Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Gavillas y el teorema de Mittag Leffler

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:

MARÍA ANAID LINARES AVIÑA

DIRECTOR DE TESIS:

DR.ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA

2011

Datos del jurado

1. Datos del alumno
   Linares Aviña María Anaid
   56351359
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   097582997

2. Datos del tutor
   Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta

3. Datos del sinodal 1
   Dr. Pedro Luis del Ángel Rodríguez

4. Datos del sinodal 2
   Dr. Felipe de Jesús Zaldívar Cruz

5. Datos del sinodal 3
   Dra. Adriana Ortiz Rodríguez

6. Datos del sinodal 4
   Dr. Jawad Snoussi

7. Datos del trabajo escrito
   Gavillas y el teorema de Mittag Leffler
   43 p
   2011

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Javier Elizondo por su paciencia y apoyo en el largo viaje que fue la realización de esta tesis, a mis sinodales, en particular al Dr. Pedro Luis del Ángel por sus consejos y motivación. A los profesores que me acompañaron e inspiraron en esto que entiendo es el inicio de un acercamiento al estudio de las Matemáticas. A mis amigos que enriquecen y completan los conocimientos cotidianos: Mónica, Luis, Efraín, Sergio, Rodrigo, Genaro, Frank, Mónica, Eric, Alejandro, Gloria, Elizabeth, Mónica, Oriana, Jaime, Arturo, Mauricio etc. etc. etc. A mi familia, María, Ricardo, Iliana, Gabriel, en especial a Sofía para que le gusten las matemáticas.

Agradezco al programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Inovación Tecnológica (PAPIIT) y al CONACYT por las facilidades otorgadas para la realización de esta tesis.

Gavillas y el teorema de Mittag Leffler

Índice general

Introducción

Los estudios de J. Leray en topología algebraica, durante su cautiverio como prisionero de guerra en Austria, lo llevaron a la introducción de nuevas herramientas y fue en estos trabajos, publicados en el Colegio de Francia entre 1947 y 1950, donde utiliza el término gavilla, pero las raíces de este concepto son anteriores, tienen que ver con conjuntos conexos de "gérmenes" y están presentes en el concepto de K. Weierstrass de "configuración analítica" generada por la continuación analítica de un elemento-función holomorfa.

Las ideas de J. Leray inspiraron a A. Weil y a H. Cartan en sus trabajos sobre topología algebraica. El seminario de Cartan en la Escuela Normal Superior de París estuvo dedicado a la topología algebraica de 1948 a 1951, y la primera parte incluye una primera versión sobre la teoría de gavillas. Un poco después, en 1950 y 1951, dos artículos de K. Oka introducen una noción más cercana a la de gavilla en la teoría de funciones analíticas de varias variables complejas. Estos trabajos ilustran la teoría de gavillas de Cartan, lo que le permitió a éste reformular los resultados de K. Oka como un par de teoremas de cohomología de gavillas.

La finitud de la cohomología de un espacio analítico compacto con coeficientes en una gavilla coherente fue establecida por H. Cartan y J.-P. Serre en 1953. Posteriormente en 1954, Serre reestablece las bases de la geometría algebraica con ayuda de la cohomología de gavillas algebraicas coherentes.

Por otro lado, el artículo de 1895 de Cousin *Sur les fonctions de n variables complexes*[1] es considerado la generalización, a varias variables, de los teoremas de existencia de funciones meromorfas con polos y ceros dados de Mittag-Leffler. Usando la fórmula integral de Cauchy para dominios con producto, Cousin fue capaz de resolver el "proceso de pegado" el cual es el mayor obstáculo en varias variables y como consecuencia obtuvo las generalizaciones buscadas para estos dominios.

En este trabajo exponemos una aplicación de las gavillas en el análisis complejo especialmente de la noción de coherencia ya que éste permite una forma relativamente simple de tratar las propiedades locales de funciones holomorfas. En parte, por medio

[1]Acta Math. 19 (1895) 1-62

de la cohomología de gavillas, se provee de un procedimiento sistemático, muy útil para pasar de resultados locales a resultados globales, no sólo en la teoría de funciones de varias variables complejas donde juegan un papel importante, sino también en la geometría algebraica clásica.

Capítulo 1

Gavillas

La importancia de las gavillas radica en que gracias a este concepto se puede manejar gran cantidad de información a través de otros relativamente simples. A veces la información local que tenemos no nos dice nada del objeto en general, como lo ilustra el ejemplo de un cilindro y un toro. Localmente los objetos son iguales y podríamos pensar que son el mismo, sin embargo basta alejarnos un poco y veremos nuestro error. Las gavillas nos aseguran que basta conocer pequeños pedazos de cierta estructura algebraica, llamadas secciones, para poder visualizar globalmente dicho objeto; su riqueza está ahí, en el paso de lo local a lo global.

Antes de empezar a definir lo que es una gavilla vamos a mostrar varios problemas donde se ejemplifica cómo este paso puede visualizarse en el lenguaje de las gavillas.

1. Si X es un espacio compacto Hausdorff y f es una función compleja continua en X y que no se anula en ningún punto, entonces f localmente tiene un logaritmo continuo. ¿Podemos encontrar un logaritmo global? En otras palabras, hay una función continua g en X tal que $f = \exp(g)$

2. Si U es un conjunto abierto simplemente conexo en $\mathbb{C}$ y g es una función infinitamente diferenciable en U entonces la ecuación $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ tiene una solución local en una vecindad de cada punto. ¿Tiene una solución global en U?

3. Si U es un abierto simplemente conexo en $\mathbb{C}^n$ y $V \subset U$ es una subvariedad holomorfa entonces V está localmente definida como el conjunto de los ceros comunes de algún conjunto de funciones holomorfas. ¿Existe un conjunto de funciones holomorfas definidas en todo U de forma que V sea el conjunto de sus ceros comunes?

Generalmente estos problemas usan ciertas clases de funciones (holomorfas, continuas, diferenciables etc.) que tienen sentido en cualquier subconjunto abierto del dominio. La noción de gavilla simplemente abstrae esta idea.

1.0.1. Definición

Primero veremos la definición de pregavilla, la cual es más general. Dicho de otro modo, una gavilla es una pregavilla que cumple unas condiciones extras.

Definición 1 *Sea X un espacio topológico, diremos que $\mathscr{F}$ es una* **pregavilla de grupos abelianos** *en X si*

(a) *Para cualquier conjunto abierto $U \subseteq X$, $\mathscr{F}$ le asigna un grupo abeliano $\mathscr{F}(U)$*

(b) *A cualquier inclusión $V \subseteq U$ de conjuntos abiertos de X corresponde un morfismo de grupos abelianos $\rho_{UV} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$, que satisfacen:*

(0) *$\mathscr{F}(\emptyset) = 0$, donde $\emptyset$ es el conjunto vacío.*

(1) *ρ_{UU} es el mapeo identidad $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$.*

(2) *Si $W \subseteq V \subseteq U$ son tres subconjuntos abiertos, entonces $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$*

En el lenguaje de las categorías podríamos definirlo como sigue. Para cualquier espacio topológico definimos una categoría $\mathfrak{Top}(X)$ cuyos objetos son los conjuntos abiertos de X y los únicos morfismos son los mapeos inclusión. $Hom(V, U)$ es vacío si $V \not\subseteq U$. Entonces, una pregavilla es un funtor contravariante de la categoría $\mathfrak{Top}(X)$ a la categoría $\mathfrak{Ab}$ de grupos abelianos, [Ha].

Podemos decir que una gavilla es una pregavilla cuyas secciones están determinadas por los datos locales. Ahora definiremos más formalmente esto.

Definición 2 *Una pregavilla $\mathscr{F}$ en un espacio topológico X es una* **gavilla** *si satisface las siguientes condiciones suplementarias:*

(3) *Si U es un conjunto abierto, $\{V_i\}$ es una cubierta abierta de U y si $s \in \mathscr{F}(U)$ es un elemento tal que $\rho_{UV_i}(s) = 0$ para toda i, entonces $s = 0$.*

(4) *Si U es un conjunto abierto, $\{V_i\}$ es una cubierta abierta de U y tenemos elementos $s_i \in \mathscr{F}(V_i)$ para cada i con la propiedad de que para todas i, j $\rho_{UV_i \cap V_j}(s_i) = \rho_{UV_i \cap V_j}(s_j)$, entonces existe un elemento $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $\rho_{V_i}(s) = s_i$ para cada i.*

Aclaremos que si $\mathscr{F}$ es una pregavilla en X, llamamos a $\mathscr{F}(U)$, con U abierto en X, **el grupo de secciones** de la pregavilla $\mathscr{F}$ sobre U, al cual también se denota mediante $\Gamma(U, \mathscr{F})$. A los elementos de $\mathscr{F}(U) = \Gamma(U, \mathscr{F})$ se les llama secciones de U. Llamamos a los mapeos ρ_{UV} *restricciones* y a veces escribimos $s|_V$ en lugar de $\rho_{UV}(s) = s|_V$ si $s \in \mathscr{F}(U)$

Con esto en mente notemos que la condición (3) es equivalente a la siguiente: Sea U un abierto de X, $\{V_i\}$ una cubierta abierta de U, $s, s' \in \mathscr{F}$ dos secciones tales que $s|_{V_i} = s'|_{V_i}$ entonces $s = s'$

Similarmente podemos definir gavillas de cualquier tipo de estructuras algebraicas como anillos, módulos, grupos no abelianos etcétera, simplemente tomaremos los tallos, los cuales definiremos más adelante (Def. 3). Con la estructura dada, las restricciones son homeomorfismos locales y las operaciones algebraicas son continuas. Es por eso que nos limitaremos a gavillas de grupos abelianos.

Ejemplos

1. Sea X una variedad algebraica sobre un campo k. Para cada conjunto abierto $U \subseteq X$ sea $\mathscr{O}(U)$ el anillo de funciones regulares de U a k y para cada $V \subseteq U$ sea $\rho_{UV} : \mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}(V)$ el mapeo restricción, entonces $\mathscr{O}$ es una gavilla de anillos en X. Claramente es una pregavilla y para verificar las condiciones (3) y (4) notemos que una función que es cero localmente, es la constante cero y una función que es localmente regular es regular por definición. [1] Llamamos a $\mathscr{O}$ la *gavilla de funciones regulares* en X.

2. De la misma forma podemos definir la gavilla de funciones continuas con valores reales en cualquier espacio topológico, la gavilla de funciones diferenciables en una variedad diferenciable o la gavilla de funciones holomorfas en una variedad compleja.

3. Sea X un espacio topológico y A un grupo abeliano. Definimos la *gavilla constante* $\mathscr{A}$ en X determinada por A como sigue, tomamos en A la topología discreta y para cada abierto $U \subseteq X$, $\mathscr{A}(U)$ es el grupo de los mapeos continuos de U en A. Con los mapeos restricción usuales obtenemos la gavilla $\mathscr{A}$.

4. Definimos la gavilla cero en X ,(0), como aquella en la que para todo abierto U, $0(U)$ es el grupo trivial.

Ahora definiremos los tallos de una gavilla de los cuales se puede obtener mucha información sobre el comportamiento de ésta.

Definición 3 *Si $\mathscr{F}$ es una pregavilla en X y p es un punto de X, definimos el* **tallo** *$\mathscr{F}_p$ de $\mathscr{F}$ en p como el límite directo (Anexo 3.1) de los grupos $\mathscr{F}(U)$ para todos los conjuntos abiertos U que contienen a p vía los mapeos restricción ρ.*

Podemos representar un elemento de $\mathscr{F}_p$ como el par $\langle U, s\rangle$ donde U es una vecindad de p y s un elemento de $\mathscr{F}(U)$. Dos pares $\langle U, s\rangle$ y $\langle V, t\rangle$ definen el mismo elemento de $\mathscr{F}_p$ si y sólo si existe una vecindad de p, W con $W \subseteq U \cap V$, tal que $s|_W = t|_W$. Podemos

[1] Una función f es regular en un punto p si existe una vecindad que contiene a p, U y polinomios $g, h \in k[x_1, ..., x_n]$ tal que h no se anula en U y $f = g/h$ en U. Decimos que f es regular si es regular en cualquier punto del dominio.

ver a los elementos del tallo $\mathscr{F}_p$ como gérmenes de secciones de $\mathscr{F}$ en el punto p. En el caso de una variedad X y su gavilla de funciones regulares $\mathscr{O}$, el tallo $\mathscr{O}_p$ en el punto p es el anillo local de p en X.

Si tomamos la gavilla constante $\mathscr{A}$ sobre X tenemos que $\mathscr{A}_x = A$, de ahí el nombre de gavilla constante.

