$ un número natural. Un n -gono generalizado PG es una estructura de incidencia $\mathbf{\Gamma} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ con $\mathcal{P} \neq \emptyset$ y $\mathcal{L} \neq \emptyset$ tal que cumple los siguientes axiomas:

PG1 Existen puntos no concurrentes y líneas no paralelas.

PG2 PG no contiene s -gonos para $2 \leq s < n$.

PG3 Cualesquiera dos elementos de $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ están contenidos en algún n -gono en PG .

Al no especificar el valor de n , estamos hablando de polígonos generalizados. De otra manera, nos referiremos a los 3-gonos como los triángulos generalizados, también conocidos como planos proyectivos; a los 4-gonos como los cuadrángulos generalizados y a los 6-gonos como los hexágonos generalizados.

Ahora vamos a dar algunos resultados para polígonos generalizados que utilizaremos más adelante.

1. El dual de un n -gono generalizado $\mathbf{\Gamma}$ es también un n -gono generalizado $\mathbf{\Gamma}'$.

2. Todo n -gono generalizado $\mathbf{\Gamma}$ cumple que por cada punto pasan $s + 1$ líneas y cada línea tiene $t + 1$ puntos.

3. Los enteros s y t también son llamados los parámetros de los n -gonos generalizados. Cuando s es igual a t , Γ es de orden s .

Al igual que en los cuadrángulos generalizados, nosotros estamos interesados en el estudio específico de los n -gonos generalizados simétricos (en los que $s = t$). A continuación damos un par de ejemplos y damos algunos valores de n y s en los cuales éstos existen:

i) Para $s = t = 1$ y cualquier n se tienen polígonos con n vértices los cuales son ejemplos de n -gonos.

ii) Para s potencia de primo y $n = \{3, 4, 6\}$.

Los polígonos generalizados han sido estudiados ampliamente (ver [1,2,3,4]), sin embargo por el tema que abordamos en esta tesis no es apropiado adentrarse al estudio detallado de los mismos, es suficiente con decir que existen cuando $n = \{3, 4, 6, 12\}$ y los simétricos existen cuando $n = \{3, 4, 6\}$. Además se construyen a partir de cónicas en diferentes espacios proyectivos de orden igual al orden del polígono.

Una de las propiedades fundamentales de estos polígonos, que usaremos a lo largo de esta tesis, es que el número de puntos y líneas de los polígonos simétricos coincide y es:

$$\sum_{i=0}^{n-1} s^i.$$

Observemos que esta afirmación confirma los resultados que teníamos:

i) Para los planos proyectivos de orden n los cuales tienen $n^2 + n + 1$ puntos y $n^2 + n + 1$ líneas.

ii) Para los cuadrángulos generalizados de orden n los cuales tienen $n^3 + n^2 + n + 1$ puntos y $n^3 + n^2 + n + 1$ líneas.

Y finalmente notemos que los hexágonos generalizados de orden n tienen $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ puntos y el mismo número de líneas.

CAPÍTULO 3

Gráficas de Incidencia de las Geometrías Finitas

En este capítulo vamos a definir las gráficas de incidencia para las geometrías finitas vistas en el capítulo anterior. Estaremos dando teoremas y ejemplos, concluiremos con una tabla en la cual resumimos los parámetros de las gráficas de incidencia con las geometrías finitas.

Definición : La gráfica de incidencia de un espacio parcialmente lineal $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es una gráfica simple y bipartita denotada por $\mathcal{Y}_s = (V(\mathcal{Y}_s), A(\mathcal{Y}_s))$ en la cual $V(\mathcal{Y}_s) = \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ y $A(\mathcal{Y}_s) = \{pl | p \in l\}$. Es decir, dos vértices $p, l \in V(\mathcal{Y}_s)$ son adyacentes si el punto p está contenido en la recta l (ó l contiene a p).

Teorema 1 : Sea $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ un espacio parcialmente lineal y \mathcal{Y}_s su gráfica de incidencia. Entonces, el cuello de \mathcal{Y}_s es mayor o igual que 6, es decir, $g(\mathcal{Y}_s) \geq 6$.

Demostración. Como \mathcal{Y}_s es bipartita los ciclos de \mathcal{Y}_s son de longitud par, pero además \mathcal{Y}_s es una gráfica simple, por lo que el cuello debe ser mayor a dos.

Demostraremos que $g(\mathcal{Y}_s) > 4$.

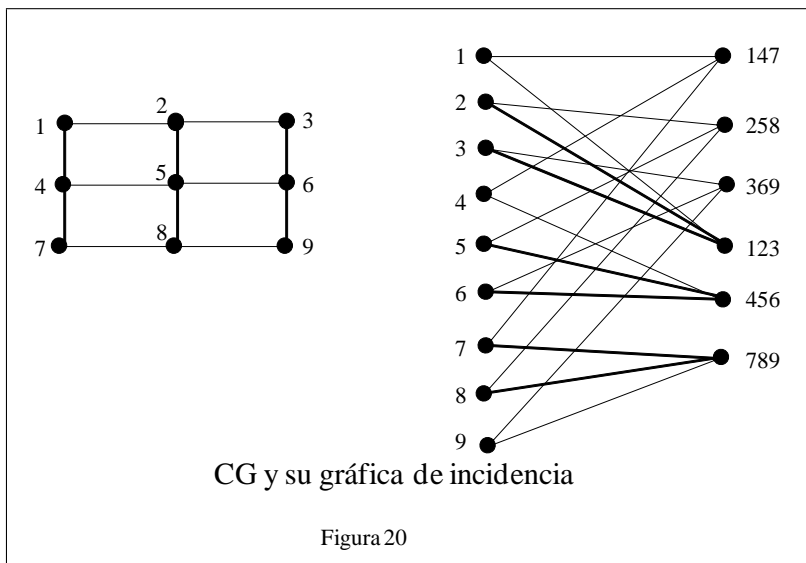
Supongamos que $g(\mathcal{Y}_s) = 4$, es decir, existe $C = \{p_i l_s p_j l_t\}$. Esto implica que $p_i, p_j \in l_s$ y que $p_i, p_j \in l_t$, para $l_s \neq l_t$ lo cual no es posible

ya que $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es un espacio parcialmente lineal y por el axioma PL 2 tenemos que dos puntos determinan a lo más una línea.

Entonces $g(\mathcal{Y}_s) \geq 6$. \square

A continuación vamos a ejemplificar el teorema anterior con la gráfica de incidencia de un cuadrángulo generalizado débil.

Sea $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ una malla. Donde los puntos son $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y sean las líneas $\mathcal{L} = \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}$. No es difícil ver que su gráfica de incidencia está representada a la derecha de la figura 20.



De esta manera vemos como $g(\mathcal{Y}_s) = 8$, por ejemplo, tomemos el ciclo $(1, 123, 3, 369, 6, 456, 4, 147, 1)$.

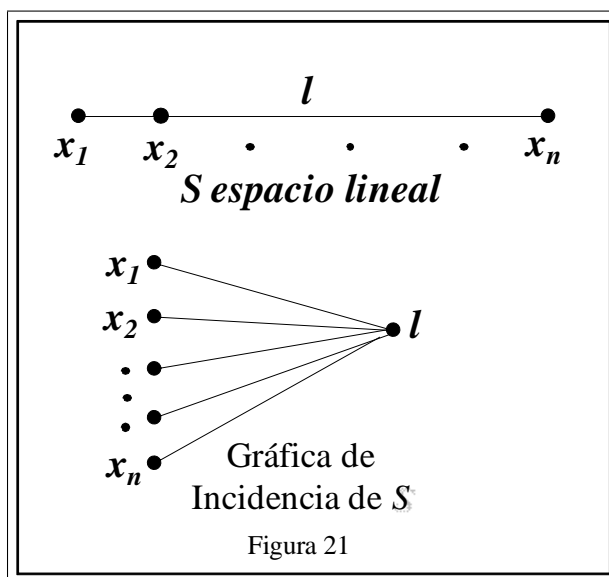
Teorema 2 : Sea $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ un espacio lineal y \mathcal{Y}_s su gráfica de incidencia, entonces, el cuello de \mathcal{Y}_s es 6 ó infinito, es decir, $g(\mathcal{Y}_s) = 6$ ó $g(\mathcal{Y}_s) = \infty$.

Demostración.

Caso 1) Sea $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ y $|\mathcal{L}| = 1$ sea $\mathcal{P} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

y $l = \{x_1 x_2 \dots x_n\}$

entonces $g(\mathcal{Y}_s) = \infty$. (ver figura 21)



Caso 2) Sea $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ con $|\mathcal{L}| \geq 2$.

Sean $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$ dividiremos este caso en dos, cuando $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ y cuando

$$l_1 \cap l_2 = \emptyset$$

i) Sean $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$ y $p = l_1 \cap l_2$.

Sean $q_1 \in l_1$ y $q_2 \in l_2$ tales que $p \neq q_1$ y $p \neq q_2$. Definamos $l = q_1 q_2$.

Y notemos que $l \neq l_1$ y $l \neq l_2$.

Consideremos $C = (p, l_1, q_1, l, q_2, l_2, p)$, como C es un ciclo de longitud

6, entonces C realiza el cuello y por lo tanto $g(\mathcal{Y}_s) = 6$. (ver figura 22)

ii) Sean $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$ y $l_1 \cap l_2 = \emptyset$.