Proposición 1 *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ una gavilla en X. Entonces, para todo abierto U y elementos $s, s' \in \mathscr{F}(U)$ tenemos que $s = s'$ si y sólo si para toda $x \in U$ $s_x = s'_x$, es decir, dos secciones de la gavilla son iguales si y sólo si todos los tallos son iguales.*

Demostración Si $s = s'$, por definición de tallo (Def 3) es claro que $s_x = s'_x$. Supongamos ahora que $s, s' \in \mathscr{F}(U)$ son tales que para toda $x \in U$, $s_x = s'_x$. Para cada $x \in U$ podemos encontrar un abierto U_x que contenga a x tal que $s|_{U_x} = s'|_{U_x}$ y los U_x cubren X. Por la propiedad (3) de la definición de gavillas (Def 2), tenemos que $s = s'$

1.0.2. Morfismos de gavillas

Hemos definido las gavillas y ahora necesitamos definir las relaciones entre éstas.

Definición 4 *Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son pregavillas en X, un* **morfismo** *$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un homomorfismo de grupos abelianos $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ para cada abierto U tal que si $V \subseteq U$ con V abierto, entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"'] & \mathscr{G}(V)
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo ρ, ρ' los mapeos restricción en $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$

Definición 5 *$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un* **isomorfismo** *de pregavillas si y sólo si existe un morfismo $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ tal que $\varphi \circ \psi = Id_{\mathscr{G}}$ y $\psi \circ \varphi = Id_{\mathscr{F}}$ donde $Id_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ está definida como $Id_{\mathscr{F}}(U) = Id_{\mathscr{F}(U)}$ para cada abierto U en X*

Un morfismo $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de pregavillas en X induce un morfismo $\varphi_p : \mathscr{F}_p \to \mathscr{G}_p$ en los tallos para cualquier punto p en X. El siguiente teorema ilustra la naturaleza local de una gavilla.

Teorema 1 *Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de gavillas en un espacio topológico X. Entonces φ es un isomorfismo si y sólo si el mapeo inducido en los tallos $\varphi_p : \mathscr{F}_p \to \mathscr{G}_p$ es un isomorfismo para toda $p \in X$.*

Demostración Si φ es un isomorfismo, φ_p es un isomorfismo por la definición de tallo (Def 3). Recíprocamente asumamos que φ_p es un isomorfismo para toda $p \in X$. Para ver que φ es un isomorfismo es suficiente mostrar que $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ es un isomorfismo para toda U, ya que entonces podemos definir un morfismo inverso ψ como $\psi(U) = \varphi^{-1}(U)$ para cada U. Primero mostraremos que $\varphi(U)$ es inyectiva. Sea $s \in \mathscr{F}(U)$ y supongamos que $\varphi(s) \in \mathscr{G}(U)$ es 0. Entonces, para todo punto $p \in U$ la imagen $\varphi(s)_p$ de $\varphi(s)$ en el tallo $\mathscr{G}_p$ es cero. Como φ_p es inyectiva para cada p, deducimos que $s_p = 0$ en $\mathscr{F}_p$ para toda $p \in U$. Pero que $s_p = 0$ significa que s y 0 tienen la misma imagen en $\mathscr{F}_p$ por lo que existe una vecindad W_p de p con $W_p \subseteq U$ tal que $s|_{W_p} = 0$, y las vecindades W_p forman una cubierta de U y por la propiedad (3) s es cero en U y por lo tanto $\varphi(U)$ es inyectiva.

Para ver que $\varphi(U)$ es suprayectiva supongamos que tenemos una sección $t \in \mathscr{G}(U)$. Para cada $p \in U$ sea $t_p \in \mathscr{G}$ su germen en p. Como φ_p es suprayectiva podemos encontrar una $s_p \in \mathscr{F}_p$ tal que $\varphi_p(s_p) = t_p$. Sea s_p el representante de la sección $s(p)$ en una vecindad V_p de p. Entonces $\varphi(s(p))$ y $t|_{V_p}$ son dos elementos de $\mathscr{G}(V_p)$ cuyos gérmenes en p son iguales, por lo que reemplazando V_p por una vecindad más pequeña si es necesario, podemos asumir que $\varphi(s(p)) = t|_{V_p}$ en $\mathscr{G}(V_p)$. Entonces los abiertos V_p son una cubierta de U y en cada V_p tenemos una sección $s(P) \in \mathscr{F}(V_p)$. Si p, q son dos puntos, entonces $s(p)|_{v_p \cap V_q}$ y $s(q)|_{v_p \cap V_q}$ son dos seciones en $\mathscr{F}(v_p \cap V_q)$ tales que al aplicarles φ caen en $t|_{v_p \cap V_q}$, y así por la inyectividad de φ son iguales. Entonces por la propiedad (4) existe una sección $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{V_p} = s(p)$ para toda p. Ahora veamos que $\varphi(s) = t$. Como $\varphi(s), t$ son dos secciones de $\mathscr{G}(U)$ y para cada p tenemos que $\varphi(s)|_{V_p} = t|_{V_p}$ entonces por la propiedad (3) aplicada a $\varphi(s) - t$ concluimos que $\varphi(s) = t$.

Definición 6 *Dados $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ pregavillas en X y $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo. Sea U un abierto en X y*

$$K(U) = ker f(U) = \{s \in \mathscr{F}(U) | f(U)(s) = 0_{\mathscr{G}(U)}\}$$

$K(U)$ es un subgrupo de $\mathscr{F}(U)$. Si $V \subseteq U$ son abiertos en X y $s \in K(U)$ entonces

$$f(V)\rho_V^U(s) = \rho_V^U(f(U)(s)) = 0,$$

entonces $\rho_V^U(s) \in K(V)$.

$K(U)$ con la restricción $\rho_V^U|K(U)$ forma una pregavilla sobre X llamada ***el núcleo*** *de f y denotada como $Ker(f)$.*

Lo anterior genera un morfismo natural de pregavillas $Ker(f) \to \mathscr{F}$ tal que la composición $Ker(f) \to \mathscr{F} \underset{f}{\to} \mathscr{G}$ es cero.

Teorema 2 *Si $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de gavillas , entonces $Ker(f)$ cumple la siguiente propiedad universal: Si $\mathscr{H}$ es una pregavilla y $g : \mathscr{H} \to \mathscr{F}$ es un homomorfismo tal que $\mathscr{H} \xrightarrow{g} \mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G} = 0$, entonces existe $r : \mathscr{H} \to Ker(f)$ y es la única que hace que el siguiente diagrama conmute.*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H} \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, "g"] & & \\ Ker(f) \arrow[r, hook] & \mathscr{F} \arrow[r, "f"'] & \mathscr{G} \end{tikzcd}$$

Demostración Observemos que $Im(g) \subseteq ker(f)$ y el homomorfismo r nos define $r_p(s) = g_p(s) \in ker(f)_p$, entonces r es única porque cada g_p está fijo, es decir, $r_p(s)$ está únivocamente determinado.

Teorema 3 *Si $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un homomorfismo donde, $\mathscr{F}$ es una gavilla y $\mathscr{G}$ es una pregavilla, entonces $Ker(f)$ es una gavilla.*

Demostración Basta verificar la condición (4) de la definición de gavilla (Def 2), es decir si U es un conjunto abierto, $\{V_i\}$ es una cubierta abierta de U y tenemos elementos $s_i \in \mathscr{F}(V_i)$ para toda i con la propiedad de que para toda i, j $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, entonces existe un elemento $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para toda i, ya que las otras propiedades de la definición de gavilla se cumplen debido a que $Ker(f) \subseteq \mathscr{F}$.

Si $U = \cup_{i\in\Lambda} V_i$, tomemos $s_i \in Ker(f)(V_i)$. Por hipótesis se cumple que para cada i, j $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ existe $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que para toda i $\rho^U_{U_i}(s) = s_i$, ya que $\mathscr{F}$ es una gavilla, entonces $s' = f(U)(s) \in \mathscr{G}(U)$ cumple que para toda i, $\rho^U_{U_i}(s') = 0$ y por las propiedades de gavilla, $s' = 0$ por lo tanto $s \in Ker(f)(U)$.

Teorema 4 *Sea $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de pregavillas. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $Ker(f) = 0$

ii) *Para todo abierto $U \in X$, $f(U)$ es inyectiva*

iii) *f es un monomorfismo, es decir, si $\mathscr{H}$ es una pregavilla y para $g : \mathscr{H} \to \mathscr{F}$ y $h : \mathscr{H} \to \mathscr{F}$ se cumple que $f \circ g = f \circ h$ entonces $g = h$*

Éstas implican:

iv) *Para toda $x \in X, f_x$ es inyectiva*

Demostración

i) $\Rightarrow$ *ii)* Sean $x_i, x_j \in \mathscr{F}(U)$ y supongamos que $f(x_i) = f(x_j)$. Por lo tanto $f(x_i) - f(x_j) = f(x_i - x_j) = 0$ y así por hipótesis $x_i = x_j$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Sea $x \in Ker(f)$. Entonces $f(x) = 0 = f(0)$ y como f es inyectiva se sigue que $x = 0$.

$i) \Rightarrow iii)$ Dado que $Ker(f) = 0$ tenemos que $g - h : \mathscr{H} \to \mathscr{F}$ satisface $\mathscr{H} \xrightarrow{g-h} \mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G} = 0$ y por la propiedad universal del núcleo (Teo 2), $g - h$ se factoriza de manera única como $\mathscr{H} \xrightarrow{f-g} \mathscr{F} = \mathscr{H} \to 0 \to \mathscr{F}$ por lo tanto $g - h = 0$ es decir $g = h$

$iii) \Rightarrow i)$ Si f es un monomorfismo, podemos tomar $0 \to \mathscr{F}$ que tiene la propiedad universal del núcleo entonces si $\mathscr{H} \xrightarrow{g} \mathscr{F} \to \mathscr{G} = 0$ de donde $\mathscr{H} \xrightarrow{g} \mathscr{F} \to \mathscr{G} = \mathscr{H} \xrightarrow{0} \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ por lo tanto $g = 0$ por $iii)$ es decir g se factoriza únicamente como $\mathscr{H} \xrightarrow{g} \mathscr{F} = \mathscr{H} \to 0 \to \mathscr{F}$.

$ii) \Rightarrow iv)$ Supongamos que $t \in \mathscr{F}_x$ es tal que $f_x(t) = 0$ entonces existe un abierto U y $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que s tiene un germen t en x de forma que $f(U)(s)$ tiene germen 0 en x de donde existe un abierto $V \subseteq U$ tal que $0 = \rho_V^U(f(u)(s)) = f(V)(\rho_V^U(s))$. Pero $f(V)$ es inyectiva por hipótesis por lo que $\rho_V^U(s) = 0$ de aquí $t = 0$

$iv) \Rightarrow ii)$ Supongamos que $s \in \mathscr{F}(U)$ es tal que $f(U)(s) = 0 \in \mathscr{G}(U)$, entonces para toda $x \in U$ $s_x = 0$ ya que cada f_x es inyectiva por hipótesis, como $\mathscr{F}$ es gavilla se sigue que $s = 0$

Definición 7 *Si $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ son gavillas en X y $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un monomorfismo, decimos que $\mathscr{F}$ es una* **subgavilla** *de $\mathscr{G}$*

Teorema 5 *Si $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de gavillas, entonces $(kerf)_x = kerf_x$*

Demostración Sea $t \in (kerf)_x$ esto ocurre si y sólo si existe un abierto U que contiene a x y $s \in ker(f)(U)$ tal que $t = s_x$, pero esto pasa si y sólo si existe un abierto U que contiene a x y $s \in \mathscr{F}$ tal que $t = s_x$ y $f(U)(s) = 0$ y esto lo tenemos si y sólo si $f_x(t) = 0$

Definición 8 *Si $\mathscr{F}, \mathscr{F}'$ son subgavillas de $\mathscr{G}$, decimos que $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{F}'$ si y sólo si existe un monomorfismo $\mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ tal que el siguiente diagrama conmute*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{F}' \arrow[d] \\ & \mathscr{G} \end{tikzcd}$$

Teorema 6 *Sean $\mathscr{F}, \mathscr{F}'$ subgavillas de la gavilla $\mathscr{G}$, entonces $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{F}'$ si y sólo si para toda $x \in X$ $\mathscr{F}_x \subseteq \mathscr{F}'_x$*

Demostración
$\Rightarrow]$ Sea $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{F}'$ entonces por definición el diagrama $\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{F}' \arrow[d] \\ & \mathscr{G} \end{tikzcd}$ conmuta, pero esto

implica que para toda $x \in X$ el siguiente diagrama $\begin{tikzcd} \mathscr{F}_x \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{F}'_x \arrow[d] \\ & \mathscr{G}_x \end{tikzcd}$ también conmuta.