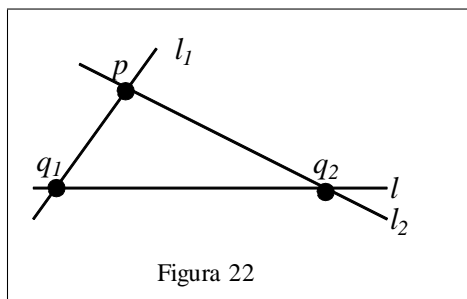


Figura 22

Sean $q_1 \in l_1$ y $q_2 \in l_2$.

Por definición de espacio lineal, existe un punto $p \in l_1$ y además existe l^* tal que $pq_2 = l^*$ y existe l tal que $q_1q_2 = l$.

Sea $C = (pl^*q_2lq_1l_1p)$ un ciclo, C es un cuello de $\mathcal{Y}s$ y $g(\mathcal{Y}s) = 6$. (ver figura 23)

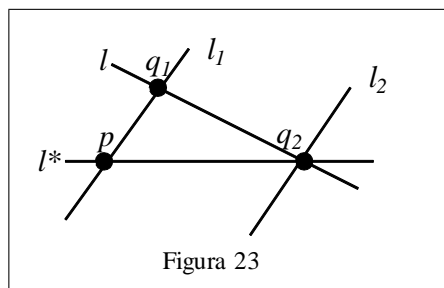


Figura 23

Por lo tanto, $g(\mathcal{Y}s) = 6$. \square

Ahora vamos a enunciar una proposición para los l -gonos generalizados en la que conoceremos de manera general sus parámetros.

Proposición : Dado un l -gono generalizado de orden n , su gráfica de incidencia tiene los siguientes parámetros:

- i) Es bipartita.
- ii) Grado $n + 1$.

iii) Orden $2 \sum_{i=0}^{l-1} n^i$.

iv) Cuello es $2l$.

v) Diámetro es l .

Demostración:

i) El primer parámetro se sigue directamente de la definición de la gráfica de incidencia.

ii) Para demostrar el segundo parámetro recordemos que el orden de un l -gono generalizado está dado por

$$|n| = |l| - 1 \implies |l| = |n| + 1.$$

Con lo que queda demostrado, ya que estamos hablando de l -gonos generalizados simétricos.

iii) El tercer parámetro lo conseguimos a partir de una de las propiedades de los polígonos generalizados mencionada en el capítulo anterior, la cual dice que el número de puntos y líneas de los polígonos simétricos coincide y es

$$\sum_{i=0}^{l-1} s^i$$

y del hecho de que $n = |P| + |L|$ así obtenemos que

$$n = \sum_{i=0}^{l-1} n^i + \sum_{i=0}^{l-1} n^i = 2\left(\sum_{i=0}^{l-1} n^i\right).$$

iv) Por definición de gráfica de incidencia, de un lado tenemos los puntos P del l -gono y del otro las líneas \mathcal{L} y por el axioma PG2 de polígonos generalizados cualesquiera dos elementos de $P \cup L$ están contenidos en un l -gono que en la gráfica de incidencia corresponde a un ciclo de tamaño $2l$. Por otro lado por el axioma PG1, sea PG un polígono generalizado, PG no

contiene s -gonos para $2 \leq s < l$ y por lo tanto la gráfica de incidencia no contiene ciclos de tamaño menor que $2l$, por lo tanto el cuello es $2l$.

v) Por el axioma PG2 tenemos que cualquier par de vértices en la gráfica de incidencia están contenidos en un $2l$ ciclo, entonces la distancia entre dos vértices de la gráfica de incidencia es a lo más l , por lo que el diámetro es l .

Finalmente, a manera de resumen en este capítulo mostraremos una tabla con los parámetros de las gráficas de incidencia de las geometrías finitas vistas.

PARÁMETROS DE LAS GRÁFICAS DE INCIDENCIA

Nombre del polígono	Grado	Orden	Cuello	Diámetro
Plano proyectivo	$n + 1$	$2(n^2 + n + 1)$	6	3
Cuadrángulo Generalizado	$n + 1$	$2(n^3 + n^2 + n + 1)$	8	4
Hexágono Generalizado	$n + 1$	$2(n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$	12	6

CAPÍTULO 4

Jaulas

El objetivo de este capítulo es introducir el concepto de jaulas y demostrar el teorema de cotas inferiores. Definiremos a las jaulas minimales y expon-dremos algunas familias conocidas de éstas para describir cómo están rela-cionadas con las gráficas de incidencia de las geometrías finitas. Por último estaremos dando otros ejemplos de jaulas que no son minimales.