Por lo tanto $\mathscr{F}_x \subseteq \mathscr{F}'_x$.

$\Leftarrow$] Supongamos que para toda $x \in X$, $\mathscr{F}_x \subseteq \mathscr{F}'_x$. Sea $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, U abierto en X entonces existe una única sección de $\mathscr{F}'$ con gérmenes s_x en cada $x \in U$ entonces existe un morfismo que va de $\mathscr{F}$ a $\mathscr{F}'$ tal que los mapeos $\mathscr{F} \to \mathscr{F}' \to \mathscr{G}$ y $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ coinciden en todos los tallos y habíamos visto que si eso sucede entonces los morfismos son iguales por lo que $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{F}'$

Corolario 1 *Para dos subgavillas $\mathscr{F}, \mathscr{F}'$ de una gavilla $\mathscr{G}$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}' \Leftrightarrow$ para toda $x \in X$, $\mathscr{F}_x = \mathscr{F}'_x$.*

1.0.3. Conúcleos y epimorfismos

Definición 9 *Sean f un homomorfismo de $\mathscr{F}$ a $\mathscr{G}$ pregavillas, U un abierto en X y $\mathscr{C}(U) = \mathscr{G}(U)/f(U)[\mathscr{F}(U)] = \mathscr{G}(U)/Imf(U)$, (como $Imf(U)$ es un subgrupo abeliano de $\mathscr{G}(U)$ podemos tomar el grupo cociente).*
Si $V \subseteq U$ son dos abiertos en X, el mapeo $\rho^U_V : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{G}(V)/Imf(V)$ anula $Imf(U)$ si $s \in \mathscr{F}(U)$ entonces $\rho^U_V(f(U)(s)) = f(V)\rho^U_V \in Imf(V)$.
De aquí obtemenos un mapeo inducido $\bar{\rho}^U_V : \mathscr{C}(U) \to \mathscr{C}(V)$, por lo que $\mathscr{C}$ es una pregavilla llamada **conúcleo** *de f y la escribimos como $PCok(f)$. Tenemos un morfismo natural de pregavillas que va de $\mathscr{G}$ a $PCok(f)$ y la composición $\mathscr{F} \to \mathscr{G} \to PCok(f)$ es cero*

Proposición 2 *Si f es un morfismo tal que $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, entonces $PCok$ cumple la siguiente propiedad universal. Si $\mathscr{H}$ es una pregavilla y $g \in Hom(\mathscr{G}, \mathscr{H})$ es tal que $\mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G} \xrightarrow{g} \mathscr{H} = 0$ entonces existe $r : PCok(f) \to \mathscr{H}$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "f"] & \mathscr{G} \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & \mathscr{H} \\ & & PCok(f) \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd}$$

Donde $\mathscr{G} \to PCok(f)$ es el morfismo natural al que se refiere la definición anterior.

Observemos que $PCok(f) \subseteq Im(g)$ y el homomorfismo r nos define $r_p = (PCok(f))_p \in H_p$, entonces r es única porque cada $r_p(s) = g_p(s) \in PCok(f)_p$

Un detalle importante es que no siempre ocurre que el conúcleo de un morfismo de gavillas sea una gavilla es por eso que primero definiremos lo que es la gavilla asociada y luego regresaremos a la definición de gavilla conúcleo.

1.0.4. Gavilla asociada

A veces queremos trabajar con un objeto que no es propiamente una gavilla pero al que podemos asociarle una como en el caso de la gavilla imágen es entonces cuando usamos este procedimiento.

Definición 10 *Sea X un espacio topológico, un* **espacio de gavillas** *sobre X es un par (E, p) formado por un espacio topológico E y un mapeo continuo $p : E \to X$ tal que p es un homeomorfismo local, esto es: para toda $y \in E$ existe un abierto V que lo contiene y un abierto U, $p(y) \in U$ tal que $p|_V : V \to U$ es un homeomorfismo.*

Definición 11 *Un* **morfismo de espacios de gavillas** *$f : (E, p) \to (E', p')$ es un mapeo continuo $f : E \to E'$ tal que $p = p' \circ f$, es decir tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Construcción. Para cada espacio de gavillas E podemos construir la gavilla de conjuntos ΓE,(la gavilla de secciones de E) de forma que el morfismo $f : E \to E'$ induzca un morfismo $\Gamma f : \Gamma E \to \Gamma E'$ de gavillas. La construcción de ΓE es como sigue:

Sea U un abierto en X

$$\Gamma E(U) = \Gamma(U, E) = \{mapeos\ \ continuos\ \ \sigma : U \to E\ ; p \circ \sigma = Id_U\}$$

es decir funciones continuas $\sigma : U \to E$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Tomemos $V \subseteq U$ y la restricción $\rho^U_V : \Gamma(U, E) \to \Gamma(V, E)$. Es claro que forma una pregavilla (de conjuntos). Ahora veamos que si tomamos $\{V_i\}$ una cubierta abierta de U y $s, s' \in \Gamma(U, E)$ entonces si para toda i, $\rho^U_{V_i}(s) = \rho^U_{V_i}(s')$ tenemos que $s = s'$ ya que la restricción es simplemente la inclusión. Por esta misma razón dada una familia de $s_i \in \Gamma(V_i, E)$ para todas i, j $\rho^{V_i}_{V_i \cap V_j}(s_i) = \rho^{V_j}_{V_i \cap V_j}(s_j)$ existe $s \in \Gamma(U, E)$ tal que para toda i $\rho^U_{V_i}(s) = s_i$ por lo tanto ΓE es una gavilla.

Dado un morfismo $f : E \to E'$ de espacios de gavillas, obtenemos $\Gamma(U, E) \to \Gamma(U, E')$ simplemente tomando la composición $\sigma \to f \circ \sigma$, lo que genera un morfismo de gavillas $\Gamma f : \Gamma E \to \Gamma E'$ como lo muestra el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ U \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

Lema 1 *Sea (E, p) un espacio de gavillas sobre X, entonces*

(i) *p es un mapeo abierto.*

(ii) *Si U es un abierto en X y $\sigma \in \Gamma(U, E)$, entonces $\sigma[U]$ es abierto en E.*

(iii) *Si tenemos morfismos $\phi : E \to E', p' : E' \to X, p : E \to X$ con p, p' homeomorfismos locales, tales que $\phi \circ p' = p$ entonces ϕ es continuo si y sólo si es abierto, lo cual equivale a que sea a su vez un homeomorfismo local.*

Demostración

(i) Sea W un abierto un abierto en E y $x \in p[W]$, tomemos $e \in W$ tal que $p(e) = x$, por la definición de espacio de gavillas, e tiene una vecindad abierta $W' \subseteq W$ a la que p mapea en un abierto en X, es decir, x tiene una vecindad abierta $p[W'] \subseteq p[W]$.

(ii) Cualquier $e \in \sigma[U]$ tiene una vecindad abierta $W \subseteq E$ tal que la restricción de p en W es un homeomorfismo en un abierto $V \subseteq X$, entonces $p|W$ mapea $W \cap \sigma[U]$ de forma biyectiva a $U \cap V$ el cual es un abierto en X, entonces $W \cap \sigma[U]$ es una vecindad abierta de e dentro de $\sigma[U]$

(iii) Por definición y el inciso (i), que ϕ sea un homeomorfismo local implica que es continuo y abierto. Probaremos que si ϕ es continua entonces es un homeomorfismo local. Tomamos $y \in E$ y como p' es un homeomorfismo local, entonces existen abiertos N', V tal que $\phi(y) \in N' \xrightarrow{p'|N'} V$ es un homeomorfismo, como ϕ^{-1} es abierto en E, entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} y \in N \arrow[r, "\phi|N"] \arrow[dr, "p|N"'] & N'' \arrow[d, "p'|N''"] \\ & U \end{tikzcd}$$

con N, N'', U abiertos y $p|N, p'|N''$ homeomorfismos, entonces $\phi|N$ es un homeomorfismo y por lo tanto ϕ un homeomorfismo local.

Ahora supongamos que ϕ es abierto, probaremos que ϕ es un homeomorfismo local. Tomamos $y' \in M$ donde M es un abierto en E, como ϕ es abierto, tenemos un homomorfismo $p'|M'$, M' abierto en E', de la misma forma tenemos que $p'|M$ es un homomorfismo, entonces $\phi|M$ es un homeomorfismo y por lo tanto ϕ es un homeomorfismo local.

Proposición 3 *Si (E, p) es un espacio de gavillas entonces el tallo de ΓE en $x \in X$ es la fibra $p^{-1}(x)$ de p sobre x.*

Demostración

Para $x \in U$ abierto en X tenemos el mapeo

$$\Gamma E(U) = \Gamma(U, E) \to p^{-1}(x) : \sigma \to \sigma(x).$$

Ya que σ mapea $U \to E$, estos mapeos son compatibles con las restricciones, mostraremos que este blanco es un límite directo mediante el teorema 15 demostrado en el (Anexo 3.1) según el cual sólo hace falta verificar dos condiciones.

(i) Cada e en $p^{-1}(x)$ es imagen bajo uno de estos mapeos porque como p es un homeomorfismo local, e tiene una vecindad W en E tal que $p|W : W \to U$ es un homeomorfismo con U abierto in X, el inverso $s = (p|W)^{-1}$ de este mapeo es $\sigma \in \Gamma(U, E)$ y mapea e bajo $\Gamma E(U)$.

(ii) Si $s \in \Gamma(U, E)$ y $t \in \Gamma(V, E)$ coinciden en x entonces existe $W = s[U] \cap t[V]$ abierto en E y s, t coinciden en $p[W]$ que es un abierto, ya que ambos son inversos de $p|W$. Entonces $\rho^U_{p[W]}(s) = \rho^V_{p[W]}(t) \in \Gamma(p[W], E)$. Entonces $p^{-1}(x) \cong \varinjlim_{x \in U} \Gamma(U, E)$. por definición.

Construcción Para cada pregavilla $\mathscr{F}$ de X podemos construir un espacio de gavillas $L\mathscr{F}$ de forma que cualquier morfismo de pregavillas $f : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ genera un morfismo $Lf : L\mathscr{F} \to L\mathscr{F}'$ de espacios de gavillas.

Sea $L\mathscr{F} = \coprod_{x \in X} \mathscr{F}_x$, la unión disjunta de los tallos de $\mathscr{F}$ con $p : L\mathscr{F} \to X$ la proyección natural, de forma que $p(x)^{-1} = \mathscr{F}_x$. Asignamos una topología a $\mathscr{F}$ de la siguiente manera: sea U un abierto en X y $s \in \mathscr{F}(U)$ entonces podemos definir un mapeo

$$\hat{s} : U \to L\mathscr{F} : x \mapsto s_x \in \mathscr{F}_x.$$

Los conjuntos $\hat{s}[U] = \{s_x \in L\mathscr{F}\ ; x \in U\}$ variando $s \in \mathscr{F}$ forman una base para esta topología.

Si $e \in \hat{s}[U] \cap \hat{t}[V]$, donde $s \in \mathscr{F}(U), t \in \mathscr{F}(V)$, entonces s, t coinciden en el tallo en $p(e) = x$, de aquí coinciden en una vecindad W de x ($W \subseteq U \cap V$), por esto e tiene una vecindad básica $\hat{s}[W] = \hat{t}[W]$ en $\hat{s}[U] \cap \hat{t}[V]$.

p es continuo con respecto a esta topología en $L\mathscr{F}$, ya que para cualquier abierto U en X

$$p^{-1}(U) = \bigcup \{\hat{s}[V]; s \in \mathscr{F}(V)\ \ \textit{con } V \subseteq U\ \ \textit{abierto}\}$$

y p es un homeomorfismo local ya que en $\hat{s}[U]$ es el inverso de $\hat{s}$ continuo.

Un morfismo de gavillas $f : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ genera una colección de mapeos de tallos $f_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}'_x$ y un mapeo $Lf : L\mathscr{F} \to L\mathscr{F}'$ tal que $L\mathscr{F} \xrightarrow{p} X = L\mathscr{F} \to L\mathscr{F}' \xrightarrow{p'} X$, también $Lf[\hat{s}[U]] = \widehat{f(U)(s)}[U]$, de modo que Lf es continua ya que p, p' y Lf son homeomorfismos locales.