Dados dos enteros k y g con $k \geq 2$ y $g \geq 3$, una $(k; g)$ -gráfica es una gráfi-ca k -regular con cuello g . Una $(k; g)$ -jaula es una $(k; g)$ -gráfica con el menor número posible de vértices. Como ejemplos de gráficas $(3; 4)$ -regulares ten-emos a $k_{3,3}$ y al cubo (ver figura 24), más adelante veremos que $k_{3,3}$ es jaula y obviamente el cubo no. Ahora bien, denotemos por $f(k; g)$ el entero más pequeño tal que existe una $(k; g)$ -gráfica con $f(k; g)$ vértices. En nuestro ejemplo de la gráfica bipartita $k_{3,3}$ y del cubo, tenemos que $f(3; 4) = 6$.

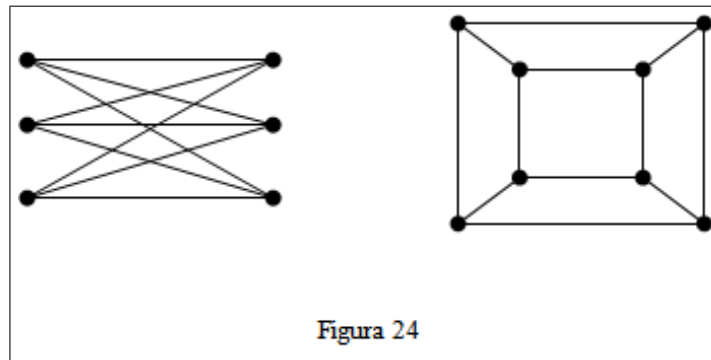


Figura 24

Cotas inferiores para las $(k; g)$ -jaulas.

Denotaremos por $f_0(k; g)$ la cota inferior de una $(k; g)$ -jaula. Tenemos así el siguiente teorema.

Teorema : Sea G una $(k; g)$ -gráfica con $k, g \geq 3$.

Dados $k, g \geq 3$ se tiene que $f_0(k; g) \leq f(k; g)$, donde

$$f_0(k; g) = \begin{cases} \frac{k(k-1)^{\frac{g-1}{2}} - 2}{k-2} & \text{si } g = 2n + 1; \\ \frac{2(k-1)^{\frac{g}{2}} - 2}{k-2} & \text{si } g = 2n. \end{cases}$$

Demostración. Sea G una $(k; g)$ -gráfica con $k, g \geq 3$.

Caso 1) $g = 2n + 1$.

Sea $x \in V(G)$. Introduciremos los vértices de G en función de su distancia a x y denotaremos por

$$N_i(x) = \{y \in V(G) | d(x, y) = i\}.$$

Notemos que como el cuello es $g = 2n + 1$ tenemos las siguientes condiciones:

a) No existen aristas yz entre dos vértices $y \in N_i(x)$, $z \in N_j(x)$ para $i \leq j \leq n$ (cuando $j = n$ entonces $i < j$) porque en este caso se formaría un ciclo de tamaño menor o igual que $2i + 1 < 2n + 1$ lo cual no es posible.

b) No existen dos vértices $y, z \in N_i(x)$ tal que $N(y) \cap N(z) \cap N_{i+1}(x) \neq \emptyset$ con $i \leq n - 1$ ya que en este caso se generaría un ciclo de tamaño menor o igual que $2i + 2 \leq 2(n - 1) + 2 = 2n < 2n + 1$.

Además cuando $i = 0$, $N_0(x) = \{x\}$, $|N_0(x)| = 1$ y cuando tenemos que $i = 1$, $|N_1(x)| = k$.

Por lo anterior podemos afirmar que para todo $z \in N_i(x)$ con $2 < i < n$,

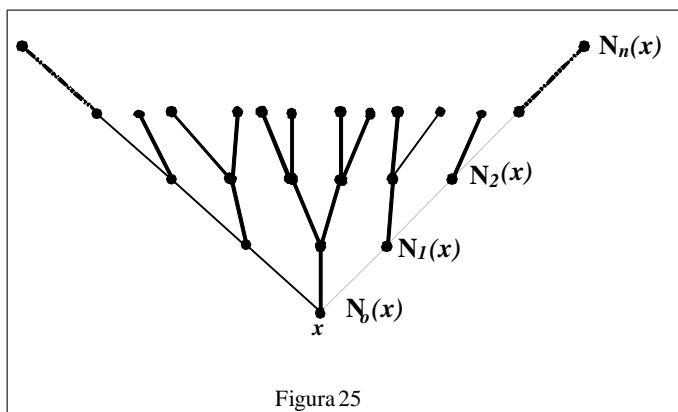
$|N(z) \cap N_{i+1}(x)| = k - 1$, entonces

$$|N_i(x)| = k(k-1)^{i-1}.$$

De esta manera el mínimo número de vértices necesario para construir una $(k; g)$ -jaula de cuello $g = 2n + 1$ es

Es decir, la cota inferior de una $(k; g)$ -jaula de cuello $g = 2n + 1$ es

$$\begin{aligned} f_0(k; g) &= 1 + k + k(k-1) + \dots + k(k-1)^{n-1} \\ &= 1 + k \sum_{i=0}^{n-1} (k-1)^i = \frac{k(k-1)^n - 1}{k-2}. \text{ [ver figura 25]} \end{aligned}$$



Caso 2) $g = 2n$.

Sea $e = \{xy\}$, $e \in A(G)$. Haremos la construcción de los vértices de G en función de su distancia a e , es decir denotaremos por

$$N_i(e) = \{z \in V(G) | d(e, z) = i\}$$

donde

$$d(e, z) = \min\{d(x, z), d(y, z)\}.$$

En otras palabras, $N_i(e) = \{z \in V(G) | d(z, x) = i \text{ y } d(z, y) = i + 1 \text{ ó } d(z, x) = i + 1 \text{ y } d(z, y) = i\}$.

Notemos que como el cuello es $g = 2n$ tenemos las siguientes condiciones:

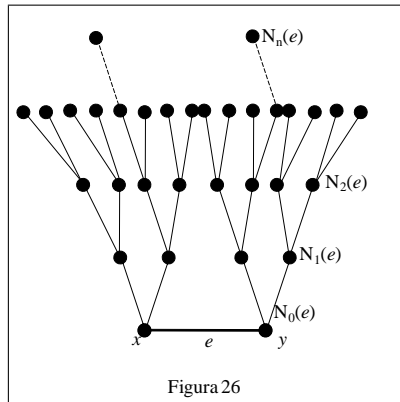
a) No existen aristas yz entre dos vértices $y \in N_i(e)$, $z \in N_j(e)$ para $i \leq j \leq n - 1$ (también en este caso si $j = n - 1$ entonces $i < j$) porque entonces se formaría un ciclo de menor tamaño que $2i + 2 < 2(n - 1) + 2 = 2n$.

b) No existen dos vértices $w, z \in N_i(e)$ tal que $N(w) \cap N(z) \cap N_{i+1}(e) \neq \emptyset$ con $i \leq n - 1$ ya que en este caso se generaría un ciclo de tamaño menor o igual que $2i + 1 \leq 2(n - 1) + 1 = 2n - 1 < 2n$.

Observemos que para todo $0 \leq i \leq n - 1$ se cumple que $|N_i(e)| = 2(k - 1)^i$.

De esta manera el mínimo número de vértices necesario para construir una $(k; g)$ -jaula de cuello $g = 2n$, es decir, la cota inferior de una $(k; g)$ -jaula de cuello $g = 2n$ es

$$f_0(k; g) = 2(k - 1)^0 + 2(k - 1)^1 + 2(k - 1)^2 + \dots + 2(k - 1)^{n-1} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} (k - 1)^i = \frac{2(k-1)^n - 2}{k-2}. \square \text{ [ver figura 26]}$$



Definición : Una $(k; g)$ -jaula de orden mínimo es una $(k; g)$ -jaula de orden $f_0(k; g)$ mínimo.

A continuación mostraremos las cotas inferiores para las jaulas.

Tabla de Cotas Inferiores

k/g	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	10	14	22	30	46	62	94	126	190	254	382
4	17	26	53	80	161	242	485	728	1457	2186	4373
5	26	42	106	170	426	682	1706	2730	6826	10922	27306
6	37	62	187	312	937	1562	4687	7812	23437	39062	117187
7	50	86	302	518	1814	3110	10886	18662	65318	111974	391910
8	65	114	457	800	3201	5602	22409	39216	156865	274514	1098057
9	82	146	658	1170	5266	9362	42130	74898	337042	599186	2696338
10	101	182	911	1640	8201	14762	73811	132860	664301	1195742	5978711
11	122	222	1222	2222	12222	22222	122222	222222	1222222	2222222	12222222
12	145	266	1597	2928	17569	32210	193261	354312	2125873	3897434	23384605
13	170	314	2042	3770	24506	45242	294074	542906	3528890	6514874	42346682
14	197	366	2563	4760	33321	61882	433175	804468	5631277	10458086	73206603
15	226	422	3166	5910	44326	82742	620566	1158390	8687926	16217462	121630966

Familias de jaulas minimales:

1. Las $(2; g)$ -jaulas son los ciclos de longitud g , así que $f(2; g) = g$.
2. La única $(k; 3)$ -jaula es la gráfica completa K_{k+1} , entonces $f(k; 3) = k + 1$.

3. $f(k; 4) = 2k$ y la única $(k; 4)$ -jaula es la gráfica bipartita $K_{k,k}$ como se ve en la siguiente proposición:

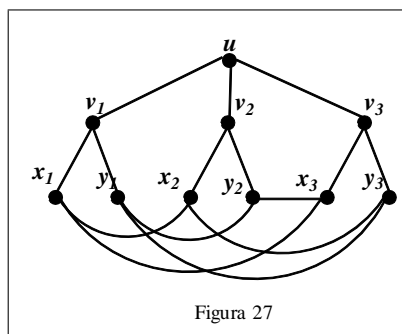
Proposición : Para $k \geq 2$ tenemos que $f(k; 4) = 2k$ y la única $(k; 4)$ -jaula es $K_{k,k}$.