Entonces, dada una pregavillla $\mathscr{F}$ sobre X podemos construir el espacio de gavillas $L\mathscr{F}$ y obtener la gavilla $\Gamma L\mathscr{F}$ llamada *gavillificación* de $\mathscr{F}$. Lo que nos define un morfismo de pregavillas $n_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \Gamma L\mathscr{F}$ definido como sigue, dado un abierto U en X y $s \in \mathscr{F}(U)$, s define la función

$$\hat{s} : U \to L\mathscr{F} : x \mapsto s_x \in \mathscr{F}_x$$

Como ejemplos de gavilla asociada tenemos a las gavillas conúcleo e imagen.

Definición 12 *Si* $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ *son gavillas en* X *y* f *es un homomorfismo de* $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *entonces la* **gavilla conúcleo** *de* f*,* $SCok(f)$*, es la gavilla asociada,* $\Gamma LPCok(f)$ *de la pregavilla conúcleo. Entonces* $SCok(f)$ *es una gavilla y tenemos un morfismo natural* $\mathscr{G} \to SCok(f)$*, dado por* $\mathscr{G} \to PCok(f) \to SCok(f)$*, tal que la composición* $\mathscr{F} \to \mathscr{G} \to SCok(f)$ *es cero.*

Definición 13 *Si* $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *es un morfismo de gavillas, definimos la* pregavilla imagen *de* f *como* $PIm(f) = Ker(\mathscr{G} \to PCokf)$*. Entonces la* gavilla imagen $SIm(f)$ *es la gavilla asociada* $\Gamma LPIm(f)$ *de la pregavilla imagen.*

1.0.5. Espacio étalé asignado a una gavilla

También podemos ver a las gavillas como espacios topológicos, las dos definiciones son equivalentes.

Empezaremos definiendo lo que es un espacio separado.

Definición 14 *Un* **espacio separado de base X** *se denota como la pareja* (E, p) *donde* E *es un espacio topológico y* p *una aplicación continua de* E *sobre* X *que cumple la siguiente condición: Si tomamos un subconjunto* M *de* X*, llamamos* sección de (E, p) *sobre* M *a toda aplicación continua* $s : M \to E$ *tal que* $p(s(x)) = x$ *para todo* $x \in M$ *es decir, a cada abierto* U *de* X *le asociamos el conjunto* $\mathscr{F}(U)$ *de secciones de* (E, p) *sobre* U *y para* $V \subset U$ *definimos la restricción a* V *de una sección sobre* U *como la restricción a* V *de la aplicación* $U \to E$ *correspondiente.*

Definición 15 *Sea* (E, p) *un espacio separado de base* X*. Decimos que* (E, p) *es un* **espacio étalé sobre** X *si* p *es un homeomorfismo local.*

Entonces para toda sección s de (E, p) sobre un abierto $U \subset X$, el conjunto $s(U)$ es abierto sobre E, es más, para todo $u \in E$, existe una sección s de (E, p) definida sobre una vecindad de un punto $x = p(u)$, tal que $s(x) = u$, de donde concluimos que los abiertos de E no son otros que la unión de conjuntos de la forma $s(U)$.

De aquí que si dos secciones de (E, p) definidas en las vecindades U y V de un punto x en X son iguales en x entonces también son iguales en toda una vecindad $W \subset U \cap V$ de un punto x, es decir, el conjunto

$$E(x) = p^{-1}(x)$$

lo identificamos como el límite inductivo de los $\mathscr{F}(U)$ donde $x \in U$.

Para ver que dada una gavilla siempre podemos verla como un espacio topológico tomemos una pregavilla $\mathscr{F}$ sobre X. Para toda $x \in X$ las vecindades de x contenidas en X forman un conjunto dirigido, con la dirección de la contención, y las condiciones de transitividad que hemos pedido para la restricción $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ permiten definir el conjunto

$$\widetilde{\mathscr{F}_x} = \varinjlim \mathscr{F}(U)$$

Llamamos $\widetilde{\mathscr{F}}$ al conjunto suma de los conjuntos $\widetilde{\mathscr{F}_x}$ y p a la aplicación de $\widetilde{\mathscr{F}}$ en X que manda a $x \in X$ a $\widetilde{\mathscr{F}_x}$.

Sea U un abierto y x un punto de U, por la definición de límite inductivo, tenemos una aplicación

$$\mathscr{F}(U) \to \widetilde{\mathscr{F}_x}$$

que denotaremos $s \to \tilde{s}(x)$. A cada s en $\mathscr{F}(U)$ tenemos entonces, asociada una aplicación $\tilde{s} : U \to \widetilde{\mathscr{F}}$ a saber $x \to \tilde{s}(x)$, entonces $p(\tilde{s}(x)) = x$ para toda $x \in U$. Ahora tomemos un abierto $V \subset U$ y reemplacemos s por la restricción t en V; para $x \in V$, la aplicación $\mathscr{F}(U) \to \widetilde{\mathscr{F}_x}$ es la composición de las aplicaciones $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ y $\mathscr{F}(V) \to \widetilde{\mathscr{F}_x}$ entonces la aplicación $t : V \to \widetilde{\mathscr{F}}$ es la restricción sobre V de la aplicación $\tilde{s} : U \to \widetilde{\mathscr{F}}$.

Ahora, queremos proveer a $\widetilde{\mathscr{F}}$ de la topología menos fina que mantenga la continuidad de las aplicaciones $\tilde{s}$ $s \in \mathscr{F}(U)$ U abierto en X. Un conjunto G de $\widetilde{\mathscr{F}}$ es abierto si y sólo si para todo U y todo $s \in \mathscr{F}(U)$ si $x \in U$ tal que $\tilde{s}(x) \in G$ forma sobre X un conjunto abierto.

Por como la hemos construido p es continua, ya que para todo abierto $U \subset X$ y toda $s \in \mathscr{F}(U)$ el conjunto $\tilde{s}(U)$ es abierto en $\widetilde{\mathscr{F}}$ así que sólo falta verificar que si $s \in \mathscr{F}(U)$ y $t \in \mathscr{F}(V)$ las $x \in U \cap V$ cumplen que $\tilde{s}(x) = \tilde{t}(x)$ forman un abierto, pero ésto resulta de la definición de límite inductivo.

Ahora mostraremos que la pareja $(\widetilde{\mathscr{F}}, p)$ forman un espacio étalé sobre X. Llamemos $\mathscr{F}(U)$ al conjunto de secciones de $\widetilde{\mathscr{F}}$ aplicado a U, obtenemos así un homomorfismo de pregavillas considerando las aplicaciones canónicas

$$\mathscr{F}(U) \to \widetilde{\mathscr{F}}(U)$$

Ahora mostraremos que es biyectivo si y solamente si $\mathscr{F}$ es una gavilla.

Este homomorfismo es inyectivo si $\mathscr{F}$ cumple el axioma (3). Supongamos que s' y s'' en $\mathscr{F}(U)$ definen la misma sección de $\widetilde{\mathscr{F}}$, como $\tilde{s}'(x) = \tilde{s}''(x)$ implican la existencia de una vecindad de x en la cual las restricciones de s' y s'' son iguales entonces podemos escibir a U como la unión de abiertos U_i tales que las restricciones de s' y s'' sean iguales en cada U_i lo que prueba que cumplen la condición.

El homomorfismo es sobre si $\mathscr{F}$ cumple las condiciones (3) y (4). Consideremos una sección $f : U \to \widetilde{\mathscr{F}}$ como dos secciones que coiniden en un punto coinciden en una vecindad, podemos escribir U como unión de abiertos U_i y tomar puntos $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tales que $\tilde{s}_i' = f$ sobre U_i. Como $\tilde{s}_i = \tilde{s}_j$ en $U_i \cap U_j$ y como cumple la condición (3) las restricciones de s_i y s_j en $U_i \cap U_j$ son iguales, según (4) existe un $s \in \mathscr{F}(U)$ donde la restricción a cada U_i es s_i entonces $\tilde{s} = f$ sobre U lo que prueba que cumple la condición.

De aquí podemos concluir el siguiente teorema

Teorema 7 *Toda gavilla de grupos de base X es isomorfa a una única gavilla de secciones de un espacio étalé sobre X salvo isomorfismos.*

1.0.6. Sucesiones exactas de gavillas

Definición 16 *Sea $... \to \mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G} \xrightarrow{g} \mathscr{H} \to ...$ una sucesión de gavillas y morfismos sobre un espacio X. Decimos que la sucesión es exacta en $\mathscr{G}$ si y sólo si*

$$PIm(f) = Ker(g)$$

como subpregavillas de $\mathscr{G}$, y es una sucesión exacta de pregavillas *si y sólo si en cada gavilla es exacta.*

Si es una sucesión de gavillas, decimos que es exacta *en $\mathscr{G}$ si y sólo si*

$$SIm(f) = Ker(g)$$

como subgavillas de $\mathscr{G}$ y es una sucesión exacta de pregavillas *si y solo si en cada punto es exacta.*

Teorema 8 *(i) $\mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ es una sucesión exacta de pregavillas si y sólo si para todo abierto U de X, $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U) \to \mathscr{H}(U)$ es una sucesión exacta de grupos abelianos*

(ii) $\mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ es una sucesion exacta de gavillas si y sólo si para toda $x \in X$, $\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x$ es una sucesión exacta de grupos abelianos

(iii) Si $\mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G} \xrightarrow{g} \mathscr{H}$ es una sucesión de gavillas que es exacta como sucesión de pregavillas, entonces es exacta como sucesión de gavillas.

Demostración

(i) $\mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G} \xrightarrow{g} \mathscr{H}$ es exacta si y sólo si $Ker(g) = PIm(f)$ pero esto pasa si y sólo si para todo abierto U, $Kerg(U) = Ker(\mathscr{G}(U)) \to \mathscr{G}(U)/Im(f(U)) = Imf(U)$ y esto si y sólo si para todo abierto U, $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U) \to \mathscr{H}$ es exacta.

(ii) $\mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G} \xrightarrow{g} \mathscr{H}$ es exacta si y sólo si para toda $x \in X$ $(Ker(g))_x = (SImgf)_x$ ya que $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$ si y sólo si para toda $x \in X$ $\mathscr{F}_x = \mathscr{F}'_x$ pero

$$\begin{aligned} (SIm(f))_x &= (Ker(\mathscr{G} \to SCok(f)))_x \\ &= Ker(\mathscr{G}_x \to (SCok(f))_x) \\ &= Ker(\mathscr{G}_x \to \mathscr{G}_x/Imf_x) \\ &= Imf_x \end{aligned}$$

(iii) Tenemos que $Ker(g) = PIm(f)$ entonces para todo $x \in X$

$$\begin{aligned}(Ker(g))_x &= Ker(\mathscr{G}_x \to (PCok(f))_x) \\ &= Ker(\mathscr{G}_x \to (SCok(f))_x) \\ &= (SIm(f))_x\end{aligned}$$

En esta sección hemos visto la definición de gavilla y sus morfismos, es decir, un primer acercamiento que nos permitirá entender cómo se define la cohomología la cohomología de Čech con coeficientes en una gavilla.

1.1. Gavillas y cohomología

Ahora definiremos el primer grupo de cohomología de Čech con coeficientes en una gavilla, no nos extenderemos al concepto en general debido a que lo que buscamos es explicar la relación gavillas-cohomología-teorema de Mittag-Leffler en una manera sencilla y esta es toda la herramienta que necesitamos.

Para empezar tomamos un espacio topológico X y una cubierta abierta $U = \bigcup U_i$ $i \in I$ con I un conjunto de índices. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla de grupos abelianos sobre X.

1.1.1. Cocadenas de una cubierta

Definición 17 *Sea U una cubierta abierta de X. Definimos las* $\mathbf{0-}$**cocadenas** *como funciones que asignan a cada abierto U_{i_0} una sección f_{i_0} de $\mathscr{F}$ sobre U_{i_0} y las denotamos como $C^0(U, \mathscr{F})$.*

Si $s = (i_0, i_1)$ es un par de elementos de I definimos:

$$U_s = U_{i_0 i_1} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \neq \emptyset$$

Llamamos $\mathbf{1-}$**cocadena** *de U con valores sobre $\mathscr{F}$ a las funciones f que hacen corresponder cualesquiera par s de elementos de I con una sección $f_s = f_{i_0 i_1}$ de $\mathscr{F}$ sobre $U_{i_0 i_1}$, es decir, $f_s \in \Gamma(U_s, \mathscr{F})$. Las 1-cocadenas forman un grupo abeliano denotado como $C^1(U, \mathscr{F})$.*

Si tomamos ahora $s' = (i_0, i_1, i_2)$ una terna de elementos de I y definimos $U_{s'} = U_{i_0 i_1 i_2} := U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap U_{i_2}$ podemos definir similarmente las $\mathbf{2-}$**cocadenas** de U con valores sobre $\mathscr{F}$ como la función que hace corresponder cualesquiera tríada s' con una sección $f_{s'} = f_{i_0 i_1 i_2}$ de $\mathscr{F}$ sobre $U_{i_0 i_1 i_2}$. Las 2-cocadenas también forman un grupo abeliano y las denotamos como $C^2(U, \mathscr{F})$.