Demostración. Supongamos que G es una $(k; 4)$ -jaula. Sea $u_1 \in V(G)$ y denotemos por v_1, v_2, \dots, v_k el conjunto de vértices de G que son adyacentes a u_1 . Como $g \geq 4$ sabemos que G no tiene triángulos y por lo tanto el conjunto v_1, v_2, \dots, v_k es un conjunto independiente, en particular, v_1 no es adyacente a ninguno de los vértices v_i con $2 \leq i \leq k$. Entonces G contiene al menos $k - 1$ vértices adicionales, adyacentes a v_1 , a los que llamaremos u_2, u_3, \dots, u_k . Se sigue así que $f(k; 4) \geq 2k$ y como G no tiene triángulos, entonces u_1, u_2, \dots, u_k es un conjunto independiente. Por lo tanto la gráfica G contiene dos conjuntos independientes ajenos, cada uno de orden k , cada vértice tiene grado k y tiene orden al menos $2k$. Como $K_{k,k}$ es una $(k; 4)$ -gráfica de orden $2k$, G tiene orden a lo más $2k$ y el resultado se sigue.

4. **Proposición :** La *gráfica de Petersen* es la única $(3; 5)$ -jaula.

Demostración. Sea G una $(3; 5)$ -jaula, sea $u \in V(G)$ y sean v_1, v_2 y v_3 los tres vecinos de u . Como el cuello de G es 5, v_i no puede ser adyacente a v_j para $i, j = 1, 2, 3$. Para $i = 1, 2, 3$, sean x_i y y_i los vértices adyacentes a v_i (distintos a u). (ver figura 27). Notemos que todos estos vértices son distintos entre sí, ya que de otra forma G tendría un ciclo de longitud 4 y cada uno de ellos es adyacente a uno de los vértices v_i

Como la gráfica G es 3-regular, con 10 vértices y cuello 5, el vértice x_1 tiene que ser adyacente a uno de los vértices x_2 ó y_2 y a uno de los vértices x_3 ó y_3 . De otra manera G tendría un ciclo de longitud 3. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que x_1 es adyacente a x_2 y a x_3 . Forzando de esta manera a y_1 ser adyacente con y_2 y con y_3 , lo que implica que las aristas x_2y_3 y y_2x_3 están en G .



La gráfica G resultante es isomorfa a la gráfica de Petersen (ver figura 28), como lo mostramos mediante la siguiente función de isomorfismo:

$$f(u) = a, \quad f(v_1) = b,$$

$$f(v_2) = c, \quad f(v_3) = d,$$

$$f(x_1) = e, \quad f(x_2) = f,$$

$$f(x_3) = g, \quad f(y_1) = h,$$

$$f(y_2) = i, \quad f(y_3) = j.$$

Por lo tanto, la gráfica de Petersen es la única $(3; 5)$ -jaula, de orden 10. \square

A continuación enlistaremos una serie de resultados sobre jaulas de orden par que no serán demostrados. (Ver [7],[9])

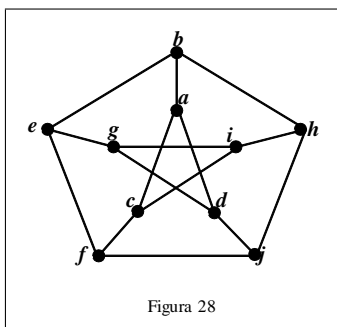


Figura 28

5. Si $k = q + 1$ para q potencia de un primo, entonces una $(k; 6)$ -jaula es la gráfica de incidencia de un plano proyectivo $PG(2, q)$ y $f(k; 6) = 2(q^2 + q + 1)$.

La $(3; 6)$ -jaula es también conocida como la gráfica de Heawood (ver figura 29) de orden 14, que es a su vez la gráfica de incidencia del Plano de Fano.

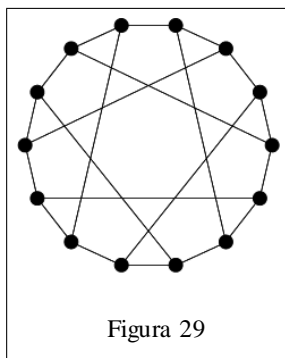
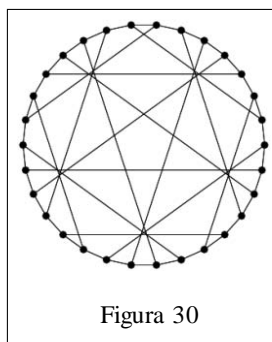


Figura 29

6. Si $k = q + 1$ para q potencia de primo, entonces una $(k; 8)$ -jaula es la gráfica de incidencia de un cuadrángulo generalizado $CG(q)$ y $f(k; 8) = 2(q^3 + q^2 + q + 1)$.