1.1.2. Grupos de cohomología

Teniendo estos objetos vamos ahora a relacionarlos mediante las siguientes funciones

Definición 18 *Los* **mapeos cofrontera** $\delta_0 : C^0(U,\mathscr{F}) \to C^1(U,\mathscr{F})$ *los definimos como sigue: Dada una 0-cocadena* $f \in C^0(U,\mathscr{F})$, $\delta_0 f \in C^1(U,\mathscr{F})$

$$\delta_0 f(U_{i_0,i_1}) = \rho f(U_{i_1}) - \rho f(U_{i_0})$$

donde los mapeos ρ *son las restricciones (en la gavilla* $\mathscr{F}$ *) de la sección* $f(U_{i_j})$ *de* $\mathscr{F}(U_{i_j})$ *al abierto "más chico"*$U_{i_0} \cap U_{i_1}$ *y así* $\rho f(U_{i_j}) \in \mathscr{F}(U_{i_0 i_1})$.

Análogamente si $f' \in C^1(U,\mathscr{F})$ *entonces* $\delta_1 : C^1(U,\mathscr{F}) \to C^2(U,\mathscr{F})$ *lo definimos como*

$$(\delta_1 f')(U_{i_0 i_1 i_2}) = \rho' f'(U_{i_1 i_2}) - \rho' f'(U_{i_0 i_2}) + \rho' f(U_{i_0 i_1})$$

donde $\rho' f'(U_{i_j i_k}) \in \mathscr{F}(U_{i_0 i_1 i_2})$

Notemos que $\delta_1 \circ \delta_0 : C^0 \to C^2 = 0$ ya que: $(\delta_1 \circ \delta_0 f)(U_{i_0}, U_{i_1}, U_{i_2}) = (\delta_1 f)(\rho f(U_{i_1}, U_{i_2}) - \rho f(U_{i_0}, U_{i_2}) + \rho f(U_{i_0}, U_{i_1})) = \rho f(U_{i_1}) - \rho f(U_{i_2}) - \rho f(U_{i_0}) + \rho f(U_{i_2}) + f\rho(U_{i_0}) - \rho f(U_{i_1}) = 0$

Definición 19 *El núcleo de* δ_1 *es llamado el grupo* $Z^1(U,\mathscr{F})$ *de* $\mathbf{1-}$ **cociclos** *y la imagen de* δ_0 *es llamado el grupo* $B^1(U,\mathscr{F})$ *de* $\mathbf{1-}$ **cofronteras**, *como* $\delta_1 \circ \delta_0 = 0$ *tenemos que* $B^1 \subset Z^1$ *entonces tiene sentido definir lo siguiente*

Definición 20 *Llamamos el* **primer grupo de cohomología** *de* U *con coeficientes en* $\mathscr{F}$ *al cociente*

$$H^1(U,\mathscr{F}) := Z^1(U,\mathscr{F})/B^1(U,\mathscr{F})).$$

Las clases de cohomología de $f \in Z^q(U,\mathscr{F}) \subset B^q(U,\mathscr{F})$ se denotan $[f]$
Pero ¿qué pasa si tomamos otra cubierta? Para eliminar la dependencia de la cubierta U tomamos el límite directo (Anexo 3.1) de $H^q(U,\mathscr{F})$ sobre todas las cubiertas abiertas. Tomemos $V = \cup V_j$ $j \in J$ con J un conjunto de índices, V un refinamiento de U con el mapeo $\tau : J \to I$ de forma que $V_j \subset U_{\tau(j)}$, para toda $i \in I$. τ induce un homomorfismo

$$\tau'_q : C^q(U,\mathscr{F}) \to C^q(V,\mathscr{F})\, q \in \{0,1,2\}$$

definido como sigue:

$$(\tau'_q f)(i_0 ... i_q) := \rho f(\tau(i_0) ... \tau(i_q))$$

para $f \in C^q(U,\mathscr{F})$. Como $\tau'_{q-1} \circ \delta_q = \delta_q \circ \tau'_q$, entonces τ'_q induce un homomorfismo

$$\rho_q^{UV} : H^q(U,\mathscr{F}) \to H^q(V,\mathscr{F})$$

que sólo depende de las cubiertas y no del mapeo de refinamiento τ. Dos clases de cohomología $[f],[g]$ se dice que son equivalentes si existe un refinamiento V común de

U y U' de forma que $\rho_q^{UV}([f]) = \rho_q^{UV}([g])$.
El límite directo

$$H^q(X, \mathscr{F}) = \varinjlim_{U} H^q(U, \mathscr{F})$$

es por definición el conjunto de todas las clases de equivalencia en la unión disjunta $\bigcup_U H^q(U, \mathscr{F})$ sobre todas las cubiertas abiertas U de X. $H^q(U, \mathscr{F})$ hereda la estructura de grupo abeliano de forma natural.

Definición 21 $H^q(X, \mathscr{F})$ *es llamado* **el q-ésimo grupo de cohomología de Čech de X con coeficientes en** $\mathscr{F}$

En el siguiente capítulo veremos cuál es el teorema de Mittag-Leffler y la solución a su obstrucción usando cohomología de Čech con coeficientes en una gavilla.

Capítulo 2

El Teorema de Mittag-Leffler

Magnus Gösta Mittag-Leffler nació el 16 de marzo de 1846 en Estocolmo, Suecia. En octubre de 1873 viajó a París para estudiar con Charles Hermite y permaneció allí hasta la primavera de 1875 cuando bajo su recomendación, viajó a Berlín para asistir a los cursos dictados por Karl Weierstrass. El contacto que tuvo con Weierstrass en el estudio de análisis complejo fue fundamental para las investigaciones que hizo en años posteriores. Entre 1876 y 1877 trabajó sobre el teorema de factorización de Weierstrass y demostró una versión menos general que la ahora conocida como el teorema de Mittag-Leffler, en la que se demuestra que dado un conjunto de polos, con multiplicidades y coeficientes de Laurent dados, siempre es posible encontrar una función que sea analítica excepto en esos polos con multiplicidades y coeficientes de Laurent, los dados, más una función entera.

Durante varios años, Mittag-Leffler, trabajó en distintas versiones del teorema demostrado por él en 1876. La primera versión se refería solo al caso en el que una función tiene a lo más una singularidad esencial en el punto al infinito.

2.0.3. Primera versión del teorema

Para empezar a abordar lo que hizo en la primera versión veamos unas definiciones:

Definición 22 *[Tu] Una función de una variable compleja x, tiene para un valor finito a el* **caracter de una función entera** *si puede ser expresada por una serie de potencias de la forma $(x-a)^n$, donde n es un número positivo*[1].

[1]Actualmente no hacemos distinción entre funciones enteras y funciones de caracter entero y usamos el término *entera* para funciones que son analíticas en todo el dominio. Sin embargo cuando Weierstrass y Mittag-Leffler trabajaron con estas definiciones, una función entera era estrictamente un polinomio mientras que una función de caracter entero contenía una infinidad de términos distintos de cero en su expansión en serie de potencias.

Definición 23 *[Tu] Una función de una variable independiente x tiene, para un valor finito a, el* **caracter de una función racional** *si puede ser expresada por una serie de potencias positivas de $(x-a)$. .*

Entonces una función es de caracter racional en un polo de orden finito o en un punto regular. Para Weierstrass y Mittag-Leffler, una función racional es el cociente de dos polinomios mientras una función de caracter racional es el cociente de dos series de Taylor, donde las series en el numerador pueden ser infinitas.

Definición 24 *Una función $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ es* **meromorfa** *en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$ si es holomorfa en U excepto tal vez en puntos aislados.*

Es decir, una función es meromorfa en U si existe un conjunto $A \subset U$ tal que: A no tiene puntos límite en $\mathbb{C}$, $f(x)$ es analítica en $\mathbb{C}\backslash A$ y $f(x)$ tiene un polo en cada punto de A. Por la primera condición, ningún subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ tiene una infinidad de puntos de A, es decir, A es a lo más numerable.

Para Weierstass, la convergencia uniforme tenía gran importancia. Pensaba que esta forma de convergencia debe distinguirse con énfasis de la convergencia ordinaria, ya que si una serie de funciones analíticas converge uniformemente, entonces su suma es analítica.

Una función analítica puede ser representada por una serie de Taylor que converge a esta función en una vecindad de un punto x_0 en el dominio. Weierstrass se refiere a esta representación en series como *elementos función* y los denotaba como $P(x|x_0)$. Dados dos valores x_0 y x_1, puede ser posible representar la función como un conjunto de series de Taylor, o elementos función, en una cadena de discos en los puntos de intersección. Estas varias representaciones son *continuaciones analíticas* una de la otra. En una región donde es posible conducir estas continuaciones analíticas sin obstáculos, la función se dice que es *monogenética*, dado que todos los elementos función representan la misma función y tienen los mismos valores.

Definición 25 *[Tu] Si una función f es inyectiva y si el hecho de que puede ser representada por una serie de potencias en una vecindad de x_0 en su dominio, implica que todos sus elementos $P(x|x')$ pueden derivarse de un sólo elemento, entonces $f(x)$ es* **monogenética**.

Sabemos por el teorema fundamental del álgebra que cualquier polinomio puede escribirse como producto de factores lineales, uno por cada cero. De aquí Weierstrass tomó la idea de la factorización e hizo la siguiente pregunta ¿es posible escribir una representación de otras funciones enteras como producto de factores, en una forma que revele sus ceros?

Mittag-Leffler, empezó con el teorema de factorización de Weierstass. Sin embargo, éste empezó con polinomios y generalizó, usando la idea de factorización, al caso de funciones enteras. Así Mittag-Leffler consideró el caso de funciones racionales e intentó generalizarlas a funciones meromorfas usando el concepto de la descomposición en fracciones parciales.

Mittag-Leffler presentó el artículo que contenía lo que más tarde sería conocido como su teorema, a la Real Academia Sueca de Ciencia, el 7 de enero de 1876. Éste tenía como título "Un método para representar analíticamente una función de caracter racional, que toma el valor infinito en ciertos puntos llamados infinitos, cuyas constantes han sido dadas de antemano."[2] Mittag-Leffler define primero, función de caracter racional, puntos infinitos y las constantes a las que se refiere y luego hace la siguiente pregunta: ¿Está una función de carácter racional completamente definida por sus singularidades y sus respectivas constantes, o podemos encontrar más de una funcion similar cuando las singularidades y las constantes han sido dadas? En otras parabras, ¿una función está únivocamente definida por sus puntos singulares y los coeficientes de su serie de Laurent?

Notó que si tales dos funciones pueden encontrarse, su diferencia debe ser necesariamente una función entera y entonces posee una expansión en serie de potencias que converge a la función para todo punto, procede estudiando esa cuestión.

No he podido recuperar el enunciado exacto de esa primer versión pero el teorema era más o menos el siguiente:

Teorema 9 (Primera versión del teorema) *Sean $\{a_n\}$ polos arbitrarios. Existe una función meromorfa $F(x)$ que tiene partes principales arbitrarias (en cada polo)*

$$G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)=\sum_{k=1}^{\nu(n)}\frac{C^n_{\nu(n)}}{(z-a_n)^k}$$

con polos arbitrarios de la sucesión de términos $\{a_n\}$.

El razonamiento que siguió es que si tal función meromorfa existe, entonces debe tener una sucesión de polos que tienda a infinito y la parte principal $G_n(z)$ de la serie de Laurent de esta función alrededor de una singularidad a_n debe ser un polinomio en $\frac{1}{z-a_n}$ sin término constante, así que la diferencia $F(z)-G_n(z)$ es regular en a_n. Para construir tal función (con polos y partes principales dadas) uno debe asegurar que la suma $\sum G_n(z)$ converge.

Tomemos una sucesión infinita:

$$a_1, a_2, a_3 \ldots, a_p, \ldots$$

[2]En metod att analystisk framställa en funktion af rational karakter, hvilken blir oändlig alltid och endast uti vissa föreskrifna oändlightespunkter, hvilkas konstanter äro påförhand angifna. *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar Stockholm, 1876* [Tu]

de diferentes puntos singulares que se aproximan a infinito y con las constantes en sus respectivas partes principales

$$\begin{array}{ccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1\lambda_1} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2\lambda_2} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3\lambda_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & c_{p3} & \dots & c_{p\lambda_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Mittag-Leffler observa que las singularidades en la sucesión $\{a_n\}$ deben estar ordenadas tomando como orden la distancia al origen. Esto es, si fijamos un valor arbitrario positivo r, los siguientes términos en la sucesión tendrán módulo mayor que r. Si varios términos tienen el mismo módulo entonces están en un círculo, por lo que los ordenamos siguiendo el círculo en cierta dirección.