El ejemplo del cuadrángulo generalizado de orden 2 que exhibimos en el capítulo de Geometrías Finitas es una $(3; 8)$ -jaula conocida también como la Gráfica de Tutte-Coxeter, de orden 30. Esta gráfica puede dibujarse usando

un árbol que emerge de una arista, sin embargo el dibujo que se muestra en la Figura 30 es mucho más claro y elegante.



7. Si $k = q + 1$ para q potencia de primo, entonces una $(k; 12)$ -jaula es la gráfica de incidencia de un hexágono generalizado $HG(q)$ y $f(k; 12) = 2(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + 1)$. La $(3; 12)$ -jaula es también conocida como la gráfica Benson con 126 vértices y es la gráfica de incidencia de un hexágono generalizado de orden 2.

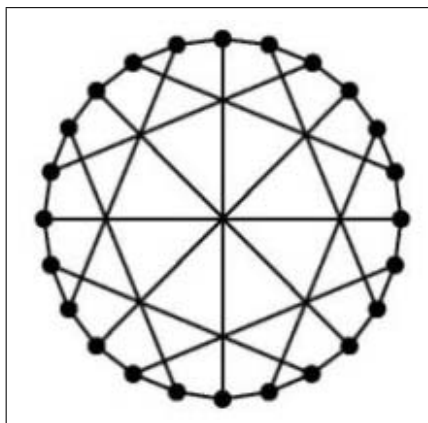
Otros ejemplos de jaulas.

A continuación daremos una tabla con algunas jaulas conocidas que no son minimales salvo la de Hoffman-Singleton. A pesar de que estas jaulas no son minimales se sabe que efectivamente son jaulas porque se ha probado en diversos artículos de investigación (Ver [7]) que no existen gráficas k -regulares de cuello g de orden menor que las que aparecen en la tabla para los valores correspondientes de k y de g .

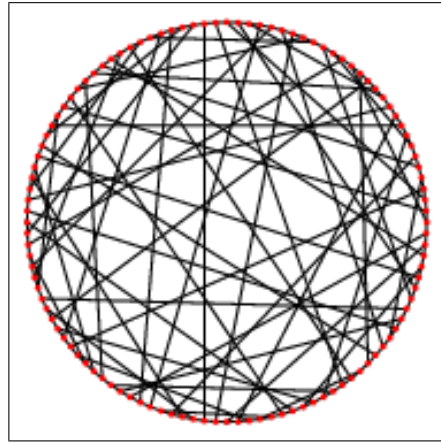
(k;g)	Núm de Jaulas	Nombre o Referencia	Orden	Tamaño
(3;7)	1	Gráfica Mc Gee.	24	36
(3;9)	18	Biggs y Hoare, Brinkmann, Mc Kay y Saager.	58	87
(3;10)	3	10-jaula de Balaban, Gráfica Harries, Gráfica Harries-Wong.	70	105
(3;11)	1	Gráfica Balaban.	112	168
(4;5)	1	Gráfica Robertson.	19	38
(4;7)	1	Exoo, Mc Kay y Myrvold.	67	134
(5;5)	4	Gráfica Wong, Jaula Foster, Gráfica Meringer, Gráfica Robertson-Wegner.	30	75
(7;5)	1	Gráfica Hoffman-Singleton.	50	175

Ahora presentamos algunas jaulas de la tabla anterior, que se pueden encontrar en la referencia (11)

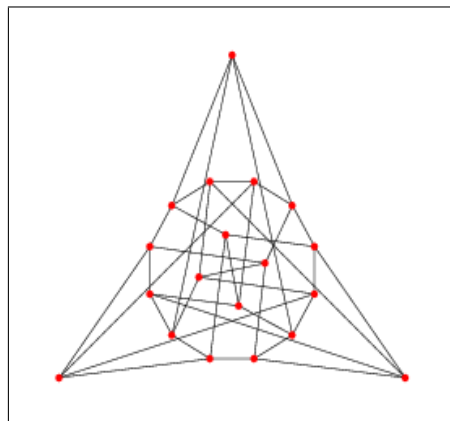
(3;7) Grafica McGee



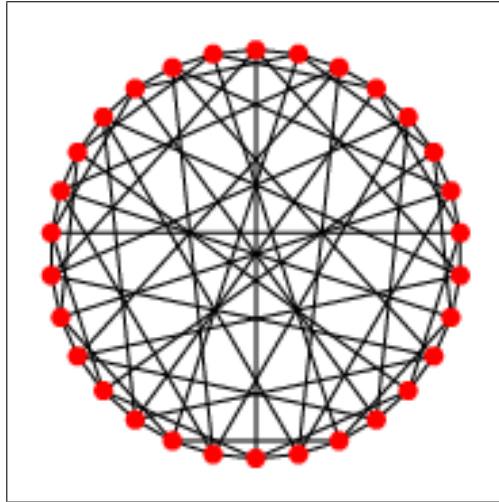
(3;11) Gráfica Balaban



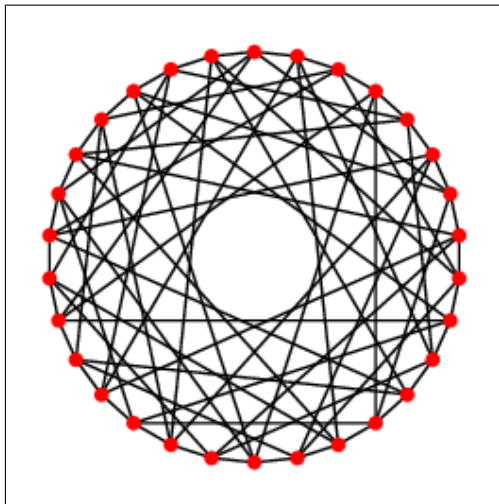
(4;5) Gráfica Robertson



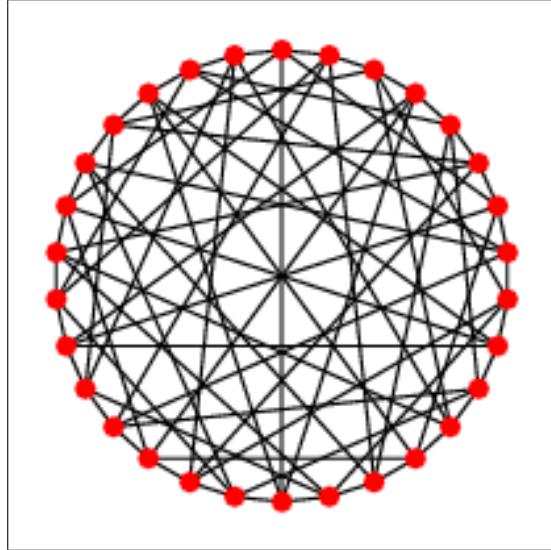
(5;5) Gráfica Wong



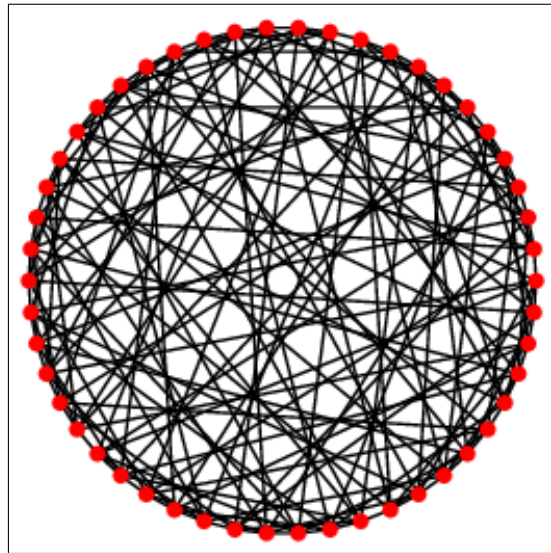
(5;5)-Jaula Foster



(5;5) Gráfica Robertson-Wegner



(7;5) Gráfica Hoffman-Singleton



Bibliografía

- [1] L.M. BATTEN, Combinatorics of finite geometries, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.
- [2] N. BIGGS, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, New York, 1996.
- [3] C. GODSIL AND G. ROYLE, Algebraic Graph Theory, Springer, NY 2000.
- [4] VAN MALDEGHEM H, Generalized Polygons, Birkhuser, Basel, 1998.
- [5] G. ARAUJO. On upper bounds of odd girth cages. 2007. Enviado a arbitraje.
- [6] G.ARAUJO, D. GONZALEZ, J. MONTELLANO-BALLESTEROS, O. SERRA On upper bounds and connectivity of cages, Australas. J. Combin. 38 (2007) 221-228.
- [7] G. EXOO, R. JAJCAY. Dynamic Cage Survey. 2008. Electronic Journal of Combinatorics 15 (2008), #DS16.
- [8] D. GONZÁLEZ MORENO. Conexidad en Jaulas. Tesis de Licenciatura. 2004.
- [9] G. LÓPEZ CHÁVEZ. Gráficas de Moore y Jaulas: Construcciones y Coloraciones. Tesis de Licenciatura. 2006.
- [10] <http://people.csse.uwa.edu.au/gordon/cages/allcages.html>
- [11] <http://mathworld.wolfram.com/CageGraph.html>