Este orden jugará un papel importante en el argumento de Mittag-Leffler para la construcción de la función buscada.

Ahora, para construir una función que es analítica en cualquier lugar excepto en los puntos predichos es necesario que en la vecindad del polo a_p, la parte principal en este punto

$$\frac{c_{p1}}{(x-a_p)} + \frac{c_{p2}}{(x-a_p)^2} + \cdots + \frac{c_{p\lambda_p}}{(x-a_p)^{\lambda_p}},$$

sea absolutamente convergente en esa vecindad. Esto es cierto para cada $p = 1, 2, 3, \dots$ Mittag-Leffler nota que la forma más sencilla para crear una función f con polos $\{a_n\}$ es definirla como la suma de sus partes principales

$$f(x) = \sum \frac{c_{p1}}{(x-a_p)} + \frac{c_{p2}}{(x-a_p)^2} + \cdots + \frac{c_{p\lambda_p}}{(x-a_p)^{\lambda_p}},$$

que puede escribirse como

$$f(x) = \frac{c_{p1}}{(x-a_p)} + \frac{c_{p2}}{(x-a_p)^2} + \cdots + \frac{c_{p\lambda_p}}{(x-a_p)^{\lambda_p}} +$$
$$+\sum_{r\neq p}\left[c_{r1}\frac{1}{(a_p-a_r)(\frac{x-a_p}{a_p-a_r}+1)} + \cdots + c_{r\lambda_r}\frac{1}{(a_p-a_r)^{\lambda_r}(\frac{x-a_p}{a_p-a_r}+1)^{\lambda_r}}\right].$$

Sin embargo, en la mayoría de los casos no converge, pero lo hará si le pedimos que

$$\sum_p (c_{p1} + c_{p2} + \cdots + c_{p\lambda_p})$$

sea absolutamente convergente, un requerimiento que no satisface necesariamente una elección arbitraria de constantes c. Esto es consecuencia de la prueba de Abel[3] adap-

[3]Consideremos las series $a_o c_o + a_1 c_1 + \dots$ Si $\{c_n\}$ es una sucesión positiva decreciente y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum a_n c_n$ converge. Es decir, si multiplicamos una sucesión convergente por una sucesión de términos positivos y decrecientes, la serie resultante también será convergente. Notemos que para que sea dada la convergencia uniforme de la suma $\sum a_n c_n$, la sucesión $\sum a_n$ también debe converger uniformemente

tada para la convergencia unifome. Esto es, si $\sum_p c_{p1} + c_{p2} + ... + c_{p\lambda_p}$ converge uniformemente pues

$$\left\{ \frac{1}{(a_p - a_r)\left(\frac{x-a_p}{a_p-a_r} + 1\right)} + \frac{1}{(a_p - a_r)^2\left(\frac{x-a_p}{a_p-a_r} + 1\right)^2} + ... + \frac{1}{(a_p - a_r)^{\lambda_r}\left(\frac{x-a_p}{a_p-a_r} + 1\right)^{\lambda_r}} \right\}$$

forma una sucesión decreciente debido al orden que Mittag-Leffler asigna a la sucesión $\{a_n\}$. Esta convergencia uniforme garantiza que $f(x)$ es analítica debido al teorema de Weierstrass [Ahl], y entonces es la función buscada. Si la suma $\sum_p (c_{p1} + c_{p2} + ... + c_{p\lambda_p})$ no converge, se pueden construir funciones $g_{pk}(x)$ que reemplacen las constantes c. Entonces

$$\sum_p \left(g_{p1}(x) + g_{p2}(x) + ... + g_{p\lambda_p}(x)\right),$$

es uniformemente convergente y la suma de las partes principales

$$f(x) = \sum_p \left[\frac{g_{p1}(x)}{x - a_p} + \frac{g_{p2}(x)}{(x - a_p)^2} + ... + \frac{g_{p\lambda_p}(x)}{(x - a_p)^{\lambda_p}}\right],$$

más una función entera es la representación analítica general de la función buscada.

En resumen, el teorema dice que siempre se puede construir una función meromorfa $f(x)$ con partes principales $G_n(x)$ dadas de la serie de Laurent en una sucesión infinita de polos $\{a_n\}$ también dados y tales que la sucesión de polos tienda a infinito y esta función puede escribirse como

$$f(x) = \phi(z) + \sum_1^\infty (G_n(z) + P_n(z)),$$

donde $\phi(z)$ es una función entera y $\{P_n(z)\}$ son polinomios que garantizan la convergencia de la expansión.

Notemos que el punto al infinito es necesariamente una singularidad esencial pues es un punto de acumulación de los polos y por ésto es imposible encontrar una expansión de Laurent alrededor de este punto con lo que la función falla en ser analítica en cualquier vecindad allí.

Los siguientes años Mittag-Leffler escribió variaciones de su teorema, cada una más completo que la anterior: el primero trataba con una singularidad esencial en el infinito, luego trataba el caso de un número finito de singularidades esenciales, después con una singularidad esencial que ya no está en el infinito sino en un valor finito, finalmente trata de generalizar su teorema de forma que la función $f(x)$ posea una infinidad de singularidades esenciales.

2.0.4. Siguientes versiones del teorema

La siguiente publicación del teorema de Mittag-Leffler ocurrió en 1880, cuando Weiestrass mejoró la versión tanto en la notación como en la prueba, y a diferencia del caso anterior trata con funciones racionales.

El enunciado del teorema es como sigue:

Teorema 10 (Segunda versión del teorema) *Dada una sucesión infinita de numeros complejos distintos $a_1, a_2, a_3 \ldots$ que converje al infinito y una sucesión infinita de funciones enteras racionales o trascendentes*

$$\begin{aligned} G_1(\gamma) &= c_1^{(1)}\gamma + c_2^{(1)}\gamma + c_3^{(1)}\gamma + \ldots \\ G_2(\gamma) &= c_1^{(2)}\gamma + c_2^{(2)}\gamma + c_3^{(2)}\gamma + \ldots \\ &\vdots \\ G_\nu(\gamma) &= c_1^{(\nu)}\gamma + c_2^{(\nu)}\gamma + c_3^{(\nu)}\gamma + \ldots, \end{aligned}$$

que se anula cuando $\gamma = 0$, siempre es posible encontrar una función analítica $F(x)$ tal que:

1. *sus únicos puntos singulares sean los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ y*
2. *para cualquier valor fijo de ν, la diferencia*

   $$F(x) - G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right),$$

   es finita en $x = a_\nu$ tal que en la vecindad de $x = a_\nu$ $F(x)$ puede expresarse en la forma

   $$G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) + P(x - a_\nu).$$

El objetivo es que la sucesión $\{a_\nu\}$ represente las singularidades (una infinidad de polos y una singularidad esencial en el infinito) de la función $F(x)$, haciendo a la función $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ la parte principal de F en a_ν. La función $P(x - a_\nu)$ es entonces la serie de potencias en $(x - a_\nu)$; esto, combinado con la función G_ν, completa la serie de Laurent en el punto a_ν.

Para empezar, tomamos una sucesión arbitraria e infinita de números positivos $\{\epsilon_i\}$ que formen una suma finita. Esta serie será utilizada como la serie de comparación de lo que ahora llamamos la **prueba M de Weierstrass**. Ahora tomamos un $\epsilon < 1$, supondremos que $a_\nu \neq 0$ y como $G_v\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ es analítica excepto en $x = a_\nu$ puede expresarse en una serie de Taylor alrededor del origen de la forma

$$\sum_{\mu=m_\nu}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} x^\mu,$$

en un radio de convergencia $|x| < |a_\nu|$. Entonces es posible encontrar un número entero m_ν, lo suficientemente grande tal que

$$\left| \sum_{\mu=m_\nu}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} x^\mu \right| < \epsilon_\nu$$

para $|x| < \epsilon|a_\nu|$. Sabemos que es posible porque esta convergencia indica que la suma de la cola debe aproximarse a cero, entonces podemos hacerla tan pequeña como queramos. Este es el argumento propuesto por Mittag-Leffler aunque tuvo que modificarlo ligeramente pues le hicieron notar que la misma ϵ no funcionaba en todos los casos. Después de encontrar m_ν tenemos

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} A_\mu^{(\nu)} x^\mu,$$

ahora, haciendo $F_\nu(x)$ igual al final de cola de la serie de Taylor, que sabemos es una suma finita. Entonces

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x),$$

que converge uniformemente porque es menor que la suma de todas las ϵ_ν (un valor finito), nos da una función que tiene como polos la sucesión $\{a_\nu\}$. Es debido a la convergencia uniforme que las funciones F_ν son analíticas, entonces $F(x)$ también es analítica excepto en los puntos singulares especificados. El resultado es que en las vecindades donde tenemos la expansión de Taylor a_ν, $F(x)$ tiene una expansión como serie de Laurent que nos permite escribirla en la forma

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + P(x-a_\nu)$$

(la parte principal más una función entera expresada en su serie de Taylor). Obtener la representación de la función es en general más dificil que solamente probar su existencia.

Las siguientes versiones del teorema de Mittag-Leffler fueron mejoradas tanto en la notación como en sus pruebas debido al contacto que Mittag-Leffler tuvo con las ideas de Cantor como a la simplificación que Weierstrass hizo de las demostraciones.

Mittag-Leffler publicó la versión final de su teorema en 1884 en su recién fundada revista *Acta Mathematica* bajo el título *Sobre las representaciones analíticas de funciones uniformes monogenéticas de una variable independiente*[4]. [Tu]

En términos generales, el teorema asegura que una función meromorfa está definida por sus polos, las multiplicidades de éstos y los coeficientes de las partes principales de su expansión de Laurent.

[4] Sur la representaion analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante

2.0.5. Teorema general de Mittag-Leffler

Lema 2 *[GrK] Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Definimos*

$$A(z) = \sum_{j=-M}^{-1} a_j (z-\alpha)^j$$

para alguna $M \geqslant 1$. Fijamos un número $r > |\alpha - \beta|$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe una expansión de Laurent finita

$$B(z) = \sum_{j=-N}^{-K} b_j (z-\beta)^j,$$

para alguna $N \geqslant 1, K \geqslant -1$, tal que

$$|A(z) - B(z)| < \epsilon \text{ para toda } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus D(\beta, r).$$

Donde $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ y $D(\beta, r)$ es el disco de centro β y radio r.

Demostración
Notemos que

$$(z-\alpha)^{-1} = (z-\beta)^{-1} \frac{1}{1-(\alpha-\beta)(z-\beta)^{-1}} = (z-\beta)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} ((\alpha-\beta)(z-\beta)^{-1})^j.$$

que converge uniformemente en los subconjuntos compactos de $\{z : |z-\beta| > |\alpha - \beta|\}$ lo que nos genera una expansión de Laurent alrededor del punto β que converge uniformemente a A en cualquier conjunto de la forma $\hat{\mathbb{C}} \setminus D(\beta, r)$ para $r > |\alpha - \beta|$. Sólo basta tomar B como una suma parcial suficientemente grande de esta expansión.

Teorema 11 (Mittag-Leffler) *[GrK] Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Sean $\alpha_1, \alpha_2, ...$ un conjunto numerable finito o infinito de elementos distintos en U, sin puntos de acumulación en U. Sea s_j una sucesión de polinomios de Laurent o partes principales*

$$s_j(z) = \sum_{l=-p(j)}^{-1} a_{j,l} (z-\alpha_j)^l$$

Entonces existe una función meromorfa en U cuyas partes principales en cada α_j son las s_j y no tiene otros polos.

Demostración Si tenemos sólo un número finito de elementos α_j entonces la suma de estos nos da la función meromorfa buscada. Asumimos entonces que hay una infinidad de elementos α_j.

Simplifica la prueba si pensamos $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ y aplicamos una transformación lineal fraccional de la forma $z \to \frac{1}{(z-p)}$ para alguna $p \in U$ que no esté en el conjunto donde la función que estamos construyendo se anule, con lo que obtemenos que $\infty \in U$ y los puntos frontera de U están en una parte finita del plano.

Con esta transformación lineal fraccional obtenemos:

1) $U \subsetneqq \hat{\mathbb{C}}$

2) $\hat{\mathbb{C}} \backslash U$ es compacto

3) $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{\infty\} \subseteq U$

4) $\{\infty\} \cap \{a_j\} = \emptyset$

Por hipótesis los puntos de acumulación están en la frontera de U, entonces cualquier subconjunto compacto de U contiene sólo una cantidad finita de elementos α_j.

Por la propiedad (2) podemos construir para cada j, $\hat{\alpha_j} \in \hat{\mathbb{C}} \backslash U$ un punto, cuya distancia a α_j es la mínima de las distancias. Si $d_j = |\hat{\alpha_j} - \alpha_j|$ entonces $d_j \to 0$ cuando $j \to \infty$.

Para cada j aplicamos el lema anterior para encontrar un polinomio $t_j(z)$ en potencias negativas de $(z - \hat{\alpha_j})$ tal que

$$|s_j(z) - t_j(z)| < 2^{-j} \ \ para \ \ z \in \hat{\mathbb{C}} \backslash \bar{D}(\hat{\alpha_j}, 2d_j).$$

Afirmamos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} (s_j(z) - t_j(z))$$

es la función meromorfa buscada, lo que necesitamos verificar es la convergencia uniforme en los subconjuntos compactos de $U \backslash \{\alpha_j\}$.

Sabemos que $d_j \to 0$. Fijemos un disco cerrado $\bar{D}(a, r) \subseteq U \backslash a_j\}$ Escogemos J de forma que $j \geqslant J$ implica que

$$2d_j < dist(\bar{D}(a, r), \hat{\mathbb{C}} \backslash U).$$

Entonces $\bar{D}(a, r) \subseteq U \backslash \bar{D}(\hat{\alpha_j}, 2d_j)$ para $j \geqslant J$ y la condición (1) se mantiene para toda $z \in \bar{D}(a, r)$. Entonces

$$|s_j(z) - t_j(z)| < 2^{-j} \ \ para \ \ z \in \bar{D}(a, r).$$

La prueba M de Weierstrass nos da la convergencia uniforme de $\sum_{j=1}^{\infty} (s_j(z) - t_j(z))$ en $\bar{D}(a, r)$.

Como $\bar{D}(a, r) \subseteq U \backslash \{a_j\}$ es arbitrario, la convergencia uniforme mostrada está probada. Notemos que en la suma infinita $\sum (s_j - t_j)$ los términos s_j reflejan los polos y los términos s_j fuerzan la convergencia.

2.0.6. El teorema visto desde la cohomología

La generalización de los teoremas de Mittag-Leffler y Weierstrass sobre la existencia de funciones meromorfas con ceros y polos dados en el caso de varias variables complejas fue resuelta por Cousin mediante la fórmula integral de Cauchy. Usando esta última logró resolver el proceso de pegado que es el mayor obstáculo en varias variables complejas pero debido al uso de ésta misma fórmula integral el método de Cousin no pudo extenderse a dominios más generales por un tiempo considerable. Cartán los dividió en lo que ahora se conoce como el primero y el segundo problema de Cousin. El caso que nos interesa es también conocido como el problema aditivo de Cousin en una variable. En términos generales lo que se busca es saber cuándo ciertas funciones holomorfas definidas en pequeñas regiones se pueden "pegar" para formar una función meromorfa en el dominio buscado.

Proposición 4 *Sea $\{U_i\}$ $i \in I$ una colección indexada de conjuntos abiertos en $\mathbb{C}$ y $\{g_{ij}\}$ un conjunto de funciones holomorfas que satisfacen:*

(i) g_{ij} *son funciones holomorfas en* $U_i \cap U_j$ *para cada par* (i, j)

(ii) $g_{ij} = -g_{ji}$ *para cada par* (i, j)

(iii) $g_{ij} + g_{jk} + g_{ki} = 0$ *para cada* (i, j, k)

Entonces existe un conjunto $\{h_i\}$ de funciones tales que h_i es holomorfa en (U_i), para cada i y $g_{ij} = h_j - h_i$ para cada par (i, j)

Demostración Sea $\{\phi_p\}$ una colección de funciones infinitamente diferenciables que forman una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_i\}$. Entonces, para cada $p \in P$, P un conjunto de índices, existe una $k_p \in I$ de forma que ϕ_p tiene soporte compacto en U_{k_p}. En cualquier subconjunto compacto de $U = \cup_i U_i$ todas excepto un número finito de las ϕ_p se anulan identicamente y $\sum_p \phi_p = 1$. Ahora tomamos $g_{k_p i}$, como la hemos definido, esta es una función holomorfa en $U_{k_p} \cap U_i$ entonces $\phi_p g_{k_p i}$ será infinitamente diferenciable en U_i si la definimos como 0 en $U_i - (U_i \cap U_{k_p})$ Para cada i sea

$$f_i = \sum_p \phi_p g_{k_p i} \ \ en \ \ U_i$$

Entonces en $U_i \cap U_j$ usando las propiedades (ii) y (iii)

$$f_j - f_i = \sum_p \phi_p (g_{k_p j} - g_{k_p i}) = \sum_p \phi_p g_{ij} = g_{ij}$$

Notemos que $\partial f_i / \partial \overline{z} = \partial f_j / \partial \overline{z}$ en $U_i \cap U_j$ ya que $f_j - f_i = g_{ij}$ es holomorfa, entonces existe una función u infinitamente diferenciable en U tal que $u = \partial f_i / \partial \overline{z}$ en U_i para cada i. Si v se toma infinitamente diferenciable en U y de forma que $\partial v / \partial \overline{z} = u$ entonces $h_i = f_i - v$ es holomorfa en U_i y $h_j - h_i = g_{ij}$. El conjunto $\{h_i\}$ es la solución holomorfa buscada en la proposición anterior. [Ta]

Definición 26 *Un conjunto indexado de funciones holomorfas $\{g_{ij}\}$ que satisfacen las condiciones de la proposición anterior es llamada datos de Cousin para la cubierta $\{U_i\}$*

Podemos ver al teorema de Mittag-Leffler como una aplicación del resultado anterior, pero recordemos que aún seguimos trabajando sobre abiertos de $\mathbb{C}$ y aún así esta forma de entender el problema nos guiará a dominios un poco más generales.

Teorema 12 *Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, sea R un subconjunto discreto de U y para cada punto $w \in R$ definimos P_w como un polinomio en $(z-w)^{-1}$ sin término constante. Entonces existe una función meromorfa f definida en U que tiene un polo con parte principal P_w en cada w y no tiene otros polos.*

Demostración

Tomemos una cubierta abierta $\{U_i\}$ $i \in I$ de U con la propiedad de que cada U_i contenga a lo más un punto de R. Definimos una función meromorfa f_i en U_i para cada i de la siguiente forma:

$$f_i = \begin{cases} P_{w_i} \text{ si } U_i \text{ contiene un punto } w_i \in S \\ 0 \text{ si no es así} \end{cases}$$

Definimos ahora unos datos de Cousin para la cubierta $\{U_i\}$ tomando

$$g_{ij} = f_j - f_i \text{ en } U_i \cap U_j$$

notemos que g_{ij} es holomorfa en $U_i \cap U_j$. Así definidas se cumplen las propiedades de la proposición 4 y por esto mismo existe una colección $\{h_i\}$ con h_i holomorfa en U_i donde $h_i - h_j = g_{ij}$ en $U_i \cap U_j$. Entonces

$$f_i - h_i = f_j - h_j \text{ en } U_i \cap U_j$$

para cada par i, j. Así es como unimos estas funciones para definir una función f meromorfa en U. Esto porque sumar una función holomorfa a cada f_i no afecta sus polos ni partes principales, f tiene como polos exactamente los puntos de R y en cada polo w la parte principal de f es P_w.

Ahora unas definiciones que nos ayudarán a seguir el teorema de Mittag-Leffler en un contexto un poco más general.

Definición 27 *Una* variedad compleja *M es una variedad diferenciable que admite una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ y funciones coordenadas $\varphi_\alpha : U \to \mathbb{C}^n$ tales que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es holomorfa en $\varphi(U_\alpha \cup U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$ para todas α, β*

Una función en un conjunto abierto $U \subset M$ es holomorfo si para toda α, $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es holomorfa en $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$.

Definición 28 *Una colección $z = (z_1, ...z_n)$ de funciones en $U \subset M$ se llama* sistema de coordenadas holomorfas *si $\varphi_\alpha \circ z_{-1}$ y $z \circ \varphi_\alpha^{-1}$ son holomorfas en $z(U \cap U_\alpha)$ y $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ respectivamente para cada α;*

Definición 29 *Una* superficie de Riemann *es una variedad compleja de dimensión uno.*

Notemos que una función holomorfa entre dos subconjuntos del plano complejo preserva la orientación del plano. De hecho, debido a que las funciones holomorfas son conformes los ángulos locales se preservan bajo funciones holomorfas, en particular los ángulos rectos de aquí que las nociones de “en sentido de las manecillas del reloj” y “contrario a las manecillas del reloj” en círculos pequeños se conservan, es por esto que las funciones holomorfas preservan la orientación en cada punto de una superficie de Riemann.

En esencia una superficie de Riemann es una variedad compleja de dimensión uno simplemente conexa (no olvidemos, dimensión uno, compleja.) Así que a veces es más fácil pensarla como una 2-variedad.[5] Entonces trasladar el teorema de Mittag-Leffler a las superficies de Riemann nos obliga a replantear nuestras definiciones de función meromorfa, holomorfa y singularidad.

Sea X una superficie de Riemann, sea p un punto de X, y sea f una función de variable compleja definida en una vecindad W de p.

Definición 30 *Decimos que f es* holomorfa *en p si existe una carta $\phi : U \to V$ con $p \in U$ tal que la composición $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$. Decimos que es* holomorfa *en W si es holomorfa en cada punto de W.*

De manera análoga podemos definir función meromorfa.

Definición 31 *Sea f una función meromorfa en una vecindad de $p \in X$. Decimos que f tiene una* singularidad removible *en p si y sólo si existe una carta $\phi : U \to V$ con $p \in U$ tal que la composición $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad removible en $\phi(p)$.*

De manera análoga podemos definir polo y singularidad esencial.

Ahora podemos contestar la siguiente pregunta usando sólo el primer grupo de cohomología de Čech: ¿Cuándo puede aplicarse este resultado en una superficie de Riemann?

Teorema 13 (Mittag-Leffler para superficies de Riemann) *Sea S una superficie de Riemann. S no necesariamente compacta, p un punto de S con coordenadas locales z centrada en p. Una parte principal en p es un elemento de la forma $\sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}$ de una serie de Laurent. Si $\mathscr{O}_p$ es el anillo local de funciones holomorfas alrededor de p, y $\mathcal{M}_p$ el campo de funciones meromorfas alrededor de p, una parte principal es un elemento del grupo cociente $\mathcal{M}_p/\mathscr{O}_p$, entonces dado un conjunto discreto $\{P_j\}$ de puntos en S y una parte principal en p_n para cada n. Existe una función meromorfa en S, holomorfa fuera de $\{P_j\}$ tal que sus partes principales en cada p_n es la especificada si y sólo si $H^1(U, \mathcal{O}) = 0$*

[5] En esta parte supondré que el lector está familiarizado con la definición de cartas y atlas

Localmente el problema es trivial, entonces el problema es pasar de datos locales a datos globales.

Tomemos una cubierta $U = \{U_i\}$ de S formada por conjuntos abiertos tales que cada U_i contenga a lo más un punto p_n, y sea f_i una función meromorfa en U_i solución del problema en ese abierto de la forma que sigue, si U_i contiene un punto $p_i \in \{P_j\}$, entonces $f_i = \mathcal{P}_{p_i}$, un polinomio en $(z - p_i)^{-1}$ sin término constante, si no es así $f_i = 0$. Ahora, definimos

$$f_{ij} = f_i - f_j \in \mathscr{O}(U_i \cap U_j).$$

En $U_i \cap U_j \cap U_k$ tenemos que

$$f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = f_i - f_j + f_j - f_k + f_k - f_i = 0$$

Resolver el problema globalmente es equivalente a encontrar $\{g_i \in \mathscr{O}(U_i)\}$ tal que

$$f_{ij} = g_j - g_i \in U_i \cap U_j$$

si tal g_i existiese , $f = f_i + g_i$ es una función globalmente definida que satisface las condiciones y viceversa. En la teoría de $\hat{C}ech$,

$$\{\{f_{ij}\} : f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0\} = Z^1(U, \mathscr{O})$$

$$\{\{f_{ij}\} : f_{ij} = g_j - g_i \quad \text{para alguna } \ \{g_i\}\} = \delta C^0(U, \mathscr{O})$$

y el primer grupo de Cohomología

$$H^1(U, \mathscr{O}) = \frac{Z^1(U, \mathscr{O})}{B^1(U, \mathscr{O})}$$

es la obstrucción a resolver el problema en general ya que $H^1(U, \mathscr{O}) = 0$ implica que las funciones g_i existen.

Un gran camino fue recorrido desde la formulación de Mittag-Leffler sobre este problema hasta llegar a la generalización propuesta por Cousin y trabajada por varios matemáticos, como Serre, Cartan y Oka. Lo que me interesó de este tema residió en ver cómo un problema específico fue evolucionando de forma que se crearon nuevas herramientas para solucionarlo y a la vez éstas mismas abrieron camino a otros conceptos, en este caso las gavillas de funciones holomorfas, luego regresar al problema original de forma que lo simplifican con una gran elegancia.

Capítulo 3

Anexo

3.1. Límite directo

Definición 32 *Un* conjunto dirigido $\mathscr{A}$ *es un conjunto con un preorden (transitivo y reflexivo)* $\leq$ *que satisface que para todos* a, b *en* $\mathscr{A}$ *existe* c *en* $\mathscr{A}$ *tales que* $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, es decir dados dos elementos en el conjunto no siempre es posible compararlos pero siempre pueden compararse con un tercero.*

Definición 33 *Un* sistema directo *de conjutos indexados por un conjunto dirigido* $\mathscr{A}$ *es una familia* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ *y para cada* $a \leq b$, $(a,b) \in \mathscr{A}$*, un mapeo de conjuntos* $r_{ab} : U_a \to U_b$ *que satisface:*

i) *Para toda* $a \in \mathscr{A}$ $r_{ab} = Id_{U_a}$

ii) *Para todas* $a, b, c \in \mathscr{A}$ *si* $a \leq b \leq c$*, entonces el siguiente diagrama conmuta, es decir* $r_{ac} = r_{bc} \circ r_{ab}$

$$\begin{tikzcd} U_a \arrow[rr, "r_{ac}"] \arrow[dr, "r_{ab}"'] & & U_c \\ & U_b \arrow[ur, "r_{bc}"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 34 *Dado un conjunto dirigido, un* blanco *para el sistema es un conjunto* V *y una colección de mapeos* $\varphi_a : U_a \to V$, $a \in \mathscr{A}$ *que satisface que el siguiente diagrama para todos* $a \leq b$, $(a,b) \in \mathscr{A}$ *conmuta, es decir* $\varphi_a = \varphi_b \circ r_{ab}$

$$\begin{tikzcd} U_a \arrow[rr, "\varphi_a"] \arrow[dr, "r_{ab}"'] & & V \\ & U_b \arrow[ur, "\varphi_b"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 35 *Un* límite directo *para un sistema es un blanco U con mapeos φ_a : $U_a \to U$ con $a \in \mathscr{A}$ que satisface la propiedad universal, es decir, para cualquier blanco V existe un único mapeo $f : U \to V$ tal que para toda $a \in \mathscr{A}$ el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
U_a \arrow[rr, "\theta_a"] \arrow[dr, "\varphi_a"'] & & V \\
& U \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Podemos decir que un límite directo es el mejor blanco. Denotamos el límite directo como $\varinjlim_{a\in\mathscr{A}} U_a$

Teorema 14 *Cualesquiera dos límites directos para un sistema directo son naturalmente isomorfos, es decir, existe una biyección entre ellos compatible con todas las φ_a*

Demostración Sean $(U, (\varphi_a)_{a\in\mathscr{A}})$ y $(V, (\varphi'_a)_{a\in\mathscr{A}})$. Como U cumple la propiedad universal por definición de límite directo y V es un blanco, podemos construir una función f : $U \to V$, pero V también cumple la propiedad universal, entonces podemos construir una función $g : V \to U$ entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& U \\
U_a \arrow[ur, "\varphi_a"] \arrow[r, "\varphi'_a"] \arrow[dr, "\varphi_a"'] & V \arrow[u, "g"'] \\
& U \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Pero U es un blanco y la propiedad universal que cumple U implica que $Id_U : U \to U$ es el único mapeo que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& U \\
U_a \arrow[ur, "\varphi_a"] \arrow[dr, "\varphi_a"'] & \\
& U \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

conmute. Entonces $g \circ f = Id_U$ y $f \circ g = Id_U$

Teorema 15 *Supongamos que U es un blanco $(\varphi_a : U_a \to U)$ para el sistema $\{U_a\}_{a\in\mathscr{A}}(\psi_{ab})_{(ab)\in\mathscr{A}}$ tal que*

i) Para toda $u \in U$ existe $a \in \mathscr{A}$ tal que $u \in Im(\varphi_a)$

ii) Si $a, b \in \mathscr{A}$ *y* $u_a \in U_a$ *y* $u_b \in U_b$ *entonces* $\varphi_a(u_a) = \varphi_b(u_b)$ *si y sólo si existe* $c \in \mathscr{A}$ *tal que* $a \leq c, b \leq c$ *y* $\psi_{ac}(u_a) = \psi_{bc}(u_b)$

Entonces U *es un límite directo del sistema.*

Demostración Supongamos que V, $(\theta_a)_{a \in \mathscr{A}}$ es otro blanco. Si $f : U \to V$ satisface la condición de compatibilidad, es decir, para V existe un único mapeo $f : U \to V$ tal que para toda $a \in \mathscr{A}$ $\theta_a(U_a) = f \circ \varphi_a(U_a)$, entonces debe obtenerse como sigue, para $u \in U$ escogemos un $a \in \mathscr{A}$ tal que $u \in Im(\varphi_a)$, sea $u = \varphi_a(u_a)$, entonces $f(u) = \theta_a(u_a)$ si f existe debe ser única. Si escogemos $b \in \mathscr{A}$ tal que $u \in Im(\varphi_b)$, tomemos $u = \varphi_b(u_b)$, entonces por la condición $ii)$ tenemos que existe $c \in \mathscr{A}$ tal que $\psi_{ac}(u_a) = \psi_{bc}(u_b)$, entonces

$$\theta_a(u_a) = \theta_c(\psi_{ac}(u_a)) = \theta_c(\psi_{bc}(u_b)) = \theta_b(u_b).$$

Entonces f está bien definida y U satisface la propiedad universal por lo que es un límite directo del sistema.

Construcción del límite directo Dado un sistema directo de conjuntos $(U_a)_{a \in \mathscr{A}}$, $(\psi_{ab})_{(a,b) \in \mathscr{A}}$ construimos el límite directo de la siguiente forma. Sea $W = \coprod_{a \in \mathscr{A}} U_a$ la unión disjunta de los conjuntos U_a.

Definimos la relación de equivalencia $\sim$ en W como $u \sim v$ si y sólo si para $u \in U_a$ y $v \in U_b$ existe c tal que $a \leq c$, $b \leq c$ cumple que $\psi_{ac}(u) = \psi_{bc}(v)$ lo cual se refleja en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
U_a \arrow[dr] & \\
& U_c \\
U_b \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que realmente es una relación de equivalencia.

1. *Reflexiva*, tomemos $a = c$ entonces $a \leq a$ y $\psi_{aa}(u) = u$

2. *Simétrica*, basta usar los mismos morfismos.

3. *Transitiva*, Si $u \sim v$ y $v \sim w$ entonces basta escoger m tal que $d \leq m$, $e \leq m$ Entonces como $u \sim v$ $\psi_{ad}(u) = \psi_{bd}(v)$, y que $v \sim w$ implica que $\psi_{be}(v) = \psi_{ce}(w)$ y por cómo escogimos m tenemos que $\psi_{adm}(u) = \psi_{bdm}(v) = \psi_{bem}(v) = \psi_{cem}(w)$ lo cual se ilustra con el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
u_{\in} U_a \arrow[dr] & & \\
& U_d \arrow[dr] & \\
v \in U_b \arrow[ur] \arrow[dr] & & U_m \\
& U_e \arrow[ur] & \\
w \in U_c \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Sea $U = W/\sim$ y $\varphi_a : U_a \to U$ los mapeos composición $U_a \hookrightarrow W \to W/\sim$, entonces U con estos mapeos es un límite directo para el sistema $\{U_a\}a \in \mathscr{A}$ ya que satisface las propiedades $i)$ *y* $ii)$ del teorema anterior por construcción.

3.2. Series de Laurent

Series de Potencias

Una *serie de potencias* centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ es una serie del tipo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_k \in \mathbb{C} \quad (k = 0, 1, 2 \dots)$$

Si $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, entonces los discos abiertos y cerrados con centro en z y radio r están definidos como:

$$D(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\} \ , \ \overline{D}(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$$

Teorema 16 *Supongamos que $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos y definimos $R \in [0, \infty]$ como*

$$R = sup \, \{r \geq 0 : la \ sucesión \ \{c_n r^n\} \ está \ acotada\}.$$

Entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto compacto del disco $D(z_0, R)$ y diverge en cada punto z con $|z - z_0| > R$

Demostración. La segunda parte de la conclusión es clara debido a que si $|z - z_0| > R$ los términos de la serie no están acotados por lo que la serie diverge. Mostraremos que la serie converge absoluta y uniformemente en el disco cerrado. Esto es suficiente ya que cualquier subconjunto compacto del disco abierto está contenido en el disco cerrado para alguna $r < R$.

Escogemos un ρ tal que $r < \rho < R$. La definición de R muestra que $\{c_n \rho^n\}$ está acotado, sea A tal que $|c_n|\rho^n \leq A$ para toda n. Entonces para $z \in \overline{D}(z_0, r)$ tenemos que $|c_n(z-z_0)^n| \leq |c_n|\rho^n(r/\rho)^n \leq A(r/\rho)^n$, como $\sum(r/\rho)^n < \infty$ tenemos que la serie converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(z_0, r)$ por el criterio M de Weierstrass.

El número R del teorema anterior es llamado *radio de convergencia*. Si $R > 0$ la suma de la serie es una función analítica en el *disco de convergencia* $D(z_0, R)$ cuya derivada se obtiene derivando término a término la serie dada.

Una serie de la forma
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z-z_0)^k}$$
es una serie de potencias en la variable $w = (z-z_0)^{-1}$. Entonces existe $0 \leq R \leq \infty$ tal que la serie converge a una función analítica si $|z-z_0| > R$ y diverge si $|z-z_0| < R$ siendo la convergencia de la serie absoluta y uniforme en el complemento del disco $D(z_0, r)$ con $r > R$. Tomemos
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k.$$

La primera serie convergerá absolutamente en un disco $D(z_0, R_2)$ y la segunda para $|z-z_0| > R_1$. Entonces f está definida y será analítica en el anillo $C(z_0, R_1, R_2) = \{z : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$ si $0 < R_1 < R_2 < \infty$ y la convergencia de las series es absoluta y convergente en cualquier subconjunto cerrado contenido en el anillo por lo visto anteriormente. Una serie como la anterior es llamada *serie de Laurent* con centro en z_0.

Bibliografía

[Ah] Ahlfors, L.V. *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable,* McGraw Hill, New York, 1979.

[Fac] Serre, J.P. *Faisceaux algébriques cohérents*, Annals of Mathematics 61 (1955), no. 2, 197-278.

[Go] Godement, R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux,* Hermann, Paris, 1958.

[GrH] Griffiths, P. & Harris, J. *Principles of Algebraic Geometry,* John Wiley & Sons, New York, 1978.

[GrK] Greene, R.E. & Krantz, S.G. *Function Theory of One Complex Variable,* American Mathematical Society, Providence, 2002.

[Ha] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry,* Springer-Verlag, New York, 1977.

[KaS] Kashiwara, M. & Schapira, P. *Sheaves on manifolds with a short history [Les débuts de la théorie des faisceaux] by Christian Houzel,* Springer-Verlag, New York, 1990.

[Ma] Mallios, A. *Geometry of Vector Sheaves, An Axiomatic Approach to differential geometry,* Kluwer Academic Publishers ,Netherlands, 1998.

[Mi] Miranda, R. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces,* American Matematical Society, Providence, 1997.

[Rg] Range, M.R. *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables,* Springer-Verlag, New York, 1986.

[Ta] Taylor, J.L. *Several Complex Variables with Connections to Algebraic Geometry and Lie groups,* American Mathematical society, Providence,2002

[Te] Tennison, B.R. *Sheaf theory,* Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[Tu] Turner,L.E. *The Mittag-Leffler theorem: The origin, evolution, and reception of a mathematical result, 1876-1884,* Simon Fraser University, 2007.

[Ull] Ullrich, D.C. *Complex Made Simple,* American Mathematical society, Providence, 2008.

[Za] Zaldivar, F. *Funciones Algebraicas de una Variable Compleja,* Universidad Autónoma Metropolitana unidad Iztapalapa, Ciudad de México, 1995.